方程式論

3

272124

算學叢書

方程式論

全一冊

中華書局印行

919

原序

方程式論爲算學之一分科,研究一切代數方程式之性質,學高等算學必由之階級也.高次方程式之解法,前人論者多矣,非說理高深,卽立術繁複,初學是科者,每苦不得要領.是書編纂,本著者多年研究之心得,採數十名家之精華,選材審愼,說理淺顯,論方程式之性質也,由淺而深,述方程式之解法也,由簡而繁,不變式與協變式,化法難而不切實用則删除之;置換法置換羣及有理範圍,應用廣而領悟不易則詳論之;葛羅華(Galois)之理論,其理艱深則多設例題以明之;霍納(Horner)牛頓(Newton)之近似法,其法便利則採用之.凡已習初等代數幾何三角及解析幾何而欲進習高等算學,是殆不可不讀之書也.

本書所用之參考書如下:

Bachmann, P. Kreistheilung. Lepzig, 1872.

Burnside, W. Theory of Groups. Cambridge, 1897.

Burnside, W. S., and Panton, A. W. Theory of Equations, Vol. I, 1899; Vol. II, 1901.

Dickson, L. E. Theory of Algebraic Equations. New York, 1903.

Easton, B. S. The Constructive Development of Group-theory. Philadelphia, 1902.

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Galois, D'Évariste Œuvres mathématiques, avec une introduction par M. Émile Picard. Paris, 1897.

Klein, F. Vorlesungen über das Ikosaeder. Leipzig, 1884.

Matthiessen, L. Grundzüge der Antiken u. Modernen Algebra. Leipzig, 1878.

Netto, E. Theory of Substitutions, translated by F. N. Cole, Ann Arbor, 1892.

Netto, E. Vorlesungen über Algebra. Leipzig, Vol. I, 1896; Vol. II, 1900.

Petersen, J. Theorie der Algebraischen Gleichungen, Kopenhagen, 1878.

Pierpont, J. Galois' Theory on Algebraic Equations. Salem, 1900.

Salmon, G. Modern Higher Algebra. Dublin, 1876.

Serret, J. A. Handbuch der Höheren Algebra. Deutsche Uebers, v. G. Wertheim. Leipzig, 1878.

Todhunter, I. Thoery of Equations. Londen, 1880.

Vogt, H. Résolution Algébrique des Équations. Paris, 1895.

Weber, H. Lehrbuch der Algebra. Braunschweig, Vol. I, 1898; Vol. II, 1896.

Weber, H. Encyklokädie der Elementaren Algebra und Analysis. Leipzig, 1903.

方程式論

目次

方程式論

第一章

方程式之基本性質

1. 函數. 研究方程式論時,將用一種所謂代數函數(Algebraic function)者。代數函數者,乃一僅含常指數諸式之加減乘除自乘及開方諸運算之函數也。如 x^2+ax+b, $\sqrt{2x^2+1}$, $\frac{x}{x+5}$ 爲代數函數之例;然 $\sin y$, e^x, $\log(1+x)$, $\tan^{-1}Z$ 卽非爲代數的而爲超越函數(transcendental function)。

一量之有理函數(Rational function)者,乃一僅含該量之加減乘除諸運算之函數也。若含該量之被算數之方根則爲無理函數。一量之整函數(Integral function)者,乃一該量不在分母內之函數也。如 ay^2+by+c 爲 y 之有理函數, $y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{2}}+1$ 爲 y 之無理函數; $\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}$ 爲 x 之整函數,而 $\frac{1}{x}$ 則非爲整函數矣。假定

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n, \qquad \text{I}$$

設 n 爲正整數,則 $f(x)$ 爲 x 之 n 次有理整代數函

數(Rational integral algebraic function)。係數 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 為不因 x 而變之數。關於此等係數，更可立種種假定。

如可假定之為不互相依變之變數。此時方程式 $f(x)=0$ 之根為不互相依變之量。又可假定諸變數係數為他一變數或數變數之有理函數。如於 $tx^2+tx+(t^2+t)$，諸係數為變數 t 之函數。

又可假定諸係數為常數——或特別代數數，或代表此種數之文字。

關於係數之假定之性質，以下將隨時限定之。若干定理中，諸係數限於實數，有理數或整數；而他定理中，諸係數亦有可為分數或複虛數(Complex number)者；於葛羅華(Galois)之理論中，根式亦可用入。然決不假定諸係數為超越數(Transcendental number)，如 π 或 $e=2.718\cdots\cdots$ 者。

次十章內，諸係數以文字表之，視為自變數或常數均可。惟學葛羅華之理論之前，須辨別斯二者。

2. 使§1內之多項式 I 等於零所得之方程式，謂之 n 次代數方程式。為簡便計，以 $f(x)=0$ 表之。之值之化此方程式為恆等式者謂之根。

當諸係數皆為自變數時，則此方程式即為所謂普通 n 次方程式。然由§111，葛羅華理論之論點觀

之，知此所謂普通方程式，非眞爲普通，而實一甚特別者耳。

3.　**定理.** 若 α 爲方程式 $f(x)=0$ 之根，則函數 $f(x)$ 能以 $x-\alpha$ 除之而無餘數。

以 $x-\alpha$ 除 $f(x)$ 至所得餘數不含 x. 以 Q 表其商，R 表餘數。則 $$f(x)=(x-\alpha)Q+R.$$
由假設，α 爲一根；故以 α 代 x，得
$$f(\alpha)=(\alpha-\alpha)Q+R=0.$$
故 $R=0$，而定理爲已證明.下述定理爲此之逆定理。

4.　**定理.** 若函數 $f(x)$ 得以 $x-\alpha$ 除之而無餘數，則 α 爲 $f(x)=0$ 之根。

由假設 $$f(x)=(x-\alpha)Q.$$
故方程式 $f(x)=0$ 可書爲 $(x-\alpha)Q=0$，以 α 代 x，能適合後方程式。故 α 爲 $f(x)=0$ 之根。

5.　上述定理爲下述定理之特別之例。

定理. 當以 h 代 x，函數 $f(x)$ 之値，等於以 $x-h$ 除 $f(x)$ 之運算中所得不含 x 之餘數。

設 R 爲不含 x 之餘數；則
$$f(x)=(x-h)Q+R,$$
以 h 代 x，則得 $f(h)=R$.

6.　以含數字係數之二項式除多項式之法，用

綜合除法 (synthetic division) 行之甚速。設欲以$x-3$除$^{3}+5x^2+4x-23$。茲將尋常之法與綜合除法並示之。

$$\begin{array}{l|l}
x^3+5x^2+4x-23 & x-3 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-3x^2} & x^2+8x+28 \\
\phantom{x^3+{}}8x^2+4x & \\
\phantom{x^3+{}}\underline{8x^2-24x} & \\
\phantom{x^3+5x^2+{}}28x-23 & \\
\phantom{x^3+5x^2+{}}\underline{28x-84} & \\
\phantom{x^3+5x^2+4x-{}}61 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|l}
1+5+4-23 & 3 \\
\underline{+3+24+84} & \\
1+8+28+61 &
\end{array}$$

於綜合除法內,分離諸係數,略去各部分積 (Partial product) 之首項,改除數第二項之號,使各部分積之第二項可加於被除數內之相當項。更縮簡此法,使商之諸係數與餘數同在一行。

其法如下:

以 3 乘 1,將其積加於 5 得 8.

以 3 乘 8,將其積加於 4 得 28.

以 3 乘 28 將其積加於 -23 得 61.

其商爲 $x^2+8x+28$; 其餘數爲 61。

若被除數內 x 任何乘冪缺乏時,其位置以零係數充補之。

以 $x+5$ 除 x^5-2x^3+x-5。

$$\begin{array}{l|l}
1+0-2+0+1-5 & -5 \\ \cline{2-2}
\underline{-5+25-115+575-2880} & \\
1-5+23-115+576-2885 &
\end{array}$$

故其商爲 $x^4-5x^3+23x^2-115x+576$; 其餘數爲 -2885。

例題 1.　求證 $x^4-5x^3-3x+15$ 有一根爲 5。

$$\begin{array}{r|l} 1-5+0-3+15 & \underline{5} \\ +5+0+0-15 & \\ \hline 0+0-3+\ 0 & \end{array}$$

其餘數爲0；由 §4，故 5 爲一根。

例題 2.　求證 $x=-3$ 適合 $x^5-x^4+10x^3-9x^2+8x-399=0$。

例題 3.　以 $x+4$ 除 $x^7-101x^5+x^4-60x^2+x$。

例題 4.　若 $f(x)=x^5-6x^4+7x^3+x^2+x+2$，求 $f(10)$ 之值。

例題 5.　當 $x=-6$，求函數 $x^7-3x^5+4x^4+5x^3+11$ 之值。

例題 6.　若 -4 爲 $2x^3+6x^2+7x+60=0$ 之根，求其他之根。

例題 7.　若以 $x-h$ 除 $f(x)$，求證當徧以 h 代 x 時，各逐次餘數等於 $f(h)$。

7.　**定理.**　凡 n 次方程式 $f(x)=0$ 僅有 n 根。

茲先假定凡如此之方程式至少有一根。設 α_1 爲 $f(x)=0$ 之根，則由 §3，$f(x)$ 得以 $x-\alpha_1$ 除之而無餘數；由是 $$f(x)=(x-\alpha_1)\phi_1(x),$$
其中商 $\phi_1(x)$ 爲 x 之 $n-1$ 次有理整代數函數。

但 $\phi_1(x)=0$ 亦有一根。以 α_2 表之，則 $\phi_1(x)$ 得以 $x-\alpha_2$ 除之而無餘數，由是 $$\phi_1(x)=(x-\alpha_2)\phi_2(x),$$

而
$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\phi_2(x).$$

因 $\phi_2(x)$ 爲 x 之 $n-2$ 次有理整代數函數;故 $\phi_2(x)=0$ 有一根。繼續如是,將得 $f(x)$ 之 n 因數,即 $x-\alpha_1$, $x-\alpha_2$, ……, $x-\alpha_n$,其他因數爲 a_0 即函數內 x^n 之係數也。由是
$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n).$$

因使 x 等於 n 數 α_1, α_2, ……, α_n 內之任何數,函數 $f(x)$ 等於零,由是 $f(x)=0$ 有 n 根。若與 x 以此 n 根外其他任意之值,則 $f(x)$ 之因數無一等於零,而不合此方程式。故 $f(x)=0$ 不能有 n 以上之根。

8. **定理**. 若 $f(x)=0$ 之諸係數皆爲實數,則此方程式之複虛根(Complex root)成對。

設 $a+ib$ 爲含實係數之方程式 $f(x)=0$ 之根, $i=\sqrt{-1}$, a 可爲零, b 不可爲零。玆將證明共軛數(Conjugate number) $a-ib$ 亦爲一根。

以根 $a+ib$ 代入已知方程式內之 x。用二項式定理展開 $a+ib$ 之乘冪而化簡之。凡不含 i 即含 i 之偶數乘冪諸項皆爲實數;凡含 i 之奇數乘冪諸項皆爲虛數。以 P 表諸實數項之代數和,Q 表諸虛數項之代數和。則得
$$P+iQ=0.$$

然因實數與虛數部分決不能互相抵消,故此方程

式祗當 $P=0$ 及 $Q=0$ 時始能成立。

今以 $a-ib$ 代入方程式 $f(x)=0$ 內之 x。如前展開且化簡之。諸實數項皆不變;諸虛數項與前相同,推改變其號耳。故此時函數之值爲 $P-iQ$。然已證明 $P=0$ 及 $Q=0$,故

$$P-iQ=0,$$

卽 $x=a-ib$ 適合方程式 $f(x)=0$。故 $a-ib$ 爲其一根。

9. 由上定理,知凡有實係數之奇數次方程式,至少有一實根。如三次方程式必有三實根或一實根及二複虛根。

方程式 $x^3-1=0$ 有一實根 1。以 $x-1$ 除 x^3-1,則得二次方程式 $x^2+x+1=0$,其二根皆爲複虛數,卽 $\frac{1}{2}\{-1\pm\sqrt{-3}\}$。此三根謂之一之立方根(Cube root of unity)。其一複虛根之平方,等於他複虛根。又一之三根之和爲零。

10. 當方程式 $f(x)=0$ 內,x 之諸乘冪,由 x^n 以至 x^0,皆存在時,謂之完全方程式(complete equation)。不完全方程式(Incomplete equation),其缺乏之項,補以零係數,可成完全方程式之形式。

多項式或方程式內相連二項同號時,有一符號之連續(Permanence);相連二項異號時,有一符號之變遷(Variation)。方程式 $x^5+x^3-x^2+5=0$ 中,符號之次序

爲 ++−+,故有二變遷與一連續。

11. 狄卡德符號之法則 (Descartes' rule of signs). 方程式 $f(x)=0$ 之係數爲實數,則其正根與符號之變遷之數相同,或較少一偶數。

茲先證明者以因數 $x-\alpha$ 乘多項式 $f(x)$, 生一新正根,乘積內符號之變遷,較原多項式內者多一奇數。

於依 x 之降冪排列之函數內,不論其爲完全或不完全,假定諸項之符號,依如下形式而變化:

$$+\cdots\cdots-\cdots\cdots+\cdots\cdots-\cdots\cdots+\cdots\cdots,$$

+ 後之點,表若干相連正項,而 − 後之點,表相連負項。

設 α 爲一正根。以 $x-\alpha$ 乘 $f(x)$, 而書 x 之各同乘冪於一行,則得一乘積,其符號可書之如下:

$$\begin{array}{l}
+\cdots\cdots-\cdots\cdots+\cdots\cdots-\cdots\cdots+\cdots\cdots \\
\quad -\cdots-+\cdots+-\cdots-+\cdots+-\cdots- \\
\hline
+\pm\cdots-\pm\cdots+\pm\cdots-\pm\cdots+\pm\cdots-.
\end{array}$$

± 表示兩意 (Ambiguity); 卽如是之項之號,不能決定也。± 後之點爲兩意; 卽 $f(x)$ 內每一符號之連續,於 $(x-\alpha).f(x)$ 內則以兩意代之。又凡 $f(x)$ 內符號之變遷, $(x-\alpha).f(x)$ 內有一變遷與之相當。且於乘積內,其末尾更有一變遷。故乘積較 $f(x)$ 至少多含一變遷。

且乘積可含更多之變遷;因 $f(x)$ 內諸相接連續,如 $+++$ 或 $---$,在 $(x-\alpha)f(x)$ 內代以兩意者,實際可代以符號 $+-+$ 或 $-+-$ 也。然類此符號之變遷,常增加偶數個。故 $(x-\alpha)f(x)$ 內變遷之總數較 $f(x)$ 內者多一奇數 1 或 $2h+1$。

$f(x)$ 之末項爲負時,得同樣之結果。

狄卡德之法則,此時甚易得之。設與 $f(x)=0$ 之負根及複虛根相當諸因數之乘積爲已求得。此乘積以 $F(x)$ 表之。因 $F(x)=0$ 旣無正根,則 $F(x)$ 之首項與末項爲同號。故 $F(x)$ 內變遷之數,爲一偶數 $2k$,k 爲零或正整數。若以因數 $x-\alpha_1$ 乘 $F(x)$,α_1 爲一正根,則得 $2k_1+1$ 變遷之乘積,而 $k_1 \geqq k$ 同理乘以第二因數 $x-\alpha_2$ 則得 $2k_2+2$ 變遷;由此類推。由是引入 v 正根,則得 $2kv+v$ 變遷,而 kv 爲零或正整數。故此定理成立。

12. 負根. 作一方程式,其根爲 $f(x)=0$ 之根而變其號者,以應用狄卡德法則於 $f(x)=0$ 之負根。新方程式可以 $-x$ 代 $f(x)=0$ 內之 x 而誘得之。其法僅變合 x 之奇次乘冪諸項之號而已。由是若 α 適合 $f(x)=0$,則 $-\alpha$ 適合 $f(-x)=0$。故 $f(x)=0$ 之各負根,變其號卽爲 $f(x)=0$ 之正根。由是狄卡德法則可應用之於 $f(-x)=0$。

例題 1.　決定 $x^3+3x+7=0$ 之根之性質。

方程式無變遷,故無正根。改含 x 之奇次乘冪諸項之號,而變此方程式,則得 $x^3+3x-7=0$. 新方程式有一變遷,故不能有一以上之正根。故原方程式不能有一以上之負根。由是已知三次方程式之實根為負,而其他二根必為複虛數。

例題 2.　應用狄卡德法則於 $f(x)=x^4-x^3+7x+6=0$.

$f(x)$ 有二變遷,而 $f(-x)$ 亦有二變遷,故 $f(x)=0$ 不能有多於二之正根,亦不能有多於二之負根。

例題 3.　應用狄卡德法則於 $x^{2n}-1=0$.

因 $x^{2n}-1$ 有一變遷, $(-x)^{2n}-1$ 有一變遷,故已知方程式不能多於一正根,亦不能多於一負根。$+1$ 與 -1 為其根,甚易知之。故有 $2n-2$ 複虛根。

例題 4.　若一完全方程式之根皆為實根,求證正根之數等於變遷之數,而負根之數等於連續之數。

例題 5.　祗有正項之方程式不能有正根。若變遷之數為奇數,則此方程式至少有一正根,然不能有偶數個正根。

例題 6.　正負號輪流之完全方程式不能有負根。

例題 7. 若方程式之諸項皆爲正,且此方程式不含 x 之奇次乘冪,則其諸根皆爲複虛根。

例題 8. 若方程式之諸項皆爲正,且皆含 x 之奇次乘冪,則 0 爲此方程式之惟一實根。

例題 9. 應用狄卡德法則於

$$x^3-21x+20=0. \qquad x^6+x^5+1=0.$$

$$x^3-x^2+10x-15=0. \qquad x^6+1=0.$$

$$x^4+5x^3-4x^2-3x+5=0. \qquad x^8-x^4+x^2+1=0.$$

$$x^4+1=0. \qquad x^n+1=0.$$

$$x^5+1=0. \qquad x^n-1=0.$$

$$x^5-1=0.$$

例題 10. 方程式 $x^4-4x^3-7x^2+22x+24=0$ 無複虛根。有若干正根?有若干負根?

例題 11. 求證 $x^5-x^4+x^3-x^2-x-1=0$ 不能適有二正根,亦不能適有一負根。

13. 根與係數之關係.

若 $$f(x)\equiv x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

之根爲 $\alpha_1, \alpha_2\cdots, \alpha_n$, 則由 §7 得

$$f(x)\equiv(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)=0.$$

若依次使 n 等於 2, 3, 4, 則由尋常乘法得

$$f(x)\equiv(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)=x^2-(\alpha_1+\alpha_2)x+\alpha_1\alpha_2=0,$$

$$f(x)\equiv(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)=x^3-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x^2$$
$$+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)x-\alpha_1\alpha_2\alpha_3=0,$$

$$f(x)\equiv(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)=x^4-(\alpha_1+\alpha_2+$$
$$\alpha_3+\alpha_4)x^3+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4$$
$$+\alpha_3\alpha_4)x^2-(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+{}_1\alpha_3\alpha_4+\alpha_2\alpha_3$$
$$\alpha_4)x+\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4=0.$$

此等關係適合下列諸定則:

於 x^n 之係數爲 1 之方程式 $f(x)=0$，其第二項之係數 a_1，變其號，則等於諸根之總和。

第三項之係數 a_2，等於每次取二根諸積之和。

第四項之係數 a_3 變其號，則等於每次取三根諸積之和，由此類推，即係數之號負正輪流取之，而每至一新係數，各積中所取根之數加一，最後至方程式之末項，則等於根之全數之積，而或正或負，則因方程式之次數 n 或偶或奇而定。此等定則可以符號表之如次:

$$\left.\begin{aligned}
&a1=-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots\cdots+\alpha_n),\\
&a_2=(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3+\cdots\cdots\alpha_{n-1}\alpha_n),\\
&a_3=-(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\cdots\cdots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_n=(-1)^n\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\cdots\alpha_n.
\end{aligned}\right\}\quad \mathrm{I}$$

若方程式 $f(x)=0$ 內 x^n 之係數 a_0 非爲一,則以 a_0 除此方程式之各項。由是諸根之和等於 $-\frac{a_1}{a_0}$,每次取二根諸積之和爲$\frac{a_2}{a_0}$,由此類推。

上述表方程式之係數與根之關係諸定則,乃由觀察實行乘法所得三乘積內之關係而得之者。爲欲除對於此等定則之普遍性之疑竇,玆證之如下。設 n 因數相乘時,此等定則能成立;即設

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n,$$

a_1,a_2,a_n 之值如 I 所示。

以他因數$x-\alpha_{n+1}$乘此恆等式之兩邊,則得

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)(x-\alpha_{n+1})=x^{n+1}+(a_1-\alpha_{n+1})x^n$$
$$+(a_2-a_1\alpha_{n+1})x^{n-1}+\cdots-a_n\alpha_{n+1}.$$

然 $a_1-\alpha_{n+1}=-(\alpha_1+\alpha_2\cdots+\alpha_n)-\alpha_{n+1}$,

$$a_2-a_1\alpha_{n+1}=(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n)+(\alpha_1+\alpha_2$$
$$+\cdots+\alpha_n)\alpha_{n+1},$$

$$a_3-a_2\alpha_{n+1}=-(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\cdots)-(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots)$$
$$\alpha_{n+1},$$

………………………………………………

$$-a_n\alpha_{n+1}=(-1)^{n+1}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_{n+1}.$$

故若 n 因數時此等定則能成立,則 $n+1$ 因數時亦能成立。然實行乘法,知此等定則當 $n=4$ 時能成

立,故 $n=5$ 時必能成立。$n=5$ 既能成立,$n=6$ 時必成立,由此類推,n 爲任意正整數時皆能成立,

14. 方程式之係數與根之 n 不同關係,或以爲於方程式之普通解法,諒必有若干便利,n 根之一可由此 n 方程式消去 $n-1$ 根而得之。然此法實無利益,因行消棄時,惟復得原方程式而已。兹取三次方程式 $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ 以爲例。

因
$$a_1=-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3,$$
$$a_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3,$$
$$a_3=-\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

以 α_1^2 乘第一方程式兩邊,以 α_1 乘第二方程式之兩邊,將其結果加於第三方程式以消去 α_2 與 α_3.

得
$$\alpha_1^3+a_1\alpha_1^2+a_2\alpha_1+a_3=0,$$

是實即舊方程式,惟以 α_1 代 x 表未知數而已。

表根與係數之關係之方程式,雖於方程式之普通解法無補,然於數字方程式之解法,當知諸根有特別關係時,爲用甚大。且於代數方程式,常藉以決定與諸根間已知關係相當之係數間之關係。

例題 1. 三次方程式 $x^3+3x^2-16x-48=0$ 有二根之和爲零。求解此方程式,

因
$$\alpha_1+\alpha_2=0,$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-3.$$

故 $\alpha_3=-3$. 以 $x+3$ 除此三次方程式,得

$$x^2-16=0,\quad x=\pm 4.$$

例題 2. 三次方程式 $x^3-9x^2+26x-24=0$ 之根成等差級數。試求之。

命 $a-d$, a, $a+d$ 爲其三根。

則 $3a=9$, $3a^2-d^2=26$; 故 $a=3$, $d=1$, $a-d=2$, $a+d=4$。故三根爲 2,3,4。

例題 3. 三次方程式 $3x^3+x^2-15x-5=0$ 有二根之和爲零。求其三根。

例題 4. 方程式 $2x^3+7x^2+4x-3=0$ 有二根之和爲 -2,解此方程式。

例題 5. 方程式 $2x^3+23x^2+80x+75=0$ 有二等根。試解之。

例題 6. 四次方程式 $9x^4+42x^3+13x^2-84x+36=0$ 有二對等根。試求之。

例題 7. 若方程式 $x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$ 之根皆相等,其係數間之關係若何?

例題 8. 求證一之 n 次根之和爲零。

15. 對稱函數(Symmetric function). 二量或數量之函數,若互易其任二量而此函數不變,則謂之

對稱函數。例如三項式 $a^2+b^2+c^2$ 爲 a, b, c 之對稱函數，因若互易任二量，如 a 與 b，此式之值不變也。茲專論方程式根之對稱函數。此種函數。最簡單之例，爲§13內所與者，卽

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n,$$

$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n,$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\cdots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n,$$ 等等是也。

此等爲最簡單者，因無含根之一次以上乘羃之項也。其他根之對稱函數之例爲

$$\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_1^2\alpha_3^2+\alpha_2^2\alpha_3^2,$$

$$(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_1-\alpha_4)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2$$

$$(\alpha_2-\alpha_4)^2(\alpha_3-\alpha_4)^2.$$

對稱函數以文字 Σ 附以函數之一項而表之。已知諸根及根之對稱函數之一項，則函數之其他諸項常易書出。如已知三次方程式之根爲，α, β, γ，則

$$\Sigma\alpha\equiv\alpha+\beta+\gamma,$$

$$\Sigma\alpha\beta\equiv\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma,$$

$$\Sigma\alpha^2\beta\equiv\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta.$$

例題 1. 若 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 之根爲 α,β,γ，試以係數表 $\Sigma\alpha^2\beta$ 之值。

以 $$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=b$$

乘 $$\alpha+\beta+\gamma=-a,$$

則得 $$\Sigma\alpha^2\beta+3\alpha\beta\gamma=-ab,$$

故 $$\Sigma\alpha^2\beta=3c-ab.$$

例題 2. 於同三次方程式,求 $\Sigma\alpha^2$.

