Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2016/2017**

Grundkurs Mathematik I

Vorlesung 17

> If you don't know how to fix it, please stop breaking it
>
> Severn Suzuki

Terme und Gleichungen

Unter einem (arithmetischen) „Term“ versteht man einen „zahlähnlichen“ Ausdruck, der sich aus „Zahlen“ und „Variablen“ mit Hilfe der Verknüpfungssymbole $+$ und $\cdot$ (eventuell mit $-$ und $:$ oder daraus abgeleiteten Operationen wie Potenzen), mit weiteren Funktionssysmbolen (wie die Fakultät, Wurzel) und mit Klammern „korrekt“ bilden lässt. Eine Variable ist typischerweise ein Buchstabe x, y, z, a, b, c, in den man eine echte Zahl (zumeist aus einem fixierten Zahlenbereich) oder auch einen anderen Term einsetzen kann.[1] Mit zahlenähnlich ist gemeint, dass wirklich eine Zahl entsteht, wenn man alle Variablen durch Zahlen ersetzt. Terme sind auch die Ausdrücke, die auf einer Seite einer Gleichung (oder Ungleichung) stehen können. Beispielsweise sind

$$3 \cdot (4+5),\ x,\ 2x+7,\ \frac{3}{7},\ 4x^3-y,\ (a+b)^2,$$
$$a^2+2ab+b^2,\ 0 \cdot 1,\ n!,\ \binom{n}{k},\ \pi,\ e^u, x^y,\ 5^x,\ \sqrt{x},\ \sum_{i=1}^n a_i$$

Terme. Dagegen sind

$$3 \cdot (4+5)),\ 2x+7=0,\ \sqrt{\ }$$

keine Terme.

Wichtig ist, dass man Terme nur dann als gleich ansieht, wenn es sich um dieselbe Zeichenreihe handelt. Das „Ausrechnen“ oder „Vereinfachen“ von Termen verändert den Term, aber nicht die dadurch gegebene Zahl. Beispielsweise sind $3+5$ und 8 oder $(a+b)^2$ und $a^2+2ab+b^2$ verschiedene Terme. Gleichheit zwischen diesen beiden letzten Ausdrücken gilt nur bei einer bestimmten Interpretation, wenn man a und b als natürliche Zahlen oder

[1] Laufvariablen kann man nicht durch andere Terme ersetzen, nur durch eine andere Laufvariable umbenennen. Eine Laufvariable kommt beispielsweise im Term $\sum_{i=1}^n i$ vor, hier ist i eine Laufvariable und n eine echte Variable. Andererseits bezeichnet der Buchstabe π die Kreiszahl und ist keine Variable.

als Elemente eines kommutativen Halbringes interpretiert (erste binomische Formel).

Eine wichtige Funktion von Termen ist ihr Auftreten in Gleichungen. Gleichungen und Terme treten in der Mathematik in unterschiedlicher Bedeutung auf, die sich häufig vom Kontext her erkennen lassen.

1) Identitäten von Elementen

Das sind Gleichungen der Form $2 + 4 = 6$ oder $3 \cdot 7 = 21$ oder $4! = 24$, die besagen, das zwei irgendwie gegebene Elemente einer Menge gleich sind. $2+4$ und 6 sind unterschiedliche Terme, haben aber denselben Zahlwert. In solchen Gleichungen kommen keine Variablen vor. Häufig werden solche Gleichungen verwendet, um etwas auszurechnen, also einen komplizierten Ausdruck in eine einfache Standardform zu bringen. Dazu gehören die Rechnungen in $\mathbb{N}$, etwa im Dezimalsystem.

2) Allgemeine Termidentitäten (Formeln, Rechengesetze)

Diese drücken eine allgemeine Gleichung zwischen Termen aus, in denen Variabeln vorkommen, und die Gleichheit bedeutet, dass für jede sinnvolle Ersetzung der Variablen durch Zahlen (die gewisse Bedingungen erfüllen) Gleichheit gilt. Beispiele dazu sind

$$a(b + c) = ab + ac$$

oder

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

oder

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Sie drücken eine Gesetzmäßigkeit aus, die unter bestimmten Bedingungen gilt, beispielsweise wenn a, b Elemente eines kommutativen Halbringes sind oder wenn a, b Kathetenlängen und c die Hypotenusenlänge eines rechtwinkligen Dreiecks ist. Charakteristisch für solche Gleichungen ist, dass in ihnen Variablen vorkommen und dass, wenn man für die Variablen simultan (also an jeder Stelle, wo die Variable steht) Elemente, die die Bedingung erfüllen, einsetzt, eine wahre Elementgleichung entsteht. Eine solche Identität repräsentiert also eine Vielzahl an einzelnen Elementgleichungen. Aus dem Distributivgesetz ensteht beispielsweise durch Einsetzen die spezielle Identität $3 \cdot (5 + 4) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4$.

