數鑰

算學報 戊戌二月 代數論六

平陽黃慶澄撰

論通加爲乘之源

加

二⊥二＝四

乘

二╳二＝四

說曰此天然之數自有此通加爲乘之理以後一切法均從此發生故特爲拈出勿以其淺而忽之

加

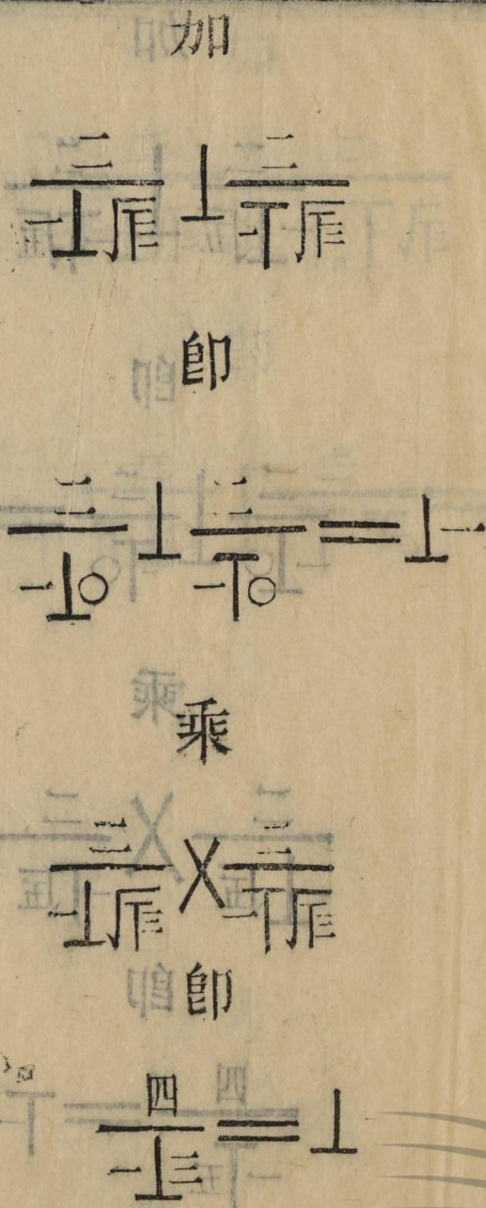
$$\frac{二}{〇\pm\sqrt{丨〇}}\ 丄\ \frac{二}{〇\pm\sqrt{丨〇}} = 〇$$

乘

$$\frac{二}{〇\pm\sqrt{丨〇}} \times \frac{二}{〇\pm\sqrt{丨〇}} = 〇$$

說曰西人因虛根之式悟出通加為乘之法實有無窮妙用玩以後各式自明

論通加爲乘之理



說曰此相加爲正一相乘亦爲正一也

加

$$\frac{\text{二}}{\text{一丄戊}}\ \text{丄}\ \frac{\text{二}}{\text{一丅戊}}$$

即

$$\frac{\text{二}}{\text{一丄〇}}\ \text{丄}\ \frac{\text{二}}{\text{一丅〇}} = \text{上}$$

乘

$$\frac{\text{二}}{\text{一丄戊}} \times \frac{\text{二}}{\text{一丅戊}}$$

即

$$\frac{\text{四}}{\text{一丅五}} = \text{下}$$

說曰此相加爲正一相乘爲負一也

說曰此相加爲負一相乘爲正一也

加

$$\frac{二}{丅一丄\sqrt{丅三}}\ 丄\ \frac{二}{丅一丅\sqrt{丅三}}$$

卽

$$\frac{二}{丅二丄〇}\ 丄\ \frac{二}{丅二丅〇}\ ＝\ 丅一$$

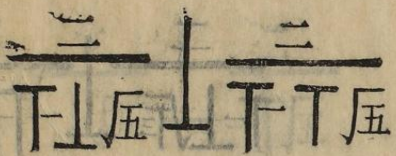
乘

$$\frac{二}{丅一丄\sqrt{丅三}}\ \times\ \frac{二}{丅一丅\sqrt{丅三}}$$

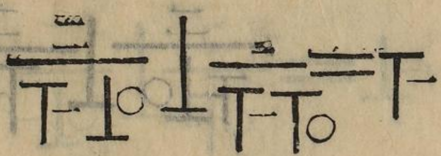
卽

$$\frac{四}{一丄三}\ ＝\ 丄一$$

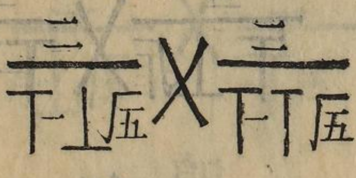
加



即



乘



即

說曰此相加為負一相乘亦為負一也

加

$$\frac{\text{二}}{\text{二丄}\sqrt{\text{四}}}\ \text{丄}\ \frac{\text{二}}{\text{二丅}\sqrt{\text{四}}}$$

卽

$$\frac{\text{二}}{\text{二丄〇}}\ \text{丄}\ \frac{\text{二}}{\text{二丅〇}} = \text{丄二}$$

乘

$$\frac{\text{二}}{\text{二丄}\sqrt{\text{四}}} \times \frac{\text{二}}{\text{二丅}\sqrt{\text{四}}}$$

卽

$$\frac{\text{四}}{\text{四丄四}} = \text{丄二}$$

說曰此相加爲正二二相乘亦爲正二二也

加

$$\frac{\text{二}}{\text{丄三丄尸三}}\ \text{丄}\ \frac{\text{二}}{\text{丄三丅尸三}}$$

即

$$\frac{\text{二}}{\text{丄三丄○}}\ \text{丄}\ \frac{\text{二}}{\text{丄三丅○}} = \text{丄二}$$

乘

$$\frac{\text{二}}{\text{丄三丄尸三}} \times \frac{\text{二}}{\text{丄三丅尸三}}$$

即

$$\frac{\text{四}}{\text{酉三}} = \text{丅二}$$

說曰此相加爲正二相乘爲負二也

加

$$\frac{\text{二}}{\text{丅三丄}\sqrt{\text{四}}}\ \text{丄}\ \frac{\text{二}}{\text{丅三丅}\sqrt{\text{四}}}$$

即

$$\frac{\text{二}}{\text{丅三丄}\bigcirc}\ \text{丄}\ \frac{\text{二}}{\text{丅三丅}\bigcirc} = \text{丅二}$$

乘

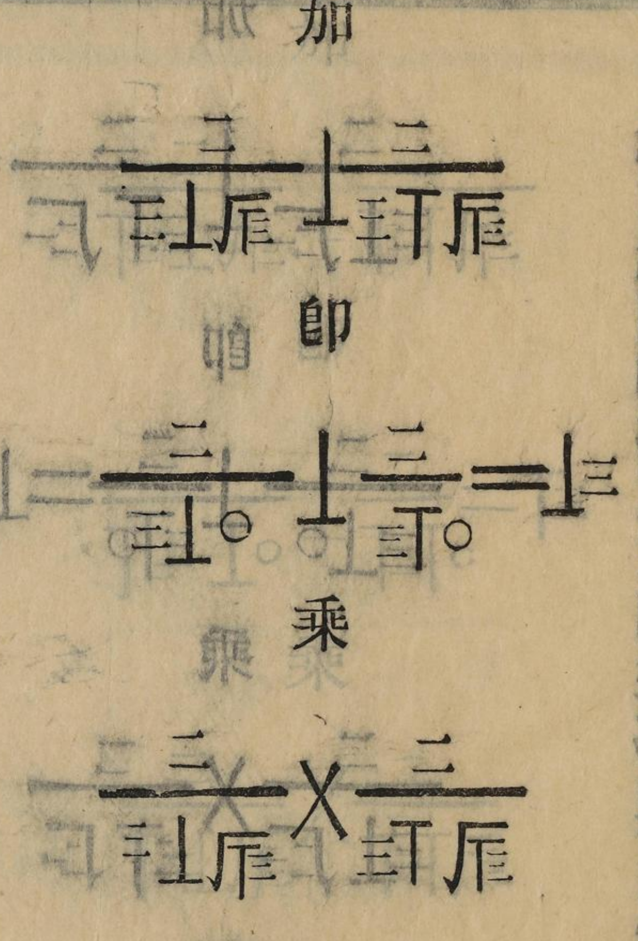
$$\frac{\text{二}}{\text{丅三丄}\sqrt{\text{四}}} \times \frac{\text{二}}{\text{丅三丅}\sqrt{\text{四}}}$$

