

出来る。

さて一様な空間密度で電荷を有する球外の電場は、球の全電荷が其の中心に集まつたものと考へてよい。磁氣に於ても同じである。故に今は $-\frac{4\pi a^3}{3}\rho$ なる磁氣量が O_1 に、 $+\frac{4\pi a^3}{3}\rho$ なる磁氣量が O_2 に集まつた場合を考へればよい。さて此の時球外にある點 A の磁位は

$$\Omega = \frac{4\pi a^3}{3}\rho \left(\frac{1}{AO_2} - \frac{1}{AO_1} \right)$$

である。然るに之は(4c)と全く同じ形である。故に今

$$\frac{4\pi a^3}{3}\rho d = \frac{4\pi a^3}{3} I = M \quad (13c)$$

$$\angle xO_2A = \theta$$

$$O_2A = r$$

とすれば A 點の磁位は(5)式と同じ形

$$\Omega = \frac{M \cos \theta}{r^2} \quad (13c')$$

になる。言ひ換へれば一様に磁化せられた球外の磁位は磁氣能率の絶対値が磁化の強さに球の體積を乗じたものに等しき小磁石を取つて其の方向は磁化の方向と同じになる如く球の中心に置いた場合の磁位と全く同様である。従つて磁場は(8a),(8b)で與へられ、磁力線の分布は第5圖の通りである。

球外の磁場は上の通りであるが次に球内の磁場は如何。之は磁石の内部の磁場とは如何なるものかを定義しなければ何とも言はれない。夫は磁石内の磁場を測るためには磁石内に正磁極を入れねばならず、磁極を入れるためには穴を穿たねばならないが、穴の形状によつて磁極に及ぼす力が異なるからである。此の事は次章に詳しく述べるが、今此の穴を小さい球であるとして、單位正磁極は其の中心にあるとする。第15圖はかく穿たかれた球形の穴であるとする。

さて磁化せる物體の中にかゝる球狀の穴を穿てば、右半分の壁には負磁氣、左の半分には正磁氣が現はれる。其の表面密度は

$$\sigma = -I \cos \theta$$

である。今 θ と $\theta+d\theta$ の間の磁氣が中心にある單位正磁氣極に及ぼす力の x 分は (ϵ を穴の半徑とすれば

$$\frac{I \cos \theta}{\epsilon^2} \cos \theta \cdot 2\pi \epsilon^2 \sin \theta \cdot d\theta$$

$$= 2\pi I \cos^2 \theta \sin \theta \cdot d\theta$$

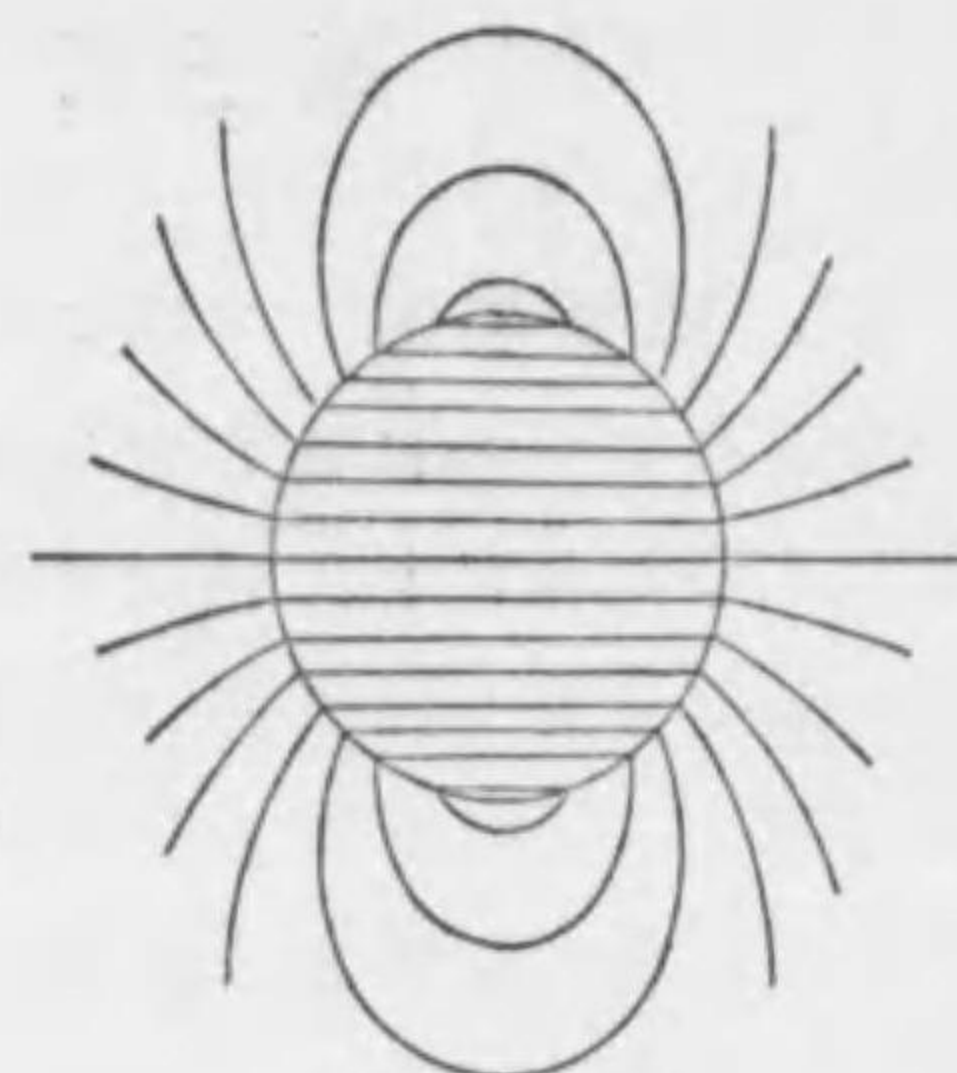
である。故に壁全體による力は之を $\theta=0$ から $\theta=\pi$ まで積分して

$$2\pi I \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta \cdot d\theta = \frac{4\pi I}{3}$$

となる。 x と直角の方向の分力が0となる事は對稱の理によつて明らかである。

即ち球内の磁場の強さは到る所一定値 $\frac{4\pi I}{3}$ を有し、磁化の方向に向つて居る。

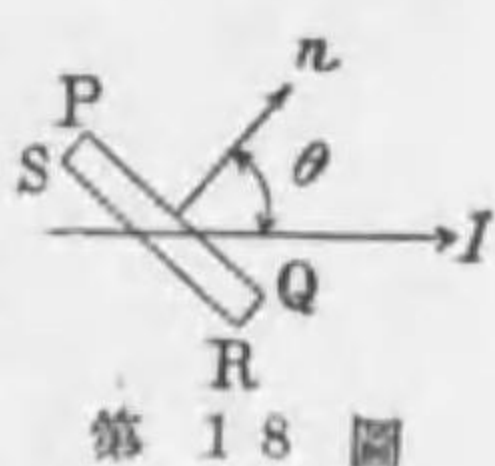
球の内外に於ける磁力線の分布は第17圖の通りである。



第 17 圖

第三章 磁氣感應

§9. 磁氣感應 本章に於ては磁化されてない物體を磁場内に入れるために磁化する事、即ち感應による磁化の現象を論ずる。今斯様にして磁化された物體の内部に極めて小なる圓柱 PQRS を考へ其の切口の面積 PQ、及び RS を dS 、高さ PS = QR を dl とし、尙 dl は dS に比して極めて小であるとする。 dS に立てた法線と磁化の方向となす角を θ とする。



此の圓柱の磁氣能率 dM を考へて見ると磁化を定義する (2a) によつて n の方向に於ける I のコンポーネントに筒の容積を乗じたものである。然るに n の方向に於ける I のコンポーネントは $I \cos \theta$ であるから

$$dM = I \cos \theta \cdot dS dl \quad (14a)$$

但し dl を dS に比し小としたために圓柱の側壁上の磁氣量の影響は dS 上の磁氣量に比して甚だ小さいから省略した。

さて此の圓柱を切り出した時 PQ なる面に現はれる磁氣量を dm 、RS に現はれる磁氣量を $-dm$ とすれば、磁氣能率の定義から

$$dM = dm dl$$

従つて之を (14a) に入れれば

$$dm = I \cos \theta dS$$

となる。此の式から $\frac{dm}{dS} = I \cos \theta$ を得る。さて $\frac{dm}{dS}$ は圓柱の端面に現はれる磁氣量の表面密度であるから、 $\frac{dm}{dS} = \sigma$ とすれば

$$\sigma = I \cos \theta \quad (14b)$$

を得る。此の理論は PQ 及び RS が圓にならなくても如何なる形をなしても成立する故に磁化せられた物體を磁化の方向と θ なる角をなす如き法線を有する平面で切れば、其の切口には (14b) で與へられる如き磁氣量が現はれる事が知られる。尙磁化せられた物體の表面は取りも直さず切口の一つであるから同様な磁氣量が現はれる。之が前節に用ひられた (13a) である。

此の事を知ると磁化せられた物體内に於ける單位正磁極に作用する力を知る事が出来る。

然し乍ら此の力を測定するには物體内に穴を穿つて其の中に磁極を入れたと考へなければならぬ。然るに穴を穿つと其の壁にも上に述べた如き磁氣が現はれ、其の影響によつて中に置いた磁極に作用する力が變つて来る。夫故に穴の形を一定にして置かなければ之は全く無意味の事になる。

今物體内に P 點を考へ、P の周りに、軸が其の點に於ける磁化の方向と平行なる圓筒形の穴を穿つたとせよ。然らば圓筒の側壁は磁化と平行であるから磁氣は現はれず、兩方の端面に I (端面は磁化に直角であるから $\theta = 0$) なる表面密度の磁氣が現はれるのみである。先づ此の圓筒が極めて細長く切口面積が甚だ小さい場合には、筒の長さ $2l$ を切口の面積を dS とすれば二つの端面にある磁氣量のために筒の中にある單位正磁極に作用する力は

$$2 \frac{IdS}{r^2}$$

である。之即ち P 點に於ける磁化に起因する力と考ふべきものである。 I を一定にして dS を小にすれば此の力は夫に比例にして小となり、遂には P にある單位正磁極に作用する力は P 點に於ける磁化には無關係となる。此の場合に於ける力の強さを磁化せられた物體内に於ける磁場の強さ又は磁力といひ

Hで表はす。或は又HがP點に於てIを起す原因であるといふ意味に於て之を磁化力ともいふ。

次に圓筒の切口の面積Sを大にして反對に長さdlを小にしたとすれば圓筒は薄い罅隙の形になり、其の側面には磁氣量が現はれず端面には $\pm I$ なる表面密度で磁氣量が表はれる。故に此の磁氣量のために罅隙中に置いた單位正磁極に作用する力は $4\pi I$ になる。之が即ちPに於ける磁化のために作用する力である。

罅隙中の單位正磁極に作用する力は之等のHと $4\pi I$ との和である。即ち $H+4\pi I$ が全體の力であつて之をP點に於ける磁氣感應と呼びBで表はす。

$$B = H + 4\pi I \quad (15a)$$

H及びBは何れも單位正磁極に作用する力であるからベクトルである事は明かである。

磁氣感應、磁力、磁化の方向は必ずしも常に一致するものではない。然し以下本書の取扱ふは通常之等が一致する場合のみである。

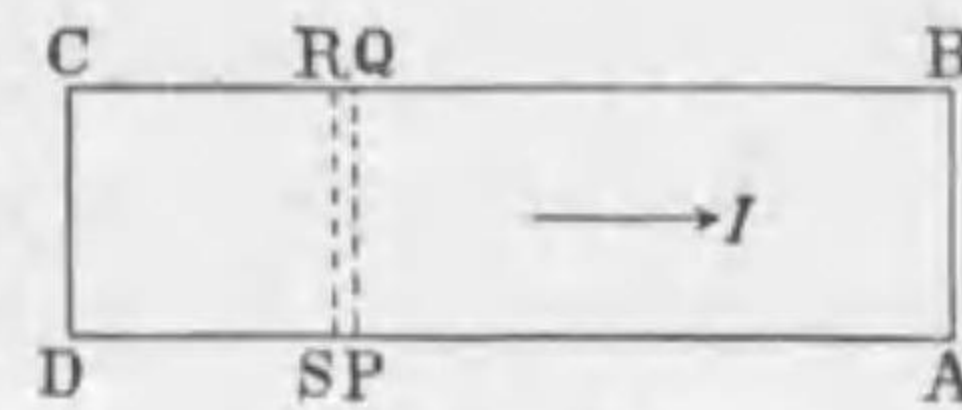
尙上記罅隙の端面が磁化の方向に直角でなく之から θ だけ偏れて居れば端面に現はれる磁氣量の表面密度は $I \cos \theta$ となり此のために罅隙中の單位正磁極に作用する力の大きさは $I \cos \theta$ で其の方向は罅隙の軸と一致する。

(15a)に於て $I=0$ とすれば $B=H$ となる。即ち磁化されない物体内では磁氣感應と磁力とは全く一致する。眞空は磁化されない故に眞空中ではBとHは同一物である。

前に電力及び磁力線を描いたと同じ約束に従つて磁氣感應線を描く事が出来る。又電力管及び磁力管を描いたと同様に磁氣感應管を描く事が出来る。又磁氣感應に直角な單位面積を等しい強さの磁氣感應管が通る時、其の数が丁度磁氣感應の

強さと等しい如き場合に各感應管の強さは1なりといふ。之を單位磁氣感應管といふ。通常誤解の虞のない時は單位なる語を省略する事もある。されば眞空中に於ては $\mu=1$ なる故にある面積を通過する磁氣感應管及び磁力管の数は相等しい。

第19圖の如き磁性體が一樣に磁化せられて、CDなる面には負磁氣、AB面には正磁氣が現はれて居るとする。此の磁石を磁化の方向に直角に切つて極めて僅



第 19 圖

か引き離して PQRS の如き隙間を造つたとすれば面 RS には正磁氣面、QP には負磁氣が現はれる事は(15b)から直に知られる。さて隙間に正磁極を置けば之を左方に動かさうとするものは CD 上の負磁氣、AB 上の正磁氣である。又右方に動かさうとするのは PQ 上の負磁氣と RS 上の正磁氣である。右方に動かさうとする力の方が強いから磁氣感應は磁石内では負極から正極の向ふ事がわかる。磁石外即ち眞空中にては如何といふに、こゝでは磁氣感應は正極から負極に向ふ磁力線と一致する事は上に述べた通りである。斯様に考へると磁氣感應は總て磁石内を通過して負極から正極に至り、眞空中(又は近似的には空氣中)に出でて發散して正極から負極に歸り一周して端がないように見える。果して然るか。之を吟味して見よう。

之を吟味するには如何にすべきかといふに磁石内を通過する磁氣感應管と例へば眞空中から負極に入るものとの数が等しいか否かを見ればよい。今第19圖の隙間を過ぎ CDRS なる部分を含む閉曲面を考へ、之にガウスの定理を應用すれば閉曲面内にある磁氣量は正負相等しいから、Fを閉曲面上のある點に置いた單位正磁極に作用する力、 θ を閉曲面の外方に向ふ法線nとFとのなす角、 dS は閉曲面の素面分とすれば

$$\int F \cos \theta dS = 0$$

此の F は単位磁極に作用する力であるから磁気感應に他ならない。従つて上の式は考へる閉曲面内に入つただけの単位磁気感應管が夫から出る事を示すものである。即ち負極から磁石内に入つたものは磁石内を正極の方に向つて進む事を示す。故に磁気感應線には端がなく閉曲線をなす。即ち磁気感應の場は無源場をなす。磁石はかゝる端のない磁気感應線の一部を一定の容積内に束ね込んだようなものである。

第19圖の磁石は初め一様に磁化されたものと假定したが之は磁気感應線に端のない事を簡単に見定めるためであつてガウスの定理を適用するには此の制限は不要である。されば上の結論は如何なる場合にも成立するものである。

§10. 磁化率及び導磁率 今迄磁化されて居らない物體を磁場内に入れれば一般に感應によつて磁化される。此の物體が等方性のものならばある點に於ける磁化 I の方向は其の點の磁力 H の方向と一致する。故に今

$$I = \chi H \quad (15b)$$

と置けば χ はスケーラーである。之を磁化率 (Magnetic susceptibility) といふ。

同じく等方性の場合には

$$B = \mu H \quad (15c)$$

と置けば μ もスケーラーである。之を導磁率 (Magnetic permeability) といふ。異方性物質に於ては B, H, I の三者の方向が一致しないから χ も μ もテンソルになる。

(15a) の I の代りに (15b) を入れれば

$$\mu = 1 + 4\pi\chi \quad (15d)$$

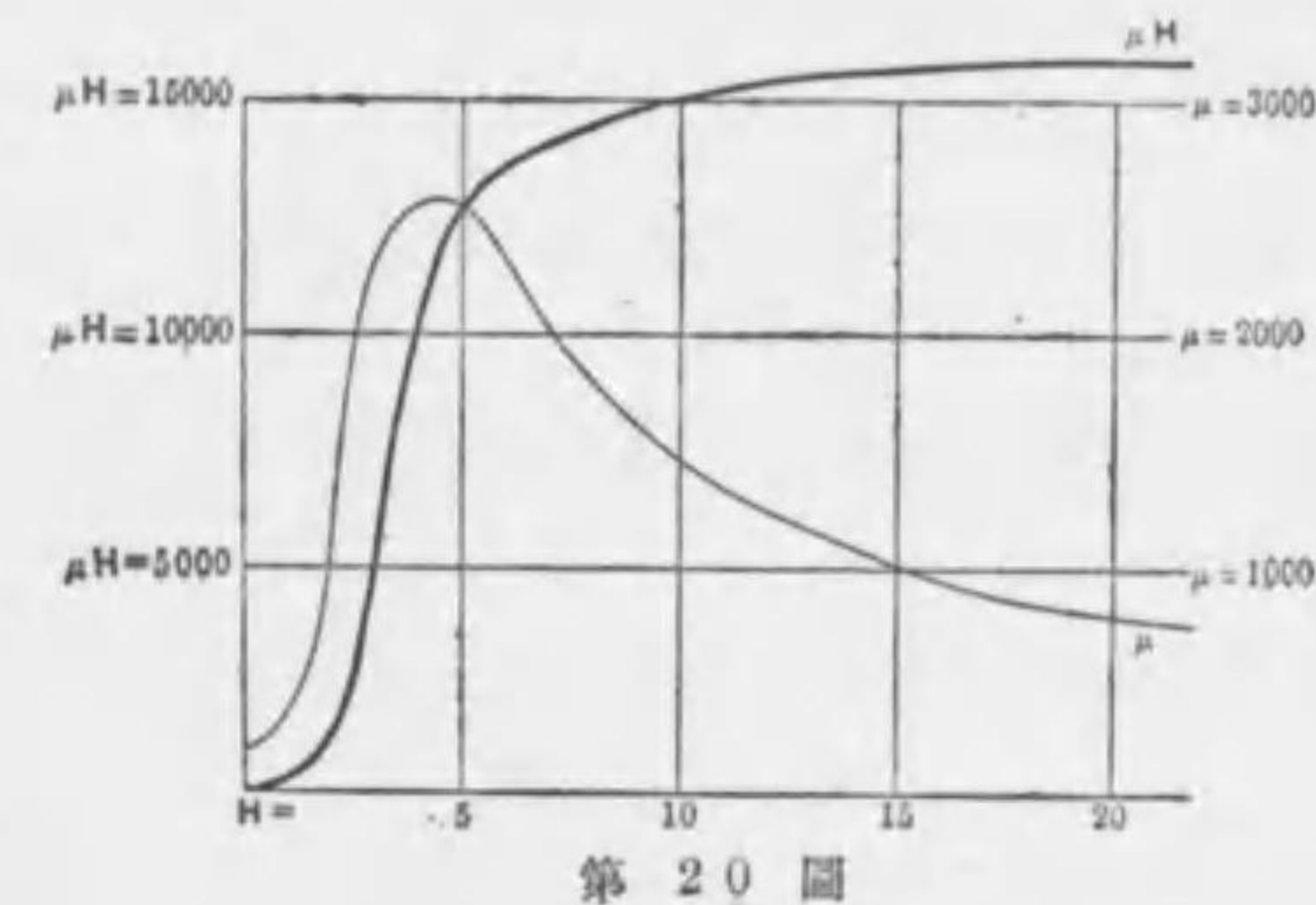
なる事が知られる。

真空は決して磁化されない。故に真空の χ は零で従つて $\mu = 1$ である。

磁化率及び導磁率は決して所謂物質常數ではなく、温度によつて著しく變化するのみならず物體の存在する場所の磁力 H によつて大いに異なり、又夫以前に如何なる磁氣的の歴史を其の物體が持て居るかによつても大いに異なる。以下簡単に之等に就て述べるが χ 及び μ は常に (15d) の關係を有するから μ に就て述べれば充分である。尙感應による磁化の現象は強磁性體殊に鐵及び鋼を除いては著しくないから之等の物質に就て述べれば充分である。今特に鐵に就て述べる。

先づ磁場の強さ H による μ の變化を見るに、 H が極めて小なる間は μ は稍一定で其の後増加してある最大値に達し、夫から徐々減少して、 H が充分に大なるに到れば $\mu H = B$ の値がある一定値(之を飽和値といふ)に近似する如くに減少する。第20圖の太い曲線は H

を横軸に、 $\mu H = B$ を縦軸に取つて之等の變化を示すものである。之を $B-H$ 曲線といふ。又細い曲線は H と μ との關係を示す。之



第 20 圖

によれば μ の最大値は 2590 で $H = 4.50$ の所に起つてゐる。

$B-H$ 曲線に對して磁化の強さ I と磁場の強さ H との關係を示す。曲線を $I-H$ 曲線又は磁化曲線といふ。時として $B-H$ 曲線の方を磁化曲線といふ事もある。

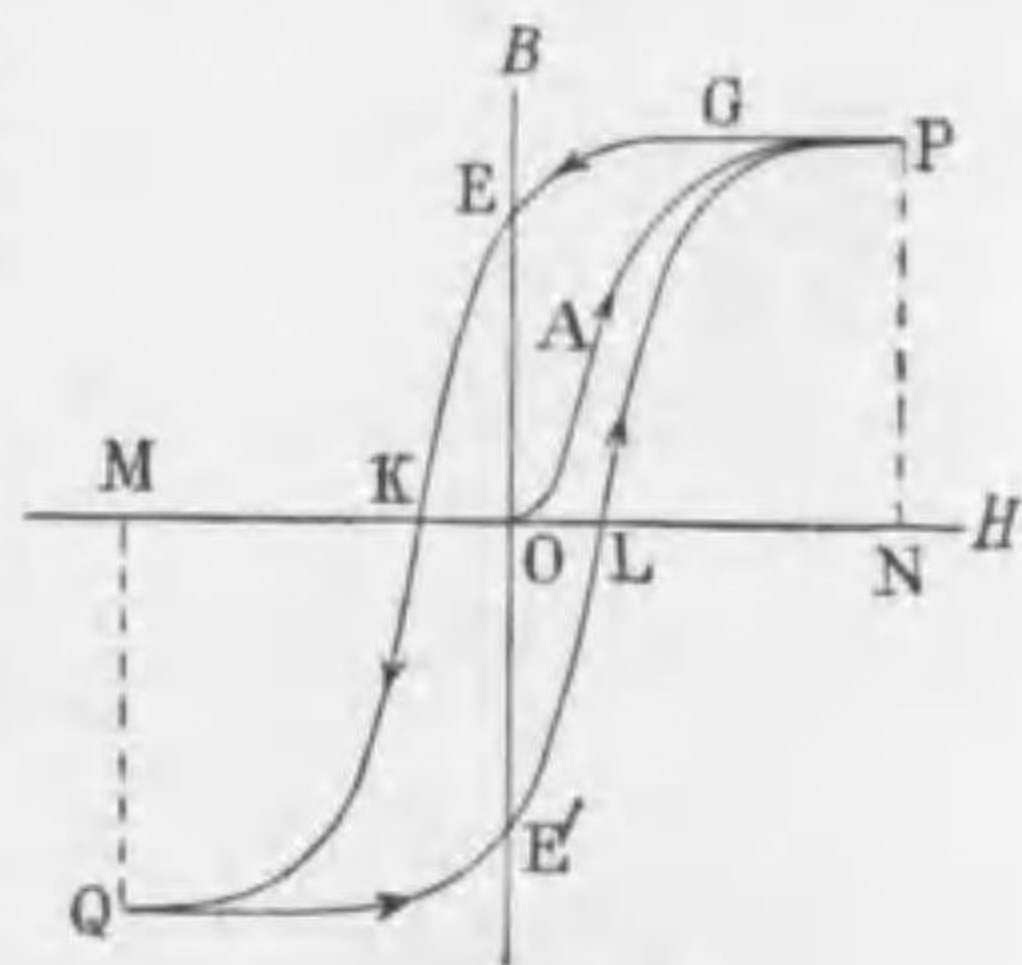
次に導磁率と温度との關係を見ると、常溫から初めて溫度を

上げて行くと初め μ は徐々に増加してある特定の臨界温度に近づくと非常に速に増加し、此の温度を通過するとたちまち減少して臨界温度より數度上では鐵も強磁性を失なつて常磁性體となる。純粹の鐵に於ては 790° が臨界温度で、市場にあるものでは 690°C から 870°C の間にある。かく著るしく磁氣的性質が變化するのは鐵の結晶(鐵は極めて小さな結晶の集合より成つて居る)の形式が此の温度で突然變化するによるものと考へられて居る。

常磁性體に於て磁化率 χ は一般に絶對温度に逆比例する。之を發見者の名に因んで Curie の法則といふ。

強磁性體に於て磁氣的の歴史によつて μ が變る現象をヒステレシス (Magnetic hysteresis) と呼ぶ。次節で此の事を述べる。

§ 11. ヒステレシス 一の軟鐵試験片を取つて之に磁力を加へると第 21 圖の OAP で示す如く磁氣感應 B が増加する。此の部分の曲線は初めは直線であるが次で急激に B の値が増加し更に H を増加せば漸次増加の割合を減じ遂にある飽和の値 P に達する。こゝで磁力 H を減少すると B も減少するが、初めの曲線 OAP を逆に辿



第 21 圖

る事をせず PGE の如き曲線を畫き、同じ磁力に對する B の値が明に最初のものよりも大きい事が知られる。換言すれば強磁性は過去の磁化の幾分を保留するものである。其の著るしい證據は磁力を全く取り去つても尙相當の磁力が殘留し其の値は OE で示される。強磁性體がかく $H=0$ に於ても過去の磁化の幾分を保留する性質を保磁性 (Magnetic retentiveness) とい

ふ。保磁性の最も大なるものは鋼鐵で、其の或物は嘗て所有せる磁化の 90% を保留する。永久磁石は斯かる材料を以て作られるものである。

H の値を 0 から更に減ずると今度は負になる。即ち方向が反對になり大きさは漸次増加すれば夫と共に磁氣感應を減じて EK の如き曲線を描き、磁力 H が $-\overline{OK}$ の時に初めて B の値は 0 となる。この \overline{OK} なる磁力を保磁力 (Coeactive force) と言ふ。更に H を減ずれば B は初めて負となつて KQ なる曲線で示す如き變化をなし、 $OM=ON$ ならば Q は O に關して P の對稱點である。夫より B を増せば即ち H の絶對値を減ずれば B も増し (即ち B の絶對値が減じ) $H=0$ の時は $-\overline{OE'}$ なる値を保留する。鐵から負の磁化を取り去つて $B=0$ とするためには OL なる磁力を要する。更に H を増せば LP の如き曲線となる。之れ以後 H を ON と $-ON (=OM)$ の間に變化すれば B と H の關係は常に PEKQE'LP の如き閉曲線となる。換言すれば磁力が一完全輪業を行ふ時は $B-H$ 曲線は閉曲線をなす。之は強磁性體が以前の磁化を保留する性質を有するがために μ の値が物體の磁氣的經歷に支配せられる事を示すものである。此の現象をヒステレシスといふ。

ヒステレシスによつて、かく閉じた $B-H$ 曲線をなすためにエネルギーの消費が起る事及び一輪業のために消費せられるエネルギーは此の閉曲線の面積に比例する事を次に證明する。

之を證明するために先づ磁化の強さ I 、長さ l 、斷面積 S なる小磁石が磁力 H の所から $H+\delta H$ の所まで動かされる場合に磁石が外部になし得る仕事は

$$lSI\delta H$$

なる事を證明しよう。但 H は磁化の方向に作用するものと考え

今 H を此の小磁石の中心に於ける磁場の強さとすれば磁石の軸と H とは同方向であるから此の方向を x -軸に取れば磁石の正極に作用する力は

$$\left(H + \frac{l}{2} \frac{dH}{dx}\right) IS$$

負極に作用する力は

$$-\left(H - \frac{l}{2} \frac{dH}{dx}\right) IS$$

故に磁石に作用する力は

$$lSI \frac{dH}{dx}$$

で x の方向を有して居る。距離 δx 動く時磁石のなす仕事は

$$lSI \frac{dH}{dx} \delta x$$

となる。即ち仕事は動いた距離に比例する。此の式を書き換へれば

$$lSI \delta H \quad (16a)$$

となる。即ち磁石を磁場内で動かす時に得られるエネルギーは H の変化 δH の強さと磁石の磁気能率との積によつて表はす事が出来る。此の式に於て lS は磁石の體積であるから單位體積に就ては $l\delta H$ である。

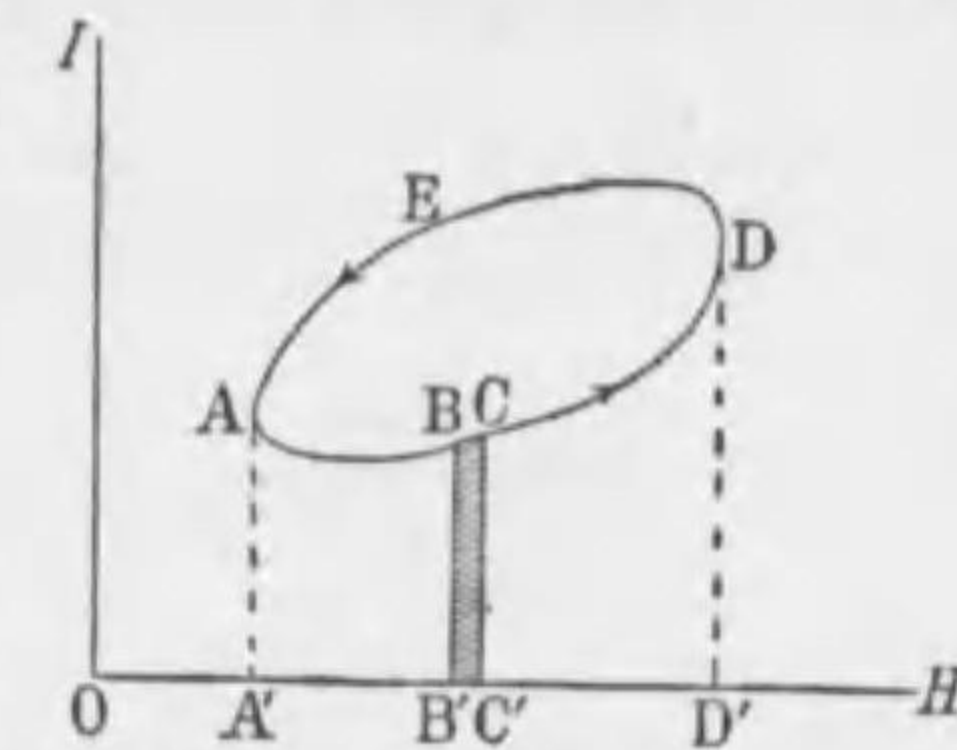
考へる強磁性體が大きく其の中の各部分で H や I の強さ又は方向が異なる時は物体内に考へた dv なる微小の體積に就て上の如く考へて、此の物體のなす仕事は

$$\int l\delta H dv$$

となる。さてかくエネルギーを I と δH のみで表はせば、 H の變化が上の如く磁場内で磁性體を動かしたために起つても、亦磁性體を動かさずして其の部分に於ける磁場の強さを變化しても同じエネルギーの消費が起る事は直に了解される。只後

の場合には磁性體に供給するエネルギーは後に述べる磁場のエネルギーの形に於てするものであり、前の場合には磁性體を動かすための機械的エネルギーとして供給するだけの差がある (§15 参照)。

次に I と H との関係が第22圖の如き閉曲線をなせる場合を考



第 22 圖

へるに、先づ $H = OB'$ の點から $H + \delta H = OC'$ まで磁性體を動かす時磁石のなす仕事は $I = BB'$ であるから圖で斜線で塗り潰した面積 $(BB'C'C)$ に等しい。されば $H = OA'$ から $H = OD'$ まで動かす時に磁石が外部に供給し得べきエネルギーは $AA'D'DCA$ なる面積で示される。次に H の小なる方に動かす時は、 $\delta H < 0$ であるから外部から磁石に仕事をなさねばならない。故に $H = OD'$ から $H = OA'$ まで H を減少する場合には供給すべきエネルギーは $D'DEAA'D'$ なる面積に等しい。即ち供給すべきエネルギーの方が磁石から得られるエネルギーよりも丁度 $ACDE$ なる閉曲線の包む面積だけ多い。即ち圖の如き $I-H$ 曲線をなす物質が一完全輪業をなして H を變化するためには其の曲線に包まれる面積に等しいエネルギーを與へねばならない。此のエネルギーは實驗上熱に變化するものである。

さて上の證明は不平等磁場内に強磁性體を動かす場合を考へたが既に一完全輪業のために消費せられたるエネルギーを I と H との関係のみで表はした以上は、強磁性體を静止せしめて磁場の強さを變化せしめても同じ事である。又かくエネルギーの消費が起るのは同じ H に對する I の値が、 H の増す場合には小に H の減す場合には大なるがためである、即ち圖の閉曲線に附した矢の如く I が變化するためであるから、若し反對

に H の増す時の方が減する時よりも I が大ならば換言すれば矢と反対に曲線を辿れば一完全輪業によつてエネルギーを得る事が出来る筈である。吾人の場合の如く磁性体にヒステレシスがある場合には一輪業に於て磁石より得べき全エネルギーは、

$$\int IdH$$

なる積分で與へられ其の値は負になる。但積分は一輪業に涉つて行はねばならない。若し磁性体に供給すべきエネルギーを正にとれば其の値は

$$W = - \int IdH \quad (16b)$$

で與へられる。

I と H の関係を示す曲線の代りに第21圖の如き $B-H$ 曲線を用ふれば(15a)より $I = \frac{1}{4\pi}(B-H)$ であるから

$$W = - \frac{1}{4\pi} \int (B-H)dH$$

となり、 H は一輪業した後に最初の値に戻るから $\int HdH = 0$ となり

$$W = - \frac{1}{4\pi} \int BdH \quad (16c)$$

である。 $B-H$ 曲線の包む面積は $\int BdH$ であるから、一完全輪業のために磁性体の消費するエネルギーは $B-H$ 曲線の包む面積の $\frac{1}{4\pi}$ に等しい事が知られる。

茲に注意すべきは(16b)及び(16c)は強磁性体の単位體積に對する値を示す事である。

スタインメツ(Steinmetz)によれば工業用材料に於て H が第21

圖の如く正負の等しい最大値の間に變化する時は W の値は一完全輪業の間の B の最大値 B_m によつて決定せられ次式の如き値を有する。

$$W = \eta B_m^{1.6}$$

η は材料によつて定まる定數でヒステレシス常數と呼ばれる。

材 料	η	材 料	η
電 氣 用 鐵 板	0.0033	ニッケル及びコバルト	0.013
鑄 鋼	0.028-0.0032	鑄 鐵	0.013
タングステン鋼	0.08	マ グ ネ タ イ ト	0.023

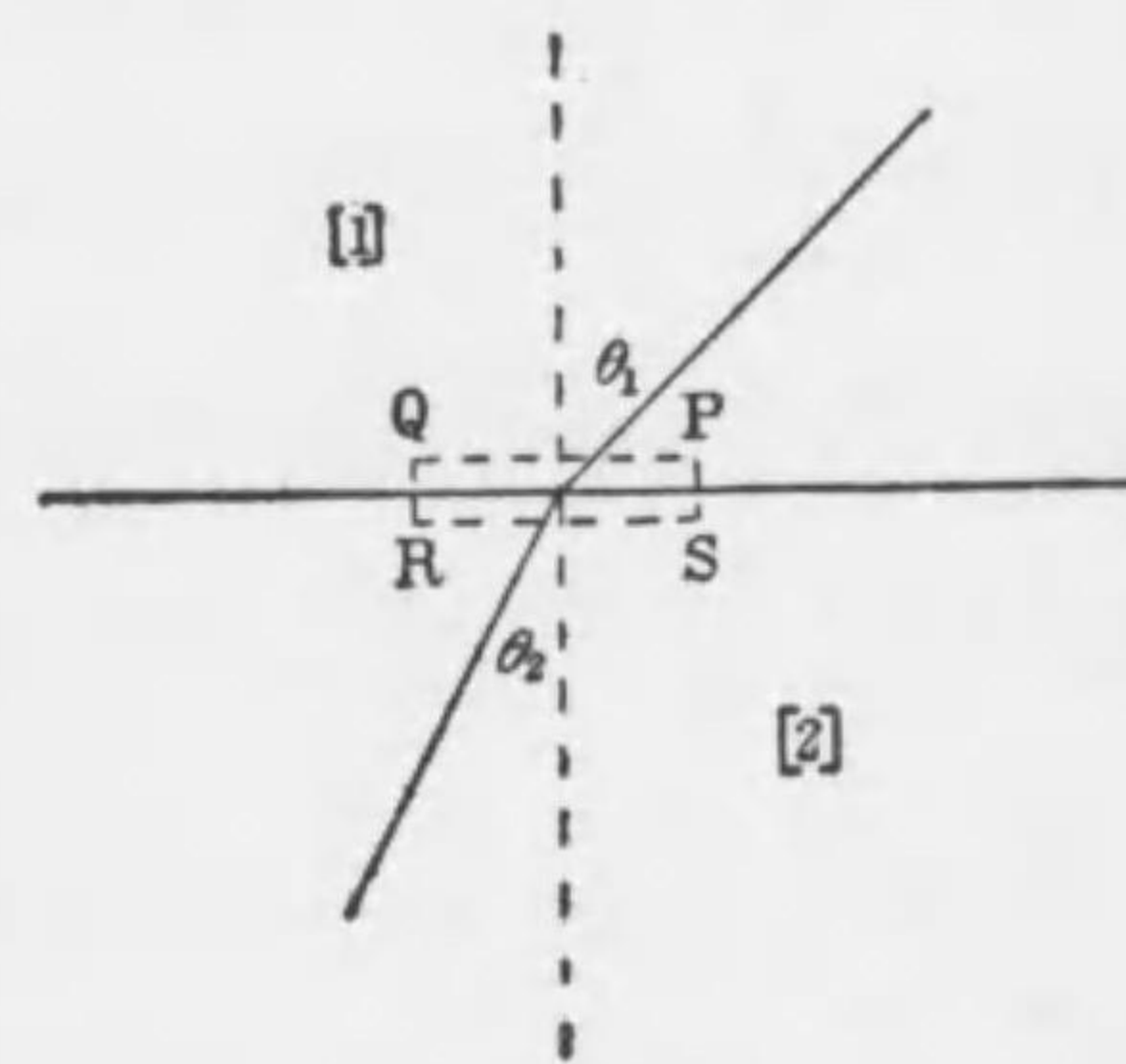
従つて一秒間に f 輪業なす場合の強磁性體 $V \text{ cm}^3$ の消費するエネルギーは

$$f\eta VB_m^{1.6} \text{ エルグ/秒}$$

となる。但此式は B_m が甚だ大小であるときは適用されず工業的に利用せられる磁化の程度に於てのみ正しいものである。

§12. 境界條件 二つの媒質の境界面に於ては磁場は次の如き二條件を満足しなければならない。

- i 境界面に平行な磁力は兩媒質内に於て相等しくなければならない。
- ii 境界面に垂直な磁氣感應の分は兩媒質内に於て相等しくなければならない。



第 23 圖

第一の條件を證明するために P, R を境界面に極めて接近せる二點とし、 P は第一の媒質内、 R は第二の媒質内にあるとする(第23圖)。磁力の定義によれば、 P 及び R に於ける磁力とは之等

二點を通過する極めて細長い穴を穿ち、穴の壁上の磁氣の影響が省略して差支へない場合に P 及び R にある單位正磁極に作用する力である。壁上の磁氣の影響を考へない以上 P, R に於ける磁力の差は境界面にある磁氣の影響を考へる以外に原因はない。然るに境界面の磁氣は磁場の垂直(境界面に)分力には影響するが平行分には影響しない。故に P, R の磁力の平行分力は相等しい。従つて次の關係が成立する。

$$\frac{B_1}{\mu_1} \sin \theta_1 = \frac{B_2}{\mu_2} \sin \theta_2$$

次に第二の條件を證明するために境界面の兩側に端面 PQ 及び RS を有する圓筒を考へ圓筒の高さは端面に比して甚だ小とする。今此の二つの端面と側面とから成る閉曲面に就て考へるに、磁氣感應管は閉曲管をなす (§9) から、PS に交る數と RS に交る數とは相等しい。PQ に於ける磁氣感應の強さを B_1 、磁氣感應と境界面の法線との角を θ_1 とすれば此の端面上の交點の數は $B_1 \cos \theta_1 S_1$ である。同様な記號を用ひれば RS なる端面上の交點の數は $B_2 \cos \theta_2 S_2$ となる。今は側面に交るものは省略し、且つ $S_1 = S_2$ としてから

$$B_1 \cos \theta_1 = B_2 \cos \theta_2$$

即ち第二の條件も證明せられた。故に此の二つの條件から磁力線は次の如く屈折する。

$$\frac{1}{\mu_1} \tan \theta_1 = \frac{1}{\mu_2} \tan \theta_2$$

上の境界條件を靜電氣學に於ける電媒質の境條件と比較すれば

$$\left. \begin{array}{l} \text{電氣變位 } D \text{ と 磁氣感應 } B_1 \\ \text{電 場 } E \text{ と 磁 場 } H_1 \\ \text{電媒常數 } \epsilon \text{ と 導磁率 } \mu_1 \end{array} \right\} \quad (16d)$$

を夫々對應せしめれば兩方の條件は全く一致する事を知る。

されば一方で問題を解けば直に上の對應によつて他方の問題の解答を導く事が出来る。

又此の對應から、電荷を有せざる電媒質の存在による電場の變化と、磁性體の導入による磁場の變化とは全く同様に取扱はれる事を知る。

§13. 一樣なる磁場内に導入せる磁性體の球 一樣な磁場に磁性體の球を入れれば感應によつて球が磁化されるから其の影響を受けて球外の磁場は一樣でなくなる。此の磁場を決定するには如何にすべきか。吾人の知つて居る事は球を入れる前には磁場が一樣であつたといふ事と球の表面を境として前節に述べた如き境界條件を満足しなければならないといふ事だけである。

今球を入れない前の磁場を H とし、正の方向は x の方であつたとする。然らば此の磁場内に入れた磁性體を常磁性體とすれば感應による磁化のために x の正の方向に向ふ半球面には正磁氣、負の方向に向ふ半球面には負磁氣が表はれる。もし球の磁化が一樣ならば之等の磁氣は (13a) の如き表面密度を有する事となる。

故に今磁化を一樣なりとして、二つの境界條件を満足するか否かを吟味して見る。もし此の假定によつて境界條件を満足する事が出来たならば夫が即ち吾人の問題の解答である。

さて磁性體が一樣に磁化すれば、此の球のために球外に於ける磁場は球の中心に一つの小磁石があるのと同様である (§8)。

今 M なる磁氣能率の磁石が球の中心にあるとする。然らばそのための磁場は (8a) (8b) で與へられる。磁性體の球の半徑を a とすれば球の表面に近い真空中の點では (第15圖)

$$H_r = \frac{2M \cos \theta}{a^3} \quad H_\theta = \frac{M \sin \theta}{a^3}$$

である。球を持ち込む前の一様な磁場は H であるから、磁場を重畳して半径方向の磁場は

$$\frac{2M\cos\theta}{a^3} + H\cos\theta$$

球面に平行な、 θ の増す方向の磁場は

$$\frac{M\sin\theta}{a^3} - H\sin\theta$$

である。

次に磁性体内部の磁場を考へる。磁性体の磁化を一様と假定した以上、内部の磁場も一様なものと考へなければならぬから、今其の強さを H' 、方向は I と同じく H の方向(即ち x の方向)であるとする。然らば球内で半径方向の磁場の分は

$$H'\cos\theta$$

半径に垂直な θ の増加する方向の分は

$$-H'\sin\theta$$

球内の點を表面に非常に近く取つても上の關係は成立するから境界條件の第一は

$$-H'\sin\theta = \frac{M\sin\theta}{a^3} - H\sin\theta$$

即ち
$$H' = H - \frac{M}{a^3} \quad (17a)$$

又境界條件の第二は球の導磁率を μ とすれば

$$\mu H'\cos\theta = \frac{2M\cos\theta}{a^3} + H\cos\theta$$

即ち
$$\mu H' = \frac{2M}{a^3} + H \quad (17b)$$

故に(17a)と(17b)を同時に満足する如き H' 及び M の値が存在すれば問題の解答を得たのである。之等二式を聯立方程式として解いて H' 及 M を求めれば

$$H' = \frac{3H}{\mu+2} \quad (17c)$$

$$M = \frac{\mu-1}{\mu+2} a^3 H \quad (17d)$$

を得る。 M を知つたから(13c)より磁化の強さを求めれば

$$I = \frac{3}{4\pi} \frac{\mu-1}{\mu+2} H \quad (17e)$$

一様な磁場の中に磁性体の球を入れれば、球内の磁場も一様で(17c)の如き値を持ち磁性体は(17e)に與へられる如き強さで一様に磁化される。従つて球の中心には(17d)なる磁氣能率を有する小磁石が存在すると同じ事となり、之より(8a)(8b)によつて球外の磁場が決定せられ、 H と重畳して球を導入せる後の状態を定める事が出来る。

球が常磁性体ならば $\mu > 1$ であるから

$$H' < H \quad M > 0 \quad I > 0$$

である。即ち球内の磁場は小となり、磁化の方向は H と同じである。然るに球が反磁性体ならば $\mu < 1$ であるから

$$H' > H \quad M < 0 \quad I < 0$$

となる。即ち球は H と反對の方向に磁化せられ、球内の磁場は H より大となる。

若し球が強磁性体の場合には μ は 1 に比して甚だ大であるから近似的に

$$H' = \frac{3H}{\mu} \quad M = a^3 H \quad I = \frac{3H}{4\pi}$$

と見做す事が出来る。

此の問題から、靜電氣學に於て一様な電場内に電媒質の球を導入した場合の解を導くには (§12 によつて) H を E 、 μ を ϵ に代へるだけでよい。

尙導磁率 μ_0 なる無限に大なる物体内に一様な磁場があつて

此の中に導磁率 μ なる球を導入した場合には (17b) が

$$\mu H' = \mu_0 \left(\frac{2M}{a^3} + H \right) \quad (17b')$$

に変わるだけである。此の式と (17a) を聯立方程式として解けば

$$H' = \frac{3\mu_0 H}{\mu + 2\mu_0}$$

$$M = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} a^3 H$$

$$I = \frac{3}{4\pi} \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} H$$

故に磁性體の中に球形の穴を穿てば、穴の中は真空であるから $\mu = 1$ で

$$H' = \frac{3\mu_0 H}{1 + 2\mu_0} \quad M = \frac{1 - \mu_0}{1 + 2\mu_0} a^3 H$$

$$I = \frac{3}{4\pi} \frac{1 - \mu_0}{1 + 2\mu_0} H$$

μ_0 が 1 に比して甚だ大ならば

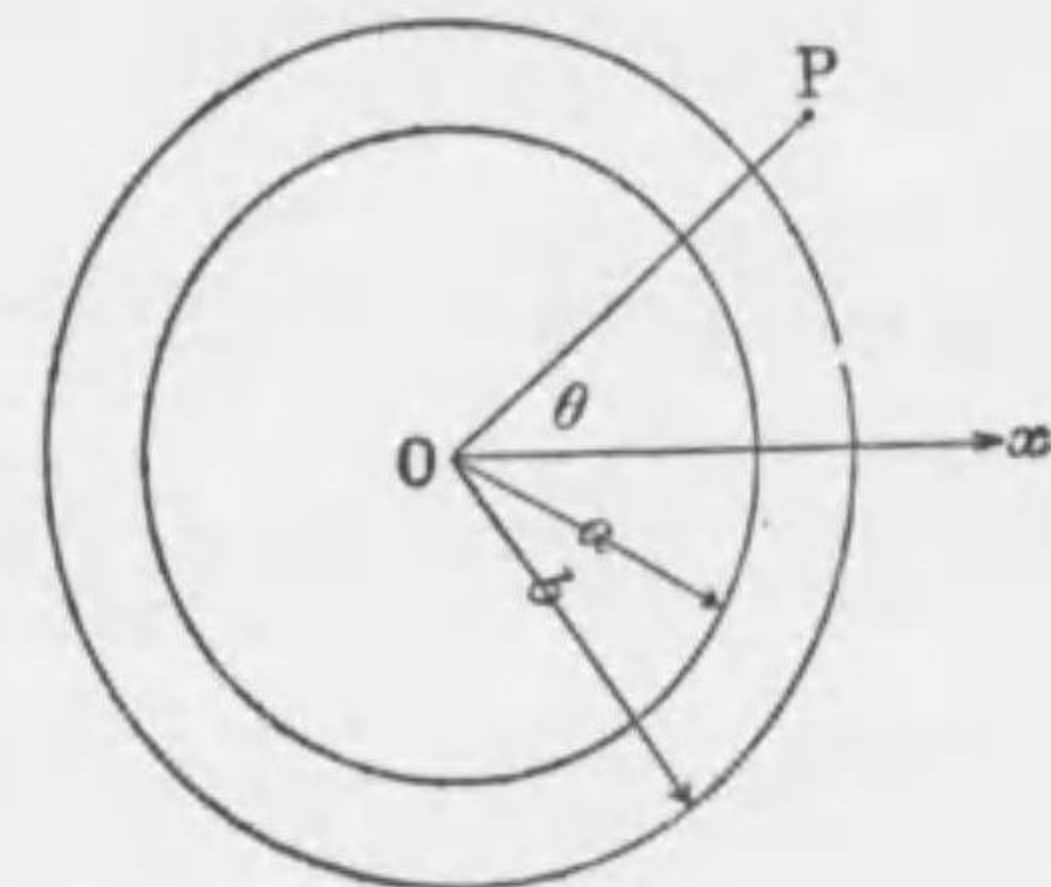
$$H' = \frac{3}{2} H \quad M = -\frac{a^3 H}{2} \quad I = -\frac{3}{8\pi} H$$

即ち此の穴を穿つたために外部の磁性體に於ける磁場の變化は、穴を穿たずして其の部分の磁化を $\frac{3}{8\pi} H$ だけ減少したのと同等である。

§14. 磁氣的シールドイング ある電氣系に対する他の帶電體の電氣的擾乱を防ぐために、導體の中に其の電氣系を入れる事は静電氣に於て述べたが、之と同じく一の系體に及ぼす他の系體の磁力を強磁性體の物質で蓋つて遮斷する事が出来る。之を磁氣的シールドイングといふ。只 μ の値は如何なる物質に於ても有限であるから電氣的スクリーンの如く完全には行はれない。

今鐵の球殻が一樣磁場に與へるシールドイングの程度を計算するために、前節に採用せる方法によつて球殻の外面及び内面には何れも中にある小磁石と同等な作用をなす如き磁氣分布が生ずるものと假定し、此の假定が境界條件を満足するか否かを吟味する事にする。今外面(半徑 b)に生ずる磁氣の分布は中心にある M_1 なる磁氣能率の磁石に同等で、内面(半徑 a)に生ずる磁氣分布は M_2 なる能率の小磁石が中心にある場合と同等とする。

外面に生ずる磁氣分布が $r < b$ なる點に於ては $-\frac{M_1}{b^3}$ なる一樣な磁場を生じ、内面に生ずる磁氣分布は $r < a$ なる點に於ては $-\frac{M_2}{a^3}$ なる一樣な磁場を生ずる。



第 24 圖

M_1 及び M_2 が如何なる値を持つとも、球殻の内外兩面の兩側に於て磁場の切線分が等しいといふ境界條件の第一は満足せられる。何となれば外面(半徑 b 、以後之を b -面、と呼び、之に對し球殻の内面を a -面と呼ぼう)の外側の真空中(或は近似的には空氣中)にては、磁場の切線分は

$$H \sin \theta - \frac{M_1}{b^3} \sin \theta - \frac{M_2}{b^3} \sin \theta$$

b -面の内側の鐵中にては

$$H \sin \theta - \frac{M_1}{b^3} \sin \theta - \frac{M_2}{b^3} \sin \theta$$

となり之は常に相等しい。又 a -面の内外にても同様である。

されば吾人のなすべきは磁氣感應の法線分が境界の兩側で等しいように M_1 及び M_2 を定める事である。

b -面の外側の真空中にては磁氣感應の法線分は

$$H \cos \theta + \frac{2M_1}{b^3} \cos \theta + \frac{2M_2}{b^3} \cos \theta$$

b-面の内側の鉄中にては

$$\mu \left(H \cos \theta - \frac{M_1}{b^3} \cos \theta + \frac{2M_2}{b^3} \cos \theta \right)$$

此の二つが等しいためには

$$H + \frac{2M_1}{b^3} + \frac{2M_2}{b^3} = \mu \left(H - \frac{M_1}{b^3} + \frac{2M_2}{b^3} \right)$$

即ち $(\mu+2)M_1 - 2(\mu-1)M_2 = b^3(\mu-1)H$ (18a)

なる事を要する。

a-面の内側の真空中に於ては磁気感應の法線分は

$$H \cos \theta - \frac{M_1}{b^3} \cos \theta - \frac{M_2}{a^3} \cos \theta$$

a-面の外側の鉄中にては

$$\mu \left(H \cos \theta - \frac{M_1}{b^3} \cos \theta + \frac{2M_2}{a^3} \cos \theta \right)$$

となり、此の二つが等しいためには

$$(\mu-1) \frac{M_1}{b^3} - (2\mu+1) \frac{M_2}{a^3} = (\mu-1)H$$
 (18b)

ならばよい。

(18a) と (18b) とより

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= (\mu-1)H \frac{b^3(2\mu+1) - 2a^3(\mu-1)}{(2\mu+1)(\mu+2) - 2(\mu-1)^2 \frac{a^3}{b^3}} \\ M_2 &= -(\mu-1)H \frac{3a^3}{(2\mu+1)(\mu+2) - 2(\mu-1)^2 \frac{a^3}{b^3}} \end{aligned} \right\} (18c)$$

さて球殻内の真空中の磁力 H' は

$$H' = H - \frac{M_1}{b^3} - \frac{M_2}{a^3}$$

$$= \frac{9\mu H}{9\mu + 2\mu - 1^2 \left(\frac{a^3}{b^3} \right)}$$

となり μ が 1 に比し甚だ大ならば

$$H' = \frac{H}{1 + \frac{2}{9}\mu \left(1 - \frac{a^3}{b^3} \right)}$$

となる。此の分母を p とすれば

$$\left. \begin{aligned} H' &= \frac{H}{p} \\ p &= 1 + \frac{2}{9}\mu \frac{\text{鐵の體積}}{\text{鐵の外面球の體積}} \end{aligned} \right\} (18d)$$

である。故に p の最大値は $1 + \frac{2}{9}\mu = \frac{11}{9}\mu$ であつて、 H' は $\frac{9H}{11\mu}$ より小さくはならない。かく p の最大値従つて H' の最小値が實現するのは球殻の穴の體積が殻の體積に比して非常に小さい場合である。

§15. 磁場のエネルギー 静電氣學に於ては電場は電荷の分布及び電媒質の分布によつて完全に決定せられ、静電エネルギーは電場内に考へた單位體積に付き

$$U_n = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} = \frac{DE}{8\pi}$$

なる密度で分布されて居ると考へた。磁氣學に於ても永久磁石の分布と磁性體の分布によつて磁場は完全に定まり、然も磁場内の磁力線は永久磁石から出るもので且つ磁極間に働らく力は電荷の間力と全く同じ法則に従ふ。尙 §12 に於ては静電氣學で取扱ふ諸量と磁氣學で取扱ふ諸量間には (16d) なる對應のある事を知つた。故に磁場のエネルギーは永久磁石の極の強さと、其の點に於ける磁位との積によつて定まる事、あたかも静電エネルギーが電荷と、其の存在する點に於ける電位との

積によつて定まる如くであつて

$$T = \frac{1}{2} \Sigma m \Omega \quad (19a)$$

なる値を有する事を知る。更に之より静電氣學に於けると同様の手段によつて、此のエネルギーは磁場全體に分布し、各點に於て

$$T_0 = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{BH}{8\pi} \quad (19b)$$

なる密度を有する事を證明する事が出来る。

(19b) 式を知つて (16c) 式を顧みれば、ヒステレシスによるエネルギーの消費の意味は一層明らかになる。(19b) より $\frac{dT_0}{dH} = \frac{\mu}{8\pi} \frac{dH^2}{dH} = \frac{\mu H}{4\pi}$ 故に $\frac{dT_0}{dH} = \frac{B}{4\pi}$ を得る。従つて $\frac{BdH}{4\pi}$ は磁場の強さを dH だけ増したために、磁場のエネルギーの増加せる量である。 H が減少する場合の B の方がその増す時よりも大であるから、一完全輪業をなした後は磁場のなした仕事の方が磁場が受け取つたエネルギーよりも多い事になる。此の差は丁度 $B-H$ 曲線の包む面積の $\frac{1}{4\pi}$ で (§11 参照) あつて即ちヒステレシスによるエネルギーの損失に他ならない。

(19b) を書き換へると

$$T_0 = \frac{B^2}{8\pi\mu}$$

となる。一本の磁氣感應線に沿つて行けば、空氣中に於ける場合よりも常磁性物質中に於ける方がエネルギー密度が小さい。従つてある系體のポテンシャルエネルギーを最小にするためにある程度までは磁氣感應線が常磁性體に密集する。