例題 3. 於同三次方程式,求 $\Sigma\alpha^3$.

將函數 $\Sigma\alpha$ 與 $\Sigma\alpha^2$ 乘之,其乘積為 $\Sigma\alpha^3+\Sigma\alpha^2\beta$, 故

$$\Sigma\alpha^3=\Sigma\alpha\cdot\Sigma\alpha^2-\Sigma\alpha^2\beta=-a^3+3ab-3c.$$

例題 4. 於同三次方程式,求 $\Sigma\alpha^2\beta^2$.

將 $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=b$ 之兩邊,自乘之,得

$$\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2+2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=b^2.$$

例題 5. 於同三次方程式,求 $\Sigma\alpha^3\beta$.

求證 $\Sigma\alpha^2\beta\cdot\Sigma\alpha=\Sigma\alpha^3\beta+2\Sigma\alpha^2\beta^2+2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$.

例題 6. 於同三次方程式,求 $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$之值。

例題 7. 設$x^4+ax^3+bx^2+cx+b=0$ 之根為 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, 求 $\Sigma\alpha^2$ 之值。

例題 8. 於同四次方程式,求 $\Sigma\alpha^2\beta$.

例題 9. 於同四次方程式,求 $\Sigma\alpha^2\beta^2$.

例題 10. 求以 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 之係數表 $\alpha_1\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 諸根之平方和之值。

---

*有記號*之例題內之結果,以後之例題將應用之。

將 $\Sigma\alpha_1=-a_1$ 平方之，得 $\Sigma\alpha_1^2+2\Sigma\alpha_1\alpha_2=a_1^2$，故

$$\Sigma\alpha_1^2=a_1^2-2a_2,$$

例題 11. 於同方程式，求 $\Sigma\frac{1}{\alpha_1}$.

由 §13 得　$(-1)^{n-1}a_{n-1}=\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n+\alpha_1\alpha_3\cdots\alpha_n+\cdots$
$+\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}$,

$$(-1)^n a_n=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n.$$

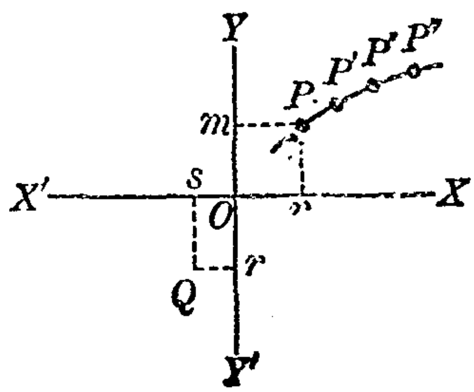
以第二除第一，則得

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}=-\frac{a_{n-1}}{a_n}=\Sigma\frac{1}{\alpha_1}.$$

例題 12. 求方程式 $x^5+x^2+10x+105=0$ 諸根之倒數之和。幷求 $\Sigma\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}$.

16. 多項式 $f(x)$ 之圖示法 (Graphic representation)　因變數 x 之增減，多項式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 之值之變化，用圖示法可知之甚明。

命XX′與YY′爲二互垂直之線，謂之參考軸(Axes of reference)。其交點O謂之原點 (Origin)。命 x 之值由原點O沿 XX′ 軸量之，而 y 之值由O沿 YY′ 軸量之。x 之正值由O向右量之，其負值則向左量之。y 之正值由O向上量之，其負值則向下量之。



P點由參考軸之距離,謂之該點之坐標 (Coördinates)。如 Pm 與 Pn 爲 P 點之坐標,二坐標皆爲正;Qr 與 Qs 爲 Q 點之坐標,二者皆負。

命 y 表多項式 $f(x)$ 之值;卽命

$$y=f(x);$$

設 $x=Pw$ 時 $y=Pn$, 則 P 點之位置同時表 x 之值與 $f(x)$ 之相當值。若於 XX′ 軸上取 x 之各值,於 YY′ 軸上取 $f(x)$ 之相當值。如是所定諸點,皆在一直線或曲線上,而謂之多項式 $f(x)$ 之圖形 (Graph).

用劃成小方格之作圖紙或坐標紙 (Plotting or coordinate paper) 以作多項式之圖形,甚爲便利。

例題 1. 求作 $f(x)=x^2+x-2$ 之圖形。

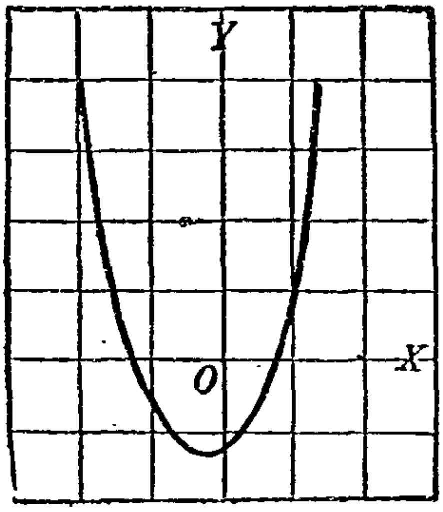
命 $y=x^2+x-2$,則甚易求得下列諸組之值。

若
$$x=0,\qquad y=-2.$$
$$x=\pm\frac{1}{2},\qquad y=-1\frac{1}{4} \text{ 或 } -2\frac{1}{4}.$$
$$x=\pm1,\qquad y=0 \text{ 或 } -2.$$
$$x=\pm2,\qquad y=4 \text{ 或 } 0.$$
$$x=\pm3,\qquad y=10 \text{ 或 } 4.$$

作此諸點,則得右側之曲線。此處所取之單位等於方格一邊之 $\frac{3}{5}$。

由曲線之形狀,知當 x 爲負且漸增大,則 $f(x)$ 漸

減小,及 $x=-\frac{1}{2}$, 則 $f(x)$ 至極小之值。過此則 $f(x)$ 因 x 之增大而增大。此曲線爲拋物線。此拋物線割 XX′ 軸於二處;即有 x 之二值可使 $f(x)$ 爲零。此 x 二值爲 1 與 −2。故 1 與 −2 爲方程式 $f(x)=0$ 之根。



例題 2. 求作 $f(x)=\frac{1}{3}x^2+x+3$ 之圖形。

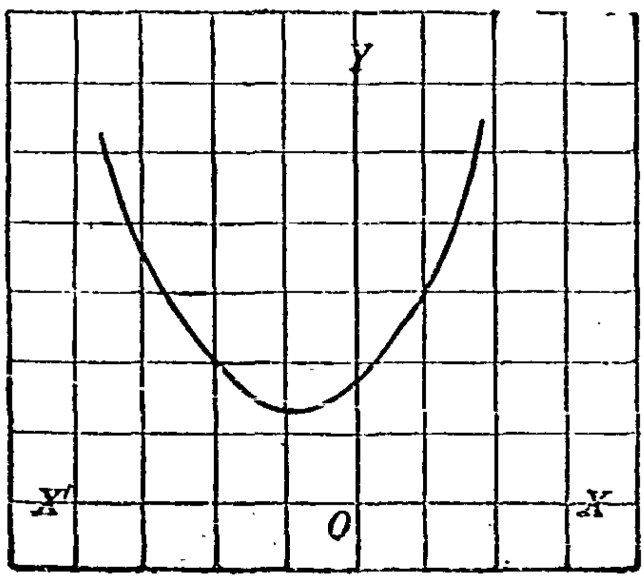
若　$x=0,\quad y=3.$

$x=\pm1,\quad y=4\frac{1}{3}$ 或 $2\frac{1}{3}$.

$x=\pm2,\quad y=6\frac{1}{3}$ 或 $2\frac{1}{3}$.

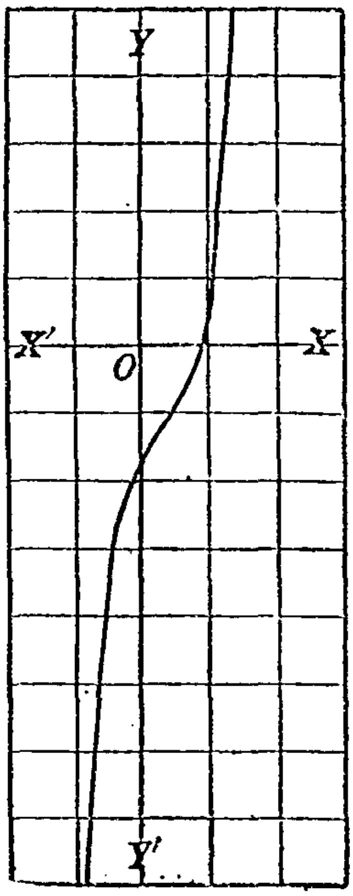
$x=\pm3,\quad y=9$ 或 3.

$x=\pm4,\quad y=12\frac{1}{3}$ 或 $4\frac{1}{3}$.



此曲線不與 XX' 軸相交;故無 x 之實值可使 $f(x)$ 爲零,而二根皆爲虛根。

例題 3. 求作 $f(x)=x^3-x^2+2x-3$ 之圖形。



若 $x=0$, $y=-3$.

$x=\pm.5$ $y=-2.12$ 或 -4.37.

$x=\pm1$, $y=-1$ 或 -7.

$x=\pm2$, $y=5$ 或 -19.

$x=\pm3$, $y=21$ 或 -45.

此曲線僅經過 XX' 軸一次;故僅有一實根,而由圖知此根之值約爲 1.3.

例題 4. 求 x^3+x^2+2x-4 之圖形。

例題 5. 求 x^4-2x+1 之圖形。

17. 作多項式 $f(x)$ 之圖形,先定若干點,而後作一曲線通過之。如是所得之曲線,假定爲表與 x 之連續增加相當,$f(x)$ 之值之連續變化。卽當 x 由一值連續變至他值,多項式 $f(x)$ 決不由一值驟至他值,然此假定尚須證明,其證法見§25。此證以利用誘導函數與退拉定理 (Taylor's theorem) 爲便。

19. 誘導函數與退拉定理. 於

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

命 x 受增率 (Increment) h,而以 $x+h$ 代 x. 則得

$$f(x+h)=a_0(x+h)^n+a_1(x+h)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(x+h)+a_n。$$

命各項用二項公式展開之。集合 h 同乘冪之係數,則得

$$\begin{aligned}f(x+h)&=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\\&+h\{na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^3+\cdots+a_{n-1}\}\\&+\frac{h^2}{1.2}\{n(n-1)a_0x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}+\cdots+2a_{n-2}\}\\&+\frac{h^3}{1.2.3}\{n(n-1)(n-2)a_0x^{n-3}+(n-1)(n-2)(n-3)a_1x^{n-4}+\cdots+3.2a_{n-3}\}\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+\frac{h^n}{1.2.3\cdots n}\{n(n-1)(n-2)\cdots2.1\}a_0.\end{aligned}$$

此展開式之第一項明爲 $f(x)$。而 h 之係數謂之第一次誘導函數 (First derived function),以 $f'(x)$ 表之。同樣 $\frac{h^2}{1.2}$ 之係數謂之第二次誘導函數 (Second derived function),以 $f''(x)$ 表之;如此類推。第 r 次誘導函數以 $f^r(x)$ 表之。在微分學中,此等誘導函數稱爲微分係數 (Differential coefficients)。上之結果可用新記法書之如次:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{\underline{|2}}f''(x)+\frac{h^3}{\underline{|3}}f'''(x)+\cdots+\frac{h^n}{\underline{|n}}f^n(x),\ \text{I}$$

微分學中稱此級數為退拉定理。茲已證明此定理於 x 之有理整數函數,常能成立。然此定理適用之範圍,實為甚廣。

此節之結果,不僅對於實數為眞,對於複虛數亦眞。

19. 比較下列諸式,可得求誘導函數之便利法則:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x_{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

$$f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)\,a_2x^{n-3}+\cdots+a_{n-1},$$

$$f''(x)=n(n-1)a_0x^{n-2}+(n-1)(n-2)\,a_1x^{n-3}+\cdots+2a_{n-2},$$

....

觀此知 $f'(x)$ 可由 $f(x)$ 求得之,其法如次: $f(x)$ 之各項以該項之指數乘之,而各項之指數皆減去一。用此法 a_0x^n 變 na_0x^{n-1}, 等等; 而 a_0 即 a_nx^0 變為 $0\cdot a_nx^{-1}$ 或 0。且用與由 $f(x)$ 導 $f'(x)$ 同樣之法,由 $f'(x)$ 可導得 $f''(x)$。

例題 1. 若 $f(x)=x^5+3x^4+5x^3+6x^2+7x+10,$

$$f'(n)=5x^4+12x^3+15x^2+12x+7,$$

$$f''(x)=20x^3+36x^2+30x+12,$$

$$f'''(x)=60x^2+72x+30,$$

$$f^{\text{iv}}(x)=120x+72,$$

$$f^{\mathrm{v}}(x)=120.$$

例題 2.　求 $x^6+2x^5+7x^3+8x^2+15$ 之諸誘導函數。

20. $f'(x)$ 之別形.　由§7,

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots\cdots(x-\alpha_n)。$$

命 x 增大至 $x+h$, 則得

$$f(x+h)=a_0(x+h-\alpha_1)(x+h-\alpha_2)\cdots\cdots(x+h-\alpha_n). \qquad \mathrm{I}$$

終由§18, 退拉定理,

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1\cdot2}f''(x)+\cdots\cdots.$$

故 h 之係數為 $f'(x)$, 故 $f'(x)$ 必等於 I 之右邊 h 之係數。

即　$$f'(x)=a_0(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots\cdots(x-\alpha_n)+a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\cdots\cdots(x-\alpha_n)+\cdots\cdots$$

$$=\frac{f(x)}{x-\alpha_1}+\frac{f(x)}{x-\alpha_2}+\cdots\cdots+\frac{+f(x)}{x-\alpha_n}. \qquad \mathrm{II}$$

若有數根相等,公式 II 仍能成立。謂根 α_1 有 s 次,而根 α_2 有 t 次,則

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)^s(x-\alpha_2)^t\cdots\cdots,$$

而公式 II 變為

$$f'(x)=\frac{sf(x)}{x-\alpha_1}+\frac{tf(x)}{x-\alpha_2}+\cdots\cdots.$$

例題 1.　若 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$, 求證

$$f'(x)=(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-1)(x-2).$$

例題 2.　若 $f(x)=(x-1)^3(x-2)^2$ 求證

$$f'(x)=3(x-1)^2(x-2)^2+2(x-1)^3(x-2).$$

例題 3. 若 $f(x)=(x-a)^s(x-b)^t(x-c)^u$，求證

$$f'(x)=s(x-\alpha)^{s-1}(x-b)^t(x-c)^u+t(x-a)^s(x-b)^{t-1}$$
$$(x-c)^u+u(x-a)^s(x-b)^t(x-c)^{u-1}.$$

例題 4. 若 $f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)=0$，求證

$$f'(\alpha_1)=\frac{f(\alpha_1)}{\alpha_1-\alpha_1}=(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3).$$

21. 重根(Multiple roots). 觀因數式之普通方程式　$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots\cdots(x-\alpha_n)=0$

知於特別之例,二因數或數因數可互相等,而生等根或重根。

設有 m 根互相等,則有 m 相等因數,而$f(x)$可書爲

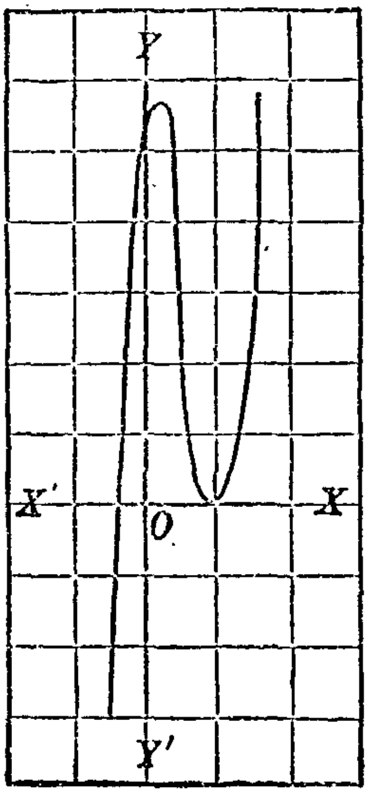
$$f(x)=(x-\alpha_1)^m\phi(x).$$

於是　$f'(x)=m(a-\alpha_1)^{m-1}\phi(x)+(x-\alpha_1)^m\phi(x)$,

而 $f(x)$ 與 $f'(x)$有公因數 $(x-\alpha_1)^{m-1}$.此卽暗示次述求重根之法: 求 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 之最高公因數。設此因數爲 $(x-\alpha_1)^r$,則 $f(x)$ 含因數 $(x-\alpha_1)^{r+1}$, 而有 $r+1$ 等根。卽根 α_1 有 $r+1$ 次也。設最高公因數爲 $(x-\alpha_1)^r(x-\alpha_2)^s$,則根 α_1 有 $r+1$ 次而根 α_2有 $s+1$ 次。

例題 1. 試考 $8x^3-20x^2+6x+9=0$ 之等根。

因 $f'(x)=24x^2-40x+6$, 而用逐次除法求得$f(x)$ 與 $f'(x)$ 之 H. C. F. 爲 $2x-3$。故 $(2x-3)^2$ 爲$f(x)$ 之因數。



左側之圖為$f(x)$之圖形。XX'軸切曲線於$x=\frac{3}{2}$之處。換言之,即軸切於曲線,而與之相交於二重合點(Coincident points)。此即以圖形而表有二重根(Double root)也。由圖知其第三根為$x=-\frac{1}{2}$.

若二軸仍不動,而將全曲線向下移之,則OX軸變為割線;而有二相交異點以代二重合點,且二根不等。若將曲線全部向上移之,則YY'軸右邊之一部曲線與XX'軸無共公之點,而有二複虛根以代二等根。由是知等根為相異實根與複虛根之聯合關鍵。

曲線向上移,與$f(x)$內已知項之值之增大相當;而曲線向下移,與已知項之值之減小相當。

例題 2. 由§16例題1之圖形,說明欲使$f(x)$生等根,及使生複虛根,各項增加其已知項之值約若干。

例題 3. 求$8x^4+20x^3+18x^2+7x+1=0$之重根。

因$f(x)$與$f'(x)$之H. C. F.為$4x^2+4x+1=(2x+1)^2$;故$-\frac{1}{2}$為三重根(Triple root).求作$f(x)$之圖形。

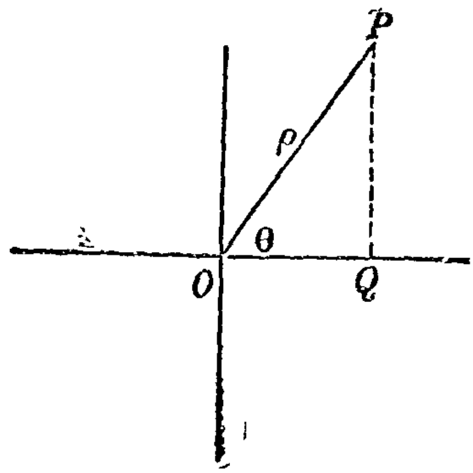
例題 4. 求$4x^5-8x^4-23x^3+19x^2+55x+25=0$之重根,

例題 5. 求 $x^5-3x^4+3x^3-x^2=0$ 之根,幷作其圖形。

例題 6. 求 $x^4-6x^3+13x^2-12x+4=0$ 之等根,幷作其圖形。

例題 7. 若 $f(x)=0$ 有 m 根爲 α,求證 α 各適合 $f(x)=0, f'(x)=0, \cdots, f^{m-1}(x)=0$ 諸方程式。

22. 複虛數之圖示法. 在作多項式 $y=f(x)$ 之圖形時,已假定一水平軸及一垂直軸,而由其交點與水平軸平行量 x 之值,與垂直軸平行量 y 之值。複虛數或虛數常用與此相似之圖形以表示之。若 $z=x+iy$, x 與 y 爲實數,或＋或－,或爲有理數,或爲無理數,於是各與水平軸與垂直軸平行取 x 與 y 若 $x=OQ, y=QP$, 則 OP 表 z 之量與方向。OP 之長等於 $\sqrt{x^2+y^2}$,而稱爲 z 之模數 (Modulus)。z 之方向,以 Q 角表之,而稱爲 z 之變向 (Amplitude) 或方向角 (Argument)。



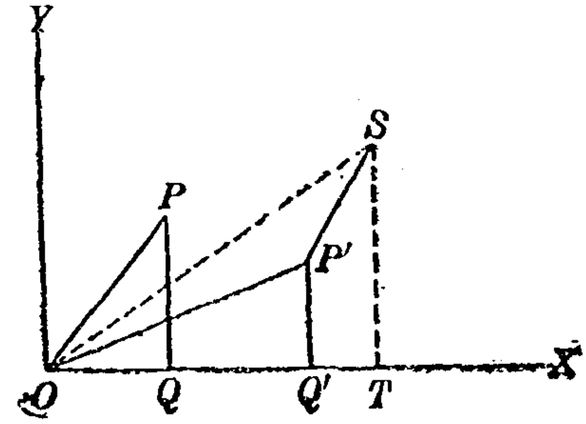
因 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, 故

$$z=x+iy=\rho(\cos\theta+\sin\theta).$$

此複虛數之圖示法爲衛塞爾 (Caspar Wessel, 1797) 所

創。

23. 複虛數之加法及減法. 命 $OP=a+ib$, $OP'=a'+ib'$,則 $OP+OP'=(a+a')+i(b+b')$ 作 $P'S$ 與 OP 相等且平行,則 $OT=a+a'$, $TS=b+b'$, 而 $OS=OP+OP'$.



用記法 $\rho=mod.OP$, 即得

$mod.OS< mod.OP'+mod.P'S$.

此僅表明三角形二邊之和大於第三邊而已。若OP與 OP' 同變向(即同方向),則其和之模數,等於其模數之和。推擴此法於三個或數個虛數時,即得次定理:二個或數個複虛數和之模數,小於或至多等於其各模數之和。換言之,連二點之直線,小於連此同二點之折線之部分之和。

24. 複虛數之乘法.

$$z=a+ib=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$$

及

$$z'=a'+ib'=\rho'(\cos\theta'+i\sin\theta')$$

之乘積可表之如次:

$$z.z'=\rho\rho'\{\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')\},$$

即 z 與 z' 之積之模數,等於其各模數之積;而其積之變向等於其各變向之和。

例題 1. 設 $z=\rho(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$，欲使 z^n 與 z 同方向，n 須為何乘冪？使 $z^n=z$ 時，其條件若何？

例題 2. 當 m 為正整數時，證明特麥佛 (De Moivre) 定理：$(\cos\theta+i\sin\theta)^m=\cos m\theta+i\sin m\theta$.