即

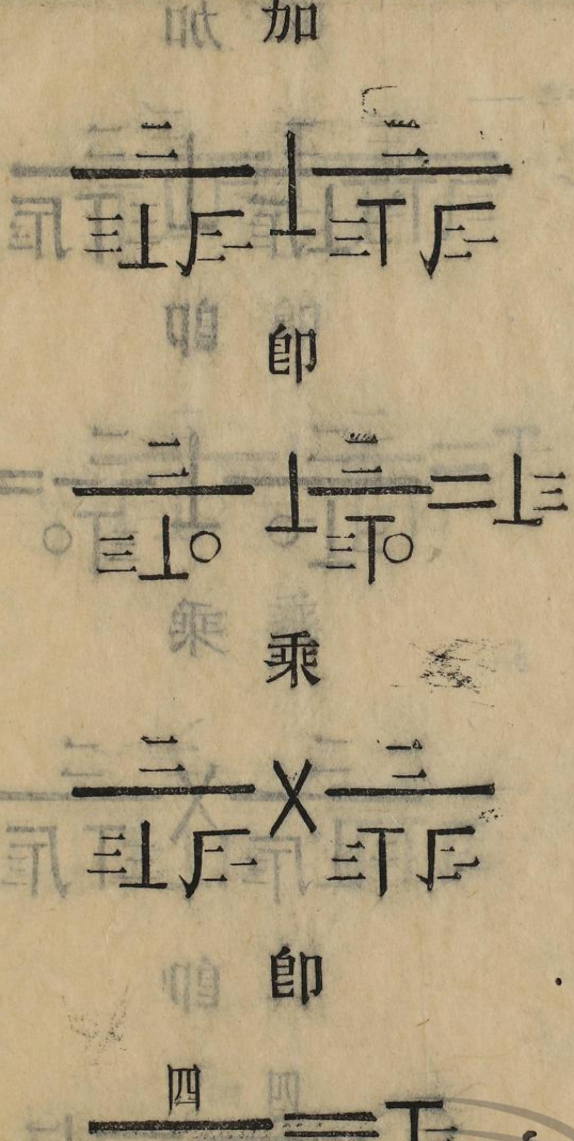
$$\frac{\text{四}}{\text{四丄四}} = \text{丄二}$$

說曰此相加爲負二相乘爲正二也

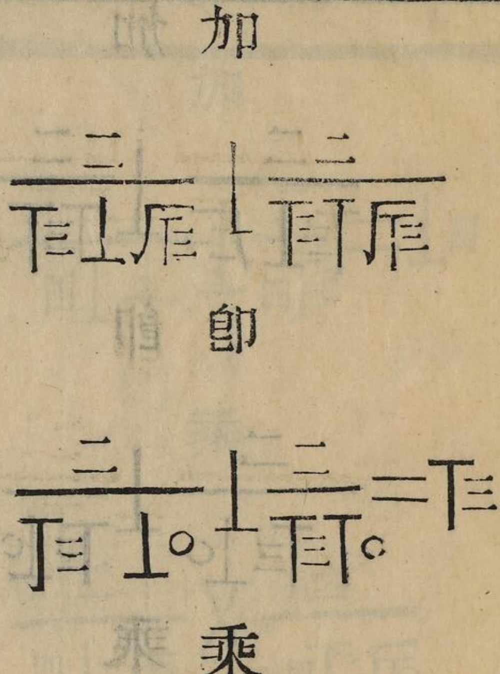
說曰此相加爲負三相乘亦爲負三也



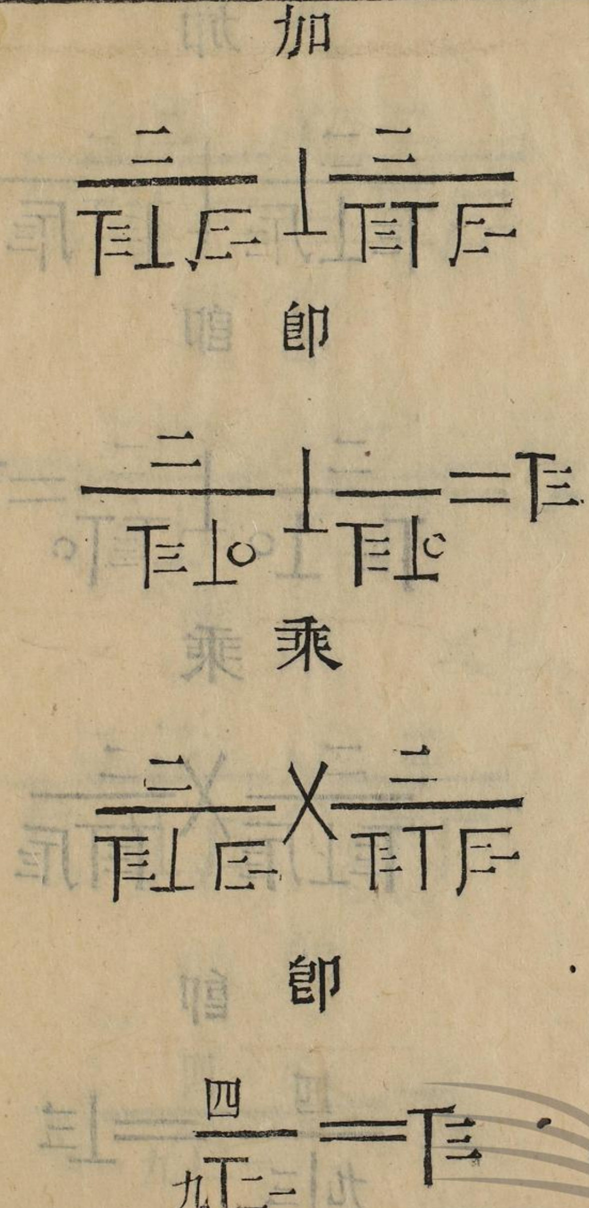
說曰此相加為正三相乘亦為正三也



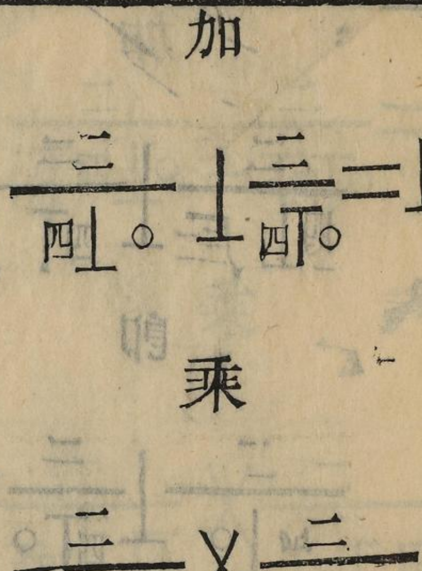
說曰此相加為正三相乘為負三也



說曰此相加為負三相乘為正三也



說曰此相加為負三相乘亦為負三也



說曰此相加爲正四相乘亦爲正四也

加

$$\frac{\text{二}}{\text{四丄}\sqrt{\text{三二}}}\ \text{丄}\ \frac{\text{二}}{\text{四丅}\sqrt{\text{三二}}}$$

卽

$$\frac{\text{二}}{\text{四丄○}}\ \text{丄}\ \frac{\text{二}}{\text{四丅○}} = \text{丄四}$$

乘

$$\frac{\text{二}}{\text{四丄}\sqrt{\text{三二}}} \times \frac{\text{二}}{\text{四丅}\sqrt{\text{三二}}}$$

