Monomi 10

10.1 L'insieme dei monomi

Definizione 10.1. Un'espressione letterale in cui numeri e lettere sono legati dalla sola moltiplicazione si chiama *monomio*.

Esempio 10.1. L'espressione nelle due variabili a e b, $E = 5 \cdot 2a^2 \frac{3}{8} ab7b^2$ è un monomio perché numeri e lettere sono legate solo dalla moltiplicazione.

Esempio 10.2. L'espressione $E = 2a^2 - ab^2$ non è un monomio poiché compare anche il segno di sottrazione.

✍ *Esercizio proposto:* 10.1

❑ **Osservazione** Gli elementi di un monomio sono *fattori*, perché sono termini di una moltiplicazione ma possono comparire anche *potenze*, infatti la potenza è una moltiplicazione di fattori uguali. Non possono invece comparire esponenti negativi o frazionari. In un monomio gli esponenti delle variabili devono essere numeri naturali.

Definizione 10.2. Un monomio si dice *ridotto in forma normale* quando è scritto come prodotto di un solo fattore numerico e di potenze letterali con basi diverse.

Esempio 10.3. Il monomio $E = 5 \cdot 2a^2 \frac{3}{8} ab7b^2$ non è scritto in forma normale: tra i suoi fattori vi sono numeri diversi e le potenze letterali hanno basi ripetute, la a e la b compaiono due volte ciascuna.

Moltiplichiamo tra loro i fattori numerici e otteniamo $\frac{105}{4}$; eseguiamo il prodotto di potenze con la stessa base otteniamo a^3b^3. Il monomio in forma normale è $E = \frac{105}{4} a^3b^3$.

Procedura 10.1. *Ridurre in forma normale un monomio:*

a) moltiplicare tra loro i fattori numerici;
b) moltiplicare le potenze con la stessa base.

✍ *Esercizio proposto:* 10.2

Definizione 10.3. La parte numerica del monomio ridotto a forma normale si chiama *coefficiente* e il complesso delle lettere ne costituisce la *parte letterale*.

Esempio 10.4. Nella tabella seguente sono segnati alcuni monomi con i rispettivi coefficienti e parti letterali.

monomio	$-\frac{1}{2}abc$	$3x^3y^5$	a^5b^7	$-k^2$
coefficiente	$-\frac{1}{2}$	3	1	-1
parte letterale	abc	x^3y^5	a^5b^7	k^2

Definizione 10.4. Se il coefficiente del monomio è zero il *monomio* si dice *nullo*.

Esempio 10.5. L'espressione letterale $\frac{3}{5}a^3bc^2$ è un monomio; il numero $\frac{3}{5}$ e le lettere a^3, b, c^2 sono legate dall'operazione di moltiplicazione; il suo coefficiente è il numero $\frac{3}{5}$ e la parte letterale è a^3bc^2.

Esempio 10.6. Controesempi:

a) l'espressione letterale $\frac{3}{5}a^3 + bc^2$ non è un monomio dal momento che numeri e lettere sono legati, oltre che dalla moltiplicazione, anche dall'addizione;
b) l'espressione letterale $\frac{3}{5}a^{-3}bc^2$ non è un monomio in quanto la potenza con esponente negativo rappresenta una divisione, infatti $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$.

Definizione 10.5. Due o più monomi che hanno parte letterale identica si dicono *simili*.

Esempio 10.7. Il monomio $\frac{3}{5}a^3bc^2$ è simile a $68a^3bc^2$ e anche a $-0,5a^3bc^2$, ma non è simile a $\frac{3}{5}a^2bc^3$. L'ultimo monomio ha le stesse lettere degli altri ma sono elevate ad esponenti diversi.

❑ **Osservazione** Il monomio nullo si considera simile a qualunque altro monomio.

Definizione 10.6. Due monomi simili che hanno coefficiente opposto si dicono *monomi opposti*.

Esempio 10.8. I monomi $\frac{3}{5}a^3bc^2$ e $-\frac{3}{5}a^3bc^2$ sono opposti, infatti sono simili e hanno coefficienti opposti.

Esempio 10.9. Non sono opposti $\frac{3}{5}a^3bc^2$ e $-7a^3bc^2$ ma semplicemente simili. I loro coefficienti hanno segno diverso, ma non sono numeri opposti.