又一様ならざる磁場内にある常磁性體は、磁場の強い方に動かうとする傾向がある。夫はかくして常磁性體にはより多くの磁氣感應線を集める事が出来、従つて其の系體のエネルギー

電 氣 磁 氣 學

三 枝 彦 雄

(209—240)

目 次 (5)

§ 16. 静電氣及び磁氣學上の諸量の反應と差異 § 17. 單結

晶磁性體

第四章 地球磁氣 213

§ 18. 地球磁氣の三要素 § 19. 地球磁氣の圖示 § 20. 地

球磁氣の時間的變化 § 21. 我國に於ける磁氣觀測

第三編 電氣力學 232

第一章 電 流 232

§ 1. 電流 § 2. オームの法則 § 3. キルヒホッフの法則

§ 4. 抵抗の接続

が益々減少するからである。反磁性體が磁場の弱い方に動くのも同様の理由による。

§16. 靜電氣及び磁氣學上の諸量の反應と差異 之迄しばしば靜電氣學上の諸量と磁氣學上の諸量の對應を論じ、之によつて磁場のエネルギーは電場のエネルギーと同様に考へられる事を知つて、敘述を大いに簡單にする事が出来た。又靜電場に電媒質を導入せるは磁場に磁性體を導入せると全く同様に取扱はれるから、一方の解から單に書き換へただけで他方の解を求め得る事を知つた。

然らば斯かる對應は以上述べたに止まるかといふに決して左様ではない。先づ電場を起すものとして皮相電荷を考へ、變位線(電力線)の始點又は終點に實電荷を考へたやうに、之に對應して皮相磁氣及び實磁氣を考へる事が出来る。

尙磁性體の磁化

$$I = \frac{\mu - 1}{4\pi} H = \frac{B - H}{4\pi}$$

に對應して電媒質の電媒變位又は電媒分極と名づけられる

$$P = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} E = \frac{D - E}{4\pi}$$

を考へる事が出来る。I から磁性體の表面に現はれた皮相磁氣を知る事が出来るやうに、P から電媒質の表面に現はれた皮相電荷を知る事が出来る。

されば (16d) に倣つて、互に對應する二量を並べて書くと

電氣變位	D	—	磁氣感應	B
電 場	E	—	磁 場	H
電媒常數	ϵ	—	導 磁 率	μ
實 電 荷	ρ	—	實 磁 氣	ρ_m
皮相電荷	ρ'	—	皮相磁氣	ρ'_m
電媒變位	P	—	磁 化	I

となる。

かゝる對應を知るは非常に便利な事であるが、同時に其の間に存する差異を明瞭に理解しなければ安心して應用の範圍を決定する事が出来ない。之等の差異の中、最も重要なものは正及び負の實磁氣を相互から引き離す事は實驗上絶対に不可能であつて、如何なる物體も正負同量の磁氣を有し且つ其の物體中から任意に取り出した一部分も左様であるといふ事。換言すれば實磁氣は實際には存在しないもので常に

$$\rho_m = 0$$

であるといふ事である。此の事から前に述べたように磁氣感應 B は端のない線をなす換言すれば無源場をなすといふ重大な結論が出る。 B に對應する D は正の實電荷に初まつて負の實電荷に至る端のあるもので無渦場をなすのである。

尙正負の實磁氣を分離する事が出来ないために、即ち $\rho_m = 0$ なるために、電流に對應する磁氣の流れが存在しないのである。

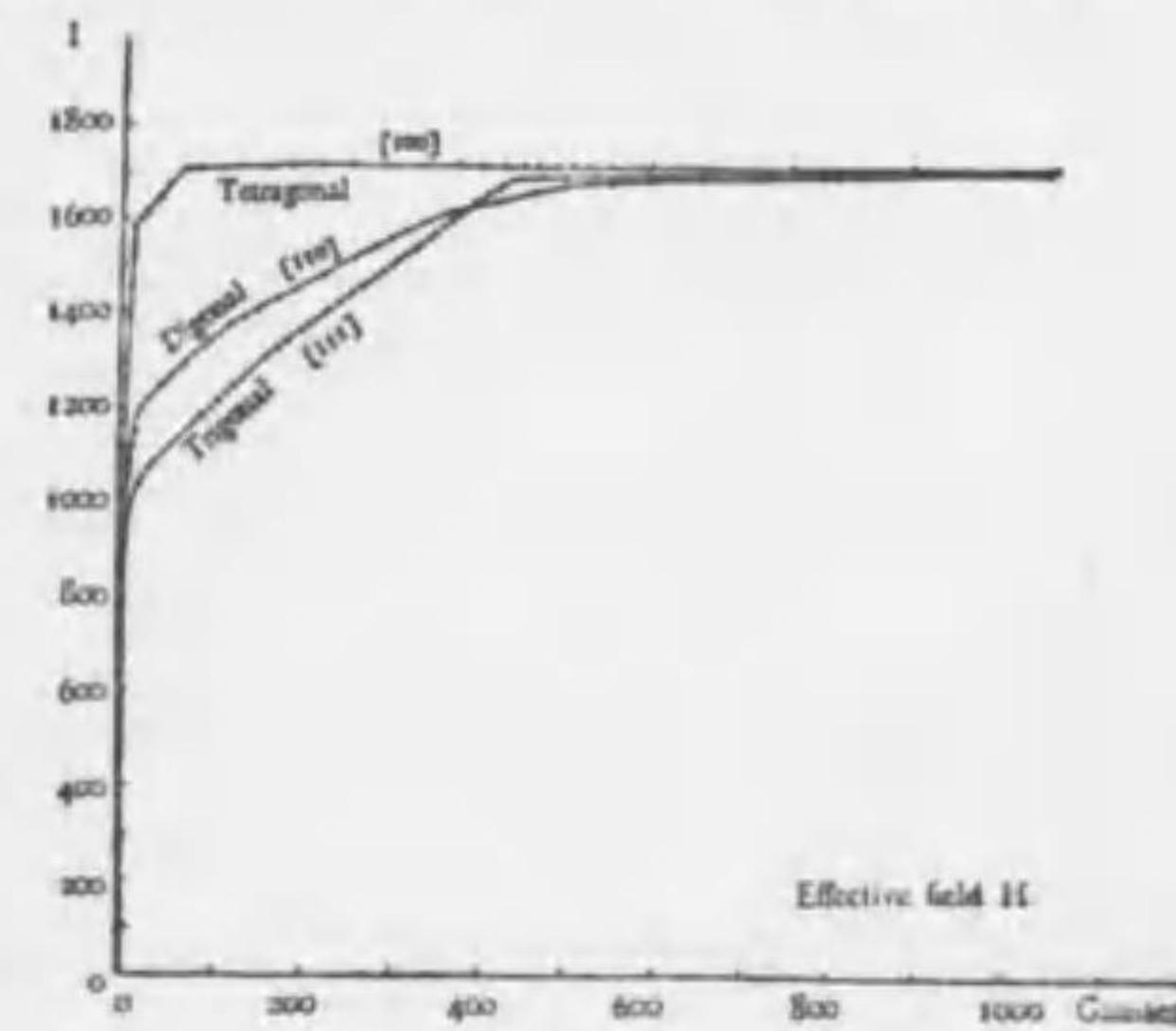
電媒常數 ϵ と導磁率 μ とは相對應して居つて、何れも眞空中では 1 なる値を有して居る。然れども ϵ が物質常數で温度によつてのみ支配せられるに反し、 μ はヒステレシスの現象を呈し物質常數たるの特徴を失つて居る。のみならず電氣學上取扱はるゝ電媒質は何れも ϵ が 1 より大なるものとみであるが、磁氣學で考へる反磁性體は μ が 1 より小である。即ち反磁性體に對應するものは電氣學上にはない。又強磁性體に於ては μ は數千の程度まであるが、電媒質の ϵ は數十を最大とする。即ち強磁性體に對應するものも電氣學には存在しない。然るに顧つて思ふに、靜電氣學上導體は $\epsilon = \infty$ の電媒質と考へられるに反し、靜磁氣學には之に對應するものは見出されないのである。

§17. 單結晶磁性體 結晶電媒質の電媒常數 ϵ が方向に

よつて異なる如く、結晶磁性體の導磁率又は磁化率も方向によつて異なる筈である。然るに鐵、ニッケル等の強磁性體を初めとして總ての金屬が結晶をなして居る事は X 線的研究の結果疑ふべからざるものであるにも係らず、之等の導磁率及び磁化率は方向によつて異なる事はない。之は金屬が極めて小さい無数の結晶の集合から成るために實驗に表はれた値は各方向の平均値であるためである。されば通常のものとなつて、相當の大きさの單一結晶の磁性體を得て、之に就て各方向の磁化率を測定するは、上の ϵ と μ の對應を明らかにするためにも甚だ重要な事である。尙此の事は獨り ϵ と μ との對應に關するばかりでなく、廣く物質の磁性を研究する主要なる手段とされて居るものである。斯かる單一の結晶のものを單結晶といひ、之に反して通常市場にある金屬の如く、極めて小さい無数の結晶の集合から成るものを多結晶といふ。

此の方面に於ける研究は、最近數年間に涉つて東北大學金屬

材料研究所に於て本多博士、茅博士等によつて盛に行はれた。其の結果によれば單結晶磁性體の磁化率従つて導磁率は方向によつて大いに異なるばかりでなく、磁化の強さ H と磁場の強さ I との關係を示す $I-H$ 曲線の形狀も方向によつて大いに異なる



第 25 圖

事及び單結晶の強磁性體のヒステレシスは極めて小さい事等が明らかにされた。第 25 圖は本多博士と茅博士の測定せる鐵の磁化曲線であつて、之を第 20 圖と比較すれば其の差異の大な

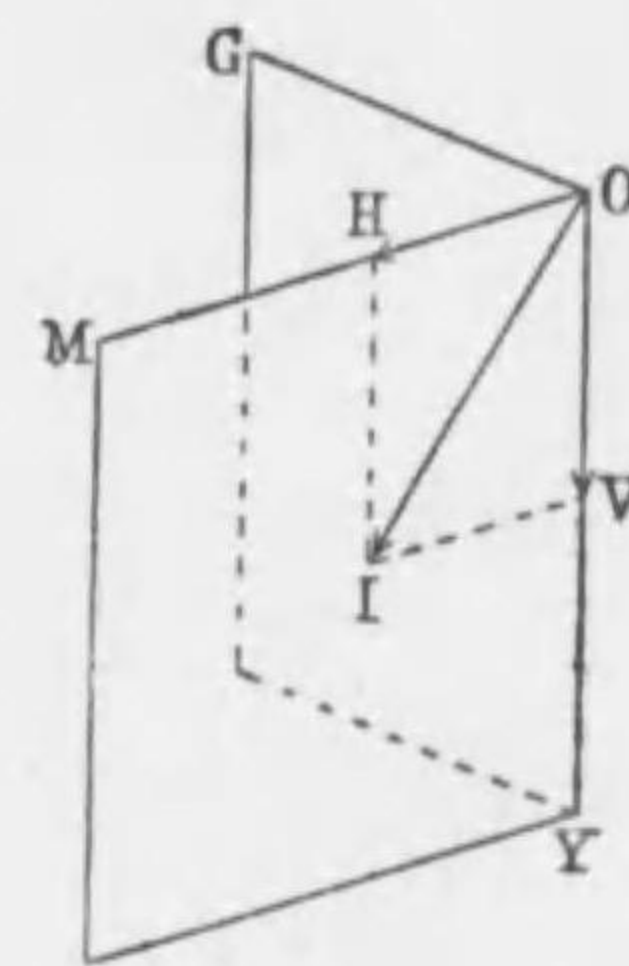
る事驚くべきである。曲線に添へた文字及び [110], [111] の如き記號は結晶に關して H の方向を示すものであるが其の説明は茲には省略する。

1) 山田博士 結晶物理學に就て學ばれたい。

第四章 地球磁氣

§ 18. 地球磁氣の三要素 地球が一の磁石である事が發見されたのは前に述べた通り 1800 年英のギルバートによるものである。ギルバートは水平面内で自由に動ける磁石は常に南北を指すものと考へたが、其の後地球上の磁場の方向は場所によつて變るのみならず、同じ場所でも時間的に變化する事を見出したのはゲリブランド (1597-1637) である。1576 年ノウマンといふ航海者は地球磁氣の磁場は地面に平行でない事を見出した。1836 年から 1841 年に亘つて獨逸のガウス及びウエーバーによつて種々の研究が行はれ、遂に 1835 年之等の學者によつて獨逸のゲツチンゲン (Göttingen) に磁氣協會が作られた事は、世界の各機關が協力して各所で研究を行ふべき統一機關を置いた意味に於て、地球磁氣研究の歴史に特筆する價值がある。地球磁氣觀測所の數は現在全世界では一萬を超えて居る。

地球磁氣の磁場もベクトルである以上、方向と大きさとを有し、ある場所に於ける地球磁氣の強さは三つの數値によつて決定せられる。現在は次の如き三つの量によつて表はして居る。第 26 圖に於て OY は觀測せる地點を過る鉛直線、 OYG なる平面は地理上の子午面とする。北半球に於ては磁場は空中から地面に向ふ分を有し、磁力線は一般に地理上の子午面と一致して居らない。故に OI を此の地點に於ける磁場を表はすベクトルとすれば、 OYI なる平面を磁氣子午面といひ、磁氣子午面と地理上の子午面とのなす角 $\angle MOG = \theta$ を



第 26 圖

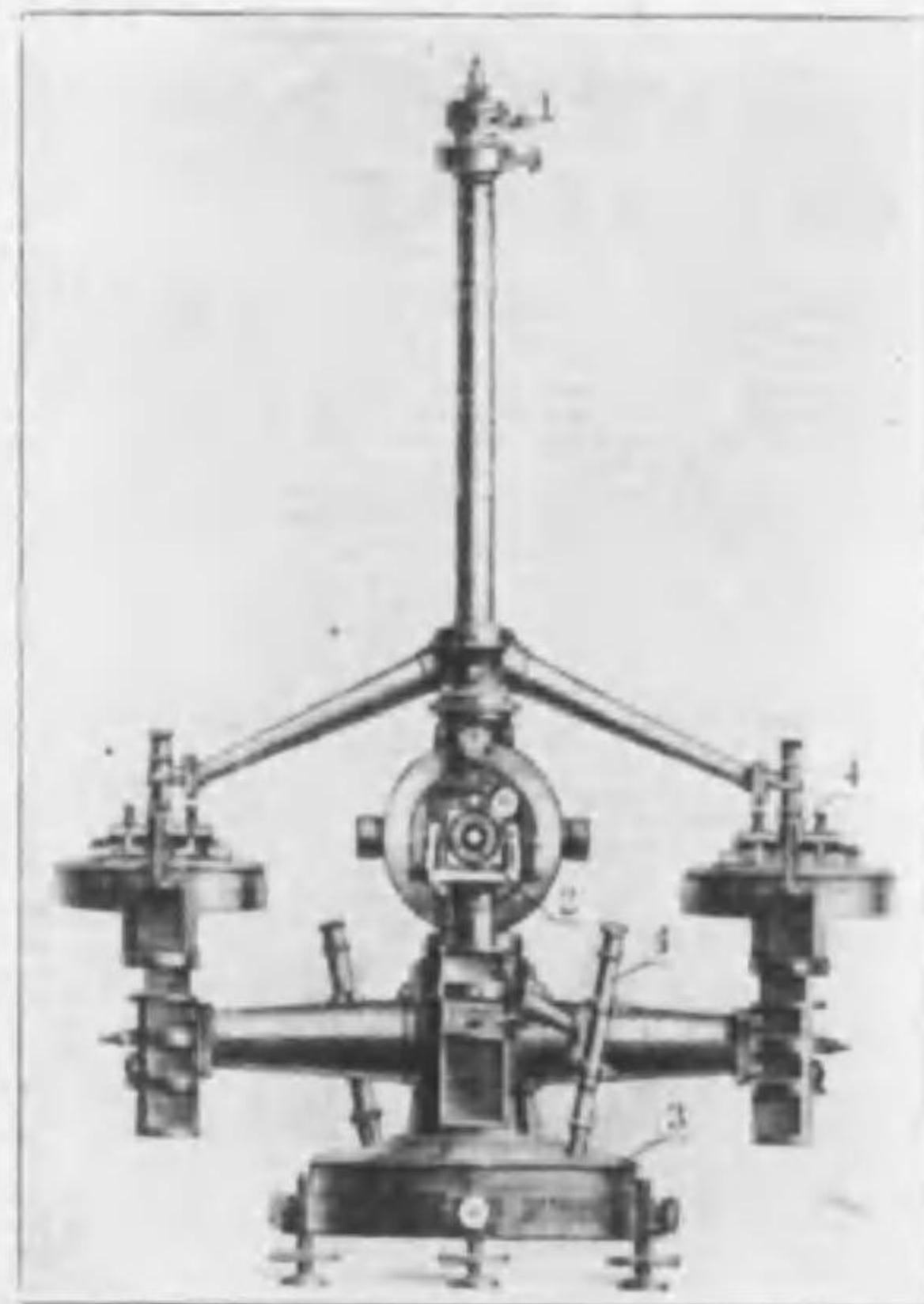
方位角、又磁氣子午面を通過する水平線 OM と OI とのなす角 $\angle HOI = i$ を傾角又は伏角、OI の OM 上への分力 OH を地球磁氣の水平分力といひ之を H で表はす事にする。以上の方位角 δ 、伏角 i 、水平分力 H を地球磁氣の三要素といふ。此の三要素を知ればある地點に於ける地球磁氣の方向及び強さは直に決定する事が出来る。

磁氣子午面は地理上の子午面よりも東に偏する事もあり西に偏する事もある。東に偏する時に方位角は正とし、西に偏する時を負とする。故に方位角は理論上 -180° より $+180^\circ$ までの間の値を取り得るものである。

三要素の測定法を次に述べる。

方位角の測定には次の如く特別に造られた磁力計を用ひる。

此の磁力計の磁石は中空の圓筒で其の兩端には何れも二本の蜘蛛の巣の絲を圓の中心で十文字に交叉するやうに付け、且つ磁石から一定の距離を距てて望遠鏡を取り付けて之等の交叉點が重なつて居る事を確かめ得るやうにしてある。磁石の軸は常に磁氣子午面内にあるから望遠鏡の軸はかくして磁氣子午面内に持ち來たされたのである。さて望遠鏡は磁石の中心を通る



第 27 圖

鉛直線を軸として回轉するやうに造られてあり、且つ此の回轉

角は圓盤上に刻まれた目盛で讀む事が出来る。今望遠鏡が磁氣子午面にある時の角度を α とする。次に特別に選んで置いた遠方の物體を望遠鏡で見た時に望遠鏡の軸は地理學上の子午面と β 度異なる事を豫め太陽觀測によつて定めて置く。今 α を測つた後に其の物體を見た時、圓盤上の讀みは γ 度であつたとすれば、若し望遠鏡の軸を地理學上の子午面に入れれば圓

$$\gamma - \beta$$

盤上の讀みはである。然るに磁氣子午面に望遠鏡の軸が一致した時は圓盤上の讀みは α であるから方位角 δ は次の如くなる。

$$\delta = \alpha - (\gamma - \beta) = \alpha + \beta - \gamma$$

かく地球磁氣の方位角を測る目的を以て特別に造られた磁力計を方位計 (Declinometer) といふ。第27圖に示すものは方位角測定以外にも用ひられるやうに造つた方位計であつて 1 は磁石を吊る絲の上端を支へる部分、2 は望遠鏡、3 は目盛のある圓盤、4 は目盛を讀むための顯微鏡である。方位計に於て蜘蛛の絲の交點を結ぶ線が磁石の軸と一致しない事から起る誤差を防ぐためには、一度上記の如き測定を終つた後磁石を其の軸の周りに 180° 廻轉して、更に上の測定を繰り返しかくして得た二つの値の平均を取ればよい。



第 28 圖

伏角計は第28圖の如きも

のであつて AB は磁針、1 は三脚、2 はネジで水平を調整するに用ひられる。3 は目盛を刻んだ圓盤で、4 は磁針を納める函で垂直軸の周に自由に廻す事が出来、廻した角度は 3 で読み取る事が出来る。5 は周圍に目盛を有する鏡である。磁針 AB は 6 によつて支へられ自由に廻轉する事が出来る。8 によつて 4 は 1 なる臺に固定され、9 は 4 を極めて小なる角度だけ廻轉すべきネジである。

先づ 4 を廻して AB の磁針が垂直に立つ位置を求める。此の時は 6 なる軸の周に AB を廻さうとする力はなく、磁針に作用するのは地球磁氣の垂直分だけであるから、磁針の面は磁氣子午面と 90° の角をなして居る。故に此の位置から (3 の読みから) 4 を 90° だけ廻轉して、其の時 AB が水平線となす角を求めれば夫が伏角 i を示すものである。磁針の軸が其の幾何學的の軸と一致しないために生ずる誤差を除くには 4 を 180° 廻轉して測定すればよい。又磁針の重心が 6 と一致しないための誤差を避けるには磁針を逆に磁化して更に上記の如き測定を二度行へばよい。かくして四回の測定の平均は伏角の正しい値を與へるものである。

水平分力の測定法は §5 で述べたが實際には次の如くにして大いに簡単に出来る。先づ H の知られた土地である磁石を §5 の方法で振動せしめ、振動の週期を測れば (10c) によつて

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K}{MH}}$$

である。次に此の磁石を水平分力の知られない場所で振動せしめ週期 T_1 を測れば

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{K}{MH_1}}$$

但し H_1 は未知の水平分力である。此の二式から

$$\frac{H_1}{H} = \frac{T^2}{T_1^2} \quad (20a)$$

を得、之より H_1 を計算する事が出来る。即ち H は §5 の方法で決定すれば他の場所は只比較測定で足りるのである。

水平水力と伏角を知れば垂直分力 V と全磁力 I は次式によつて與へられる。

$$V = H \tan i \quad (20b)$$

$$I = H \sec i$$

又南北の方向の分は

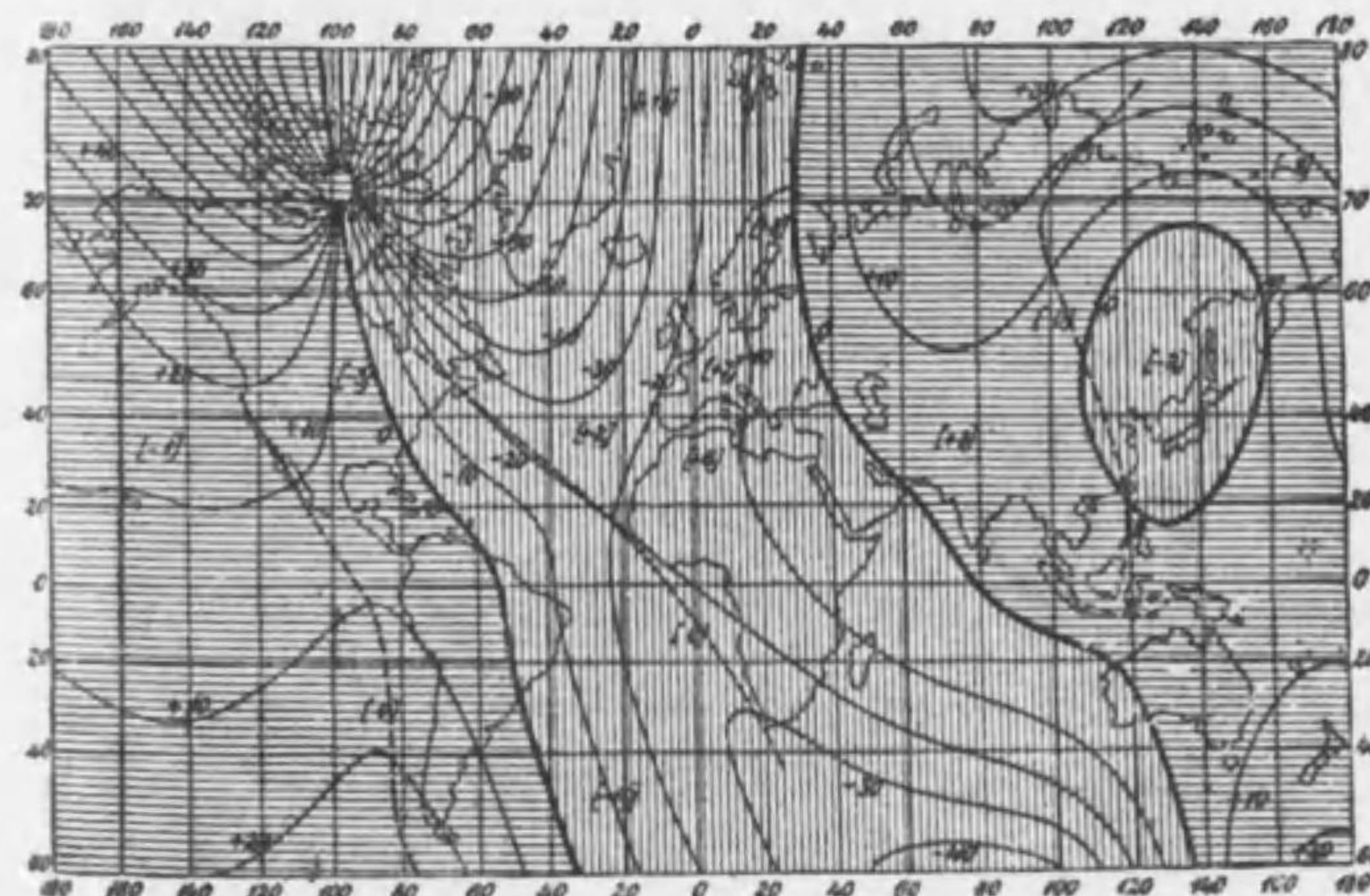
$$H \cos \delta \quad (20c)$$

東西の方向のは

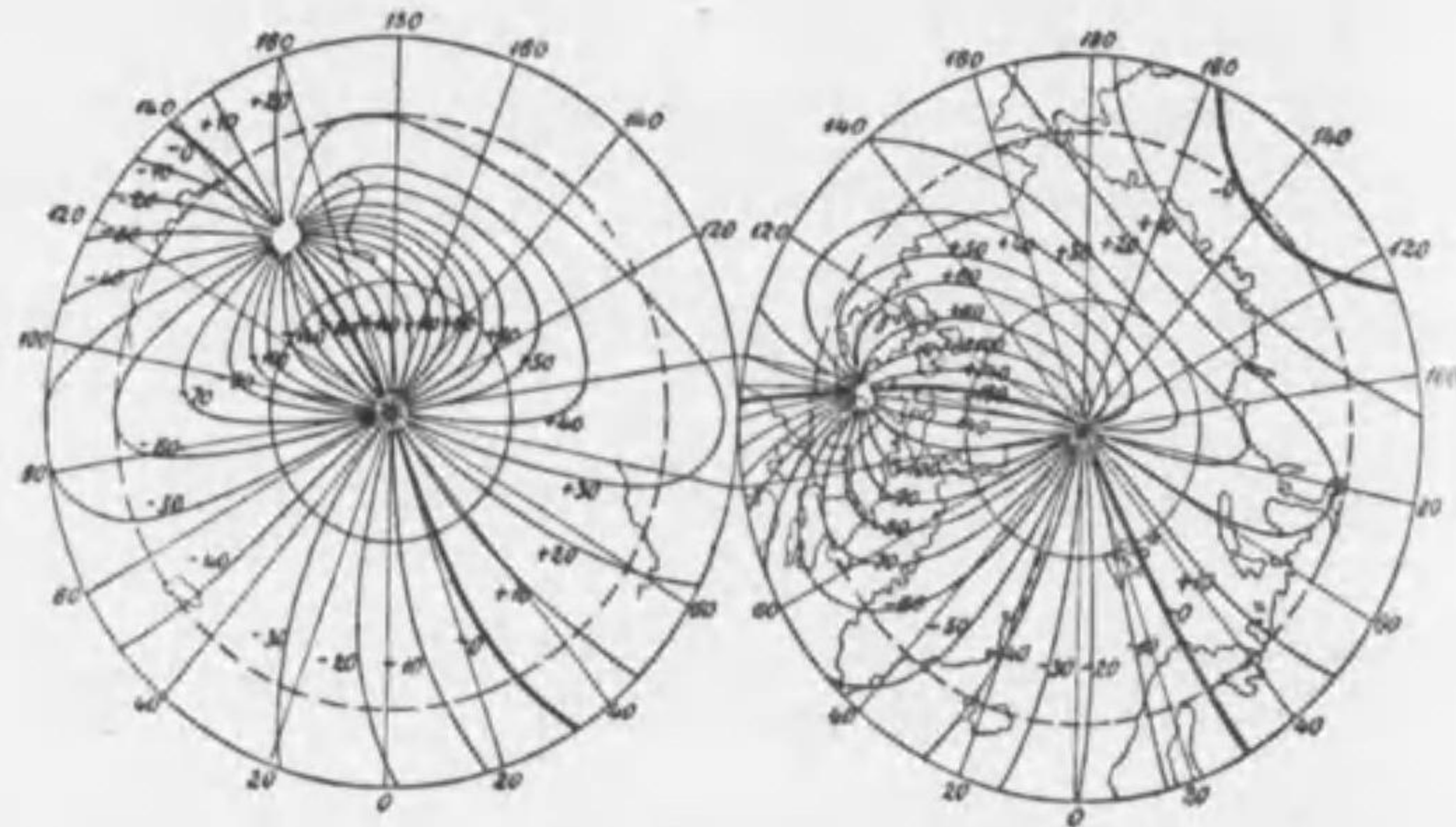
$$H \sin \delta \quad (20d)$$

である。

§19. 地球磁氣の圖示 a) 等方位線 (Isogonic lines) 地球上の各所にある磁氣觀測所に於て測定したる結果を地圖の上に記入し、其の中、方位角の等しい地點を連ねる曲線を求めれば、之を等方位線といふ。實際には磁氣觀測所の數は地球上に極めて稀に散在するのであるから各測定の結果を最小二乗法によつて整理したものから等方位線を求めるのである。後に述べる等伏線其の他も同様である。



第 29 圖



第 30 圖

第29圖及び30圖はかくして描いた等方位線であつて、前者は北緯80°と南緯60°に於ける等方位線の分布で後者の右の圖は北半球左の内は南半球である。其の中太い曲線は方位角0を表はするものである。圖によれば等方位線は各半球に夫々二つの集合點を有して居り、其の中一は各々地球の北極及び南極であるが、他方は極から少し距たつて居る。後者を方位角の極又は地球磁氣の極といふ。觀測の結果によれば方位角の極に於ては地球磁氣の水平分は0であるから、従つて磁氣子午面が不定になる。又地理學上の極に於ては地理學上の子午面が不定になる。故に此の二點に於て方位角が0となるは當然であり、従つて總ての等方位線が南北各半球で二點に集まる理由も容易に了解される。

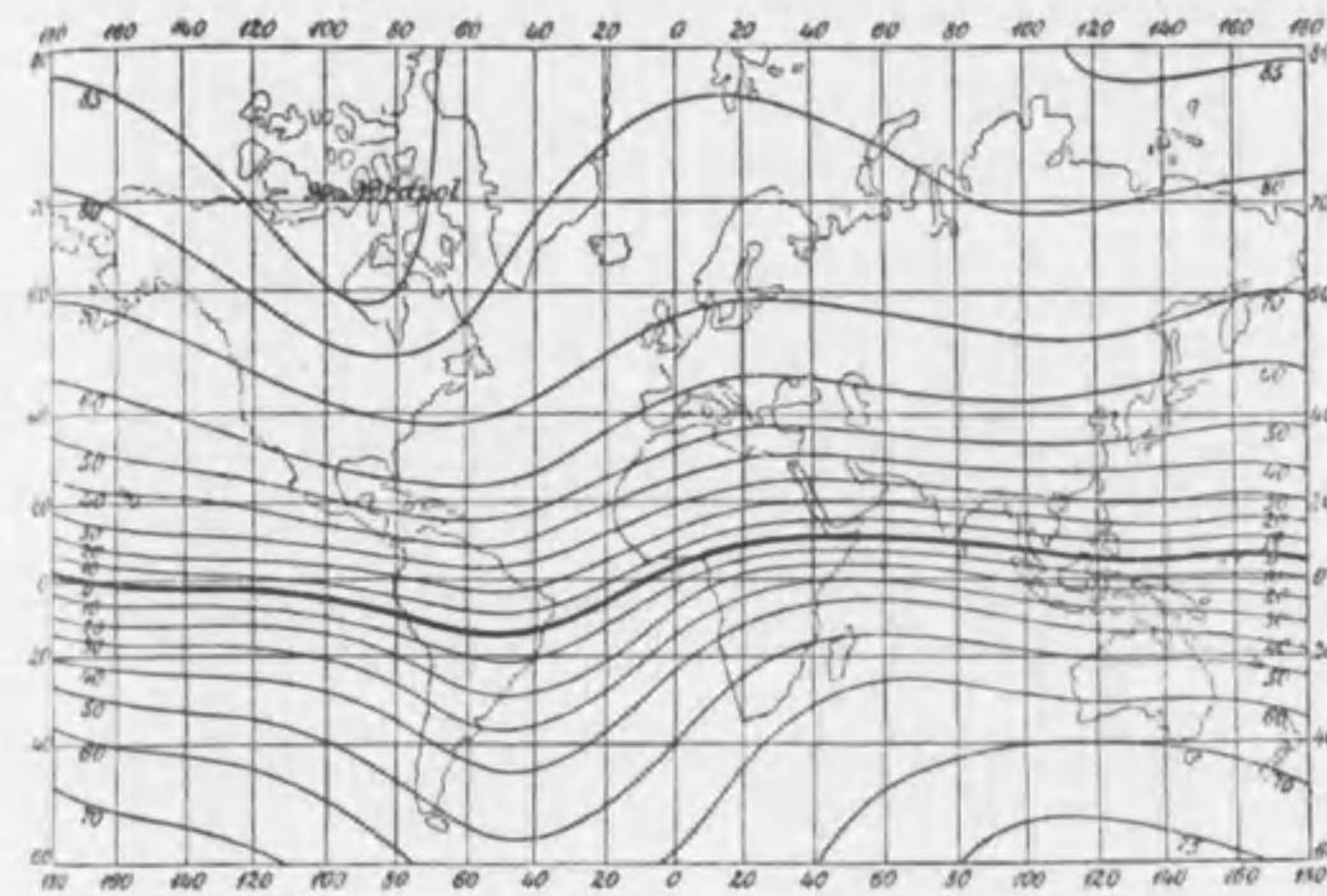
地球磁氣の二極は次の位置にある。

地球磁氣の北極 北緯70°30' 西經97°40'

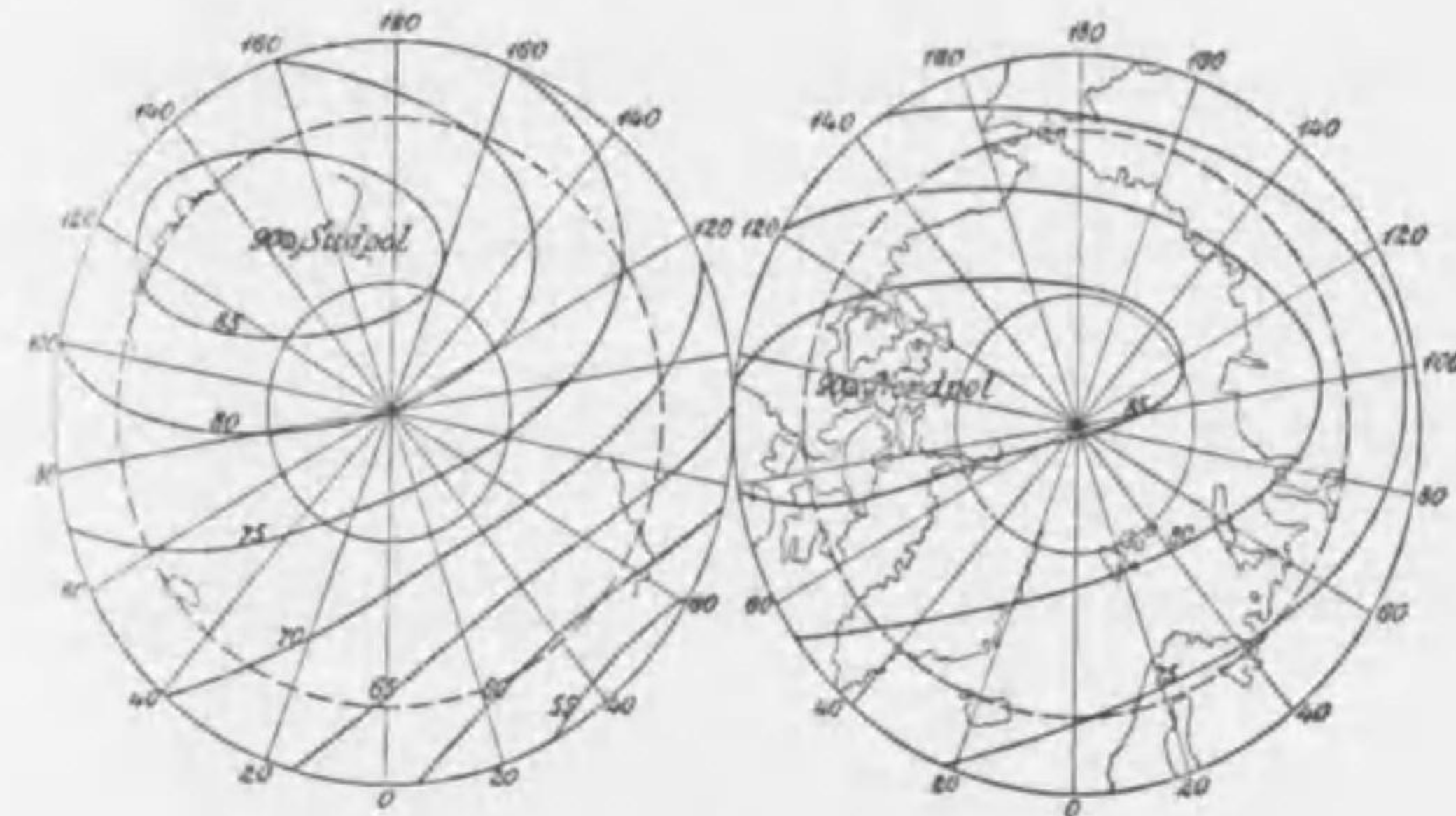
地球磁氣の南極 南緯73°39' 東經146°15'

故に之等の兩極を結ぶ直線は地球の中心を通過しない。

b) 等伏線 (Isoclinic lines) 伏角の等しい地點を連ねた曲線を



第 31 圖

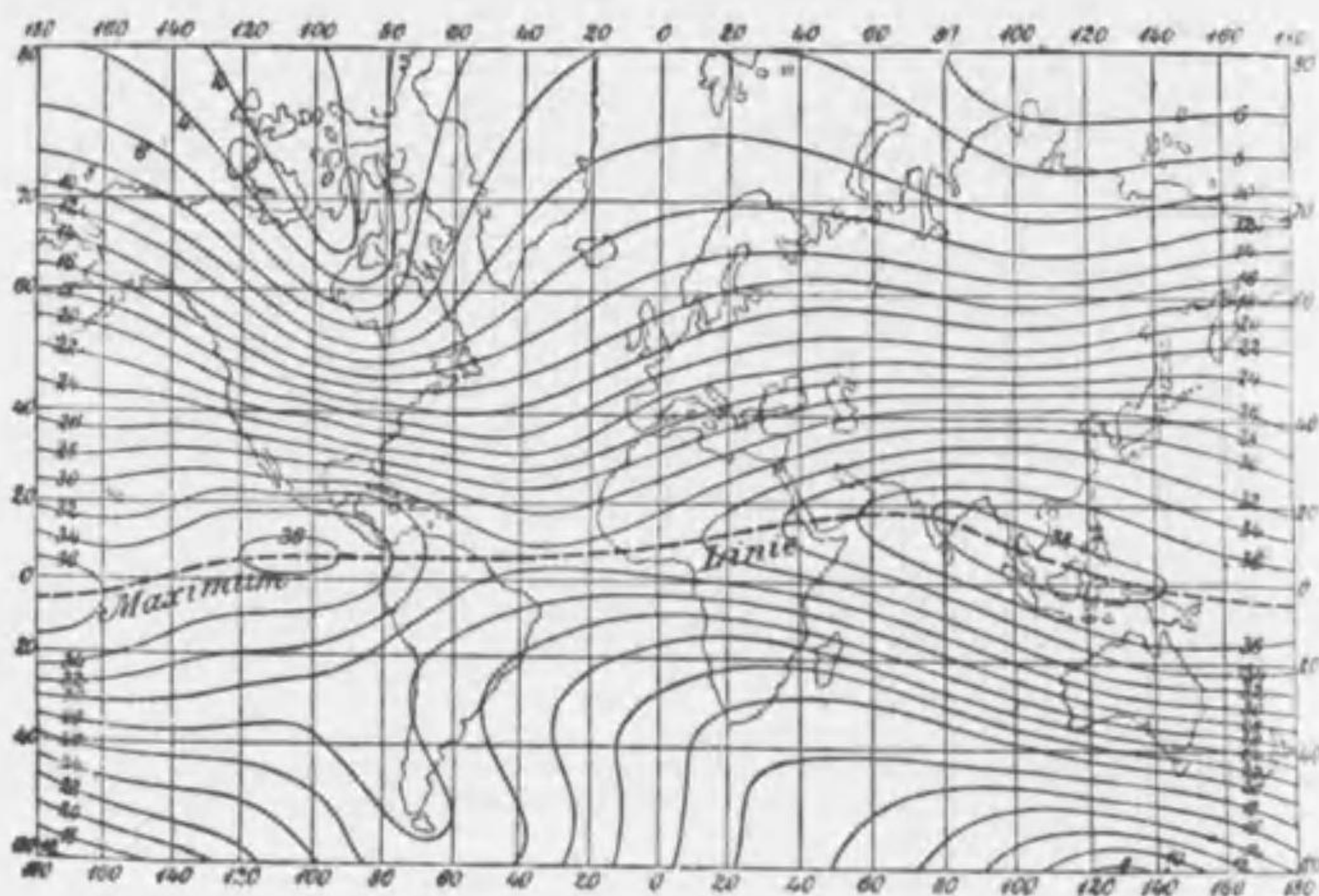


第 32 圖

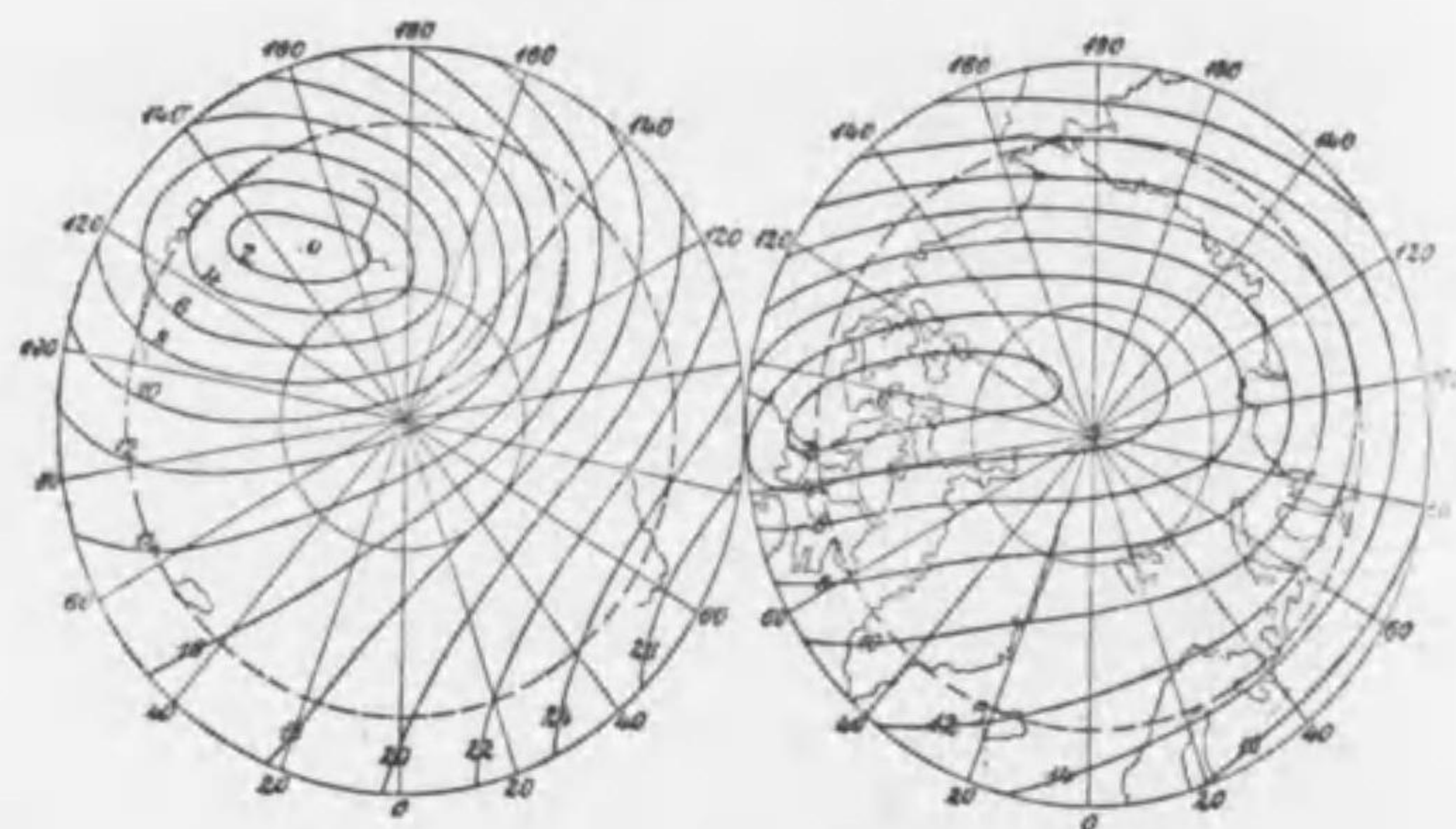
等伏線といふ。第31,32圖は夫であつて圖中等伏線に沿つて書いた數字は、伏角を示すものである。地球の磁極に於ては伏角は約90°赤道附近では略々0である。0°の等伏線は圖中太い線で示し磁氣赤道 (Magnetic equator, Aclinic line) と呼ばれるが地理的赤道と完全には一致せずして甚だしい所では12°の差があ

る。地理上の北極では伏角は約 86°, 南極では約 83°である。

c) 等水平分力線 (H-isodynamic) 等水平分力線の分布は第33, 34 圖の通りである。線上に記入したのは水平分力の強さを 10⁻² 絶對單位で示したものである。



第 33 圖



第 34 圖

地球の磁極に於ては磁力線は垂直の位置を取るため H は 0

である。然して磁氣赤道の附近では磁力線は水平で水平分力に最大になる。圖中太い點線で示したものが H が最大の線であつて水平分力赤道と呼ばれて居る。等水平分力線の分布は等伏線の分布と似たものである。

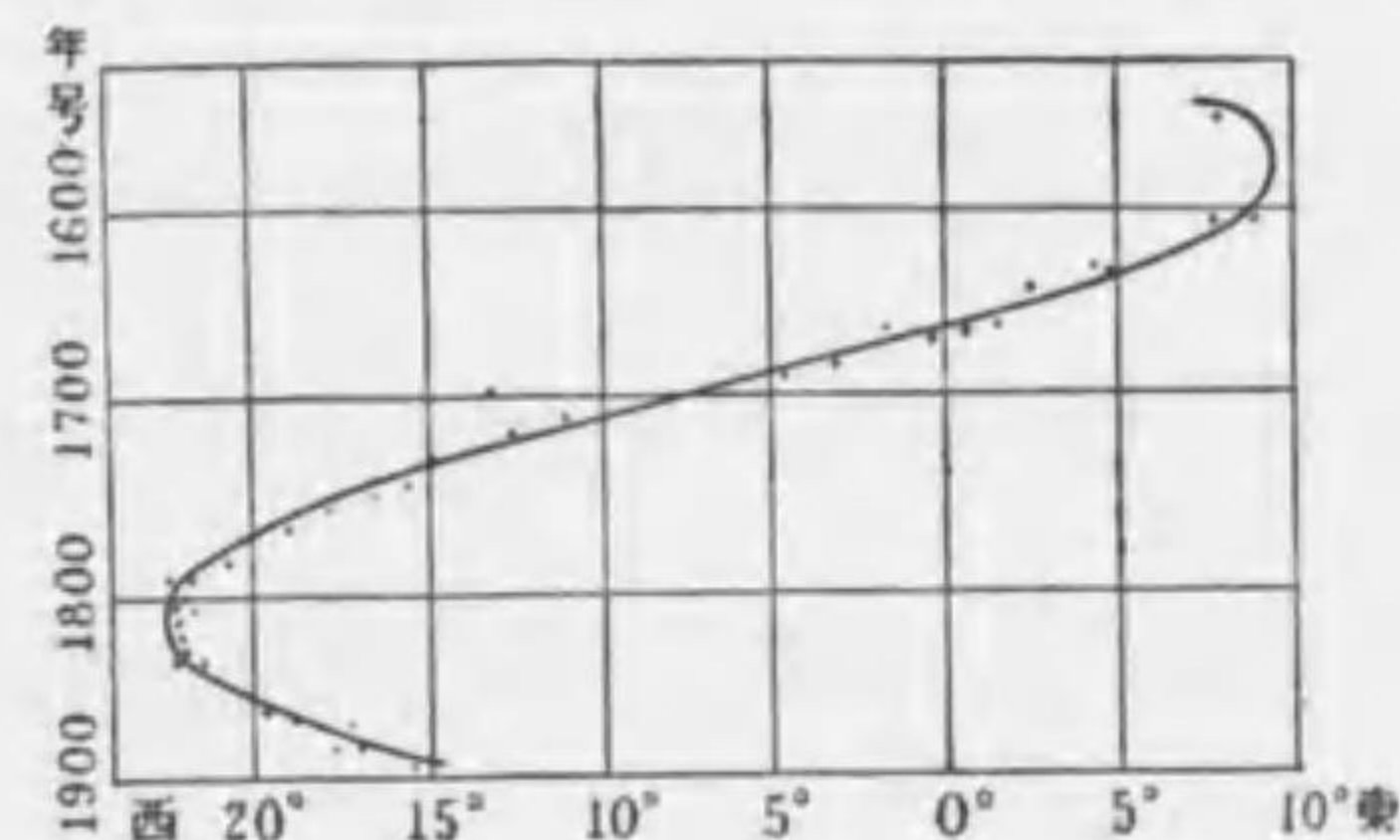
d) ^{デュペレー}Duperrey 線 此の線は地球の表面上に於ける磁力の分布を最も一般的に明瞭に表はすものであつて、任意の地點から出發して常に磁石の指す方向に向つて北又は南に進む場合に迎へる道に相等すものである。之は又水平磁力線 (Lines of horizontal magnetic force) とも呼ばれるが、1836年に初めて使用した人の名に因んで Duperrey 線ともいふ。

§ 20. 地球磁氣の時間的變化 同一の場所に於て長い間地球磁氣の測定を續けて居ると其の値が時間と共に徐々に變化して居る事が知られる。然して三要素何れも次の如き形式で變化を表はす事が出来る。

$$x = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2$$

茲には a₀ は t = t₀ の時の考へる磁氣要素の値である。第35圖

はパリに於ける方位角の時間的變化を示すものであつて横軸に角度、縦軸に年號を取つてある。圖によれば半週期を230年として規則正しく東西



第 35 圖

に偏する事が知られる。此の週期はローマ及びロンドンに於ける觀測にも現はれて居る。

一般に三要素の中變化の最も大なるは方位角で水平分力之に次ぎ伏角の變化は最も小さいものである。

尙上の如く長い年月の間に起る變化之を長週期變化といふの他に一年を週期とする所謂年週變化及び一日を週期とする日週變化がある。之等の變化は何れも上の式で表はす事が出来る。

下に示す表は古くからある観測所に於ける長週期變化を示すものである。

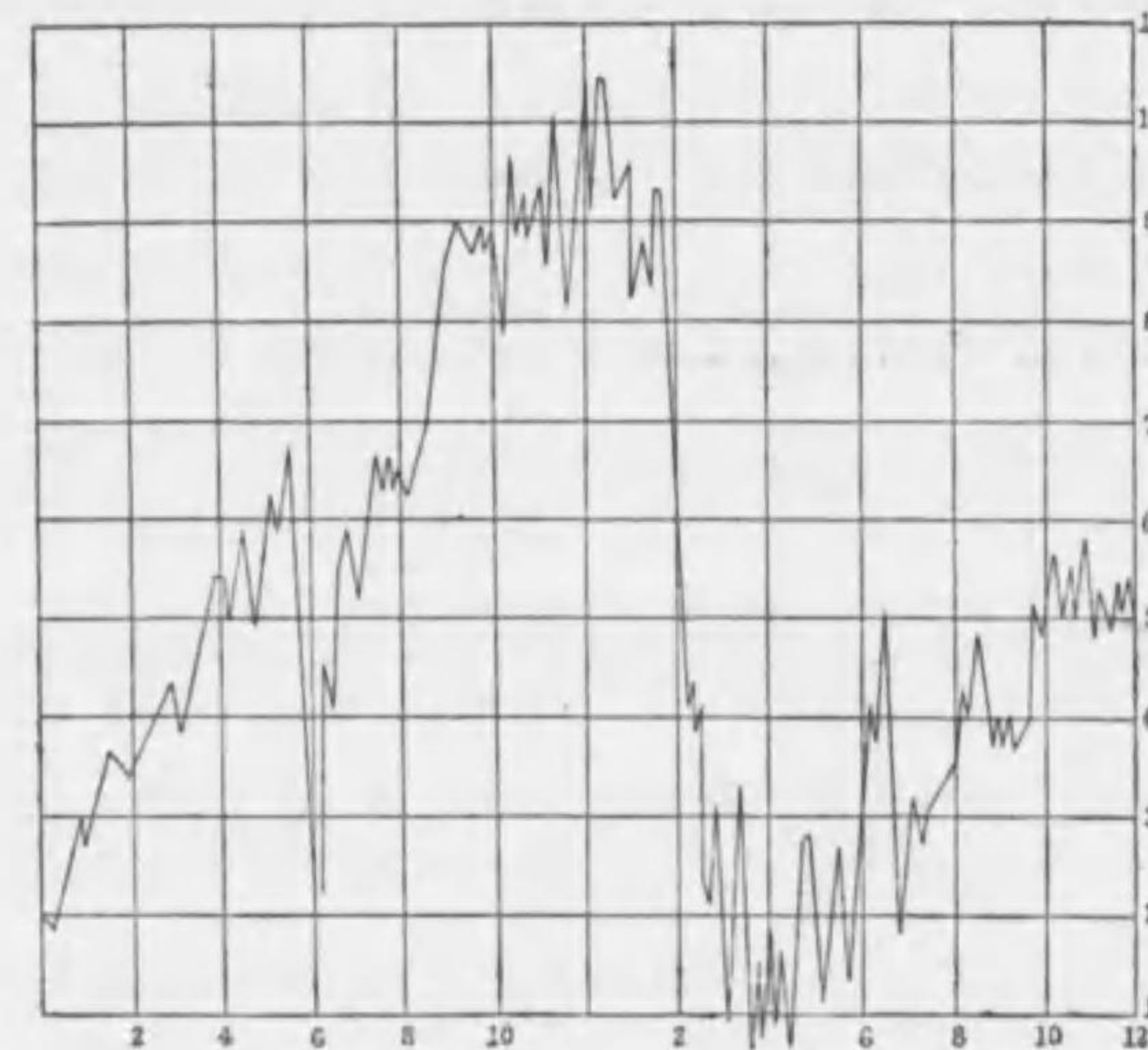
要素	場所	a_0	a_1	a_2	t_0	観測期間
方位角 δ	Berlin	$-18^{\circ}7.30'$	$+0.2681'$	$+0.070'$	1800	1730-1870
	Göttingen	$-14^{\circ}51.70'$	$+8.8430'$	$+0.053'$	1867.52	1632-1885
	Greenwich	$-20^{\circ}24.97'$	$+7.8730'$	$-0.049'$	1866	1858-1875
伏 角 i	Berlin	$70^{\circ}19.5'$	$-4.35'$	$+0.021'$	1800	
	Göttingen	$67^{\circ}1.0'$	$-1.90'$	$+0.016'$	1860.6	
	Greenwich	$67^{\circ}56.2'$	$-2.02'$	$-0.005'$	1863	
水平分力 H	Berlin	0.17594	-8×10^{-5}	$+2 \times 10^{-6}$	1800	
	Göttingen	0.18497	$+35 \times 10^{-5}$	$+3 \times 10^{-6}$	1870	
	Greenwich	0.17694	$+16 \times 10^{-5}$	$+5 \times 10^{-6}$	1864	

此の表によれば長週期變化は場所によつて大いに異なる事が知られる。

日週變化の一例を第30圖に示す。之は明治26年7月に東京、八王子、猿橋及び甲府に於て測定せる結果である。

磁氣嵐と名づくる現象は地球磁氣の急激異常の變化であつて H 及び δ に於て殊に著るしい。此の現象は静止して居た磁力計が急激に振動し初めて其の方向が一定しないのを特徴とする。其の繼續時間は一般に極めて短時間であるが時として二時間位に渉る事があり、極めて著るしい場合には一晝夜に及