卽

$$\frac{\text{四}}{\text{一六丅三二}} = \text{丅四}$$

說曰此相加爲正四相乘爲負四也

加

$$\frac{\text{三}}{\text{丅四丄〇}}\text{丄}\frac{\text{三}}{\text{丅四丅〇}}=\text{丅四}$$

乘

$$\frac{\text{三}}{\text{丅四丄𠂆〇}}\times\frac{\text{三}}{\text{丅四丅𠂆〇}}$$

即

$$\frac{\text{四}}{\text{一六丅〇}}=\text{丄四}$$

說曰此相加為負四相乘為正四也

加

$$\frac{三}{丅四丄厓三} 丄 \frac{三}{丅四丅厓三}$$

即

$$\frac{三}{丅四丄〇} 丄 \frac{三}{丅四丅〇} = 丅四$$

乘

$$\frac{三}{丅四丄厓三} \times \frac{三}{丅四丅厓三}$$

即

$$\frac{四}{一六丅三二} = 丅四$$

說曰此相加為負四相乘亦為負四也

加

$$\frac{二}{五丄\sqrt{五}}\ 丄\ \frac{二}{五丅\sqrt{五}}$$

即

$$\frac{二}{五丄○}\ 丄\ \frac{二}{五丅○}\ =\ 丄五$$

乘

$$\frac{二}{五丄\sqrt{五}}\ \times\ \frac{二}{五丅\sqrt{五}}$$

即

$$\frac{四}{二五丅五}\ =\ 丄五$$

說曰此相加為正五相乘亦為正五也

加

$$\frac{三}{五丄\sqrt{四五}}\ 丄\ \frac{三}{五丅\sqrt{四五}}$$

即

$$\frac{三}{五丄○}\ 丄\ \frac{三}{五丅○} = 丄五$$

乘

$$\frac{三}{五丄\sqrt{四五}} \times \frac{三}{五丅\sqrt{四五}}$$

即

$$\frac{四}{二五丅四五} = 丅五$$

說曰此相加為正五相乘為負五也

說曰此相加爲負五相乘爲正五也

加

$$\frac{\text{二}}{\text{丅𠂆五丄𠂆五}}\ \text{丄}\ \frac{\text{二}}{\text{丅𠂆五丅𠂆五}}$$

即

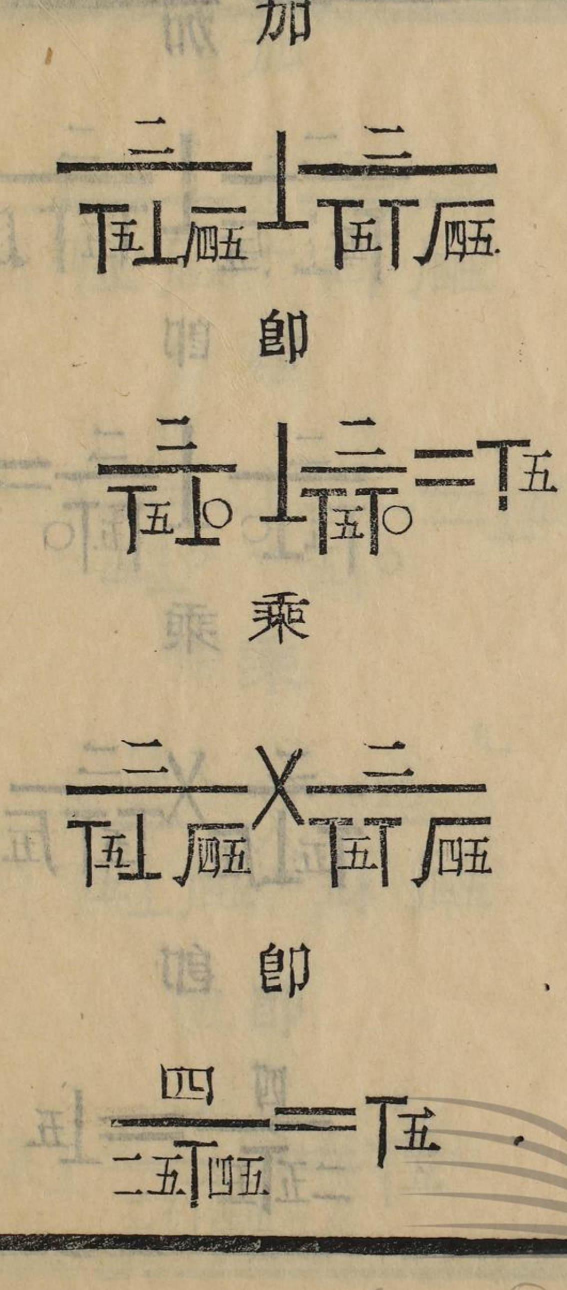
$$\frac{\text{二}}{\text{丅𠂆五丄○}}\ \text{丄}\ \frac{\text{二}}{\text{丅𠂆五丅○}} = \text{丅五}$$

乘

$$\frac{\text{二}}{\text{丅𠂆五丄𠂆五}} \times \frac{\text{二}}{\text{丅𠂆五丅𠂆五}}$$

即

$$\frac{\text{四}}{\text{二五丅五}} = \text{丄五}$$



說曰此相加爲負五相乘亦爲負五也

加

$\frac{\text{二}}{\text{一丄戊}}\ \text{丄}\ \frac{\text{二}}{\text{一丅戊}}$

即

$\frac{\text{二}}{\text{一丄〇}}\ \text{丄}\ \frac{\text{二}}{\text{一丅〇}} = \text{丄一}$

乘

$\frac{\text{二}}{\text{一丄戊}} \times \frac{\text{二}}{\text{一丅戊}}$

即

$\frac{\text{四}}{\text{一丄[illegible]}} = \text{丄二}$

說曰此相加爲正一相乘爲正二也

加

$$\frac{\text{二}}{\text{三丄斥○}}\ \text{丄}\ \frac{\text{二}}{\text{三丅斥○}} = \text{二}$$