25. $f(z)$ 之連續 (Continuity). 茲欲證明 $f(z)$ 因 z 而連續變化，即當複虛數 z 由 $a+ib$ 漸變至 $a'+ib$，則 $f(z)$ 由 $f(a+ib)$ 漸變至 $f(a'+ib')$。

命 z 由 $z_0=a+ib$ 變至 z_0+h，而 h 亦為一複虛數。$f(z)$ 相當之增率為 $f(z_0+h)-f(z_0)$，

而由§18退拉定理，知其等於

$$hf'(z_0)+\frac{h^2}{\lfloor 2}f''(z_0)+\frac{h^3}{\lfloor 3}f'''(z_0)+\cdots+\frac{h^n}{\lfloor n}f^n(z_0), \qquad \text{I}$$

而 $f'(z_0)$, $f''(z_0)$, $f'''(z_0)$, $\cdots$, $f^n(z_0)$ 各為有限複虛數。而 I 式

$$=h\{f'(z_0)+\frac{h}{\lfloor 2}f''(z_0)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{\lfloor n}f^n(z_0)\} \qquad \text{II}$$

因 II 式括弧內各項皆為有限複虛數，且項數亦為有限，故括弧內之全式為一有限之值。由 §23，二個或數個複虛數，不論其變向如何，其和之模數不能大於其各模數之和，且其模數為有限之複虛數不能為無限。故由 §24，當 h 之模數近於極限零，則全 II 式之模數近於極限零。然當複虛變數之模數近於極限零，則不論其變向如何，其自身近於零。故當

h 近於極限零，II 式亦近於極限零。

因 II 式表 $f(z_0+h)$ 與 $f(z_0)$ 之差，故複虛變數 z 之變化無窮小，則多項式 $f(z)$ 相當之變化亦無窮小，而 $f(z)$ 之連續成立矣。

若以實變數 x 代複虛變數 z，上述之理論仍能成立，因實數僅爲複虛數之特別者耳。

觀§16之圖形，知 x 增大時，$f(x)$ 不必一定增大，可增大亦可減小。茲證明者，爲 $f(x)$ 由一值連續至他值，或增或減，決不至驟變也。

26. 基本定理. 茲欲證明在§7已假定而無證法之重要定理，此定理稱爲代數學之基本命題。

凡含實係數或複虛係數之有理整方程式，至少有一根。

若於特例中，如諸係數皆爲實數之方程式，能證明此定理成立，則於普通之方程式，卽若干係數或全數係數爲複虛者，亦易成立。因若 $f_1(z)$ 爲 z 之函數，其係數各爲第二函數 $f_2(z)$ 之係數之共軛虛數，則可書 $f_1(z)=A+iB$，$f_2(z)=A-iB$，而 $f_1(z)\cdot f_2(z)\equiv A^2+B^2=f(z)$，$f(z)$ 僅含實係數。若能證 $f(z)=0$ 有一根 α_1，則必得 $f_1(\alpha_1)=0$ 或 $f_2(\alpha_1)=0$。

設 α_2 爲 α_1 之共軛數，由§8若 $f_1(\alpha_1)=0$，則 $f_2(\alpha_2)=0$，

故 $f_1(z)=0$ 與 $f_2(z)=0$ 至少各有一根。

由是可假定 n 次多項式 $f(z)$ 僅有實係數，而不失其普徧性。茲證 z 至少有一實數或複虛數之值，可使多項式 $f(z)$ 爲零。

設 $z=x+iy$，則由 §22，此變數表一平面上之點，而在此平面上各點，函數 $f(z)$ 有一定值。如於 §8，可書 $f(z)=P+iQ$，而 P 與 Q 爲 x 與 y 之含實係數之函數。命 $x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$，以求 P 與 Q 之式。由特麥佛定理

$$z^m=r^m(\cos\phi+i\sin\phi)^m=r^m(\cos m\phi+i\sin m\phi).$$

以 z 之值代入 $f(z)$，則得

$$P=r^n\cos n\phi+a_1r^{n-1}\cos(n-1)\phi+a_2r^{n-2}\cos(n-2)\phi+\cdots\cdots+a_n,$$

$$Q=r^n\sin n\phi+a_1r^{n-1}\sin(n-1)\phi+a_2r^{n-2}\sin(n-2)\phi+\cdots\cdots+a_{n-1}r\sin\phi.$$

命 $t=\tan\frac{1}{2}\phi$，則得 P 與 Q 之第三式。因得

$$\cos\phi=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin\phi=\frac{2t}{1+t^2},\quad z=r\frac{(1+it)^2}{1+t^2}.$$

由是 $(1+t^2)^n(P+iQ)=r^n(1+it)^{2n}+a_1r^{n-1}(1+it)^{2n-2}(1+t^2)+\cdots\cdots+a_n(1+t^2)^n.$

若以二項式公式展開諸二項式，幷依 t 之乘冪而排列之，則得 $P=\frac{g(t)}{(1+t^2)^n}$, $Q=\frac{h(t)}{(1+t^2)^n}$,

其中 $g(t)$ 與 $h(t)$ 爲 t 之有理整函數，其次數不能大於 $2n$。

在平面上同 r 值諸點,皆在半徑爲 r 之圓周上,其圓心爲坐標之原點。欲決定此圓周上 P, Q 爲零諸點,則必須對於 r 之共值,解方程式 $g(t)=0$ 及 $h(t)=0$. 然由 §7,知若 $g(t)=0$ 及 $h(t)=0$ 有根,其根不能多於 $2n$. 由是知 P 或 Q 不能於平面上一面積之諸點皆爲零,因若是則能選取 r 使圓周經過該面積,而在此圓周上將有無窮 P 及 Q 爲零之點矣。

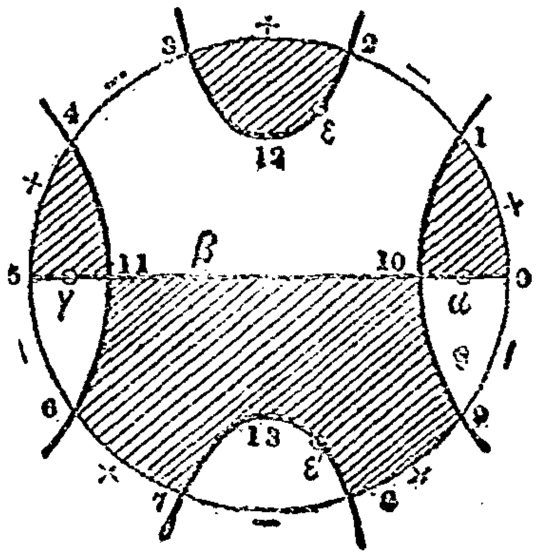
Q 之值可書爲

$$Q=r^n\{\sin n\phi+\frac{a_1}{r}\sin(n-1)\phi+\frac{a_2}{r^2}\sin(n-2)\phi+\cdots\cdots\}.$$

由此式易知 r 可取之充分大,使圓周上諸點,Q 與 $\sin n\phi$ 皆同號,而 $\sin n\phi$ 之數值大於某值 ϵ,此值可爲任意小,然不能爲零。於圓周上取

$$0,\quad \frac{\pi}{n},\quad \frac{2\pi}{n},\cdots\cdots,\quad \frac{(2n-1)\pi}{n}$$

諸點,而各以 0, 1, 2, ……, $2n-1$ 表之。如是此圓周分成 $2n$ 弧 (01), (12), (23), …… ……, $(2n-1,0)$ 其中 $\sin n\phi$ + 與 − 輪流。此圖示 $n=5$ 之分法。當 r 之值充分大,函數由 + 變至 −,由 §25, Q 爲有實值之連續函數,故當循圓



周由＋至－，於 1 點 Q 必經過零之值。同樣於 2, 3, ……，$(2n-1)$諸點，Q 亦必經過零，而圓周上無他點可使 Q 為零。

應用同樣注意於 P. 易知若 r 之值充分大，Q 與 $\cos n\phi$ 常同號；卽在 0, 2, 4, ……，$(2n-2)$諸點及其附近，P 為正，而於 1, 3, 5, ……, $(2n-1)$ 諸點及其附近，則 P 為負。

已知於一面積之諸點 Q 不能皆為零。由是圓內之面積可分為數區分，使於某數區分內無論何處，Q 皆為正，而於他數區分內任何處，Q 皆為負。此等區分以 Q 為零之線為界線而區劃之。正區分皆畫以影線，以資注目。

循弧 $(2h, 2h+1)$，Q 為正，故此弧在正區分內。此區分一部分在圓內，一部分在圓外。以 I 表圓內部分，則生數種情形。面積 I 可限於圓內，如(2,12,3)者，在此情形，其界線上僅有弧 $(2h, 2h+1)$。或面積 I 可伸至他正弧$(2k, 2k+1)$，卽此面積可分為二枝或數枝，各枝為一正弧 $(2l, 2l+1)$ 所限制。若 I 內有似島之面積，而在其內 Q 為負，則下所述之結論仍有效。

試考圓內經過 $2h+1$ 至 $2k$ 之界線。沿此線 $Q=0$。然 P 在 $2h+1$ 點為負，在 $2k$ 為正。因 P 為連續函數，且

表實值，故 P 沿連 $2h+1$ 至 $2k$ 之界線至少須於一點經過零。如是則在該點不僅 $Q=0$，且 $P=0$；卽 $f(z)=P+iQ=0$. 由是 $f(z)=0$ 至少有一根已證明。

前頁之圖乃取自魏伯爾 (H. Weber) 之書，表關於方程式

$$z^5-4z-2=0$$

之近似關係。其根近似爲

$$\alpha=1.52,\ \beta=-.51,\ \gamma=-1.24,\ \varepsilon=.12+i1.44,\ \varepsilon'=.12-i1.44.$$

α 根在界線(1, 10, 0)上。

β 根在界線(9, 10, 11, 6)上。

γ 根在界線(5, 11, 4)上。

ε 根在界線(3, 12, 2)上。

ε' 根在界線(7, 13, 8)上。

第二章

方程式之簡單變形 (Transformation)

27. 變一已知方程式,爲一新方程式,其根(或係數)與原方程式之根(或係數)有一定之關係,甚爲緊要。用此種變形,方程式性質之討論,常可使之便易。

28. 根之符號之變換. 變一方程式爲他方程式,其根與原方程式之根數值相同而號相反,僅須於已知方程式中以$-x$代x卽可。於§12應用狄卡德符號之法則於負根時,此變形已用之。由此變形,凡含x之奇次乘冪諸項之符號,悉被改變。其證法如次:

命α爲方程式$f(x)=0$之根,則得$f(\alpha)=0$。今若以$-x$代x,則得$f(-x)=0$。而$-\alpha$爲此方程式之根,因當取$x=-\alpha$,則得$f(-[-\alpha])=f(\alpha)$,而此知其等於零也。

29. 乘以一已知數之根. 變一方程式爲他方程式,其根爲一方程者之m倍。

命$y=mx$,於恒等式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\equiv a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)=0$$

內,以$\frac{y}{m}$代x,則得

$$a_0\frac{y^n}{m^n}+a_1\frac{y^{n-1}}{m^{n-1}}+\cdots+a_n\equiv a_0\left(\frac{y}{m}-\alpha_1\right)\left(\frac{y}{m}-\alpha_2\right)\cdots\left(\frac{y}{m}-\alpha_n\right)$$
$=0$。

以 m^n 乘之,則得

$$a_0y^n+ma_1y^{n-1}+\cdots+m^na_n=a_0(y-m\alpha_1)(y-m\alpha_2)\cdots(y-m\alpha_n)$$
$=0$,

此即爲所求之方程式。

故以 m 乘第二項,m^2 乘第三項.由是類推。

例題 1.　變方程式 $x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}=0$ 爲一有整數係數之方程式,且 $a_0=1$

以 m 乘諸根,則得 $x^3+\frac{m}{2}x^2+\frac{m^2}{3}x+\frac{m^3}{4}=0$。若取 $m=6$,則諸分數消滅。其結果爲 $x^3+3x^2+12x+54=0$.

例題 2.　求其根爲方程式 $x^4-x^3+x^2-x+\frac{1}{5}=0$ 之根之 5 倍之方程式,

例題 3.　求其根爲方程式 $x^4+4x^3-4x^2+8x+32=0$ 之根之 $-\frac{1}{2}$ 倍之方程式。

例題 4.　變方程式 $3x^3+4x^2-5x+6=0$ 爲一方程式,其 x^3 之係數爲 1,且諸係數皆爲整數。

以 3 除已知方程式之左邊,而以 m 乘其根,則得

$$x^3+\frac{4m}{3}x^2-\frac{5m^2}{3}x-\frac{6m^2}{3}=0.$$

取 $m=3$, 則得所求之方程式 $x^3+4x^2-15x+54=0$.

例題 5.　變換方程式 $x^6+5x^3-6x^2+x+5=0$ 之根

之號。

例題 6. 由方程式 $x^3+\frac{1}{5}x-\frac{1}{125}=0$,除去分數係數而保持 $a_0=1$.

例題 7. 改變方程式 $10x^4-6x^2+7x-\frac{1}{10}=0$,使最高次項之係數為 1。

例題 8. 由 $\frac{2}{3}x^4+\frac{1}{4}x^3-x+\frac{1}{6}=0$,除去分數係數,又使最高次項之係數為 1,且變換根之號。

30. 倒數根 (Reciprocal roots). 變一方程式為一新方程式,其根為第一方程式之根之倒數。於方程式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n)=0$

內,令 $x=\frac{1}{y}$,則得

$$a_0\frac{1}{y^n}+a_1\frac{1}{y^{n-1}}+\cdots\cdots+a_n=a_0\left(\frac{1}{y}-\alpha_1\right)\left(\frac{1}{y}-\alpha_2\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{y}-\alpha_n\right)=0.$$

以 y^n 乘之,則得所求之方程式為

$$a_ny^n+a_{n-1}y^{n-1}+\cdots\cdots\cdots+a_0=a_0a_n\left(y-\frac{1}{\alpha_1}\right)\left(y-\frac{1}{\alpha_2}\right)\cdots\cdots\left(y-\frac{1}{\alpha_n}\right)=0.$$

31. 倒數方程式(Reciprocal equation). 當 x 變為其倒數時,若方程式不變,則此方程式稱為倒數方程式。比較 §30 第一方程式與最後方程式,知倒數方程式之條件為

$$\frac{a_1}{a_0}=\frac{a_{n-1}}{a_n},\quad \frac{a_2}{a_0}=\frac{a_{n-2}}{a_n},\cdots\cdots,\quad \frac{a_{n-1}}{a_0}=\frac{a_1}{a_n},\quad \frac{a_n}{a_0}=\frac{a_0}{a_n}.$$

由最後條件，得 $a_n^2=a_0^2$，而 $a_n=\pm a_0$。若 $a_n=+a_0$，則表條件之諸方程式中之分母皆相同，而自首端起第一，第二，第三，等等係數各等於自末尾起第一，第二，第三等等係數。若 $a_n=-a_0$，則諸關係改變，即自首端及末尾之相當項須爲反號。

如 α 爲倒數方程式之一根，則 $\frac{1}{\alpha}$ 亦必爲一根。故倒數方程式之根常成對，如 $\alpha_1, \frac{1}{\alpha_1}; \alpha_2, \frac{1}{\alpha_2}$；等等。

若方程式之次數爲奇數，則必有一根自爲倒數；即一根必爲 $+1$ 或 -1 也。若諸係數皆同號，則 -1 爲一根；若由首項及末項等距之項異號，則 $+1$ 爲一根。在二情形，若以 $x+1$ 或 $x-1$ 除 $f(x)$，則方程式之次數皆可降低一次。降低方程式常爲一偶數次倒數方程式，其係數爲同號。

若一已知倒數方程式之次數爲偶數，且自首項及末項等距之項爲異號，則方程式之左邊有一因數 x^2-1。因此方程式可寫爲下之形式：

$$(x^{2n}-1)+a_1x(x^{2n-2}-1)+a_2x^2(x^{2n-4}-1)+\cdots=0.$$

以 x^2-1 除之，則此種倒數方程式化爲諸係數皆爲正之偶數次倒數方程式。

凡奇數次倒數方程式及有一半係數爲負之偶數次倒數方程式，既皆可化爲有正係數之偶數次

倒數方程式,故後一種稱爲倒數方程式之標準形,(Standard form)。

例題 1. 有何條件則 $x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$ 爲倒數方程式?

有何條件則爲標準形?

例題 2. 化下倒數方程式爲標準形:

$$x^6+a_1x^5+a_2x^4-a_2x^2-a_1x-1=0.$$

上方程式可寫爲:$(x^6-1)+a_1x(x^4-1)+a_2x^2(x^2-1)=0$.

以 x^2-1 除之,則得 $x^4+a_1x^3+(1+a_2)x^2+a_1x+=0$.

例題 3. a_m 取何值則

$$x^{2m}+a_1x^{2m-1}+a_2x^{2m-2}+\cdots+a_mx^m-a_{m-1}x^{m-1}-\cdots-a_1x-1=0$$

爲倒數方程式?

例題 4. 解方程式 $x^4+3x^3-3x-1=0$.

例題 5. 解方程式 $3x^3+2x^2+2x+3=0$.

例題 6. 已知 c 爲

$$ax^5+(b-ac)x^4-bcx^3=bx^2-(a-bc)x+ae=0$$

之一根,求其他諸根。

32. 減少一已知數之根. 若一方程式變爲他方程式,其根爲第一方程式之根而減去 h 者,則取 $y=x-h$, 而以 $x=y+h$ 代入已知方程式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0. \qquad \text{I}$$

則得 $$a_0(y+h)^n+a_1(y+h)^{n-1}+\cdots+a_n=0. \qquad \text{II}$$

若 α 爲方程式 I 之根，則 $\alpha-h$ 爲方程式 II 之根；因以 $\alpha-h$ 代後者之 y，則得

$$a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_n,$$

因 α 爲 I 之根，故此式必爲零，故 $y=\alpha-h$ 滿足 II。

若展開 II 內諸二項式，而集合 y 之同乘冪之係數，設得方程式

$$A_0y^n+A_1y^{n-1}+A_2y^{n-2}+\cdots+A_n=0.$$

因 $y=x-h$，故此方程式與次方程式相同，

$$A_0(x-h)^n+A_1(x-h)^{n-1}+A_2(x-h)^{n-2}+\cdots+A_n=0.$$

此最後方程式之形式，暗示行實際計算之便易法則。以 $x-h$ 除左邊，則所得餘數等於 A_n，卽既知項。若如是所得之商以 $x-h$ 除之，則餘數爲 A_{n-1}，卽 x 之係數。續行此法，可得所變化方程式之諸係數，

若不減小諸根而欲增大之，則取負 h。

例題 1. 變 $x^4-5x^3+7x^2-4x+5=0$ 爲他方程式其根減去 2。

用綜合除法，其法如次：

$$\begin{array}{rrrrr|l}
1 & -5 & +7 & -4 & +5 & \underline{2} \\
 & +2 & -6 & +2 & -4 & \\
\hline
 & -3 & +1 & -2 & +1 & \\
 & +2 & -2 & -2 & & \\
\hline
 & -1 & -1 & -4 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr} +2 & +2 \\ \hline +1 & +1 \\ +2 & \\ \hline +3 & \end{array}$$

例題之數 1, -4, $+1$, $+3$ 各表第一,第二,第三,及第四餘數。故所求之方程式為 $x^4+3x^3+x^2-4x+1=0$.

例題 2. $2x^5-x^3+10x-8=0$ 之根減去 5。

例題 3. 變方程式 $x^4-8x^3+x^2+x-6=0$ 為他方程式,使其中缺第二項。

由 §13,已知方程式諸根之和為 $+8$。於所求方程式內則其和為零。故諸根之和必須減去 8,而每根須減小 2。故由綜合除法得 $x^4-23x^2-59x-48=0$.

例題 4. 除去 $x^5+10x^4+x^2+1=0$ 之第二項。

例題 5. 除去 $4x^4+8x^3+x+12=0$ 之第二項。

33. 三次方程式之第二項之除去. 當變普通三次方程式

$$b_0x^3+3b_1x^2+3b_2x+b_3=0$$

為他消去第二項之三次方程式,因已知三次方程式之根之和為 $-\frac{3b_1}{b_0}$, 故知每根必增大 $\frac{b_1}{b_0}$. 令 $y=x+\frac{b_1}{b_0}$,則 $x=y-\frac{b_1}{b_0}$ 代入則得

$$b_0(y-\frac{b_1}{b_0})+3b_1(y-\frac{b_1}{b_0})^2+3b_2(y-\frac{b_1}{b_0}+b_3=0.$$

展開之而集合 y 之各乘冪之係數,得

$$b_0y^3+3B_2y+B_3=0,$$

其中 $$b_0B_2=b_0b_2-b_1^2=H,$$

$$b_0^2B_3=b_0^2b_3-3b_0b_1b_2+2b_1^3=G.$$

於是所變成消去第二項之三次方程爲

$$y^3+\frac{3}{b_0^2}(b_0b_2-b_1^2)y+\frac{1}{b_0^3}(b_0^2b_3-3b_0b_1b_2+2b_1^3)=0.$$

若此方程式之根以 b_0 乘之,由 §20, 且引用如上所限定之文字 H 及 G,則變成之三次方程式爲下之形式,

$$z^3+3Hz+G=0.$$

因 $z=b_0y$ 且 $y=x+\dfrac{b_1}{b_0}$, 故得 $z=b_0x+b_1$.

讀者諒知於原三次方程式中,用二項係數 1, 3, 3, 1, 則當變形進行中所生之式,稍可簡單。用二項係數,實常覺便利。

34. 四次方程式之第二項之除去. 寫附以二項係數之四次方程式,如

$$b_0x^4+4b_1x^3+6b_2x^2+4b_3x+b_4=0.$$

諸根之和爲 $-\dfrac{4b_1}{b_0}$, 故每根須增大 $\dfrac{b_1}{b_0}$,令 $y=x+\dfrac{b_1}{b_0}$, 則 $x=y-\dfrac{b_1}{b_0}$. 代入四次方程式,而展開諸二項式,則得

$$y^4+\frac{6}{b_0^2}Hy^2+\frac{4}{b_0^3}Gy+\frac{1}{b_0^4}(b_0^3b_4-4b_0^2b_1b_3+6b_0b_1^2b_2-3b_1^4)=0,$$

其中 H 與 G 爲如§33所限定。變成之四次方程式中

之末項，以視爲H與一新函數I所組成爲最便。命 $I=b_0b_4-4b_1b_3+3b_2^2$，則得下式：

$$b_0^3b_4-4b_0^2b_1b_3+6b_0b_1^2b_2-3b_1^4=b_0^2(b_0b_4-4b_1b_3+3b_2^2)-3(b_0b_2-b_1^2)^2=b_0^2\mathrm{I}-3\mathrm{H}^2.$$

故變成之四次方程式爲

$$y^4=\frac{6}{b_0^2}y^2\mathrm{H}+\frac{4}{b_0^3}\mathrm{G}y+\frac{b_0^2\mathrm{I}-3\mathrm{H}^2}{b_0^4}=0, \qquad \mathrm{I}$$

或以 b_0 乘諸根，則爲

$$z^4+6\mathrm{H}z^2+4\mathrm{G}z+b_0^2\mathrm{I}-3\mathrm{H}^2=0. \qquad \mathrm{II}$$

因 $z=b_0y$，且 $y=x+\frac{b_1}{b_0}$，故 $z=b_0x+b_1$。

例題 1. 計算變 $x^3+3x^2+4x=10=0$，使第二項爲零所得之三次方程式之H及G.

例題 2. 計算由 $2x^4-16x^3-2x^2+x-12=0$ 所得無第二項之四次方程式之H，G及I.

例題 3. 如若§32，用綜合除法，變三次方程式及四次方程式，以驗實前二例題之結果。

35. 三次方程式之根之差之平方之方程式. 一方程式其根爲一已知三次方程式任意二根之差之平方，此種方程式之作法，甚爲重要，因如此所成之方程式，較易導至普通三次方程式根之性質之標準也。命三次方程式爲

$$b_0x^3+3b_1x^2+3b_2x+b_4=0. \qquad \mathrm{I}$$

變化之使消去第二項，則由§33得

$$y^3+\frac{3H}{b_0^2}y+\frac{G}{b_0^3}=0, \qquad \text{II}$$

其中
$$y=x+\frac{b_1}{b_0}.$$

命方程式II之根爲α,β,γ；則每二根之差之平方爲

$$(\alpha-\beta),\ (\alpha-\gamma),\ (\beta-\gamma)^2. \qquad \text{III}$$

因II之根爲I之根各增大$\frac{b_1}{b_0}$者，故方程式II每二根之差與方程式I之根之差相同。故III所表差之平方，爲方程式II之根之差之平方，亦爲方程式I之根之差之平方。卽二方程式得同一"差之平方之方程式。"此方程式明爲

$$\{z-(\alpha-\beta)^2\}\{z-(\alpha-\gamma)^2\}\{z-(\beta-\gamma)^2\}=0. \qquad \text{IV}$$

諸係數可計算之如下：

$$z=(\alpha-\beta)^2$$

適合方程式IV。由是得

$$z=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\gamma^2-\frac{2\alpha\beta\gamma}{\gamma}.$$

而於§15例題2，已證明$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$等於$a_1^2-2a_2$；於方程式II，$a_1=0$，$a_2=\frac{3H}{b_0^2}$. 所以

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=-\frac{6H}{b_0^2},$$

而
$$\alpha\beta\gamma=-\frac{G}{b_0^3}.$$

故可寫
$$z=-\frac{6H}{b^2}-y^2+\frac{2G}{b_0^3y},$$

其中y^2與y為代γ^2與γ。因γ為方程式II中y可有三值之一，故此代替為正當。

以y乘上之方程式之兩邊，則得

$$y^3+\left(z+\frac{6H}{b_0^2}\right)y-\frac{2G}{b_0^3}=0.$$

由此減去方程式II，則得

$$yz+\frac{3H}{b_0^2}y-\frac{3G}{b_0^3}=0,$$

故
$$y=\frac{3G}{b_0^3z+3Hb_0}.$$

由是y為表成z之一次函數。以此式代入方程式II內之y，稍經變化，則得

$$z^3+\frac{18H}{b_0^2}z^2+\frac{81H^2}{b_0^4}z+\frac{27}{b_0^6}(G^2+4H^3)=0. \qquad \text{V}$$

此為方程式I及方程式II之根之差之平方之方程式，V之根為

$$(\alpha-\beta)^2,\ (\alpha-\gamma)^2,\ (\beta-\gamma)^2.$$

以b_0^2乘方程式V之根，則得一無分數之方程式

$$z^3+18Hz^2+81H^2z+27(G^2+4H^3)=0,$$

其根為
$$b_0^2(\alpha-\beta)^2,\ b_0^2(\alpha-\gamma)^2,\ b_0^2(\beta-\gamma)^2.$$

茲
$$(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2=\frac{27}{b_0^6}(G^2+4H^3)=D,$$

D為一重要函數，稱為三次方程式之判別式(Discriminant)。因由§33，

$$G=b_0^2b_3-3b_0b_1b_2+2b_1^3,$$

$$H=b_0b_2-b_1^2,$$

故得 $b_0^4D=27(3b_1^2b_2^2+6b_0b_1b_2b_3-b_0^2b_3^2-4b_0b_2^3-4b_1^3b_3)$.
於三次方程式之研究,常利用此判別式。

例題 1. 求三次方程式 $x^3+3x^2-3x-1=0$ 之根之差之平方之方程式。

因 $b_0=1$, $b_1=1$, $b_2=-1$, $b_3=-1$,故 $G=4$, $H=-2$. 而所求之方程式爲 $z^3-36z^2+324z-432=0$。

例題 2. 上例題中之三次方程式爲倒數方程式。解此方程式,而求根之差之平方之值,考其眞爲差之平方之方程式之根與否。

由上例題所得之標準形之倒數方程式爲 $x^2+4x+1=0$. 故已知三次方程式之根爲 $1, -2\pm\sqrt{3}$;其差之平方爲 $12\pm6\sqrt{3}$。以 $z-12$ 除所變成三次方程式之左邊,即

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -36 & +324 & -432 & 12 \\ & +12 & -288 & +432 & \\ \hline & -24 & +36 & 0 & \end{array}$$

由§4,知 12 爲一根;而降低方程式 $z^2-24z+36=0$ 爲 $z=12\pm6\sqrt{3}$ 所適合。

例題 3. 求三次方程式 $x^3+x^2-x-1=0$ 之根之差之平方之方程式。

所求之方程式爲 $z^3-8z^2+16z=0$. $z=0$ 爲變成之三次方程式之根,由此事實,對於已知三次方程式之

根可得何結論?

