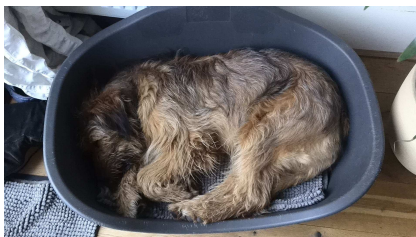


Mathematik für Anwender II

Vorlesung 41



So gerne Vorli als Vorlesungshund arbeitet, hinterher ist sie doch ganz schön ausgepowert von all der Energie, die sie zum Fließen gebracht hat. Da braucht sie erstmal ein Nickerchen um zu regenerieren.

Differentialgleichungen höherer Ordnung

Viele physikalische Bewegungsprozesse sind nicht dadurch determiniert, dass zu jedem Zeit- und Ortspunkt die Bewegungsrichtung (also die gerichtete Geschwindigkeit) vorgegeben wird, sondern dadurch, dass zu jedem Zeit- und Ortspunkt eine Kraft auf ein Teilchen wirkt, die dieses beschleunigt. In diesem Fall kann die Bewegung also nicht durch die erste Ableitung (Geschwindigkeit) modelliert werden, sondern durch die zweite Ableitung (Beschleunigung). Typische Beispiele hierzu sind die durch die Gravitation oder eine Federkraft hervorgerufenen Bewegungen.

BEISPIEL 41.1. Ein Gegenstand der Masse m wird im Vakuum aus einer Höhe 0 zum Zeitpunkt 0 losgelassen und fällt unter dem Einfluss der Gravitation zu Boden (freier Fall im Vakuum). Dabei wirkt auf den Körper die Gravitationskraft gm (die Erdbeschleunigung g nehmen wir für diesen Bewegungsvorgang als konstant an), die ihn nach dem Gesetz „Kraft ist Masse mal Beschleunigung“ beschleunigt. Die Beschleunigung ist also konstant und unabhängig von der Masse. Dies bedeutet, dass die Geschwindigkeit $v(t)$ des Körpers die Differentialgleichung

$$v'(t) = -g$$

erfüllt (die Wahl des Vorzeichens bewirkt, dass der Körper ins Negative fällt). Die durch die Anfangsbedingung (der Gegenstand ruhe zum Zeitpunkt 0) $v(0) = 0$ festgelegte Lösung für die Geschwindigkeit ist daher

$$v(t) = -gt.$$

Der zurückgelegte Weg $y(t)$ des Körpers ergibt sich wiederum aus der Differentialgleichung

$$y'(t) = v(t) = -gt,$$

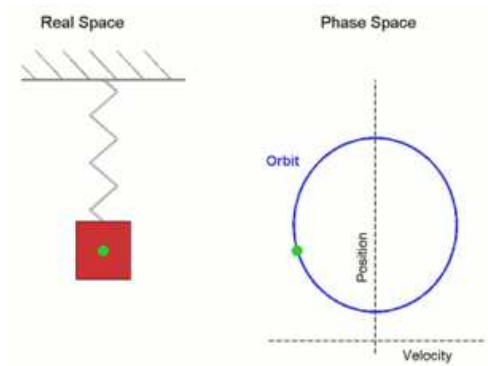
die besagt, dass die Ableitung des Weges nach der Zeit die Momentangeschwindigkeit beschreibt. Die Lösung davon ist

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2.$$

Den Gesamtvorgang kann man durch die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = -g$$

ausdrücken.



BEISPIEL 41.2. Wir betrachten die Bewegung eines Punktes auf einer Geraden, wobei die auf den Punkt (in Richtung des Nullpunkts) wirkende Kraft (bzw. Beschleunigung) proportional zur Lage des Punktes sein soll. Wenn der Punkt sich in \mathbb{R}_+ befindet und sich in die positive Richtung bewegt, so wirkt diese Kraft bremsend, wenn er sich in die negative Richtung bewegt, so wirkt die Kraft beschleunigend. Mit der Proportionalitätskonstante 1 gelangt man zur Differentialgleichung (zweiter Ordnung)

$$y'' = -y,$$

die diesen Bewegungsvorgang beschreibt. Als Anfangsbedingung wählen wir $y(0) = 0$ und $y'(0) = v$, zum Zeitpunkt 0 soll die Bewegung also durch den Nullpunkt gehen und dort die Geschwindigkeit v besitzen. Man kann sofort die Lösung

$$y(t) = v \cdot \sin t$$

angeben.