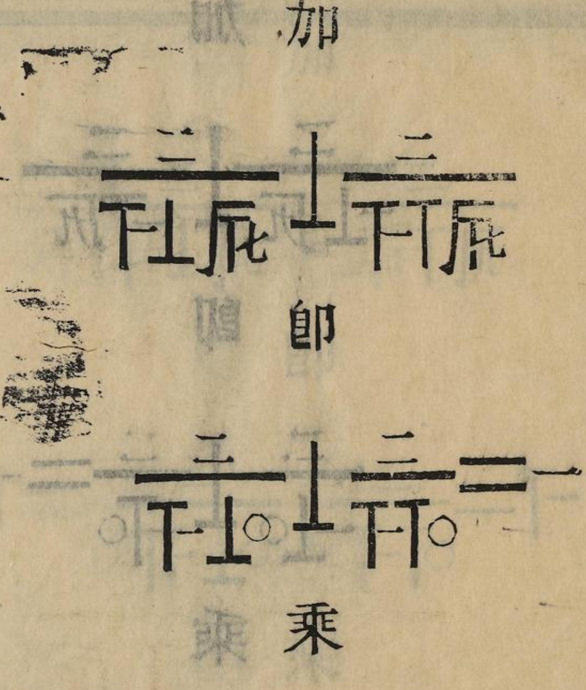
乘

$$\frac{\text{二}}{\text{三丄斥○}} \times \frac{\text{二}}{\text{三丅斥○}}$$

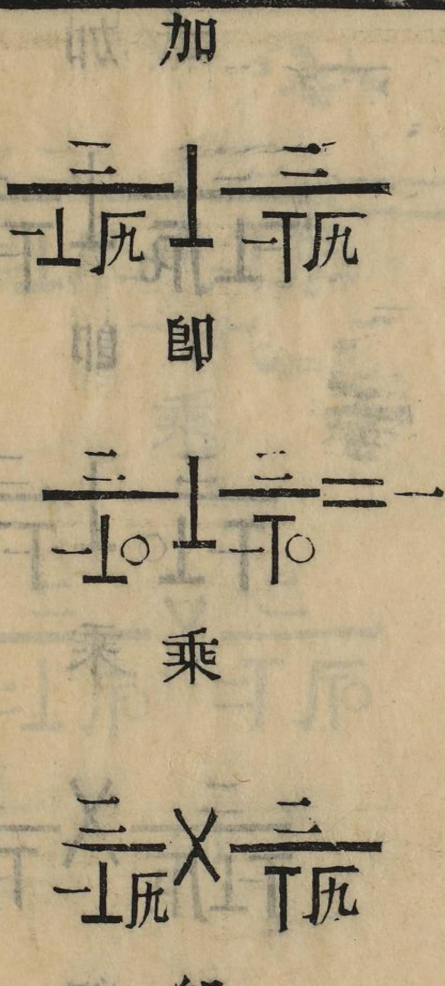
即

$$\frac{\text{四}}{\text{四丄○}} = \text{丄一}$$

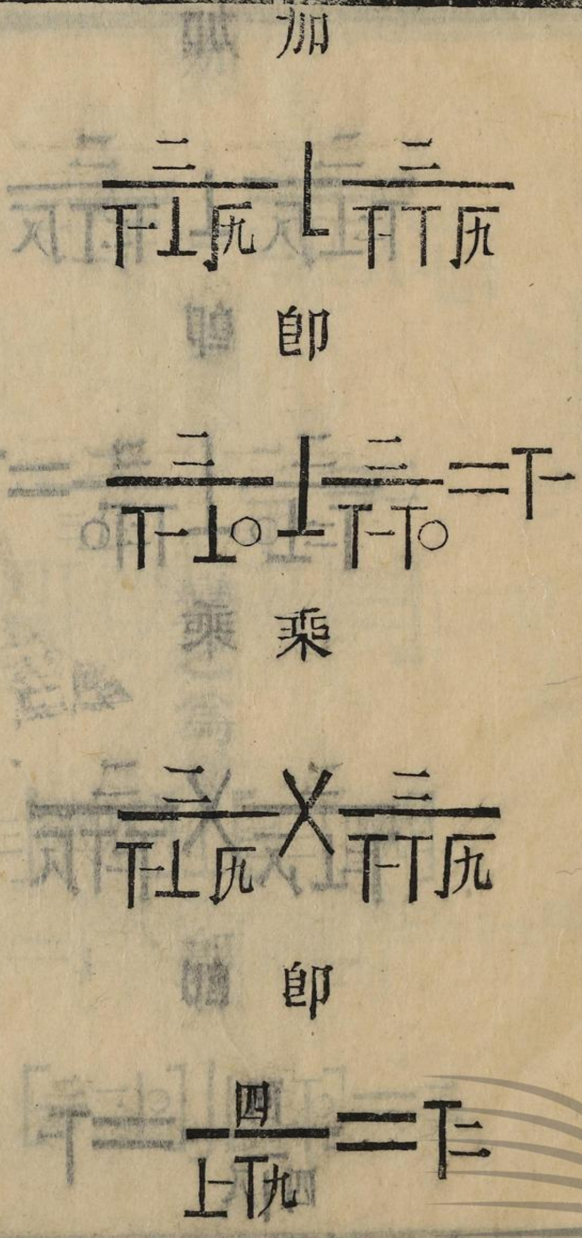
說曰此相加為正二相乘為正一也



說曰此相加爲負一相乘爲正二也



說曰此相加爲正一相乘爲負二也

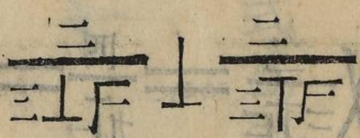


說曰此相加爲負一相乘爲負二也

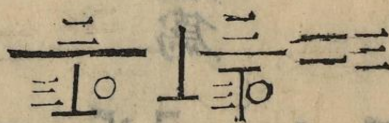
說曰此相加爲負二相乘爲負一也

論通加爲乘之變式

加

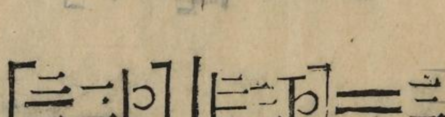


即



變之爲

即



乘

二/三丄亍 ✕ 三/三丅亍 ═ 四/九丅亍 ═ 二

變之爲

[二三一 丄 四/九丅二] ✕ [二三一 丅 四/九丅二]

即

四/二 九丅 [四/二九丅二] ═ 二

其公式爲

$$\left[\frac{二}{一}巳丄\sqrt{\frac{四}{一}巳^{二}丅午}\right]丄\left[\frac{二}{一}巳丅\sqrt{\frac{四}{一}巳^{二}丅午}\right]=巳=三$$

$$一\left[\frac{二}{一}巳丄\sqrt{\frac{四}{一}巳^{二}丅午}\right]\times\left[\frac{二}{一}巳丅\sqrt{\frac{四}{一}巳^{二}丅午}\right]$$

卽

$$\frac{四}{一}巳^{二}丅\left[\frac{四}{一}巳^{二}丅午\right]=午=二$$

設以丁代 四二巳许 則變為

[三二巳丄丁]丄[三二巳丁]二巳二三

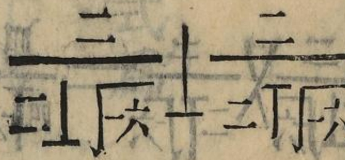
[三二巳丄丁]㐅[三二巳丁]

即

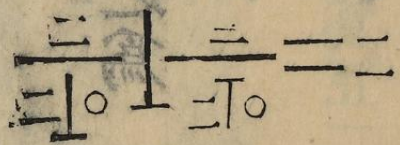
四二巳丁丅一午一二

說曰此加數為正三乘數為正二加數正乘數亦正而加數大者也

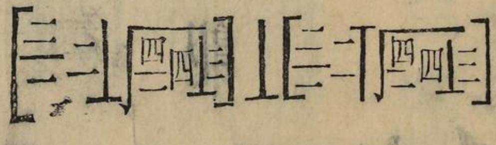
加



即



變之爲



即

乘

變之為

即

其公式為

[二巳丄√四巳丄午]丄[二巳丅√四巳丄午]＝二巳二

[二巳丄√四巳丄午]✕[二巳丅√四巳丄午]

即

四巳丅[√四巳丄午]＝午＝三

設以丁代$\frac{四}{二}$巳丄午則變為

[$\frac{三}{二}$巳丄丙]丄[$\frac{三}{二}$巳丅丙]＝巳＝二

[$\frac{三}{二}$巳丄丙]×[$\frac{三}{二}$巳丅丙]

即

$\frac{四}{二}$巳丅丁＝丙＝丅三

說曰此加數為正二乘數負三加數正乘數為負而乘數大者也又曰凡通加為乘之變式依此推之以至無窮

論二次式之以二求一法內分六層

第一層

天^{二}丅巳天丅午＝○

其兩根相加為丅巳相乘為丅午今反負為正

以巳知之亥與未知之人代之則

亥丄人＝丅巳

亥人＝丅午

說曰不問兩根為正為負而概定為正以便於算

此最是妙法蓋代數中惟演正號最易明曉也

第二層

試以

亥丄人＝丅巳

自乘得

亥^{二}丄二亥人丄人^{二}＝巳^{二}

以四个

亥人＝丅午

減之得

亥^{二}丅二亥人丄人^{二}＝巳^{二}丄四午

說曰以四个丄亥人減亥丄二亥人丄三得亥丅二亥人丄三依減法推之所謂同號相減減數大者正反爲負也以四个丅午減巳得巳丄四午依減法推之所謂異號相加原正從正也

第三層

乃以 亥^{2}丅二亥人上人^{2} ═ 巳上四午 自開得 亥丅人 ═ $\pm\sqrt{巳上四午}$

論曰 (亥上人)^{2} 乃和數之自乘 (亥丅人)^{2} 乃較數之自乘也

第四層

由

亥丨人＝丅巳

及

亥丅人＝卄巳午

化之得

亥＝二／丅巳卄巳四午

人＝二／巳卄巳午

說曰此卽以和較互求也

第五層

如果巳知之

$亥 = \frac{二}{丅巳丄\sqrt{巳^{二}丄四午}}$

則未知之

$人 = \frac{二}{丅巳丅\sqrt{巳^{二}丄四午}}$

如果巳知之

$亥 = \frac{二}{丅巳丅\sqrt{巳^{二}丄四午}}$

則未知之

$人 = \frac{二}{丅巳丄\sqrt{巳^{二}丄四午}}$

說曰任以二數輾轉互易無不合理

第六層

又試以 $亥=\frac{二}{丅巳\perp\sqrt{巳^{二}\perp四午}}$ 變之為 $亥=丅\frac{二}{一}巳\perp\sqrt{\frac{四}{一}巳^{二}\perp午}$ 則 $人=\frac{二}{丅巳丅\sqrt{巳^{二}\perp四午}}$