例題 4. 求 $x^3+3x+2=0$ 之根之差之平方之方程式。

答. $z^3+18z^2+81z+216=0$.

因末項 $+216$ 為正,且等於減根之乘積,故 z 之三值至少必有一為負,此當深加注意者也。若已知三次方程式之根皆為實根,則其差之平方必為正,而 z 之諸值皆必為正。僅當已知三次方程有二虛根時,z 可得一負根。故 $x^3+3x+2=0$ 有二虛根。試用狄卡德符號之法則證明之。

例題 5. 求 $x^3+6x^2+5x-16=0$ 之根之差之平方之方程式。

若先變此三次方程式為他一無第二項者,則其法較易。

36. 三次方程式根之性質之標準. 茲用"差之平方之方程式"以討論§35普通三次方程式 I 之根之性質。

先注意 V 內之既知項,等於減 V 之三根之乘積,故當既知項為正,則三根中至少必有一為負。然若 I 之諸根皆為實根,則 V 中不能有負根。故僅當已平方之之數為虛數時,始有一負值。故 V 中之一負

根卽表 I 中有二虛根之存在。

又當 V 之諸根皆爲正時,則 I 不能有虛根。因二共軛虛根之差之平方常爲負實數,使 V 中之既知項爲正,而其一根爲負故也。

實根. 當 G^2+4H^3 爲負時,則方程式 I 有實根。因使此根爲負,則 H 必爲負,而 $4H^3$ 必大於 G^2。此卽 V 內係數之號爲 $+-+-$ 之時也。故由狄卡德符號之法則,V 不能有負根。因此諸根皆爲實根,故必爲正。故方程式 I 之根皆爲實根。

複虛根. 當 G^2+4H^3 爲正,則方程式 I 有二複虛根。因此爲正時,V 內之根必有一爲負。

二等根. 當 $G^2+4H^3=0$,則方程式 I 有二等根。因此時 $z=0$ 爲 V 之一根,卽表明 I 內之二根其差爲零。如是判別式等於零卽表等根。

三等根. 當 $H=0$ 及 $G=0$,則方程式 I 有三等根。因 V 化爲 $z^3=0$. V 之諸根既皆爲零,則 I 之諸根必互相等。

例題 1. 證明 §35 內方程式 V 不能有非零之三等根。

例題 2. 若 V 內之二根互相等,然非爲零,則對於 I 之根,能得若何推論?

例題 3. 計算$x^3-6x^2+3x-4=0$之判別式,

例題 4. 計算$4x^3+8x^2+5x+1=0$之判別式。由其值可得何推論?

第三章

方程式根之界限

37. 本章將推演關於有實係數之方程式諸實根所在之限諸定理。且又推論使可互相分別諸相異實根及決定實根之確數及界限之定理。

38. **上限**(Upper or superior limit.) 若於方程式 $f(x)=0$, x^n 之係數爲 1, 則最大負係數加一,爲此方程式之正根之一上限。

若 x 之任意正值,可使

$$x^n-p(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+1)>0,$$

或
$$x^n-p.\frac{x^n-1}{x-1}>0,$$

則此值可使 $f(x)>0$, 其中 p 爲最大負係數之值。若 x 之一正值可使
$$(x^n-1)-h\frac{x^n-1}{x-1}>0,$$

或
$$(x^n-1)(1-\frac{p}{x-1})>0,$$

則 $f(x)>0$, 更可以知之。

然若 $p<x-1$, 卽 $x>p+1$, 則此最後之式常 >0 或爲正。

因任何大於 $p+1$ 之 x 之值,可使 $f(x)>0$, 故可使 $f(x)$ 等於零之 x 之實值,必等於或小於 $p+1$。故 $p+1$ 爲 $f(x)=0$ 之正實根之一上限。

39. **他上限.** 若每負係數之數值,以在此以

前諸正係數之和除之,如此所成之最大分數,爲$f(x)=0$之正根之一上限。

命 $f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}-a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+a_4x^{n-4}+\cdots\cdots+a_n$,其中 x^{n-2} 與 x^{n-4} 之係數皆爲負。因

$$(x^m-1)=(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots\cdots+x+1),$$

故 $$x^m=(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots\cdots+x+1)+1,$$

若用此公式改變 $f(x)$ 內諸正項,則得 $f(x)=$

$$\begin{aligned}
&a_0(x-1)x^{n-1}+a_0(x-1)x^{n-2}+a_0(x-1)^{n-3}+a_0(x-1)x^{n-4}+\cdots+a_0\\
&\qquad+a_1(x-1)x^{n-2}+a_1(x-1)^{n-3}+a_1(x-1)x^{n-4}+\cdots+a_1\\
&\qquad-a_2(x-1)x^{n-2}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+a_3(x-1)x^{n-4}+\cdots+a_3\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad-a_4(x-1)x^{n-4}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+\cdots。
\end{aligned}$$

若此式內之 x 與以充分大正值,使每項之縱行內諸係數之和爲正,則 x 之該值可使 $f(x)$ 爲正。若 $x>1$,則第一與第三縱行內之係數爲正。凡其他無負係之縱行。此條件皆適合之。

若 x 充分大,可使

$$a_0(x-1)+a(x-1)-a_2>0,$$

則第二縱行內諸係數,其中有負係數 $-a_3$,其和爲正。

所以 $$x>\frac{a_2}{a_0+a_1}+1.$$

同樣若 $$a_0(x-1)+a_1(x-1)+a_3(x-1)-x_4>0,$$

則由第四縱行,可得不等式

$$x>\frac{a_4}{a_0+a_1+a_3}+1.$$

任何含一負係數之縱行,可應用同一理論。故若取 x 等於或大於如是所得諸式之最大者,則多項式 $f(x)$ 爲正,而此最大式成爲諸正根之一上限。

例題 1. 求 $x^4-8x^3+18x^2-16x+5=0$ 之正根之上限,

由 §38, 知 17 爲一上限。

由 §39, 諸分數式爲 $\frac{8}{1}+1$ 與 $\frac{16}{1+18}+1$.

故 9 爲一上限。而最大正根爲 5。故 §39 比 §38 得一較近之極限。由 §38 所得之極限決不能小於由 §39 所得者,且常不能若此之小。

例題 2. 由 §38 與 §39, 求下之上限:

(1) $x^4+45x^2-40x+84=0.$

(2) $3x^4+6x^3+12x^2-4x-10=0.$

(3) $2x^5+10x^4-72x^3+5x^2+15x-39=0.$

(4) $2x^3-5x^2+x+10=0.$

40. 下限(Lower or inferior limits). 不大於方程式之任何正根之一數爲下限,如此之限,可由變已知方程式爲一以其根之倒數爲根之方程式而求

之。由 §30，知此變形，可以寫 $x=\frac{1}{y}$ 而得之。由變成之方程式求得 y 之上限；則 y 之倒數卽爲 x 之下限。

41. 負根之限. 於已知方程式內，以 $-y$ 代 x，於是求得變成方程式之正根之上限與下限。

例題 1. 求 $x^4-19x^2-23x-7=0$ 之正負根之限。

由 §38 與 §39，知上限爲 24。以 $\frac{1}{y}$ 代 x，則得 $7y^4+23y^3+19y^2-1=0$。此方程式根之上限爲 $\frac{8}{7}$ 與 $\frac{50}{49}$；故已知方程式正根之下限爲 $\frac{7}{8}$ 與 $\frac{49}{50}$。

以 $-y$ 代 x，則得 $y^4-19y^2+23y-7=0$. 故得 20 爲 y 之正值之一上限，$\frac{7}{30}$ 爲其下限。故已知方程式之負根在 $-\frac{7}{30}$ 與 -20 之間，而諸根皆在 24 與 -20 之間。

玆表出諸根：4.8977……，-3.6331……，$-.7124$……，$-.5522$…，以明限與實際之値相比較，爲如何之觀念。

例題 2. $x^5+5x^4+x^3-16x^2-20x-16=0$ 之實根在於如何極限之間？

由 §38 與 §41，知諸根在 21 與 -21 之間。由 §39 與 §41，知諸根在 $\frac{27}{7}$ 與 -6 之間。其諸根爲 $2, -2, -4, \frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-3})$。

例題 3. 下列方程式之實根在何極限之間？

(1) $x^4+4x^3-x^2-16x-12=0$.

(2) $x^4-3x^3+3x-1=0$。

(3) $x^5-11x^4+17x^3+17x^2-11x+1=0$。

42. $f(x)$ 符號之變化. 當二實數 a, b 代入 $f(x)$ 之 x, 若 $f(x)$ 得相反之號,則在 a, b 之間,必有方程式 $f(x)=0$ 之奇數個根;若 $f(x)$ 得相同之號,則在 a, b 之間,必或無根或有偶數個根。

$f(x)$ 既因 x 而連續變化,且 $f(x)$ 當由 $f(a)$ 至 $f(b)$, 經過諸中間之值而變其符號,由是 $f(x)$ 必經過零之值。即 a, b 之間, x 有某實值可使 $f(x)$ 爲零,而爲方程式 $f(x)=0$ 之根。然當 $f(x)$ 由 $f(a)$ 至 $f(b)$ 可數次經過零。當 $f(a)$ 與 $f(b)$ 爲反號, $f(x)$ 必經過零奇數次。因一實根與 $f(x)$ 之圖形交 x 軸之一點相當,故茲所云,不過意謂由 x 軸一邊之一點越至軸他邊之一點,必交軸奇數次而已。

同樣若 $f(a)$ 與 $f(b)$ 同號,則表軸之同一邊之二點,所以當由一點通至他點,其圖形或絕不與軸相交,或交軸偶數次。故若 $f(a)$ 與 $f(b)$ 同號,則在 a, b 之間,或無根或有偶數個根。

例題 1. 定 $x^4+4x^3-x^2-16x-11=0$ 之根之限。

由狄卡德符號之法則 (§11),知不能有一個以上正根及三個以上負根。且因

$$f(0)=-11. \quad f(-1)=+1.$$
$$f(1)=-23. \quad f(-2)=+1.$$
$$f(2)=+1. \quad f(-2.7)=-.6.$$
$$f(-3)=+1.$$

故知正根在 1 與 2 之間，而諸負根各在 0 與 -1，-2 與 -2.7，-2.7 與 -3 之間。

例題 2. 定 $x^5-5x^4+9x^3-9x^2+5x-1=0$ 之根之限。

由狄卡德符號之法則，知無負根。且得 6 爲正根之一上限。因

$$f(0)=-1 \quad f(2)=-3.$$
$$f(.5)=+.09. \quad f(3)=+14.$$
$$f(1)=0. \quad f(6)=+2946.$$

故知 1 爲一根；且 0 與 .5 之間有一根；2 與 3 之間又有一根。尙有二根不能求出；此二根爲虛根；由後所述之施妥模定理可以決定之。

例題 3. 定下列方程式之實根之限：

(1) $x^3-3x^2-46x-71=0.$

(2) $x^4+2x^3-41x^2-42x+361=0.$

(3) $x^4-16x^3+86x^2-176x+110=0.$

43. $f(x)$ 之極大值與極小值(Maximum and minimum values). x 之任何值，可使 $f(x)$ 爲極大值或極小值者，爲誘導函數 $f'(x)$ 之根。

第一. 命 a 爲可使 $f(x)$ 爲極小之值。$f(a)$ 既爲極小,故必小於 $f(a-h)$ 及 $f(a+h)$,其中 h 爲一增率。由退拉定理 (§18),得

$$f(a-h)-f(a)=-f'(a).h+f''(a).\frac{h^2}{2}-\cdots\cdots,$$

$$f(a+h)-f(a)=+f'(a).h+f''(a)\cdot\frac{h^2}{2}+\cdots\cdots,$$

因此二方程式之左邊皆爲正,故右邊亦必爲正。而 h 可取之甚小,使各方程式之右邊之號,與左邊第一項之號相同,故 $-f'(a).h$ 與 $+f'(a).h$ 必同號。然此僅當 $f'(a)=0$ 時,卽 a 爲第一次誘導式之一根時始可各方程式之右邊既爲正,且該邊之第一項爲零,故 $f''(a)$ 爲正。

第二. 設 $x=a$ 可使 $f(x)$ 爲極大。則上二方程之左邊皆爲負。如是右邊皆爲負;當 h 之值甚小,則不僅如前 $f'(a)$ 應爲零,且 $f''(a)$ 應爲負值。

44. 極大極小之法則. 上節之證法暗示次求極大與極小之值之法則:解方程式 $f'(x)=0$。其每根按其可使 $f''(x)$ 爲負或正,而可使 $f(x)$ 爲極大或極小。

例題 1. 求 $f(x)=2x^3+15x^2+36x+5$ 之極大極小。

因 $$f'(x)=6x^2+30x+36,$$

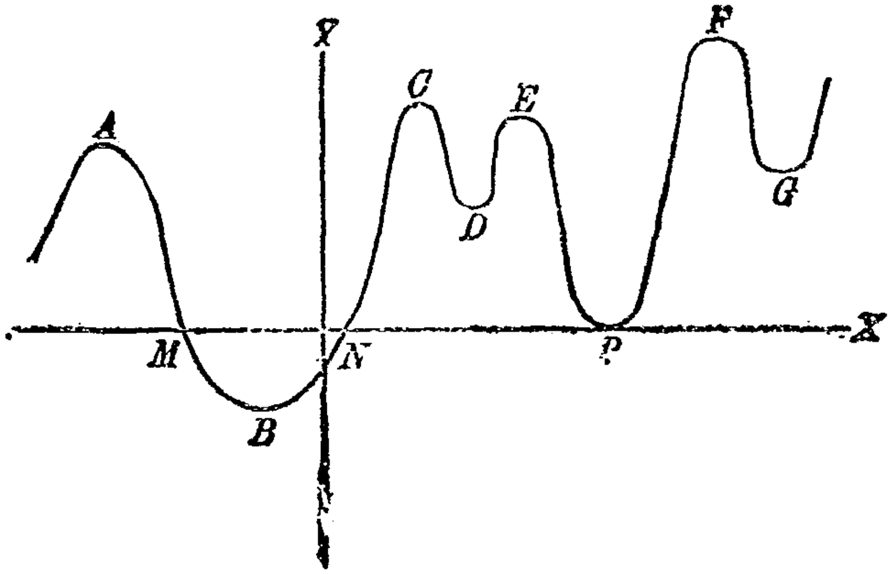
及 $$f''(x)=12x+30.$$

由 $f'(x)=0$ 得 $x=-2$ 或 -3. 且知 $f''(-2)$ 爲正,而 $f''(-3)$ 爲負。故 $f(-2)$ 爲極小,而 $f(-3)$ 爲極大。

例題 2. 求 $f(x)=2x^3+3x^2-36x+75$ 之極大值與極小值。

45. 羅爾定理(Rolle's theorem). 在方程式 $f(x)=0$ 之二相連實根 a, b 之間,至少有方程式 $f'(x)=0$ 之一實根。

命此圖之曲線爲 $f(x)=0$ 之圖形。A, B, C, D, E, F, G 諸點表 $f(x)$ 之極大值與極小值;M,N,P 諸點表 $f(x)=0$ 之實根。



在二根 M, N 之間,曲線先向下曲,然後向上。在 N 處之實根與 P 處之二重根之間,曲線向上,向下,又向上,後又向下。於是在每對不同相連實根之間,至

少必有 $f(x)$ 之一極大或極小值，顯然明矣。

然每一極大或極小點，表為方程式 $f'(x)=0$ 之根 x 之值 (§44)。故羅爾定理已證明矣。

觀圖知誘導函數之相連二根可不包含 $f(x)=0$ 之任何實根於其間，例如 D, E 所表之根是也；亦可包含一相異之根，例如在 A 與 B, B 與 C, E 與 F 之根是也；然決不能包含 $f(x)=0$ 一個以上之根。

例題 1. 方程式 $x^4-12x^3+47x^2-72x+36=0$ 之根為 1, 2, 3, 6. 用羅爾定理以定方程式 $2x^3-18x^2+47x-36=0$ 之根之限。

46. 決定方程式之實根與複虛根之數之問題，已得數大數學家之注意。關於此題，狄卡德，牛頓，惠林 (Waring)，蒲敦 (Budan) 富利哀 (Fourier)，薛維斯特 (Sylvester)，施妥模 (Sturm) 以及晚近數數學家，皆有所研究。其諸定理及法則，於求實根或虛根之確數，幾皆為不完全，僅能求得此數之上限而已。例如狄卡德符號之法則，僅能得正根及負根之數之上限而已。

施妥模之定理，則無此缺點。此定理常能算出一方程式在一定間隔內實根及虛根之確數。因其有此可靠之確定，雖其應用困難，吾人採取施妥模定

理而棄牛頓,薛維斯特,蒲數及富利哀之定理,然在實際,根之性質及所在,若可以§42之定理,與狄卡德符號之法則,及根之上限與下限諸定理(§§38—41)求之者,則往往如是求之;而施妥模定理,則僅當他定理不能應用時用之。

47. 施妥模函數(Sturm's function). 命 $f(x)=0$ 爲一無等根之方程式。求 $f(x)$ 之第一次誘導函數,即 $f'(x)$。由是用求 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 之最高公因數之法行之,而附以變化,即各餘數當用爲除數之先改其符號。續行此法,及至得一不含 x 之餘數,亦改變其符號。此數個已改其號之餘數,以 $f_2(x)$, $f_3(x)$,……, $f_n(x)$ 表之,而稱之爲補助函數(Auxiliary functions)。$f(x)$, $f'(x)$, $f^2(x)$, $f_3(x)$,…… $f_n(x)$ 諸函數稱爲施妥模函數。

48. 施妥模定理. 若 $f(x)=0$ 無等根,命任意二實量 a, b 代入施妥模函數內之 x,則當 a 代 x 時,級數符號變遷之數,與 b 代 x 時之數之差,恰表在 a 與 b 之間 $f(x)=0$ 實根之數。

若 $f(x)=0$ 有重根時,命 $f_r(x)$ 爲 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 之最高公因數,則當 a, b 代入級數 $f(x)$, $f'(x)$, $f_2(x)$,…… $f_r(x)$ 內之 x,其符號變遷之數之差,等於 a,b 間實根之數,惟每重根祇算一次。

第一. 無等根. 於 §21, 求 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 之最高公因數之法,用以求方程式 $f(x)=0$ 之重根。故若無含 x 之最高公因數,則無重根,而能求得 $n+1$ 個施妥模函數之全數。其最後函數為非零之數。

由作施妥模函數之法,得下列諸方程式,其中 q_1, q_2, ..., q_{n-1} 為計算中依次所得之商:

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=q_1f'(x)-f_2(x),\\ f'(x)&=q_2f_2(x)-f_3(x),\\ f_2(x)&=q_3f_3(x)-f_4(x),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ f_{n-2}(x)&=q_{n-1}f_{n-1}(x)-f_n(x). \end{aligned}\right\} \quad \mathrm{I}$$

(1) 二相連補助函數不能以同一 x 之值而等於零。因若 $x=c$ 時, $f_2(x)$, $f_3(x)$ 皆等於零則必各含因數 $x-c$. 於是由第二方程式, $x-c$ 為 $f'(x)$ 之因數,而由第一方程式, $x-c$ 為 $f(x)$ 之因數。故 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 有一公因數,而 (§21) $f(x)$ 有等根,然此與原設相反。

(2) 當任一補助函數為零時,則其二相鄰函數為反號。例如設 $x=c$ 時, $f_3(x)$ 為零。由(1),當 $f_3(x)$ 為零時 $f_2(x)$ 與 $f_4(x)$ 不能為零。則上第三方程式化為 $f_2(x)=-f_4(x)$, 卽表示 $f_2(x)$ 與 $f_4(x)$ 為反號。

(3) 當 x 由 a 值至 b 值,經過一使一補助函數為

零之值,施妥模函數符號之變遷,無增無損。因設 $x=c$ 時,$f_r(x)=0$,則 $f_{r-1}(c)$ 與 $f_{r+1}(c)$ 爲反號。當 $f_r(x)$ 經過零,其號由 + 變至 − 或由 − 至 +。由是恰在 $x=c$ 之先及恰在 $x=c$ 之後,$f_{r-1}(x)$,$f_r(x)$,$f_{r+1}(x)$ 三函數之符號有一變遷。換言之,置無論何號於二異號之間,祗有一變遷。故於施妥模函數符號之變遷,無增無損。

(4)當 x 由 a 值變至 b 值,設其間有一值爲方程式 $f(x)=0$ 之根,則施妥模函數失去一符號之變遷。由§18退拉定理,

$$f(c-h)-f(c)=-hf'(c)+\frac{h^2}{\lfloor 2}f''(c)-\cdots\cdots,$$

$$f(c+h)-f(c)=+hf'(c)+\frac{h^2}{\lfloor 2}f''(c)+\cdots\cdots,$$

當 h 之值甚小,各展開式右邊之號與其第一項之號相同。若 $x=c$ 時,$f(x)$ 爲零,即 $f(c)=0$;若 $f'(c)$ 爲正,則 $f(c-h)$ 爲負,而 $f(c+h)$ 爲正。即恰當 $x=c$ 之先,$f(x)$ 與 $f'(x)$ 之符號爲 − +,而恰當 $x=c$ 之後,則爲 + +。如是失去一符號之變遷。若 $f'(c)$ 爲負,則 $f(c-h)$ 爲正,而 $f(c+h)$ 爲負。即恰當 $x=c$ 之先,$f(x)$ 與 $f'(x)$ 之符號爲 + −,而恰當 $x=c$ 之後,則爲 − −。故當 x 經過 $f(x)=0$ 之一根,不論 $f'(c)$ 爲正爲負,常失去一變遷。

茲已證明當 x 由 a 連續變至 b,若其間得一值可使一個或數個補助函數爲零,而 $f(x)$ 不爲零,則此值於施妥模函數符號之變遷無增無損;然當 x 得一可使 $f(x)$ 爲零之值,則失去一變遷。故 x 由實值 a 至實值 b,其所失去變遷之數,等於在 a, b 間 $f(x)=0$ 實根之數。

第二. 有等根。 當有等根時,函數 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 有公因數;故施妥模函數之最後者,非爲如前之常數;此時最後函數爲 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 之最高公因數。命施妥模函數爲 $f(x)$, $f'(x)$, $f_2(x)$,……, $f_r(x)$。

若 x 經過 $f(x)=0$ 之一根,而此根非爲重根,則第一之理論仍有用。

然若 $f(x)=0$ 有重根 r,且若 $x=r$,則情形迥異;相連二函數可同時等於零。設 r 爲 m 重根,則

$$f(x)=(x-r)^m(x-r_1)(x-r_2)\cdots\cdots$$

而
$$\begin{aligned}f'(x)=m(x-r)^{m-1}&(x-r_1)(x-r_2)\cdots\cdots\\&+(x-r)^m(x-r_2)(x-r_3)\cdots\cdots\\&+(x-r)^m(x-r_1)(x-r_3)\cdots\cdots\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

$f(x)$ 與 $f'(x)$,以其 H. C. F. $(x-r)^{m-1}$ 除之,而得 $g(x)$ 與 $g_1(x)$ 二函數。因 $f(x)$ 與 $g_1(x)$ 無公因數,故不能

同時等於零。命 $g'(x)$ 爲 $g(x)$ 之第一次誘導函數。吾人知 $g_1(x)$ 與 $g'(x)$ 之不同者,僅因 $g_1(x)$ 之內有正係數 m。若 $x=r$, 則 $g_1(x)$ 與 $g'(x)$ 爲同號,因 $g_1(r)=m(r-r_1)(r-r^2)\cdots\cdots$ 及 $g'(r)=(r-r_1)(r-r_2)\cdots\cdots$ 故也。當 $x=r_1$, 或 r_2, ……時, $g_1(x)$ 與 $g'(x)$ 亦同號。

故今可取 $g(x)$ 與 $g_1(x)$ 爲施妥模函數之首二函數,而由此二者作其他諸函數,以求 $g(x)=0$ 之根之所在。此爲可能之事,因用第一之理論,可證明此組新函數附有此二基本性質,卽當 x 由 a 至 b,若一補助函數爲零,則符號之變遷無增無損,若 $g(x)$ 爲零,則僅失去一變遷。

級數　　$f(x),\ f'(x),\ f_2(x),\cdots\cdots,\ f_r(x)$

與　　$g(x),\ g_1(x),\ g_2(x),\cdots\cdots,\ g_r(x)$

符號變遷之數常相同。因二函數級數之相當項常僅差因數 $(x-r)^{m-1}$,故不論 x 爲何値,第一級數內諸項之號與第二級數者皆相同,或諸號皆異。

故考第一級數符號之變遷,可知在 a, b 間,方程式 $g(x)=0$ 有若干實根,而根之此數,與在同界限間方程式 $f(x)=0$ 相異實根之數相同。此巳證明當 r 爲重根之例矣。若 r 之外, $f(x)=0$ 尙有重根 r_m,則證法須加以淺而易見之變化。

49. 當應用施妥模定理,必須注意次之要點。當求 $f_2(x)$, $f_3(x)$, ……諸函數時,如於求 H. C. F. 之法,任何一項式或數因數,設此因數爲正,可加入或棄去之。又除却將用爲除數之餘數之符號外,切不可改變任何符號,當深加注意。

如僅欲決定實數之總數,而不定其界限,則祇須以 $x=-\infty$ 及 $x=+\infty$ 之值代入施妥模函數,而考符號變遷之數之差卽可。

例題 1. 應用施妥模定理於 $x^3-x^2-10x+1=0$。

因
$$f'(x)=3x^2-2x-10,$$
$$f_2(x)=62x+1,$$
$$f_3(x)=38313.$$

茲示對於所示 x 之值施妥模函數之符號:

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
∞	+	+	+	+
4	+	+	+	+
3	−	+	+	+
2	−	−	+	+
1	−	−	+	+
0	+	−	+	+
−2	+	+	−	+

-3	$-$	$+$	$-$	$+$
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$

因 $x=\infty$ 時無變遷,而 $x=-\infty$ 有三變遷,故三根皆爲實根。諸根在 3 與 4, 0 與 1, -2 與 -3 之間。

例題 2. 應用施妥模定理於 §42 例題 2 內所與之方程式 $x^5-5x^4+9x^3-9x^2+5x-1=0$.