BEISPIEL 41.3. Ein Gegenstand der Masse m wird aus der Höhe losgelassen und fällt unter dem Einfluss der Gravitation zu Boden. Dabei wirkt auf den Körper einerseits die Gravitationskraft gm (die Erdbeschleunigung g nehmen wir für diesen Bewegungsvorgang als konstant an), die ihn beschleunigt,

andererseits wird diese Beschleunigung durch den Luftwiderstand verringert. Nach einem physikalischen Gesetz ist die Reibung (bei relativ kleinen Geschwindigkeiten) proportional und entgegengesetzt zur Geschwindigkeit des Körpers. Es sei β der Reibungswiderstand, also dieser Proportionalitätsfaktor. Die auf den Körper (nach unten) wirkende Gesamtkraft ist daher

$$F(t) = gm - \beta y'(t).$$

Wegen

$$y''(t) = \frac{F(t)}{m}$$

gilt daher für diesen Bewegungsvorgang die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = -\frac{\beta}{m}y' + g.$$

Die Lösungsfunktionen dazu sind

$$y(t) = -c\frac{m}{\beta}e^{-\frac{\beta}{m}t} + \frac{gm}{\beta}t + d$$

mit beliebigen Konstanten $c, d \in \mathbb{R}$. Siehe Aufgabe 41.4.

DEFINITION 41.4. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und

$$h: I \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann nennt man den Ausdruck

$$y^{(n)} = h(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

eine *Differentialgleichung der Ordnung n* .

Unter einer *Lösung einer Differentialgleichung höherer Ordnung* versteht man eine n -mal differenzierbare Funktion

$$y: J \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto y(t)$$

(wobei $J \subseteq I$ ein offenes Teilintervall ist) derart, dass

$$y^{(n)}(t) = h(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

für alle $t \in J$ gilt.

Differentialgleichungen beliebiger Ordnung können unter Inkaufnahme von neuen Variablen auf ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung zurückgeführt werden.

LEMMA 41.5. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und

$$h: I \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann ist die Differentialgleichung höherer Ordnung

$$y^{(n)} = h(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

über die Beziehung

$$v_i := y^{(i)}$$

äquivalent zum Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ h(t, v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Beweis. Wenn

$$y: J \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Lösung der Differentialgleichung höherer Ordnung

$$y^{(n)} = h(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

ist, so sind alle Funktionen $v_i = y^{(i)}$ für $i = 0, \dots, n-1$ differenzierbar, und es gilt $v'_i = v_{i+1}$ für $i = 0, \dots, n-2$ nach Definition und schließlich

$$\begin{aligned} v'_{n-1}(t) &= (y^{(n-1)})'(t) \\ &= y^{(n)}(t) \\ &= h(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \\ &= h(t, v_0(t), v_1(t), v_2(t), \dots, v_{n-1}(t)). \end{aligned}$$

Wenn umgekehrt

$$v: J \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Lösung des Differentialgleichungssystems zum Vektorfeld

$$\begin{aligned} F: I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n, (t, v_0, \dots, v_{n-1}) &\longmapsto F(t, v_0, \dots, v_{n-1}) \\ &= (v_1, \dots, v_{n-1}, h(t, v_0, v_1, \dots, v_{n-1})), \end{aligned}$$

ist, so ergibt sich sukzessive aus den ersten $n-1$ Gleichungen, dass $y = v_0$ n -mal differenzierbar ist, und die letzte Gleichung des Differentialgleichungssystems besagt gerade

$$y^{(n)}(t) = h(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)).$$

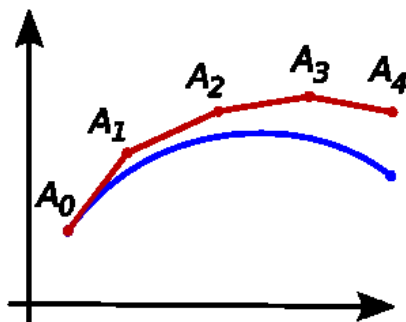
□

Mit dieser Umformung ist auch klar, wie sinnvolle Anfangsbedingungen für eine Differentialgleichung höherer Ordnung aussehen. Man muss nicht nur einen Startwert $y(t_0) = w_0$, sondern auch die höheren Ableitungen $y'(t_0) = w_1$, $y''(t_0) = w_2$, usw. festlegen.