Definizione 10.7. Quando il monomio è ridotto a forma normale, l'esponente di una sua variabile ci indica il *grado* del monomio *rispetto a quella variabile*.

Il *grado complessivo* di un monomio è la somma degli esponenti della parte letterale.

Esempio 10.10. Il monomio $\frac{3}{5}a^3bc^2$ ha grado complessivo 6, ottenuto sommando gli esponenti della sua parte letterale $(3+1+2=6)$. Rispetto alla variabile a è di terzo grado, rispetto alla variabile b è di primo grado, rispetto alla variabile c è di secondo grado.

Abbiamo detto che gli esponenti della parte letterale del monomio sono numeri naturali, dunque possiamo anche avere una o più variabili elevate ad esponente 0. Cosa succede allora nel monomio?

Consideriamo il monomio $56a^3b^0c^2$, sappiamo che qualunque numero diverso da zero elevato a zero è uguale a 1, quindi possiamo sostituire la variabile b che ha esponente 0 con 1 e otteniamo $56a^3 \cdot 1 \cdot c^2 = 56a^3c^2$. Se in un monomio ogni variabile ha esponente 0, il monomio rimane solamente con il suo coefficiente numerico: per esempio $-3a^0x^0 = -3 \cdot 1 \cdot 1 = -3$.

❑ **Osservazione** Esistono *monomi di grado 0*; essi presentano solo il coefficiente e pertanto *sono* equiparabili ai *numeri razionali*.

10.2 Valore di un monomio

Poiché il monomio è un'espressione letterale, possiamo calcolarne il valore quando alle sue variabili sostituiamo dei numeri.

Esempio 10.11. Calcola il valore del monomio $3x^4y^5z$ per i valori $x=-3$, $y=5$ e $z=0$.

Sostituendo i valori assegnati otteniamo $3 \cdot (-3)^4 \cdot 5^5 \cdot 0 = 0$ essendo uno dei fattori nullo.

❑ **Osservazione** Il valore di un monomio è nullo quando almeno una delle sue variabili assume il valore 0.

Molte formule di geometria sono scritte sotto forma di monomi: area del triangolo $\frac{1}{2}bh$, area del quadrato l^2, perimetro del quadrato $4l$, area del rettangolo bh, volume del cubo l^3, ecc. Esse acquistano un valore quando alle lettere sostituiamo i numeri che rappresentano le misure della figura considerata.

✍ *Esercizi proposti:* 10.3, 10.4, 10.5, 10.6, 10.7, 10.8, 10.9, 10.10, 10.11

10.3 Moltiplicazione di due monomi

Ci proponiamo ora di introdurre nell'insieme dei monomi le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, potenza e divisione.

Ricordiamo che definire un'operazione all'interno di un insieme significa stabilire una legge che associa a due elementi dell'insieme un altro elemento dell'insieme stesso.

La moltiplicazione di due monomi si indica con lo stesso simbolo della moltiplicazione tra numeri; i suoi termini si chiamano *fattori* e il risultato si chiama *prodotto*, proprio come negli insiemi numerici.

Definizione 10.8. Il prodotto di due monomi è il monomio avente per coefficiente il prodotto dei coefficienti e per parte letterale il prodotto delle parti letterali dei monomi fattori.

Esempio 10.12. Assegnati i monomi $m_1 = -4x^2yz^3$ e $m_2 = \frac{5}{6}x^3z^6$, il monomio prodotto è

$$m_3 = \left(-4 \cdot \frac{5}{6}\right)\left(x^2 \cdot x^3\right) \cdot y \cdot \left(z^3 \cdot z^6\right) = -\frac{10}{3}x^5yz^9.$$

Procedura 10.2 (per moltiplicare due monomi)**.** *La moltiplicazione tra monomi si effettua moltiplicando prima i coefficienti numerici e dopo le parti letterali:*

a) nella moltiplicazione tra i coefficienti usiamo le regole note della moltiplicazione tra numeri razionali;
b) nella moltiplicazione tra le parti letterali applichiamo la regola del prodotto di potenze con la stessa base.

10.3.1 Proprietà della moltiplicazione

a) commutativa: $m_1 \cdot m_2 = m_2 \cdot m_1$;
b) associativa: $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = (m_1 \cdot m_2) \cdot m_3 = m_1 \cdot (m_2 \cdot m_3)$;
c) 1 è l'elemento neutro: $1 \cdot m = m \cdot 1 = m$;
d) se uno dei fattori è uguale a 0 il prodotto è 0, cioè $0 \cdot m = m \cdot 0 = 0$.

