Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2022**

Analysis I

Arbeitsblatt

Übungsaufgaben

Aufgabe 4.1. Ihre Fußballmannschaft hat das vorletzte Spiel mit $5:1$ und das letzte Spiel mit $10:5$ gewonnen. Welchen Sieg finden Sie überzeugender?

Aufgabe 4.2. Man gebe fünf rationale Zahlen an, die (echt) zwischen $\frac{3}{8}$ und $\frac{7}{8}$ liegen.

Aufgabe 4.3. Zeige, dass $\mathbb{Q}$ mit der durch $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$ (bei $b, d \in \mathbb{N}_+$), falls $ad \geq cb$ in $\mathbb{Z}$ gilt, definierten Beziehung ein angeordneter Körper ist (dabei dürfen nur Eigenschaften der Ordnung auf $\mathbb{Z}$ verwendet werden).

Aufgabe 4.4.*

Bestimme, welche der beiden rationalen Zahlen p und q größer ist.

$$p = \frac{573}{-1234} \text{ und } q = \frac{-2007}{4322}\,.$$

Aufgabe 4.5.*

Eine Bahncard 25, mit der man ein Jahr lang 25 Prozent des Normalpreises einspart, kostet 62 Euro und eine Bahncard 50, mit der man ein Jahr lang 50 Prozent des Normalpreises einspart, kostet 255 Euro. Für welchen Jahresgesamtnormalpreis ist keine Bahncard, die Bahncard 25 oder die Bahncard 50 die günstigste Option?

Aufgabe 4.6.*

Zwei Fahrradfahrer, A und B, fahren auf ihren Fahrrädern eine Straße entlang. Fahrer A macht pro Minute 40 Pedalumdrehungen, hat eine Übersetzung von Pedal zu Hinterrad von 1 zu 6 und Reifen mit einem Radius von 39 Zentimetern. Fahrer B braucht für eine Pedaldrehung 2 Sekunden, hat eine Übersetzung von 1 zu 7 und Reifen mit einem Radius von 45 Zentimetern.

Wer fährt schneller?

Aufgabe 4.7. Es sei K ein angeordneter Körper und $x \in K$. Zeige, dass $x > 0$ genau dann gilt, wenn $-x < 0$ ist.

(Bemerkung: Diese Aussage kann man so verstehen, dass das Negative eines positiven Elementes negativ ist. Allerdings tritt dabei negativ in zwei verschiedenen Bedeutungen auf!)

Aufgabe 4.8. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass für jedes $x \in K$ die Beziehung $x^2 = xx \geq 0$ gilt.

Aufgabe 4.9. Zeige, dass in einem angeordneten Körper die folgenden Eigenschaften gelten.

(1) $1 \geq 0$.
(2) Es ist $a \geq 0$ genau dann, wenn $-a \leq 0$ ist.
(3) Es ist $a \geq b$ genau dann, wenn $a - b \geq 0$ ist.
(4) Es ist $a \geq b$ genau dann, wenn $-a \leq -b$ ist.
(5) Aus $a \geq b$ und $c \geq d$ folgt $a + c \geq b + d$.
(6) Aus $a \geq b$ und $c \geq 0$ folgt $ac \geq bc$.
(7) Aus $a \geq b$ und $c \leq 0$ folgt $ac \leq bc$.
(8) Aus $a \geq b \geq 0$ und $c \geq d \geq 0$ folgt $ac \geq bd$.
(9) Aus $a \geq 0$ und $b \leq 0$ folgt $ab \leq 0$.
(10) Aus $a \leq 0$ und $b \leq 0$ folgt $ab \geq 0$.

Aufgabe 4.10. Es sei K ein angeordneter Körper und $x > y$. Zeige, dass dann $-x < -y$ ist.

Aufgabe 4.11.*

Es sei K ein angeordneter Körper und $x > 0$. Zeige, dass auch das inverse Element x^{-1} positiv ist.

Man folgere daraus, dass die positiven Elemente in einem angeordneten Körper bezüglich der Multiplikation eine Gruppe bilden.

Aufgabe 4.12. Es sei K ein angeordneter Körper und $x \geq 1$. Zeige, dass für das inverse Element $x^{-1} \leq 1$ gilt.

Aufgabe 4.13. Es sei K ein angeordneter Körper und $x > y > 0$. Zeige, dass für die inversen Elemente $x^{-1} < y^{-1}$ gilt.

AUFGABE 4.14.*

Es sei K ein angeordneter Körper und $x, y \geq 0$. Zeige, dass $x \geq y$ genau dann gilt, wenn $x^2 \geq y^2$ gilt.

AUFGABE 4.15. Es sei K ein angeordneter Körper und seien x, y positive Elemente. Zeige, dass $x \geq y$ zu $\frac{x}{y} \geq 1$ äquivalent ist.