んだ例もある。第36圖は1882年11月15日にキングアフォード (Kingaafjord) の極観測所で記録せるもので夜半から24時間を経



第 36 圖

て尙終らない。

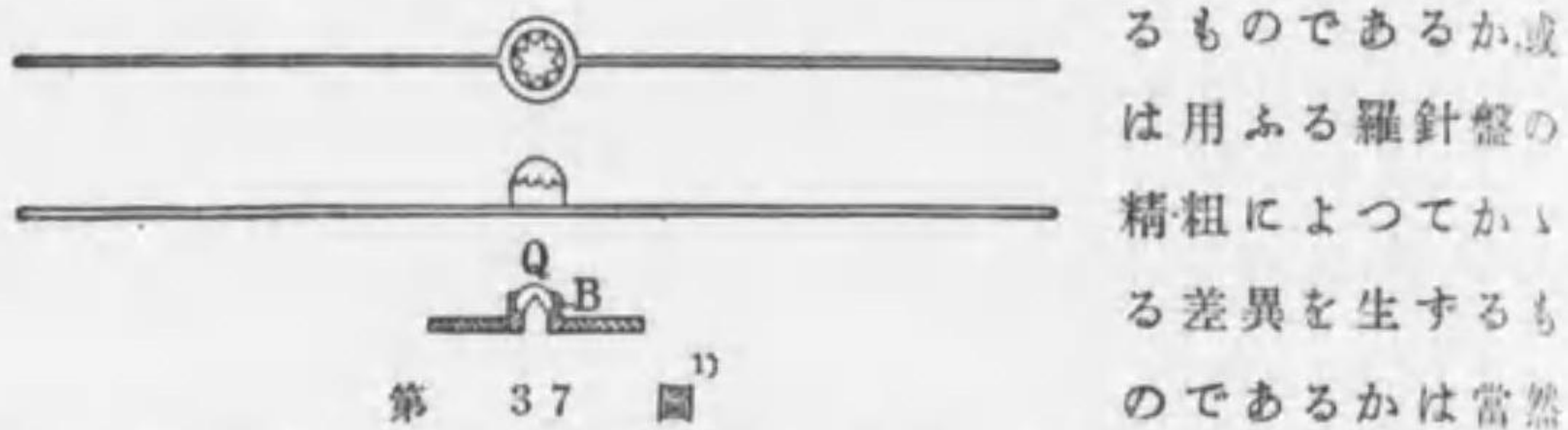
磁氣嵐は地球の極に近づく程強くなり又回数も増す。一日中では晝起るものが回数は多く、強いものは夜間に多い。又一年中では2月と10月に最も多く、6月と12月が最も少ない。故に一年に於ける週期は約半年である。

磁氣嵐の原因に就ては太陽から電子が飛んで来て、夫が地球の磁氣を攪亂するといふ説があるが未だ一般に承認されて居らない。のみならず地球磁氣其のものに就ても種々の説はあるが何れも完全なものではなく、其の起原、本性は全く知られて居らないのである。

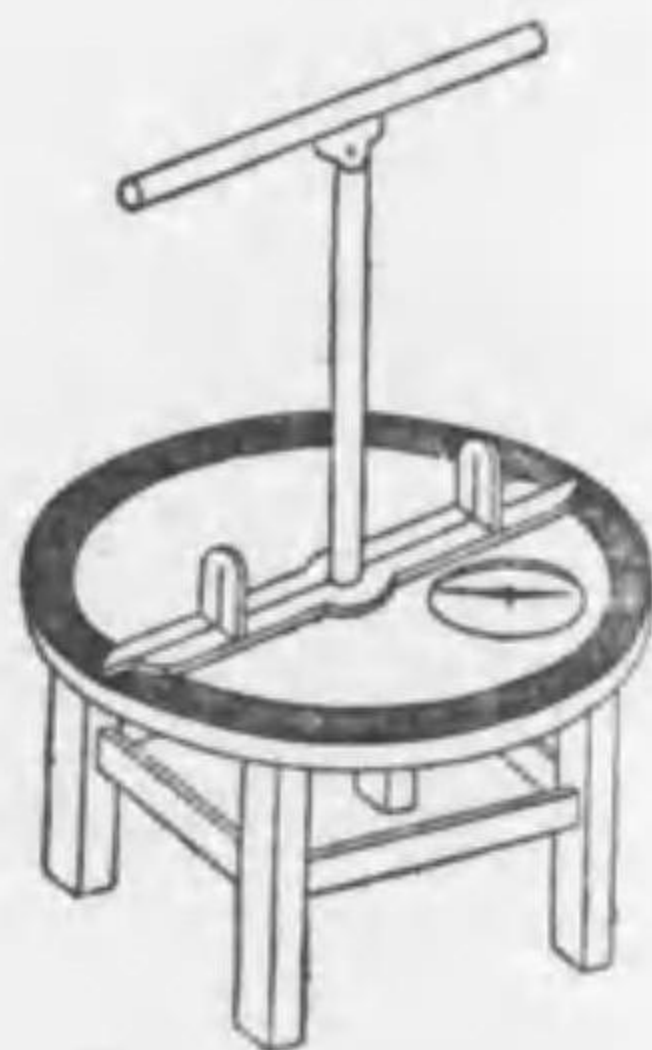
§21. 我國に於ける磁氣觀測 我日本に於ても既に1800年(寛政11年)より1818年(文政元年)に亘つて伊能忠敬(1745-1818)

が大測量を行なひ、従つて彼の製作せる精巧なる羅針盤によつて早くも磁氣の偏差を見出すべきであつた。傳へる所によれば既に夫以前から羅針盤の指す南北と實際の方角との間に差異のある事は明清より傳來せる諸書に載せて居つて、北京に於ては當時⁴以上の差があると言はれて居つた。然るに日本に於ては此の差が認められなかつたのである。従つて傳來の諸書に載せる所の方位の差なるものは實際かゝる現象が存在するものであるか、或は用ふる羅針盤の精粗によつてかゝる差異を生ずるものであるかは當然起る疑問である。よつて忠敬は先づ水晶の軸受を造つて磁針の運動に對する抵抗を減少する事に努め、次に極めて細くして長い磁針を製作する事に成功して、多年の疑問を解決せんために磁氣偏差の有無を實驗した。

然るに當時日本に於ては磁氣子午線は殆んど地理學上の子午線と一致し、従つて方位角は0であつた。されば忠敬は精巧なる羅針盤を嚴密なる注意の下に使用すれば我國に於ては常に南北を指すものと斷定し、遂に一般的に方位角の有無を疑ふに至つた。之は日本に取つて一大不幸である。但し忠敬も火山岩の豊富なる地方に於て往々見る異常なる偏差を認めたが、之は地中にある鐵分によるものであつて小區域内の變調に過ぎずして一般的に其の現象がある事を考



第 37 圖



第 38 圖

1,2) 大谷亮吉氏著、伊能忠敬による。

へなかつた。第37圖は忠敬の製作した磁針(Qは水晶軸承、Bは眞鍮の座金)第38圖は測量用の所謂方位盤である。其の解説に

大、中方位盤モ圓形ニシテ其ノ中心ヨリ遠目鏡ヲシカケ、遠山ヲ計ルニハ最コレヲ用ユ。コレハ本盤ニテ盤ヲ南北ニ合セ、目鏡ヲ廻シテ計ナリ。

と述べて居る。以て其の構造を察し得るであらう。

萬延元年(1860)荒井郁之助氏が當時の江戸に於ける方位角を測定して $-3^{\circ}11'$ なる値を得た。之が最も古い方位角の記録である。其の後明治15年(1882)同氏が測つた結果は $-4^{\circ}24'$ である。之丈の材料から1年に $3'3$ だけ西の方へ偏する事が知られる。若し此の割合で伊能忠敬の時代から變化しつゝあつたとすれば方位角が0であつたのは1802年(享和2年)で丁度忠敬が測量を初めて間もない頃である。

明治13年(1880年)には陸地測量部のシュエット(Otto Schütt)が數個所に於て各要素を測定した。明治16年(1883年)には中央氣象臺の和田雄治氏が方位角の日週變化を測定した。之が日本に於ける此種の最初のものである。其の結果によれば最大方位角は $-4^{\circ}20'39$ で午後2時に起り、最小方位角は $-4^{\circ}13'46$ で午前8時に起り、最大と最小の差は $6'93$ である。之等の値は同年8月20日以後10日間の平均である。

其の後は漸次盛に行はれるやうになり、明治15~16年(1882-3)に陸地測量部の關野、小足兩氏の行つた測定は明治18年(1885年)に萬國地學會に提出された。之が日本の磁氣觀測が國際的に行はれた最初のものである。明治20年(1887年)に東京帝國大學のノット(Knott)教授及び田中館助教授によつて全國に涉り81個所に於て行はれた觀測は夫迄に於ける最も大規模のものであつて、眞實の意味で最初の測定と言ふ事が出来るであらう。

田中館博士は其の後明治26~29年(1893-1896)に亘つて極めて大規模の観測を行なひ、夫以前の結果と對照して各地に於ける三要素の時間的變化を算出して居る。

田中館博士の後を承けて其の後十年ごとに海軍水路部の手によつて規則正しく磁氣観測が行はれて居る。最近のものとしては1923~1924年(大正12~13年)の測定がある。其の結果によれば北緯 φ° 、東經 λ° の地點に於ける各要素を1923年1月1日に換算すれば次の如くなる。

但式中 $\Delta\varphi = \varphi - 35^\circ$ $\Delta\lambda = \lambda - 136^\circ$ である。

$$\delta = -5^\circ 18' 40'' - 15' 2690 \Delta\varphi + 2' 1658 \Delta\lambda - 0' 027540 \Delta\varphi^2 + 0' 058470 \Delta\varphi \Delta\lambda + 0' 406110 \Delta\lambda^2$$

$$i = 48^\circ 15' 03'' + 1' 28' 5304 \Delta\varphi - 8' 9891 \Delta\lambda - 0' 581826 \Delta\varphi^2 - 0' 510984 \Delta\varphi \Delta\lambda + 0' 224952 \Delta\lambda^2$$

$$H = 30445.2 - 391.509 \Delta\varphi - 61.569 \Delta\lambda - 4.85410 \Delta\varphi^2 + 4.53205 \Delta\varphi \Delta\lambda + 1.75500 \Delta\lambda^2$$

茲に H の大きさはガンマ(後に説明する)で示してある。此の結果によれば各要素は場所によつて多少異なるものであつて北緯 35° 、東經 135° の地點(姫路市附近)に於ける値は

$$\delta = -5^\circ 18' 40'' \quad i = 48^\circ 15' 03'' \quad H = 30445.2$$

である。

各要素が地點によつて異なる如く其の變化する割合も場所によつて差異がある。1913年の測定と1923年の測定とを比較すれば、一年につき

$$\frac{d\delta}{dt} = -1' 829 - 0' 07460 \Delta\varphi + 0' 02462 \Delta\lambda - 0' 0004960 \Delta\varphi^2 + 0' 0002088 \Delta\varphi \Delta\lambda + 0' 0003067 \Delta\lambda^2$$

$$\frac{dH}{dt} = 1.0 - 0.778 \Delta\varphi + 0.058 \Delta\lambda + 0.00479 \Delta\varphi^2 + 0.00102 \Delta\varphi \Delta\lambda + 0.00580 \Delta\lambda^2$$

の割合である。

全國主要都市に於ける三要素の値を次表に示す。

地 球 磁 氣 三 要 素

	方位角 δ	伏角 i	水平分力 H		方位角 δ	伏角 i	水平分力 H		
樺太	敷香	-8 46.7	62 53.6	23867	畿原	-5 21.5	48 40.2	31373	
	豊原	-8 37.1	60 42.4	25162		唐津	-5 01.3	47 33.0	31575
北海道	稚内	-8 20.5	59 18.9	25901	九州	宮地	-4 34.2	46 52.2	31624
		加洲	-7 48.1	57 37.1		26540	長崎	-6 24.7	49 14.3
	札幌	-7 29.6	57 03.9	26773		人吉	-4 36.5	45 45.1	32022
		森	-7 17.0	56 06.6		27412	宮崎	-4 32.0	45 23.8
	野邊地	-7 01.1	54 37.3	27874		名瀬	-3 24.3	40 29.4	33528
本州	秋田	-6 31.4	53 33.0	28520	琉球	那覇	-2 27.5	37 10.9	34563
	山形	-6 01.5	51 50.7	29053	宮古	-2 03.8	35 00.4	35253	
	仙臺	-6 07.0	51 51.2	28781	臺灣	臺北	-1 59.5	35 25.5	35806
	新潟	-6 18.2	51 43.5	29137		花蓮港	-1 22.1	33 41.0	35979
	若松	-5 52.0	51 10.5	29153	臺南	-1 10.2	31 52.7	36531	
	水戸	-5 30.5	49 38.5	29605	(小笠原) 北村	-2 35.4	36 53.7	31818	
		銚子	-5 12.3	48 26.4	30065	朝鮮	城津	-7 03.7	56 41.0
	八王子	-5 28.3	48 41.9	30001	義州		-6 09.6	56 55.4	28448
	鳥取	-5 48.8	49 35.1	30499	平壤	-6 06.9	55 07.6	29349	
		豊橋	-5 24.5	48 10.2	30432	仁川	-5 39.4	53 08.8	30036
岡山	-5 30.5	48 25.5	30892	鮮	大邱	-5 37.9	50 42.0	30727	
廣島	-5 20.1	48 15.4	31162		釜山	-5 21.1	49 41.0	31185	
洲本	-5 21.1	47 51.8	30915	豊南	-4 29.0	49 21.3	31272		
	山口	-5 15.7	48 10.0	31304	サイパン	+1 49.5	17 28.3	34385	
徳島		-5 15.9	47 30.1	31017	ヤップ	+1 53.9	5 45.0	36740	
四国	若宮	-5 05.4	47 06.7	31372	トラック	+3 32.7	2 05.1	35668	
					ボナベ	+5 58.6	2 45.2	34959	

注意 方位角は東に偏れたものを正とする。
 H の単位はガンマである。

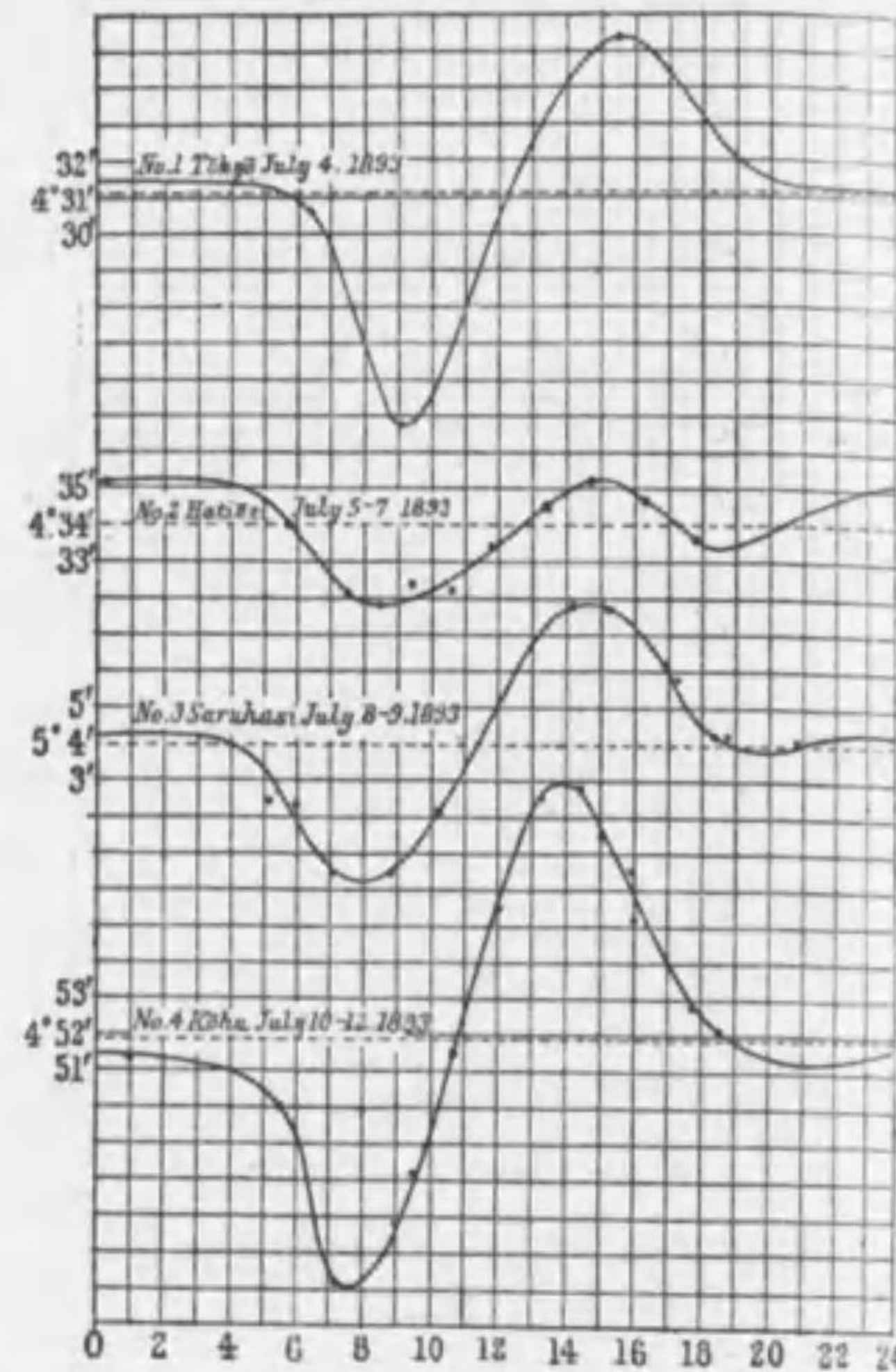
我國に於ける日週變化の例は第39圖に示してある。

§22. 地球磁氣の

理論 地球磁氣の性質に關しては上に述べた如く種々研究せられて居るに反し、其の理論は物理學の他の部門に比較して實に貧弱な状態である。

地球磁氣の原因は何であるか、其の原因は何處にあるか。此の二つが實驗的研究の次に來る問題である。第一の問題は暫らく措いて第二の問題に關してはとにかく二つの可能性が考へられる。即ち地球

磁氣の原因は地球以外にあるか或は地球自身にあるかである。若し地球以外に原因があれば大いに地球自轉の影響を受ける筈である。然して實際第39圖に示す如き日週變化の存在は此の考への正當な事を暗示するようであるが、日週變化は地球磁氣の變化としては極めて小さいものであるから之を以て原因を地球外に歸する事は出來ない。従つて地球自身の中に原因があるとすれば果して地球の何處にあるか。ファラデーは酸素が常磁氣性體として稍強い磁性を有する事から大氣中に存する酸素が地球磁氣の原因であるとしたが、此の思想によつて代表せられる如く大氣中及び地表の如く地球表面の部分に存



第 39 圖

するとする説と、之と正反對に原因は地球の内部深い所に在るとする説と古來互に對立して居るのである。後者の最も古い主唱者はマイヤー (Tobias Mayer 1750 年頃の人) であつて後にフムボルト (A. v. Humboldt 1769—1859) が此の思想を踏襲發展した。マイヤーの説は地球の中心に極めて強い二つの小磁石が赤道面に非對稱的に存在して居るとするものである。

ガウス (C.F. Gauss 1777—1855) は全然斯様な假説を用ひずに、只磁力の強さは距離の二乗に反比例するといふ、クーロンの法則のみを採用し、従つて地球磁場には磁位が存在し、大氣と地殻を貫く等磁位面を考へる事が出來、磁力線及び磁氣子午面は此の等磁位面に直角に交るものであるといふ事から、數理物理の精粹を傾けて地球磁場を解析し、今日に到るまで此の方法によつて觀測の結果を整理して居るのであるが、之を述べる事は本書の程度では困難であるから、極めて特殊な場合に就て理論の輪廓を述べることに止めたいと思ふ。

今最も簡單に考へて地球内部に平等に磁化された半徑 a なる同心球を考へる。地面に二點 P 及び Q を取り、 OP 及び OQ が磁化の方向となす角を θ_1, θ_2 とすれば $r > a$ であるから (13c) によつて

$$\Omega_P - \Omega_Q = \frac{M}{r^2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad (22a)$$

但 M は (13c) で與へられ、球の磁氣能率である。 P と Q との間の多くの地點で地球磁場を觀測すれば、其の結果から上式の左邊の値は計算する事が出來る。磁化の方向はまだ知られて居ないから θ_1, θ_2 は未知である。

次に P, Q に於ける地球磁場の垂直分力を Z_P, Z_Q とすれば (8a) によつて

$$Z_P = \frac{2M}{r^3} \cos \theta_1$$

$$Z_Q = \frac{2M}{r^3} \cos \theta_2$$

従つて

$$Z_P - Z_Q = \frac{2M}{r^3} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad (22b)$$

(22a) 及び (22b) から

$$\Omega_P - \Omega_Q = \frac{r}{2} (Z_P - Z_Q) \quad (22c)$$

なる関係を得る。即ち地球内部に磁石があれば地面にある二点 P, Q に於ける磁位と垂直分力の間には斯かる関係がなければならぬ。此の兩邊は何れも測定し得るから此の関係が成立するか否かは實驗的に確かめる事が出来る。

もし $r < a$ で地表面は平等に磁化された球の内部にあるとすれば磁場の強さ F は磁化の方向に平行であるから理論上

$$\Omega_P - \Omega_Q = rF (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \quad (22d)$$

となる。次に之を證明する。磁氣緯度線は等磁位線であるから其の上を正磁極を動かすにはエネルギーを要しない。故に P と Q とが同一の磁氣子午線上にない時は先づ Q より出發して磁氣子午線に沿つて P と同一磁氣緯度の所まで進み、其の後は緯度線に沿つて P に行くと考へればよい。されば P, Q が同一の磁氣子午線の上にある場合を考へれば充分である。さて磁氣緯度が θ なる點での水平分力は

$$F \sin \theta$$

である。 θ が $d\theta$ だけ増すためには子午線に沿つて $rd\theta$ だけ進まねばならないから

$$\Omega_P - \Omega_Q = \int_{\theta_2}^{\theta_1} F \sin \theta \, rd\theta = -rF (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

となる。即ち (22d) を得た。

然るに磁場の r の方向の分力を求むれば

$$Z_P = F \cos \theta_1$$

$$Z_Q = F \cos \theta_2$$

であるから、此の場合には (22d) と比較して

$$\Omega_P - \Omega_Q = -r(Z_P - Z_Q) \quad (22e)$$

なる関係がなければならぬ事が知られる。

地表面にある二点の磁位と垂直分力の間には (22c) の関係があれば地球磁氣場の原因は地下にあるが、もし (22e) の関係があれば地面より上にある。ガウスは此の方法によつて三要素夫々の平均値は地球表面より上にある原因には左右されない事を證明した。又地球磁石の磁氣能率は

$$M = 8.584 \times 10^{25} \quad \text{C.G.S.}$$

といふ結果を得た。此の値は驚くべき大きな値であつて、地球其のものが一様に磁化されたとしても之の磁氣能率を有するためには 1m^2 の磁氣能率は十分に磁化した鐵の重さ八封度に相當するのである。又上記の磁氣能率を得るためには飽和點まで磁化した鋼鐵を以てしても地球の $\frac{1}{26}$ の半徑を有する球でなければならぬ。この事實は、地球の磁氣をその内部にとることを速断するに躊躇せしめるものである。

第三編 電氣力學

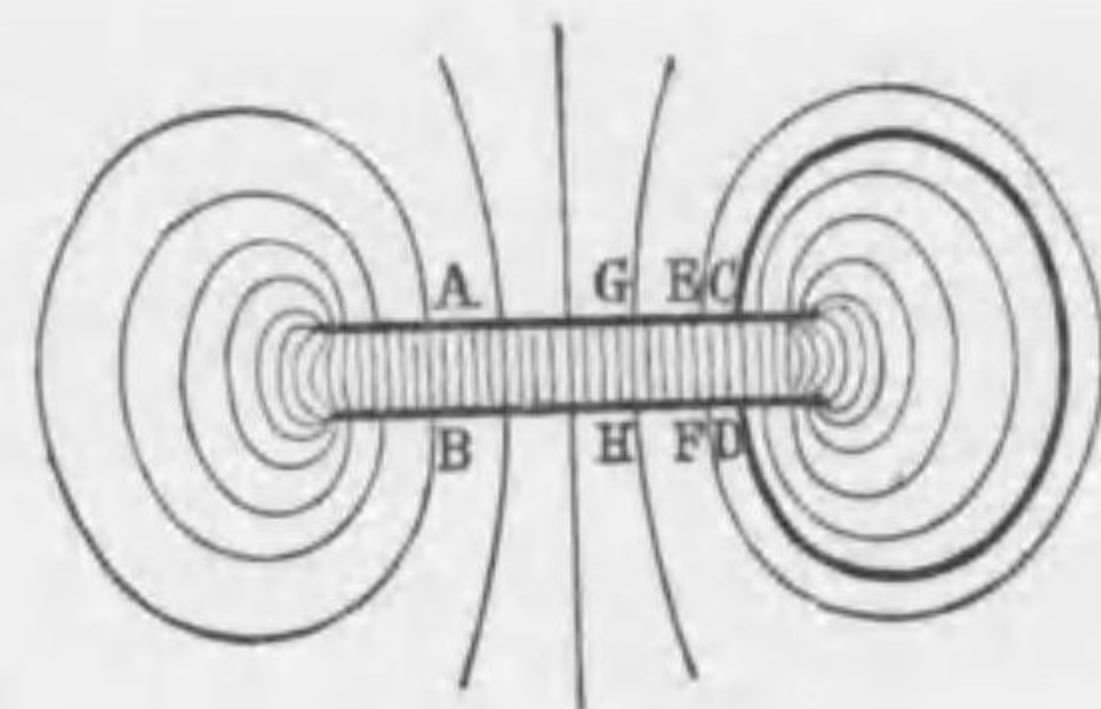
第一章 電 流

§1. 電流 二つの導體を異なる電位に充電し、之を導體の線にて連絡すれば正電氣は電位の高い導體から低い導體に移動し負電氣は反對に移動する。何となればかくすれば導體の線の兩端は異なる電位を有する事になり、従つて線内にはある強さの電場が生ずるが、かゝる場合に電氣の移動するは導體の本來の性質であるからである。電氣の移動するを電流といふ。かく電流が流れると共に導體の電位は漸次相近づき遂に夫れが等しくなれば電流の流れる事は止んでしまう。夫は正電氣が電位の高い方から低い方に負電氣は反對に移つて、何れも電位の高い導體の方は電位を下げ、電位の低い方の導體の電位を上げるからである。

今電力管の見地から此の現象の經過を考へるためにコンデンサーの二枚の板に正負等量の電荷を與へた場合に取れば、導線で連絡する前には電力管の分布は第1圖の通り各電力管に作用する張力と相互の間に作用する反撥力に依て平衡して居る。導線 CD を連ねると、導線の入つた部分に以前にあつた電力管は、導體中では存在出來ないから直に縮んで、電力管の端は導線に沿つて移動して、始め A, B 上にあつた兩端が一緒になり、之等の管の効果はなくなつて終ふ。かく一本の電力管が消滅すると、以前に成立した平衡は茲に破れて EF, GH 等の如く導線の近くにある電力管を導線中に押し込む作用が起る。かく導線中に押し込まれた電力管は、前述の理由によつて同じやうな順序を経て直に消滅する。之等の現象は初め A, B を連絡して

居た電力管が全部無くなるまで經續するのである。電力管の兩端が一本の導線上を這つて次第に近づく事は取りも直さず正負の電荷が移動する事である。

A と B とが初め一定量の電氣を有し、其の後放電するに任せて之が補充を受けない場合には、電流は暫らくして止まる事は前に述べた通りである。然し之等を例へば蓄電池又は發電機の兩極



第 1 圖

に接續して置けば、A 及び B の電位差は一定でなければならぬ。従つて A の板がある量の正電氣、B が負電氣を失なつて電位差が減少すれば、直に蓄電池から電荷を補給して A, B の電位を常に一定に保つから、CD なる導線中には常に一定の電流が流れる。CD のみならず、例へば F 點の附近をも常に一定の割合で電力管の端が這つて行くから、此の部分にても常に一定の電流が一定の方向に流れて居る。かく、ある電氣系に於て各部分に常に一定の電流が一定の方向に流れる時は、此の電氣系の電流は定常状態にあるといひ、定常状態にある電流を定常電流といふ。

導線の一處 P に於ける任意の切斷面を考へ、此の中を通過して Δt なる時間中に N 單位の正電荷が A より B に向つて動き、 N' 單位の負電氣が B より A に向つて動いた場合には、

$$\frac{N+N'}{\Delta t} \quad (1)$$

を P 點に於ける電流の強さといふ。N 及び N' を靜電單位で測れば靜電單位で表はした電流の強さを得、後に述ぶる如く電磁單位で測れば電磁單位で表はした電流の強さを得る。しばら

くの間は、總べての量は静電單位で測つたものとする。

導線内を定常電流が流れて居る場合には、各點に於ける電流の強さが等しくなければならない。何となれば若し P, Q 二點に於ける電流の強さが等しくないとすれば正又は負の電荷が P, Q 二點の中間に積るから、此の部分の導體の電位が變化して定常状態を維持する事が出来ない事になるからである。

電流の方向とは、正電荷の運動方向、従つて導線内の電場の方向をいふ。

§2. オームの法則 ある導線の中を強さ i なる定常電流が流れて居る時に、其の導線中に二點 A 及び B を選び、その電位を V_1 及び V_2 とすれば、二點間の電位差又は電壓、或は起電力ともいふを V とすれば

$$V = V_1 - V_2$$

である。1827 年オームの實驗せる所によれば導線の物理的狀態(例へば温度の如き)が一定ならば

$$\frac{V}{i} \quad (2a)$$

なる比は一定で電流の強さ従つて起電力の大小には無關係である。之をオームの法則といふ。

今上の比を R で示せば上式から

$$V = iR$$

となる。 R を AB 二點間の導線の抵抗といふ。故にオームの法則は導線の抵抗は電流の強さには無關係である事を主張するものである。されど抵抗は導線の物質、形狀及温度、内力 (Stress) 等の物理的狀態によつて大いに異なるものである。

此の法則は全く實驗的に見出されたものであるばかりでなく、現今と雖も實驗的法則の範圍を出でないものであつて、理論上 R は i に無關係でなければならないといふ根拠はない。さ

れど其の後繰り返された精密な測定によるも、金屬と電解液には極めて正確に此の法則が適用される。只瓦斯に於ては現象は甚だ複雑であつてオームの法則は適用されない。

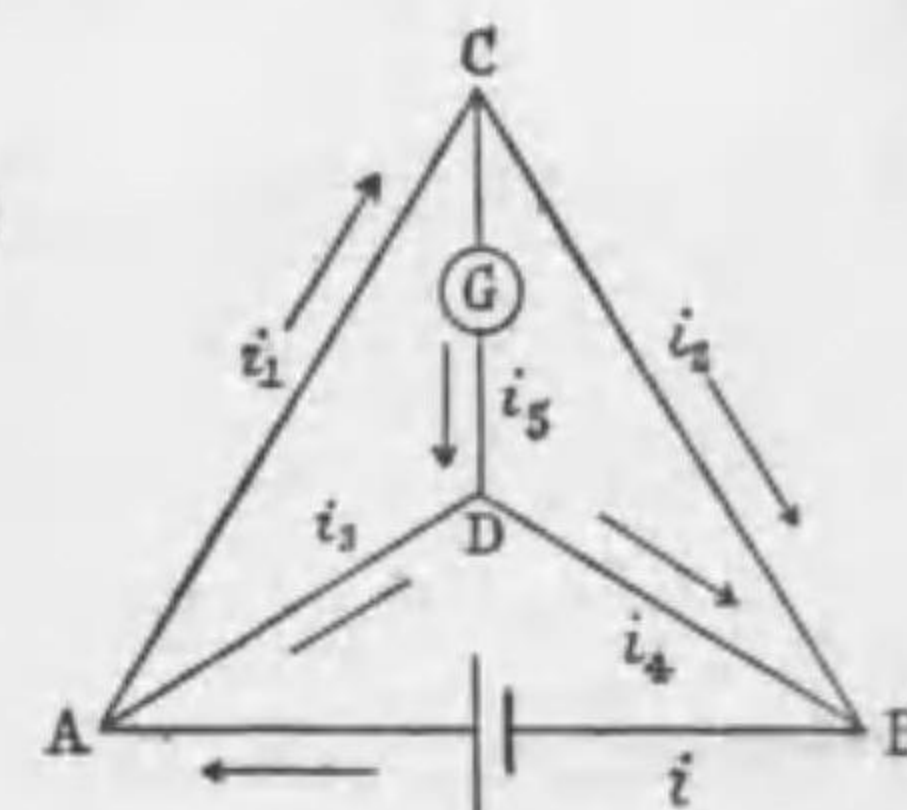
導體に電流が流れて居る場合に、導體を電流の回路又は電氣回路と呼ぶ事がある。ある回路に電流を供給する事電池又は發電機の如きものは電源といふ。

§3. キルヒホッフの法則 數多の導線を様々に接続して一の導線系を造り、此の中の二點間に電池を接続して定常電流を流す場合に、電流は各導線に如何に分布せられるかを考へて見る。先づ定常電流を取り扱つて居るのであるから、與へる導線系中の如何なる點にも電荷が集積するが如き事は起らない。故に多くの導線の接合點に入り來る電流と、之より出で去る電流とは相等しくなければならない。されば今ある接合點に入る電流を正に數へ、之より出る電流を負の符號を有する電流が入る事とすれば、導線系中の任意の接合點に入る電流の和は 0 である。之をキルヒホッフの第一法則といふ。さればキルヒホッフの第一法則は定常電流の性質より必然的に演釋されるものである。

今第 2 圖の如き導線系に此の法則を適用すれば

$$\left. \begin{aligned} \text{A 點にては} \quad & i - i_1 - i_3 = 0 \\ \text{B 點にては} \quad & i_2 + i_4 - i = 0 \\ \text{C 點にては} \quad & i_1 - i_2 - i_5 = 0 \\ \text{D 點にては} \quad & i_3 + i_5 - i_4 = 0 \end{aligned} \right\} (3a)$$

を得る。 i の値が知られて居れば i_1 より i_5 までの五つの電流の比が此の式から定められる。



第 2 圖

次に、ある導線系の接合點を A, B, C, …… と名づけ、其の電位を V_A, V_B, V_C, \dots とし、尙 A より B

に直接に(他の接合点を經由せず)に至る導線の抵抗を R_{AB} とし、其の他 $R_{BC}, R_{CD} \dots$ 等同様な記號とし、 $R_{AB}, R_{BC}, R_{CD} \dots$ の中を流れる電流を $i_{AB}, i_{BC}, i_{CD} \dots$ とすればオームの法則によつて

$$\left. \begin{aligned} V_A - V_B &= i_{AB} R_{AB} \\ V_B - V_C &= i_{BC} R_{BC} \\ V_C - V_D &= i_{CD} R_{CD} \\ \dots \dots \dots \\ V_N - V_A &= i_{NA} R_{NA} \end{aligned} \right\} \quad (3b)$$

なる一聯の等式を得る。之を加へれば次式を得る。

$$\sum iR = 0 \quad (3c)$$

即ちある導線系の導線を辿つて一周する時に、各導線に就て iR の積を求め、之を通過した導線全體に就て加へれば其の結果は 0 となる。

上の計算では導線中に電池又は發電機の如きものが挿入されてゐない場合を考へた。今第3圖に於て AB の間の抵抗を R 、流れる電流を i 、其の間に

電池を入れなければ

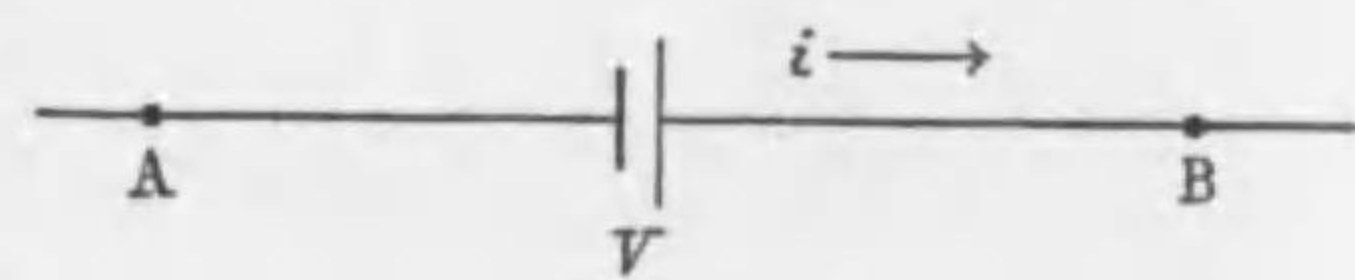
$$V_A - V_B = iR$$

であるから、もし兩極間の電圧が V なる電

池を圖の如く挿入すれば、 V の爲に A, B の電位差は下るから

$$V_A - V_B = iR - V \quad (3d)$$

とならなければならない。即ち電池のない場合の電位差に電池の電位差を加へれば抵抗と電池とを同時に有する場合の電圧を得る。故に A, B 間に V_{AB} なる電圧の電池が挿入され、同様に B, C 間には V_{BC} , C, D 間には $V_{CD} \dots$ 等が挿入されれば (3b) は



第 3 圖

$$\left. \begin{aligned} V_A - V_B &= i_{AB} R_{AB} - V_{AB} \\ V_B - V_C &= i_{BC} R_{BC} - V_{BC} \\ V_C - V_D &= i_{CD} R_{CD} - V_{CD} \\ \dots \dots \dots \\ V_N - V_A &= i_{NA} R_{NA} - V_{NA} \end{aligned} \right\} \quad (3e)$$

となり、之を加へれば(3b)を参照して

$$\sum iR = \sum V \quad (3f)$$

を得る。但し電池の起電力が電流の正の方向に一致した時に之を正に數へ、之に反する場合には負に數へる。第3圖の場合には $V_A > V_B$ なりと假定したから電流は矢の方向が正で、従つて V は正である。

(3f)は次の如き極めて重大な事實を語るものである。ある導線系に於て一の接合點 A から出發して相隣る B, C, \dots, N 等の接合點を經過して A に歸る場合に、此の經過する方向を正にとつて、各導線中の電流と抵抗との積を求め、之を加へ合したものは此の道程中に挿入せられた電池の電壓の和に等しい。此の法則、即ち(3f)の示す事柄をキルヒホッフの第二法則といふ。

(3f)に於て各部分に挿入せる V が 0 ならば右邊は 0 となり、(3e)に一致する。されば(3e)は(3f)の特別の場合である。

キルヒホッフの第二法則を第2圖の導線系に應用すれば(但 $R_{AB} = 0$ とする)

$$\left. \begin{aligned} \text{ACB 回路を一周して} & \quad i_1 R_1 + i_2 R_2 = V \\ \text{ADB 回路を一周して} & \quad i_2 R_2 + i_4 R_4 = V \\ \text{ACD 回路を一周して} & \quad i_1 R_1 + i_5 R_5 - i_2 R_2 = 0 \\ \text{CBD 回路を一周して} & \quad i_2 R_2 - i_4 R_4 - i_5 R_5 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3g)$$

を得る。各線の抵抗と V なる電圧が知られて居れば i 及び i_1 より i_5 までの 6 個の電流を定むるに(3a)及び(3g)なる 8 個の方程式がある。此の中、3a)の最後のものは初めの 3 個の方程式か

ら導かれるから除いて支差ない。又(3g)の最初の式も他の3個の方程式から導く事が出来るから除いて支差ない。故に6個の電流を定むるために6個の聯立方程式を得る。

或は又(3a)の初めの3方程式から i, i_1, i_5 を已知なる如く考へて其の他のものを之で表はせば

$$i_3 = i - i_1$$

$$i_4 = i - i_1 + i_5$$

$$i_2 = i_1 - i_5$$

となるから、之を(3g)の最初の式以外の式に入れ i, i_1, i_5 を未知数と考へれば

$$(R_3 + R_4)i - (R_3 + R_4)i_1 + R_4 i_5 = V$$

$$-R_2 i + (R_1 + R_3)i_1 + R_5 i_5 = 0$$

$$-R_4 i + (R_2 + R_4)i_1 - (R_2 + R_4 + R_5)i_5 = 0$$

を得て之より直に i, i_1, i_5 が求められ、従つて i_2, i_3, i_4 を得る。今特に i_5 に関して之を解けば

$$i_5 = \frac{V \begin{vmatrix} -R_3 & R_1 + R_3 \\ -R_4 & R_2 + R_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_4 & R_3 + R_4 & -(R_2 + R_4) \\ R_5 & -R_3 & R_1 + R_3 \\ -(R_2 + R_4 + R_5) & -R_4 & R_2 + R_4 \end{vmatrix}} \quad (3h)$$

を得る。従つて $i_5 = 0$ なるためには此の式の分子が0ならばよく、従つて

$$\begin{vmatrix} -R_3 & R_1 \\ -R_4 & R_2 \end{vmatrix} = 0$$

ならばよい。換言すれば

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad (3i)$$

ならばよい。逆に $i_5 = 0$ ならば此の関係がある事が知られる。

此の式はホキートストンの電橋 (Wheatstone Bridge) の原理を興へるものである。今 R_1/R_2 なる比が知れ R_4 が已知の抵抗ならば R_3 なる未知抵抗は

$$R_3 = R_4 \frac{R_1}{R_2}$$

によつて直に計算出来る。此の際 R_5 内に電流が流れない事は後に述べる電流計 (§20.c 参照) によつて確かめる事が出来る。

一の電氣系に電流の出入する點を電極といひ、電流の入る場所を陽極電流の出口を陰極といふ。ある電源から電氣系に電流を供給する場合に、電氣系の陽極に接続せらるべき極を電源の陽極、電氣系の陰極に接続せらるべき極を電源の陰極といふ。されば電源にありては電流の出口を陽極、入口を陰極といふ。

§4. 抵抗の接続 多數の抵抗を接続せる場合に、キルヒホッフの法則によつて此の系の全抵抗を計算する事が出来る。今ある導線系のA及びBなる點の間にVなる起電力を有する電池を接続せる場合に、電池を過ぎて導線系内に流入する電流 i を上述の方法によつて計算し得たとすれば此の場合の

$$\frac{V}{i} = R \quad (4)$$

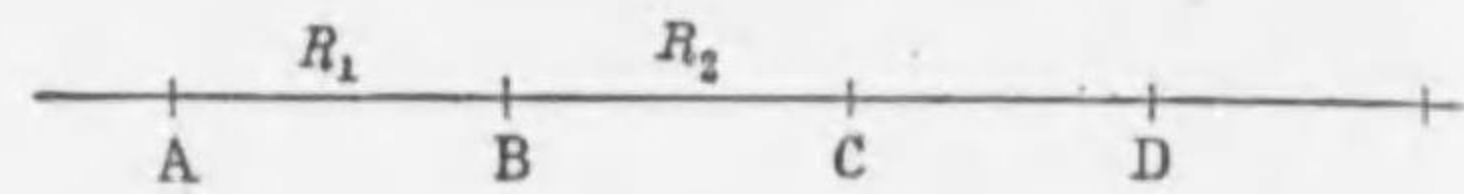
を此の導線系の實效抵抗又は略して單に抵抗といふ。

導線の接続の中最も簡單で然も典型的な場合を求むれば次の二つに歸する。

I. 數多の抵抗を直列に接続した場合

今多くの導線があつて、第一の導線の終りと第二の導線の始めとを接続し、次に第二の導線の終りに第三の導線の始めを接続し、順次かくの如くして一續きの導線系を作つた場合には、之等の導線は直列に接続されたといふ(第4圖a)。

直列に接続した導線に流るゝ定常電流は到る



第 4 圖 a

所等しい。故に此の強さを i とし、第一、第二……の導線の抵抗を R_1, R_2, \dots とし、又第一の導線の始めを A、第一と第二の導線の接続点を B、第二と第三、第三と第四の導線の接続点を各々 C、D、… とすれば、(2b)によつて

$$V_A - V_B = iR_1$$

$$V_B - V_C = iR_2$$

.....

$$V_M - V_N = iR_n$$

を得る。此の各邊を互に加へれば

$$V_A - V_N = i(R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n)$$

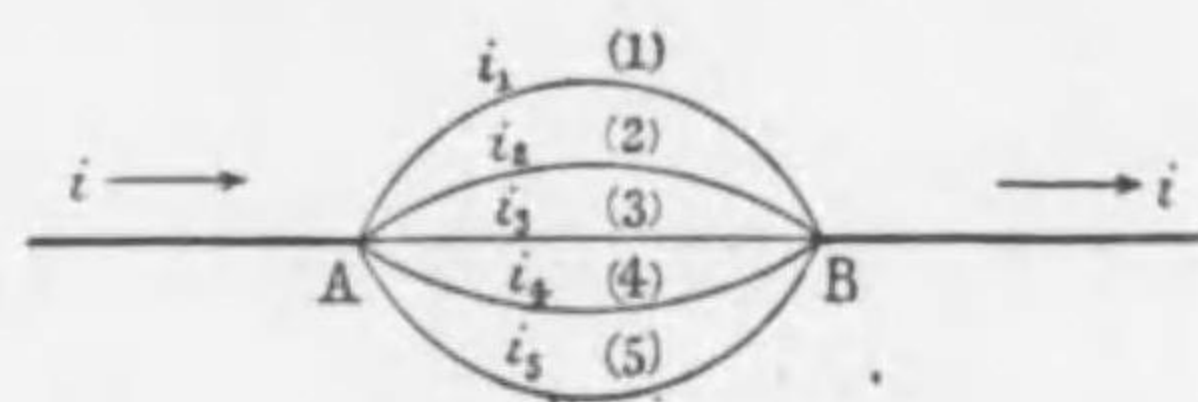
N は第 n 番目の導線の終りの點である。されば此の式の左邊は直列に接続された n 本の導線の初めと終りに於ける電位の差であるから、(4)によつて此の導線系の實効抵抗 R を求むれば

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n \quad (4a)$$

を得る。即ち直列に接続された導線系の實効抵抗は各抵抗の和に等しい。

II. 數多の導線を並列に接続した場合。

n 本の導線の始端を總て一緒に接続し、又終端をも同時に總て一緒に接続する事第 4 圖 b



第 4 圖 b

の如き場合には、之等の

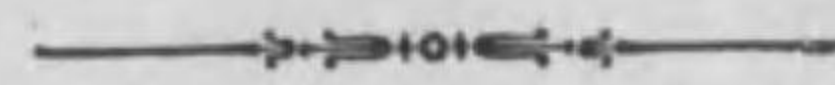
導線は並列に接続されたといふ。

斯くの如く並列に接続された導線系の實効抵抗を求めるた

電 氣 磁 氣 學

三 枝 彦 雄

(241—336)



目 次 (6)

§ 5. ジュールの法則 § 6. 準定常電流 § 7. 大なる導體中の定常電流 I. § 8. 大なる導體中の定常電流 II. § 9. 接觸電氣及び熱電氣 § 10. 電解 § 11. 電池 § 12. 電池の接続

第二章 定常電流と磁場 271

§ 13. 電流の生ずる磁場 § 14. 電流の生ずる磁場の計算 § 15. 磁場の電流に及ぼす力 § 16. 電流相互の間の力 § 17. 電流の生ずる磁場のエネルギー § 18. 自己感應係數、相互感應係數 § 19. 自己及び相互感應係數の計算 § 20. 電流計

第三章 電磁氣感應 310

§ 21. 電磁氣感應 § 22. 線狀回路に於ける電磁氣感應 § 23. 單一線狀回路に於ける電磁氣感應 § 24. 電氣振動 § 25. 單一回路の強制振動

めに A 點にキルヒホッフの第一法則を適用すれば

$$i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_n = i \quad (4b)$$

となる。 i は外部から此の導線系に流入する電流である。次に AB 二點間に第二法則を適用すれば

$$i_1 R_1 = i_2 R_2 = i_3 R_3 = \dots = i_n R_n = V_A - V_B$$

となる。之より

$$i_1 = \frac{V_A - V_B}{R_1} \quad i_2 = \frac{V_A - V_B}{R_2} \quad i_3 = \frac{V_A - V_B}{R_3} \quad \dots \quad i_n = \frac{V_A - V_B}{R_n}$$

之等の値を(4b)に入れて

$$i = (V_A - V_B) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n} \right)$$

を得る。従つて(4)によつて實効抵抗 R は

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}}$$

となる。即ち並列に接続された導線系の實効抵抗は、各抵抗の逆数の和の逆数に等しい。

此の時若し $R_1 = R_2 = \dots = R_n = R_0$ ならば

$$R = \frac{R_0}{n}$$

となる。即ち抵抗の相等しい n 本の導線を並列に接続すれば實効抵抗は一本の抵抗の $\frac{1}{n}$ に等しい。今斯かるもの m 組を並列にすれば

$$R = \frac{m}{n} R_0$$

さて長さが l で切斷面の面積が S なる導線は次の如く考へる事が出来る。此の導線は各稜が單位長なる立方體の導體 l 個を直列に接続して置いて、かゝるもの S 組を並列にしたものと考へて差支へない。さて上記立方體の抵抗を ρ とすれば、此の導線の抵抗 R は

$$R = \frac{l}{S\rho} \quad (4d)$$

でなければならない。 ρ は此の導體を造る物質のみによつて定まる量であるから之を固有抵抗といふ。ある物質の固有抵抗が定まれば此の式から導體の抵抗を計算する事が出来、又ある導體の抵抗を知れば其の寸法から固有抵抗を計算する事が出来る。かく物質の固有抵抗とは單位の長さの稜を有する立方體の一つの稜に平行に電流を流した時に此の導體の示す抵抗をいふのである。

一の導線に於て切口の面積や固有抵抗が至る所異なる時は抵抗は次式によつて計算される。

$$R = \int \frac{\rho}{S} dl$$

故に S 及び ρ と l との関係が知られた場合には形状の複雑な導線の抵抗も計算出来る。茲に注意すべきは電流は積分を行ふ範圍に於ては必らず l を測る方向に平行に流れなければならない事である。故に太さが急激に變化しては此の式で計算する事は出来ない。

固有抵抗の逆数 $\frac{1}{\rho}$ を固有電導率といふ。本書に於ては固有電導率を σ にて表はす事とする。

§5. ジュールの法則 一の導線に二點 A, B を考へ、其中を流れる電流を i, A, B 間の抵抗を R とする。然らば抵抗の定義によつて

$$V_A - V_B = iR$$

さて單位正電荷を V_B なる電位の點から V_A なる電位の點まで持ち運ぶには $V_A - V_B$ なる仕事を要する。されば反對の方向に單位正電荷を運ぶ時は電場が電荷に $V_A - V_B$ なる仕事をなす筈である。然るに i なる電流は單位時間に單位電荷の i 倍だけが A から B に移る事に外ならないから(ある量の負電荷が

B から A に移るのはエネルギーの點に於て夫と等しい量の正電荷が A から B に移るのと同じ事であるから、§1 の電流の強さの定義の如く正負の電氣を別々に考へずに、全電流が正電氣の移動によるものであるとしてもよい)此の導線の AB 間に於て毎秒電場のなす仕事は

$$(V_A - V_B)i = i^2 R \quad (5a)$$

である。かく電場のなす仕事は何に消費されるかといふに、實驗によれば之は導體内部で熱となるものである。此の熱を發見者の名に因んでジュール熱といひジュール熱の發生の法則を與へる(5a)をジュールの法則といふ。

i も R も靜電單位で示せば毎秒發生する熱量は $i^2 R$ erg. である。故に之を熱單位で測れば

$$\frac{i^2 R}{J} \quad (5b)$$

となる。 J は熱の仕事當量である。

ある導線系に於ける定常電流は其の中に發生するジュール熱の總量を最小ならしむる如く分布するものである。此の事を次に證明する。

今此の導線系の各導線の中に實際に流れて居る電流を i_1, i_2, \dots 抵抗を R_1, R_2, \dots とすれば此の導線系の中で發生するジュール熱は

$$Q = i_1^2 R_1 + i_2^2 R_2 + i_3^2 R_3 + \dots + i_n^2 R_n \quad (5c)$$

である。

さて此の導線系内の電流をキルヒホッフ第一法則に矛盾しないやうに出来るだけ一般的に變化した場合を考へるのであるが、かく各導線内の電流を最も一般的に變化するには次の如く考へてもよい。今此の導線系内に任意の閉回路を考へ此の中に x なる強さの電流を環流せしめれば各接合點に於て第一

法則は依然として満足される。只これだけでは各導線の電流を一般的に變化した事にはならないが、今導線系内に出来るだけ多數の閉回路を考へ其の中に各々適當の電流を環流せしむれば各導線内の電流は如何様にでも變化せしめる事が出来る。今導線系内に考へた第一第二第三……の閉回路に x_1, x_2, x_3, \dots なる電流を流したと考へる。此際ある導線には多くの閉回路に屬するものとして、多くの電流が流れる事になる。今例へば第 j 番目の導線内に x_1, x_2, \dots 等が流れたと考へれば其中には

$$i_j + x_1 + x_2 + \dots$$

なる電流が流れて居る事になる。此のために發生する熱は

$$(i_j + x_1 + x_2 + \dots)^2 R_j$$

である。各導線内に同様の熱が發生して居るから全體では之等を加へて

$$Q = \sum (i_j + x_1 + x_2 + \dots)^2 R_j = \sum i_j^2 R_j + \sum (x_1 + x_2 + \dots)^2 R_j + 2 \sum (i_j x_1 + i_j x_2 + \dots) R_j$$

となる。

先づ此の式の右邊の第三項を特別に考へて見る。今其の中から

$$2 \sum i_j x_k R_j$$

なる項を取り出して見ると、之は j 番目の導線が k 番目の閉回路に屬するものと考へられたため x_k なる電流を重疊せしめたものである。かゝる項を j に就て加へたものが右邊の第三項であるが之は先づ各閉回路に就て

$$2 x_k \sum i_j R_j$$

を求め(但此の時 j は k 番目の閉回路に屬する導線のみ)に就て加へ合せ)然る後 k に就て和を求めても同じ事である。即ち

$$2 \sum (i_j x_1 + i_j x_2 + \dots) R_j = 2 \sum_k (x_k \sum_j i_j R_j)$$

である。さて i_j は實際に流れて居る電流であるからある閉回路に就て $\sum i_j R_j$ を求めれば之は 0 である。故に

$$2 \sum (i_j x_1 + i_j x_2 + \dots) R_j = 0$$

さて Q の右邊の第一項は實際に流るゝ電流による熱 Q であるから

$$Q = Q + \sum (x_1 + x_2 + \dots)^2 R_j$$

此の右邊第二項は常に正である。されば假想された状態に於けるジュール熱は、キルヒホッフの第二法則によつて定められる電流分布の際のジュール熱より常に大である。換言すればキルヒホッフの第二法則は、導線系に於けるジュール熱を最小ならしむる如き電流分布を與へるものである。

以上は導線系内に電池の如き電源のない場合であるが、第一第二……の導線内に V_1, V_2, \dots なる電圧の電源がある場合にも同様な方法で、キルヒホッフの第二法則に従つて此の導線系内に流るゝ電流は

$$\sum i^2 R - 2 \sum iV \quad (5d)$$

を最小ならしむるものである事が證明される。

§6. 準定常電流 之迄は導線系の電流は完全に定常状態にあつて、強さも方向も到る所一定であるとした。電流が變化すると後に述べるやうに電磁氣感應の現象が之に伴ひ、其のために定常状態に於ける場合と異なるのである。若し電流の變化が緩慢ならば電磁氣感應も弱く、従つて之を省略する事が出来、以上述べた定常電流の理論を適用しても誤差は小さい。斯様な場合に電流は準定常状態にあるといひ、準定常状態にある電流を準定常電流といふ。

ある電流が準定常電流であるか否かは夫に伴ふ電磁氣感應の現象の大小を知らなければ判斷出来ない。されば嚴密には第三章を終つて後に初めて判定される事である。故に今は一

例を擧げて其の定常状態と異なる點を明にするに止める。

容量 C なるコンデンサーを V_0 なる電壓に充電して置いて兩極の間に R なる大なる抵抗を接続すれば如何なる電流が流れるかを計算して見る。此の場合コンデンサーの兩極間に抵抗があれば電流が流れる事は明らかであるが、其の電流は定常状態ではない。何となれば電流が流れればコンデンサーの電壓が下り、従つて次に流れる電流は減少するからである。されど R が充分大なれば電流は小さく、従つて電流の變化も緩慢であるから準定常状態にあるとしてよい。然らばオームの法則が適用され、ある時刻にコンデンサーの電壓が V 、抵抗中の電流を i とすれば

$$V = Ri$$

なる關係がある。且つ此の時コンデンサーの兩板には $\pm CV = \pm CRi$ なる電荷がある。今の状態で i なる電流が dt 時間流れると、コンデンサーの電壓は dV だけ下るとすれば

$$-dV = \frac{i}{C} dt$$

此の i の代りに前の式より $i = \frac{V}{R}$ を入れれば

$$-dV = \frac{V}{CR} dt$$

故に之を積分すれば

$$V = Ae^{-\frac{t}{CR}}$$

A は積分の常數である。抵抗を接続するまでは電壓は V_0 であつたから $t=0$ で $V=V_0$ なる條件を入れれば $A=V_0$ となつて

$$V = V_0 e^{-\frac{t}{CR}} \quad (5e)$$

従つてコンデンサーの兩板の有する電荷は $e = CV$ で

$$e = e_0 e^{-\frac{t}{CR}} \quad (5e')$$

となる。 e の減少する割合が i であるから

$$i = -\frac{de}{dt} = \frac{e_0}{CR} e^{-\frac{t}{CR}}$$

$\frac{e_0}{CR}$ は $t=0$ の時の電流の強さであるから、之を i_0 とすれば

$$i = i_0 e^{-\frac{t}{CR}} \quad (5e'')$$

故に V, e, i は何れも時間と共に減少し $t=\infty$ に於て初めて 0 となる。

§7. 大なる導體中の定常電流 I . 以上は電流が線狀導體の中を流れる場合であるが、之から大なる導體中に於ける定常電流を研究する。

導體内の一點 P を過ぎて任意の方向に單位長の直線を引き、夫に矢を付けて正の方向を定めて置く。今之を \mathbf{n} なるベクトルと名づけ、 \mathbf{n} に垂直で P を過ぎる微小平面 dS を考へ、 dS を過ぎて \mathbf{n} の方向に流れる電流の強さを di とすれば

$$\frac{di}{dS}$$

を、 P 點に於ける電流密度の \mathbf{n} の方向のコンポーネントといひ、之を I_n なる記號で示す。かく、電流密度は方向と大いさを有するから明らかにベクトルである。

