Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2020**

Diskrete Mathematik

Arbeitsblatt 10

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 10.1. Ist das Reimen von Wörtern eine Äquivalenzrelation?

Übungsaufgaben

Aufgabe 10.2. Es sei M die Menge der Leute im Kurs. Bestimme für die folgenden, durch eine Eigenschaft festgelegten Äquivalenzrelationen auf M, wer zu wem äquivalent ist.

(1) Hat im gleichen Monat Geburtstag.
(2) Hat das gleiche Zweitfach (neben Mathematik).
(3) Wohnt in der gleichen Stadt.

Aufgabe 10.3. Wir betrachten die folgende Menge, deren Elemente gewisse Zahlenmengen sind.

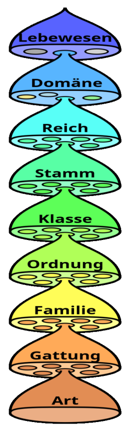
$$M = \{\{2,5,7\}, \{2,3,4\}, \{2,5,7,8\}, \{2,7\}, \{4,10,14\}, \{3\}, \{8,9\}, \{12,15,23\}\}.$$

Zeige, dass für Elemente $S,T \in M$ durch $S \sim T$, falls S und T die gleiche Anzahl an Elementen haben, eine Äquivalenzrelation auf M gegeben ist. Welche Elemente sind zueinander äquivalent, welche nicht?

Aufgabe 10.4. Wir betrachten auf der Menge der Tiere die Äquivalenzrelation, bei der zwei Tiere als äquivalent angesehen werden, wenn sie die gleiche Anzahl an Gliedmaßen besitzen. Welche der folgenden Tiere sind zueinander in diesem Sinne äquivalent?

Ein Elefant, eine Schlange, eine Forelle, ein Delphin, eine Blindschleiche, ein Schimpanse, ein Tausendfüßer, ein Wenigfüßer, ein Eichhörnchen, ein Erdferkel, eine Ameise, ein Raptor, ein Tetrapode, ein Mensch, ein Pinguin.

AUFGABE 10.5. In der Biologie werden die Lebewesen mittels verschiedener (mehr oder weniger feiner) Einteilungen klassifiziert. Wie nennt man die Rangstufen, zu denen der Mensch gehört? Man gebe für jede Rangstufe ein Lebewesen an, das sich bezüglich dieser Rangstufe vom Menschen unterscheidet, aber bezüglich der darüberliegenden Rangstufe mit dem Menschen übereinstimmt.



AUFGABE 10.6. Wir sagen, dass Tage zueinander äquivalent sind, wenn sie auf den gleichen Wochentag fallen. Welche der folgenden Tage sind zueinander äquivalent, welche nicht?

(1) Der 11.11.1877,
(2) Der 7.11.1877,
(3) Der 14.11.1877,
(4) Der 13.11.1877,
(5) Der 30.10.1877,
(6) Der 2.12.1877,
(7) Der 6.1.1878,
(8) Der 20.11.1877,
(9) Der 23.10.1877,
(10) Der 6.12.1877.

AUFGABE 10.7. Betrachte die zweielementige Menge $M = \{a, b\}$.

(1) Bestimme alle Relationen auf M.
(2) Welche dieser Relationen sind symmetrisch, reflexiv, transitiv?
(3) Bei welchen Relationen handelt es sich um Äquivalenzrelationen?

Aufgabe 10.8. Es seien p und q zwei nichtäquivalente Aussagen. Welche der folgenden zusammengesetzten Aussagen sind zueinander äquivalent, welche nicht?

$$p,\ q,\ p \wedge q,\ p \vee q,\ p \rightarrow q,\ p \rightarrow (q \rightarrow p),\ \neg p \vee q,\ p \vee \neg p\,.$$

Aufgabe 10.9.*

Seien M und N Mengen und sei $f\colon M \rightarrow N$ eine Abbildung. Zeige, dass durch die Festlegung

$$x \sim y,$$

wenn

$$f(x) = f(y),$$

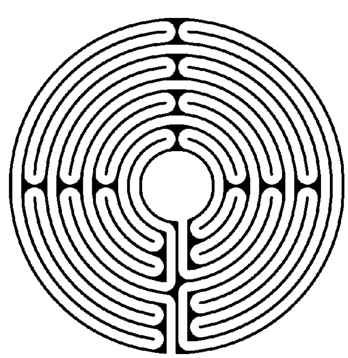
eine Äquivalenzrelation auf M definiert wird.

Aufgabe 10.10. Zeige, dass die folgende Relation eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist:

$$x \sim y, \text{ falls 5 teilt } x - y\,.$$

Welche Zahlen sind bei dieser Relation äquivalent zueinander?