✍ *Esercizi proposti:* 10.12, 10.13, 10.14, 10.15

10.4 Potenza di un monomio

Ricordiamo che tra i numeri l'operazione di elevamento a potenza ha un solo termine, la base, sulla quale si agisce a seconda dell'esponente.

$$\text{Potenza} = \text{base}^{\text{esponente}} = \underbrace{(\text{base} \cdot \text{base} \cdot \text{base} \cdot \ldots \cdot \text{base})}_{\text{tanti fattori quanti ne indica l'esponente}}.$$

Analogamente viene indicata la potenza di un monomio: la base è un monomio e l'esponente è un numero naturale.

Definizione 10.9. La *potenza di un monomio* è un monomio avente per coefficiente la potenza del coefficiente e per parte letterale la potenza della parte letterale.

Esempio 10.13. Calcoliamo il quadrato e il cubo del monomio $m_1 = -\frac{1}{2}a^2b$.

$$\text{elevo al quadrato} \quad \Rightarrow \quad \left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(a^2\right)^2 \cdot (b)^2 = \frac{1}{4}a^4b^2.$$

$$\text{elevo al cubo} \quad \Rightarrow \quad \left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (a^2)^3 \cdot (b)^3 = -\frac{1}{8}a^6b^3.$$

Esempio 10.14. Calcoliamo il quadrato e il cubo del monomio $m_2 = 5a^3b^2c^2$.

$$\text{elevo al quadrato} \quad \Rightarrow \quad (5a^3b^2c^2)^2 = (5)^2 \cdot (a^3)^2 \cdot (b^2)^2 \cdot (c^2)^2 = 25a^6b^4c^4.$$

$$\text{elevo al cubo} \quad \Rightarrow \quad (5a^3b^2c^2)^3 = (5)^3 \cdot (a^3)^3 \cdot (b^2)^3 \cdot (c^2)^3 = 125a^9b^6c^6.$$

Procedura 10.3. *Eseguire l'elevazione a potenza di un monomio:*

a) applichiamo la proprietà relativa alla potenza di un prodotto, eseguiamo cioè la potenza di ogni singolo fattore del monomio;
b) applichiamo la proprietà relativa alla potenza di potenza, moltiplicando l'esponente della variabile per l'esponente delle potenza.

✍ *Esercizi proposti:* 10.16, 10.17, 10.18, 10.19

10.5 Divisione di due monomi

Premessa: ricordiamo che assegnati due numeri razionali d_1 e d_2 con $d_2 \neq 0$, eseguire la divisione $d_1 : d_2$ significa determinare il numero q che moltiplicato per d_2 dà d_1. Nell'insieme $\mathbb{Q}$ la condizione $d_2 \neq 0$ è sufficiente per affermare che q esiste ed è un numero razionale.

Definizione 10.10. Assegnati due monomi m_1 e m_2 con m_2 diverso dal monomio nullo, se è possibile determinare il monomio q tale che $m_1 = q \cdot m_2$, si dice che m_1 è divisibile per m_2 e q è il monomio *quoziente*.

Esempio 10.15. $(36x^5y^2) : (-18x^3y)$.

Per quanto detto sopra, vogliamo trovare, se esiste, il monomio q tale che $(36x^5y^2) = q \cdot (-18x^3y)$ e ripensando alla moltiplicazione di monomi possiamo dire che $q = -2x^2y$. Infatti $(-2x^2y) \cdot (-18x^3y) = (36x^5y^2)$. Il monomio $-2x^2y$ è quindi il quoziente della divisione assegnata.

Procedura 10.4 (Calcolare il quoziente di due monomi)**.** *Il quoziente di due monomi è così composto:*

a) il coefficiente è il quoziente dei coefficienti dei monomi dati;
b) la parte letterale ha gli esponenti ottenuti sottraendo gli esponenti delle stesse variabili;
c) se la potenza di alcune lettere risulta negativa il risultato della divisione non è un monomio.

Esempio 10.16. $\left(\frac{7}{2}a^3x^4y^2\right) : \left(-\frac{21}{8}ax^2y\right)$.