Es ist im Allgemeinen schwierig, eine Differentialgleichung explizit zu lösen. Wir besprechen daher zunächst zwei approximierende Verfahren, nämlich das *eulersche Polygonzugverfahren* und den *Potenzreihenansatz*.

Polygonzugverfahren

Mit dem (eulerschen) Polygonzugverfahren wird die Lösungskurve einer Differentialgleichung diskret approximiert.



VERFAHREN 41.6. Es sei ein Vektorfeld

$$F: G \rightarrow \mathbb{R}^d$$

auf einer offenen Menge $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ und eine Anfangsbedingung $y(t_0) = P \in \mathbb{R}^d$ gegeben. Das *eulersche Polygonzugverfahren* funktioniert folgendermaßen: Man wählt eine Schrittweite $s > 0$ und berechnet rekursiv die Punktfolge P_n , $n \in \mathbb{N}$, durch $P_0 = P$ und

$$P_{n+1} = P_n + sF(t_0 + ns, P_n).$$

Zu einem schon konstruierten Punkt P_n wird also das s -fache des Richtungsvektors zum Zeitpunkt $t_0 + ns$ an diesem Punkt hinzuaddiert. Dies funktioniert nur, solange die Punkte im Definitionsbereich des Vektorfeldes liegen. Der zu dieser Punktfolge gehörende *Strecken zug* oder *Polygonzug*

$$\delta: \mathbb{R}_{\geq t_0} \rightarrow \mathbb{R}^d$$

ist die lineare Interpolation mit $\delta(t_0 + ns) = P_n$, d.h. für t mit $t_0 + ns \leq t \leq t_0 + (n+1)s$ ist

$$\delta(t) = P_n + \frac{t - t_0 - ns}{s}(P_{n+1} - P_n).$$

Dieser Streckenzug δ stellt eine stückweise lineare Approximation der Lösungskurve des Anfangswertproblems dar. Für eine kleinere Schrittweite wird die Approximation im Allgemeinen besser.

BEISPIEL 41.7. Bei einer ortsunabhängigen Differentialgleichung

$$y' = g(t)$$

ergibt sich y einfach als eine Stammfunktion zu g . Wendet man in dieser Situation Verfahren 41.5 zum Startzeitpunkt t_0 , zum Startpunkt c und zur Schrittweite s an, so ergibt sich die rekursive Beziehung

$$P_0 = c \text{ und } P_{n+1} = P_n + sg(t_0 + ns).$$

Daher ist offenbar

$$P_n = c + s(g(t_0) + g(t_0 + s) + g(t_0 + 2s) + \cdots + g(t_0 + (n-1)s)).$$

D.h. dass man zu dem Ausgangswert c das Treppenintegral zur äquidistanten Unterteilung $t_0, t_0+s, t_0+2s, \dots, t_0+(n-1)s$ (und zur durch $g(t_0+ks)$ auf dem Teilintervall $[t_0+ks, t_0+(k+1)s]$ gegebenen Treppenfunktion) hinzuaddiert. Der zugehörige Streckenzug ist die (stückweise lineare) Integralfunktion zu dieser Treppenfunktion.

BEISPIEL 41.8. Wir wollen für das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - ty \\ txy \end{pmatrix} = F(t, x, y)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gemäß Verfahren 41.5 einen approximierenden Streckenzug berechnen. Wir wählen die Schrittweite $s = \frac{1}{10}$. Somit ist