Aufgabe 10.11. Wir betrachten auf dem weißen Teil des angegebenen Labyrinths die Äquivalenzrelation, die dadurch festgelegt ist, dass zwei Punkte als äquivalent gelten, wenn man durch eine stetige Bewegung (also ohne Sprünge) von einem Punkt zum anderen Punkt gelangen kann. Zeige, dass ein Punkt außerhalb des äußeren Kreises und ein Punkt des inneren Kreises zueinander äquivalent sind.



Aufgabe 10.12. Wir betrachten die Produktmenge $M = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Wir fixieren wie in Beispiel 10.15 die Sprünge

$$\pm(2,0) \text{ und } \pm(3,3)\,,$$

und sagen, dass zwei Punkte $P = (a,b)$, $Q = (c,d) \in M$ äquivalent sind, wenn man ausgehend von P den Punkt Q mit einer Folge von diesen Sprüngen aus erreichen kann.

(1) Zeige, dass die Punkte $P = (4,-3)$ und $P = (3,6)$ zueinander äquivalent sind.
(2) Zeige, dass die Punkte $P = (4,-3)$ und $P = (3,7)$ nicht zueinander äquivalent sind.

Aufgabe 10.13. Die Äquatorflöhe leben auf den vollen Metern eines 40000 Kilometer langen kreisrunden Bandes. Sie verfügen nur über einen Sprung, der sie sieben Meter nach vorne oder nach hinten bringt (und der beliebig oft wiederholt werden kann). Können sich alle Flöhe begegnen?

Aufgabe 10.14. Wir betrachten die rationalen Zahlen

$$\frac{7}{3},\ \frac{5}{3},\ 3,\ \frac{5}{2},\ \frac{4}{3},\ 4,\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{4},\ -\frac{1}{3},\ \frac{4}{5}\,.$$

(1) Welche dieser Zahlen sind unter der Gaußklammeräquivalenzrelation („Vorkommaäquivalenzrelation“, siehe Beispiel 10.12) zueinander äquivalent?
(2) Welche dieser Zahlen sind unter der Bruchanteiläquivalenzrelation („Nachkommaäquivalenzrelation“) zueinander äquivalent?

Aufgabe 10.15. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Wir betrachten die Relation auf V, die durch

$$v_1 \sim v_2 \text{ genau dann, wenn } v_1 - v_2 \in U$$

definiert ist. Zeige, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 10.16. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die folgende Relation auf $\operatorname{Mat}_n(K)$.

$$M \sim N, \text{ falls es eine invertierbare Matrix } B \text{ gibt mit } M = BNB^{-1}\,.$$

Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 10.17.*

Sei G eine Gruppe. Betrachte die Relation $\sim$ auf G, die durch

$$x \sim y \text{ genau dann, wenn } x = y \text{ oder } x = y^{-1}$$

erklärt ist. Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 10.18. Es sei M eine Menge und $(R_i)_{i \in I}$ eine Familie von Äquivalenzrelationen auf M. Zeige, dass durch den Durchschnitt $R := \bigcap_{i \in I} R_i$ wieder eine Äquivalenzrelation auf M definiert ist. Gilt dies auch für $\bigcup_{i \in I} R_i$?

Aufgabe 10.19. Es seien D und W Mengen. Wir betrachten auf der Abbildungsmenge Abb (D, W) diejenige Relation, bei der die Abbildungen

$$f, g \colon D \longrightarrow W$$

in Relation stehen, wenn es eine bijektive Abbildung

$$\pi \colon D \longrightarrow D$$

mit

$$f = g \circ \pi$$

gibt. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

Bei den folgenden Aufgaben überlege man sich auch, was die Äquivalenzrelationen für die Graphen der Funktionen bedeuten.

Aufgabe 10.20. Es sei K ein Körper und sei

$$\text{Abb}\,(K, K) = \{f : K \to K \mid f \text{ Funktion}\}$$

die Menge der Abbildungen von K nach K. Wir betrachten die Relation auf Abb (K, K), die durch $f \sim g$, falls es ein $d \in K$ mit

$$f = g + d$$

gibt. Zeige, dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt.

Aufgabe 10.21. Es sei K ein Körper und sei

$$\text{Abb}\,(K, K) = \{f : K \to K \mid f \text{ Funktion}\}$$

die Menge der Abbildungen von K nach K. Wir betrachten die Relation auf Abb (K, K), die durch $f \sim g$, falls es ein $c \in K$ mit

$$f(x) = g(x + c)$$

für alle $x \in K$ gibt. Zeige, dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt.