Seguiamo i passi descritti sopra

$$\left(\frac{7}{2}a^3x^4y^2\right) : \left(-\frac{21}{8}ax^2y\right) = \frac{7}{2} \cdot \left(-\frac{8}{21}\right)a^{3-1}x^{4-2}y^{2-1} = -\frac{4}{3}a^2x^2y.$$

Nell'eseguire la divisione non abbiamo tenuto conto della condizione che il divisore deve essere diverso dal monomio nullo; questa condizione ci obbliga a stabilire per la divisione le Condizioni di Esistenza, C. E. : $a \neq 0$ e $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

Esempio 10.17. $\left(\frac{9}{20}a^2b^4\right) : \left(-\frac{1}{8}a^5b^2\right)$.

La C. E. $a \neq 0$ e $b \neq 0$, il quoziente è

$$\left(\frac{9}{20}a^2b^4\right) : \left(-\frac{1}{8}a^5b^2\right) = \left(\frac{9}{20}\right) \cdot (-8)a^{2-5}b^{4-2} = -\frac{18}{5}a^{-3}b^2.$$

Osserviamo che il quoziente ottenuto non è un monomio perché l'esponente della variabile a è negativo. Il risultato è un'espressione frazionaria o fratta.

In conclusione, l'operazione di divisione tra due monomi ha come risultato un monomio se ogni variabile del dividendo ha esponente maggiore o uguale all'esponente con cui compare nel divisore.

✍ *Esercizi proposti:* 10.20, 10.21, 10.22

10.6 Addizione di due monomi

L'addizione di due monomi si indica con lo stesso simbolo dell'addizione tra numeri; i suoi termini si chiamano *addendi* e il risultato si chiama *somma*.

10.6.1 Addizione di due monomi simili

La somma di due monomi simili è un monomio simile agli addendi e avente come coefficiente la somma dei coefficienti.

Esempio 10.18. Calcoliamo $3x^3 + (-6x^3)$.

I due addendi sono monomi simili dunque la somma è ancora un monomio ed è simile ai singoli addendi. Precisamente $3x^3 + (-6x^3) = (3 + (-6))x^3 = -3x^3$.

Osserva che la somma di monomi simili si riduce alla somma algebrica di numeri.

✍ *Esercizio proposto:* 10.23

Proprietà dell'addizione

a) commutativa: $m_1 + m_2 = m_2 + m_1$;
b) associativa: $m_1 + m_2 + m_3 = (m_1 + m_2) + m_3 = m_1 + (m_2 + m_3)$;
c) 0 è l'elemento neutro: $0 + m = m + 0 = m$;

d) per ogni monomio m esiste il monomio *opposto*, cioè un monomio m^* tale che

$$m + m^* = m^* + m = 0.$$

L'ultima proprietà enunciata ci permette di definire nell'insieme dei monomi simili anche la sottrazione di monomi. Essa si indica con lo stesso segno della sottrazione tra numeri e il suo risultato si chiama *differenza*.

❑ **Osservazione** Per sottrarre due monomi simili si aggiunge al primo l'opposto del secondo.

Esempio 10.19. Assegnati $m_1 = \frac{1}{2}a^2b$, $m_2 = -5a^2b$ determina $m_1 - m_2$.

L'operazione richiesta $\frac{1}{2}a^2b - (-5a^2b)$ diventa $\frac{1}{2}a^2b + 5a^2b = \frac{11}{2}a^2b$.

Sulla base di quanto detto, possiamo unificare le due operazioni di addizione e sottrazione di monomi simili in un'unica operazione che chiamiamo *somma algebrica di monomi*.

❑ **Osservazione** La somma algebrica di due monomi simili è un monomio simile agli addendi avente per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.

Esempio 10.20. Determiniamo la somma $\frac{3}{5}x^4 - \frac{1}{3}x^4 + x^4 + \frac{4}{5}x^4 - 2x^4 - \frac{1}{2}x^4$.

Osserviamo che tutti gli addendi sono tra loro simili dunque:

$$\frac{3}{5}x^4 - \frac{1}{3}x^4 + x^4 + \frac{4}{5}x^4 - 2x^4 - \frac{1}{2}x^4 = \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{3} + 1 + \frac{4}{5} - 2 - \frac{1}{2}\right)x^4 = -\frac{13}{30}x^4.$$

10.6.2 Addizione di monomi non simili

Analizziamo il caso della seguente addizione: $7a^3b^2 - 5a^2b^3 + a^3b^2$. Si vuole determinare la somma. I monomi addendi non sono tutti tra loro simili; lo sono però il primo e il terzo.