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{10}F(0, P_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} P_2 &= P_1 + \frac{1}{10}F\left(\frac{1}{10}, P_1\right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{11}{10} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \left(\frac{11}{10}\right)^2 - \frac{1}{10} \cdot 1 \\ \frac{1}{10} \cdot \frac{11}{10} \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{11}{10} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \frac{111}{100} \\ \frac{11}{100} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1211}{1000} \\ \frac{1011}{1000} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} P_3 &= P_2 + \frac{1}{10}F\left(\frac{2}{10}, P_2\right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1211}{1000} \\ \frac{1011}{1000} \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \left(\frac{1211}{1000}\right)^2 - \frac{2}{10} \cdot \frac{1011}{1000} \\ \frac{2}{10} \cdot \frac{1211}{1000} \cdot \frac{1011}{1000} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1211}{1000} \\ \frac{1011}{1000} \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \frac{1264321}{1000000} \\ \frac{2448642}{10000000} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{133743210}{100000000} \\ \frac{103548642}{100000000} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Potenzreihenansatz

Nicht alle Differentialgleichungen sind explizit lösbar, und selbst wenn es eine explizite Lösung gibt, so ist es häufig schwierig, diese zu finden. Statt der vollen Information einer Lösungskurve begnügt man sich häufig mit der Teilinformation, die in der Taylor-Entwicklung der Kurve (bis zu einem bestimmten Grad) enthalten ist, d.h. man bestimmt gewisse Ableitungen der Kurve zu einem bestimmten Zeit- und Ortspunkt. Diese Information kann man häufig direkt aus der Differentialgleichung ablesen, ohne die Lösungskurve zu bestimmen. Diese Vorgehensweise setzt voraus, dass das Vektorfeld durch „analytische“ (beispielsweise polynomiale) Daten gegeben ist.

VERFAHREN 41.9. Es sei ein Anfangswertproblem

$$x' = F(t, x) \text{ mit } x(0) = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$$

zu einem Vektorfeld

$$F: I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

gegeben, wobei die Komponentenfunktionen F_i , $i = 1, \dots, n$, polynomial (oder durch Potenzreihen gegeben) seien. Dann lässt sich ein *Potenzreihenansatz* für die Lösung durchführen. Das bedeutet, dass man den Ansatz $x_i = \sum_{k=0}^{\infty} a_{ki} t^k$ mit unbestimmten Koeffizienten a_{ki} macht, und diese Koeffizienten (bis zu einem gewünschten Grad) aus den n Gleichungen

$$x'_i(t) = F_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t))$$

sukzessive bestimmt. Die Anfangsbedingung

$$x_i(0) = a_{0i} = c_i$$

legt dabei die konstanten Koeffizienten fest. In das Differentialgleichungssystem werden die Potenzreihen links und rechts eingesetzt und ausgewertet, wobei die Ableitung links formal zu nehmen ist und rechts die Reihen formal zu addieren und zu multiplizieren sind. Dies ergibt Gleichungen für Potenzreihen in t , die durch Koeffizientenvergleich, beginnend mit den Koeffizienten von kleinem Grad, gelöst werden können.

BEISPIEL 41.10. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 t - y + t^3 + e^t \text{ mit } y(0) = 0$$

und wollen es mit einem Potenzreihenansatz lösen. Sei also

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k,$$

die auszuwertende Potenzreihengleichung ist somit

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right)^2 t - \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k + t^3 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k.$$

Die Anfangsbedingung legt $a_0 = 0$ fest. Für den konstanten Term (also zu t^0) ergibt sich aus der Potenzreihengleichung

$$a_1 = -a_0 + 1 = 1.$$

Für t^1 ergibt sich

$$2a_2 = a_0^2 - a_1 + 1 = 0.$$

Für t^2 ergibt sich

$$3a_3 = 2a_0a_1 - a_2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

also ist $a_3 = \frac{1}{6}$. Für t^3 ergibt sich

$$4a_4 = 2a_0a_2 + a_1^2 - a_3 + 1 + \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{6} + 1 + \frac{1}{6} = 2,$$

also ist $a_4 = \frac{1}{2}$. Für t^4 ergibt sich

$$5a_5 = 2a_0a_3 + 2a_1a_2 - a_4 + \frac{1}{24} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{24} = -\frac{11}{24},$$

also ist $a_5 = -\frac{11}{120}$. Die Taylor-Entwicklung der Lösungskurve bis zur Ordnung 5 ist demnach

$$t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^4 - \frac{11}{120}t^5.$$