P 點に於て直交する三つの方向の電流密度のコンポーネントを I_x, I_y, I_z とすれば、電流密度 I の絶對値 I は

$$I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2 + I_z^2}$$

で、三つのコンポーネントによつて I の方向も定まる。誤解のない限り電流密度を P 點に於ける電流といひその方向を P 點に於ける電流の方向といふ事がある。

電流が流れつゝある導體内では各點の電位は(導體の抵抗が 0—斯様な物質は未だ見出されては居ないが—ならざる限り)一般に異なる。従つて導體内に電場が存在する。此の事は何等靜電氣學と矛盾するものではなく、靜電氣學は只電氣の移動を考へなかつたから、換言すれば電流の存在を考へなかつた

から導体内は總て等しい電位にあるとしたが、電氣力學に於ては既に電流の移動を考へる以上之の差異は當然である。

さてかく導体内に電場が存在するから、靜電氣學と同様に導体内にも此の場合は電力線、電力管及び等電位面等を考へる事が出來尙電位及び電場重疊の原理も成立する事が知られる。導體が等方にして均質なる場合には電流の方向は其の點に於ける電場の方向に一致し、電流密度は電場の強さに比例する筈である。

大なる導体内に一の曲線を考へ、其の曲線上の總ての點に於ける切線の方向が、そこに於る電流の方向と一致する場合に之を電流の流線といふ。電流の流線は他の流線と交る事はない。

導体内に一の閉曲線を取り、其の上の總ての點を通る流線を綜合して考へれば一つの管を得る。之を電流の流管といふ。流管の壁を流線が貫く事はない。流線及び流管の之等の性質は靜電氣學に於て電力線及び電力管に就て述べたと同様にして證明する事が出来る。(17頁参照)

細い流管を取つて其の中に二點P, Qを考へ、P, Qに於ける切口の面積を S_1, S_2 、又電流密度を I_1, I_2 とすれば定常電流なるが故に

$$I_1 S_1 = I_2 S_2$$

となる。細い流管のある切口の面積と其の場所の電流密度の積を流管の強さといふ。流管の強さは其の中を流れる電流の強さを表はす。

等方にして均質なる物質の中では流線と電力線が一致するから、従つて流管と電力管は一致する。今上記の如く極めて細い流管を取つてP, Q二點を極めて近く其の中に考へれば、流管の切口の面積はP, Qに於て殆んど等しいとして差支へない。此の値を S とする。P, Qの間で此の導體の抵抗は線の場合と同じで $\frac{PQ \cdot \rho}{S}$ であるからオームの法則によつて

$$V_P - V_Q = \frac{PQ \cdot \rho}{S} \cdot IS$$

$$\therefore \frac{V_P - V_Q}{PQ} = \rho I,$$

P, Qを充分近く取れば此の式の左邊は流線の長さに沿ふ微分の符號を反對にせるもの(39頁参照)であるから、流線の長さを s で表はせば

$$-\frac{\partial V}{\partial s} = \rho I \quad (6a)$$

さて流線の方向と θ なる角度をなす方向を x 軸に取れば

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial s} \cos \theta = -\rho I \cos \theta$$

然るに $I \cos \theta$ は I の x 分であるから $\frac{1}{\rho} = \sigma$ と置いて

$$I_x = -\sigma \frac{\partial V}{\partial x}$$

を得る。同様に三つの座標軸の方向に就いて

$$\left. \begin{aligned} I_x &= -\sigma \frac{\partial V}{\partial x} = \sigma E_x \\ I_y &= -\sigma \frac{\partial V}{\partial y} = \sigma E_y \\ I_z &= -\sigma \frac{\partial V}{\partial z} = \sigma E_z \end{aligned} \right\} \quad (6b)$$

を得る。即ちベクトルの書き方を用ひれば

$$\mathbf{I} = \sigma \mathbf{E} \quad (6c)$$

導体内に一の閉曲面を考へれば、此の中に流入する電流の總量は流出する電流の總量に等しくなければならない。然らざれば定常電流といふ事は出來ないからである。今閉曲面上に取つた素面分 dS に、外方に向ふ單位長の法線を \mathbf{n} とすれば

$$I_n dS$$

は此の素面分を通つて閉曲面外に流出する電流の強さである。

されば之を閉曲面全體に積分すれば其の値は0でなければならぬ。即ち

$$\int \mathbf{I}_n dS = 0 \quad (7a)$$

閉曲面 S の位置及びその包む體積の大小に拘はらず常に此の式は正しい。

次に電流がある導體から他の物質内に流入する時其の境界に於ける條件を考へよう。

i. 定常電流である以上、二つの導體の境界にも電荷の集積は許されないから、[1]なる導體內から境界に向つて流れる電流の境界面に垂直な分は境界面から[2]なる導體內に流入する電流の垂直分に等しい筈である。されば境界面に立てた垂線と各導體内の電流のなす角を θ_1, θ_2 とし、電流の強さを I_1, I_2 とすれば

$$I_1 \cos \theta_1 = I_2 \cos \theta_2 \quad (8a)$$

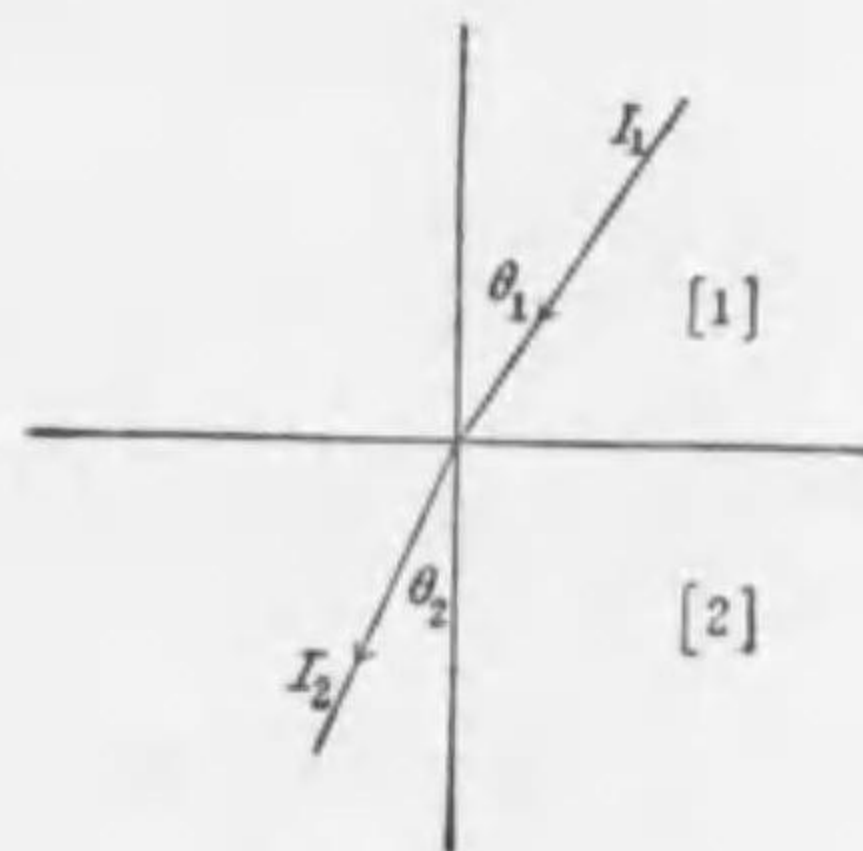
でなければならない。

ii. 次に各體導内にあつて境界面に極めて近く互に相對する二點 P, Q を取れば $V_P = V_Q$ でなければならない。然らざれば P, Q 間の電場の強さは無限大になり、電流密度の境界面に垂直な分は無限大となり、従つて(7a)を満足するためには導體內到る所で電流密度が無限大とならねばならないからである。境界面の兩側で到る所かく電位が等しいといふ事は、取りも直さず電場の強さの境界面に沿ふ分が兩方の導體內で相等しいといふ事を意味する。さて電流の強

1) 故に S を充分小にすれば

$$\text{div } \mathbf{I} = 0$$

なる事が導體内部の到る所に行はれて居る事が知られる。此の證明は §27 に譲る。



第 5 圖

さを固有電導率で割つたものが電場の強さであるから

$$\frac{I_1 \sin \theta_1}{\sigma_1} = \frac{I_2 \sin \theta_2}{\sigma_2} \quad (8b)$$

(8b)を(8a)で割れば次式を得る。

$$\frac{\tan \theta_1}{\sigma_1} = \frac{\tan \theta_2}{\sigma_2} \quad (8c)$$

之即ち流線の屈折の法則であつて、此の關係は靜電氣學に於ける電力線の屈折、靜磁氣學に於ける磁力線の屈折と同一である。故に一樣に電流が流れて居る導體內に、夫より固有電導率の大なる球を置いた場合の流線の分布は、電場内に電媒質の球を置いた場合の電力線の分布及び磁場内に常磁性體の球を置いた場合の磁力線の分布と全く同じである。又固有電導率の小なる球を置いた場合は、一樣な磁場内に反磁性體の球を置いた場合に相當する。

次に(8a)及(8b)に相等する式を電位傾度を用ひて書けば次の様になる。[1]より[2]に向ふ方向を正に取つて境界面に法線を立て之を n と名づけければ $-\frac{\partial V}{\partial n}$ は n の方向の電場の分である。之に固有電導率を掛けたものが此の方向に於ける電流の分であるから今 $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1$ は第一の導體內で電位を微分せるもの、 $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_2$ は第二の導體內で電位を微分せるものを表はす事にすれば(8a)は

$$-\sigma_1 \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1 = -\sigma_2 \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_2 \quad (8a')$$

となる。

(8b)に相當するものは s を境界面に沿つて測つた長さとするれば

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_1 = -\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_2 \quad (8b')$$

となる。

導體が絶縁物又は眞空と境して居る場合には $\sigma_2 = 0$ で $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_2$

は決して無限大にはならないから (8a') によつて

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1 = 0 \quad (8d)$$

を得る。即ち絶縁物と導體との境界面の附近に於ては、導體内の電場の境界面に垂直な分は0である。従つて電流は此の部分に於ては境界面に沿つて流れる。換言すれば導體の表面は流管の一部である。

相境する二つの導體の中一方が固有抵抗0、従つて固有電導率が無限大の場合には(6c)によつて此の中では電場の強さは0である。今(2)をかゝる導體とすれば $\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_2 = 0$ であるから

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_1 = 0 \quad (8e)$$

となる。かく固有抵抗0、従つて固有電導率が無限大なる導體を完全導體といふ。(8e)式は完全導體との境界面に於ては通常の導體中の電場は境界面に垂直なる事を示す。従つて電流の流線も境界面に垂直である。

§8. 大なる導體中の定常電流 II. 以上は電流に対する一般論であるが以下特別の問題に就て考へる事にする。以下總て電源及び之より導體に電流を運ぶものは完全導體と假定する。然らば、a)電流の流線は電極面に直角に導體内に入り、然も、b)導體内に考へた閉曲面では一般に(7a)が成立し只、c)陽極又は陰極を圍む如き閉曲面を考へる場合に限り次の如くなる。

$$\begin{aligned} \int I_n dS &= i && \text{閉曲面が陽極を圍む時} \\ &= -i && \text{閉曲面が陰極を圍む時} \end{aligned}$$

されば今電極をそのままにし、導體を空氣で置き換へた靜電氣系を考へれば、其の兩電極に $+\frac{i}{4\pi}$ 及び $-\frac{i}{4\pi}$ なる電荷を與へた場合の電力線の分布と、今の流線の分布は全然同じである。か

く假想した靜電氣系を利用して問題を解く事とする。

導體内に流れる電流を I とし s を陰極より陽極に至る曲線の長さとするれば(6a)によつて兩極間の電位差は

$$-\int_-^+ \rho I ds$$

である。 ρ は一定であるから之は

$$-\rho \int_-^+ I ds$$

となる。之に對應する靜電氣の場に於ける電場の強さを F とすれば $F=I$ であるから兩極間の電位差は次の如くなる。

$$-\rho \int_-^+ F ds$$

今 V' を假想せる靜電氣系に於ける兩極の電位差とすれば

$$V' = -\int_-^+ F ds$$

となる。故に導體系の兩極間の電位差 V は次の如くなる。

$$V = \rho V'$$

然るに假想せる靜電氣系に於ては、兩極は $\pm \frac{i}{4\pi}$ なる電荷を有する故に此の兩極の容量を C とすれば V' は

$$V' = \frac{i}{4\pi C}$$

となる。従つて導體系に於ける兩極間の電圧は次の如くなる。

$$V = \frac{\rho}{4\pi C} i = \frac{1}{4\pi \sigma C} i \quad (9a)$$

故に此の導體の抵抗は次の如くなる。

$$R = \frac{\rho}{4\pi C} = \frac{1}{4\pi \sigma C} \quad (9b)$$

さればある導體系に於て、電極をそのままにし、其の他の導體を空氣で置き換へた場合の兩電極間の靜電容量を知れば(9b)によつて導體の抵抗を計算する事が出来る。

兩面が a 及び b なる半径の同心球より成る球殻の抵抗は

$$\frac{\rho}{4\pi ab} (b-a)$$

となり、又内径が a 、外径が b なる圓筒狀導體の單位長當りの抵抗は

$$\frac{\rho}{2\pi} \log \frac{b}{a}$$

である。

§9. 接觸電氣及び熱電氣 二種の金屬を相接觸せしむれば其の接合面の兩側に於ては電位差を生ずる。之はボルタ (Volta) の發見せるものであつて接觸電氣と呼ばれ、此の際の電位差を接觸起電力といふ。白金と種々の金屬との間の接觸起電力を次表に示す。

金 屬	Pt	Ag	Cu	Fe	Sn	Zn	Al	Mg
電壓 (volt)	0	0.05	0.10	0.24	0.32	0.64	1.04	1.47

さて接觸面を通して一方の金屬から他方へ正電荷を運ぶ場合を考へれば、電位の低い方から高い方に行くには外部からエネルギーを供給せねばならず、反對の方向に進めば電荷が外部にエネルギーを供給する。さればかゝる接觸面を通じて電流を流す時、電流の方向が起電力の方向に一致すれば接觸面に熱を發生し、電流が其の反對の場合には接觸面を冷却する。之をペルチエー (Peltier) 効果といふ。ペルチエー効果によつて發生又は吸收せらる熱量は電流の強さに比例する。

ボルタの研究によれば數多の金屬を直列に接続せしめた場合には兩端の電位差は兩端の金屬を直接に接続せる場合のそれに等しい。之をボルタの法則といふ。此法則によれば種々の金屬より成る閉回路に電流を通じた場合にペルチエー効果によつて生ずる熱の總量は0である。

同一の金屬に於ても温度の異なる部分の間には電位差がある事が知られて居る。之をトムソン (Thomson) 効果といふ。

接觸起電力の大きさは接觸面の面積には無關係であるが、温度によつては多少變化する。故に今二種の金屬を以て閉回路を造れば、兩接合點の温度が等しい場合には接觸起電力は等しく、従つて此の回路には大きさが等しくて方向の反對な起電力が作用する故に電流は流れない。然るに一方の接合點を熱して温度を上げれば、兩接合點の温度の差に相當して起電力の差を生じ、従つてその電位差に相當する電流が流れる。かゝる電流を熱電流といひ、此の時回路に作用する起電力 (即ち高温及び低温接合點の起電力の差) を熱起電力といふ。又かく熱電流を生ずる二種の金屬の組合せを熱電對といふ。實驗上熱電對に流れる電流の方向は、ペルチエーの効果によつて生ずる熱が高温接合點を冷却し、低温接合點を熱する如き方向に流れる。之は熱力學の第二法則から見ても當然の事である。

さてある接合點に於ける熱電位差と温度との關係を求めると、實驗上次の如き形になる

$$V_c = a_0 + at + \frac{1}{2} bt^2 \quad (10a)$$

但 t は攝氏温度を表はし、 a_0 は $t=0^\circ\text{C}$ の時の熱電位差である。 a_0, a, b は何れも相接觸する金屬の種類によつて定まるもので、之等を熱電氣係數といふ。今二つの接合點の温度を t_0 及び t' とすれば熱起電力は

$$\begin{aligned} V &= \left(a_0 + at' + \frac{1}{2} bt'^2 \right) - \left(a_0 + at_0 + \frac{1}{2} bt_0^2 \right) \\ &= a(t' - t_0) + \frac{1}{2} b(t'^2 - t_0^2) \end{aligned} \quad (10b)$$

となる。今 $t' - t_0 = t$ と置き、 $t_0 = 0$ とすれば

$$V=at+\frac{1}{2}bt^2 \quad (10c)$$

若し t' と t_0 との差が極めて小なる場合を取れば $t'=t_0+dt$ と置いて

$$t'^2=(t_0+dt)^2=t_0^2+2t_0dt+(dt)^2$$

となる。 $(dt)^2$ は省略出来るから (10b) から

$$\begin{aligned} \Delta V &= a dt + \frac{1}{2} b \cdot 2t_0 dt \\ &= (a+bt_0) dt \end{aligned}$$

となる。従つて

$$\frac{dV}{dt} = a+bt_0 \quad (10d)$$

を得る。此の値を Q で表はし熱電率といふ。

さて実験上の事実として熱電對に於て接合點の溫度が t_1, t_2 の場合の起電力と、 t_2, t_1 の場合の起電力の和は丁度接合點の溫度が t_1, t_2 の場合の起電力に等しい。従つて接合點の溫度が t_0, t' なる熱電對の起電力 V は、接合點の溫度が次の如き無数の熱電對の起電力の和に等しい。

接合點の溫度	熱起電力
t_0, t_0+dt	$\Delta V_1=(a+bt_0)dt$
t_0+dt, t_0+2dt	$\Delta V_2=[a+b(t_0+dt)]dt$
t_0+2dt, t_0+3dt	$\Delta V_3=[a+b(t_0+2dt)]dt$
.....
$t_0+(n-1)dt, t_0+ndt=t'$	$\Delta V_n=[a+b\{t_0+(n-1)dt\}]dt$

故に全體の起電力は次の如くなると

$$\begin{aligned} V &= \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + \dots + \Delta V_n = \int_{t_0}^{t'} (a+bt) dt \\ &= \int Q dt \end{aligned} \quad (10e)$$

されば熱電率 Q と t との關係を知れば熱起電力は直に計算される。

次に A なる金屬と C なる金屬との間の熱電位差は、A と B 及び B と C との間の熱電位差の和に等しい。故に今ある金屬を標準に取り之に對する各金屬の熱電位差を測つて置けば任意の二金屬の間の電位差が知られる。即ちある金屬に對する各金屬の Q を測定して置けば任意の二金屬の間の熱起電力を次の如くして知る事が出来る。今ある金屬と標準金屬との間の Q を Q_1 、他の金屬と標準金屬との間の Q を Q_2 とする。 Q_1, Q_2 は勿論溫度の函數である。されば接合點の溫度が何れも t_1, t_2 なる場合に標準金屬と之等の金屬との間の熱起電力は

$$V_1 = \int_{t_1}^{t_2} Q_1 dt$$

$$V_2 = \int_{t_1}^{t_2} Q_2 dt$$

となる。従つて第一、第二の金屬を直接に接合し其の接合點の溫度を t_1, t_2 とすれば此の時の起電力は

$$V = V_1 - V_2 = \int_{t_1}^{t_2} (Q_1 - Q_2) dt \quad (10f)$$

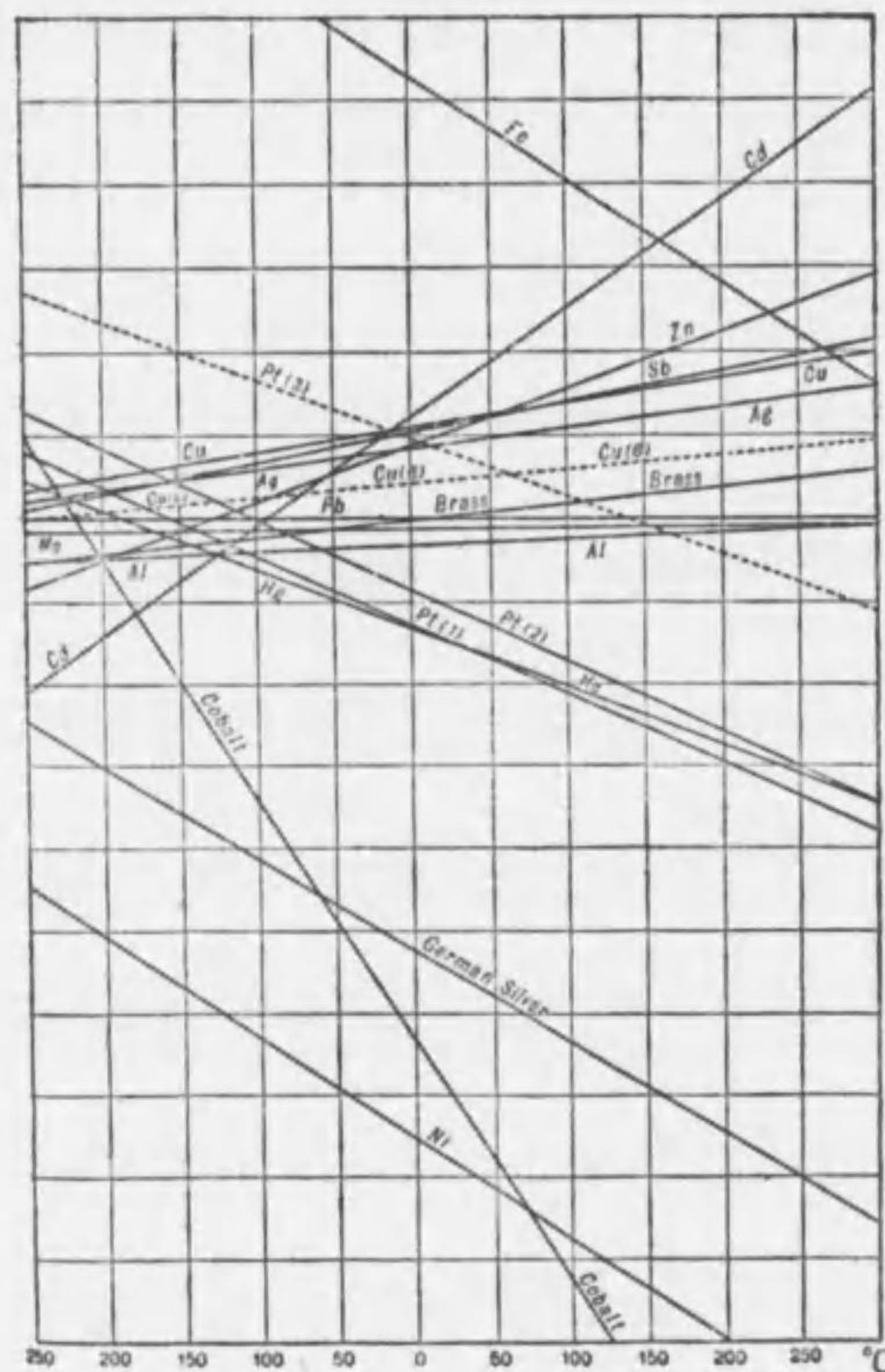
である。

第 6 圖は鉛を標準金屬に取つた場合の Q の値を圖示せるもので之を熱電氣圖といふ。鉛を選んだのはトムソン効果が小さいからである。横軸は一目盛を 50°C として溫度を示し縦軸は各溫度に於て、一度の差に對する起電力を示し、其の一目盛は 25×10^{-6} volt に相當する。

熱電對の起電力は (10c) の如き式で表はされるから、 $V=0$ となる溫度は

$$at + \frac{1}{2}bt^2 = 0$$

を解いて $t=0$ 又は $-\frac{2a}{b}$ なる事を知る。故に此の間に必らず V



第 6 圖

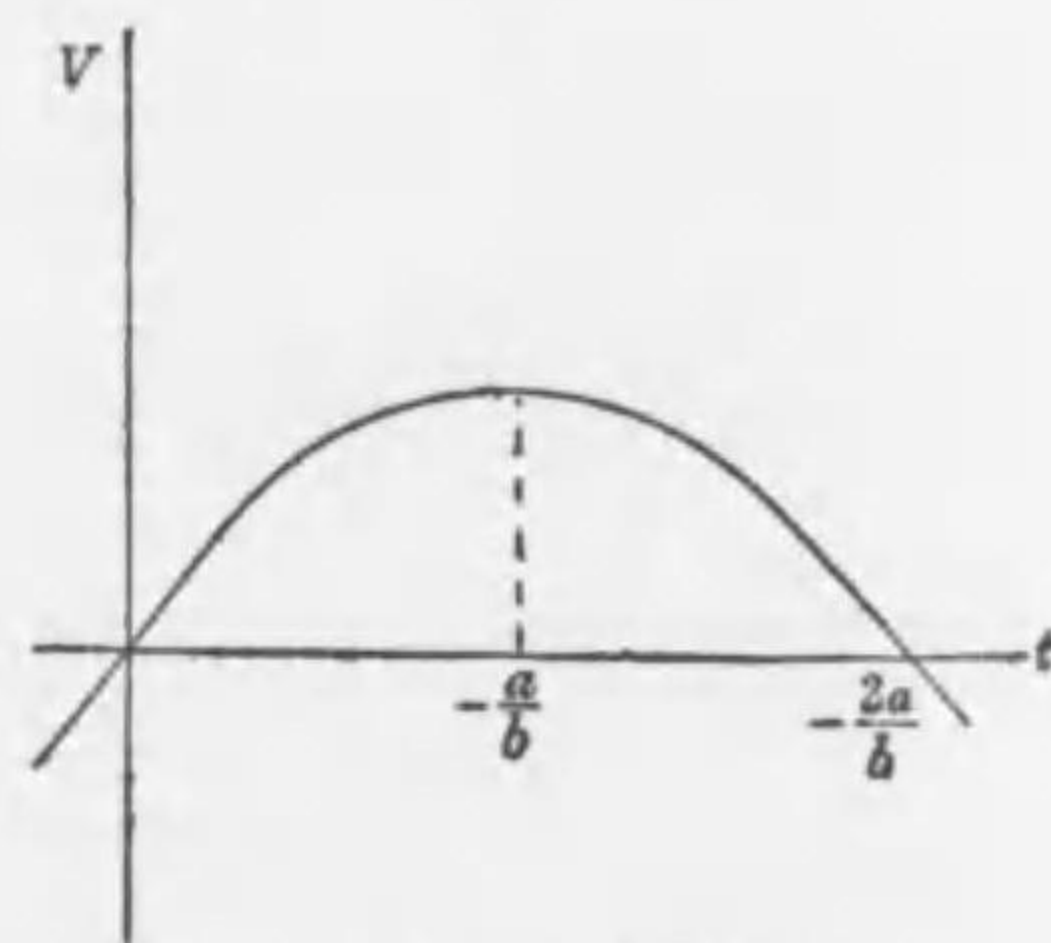
の最小又は最大値を與へる
温度がある。之は

$$\frac{dV}{dt} = Q = a + bt = 0$$

から與へられ

$$t = -\frac{a}{b}$$

なる時である。故に接合點
の温度差が 0 なる時は V も



第 7 圖

0. 温度差が $-\frac{a}{b}$ に達するまでは V が漸次増加して、更に温度差を増せば反對に減少し $-\frac{2a}{b}$ に至れば再び 0 となり之を越えれば符號が變ずる。かく V の方向が反對となる事を熱電逆變といふ。

§ 10. 電解 稀硫酸の中に二枚の白金板を入れて之に電流を通すれば陽極附近に酸素陰極附近に水素を發生する。之即ち水を其の成分に分解したものであつて之を電氣分解といふ。かく電氣分解を起し得る物質を電解質といひ電解質の溶液を電解液といふ。溶液内にある電解質の分子は電流を通さない場合にも各々二部分に分れ、一方は正電氣他方は負電氣を帯びて居ると考へられて居る。其の正負の電氣量は如何なる電解質にあつても

$$e_0 = 4.77 \times 10^{-10} \quad \text{靜電單位} \quad (11a)$$

又は其の整数倍である。かく一個の分子が二分して相等しい正負の電氣を帯ぶるに到る事を電離といひ、電離せる各部分をイオン (Ion) と名づける。尙上の電氣量の n 倍を有するイオンを n 價のイオンといひ、n 價のイオンとなり得る原子を n 價の原子といふ。1 mol の 1 價イオンは 28.948×10^{14} 靜電單位の電荷を有する。之を後に述べる實用單位に換算すれば 96494 クーロンとなる。此の値を F にて表はし、1 ファラデーと呼ぶ。

電解液に外部から電壓を加へれば正イオンは電場の方向に動き負イオンは之と反對に動いて各々陰極及び陽極に到り茲で其の有する電荷を與へて中性の分子として極板上に現はれる。之が即ち電氣分解である。其の結果電荷は液中を陽極より陰極に移動した事となる。之即ち電流である。

さて正負のイオンは一定量の電荷を有する故に、電解液中を定常電流が流れる場合には各極板に到つて電荷を失ふ數は正イオンと負イオンは互に等しい。もし然らざれば電解液は全

體として漸次帯電して来るが實驗上斯かる現象はない。さてイオンは一定量の物質と一定量の電荷から成るものであるから、極板に成生せる物質の量と流れた電氣の總量とは相比例する筈である。之を電解に關するファラデーの第一法則といふ。

又相異なる電解液を通じて一定量の電氣が流れた場合に成生せる物質の重量は其の化學當量に正比例する。之をファラデーの第二法則といふ。次に各物質の電氣化學當量を示す。但1クーロンの電氣量(3×10^9 e. s. u.)によつて生ぜる重量をmg.にて示せるものである。

物 質	銀	銅(二價)	鐵(一價)	水 素	酸 素	鹽 素
重量 mg.	1.118	0.3294	0.2894	0.010363	0.0828	0.3675

さて水素は1クーロンの電氣量によつて0.010363 mg.を生ずる故原子量 M , 原子價 n の物質が Q クーロンの電氣によつて分解せられる量は

$$W = 1.0363 \times 10^{-5} \frac{M}{n} Q \text{ g.} \quad (11b)$$

である。此の式の中

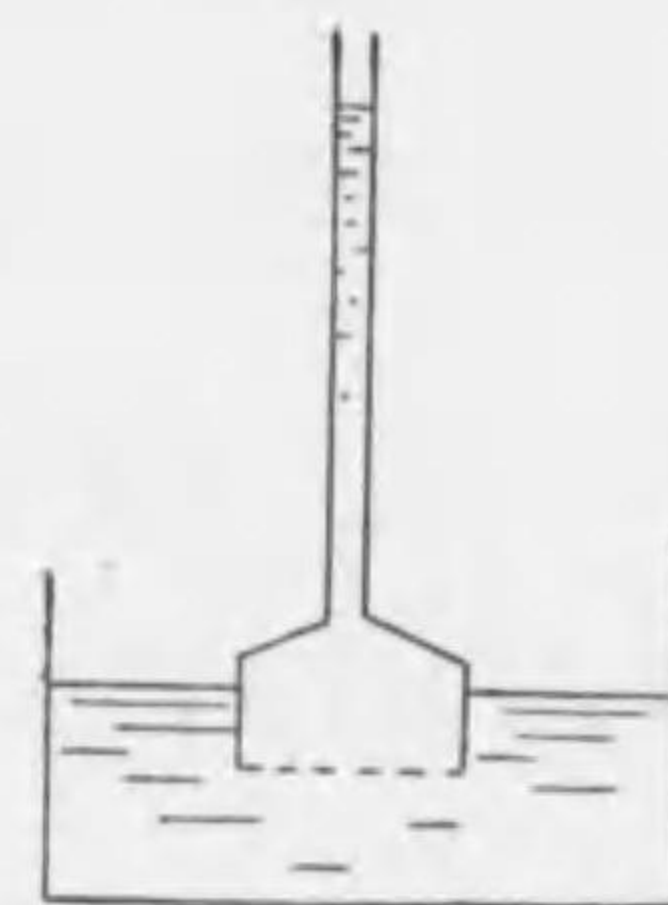
$$E = 1.0363 \times 10^{-5} \frac{M}{n}$$

は1クーロンの電氣によつて分解せられる量である。之をこの物質の電氣化學當量といふ。

(11b)式に於て W を知れば Q を計算する事が出来る。即ち電氣化學當量の知られた物質を電解する事によつて電氣量を測定する事が出来る。かゝる装置をボルタメーター (Voltmeter) といふ。

第8圖の如く硝子器の中に純粹の溶媒を入れ、溶媒のみを通過せしむる所謂半透膜を以て一端を閉ぢ他端は開いた硝子筒に電解液を入れたものを其の中に挿入すれば、外器の溶媒は漸

次に内筒に入りて内筒の水準が徐々に上昇し、ある高さに至つて初めて止まる。之によつて見れば溶液には内外の液面の差に相等する水壓が加へられて居るから従つて溶液の壓力は溶媒の壓力よりも夫丈大きい筈である。然して此の差は溶質の存在に歸せねばならない。之を滲透壓といふ。



第 8 圖

實驗によるに稀薄溶液中に於ける各イオンは理想氣體と同一の法則に従つ

て運動する。然るに氣體の壓力は單位體積中にある分子數に比例するから溶液に於ても滲透壓は濃度に比例する筈である。

今1モルのイオンが v c.c. の溶液中にある時に呈する滲透壓を p とすれば上記の關係から氣體と同じく

$$pv = RT$$

なる式を得る。 R は瓦斯常數、 T は絶對溫度である。されば一定溫度の下に溶液の容積を少しく増加して v を dv だけ増加する時に外部よりなす仕事は

$$-pdv = -\frac{RT}{v} dv$$

である。故に1モルのイオンが v_0 の溶液中にある時、容積を v とするために滲透壓に對してなすべき仕事は

$$W = -\int_{v_0}^v p dv = -RT \log \frac{v}{v_0}$$

である。今前の場合の濃度を c_0 、後の濃度を c とすれば

$$W = RT \log \frac{c}{c_0} \quad (12a)$$

である。故に濃度を減少すればイオンは外部に仕事をなし其の有するエネルギーは減少する。

金属をその金属イオンを含む溶液中に浸すと金属と溶液との間に電位差の存在するを見る。然るに此の値はイオンの濃度によつて變化し、一定の濃度の場合には電位差は0である。此の状態に於ては金属原子がイオンとならうとする傾向と、イオンが原子とならうとする傾向とが丁度相等しいために互に其の作用を相殺して平衡状態を維持する事が出来るものと考へ、原子がイオンとならんとする傾向を表はすに之と平衡し得る如き濃度のイオンの滲透壓を以てし、之を溶解壓といふ。されば液中のイオンの滲透壓が溶解壓より大なる時は金属の電位は液よりも高く、両者が等しい時は電位差も0となる。

かゝる電位差は如何にして生じ得るかといふに溶液のイオンの滲透壓が金属の溶解壓より小なる場合には金属よりイオンが新に生ずる。然るに金属のイオンは正電氣を帯びて液中に入る故に、中性の金属は負に帯電し、液中に浮遊せるイオンを牽引して自分の周圍に電氣の二重層を生ずる。水素電極に於ても同性質の現象を生じ、夫等の差が即ち上式の數字を示すものである。もし初めに溶液中のイオンの滲透壓が溶解壓よりも大ならばイオンは金属原子として析出し、金属は正電氣を溶液は負電氣を帯び、二重層の電位差は前の場合と反對となる。如何なる場合にも二重層は新に起る現象を妨げる故遂に上記の二重層の電位差は一定の値を取り、夫以上に金属が溶解してイオンとなる事もイオンが金属に析出する事もなくなる。

今規定水素電極の電位を0とし、之と1規定濃度の溶液に入れたる金属との電壓を測れば25°Cに於て次の如くなる。かゝる電位差を單極電位差といふ。

Ion	K	Na	Zn	Ni	Cu
Volts	-2.926	-2.715	-0.758	-0.22	+0.345

Ion	OH'	Cu	Hg	Ag	Au
Volts	+0.398	+0.51	+0.799	+0.799	+1.3

§11. 電池 a) 濃淡電池。今二つの容器を取つて之に c_1 及び c_2 なる濃度の $ZnSO_4$ 溶液を入れ、其の中に各々亜鉛棒を浸し、之を電氣的に接続した場合を考へる。各容器中の Zn の單極電位差を V_1, V_2 とすれば第一及び第二の容器内の液の電位差は $V_1 - V_2$ である。

今1モルの Zn だけを含む溶液を第一の容器より取つて之を第二の容器に入れば nF (n は Zn の原子價)だけの電氣量を移したのであるから、次に示すエネルギーを外より供給しなければならない。

$$W_1 = nF(V_1 - V_2)$$

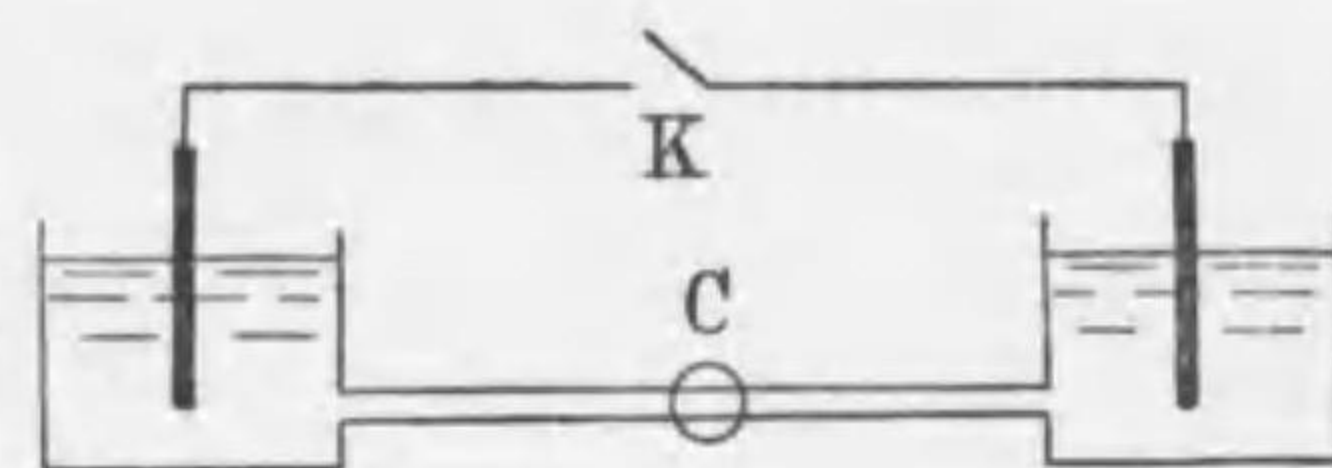
然るに此の操作を他方より見れば1モルの Zn を含む溶液が初め c_1 なる濃度を有して居たものが c_2 となつたのである(第二の容器は非常に大きくて此のために濃度に變化しないとする)。故に此の際溶液に對して外部よりなすべき仕事は(12a)によつて次の如くなる。

$$W_2 = RT \log \frac{c_2}{c_1}$$

さて W_1 と W_2 とは同一のエネルギーを兩方面より見たのであるから $W_1 = W_2$ でなければならぬ。即ち

$$V_1 - V_2 = \frac{RT}{nF} \log \frac{c_2}{c_1} \quad (12b)$$

此の式は兩方の亜鉛を同電位にした場合の溶液の電位差である。 $c_2 > c_1$ ならば $V_1 > V_2$ であるから濃度の高い液の電位は低い。もし二枚の亜鉛板を接続する代りに溶液を相通する如



第 9 圖

く(第9圖圖中Cはコック,Kは電鍵)すれば二枚の亜鉛板の間には(12b)と符號の反對なる次の如き電位差 V を生ずる。

$$V = \frac{RT}{nF} \log \frac{c_1}{c_2} \quad (12c)$$

此の電位差は濃度の大小によつて起るから之を濃淡電池といひ、(12c)を濃淡電池に関するネルンズ(Nernst)の式といふ。此の式に於て $c_1 > c_2$ ならば $V > 0$ 、即ち濃液に浸される金属の方が電池の陽極となる。

濃淡電池の兩極を電氣的に接続すれば陽極より陰極に向つて電荷が移るために陽極の電位は下り陰極の電位は上る。其のために陽極に附着せるイオンは陽極の束縛より脱し其の代り陰極は前より多くのイオンを引き付ける。換言すれば電流は陽極附近の濃度を下げ陰極附近の濃度を上げて全體として均一な溶液とする傾向がある。

(12c)によれば c_1 が知られた場合に V を測定すれば c_2 が知られる。故に濃淡電池を用ひてイオンの濃度を測定する事が出来る。

b) 化學電池。今稀硫酸の中に銅と亜鉛とを浸せば何れも酸に溶けて各イオンを遊離する。然るに此の際 Cu^{++} 及び Zn^{++} は陽電氣を帯びて液中に去るを以て銅及び亜鉛は何れも陰に帯電し、イオンを牽引する力を生ずる故に液と之等



第 10 圖

との間には電氣の二重層を生ずる。今液中の電位差を0とすれば(測定の結果によるも之等は省略出来る)銅と亜鉛との電位差は銅及び亜鉛の表面にある二重層の強さの差である。

先づ銅の表面に於ける二重層の強さ即ち銅と液との間の電位差を計算する。液中の銅イオンの濃度を1とすれば此の電

位差は前節の表より

$$0.345 + V_0$$

である。但し V_0 は規定水素電極と液との電位差である。若し液の濃度が c_1 なる場合には、 c_1 と 1 なる濃度を有する濃淡電池を考へれば(12b)より其の起電力は

$$V'_1 = \frac{RT}{n_1 F} \log \frac{c_1}{1} = \frac{RT}{F} \log \frac{c_1^{1/n_1}}{1}$$

である。但し n_1 は銅イオンの原子價である。さればイオン濃度 c_1 なる液中の銅は液の電位を0とすれば

$$V_1 = 0.345 + V_0 + \frac{RT}{F} \log c_1^{1/n_1}$$

なる電位を有する。同様にイオン濃度 c_2 なる液中の亜鉛の電位は次の如くなる。

$$V_2 = -0.758 + V_0 + \frac{RT}{F} \log c_2^{1/n_2}$$

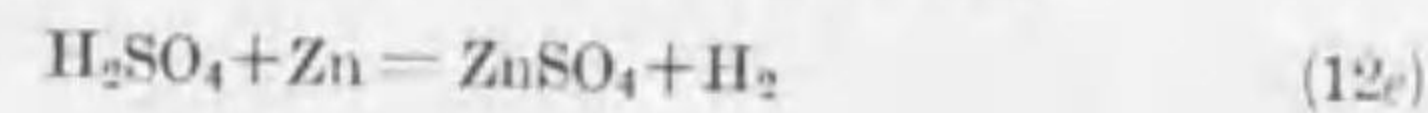
但し n_2 は亜鉛の原子價である。故に此の場合には銅が陽極亜鉛が陰極で其の間の電位差 V_0 は $V_1 - V_2$ に等しく

$$V_0 = 1.103 + \frac{RT}{F} \log \frac{c_1^{1/n_1}}{c_2^{1/n_2}} \quad (12d)$$

となる。此の式は 25°C に於て正しい。

かゝる電池の電極を電氣的に接続すれば電流は溶液内にては亜鉛より銅に行き外部にては銅より亜鉛に行く。さて溶液内にて電氣の運動するは如何にして起るかといふに、先づ銅と亜鉛を導體にて接続せる時に銅の電位は下り亜鉛の電位は上る。故に銅の表面の二重層の強さが増加して溶解壓よりも大となり、イオンが銅となつて析出せんとする傾向が勝つ。一方亜鉛の方では二重層の強さが減少して溶解壓の方が勝つ。其の結果銅は析出し亜鉛は溶解し、亜鉛の溶解すると共に過剰と

なつた水素は銅の附近に析出する。其のため亜鉛イオンは前よりも増加する故銅極の方に向つて進む。流るゝ電流が定常状態に達せる場合には銅イオンは全部析出して溶液中には無くなり陽極に於ける水素の析出と陰極に於ける亜鉛の溶解とが何れも一定の割合で起つて居るのであつて結局此の電池内には次の如き化學變化が行はれて居る事になる。



此種の電池にては電流のエネルギーはかゝる化學變化によつて供給せらるゝ故之を**化學電池**といふ。化學電池に於ては金屬の消耗によるものなる故長時間電流を維持する事が出来る。

今いなる強さの定常電流が流れて居る場合に電池の兩極の電圧が如何なる値を有するかを考へるに溶液内にはイオンの運動がたえず起り之がために各イオンは其の運動を妨げんとする摩擦力を周圍より受けるから、換言すれば電解液の内にも電氣抵抗がある。電池の内部に於けるかゝる抵抗を**内部抵抗**といふ。通常内部抵抗は電流の大きさには無關係であると考へられて居る。電池の起電力はかく内部抵抗に打ち勝つて電流を流すために消耗せられるから、其の兩極間の電圧は内部抵抗を r_i とすれば

$$V - r_i i$$

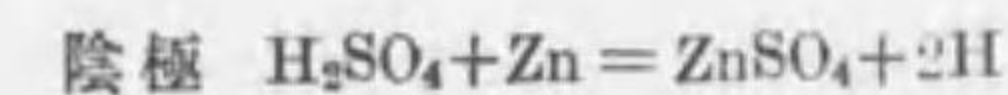
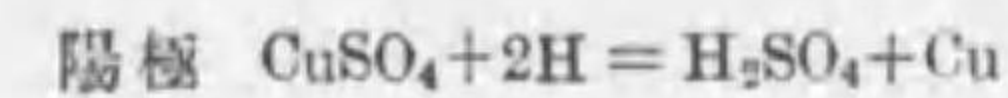
である。之を**端子電壓**といふ。

此の電池に於て陽極に析出する水素の一部は銅の表面に附着し其の部分に甚だ大なる電氣抵抗を起す。之を陽極の**成極作用**といふ。成極作用の大なる電池は實用には不適當であるから之を避けるために種々の考案が行はれ電池の種類は此の考案の如何によつて分れるのである。

重クロム酸電池 に於ては發生せる水素を直に酸化するために硫酸に重クロム酸カリウムを加へ陽極が之におかされる

を防ぐ爲に炭素板を用ひて居る。

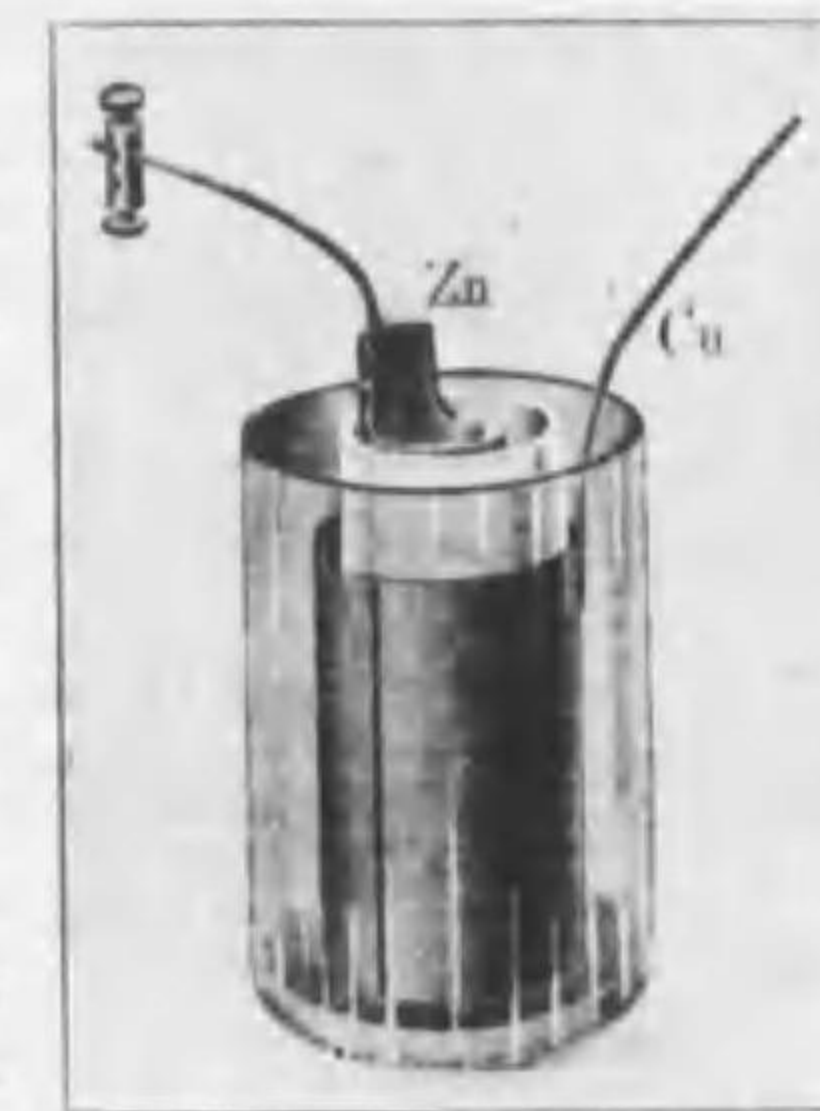
ダニエル(Daniel) は第11圖の如く内外の二筒から成り内筒は素焼である。外筒には銅板と CuSO_4 の飽和溶液を入れ更に結晶硫酸銅を充分に入れてある。内筒は硫酸の中に亜鉛を挿入したもので電流の通りつつある時に亜鉛が溶解しイオンが素焼の壁を通過して外筒に出れば飽和せる硫酸銅の溶液に入るから化學變化が起つて硫酸を生じ銅が陽極に析出する。故に成極作用は起らない。即ち此の電池には次の如き化學變化が行はれる。



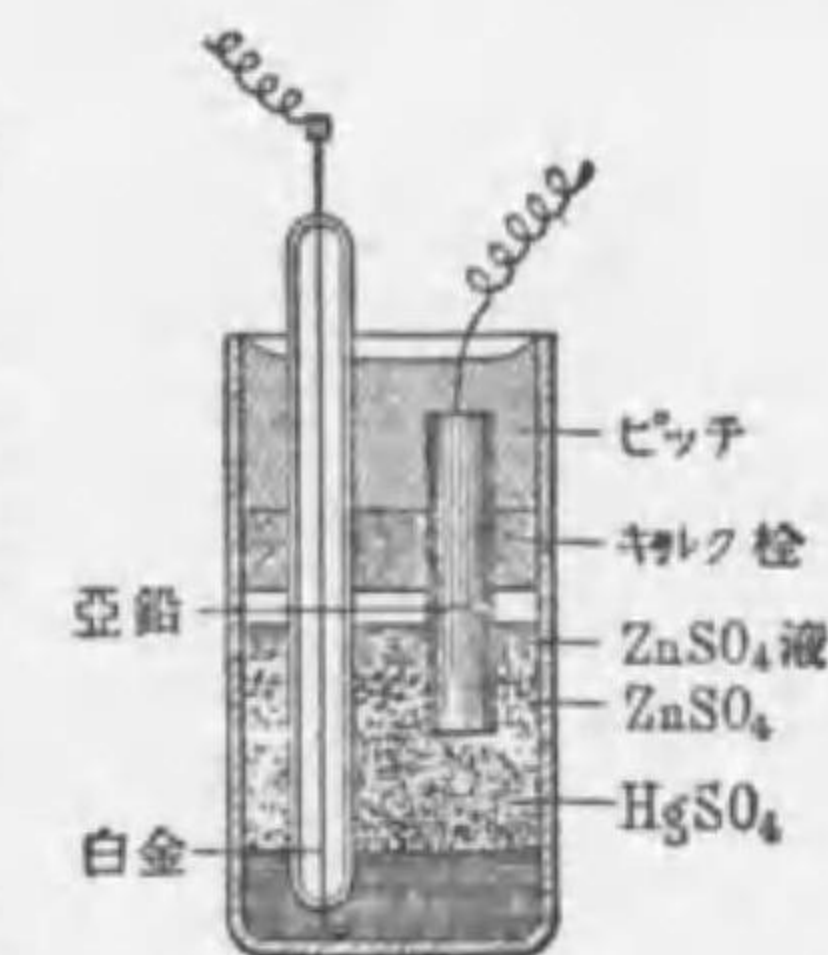
グローブ(Grove)電池。内外二筒から成り内筒は全くダニエル電池と同じで外筒のは硝酸の中に白金の箔を浸してある。陰極より來た水素は硝酸によつて酸化される。

ブンゼン(Bunsen)電池。グローブ電池を改造し陽極を白金の代りに硬質瓦斯炭素を用ひて價格を廉くしてある。起電力は1.97 volt位である。

クラーク(Clark)電池。起電力が一定不變であるから起電力の標準として用ひられる。構造は第12圖の如く細い硝子管に入れた白金線を底に入れた水銀まで通して之を陽極とする。水銀の上には HgSO_4 飽和せる ZnSO_4 及び之を中和するために少量の酸化亜鉛を混合せる糊状の粘體がある。



第 11 圖



第 12 圖

亜鉛の棒を此の $ZnSO_4$ の中に浸してある。起電力は攝氏 15° で 1.434 volt である。

カドミウム (Cadmium) 電池。クラーク電池を改良せるもので現今標準電池として盛に用ひられて居る。クラーク電池の亜鉛の代りに 12% のカドミウム

を含むアマルガム (Amalgam) を用ひ、硫酸亜鉛の代りに $CdSO_4$ を用ひる。其の他はクラーク電池と同様である。實際の形状は第 13 圖の通りで、カドミウム電池の一種なるウェストン電池の起電力 ($^\circ C$) は

$$V_0 = 1.0183 - 0.000406(t - 20) - 0.00000095(t - 20)^2 + 0.00000001(t - 20)^3$$

で表はされる。

§ 12. 電池の接続 前節の理論によつて成極作用のない化學電池に i なる電流が流れて居る時は其の端子電圧は

$$V = V_0 - r_i i$$

である。故に之は起電力 V_0 なる電源に r_i なる抵抗を直列に接続したものと同等である。

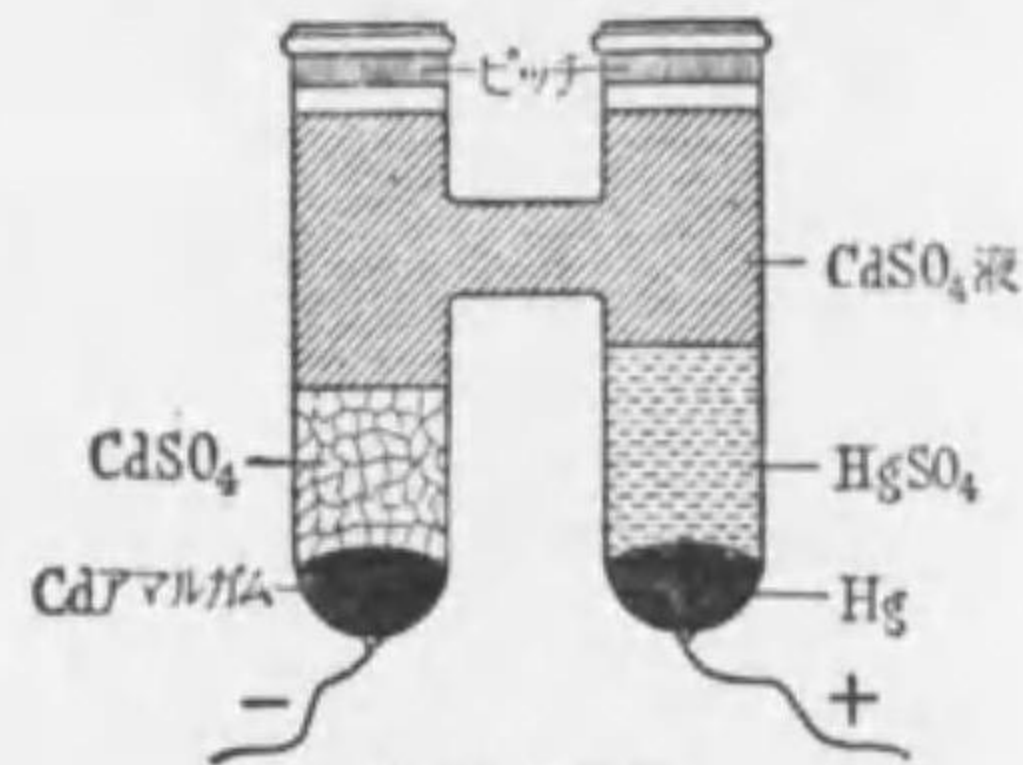
今起電力 V_0' , V_0'' , 内部抵抗 r_i' , r_i'' なる二つの電池を並列に接続して之より i なる電流を取り出した場合に各電池内を流れる電流を i' , i'' とすれば各電池の端子電圧は次の如くなる。

$$V' = V_0' - r_i' i' \quad V'' = V_0'' - r_i'' i''$$

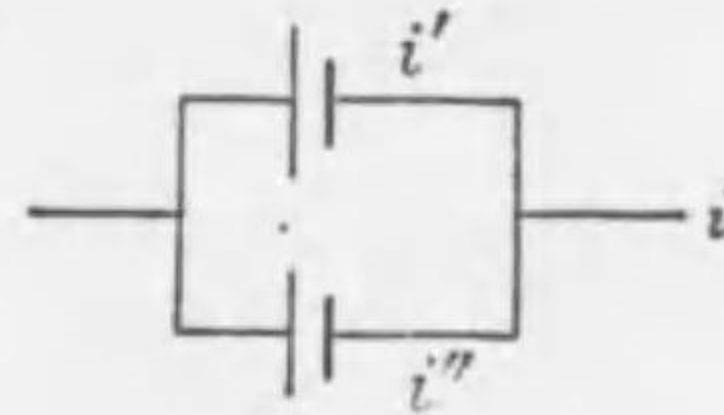
然るに電池は並列に接続せられて居るから

$$V' = V''$$

である。故に



第 13 圖



第 14 圖

$$r_i' i' - r_i'' i'' = V_0' - V_0''$$

の関係がある。又電流は

$$i' + i'' = i$$

となるが各電池の起電力と内部抵抗及び全電流を既知として i' , i'' を求むれば次の如くなる。

$$i' = \frac{r_i''}{r_i' + r_i''} i + \frac{V_0' - V_0''}{r_i' + r_i''}$$

$$i'' = \frac{r_i'}{r_i' + r_i''} i - \frac{V_0' - V_0''}{r_i' + r_i''}$$

此の第二項の $\frac{V_0' - V_0''}{r_i' + r_i''}$ は兩電池の起電力の差によつて二つの電池の間を環流する電流である。即ち $i = 0$ とすれば各電池には第二項に相當する電流が流れるのに外部に流出する電流が 0 となる事から直に知られる。