變之為 $人=丅\frac{二}{一}巳丅\sqrt{\frac{四}{一}巳^{二}\perp午}$ 其又一式可以類推

此可見

亥丄人＝（巳丄午）丄（巳午）＝丅巳

亥人＝四巳丅（四巳丄午）

卽

亥人＝〇丅（〇丄午）＝丅午

代	眞
亥	七
人	五
巳	一二
午	三五

說曰此題如以眞數明之猶乎比例術中先以和數折半得其中數然後以較數進退之故曰卽和較互求法也

論三次式之以二求一法 内分十二層

第一層

○＝丙丄乙天丄甲天^{二}丄天^{三}

以

●丅$\frac{甲}{三}$

代天變之得

○＝未丄午●丄●^{三}

說曰此卽變第二項爲○法也蓋三次式中第二項爲甲天^{二}不便於算故必變爲○以通之

第二層

● 〓人丄亥 令未知之● 以巳知之亥與未知之人代之

則變爲

人三丄三亥人二丄三亥二人丄亥三
丄午人丄午亥
丄未 〓○

說曰二次雜方式既變第二項爲○即可以求根三次式雖變第二項爲○尚有第三項午●在是仍不便於算也故又分一元爲二元以求之

第三層

再變得

三亥^{2}人丄三亥人^{2}丄午亥丄午人＝○

亥丄人丄未＝○

說曰前式合之既爲○則分之亦可爲○故又化一式爲二式以便於算

第四層

再將前一式化之爲

(三亥人丄午)(亥丄人)＝○

故得

三亥人丄午＝○

亥丄人＝○

說曰分之又分則二式中亦必有一式爲空葢兩項中有一項爲空則兩項相乘亦必爲空也

第五層

然

亥丄人＝○

則

●＝○

與

●三丄午●丄未＝○

之理不合故祇得用

三亥人丄午＝○

及

亥三丄人巳丄未＝○

說曰得此二式如暗中摸索探驪得珠矣

第六層

從

$亥^{三}丄人^{三}丄未＝二$

得

$亥^{三}丄人^{三}＝二丅未$

從

三亥人丄午＝○

得

三亥人＝丅午

而

$亥人＝丅\frac{三}{午}$

而

$亥^{三}人^{三}＝丅\frac{二七}{午^{三}}$

說曰已有$亥^{三}人^{三}$相加之和數又有$亥^{三}人^{三}$相乘之積數便可以通加為乘法馭之矣便可以求亥人之同數矣

又曰三次式之通加爲乘亦由二次式生出但二次式第二項爲加數末項爲乘數三次式則以第三項爲乘數末項爲加數耳

第七層

由是以得

$$亥^{三}=\frac{二}{丅未\frac{三七}{四午^{三}}丅未^{二}}$$

變之得

$$亥^{三}=丅\frac{二}{三}未上\frac{三七午^{三}}{一}上\frac{四}{一}未^{二}$$

$$人^{三}=\cfrac{二}{丅未丅\cfrac{三七}{四午^{三}}丄未^{二}}$$

變之爲

$$人^{三}=二丅\frac{三}{未}丅\frac{三七}{二午^{三}}丄\frac{四}{未^{二}}$$

是以相加爲

$$豕丄人^{三}=\left[丅\frac{三}{未}丄〇\right]丄\left[丅\frac{三}{未}丅〇\right]=丅未$$

相乘為

$亥^{三}人^{三}＝丄\frac{未^{二}}{四}丅\left[\frac{午^{三}}{二七}丄\frac{未^{二}}{四}\right]$

即

$亥^{三}人^{三}＝丄〇丅\left[\frac{午^{三}}{二七}丄〇\right]$

即

$亥^{三}人^{三}＝丅\frac{午^{三}}{二七}$

說曰此可見三次式之通加為乘與二次式相似也

第八層

又得

亥$=\sqrt[三]{丅\frac{未}{二}丄\sqrt{\frac{午^{三}}{二七}丄\frac{未^{二}}{四}}}$

人$=\sqrt[三]{丅\frac{未}{二}丅\sqrt{\frac{午^{三}}{二七}丄\frac{未^{二}}{四}}}$

是以相加爲

亥丄人$=\sqrt[三]{丅\frac{未}{二}丄\sqrt{\frac{午^{三}}{二七}丄\frac{未^{二}}{四}}}丄\sqrt[三]{丅\frac{未}{二}丅\sqrt{\frac{午^{三}}{二七}丄\frac{未^{二}}{四}}}$

