Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 3

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 3.1. Zeige, dass die nicht-leeren Zariski-offenen Teilmengen auf der affinen Geraden $\mathbb{A}_K^1$ genau die (maximalen) Definitionsbereiche von rationalen Funktionen sind.

Aufgabe 3.2. Es sei K ein unendlicher Körper und es sei $P \in K[X]$ ein nichtkonstantes Polynom. Zeige, dass die durch P definierte Funktion $P\colon K \to K$ unendlich viele Werte annimmt.

Aufgabe 3.3. Skizziere die reellen Nullstellengebilde von $Y^n - X^n$ und bestimme das Verschwindungsideal zu den affin-algebraischen Mengen $V_n \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, die aus allen Geraden durch den Nullpunkt und durch die Eckpunkte eines regulären n-Ecks (mit $(1,0)$ als einem Eck) besteht.

Aufgabe 3.4. Man beschreibe eine Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^1,$$

die bezüglich der Zariski-Topologie stetig ist, die aber nicht durch ein Polynom gegeben ist.

Aufgabe 3.5. Es sei

$$V \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n = \mathbb{C}^n$$

eine affin-algebraische Menge. Zeige, dass unter der Identifizierung

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$$

die Teilmenge V auch eine affin-algebraische Menge des $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$ ist. Zeige, dass die Umkehrung nicht gilt.

Aufgabe 3.6. Sei (M,d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine nichtleere Teilmenge. Zeige, dass durch

$$d_T(x) := \inf\left(d(x,y),\, y \in T\right)$$

eine wohldefinierte, stetige Funktion $M \to \mathbb{R}$ gegeben ist.

Aufgabe 3.7. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass T genau dann abgeschlossen ist, wenn es eine stetige Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ mit

$$f^{-1}(0) = T$$

gibt.

Aufgabe 3.8. Zeige, dass die offenen und die abgeschlossenen Bälle $U(P, r)$ bzw. $B(P, r)$ im $\mathbb{R}^n$ zu $r > 0$ nicht offen bzw. abgeschlossen in der Zariski-Topologie sind.

Aufgabe 3.9. Charakterisiere in $\mathbb{Z}$ die Radikale mit Hilfe der Primfaktorzerlegung.

Ein Element a eines kommutativen Ringes R heißt *nilpotent*, wenn $a^n = 0$ ist für eine natürliche Zahl n.

Aufgabe 3.10. Es sei R ein kommutativer Ring und es seien $f, g \in R$ nilpotente Elemente. Zeige, dass dann die Summe $f + g$ ebenfalls nilpotent ist.

Aufgabe 3.11. Es sei R ein kommutativer Ring und $f \in R$ ein nilpotentes Element. Zeige, dass $1 + f$ eine Einheit ist.

Aufgabe 3.12. Es sei R ein kommutativer Ring und $r \in R$ ein nilpotentes Element. Konstruiere dazu ein lineares Polynom in $R[X]$, das eine Einheit ist. Man gebe auch das Inverse dazu an.

Ein kommutativer Ring R heißt *reduziert*, wenn 0 das einzige nilpotente Element von R ist.

Aufgabe 3.13.*

Zeige, dass ein Ideal $\mathfrak{a}$ in einem kommutativen Ring R genau dann ein Radikal ist, wenn der Restklassenring $R/\mathfrak{a}$ reduziert ist.

Aufgabe 3.14. Es sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal in einem kommutativen Ring R. Zeige, dass die Potenzen $\mathfrak{a}^n$, $n \in \mathbb{N}_+$, alle dasselbe Radikal besitzen.

Aufgabe 3.15. Zeige, dass ein Primideal ein Radikal ist.

Aufgabe 3.16. Seien R und S kommutative Ringe und sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Sei $\mathfrak{a}$ ein Radikal in S. Zeige, dass das Urbild $\varphi^{-1}(\mathfrak{a})$ ein Radikal in R ist.

Aufgabe 3.17. Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Ideale in $K[X_1, \ldots, X_n]$ derart, dass ihre Radikale gleich sind. Zeige, dass dann auch ihre Nullstellenmengen übereinstimmen. Zeige durch ein Beispiel, dass die Umkehrung nicht stimmt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 3.18. (3 Punkte)

Sei

$$\varphi\colon\ \mathbb{A}_K^n \longrightarrow \mathbb{A}_K^m$$

eine Abbildung, die durch m Polynome in n Variablen gegeben sei. Zeige, dass φ stetig bezüglich der Zariski-Topologie ist.

Aufgabe 3.19. Es sei K ein unendlicher Körper. Zeige, dass jede nichtleere Zariski-offene Menge $U \subseteq \mathbb{A}_K^n$ dicht ist.

Tipp: Induktion über n.

Aufgabe 3.20. (5 Punkte)

Bestimme zu den folgenden Teilmengen der affinen Ebene $\mathbb{A}_K^2$ den Zariski-Abschluss.

(1) $\{(x, \sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$,
(2) $\{(\cos(x), \sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$,
(3) $\{(x, x^3) \mid 0 \leq x \leq 1,\ x \in \mathbb{R}\}$,
(4) $\{(x, x^3) \mid 0 \leq x \leq 1,\ x \in \mathbb{Q}\}$,
(5) $\{(x, x^3) \mid x \in \mathbb{Z}/(5)\}$.

Die folgende Aufgabe benutzt einige weiterführende topologische Begriffe.

Aufgabe 3.21. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper.

(1) Man zeige, dass für $K = \mathbb{R}$ bzw. $K = \mathbb{C}$ die Standardtopologie (die metrische oder euklidische Topologie) feiner ist als die Zariski-Topologie.
(2) Man zeige, dass für $K[X]$ die Zariski-Topologie mit der kofiniten Topologie übereinstimmt. Gilt dies auch für $K[X_1, \ldots, X_n]$ mit $n > 1$?

(3) Wann ist die Zariski-Topologie T_1, wann ist sie hausdorffsch?
(4) Wie sieht die Zariski-Topologie aus, wenn K ein endlicher Körper ist?