二つの電池が全く同様なもので $V_0' = V_0'' = V_0$, $r_i' = r_i'' = r_i$ ならば各電池は外部に流れる電流の $\frac{1}{2}$ づつを分擔する。もし n 個の電池を並列にすれば何れも $\frac{i}{n}$ づつを分擔する。故に此の時端子電圧は

$$V = V_0 - \frac{r_i}{n} i \tag{13a}$$

即ち n 個の電池を並列に接続せるものは起電力が之と等しく内部抵抗が $\frac{1}{n}$ なる一個の電池で置き換へる事が出来る。

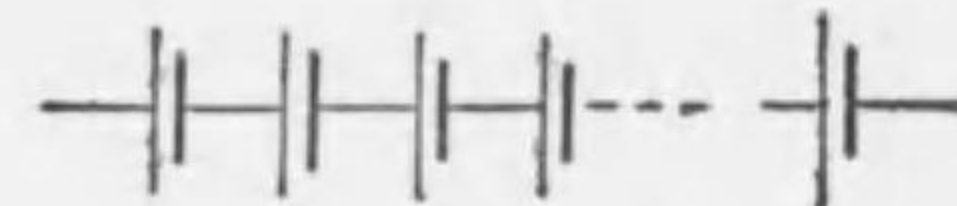
n 個の電池を直列に結べば其の兩端の電位差は

$$nV_0$$

である。之に i なる電流を通せば各電池の端子電圧は

$$V_0 - r_i i$$

となるから上の電池系の兩端の電圧は



第 15 圖

$$V = nV_0 - nr_i i \tag{13b}$$

となる。故に n 個の電池を直列にせるものは起電力も内部抵抗も共に n 倍なる只一つの電池に等しい。

次に N 個の相等しい電池が與へられた場合に、外部の抵抗 R を通じて最大の電流を流すには如何にすべきかを考へよう。今 n 個直列にせるもの m 組を並列にすれば此の電池系は、起電力が nV_0 で内部抵抗が $\frac{nr_i}{m}$ なる只一個の電池と同様であるから外部抵抗 R に流るゝ電流 i は

$$i = \frac{nV_0}{R + \frac{nr_i}{m}} = \frac{mnV_0}{mR + nr_i}$$

で與へられる。さて與へられた電池を上如く組合せたと考へれば $mn = N$ であるから、此の式の右邊の分母は積が一定なる二数の和に外ならない。斯かる場合に分母が最小となるのは此の二数が等しい時であるから、 i の最大となる條件は

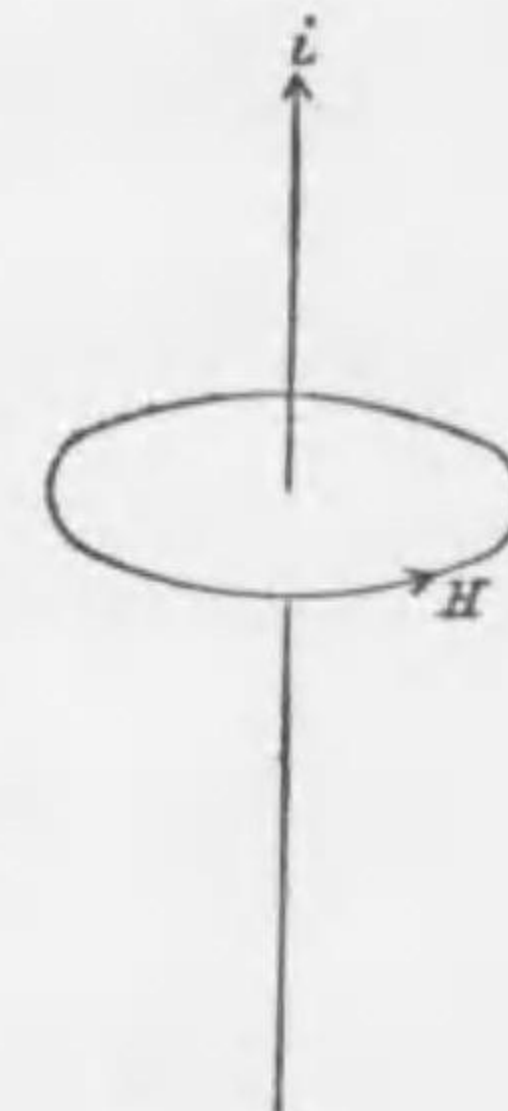
$$R = \frac{n}{m} r_i$$

である。即ち内部抵抗が外部抵抗と等しき場合に電流は最大となる。斯様にすれば外部で發生する熱と電池内で發生する熱も相等しくなる。

第二章 定常電流と磁場

§13. 電流の生ずる磁場 長い直線狀導體に電流を通ずれば其の周圍には此の直線を中心とする同心圓より成る無数の磁力線が生ずる。之等の磁力線の方法は電流の流れる方向と一定不變の關係があるもので電流の方向に右ネジを進ませる如く廻轉する時の廻轉方向が磁力線の方法を與へる。即第16圖に示す如き關係にある。

回路が無限に長い直線の場合のみならず如何なる形狀をなすとも電流の周圍には磁場が存在するものであつて多くの實驗の結果によれば、任意の閉回路に流るゝ電流 i のために點 O に生ずる磁場は此の閉回路を縁として、 i なる強さを有し O を通過せざる如き磁殼による磁場に比例する。即ちある常數 C を選べば $\phi = C$ なる強さを有する磁殼の磁場と同じである。但し磁殼の磁化の方法は電流の流るゝ方向に右ネジを廻轉せる時に進む方向を有する如く取るものとする。此の法則をアンペールの法則といふ。此の時考へられた磁殼を等價磁殼(Equivalent magnetic shell)といふ。



第16圖

ある點 O より磁殼を望む立體角は第二編以下 I. II. なる符號を以て第一編第二編の意とする)にて述べたる如く其の周縁の形狀のみによつて定まる。 O 點が磁殼の正又は負の側にあるに従つて立體角の前に正又は負の符號を置いたものを ω とすれば O 點の磁位 Ω は II. (11f) によつて

$$\Omega = \phi\omega$$

である。されば等價磁殻の場合には $\phi = Ci$ にして

$$\Omega = Ci\omega$$

である。即ち閉電流による磁場は此の磁位より導かるゝものに等しい。

常數 C は電流及び磁極の單位の取り方によつて決定せられる。磁極の單位に II. §1 の如くに定めた場合に

$$C=1$$

ならしむる如き電流の單位を電磁單位といふ。電磁單位の大きさを如何に取れば $C=1$ とするを得るか又それは實際上如何にて定め得るか及び靜電單位との關係等は後に述べる。

磁殻による O 點の磁場は II. (12k) によつて與へられる。此の積分は磁殻の周縁に沿つて行はるゝものであつてもし周縁の一部 $CD = ds$ を取つて考へれば此の部分による磁場は II. (12g) によつて

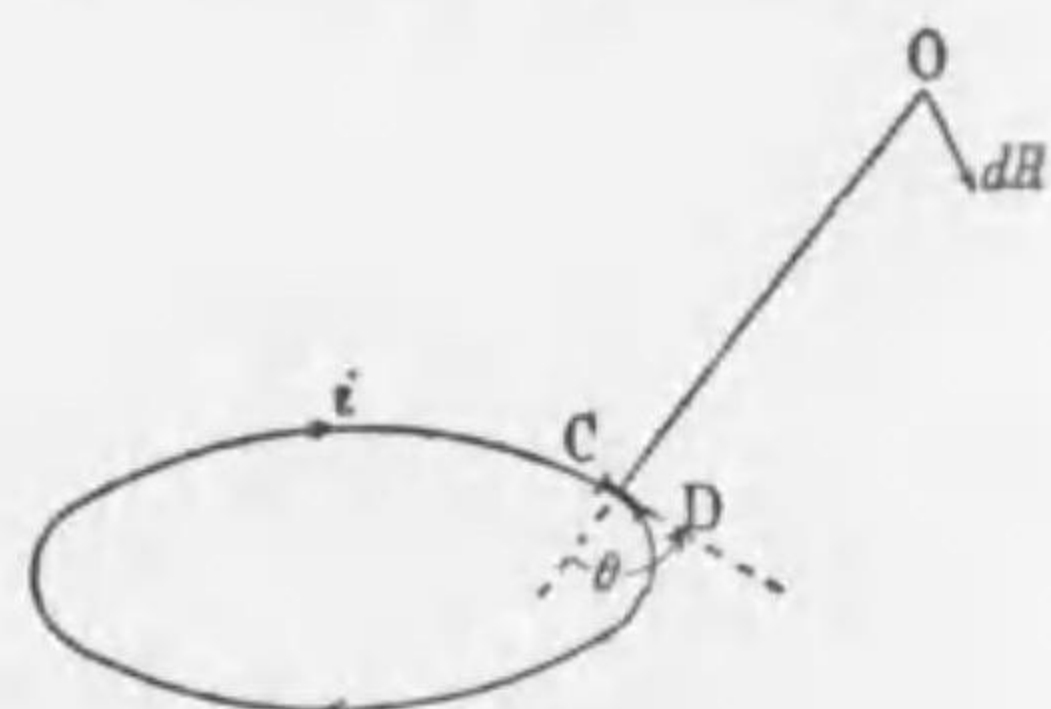
$$\phi \frac{\sin\theta}{r^3} ds$$

但 θ は CD と OC とのなす角である。今電流の強さが i 電磁單位なる時は之は

$$dH = i \frac{\sin\theta}{r^3} ds \quad (14)$$

となる。之は即ち閉回路中の ds なる部分による O 點の磁場であつて其の方向は II. §7 によつて右ネジを CD に於ける電流の方向に進ましめる場合の廻轉方向と同じである。之をビオ・サバル (Biot Savart) の法則といふ。

かく任意の閉回路に對す



第 17 圖

るアンペールの法則と、電流の部分に對するビオ・サバルの法則を得たるを以て之を應用して種々の形狀をなす定常電流の磁場を決定することが出来る。之を應用する前に電流による磁場の一般的性質を研究する。

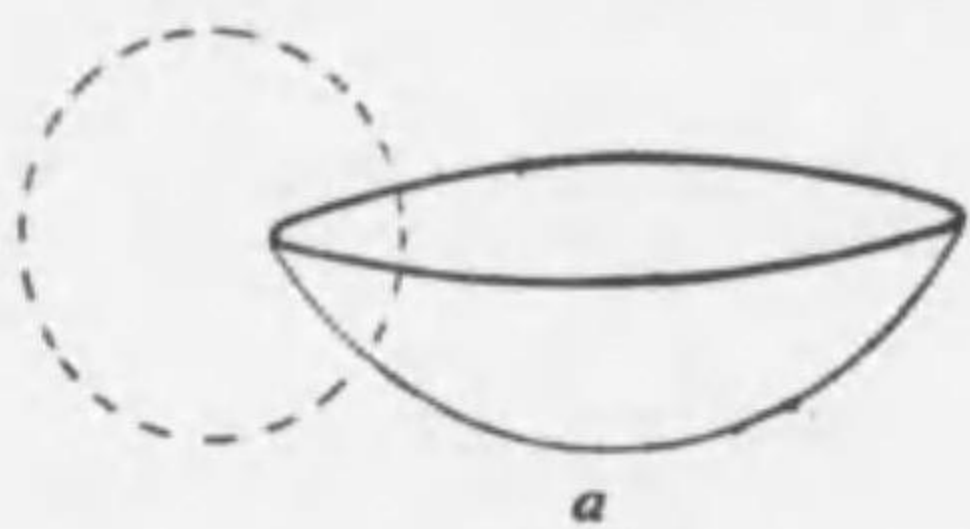
II. に於て磁石は磁氣感應線を束ねるものである事を述べた磁殻は磁石の特別なものである。然して磁殻に等價なる電流に就ても勿論此の事が言はれる。即ち閉電流は磁氣感應線を圍む紐の如きものである。

次に電流に等價な磁殻を考へれば磁殻外の點に於ける磁場は上の如くにして決定せられる。磁殻内に於ける磁場は電流によつて作られたものと磁殻によつて作られたものとが一致するかを吟味するに此の兩者は一致しない。何となれば今等價磁殻の正負兩側に P, P' なる二點を取り、然る後磁殻の強さを一定にしたまゝ其の厚さを限りなく小にすれば、 PP' は無限に小となる。然るに此の磁殻は本來假想せられたものであつて電流による磁場が PP' に於て大なる差異がある筈はない。故に PP' が無限小の場合には單位正磁極を P' より P に運ぶに要する仕事は 0 である。然るに之を磁殻の方から見れば此の仕事は II. (11i) によつて $4\pi\phi = 4\pi i$ (i は電流の強さ即等價磁殻の強さ) である。故に磁殻外では電流による磁場と磁殻による磁場は一致するが磁殻内では異なる。

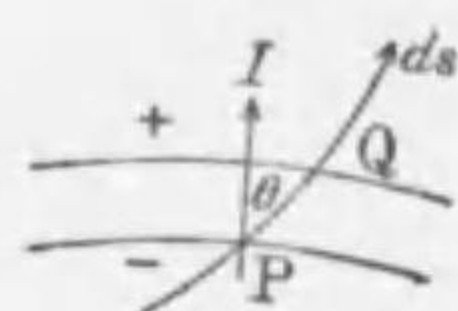
然し等價磁殻による磁氣感應は電流による磁場と磁殻外は勿論磁殻内でも一致するものである。之を次に證明する。等價磁殻の表面の兩側に互に接近して磁殻の外部に P 、内部に P' なる點を取れば、 P に於ける磁場は電流によるものと磁殻によるものとは互に一致する。然るに磁殻は法線の方に磁化されて居るから P' に於ける切線磁力(磁力の磁殻面に沿ふ分)は切線磁氣感應に等しい。又 II. §12 によつて境界面に垂直な磁

氣感應の分はP, P'に於て等しくなければならない。故にPに於ける磁力とP'に於ける磁氣感應は相等しい。然るにPの磁場は電流によるものである。故にP'に於ける磁氣感應はPに於ける電流の磁場に等しい。今PP'は無限に小であるから, P, P'に於ける電流の磁場は互に等しいと考へてよい。故に等價磁殻による磁氣感應は磁殻の内外に關せず電流の生ずる磁場と等しい。

第18圖に示す如く, 閉回路を貫く如き道に沿つて單位正磁極を運ぶ時に磁場から磁極になされる仕事を計算する。但圖中太い線は閉回路, 細い線は等價磁殻, 點線は磁極を運ぶ道とする。此の道の上のある點に於ける(等價磁殻による)磁氣感應, 磁場, 及び磁化の強さを夫々B, H, Iとする。(但磁殻其の他の磁性體の



第 18 圖



第 18 圖

内部では $I \neq 0$ 真空中では $I = 0$ である。) 然らば此の點で ds なる距離だけ單位磁極を運ぶ時なされる仕事は一般に

$$B ds$$

である。II.(15a)によつて之は

$$(H + 4\pi I) ds$$

に等しい。故に一周の仕事は選ばれた閉路に沿つて

$$W = \oint (H + 4\pi I) ds$$

となる。然るに II.(11i)によつて

$$\oint H ds = 0$$

なるが故に仕事は

$$W = 4\pi \oint I ds$$

である。今電流の周圍には等價磁殻の外に全く磁性體がないとすれば磁殻以外では I が 0 であるから考へる必要がなく, 積

分は磁殻内だけで行へばよい。さて道は磁殻の負の側から正の側に出る(かゝる道を正の方向とする)ものとすれば第18圖によつて

$$I ds = I PQ \cos \theta = \phi$$

であつて, 等價磁殻の強さ ϕ は i に等しいから

$$W = 4\pi i. \tag{14a}$$

即ち閉回路に交る如き道を取つて單位正磁極が正の方向に電流を一周するに要する仕事は(14a)で與へられる。もし道が閉回路を貫かなければ I は到る所 0 であるから $W = 0$ である。

單位正磁極の道が正の方向に n 回負の方向に m 回電流を貫く場合に磁極になされる仕事は

$$4\pi i(n-m) \tag{14b}$$

である。

次に電流の附近に磁性體が存在する場合を考へる。此の時の磁場 H を, 周圍が真空な場の磁場 H_0 と, 磁性體の感應磁化又は永久磁石による磁場を H_1 とに分けて考へれば

$$H = H_0 + H_1$$

然るに II)によつて

$$\oint H_1 ds = 0$$

なるが故に一週する時磁極になす仕事 W' は

$$W' = \oint H_0 ds$$

即ち

$$W' = W = 4\pi i$$

となる。されば周圍に磁性體の有無に關せず閉電流を正の方に n 回負の方に m 回廻せば磁極になされる仕事はやはり(14b)

で與へられる。¹⁾

電流の附近のP點の磁位を考へて見ると、電流を一廻りしないやうな道を通つて單位正磁極を無限遠からP點まで運ぶために外部からなすべき仕事を Ω_0 とすれば、先づかくしてPに磁極を持ち來した上に更に、電流を正の方に n 回、負の方に m 回廻つたと考へれば、此の爲に磁場が磁極になす仕事が(14b)であつて、外部から磁極になすべき仕事は $-W$ となり、P點の磁位 Ω は $\Omega_0 + (-W)$ であるから、

$$\Omega = \Omega_0 - 4\pi(n-m)i \quad (14c)$$

となる。故に電流による磁位は一價ではなく、單位正磁極を運ぶべき道の取り方によつて $4\pi i$ の整数倍の差を有する種々の値を取り得る。但し(14c)の右邊第二項は場所に無關係であるから微分すると0となり磁場には影響がない。

§14. 電流の生ずる磁場の計算

a. 無限に長い導体に流るゝ電流

先づアンペールの法則を應用する。導体を z 軸(電流の向きを正の方向とする)に取り、之と直交する任意の直線を考へ之を x 軸とする。さてこの電流は、 $s = -\infty$ から $s = +\infty$ 迄 z 軸に沿つて流れ、次に xs 面内にあつて O を中心とし半径が無限に大なる半圓に沿つて $s = +\infty$ より $s = -\infty$ に至る如き閉電流の一部と考へられる。然らば等價磁殻は xs 面の全體である。

今第19圖に於て $\angle xOP = \theta$ 、 $OP = r$ なる如きP點に於ける磁位を計算するためにPから此の半平面を見る立體角を考へれば之は $2(\pi - \theta)$ である。又閉電流と同方向に右ネジを廻せば半

1) 此の事を示すに次のベクトル式を用ふる事が出来る。但し i は、電流の強さに等しい大きさを有し、電流の正の方向に向ふベクトルである。

$$\text{rot}H = 4\pi i$$

之を電氣力學の第一基礎方程式といふ。(第313頁脚註参照)

平面よりP點の方に進むから、Pは等價磁殻の正の側にある。故に

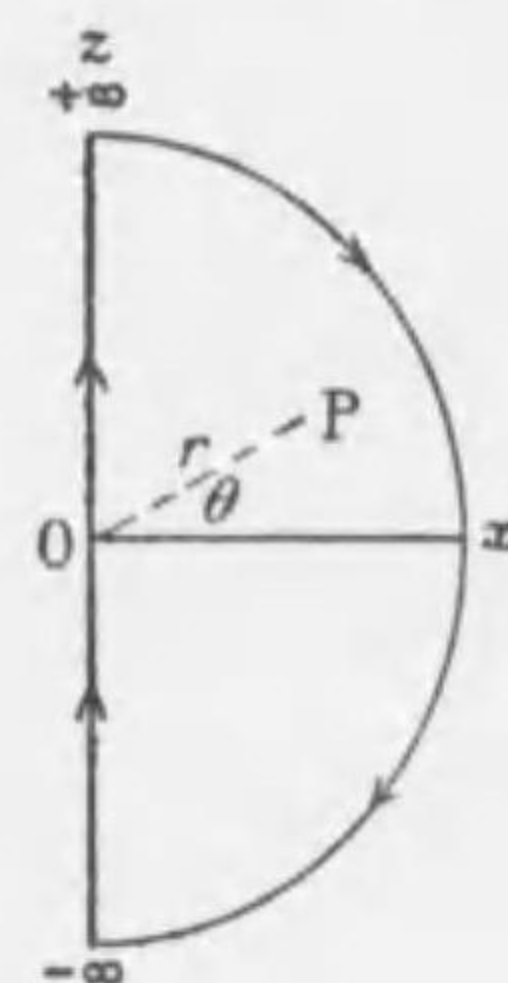
$$\Omega = \{2(\pi - \theta) + 4\pi n\}i \quad (15)$$

但 n は正負任意の整数である。物理的には負の方に廻つた回数から正の方に廻つた回数を差引いたものである。

かく磁位を求めたから、半径の方向の磁場 H_r 及び圓周の方向の磁場 H_θ は次の如くなる。

$$H_r = -\frac{\partial \Omega}{\partial r} = 0$$

$$H_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} = \frac{2i}{r} \quad (15a)$$



第19圖

即ち磁場は θ の増す方向に向ひ、 r に逆比例する。

ビオー・サバルの法則(14)によつて計算して見れば導線上のA點の附近に取つた ds とPAとの間の角を θ とすれば

$$a^2 = r^2 + s^2$$

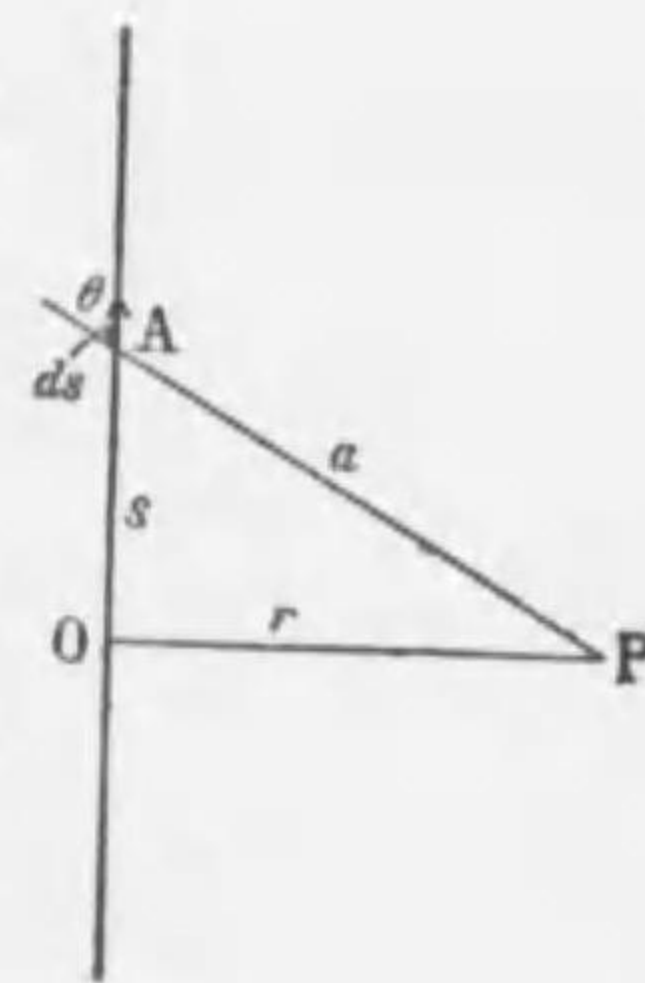
であるから ds のためにP點に生ずる磁場の強さは

$$dH = i \frac{\sin \theta}{r^2 + s^2} ds$$

である。 dH の方向は右ネジが電流の方向に進むやうに廻せばP點の部分では上から紙面に向ふ。 ds を線上何處に取つても dH の方向は同じであるから

$$H = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \theta}{r^2 + s^2} ds$$

然るに $s = r \cot \theta$ $ds = -r \operatorname{cosec}^2 \theta d\theta$ $r^2 + s^2 = r^2 \operatorname{cosec}^2 \theta$ であるから、 H は



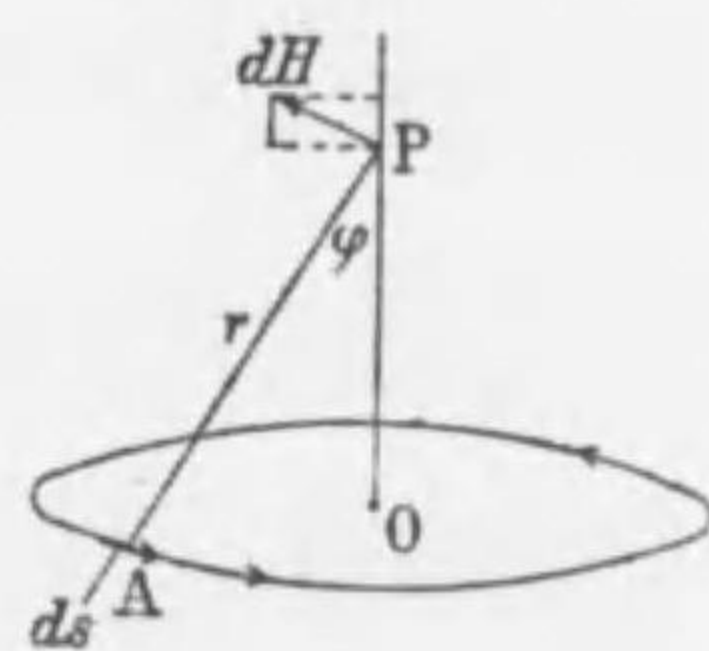
第20圖

$$H = i \int_{-\pi}^0 \frac{\sin \theta (-r \operatorname{cosec}^2 \theta)}{r^2 \operatorname{cosec}^2 \theta} d\theta = -\frac{i}{r} \left[-\cos \theta \right]_{-\pi}^0 = \frac{2i}{r}$$

となつて(15a)と一致する。

b. 圓形電流

半径 a なる圓形電流の軸上の一 點 P に於ける磁場の強さを計算する。今 A の附近に取つた ds なる部分のため P に生ずる磁場を求むるに其の方向は PA 及び ds に垂直であるから丁度 AOP 面内にある。然して A の部分に於ける電流の方向に右ネジが進むやうに廻轉すれば P の部分では圖の矢の如く動くから dH は



第 21 圖

圖の如くなる。之を軸に平行と垂直との二つの分に分てば

$$\text{平行分} \quad dH \sin \varphi$$

$$\text{垂直分} \quad dH \cos \varphi$$

となる。電流全體を考へれば垂直分は互に打ち消して残るは平行分のみとなるから、 P に於ける磁場は OP の方向に向ひ、大きさは、 $PA = r$ とすれば

$$H = \int dH \sin \varphi = \int \frac{i ds}{r^2} \sin \varphi = \frac{i \sin \varphi}{r^2} \int ds = \frac{i \sin \varphi}{r^2} 2\pi a$$

然るに $\sin \varphi = \frac{a}{r}$ であるから

$$H = \frac{2\pi a^2 i}{r^2}$$

今 $OP = d$ とすれば $r = \sqrt{a^2 + d^2}$ であるから

$$H = \frac{2\pi a^2 i}{(a^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

圓形電路が、 n 回同一の電流が通る如く造られてあれば各一回の回路について上式が成立するから

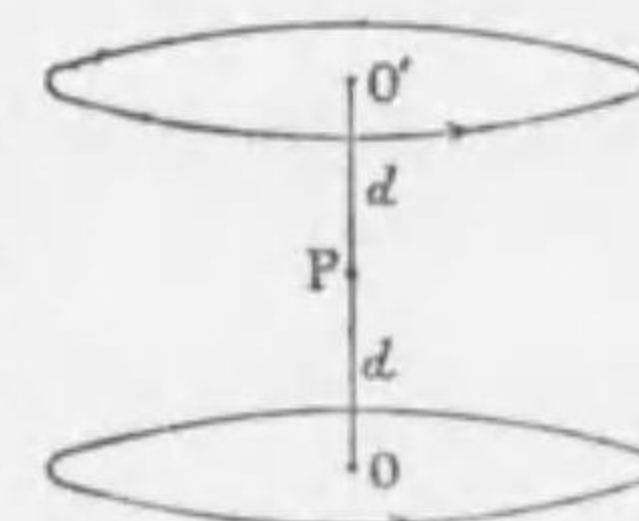
$$H = \frac{2\pi a^2 n i}{(a^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (15b)$$

となる。斯かる電路を特に**コイル**(Coil)といひ、 n をコイルの回數又は捲數といふ。コイルの中心に於ては $d=0$ であるから

$$H = \frac{2\pi n i}{a} \quad (15b')$$

となる。

半径の等しい二つのコイルの軸が一致する如くせるものゝ磁場を考へて見る。今二つのコイルの中心から等距離にある點 P を取り、 $OP = O'P = d$ とし各コイル内の電流は矢の如く流れて居るとする。然らば P より小距離 x だけ距たつた點に於ける磁場は



第 22 圖

$$H = 2\pi i a^2 \left[\frac{1}{\{a^2 + (d+x)^2\}^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\{a^2 + (d-x)^2\}^{\frac{3}{2}}} \right] \\ = \frac{4\pi i a^2}{(a^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{(a^2 - 4d^2)}{(a^2 + d^2)^2} x^2 + \dots \right\} \quad (15c)$$

である。故に若し $2d = a$ 即ち $OO' = a$ と取れば x^2 の項は消え x^4 又は夫以上の高次の項のみが残る、 P 點の附近の磁場は甚だ一樣になる。かゝる装置を**ヘルムホルツ**(Helmholtz)の**コイル**といふ。

c. ソレノイド

圓筒の表面 1 cm. につき n 回の割合で一様に導線を巻いたものを**ソレノイド**(Solenoid)といひ、圓筒の軸を**ソレノイドの軸**、ソレノイドの軸から導線の中心に到る距離を**ソレノイドの半径**といふ。此の時導線は螺旋形となるが導線の直径が圓筒に比して甚小ならば各一回は各々完全なる圓形をなし、 1 cm. につき n 個の圓形電流が流れて居ると考へる事が出来る。

先づ無限に長いソレノイドを考へる。ソレノイドの軸上の各點に於ては磁場は半徑方向の分を有せざることは對稱の理によつて明らかである。故に軸上の各點で磁場が存在すれば必らず軸に沿ふものである。さてソレノイド内の磁場は b に述べた如き圓形電流の作る磁場の和であるから方向も同様にして定められる。即ちソレノイドの電流の方向に右ネジを廻した時に夫が進む方向が磁場の方向を示す。

今軸上に點 P を取り茲で磁場の強さを計算して見る。軸に沿つて P から上に z 軸を取れば z が z と $z+dz$ との間には ndz 個の圓形電流がある。故に此の圓形電流が P に造る磁場は (15b) によつて

$$dH = \frac{2\pi a^2 i n dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

但 a はソレノイドの半徑、 i は電流の強さである。 P の磁場は之を $z = -\infty$ より $z = +\infty$ まで積分すれば得られ

$$H = 2\pi a^2 n i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

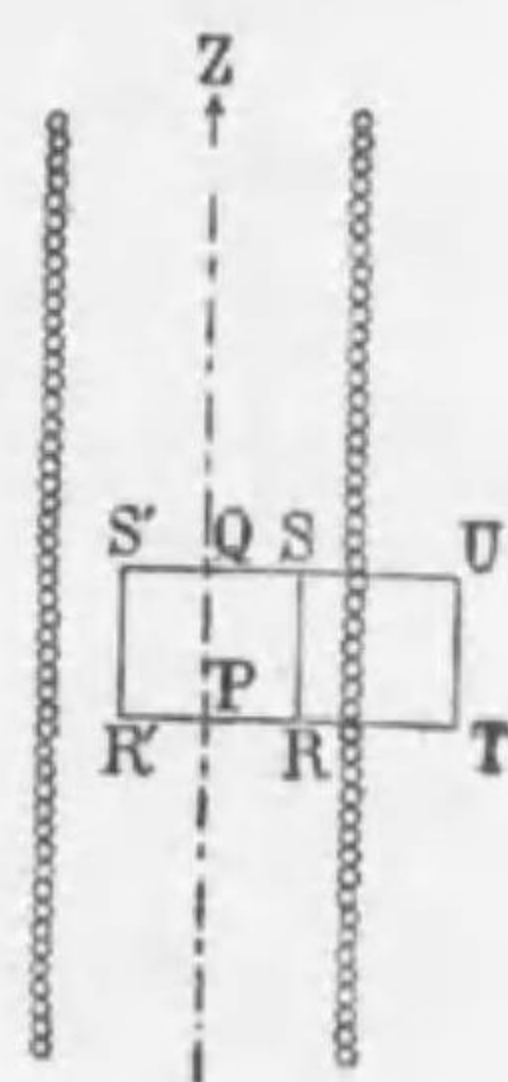
今 $z = a \tan \theta$ とすれば $dz = a \sec^2 \theta d\theta$ $a^2 + z^2 = a^2 \sec^2 \theta$ で

$$\begin{aligned} H &= 2\pi a^2 n i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a \sec^2 \theta}{a^2 \sec^3 \theta} d\theta = 2\pi n i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \\ &= 2\pi n i \left[\sin \theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\pi n i \cdot 2 \end{aligned}$$

即ち

$$H = 4\pi n i \quad (15d)$$

である。ソレノイドは無限に長いから P 點を軸上何處に選ん



第 23 圖

でも此の値は變らない。

次にソレノイド内の任意の點に於て半徑方向の磁場の分は存在しない事を證明する。今軸より $PR=r$ なる距離にある點 R に於て半徑方向の分が存在したとすれば對稱の理によつて z を軸とし半徑 r なる圓筒上の總ての點に同じ強さの半徑分がなければならない。今かゝる圓筒と、 P 點及 Q 點を過ぎ軸に垂直なる二平面より成る閉曲面にガウスの定理 (II. §9) を適用すれば此の中に入出する磁氣感應管の數は 0 である。さて端面 RR' と SS' とは對稱の理によつて全く同様であるから、 RR' から入つた磁氣感應線は全部 SS' から出る。故に側面 RS 及び $R'S'$ から出入する磁氣感應管の數が 0 である。然るに側面上の總ての點には總て同じ強さの磁氣感應がなければならない。故に側面上の總ての點に於て磁氣感應の半徑分は 0 である。さて空氣中(正しくは真空中)では $\mu=1$ で磁氣感應と磁力とは一致する。従つてソレノイド内の總ての點に於て磁力の半徑分は 0 で磁場は到る所軸に平行である。

次に軸の方向の磁力分がソレノイド内の總ての點に於て等しいことを證明する。今第 23 圖に於て R, S なる二點は軸を含む平面内にあるとし、之と軸上の二點 P, Q とは矩形をなすとする。單位正磁極を $PQSR$ に沿つて一廻りすれば此の道は電流の回路を貫かないから

$$W = 0$$

である。然るに前に證明せる所によつて QS 、及び RP に於ては磁力と道とは互に直角であるから仕事は夫々 0 となる。故に PQ に沿つて磁極を動かす仕事と、 RS に沿つて磁極を動かす仕事との和が 0 でなければならない。従つて RS 上の各點に於ける磁力の強さは互に等しく、方向は z の方向で且つ軸上に於ける磁場の強さに等しくなければならない。

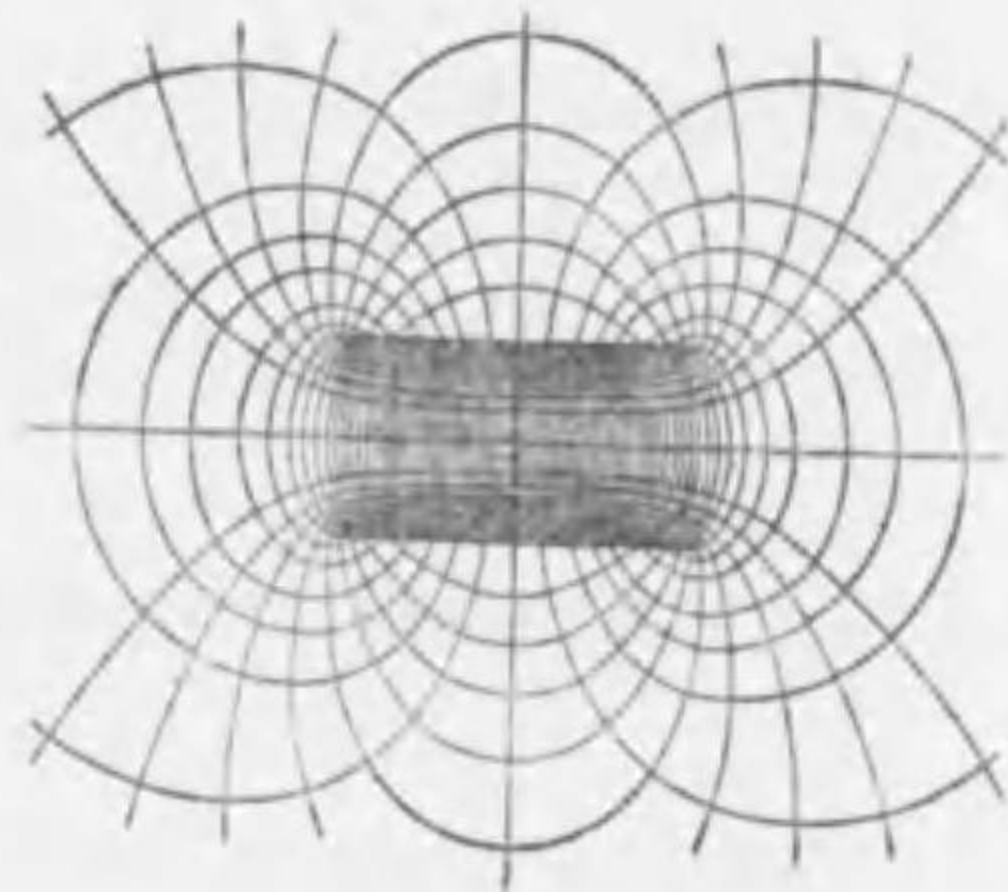
即ち無限に長いソレノイドの内部では磁場は到る所軸に平行で其の強さは(15d)で與へられる。

次にソレノイドの外では磁場の強さが0なる事を證明する。第23圖ではRSUTは矩形でRSは1cm.とする。之に沿つて單位正磁極を正の方向に一回りすれば*i*なる電流の流れて居る*n*個の圓形回路を貫くから其の仕事は

$$W = 4\pi ni$$

である。然るにソレノイド外の磁場も半徑分を有し得ない事は對稱の理によつて容易に證明される。故に此の仕事はRSとUTに於ける仕事の和であるが、RSに於ける仕事は(14d)によつて $4\pi ni$ である(RS=1)。故にソレノイド外では半徑分のみならず軸の方向の分も0である。即ちソレノイド外の磁場は0である。

以上はソレノイドが無限に長い場合であるが長さが有限でも半徑に比して充分長いソレノイドの中央では(15d)が適用出来る。第24圖は有限長のソレノイドに於ける磁力線の分布を示す。



第 24 圖

ソレノイドの切口は圓であるとしたが如何なる切口を有するものでも内部の磁場は一樣で(15d)なる強さを有する。

無端ソレノイドとは第25圖の如く圓筒を曲げて環にしたものに導線を巻いたものである。今總巻数を*m*として内部の磁場を計算する。

環の中心Oを通り紙面に垂直な直線を無端ソレノイドの軸といふ。ソレノイドの内部に考へた一點Pが軸から垂直距離

*r*であるとすれば、Pを通り軸上に中心を有する半徑*r*なる圓に沿つて單位正磁極を正方向に一週りすれば、磁極になされる仕事は(14b)によつて

$$W = 4\pi mi$$

である。Pの磁場の圓周に沿ふ分を*H*とすれば此の仕事は

$$W = 2\pi rH$$

故に

$$H = \frac{2mi}{r} \quad (15e)$$

Pに於ては半徑の方向の磁場分は0である事、及びソレノイドの外側では磁場が0なる事は前と同様にして證明される。故にソレノイド内の磁力線は軸に垂直なる平面内にありて軸上に中心を存する圓である。又各點の磁場の強さは(15e)で與へられるから環の内側に近い點に於ては磁場が強い。

d. 無限に長い二本の平行導線に反對方向に流るゝ電流による磁場。

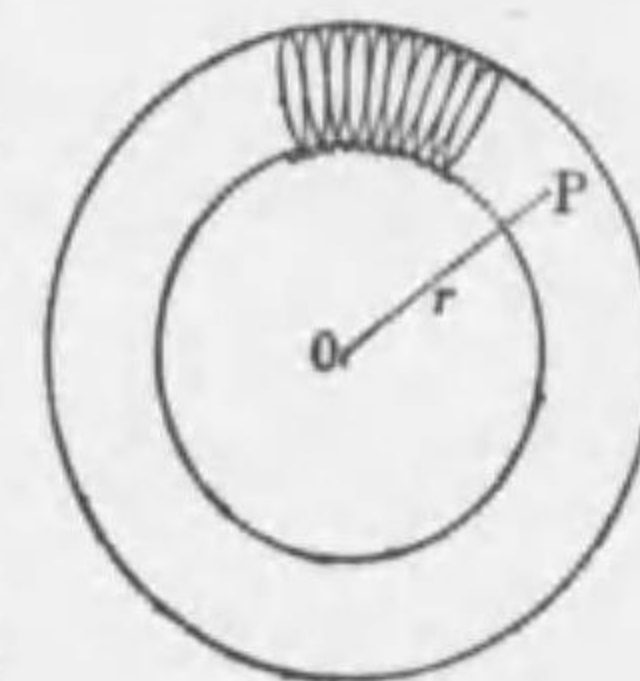
第26圖に於てa圖は平行なる二本の直線導體A、Bに流るゝ電流の方向を示し、b圖に於ては二本の導體に垂直なる平面と導體との交點をA、Bで示す。此の平面内に任意の一點Pを取れば此の點の磁位は(15)より

$$\begin{aligned} \Omega &= [2(\pi - \angle BAP) + 4\pi n]i - [2\angle ABP + 4\pi m]i \\ &= 4\pi n'i + 2i\angle APB \end{aligned}$$

となる但 $n' = n - m$ で *n* 及び *m* は任意の正負の整数である。今 $\angle APB = \theta$ と置けば

$$\Omega = 2\pi n'i + 2i\theta \quad (15f)$$

を得る。或は又磁位は次の如く考へる事も出来る。b圖に於て直線A及びBによつて限らるゝ等價磁殻がPに於て作る立



第 25 圖

體角は、

$$4\pi \frac{\theta}{2\pi} = 2\theta$$

である。従つて直ちに(15f)を得る。

(15f)によれば Ω 一定なるためには θ 一定なるを要する。即ち右圖に於て直線 AB が P 點に於て挟む平面角が一定なる點の軌跡は等磁位面をなす。之は點 A、及び B を過ぐる圓である。されば等磁位面は導線 A 及び B を過ぐる圓筒面である。

磁力線は等磁位面に垂直であるから、AB 線上に中心を有し且つ AB の中點 O から引いた切線が AO に等しき如き圓の群である。又あ

る點 P に於ける磁場の方向は次に行ふ計算の結果次の如くして簡単に決定される。即ち $\angle BPT$ が $\angle BAP$ の餘角となる如く PT なる直線を引けば之れが P 點に於ける磁場の方向を與へる。又其處の磁場の強さ H は AP に直角な $2i/AP$ と、BP に直角な $2i/BP$ との合力である。されば之等を PT の方向に分解して其の和を求むれば H が得られる。

さて P 點に於ける磁場が PT の方向を有する事を證明する爲に簡單の爲に $\angle BAP = \alpha$ $\angle ABP = \beta$ とすれば、作圖によつて

$$\angle APT = \theta - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = (\pi - \alpha - \beta) - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{2} - \beta$$

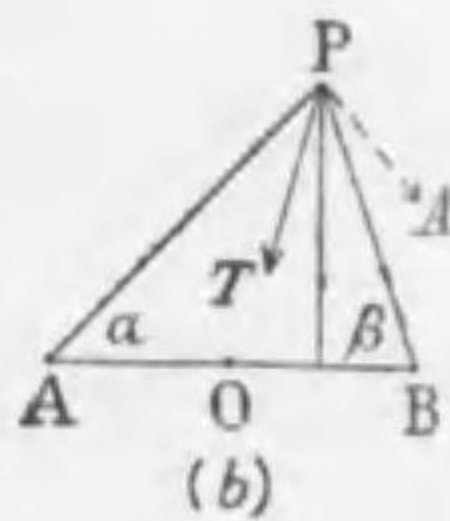
である。然るに導線 A の電流の作る磁場は $\angle APA' = \frac{\pi}{2}$ なる PA' の方向を有するが故に

$$\angle TPA' = \angle APA' - \angle APT = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \beta$$

を得る。同様に導線 B 内の電流の作る磁場と PT とのなす角は α なる事は直に證明される。故に $AP = r_1$, $BP = r_2$, $AB = a$



(a)



(b)

第 26 圖

すれば PT の方向に於ける磁場の分は

$$H = \frac{2i}{r_1} \cos \beta + \frac{2i}{r_2} \cos \alpha = \frac{2ia}{r_1 r_2} \quad (15g)$$

となる。次に PT と直角の方向に於ける磁場の分を計算すれば夫は

$$H' = \frac{2i}{r_1} \sin \beta - \frac{2i}{r_2} \sin \alpha = \frac{2i}{r_1 r_2} (r_2 \sin \beta - r_1 \sin \alpha)$$

となる。然るに $r_2 \sin \beta$ 及び $r_1 \sin \alpha$ は何れも P から AB に下した垂直の長さであるから、右邊の括弧内は 0 となる。従つて PT に直角の方向に於ける磁場の分 H' は 0 である。故に(15g)が P 點に於ける磁場の強さを與へ、之は導線 A 及び B から P に到る垂直距離の相乗積に逆比例する事が知られる。従つて H の一定なる點の軌跡は

$$r_1 r_2 = \text{一定}$$

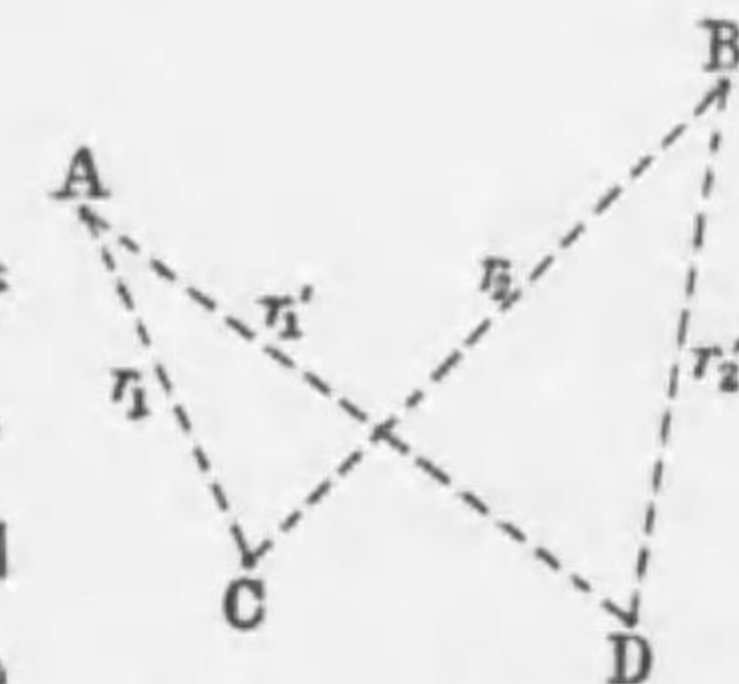
なる曲線即ちカシニ (Cassini) の卵形線である。

次に、此の場合に電流に平行なる二導線 C 及び D の間を貫く磁力管の数を計算して見よう(第 27 圖)。

第 27 圖の A、B、C、D は各導線が夫等の總てに垂直な平面を切る點とする。然らば A に流るゝ電流に基づく磁力管が C、D の間を貫く数は C、D なる回路の單位長ごとに

$$N_1 = \int_{r_1}^{r_1'} \frac{2i}{r} \cdot dr = 2i \log \frac{r_1'}{r_1}$$

である。何となれば直線電流の磁力管は電流を中心とせる共心圓をなすから A を中心として C 及び D を過ぎる二個の圓を考へれば、此の間を通る磁力管のみが C、D の間を貫く。然して A より r なる距離に於ける磁場の強さは(15a)で與へられる。故に N_1 の値は上式の如くなる。



第 27 圖

同様にしてBの電流に基づく磁力管がC,Dの間を貫く数は、C,Dなる回路の単位長ごとに

$$N_2 = 2i \log \frac{r_2'}{r_2}$$

である。

さてA内の電流とB内の電流は方向が反対であるからC,D間を貫く磁力管の数は

$$N = N_1 - N_2 = 2i \log \frac{r_1' r_2}{r_1 r_2'} \quad (15a)$$

之は又他方から計算すれば、C及びDに方向反対なる電流が流れて居る時A,Bの間を貫く磁力管の数なる事が知られる。

Nが0となる如き位置にA,B;C,Dがあるための条件は

$$\log \frac{r_1' r_2}{r_1 r_2'} = 0$$

即ち

$$\frac{r_1'}{r_2'} = \frac{r_1}{r_2}$$

である。A,B及びC,Dの相対的位置が此の式で與へられる如き場合には第一の回路の電流に基づく磁力管が第二の回路を貫かないと共に、第二の回路の電流に基づく磁力管が第一の回路を貫かない。斯様の場合には之等二つの回路は互に共軛なりと言ふ。

さてA,Bの電流に基づく磁場に於て、CとDが同一の磁力線の上にならぬ場合には、Nは必らず0とならない。故に回路が共軛なりとは、一方の回路の導線が互に他の回路の作るある一本の磁力線の上にあるといふ意味である。

§15. 磁場の電流に及ぼす力 第17圖に於てCDなる部分の電流がO点に作る磁場は(14)式で與へられる。之れはOにある単位正磁極にCDの部分の電流が作用する力である。されば磁極は之と等しく方向反対な力をCDなる部分に及ぼす。換言すれば

$$\frac{id\mathbf{s} \sin \theta}{r^2}$$

なる力をCDとOCの何れにも垂直で圖のdHと反対方向に作用する。もしOにある磁極の強さがmならば力は

$$\frac{imds \sin \theta}{r^2}$$

である。然るに $\frac{m}{r^2}$ はdsの部分に於ける磁場の強さであるから之をHとすれば力は

$$dF = iHds \sin \theta \quad (16)$$

と表はす事が出来る。iとH及びFの関係は第28圖の如く相互に垂直の方向をとる。

注意すべきはdsなる部分に作用する力が實際(16)の如きものか否かは明らかでない事である。

此の式は(14)から導き出し、(14)はII. (12g)より出したが、(12g)は實際斯かる力が作用すると言ふのでは



第 28 圖

なく磁殻に作用する力は周縁の各部分にかゝる力が作用するものと考へて夫を積分したものに等しいと言ふのである。故に(16)の意味もある閉回路に作用する力は、各部分に斯様な力が作用すると考へ之を積分すれば得られるといふ意味に過ぎない。上にCDの造る磁場とか、CDに作用する力とか云つたのは用語の節約の爲であつて嚴密に言へば上の様な意味である。

次に磁殻に作用する力は又II.(12f)の如くに表はす事が出来る。されば閉電流に作用する力Fも

$$F = i \frac{dN}{dx} \quad (16a)$$

1) (16)式の意味をベクトルで書けば次のやうである。

$$dF = ds[\mathbf{H}]$$

となる。但 N は電流を正の方向に貫く磁力線の数である。

磁石が一様な磁場内にある時は之を移動せしめようとする力は作用しない (II. §1)。磁殻も特別な形状の磁石である。従つて又一様な磁場内にある閉電流には他の點に移動せしめようとする力は作用せず、作用する力がもしあればそれは廻轉力のみである事が知られる。

今回路の各部分が同一平面内にある如き閉電流が一様な磁場にある場合に受ける廻轉力を計算する。此の閉回路の面積を A 、磁場の強さを H とする。又閉電流の平面に正の方向に立てた法線 (即ち右ネジを電流の流るゝやうに廻した場合の進行方向を法線の正の方向とする) 磁場のなす角を φ とすれば、此の回路を正の方向に貫く磁力線の数は

$$N = AH \cos \varphi$$

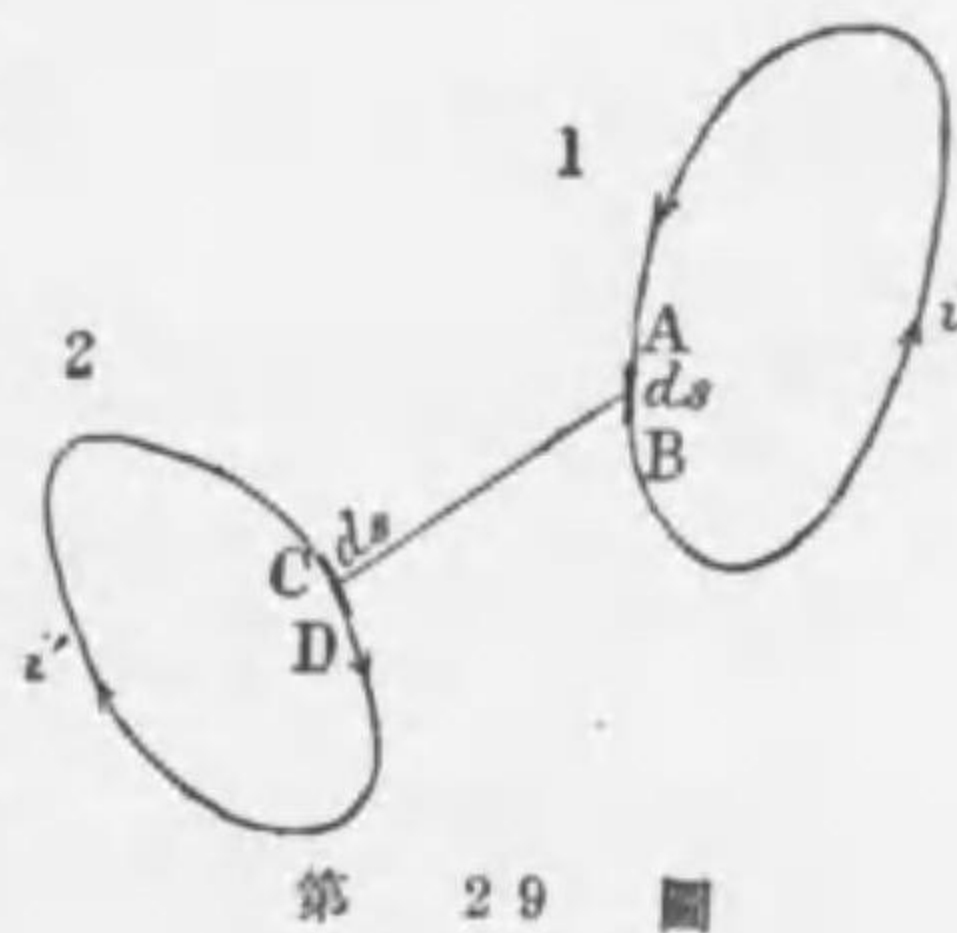
故に (16a) によつて、作用する廻轉力は

$$i \frac{dN}{d\varphi} = -iAH \sin \varphi \quad (16b)$$

即ち廻轉力は $\varphi = 0$ なる時は 0 で、 φ を減少せしむる如き方向に作用する。 $\varphi = 0$ の時は正の方向に回路を貫く磁力線の数が最大で AH になる。

§16. 電流相互の間の力 磁場が電流に及ぼす力を上の如く求めれば、電流の作る磁場は既に知られて居るから直に電流相互の間の力が計算される。

第29圖に於て 1, 2 なる二つの回路が與へられて居る時、此の間の力は、次の如く考へられる。先づ第一の回路に $AB = ds$ なる長さを取り、之と第二の回路に取つ



第 29 圖

た $CD = ds'$ との間の力を考へる。 $AC = r$ とすれば、 AB が CD の部分を作る磁場は (14) より

$$dH = i \frac{ds \sin \theta}{r^2}$$

である。但 i は第一の電流、 θ は CA と AB とのなす角である。

次に dH のために CD の部分の受くる力は (16) より

$$dF = i' \frac{ds ds' \sin \theta \sin \theta'}{r^2}$$

である。但 θ' は dH と CD との間の角である。されば第一の回路が第二の回路に及ぼす力は次の如くなる。

$$F = i' \int ds' \int ds \frac{\sin \theta \sin \theta'}{r^2} \quad (17)$$

以下電流相互の間の力を實例に就て計算して見よう。

a). 平行なる二電流。

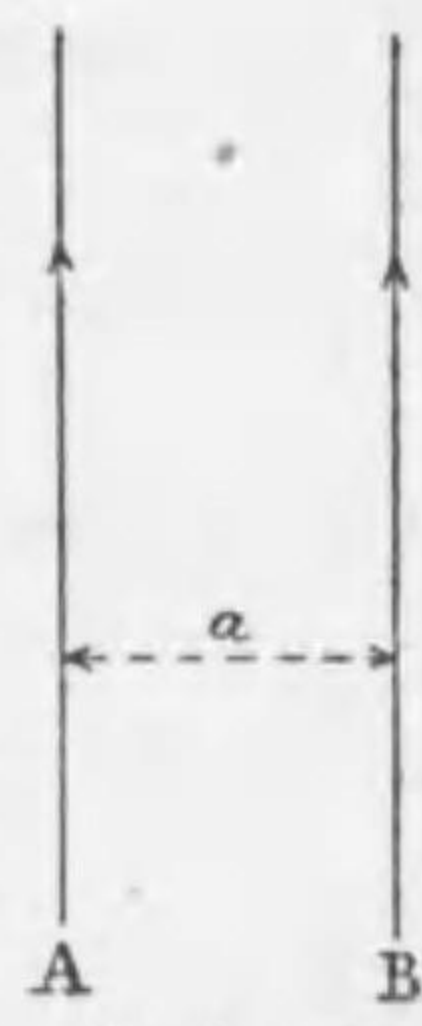
A, B 二本の無限に長い平行導體に電流 i, i' が流れて居る場合を考へる。導體間の垂直距離を a とすれば、 B 中の電流のために A なる導體の位置では (15a) より

$$H = \frac{2i'}{a}$$

で方向は、 i' の方向を矢の如く取れば紙面から上に向ふ。此の磁場のために A なる導體の單位長に作用する力は (16) によつて ($\theta = \frac{\pi}{2}$ であるから)

$$F = \frac{2ii'}{a} \quad (17a)$$

で此の力の方向は第28圖の法則によつて A なる導體を B の方に引くものである。従つて B に作用する力は之と大きさが等しく、 B より A に向ふ。即ち i と i' が同方向に向へば二導體は互に相引く。反對に i と i' の方向が反對ならば二つの導體は相