說曰此須先開其內之平方再以全式之和數開其外之立方方能得其的數

第九層

因 

故得

說曰至此則滴滴歸源一絲不漏三次式之方爲已解矣

第十層

再令

甲＝二未四午三七一天丁三

乙＝二未四午三七一天丁三

又依虛根中通

加爲乘之例令

角＝三 下工丁

亢＝三 下丁

則可見

第十一層

亥與人各有三箇之同數如

亥＝三甲　人＝三乙

亥＝角三甲　人＝角三乙

亥＝亢三甲　人＝亢三乙

如欲知各項之亥人如何配法則必先以乘法試

之令

$角亢 = 一$

$亥人 = \sqrt[三]{甲乙}$

無論如何乘法其得數仍為一个$\sqrt[三]{甲乙}$則可得$亥 + 人$三个同數如

$亥 + 人 = \sqrt[三]{甲} + \sqrt[三]{乙}$

$亥 + 人 = 角\sqrt[三]{甲} + 亢\sqrt[三]{乙}$

$亥 + 人 = 亢\sqrt[三]{甲} + 角\sqrt[三]{乙}$

第十二層

惟以

亥丄人＝●

故得

●＝〒三丄三元

●＝〒角〒甲丄元三元

●＝元〒甲丄角三元

說曰三次式必有三个根自九層以下僅求得一个根耳此三層乃求得其餘二根也

又曰前一根爲實根此兩根爲虛根

代		眞
●	══	五
亥	══	三
人	══	二
午	══	一入
未	══	三五

說曰此題可照此數逐層演之便能渙然怡然

再論三次式以二求一法內分六層

平陽黃慶澄撰

第一層

夫

$亥人 = 丅\frac{三}{午}$

則

$人 = 丅\frac{三}{午} \times \frac{亥}{三} = 丅\frac{亥}{三午}$

即

$人 = 丅\frac{三}{午} \times \frac{三甲}{一} = 丅\frac{三甲}{三午}$

說曰初觀是乘繼觀是除此通乘爲除法也

即

亥丄人＝亥丅許

即

亥丄人＝甲丅甲三許三午

即

●＝甲丅甲許三許

說曰初觀是加繼觀是減此通加爲減法也又曰即乘即除即加即減參伍錯綜宛轉巧合可謂極代數之能事

第二層

設有

天^{三}丄三天^{二}丄九天丅一三═══○

以

●丅一═══天

變之得

●^{三}丄六●丅二○═══○

即

●^{三}丄午丅未═══○

說曰此即變第二項爲空法也

則

午＝六未＝丅二〇

即

甲＝丅三未⊥三七午三四未＝一〇⊥丅〇八

即

三甲＝三丅三未⊥三七午三四未＝三丅〇⊥丅〇八

即

三甲＝二七三二

說曰 三一末 為 一〇 四三一末 為 一〇〇 三午 三七一 為八 二末 四三一 三丄午 三七一 為 一〇八

先將一〇八開其平方根又將其平方根與一〇相加再

開其立方根便得其全根之畧數畧數云者言非

密數也

又曰二為單數故字旁作●自●以右皆小數也

所以

$\frac{\text{甲}}{\text{三午}}$ ＝ $\frac{\text{二•七三二}}{\text{二}}$ ＝ •七三二

即

$\frac{\text{甲}}{\text{三午}}$ ＝ 二•七三二 ⊤ $\frac{\text{二•七三二}}{\text{二}}$

＝ 二•七三二⊤•七三二 ⊥ 二

即

• ＝ 二

說曰此可見二二爲一个同數也

第三層

惟

二・七三二丅・七三二＝二

可變之為

（一丄√三）丄（一丅√三）＝二

說曰以上所言均是畧數此則因畧數以求密近之數而另作一式以代之眞如柳暗花明又一村也

說曰以上所言僅為一个之實根今則更求其餘二个之負根故另闢一途以取之

因

√三＝一.七三二

故

一丄√三＝一丄一.七三二＝二.七三二

一丅√三＝一丅一.七三二＝丅.七三二

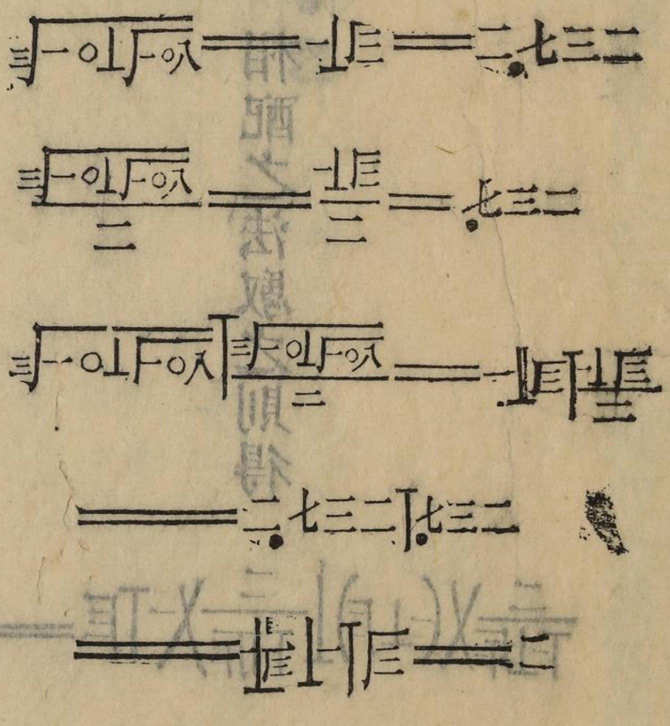
則

(一丄√三)丄(一丅√三)＝二.七三二丅.七三二＝二

即

一丄〇丄一丅〇＝二

由是以得



說曰此可見其式變其數不變也

第四層

試以九爻角相配之法馭之則得

所以共得●之三个同數為

● ＝ 二

● ＝ 丅一丄√丅九

● ＝ 丅一丅√丅九

說曰此可見三个根必有一為正兩為負也

第五層

又因

天＝●丅一

故得

天＝一

天＝丅丄丅氏九

天＝丅丄丄氏九

即

天丅一＝○

天丄丄氏九＝○

天丄丅氏九＝○

說曰至此則天之三个同數如水落石出矣

第六層

又因 $天^{三}丄三天^{二}丄九天丅一三═○$ 以 天丅一 約之得 $天^{二}丄四天丄一三═○$ 則以二次式之常法開之亦得

$天丄二丄\sqrt{丅九}$

$天⌋二丅\sqrt{丅九}$

說曰此卽所謂化不合理之方爲合理之方也

又曰以常法證之則其理更明

論三次式不能化之根內分五層

第一層

設有 〇＝丄四・六丅・三

則

午＝丅六

未＝丄四

$\frac{一}{二}$未＝丄二

$\frac{一}{二七}$午^{三}＝丅八

$\frac{一}{四}$未^{二}＝丄四

$\sqrt{\frac{一}{二七}午^{三}丄\frac{一}{四}未^{二}}$＝$\sqrt{丅四}$＝二$\sqrt{丅一}$

說曰此即下所謂 $\frac{一}{二七}$午^{三} 為負數而大於 $\frac{一}{四}$未^{二} 者也

而

甲＝二丅三未丄√（三二未丅四未）＝丄二丄二斥

而

乙＝二丅三未丅√（三二未丅四未）＝丅丅二斥

而

三甲＝三丄斥

而

三乙＝三丅丅斥

故得

$\bullet = \sqrt[3]{\text{丅}^{\text{二}}\,\text{丄}^{\text{二}}\,\sqrt{\text{丅}^{\text{二}}}}\ \text{丄}\ \sqrt[3]{\text{丅}^{\text{二}}\,\text{丅}^{\text{二}}\,\sqrt{\text{丅}^{\text{二}}}}$

設以角乂亢相配之法馭之則得

$\bullet = \text{角}\sqrt[3]{\text{丅}^{\text{二}}\,\text{丄}^{\text{二}}\,\sqrt{\text{丅}^{\text{二}}}}\ \text{亢}\sqrt[3]{\text{丅}^{\text{二}}\,\text{丅}^{\text{二}}\,\sqrt{\text{丅}^{\text{二}}}}$

$\bullet = \text{亢}\sqrt[3]{\text{丅}^{\text{二}}\,\text{丄}^{\text{二}}\,\sqrt{\text{丅}^{\text{二}}}}\ \text{角}\sqrt[3]{\text{丅}^{\text{二}}\,\text{丅}^{\text{二}}\,\sqrt{\text{丅}^{\text{二}}}}$

說曰此三式驟觀之皆似負數之虛根也

第二層

惟依乘法之例則

下上斤為丄斤之立方

下下斤為一丁斤之立方

說曰此須細觀下幅便知其理

蓋

(斤)^{一} ═ 丄斤

(斤)^{二} ═ 丄斤✕丄斤 ═ 丅

(斤)^{三} ═ 丄斤✕丅 ═ 丅斤

(斤)^{四} ═ 丄斤✕丅斤 ═ 丄

(斤)^{五} ═ 一次

(斤)^{六} ═ 二次

(斤)^{七} ═ 三次

(斤)^{八} ═ 八次

說曰自九次以下仍如一次倣此以至無窮

又曰此負數之虛根也卽所謂無根之根也其除

法與常例同而其乘法與常例反如

丄斤乂丄斤＝丅一　蓋先將

斤乂斤　相乘得下又將　丄乂丄　相乘得上然後以　丅乂丄　相

乘仍得下如

丅斤乂丅斤＝丅一　蓋先將

斤乂斤　相乘得下又將　丅乂丅　相乘得上然後以　丅乂丄　相乘仍得丅一此可見同號

相乘得數反爲負也又如 上斤乂下斤二上 蓋先將 斤乂斤 相乘得下又以 上乂下 相乘亦得下然後以 下乂下 相乘得上此可見異號相乘得數反爲正也推原其故蓋因 斤乂斤 相乘得數仍爲下不能爲上故有此變態也