Le proprietà associativa e commutativa ci consentono di riscrivere l'addizione precedente "avvicinando" i monomi simili e sostituendo ad essi la loro somma:

$$7a^3b^2 - 5a^2b^3 + a^3b^2 = (7a^3b^2 + a^3b^2) - 5a^2b^3 = 8a^3b^2 - 5a^2b^3.$$

L'espressione così ottenuta è la somma richiesta.

✍ *Esercizio proposto:* 10.24

Il procedimento che abbiamo seguito per determinare il risultato dell'addizione assegnata viene chiamato *riduzione dei termini simili*.

In conclusione, l'operazione di addizione tra monomi ha come risultato un monomio solo se gli addendi sono monomi simili; in caso contrario la somma viene effettuata riducendo i monomi simili e lasciando indicata l'addizione tra gli altri monomi.

Esempio 10.21. Calcola la seguente somma: $3a - 7a + 2a + a$.

Il risultato è un monomio poiché gli addendi sono monomi simili, e vale $-a$.

Esempio 10.22. Calcola la seguente somma: $\frac{1}{2}a^3 + b - \frac{3}{4}a^3 - \frac{6}{5}b$.

Il risultato non è un monomio poiché gli addendi non sono monomi simili: $-\frac{1}{4}a^3 - \frac{1}{5}b$.

✍ *Esercizi proposti:* 10.25, 10.26, 10.27, 10.28, 10.29, 10.30, 10.31

10.7 Espressioni con i monomi

Consideriamo l'espressione letterale $E = \left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^3 : (a^5b) + (-2ab) \cdot \left(\frac{1}{2}b + b\right) + 5ab^2$.

Vediamo che è in due variabili, le variabili sono infatti a e b. Inoltre, i termini delle operazioni che vi compaiono sono monomi.

Se volessimo calcolare il valore di E per $a = 10$ e $b = -2$ dovremmo sostituire nell'espressione tali valori e risolvere l'espressione numerica che ne risulta. Inoltre se dovessimo calcolare il valore di E per altre coppie dovremmo ogni volta applicare questo procedimento.

Dal momento che abbiamo studiato come eseguire le operazioni razionali con i monomi, prima di sostituire i numeri alle lettere, applichiamo le regole del calcolo letterale in modo da ridurre E, se possibile, in un'espressione più semplice.

Prima di procedere, essendovi una divisione, poniamo innanzi tutto la C. E. $a \neq 0$ e $b \neq 0$ ed eseguiamo rispettando la precedenza delle operazioni come facciamo nelle espressioni numeriche.

Esempio 10.23. Calcola $\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^3 : (a^5b) + (-2ab) \cdot \left(\frac{1}{2}b + b\right) + 5ab^2$ per $a = 10$ e $b = -2$.

sviluppiamo per prima il cubo	$= \left(-\frac{1}{8}a^6b^3 : a^5b\right) + (-2ab) \cdot \frac{3}{2}b + 5ab^2$
eseguiamo divisione e moltiplicazione	$= -\frac{1}{8}ab^2 - 3ab^2 + 5ab^2$
sommiamo i monomi simili	$= \frac{15}{8}ab^2$.

Ora è più semplice calcolarne il valore per $a = 10$ e $b = -2$: si ha $= \frac{15}{8} \cdot 10 \cdot (-2)^2 = \frac{15}{8} \cdot 10 \cdot 4 = 75$.

Esempio 10.24. Riduci l'espressione $\left(\frac{2}{3}ab^2c\right)^2 : (-3ab^3) - \frac{2}{9}abc^2$.

Sviluppiamo le potenze	$= \frac{4}{9}a^2b^4c^2 : (-3ab^3) - \frac{2}{9}abc^2$
eseguiamo la divisione e moltiplichiamo le frazioni	$= -\frac{4}{27}abc^2 - \frac{2}{9}abc^2$
sommiamo i monomi simili	$= \frac{-4-6}{27}abc^2$
il risultato è	$= -\frac{10}{27}abc^2$.