因
$$f'(x)=5x^4-20x^3+27x^2-18x+5,$$
$$f_2(x)=x^3-x,$$
$$f_3(x)=-32x^2+38x-5,$$
$$f_4(x)=-26x+19,$$
$$f_5(x)=-192.$$

當 $x=\infty$,施妥模函數有一變遷,當 $x=-\infty$,則有四變遷。故有三實根與二虛根。

例題 3. 應用施妥模定理於 $2x^5+7x^4+8x^3+2x^2-2x-1=0$.

求得
$$f'(x)=10x^4+28x^3+24x^2+4x-2,$$
$$f_2(x)=x^3+3x^2+3x+1.$$

因知 $f_2(x)$ 爲 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 之 H. C. F.; 故 -1 爲四重根 (Quadruple root)。因當 $x=+\infty$ 時, $f(x)$, $f'(x)$, $f_2(x)$ 諸函數成 $+\ +\ +$ 諸號,而當 $x=-\infty$時, 成 $-\ +\ -$ 諸號。故有二相異根,而諸根皆爲實根。

例題 4.　求證 $x^4+x^3-x^2-2x+4=0$ 之諸根皆爲虛根。

例題 5.　求下列諸方程式之實根之數及所在：

$$2x^4-11x^2+8x+16=0,$$

$$x^3+11x^2-102x+181=0,$$

$$x^5-36x^3+72x^2-37x+72=0.$$

50.　四次方程式根之性質.　於研究三次方程式根之性質，先於 §35，求得"三次方程式根之差之平方之方程式"，於是於 §36，用此變成方程式以討論所與三次方程式之根。研究四次方程式之根，可採用同一之方法。然作"根之差之平方之方程式"甚爲困難，故先應用施妥模定理於除去第二項之四次方程式以討論之。

若變普通四次方程式

$$b_0x^4+4b_1x^3+6b_2x^2+4b_3x+b_4=0 \qquad \text{I}$$

爲一去其第二項，而有整數形式之係數之新方程式，則如 §34 得　$y^4+6Hy^2+4Gy+b_0{}^2I-3H^2=0,$　II

其中

$$y=b_0x+b_1,$$

$$H=b_0b_2-b_1{}^2,$$

$$G=b_0{}^2b_3-3b_0b_1b_2+2b_1{}^3,$$

$$I=b_0b_4-4b_1b_3+3b_2{}^2.$$

以 $f(y)$ 表方程式 II 之左邊,則得

$$\frac{f(y)}{4}=y^3+3Hy+G,$$

而由除法,得

$$f_2(y)=-3Hy^2-3Gy-b_0{}^2I+3H_2.$$

於以 $f_2(y)$ 除 $\frac{1}{4}f'(y)$ 之前,先以正因數 $3H^2$ 乘 $\frac{1}{4}f'(y)$。以 $b_0{}^2$ 除餘數,則得

$$f_3(y)=(b^2HI-3G^2-12H^3)\frac{y}{b_0{}^2}-GI.$$

為便利計,命 $b_0{}^3HI-G^2-4H^3\equiv b_0{}^3J$,

由是 $$f_3(y)=(3b_0J-2HI)y-GI.$$

茲以正因數 $(3b_0J-HI)$ 乘 $f_2(y)$,相除後則得一餘數,變其符號,則等於

$$(b_0{}^2I-3H^2)(3b_0J-2HI)+3G^2I(3b_0J-HI)=b_0{}^2H^2I^3-27b_0{}^2H^2J^2+T,$$

其中 $$T\equiv(9b^4{}_0IJ^2-12b_0{}^3HI^2J+36b_0H^3IJ+9b_0G^2IJ)+(3b_0{}^2H^2I^3-3G^2I^2H-12H^4I^2)=3b_0IJ(3b_0{}^3J-4b_0{}^2+12H^3+3G^2)+3b_0{}^3I^2HJ$$

$$=3b_0IJ(3b_0{}^3J-3b_0{}^2HI+12H^3+3G^2)$$

$$=3b_0IJ(3b_0{}^3J-3b_0{}^3J)=0.$$

若此餘數以正因數 $b_0{}^2H^2$ 除之,則得

$$f_4(y)=I^3-27J^2.$$

茲已得方程式 II 之諸施密模函數。

(1) 皆爲實根. 若 $(I^3-27J^2)>0$, $(3b_0J-2HI)>0$,而 H <0;則當 $y=\infty$, 施妥模函數之符號爲 $+\ +\ +\ +\ +$; 當 $y=-\infty$ 時,其符號爲 $+\ -\ +\ -\ +$。後者變遷超過之數爲四;故諸根全數爲實根。

(2) 皆爲虛根. 若 $I^3-27J^2>0$,且 $H>0$ 或 $(3b_0J-2HI)<0$; 則 $y=-\infty$ 時符號變遷之數,與 $y=\infty$ 時相同,故無實根。

(3) 二實根. 若 $I^3-27J^2<0$, 則不論 H 及$(3b_0J-2HI)$爲何號, $y=\infty$ 與 $y=-\infty$ 時變遷之差常爲二,故有二實根及二虛根。

(4) 等根. 當 $I^3-27J^2=0$, 則由 H. C. F. 之理論,知有等根。若於施妥模函數內,祗有 $f_4(y)$ 恒爲零,則 $f_3(y)$爲含 y 之 H. C. F. 而有二根互相等。若 $f_3(y)$ 恒爲零,卽當 $I=0$,及 $J=0$, 或當 $G=0$,及 $3b_0J=2HI$,則三根互相等或有二對相異二重根。蓋若 $I=0$ 與 $J=0$,則由定 J 之方程式,得 $G^2+4H^3=0$ 之關係,而此可使 $f_2(y)$ 爲一完全平方;故有三根相等。當 $G=0$ 及 $3b_0J=2HI$, 則 $b_0{}^2I=12H^2$, 而易知 $f_2(y)$ 爲由 y 之二不等因數所成,卽表有二對相異等根。若 $I=0$, $J=0$, 及 $H=0$, 則 $G=0$, 而 $f_2(y)=0$, 故 $f'(x)=y^3$ 而諸根皆相等,

此方程式 II 之討論,亦可應用之於表普通四次

方程式之方程式 I。因 $y=b_0x+b_1$，則 x 之值為實值或虛值或重值，因 y 之值為實值或虛值或重值而定。

例題 1. 計算方程式 $x^4-4x^3+60x^2-8x+1=0$ 之 H, G, I, J 之值。於是討論其根之性質。

例題 2. 求證方程式 II 之二重根等於 $GI\div(3b_0J-2HI)$，三重根等於 $-iH^{\frac{1}{2}}$，四重根等於 0.

例題 3. 應用施妥模定理於三次方程式 $y^3+3Hy+G=0$，且證實 §36 之結果。

51. 四次方程式之判別式. I^3-27J^2 式，於討論四次方程式根之性質，甚為重要。茲將證明若以常數 $256b_0^{-6}$ 乘之，則等於根之差之平方之積。此積稱為四次方程式之判別式。

命 $I^3-27J^2=R$. 當 R 為零，則四次方程式有等根，故 $(\alpha-\alpha_1)$ 為 R 之一因數。因關於有常數係數之方程式，R 為常數，故當 $(\alpha-\alpha_1)$ 變為 $(\alpha_1-\alpha)$，R 不變。故 $(\alpha-\alpha_1)^2$ 必為 R 之因數，此推論當任何二根之差皆成立。故

$$(\alpha-\alpha_1)^2(\alpha-\alpha_2)^2\cdots\cdots(\alpha_2-\alpha_3)^2 \qquad \text{I}$$

為 R 之因數。因 b_1, b_2, b_3, b_4，為根之對稱函數，僅各含諸根一，二，三，四次者，考 R 式知其不能含高於 12 次

根之積。然 12 亦爲積 I 內諸項之次數。故 R 與積 I 僅差某數因數。此因數可用任何有相異根之簡單四次方程式而求之，例如 $b_0x^4-1=0$. 此時 $R=-b_0^3$，乘積 I 爲 $-256b_0^{-3}$. 故

$$(\alpha-\alpha_1)^2(\alpha-\alpha_2)^2(\alpha-\alpha_3)^2(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2=\frac{256}{b_0^5}(I^3-27J^2)=D,$$

其中 D 爲判別式。

第四章

數字方程式根之近似值

52. 用根數與用近似值之解法. 近世方程式論,爲前數世紀中研究純正數學及應用數學中問題所生之方程式,而欲解之之嘗試之結果。方程式之解法自分爲完全相異二部:第一,其係數爲已知數之數字方程式之解法,乃用根之眞値之近似值之法者;第二,其係數爲指定之數或自變數之方程式之解法,其法乃用係數以成根之值之精確之式——如此之式,不含加法,減法,乘法,除法,及任意次開方外其他之法。後者稱爲方程式之代數的解法 (Algebraic solution)。前者對於實用計算者爲重要,後者對於純正數學家,特別有趣。前者每根可分別決定之;後者必求一普通之式以徧表諸根。

方程式之代數的解法,如方程式之次數不大於四,則無大困難。普通五次或高次方程式之代數的解法,雖經許多最有才力數學家之嘗試,然終不能得。實則吾人能完全證明如此之解法爲不能;卽不能得一解法,其中諸根爲用諸係數以根號或分數指數以表之者。於二次方程式 $x^2+ax+b=0$ 知 $x=\frac{1}{2}$

$(-a\pm\sqrt{a^2-4b})$。於三次方程式,將知 x 可同樣以其係數而附以某平方根與某立方根而表之。同法可應用之於四次方程式。然於普通五次方程式,則 x 不受如此之待遇。五次方程式之一普通解法雖為已知,然其解法含有橢圓積分 (Elliptic integrals),故非為代數的解法而為超越解法。

數字方程式用至一定位數小數近似值之解法之問題,甚為易易。不僅能較易決定低次方程式之實根,且五次或高次方程式者亦然。

數字方程式根之近似法,已為數數學家牛頓,拉格蘭 (Lagrange),蒲敦,富利哀,及其他所發明。然實用上最便之法則為 1819 年霍納(William George Horner)所創。以下則僅就此法與牛頓之法說明之。

53. 可公約根與不可公約根. 數字方程式之實根,當為整數式有理分數時,稱為可公約根;當含非循環小數之無窮小數時,稱為不可公約根。因循環小數可以有理分數表之,故似此之根為可公約。

54. 分數根(Fractional roots). 有理分數不能為有整係數而 x^n 之係數為 1 之方程式之根。

假使為可能,命 h,k 為整數,$\frac{h}{k}$ 為既約分數,而命 $\frac{h}{k}$

爲下方程式之根:

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0,$$

以$\frac{h}{k}$代 x,則得

$$\left(\frac{h}{k}\right)^n+a_1\left(\frac{h}{k}\right)^{n-1}+a_2\left(\frac{h}{k}\right)^{n-2}+\cdots\cdots+an=0.$$

以k^{n-1}乘之,而移諸整數項,

$$\frac{h^n}{k}=-a_1h^{n-1}-a_2h^{n-2}k-\cdots\cdots-a_nk^{n-1}.$$

因$\frac{h^n}{k}$分數爲旣約者,不能等於整數,故此方程式爲不可能。

故$\frac{h}{k}$不能爲所與方程式之根。

55. 整數根 因有整係數之方程式

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0$$

不能有有理分數之根,且因a_n與諸根之積數值相等(§13),故知諸可公約根爲a_n之整除數,而可由試a_n諸因數而得之。由§4,若$f(x)$可以$(x-c)$除之而無餘數,則因數C爲一根。

若x^n之係數不爲1而爲a_0,則可以a_0徧除之,而變方程式爲他方程式,其根爲已知方程式之根而乘以a_0(§29)。於此新方程式,x^n之係數爲1,而其他諸係數皆爲整數。故其諸可公約根皆爲整數。

例題 1. 求$x^3-7x-6=0$之可公約根。

諸可公約根知必在-6之諸因數±1, ±2, ±3, ±6

中。由狄卡德符號之法則，知僅有一正根，由代入法或綜合除法，知 $+1$ 非為一根，而 -1 為一根，茲可以 $x+1$ 除之，以降低方程式之次數，而解所得之二次方程式，或可試其他諸因數。得 -2 與 $+3$ 為他根之值。

例題 2.　求 $2x^3-x^2-x-3=0$ 之可公約根。

以 2 除左邊，又以 2 乘諸根，則得

$$x^3-x^2-2x-12=0.$$

今知 $+3$ 為此方程式之惟一可公約根。故 $+\frac{3}{2}$ 為所與方程式之惟一可公約根。

例題 3.　求下列諸方程式之可公約根：

$$x^3+4x^2+6x+3=0.$$

$$x^4-3x^3-22x^2-39x-21=0.$$

$$x^5-10x^4+17x^2-x-7=0.$$

$$x^5-13x^4+34x^3-26x^2-18x+22=0.$$

$$6x^3-25x^2+3x+4=0.$$

$$4x^3+20x^2-23x+6=0.$$

56.　霍納之法　此法不僅求不可公約根為便，且求可公約根，當§55之法不便時，亦可用之。

應用霍納之法，必須知根之第一有意義之數字以為起點。第一數字可由§42所示之法或由施妥模定理而求得之。

霍納之法，包括一方程式之逐次變形。每變形減小根之一定量。若所求之根爲 2.24004，則其根依次減小 2，.2，.04，.00004。用綜合除法以行此等變形之法，已於§32中說明之。考察下例，則易明此法：

例題 1. 方程式 $x^3-x-9=0$　　I

有一根在 2 與 3 之間，因 $f(2)=-3$ 而 $f(3)=+15$ 故也。故根之第一數字爲 2。變此方程式，使新方程式之根減小 2，得

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & +0 & -1 & -9 & 2 \\
 & \underline{+2} & \underline{+4} & \underline{+6} & \\
 & +2 & +3 & -3 & \\
 & \underline{+2} & \underline{+8} & & \\
 & +4 & +11 & & \\
 & \underline{+2} & & & \\
 & +6 & & &
\end{array}$$

因變成之方程式

$$x^3+6x^2+11x-3=0 \qquad \text{II}$$

之根等於方程式 I 之根減去 2，故方程式 II 有一根在 0 與 1 之間。因此根小於 1，故 x^2 與 x^3 各小於 x。略去 x^3 與 $6x^2$，則得 x 之一近似值，即

$$11x-3=0, \text{或 } x=.2.$$

變 II，使其根減小 .2，則得

$$x^3+6.6x^2+13.52x-.552=0. \qquad \text{III}$$

略去 $x^3+6.6x^2$，則得方程式 III 內 x 之近似值，即

$$13.52x-552=0.\ \text{或}\ x=.04.$$

III 之根減小 .04 之值，則

$$x^3+6.72x^2+14.0528x-.000567=0. \qquad \text{IV}$$

由 $14.0528x-.000567=0$，得 $x=.00004$.

方程式 I 之根，其第一數字爲 2，茲已減小 2, .2 .04, .00004. 故此根爲近似於 2.24004。此逐次變形可簡便[1]表之如次:

+0	−1	−9	2.24004
2	4	6	
2	3	−3	
2	8	2.448	
4	11	−.552	
2	1.24	.551424	
6	12.24	−.000576	
.2	1.28		
6.2	13.52		
.2	.2656		
6.4	13.7856		
.2	.2672		
6.6	14.0528		
.04			
6.64			
.04			
6.68			
.04			
6.72			

諸折線表諸繼續變形之結果。即在折線下之數爲所變方程式之係數。如第二變成方程式即刻知其爲 $x^3+6.6x^2+13.52x-.552=0$。

例題 2. 於方程式 $x^3-46.6x^2-44.6x-142.8=0$,知 $f(40)=-$,而 $f(50)=+$. 故在 40 與 50 之間有一根。欲求此根,將諸根減去 40,於是求變成方程式根之第一數字,而如上已說明之霍納之法續行之。其運算如次:

1	−46.6	−44.6	−142.8	47.6
	40	−264	−12344	
	−6.6	−308.6	−12486.8	
	40	1336	11131.4	
	33.4	1027.4	−1355.4	
	40	562.8	1355.4	
	73.4	1590.2		
	7	611.8		
	80.4	2202.0		
	7	57		
	87.4	2259		
	7			
	94.4			
	.6			
	95			

於第一變成方程式 $x^3+73.4x^2+1027.4x-12486=0$,僅知 x 之值小於 10;故例題 1,略去含 x^3 及 x^2 之法不能應用。因於此變成方程式 $f(7)=-$,而 $f(8)=+$,故知 7 爲欲求之數字。

於第二變成方程式,如 x 在 0 與 1 之間。故由方程式 $2202x-1355.4=0$ 求得 x 之第一數字。

因第三變成方程式無餘數,由 §3 知 .6 爲 $x^3+94.4x^2+2202x-13554=0$ 之根,而 47.6 爲所與方程式之一可

公約根。

當根之分數部分已求得，且 x^2, x^3，等等之係數之值甚小，則將知於霍納之法中各變成方程式末二項有不同之號。此爲必然，因若此二項爲同號，則變成方程式內 x 之值爲負，即表原方程式之根之末數字已取過大。例如於例題 1，其第一位小數不取 2 而誤取爲 3，則第二變成方程式爲 $x^3+6.9x^2+14.87x+.867=0$. 而此方程式 x 之近似值爲 $-.05$，即表諸根減去 .3，其取去之數過大也。

若一數字誤取過小，則其誤差於第二步即自顯出。假令於例題 1，其第一位小數誤取爲 .1，則第二變成方程式爲 $x^3+6.3x^2+12.23x-1.839=0$。由 $12.23x-1.839=0$ 近似得 $x=.15$. 由此變 .1 爲 .25，而發現估度第一位小數時之誤差。

由霍納之法求負根之值，僅須以 $-x$ 代 x 而變已知方程式，於是如上法行之即可。

例題 1.　求次諸式之實根：

$$(1)\ 4x^5-3x^4-2x^2+4x-10=0.$$

$$(2)\ 3x^5+3x^4-x^2-4x+5=0.$$

$$(3)\ 7x^4+3x^3-5x^2+4x-6=0.$$

$$(4)\ x^7-x^6+x^5+x^4-10=0.$$

(5)$x^3-4x-2=0$.

52. 牛頓之近似法. 於含代數函數之數字方程式之解法,此法不如霍納之法爲便;然於含超越函數之數字方程式,此法亦能應用之,是乃此法之優點也,例如牛頓之法,可用以求 $x-\sin x=2$ 內之 x。

命 $f(x)=0$ 爲已知方程式。設知一量 a 與 x 之一值差一小量 h。則得 $x=a+h$. 由退拉定理

$$f(x)=f(a+h)=f(a)+h\,f'(a)+\frac{h^2}{\lfloor 2}f''(a)+\cdots\cdots$$

因 h 爲甚小之量,略去 h 之高次方,則由方程式 $f(a)+hf'(a)=0$ 得 h 之近似值,卽 $h=-\frac{f(a)}{f'(a)}$.故 x 近似於 $a-\frac{f(a)}{f'(a)}$.命 x 之此新近似值以 b 表之,重行上法,則可得一更精密之近似值,如是遞進。

例題 1. 解 $x-\sin x=2$。

x 角若以弧度量之,必在 2 與 3 之間。取 $a=2.5$,

$$f(a)=.5-\sin 2.5=.5-\sin 143°14'=-.097.$$

$$f'(a)=1-\cos 2.5=1.801.$$

故 $\qquad h=.0539,\ b=a+h=2.5539.$

第二近似法爲

$$f(b)=-.00054,\ f'(b)=1.8322,\ h=.0002947.$$

故 $\qquad x=b+h=2.554195.$

58. 數字方程式之複虛根. 近來對於數字方程式之複虛根之近似法與實根同,已臻完善,惟其法之說明過繁,故本書不述.

第五章

三次方程式及四次方程式之代數的解法

59. 三次方程式之解法. 普通三次方程式

$$b_0x^3+3b_1x^2+3b_2x+b_3=0 \qquad \text{I}$$

有種種不同解法。茲所欲說明者,為意大利數學家塔太利亞(Tartaglia)之法,而於1545年先為卡但(Cardan)所公布。其法先變方程式 I 為一無第二項者。如於§33,命 $x=\frac{z-b_1}{b_0}$,則得

$$z^3+3Hz+G=0 \qquad \text{II}$$

其中 $H=b_0b_2-b_1^2$,而 $G=b_0^2b_3-3b_0b_1b_2+2b_1^3$. 命 $z=u+v$,而解方程式II。代入 II 內,則得

$$u^3+v^3+3(uv+H)(u+v)+G=0.$$

u v 二量,可使受他一條件。最便之假定為

$$uv+H=0. \qquad \text{III}$$

由是

$$u^3+v^3=-G. \qquad \text{IV}$$

消去III與IV間之 v,則得

$$u^3-\frac{H^3}{u^3}=-G, \text{ 或 } u^6+Gu^3=H^3.$$

上方程式形如二次方程式。解之得

$$u^3=-\frac{G}{2}+\sqrt{\frac{G^2}{4}+H^3}.$$

於是由 IV，$v^3=-G-u^3=-\frac{G}{2}-\sqrt{\frac{G^2}{4}+H^3}$。

因 $u=\sqrt[3]{-\frac{G}{2}+\sqrt{\frac{G^2}{4}+H^3}}$，$v=\sqrt[3]{-\frac{G}{2}-\sqrt{\frac{G^2}{4}+H^3}}$，V

且 $z=u+v$，

$$z=\sqrt[3]{-\frac{G}{2}+\sqrt{\frac{G^2}{4}+H^3}}+\sqrt[3]{-\frac{G}{2}-\sqrt{\frac{G^2}{4}+H^3}}。\qquad \text{VI}$$

公式 VI 所表三次方程式根之式，名爲卡但之公式。

因一數有三立方根，故知由 V 式，u，v 各有三值。如是將以爲 u 之各值，似可與 v 之三值中之任一相合，而共得 $u+v$ 或 z 之九值。然因三次方程式祇有三根，故此爲不能。u 與 v 必須適合方程式 III，九值中之六者可用此棄除之。消去 $z=u+v$ 與方程式 III 間之 v，則得

$$z=u-\frac{H}{u},\qquad \text{VII}$$

其中 u 爲 V 內所示者。因 VII 內僅有一數 u 有三值，故此式不含卡但之公式之困難。命 u 之三值爲 u，ω，$u\omega^2$，其中 ω 代 1 之二複虛立方根 $-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ 之一。則三次方程式 II 之三根爲

$$u-\frac{H}{u},\quad u\omega-\frac{H\omega^2}{u},\quad u\omega^2-\frac{H\omega}{u}。\qquad \text{VIII}$$

因 $z=b_0x+b_1$，由 VIII 內三式各減去 b_1，而以 b_0 除其三結果，則得普通三次方程式 I 之根。

60. 不可化之例(Irreducible case). 有文字係數之二次方程式根之普通式，於解二次數字方

程式,可用之甚便。以數值代各文字,而行所示諸運算卽可。此種方法於三次方程式,則不常爲可能,而三次方程式之代數的解法於求根之數值,其用甚小,此事誠屬有趣。

由 §33, 知當 G^2+4H^3 爲負時,三次方程式之根皆爲實根。試代入 H 與 G 之值,以計算三次方程式之實根,則遇開複虛數之立方之問題。然此種開方無便利算術之法以行之;亦無法免去此種複虛根數,而以實根數表實根之值。此事實於 §183, 問題 8 中將證之。當 G^2+4H^3 爲負之例,古來數學家稱爲三次方程式解法中"不可化之例,"惟此處"不可化"(Irreducible)之意義,與現今代數中所定者不同。參看 §123。

61. **用三角法之解法** 用二項定理,展開卡但公式內之二項爲二收歛級數 (Converging series),可以處理"不可化之例。"因二級數相加則諸虛項皆消滅。然以次之三角法較爲便利(若爲算術的計算,此法不及§56霍納之法):

命 $$-\frac{G}{2}=r\cos\theta,\quad \sqrt{\frac{G^2}{4}+H^3}=ir\sin\theta.$$

則得 $$u^3=r(\cos\theta+i\sin\theta),$$

$$v^3=r(\cos\theta-i\sin\theta),$$

而 $$r=\sqrt{-H^3};\qquad \cos\theta=\frac{-G}{2\sqrt{-H^3}}.$$

故
$$u=\sqrt{-\mathrm{H}}\left(\cos\frac{2n\pi+\theta}{3}+i\sin\frac{2n\pi+\theta}{3}\right),$$
$$v=\sqrt{-\mathrm{H}}\left(\cos\frac{2n\pi+\theta}{3}-i\sin\frac{2n\pi+\theta}{3}\right),$$
而
$$z=u+v=2\sqrt{-\mathrm{H}}\cos\frac{2n\pi+\theta}{3},$$
其中 n 取 0, 1, 2 之值。

62. 阿哀洛(Euler)四次方程式之解法.