第 30 圖

斥ける。然して力の大きさは二導体の垂直距離に逆比例する。

b. 二つの共軸圓形電流。

一般の場合を取り扱ふためには橢圓積分の知識を要するから茲では二つの特別の場合を考へる。其の一つは二つの回路の半徑が殆んど等しく、且つ兩回路が非常に接近して居て單位長ごとに作用する力は無限に長い平行導體の場合と等しいと考へられる時である。此の時は第二の回路のために第一の回路のある位置では磁場の強さは

$$\frac{2i'}{r}$$

である。但 r は二つの導線の垂直距離である。従つて第一の回路の ds なる長さに作用する力は

$$\frac{2ii'}{r} ds$$

となる。さて兩回路の半徑を a, a' 、中心の距離を d とすれば $r^2 = (a-a')^2 + d^2$ となり上記の力は

$$\frac{2ii'}{\sqrt{(a-a')^2 + d^2}} ds$$

となる。之を軸に平行なる分と垂直なる分とに分ければ後者の作用は全體として打ち消す。前者は

$$\frac{2ii'}{\sqrt{(a-a')^2 + d^2}} \cdot \frac{d}{\sqrt{(a-a')^2 + d^2}} ds.$$

であつて回路の平面に直角である。従つて回路全體に作用する力は

$$F = \frac{4\pi a i i' d}{(a-a')^2 + d^2} \quad (17b)$$

となる。此の力は $d = a - a'$ の時に最大である。

兩回路の半徑が等しい時には力は

$$F = \frac{a i i'}{a} \quad (17b')$$

となる。

第二の特別の場合には第二の回路の半徑が非常に小さくて此の回路上では第一の電流に基づく磁場は一様と考へらるゝ如きものである。此の時磁場の強さは (15b) によつて與へられるから第二の回路を貫く磁力線の數 N は

$$N = \frac{2\pi a^2 i}{(a^2 + d^2)^{3/2}} \pi a'^2 = \frac{2\pi^2 i a^2 a'^2}{(a^2 + d^2)^{3/2}}$$

である。第二の回路に作用する力は (16a) によつて先づ N を d にて微分し、之に i' を乗じたものである。即ち

$$F = 6\pi^2 i i' a^2 a'^2 \frac{d}{(a^2 + d^2)^{5/2}} \quad (17c)$$

となる。此の力は $d = \frac{a}{2}$ の時に最大である。

(17b) も (17c) も i と i' が同方向の際は引力、反對の場合には斥力である。

§17. 電流の生ずる磁場のエネルギー 數多の閉回路より成る一の系體に於て第 j 番目の回路に流るゝ電流の強さを i_j とし之を正の方向に貫く單位磁氣感應管の數を N_j とすれば此の系體の全エネルギーは

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n i_j N_j \quad (18)$$

である。次に之を證明する。

磁場のエネルギーは II.(19b) によつて

$$T_0 = \frac{\mu H^2}{8\pi}$$

なる密度を以て磁場全體に分布する。今考へる磁場全部を數多の單位磁氣感應管に分つたとすれば、先づ各感應管に就て

$$\int T_0 dv$$

なる積分を求め、之を總て加へたもの

$$T = \sum \int T_0 dv$$

が磁場の全エネルギーである。

さて感應管に沿つて測つた長さを ds とし、其の切口の面積を S とすれば

$$dv = S ds$$

であるから

$$\int T_0 dv = \frac{1}{8\pi} \int \mu H^2 S ds$$

然るに單位感應管であるから μHS は到る所一定で 1 である。故に $\mu H^2 S = H$ となつて

$$\int T_0 dv = \frac{1}{8\pi} \int H ds$$

磁氣感應線は閉曲線である。故に磁氣感應管も端のない環状の小空間である。此の全體に就て上の如き積分を求むるとは環状の空間に沿つて一周するといふ意味である。然るにある閉曲線に沿つて一周すれば $\int H ds$ は此の閉曲線を貫く多くの電流があつたとして $4\pi \sum i$ に等しい。故に

$$\int T_0 dv = \frac{1}{8\pi} 4\pi \sum i = \frac{1}{2} \sum i$$

即ち單位磁氣感應管が強さ i なる電流を一回貫くごとに磁場のエネルギーが $\frac{1}{2}i$ だけ増加する。之を電流の方から見れば i なる閉電流に一本の單位磁氣感應管が交るごとに $\frac{1}{2}i$ だけ磁場のエネルギーが増す。故に N 本の單位磁氣感應管が貫けば之に対するエネルギーは $\frac{1}{2}iN$ である。考へる系體では電流が多數あるから之を加へて磁場の全エネルギーは(18)の如

きを知る。

(18)式を II.(12m) に比較すれば磁殻系のエネルギーと電流系のエネルギーとは丁度符號が反對なるかに見え、従つて此の事は電流の生ずる磁場は之と等價なる磁殻の磁場と全く同じであるといふことと矛盾する如く考へられる。されど II.(12m) は相互ポテンシャルエネルギーで之に各磁殻が單獨の場合に有するエネルギーを加へて初めて全エネルギーを得るものであつて(18)は電流系の全エネルギーである。且つ II.(12m) に於ける N_j は他の磁殻の有する磁氣感應管が j 番目の磁殻を貫く数であつて(18)の N_j は j 番目の閉電流を貫く磁氣感應管の總數であつて記號は同じでも意味は全く異なるものである。従つて其の間に何等の矛盾もない。

§ 18. 自己感應係數, 相互感應係數 多くの閉回路より成る一の系體に於て、第 j 番目の回路にのみ單位電流を流し他の電流を 0 とした場合に、第 k 番目の回路を貫く單位磁氣感應管の数を L_{kj} とすれば、各回路に夫々 $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$ なる電流が流れて居る場合に k 番目の回路を貫く磁氣感應管は

$$N_k = i_1 L_{k1} + i_2 L_{k2} + i_3 L_{k3} + \dots + i_n L_{kn}$$

$$= \sum_{j=1}^n i_j L_{kj}$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (19)$$

となる。此の考へ方は第一編 § 15 に於けると同様である。

さて之等の係數は次に配列する如く n^2 個ある。

$$\left. \begin{array}{cccccccc} L_{11} & L_{12} & L_{13} & \dots & \dots & \dots & \dots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & \dots & \dots & \dots & \dots & L_{2n} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & \dots & \dots & \dots & \dots & L_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{n1} & L_{n2} & L_{n3} & \dots & \dots & \dots & \dots & L_{nn} \end{array} \right\} \quad (19a)$$

此の中脚字を互に入れ換へたものは相等しい。即ち

$$L_{jk} = L_{kj} \quad (19b)$$

である。之を證明するために第1番目と2番目の回路に夫々單位電流を流し他の電流を0としたと考へて之を等價磁殻で置き換へればII. §7.(12i)によつて $N_1 = N_2$ である。然るに此の N は第二の磁殻のために第一の磁殻を通る磁力線の數である。即ち $N_1 = L_{21}$ である。同様に $N_2 = L_{12}$ であるから(19b)は一般に證明出来る。

L_{jj} の如く二つの脚字の同じものはある回路に單位電流が流れたために其の回路を貫く單位磁氣感應管の數である。之を自己感應係數といふ。又 L_{jk} の如きは k 番目(又は j 番目)の回路に流るゝ單位電流のために j 番目(又は k 番目)の回路を貫く單位磁氣感應管の數である。之を第 j 番目と第 k 番目の回路の間の相互感應係數といふ。

さて(18)の中の N の代りに(19)の式を用ひれば

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} i_1^2 L_{11} + \frac{1}{2} i_1 i_2 L_{12} + \frac{1}{2} i_1 i_3 L_{13} + \dots + \frac{1}{2} i_1 i_n L_{1n} \\ &+ \frac{1}{2} i_2 i_1 L_{21} + \frac{1}{2} i_2^2 L_{22} + \frac{1}{2} i_2 i_3 L_{23} + \dots + \frac{1}{2} i_2 i_n L_{2n} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{1}{2} i_n i_1 L_{n1} + \frac{1}{2} i_n i_2 L_{n2} + \frac{1}{2} i_n i_3 L_{n3} + \dots + \frac{1}{2} i_n^2 L_{nn} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n i_j i_k L_{jk} \quad (19c) \end{aligned}$$

となる。今之を ij で微分すれば

$$\frac{\partial T}{\partial i_j} = \frac{1}{2} i_1 L_{1j} + \frac{1}{2} i_2 L_{2j} + \frac{1}{2} i_3 L_{3j} + \dots + \frac{1}{2} i_n L_{nj}$$

1) 之を自己又は相互感應係數といふは、何れも電磁氣感應の大小を示す尺度となるからである。§21-§23

$$+ \frac{1}{2} i_1 L_{j1} + \frac{1}{2} i_2 L_{j2} + \frac{1}{2} i_3 L_{j3} + \dots + \frac{1}{2} i_n L_{jn}$$

(19b)によつて變形すれば

$$\frac{\partial T}{\partial i_j} = i_1 L_{j1} + i_2 L_{j2} + i_3 L_{j3} + \dots + i_n L_{jn} \quad (19d)$$

となる。

此の右邊は(19)によつて N_j に外ならない。又(19d)を更に i_k にて微分すれば

$$\frac{\partial^2 T}{\partial i_j \partial i_k} = L_{jk}$$

となり、又もし ij にて微分すれば

$$\frac{\partial^2 T}{\partial i_j^2} = L_{jj}$$

となる。即ち次の關係を得る。

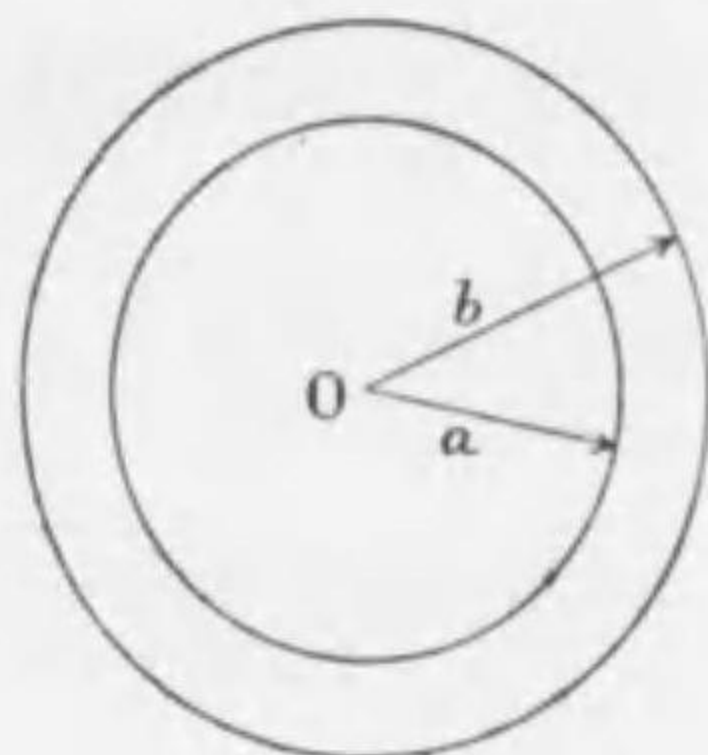
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial i_j} &= N_j \\ \frac{\partial^2 T}{\partial i_j \partial i_k} &= L_{jk} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial i_j^2} &= L_{jj} \end{aligned} \right\} \quad (19e)$$

かく磁氣エネルギーを電流で微分した形で自己及び相互感應係數を定義する事が出来る。

此の定義は此の節の初めで行つた如く回路を貫く磁氣感應管の數によつた定義よりも一般的である。何となればある回路を貫く感應管の數が幾許かといふ事は回路が極めて細い場合の他は明瞭な意味を持たない。然るに(19e)の定義によれば導線の太さが充分に大きくても常に一定の意味を有するからである。次に實例に就て此の事を論ずる。

§19. 自己及び相互感應係數の計算 a. 第31圖の如く半徑 a なる無限に長い圓柱狀導體に電流 i が流れ、之と反對

方向に半徑が b なる共軸の中空圓筒(厚さは 0 とする。従つて此の物質の固有抵抗は 0 なるを要する)に同じく i なる電流が流れて居る場合の磁場のエネルギー、自己感應係数を計算する。内柱の導磁率を μ とし其の電流は切口の各點に均一に分布して居ると假定する。



第 31 圖

0 より r なる距離にある點の磁場は $b > r \geq a$ ならば

$$\frac{2i}{r}$$

である。

次に圓柱内に半徑 $r (r < a)$ なる筒を考へれば其の中に流れる電流は

$$i \frac{\pi r^2}{\pi a^2} = i \frac{r^2}{a^2}$$

である。故に 0 から r なる距離にある點での磁場の強さは(磁場の強さは其の點の導磁率には無關係である。§13 参照)

$$\frac{2ir}{a^2}$$

$r > b$ なる點では磁場の強さは 0 である。もし 0 でなければ磁力線は 0 を中心とする圓をなして居る。故に之に沿つて單位正磁極を運べば其の仕事は $2\pi rH$ である。之は此の道を貫く電流に比例する筈であるが、中には等しい電流が反對方向に流れて居る。故に外筒の外では $H=0$ でなければならぬ。

さて單位長ごとの磁場のエネルギーを求めて見る。内柱と外筒の間にあるエネルギーは ($\mu=1$ であるから)

$$\frac{1}{8\pi} \int_a^b \left(\frac{2i}{r} \right)^2 2\pi r dr = i^2 \log \frac{b}{a}$$

となり、内柱の内部では

$$\frac{1}{8\pi} \int_0^a \mu \left(\frac{2ir}{a^2} \right)^2 2\pi r dr = \frac{i^2}{4} \mu$$

となる。故に單位長ごとのエネルギーは

$$T = i^2 \left(\log \frac{b}{a} + \frac{\mu}{4} \right)$$

となる。之を i につきて二度微分すれば自己感應係数 L が得られる。

$$L = 2 \left(\log \frac{b}{a} + \frac{\mu}{4} \right) \quad (20a)$$

此の問題を回路を貫く磁氣感應線の數から論ずるには $b \geq a$ なる場合に近似的に正しいのみで此の他は不可能である。

もし電流が内柱の断面に均等に分布して居らなければエネルギー T は異なり従つて自己感應係数も異なる。上の計算は回路に於て發生するジュール熱が最小となる如き電流分布 (§5) に對するものであつて、自己感應係数が最小となる如き電流分布を考へる事も出来るのである。例へば内柱の電流全部が表面に密集して居る如き場合が夫であつて此の時には、内柱の内部では磁場は 0、内柱と外筒との磁場は前と同じであるから

$$T = i^2 \log \frac{b}{a}$$

$$L = 2 \log \frac{b}{a} \quad (20b)$$

となる。此の二つの場合即ちジュール熱を最小ならしむるも

1) 常用對數を用ふれば次の如くなる。

$$L = 4.605 \log_{10} \frac{b}{a} + \frac{\mu}{2}$$

2) 自己感應係数を L 、相互感應係数を M にて表はす事もある。回路が二つだけの場合には寧ろ此の方が便利である。

のと自己感應係数が最小となるものとは、實際に起り得る分布の兩極端をするものである。

b. ソレノイドの自己感應係數 無限に長いソレノイドに單位電流を通ずる時は其の内部には(15d)によつて $4\pi n$ なる強さの一様なる磁場を生ずる。磁場の強さは磁性體の有無には無關係である(§15)から磁氣感應の強さ即ち感應管の密度は $4\pi n\mu$ である。今ソレノイドの斷面積を A とすれば内部の磁氣感應管の數は $4\pi n\mu A$ である。さてソレノイドの單位長には n 捲の導線があり、各一捲につき自己感應係數は $4\pi n\mu A$ であるから、單位長の自己感應係數は $4\pi n^2\mu A$ となる。従つて l なる長さについては

$$L = 4\pi n^2\mu Al \quad (20c)$$

である。 Al はソレノイドの體積である。即ち無限に長いソレノイドの自己感應係數は考へる部分の體積に比例する。

磁性體がソレノイドの内部に充實せず切口の面積 B なる部分だけが磁性體で満たされて居る時は

$$L = 4\pi n^2(\mu B + A - B) \quad (20c')$$

となる。

有限な長さのソレノイドに於ては内部の磁場は(15d)の如くにはならないが太さに比して長さが充分大ならば略々此の式が適用されるから、従つて其の自己感應係數も近似的に(20c)(20c')によつて計算される。

c. 無限に長い二本の平行導線より成る回路。この自己感應係數は次の如くにして計算される。第26圖aに於て、導線A及びBを含む平面内に於てA, Bの中間に點Pを取り、二つの導線からの垂直距離を r_1, r_2 とすれば

$$r_2 = a - r_1$$

であるから其の點に於ける磁場の強さは

$$H = 2ia \frac{1}{r_1(a-r_1)} = 2i \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{a-r_1} \right)$$

である。故に回路の單位長ごとにA, Bの間を通る磁氣感應管の數は

$$N' = 2i \int_{\rho}^{a-\rho} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{a-r_1} \right) dr_1$$

となる。但 ρ は各導線の半徑、 a は中心間の距離である。

さて $a-r_1 = z$ と置けば $dr_1 = -dz$ なる故

$$\int_{\rho}^{a-\rho} \frac{dr}{a-r_1} = - \int_{a-\rho}^{\rho} \frac{dz}{z} = \int_{\rho}^{a-\rho} \frac{dz}{z}$$

である。従つて N' は

$$N' = 4i \int_{\rho}^{a-\rho} \frac{dz}{z} = 4i \log \frac{a-\rho}{\rho}$$

となる。故に a に比較して ρ が充分小で、導線の内部にある磁氣感應管の數は N' に比して省略し得る時は、自己感應係數は次の如くなる。

$$L = 4i \log \frac{a-\rho}{\rho} \quad (20d)$$

若し A なる導線内部の磁氣感應管は A 自身の電流にのみ基づくものと考へて支障ない程 a が μ に比して大なる時は a と同様にして一本の導線の内部にある磁氣感應管に對する自己感應係數は $\frac{\mu}{2}$ であるから

$$L = 4i \log \frac{a-\rho}{\rho} + \mu \quad (20d')$$

となる。 μ は導線の導磁率である。

d. 半徑 a 及び b なる大小二つの圓形コイルが、その面が互に平行で中心を連ねる直線が之に垂直なる場合の相互感應係

1) (20d)(20d')何れも自然對數を用ひて居る點に注意すべきである。若し常用對數を用ふれば \log の係數は 2.303 となる。

数を計算する。大円の磁場は其の軸上の任意の點で(15b)で與へられるから、小円の大きさの範圍では一樣な磁場と考へられると假定する。されば、小圓を貫く磁氣感應管の数は

$$N = \frac{2\pi a^2 ni}{(a^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \pi b^2 n'$$

となる。但 i は大なるコイル内の電流、 n, n' は大及び小コイルの回数である。之より相互感應係数の値として次式を得る。

$$M = \frac{2\pi^2 a^2 b^2 nn'}{(a^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (20e)$$

圓形コイルの磁力線は軸を含む平面内にある。故に大なるコイルの軸を含む平面内に小なるコイルがある時は相互感應係数は0である。即ち二つのコイルは互に共軛である。

e. 二つのソレノイドの間の相互感應係數。無限に長いソレノイドの外部では磁場は0であるから第二のソレノイドが外部にあつても其の間の相互感應係数は0である。従つて此の時第二のソレノイドに電流を通じても第一のソレノイドを貫く磁氣感應管の数は0となる。

無限に長いソレノイドの内部の磁場は $4\pi ni$ であるから其の内部に第二のソレノイドを軸が平行になる如く入れれば、第二のソレノイドを貫く磁氣感應管の数は單位長につき

$$4\pi ni \cdot n' B$$

である。但 B は第二のソレノイドの切口の面積、 n' は其の單位長の捲數である。之より l を第二のソレノイドの長さとするれば、相互感應係數 M は

$$M = 4\pi n n' B l \quad (20f)$$

となる。

第一のソレノイドが無限に長くない場合にも勿論(20f)は近似的に正しい。第一が第二に比して充分に長ければ勿論のこ

と、二倍又は夫以下でも相當に正しからう事は、有限の長さのソレノイドの内部の磁場が可成一様なることを示す第24圖からも略々想像される事である。

有限長のソレノイドの外部の磁場は0ではないが圖より見らるゝ如く極めて弱い。従つて二つの有限長のソレノイドを取つて之等を互に外部に置いた場合に其の間の相互感應係数は極めて小なるべき事が推察せられる。

f. 平行なる二導線より成る二つの回路が互に平行なる時その相互感應係数を求める。之は即ち第27圖の場合であつて相互感應係數 M は(15h)から

$$M = 2 \log \frac{r_2 r_1'}{r_1 r_2'} \quad (20g)$$

となる。

§20. 電流計 ある閉回路が附近のある點0に造る磁場の強さは(14)式によつて計算する事が出来る。之は電流の小部分を取つて夫が0點に作用すると考へられる大きさを表はすものであつて、其の大きさは常に i に比例する。されば回路の形状と、之に對する0點の相對的位置が定まれば磁場の方向は一定でその強さは常に i に比例する。故に適當な手段を用ひて磁場の強さを測定すれば之より逆に電流の強さを知る事が出来る。此の目的のために特に造られたものを電流計といふ。次に電流計の通常の型に就て原理を説明しよう。

a. 正切電流計 導線を以て圓形のコイルを作り、之に i なる電流を通すれば中心に作る磁場は小範圍に涉つて一樣と考へる事が出来る。然して其の強さ(15b)によつて

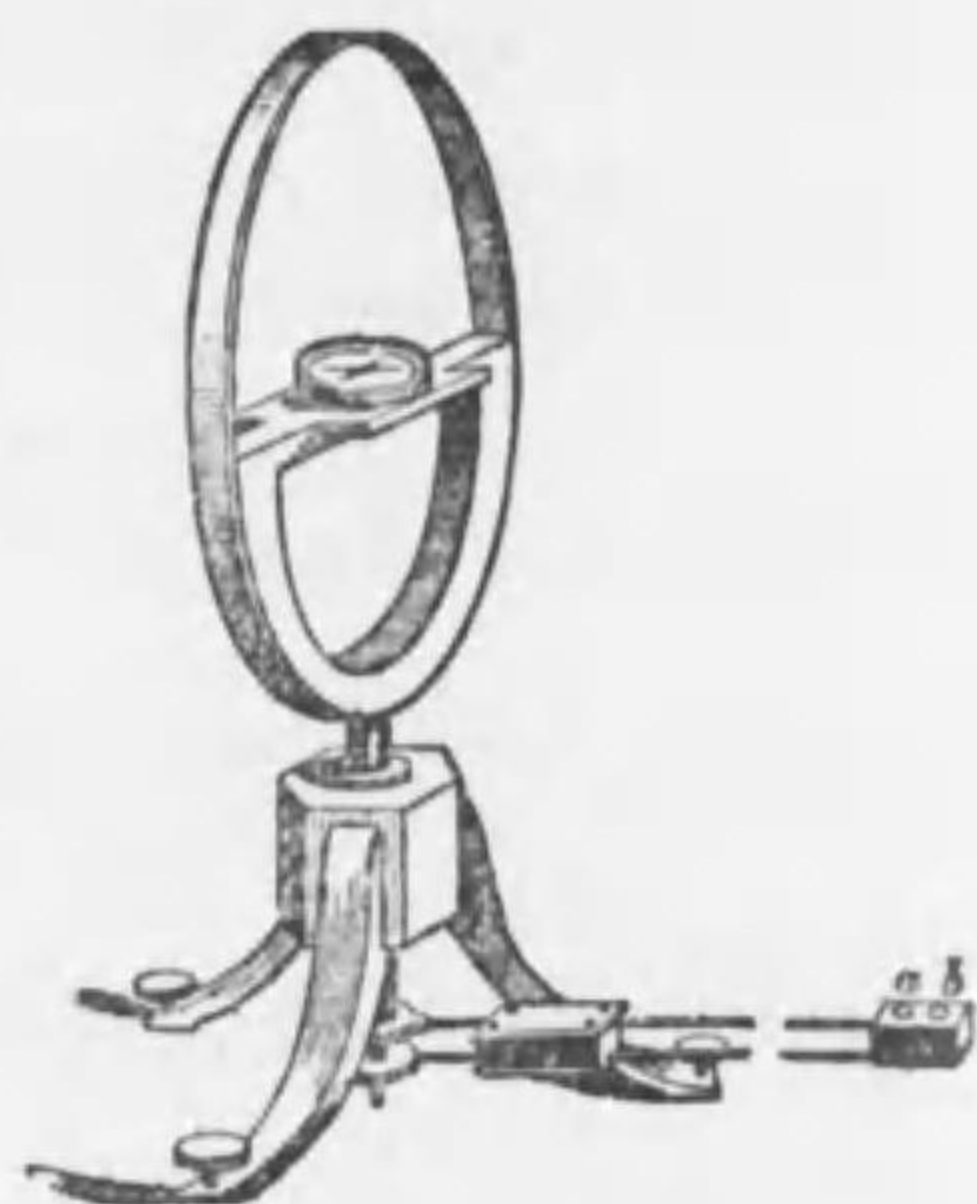
$$H = \frac{2\pi n}{a} i \quad (21a)$$

である。但 a はコイルの半径、 n は其の回数である。

此の磁場の方向はコイルの面に直角であるから、今コイルの面を磁氣子午面と一致せしむれば地球磁場とコイルの磁場と

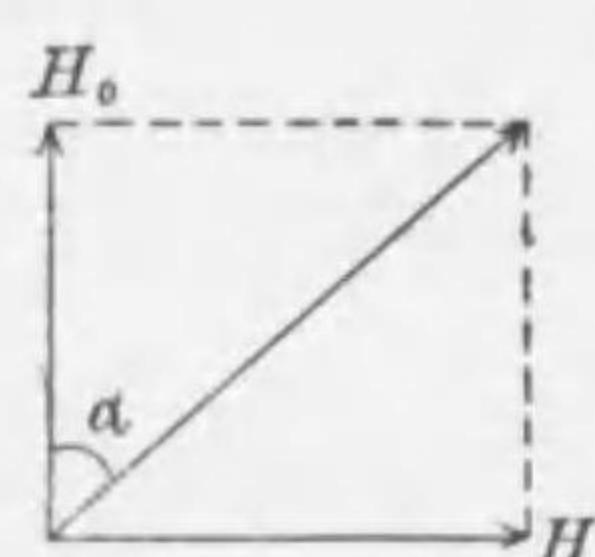
は互に垂直になる。今コイルの中心に鉛直線の周に自由に廻轉出来る様にした小さい磁石を置けば、磁石は二つの磁場の合力の方向を指すは明らかである。此の合力の方向を知れば H の値を知る事が出来る。

正切電流計の構造は第32圖 a に示す如く、磁石の指す方向は周囲の圓板の目盛りによつて容易に読み取れるやうにして



第 32 圖 a

てある。今電流を通した場合に二つの磁場の合力は磁氣子午



面と α なる角度をなしたとすれば第32圖 b によつて

$$\tan \alpha = \frac{H}{H_0}$$

となる。但し H_0 は地球磁場の水平分を表

第 32 圖 b はす。(21a) の H の値を此の式に入れれば

$$i = \frac{aH_0}{2\pi n} \tan \alpha$$

となる。さて H_0 は第二編に述べた如き小さい變化を除けば一定のものである。又 a, n 等は電流計によつて一定して居る。従つて上式は

$$i = K \tan \alpha \quad K = \frac{aH_0}{2\pi n} \quad (21b)$$

と書き換へる事が出来る。

K を定むるには a, n, H_0 より計算する事も出来るが、實際上は一定の電流を流して其の時の角度 α を測定し、上式から逆に算出する方が便利である。

かくして K を知れば、 α を測定して其の正切を計算して容易

に電流を知る事が出来る。故にかゝる電流計を正切電流計といひ、 K を正切電流計の常數といふ。

K が小になれば一定の i に對する α は大きくなる。即ち電流計の感度は大きくなる。 K は H_0 に比例するから、永久磁石を用ひて地球磁場を一部打ち消して H_0 を小にしても感度を増加する事が出来る。

正切電流計の缺點は感度が一樣でない事である。何となれば上の(21b)式から

$$\frac{di}{d\alpha} = \frac{K}{\cos^2 \alpha} = K \left[1 + \left(\frac{i}{K} \right)^2 \right] = \frac{i^2 + K^2}{K}$$

$$\therefore \frac{d\alpha}{di} = \frac{K}{i^2 + K^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{K}$$

を得る。故に i を一定量だけ増加しても之に伴ふ α の増加は i が大きくなると共に速に減少する。即ち感度が減少する。此の缺點を除いたものが次に述べる正弦電流計である。

b. 正弦電流計。構造は正切電流計と大差がなく、只コイルを鉛直軸の周りに廻す事が出来るやうにして其の廻轉角を測るべき圓盤を備へて居るだけの差がある。先づコイルを磁氣子午面内に置き之に電流を通すれば磁計が振れる。次にコイルを動かして磁計がコイルの面内にある如くにし、此の時コイルが初めの位置より廻轉した角度を測定して之を α と置けばコイルの磁場はコイル面に垂直であるのに之と地球磁場との合力はコイルの面の一致して居るから兩者の間には

$$H = H_0 \sin \alpha$$

なる關係がある。左邊の H の代りに(21a)を入れれば

$$i = K \sin \alpha \quad K = \frac{aH_0}{2\pi n} \quad (21c)$$

となる。即ち正弦電流計の常數は正切電流計の常數に等しい。

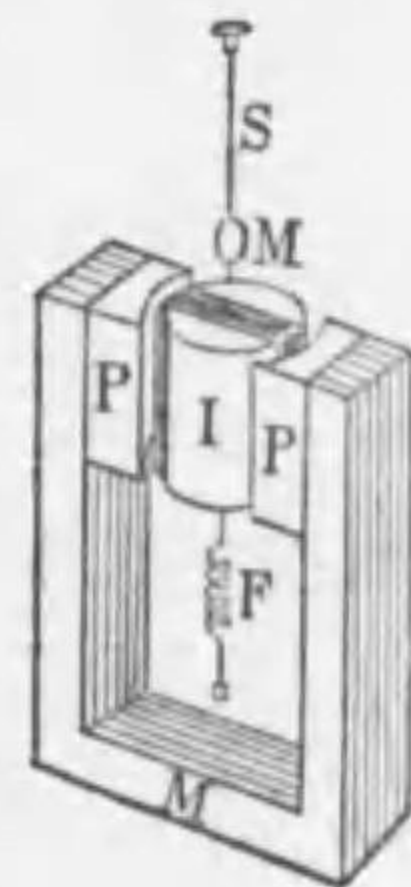
(21c) より

$$\frac{d\alpha}{di} = \frac{K}{K^2 - i^2} = \frac{1}{K \cos^2 \alpha}$$

故に $i=0$ の時の感度は正切電流計と同じく $\frac{1}{K}$ であるが、 i が増すと共に正切電流計にては感度が減じ、正弦電流計にては逆に増加する。

正切電流計及び正弦電流計は何れも比較的大なる電流を測るに適する。次に極めて小なる電流を測定するに適當なものを説明しよう。

c. 可動コイル型ガルバノメーター 之は又デプレ-ダルソンバル (Deprez-D'Arsonval) 型又は單にダルソンバル型とも稱せられ、その主要部は第33圖の如き構造を有する。圖中 P, P は永久磁石に取り付けた軟鐵の極であつて何れも一端は半圓形になつて居り其の間に圓柱形の軟鐵片 I が入つて居る。磁氣感應管は P 及び I の面に直角に走つて居り磁場の強さは P と I の間隙では一定である。



第 33 圖

P, I の間隙には、極めて細い燐銅線 S で吊られたコイルが鉛直線を軸として自由に廻轉出来る様にしてある。又コイルの下部は F なる彈條によつて下に接続されてゐる。コイルの廻轉に反對するは只 S 及び F の及ぼす力だけである。

コイルに電流が流れれば §15 に示した理由によつてコイルが廻轉し、電流と磁場との相互作用による廻轉力と、S 及び F の抗力とが等しき所でコイルは靜止する。此の廻轉角 α は鏡 M と尺度及び望遠鏡を以て精密に測定する事が出来る。

この構造に於てはコイルを流れる電流と磁場の方向は直角をなす。従つて今間隙の長さ(即ち P の高さ)を l 、間隙に於ける磁場の強さを H 、コイルの回数を n 、横幅を b 、流電を i とすれば、

コイルに作用する廻轉力は(16)より直に

$$Fb = iHnb$$

である。廻轉せる角を α とすれば、S 及び F がコイルに及ぼす廻轉力は α に比例するから之を $K\alpha$ と置いて

$$iHnb = K\alpha$$

なる位置で靜止する。故に

$$i = \frac{K}{Hnb} \alpha$$

を得る。右邊の α の係数は常數であるから之を k で表はせば

$$i = k\alpha \quad k = \frac{K}{Hnb} \quad (21d)$$



第 34 圖

となる。故に一度知られた電流を通して其の時の α を測定し、 k を計算して置けば其の後は α から直に i を知る事が出来る。

此の型の電流計は前述の通り極めて小さい電流を測るに適する。§3 に述べたホキートストーン電橋によつて抵抗を測る時に用ひるのは之である。かく極めて小電流に適する電流計を特にガルバノメーター (Galvanometer) といふ。

斯様にコイルが動く如き電流計を可動コイル型といひ、之に對して正切及び正弦電流計の如く磁石の動くものを可動磁石型といふ。第34圖は可動コイル型ガルバノメーターの外観を示す。

d. パリスチツク-ガルバノメーター 極めて短時間の電流の通過によつて電流計の可動部分が動かされる状態を考へる。此の時間内に可動部分が著るしく動かなければある瞬間に受くる廻轉力は如何なる型の電流計でも電流に比例する。故に之を

C

と置く事が出来る。Cは常数である。

一般に廻轉角 α が大きくない場合には運動の方程式は

$$K \frac{d^2\alpha}{dt^2} + p \frac{d\alpha}{dt} + q\alpha = M. \quad (21e)$$

と書く事が出来る。但Kは可動部分の慣性の能率、 $p \frac{d\alpha}{dt}$ は摩擦力、 $q\alpha$ は可動部分を静止の位置に戻さうとする力、Mは外部から可動部分に作用する廻轉力である。

極めて短時間電流が通過する間は可動部分は静止の位置にあり、且つ速度も0としてよいから

$$\alpha = 0 \quad \frac{d\alpha}{dt} = 0$$

又此の時作用する廻轉力は上述の如く

$$M = Ci$$

であるから(21e)より

$$K \frac{d^2\alpha}{dt^2} = Ci$$

を得る。電流は0から τ なる時刻まで流れたとし、之を其の時間に涉つて積分すれば

$$K \int_0^\tau \frac{d^2\alpha}{dt^2} dt = C \int_0^\tau i dt \quad (21e')$$

となる。さて右邊の積分は通過した電氣量である。之を e と置けば

$$\int_0^\tau i dt = e$$

である。又 $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ は可動部分が受けた角加速度であるから左邊の積分は $t=\tau$ なる時に有する速度である。之を ω_0 とすれば

$$\int_0^\tau \frac{d^2\alpha}{dt^2} dt = \omega_0 \quad (21e'')$$

となり、(21e')より

$$K\omega_0 = e \quad (21f)$$

を得る。

可動部分が何等の廻轉力をも受けずして自由に振動する状態は(21e)なる微分方程式に於て $M=0$ と置いた時の解によつて表はされ

$$\alpha = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \quad (21g)$$

である。但 λ_1, λ_2 は

$$K\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

なる二次方程式の解であるから

$$\lambda_1 = -\frac{p}{2K} + \sqrt{\frac{p^2}{4K^2} - \frac{q}{K}} \quad \lambda_2 = -\frac{p}{2K} - \sqrt{\frac{p^2}{4K^2} - \frac{q}{K}}$$

である。又A, Bは積分の常数である。

(21g)を微分して

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = A\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + B\lambda_2 e^{\lambda_2 t} \quad (21g')$$

電流が通過し終つた時を $t=0$ と定めれば $t=0$ の時は $\alpha=0$ 、 $\omega=\omega_0$ であるから之を(21g)(21g')に入れて

$$A+B=0$$

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B = \omega_0$$

なる関係を得る。之よりAとBを定めて(21g)に入れれば

$$\alpha = \frac{e}{rK} e^{-\frac{p}{2}t} \sin st \quad (21h)$$

となる。但摩擦は小さいとして、 $p^2 < 4qK$ で $\sqrt{\frac{p^2}{4K^2} - \frac{q}{K}}$ は虚数となる場合を考へ、

$$\sqrt{\frac{q}{K} - \frac{p^2}{4K^2}} = s$$

と置いた。

(21h)によれば振動は漸次衰滅する。今

$$t = \frac{\pi}{2s}$$

なる時を取れば此の時の振幅が最大で速度は0である。之を α_0 とすれば

$$\alpha_0 = \frac{e}{sK} \cdot \varepsilon^{-\frac{\pi p}{4s}} \quad (21i)$$

かく、振幅最大で速度が0であるから測定には最も便宜であるから通常 α_0 を測つて e を決定する。一度知られた電氣量を通して

$$sK \varepsilon^{-\frac{\pi p}{4s}} = k$$

を定めれば其の後は

$$e = k\alpha_0$$

より直に任意の電氣量を知る事が出来る。

かく短時間衝撃を加へても動かないためには振動の週期が長ければよい。斯様に振動の週期を長くして特に此の種の用途に便利にしたものをバリスチック・ガルバノメーター(Ballistic-galvanometer)といふ。

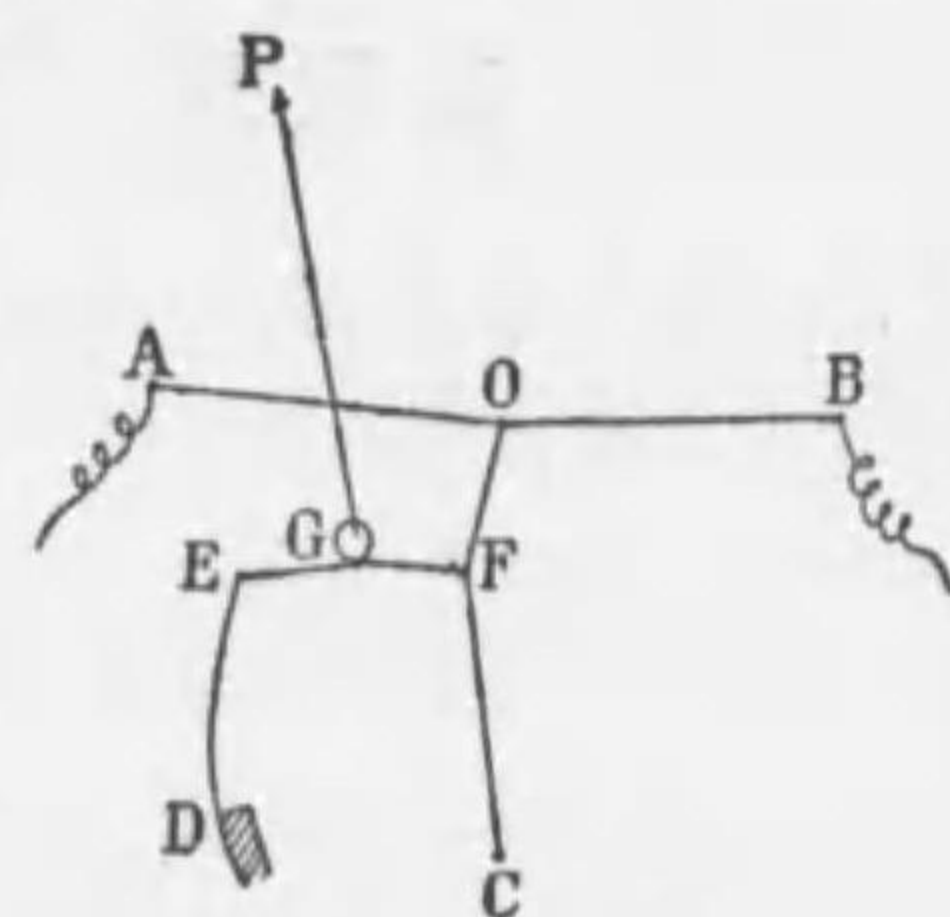
電氣量の測定が可能になれば、コンデンサーの電氣容量も直に測定出来る。即ち知られた電圧 V でコンデンサーを充電し又は放電する時に、バリスチック・ガルバノメーターをコンデンサーに直列に接続して置いて、此の時の電氣量 e を測定すれば容量 C はI. (13c)から計算される。

以上の電流計は何れも電流と磁場の作用を利用したものであるが此の他の原理に従ふものも少くない。其の一種を次に述べる。

e. 熱線電流計 之はジュール熱を利用したものであつて

其の原理は次のやうである。第35圖に於てA, Bの間に細い導

線を張つて之に電流を通すればジュール熱のために温度が上り其のために膨脹して長さが増加する。さてABの中央部Oと固定された點Cとの間に細い線を張り、OCの間の一點Fと、別に取り付けた彈條DEの端Eとの間に又細い線EFを張つて、其の途



第 35 圖

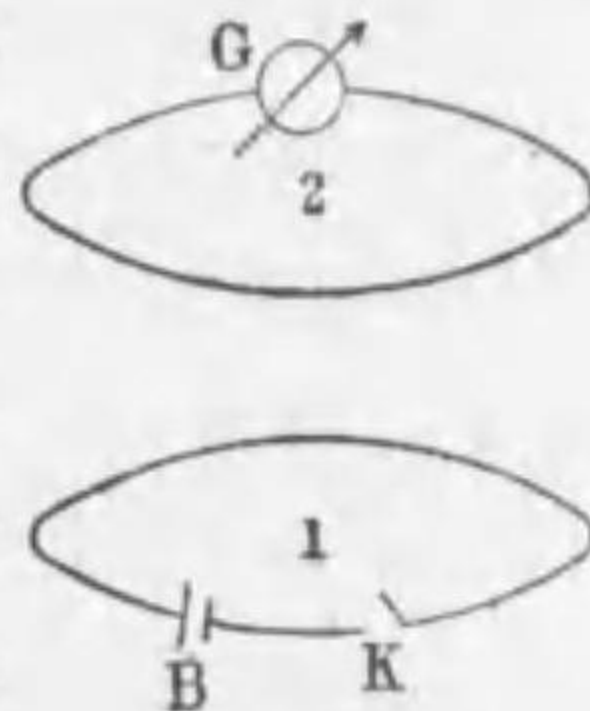
中は小さい車Gに巻き付け、車には指針が付いて居る。

彈條のためにEは常に左に引かれるから、Fも左に引かれ、Oは常に下に引かれてAB線は常に緊張して居る。今電流の爲に温められてABの長さが増せばOは幾分下り、Fは左に進み、従つてGなる小車は時計の針と同方向に廻轉する。其のために指針GPは右の方に廻轉するから、其の廻轉角によつてABを通つた電流の大きさを知る事が出来る。勿論豫じめABに已知の電流を通じた場合の指針の位置を定めて置く事が必要である。

此の電流計の特徴は次の如き點にある。之迄述べたものでは電流の方向が絶えず變化する如きもの(第三章§33.b.参照)に於ては可動部分に作用する廻轉力が電流の方向と共に反對になるから測定する事が不可能である。然るに熱線電流計に於ては電流の方向が變化するも變化せざるも等しく用ひられる。

第三章 電磁氣感應

§21. 電磁氣感應 第36圖の如く二つの回路を近づけて置いて一方には電池B及び電鍵Kを入れ、他方には電流計Gを入れたとする。今圖の如くKが開いて居る時は電流は第一の回路を流れず、又第二の回路には勿論電流が流れない。然るに電鍵Kを閉じて第一の回路に電流を流せば、其の瞬間第二の回路に電流が流れる事は挿入した電流計によつて明らかに



第36圖

見られる。此の時第一の回路には永續的の電流が流れるのに第二の回路に流れる電流が瞬間的のものなる事は電流計が長く一定の偏れを示さず、一度一方に振れた後は静止の位置を中心にして左右に振動し漸次衰減する事によつて證明せられる。即ち起電力が極めて短時間第二の回路に作用した如く思はれる。

次にKを開いて第一の回路に流れる電流を遮断すれば、其の瞬間に又第二の回路に電流が流れる。此の時電流計の指針の偏れは前の場合とは反対である。

此の實驗によれば一つの回路に電流が流れたり切れたりすれば其の瞬間に必らず附近の回路に瞬間的の電流が発生するものである。電流が流れる以上必らず起電力がなければならぬが、此の起電力は如何にして起つたのであるか次に其の原因を探求しよう。

さて電流は其の生ずる磁場に関しては一の磁殻に同等である。然して上記の實驗に於て第一の回路に電流が通らない時は第二の回路の附近に磁場がなく、第一の回路に電流が通つて

居る時は第二の回路の附近には磁場が存在する。故に初め電流のなかつた第一の回路に突然電流を流し初める事は、第二の回路の周圍に於ける磁場に関しては、あだかも第一の回路に等價な磁殻を、無限遠から突然その回路の位置に持つて來たのと同じである。第二の回路に作用する瞬間的の起電力は磁場がかく瞬間的に變化するためではないか。

若し此の考へが正しければ、第一の回路に電流を通す代りに一定の電流を流したまゝ之を遠ざけて置いて、急に元の位置に持て來ても、或は又第二の回路に突然磁石を近づけても等しく電流が発生しなければならない。實驗に依れば同じく瞬間的の電流が第二の回路に發生するのである。故に上の豫想は正當であつて、回路に電流が發生するのは、其の附近の磁場が變化するためである事が知られる。

かくある回路の附近の磁場の變化のために誘發される電流を感應電流、此の時に作用する起電力を感應起電力といひ、此の現象を電磁氣感應(Electromagnetic induction)といふ。

さて磁場の強さは磁氣感應管なる概念を用ひて明かに言ひ表はす事が出來た。されば感應電流を之と關係付けて理解するのが自然である。其のために更に第36圖の實驗を繰り返して見る。

感應電流は第一の回路に電流が流れ初める時と、之を切る時とでは方向が反対である事は既に述べた。先づ第一の回路に電流を流し初める場合の感應電流を精査すれば、其の方向は第一の回路と反対である。換言すれば第一の回路の電流が発生する磁氣感應管と反対の方向の磁氣感應管を發生する如き電流が第二の回路を流れる。又第一の回路の電流を切る時は、其の發生して居たと同方向の磁氣感應管を發生する如き電流が第二の回路に流れる。要するに、第二の回路を通過する磁氣感

應管の数の變化に抵抗する如き方向に電流が流れるのである。

斯様に考へれば上の實驗に於ける感應電流が瞬時的である理由は容易に了解せられる。即ち第一の回路の電流が一定な時は第二の回路を貫く磁氣感應管は變化しないのであるから第一の回路に電流が流れ初めた時及び止んだ瞬間だけ第二の回路に電流が流れるものは當然である。

若し上記の如く回路を貫く磁氣感應管の数の變化が感應電流の原因ならば第一の回路の電流を瞬時的に變化せずに適當の抵抗を挿入して夫を加減する如き方法によつて電流を徐々に變化すれば第二の回路に生ずる感應電流も多少繼續的であるべきである。然して實驗の結果は其の通りである。ファラデーは又磁場内で一の回路を廻轉し、感應電流の強さが廻轉速度に比例する事を證明した。

以上の如きファラデーの研究を受けて1845年に至つてノイマン(F. E. Neumann)が感應起電力の大きさを表はす式を提唱した。其の法則によれば回路を貫く磁氣感應管の數 N が變化する時ある瞬間に回路に働く起電力は其の時の N の減少の割合に等しい。但起電力の方向と磁氣感應管の方向との關係は右ネジの廻轉と進行との關係を取るものと約束する。従つて今 V を感應起電力とすれば

$$V = - \frac{dN}{dt} \quad (22)$$

である。之をノイマンの法則といふ。

今導線の長さに沿つて V の正の方向(之を今後回路の正の方向とも呼ぶ事もある)に長さ d を測り、導線内の各部分に於ける電場の強さ E と素線分 ds とのスケーラー積を求めれば V は $E ds$ を一周して積分せるものに等しい。故に上の式は

$$\int E ds = - \frac{dN}{dt}$$

と書く事が出来る。然るに N は回路を貫く磁氣感應管の總數である。今此の回路を周縁とする任意の曲面 S を定め、 S 上の一点 P の周圍に素面分 dS を取つて、 P に於ける磁氣感應の強さを B とし、 dS の正法線 (dS の法線であつて曲面 S の負の側から正の側に向ふもの。但 S の正及び負の側とは回路の廻轉方向によつて定める) n と、 B との角を θ とすれば

$$N = \int B \cos \theta dS$$

である。此の右邊は又 n の方向を有する單位長のベクトルを n とせば

$$N = \int (nB) dS$$

となり、或は又 dS なる大きさで n の方向を有するベクトルを dS とせば

$$N = \int B dS$$

となる。従つて(22)は

$$\int E ds = - \frac{d}{dt} \int B dS \quad (22a)$$

なる形を取る。¹⁾

ノイマンの法則(22)は次の如くエネルギー不滅の原理によつて證明する事が出来る。抵抗 r なる一の閉回路に V_0 なる起電力を興へて i なる電流を流して居るとすれば

$$i^2 r = i V_0$$

なるエネルギーが抵抗のために消耗せられる。此の閉回路の

1) 此の關係は回路が導線でなく、大なる導體でも其の中に任意の閉曲線 S を取れば常に成立するものである。従つて一般に次の式が成立する。

$$\text{rot } E = - \frac{\partial B}{\partial t}$$

之を電氣力學の第二基礎方程式といふ。

附近 P 點に m なる強さの磁極があれば今電流を等價磁殻と置き換へて考へれば m の有するポテンシャルエネルギーは

$$m\Omega = mi\omega$$

である。但 Ω は P 點の磁位, ω は P 點から等價磁殻を見た時の立體角に適當の符號を付けたものである(II. §6).