Esempio 10.25. Riduci l'espressione $\left[\left(-\frac{14}{16}x^2y^2\right):\left(-\frac{14}{4}xy\right)\right]^3+\frac{1}{2}xy\cdot\frac{1}{4}x^2y^2.$

Eseguiamo la divisione tra le parentesi quadre $=\left[+\frac{14}{16}\cdot\frac{4}{14}xy\right]^3+\frac{1}{2}xy\cdot\frac{1}{4}x^2y^2$

eseguiamo la moltiplicazione tra le frazioni $=\left[\frac{1}{4}xy\right]^3+\frac{1}{2}xy\cdot\frac{1}{4}x^2y^2$

sviluppiamo il cubo $=\frac{1}{64}x^3y^3+\frac{1}{2}xy\cdot\frac{1}{4}x^2y^2$

moltiplichiamo i due monomi $=\frac{1}{64}x^3y^3+\frac{1}{8}x^3y^3$

sommiamo i monomi simili $=\frac{1+8}{64}x^3y^3$

il risultato è $=\frac{9}{64}x^3y^3.$

✍ *Esercizi proposti:* 10.32, 10.33, 10.34, 10.35, 10.36, 10.37, 10.38, 10.39, 10.40, 10.41, 10.42, 10.43

10.8 Massimo Comune Divisore e minimo comune multiplo tra monomi

10.8.1 Massimo Comune Divisore

Il calcolo del minimo comune multiplo e del Massimo Comune Divisore, studiato per i numeri, si estende anche ai monomi. Premettiamo intanto le seguenti definizioni.

Definizione 10.11. Un monomio A si dice *multiplo* di un monomio B se esiste un monomio C per il quale si ha $A = B \cdot C$; in questo caso diremo anche che B è *divisore* del monomio A.

Definizione 10.12. Il *massimo comune divisore* (MCD) tra due o più monomi è il monomio che, tra tutti i divisori comuni dei monomi dati, ha grado massimo.

Il coefficiente numerico può essere un qualunque numero reale: se i coefficienti sono tutti interi è opportuno scegliere il loro MCD, se non sono interi è opportuno scegliere 1.

Esempio 10.26. Dati i monomi $12a^3b^2$ e $16a^2b$ sono divisori comuni:

$$1, 2, 4, a, a^2, b, ab, a^2b, 2a, 2a^2, 2b, 2ab, 2a^2b, 4a, 4a^2, 4b, 4ab, 4a^2b.$$

Il monomio di grado massimo è a^2b, il MCD tra i coefficienti è 4. Pertanto il MCD dei monomi è $4a^2b$.

Procedura 10.5 (Calcolare il MCD tra monomi)**.** *Il* MCD *di un gruppo di monomi è il monomio che ha:*

a) per coefficiente numerico il MCD *dei valori assoluti dei coefficienti dei monomi qualora questi siano numeri interi, se non sono interi si prende 1;*
b) la parte letterale formata da tutte le lettere comuni ai monomi dati, ciascuna presa una sola volta e con l'esponente minore con cui compare.

Esempio 10.27. Calcolare il $\text{MCD}(14a^3b^4c^2, 4ab^2, 8a^2b^3c)$.

Per prima cosa calcoliamo il MCD tra i coefficienti numerici 14, 4 e 8 che è 2. Per ottenere la parte letterale si mettono insieme tutte le lettere comuni, ciascuna con l'esponente minore con cui compare: ab^2.

In definitiva, quindi, il $\text{MCD}(14a^3b^4c^2, 4ab^2, 8a^2b^3c) = 2ab^2$.

Esempio 10.28. Calcolare il massimo comune divisore tra $5x^3y^2z^3$, $-\frac{1}{8}xy^2z^2$ e $7x^3yz^2$.

Si osservi che i coefficienti numerici dei monomi non sono numeri interi quindi si prende 1 come coefficiente del MCD. Le lettere in comune sono x, y e z. Prese ciascuna con l'esponente minore con cui compaiono si ha xyz^2.

Quindi, il $\text{MCD}(5x^3y^2z^3, -\frac{1}{8}xy^2z^2, 7x^3yz^2) = xyz^2$.