3) Definitionsgleichungen

Das sind Gleichungen, durch die eine abkürzende Schreibweise für einen komplexeren Ausdruck eingeführt wird. Beispiele sind

$$a^3 = a \cdot a \cdot a,\ n! = n(n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1,\ \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!},\ P = 4x^2 + 7x - 5\,.$$

Hierbei schreibt man häufig $:=$ (gelesen: ist definitionsgemäß gleich) statt $=$, wobei der Doppelpunkt auf der Seite des einzuführenden Ausdrucks steht.

4) Gleichungen als Bedingung

Damit sind Gleichungen wie

$x+3=5$, $4x=9$, $2x+7=0$, $5x^2-3x+4=0$, $x=y$, $y=f(x)$, $x^2+y^2=1$

gemeint. In diesen kommen (in aller Regel) Variablen vor, es wird aber nicht eine allgemeingültige Formel zum Ausdruck gebracht, sondern es wird eine Bedingung an die auftretenden Variablen formuliert. D.h. es werden die Elemente gesucht, die die Gleichungen erfüllen, die man also für die Variablen einsetzen kann, damit eine wahre Elementidentität entsteht. Gleichungen in diesem Sinne definieren die Aufgabenstellung, nach Lösungen zu suchen. Eine Lösung ist ein Element a aus der gegebenen Grundmenge M (bzw. ein Tupel wie $(a,b) \in M \times M$, falls es mehrere Variablen gibt), das die Eigenschaft besitzt, dass wenn man x durch a ersetzt, eine wahre Elementidentität entsteht. Die Lösungsmenge besteht aus allen Lösungen, sie kann leer sein, aus einem Element oder aus vielen Elementen bestehen. Statt einer einzigen Gleichung kann auch ein (beispielsweise lineares) Gleichungssystem vorliegen.

Manche Gleichungen kann man in mehrfacher Weise auffassen. So kann man die Gleichung

$$a^2 + b^2 = c^2$$

als Gesetzmäßigkeit in einem rechtwinkligen Dreieck auffassen (bei richtiger Interpretation der einzelnen Variablen) oder als Aufgabenstellung, alle Tripel (a,b,c) zu bestimmen, die diese Gleichung erfüllen. Eine funktionale Gleichung $y = f(x)$ kann man als eine abkürzende Schreibweise für den funktionalen Ausdruck $f(x)$ ansehen oder als eine Bedingung für Punkte (x,y) in der Ebene betrachten (die erfüllenden Punktepaare bilden dann den Graphen der Funktion f).

Gleichungen in einer Variablen

In dieser Vorlesung beschäftigen wir uns mit Gleichungen von dem zuletzt beschriebenen Typ, in dem nur eine Variable vorkommt, und die von einer einfachen Bauart sind.

Unter einer Gleichung in einer Variablen (oder Unbekannten oder Unbestimmten) x versteht man einen Ausdruck der Form

$$f(x) = g(x),$$

wobei sowohl $f(x)$ als auch $g(x)$ mathematische Ausdrücke (Terme) bezeichnen, in denen x in einer mehr oder weniger komplexen Form vorkommt (als Extremfall erlauben wir die Situation, wo $f(x)$ nicht explizit von x abhängt). In einer solchen Situation besteht die Aufgabe darin, die Lösungen oder die Lösung für x zu finden, also diejenigen Zahlen (aus einem vorgegebenen Zahlbereich) zu finden, die die Gleichung erfüllen, die also die Eigenschaft besitzen, dass, wenn man links und rechts die Unbestimmte durch die Zahl ersetzt, in der Tat links und rechts das gleiche steht, oder aber festzustellen, dass die

Gleichung keine Lösung hat. Typische Beispiele sind $3 + x = 9$, $4x = 7$, $3x = 7x^2 - 5$, $x! = 25$. Wenn man von Gleichungen in einer Variablen (von einer bestimmten Bauart) allgemein spricht, so ist es oft sinnvoll, für die umgebenden Daten, die die Gleichung konstituieren, selbst wieder Buchstaben zu verwenden. Diese sind zwar auch variabel, sie sind aber keine Variablen (der Gleichung), sondern *Parameter*, die man sich als konkret fixiert denken sollte. Eine solche Gleichung heißt auch eine *Gleichungsform*, erst durch die wirkliche Fixierung der Parameter als Zahlen entsteht eine echte Gleichung. Beispielsweise ist eine additive Gleichung eine Gleichung der Form

$$x + a = b$$

und eine lineare Gleichung ist eine Gleichung der Form $cx = d$. Hier sind a, b (bzw. c, d) Parameter, die die Gleichung festlegen, wofür dann die Lösung x gesucht wird.