BEISPIEL 41.11. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} tx - y^2 \\ xy - t^2 \end{pmatrix} \text{ mit } x(0) = 0 \text{ und } y(0) = 1$$

und machen den Potenzreihenansatz $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ und $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$. Aufgrund der Anfangsbedingung ist

$$a_0 = 0 \text{ und } b_0 = 1.$$

Das Differentialgleichungssystem führt auf die beiden Potenzreihengleichungen

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} = t \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) - \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \right)^2$$

und

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k t^{k-1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \right) - t^2,$$

die wir gradweise auswerten. Für den Grad 0 (der Potenzreihengleichungen) ergeben sich daraus die beiden Gleichungen

$$a_1 = -b_0^2 = -1 \text{ und } b_1 = a_0 b_0 = 0.$$

Für den Grad 1 ergeben sich daraus die beiden Gleichungen

$$2a_2 = a_0 - 2b_0b_1 = 0 \text{ und } 2b_2 = a_0b_1 + a_1b_0 = -1,$$

also ist $a_2 = 0$ und $b_2 = -\frac{1}{2}$. Für den Grad 2 ergeben sich daraus die beiden Gleichungen

$$3a_3 = a_1 - 2b_0b_2 - b_1^2 = -1 + 1 = 0 \text{ und } 3b_3 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 - 1 = -1,$$

also ist $a_3 = 0$ und $b_3 = -\frac{1}{3}$. Für den Grad 3 ergeben sich daraus die beiden Gleichungen

$$4a_4 = a_2 - 2b_0b_3 - 2b_1b_2 = \frac{2}{3} \text{ und } 4b_4 = a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0 = \frac{1}{2},$$

also ist $a_4 = \frac{1}{6}$ und $b_4 = \frac{1}{8}$. Die Taylor-Entwicklung der Lösungskurve bis zur Ordnung 4 ist demnach

$$\left(-t + \frac{1}{6}t^4, 1 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{8}t^4 \right).$$

BEMERKUNG 41.12. Eine Differentialgleichung höherer Ordnung

$$y^{(n)} = g(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

kann man entsprechend Bemerkung 41.8 mit einem *Potenzreihenansatz*, also mit einem Ansatz der Form

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

mit unbestimmten Koeffizienten a_k , (bis zu einer gewissen Ordnung) lösen. Dazu muss die Funktion g polynomial (oder durch eine Potenzreihe gegeben) sein. Damit die Lösung eindeutig ist, müssen zusätzlich Anfangsbedingungen

$$y(0) = b_0, y'(0) = b_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = b_{n-1}$$

vorgegeben sein. Die Koeffizienten a_k werden sukzessive unter Verwendung der Differentialgleichung und der Anfangsbedingungen gelöst.

BEISPIEL 41.13. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'' = y'y + \sin t \text{ mit } y(0) = 0 \text{ und } y'(0) = 1$$

und wollen es mit einem Potenzreihenansatz lösen. Sei also

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k,$$

die auszuwertende Potenzreihengleichung ist somit

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right)'' &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^{k-2} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1}. \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingung legt $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ fest. Für den konstanten Term (also zu t^0) ergibt sich aus der Potenzreihengleichung

$$2a_2 = a_1a_0 = 0,$$

also ist $a_2 = 0$. Für t^1 ergibt sich

$$6a_3 = a_1^2 + 2a_2a_0 + 1 = 2$$

also ist $a_3 = \frac{1}{3}$. Für t^2 ergibt sich

$$12a_4 = a_1a_2 + 2a_2a_1 + 3a_3a_0 = 0,$$

also ist $a_4 = 0$. Für t^3 ergibt sich

$$20a_5 = a_1a_3 + 2a_2^2 + 3a_3a_1 + 4a_4a_0 - \frac{1}{6} = \frac{4}{3} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6},$$

also ist $a_5 = \frac{7}{120}$. Die Taylor-Entwicklung der Lösungskurve bis zur Ordnung 5 ist demnach

$$t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{7}{120}t^5.$$

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Waeller35.jpg , Autor = Benutzer Odatrulle auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	1
Quelle = Simple Harmonic Motion Orbit.gif , Autor = Benutzer Mazemaster auf Commons, Lizenz = PD	2
Quelle = Euler method.png , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = PD	5
Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz.	11
Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt.	11