今回路の電流 i を一定として、磁極を ω が ω なる點から $\omega-d\omega$ なる點まで動かせばポテンシャルエネルギーは

$$-mi\delta\omega$$

だけ減少する。換言すれば磁場が之の仕事を磁極に對してなすのである。もし此の變化が dt なる時間間に起れば磁場が磁極に對して單位時間になす仕事は

$$-mi \frac{d\omega}{dt}$$

である。

此の變化の間電流は一定であるとして考へる事が出来るから、磁場のエネルギーも一定であるとしてよい。従つて上記の仕事は電流が供給しなければならない。さて電流のなす仕事の時間的割合は起電力と電流の強さの積によつて表はす事が出来るから、一定電流の下に、より多くのエネルギーを出して居る以上は、何等かの機構によつて回路中の起電力が變化したと考へなければならない。今起電力が V_0+V となつたとすればエネルギー不滅の原理によつて

$$i(V_0+V) = ir - mi \frac{d\omega}{dt}$$

然るに $iV_0 = ir$ であるから

$$V = -m \frac{d\omega}{dt}$$

でなければならない。さて $m\omega$ は磁極から出て回路を正の方向に貫く磁力線の數であるから(II. §6)

$$m\omega = N$$

となつて、此の磁極の運動と共に回路に起つた起電力は

$$V = - \frac{dN}{dt}$$

となる。即ちエネルギー不滅の原理によりノイマンの法則が證明せられた。

§22. 線状回路に於ける電磁氣感應 n 個の閉回路が何れも極めて細い導線より成るとすれば、其の中の第 k 番目を貫く磁氣感應線は(19)式によつて與へられる。されば今その回路の供給起電力を V_k とすれば

$$V_k = \frac{dN_k}{dt}$$

が此の回路の全起電力である。故にオームの法則によつて

$$i_k r_k = V_k - \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n i_j w_{kj} \right) \quad k = 1, 2, 3, \dots, n$$

或は

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d}{dt} (i_1 L_{11} + i_2 L_{12} + i_3 L_{13} + \dots + i_n L_{1n}) + r_1 i_1 &= V_1 \\
 \frac{d}{dt} (i_1 L_{21} + i_2 L_{22} + i_3 L_{23} + \dots + i_n L_{2n}) + r_2 i_2 &= V_2 \\
 \frac{d}{dt} (i_1 L_{31} + i_2 L_{32} + i_3 L_{33} + \dots + i_n L_{3n}) + r_3 i_3 &= V_3 \\
 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \\
 \frac{d}{dt} (i_1 L_{n1} + i_2 L_{n2} + i_3 L_{n3} + \dots + i_n L_{nn}) + r_n i_n &= V_n
 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

なる聯立微分方程式を得る。此の式中 L は皆已知とすれば、 V_1, V_2, \dots, V_n が與へられれば $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$ なる n 個の未知數を知る事が出来る。即ち電磁氣感應に就て互に關係する n 個の回路の理論は(23)を解く事に歸着するのである。

さて(23)式は二つの重大な假定を含んで居る。其の第一はある回路を貫く磁気感應管の数は(18)式によつて與へられるといふ事である。換言すればある瞬間にある回路を貫く磁気感應管の数は、其の同じ時刻に於ける自身及び他の回路の電流によつて決定せられるといふ事である。(18)式を導いたのは定常電流に就て行つたのであるから、之を電流が變化する今の場合に應用する事は無批判に許さるべきではない。

後に電磁氣波動論で詳しく論ずるやうに、電磁現象は常に一定の速度(光の速度 $c=2.99790 \times 10^{10}$ cm/秒) で真空中を傳播するものである。されば今の場合に(18)式を適用し得るためには各回路が電流の變化する割合に比して短かくて導線の各部分の電流がある瞬間には皆一定であると見做し得るばかりでなく、回路相互の距離も電流の變化する割合に比しては小さくて、各瞬間に(18)式が成立する如き程度に止まらなければならない。要するに回路系全體が小さい事を必要とする。

第二はオームの法則及び電場重疊の原理が今の變化しつつある電流及び起電力に適用されるといふことである。オームの法則は定常電流に於て求められたものであるから、今の場合に之を適用するは純然たる假定である。又電場重疊の原理も同様で、之は初め靜電氣に於て導き出し後に定常電流の場に成立する事を述べた(§7)。されど之を感應電流に適用する事は假定である。されど簡単な場合に求めた概念を複雑なる場合に適用し、又は簡単な場合に求めた結果を一般化してより抽象的な、従つて内容の廣いものとするは、獨り自然科學のみならず總ての學問に共通な研究方法である。故に吾人の採用せる假定も夫は既に單なる假定ではなく、結論が正しい限りそは一種の原理であるとも言ひ得るものである。

(23)式から得た結果は、あらゆる實驗上の事實を十分に説明し、

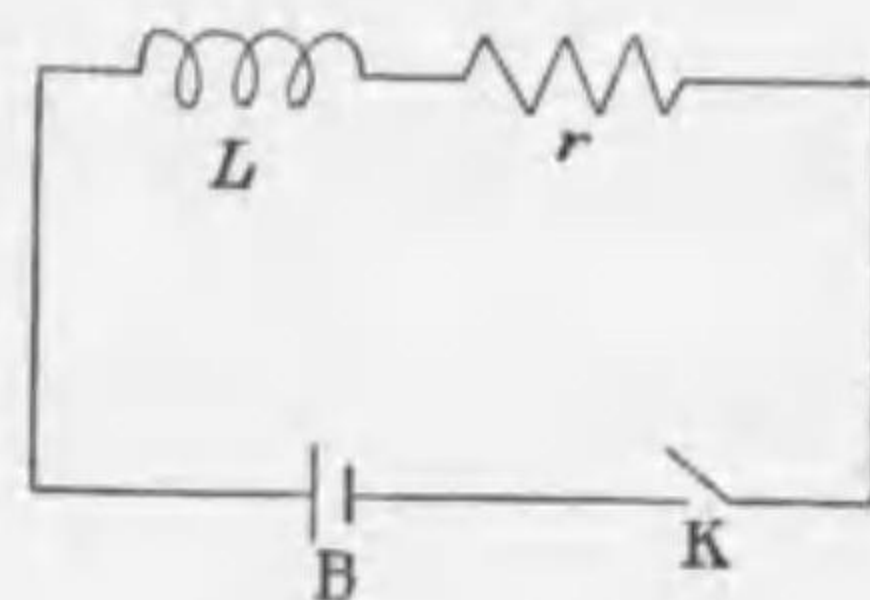
今日まで之と矛盾する例を見ない。さればオームの法則と電場重疊の原理を茲に適用する事は誤りでない事は確實である。

さて上の如く(18)式、オームの法則及び電場重疊の原理等定常電流に於て求められ又は證明された結果をこゝに適用すると云ふ事は、各瞬間に於ては回路中の電流は定常電流と見做し得るといふ事に外ならない。即ち此の意味に於ては§6に述べた準定常状態と異なる所を見ないから、(23)式を基礎として取扱はれる問題を準定常電流の電氣力學といふ。以下本章に論ずるのは準定常電流の電氣力學である。

§23. 單一線狀回路に於ける電磁氣感應 (23)式の特別な場合に就て考へて見よう。

a. 自己感應と抵抗を有する單一回路。

只一つの回路の場合には次の如くなる。



第 37 圖

只一の回路に於ては其の幾何學的形狀を變化しなければ自己誘導係數 L は變らない。今 L を一定とすれば上式は

$$L \frac{di}{dt} + ri = V \quad (23a)$$

となる。茲に r も亦常數とする。

斯く一定の自己感應係數と抵抗を有する回路に、ある瞬間に突然一定の起電力を與へたる場合の電流を此の式によつて求めて見よう。起電力を與へた瞬間を時間の原點に取れば

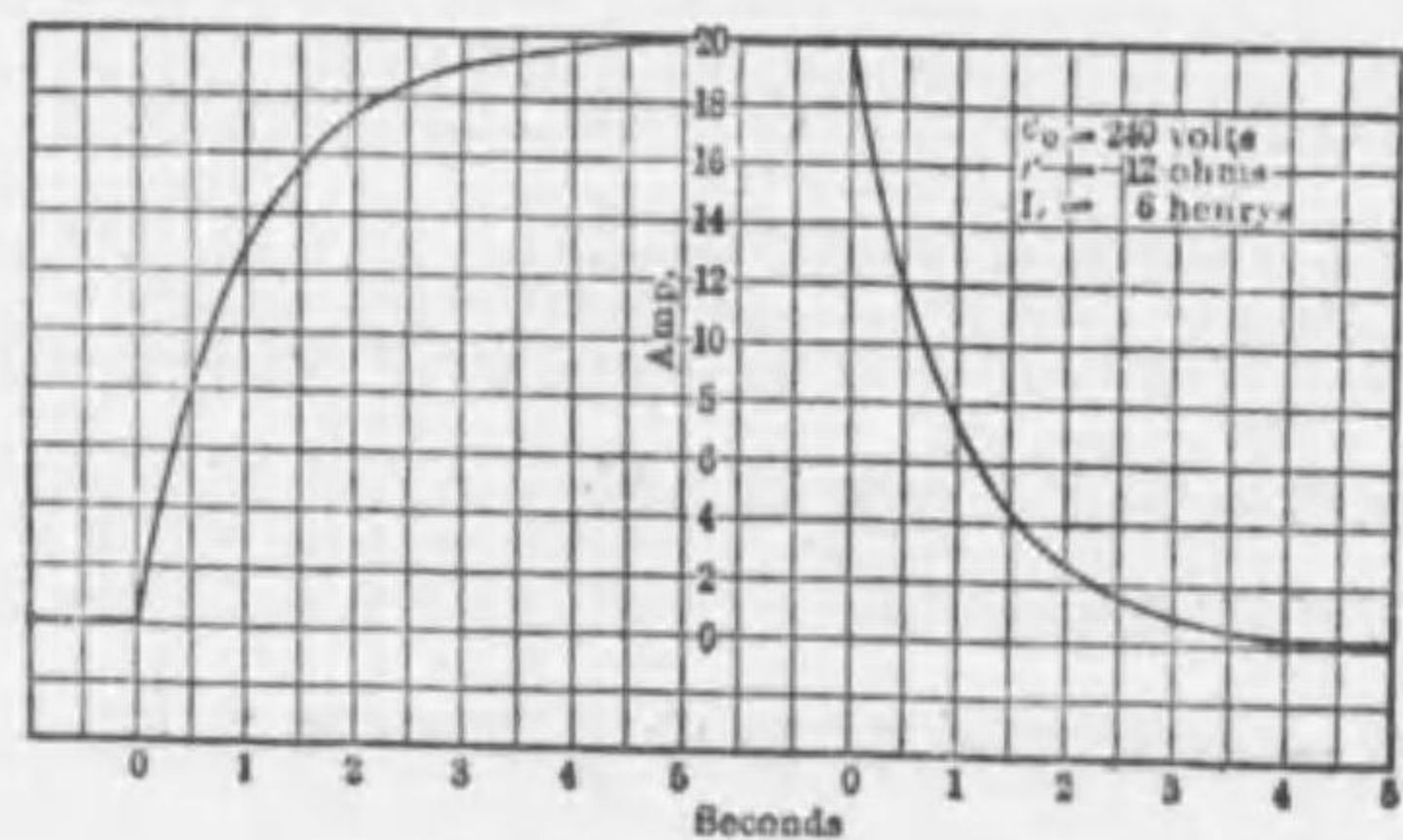
$$t \leq 0 \quad \text{ならば} \quad i = 0$$

である。(23a)を書き換へて

$$L \frac{di}{dt} = -r \left(i - \frac{V}{r} \right)$$

を得、 V は一定であるから之を更に

$$L \frac{di}{i - \frac{V}{r}} = -r dt$$



第 38 圖

とし、兩邊を積分して

$$\log\left(i - \frac{V}{r}\right) = -\frac{r}{L}t + A$$

を得る。但し A は積分常數である。之より次の式を得る。

$$i = B e^{-\frac{rt}{L}} + \frac{V}{r} \quad (23b)$$

但し $B = e^A$ である。之迄の計算は V 一定なる限り如何なる場合にも同一である。

然るに $t=0$ で $i=0$ であるから $B = -\frac{V}{r}$ となり、 i の値として

$$i = \frac{V}{r} \left(1 - e^{-\frac{rt}{L}}\right) \quad (23b')$$

を得る。即ち起電力を加へた瞬間には電流は 0 で、其の後増加して $t=\infty$ に於て初めてオームの法則から求められる値 $\frac{V}{r}$ に達する。然るにもし $L=0$ ならば (23a) は

$$ri = V$$

となつて起電力を加へると同時に電流は $\frac{V}{r}$ に達する。故に

自己感應は電流の變化を緩慢にする作用あるを知る。第 38 圖の左方はその一つの例である。

次に此の回路に初め i_0 なる電流を流して置いて突然起電力を除いた場合に於ける電流の變化を計算して見よう。

(23b) に $V=0$ を入れて

$$i = B e^{-\frac{rt}{L}}$$

となる。 $t=0$ で $i=i_0$ と置けば $B=i_0$ となり電流と時間との關係は

$$i = i_0 e^{-\frac{rt}{L}} \quad (23c)$$

で與へられる。故に起電力を除く瞬間には電流は i_0 で、其の後漸次減少して理論上では $t=\infty$ に於て初めて 0 となる。第 38 圖の右方はその例である。もし $L=0$ ならば (23a) より

$$ri = 0$$

であるから起電力を除くと同時に電流は 0 となる筈である。之から見ても自己感應の存在は電流の變化を緩慢にする事が知られる。然して其の緩慢にする程度は $\frac{L}{r}$ の大小による。

$\frac{L}{r}$ の値を此の回路の時常數 (Time constant) といふ。

かく自己感應が電流の變化を緩慢にする事は、あたかも物體の質量が一定の力の作用の下に其の速度の變化を緩慢にするのと同様である。然して如何なる回路も自己感應を完全に 0 とする事は到底不可能であるから、自己感應の存在を電流そのもの、特質の如くに考へ、電流は慣性を有するといふ言葉で此の事——即ち電流の變化は電壓の變化に應じて直に起るものではないといふ事柄を言ひ表はす事がある。

b. 交流の發生

其の各部分が同一の平面上にある如きコイルが、面積 A 、回數 n を有し、コイルの面内にある軸の周りに一様な磁場内に於て

廻轉する場合を考へて見よう。但軸は磁場に垂直なりとする。

コイルに正の方向を定め之に應じて正の垂線を n とする。ある瞬間に n と H とのなす角を φ とし、コイルが一定の角速度で廻轉する場合に、 $t=0$ で n と H の方向が一致するとすれば、

$$\varphi = \omega t$$

である。此の時回路を正の方向に貫く磁氣感應管の数は (§15 参照)

$$N = nAH \cos \varphi = nAH \cos \omega t \quad (23d)$$

である。故にコイルが廻轉する際に起る起電力はノイマンの法則によつて

$$V = - \frac{dN}{dt} = \omega nAH \sin \omega t$$

である。今 $V_0 = \omega nAH$ と置けば V は

$$V = V_0 \sin \omega t \quad (23e)$$

となる。もし又 n が H と 90° の角度をなす時を $t=0$ と取れば

$$\varphi = \omega t + \frac{\pi}{2}$$

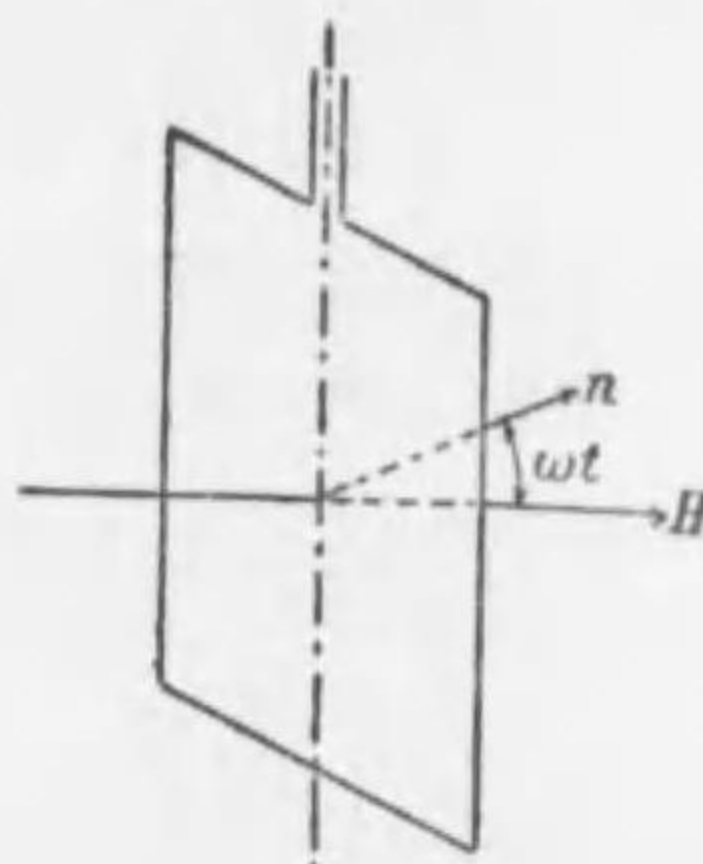
$$N = nAH \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = -nAH \sin \omega t$$

$$V = - \frac{dN}{dt} = \omega nAH \cos \omega t$$

$$\text{即ち} \quad V = V_0 \cos \omega t \quad (23f)$$

となる。

(23e) 又は (23f) の如く、起電力が時間の正弦又は餘弦函数となる時之を特に交番起電力又は交番電圧といひ之に對して時間と共に變化しない起電力を直流起電力又は直流電圧といふ。電流が時間の正弦函数となる時は之を交番電流又は交流とい



第 39 圖

ひ、時間に無關係な電流は直流と呼ばれる。眞實の意味に於ける直流は定常電流と同じであるが、多くの場合には夫程嚴密に用ひられて居らず、電池又は蓄電池の如く一定の起電力を有する電源から出るものは直流と言はれて居る。

交番電壓は時間の正弦又は餘弦函数である。然るに正弦及び餘弦は 2π を週期とする函数であるから

$$\omega \tau = 2\pi \quad \text{即ち} \quad \tau = \frac{2\pi}{\omega} \quad (23g)$$

なる時間 τ を取れば、 t が如何なる値であつても

$$\dots t-3\tau, t-2\tau, t-\tau, t, t+\tau, t+2\tau, t+3\tau, \dots$$

なる時刻に於ける電壓は皆等しい。即ち τ なる時間ごとに同一の値が歸つて来るから之を交流電壓の週期といふ。従つて一秒間には

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi}$$

だけ同一の現象が繰り返して起る。かく一秒間に同一の値が繰り返し現はれる回数 f を周波數といふ。

ω は上にはコイルの廻轉の角速度としたが、周波數 f を上の如く定義したから、コイルの廻轉とは離れた

$$2\pi f$$

なる量を交番電壓の角速度といふ事がある。

交番電壓の各瞬間に於ける値は (23e) 又は (23f) によつて與へられる。此の値を瞬間値といひ、瞬間値の二乗を一週期の間に涉つて平均したものゝ二乗根を實効値といふ。されば實効値を V_e で示せば上の定義によつて

$$V_e^2 = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} V^2 dt$$

である。但 t は如何なる値でもよい。今 (23e) を入れれば

$$V_e^2 = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} V_0^2 \sin^2 \omega t \cdot dt$$

$$= \frac{V_0^2}{\tau} \int_t^{t+\tau} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) dt$$

然るに

$$\int_t^{t+\tau} \cos 2\omega t dt = \frac{1}{2\omega} \left[\sin 2\omega t \right]_t^{t+\tau} = \frac{1}{2\omega} \{ \sin(2\omega t + 2\omega\tau) - \sin 2\omega t \}$$

(23g) によつて $2\omega\tau = 4\pi$ であるから此の積分は 0 となる。故に

$$V_e^2 = \frac{V_0^2}{2\tau} \cdot \tau = \frac{V_0^2}{2}$$

$$\therefore V_e = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \quad (23h)$$

である。(23f) を用ひても同様な結果になる。されば實効値は最大値の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ である。此の V_0 を最大値といひ、時として振幅といふ事もある。

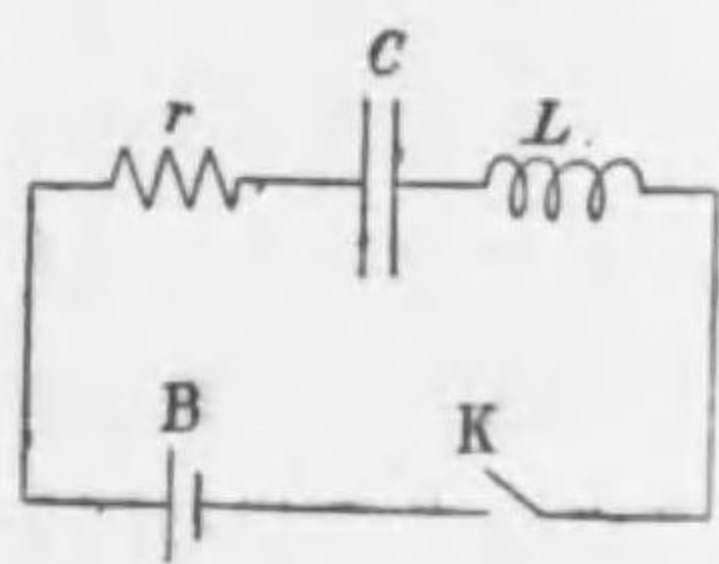
週期、周波数、瞬間値、實効値の定義及び最大値と實効値の関係は電流に対しても同様である。

§24. 電氣振動 次に自己感應抵抗及び静電容量を有する回路に直流電圧を與へた場合の電磁氣感應を論じて見よう。

此の回路は第40圖に示す如きものであつて、圖中 r は抵抗、 C はコンデンサー、 L はコイルで何れも夫々の値の抵抗容量、自己感應を有するものとする。今コンデンサーの有する電荷を e とし e が増加する電流が流るゝ時夫を以て電流の正の方向とする。然らば電流 i は

$$i = \frac{de}{dt} \quad (24a)$$

を以て表はされる。又此の時コンデンサーの電圧は



第 40 圖

$$V_e = \frac{e}{C}$$

であるから回路に加へられた全電圧は

$$V - \frac{e}{C}$$

である。但 V は電池の起電力とし、其の内部抵抗は r の中に含ませて置く。然らば(23)から

$$L \frac{di}{dt} + ri = V - \frac{e}{C} \quad (24b)$$

を得る。此の式を微分して、(24a) によつて $\frac{de}{dt}$ を i で置き換えれば

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0 \quad (24c)$$

となる。此の式を解いて適當の初時條件を入れよ。

さて(24c)に於て L, r, C は時間に無關係であるから、一般に之は次の如き指數函數の解を有する筈である。

$$i = A e^{-at} \quad (24d)$$

(24d) を(24c)に入れよば次の式を得る

$$\left(a^2 L - ar + \frac{1}{C} \right) A e^{-at} = 0$$

此の方程式は t に無關係に成立せねばならないから

$$a^2 L - ar + \frac{1}{C} = 0 \quad (24e)$$

である事が必要である。 A は後に問題の初時條件から決定する。之より a を求むれば

1) 三角函數は虚数を指數とする指數函數であるから、之は又特別の場合として sine 及び cosine を含むものである。後に用ひる必要上其の公式オイラーの公式を次に示して置く

$$\sin \theta = \frac{e^{\sqrt{-1}\theta} - e^{-\sqrt{-1}\theta}}{2\sqrt{-1}} \quad \cos \theta = \frac{e^{\sqrt{-1}\theta} + e^{-\sqrt{-1}\theta}}{2}$$

$$a = \frac{1}{2L} \left(r \pm \sqrt{r^2 - \frac{4L}{C}} \right)$$

を得る。故に次の a_1, a_2 なる二つの根を得る。

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{r-s}{2L} & a_2 &= \frac{r+s}{2L} \\ \text{但し } s &= \sqrt{r^2 - \frac{4L}{C}} \end{aligned} \right\} (24f)$$

である従つて(24d)に入れて

$$i = A_1 e^{-\frac{r-s}{2L}t} + A_2 e^{-\frac{r+s}{2L}t} \quad (24g)$$

となる。

次にコンデンサーの電圧を考へれば、(24b)に於て右邊の第二項はコンデンサーの電圧であるから之を V_1 と書けば

$$\begin{aligned} L \frac{di}{dt} + ri &= V - V_1 \\ \therefore V_1 &= V - L \frac{di}{dt} - ri \end{aligned} \quad (24h)$$

であるから、上式の i を此の中に入れて

$$V_1 = V - \left\{ \frac{r+s}{2} A_1 e^{-\frac{r-s}{2L}t} + \frac{r-s}{2} A_2 e^{-\frac{r+s}{2L}t} \right\} \quad (24h')$$

を得る。

さて(24g)(24h')に含まるる A_1 及び A_2 は何れも積分常數にして初時條件によつて決定せらるゝものである。然るに自己感應と静電容量を有する回路の初時條件は二つの量に就て與へねばならない。例へば電流の強さとコンデンサーの電圧、又は電流の強さとコンデンサーの電荷等、必らず二つ與へなければならぬ。故に此の二つを上式に入れれば、 A_1, A_2 を未知數とせる二個の方程式を得るから直に之を決定する事が出来る。

今 $t=0$ の時に $i=i_0, V_1=V_0$ であつたとすれば(24g)(24h')に入れて

$$i_0 = A_1 + A_2$$

$$V_0 = V - \frac{r+s}{2} A_1 - \frac{r-s}{2} A_2$$

となる。之より A_1, A_2 を求めれば

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\frac{1}{s} \left(V_0 - V + \frac{r-s}{2} i_0 \right) \\ A_2 &= +\frac{1}{s} \left(V_0 - V + \frac{r+s}{2} i_0 \right) \end{aligned} \right\} (24h'')$$

を得る。故に

$$\left. \begin{aligned} i &= \frac{e^{-\frac{rt}{2L}}}{s} \left[\left(V_0 - V + \frac{r+s}{2} i_0 \right) e^{-\frac{st}{2L}} - \left(V_0 - V + \frac{r-s}{2} i_0 \right) e^{\frac{st}{2L}} \right] \\ V_1 &= V - \frac{e^{-\frac{rt}{2L}}}{2} \left[\frac{r-s}{s} \left(V_0 - V + \frac{r+s}{2} i_0 \right) e^{-\frac{st}{2L}} - \frac{r+s}{s} \left(V_0 - V + \frac{r-s}{2} i_0 \right) e^{\frac{st}{2L}} \right] \end{aligned} \right\} (24i)$$

となり、之より次の如き種々の場合を論ずる事が出来る。

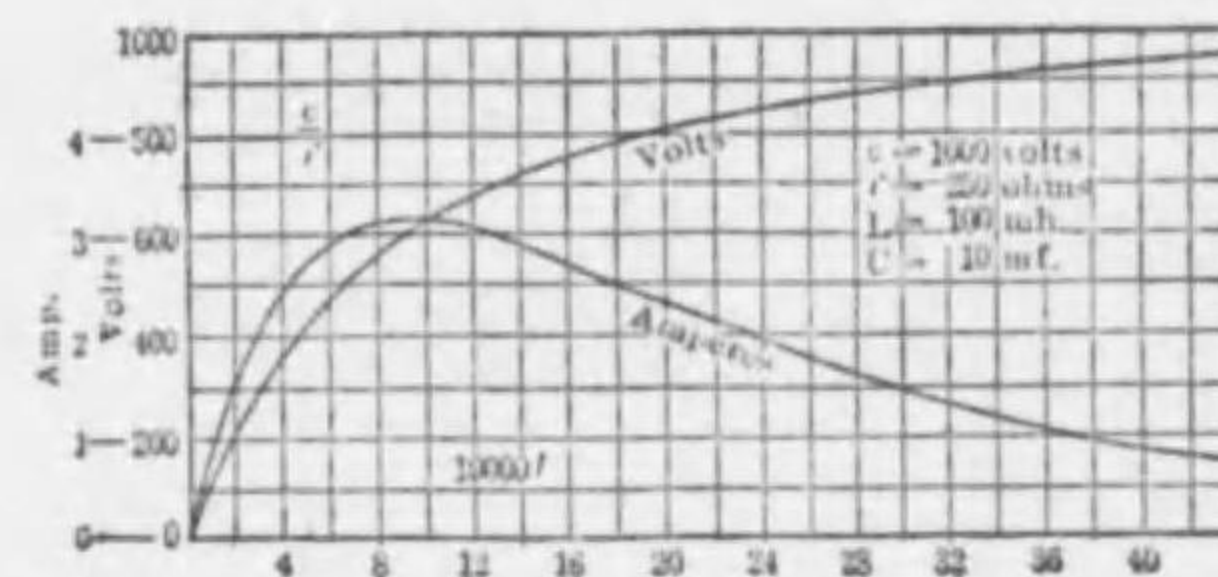
コンデンサーの充電

の場合には初めは回路に電流もなく、コンデンサーの電圧も0である。

故に(24i)に $i_0=0, V_0=0$

と置いて

$$\left. \begin{aligned} i &= V \frac{e^{-\frac{rt}{2L}}}{s} \left\{ e^{\frac{st}{2L}} - e^{-\frac{st}{2L}} \right\} \\ V_1 &= V \left\{ 1 - \frac{e^{-\frac{rt}{2L}}}{2s} \left[(r+s)e^{\frac{st}{2L}} - (r-s)e^{-\frac{st}{2L}} \right] \right\} \end{aligned} \right\} (24j)$$



第 41 圖 a

を得る。此の i は充電電流、 V_1 はコンデンサーの電圧である。

コンデンサーの放電の場合には最初コンデンサーは一定の電圧 V_0 を有し、回路には電流がなく、外部から 0 なる電圧を加へたものと考へる事が出来るから、 $i_0 = 0$ $V = 0$ として (24i) より

$$\left. \begin{aligned} i &= -\frac{V_0 e^{-\frac{rt}{2L}}}{s} \left\{ e^{\frac{st}{2L}} - e^{-\frac{st}{2L}} \right\} \\ V_1 &= \frac{V_0 e^{-\frac{rt}{2L}}}{2s} \left\{ (r+s)e^{\frac{st}{2L}} - (r-s)e^{-\frac{st}{2L}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (24k)$$

さて (24i) 以下何れも s を含んで居る。 s は (24j) によつて r, CL で定まる常數である。されば之等の三つの値によつて

$$r^2 > \frac{4L}{C} \quad \text{ならば} \quad s > 0$$

$$r^2 = \frac{4L}{C} \quad \text{ならば} \quad s = 0$$

$$r^2 < \frac{4L}{C} \quad \text{ならば} \quad s \text{ 虚數}$$

となる。此の中第一の場合だけ上に得た結果が用ひられるものであつて (24i) からも見られる通り第二の場合には $\frac{0}{0}$ なる不定形となる。又第三の場合では其のまゝ用ひる事は勿論不可能である。

第一の場合、即ち

$$r^2 > \frac{4L}{C}$$

即ち

$$4L < Cr^2$$

なる場合は、(a.) 抵抗が大なるか (b.) 容量が大なるか (c.) 自己感應が小ならば實現するものであつて、此の時はコンデンサーの充電を例に取れば、電流は 0 から漸次増加して遂に最大となり最後は再び 0 となり、コンデンサーの電圧は 0 より断えず増加して遂に外部から供給された電圧に等しくなるのである。要する

に其の變化は緩慢である。其の状態は前述の如く (24i) 従つて (24j) 又は (24k) によつてよく表はされて居る。

第二の場合、即ち

$$4L = Cr^2$$

ならば (24i) 式は如何に變ずるかといふに之は次の如くに考へる。先づ s は 0 ではないが甚だ小であると假定すれば (24i) より先づ

$$i = \left(V_0 - V + \frac{r}{2} i_0 \right) \frac{e^{-\frac{rt}{2L}} - e^{\frac{st}{2L}}}{s} e^{-\frac{rt}{2L}}$$

$$V_1 = V - \frac{r}{2} \left(V_0 - V + \frac{r}{2} i_0 \right) \frac{(r-s)e^{-\frac{st}{2L}} - (r+s)e^{\frac{st}{2L}}}{s} e^{-\frac{rt}{2L}}$$

となる。さて

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{st}{2L}} - e^{\frac{st}{2L}}}{s} = -\frac{t}{L}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{(r-s)e^{-\frac{st}{2L}} - (r+s)e^{\frac{st}{2L}}}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} r \frac{e^{-\frac{st}{2L}} - e^{\frac{st}{2L}}}{s} - 2 = -\frac{rt}{L} - 2$$

であるから遂に $s=0$ の場合には

$$\left. \begin{aligned} i &= -\frac{t}{L} \left(V_0 - V + \frac{r}{2} i_0 \right) e^{-\frac{rt}{2L}} \\ V_1 &= V + \left(1 + \frac{rt}{2L} \right) \left(V_0 - V + \frac{r}{2} i_0 \right) e^{-\frac{rt}{2L}} \end{aligned} \right\} \quad (24l)$$

を得る。之より特別に次の二つの場合を考へる。

コンデンサーを充電する時 $r^2 = \frac{4L}{C}$ ならばどうなるかといふと (24i) に $i_0 = 0$ $V_0 = 0$ を入れて

1) 竹内端三氏、微分學、第88頁脚註参照。

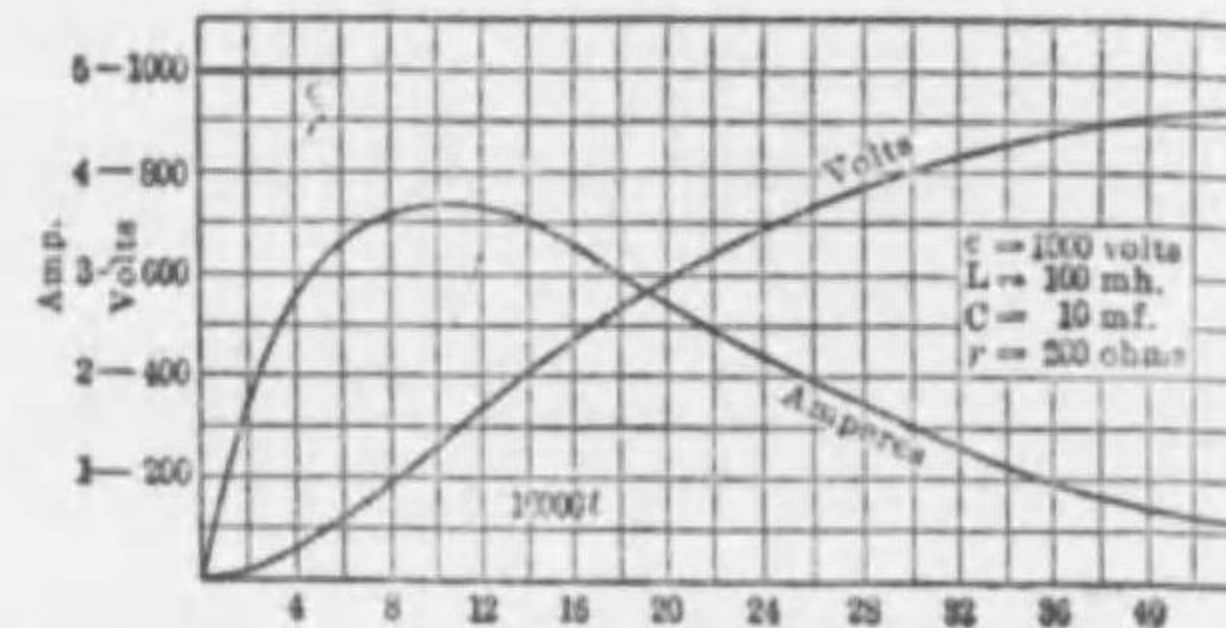
$$i = \frac{V}{L} t e^{-\frac{rt}{2L}}$$

$$V_1 = V \left\{ 1 - \left(1 + \frac{rt}{2L} \right) e^{-\frac{rt}{2L}} \right\}$$

を得る。

又コンデンサーを放電する時は $i_0 = 0$ $V = 0$ を入れて

$$i = -\frac{V_0}{L} t e^{-\frac{rt}{2L}}$$



第 41 圖 b

$$V_1 = V_0 \left(1 + \frac{rt}{2L} \right) e^{-\frac{rt}{2L}}$$

となる。

次に第三の場合、即ち

$$r^2 < \frac{4L}{C}$$

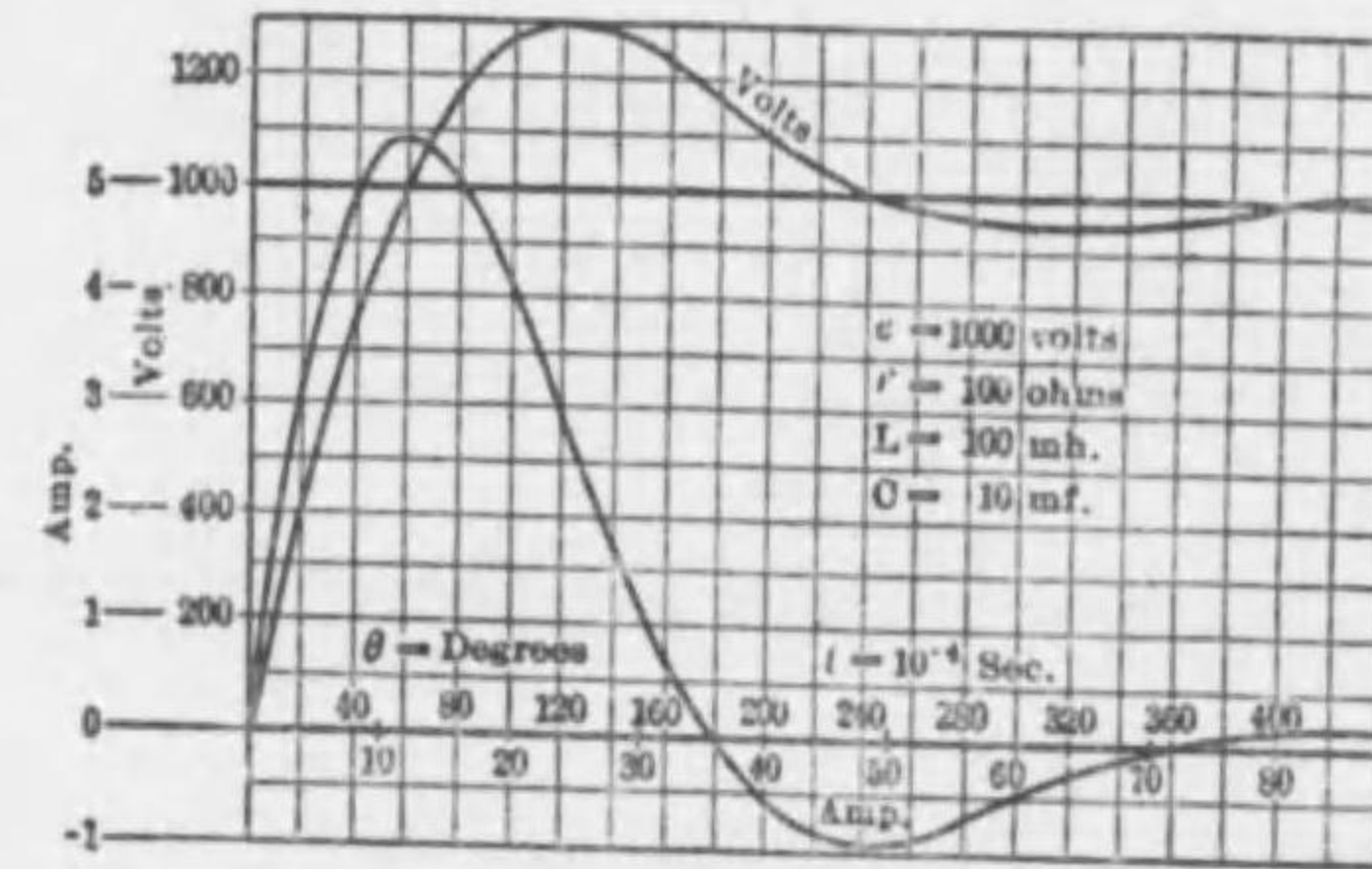
で、 s が虚数となる場合を論ずる。先づ便利のために (24i) を書き換へて次の如くする。

$$\left. \begin{aligned} i &= e^{-\frac{rt}{2L}} \left[\left(V_0 - V + \frac{r}{2} i_0 \right) \frac{e^{-\frac{st}{2L}} - e^{\frac{st}{2L}}}{s} + i_0 \left(\frac{e^{-\frac{st}{2L}} + e^{\frac{st}{2L}}}{2} \right) \right] \\ V_1 &= V - e^{-\frac{rt}{2L}} \left[r \left(V_0 - V + \frac{r}{2} i_0 \right) \frac{e^{-\frac{st}{2L}} - e^{\frac{st}{2L}}}{2s} \right. \\ &\quad \left. - \left(V_0 - V \left(\frac{e^{-\frac{st}{2L}} + e^{\frac{st}{2L}}}{2} \right) - \frac{s}{2} \left(\frac{e^{-\frac{st}{2L}} - e^{\frac{st}{2L}}}{2} \right) \right) \right] \end{aligned} \right\} (24i')$$

次に s は虚数であるから

$$s = q \sqrt{-1}$$

と置けば q は正の實数となる。然して



第 41 圖 c

$$\frac{e^{-\frac{st}{2L}} - e^{\frac{st}{2L}}}{2s} = -\frac{1}{q} \sin \frac{qt}{2L} \quad \frac{e^{-\frac{st}{2L}} + e^{\frac{st}{2L}}}{2} = \cos \frac{qt}{2L}$$

$$\frac{s}{2} \frac{e^{-\frac{st}{2L}} - e^{\frac{st}{2L}}}{2} = \frac{q}{2} \sin \frac{qt}{2L}$$

であるから (24i') は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} i &= e^{-\frac{rt}{2L}} \left[i_0 \cos \frac{qt}{2L} + \frac{2(V - V_0) - r i_0}{q} \sin \frac{qt}{2L} \right] \\ V_1 &= V - e^{-\frac{rt}{2L}} \left[(V - V_0) \cos \frac{qt}{2L} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2r(V - V_0) - (r^2 + q^2) i_0}{2q} \sin \frac{qt}{2L} \right] \end{aligned} \right\} (24m)$$

之を見れば回路の電流及びコンデンサーの電圧は明らかに振動的で其の振幅は漸次衰減するが其の振動の周波数は

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{q}{2L}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{4L}{C} - r^2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{r^2}{4L^2}} \quad (24n)$$

になつて居る。次に特別の場合を取つて見る。

コンデンサーを充電する時は $i_0 = 0$ $V_0 = 0$ であるから

1) 第 323 頁脚註参照

$$\left. \begin{aligned} i &= \frac{2V}{q} \epsilon^{-\frac{rt}{2L}} \sin \frac{qt}{2L} \\ V_1 &= V \left[1 - \epsilon^{-\frac{rt}{2L}} \left(\cos \frac{qt}{2L} + \frac{r}{q} \sin \frac{qt}{2L} \right) \right] \end{aligned} \right\} (24p)$$

コンデンサーを放電する時は $i_0 = 0$ $V = 0$ であるから

$$\left. \begin{aligned} i &= -\frac{2V_0}{q} \epsilon^{-\frac{rt}{2L}} \sin \frac{qt}{2L} \\ V_1 &= V_0 \epsilon^{-\frac{rt}{2L}} \left\{ \cos \frac{qt}{2L} + \frac{r}{q} \sin \frac{qt}{2L} \right\} \end{aligned} \right\} (24q)$$

(24m)に示す如く、外部から加へる電圧は一定であるにもかゝらず、回路の電流が振動する如き場合を特に電氣振動といひ、或は又自由振動ともいふ。電氣振動は回路の條件が之に適合する場合に、電圧又は電流を變化すれば常に之に伴つて起るものであつて、理論上興味が多い問題であるばかりでなく、工業上にも重大な事柄である。例へばラヂオの如きは電氣振動を利用せる最も著るしい例であつて、又故障の際送電線に起る電氣振動の如何に恐るべきものであるかは其の方面の技術者のよく知る所である。かく電氣振動が技術上有害な事は上の式からも直に知られるが、此の式から計算して圖に示した曲線から見れば最も明瞭である。第41圖aは $s > 0$ 、同圖bは $s = 0$ 、又c圖は s が虚数の場合のコンデンサーの電氣振動の際の電流及び電圧である。圖中 Volts とある曲線はコンデンサーの電圧、Amp. とあるは回路の電流を示し、Volts 又は Amp. は電圧及び電流の單位である。その他 r, L, C 等の單位も後に説明する事とする。

第41圖a及びbを見れば、電圧及び電流は初め0でそれより何れも増加するが電圧がたえず増すに反して電流は一度最大値に達し其の後は再び減少して遂に又0となる。然して電

流の最大値もオームの法則から與へられるべき $\frac{e}{r}$ の大きさには遠く及ばない事がよく見える。c圖に於ては電流も電圧も振動的となり、其の振幅は漸次小とはなつて行くが尙數回は明らかに見えて居る。電圧は初め0から増加して、間もなく外部から與へられた値に等しくなり、更に之を越して行きやがて減少し、夫より振動して居る。電流も一度最大値に達して後減少する時は0を越して方向が反對になり、其の後は振動的に0に近づいて行く。即ちコンデンサーの電圧は外部から與へた値よりも遙に高くなるから、時として甚だしい危険を起し得るのである。

上に電氣振動の發生に適合する條件が満たされて居れば、回路の電圧又は電流を變化すれば常に之に伴つて電氣振動が起ると述べた。然らば此の條件とは何であるか夫を少しく論じて見よう。

力學的の振動の起るためには其の運動に二種類のエネルギーが關與しなければならない。其の一つはポテンシャルエネルギー、他は運動のエネルギーである。此の二種のエネルギーが互に變化して機械的の振動が起るのである。例へば單振子の運動に就て言へば靜止の位置からある角度だけ振れた時は運動のエネルギーが小さくなると同時にポテンシャルエネルギーは増加し、遂に角度が最大の位置では運動のエネルギーは0となつてポテンシャルエネルギーが最大となる。振子の質量を m 、絲の長さを l とすれば、 θ なる角度だけ振れた時は

$$\begin{aligned} \text{ポテンシャルエネルギーは} & \quad l(1 - \cos \theta)mg \\ \text{運動のエネルギーは} & \quad \frac{m l^2}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \end{aligned}$$

である。最も高く上つた時は θ は最大で

$$\cos \theta \text{ は最小} \quad \frac{d\theta}{dt} = 0$$

となり、最も低い位置、即ち静止の位置に來た時は

$$\cos \theta \text{ は最大} \quad \frac{d\theta}{dt} \text{ も最大}$$

となる。斯く二種のエネルギーが運動に關與しなければ力學的振動は起らないのである。現象が複雑になつても、此の事は變りはないのである。

然らば二種のエネルギーが運動に關與して居れば常に振動が起るかといふに必らずしも左様ではない。單振子の場合に空中では常に振動するが、濃い液状パラフィンの中では必ずしも振動しない。之は何故かといふと、摩擦の大小の影響である。摩擦が大ならば振動が起らず、摩擦が小ならば起る。然らば摩擦は如何なる作用をなすかといふに、之は運動に際してエネルギーを消耗するものである。さればエネルギーの消耗の大なる時は振動が起らず、其の小なる時は起る事が知られる。

以上單振子及び一般に力學的振動に就て觀察せる事は、皆電氣振動にも適用せられるものである。電氣振動も二種のエネルギーが現象にたづさわる時は起り、一種の場合には起らない。然らば二種のエネルギーとは何であるか、夫は電氣的エネルギーと磁氣的エネルギーである。之迄計算して來た場合では電氣的エネルギーはコンデンサーに蓄へられ、磁氣的エネルギーは自己感應の中に蓄へられる。其の大きさは I. §22 及び III. (19b) によつて與へられ

$$U = \frac{1}{2} e^2 C \quad T = \frac{1}{2} i^2 L$$

である。

§25. 單一回路の強制振動 ある回路に電壓を加へた場合には、電磁氣感應のために種々の現象の起る事は既に知つた。第37圖の如き回路に直流電壓を加へれば電流は瞬間的に

オームの法則に従ふ値を示さずして徐々に變化する。斯様な回路から電壓を除いても同様である。又第40圖の如き回路に直流電壓を加へれば、回路の電流は0よりある値を経て再び0となり、回路の條件によつて自由振動が起るものである。之から夫等の回路に交番電壓を加へる場合に如何なる電流が流れるかを考へて見よう。

a. 先づ第37圖の如き回路に電池の代りに(23f)の如き起電力を與へて見よう。然らば(23a)によつて此の回路の電流は

$$L \frac{di}{dt} + ri = V_0 \cos \omega t \quad (25a)$$

によつて與へられる。之を解くために先づ

$$i = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (25b)$$

なりと假定し、 A 及び B なる常數を上の微分方程式を満足する如くに決定する。之より

$$\frac{di}{dt} = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t$$

であるから(25a)に入れれば

$$(rB - \omega AL) \sin \omega t + (\omega BL + rA - V_0) \cos \omega t = 0$$

となる。此の關係は t の値が何であつても成立しなければならぬから、 $\sin \omega t$ 及び $\cos \omega t$ の係数が別々に0でなければならぬ。故に

$$-\omega LA + rB = 0$$

$$rA + \omega LB = V_0$$

従つて

$$A = \frac{r}{r^2 + \omega^2 L^2} V_0 \quad B = \frac{\omega L}{r^2 + \omega^2 L^2} V_0$$

或は又

$$\frac{\omega L}{r} = \tan \alpha \quad (25c)$$

と置けば A, B は

$$A = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} V_0 \quad B = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} V_0$$

となる。従つて(25b)より

$$i = \frac{V_0}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \alpha)$$

を得る。

(25a)の完全の解は、其の右邊を0とせるものゝ解と今得たるものとの和である。右邊の0なるものゝ解は(23b)に於て $V=0$ と置けば求められ、従つて i の完全の解は次の如くなる。

$$i = \frac{V_0}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \alpha) + C e^{-\frac{rt}{L}}$$

さて $t=0$ に於ては $i=0$ とする。換言すれば電流の流れて居ない回路に(23c)の如き電圧を加へたとする。然らば

$$\frac{V_0}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} \cos \alpha + C = 0$$

より C が決定せられ

$$i = \frac{V_0}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} \left[\cos(\omega t - \alpha) - \cos \alpha e^{-\frac{rt}{L}} \right] \quad (25d)$$

となる。今

$$i_1 = \frac{V_0}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \alpha) \quad (25e)$$

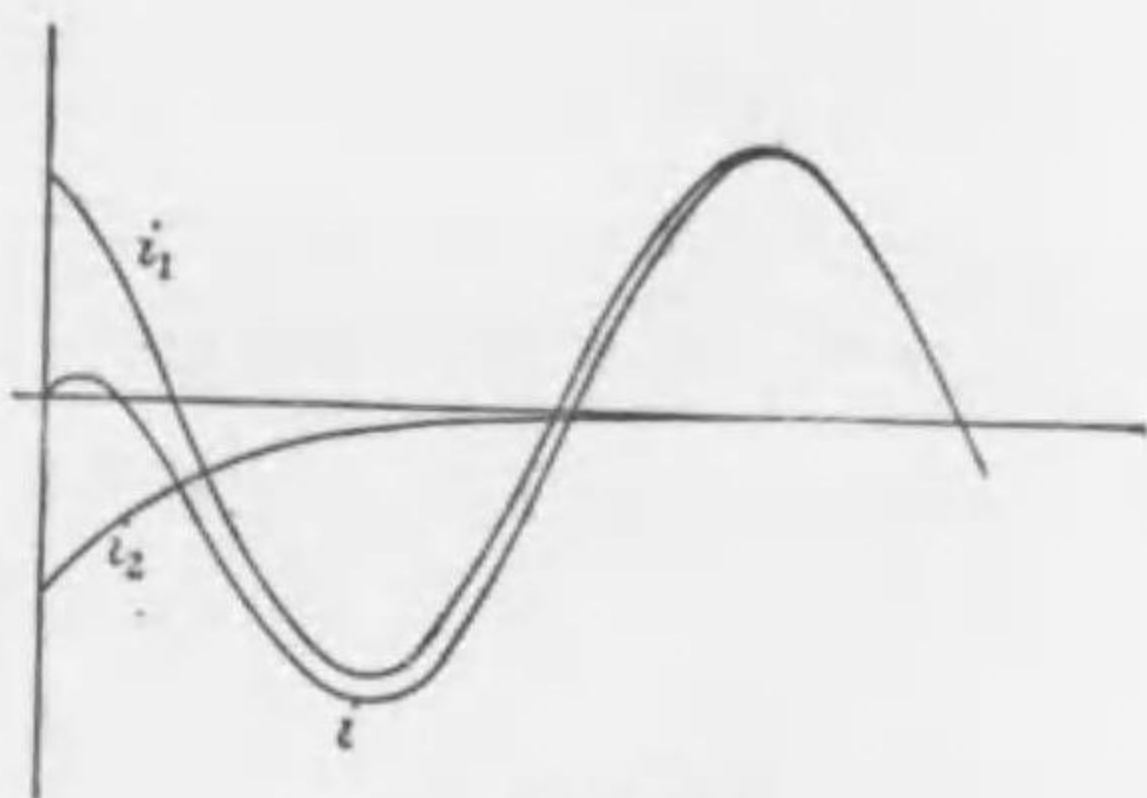
$$i_2 = -\frac{V_0}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} e^{-\frac{rt}{L}} \quad (25e')$$

と置けば(25d)は

$$i = i_1 + i_2$$

となる。第42圖には i_1, i_2 及び i を同時に示して置く。

若し此場合に(23e)なる電圧を加へれば、之は $t=0$ にて $V=0$ で



第 42 圖

あるから i_2 は初めから0となつて全く現はれない。

さて i_2 なる電流は電圧を加へた當時は存在するが實際上直に衰滅するものである。之は $t=0$ に於て $i=0$ なる條件を満足するために起つたものであつて、若し $t=0$ の時に $i_1=0$ ならば i_2 は初めから0となるものである。 i_2 はかく一時的のものであるから過渡項(Transient term)と名づけられ、 i_1 は之に反して(23c)の如き電圧が作用して居る間は存在するものであるから之は永久項(Permanent term)と呼ばれる。過渡項は時常數 $\frac{L}{r}$ が大なる程速に衰滅する。過渡項が衰滅し終つた後には永久項のみが残る。以下過渡項が衰滅した後の事を考へる。

永久項の最大値は

$$\frac{V_0}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}}$$

である。されば $\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}$ が電流の大小を決定するものであつて之は此の回路のイムピーダンス(Impedance)といふ。直流の場合又は $L=0$ なる時には電流の値は

$$\frac{V_0}{r}$$

であるから、交流の時の最大値は L の存在によつて減少するものである事が知られる。

$\cos \omega t$ に比例する電圧を加へた時にも永久項 i_1 は $\cos(\omega t - \alpha)$

1) 此の衰滅の速さを知るために次の如き例を挙げる。但單位は後に述べる事とする。今工業上實際に電力を供給するに電壓125ボルト、電流1000アンペール位を流すとすれば、 $r=0.125$ オームとなる。此の時途中の電線の自己感應係數は $L=0.000125$ ヘンリー位と見做して大差ない。然らば時常數は

$$\frac{L}{r} = \frac{1}{1000}$$

である。故に電流の式は(23b')から

$$i = 1000(1 - e^{-1000t})$$

されば電鍵を閉ぢてより、電流が500アンペールとなるまでの時間は

$$t = 0.00099 \text{ 秒}$$

によつて變化する。之を電流は電壓より α だけ位相が遅れたといふ。

ω が大なるか L が大なるために r^2 が $\omega^2 L^2$ に比して省略せられる時は α は (25c) によつて殆んど $\frac{\pi}{2}$ となる。即ち電流の位相は電壓よりも 90° 遅れ

$$i_1 = \frac{V_0}{\omega L} \sin \omega t$$

で表はされる。即ち電流の強さは自己感應と周波数のみで決定せられ従つて非常に周波数の大なる交流はたとへ抵抗が非常に小さくても比較的自己感應の大なる回路を避けて抵抗は大きくても自己感應の小なる回路の方を通過する傾向がある。

次に交流のなす仕事を考へて見よう。 V なる電位差を有する二點間を i なる電流が dt 秒間流れれば其の間に電源が電流になす仕事は

$$iVdt$$

である。されば今

$$V = V_0 \cos \omega t$$

$$i = I_0 \cos(\omega t - \alpha)$$

なる電壓及び電流を有する回路に於て、電源が電流になす仕事は一週期につき

$$\int_t^{t+\tau} iVdt = V_0 I_0 \int_t^{t+\tau} \cos \omega t \cos(\omega t - \alpha) dt$$

である。但 τ は交流の週期とする。之は計算の結果

$$\frac{I_0 V_0}{2} \tau \cos \alpha$$

となる。然るに之丈のエネルギーは τ でなる時間内に與へられたのであるから單位時間内には

$$P = \frac{I_0 V_0}{2} \cos \alpha = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \frac{V_0}{\sqrt{2}} \cos \alpha = I_e V_e \cos \alpha \quad (26)$$

電 氣 磁 氣 學

三 枝 彦 雄

(337—368)

目 次 (7)

§ 26. 連結回路, 變壓器	339
§ 27. 連続せる媒質中の電磁現象 I.	345
§ 28. 連続せる媒質中の電磁現象 II.	356
§ 29. 導體の表面に於ける電流の分布	365

なる仕事になされる。單位時間内になされる仕事をパワー (Power) と言へば、パワーは電流及び電壓の實効値の積に比例する。此の比例の常 $\cos \alpha$ を力率 (Power factor) といふ。

上の例に於ては (23f) の如き起電力のために (25e) の i_1 の如き電流が流れるのであるから

$$P = \frac{1}{2} \frac{V_0^2 r}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}} \cos \alpha.$$

然るに (25c) によつて

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}}$$

であるから

$$P = \frac{1}{2} \frac{r V_0^2}{r^2 + \omega^2 L^2} \quad (26a)$$

となる。

b. 次に第40圖の如き回路に電池の代りに (23f) なる交番電壓を加へて見よう。此の時を微分方程式は (24b) の如き形となるが之を一度微分すれば

$$\frac{dV}{dt} = -\omega V_0 \sin \omega t$$

となる。従つて (24e) は

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = -\omega V_0 \sin \omega t.$$

となる。此の式を満足する i を求めれば先づ永久項を得る。其の値は實際計算の結果によれば次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \frac{V_0}{\sqrt{r^2 + \omega^2 \left(L - \frac{1}{\omega^2 C} \right)^2}} \cos(\omega t - \alpha) \\ \tan \alpha &= \frac{\omega \left(L - \frac{1}{\omega^2 C} \right)}{r} \end{aligned} \right\} \quad (27a)$$

但し

$$\left. \begin{aligned} \text{今} \quad & \frac{V_0}{\sqrt{r^2 + \omega^2 \left(L - \frac{1}{\omega^2 C} \right)^2}} = I_1 \\ \text{と置けば} \quad & i_1 = I_1 \cos(\omega t - \alpha) \end{aligned} \right\}$$

となる。

次に過渡項 i_2 を求めるに、 $t=0$ に於て $i=0$ なるためには $i_2 = -I_1 \cos \alpha$ でなければならない。此の条件の下に計算の結果によれば

$$\left. \begin{aligned} i_2 = \frac{I_1}{s} \left\{ \varepsilon^{-\frac{r-\varepsilon}{2L}t} \left[\frac{r-s}{2} \cos \alpha - \frac{1}{\omega C} \sin \alpha \right] \right. \\ \left. - \varepsilon^{-\frac{r+s}{2L}t} \left[\frac{r+s}{2} \cos \alpha - \frac{1}{\omega C} \sin \alpha \right] \right\} \end{aligned} \right\} (27b)$$

となる。但

$$s = \sqrt{r^2 - \frac{4L}{C}}$$

である。

此の場合にも r^2 と $\frac{4L}{C}$ の大小によつて過渡項が振動電流となる事がある。(27b) より i_2 が振動性を有する場合の式を出すのは §24 の如くにすればよい。

i_1 及び i_2 は $C = \infty$ と置けば (25e) に一致する。 $C = \infty$ とは、コンデンサーの兩極に如何に多量の正負の電荷を與へても其の電壓が上らないと言ふ意味であるから、兩極を導體で連絡した場合に相等する。さて第40圖に於てコンデンサーの兩極を導線で連絡すれば第37圖の回路となる。されば此の一致は決して偶然ではないのである。

さて (25e) の i_1 と (27a) とを比較すれば、永久次に關しては、第40圖の如くコンデンサーを入れる事は丁度第37圖の L を $L - \frac{1}{\omega^2 C}$ に減少したのに等しい事を知る。

又 L と C との間に

$$L - \frac{1}{\omega^2 C} = 0 \quad (27c)$$

の如き關係がある時は、電流と電壓との位相の差 α は 0 となり、電流の強さも

$$\frac{V}{r}$$

となる。即ち回路には自己感應もコンデンサーも入れない場合と全く同じである。

(27a) の電流も振動電流である。されど之は外部から與へた電壓によつて振動して居るのであるから §24 の自由振動に對して之を強制振動と呼んで居る。強制振動の場合に (27c) の如き關係があれば、電流の最大値 I_1 は、かゝる關係のない場合に比して甚だ大となる。故に斯様な場合には回路は共鳴状態にあるといふ。

共鳴状態にある時の週波數は (27c) によつて

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{CL}} \quad (27d)$$

で與へられる。此の値は回路の自由振動の週波數 (24a) とは一致しない事に注意すべきである。但し、電氣振動を起さしむる目的の下に造られた回路に於ては概して $\frac{r^2}{4L^2}$ は $\frac{1}{CL}$ に比して甚だ小なるを以てどの式を用ひて計算しても大差はない。

§26. 連結回路、變壓器 二つの回路があつて、一方に電流が流れるために發生した磁氣感應管が他の回路を貫く如き場合には、之等の回路は連結されたといふ。連結された回路の一方に (23f) の如き起電力を加へた場合の電流を求めよう。

第43圖に於て第一の回路の兩端 A_1 と A_1' は

$$V = V_0 \cos \omega t$$

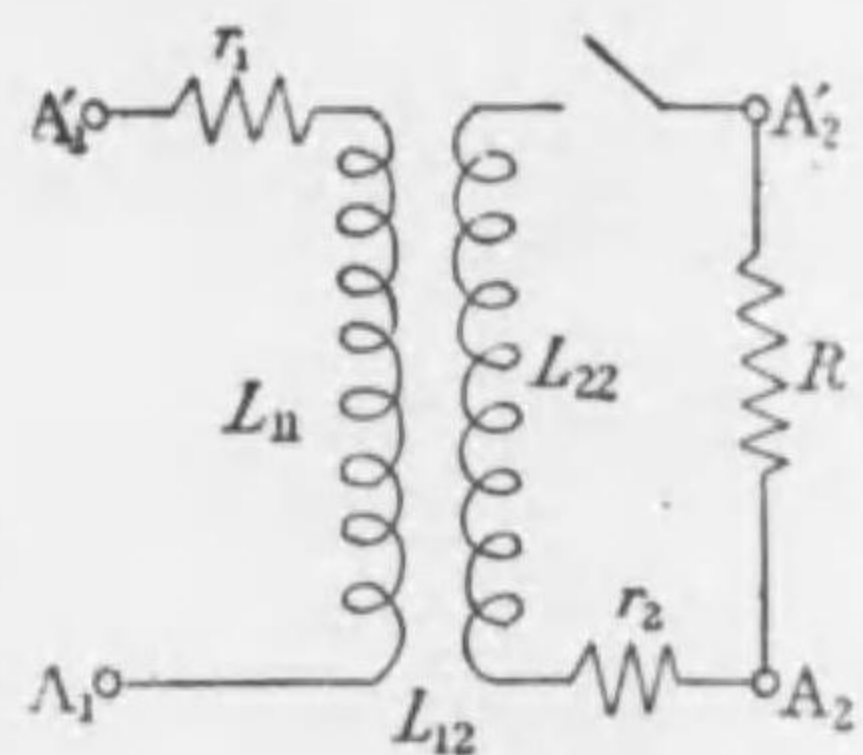
なる電位差を有する電源に結ばれたとする。今第一の回路の

抵抗 r_1 , 自己感應 L_{11} 第二の回路の抵抗 r_2 , 自己感應 L_{22} とし, 兩回路の間の相互感應を L_{12} とする。然らば(23)によつて $r_2 = r_2' + R$ と置けば

$$\frac{d}{dt} (i_1 L_{11} + i_2 L_{12}) + r_1 i_1 = V_0 \cos \omega t$$

$$\frac{d}{dt} (i_1 L_{21} + i_2 L_{22}) + r_2 i_2 = 0$$

なる聯立微分方程式を得る。但 i_1, i_2 は夫々第一, 第二の回路の電流である。



第 43 圖

第43圖の第一の回路の如く電源から電圧を受くるものを一次回路といひ, 之に對して第二の回路の如く一次回路より電磁感應によつて起電力を得るものを二次回路といふ。

$L_{11}, L_{12} = L_{21}, L_{22}$ は時間には無關係であるから上式は

$$\left. \begin{aligned} L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} + r_1 i_1 &= V_0 \cos \omega t \\ L_{12} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (28a)$$

となる。

今後は過渡項は考へない事とする。或は別の言葉で言へば過渡項の衰滅せる後の事柄を考へる事とする。

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= I_1 \cos(\omega t - \alpha) \\ i_2 &= I_2 \cos(\omega t - \beta) \end{aligned} \right\} \quad (28b)$$

と置いて之を(28a)に入れ, 左右兩邊に於ける $\sin \omega t$ 及び $\cos \omega t$ の係数が夫々互に等しくなければならぬ事を考へ, I_1, I_2, α, β の間の聯立代數方程式を求め, 之を解けば

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{V_0}{\sqrt{r_1^2 + \omega^2 L'^2}} \\ I_2 &= I_1 \frac{\omega L_{12}}{\sqrt{r_2^2 + \omega^2 L_{22}^2}} \end{aligned} \right\} \quad (28c)$$

$$\left. \begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{\omega L_1}{r_1} \\ \tan(\beta - \alpha) &= -\frac{r_2}{\omega L_{22}} \end{aligned} \right\}$$