Wir sagen, dass zwei Gleichungen (lösungs-)äquivalent sind, wenn sie sich auf die gleiche Variablenmenge beziehen und ihre Lösungsmengen übereinstimmen.

Bemerkung 17.1. Wenn eine Gleichung der Form

$$x = c$$

vorliegt, wobei c ein Term ist, in dem die Variable x nicht vorkommt, so sagt man, dass x in der Gleichung *isoliert* (oder *aufgelöst*[2]) vorliegt. Hierbei kann c eventuell ein komplizierter Ausdruck sein, und so besteht die Aufgabe im Allgemeinen darin, den Ausdruck c zu vereinfachen. Wenn beispielsweise

$$x = 23 - 15 + 7 \cdot 11$$

vorliegt, so führt dies auf die vereinfachte und nicht weiter zu vereinfachende Gleichung

$$x = 85,$$

die man dann als Lösung betrachtet. Grundsätzlich versteht man unter der Lösung (im Sinne von die Lösung finden) einer Gleichung in einer Variablen die Isolierung der Variablen auf einer Seite und die Vereinfachung der anderen Seite.

Bemerkung 17.2. Eine Gleichung der Form

$$f(x) = g(x)$$

mit Ausdrücken f und g, in denen die Variable x vorkommt, ist lösungsäquivalent zur Gleichung

$$f(x) - g(x) = 0.$$

[2]Dieser Sprachgebrauch ist nicht unproblematisch, da zur Lösung das Vereinfachen gehört. Allerdings ist dieser Vereinfachungsschritt häufig unproblematisch.

Für diese Umformung braucht man die negativen Zahlen. Grundsätzlich, und das heißt bei theoretischen Überlegungen, kann man sich auf Gleichungen der Form

$$h(x) = 0$$

mit einem Ausdruck h in der Variablen x beschränken. Allerdings muss diese Umstellung nicht unbedingt eine Vereinfachung sein.

Bemerkung 17.3. Wir arbeiten über den natürlichen Zahlen und betrachten die Gleichung

$$3 + x = 8$$

mit der Unbestimmten x. Gesucht ist also nach derjenigen Zahl, die zu 3 addiert die Zahl 8 ergibt. Diese Gleichung besitzt die einzige Lösung

$$x = 5.$$

Dies sind zwei Aussagen! Einerseits wird behauptet, dass 5 eine Lösung ist und andererseits, dass es außer der 5 keine weitere Lösung gibt. Das Erste kann man einfach durch Einsetzen und Nachrechnen überprüfen, es ist ja in der Tat

$$3 + 5 = 8.$$

Dass es keine weitere Lösung gibt, ergibt sich einfach aus der Abziehregel. Wenn y eine weitere Lösung der Gleichung ist,[3] so liegt die Gleichungskette

$$3 + 5 = 8 = 3 + y$$

vor, die Abziehregel sichert dann

$$5 = y.$$

Dieses Argument kann man auch dann durchführen, wenn man die eine Lösung 5 noch gar nicht kennt: Aus der Gleichung[4]

$$3 + x = 8 = 3 + y$$

folgt eben

$$x = y.$$

Betrachten wir allgemein eine Gleichung (eine *additive Gleichung* oder *Differenzgleichung*) der Form

$$a + x = b$$

mit fixierten natürlichen Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$. Zwar sind hier a, b ebenso wie x Buchstaben, die für natürliche Zahlen stehen, doch ist die Funktion jeweils eine andere. Die Zahlen a, b stellen jeweils fixierte natürliche Zahlen dar, die somit die Gleichung (als Parameter) festlegen, für die dann x die zu bestimmende Unbekannte ist. Wenn also $a + x = b$ vorliegt, so denke man nicht an die Menge aller Dreiertupel $(a, b, x) \in \mathbb{N}^3$ derart, dass die Gleichheit

[3] Hier ist y also ein bestimmtes Element der Grundmenge, das die Gleichung erfüllt, keine neue Variable der Gleichung.

[4] Dies ist keine neue Gleichung mit zwei Variablen, sondern eine Elementgleichung in $\mathbb{N}$.

vorliegt (was ebenfalls eine sinnvolle mathematische Aufgabe ist), sondern an eine Gleichung in x, die durch die Zahlen a, b als Parameter bestimmt ist.

Das Lösungsverhalten über $\mathbb{N}$ einer Gleichung der Form

$$a + x = b$$

hängt vom Größenverhältnis zwischen a und b ab. Bei $a > b$ gibt es keine Lösung, da wegen

$$a + x \geq a > b$$

die linke Seite stets (für jedes $x \in \mathbb{N}$) größer als die rechte Seite ist.