除去四次方程式
$$b_0x^4+4b_1x^3+6b_2x^2+4b_3x+b_4=0 \qquad \mathrm{I}$$
之第二項,則如 §34,得
$$z^3+6\mathrm{H}z^2+4\mathrm{G}z+b_0^2\mathrm{I}-3\mathrm{H}^2=0, \qquad \mathrm{II}$$
其中 $z=b_0x+b_1$, $\mathrm{H}=b_0b_2-b^2$, $\mathrm{I}=b_0b_4-4b_1b_3+3b_2^2$,

$\mathrm{G}=b_0^2b_3-3b_0b_1b_2+2b_1^3$.

阿哀洛假想方程式 II 之根之普通式爲。
$$z=\sqrt{u}+\sqrt{v}+\sqrt{w}.$$
平方之,則 $z^2-u-v-w=2\sqrt{u}\sqrt{v}+2\sqrt{w}\sqrt{v}+2\sqrt{v}\sqrt{w}.$

再平方而化簡之,則
$$z^4-2z^2(u+v+w)-8z\sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{w}+(u+v+w)^2-4(uv+uw+vw)=0.$$
使此方程式及方程式 II 之係數相等,則得
$$-3\mathrm{H}=u+v+w,\quad \mathrm{G}=-2\sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{w},$$
$$(u+v+w)^2-4(uv+uw+vw)=b_0^2\mathrm{I}-3\mathrm{H}^2,$$
或
$$uv+uw+vw=3\mathrm{H}^2-\frac{b_0^2\mathrm{I}}{4}.$$

而 $-(u+v+w)$，$(uv+uw+vw)$，$-uvw$ 爲以 u, v, w 爲根之三次方程式之係數。此三次方程式名"阿哀洛之三次方程式"，爲

$$y^3+3Hy^2+\left(3H^2-\frac{b_0^2I}{4}\right)y-\frac{G^2}{4}=0. \qquad \text{III}$$

命 $y=b_0^2x-H$，則得

$$4b_0^3x^3-b_0Ix+J=0, \qquad \text{IV}$$

而 $$b_0^3J=b_0^2IH-4H^3-G^2$$

方程式IV稱爲四次方程式之分解三次方程式(Reducing cubic)。因 u, v, w, 爲III內 y 之三值，故

$u=b_1^2-b_0b_2+b_0^2x_1$， $v=b_1^2-b_0b_2+b_0^2x_2$， $w=b_1^2-b_0b_2+b_0^2x_3$.

故 $$z=\sqrt{b_1^2-b_0b^2+b_0^2x_1}+\sqrt{b_1^2-b_0b_2+b_0^2x_2}+\sqrt{b_1^2-b_0b_2+b_0^2x_3}. \qquad \text{V}$$

又因 $G=-2\sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{w}$，故可寫爲

$$z=\sqrt{u}+\sqrt{v}-\frac{G}{2\sqrt{u}\sqrt{v}}。 \qquad \text{VI}$$

VI內表 z 之式內，各根數可爲＋或－。故 z 有四值，即方程式II之四根。方程式V中明有 z 之八值，然其中四值已爲 $2\sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{w}=-G$ 之關係所除去。

由上所述，知四次方程式之根，可以 u, v, w 表之。而後者之值以四次方程式之係數及三次方程式IV之三根 x_1, x_2, x_3 表之。故欲用此法以解四次方

程式，必須先解分解三次方程式。普通四次方程式之其他代數的解法甚多，然皆各須解補助三次方程式。此等三次方程式，稱爲分解式，(Resolvents)。

例題 1. 四次方程式有何條件，則可以代數法解之而不須開立方根?

此祇須分解三次方程式有一有理根卽可，如是則其他二根可以平方根表之。阿哀洛之三次方程式有一有理根亦可。

例題 2. 求證 $x^4+2x^3+x^2-2=0$ 之分解三次方程式。有一有理根用平方根解此四次方程式。

例題 3. 求證 $x^2+y=a$, $x+y^2=b$ 內 x,y 之值，普通不能用代數法不開立方根而求之。

例題 4. $x^2+y=11$, $y^2+x=7$ 內 x,y 之值，能不開立方根而求得之乎?

第六章

二項方程式及倒數方程式之解法

63. 二項方程式. (Binomial equation). a 爲實數或複虛數,

$$x^n-a=0$$

可依三角法解之如下。命

$$x^n=a=r\{cos(2k\pi+\theta)+isin(2k\pi+\theta)\},$$

其中 k 可爲任意整數值。則由特麥佛定理,

$$x=\sqrt[n]{r}\left\{cos\frac{2k\pi+\theta}{n}+isin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right\}.$$

與 k 以任 n 個相連整數值,則得 x 之 n 個值;且因此 n 個值按週期循環,故不能多於 n 個。

當 a 爲複虛數時,則諸根皆爲複虛根,此甚易知之。因欲得一實根,$\frac{2k\pi+\theta}{n}$ 必須爲零或 π 之倍數,卽 $2k\pi+\theta$ 必爲零或 π 之倍數;故 a 必須爲實數,然此與原設相反。

當 $$a=+1,$$

則 $$x^n=1=cos2k\pi+isin2k\pi,$$

而 $$x=cos\frac{2k\pi}{n}+isin\frac{2k\pi}{n}, \qquad \text{I}$$

其中 h 可爲 $0, 1, 2, \cdots\cdots(n-1)$ 諸值。若 n 爲奇數,則 $k=0$ 爲惟一之 k 之值,可得實根,卽 $x=1$。若 n 爲偶數

則僅有$k=0$,與$k=\frac{n}{2}$之值可得實根即$x=1$與$x=-1$.

當 $$a=-1,$$

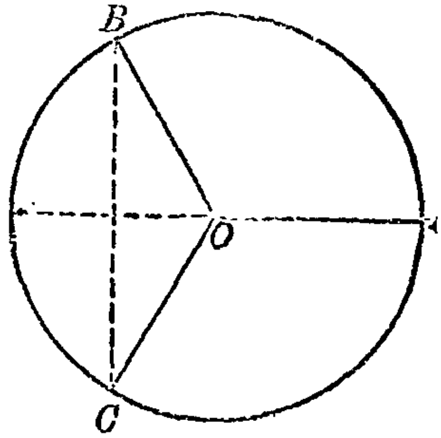
則 $$x^n=-1=\cos(2k+1)\pi+i\sin(2k+1)\pi,$$

其中k可為0, 1, 2,……,)$n-1$)諸值。

故 $$x=\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}.$$

惟$\frac{2k+1}{n}$為整數時,即n為奇數時,始能有實根。例如$n=2k+1$,即$k=\frac{n-1}{2}$,則得$x=-1$之實根。

64. $x^n=a$之根之形學的解說. 此n個根可以圖表之,即於衞塞爾之圖中(§22),由半徑為$\sqrt[n]{r}$之圓中心,至其圓周上諸點作n直線,分圓心之周角為$\frac{2\pi}{n}$半徑度(Radian)之等角。如命$n=3$, $r=1$。由§63, I, 知1之三個立方根為1, $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$。而各以直線OA, OB, OC表之。此等直線互成$\frac{2}{3}\pi$半徑度或120°之角,而分圓周為三等分。普通之例為分圓周為n等分。故1之根之理論與作圓內接正多邊形之問題或分圓(Division of the Circle)之理論,關聯甚密。1801年,高斯(C. F. Gauss)已解出此題之大概;第十四章論分圓方程式(Cycl



otomic Equation)時,當詳述之。

65. 1之根. 茲述1之n次根之數種普通性質,其中有由上之研究卽可知之者。

I. 方程式$x^n=1$無重根。

因$f(x)=x^n-1$, $f'(x)=nx^{n-1}$, 而$f(x)$與$f'(x)$無含x之公因數,故無重根(§21)。

II. 若α爲$x^n-1=0$之根,則α^k亦爲其一根,k爲任意整數。

因$\alpha^n=1$,由是$\alpha^{nk}=1$,或$(\alpha^{kn}=1)$ k爲零或爲任意正或負整數。故α^k爲1之根,因僅有n根,故知α之諸乘冪非皆爲互相異,故α^k爲一週期函數(Periodic function)。

III. 若m與n互爲素數,則方程式$x^m-1=0$與$x^n-1=0$不能有除1外之公根。

茲先證明次定理:若m與n互爲素數,則常可求得整數a, b使$mb-na=\pm1$。將分數展爲有限連分數,假定爲

$$\frac{m}{n}+\frac{1}{q+\frac{1}{r}}.$$

其諸漸近數(Convergents)爲p, $\frac{pq+1}{q}$, $\frac{p(qr+1)+r}{qr+1}$。由最後近數減去次最後近數,則得一分數知其分子$pq(qr+1)+qr-(pq+1)(qr+1)$等於-1。[由數學歸納法可

證明若 $\frac{u_{n-1}}{v_{n-1}}$ 與 $\frac{u_n}{v_n}$ 爲任意二相連近數，則 $u_n v_{n-1} - u_{n-1} v_n = \pm 1$]。然

$$m = p(qr+1)+r, \quad n = qr+1,$$

故若取 $a = pq+1$, $b = q$, 則得

$$mb - an = \pm 1.$$

若設 α 爲 $x^m - 1 = 0$ 與 $x^n - 1 = 0$ 之公根。則 $\alpha^m = 1$, $\alpha^n = 1$, 而 $\alpha^{mb} = 1$, $\alpha^{nb} = 1$,其中 a 與 b 爲適合 $mb - na = \pm 1$ 之關係之數。故 $\alpha^{mb-na} = 1$, $\alpha^{\pm 1} = 1$,或 $\alpha = 1$。即 1 爲二方程式惟一之公根。

IV. 若 h 爲 m 與 n 之最高公因數，則 $x^p - 1 = 0$ 之根爲 $x^m - 1 = 0$ 與 $x^n - 1 = 0$ 之公根。

命 $m = hm'$, $n = hn'$, 則 m' 與 n' 互爲素數。故可求得整數 a, b 使 $m'b - n'a = \pm 1$.以 h 乘之，則得 $mb - na = \pm h$.

故若 α 爲公根，則 $\alpha^m = 1$, $\alpha^n = 1$, $\alpha^{mb-na} = 1$ 或 $\alpha^{\pm h} = 1$。此即表爲 α $x^h - 1 = 0$ 之根。

V. 若 α 爲 $x^n - 1 = 0$ 之複虛根，而 n 爲素數，則諸根爲 $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \cdots\cdots, \alpha^{n-1}$.

由 II 知 $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \cdots\cdots, \alpha^{n-1}$,皆爲方程式之根此等根皆不同；因若 $\alpha^p = \alpha^q$,則 $\alpha^{p-q} = 1$. 然因 n 與 $(p-q)$互爲素數，故由 III, $x^n - 1 = 0$ 與 $x^{p-q} - 1 = 0$不能有公根。故方程式 $\alpha^{p-q} = 1$ 不能成立，而諸根皆含於級數

$1, \alpha, \alpha^2, \cdots\cdots \alpha^{n-1}$ 內。

VI. 方程式

$$x^p-1=0,\ x^p-1=0,\ x^r-1=0, \cdots\cdots$$

之諸根皆適合方程式 $x^{pqr\cdots\cdots}-1=0$.

因若 α 爲 $x^p-1=0$ 之根,則 $\alpha^p=1$ 而 $(\alpha^p)^{qr\cdots\cdots}=1$ 或 $x^{pqr\cdots\cdots}=1$.卽 α 爲 $x^{pqr\cdots\cdots}-1=0$ 之根。

66. 1之原根(Primitive root). 若 $x^n-1=0$ 之根不同時爲 1 之較低次根,則稱爲該方程式之原根。

取 $x^6-1=0$. 由 §65, VI 知 $x^2-1=0$ 與 $x^3-1=0$ 之根爲 $x^6-1=0$ 之根。此等公根爲 ±1, $-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3}$。解 $x^3+1=0$,求得其他二根爲 $+\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3}$,而知爲 $x^6-1=0$ 之素根。

I. 玆進而證明各次數 n,常有 1 之原根。

若 n 爲素數,則由 §65, III, $x^n-1=0$ 與相似之低次方程式除根 1 以外無公根。故 $x^n-1=0$ 之諸根除根 1 以外皆爲原根。

若 $n=p^m$ 而 p 爲一素數,則 p^m 之各約數除 p^m 以外皆爲 p^{m-1} 之約數。故由 §65, VI, 知 1 之 n 次根同時爲 1 之低次根者,必爲 $x^{p^{m-1}}-1=0$ 之根。且因 p^{m-1} 爲 p^m 之因數,由是 $x^{p^{m-1}}-1=0$ 之各根爲 $x^{p^m}-1=0$ 之根。故有 p^{m-1} 根非爲原根,而原根之數爲 $p^m(1-\frac{1}{p})$。

若 $n=p^m q^s$，而 p，q 為素數，則有 $x^{p^m}-1=0$ 之 $p^m(1-\frac{1}{p})$ 個原根，與 $x^{q^s}-1=0$ 之 $q^s(1-\frac{1}{q})$ 個原根。若 α，β 各為此二方程式之二原根，則 $\alpha\beta$ 為 $x^n-1=0$ 之原根。因設 $(\alpha\beta)^r=1$，而 $r<n$ 則 $\alpha^r=\beta^{-r}$。由 §65 II α^r 為 $x^{p^m}-1=0$ 之根而 β^{-r} 為 $x^{q^s}-1=0$ 之根。然因 q^m 與 q^s 互為素數，故由 §65 III，此二方程式不能有除 1 以外之公根。故 r 不能小於 n。由 §65 II，$\alpha^n=1$ 及 $\beta^n=1$ 由是 $(\alpha\beta)^n=1$，而 $\alpha\beta$ 為 $x^n-1=0$ 之原根，因有

$$p^m\left(1-\frac{1}{p}\right)q^s\left(1-\frac{1}{q}\right)$$

個如此 α，β 之積，故此式亦表 1 之原 n 次根之數。

此證法甚易推至 $n=p^m q^s r^t\cdots\cdots$ 之例.

II. 茲述次定理而不證明之：若 α 為 1 之 n 乘素根，則 α^r 為 1 之原 n 次根，惟 r 與 n 須互為素數。此定理能用以由一原 n 次根求總原 n 次根。*

III. 若 $n=p^a q^b\cdots\cdots r^c$，而 p，q，……，r 為 n 之素因數，則方程式 $x^n-1=0$ 之根，為形如 $\beta\gamma\cdots\cdots\delta$ 之 n 個乘積，其中 β 為 $x^{p^a}=1$ 之根，γ 為 $x^{q^b}=1$ 之根……，δ 為 $x^{r^c}=1$ 之根。

命 $$\alpha=\beta\gamma\cdots\cdots\delta.$$

此處 β 表 q^a 值中之任一值；同樣 γ，……，δ 各表 q^b，….

* 其證明可參考 Burnside 及 Panton 之方程式論 卷I，98頁。

$\ldots, \gamma^{c}$ 值。由是可證明 α 有 n 值，即為 $x^n-1=0$ 之 n 根，

第一，因 $\beta^{p^a}=1$, $\gamma^{q^b}=1, \ldots\ldots, \delta^{r^c}=1$；故 $\beta^n=1$, $\gamma^n=1, \ldots\ldots,$ $\delta^n=1$,

由是 $\alpha^n=1$。

第二，證明 α 之 n 值皆相異。若命 α 之二值能相等，假定

$$\beta'\gamma'\ldots\ldots\delta'=\beta''\gamma''\ldots\ldots\delta''. \qquad \mathrm{I}$$

因 I 之左邊諸根不能各與右邊諸根相等，命 β' 與 β'' 為相異。

由 I 得 $$(\beta'\gamma'\cdots\delta')^{q^b\ldots r^c}=(\beta''\gamma''\ldots\delta'')^{q^b\ldots r^c},$$

又 $$(\gamma'\cdots\delta')^{q^b\ldots r^c}=(\gamma''\ldots\delta'')^{q^b\ldots r^c}=1.$$

故得 $$\beta'^{q^b\ldots r^c}=\beta''^{q^b\ldots r^c}.$$

因 β' 與 β'' 為 $x^{p^a}=1$ 之相異之根，故等於同一原根 β 之二不同乘冪，而可寫為

$$\beta'=\beta^{m+m'},\ \beta''=\beta^{m'},$$

其中 m' 與 $m+m'$ 各小於 p^a. 故得

$$\beta^{(m+m')q^b\ldots r^c}=\beta^{m'q^b\ldots r^c},$$

或 $$\beta^{mq^b\ldots r^c}=1.$$

故 β 為 $x^{p^a}=1$，與 $x^{mq^b\ldots r^c}=1$ 兩者之根，故亦為 $x^s=1$ 之根，惟 s 為 p^a 與 $mq^b\cdots r^c$ 之最高公因數(§65 定理 IV)。然 $s \leqq m$，故 $s<p^a$. 因 β 為原根，故此為不可能，而方

程式 I 不能成立。

IV. 若 p 爲素數,則 $x^{p^a}=1$ 之根,可由形如 $x^p=A$ 之方程式之根求得之。

命 w_1 爲 $x^p=1$ 之任何根,w_2 爲 $x^p=w_1$ 之任何根,w_3 爲 $x^p=w_2$ 之任何根,由是類推,最後 w_a 爲 $x^p=w_{a-1}$ 之任何根。則乘積 $\alpha=w_1w_2\cdots w_a$ 表 $x^{p^a}=1$ 之 p^a 個不同之根。

因 $w_1{}^p=1$, $w_2{}^p=w_1$, 等等,故依次得諸關係,

$$\alpha^p=w_1{}^pw_2{}^p\cdots w_a{}^p=1w_1w_2\cdots w_{a-1},$$

$$\alpha^{p^2}=w_1{}^pw^p{}_2\cdots\cdots w_{a-1}{}^p=1w_1w_2\cdots\cdots w_{a-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha^{p^{a-1}}=w_1,\quad \alpha^{p^a}=1.$$

V. 當 n 爲任何非素數 (Composite number), $x^n-1=0$ 之解法,可化爲 n 爲素數之二項方程式之解法。

此重要結論,易由本節定理III與定理IV而得,下一章內將應用之。

67　倒數方程式之降低(Depression). 一標準形之倒數方程式(§31)常可降爲一半次數。

以 x^m 除已知方程式

$$a_0x^{2m}+a_1x^{2m-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0=0$$

之兩邊,而集合各對由首及由尾等距之項,則得

$$a_0\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)+a_1\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right)+\cdots\cdots+a_{m-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)+a_m=0.$$

假定 $y=x+\frac{1}{x}$,則得

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2,$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-y=y^3-3y,$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\left(x+\frac{1}{x^3}\right)-y^2+2=y^4-4y^2+2,$$

而普通　$x^p+\frac{1}{x^p}=\left(x^{p-1}+\frac{1}{x^{p-1}}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{p-2}+\frac{1}{x^{p-2}}\right).$

代入上式則得 y 之 m 次方程式。由 $x+\frac{1}{x}=y$ 之關係,知由 y 之每一值可得 x 之二值。

例題 1.　求 $x^2-1=0$, $x^3-1=0$, $x^4-1=0$ 之原根。

例題 2.　求 $x^5-1=0$ 之根。

以 $x-1$ 除之,則得 $x^4+x^3+x^2+x+1=0.$

以 x^2 除此倒數方程式,而取 $x+\frac{1}{x}=y$,則得 $y^2+y=1$,

而 $y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

解 $x^2-xy+1=0$,則得下列四根:

$$x_1=-\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right),$$

$$x_2=-\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{5}-i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$$

$$x^3=-\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{5}+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right),$$

$$x_4=-\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right),$$

此四根為 1 之原五次根。其他一根為 1。求證 x_2

$=x_1^2$。

例題 3.　求 $x^6-1=0$ 之根。

例題 4.　求 $x^7-1=0$ 之根。

以 $x-1$ 除之,得一標準形之倒數方程式,而此方程式可降為三次方程式 $y^3+y^2-2y-1=0$。

假令 $z=y+\frac{1}{3}$,則得 $z^3-\frac{7}{3}z-\frac{7}{27}=0$.由 §59 得 y 之三值 α, α_1, α_2, 其中

$$\alpha=-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\sqrt[3]{28+84\sqrt{-3}}+\frac{1}{6}\sqrt[3]{28-84\sqrt{-3}}.$$

由 $x^2-xy+1=0$ 得

$$\frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4}}{2},\quad \frac{\alpha_1\pm\sqrt{\alpha_1^2-4}}{2},\quad \frac{\alpha_2\pm\sqrt{\alpha_2^2-4}}{2}$$

六值,此六值與 1 為 1 之七次根。

例題 5.　求 $x^8-1=0$ 之根。何者為原根?

例題 6.　求 $x^9-1=0$ 之根。

開立方得 $x^3=1$ 或 ω 或 ω^2; 而 $x=1, \omega, \omega^2$, $\sqrt[3]{\omega}$, $\omega\sqrt[3]{\omega}$, $\omega^2\sqrt[3]{\omega}$, $\sqrt[3]{\omega^2}$, $\omega\sqrt[3]{\omega^2}$, $\omega^2\sqrt[3]{\omega^2}$,其中 ω 與 ω^2 為 1 之原立方根。舉出 $x^9-1=0$ 之原根。

例題 7.　試舉 $x^{10}-1=0$ 之三角解法,并說明何者為原根。

例題 8.　求 $x^{12}-1=0$ 之原根。

例題 9.　$x^{180}-1=0$ 有若干原根?

例題 10.　求 $x^{14}-1=0$ 之原根之和。

例題 11. 用三角法求 $x^{11}-1=0$, $x^{13}-1=0$ 之根之近似值。

例題 12. 由 $x^3-1=0$ 與 $x^5-1=0$ 之原根,求 $x^{15}-1=0$ 之原根。

例題 13. 作一方程式使其根爲 $x^{21}-1=0$ 之原根。

因有 12 原根。且得 $\quad x^{21}-1=(x^7-1)(x^{14}+x^7+1)$.

$x^7-1=0$ 之根爲 $x^{21}-1=0$ 之非原根.因 x^3-1 爲 $x^{21}-1$ 之因數,故 $x^3-1=0$ 之二原根爲 $x^{21}-1=0$ 之其他二非原根。而此二根爲 $x^2+x+1=0$ 之根。故所求之方程式爲 $(x^4+x^7+1)\div(x^2+x+1)=0$。此爲倒數方程式,而可降成 $x^6-x^5-6x^4+6x^3+8x^2-8x+1=0$。

例題 14. 若 $-\sqrt{-1}$ 爲 $x^n-1=0$ 之原根,求 n。若 $-\sqrt{-1}$ 爲非原根, n 可取何值?