を得る。但し

$$\left. \begin{aligned} L' &= L_{11} - \frac{\omega^2 L_{12}^2 L_{22}}{r_2^2 + \omega^2 L_{22}^2} \\ r' &= r_1 + \frac{\omega^2 L_{12}^2 r_2}{r_2^2 + \omega^2 L_{22}^2} \end{aligned} \right\}$$

である。されば

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{\omega^2 L_{12}^2}{r_2^2 + \omega^2 L_{22}^2} \\ L' &= L_{11} - \sigma L_{22} \\ r' &= r_1 + \sigma r_2 \end{aligned} \right\} \quad (28d)$$

となる。

(28c) と (25e) を比較すれば二次回路の存在するのは, あたかも一次回路の自己感應係數及び抵抗が(28d)の如く變化したのと同様である。即ち外見上自己感應係數は減少し, 抵抗は増加する。

二次回路を開けば $r_2 = \infty$ となるから $\sigma = 0$ で

$$\left. \begin{aligned} L' &= L_{11} \\ r' &= r_1 \end{aligned} \right\} \quad (28d')$$

となる。又二次回路の抵抗が ωL_{22} に比して小ならば $\sigma = \left(\frac{L_{12}}{L_{22}}\right)^2$ となり

$$\left. \begin{aligned} L' &= L_{11} - \frac{L_{12}^2}{L_{22}} \\ r' &= r_1 + \frac{L_{12}^2}{L_{22}^2} r_2 \end{aligned} \right\} \quad (28d'')$$

となる。即ち一次回路の自己感係数は見掛上 $\frac{L_{12}^2}{L_{22}}$ だけ減ずる。又此の時は $\tan(\beta-\alpha)=-0$ であるから

$$\beta-\alpha=\pi$$

なる事が知られる。即ち二次回路の電流の位相は一次回路よりも 180° 遅れる。

A_1A_1' から一次回路に入るパワーは(26)と(28b)によつて

$$P=\frac{1}{2}I_1V_0\cos\alpha$$

である。此の式に(28c)を入れて

$$P=\frac{1}{2}\frac{r_1V_0^2}{2r^2+\omega^2L_{12}^2} \quad (28e)$$

となる。二次回路が開いて居る時は(28d')によつて P は

$$\frac{1}{2}\frac{r_1V_0^2}{r_1^2+\omega^2L_{11}^2} \quad (28e')$$

である。此の値は(26a)の與へるものと同じであつて之丈のエネルギーがたえず此の一次回路内で消費せられるのである。若し又二次回路を ωL_{22} に比して小なる抵抗を通じて閉すれば(28e)に(28d'')を入れて P は

$$\frac{1}{2}\frac{\left(r_1+\frac{L_{12}^2}{L_{22}}r\right)V_0^2}{\omega^2\left(L_{11}-\frac{L_{12}^2}{L_{22}}\right)+\left(r_1+\frac{L_{12}^2}{L_{22}}r\right)^2} \quad (28e'')$$

となる。此の値は(28e')より甚だ大である。

又此の時二次回路の抵抗 R 中で消費せられるパワーは二次回路の電流の實効値の二乗に抵抗を乗じたものであるから

$$P'=\frac{1}{2}\frac{R\omega^2L_{12}^2V_0}{(r^2+\omega^2L^2)(r_2^2+\omega^2L_{22}^2)} \quad (28e''')$$

故に(28e)と比較して

$$\eta=\frac{P'}{P}=\frac{R\omega^2L_{12}^2}{r(r_2^2+\omega^2L_{22}^2)} \quad (29a)$$

を得る。之が電源より一次回路に入るパワーと、二次回路に入れた R なる抵抗の中で消費せられるパワーとの比である。此の η は $r_2=0$ の時も $r_2=\infty$ の時も 0 であつて、其の中間に於ては 1 より小なるある値を有して居る。

さて上の如き二つの回路の組合せによれば、 A_1A_1' より入つたパワーの一部を A_2A_2' に傳へる事が出来る。然して其のためにはコイルの抵抗をなるべく小にし一次及び二次回路の間の相互感係数 L_{12} をなるべく大きくするが便利である。相互感係数を大にするには、一次電流の作る磁氣感應管の中、出来るだけ多数のものが二次回路を貫く事が望ましいのである。故に此の目的のために兩方のコイルを同一の鐵の上に捲いてあるものがある。斯様な聯結回路を特に變壓器といふ。されば上の理論はそのまゝ變壓器に適用する事が出来る。

第43圖に於て、 r_1 は一次回路の抵抗、 r_2 は二次コイルの抵抗、 R は二次回路に接続した抵抗と考へれば、 η は變壓器に入つたパワー P と、利用されたパワー P' との比になる。 P を入力、 P' を出力、 η を變壓器の能率といふ。

又(28c)から

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{\omega L_{12}}{\sqrt{r_2^2+\omega^2L_{22}^2}} \quad (29b)$$

を電流比といふ。又 I_2 なる電流が流れて居る時の A_2A_2' の間の電位差の最大値(振幅)は

$$V_2=I_2R=I_1R\frac{\omega L_{12}}{\sqrt{r_2^2+\omega^2L_{22}^2}}=\frac{R\omega L_{12}V_0}{\sqrt{(r^2+\omega^2L^2)(r_2^2+\omega^2L_{22}^2)}}$$

故に

$$\frac{V_2}{V_0}=\frac{\omega L_{12}R}{\sqrt{(r^2+\omega^2L^2)(r_2^2+\omega^2L_{22}^2)}} \quad (29c)$$

となる。此の比を電壓比といふ。 $R=\infty$ とすれば

$$\frac{V_2}{V_0} = \frac{\omega L_{12}}{\sqrt{r_1^2 + \omega^2 L_{11}^2}} \quad (29e')$$

である。

變壓器内に於て抵抗 r_1, r_2 が 0 であつて且つ(28e'')の P を最大にする如き場合即ち

$$L_{11} - \frac{L_{12}^2}{L_{22}} = 0 \quad (30a)$$

の関係がある理想的状態に於ては(28c)より先づ

$$\beta - \alpha = -0$$

となる。故に一次及び二次電流の位相差は常に 180° となる。

次に(28e'')から

$$P = \frac{1}{2} \frac{L_{22}^2}{RL_{12}^2} V_0^2 \quad (30b)$$

を得る。同時に(28e''')から

$$P' = \frac{1}{2} \frac{L_{12}^2}{RL_{11}^2} V_0^2 \quad (30b')$$

とを得る。之に(30a)なる条件を考へれば

$$P = P'$$

となり、常に

$$\eta = 1 \quad (30b'')$$

である。即ち一次回路に入つたパワーは全部二次回路より出る。之は一次及び二次コイルの抵抗が 0 であるから其の中で消費せられるパワーが 0 となりエネルギー不滅の原理からの當然の結果である。

さて(30a)なる関係があるとは一次回路の電流によつて発生する磁気感應管の全部は二次回路を貫き、従つて二次回路の電流によつて発生する磁気感應管の全部は一次回路を貫く事を意味する。何となれば今一次回路の捲数を n_1 、二次回路の夫を n_2 とし、一次回路に単位電流を流した時に発生する磁気感應管

の数を N_1 とし、此の内の一部 $\gamma_1 N_1$ だけが二次回路を貫くと假定すれば

$$L_{11} = n_1 N_1 \quad L_{12} = n_2 \gamma_1 N_1$$

であつて、 γ_1 は 1 より小さいか又は 1 に等しい数である。

次に単位電流が二次回路を流れた時に発生する磁気感應管の数を N_2 とし、其の内の一部 $\gamma_2 N_2$ だけが一次回路を貫くと假定すれば

$$L_{22} = n_2 N_2 \quad L_{12} = n_1 \gamma_2 N_2$$

である。 γ_2 は 1 より小なるか又は 1 に等しい数である。

上の関係から

$$L_{12}^2 = n_1 n_2 \gamma_1 \gamma_2 N_1 N_2$$

従つて

$$\frac{L_{12}^2}{L_{22}} = n_1 \gamma_1 \gamma_2 N_1$$

と書く事が出来る。(30a)に之等の値を入れれば

$$n_1 N_1 - n_1 \gamma_1 \gamma_2 N_1 = 0$$

となる。即ち

$$1 = \gamma_1 \gamma_2$$

換言すれば γ_1 と γ_2 の積が 1 に等しくなければ(30a)は成立しない。然るに γ_1 も γ_2 も 1 より大なる事は出来ないから

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 1$$

でなければならない。故に上述の事が證明された。即ち(30a)が成立するためには總ての磁気感應管は兩方のコイルを貫くを必要とするものである。斯様な場合に磁気感應管の漏洩がないといふ。されば(30b)以下の式は變壓器のコイルに抵抗がなく、二つのコイルの間に磁気感應管の漏洩のない如き理想の場合を表はすものである。

§ 27. 連続せる媒質中の電磁現象 I. ある閉回路に電

流が流れて居る時、此の回路を正の方向に貫くとき道を取つて単位正磁極を一周せしむる時磁極になされる仕事は

$$W = 4\pi i \quad (31a)$$

である。此の仕事は磁極を運ぶ道の形や大きさには無関係である。

又ある閉回路を正の方向に貫く単位磁気感應管の数が N なる時、電磁氣感應によつて此の回路の正の方向に作用する起電力は

$$V = - \frac{dN}{dt} \quad (31b)$$

である。此の起電力は回路の形状及び大きさ導線の物質等には無関係である。

之等の法則は何れも線状回路に就て求められた結果であるが上述の如く極めて一般的のものであるから、同一の法則が次に述べる如き連続せる媒質中にも成立するものと假定し、此の假定の上に立てられた理論が實驗上の事實に合致するか否かを驗し、もし事實に矛盾しない場合には夫を眞理として承認するは學問の研究上常に行はれる方法である。然して以下述ぶる所の理論は電磁氣波動論の直接の基礎となるのみならず、電子論を生んだ母胎とも考へられるものであるが、其の結論と矛盾する事實は現在までには一も見出されては居らないのである。従つて吾人は充分の信頼を以て此の假定(連続媒質中に於ても上の二つの法則が行はるゝといふ假定)を承認する事が出来る。

さてある媒質中に電流が流るゝと共に其の中に同時に磁場が存在するものとする。電場、電氣變位及び磁場を E, D 及び H で示し、導磁率を μ 、電媒常數を ϵ とする。然らば

$$\left. \begin{aligned} B &= \mu H \\ D &= \epsilon E \end{aligned} \right\} (31c)$$

である。

今媒質中に右ネジ系の座標軸を定め、之に關して (x, y, z) なる座標を有する點 A を選ぶ。 A 點を通過し、 xy 面に平行なる面を描き此の面を假に A 面と名づける。

A 面内にあつて A 點を中心とし、各邊が x 軸又は y 軸に平行なる如き矩形を描き、其の邊の長さを

$$PQ = 2h \quad QR = 2k$$

とする。 h 及び k は甚だ小と考へる。

a. 電流と磁場の關係 A 點に於ける磁場の各分を H_x, H_y, H_z とすれば、點 P に於ては x 分は

$$H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x} h + \frac{\partial H_x}{\partial y} k$$

點 Q に於ては x 分は

$$H_x - \frac{\partial H_x}{\partial x} h + \frac{\partial H_x}{\partial y} k$$

である。 PQ の中間に $(x+\xi, y+k, z)$ なる點を取れば其の點の磁場の x 分は

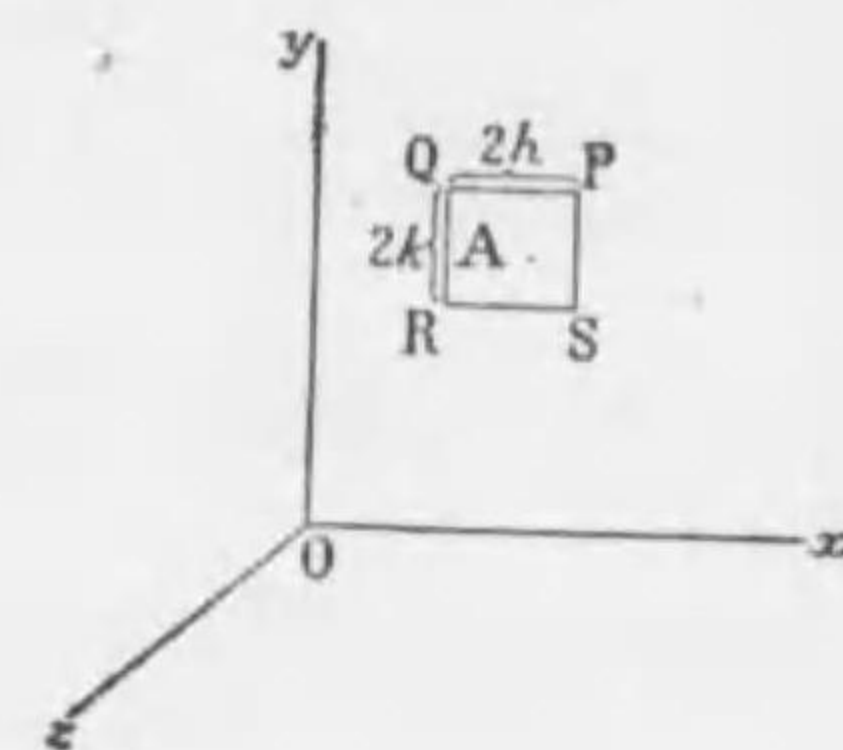
$$H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x} \xi + \frac{\partial H_x}{\partial y} k$$

である。

されば単位正磁極を P より Q に運ぶ時磁極になされる仕事は

$$W_1 = \int_h^{-h} \left(H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x} \xi + \frac{\partial H_x}{\partial y} k \right) d\xi = -2h \left(H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} k \right)$$

又直線 QR 上に $(x-h, y+\eta, z)$ なる點を取ればその磁場の y 分は



第 44 圖

$$H_y - \frac{\partial H_y}{\partial x} h + \frac{\partial H_y}{\partial y} \eta$$

であるから磁極を Q より R に運ぶ際に磁極になされる仕事は

$$W_2 = - \int_k^{-k} \left(H_y - \frac{\partial H_y}{\partial x} h + \frac{\partial H_y}{\partial y} \eta \right) d\eta = - 2k \left(H_y - \frac{\partial H_y}{\partial x} h \right)$$

直線 RS 上についた $(x+\xi, y-k, z)$ なる點に於ける磁場の x 分は

$$H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x} \xi - \frac{\partial H_x}{\partial y} k$$

であるから R から S までの間になされる仕事は

$$W_3 = \int_{-h}^h \left(H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x} \xi - \frac{\partial H_x}{\partial y} k \right) dz = 2h \left(H_x - \frac{\partial H_x}{\partial y} k \right)$$

同様にして S から P までの間になされる仕事は

$$W_4 = \int_{-k}^k \left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} h + \frac{\partial H_y}{\partial y} \eta \right) d\eta = 2k \left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} h \right)$$

故に矩形の邊上を一周して右廻りの方向に單位正磁極を運ぶ際になされる仕事は

$$W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = 4hk \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)$$

である。然るに(31a)によつて之は矩形の内を正の方向に流る電流 i の 4π 倍に等しい。矩形は xy 面に平行であつて面積は $4hk$ であるから電流 i は

$$i = 4hkI_z$$

である。故に

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 4\pi I_z$$

なる關係を得る。同様に A-面を yz -面に平行に取り、次に xz -面

に平行に取れば I_x, I_y に對する式を得る。之を一括して書けば次の如くなる。¹⁾

$$\left. \begin{aligned} 4\pi I_x &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ 4\pi I_y &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ 4\pi I_z &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{aligned} \right\} (31d)$$

之を電氣力學の第一基礎方程式といふ。

b. 磁場と電場との關係 次に磁場の代りに電場 E を取り、PQRS に沿つて單位正電荷を正の方向に運ぶ場合をとれば、

$$W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = 4hk \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

となる。然るに此の矩形を正の方向に貫く單位磁氣感應管の数は

$$4hkB_z$$

であるから、(31b)によつて

$$-\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

なる關係を得る。

されば A-面を種々に取れば次の三つの關係を得る。²⁾

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial B_x}{\partial t} &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ -\frac{\partial B_y}{\partial t} &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \end{aligned} \right\} (31e)$$

1) 三つの分の中に成立する此の關係を次の如く一つの式で表はす。

$$4\pi I = \text{rot } H$$

(第276頁脚註参照)

2) 三つの分の中に成立する此の關係は次の一つの式で表はす。

$$-\frac{\partial B}{\partial t} = \text{rot } E$$

(第313頁脚註参照)

$$-\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

之を電氣力學の第二基礎方程式といふ。

c. 電場と電荷の關係 次に考へる媒質の中に實電荷の空間密度があるとする。然らば其の中にとつた任意の閉曲面にガウスの定理を適用すれば (I. (24a) 参照)

$$\int D_n dS = 4\pi e$$

を得る。但 n は外方に向ふ法線で、 D_n は電氣變位の n の方向の分である。

今上記 A 點の周圍に、

$$x \text{ の方向の稜の長さ } 2h$$

$$y \text{ の方向の稜の長さ } 2k$$

$$z \text{ の方向の稜の長さ } 2l$$

なる一の極小六面體を考へ、其の中心に A 點があると假定する。

x 軸に垂直な二つの面は x 軸を $x-h, x+h$ なる二點で切る。前者に於ける電氣變位の x 分は

$$D_x - h \frac{\partial D_x}{\partial x}$$

である。此の面の法線は x 軸と反對方向を有する故、電氣變位の n の方向の分は

$$-\left(D_x - h \frac{\partial D_x}{\partial x}\right)$$

である。之に此の面の面積 $4kl$ を乗じて得たる

$$-4kl \left(D_x - h \frac{\partial D_x}{\partial x}\right)$$

は此の面から外部に出る電力線の數である。

同様にして $x+h$ なる點で x 軸を切る面から外部に出る電力線の數は

$$4k \left(D_x + h \frac{\partial D_x}{\partial x}\right)$$

である。故に之等の和は

$$8hkl \frac{\partial D_x}{\partial x}$$

となる。

同様にして y 軸に垂直なる二つの面から外に出る電力線の數は

$$8hkl \frac{\partial D_y}{\partial y}$$

であり、 z 軸に垂直なる二つの面に對しては

$$8hkl \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

である。従つて此の極小六面體から出る電力線の總數は

$$8hkl \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right)$$

となる。

さて六面體の體積は $8hkl$ であるから、實電荷の密度を ρ とすれば、其の中にある電氣量は

$$8hkl \rho$$

である。

之等の値を I. (24a) に入れて

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 4\pi\rho \quad (31f)$$

なる式を得る。¹⁾

皮相電荷の空間密度を ρ' とすれば I. (30a) によつて

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho' \quad (31g)$$

1) 此の式を次の如き記號で書く事がある。

$$\nabla D = 4\pi\rho$$

なる關係を得る。¹⁾

等方性媒質の中に於ては

$$D = \epsilon E$$

であるから (31f) より

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi \frac{\rho}{\epsilon}$$

を得る。之を (31g) と比較して

$$\rho' = \frac{\rho}{\epsilon}$$

を得る。之は I. (30) に他ならない。

d. 電流の概念の擴張 (31d) は電流と磁場の關係を示すもの

である。此の式は (31a) から導

かれたものであるが、今次の如

き例を考へて見る。第45圖に

於て、一のコンデンサーの兩極

を連ねる導線に電流 i が矢の

如く流れて居る場合に、此の回

路は閉回路と考へ得るであらうか。コンデンサーの兩極 A と

B との間には電流が流れて居ない。もし閉回路と考へ得ない

ならば p なる道を單位正磁極を矢の通り動かす時磁極にな

される仕事 W は 0 であり、閉回路であれば $W = 4\pi i$ である。

此の回路を閉回路と見るためには、A, B の間にも電流が流れ

て居ると考へなければならぬ。されどこゝには電場はある

が電流は存在しない。もし又此の回路が開いて居たとすれば

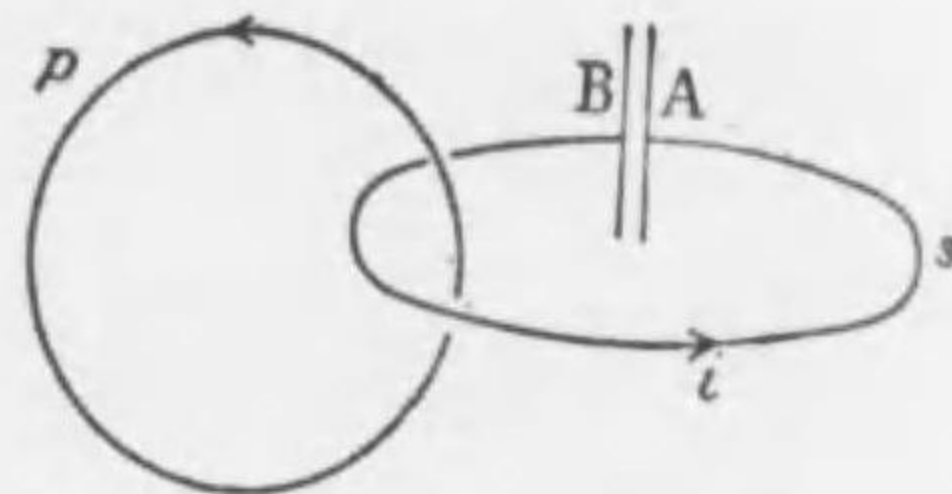
次の如き困難が起る。夫は A, B は圖の如く大なる平板を用ひ

ずに回路の電線の兩端を充分近づけたものとしても差支へない。

かくしても其の間の容量は何程でも大きくする事が出来

1) 此の式も次の如く書かれる。

$$\nabla E = 4\pi \rho'$$



第 45 圖

るのである。さて斯様に考へると回路が開いて居るとしても電流は殆んど閉回路を流れて居ると同様であつて、只極めて微小なる部分だけに電流がないだけである。然も p に沿つて動く磁極になされる仕事が 0 であらうか。

今此の磁極になされる仕事は $4\pi i$ であると假定し、換言すれば上記の回路は完全なる閉回路であると考へ、其のために根本的に如何なる事柄を假定せねばならないかを吟味して見よう。

先づ i なる電流が dt なる時間流れる時はコンデンサーの兩極には

$$de = idt$$

なる電荷が蓄積され、そのために電圧は

$$dV = \frac{1}{C} de$$

だけ上る。今コンデンサーの電極の面積を S 距離を d とすれば

$$C = \frac{S}{4\pi d}$$

であるから dV は

$$dV = \frac{4\pi d}{S} idt$$

となる。故に電場の強さは

$$dE = \frac{4\pi}{S} idt$$

だけ増す。もし電媒常数 ϵ なる電媒質を含んで居れば

$$dE = \frac{4\pi}{\epsilon S} idt$$

$$\therefore \frac{dE}{dt} = \frac{4\pi}{\epsilon S} i$$

となる。 s を完全なる閉回路と考へるためには A と B との間

にも電流が流れて居るものとしなければならない。されどここには通常の意味に於ける電流は流れず、只電流に伴つて上式で與へられる如き電場の強さの増加が起るだけである。即ち s を完全なる閉回路と考へることは、單位時間に電場の強さが $\frac{dE}{dt}$ だけ増加する場合には、夫は

$$\frac{\epsilon S}{4\pi} \frac{dE}{dt} = i$$

なる強さの電流に等價なる事を假定する事に他ならない。

之より電流密度は

$$\frac{\epsilon}{4\pi} \frac{dE}{dt} = \frac{1}{4\pi} \frac{dD}{dt}$$

となる。此の假定によれば電氣變位の増加する時は、夫は電流と全く同じ磁氣作用をなす事になる。

マックスウェル (C. Maxwell) の電氣學上最大の功績は實に此の假定にある。之れを連續電流の改定と言ふ。即ち電流は導體と不導體とを問はず常に連續するものであるとする假定である。かくして電流の概念は §1 に述べたものに比して大いに擴張せられ、實電荷の移動によるもののみならず、電氣變位の増加によるものをも含むに至つたのである。されば初め述べた如き電導率 σ と電媒常數 ϵ を有する媒質内にあつては電流密度は

$$I = \sigma E + \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (31h)$$

にて與へられる。右邊第一項は §1 に述べた如き意味の電流即ち實電荷の移動によつて起るものであつて、第二項は電氣變位の増加に起因するものである。前者を傳導電流といひ更に別つて物質内に於ける電子の運動による傳導電流と、分子又は原

1) 電子の本性に関しては電子論に於て詳述する。

子に伴つて電子の運動するによる對流電流との二種に分ける。後者を變位電流といふ。

變位電流は又 I. (24) によつて

$$\frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t}$$

と書く事も出来る。

電流の意味を (31h) の如く擴張すれば (7a) なる關係は非定常状態でも成立する。以下之を説明する。

今媒質内に任意の閉曲面を考へ、 dt なる間に此の中から流出した電荷を de とし、傳導電流と對流電流との和を I とすれば

$$de = I_n' dt dS = dI_n' dS$$

である。但 n は外方に向ふ法線を示す。此のために、此の閉曲面から外部に出る電力線は

$$4\pi de = dt \int D_n dS$$

だけ減少する。即ち $-\frac{1}{4\pi} D_n dS$ だけの變位電流が流出する。即ち流出した電流を I とすれば

$$dt \int I_n dS = dt \int I_n' dS - \frac{dt}{4\pi} \int D_n dS$$

なる關係がある。然るに右邊第一項は de 、第二項は $-de$ であるから、常に

$$\int I_n dS = 0$$

である。

I. (24a) より上記の (31f) を説明したと全く同様にして次式が説明される。¹⁾

1) 此の式では次の如く書く。(第250頁脚註参照)

$$\text{div} I = 0$$

$$\frac{\partial l_x}{\partial x} + \frac{\partial l_y}{\partial y} + \frac{\partial l_z}{\partial z} = 0 \quad (31i)$$

此の関係は非定常状態に於ても成立するものであるが、若し變位電流の概念を導入しなければ定常状態に於てのみ成立するものとなる。

e. 電磁氣場に於けるエネルギーの密度 上に考へた如く電場と磁場とが共存する時は之を電磁氣場といふ。電磁氣場のエネルギーは電場のエネルギーと磁場のエネルギーの和であるから、其の密度は

$$W = \frac{ED}{8\pi} + \frac{HB}{8\pi} \quad (31j)$$

である。

§ 28. 連続せる媒質中に於ける電磁現象 II. 前節に求めた式は何れも電氣磁氣學の根本の定理であつて、如何なる問題も之によつて解く事が出来、靜電氣學及び靜磁氣學も其の特別の場合として含まれて居る。

a. 靜電場

靜電場には磁場が存在しない。又電流も考へない。且つ電場は時間に無關係である。此の三つの條件から上の式を見れば靜電場の根本的定理が得られる。

先づ(31e)に於ては

$$D = eE$$

は其のまま採用し、他の式は茲では不要である。又(31d)も不要である。

(31e)の左邊は0である。何となれば磁場は存在しない場合を考へて居るからである。さて(31e)の左邊が0とは此の式の根源に立ち戻つて(31b)のVが0といふ事である。従つてある閉路に沿つて單位正電荷を運ぶ時之に要する仕事は0なる事

を示すものである。即ち此の時電場は無渦場¹⁾である。従つて電場は電位Vから次の如くにして導かれる。²⁾

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

但Vは次の如きものである。

$$V = \int \rho \frac{dv}{r}$$

(31f)及び(31g)は其の儘採用される。即ち一つを書けば

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho$$

此の式に $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ 其の他の關係を入れれば

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho$$

なる式を得る。之をポアツソン (Poisson) の式といふ。電荷のない點では右邊が0となる。此の場合をラプラス (Laplace) の式といふ。今

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

の代りに ∇^2 を用ひればポアツソンの式は

$$\nabla^2 V = -4\pi\rho'$$

となる。

靜電場には電流はない。されば(31h)によつて導体内には電場がない事が必要になる。

b. 靜磁場

靜磁場とは磁石の生ずる磁場であるから固より電流はない。又電場を考へる必要がない。且つ現象は時間には無關係である。

1) 第18頁参照 2) I, § 12 参照

る。されば先づ(31e)より

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

を得る。次に(31d)の左邊が0であるから静電場に於けると同じ理由によつて磁場 \mathbf{B} は磁位 Ω から次の如くにして導き出せる

$$H_x = -\frac{\partial \Omega}{\partial x} \quad H_y = -\frac{\partial \Omega}{\partial y} \quad H_z = -\frac{\partial \Omega}{\partial z}$$

但し Ω は次式によつて求められる

$$\Omega = \int \rho_m \frac{dv}{r}$$

但 dv は考へる點から r の距離にある素體積で ρ_m は其の中磁氣量の密度である。

(31e)以下は静磁場には全く無關係である。

c. 定常電流

此の場合には空間に電場も磁場もあり得るが、夫等は何れも時間には無係である。されば(31c)はそのまゝ通用して

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

なる關係が行はれる。又(31d)も時間を含んで居らないから其の儘の形が適用され、電流と磁場の間に

$$4\pi I_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}$$

$$4\pi I_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$4\pi I_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

なる關係がある。然るに磁場が時間に無關係な事から(31e)によつて電場は

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

なる性質がある。(31e)を導き出した方法を回顧すれば、此の式は媒質内に任意に描かれた閉路に沿つて電荷を運ぶ仕事¹⁾が0なる事を示す。故に電場はポテンシャルから導出し得る事になる。従つて電場は無渦場である。

(31f)及び(31g)は固より其のまゝ適用される。

(31h)によつて電流の強さは

$$\mathbf{I} = \sigma \mathbf{E}$$

によつて與へられ、定常電流には變位電流は存在しない事が知られる。

媒質中のエネルギーは(31j)によつて與へられる。

d. 完全なる電媒質内に於ける電磁氣現象。

電導率 σ が0なる媒質を完全なる電媒質といふ。されば(31h)に $\sigma=0$ と置いて

$$\mathbf{I} = \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

となり、完全なる電媒質の中には變位電流のみが存在し得る事を知る。従つて此の關係を(31d)に入れて

$$\left. \begin{aligned} \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{aligned} \right\} (32a)$$

を得る。¹⁾

1) 之を次の如くに書き表はす事が出来る。

$$\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{rot} \mathbf{H}$$

次に(31e)に於て右邊のBを(31c)によつて

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

と置けば

$$\left. \begin{aligned} -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} &= \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \end{aligned} \right\} (32b)$$

となる。

以上(31a)と(31b)は(31c)と共に完全なる電媒質内に於ける電磁氣現象を示す基本的の式である。今(32a)の第一の式を時間tにて偏微分をすれば

$$\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right)$$

となる。座標y及びzと時間tに就てなす偏微分の順序を交換すれば此の式の右邊は

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_x}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H_y}{\partial t} \right)$$

となる。此の括弧内の量の代りに(32b)を代入すれば之は

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\mu} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \right\} \\ & = \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial x} \right\} \\ & = \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \right\} \end{aligned}$$

となる。但し媒質は均質なりとしたからμは座標に無関係である。

今媒質内に實電荷が存在しないとすれば(31f)と(31c)とから

1) 之を次の如くに書き表はす事が出来る。

$$\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot} \mathbf{E}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

を得る。従つて

$$-\frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial x}$$

となり、

$$\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right)$$

となる。同様にして次の如き一組の式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ \epsilon \mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \epsilon \mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} (32c)$$

既に屢々述べた如く實磁氣は存在しないから(31c)によつて

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

なる関係がある。此の式を用ひて上と同様の運算をなせば次の如き他の一組の式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon \mu \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} \\ \epsilon \mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} \\ \epsilon \mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} (32d)$$

1) 第101頁に述べた∇²なる記號を用ふれば此の三つを一括して次の如く書く事が出来る。

$$\epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathbf{E}$$

2) 上式と同様に之等三式を一括して次の如く書く事が出来る。

$$\epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathbf{H}$$

(32c) と (32d) とは E と H とが入れ代つて居る以外は全く同様な式である。されば實電荷の存在せざる完全電媒質の中に於ては、E も H も全く同一の微分方程式を満足するものなる事が知られる。之等の式を満足する量は時間 t 及び座標に關して周期的に變するものであつて其の典型的なものを波動とする。されば (32c) 及び (32d) の如き式を波動の方程式 (Wave equation) といふ。

真空中では σ は 0 である。従つて真空は完全なる電媒質である。従つて真空中の電磁氣現象は (32a), (32b), (32c) 及び (32d) に

$$\epsilon = \mu = 1$$

と置ける式によつて表はされ、之等の式は實に電磁氣波動論の出發點となるものである。

c. 準定常状態

純粹の定常状態とは電磁氣現象が時間に無關係なるをいふ。換言すれば變位電流が存在せざる場合である。之に反して傳導電流が存在せざる場合が即ち上に考へた完全なる電媒質内に於ける電磁氣現象である。次に此の中間にあつて傳導電流も變位電流も共に存在する如き一般の媒質内に於て、變位電流は傳導電流に比し極めて小なる場合を考へる事とする。

かゝる媒質中では電氣變位と電場の強さ、及び磁氣感應と磁場の強さとの間には (31e) の如き關係がある。又電流は變位電流を省略し得るから (31d) より

$$I = \sigma E \quad (33a)$$

で與へられる。此の關係を (31d) に入れて

$$\left. \begin{aligned} 4\pi\sigma E_x &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ 4\pi\sigma E_y &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (33b)$$

$$4\pi\sigma E_x = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \quad \Bigg|$$

なる式を得る。之は即ち變位電流の概念を導入する以前に電場と磁場との間に存在せる關係である。

さて (31e) の第一の式に (33b) を入れて

$$\begin{aligned} -\frac{\partial B_x}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} \right\} \end{aligned}$$

なる式を得る。然るに實磁氣の存在せざる事から

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial H_x}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2}$$

となり直に

$$4\pi\sigma \frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2}$$

を得る。同様にして次の如き一組の式を得る。

$$\left. \begin{aligned} 4\pi\sigma\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} &= \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} \\ 4\pi\sigma\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} \\ 4\pi\sigma\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (33c)$$

之と同様に (33b) の第一の式を t にて微分して

$$4\pi\sigma \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_z}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H_y}{\partial t} \right)$$

を得る。之に (31e) を入れ且つ媒質中に實電荷の存在せざる事を假定して

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

1) 之を次の如く書く事も出来る。

$$4\pi\sigma\mu \frac{\partial H}{\partial t} = \nabla^2 H$$

なる関係を入れれば

$$4\pi\sigma\mu \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$$

を得る。同様にして次の如き一組の式を得る。¹⁾

$$\left. \begin{aligned} 4\pi\sigma\mu \frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ 4\pi\sigma\mu \frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ 4\pi\sigma\mu \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} (33d)$$

I と E とは (33a) に示す如く互に比例する故に、E が (33d) の如き式を満足する時は必然的に I も同様な式を満足する筈である。即ち I に対しても亦次の如き式を得る。²⁾

$$\left. \begin{aligned} 4\pi\sigma\mu \frac{\partial I_x}{\partial t} &= \frac{\partial^2 I_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 I_x}{\partial z^2} \\ 4\pi\sigma\mu \frac{\partial I_y}{\partial t} &= \frac{\partial^2 I_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 I_y}{\partial z^2} \\ 4\pi\sigma\mu \frac{\partial I_z}{\partial t} &= \frac{\partial^2 I_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 I_z}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} (33e)$$

一般に X を時間と座標との函数とし、a を常數とせる時

$$a \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}$$

の如き偏微分方程式を熱傳導の方程式 (Equation of heat conduction) といふ。夫は熱の傳導の問題が、斯様な偏微分方程式となるものの中、典型的のものである爲である。さて (33c), (33d), (33e)

1) 即ち次の如き関係を得る。

$$4\pi\sigma\mu \frac{\partial E}{\partial t} = \nabla^2 E$$

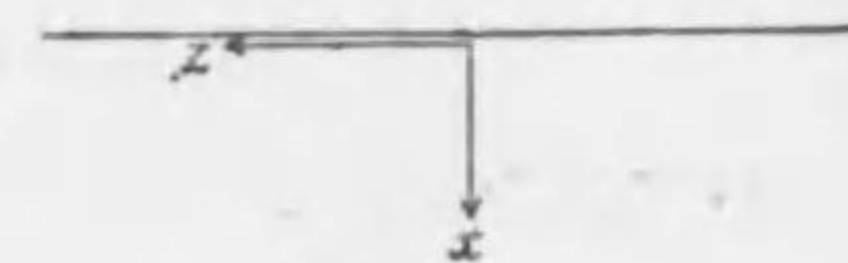
2) 此の三式を一括して次の如く書く。

$$4\pi\sigma\mu \frac{\partial I}{\partial t} = \nabla^2 I$$

は何れも熱傳導の方程式である。従つて此の場合の磁場、電場及び電流は何れも熱の傳導と同一の法則に従つて媒質中を傳播する事が知られる。

§ 29. 導體の表面に於ける電流の分布 今 $y-z$ 面に於て真

空と境せらるゝ無限に大なる導體を取り其の表面と真空内に、導體面に平行に



第 46 圖

$$E_x = E \cos \omega t \quad (34a)$$

なる電場を與へた場合の導體内の電流の分布を計算する。尙真空中にも此の式で與へられる如き電場が存在する事とする。又 x 軸は導體の表面より内部に向ふ如く取るものとする。

真空中にては

$$\sigma = 0$$

であつて傳導電流は存在しない。真空中の電流は變位電流のみであつて (31h) より

$$I_x = -\frac{1}{4\pi} \omega E \sin \omega t$$

となる。導體中には傳導電流も變位電流も共に存在するも、今後者は省略し得る程小なりとする。然らば導體中の現象は前節 c の場合となり、(33e) が電流の分布を與へる。然るに導體の表面には (34a) の如き電場が存在するから表面に於ける電流の密度は

$$I_x = \sigma E \cos \omega t \quad (34b)$$

で與へられる。I_y 及び I_z は勿論存在しない。

x -軸は導體の表面から内部の方に向ひ、座標の原點は導體面に取る。然らば表面に於ける電場が x 分及び y 分を有せざる故に、導體全體に対して

$$I_x = I_y = 0$$

と置いて差支へない。又電流の強さは y 及び z には無関係となるは明かである。然らば (33e) は

$$4\pi\sigma\mu \frac{\partial I_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 I_z}{\partial x^2} \quad (34c)$$

なる只一つの式となる。今

$$I_z = I e^{i\omega t} \quad i = \sqrt{-1} \quad (34d)$$

と置いて之を (34c) に入れ

$$4\pi i \omega \sigma \mu = a^2$$

と置けば

$$a^2 I = \frac{d^2 I}{dx^2}$$

を得る。此の微分方程式の解は

$$I = A e^{-ax} + B e^{ax}$$

である。但し A, B は積分の常數とする。

電場の強さは導體の表面に外部から與へて居るから、 $x = \infty$ とすれば $I_z = 0$ となるを要する。従つて $B = 0$ となり

$$I_z = A e^{-ax + i\omega t} \quad (34e)$$

で示される事になる。

次に a を求める。 a^2 より

$$a = (4\pi\omega\sigma\mu)^{\frac{1}{2}} \sqrt{i}$$

を得る。然るに

$$i = \varepsilon^{\frac{\pi}{2}i}$$

であるから

$$\sqrt{i} = \varepsilon^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

1) 電氣工學に於ては通常

$$\sqrt{-1} = j$$

と置く。

となり、従つて

$$a = (2\pi\omega\sigma\mu)^{\frac{1}{2}}(1+i)$$

となる。故に

$$(2\pi\omega\sigma\mu)^{\frac{1}{2}} = p \quad (34f)$$

と置けば (34e) によつて

$$I_z = A e^{-px + i(\omega t - px)}$$

を得る。然るに

$$\begin{aligned} e^{-i(\omega t - px)} &= \cos(\omega t - px) + i \sin(\omega t - px) \\ &= \cos \omega \left(t - \frac{p}{\omega} x \right) + i \sin \omega \left(t - \frac{p}{\omega} x \right) \end{aligned}$$

であるから

$$I_z = A e^{-px} \left\{ \cos \omega \left(t - \frac{p}{\omega} x \right) + i \sin \omega \left(t - \frac{p}{\omega} x \right) \right\}$$

となる。此の式に $x = 0$ と置けば

$$I_z = A (\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

となる。之は導體の表面に於ける電流密度であるから (34b) に等しくなければならない。故に

$$A = \sigma E$$

とし、且つ實數部分を取るべき事を知る。即ち電流は

$$I_z = \sigma E e^{-px} \cos \omega \left(t - \frac{p}{\omega} x \right) \quad (34g)$$

で與へられる。

外部からは導體の表面に (34a) の如き電場を與へるのみであるが導體内部にも (34f) と $I = \sigma E$ とによつて

$$E_z = E e^{-px} \cos \omega \left(t - \frac{p}{\omega} x \right) \quad (34g')$$

なる電場が存在する事となる。

次に導體内に於ける磁氣感應を計算する。

1) 第323頁脚註(オイラーの公式)参照。

$$E_x = E_y = 0$$

であつて E_z は (34g') の如くであるから、之等の値を (31e) に入れ、且つ磁場の強さも I 及び E と同じく y 及び z には無関係なるは當然であるから直に

$$B_x = B_z = 0$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

なる事が知られる。此の E_z の代りに (34g') を入れれば容易に

$$\begin{aligned} B_y &= -\frac{\sqrt{2p}}{\sigma\omega} E\epsilon^{-px} \cos\left\{\omega\left(t - \frac{p}{\omega}x\right) - \frac{\pi}{4}\right\} \\ &= -\frac{\sqrt{8\pi\mu}}{p} E\epsilon^{-px} \cos\left\{\omega\left(t - \frac{p}{\omega}x\right) - \frac{\pi}{4}\right\} \quad (34g'') \end{aligned}$$

なる事が知られる。即ち磁氣感應は y 軸の方向に向ふ、即ち表面に平行で電流及び電場に直角である。

上の計算の結果によれば導體中の電流、電場及び磁氣感應は表面を距ると共に一定の法則に従つて強さが減少し、何れも $x = \infty$ にて 0 となる。又位相は何れも導體内に深く入る程遅れる事、電流と電場は同一の位相にありて、之等の位相は表面より

$$\frac{\omega}{p} = \left(\frac{\omega}{2\pi\sigma\mu}\right)^{\frac{1}{2}}$$

なる速度で導體中に傳播する事等が知られる。

かく導體中の電磁氣場は導體の表面を距ると共に幾何級数的に急激に強さが減少するが、其の減少の割合は物質によつて大いに異なるものである。次に之を考へて見よう。

銅は $\mu = 1$ と考へられる。今其の表面に周波數一秒 100 なる交番電場を與へた場合には $\omega = 2\pi \times 100$ である。又銅の電導率は $\sigma = \frac{1}{1600}$ としてよいから $p = \frac{\pi}{2}$ となり、此の時は電流、電場及び磁氣感應の最大値は

電 氣 磁 氣 學

三 枝 彦 雄

(369—416)

目 次 (8)

§ 30. 電磁氣場の遮断	369
第四章 單位及びディメンション	372
§ 31. 靜電單位系	372
§ 32. 電磁單位系	373
§ 33. 兩單位系に於けるディメンションの比較	375
§ 34. 電流の絕對測定法	378
§ 35. 電氣量の絕對測定法	333
§ 36. 抵抗の絕對測定法	385
§ 37. 電磁單位系の完成	387
§ 38. 計器の較正	388
§ 39. 實用單位	391
§ 40. 容量の絕對測定法	395
§ 41. 電磁單位と靜電單位との大きさの比較	396
第四篇 電磁氣波動論	401
第一章 電磁氣波動論の基礎の式	401
§ 1. 電信方程式	401
§ 2. 半導體内に於ける波動の傳播	406
§ 3. 導體内に於ける電磁波の傳播	412
§ 4. 導線を傳播する波動	415

$$e^{-\frac{\pi x}{2}}$$

に比例する。故に表面に於ける振幅を1とすれば1cmの深さの點では振幅は0.208となり、又2cmの深さの點では0.043、4cmの深さの點では $\frac{1}{500}$ に過ぎない。

若し交番電場の周波数が一秒百萬回ならば $p=50\pi$ となり、電流共の他の振幅は $e^{-50\pi x}$ に比例し、表面より1mmの點では其の値は表面に於けるもの $\approx 6 \times 10^{-6}$ 倍に過ぎない。即ち電流の大部分は常に表面に密集する傾向がある。

導體を鐵とすれば電流の密集は更に著るしい。今鐵の導磁率を $\mu=1000$ 、電導度を $\sigma=\frac{1}{10000}$ とし、電場の周波数は一秒100回とすれば略々 $p=20$ となる。故に1mmの深さに於いても表面に於ける値の0.13に過ぎなくなり、5mmの深さに於いては0.02より小となる。若し又周波数が一秒百萬回ならば約 $p=2000$ となり、表面0.1mmの深さに於ける値は表面に於けるもの $\approx 5 \times 10^{-9}$ 倍に過ぎない。

§30. 電磁氣場の遮斷 前節に述べた如く導體の表面に周期的に變化する電場及び磁場が作用する時、之等の作用は導體の内部にも浸入するが、其の振幅は内部に進むと共に幾何級数的に減衰して一定の距離に於て既に外部の電磁氣場に比して甚だ小となり、之より内部には電磁氣場は殆んど浸入しないと見做す事が出来る。今此の距離を d とする。之を換言すれば d なる厚さの導體は、電磁氣場の影響を殆んど遮斷して其の内部に及ばさない。従つて今厚さ d なる無限に廣い導體の板を置けば、其の前面に存する電磁氣場は背面には殆んど及ばない筈である。此の時板の厚さを d より大とするも實用上の効果は殆んど變化しない。

さて電磁氣現象の強さを一定の比例に小とするために要する導體の板の厚さ d は、導體の電導度、導磁率及び電磁氣場の周

波数によつて大いに異なる。今電磁場の強さを $\frac{1}{q}$ とするに要する板の厚さを求める。

前節によつて電磁氣場の強さは e^{-pd} に比例する。故に d は

$$e^{-pd} = \frac{1}{q}$$

より求められる。即ち

$$d = \frac{1}{p} \log q$$

となる。(34f)によつて d は又次の如くなる。

$$d = \frac{1}{(2\pi\omega\sigma\mu)^{\frac{1}{2}}} \log q \quad (34h)$$

故に d は電磁場の周波数、電導率、導磁率の二乗根に逆比例し、 q の對數に比例する。即ち一定の比例に電磁氣場を遮斷するためには、周波数の大なる程 d が小で足り、又電導率及び導磁率の大なる物質を用ふれば板は薄くて足り、若し完全導體を用ふれば $\sigma = \infty$ であるから $d = 0$ となる。前節の計算によれば百萬サイクルの電磁現象を遮斷する爲に銅板を用ふれば 1mm で充分であり、若し鐵板ならば 1mm よりも更に薄き板を以て充分に目的を達する事が出来る。然るに周波数が 100 サイクルならば銅板の場合には數厘を要し、鐵板でも實に數耗を用ひねばならない事が知られる。

上の理論は無限に廣い平面によつて境せられる導體に没入する電磁氣現象より出發し、平板の遮斷に就て論じたのであるが、然らざる場合にも勿論同様な結論を導く事が出来る。されば一定の厚さの導體によつて閉曲面を作れば、之によつて内外の電磁氣場を互に遮斷する事が出来る。されど此の際注意すべきは此の作用が周波数によつて異なるために、若し内外に於ける電磁氣場の周波数が異なる場合には、内部の電磁氣系が外部に及ぼす影響と逆に外部の電磁氣系が内部に及ぼす影響と

は割合が異なる事である。例へば外部の電磁氣系の周波数は 100 サイクル、内部の周波数は百萬サイクルとし、厚さ 1mm の銅板にて之を境せるものとすれば、内部の現象は外部には殆んど全く影響を及ぼさないが外部からは殆んど自由に内部に進入する事が出来るのである。

實用上の見地からは上の如く電磁氣現象を遮斷するために 1mm 以下の板にても充分の場合があるが、有限の厚さを以て完全に遮斷するためには所謂完全導體による外はない事は (34h) より明らかである。何となれば完全に遮斷することは $q = \infty$ の場合であるが、 ω は有限であるから d を有限ならしむるためには σ 又は μ を ∞ とする他はない。然るに μ は實磁氣の存在せざるために ∞ となる能はざるものである。従つて $\sigma = \infty$ なる完全導體による他はない事となる。固より完全導體も理想的の、實在せざるものである。即ち理論上電磁氣場を完全に遮斷する事は不可能である。

第一編に述べた如く靜電場は導體を以て完全に遮斷する事が出来る。周波数の大なる電磁氣場は殆んど完全に遮斷される。靜磁場を遮斷するは第二編に述べた如く極めて困難である。

第四章 単位及び次元

§31. 静電単位系 電気磁気學に取扱はる単位は二つの方法によつて定める事が出来る。其の一は電荷に関するクーロンの法則から出發するものであり、第二は磁極に對するクーロンの法則から出發するものである。前者を静電単位系といひ、後者を電磁単位系といふ。次に先づ静電単位系に於ける次元を考察する。

以下に於て基本単位たる長さ、質量及び時間の次元を L, M, T で表はす。又式の中にある物理的の量例へば力と書いてある時は力の次元を示す事とする。次に二三の力學的の量の次元を示せば次の通りである。

$$\begin{aligned} \text{速さ} &= LT^{-1} \\ \text{力} &= MLT^{-2} \\ \text{エネルギー} &= ML^2T^{-2} \\ \text{周波数} &= T^{-1} \end{aligned}$$

之等は次に述べる通り電気磁気學には屢々現はれるものである。

先づ電氣量の次元を定める。

I. (1b) に於て左邊は力であり、右邊の r は長さであるから

$$e = LF^{\frac{1}{2}}$$

然るに力 F の次元は既に示してあるから電氣量 e の次元は

$$e = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$$

となる。

電氣量の次元を決定すれば I. (2a) によつて電場

の強さの次元が知られる。此の式によつて

$$E = M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$$

を得る。

I. 5f) によつて電場の次元に長さを乗じたものは電位の次元であるから

$$V = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$$

となる。

斯様に電磁氣の理論を用ひて、總ての次元を決定する事が出来る。下に之を一括して表にして示す事とする。

注意すべきは磁極の強さの次元である。

既に屢々述べた如く、電氣的諸量と磁氣諸量との間の連結は、ある閉路に沿つて磁極を一周せしむるに要する仕事、磁極の強さと閉路を正の方向に貫く電流の強さとの積に比例するといふ事である。今 m を磁極の強さ、 W を其のエネルギーとすれば之等の三量の次元の間には次の如き關係がある筈である。

$$W = mi \tag{35}$$

従つて i の次元が知られれば (W は知られて居るから) 直に m が知られる。静電単位系に於ては之によつて m の次元を決定する事が出来る。逆に電磁単位系に於ては、先づ m を知つて之より電流 i の次元が定まる。即ち上の關係は電氣的の量と磁氣的の量とを連結するもので

1) より一般に此の關係を表はせば

$$W = \frac{mi}{p}$$

とする事が出来る。 p は任意の量である。以下述べる静電及び電磁単位系に於ては p は次元のない通常の数として (35) の如き關係を取つたが之に任意の次元を與へれば夫々特有の単位系を得る。 p に速度の次元を與へたものは電氣的の量は静電単位に一致し、磁氣的の量は電磁単位に一致する。かゝる単位系をガウスの絶対単位系と呼ぶ。

あつて、電氣力學の體系に於て極めて重大な意味を有するものである。

次の表に於て第一行は考へる量と其の記號である。第二行は其のディメンションを定義する式であつて第三行がディメンションを示す。

量	定 義 式	ディメンション
電 氣 量 e	$F = \frac{e^2}{r^2}$ I. (1b)	$e = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$
電 場 E	$F = eE$ I. (2a)	$E = M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$
電 位 V	$E = -\frac{\partial V}{\partial x}$ I. (5f)	$V = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
静 電 容 量 C	$V = eC$ I. (10a)	$C = L$
電 氣 變 位 D	$\int D_{nl} dS = 4\pi e$ I. (24a)	$D = M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$
電 媒 常 数 ϵ	$\epsilon = \frac{D}{E}$ I. (24)	$\epsilon = 0$
電 流 i	$i = \frac{e}{t}$ III (1)	$i = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}$
抵 抗 R	$R = \frac{V}{i}$ III (2)	$R = L^{-1} T$
感 應 係 数 L'	$W = \frac{1}{2} i^2 L'$	$L' = L^{-1} T^2$
磁 極 m	$W = mi$	$m = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$
磁 場 H	$F = mH$ (152 頁)	$H = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-2}$
磁 位 Ω	$H = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}$ II. (3)	$\Omega = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}$
磁 氣 能 率 M'	$M' = ml$ (152 頁)	$M' = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}}$
磁 化 の 強 さ I	$I = \frac{M}{v}$ II. (15)	$I = M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}}$
磁 化 率 κ	$I = \kappa H$ II. (15b)	$\kappa = L^{-2} T^2$
導 磁 率 μ	$\mu = 1 + 4\pi\kappa$ II. (15d)	$\mu = L^{-2} T^2$
磁 氣 感 應 B	$B = \mu H$ II. (15c)	$B = M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}}$

1) 感應係数を表はすに之迄 L を用ひたが茲では長さのディメンションと區別するために L' とした。

2) 却註 1) と同じ理由によつて M' とした。
 ガウス単位系 $[M] = 0 \text{ T}^2 \text{ V}$

此の單位系に於て長さ、質量及び時間に如何なる單位を採用しても静電單位系としての性質には變りはなく、只夫々の單位の大きさが變るだけである。特に輻、ダイン及び秒を用ひた時には之等を C. G. S. 静電單位系といふ。

§ 32. 電磁單位系 静電單位系が電荷の間に作用する力を基礎とした如く、電磁單位系は磁極に関するクーロンの法則より立發する。第151頁 II. (1) によつて磁極の強さ m のディメンションは

$$m = L F^{\frac{1}{2}}$$

でなければならない事が知られる。されば

$$m = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$$

である。之は静電單位系に於ける電荷のディメンションと同じである。

前節に於て電荷のディメンションから電場の夫を定めたと同じ關係によつて、磁場のディメンションは次の如くなる。

$$H = m^{-1} F = M^{-\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T \cdot M L T^{-2} \\ = M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$$

之は静電單位系に於ける電場と同じディメンションである。

之より前節に用ひたと同じ關係によつて磁位、其の他の諸量及び電流、其の他のディメンションを定める事が出来る。之を一括して、次の頁の表に示してある。之等の長さ、質量、時間に輻、グラム及び秒を用ふれば C. G. S. 電磁單位系を得るのである。

§ 33. 兩單位系に於けるディメンションの比較 今兩單位系に於ける同一量のディメンションの比を取つて見る。例へば電磁系に於ける電氣量のディメンションを静電系に於

デ イ メ ン シ ョ ン の 表

	静電單位	電磁單位	電磁單位 静電單位
電媒常数 ϵ	1	$L^{-2}T^2$	$\frac{1}{c^2}$
電氣量 e	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{c}$
電氣變位 D	$M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{c}$
電場 E	$M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}T^{-1}$	c
電位 V	$M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-2}$	c
靜電容量 C	L	$L^{-1}T^2$	$\frac{1}{c^2}$
皮相電荷 e'	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{5}{2}}T^{-2}$	c
電流 i	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-2}$	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}T^{-1}$	$\frac{1}{c}$
電氣抵抗 R	$L^{-1}T$	LT^{-1}	c^2
感應係数 L	$L^{-1}T^2$	L	c^2
導磁率 μ	$L^{-2}T^2$	1	c^2
磁格 m	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}$	c
磁場 H	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}T^{-2}$	$M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1}$	$\frac{1}{c}$
磁氣感應 B	$M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{3}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1}$	c
磁位 Ω	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-2}$	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{c}$
磁氣能率 M	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{5}{2}}T^{-1}$	c
磁化の強さ I	$M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{3}{2}}$	$M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1}$	c

但し $c=LT^{-1}$

けるもので割れば

$$\frac{M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}}{M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}} = \frac{1}{LT^{-1}}$$

となる。之は速度のデ イ メ ン シ ョ ン の 逆 数 である。又磁氣感應のデ イ メ ン シ ョ ン の 比 を 取 れ ば

$$\frac{M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1}}{M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{3}{2}}} = LT^{-1}$$

となり、之は速度のデ イ メ ン シ ョ ン である。其の他如何なる量のデ イ メ ン シ ョ ン の 比 を 取 つ て も、其の結果は速度のデ イ メ ン シ ョ ン の 正 又 は 負 の 乗 数 となる。第376頁の表には、各系に於けるデ イ メ ン シ ョ ン と 其 の 比 と を 示 して あり。即ち第二行は靜電單位系、第三行は電磁單位系に於けるデ イ メ ン シ ョ ン を 示 し、第四行は兩系の比を示す。但し c は速度のデ イ メ ン シ ョ ン を 示 す。即ち

$$c = LT^{-1}$$

である。

かく靜電單位系に於けるデ イ メ ン シ ョ ン に、速度の正又 は 負 の 乗 数 を 乗 ず れ ば 電 磁 單 位 系 に 於 ける デ イ メ ン シ ョ ン を 得 る。然らば靜電單位で測つた數値と、電磁單位で測つた數値との間には如何なる關係があるか。換言すれば靜電單位と電磁單位の大きさの比は幾何であるか。

之を知るには c の數値を知れば充分である。例を電氣量に取つて考へるに靜電單位で測つて e_s なる數値を得たとすれば、此の數値とデ イ メ ン シ ョ ン を 次 の 如 く 併 記 すれば、此の電荷の大きさと物理的性質とを同時に知る事が出来る。

$$e_s [M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}]$$

次に之を電磁單位で測つて e_m なる數値を得たとすれば

$$e_m [M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}]$$

と書けば大きさと物理的意義とを同時に知る事が出来る。今電磁單位系に於ける測定値より靜電單位系に於ける夫を得んとすれば、一定の數値と一定のデ イ メ ン シ ョ ン を 有 する換算率を乗じなければならぬ。此の換算率のデ イ メ ン シ ョ ン は上