Aufgabe 10.22. Es sei K ein Körper und sei

$$\text{Abb}\,(K,K) \,=\, \{f : K \to K \mid f \text{ Funktion}\}$$

die Menge der Abbildungen von K nach K. Wir betrachten die Relation auf Abb (K,K), die durch $f \sim g$, falls es ein $c,d \in K$ mit

$$f(x) \,=\, g(x+c)+d$$

für alle $x \in K$ gibt. Zeige, dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt.

Aufgabe 10.23. Wir betrachten auf der Menge der quadratischen Polynome über dem Körper K die Äquivalenzrelation aus Aufgabe 10.22. Finde für jedes quadratische Polynom einen besonders einfachen Repräsentanten.

Aufgabe 10.24.*

Wir betrachten auf der Menge C aller stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ die folgende Relation: Es ist $f \sim g$, falls es eine nullstellenfreie stetige Funktion $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f \,=\, g \cdot \alpha$$

gibt.

(1) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
(2) Zeige, dass aus $f \sim g$ folgt, dass die Nullstellenmenge von f und von g übereinstimmen.
(3) Zeige, dass die beiden Funktionen

$$f(x) \,=\, x$$

und

$$g(x) \,=\, x^2$$

nicht zueinander äquivalent sind.

Aufgabe 10.25.*

Es sei M die Menge der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Definiere auf M eine Relation durch

$$f \sim g \text{ falls } f(0) = g(0),\ f'(0) = g'(0) \text{ und } f''(1) = g''(1)\,.$$

a) Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

b) Finde für jede Äquivalenzklasse dieser Äquivalenzrelation einen polynomialen Vertreter.

c) Zeige, dass diese Äquivalenzrelation mit der Addition von Funktionen verträglich ist.

d) Zeige, dass diese Äquivalenzrelation nicht mit der Multiplikation von Funktionen verträglich ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 10.26. (3 Punkte)

Zeige, dass die folgenden Äquivalenzrelationen auf der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ übereinstimmen.

(1) Die Einerziffer in der Zifferndarstellung zur Basis 7 von a und b ist gleich.
(2) Die Differenz $a - b$ ist ein Vielfaches der 7.
(3) a und b haben bei der Division durch 7 den gleichen Rest.

Aufgabe 10.27. (2 Punkte)

Wir betrachten für je zwei Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{N}$ die symmetrische Differenz

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Wir setzen $A \sim B$, falls $A \triangle B$ endlich ist. Zeige, dass dadurch eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ definiert wird.

Aufgabe 10.28. (4 Punkte)

Alle Springmäuse leben in $\mathbb{Z}^2$ und verfügen über zwei Sprünge, nämlich den Sprung $\pm(3, 4)$ und den Sprung $\pm(5, 2)$. Wie viele Springmaus-Populationen gibt es? Die Springmäuse Albert, Beate, Erich, Heinz, Sabine und Frida sitzen in den Positionen

$$(14, 11),\ (13, 15),\ (17, 12),\ (15, 19),\ (16, 16) \text{ und } (12, 20)\,.$$

Welche Springmäuse können sich begegnen?

Aufgabe 10.29. (3 Punkte)

Es seien M_1 und M_2 Mengen und $\sim_1$ sei eine Äquivalenzrelation auf M_1 und $\sim_2$ sei eine Äquivalenzrelation auf M_2. Betrachte die Relation $\sim$ auf der Produktmenge $M_1 \times M_2$, die durch

$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2), \text{ falls } a_1 \sim_1 b_1 \text{ und } a_2 \sim_2 b_2 \text{ gilt}\,,$$

definiert ist. Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Zeige ferner, dass auf $M_1 \times M_2$ die durch

$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2), \text{ falls } a_1 \sim_1 b_1 \text{ oder } a_2 \sim_2 b_2 \text{ gilt}\,,$$

definierte Relation keine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 10.30. (2 Punkte)

Seien M und N Mengen und sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf N. Zeige, dass durch $x \equiv x'$, falls $f(x) \sim f(x')$ gilt, eine Äquivalenzrelation auf M definiert wird.

Aufgabe 10.31. (3 Punkte)

Es seien D und W Mengen. Wir betrachten auf der Abbildungsmenge $\operatorname{Abb}(D, W)$ diejenige Relation, bei der die Abbildungen

$$f, g\colon D \longrightarrow W$$

in Relation stehen, wenn es bijektive Abbildungen

$$\pi\colon D \longrightarrow D$$

und

$$\rho\colon W \longrightarrow W$$

mit

$$f = \rho \circ g \circ \pi$$

gibt. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

Abbildungsverzeichnis