第七章

根之對稱函數

68. 牛頓根之乘冪和之公式. $f(x)=0$諸根之同乘冪之和,可以係數之有理式表之。方程式$f(x)=0$諸根$\alpha,\beta,\gamma,\delta,\cdots\cdots$之$p$次乘冪之和爲根之對稱函數。對稱函數之定義與簡單討論,於§15已述之。依普通之記法,以s_p表$\Sigma\alpha^p$,故

$$s_1=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots\cdots,$$

$$s_2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\cdots\cdots,$$

$$s_3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3+\cdots\cdots.$$

欲得牛頓之公式,先書(§20,II)

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x-\alpha}+\frac{f(x)}{x-\beta}+\frac{f(x)}{x-\gamma}\cdots\cdots.$$

由§3,知所示諸除法皆可適除盡。

若 $$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdot+a_{n-1}x+a_n,$$

則得 $$\frac{f(x)}{x-\alpha}=x^{n-1}+(\alpha+a_1)x^{n-2}+(\alpha^2+a_1\alpha+a_2)x^{n-3}+\cdots\cdot$$
$$+(\alpha^m+a_1\alpha^{m-1}+a_2\alpha^{m-2}++a_m)x^{n-m-1}+\cdots\cdot.$$

同樣行$\frac{f(x)}{x-\beta}$, $\frac{f(x)}{x-\gamma}$, $\cdots\cdots$之除法,而將諸結果,相加,則得

$$f'(x)=nx^{n-1}+(s_1+na_1)x^{n-2}+(s_2+a_1s_1+na_2)x^{n-3}+\cdots\cdots$$
$$+(s_m+a_1s_{m-1}+a_2s_{m-2}+\cdots\cdots+na_m)x^{n-m-1}+\cdots\cdots$$

而由§19,知

$$f'(x)=nx^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\cdots\cdots+a_{n-1}.$$

使$f'(x)$之二式內x同乘冪之係數相等,則得

$$s_1+na_1=(n-1)a_1,\quad\text{或}\quad s_1+a_1=0,$$

$$s_2+as_1+na_2=(n-2)a_2,\ \text{或}\ s_2+a_1s_1+2a_2=0,$$

而普通當$m<n$,

$$s_m+a_1s_{m-1}+a_2s_{m-2}+\cdots\cdots+na_m=(n-m)am,$$

或 $$s_m+a_1s_{m-1}+a_2s_{m-2}+\cdots\cdots+a_{m-1}s_1+ma_m=0.\qquad \text{I}$$

由關係式I,即所謂牛頓之公式,易求得:

$$s_1=-a_1,\quad s_2=a_1^2-2a_2,\quad s_3=-a_1^3+3a_1a_2-3a_3,$$

$$s_4=a_1^4-4a_1^2a_2+4a_1a_3+2a_2^2-4a_4,$$

由此類推,可至s_{n-1}。欲推廣此等結果於根之諸正整乘冪之和,即s_n, s_{n+1}, ……,以x^{m-n}乘$f(x)=0$,而$m>n$,則得

$$x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots\cdots+a_nx^{m-n}=0.$$

依次以根α, β, γ, δ,……代x,而將諸結果相加,則得

$$s_m+a_1s_{m-1}+a_2s_{m-2}+\cdots\cdots+a_ns_{m-n}=0.\qquad \text{II}$$

若使m依次等於n, $n+1$, $n+2$,……諸值,且知$s_0=n$,故得

$$s_na_1s_{n-1}+a_2s_{n-2}+\cdots\cdots+na_n=0,$$

$$s_{n+1}+a_1s_n+a_2s_{n-1}+\cdots\cdots+a_ns_1=0,$$

$$s_{n+2}+a_1s_{n+1}+a_2s_n+\cdots\cdots+a_ns_2=0,\text{等等},$$

由此可求s_n，s_{n+1}，…… 之式。

令 $x=\dfrac{1}{y}$，且求變成方程式之根諸相當正乘冪之和,可求 $f(x)=0$ 之根之負整乘冪之和。

s_m 之值可用行列式表之如次:

$$s_2=\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 2a_2 & a_1 \end{vmatrix},\quad s_3=-\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ 2a_2 & a_1 & 1 \\ 3a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix},\quad s_4=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 2a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ 3a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ 4a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix},\text{等等},$$

69. 用s_m表諸係數.　由§68之公式,甚易得

$$a_2=\frac{1}{\underline{|2}}\begin{vmatrix} s_1 & 1 \\ s_2 & s_1 \end{vmatrix},\quad a_3=-\frac{1}{\underline{|3}}\begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 \\ s_3 & s_2 & s_1 \end{vmatrix}\quad a_4=\frac{1}{\underline{|4}}\begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 \\ s_4 & s_3 & s_2 & s_1 \end{vmatrix},\text{等等}.$$

例題 1.　求$x^4+x^3+x^2+x+1=0$諸根之正乘冪之和。

$$s_1=-a_1=-1,$$

$$s_2=-a_1s_1-2a_2=-1,$$

$$s_3=-a_1s_2-a_2s_1-3a_3=-1,$$

$$s_4=-a_1s_3-a_2s_2-a_3s_1-4a_4=-1,$$

由是類推。諸根爲1之原五次根。試將§67例題2所與之根實行平方之,以證實s_2之結果。

例題 2.　求 $x^3-2x^2+5x-4=0$ 諸根之正負乘冪之和。

$s_1=2$, $s_2=-6$, $s_3=-10$, $s_4=+18$, 由是類推.欲求 s_{-m}, 命 $x=\frac{1}{y}$, 則方程式變爲 $x^3-\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}=0$. 故 $s_{-1}=\frac{5}{4}$, $s_{-2}=\frac{9}{16}$, $s_{-3}=\frac{53}{64}$, 由是類推。

例題 3.　求 $x^n+1=0$ 諸根之正負乘冪之和。

例題 4.　若根之偶數乘冪之和爲零或負,求證此方程式至少有二複虛根。

例題 5.　求證於 $x^n-1=0$, $s_m=n$ 或 0, 因 m 能以 n 除盡或不能除盡而定.

以 $a_1,\cdots,a_n$ 之值代入 §68 之 I 與 II.

70. 對稱函數之基本定理. 凡代數方程式之根之有理對稱函數,能以係數之有理式表之。

先求對稱函數 $\Sigma\alpha^m\beta^p$ 之值,其各項各含二根。因

$$s_m=\alpha^m+\beta^m+\gamma^m+\cdots\cdots,$$

$$s_p=\alpha^p+\beta^p+\gamma^p+\cdots\cdots.$$

相乘則得 $$s_ms_p=\alpha^{m+p}+\beta^{m+p}+\gamma^{m+p}+\cdots\cdots+\alpha^m\beta^p+\alpha^m\gamma^p+\beta^m\gamma^p+\cdots,$$

即 $$s_ms_p=s_{m+p}+\Sigma\alpha^m\beta^p,$$

故 $$\Sigma\alpha^m\beta^p=s_ms_p-s_{m+p}. \qquad \text{I}$$

此結果乃假定 m 與 p 爲不相等之整數而得之者; 若 m 與 p 相等,則 $\Sigma\alpha^m\beta^p$ 內之項兩兩相等,而 $\Sigma\alpha^m\beta^p=2\Sigma(\alpha\beta)^m=s_m{}^2-s_{2m}$. 於二例,此對稱函數皆表成根

之乘冪和之有理函數。然由§68，同乘冪之和 s_m，能以已知方程式之係數之有理式表之。故 $\Sigma\alpha^m\beta^p$ 能以係數之有理式表之。

次表每項含三根之對稱函數 $\Sigma\alpha^m\beta^p\gamma^q$ 之值為係數之有理函數。因

$$\Sigma\alpha^m\beta^p=\alpha^m\beta^p+\alpha^m\gamma^p+\beta^m\gamma^p+\cdots\cdots,$$

$$s_q=\alpha^q+\beta^q+\gamma^q+\cdots\cdots.$$

相乘，則得 $s_q\Sigma\alpha^m\beta^p=\alpha^{m+p}\beta^p+\beta^{m+q}\gamma^p+\gamma^{m+q}\alpha^p+\cdots\cdots$

$$+\alpha^m\beta^{p+q}+\beta^m\gamma^{p+q}+\gamma^m\alpha^{p+q}+\cdots\cdots$$

$$+\alpha^m\beta^p\gamma^q+\cdots\cdots.$$

右邊諸項由三組而成，其記法各為 $\Sigma\alpha^{m+q}\beta^p$，$\Sigma\alpha^m\beta^{p+q}$，$\Sigma\alpha^m\beta^p\gamma^q$。故

$$s_q\Sigma\alpha^m\beta^p=\Sigma\alpha^{m+q}\beta^p+\Sigma\alpha^m\beta^{p+q}+\Sigma\alpha^m\beta^p\gamma^q.$$

移項，且代入各項僅含二根諸對稱函數如 I 所定之值，則得

$$\Sigma\alpha^m\beta^p\gamma^q=s_ms_ps_q-s_{m+p}s_q-s_{m+q}s_p-s_ms_{p+q}+2s_{m+p+q}. \qquad \text{II}$$

此乃假定 m, p, q 為不等者。若 $m=p$，則得

$$2\Sigma(\alpha\beta)^m\gamma^q=s_m^2s_q-s_{2m}s_q-2s_{m+q}s_m+2s_{2m+q}.$$

若 $m=p=q$，則得 $\Sigma\alpha^m\beta^q\gamma^q$ 之值為 $2\cdot3\Sigma(\alpha\beta\gamma)^m$，而

$$6\Sigma\alpha^m\beta^p\gamma^q=s_m^3-3s_{2m}s_m+2s_{3m}.$$

如是，$\Sigma\alpha^m\beta^p\gamma^q$ 常能以已知方程式之係數之有理式

表之。

此法可繼續至任意範圍，而任意函數 $\Sigma\alpha^m\beta^p\gamma^q\delta^r\cdots$ 之證法常可得之。

凡上所研究之對稱函數，其諸項皆爲同次，而爲齊次函數 (Homogeneous function)。若任意有理對稱整函數不爲齊次，則必爲二個或數個齊次對稱整函數之和，爲 $\alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$ 是也。故知有理對稱整函數，不論其爲齊次與否，常可以係數之有理式表之。

最後知分數函數，除能約之使其分子分母各成有理對稱函數者外，決不能爲對稱。故分數函數亦可以係數之有理式表之，而此定理成立矣。

71. 用§70之定理能計算用係數表任何有理對稱函數之值。然此法甚繁，常不如他法之爲便。茲述§15所得數結果，以便參考，即

於三次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$,

$$\Sigma\alpha^2\beta=3c-ab,$$

$$\Sigma\alpha^2\beta^2=b^2-2ac,$$

$$\Sigma\alpha^3\beta=a^2b-2b^2-ac,$$

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=c-ab.$$

於四次方程式 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$,

$$\Sigma\alpha^2\beta=3c-ab$$

$$\Sigma\alpha^2\beta^2=b^2-2ac+2d.$$

例題 1. 於三次方程式,求以係數表$\dfrac{\Sigma\alpha^2\beta\div\Sigma\alpha^2\beta^2}{\Sigma\alpha^3\beta\div\Sigma\alpha^2}$之值。

例題 2. 於四次方程式,求無理對稱函數$\sqrt{\Sigma\alpha^3\beta}$之值。

例題 3. α_1, α_2, α_3,……,α_n 爲 $f(x)=0$ 之根,計算 $\Sigma\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3$.以

$$\Sigma\alpha_1=-a_1$$

乘

$$\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3=-a_3.$$

乘積中 $\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3$ 之項僅有一次,而 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ 之項有四次。故

$$\Sigma\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3+4\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4=a_1a_3,$$

而

$$\Sigma\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3=a_1a_3-4a_4.$$

若用 §70, II 計算之,則因 $p=q=1$ 及 $m=2$, 得

$$2\Sigma\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3=s_2s_1^2-2s_3s_1-s_2^2+2s_4.$$

代入 §68 s_1, s_2, s_3, s_4, 之值,而行所示諸運算則得相同之解答。

例題 4. 求證於普通方程式 $f(x)=0$, 用係數表 $\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2$ 所得之普通式與四次方程式者同。

例題 5. 計算對於 $f(x)=0$ 之 $\Sigma\alpha_1^3\alpha_2$, 而由此結果誘導其對於三次方程式所有之特值。

例題6. 於五次方程式計算 $\Sigma\alpha_1{}^2\alpha_2{}^2\alpha_3$. 其結果與普通方程式者相同否?

例題7. 對於三次方程式 $b_0x^3+3b_1x^2+3b_2x+b_3=0$, 求對稱函數 $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2$ 之值,

由 §35,V 試推求同結果。

例題8. 應用 §35, 計算 $(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2$ 對於三次方程式 $x^3+x^2+x+1=0$ 之值。此對稱函數與三次方程式之判別式有若何之關係?當互易諸根,函數 $(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)$ 有若干值?此函數何以不對稱?

例題9. 於四次方程式 $x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$ 求證

$$(\alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_4)(\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_4)(\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3)=a_3{}^2+a_1{}^2a_4-4a_2a_4.$$

例題10. 對於此四次方程式,求證

$$(\alpha\beta+\gamma\delta)(\gamma\alpha+\beta\delta)+(\alpha\beta+\gamma\delta)(\beta\gamma+\alpha\delta)+(\beta\gamma+\alpha\delta)(\gamma\alpha+\beta\delta)=a_1a_3-4a_4.$$

***例題11.** 求作一三次方程式,使其根為

$$\alpha\beta+\gamma\delta,\quad \alpha\gamma+\beta\delta,\quad \beta\gamma+\alpha\delta.$$

例題12. 求證用例題11內之三次方程式之根,及關係式 $\alpha\beta\gamma\delta=a_4$, 如何可以解普通四次方程式。

例題13. 當用種種方法互換諸根,函數 $\alpha\beta+\gamma\delta$

可得若干不同之值?

*例題 14. 求諸根爲

$\rho=\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}$, $\rho_1=\sqrt{2}+\omega\sqrt[3]{5}$, $\rho_2=\sqrt{2}+\omega^2\sqrt[3]{5}$,

$\rho_3=-\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}$, $\rho_4=-\sqrt{2}+\omega\sqrt[3]{5}$, $\rho_5=-\sqrt{2}+\omega^2\sqrt[3]{5}$;

之方程式。

命所求方程式爲

$$x^6+a_1x^5+a_2x^4+a_3x^3+a_4x^2+a_5x+a_6=0.$$

因 $a_1=0$, 故 $a_2=\Sigma\rho\rho_1=-\frac{1}{2}\Sigma\rho^2=-6$. 以 $\Sigma\rho$ 乘 $\Sigma\rho\rho_1$, 則得 $3\Sigma\rho\rho_1\rho_2+\Sigma\rho\rho_1{}^2=0$,

故 $$a_3=-\Sigma\rho\rho_1\rho_2=\frac{1}{3}\Sigma\rho\rho_1{}^2=-\frac{1}{3}\Sigma\rho^3=-10.$$

以 $\Sigma\rho$ 乘 $\Sigma\rho\rho_1\rho_2$, 則得

$4\Sigma\rho\rho_1\rho_2\rho_3+\Sigma\rho\rho_1\rho_2{}^2=0$; $\Sigma\rho\rho_1\rho_2{}^2=\Sigma\rho_2{}^2.\Sigma\rho\rho_1-\Sigma\rho_2{}^3.\Sigma\rho+\Sigma\rho_2{}^4$ $=\Sigma\rho_2{}^2.\Sigma\rho\rho_1+\Sigma\rho_2{}^4=-48$, 故 $a_4=12$.

同樣得

$5\Sigma\rho\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4+\Sigma\rho\rho_1\rho_2\rho_3{}^2=0$, $\Sigma\rho\rho_1\rho_2\rho_3{}^2=\Sigma\rho_3{}^2.\Sigma\rho\rho_1\rho_2-\Sigma\rho_3{}^3.$ $\Sigma\rho\rho_1-\Sigma\rho_3{}^5=-300$,

故 $a_5=-60$. 故 $a_6=17$.

*例題 15. 求以三次方程式之係數表 $(\alpha+\omega\alpha_1+\omega^2\alpha_2)+(\alpha+\omega^2\alpha_1+\omega\alpha_2)$ 之值, 其中 ω 爲 1 之複虛立方根。

*例題 16. 對於四次方程式 $x^4+4b_1x^3+6b_2x^2+4b_3x$

$+b_4=0$ 求證下列諸關係式:

$\Sigma\alpha^3\alpha_1=1536b_1{}^4b_2-2304b_1{}^2b_2{}^2+432b_2{}^3-256b_1{}^3b_3+672b_1b_2$
$b_3-48b_3{}^2+16b_1{}^2b_4-36b_2b_4$.

$\Sigma\alpha^4\alpha_1\alpha_2=256b_1{}^3b_3-288b_1b_2b_3+48b_3{}^2-16b_1{}^2b_4+12b_2b_4$.

$\Sigma\alpha^3\alpha_1{}^2\alpha_2=96b_1b_2b_3-48b_3{}^2-48b_1{}^2b_4+24b_2b_4$.

$\Sigma\alpha^3\alpha_1{}^3=216b_2{}^3-288b_1b_2b_3+48b_3{}^2+48b_1{}^2b_4-18b_2b_4$.

$\Sigma\alpha^2\alpha_1{}^2\alpha_2\alpha_3=6b_2b_4$.

$\Sigma\alpha^2=16b_1{}^2-12b_2$

$\Sigma\alpha^2\alpha_1\alpha_2=16b_1b_3-4b_4$.

*例題 17. 求一三次方程式,使其根為

$(\alpha-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)$, $(\alpha-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)$, $(\alpha-\alpha_3)$
$(\alpha_1-\alpha_2)$.

*例題 18. 對於四次方程式 $x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$
$=0$, 求證

$(\alpha+\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)(\alpha-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)(\alpha-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)$
$=-(a_1{}^3-4a_1a_2+8a_3)$.

第八章

消去法(Elimination)

72. 終結式或消去式(Resultant or eliminant)

試決定

$$f(x)\equiv a_0x^2+a_1x+a=0,$$

$$F(x)\equiv c_0x^2+c_1x+c_2=0$$

二方程式有一公根之條件。以β_1,β_2表第二方程式之根.β_1或β_2適合方程式$f(x)=0$必要且充足之條件爲$f(\beta_1)$或$f(\beta_2)$等於零;換言之,卽$f(\beta_1)\cdot f(\beta_2)$等於零也。

$$f(\beta_1)\equiv a_0\beta_1^2+a_1\beta_1+a_2,$$

$$f(\beta_2)\equiv a_0\beta_2^2+a_1\beta_2+a_2$$

相乘,則得

$$a_0^2\beta_1^2\beta_2^2+a_0a_1(\beta_1\beta_2^2+\beta_1^2\beta_2)+a_0a_2(\beta_1^2+\beta_2^2)+a_1^2\beta_1\beta_2+a_1a_2(\beta_1+\beta_2)+a_2^2.$$

以c_0^2乘之,而$\beta_1\ \beta_2$之對稱函數以$F(x)=0$之係數所表之値代入,則得

$$a_0^2c_0^2-a_0a_1c_1c_2+a_0a_2c_1^2-2a_0a_2c_0c_2+a_1^2c_0c_2-a_1a_2c_0c_1+a_2^2c_0^2.$$

此式謂之消去式或終結式。其等於零卽爲所與方

程式有一公根之條件。

若由含 $n-1$ 變數之 n 方程式,消去諸變數,而得一僅含諸方程式之係數之方程式 $R=0$, 則 R 式謂之所與諸方程式之消去式或終結式,

上述消去法之例,乃藉對稱函數以行之者。此法可推廣之如次:

73. 用對稱函數消去法. 求二方程式

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0,$$

$$F(x)\equiv c_0x^m+c_1x^{m-1}+c_2x^{m-2}+\cdots+a_m=0$$

有一公根之條件。欲其如是,則 $F(x)=0$ 之諸根 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_m$ 之某一,適合 $f(x)=0$, 此乃必要且充足之條件也。由是乘積

$$f(\beta_1)\cdot f(\beta_2)\cdots f(\beta_m)$$

必等於零。

而
$$f(\beta_1)\equiv a_0\beta_1{}^n+a_1\beta_1{}^{n-1}+\cdots\cdots+a_n,$$
$$f(\beta_2)\equiv a_0\beta_2{}^n+a_1\beta_2{}^{n-1}+\cdots\cdots+a_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(\beta_m)\equiv a_0\beta^n{}_m+a_1\beta_m{}^{n-1}+\cdots\cdots+a_n.$$

諸式相乘,乘積內 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 之對稱函數以 $c_0,c_1,\cdots,c_m$ 所表之值代入,而除去諸分數,則得

$$R=c_0{}^mf(\beta_1),f(\beta_2)\cdots f(\beta_m).$$

此 R 為消去式,而為 $f(x)$ 與 $F(x)$ 之係數之有理整函數。其等於零卽為所與二方程式有一公根之條件也。以所與方程式之係數所表消去式之次數普通為 $m+n$.

以 $f(x)=0$ 之根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 依次代入多項式 $F(x)$ 內之 x, 得同一消去式,此甚易知之。

74. 阿袞洛之消去法. 若 §73內所定之 $f(x)=0$ 與 $F(x)=0$ 有一公根 α,則可書

$$f(x)\equiv(x-\alpha)f_1(x)$$

$$F(x)\equiv(x-\alpha)F_1(x),$$

而

$$f_1(x)\equiv A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\cdots+A_n,$$

$$F_1(x)\equiv C_1x^{m-1}+C_2x^{m-2}+\cdots+C_m,$$

係數 $A_1, A_2,\cdots,A_n$ 及 $C_1,C_2,\cdots,C_m$ 為未定量。

$m+n-1$ 次恒等方程式 $f(x)\cdot F_1(x)=F(x)\cdot f_1(x)$,甚易得之。

行所示諸乘法而使 x 之同乘冪之係數相等,則得 $m+n$ 齊次方程式。消去未定係數,則得所求之消去式。

例如求　$a_0x^2+a_1x+a_2=0,\quad c_0x^2+c_1x+c_2=0,$

之消去式,若二方程式有一公根,則得恒等式

$$(C_1x+C_2)(a_0x^2+a_1x+a_2)\equiv(A_1x+A_2)(c_0x^2+c_1x+c_2),$$

或 $(C_1a_0-A_1c_0)x^3+(C_1a_1+C_2a_0-A_1c_1-A_2c_0)x^2$

$+(C_1a_2+C_2a_1-A_1c_2-A_2c_1)x+C_2a_2-A_2c_2\equiv 0.$

使諸係數相等,得

$$\left.\begin{array}{r} C_1a_0 \qquad\quad -A_1c_0 \qquad\quad =0,\\ C_1a_1+C_2a_0-A_1c_1-A_2c_0=0,\\ C_1a_2+C_2a_1-A_1c_2-A_2c_1=0,\\ C_2a_2 \qquad\quad -A_2c_2=0. \end{array}\right\} \qquad \mathrm{I}$$

欲此四等次方程式I互相一致,則必

$$\begin{vmatrix} a_0 & 0 & c_0 & 0 \\ a_1 & a_0 & c_1 & c_0 \\ a_2 & a_1 & c_2 & c_1 \\ 0 & a_2 & 0 & c_2 \end{vmatrix}=0.$$

此消盡行列式爲消去式。

[欲求此式之理由,以A_2除I內四方程式之各邊,則實僅有三未知量,卽$\frac{C_1}{A_2}$, $\frac{C_2}{A_2}$, $\frac{A_1}{A_2}$是也,由前三方程式可得其值,若以此值代入第四方程式,則得二所與方程式之係數之關係式,而與上行列式所表者相同。]

75. **薛維斯特分解消去法.** 欲消去如§73所定之n次與m次之方程式$f(x)=0$, $F(x)=0$, 以x^0, x^1, x^2,…,x^{m-1}依次乘第一方程式,而以x^0, x^1, x^2,…,

x^{n-1} 依次乘第二方程式。

如是得 $m+n$ 方程式

$$f(x)=0,\quad xf(x)=0,\quad x^2f(x)=0,\dots,x^{m-1}f(x)=0,$$

$$F(x)=0,\quad xF(x)=0,\quad x^2F(x)=0,\dots,x^{n-1}F(x)=0.$$

x 之最高乘冪爲 $m+n-1$。若 $f(x)=0$ 與 $F(x)=0$ 有一公根,則此根適合全 $m+n$ 方程式。若 x 之各乘冪,即 $x, x^2, x^3, \dots, x^{m+n-1}$, 視爲適合 $m+n$ 一次方程式之 $m+n-1$ 未知量,則方程式之係數間必有一關係,甚爲明瞭。此一致之條件即爲消去式等於零。

如求 $f(x)\equiv \quad a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0,$

與 $F(x)\equiv \quad c_0x^2+c_1x+c_2=0.$

之消去式,則得

$$\begin{aligned}
f(x)&\equiv \phantom{a_0x^4+{}} a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0,\\
xf(x)&\equiv a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x \phantom{{}+a_3}=0,\\
F(x)&\equiv c_0x^2+c_1x+c_2=0,\\
xF(x)&\equiv c_0x^3+c_1x^2+c_2x=0,\\
x^2F(x)&\equiv c_0x^4+c_1x^3+c_2x^2=0.
\end{aligned}$$

欲 x, x^2, x^3, x^4, 四未知數適合五方程式,則必須

$$R\equiv\begin{vmatrix}
0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3\\
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0\\
0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2\\
0 & c_0 & c_1 & c_2 & 0\\
c_0 & c_1 & c_2 & 0 & 0
\end{vmatrix}=0.$$

R 爲消去式。

76. $f(x)=0$ **之判別式.** 於§21,已證明若 $f(x)=0$ 有重根,則該根必適合 $f'(x)=0$。$f(x)=0$ 與 $f'(x)=0$ 有公根之條件,以其消去式等於零表之。$f(x)=0$ 與 $f'(x)=0$ 之消去式,謂之 $f(x)=0$ 之判別式。方程式 $f(x)=0$ 之判別式,又可定義之爲係數或根之最簡函數,其等於零卽表方程式有等根。

若 $f(x)=0$ 與 $f'(x)=0$ 有公根,則此根亦適合 $nf(x)-f'(x)=0$。故當求 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 之消去式,可以求 $nf(x)-f'(x)=0$ 與 $f'(x)=0$ 之消去式代之。且後法更優,因其可得除去不相屬因數之消去式也。

普通二次,三次,四次方程式之判別式各如次:

二次方程式之判別式 $=\dfrac{4}{b_0^2}(b_1^2-b_0b_2)$;

三次方程式之判別式(§35) $=-\dfrac{27}{b_0^6}(G^2+4H^3)$;

四次方程式之判別式(§51) $=\dfrac{256}{b_0^6}(I^3-27J^2)$.