❑ **Osservazione** La scelta di porre uguale a 1 il coefficiente numerico del MCD, nel caso in cui i monomi abbiano coefficienti razionali, è dovuta al fatto che una qualsiasi frazione divide tutte le altre e quindi una qualsiasi frazione potrebbe essere il coefficiente del MCD. Ad essere più precisi, occorrerebbe, quando si parla di monomi e polinomi, chiarire a quale degli insiemi numerici $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ appartengono i loro coefficienti. Qui stiamo considerando coefficienti numerici in $\mathbb{R}$.

Definizione 10.13. Due monomi si dicono *monomi primi tra loro* se il loro MCD è 1.

10.8.2 Minimo comune multiplo

Estendiamo ora ai monomi la nozione di minimo comune multiplo.

Definizione 10.14. Il *minimo comune multiplo* (mcm) di due o più monomi è il monomio che, tra tutti i monomi multipli comuni dei monomi dati, ha il grado minore.

Il coefficiente numerico può essere un qualunque numero reale: se i coefficienti sono tutti interi è opportuno scegliere il loro mcm, se non lo sono è opportuno scegliere 1.

Esempio 10.29. Per calcolare il minimo comune multiplo tra $5a^3b$ e $10a^2b^2$ dovremmo costruire i loro multipli finché non incontriamo quello comune che ha coefficiente numerico positivo più piccolo e grado minore:

$$\text{alcuni multipli di } 5a^3b \text{ sono: } 10a^3b,\ 10a^3b^2,\ 10a^4b,\ 15a^3b,\ \ldots$$
$$\text{alcuni multipli di } 10a^2b^2 \text{ sono: } 10a^2b^3,\ 10a^3b^2,\ 10a^4b^2,\ 20a^2b^2,\ \ldots$$

Il minimo comune multiplo è $10a^3b^2$.

In realtà, applicando la definizione è poco pratico calcolare il mcm, è utile invece la seguente procedura.

Procedura 10.6 (Calcolo del mcm tra due o più monomi)**.** *Il* mcm *di un gruppo di monomi è il monomio che ha:*

a) per coefficiente numerico il mcm *dei valori assoluti dei coefficienti dei monomi qualora questi siano numeri interi, se non sono interi si prende 1;*
b) la parte letterale formata da tutte le lettere comuni e non comuni ai monomi dati, ciascuna presa una sola volta e con l'esponente maggiore con cui compare.

Esempio 10.30. Calcola il minimo comune multiplo tra $5a^3bc$, $12ab^2c$ e $10a^3bc^2$.

Il mcm tra i coefficienti 5, 12, 10 è 60. Per ottenere la parte letterale osservo il grado maggiore delle lettere componenti i monomi, riporto tutte le lettere, comuni e non comuni, una sola volta con il grado maggiore con cui ciascuna compare: $a^3b^2c^2$.

In definitiva, il $\text{mcm}(5a^3bc, 12ab^2c, 10a^3bc^2) = 60a^3b^2c^2$.

Esempio 10.31. Calcola il $\text{mcm}(6x^2y, -\frac{1}{2}xy^2z, \frac{2}{3}x^3yz)$.

I coefficienti numerici dei monomi non sono interi, quindi il mcm avrà come coefficiente 1.

La parte letterale si costruisce mettendo insieme tutte le lettere che compaiono (x, y, z), ciascuna presa con l'esponente massimo, quindi x^3y^2z.

In definitiva $\text{mcm}(6x^2y, -\frac{1}{2}xy^2z, \frac{2}{3}x^3yz) = x^3y^2z$.

Assegnati due monomi, per esempio x^2y e xy^2z, calcoliamo MCD e mcm.

- $\text{MCD}(x^2y, xy^2z) = xy$;
- $\text{mcm}(x^2y, xy^2z) = x^2y^2z$.

Moltiplichiamo ora MCD e mcm. Abbiamo: $xy \cdot x^2y^2z = x^3y^3z$. Moltiplichiamo ora i monomi assegnati. Abbiamo: $(x^2y) \cdot (xy^2z) = x^3y^3z$. Il prodotto dei due monomi è uguale al prodotto tra il MCD e il mcm. Si può dimostrare che questa proprietà vale in generale.

Proprietà 10.7. *Dati due monomi, il prodotto tra il loro massimo comune divisore e il loro minimo comune multiplo è uguale al prodotto tra i monomi stessi.*

✍ *Esercizi proposti:* 10.44, 10.45, 10.46, 10.47, 10.48, 10.49, 10.50