AUFGABE 4.16.*

Es sei K ein angeordneter Körper und seien $a > b > 0$ Elemente aus K. Zeige

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{2}{a}.$$

AUFGABE 4.17.*

Es sei K ein angeordneter Körper und $b \in K$, $b > 1$. Zeige, dass es dann Elemente $c, d > 1$ mit $b = cd$ gibt.

AUFGABE 4.18.*

Auf dem kürzlich entdeckten Planeten Trigeno lebt eine rechenbegabte Spezies. Sie verwenden wie wir die rationalen Zahlen mit „unserer“ Addition und Multiplikation. Sie verwenden ferner eine Art „Ordnung“ auf den rationalen Zahlen, die sie mit $\succeq$ bezeichnen. Diese trigenometrische Ordnung stimmt mit unserer Ordnung überein, wenn beide Zahlen $\neq 0$ sind. Dagegen gilt bei ihnen

$$0 \succeq x$$

für jede rationale Zahl x. Die renommierte Ethnomathematikerin Dr. Eisenbeis vermutet, dass dies damit in Zusammenhang steht, dass sie die 0 als heilig verehren.

Zeige, dass $\succeq$ die folgenden Eigenschaften erfüllt.

(1) Für je zwei Elemente $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt entweder $a \succ b$ oder $a = b$ oder $b \succ a$.
(2) Aus $a \succeq b$ und $b \succeq c$ folgt $a \succeq c$ (für beliebige $a, b, c \in \mathbb{Q}$).
(3) Aus $a \succeq 0$ und $b \succeq 0$ folgt $a + b \succeq 0$.
(4) Aus $a \succeq 0$ und $b \succeq 0$ folgt $ab \succeq 0$.

Welche Eigenschaft eines angeordneten Körpers erfüllt $(\mathbb{Q}, \succeq)$ nicht?

AUFGABE 4.19. Zeige, dass der in Aufgabe 3.28 konstruierte Körper K nicht angeordnet werden kann.

AUFGABE 4.20. Zeige, dass mit der einzigen Ausnahme $n = 3$ die Beziehung

$$2^n \geq n^2$$

gilt.

AUFGABE 4.21.*

Beweise durch Induktion, dass für

$$n \geq 10$$

die Abschätzung

$$3^n \geq n^4$$

gilt.

AUFGABE 4.22. Zeige, dass für $n \geq 4$ die Beziehung

$$2^n \leq n!$$

gilt.

AUFGABE 4.23. Zeige die Abschätzung

$$\binom{d+n}{n} \geq \left(\frac{d}{n}\right)^n.$$

AUFGABE 4.24. Zeige die Abschätzung

$$2n^n \leq (n+1)^n$$

für $n \in \mathbb{N}_+$.

AUFGABE 4.25. Zeige die Abschätzung

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

für $n \in \mathbb{N}_+$.

AUFGABE 4.26. Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $x < y$ Elemente in K. Zeige, dass für das arithmetische Mittel $\frac{x+y}{2}$ die Beziehung

$$x < \frac{x+y}{2} < y$$

gilt.

Aufgabe 4.27.*

Es sei K ein angeordneter Körper, es sei $a \leq b$ und seien Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$ und nichtnegative Zahlen $t_1, t_2, \ldots, t_n \in K_{\geq 0}$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$$

gegeben. Zeige

$$\sum_{i=1}^{n} t_i x_i \in [a,b]$$

Aufgabe 4.28. Bestimme die Intervalle in einem angeordneten Körper K, die die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen sind.

a)

$$|4x-3| < |2x-3|\,.$$

b)

$$\left| \frac{x-2}{3x-1} \right| \leq 1.$$

Aufgabe 4.29. Es sei K ein angeordneter Körper. Es sei vorausgesetzt, dass in K die (positiven) Elemente $8^{1/2}$ und $25^{1/3}$ existieren. Welches ist größer?

Aufgabe 4.30. Es sei K ein angeordneter Körper. Man untersuche die Verknüpfung

$$K \times K \longrightarrow K,\ (x,y) \longmapsto \min(x,y),$$

auf Assoziativität, Kommutativität, die Existenz von einem neutralen Element und die Existenz von inversen Elementen.

Aufgabe 4.31. Beweise die folgenden Eigenschaften für die Betragsfunktion

$$K \longrightarrow K,\ x \longmapsto |x|\,,$$

in einem angeordneten Körper (dabei seien x, y beliebige Elemente in K).

(1) Es ist $|x| \geq 0$.
(2) Es ist $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist.
(3) Es ist $|x| = |y|$ genau dann, wenn $x = y$ oder $x = -y$ ist.
(4) Es ist $|y-x| = |x-y|$.
(5) Es ist $|xy| = |x|\,|y|$.
(6) Für $x \neq 0$ ist $|x^{-1}| = |x|^{-1}$.
(7) Es ist $|x+y| \leq |x| + |y|$ (*Dreiecksungleichung für den Betrag*).
(8) Es ist $|x+y| \geq |x| - |y|$.