是故

一次　一丄斤

二次　一丄二斤丄斤二＝一丄二斤

三次　丄三斤丄三斤丄斤三＝一丄三斤

而

一次　一丅斤

二次　一丅二斤丄斤二＝一丅二斤

三次　丅三斤丄三斤丅斤三＝一丅三斤

說曰此理即從前式化出也

此可見

三√斤丄斤丄斤＝一丄斤

三√斤丅斤丅斤＝一丅斤

而

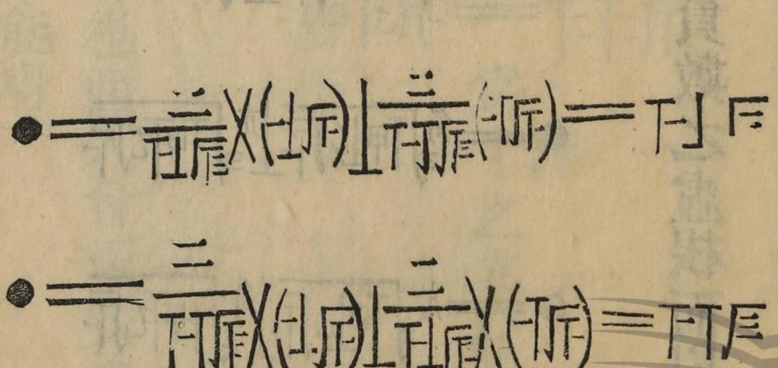
○＝三√斤丅斤丄斤丄三√斤丅斤丅斤

即

○＝(一丄斤)丄(一丅斤)＝二

說曰此爲一个實根也

設以元乂角相配之法馭之則得



說曰此亦為兩个實數之正根也

第三層

苟令

$$\sqrt[3]{-甲-乙\sqrt{-一}}=\sqrt[3]{-二+二\sqrt{-一}}$$

$$\sqrt[3]{-甲-乙\sqrt{-一}}=\sqrt[3]{-二-二\sqrt{-一}}$$

則

$$●=\sqrt[3]{-甲+乙\sqrt{-一}}+\sqrt[3]{-甲-乙\sqrt{-一}}$$

$$●=角\sqrt[3]{-甲+乙\sqrt{-一}}+亢\sqrt[3]{-甲-乙\sqrt{-一}}$$

$$●=亢\sqrt[3]{-甲+乙\sqrt{-一}}+角\sqrt[3]{-甲-乙\sqrt{-一}}$$

說曰此三式驟觀之皆疑爲負數之虛根而以前式證之則皆實數之正根也

第四層

但以

丁甲⊥乙斥＝丅二⊥二斥

為

一⊥斥之立方

丅甲丅乙斥＝丅二丅二斥

為

一丅斥之立方也屢試而得

說曰因他式不能依例求之也西人曾極費周折欲求此種根式之別形迄未能得

第五層

且三次式之根應爲(丄·)(丅·丄𠂆·)(丅·丅𠂆·)而此則爲(丄·)(丅·丄𠂆·)(丅·丅𠂆·)故

算學家名其根皆爲實根且名之曰不能化之根

說曰此須以正餘弦求之說詳代數鑰續編

論三次式虛根實根之所以別

(一丄厂三)丄(一丅厂三)＝二

故其餘兩根為

丅一丄厂丅九

丅一丅厂丅九

說曰此一个實根兩个虛根之式也因第一根中厂三為正故以角亢中之厂丅乘之得厂丅九而兩根為虛也

(一丄厈)丄(丅厈)═二

故其餘兩根為

丅一丄厓

丅一丅厓

說曰此三个根皆為實根之式也因第一个根中厈為負故以角亢中之厈乘之得厓而兩根為實也

說曰凡⿸厂三 與 ⿸厂三 相乘爲 丄三 ⿸厂三 與 ⿸厂丅三 相乘爲 ⿸厂九 ⿸厂丅三 與 ⿸厂丅三 相乘爲 丅三 ⿸厂斤 與 ⿸厂丅三 相乘爲 ⿸厂三 此三次式中虛根實根之所以別也

又曰凡⿸厂三 與 ⿸厂丅三 相乘得 ⿸厂九 其原式 √三二七午三丄四未三 必爲正數此⿸厂三 之所由來也凡⿸厂斤 與 ⿸厂丅三 相乘

得$\sqrt{}$其原式$\sqrt{\frac{一}{二七}午^{三}\perp\frac{一}{四}未^{二}}$必為負數此$\sqrt{}$之所由來也然其消息只在乎$\frac{一}{二七}午^{三}$蓋$\frac{一}{二七}午^{三}=\perp八$相加如$\sqrt{\frac{一}{二七}午^{三}\perp\frac{一}{四}未^{二}}=\sqrt{\perp○八}$此固為正數卽$\frac{一}{二七}午^{三}$為負然不大於$\frac{一}{四}未^{二}$則相加為$\sqrt{八\perp○○}$此亦正數也極而至於$\frac{一}{二七}午^{三}=\frac{一}{四}未^{二}$卽$\frac{一}{二七}午^{三}\perp\frac{一}{四}未^{二}=○$則其原式為$\sqrt{○\perp○}$仍不失為正數也獨至$\frac{一}{二七}午^{三}$為負數且

大於$\text{未}^{二}丄\text{四}_{二}$其相加$\sqrt{\text{四}}=\sqrt{\text{四}丄\text{八}丅}=\sqrt{\text{未}^{二}丄\text{四}_{二}\text{午}^{三}丄\text{二七}_{二}}$之類則其根為負根

即為不能化之根此辨虛根實根之要訣也

又曰$\sqrt{\text{未}^{二}丄\text{四}_{二}\text{午}^{三}丄\text{二七}_{二}}$如為正數者則其方根或求其畧數或

求其密率均非難事若𠃊七丅午四三三末爲負數試問得數如下丄斤能遽決其立方根爲一丄斤乎蓋不特不能遽求其密數并不能逕求其畧數故不得已而借徑於八線也

又曰以通加爲乘之理證之午與末本各自爲主故午可爲正可爲負可爲大可爲小也

論通四次式為二次式法

設有

$天=二$

即

$天=\sqrt{四}$

即

$天=\sqrt{乙}$

兩邊自乘得

$天^{二}=乙$

移項得

$天^{二}\,丅\,乙=〇$

自乘得

$天^{四}\,丅\,二乙天^{二}\,丄\,乙^{二}=〇$

其公式為

$天^{四}\,丄\,午天^{二}\,丄\,申=〇$

如以地^{二}

代天四則得

$$地^{二}丄午地丄甲=〇$$

以二次式之常法開之則得

$$地=\frac{二}{丅午丄\sqrt{午^{二}丅四甲}}$$

$$地=\frac{二}{丅午丅\sqrt{午^{二}丅四甲}}$$

惟以地等天四則

$$天^{二}=地$$

故得

$$天=十\sqrt{\frac{二}{丅午十\sqrt{午^{二}丅四甲}}}$$

說曰此乃四次式之空二四兩項者也

論通四次式為三次式法 內分十五層

第一層

設有四次式

天^{四}丅巳天^{二}丅午天丅未 ＝ 〇

即

天^{四}丅一〇〇天^{二}丅四八〇天丅五七六 ＝ 〇

則

丅巳 ＝ 丅一〇〇

丅午 ＝ 丅四八〇

丅未 ＝ 丅五七六

說曰此四次式之已變其第二項為空而無天^{三}之項者也

第二層

又有三次式

天丄呬天丄咔天丄味＝〇

即

天丄五〇天丄七六九天丄三六〇〇＝〇

其三个根爲

天＝丄甲＝丄九

天＝丄乙＝丄六

天＝丄丙＝丄五

說曰此三次式之俱全者也

則

丄甲　丄九
丄叱＝＝丄乙＝＝丄六＝＝丄五〇
丄丙　丄五

丄甲乙　丄一四四
丄吽＝＝丄甲丙＝＝丄二二五＝＝七六九
丄乙丙　丄四〇〇

丄味＝＝丄甲乙丙＝＝丄三六〇〇

說曰此三項卽爲兩式相通之關節也

今欲棄四次式之未午巳而用三次式之味吘吧入之

第三層

其相配亦爲

一○○●四八○●五七六●

說曰此言欲用三次以通四次也

第四層

又欲棄三次式之 味吘吧 而用四次式之 未午巳 八之

其相配亦為

○○六三九六七○五

說曰此言欲用四次以通

三次也

第五層

試合四次式

天^{四}丅巳天^{三}丅午天丅未＝○

之一根

天＝丄√甲丄√乙丄√丙

自乘得

天^{二}＝丄甲丄乙丄丙丄二(√甲乙丄√甲丙丄√乙丙)＝一四四

說曰此一層爲兩式通關緊要門戶也

第六層

乃以三次式證之則

丄甲丄乙丄丙＝丄吧

則

天^{二}＝丄吧丄二（甲乙丄甲丙丄乙丙

移項得

天^{二}丅吧＝二（甲乙丄甲丙丄乙丙

說曰吧字乃第一關消息也

自乘得

天^{四}丅二呷天丄呷^{二}＝

＝四(甲乙丄甲丙丄乙丙)八($\sqrt{甲^{二}乙丙}$丄$\sqrt{甲乙^{二}丙}$丄$\sqrt{甲乙丙^{二}}$)