Bei $a \leq b$ hingegen gibt es wie im zuerst genannten Beispiel genau eine Lösung. Die Voraussetzung

$$a \leq b$$

bedeutet ja, dass man von a aus durch sukzessives Nachfolgerbilden zu b gelangt. Diese Definition ist nach Lemma 10.2 äquivalent dazu, dass es überhaupt ein $x \in \mathbb{N}$ mit $a + x = b$ gibt. Die eindeutige Lösung ist dann gerade diejenige Zahl, die angibt, wie oft man den Nachfolger von a nehmen muss, um zu b zu gelangen. Also ist die Differenz[5]

$$b - a$$

die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung

$$a + x = b$$

bei $a \leq b$.

Umformungen

Eine wichtige Methode, Gleichungen zu lösen, besteht darin, sie umzuformen, indem man in der Gleichung beidseitig die gleiche Rechenoperation durchführt.

Satz 17.4. *Es sei*

$$f(x) = g(x)$$

eine Gleichung in der Variablen x über einem gegebenen Zahlenbereich M. Es sei

$$\varphi\colon M \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Dann gelten die folgenden Eigenschaften.

(1) *Wenn $a \in M$ eine Lösung der Gleichung ist, so ist a auch eine Lösung der umgeformten Gleichung*

$$\varphi(f(x)) = \varphi(g(x)).$$

[5] Es ist typisch, dass Gleichungen zu neuen Begriffen führen.

(2) *Wenn φ injektiv ist, so ist $a \in M$ genau dann eine Lösung der Gleichung, wenn a eine Lösung der umgeformten Gleichung*

$$\varphi(f(x)) = \varphi(g(x))$$

ist.

Beweis. (1) Wenn

$$f(a) = g(a)$$

ist, so ist auch

$$\varphi(f(a)) = \varphi(g(a)),$$

da ja eine Abbildung wohldefiniert auf den Elementen ist, und nicht irgendwie von der Darstellung des Elementes abhängt.

(2) Dies ist eine unmittelbare Anwendung der Injektivität von φ.

□

Wichtige elementare Anwendungen dieses Prinzips sind, dass man zu einer Gleichung (über den natürlichen, ganzen, reellen Zahlen) beidseitig eine natürliche Zahl hinzuaddieren darf. Die Injektivität ergibt sich aus der Abziehregel. Bei einer injektiven Abbildung ergibt sich also eine lösungsäquivalente Gleichung, bei einer nicht injektiven Abbildung liefert die umgeformte Gleichung nur eine *notwendige Bedingung* für eine Lösung der ursprünglichen Gleichung.

Beispiel 17.5. Auf die Gleichung

$$x - 3 = 10$$

kann man beidseitig die Addition $+3$ (die bijektiv ist) loslassen und erhält die umgeformte Gleichung

$$x - 3 + 3 = 10 + 3.$$

Vereinfachungen führen auf die Lösung

$$x = 13.$$

Bemerkung 17.6. Sei eine Gleichung der Form

$$f(x) = g(x)$$

gegeben. Wir betrachten Gleichungsumformungen, die nicht auf einer injektiven Abbildung beruhen. Als Extremfall betrachten wir die Multiplikation mit 0, die ja aufgrund der Annullationsregel alles auf 0 abbildet und somit hochgradig nicht injektiv ist. Die umgeformte Gleichung ist

$$0 \cdot f(x) = 0 \cdot g(x),$$

also einfach

$$0 = 0.$$

Diese Gleichung wird natürlich von jedem x erfüllt, zum Auffinden der Lösungen der Ursprungsgleichung liefert diese Umformung keinen sinnvollen Beitrag.

Betrachten wir das Quadrieren, d.h. wir gehen von der gegebenen Gleichung zu

$$(f(x))^2 = (g(x))^2$$

über. Über den natürlichen Zahlen ist das Quadrieren eine injektive Abbildung, aber nicht auf den ganzen Zahlen. Die Gleichung

$$x = 3$$

hat offenbar die einzige Lösung

$$x = 3,$$

dagegen hat die quadrierte Gleichung

$$x^2 = 9$$

die beiden Lösungen

$$x = 3, -3.$$

Ungleichungen

Bei einer *Ungleichung* handelt es sich um einen Ausdruck der Form

$$f(x) \geq g(x),$$

wobei f und g Ausdrücke in der einen Variablen x sind. Statt Ungleichung ist eigentlich die Bezeichnung *Abschätzung* besser. Wie eine Gleichung bezieht sich eine solche Ungleichung auf eine Grundmenge M, typischerweise ein Zahlbereich mit einer Ordnung, in der die Ausdrücke f und g und das $\geq$ sinnvoll interpretiert werden können. Unter einer Lösung der Ungleichung versteht man ein $a \in M$, das die Bedingung

$$f(a) \geq g(a)$$

erfüllt. Unter der *Lösungsmenge* zur Ungleichung versteht man die Menge aller Lösungen, also die Menge

$$\{a \in M \mid f(a) \geq g(a)\} .$$