AUFGABE 4.32. Unter welchen Bedingungen gilt für reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die Gleichheit

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |a_i| ?$$

AUFGABE 4.33.*

Im Wald lebt ein Riese, der 8 Meter und 37 cm groß ist, sowie eine Kolonie von Zwergen, die eine Schulterhöhe von 3 cm haben und mit dem Kopf insgesamt 4 cm groß sind. Hals und Kopf des Riesen sind $1,23$ Meter hoch. Auf der Schulter des Riesen steht ein Zwerg. Wie viele Zwerge müssen aufeinander (auf den Schultern) stehen, damit der oberste Zwerg mit dem Zwerg auf dem Riesen zumindest gleichauf ist?

AUFGABE 4.34. Ein kleines Sandkorn hat ein Gewicht von $\frac{13}{2757}$ Gramm. Wie viele Sandkörner muss man nehmen, um eine Sanddüne aufzubauen, die 5906 und eine halbe Tonne wiegt?

AUFGABE 4.35. Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Zeige, dass die halboffenen Intervalle

$$[n, n+1[= \{x \in K \mid x \geq n \text{ und } x < n+1\},\ n \in \mathbb{Z}\,,$$

eine disjunkte Überdeckung von K bilden.

Es sei K ein angeordneter Körper und $b \in K_+$ ein positives Element. Dann nennt man die Abbildung

$$\mathbb{Z} \longrightarrow K,\ n \longmapsto b^n,$$

die (ganzzahlige) *Exponentialfunktion* zur Basis b.

Der Definitionsbereich der Exponentialfunktion wird später wesentlich erweitert, siehe insbesondere Lemma 14.8 und Lemma 14.11. Eine wesentliche Verschärfung von Lemma 4.17 ist die Aussage, dass sich eine jede Exponentialfunktion im Wachstumsverhalten gegen jede Potenzfunktion durchsetzt. D.h. dass zu jedem $b > 1$ in einem archimedisch angeordneten Körper und jedem $k \in \mathbb{N}$ für n hinreichend groß die Abschätzung $b^n \geq n^k$ gilt.

AUFGABE 4.36.*

Beweise den Satz über die Wachstumsdominanz der (ganzzahligen) Exponentialfunktion gegenüber Potenzfunktionen.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 4.37. (2 Punkte)

Es sei K ein Körper, bei dem eine Teilmenge $P \subseteq K$ ausgezeichnet sei, die den folgenden Bedingungen genügt.

(1) Für $x \in K$ ist entweder $x \in P$ oder $-x \in P$ oder $x = 0$.
(2) Aus $x, y \in P$ folgt $x + y \in P$.
(3) Aus $x, y \in P$ folgt $x \cdot y \in P$.

Zeige, dass durch die Festlegung

$$x \geq y \text{ genau dann, wenn } x = y \text{ oder } x - y \in P$$

ein angeordneter Körper entsteht.

Aufgabe 4.38. (4 (1+3) Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper. Betrachte die in Aufgabe 3.6 konstruierte Zuordnung $\mathbb{Z} \rightarrow K$.

a) Zeige, dass diese Zuordnung injektiv ist.

b) Zeige, dass man diese Zuordnung zu einer Zuordnung $\mathbb{Q} \subseteq K$ fortsetzen kann, und zwar derart, dass die Verknüpfungen in $\mathbb{Q}$ mit den Verknüpfungen in K übereinstimmen und die Ordnung auf $\mathbb{Q}$ mit der Ordnung auf K übereinstimmt.

Aufgabe 4.39. (8 (2+4+1+1) Punkte)

Betrachte die Menge

$$K = \left\{ p + q\sqrt{5} \mid p, q \in \mathbb{Q} \right\},$$

wobei $\sqrt{5}$ zunächst lediglich ein Symbol ist.

a) Definiere eine Addition und eine Multiplikation auf dieser Menge derart, dass $\sqrt{5}^2 = 5$ ist und dass K zu einem Körper wird.

b) Definiere eine Ordnung derart, dass K zu einem angeordneten Körper wird und dass $\sqrt{5}$ positiv wird.

c) Fasse die Elemente von K als Punkte im $\mathbb{Q}^2$ auf. Skizziere eine Trennlinie im $\mathbb{Q}^2$, die die positiven von den negativen Elementen in K trennt.

d) Ist das Element $23 - 11\sqrt{5}$ positiv oder negativ?

Aufgabe 4.40. (3 Punkte)

Bestimme die kleinste reelle Zahl, für die die Bernoullische Ungleichung zum Exponenten $n = 3$ gilt.

Aufgabe 4.41. (3 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und seien $x_1, \ldots, x_n \in K$ Elemente. Zeige, dass dann

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

gilt.

Abbildungsverzeichnis