說曰吽字味字乃第二關消息也觀下幅便知其理

第七層

又以三次式證之則

叶〓甲乙丄甲丙丄乙丙

而其

甲²乙丙丄甲乙²丙丄甲乙丙²〓甲乙丙（甲丄乙丄丙）〓味乂天

因得

天⁴丄二叶天²丄叶²〓四叶丄八味乂天

說曰如抽亂絲漸有端緒矣

第八層

細審

$天^{四}$丅二呷$天^{三}$丄$呷^{二}$〓四咛丄八厂咊天

內有

$天^{四}$　$天^{二}$　天

與空第二項之四次式相似因合之為

$天^{四}$丅二呷$天^{三}$丅八厂咊天丄$呷^{二}$丅四咛〓○

說曰方程求邊必令其右邊為○故此式可合兩邊為一邊亦令其右邊為空而成一个空第二項之四次式也

第九層

而以四次式之

天四丅巳天丅午天丅未二一〇

配之則得

丅二叩巳二丅巳二丅一〇〇

丅八味二丅午二丅四八〇

吧丅四吘二丅味二丄二五〇〇丅三〇七六二五六

說曰此以吧吘味而求巳午未也

第十層

又以三亥式之

天丄吧人丄吽人丨味二一○

配之則得

吧二二巳二五○

吽二四四巳丄四未二六巳味二七六九

味二六四午二三六○○

而

人巳丄人六巳二味人丄六四午二一○

說曰此以巳午未求吧吽味也

說曰此須以眞數求之則宛轉迴環無不巧合

十一層

此可見四次式中有一根為(甲丨乙丨丙)者即可化其根為丨甲丨乙丨丙以作三次式之三个根

十二層

惟四次式中

$\text{丁午} \equiv \text{仈}\sqrt{\text{陎}}$

$\sqrt{\text{陎}} = \sqrt{\text{甲乙丙}}$

而三次式中之末項連乘之積爲⊥甲乙丙其中必有相關之故

說曰有此一節則可化一个式爲八个式矣說詳後幅

十三層

因將

人三丄三言人三丄二六/巳三四未人丄六四/午三＝、

以四巳人代人則得

人三丄二巳人三丄(巳三四未)人丄午三＝○

而

丄甲丄乙丄丙

三根

化為

丄四/甲丄四/乙丄四/丙

說曰此即消去分母法也

十四層

故在三次式中

二巳＝五○

巳^{二}丄四未＝七六九

午^{二}＝三六○○

在四次式中

丅巳＝丅二五

丅午＝丅六○

丅未＝丅三六

說曰此欲變多數為少數以便於算也

則四次式

天^{四}丅〇〇天^{二}丅四八〇天丅五七六＝＝〇

變為

天^{四}丅二五天^{二}丅六〇天丅三六＝＝〇

而其根

(甲丄乙丄丙)＝＝‥(三丄四丄五)＝＝一二

變為

三(甲丄乙丄丙)＝＝三(三丄四丄五)＝＝六

說曰甲變為四甲故甲變為三甲也餘倣此

十

五　然由

層

六＝（五丄四丄三）＝$\frac{一}{二}$（丙丄乙丄甲）三

推之則有八个各異之根數卽有八个各異之乘數

說曰三負相乘爲負兩正一負相乘亦爲負三正相乘爲正兩負一正相乘亦爲正故其根數有八个

如

子＝三(丄三丄四丄五)＝丄六

丑＝三(丄三丅四丅五)＝丅三

寅＝三(丅三丄四丅五)＝丅二

卯＝三(丅三丅四丄五)＝丅一

則

子四丅巳子三丅午二子丅未＝〇

丑四丄巳丑三丅午丑丄未＝〇

寅四丄巳寅三丅午寅丄未＝〇

卯四丄巳卯一丅午卯丄未＝〇

如

子二三(下三下四下五)二下六

丑二三(下三上四上五)二上三

寅二三(上三下四上五)二上三

卯二三(上三上四下五)二上一

則

子四上巳子下午子上未二〇

丑四下巳丑上午丑下未二〇

寅四下巳寅上午寅下未二〇

卯四下巳卯上午卯下未二〇

此可見四次式中午爲負數者則丅日未爲正數而

其三次式末項連乘之積爲

丄九乂丄一六乂丄二五＝三六〇〇

丄九乂丅一六乂丅二五＝三六〇〇

丅九乂丄一六乂丅二五＝三六〇〇

丅九乂丅一六乂丄二五＝三六〇〇

又可見四次式中午爲正數者則┌未爲負數即

其三次式末項連乘之積爲

丅九乂丅六乂丅二五=丅三六○○

丅九乂丄六乂丅二五=丅三六○○

丄九乂丅六乂丄二五=丅三六○○

丄九乂丄六乂丅二五=丅三六○○

訣曰此可見遇四次式之題可化爲三次式之題

以便於算也

又曰化繁爲簡此代數之要訣也然自五次式以上則無有一定可化爲簡次式之通法即使有之亦必極繁重而不適於用

又曰此外尚有論求等職法求等數等根法求正根法求實根法求畧近之根法論泛倍數法論連分數法論對數法論方程界線均詳具代數鑰補編中

學代數卮言七則

代數之學原與天元相表裏然學者必確求其所以異處心中方有實得不得依前人元代合一之說便自謂

入代數之室也

代數中加減乘除四通八達變幻極矣然其中確有天然之理如合名法中之以指數求係數此實有不得不然之故並非有矯揉造作於其間也餘可類推

代數書中往往有繞道而行者令人艱於索解如代數術中四十五類第三式 $一五\times\sqrt{四\times一○}$ 即 $三○\sqrt{一○}$ 驟閱頗以為疑試再作一式以補之如 $一五\times\sqrt{四\times一○}$ 即 $一五\times二\times\sqrt{一○}$ 即 $三○\times\sqrt{一○}$ 便能釋然此

外可偶反也

代數法中往往有看似虛根卻爲實根者如三次式中不能化之根是也學者遇此種根式最宜格外留心体認方免歧誤

代數中之虛根其用最廣學者宜將其正負變幻之理徹底研究其益甚大

學者演代數時如有不得解處則照此書之法以眞數明之如再不得解則姑置之以俟明日蓋代數中正負雜糅一時目眩愈求愈亂不如少安無躁俟明日之別啟新機易於領悟也

代數之學浩無涯俟我輩所已習者如草之初芽耳學者演代數時苟偶有新得卽鈔存算稿俟異日進境漸深自有受用處也

黃慶澄曰天地間無物非有也天地間無物非無也非有非無卽有卽無無以名之名之曰如非無非有卽無卽有無以名之名之曰代一切衆生皆如也一切法亦如也一切衆生皆代也一切法亦代也天元言如如之又如是謂如如代數言代代之又代是謂代代維摩詰云斷取三千大千世界如陶家輪著右掌中擲過恆沙世界之外其中衆生不覺不知已之所往又復還置本

處都不使人有往來想而此世界本相如故又云或一眾生樂久住世而可度者菩薩卽演七日以爲一刼令彼眾生謂之一刼或有眾生不樂久住而可度者菩薩卽促一刼以爲七日令彼眾生謂之七日微乎微乎普願三千大千世界中之言治者言修者言自然者皆作如觀皆作代觀皆作如如代代觀

右代數鑰七卷自丁酉八月起草戊戌三月脫稿先後陸續付梓其間南走吳越北走燕舟車往來隨帶筆硯每於山郵烟雨中吮毫揮翰寢食俱廢刻旣成頗以自慰因樂誌數語於簡末云光緒戊戌四月二日東甌愚

初黃慶澄自記於四安客次