77. 表判別式爲根之對稱函數. 因方程式 $f(x)=0$ 之判別式,至少有二根相等,方可等於零,而無須其他條件,故 $\alpha_1-\alpha_2$ 必爲判別式之因數。因若 α_1 與 α_2 爲等根,則由此而致等於零之簡單因數,惟 $\alpha_1-\alpha_2$ 而已;然當方程式之係數爲常數,則判別式爲一常數,故互換任意二根,例如 α_1 與 α_2,判別式

之數值與符號決不至改變。故判別式內因數$\alpha_1-\alpha$之最低正乘冪爲二乘冪。換言之,即$(\alpha_1-\alpha_2)^2$爲判別式之因數也。

因此理論可應之於任何二根,故$(\alpha_1-\alpha_3)^2$爲一因數,$(\alpha_2-\alpha_3)^2$亦爲一因數,由此類推。

故乘積

$$D\equiv \Pi(\alpha_1-\alpha_2)^2\equiv(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2\cdots\cdot(\alpha_{n-1}-\alpha_n)^2$$

爲判別式之因數。若完成此積內所示諸乘法,則各項爲根之$n(n-1)$次。

由§73, $f(x)=0$與$f'(x)=0$之消去式可表爲

$$a_0^{n}\cdot f'(\alpha_1)\cdot f'(\alpha_2)\cdots\cdot f'(\alpha_n),$$

其中$\alpha_1, \alpha_2,\cdots,\alpha_n$爲$f(x)=0$之根。此積之一項爲$(na_0{}^2)^n(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)^{n-1}$;而此項爲根之$n(n-1)$次。此積爲齊次,因若由§13之關係,於任何他項,如$(n-1)^n a_0{}^n a_1{}^n(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)^{n-2}$,其中係數以根所表之等量代之,例如以$\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_n$代$-\frac{a_1}{a_0}$,則知此項亦爲根之$n(n-1)$次。故乘積$\Pi(\alpha_1-\alpha_2)^2$與$f(x)=0$, $f'(x)=0$之消去式爲根之同次,故與$f(x)=0$之判別式爲根之同次。故此乘積與判別式僅能差一數因數。

例題1. 求證$x^2-x-42=0$與$x^2+4x-77=0$之消去式爲零,且證二方程式之左邊有一公因數。

例題 2. 用阿哀洛之法求 $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ 與 $c_0x^3+c_1x^2+c_2x+c_3=0$ 之消去式,

例題 3. 欲使 $x^3+ax^2+x+1=0$, $x^2+3x+7=0$ 有一公根, a 應取何值?

例題 4. 用薛維斯特之消去法,求 $b_0x^3+3b_1x^2+3b_2x+b_3=0$ 之判別式.

例題 5. 求 $x^{n-1}=0$ 之判別式.此方程式有等根乎?

例題 6. 求 $x^{n+1}-x^n-x+1=0$ 之判別式.

第九章

同畫變形及郗蒿生變形

78. 同畫變形(Homographic transformation).

凡 §27 至 §34 內方程式之變形,皆爲同畫變形之特例,於此變形 x 與新變數 y 有關係

$$y=\frac{\lambda x+\mu}{\lambda' x+\mu'},$$

其中 λ, λ', μ, μ' 爲常數。例如若 $\lambda=-\mu'=1$, $\lambda'=\mu=0$, 則 $y=-x$, 即 §28 內者;若 $\lambda=\mu'=1$, 而 $\lambda'=0$, 則 $y=x+\mu$, 即 §32 內者。

解 x, 則得

$$x=\frac{\mu+\mu' y}{\lambda' y-\lambda}$$

若將 x 之此值代入已知 n 次方程式,則得一新 y 之 n 次方程式。

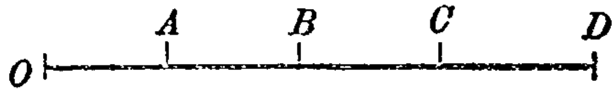
若 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 爲原方程式之根,而 $\alpha',\beta',\gamma',\cdots$ 爲變成方程式之相當根,則得

$$\alpha'=\frac{\lambda\alpha+\mu}{\lambda'\alpha+\mu'},\quad \beta'=\frac{\lambda\beta+\mu}{\lambda'\beta+\mu'},\text{等等。}$$

相減則得 $\alpha'-\beta'=\dfrac{(\alpha-\beta)(\lambda\mu'-\lambda'\mu)}{(\lambda\beta+\mu')(\lambda\alpha+\mu')}$。求得 $\alpha'-\gamma'$, $\delta'-\beta'$, $\delta'-\gamma'$ 等等之相似之式。茲若取任意四根 α, β, γ, δ 與相當根 α', β', γ', δ', 用此類之式,得次之關係:

$$\frac{(\alpha'-\beta')(\delta'-\gamma')}{(\alpha'-\gamma')(\delta'-\beta')}=\frac{(\alpha-\beta)(\delta-\gamma)}{(\alpha-\gamma)(\delta-\beta)}.$$

此類分數之幾何的意義甚爲明顯。若取 0 爲原點,



令 $\alpha=OC$, $\beta=OA$, $\gamma=OB$, $\delta=OD$. 則 $\alpha-\beta=AC$, $\alpha-\gamma=BC$, $\delta-\beta=AD$, $\delta-\gamma=BD$, 而右邊之分數等於 $\frac{AC}{BC}\div\frac{AD}{BD}$。此乃 C, D 點對於 A,B 點之複比(非調和比。)參看 §113 例題 10。

同樣,左邊分數,表 C', D', 點對於 A', B', 點之複比。故若根 α, β, γ, δ 表在一直線上由原點 O 所量之距離,則如是所定四點之複比,與變成方程式之相當根 α', β', γ', δ' 同樣所定諸點之複比相同。

故茲於同一直線上,有二組列點 α, β, γ, δ, ……… 及 α', β', γ', δ', …, 其一組列點之任意四點之複比,等於他組之相當四點之複比。此種列點稱爲同晝列點;故有同晝變形之名。對於一組列點中之一點,他組中祇有一點與之對應。換言之,卽二組列點間有一"一一對應" (One to-one correspondence)。同晝變形爲此對應能成立之最普通變形。茲進考不常爲同晝之變形。

79. 最普通之變形. n 次方程式 $f(x)=0$ 之根之最普通有理代數變形,可化爲不高於 $n-1$ 次之整變形。

凡一根 α_m 之有理函數,可表成分子分母各爲根

之有理整函數之分數之形式，卽

$$\frac{g(\alpha_m)}{h(\alpha_m)}.$$

以同量乘 $\frac{1}{h(\alpha_m)}$ 之分子分母，則可書

$$\frac{1}{h(\alpha_m)}=\frac{h(\alpha_1)\cdots h(\alpha_{m-1})\cdot h(\alpha_{m+1})\cdots h(\alpha_n)}{h(\alpha_1)\cdot h(\alpha_2)\cdots h(\alpha_n)}.$$

分母 $h(\alpha_1)\cdot h(\alpha_2)\cdots h(\alpha_n)$ 爲方程式 $f(x)=0$ 之根 α_1，$\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 之對稱數。由 §70，此函數可以係數之有理式表之。故表 $\frac{1}{h(\alpha_m)}$ 之值之分數之分母內可使無 α_m。換言之，$\frac{1}{h(\alpha_m)}$ 已化爲 α_m 之整函數。

又此分數之分子，卽 $h(\alpha_1)\cdots\cdot h(\alpha_{m-1})\cdot h(\alpha_{m+1})\cdots\cdots h(\alpha_n)$，爲方程式 $\frac{f(x)}{1-\alpha_m}=0$ 之根 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{m-1}$，$\alpha_{m+1},\cdots$，$\alpha_n$ 之對稱函數。故可表成此方程式之係數之有理函數。行所表除法，知此等係數爲 α_m 及 $f(x)=0$ 之係數之有理整函數。故 $\frac{1}{h(\alpha_m)}$ 與 $\frac{g(\alpha_m)}{h(\alpha_m)}$ 皆可表成 α_m 之有理整函數。命整函數 $G(\alpha_m)=\frac{g(\alpha_m)}{h(\alpha_m)}$.

若 $G(\alpha_m)$ 爲高於 n 次，以 $f(x)$ 除 $G(x)$，則得

$$G(x)=Q\cdot f(x)+H(x),$$

其中函數 $H(x)$ 之次數不超過 $n-1$。茲以 α_m 代 x。因 $f(\alpha_m)=0$，故得 $G(\alpha_m)=H(\alpha_m)$，而定理已證明矣。

80. 鄰蒿生 (Tschirnhausen) 變形. 由是，方程式 $f(x)=0$ 之根之最普通有理代數變形，能以 $n-1$ 次整函數

$$y=d_1+d_2x+d_3x^2+\cdots+d_nx^{n-1}$$

表之。

此稱為鄒嵩生變形。

鄒嵩生用此變形能化普通三次及四次方程式為二項方程式之形式。茲化三次方程式

$$b_0x^3+3b_1x^2+3b_2x+b_3=0.$$

假定 $y=d_1+d_2x+x^2$，其中係數 d_1，d_2 之值須決定者。

命所與方程式之根為 α_1，α_2，α_3，而所求方程式 $y^3-c=0$ 之相當根為 β，$\omega\beta$，$\omega^2\beta$，其中 ω，ω^2 為一之複虛立方根。由是

$$\left.\begin{aligned}\beta &= d_1+d_2\alpha_1+\alpha_1^2,\\ \omega\beta &= d_1+d_2\alpha_2+\alpha_2^2,\\ \omega^2\beta &= d_1+d_2\alpha_3+\alpha_3^2,\end{aligned}\right\}\qquad \mathrm{I}$$

相加，則得 $3d_1+d_2s_1+s_2=0$.

以 ω 乘第二方程式，ω^2 乘第三方程式，相加則得

$$(\alpha_1+\omega\alpha_2+\omega^2\alpha_3)d_2+\alpha_1^2+\omega\alpha_2^2+\omega^2\alpha_3^2=0.$$

故 $d_2+s_1=d_2+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-\dfrac{\alpha_2\alpha_3+\omega\alpha_1\alpha_3+\omega^2\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\omega\alpha_2+\omega^2\alpha_3}$

因 ω 可表 1 之二複虛立方根之任一，故此分數能有二值。稍經運算，知此二值為二次方程式

$$(b_0b_2+b_1^2)x^2+(b_0b_3-b_1b_2)x+(b_1b_3-b_2^2)=0$$

之根。

此二次方程式之係數爲已知,故可求得其二根,而所求 d_1, d_2 之值,亦可求得。方程式 I 之兩邊相乘,代入 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 之對稱函數之值,則得 $y^3-c=0$ 內 c 之值。

鄒薵生化三次方程式及四次方程式爲二項之形式之後;冀變普通五次方程式爲 $y^5-c=0$ 之形式。因此形式可有代數的解法,故彼期求出五次方程式之普通代數的解法。然當決定係數 d_1, d_2, d_3, d_4, d_5,遇意外之困難,即 24 次方程式之解法是也。鄒薵生之變形,於五次方程式之解法雖無補,然可用以除去五次方程式及高次方程式之第二,第三,第四項。

例題 1.　用鄒薵生變形化 $x^2+ax+b=0$ 爲二項之形式。

例題 2.　求與三次方程式 $x^3+x^2+x+2=0$ 之變形 $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ 相同之不高於二次之整變形。

因
$$\frac{f(x)}{x-\alpha_2}=x^2+(\alpha_2+1)x+(\alpha_2{}^2+\alpha_2+1),$$

$$\frac{1}{\alpha+{}^2{}_2 1}=\frac{(\alpha_1{}^2+1)(\alpha_3{}^2+1)}{(\alpha_1{}^2+1)(\alpha_2{}^2+1)(\alpha_3{}^2+1)}=$$

$$\frac{\alpha_1{}^2\alpha_3{}^2+\alpha_1{}^2+\alpha_3{}^2+1}{\alpha_1{}^2\alpha_2{}^2\alpha_3{}^2+\Sigma\alpha_1{}^2\alpha_2{}^2+\Sigma\alpha_1{}^2+1}=(\alpha_2{}^2+\alpha_2+1)^2-\alpha_2{}^2,$$

故　$y=-(x+1)^2$

第十章

置換法(Substitution)

81. 記法. 於 $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ 四字之排列,命各字以其他一字換置之,例如以 a_4 代 a_1,a_3 代 a_2,a_1 代 a_3 a_2 代 a_4,則此運算謂之置換,可以記法

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_4 & a_3 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}$$

表之。而各字以其下之字換置之;或以記法($a_1\ a_4\ a_2\ a_3$)表之,而各字以其後之字換置之,最後之字 a_3 以第一字 a_1 換置之。本書以用第二記法爲多。

注意
$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \equiv (x_1 x_3 x_2),$$

及
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \equiv (1\ 2\ 4\ 3\ 5).$$

以置換 $(a_1a_4a_2a_3)$ 施於排列 $a_1a_2a_3a_4$,得一新排列 $a_4a_3a_1a_2$ 同樣施於 $a_4a_3a_1a_2$ 則得 $a_2a_1a_4a_3$。

於一置換內。一字可以其自已換置之,然二字不能以同一字換置之。因是

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_3 & a_4 & a_2 \end{pmatrix}$$

爲一置換,而($a_1\ a_2\ a_3\ a_2\ a_4$)則不爲一置換,因後者中之 a_1 與 a_3 同以 a_2 代之故也。

例題 1. 求證$(xyzw)$與$(wxyz)$爲同一置換。

例題 2.　求證 $(a_1a_2\cdots a_n)$ 等於 $(a_{n-m}a_{n-m+1}\cdots a_na_1a_2\cdots a_{n-m-1})$；故同一置換可以若干方法表之,因此,其形狀不劃一。

82. 置換之積. 記法 $(a_1a_2\cdots a_n)$ $(b_1b_2\cdots b_m)$ 之意,卽先行置換 $(a_1a_2\cdots a_n)$，然後對於所得之結果行置換 $(b_1b_2\cdots b_m)$.二接列之置換稱爲依已知次序之積。

若施積(123)(453)於依自然次序之數字 12345,置換(453)使成排列 23145.施置換(453)於此結果則得排列 24153。然此最後排列可由第一排列用置換(12453)而得之.故(123)與(453)之積等於一置換(12453)。

所示之積(123)(453),可如次完成之甚便:於第一置換,1 以 2 置換之,而於第二置換,2 不受置換;故於積內,1 以 2 置換之。又於第一置換,2 以 3 置換之,於第二置換,3 以 4 置換之;故於積內,2 以 4 置換之。又於二置換,4 以 5 置換之,積內亦如是;於第二置換,5 以 3 置換之,積內亦如是。故相乘之結果爲置換(12453)。

例題 1.　求證(453)(123)=(12345)。

例題 2.　求證 $(abcd)(acde)=(abdce)$。

83. 交換定則與結合定則. (123)(453) 之

積與(453)(123)之積知其不相同。反之。知(123)(45)=(45)(123)，及$(xy)(zw)(xz)(yw)=(xz)(yw)(xy)(zw)$。故置換之乘法，普通不服從交換定則，然結合定則，則知其常服從之。

例題 1。若s_a, s_b, s_c爲置換，求證$(s_a s_b)s_c=s_a(s_b s_c)=s_a s_b s_c$。

假定s_a以q置換元素p，

s_b以r置換元素q，

s_c以s置換元素r，

則$s_a s_b$以r置換元素p，

而$s_b s_c$以s置換元素q。

故$s_a s_b s_c$，$(s_a s_b)s_c$，s^a，$(s_b s_c)$各以s置換p。

§4. 全同置換(Identical substitution). 置換之各記號，即以其記號各自置換之者爲全同置換。例如：$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$，亦可書爲$(a_1)(a_2)(a_3)$，於$(a_1)$，$a_1$字同時爲第一字及最後字，故即以其自己置換之。因全同置換與諸數之積內之1甚相似，故常以1表之。

§5. 反置換(Inverse substitution). 已知置換之反置換者，乃恢復原排列之置換也，是以已知置換與其反置換共成一全同置換。故置換

$$s=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \cdots a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 \cdots b_n \end{pmatrix}之反置換爲\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \cdots b_n \\ a_1 & a_2 & a_3 \cdots a_n \end{pmatrix}。$$

命以 s^{-1} 表置換 S 之反置換則 s^{-1} 之反置換為 s。任何置換經其反置換則得原排列之事實可以符號

$$s \cdot s^{-1} = s^0$$

表之。又 $$s^{-1} \cdot s = s^0,$$

其中 s^0 表全同置換,即 $s^0=1$。

置換 s 或 s^{-1} 之 r 次重複,以 s^r 或 s^{-r} 表之。故此處之指數與代數中之指數同法用之。

86. 循環置換 (Cyclic substitution). 假定將置換 $(a_1a_2\cdots a_n)$ 之字依已知之次序置於圓周上 $\frac{360°}{n}$ 之等間隔,則所與置換,等於圓經 $\frac{360°}{n}$ 之旋轉。故如是之置換謂之循環(Cycle),或循環置換,或圓置換(Circular substitution)。積 $(abc\cdots d)(xyz\cdots w)$ 謂之二循環之置換。同樣有三循環或多循環之置換。置換 $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&4&5&7&1&2&6\end{pmatrix}$ 由 (1 3 5)(2 4 7 6) 二循環而成;因以 3 代 1, 以 5 代 3, 以 1 代 5, 而為一循環;又以 4 代 2, 以 7 代 4, 以 6 代 7, 以 2 代 6, 而為第二循環。

如是,任何置換能分解為諸循環,使無二循環有一公共數字。此分解僅能有一法以施行之。

一循環可僅由一元素而成,如(5)。置換 $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&4&1&5\end{pmatrix}$ 亦可書為 (1 3 4)(2)(5) 或 (1 3 4)2 5 或 (1 3 4)。

例題 1. 求置換 $\begin{pmatrix}a&b&c&d&e&f&g&h\\c&d&a&f&g&b&h&e\end{pmatrix}$ 之循環。

例題 2. 證明 $(acb)(abc)=1$, $(abc)(abc)=(acb)$, $(ab)(ac)=(abc)$, $(bc)(acb)=(ac)$, $(bc)(bc)=1$, $(abc)(acb)=1$ 諸關係。

例題 3. 次諸積中何者服從交換定則：$(abc)(ac)$, $(bc)(acb)$, $(bca)(bac)$?

例題 4. 試書 $(abcde)$ 之反置換。

87. 有限數之不同置換. 對於有限數之元素 $a_1a_2\cdots a_n$ 能行之不同置換之數爲有限,因置換之數,不能多於排列之數。而排列之數知其爲有限故也。故若對於 $a_1a_2\cdots a_n$ 行無限級數之置換 $s, s^2, s^3, s^4, \cdots\cdots$, 此等置換不能皆不同。必有 s 之某乘羃與 s 得同樣之結果。命 $m+1$ 爲此種乘羃之最低者,則 $s^{m+1}=s$。此式可書爲 $s^m\cdot s=s$。故

$$s^m ss^{-1}=ss^{-1}=s^0=1,$$

而

$$s^m=1.$$

m 稱爲置換之次數。

置換之次數,爲等於全同置換之置換之最小乘羃。

若 $s=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$,則 $s^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$, $s^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$,

$s^4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$, $s^5=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$,等等

故 $m+1=5$, $m=4$, 而 $s^4=s^0=1$, $s^6=s^2$ 而普通 $s^{4n+r}=s^r$.

此置換 s 爲循環。故循環置換之次數等於其元素(數字)之數，此理甚明。

若 $s=(1\,2\,3)(4\,5)$，則 $s^2=(1\,3\,2)$，$s^3=(4\,5)$，$s^4=(1\,2\,3)$，$s^5=(1\,3\,2)(4\,5)$，$s^6=1$。故其次數爲 6。

若 $n_1, n_2, n_3, \cdots$ 表一置換之順次諸循環內元素之數，則其次數爲一適可以 $n_1, n_2, n_3, \cdots$ 之各數除盡之數；即其次數爲 $n_1, n_2, n_3, \cdots\cdots$ 之最小公倍數。

例題 1. 用實行置換以證明 $s=(1\,2)(3\,4\,5)(6\,7\,8\,9)$ 之次數爲 12，或 2, 3, 4 之 L. C. M.

88. 定理. 積 $t^{-1}st$ 可易由置換 s 及 t，對於 s 之各循環施置換 t 而得之。

命 $$s=(abc\cdots)(a'b'c'\cdots)\cdots$$

及 $$t=\begin{pmatrix} a\,b\,c\cdots a'\,b'\,c'\cdots \\ \alpha\,\beta\,\gamma\cdots\alpha'\,\beta'\,\gamma'\cdots \end{pmatrix}.$$

取 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \alpha', \beta', \gamma', \cdots$ 諸文字中之任意一文字，例如 β。由 t^{-1}，β 以 b 代之；由 s，b 以 c 代之；由 t，c 以 γ 代之。故由 $t^{-1}st$，β 以 γ 代之。

今若於 s 之諸循環中，由 t，以 β 代 b，γ 代 c，則於 s 內有次序 $\beta\gamma$ 以代次序 bc，而此即以 γ 代 β，而前相同。因此理由不僅可應用之於 β，而可應用之於任何文字，而定理成立。

於運算 $t^{-1}st$，t 設爲變 s 之形；而此運算謂之變

形。

例題 1. 若 $s=(123)(4567)$，$t=(572)$，則 $t^{-1}=(3275)$。欲明適所證明之定理，施 t^{-1} 於排列 1234567，則得 1724365。施置換 s 於此結果，則得 2435176。施 t 於後之排列，則最後得 345726。

對於排列 1234567 僅施一置換，卽 $s'=(135)(4762)$，以代三置換，則此同樣之結果得之更易。而 s' 爲由 s 施置換 t 於 s 之各循環而得之。

例題 2. 若 $s=(123)(4567)$，及 $t=(2437)$，試由 §88 之定理求 $t^{-1}st$。

例題 3. 若 $s=(ab)(cd)$，$t=(abc)$，求決定對於排列 $abcd$ 行 $t^{-1}st$ 之結果。

89. 轉換(Transposition). 轉換爲一循環置換之含二元素者。如 (ab)，(bc)，(12) 爲轉換。

例題 1. 求證任何轉換之平方爲一全同置換，卽 1。

90. 定理 一置換可表爲諸轉換之積，其法無限。

$$(123\cdots n)=(12)(13)\cdots(1n),$$

及 $(123)(4567)\cdots=(12)(13)(45)(46)(47)\cdots$，

甚易證明之。由此知凡置換皆可表成諸轉換之積。

爲此之法無限,因適所求得之任意二轉換之間可插入任何轉換之平方,而不變其置換;或可將任何轉換之平方附前或附後,而此可以任意繼續之,如 $abc=(ab)(ac)=(ca)(ca)(ab)(bc)(bc)(ac)$.

91. 定理. 一置換可分成之轉換之數,或常爲偶數或常爲奇數。

任意轉換,如 α_1, α_2,對於判別式之平方根,$\sqrt{D}$,之結果爲變其號。欲證此言(§77)

$$\begin{aligned}\sqrt{D}=&(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)\cdots(\alpha_1-\alpha_n)\\ &(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)\cdots(\alpha_2-\alpha_n)\\ &(\alpha_3-\alpha_4)\cdots(\alpha_3-\alpha_n)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &(\alpha_{n-1}-\alpha_n).\end{aligned}$$

轉換 $(\alpha_1\alpha_2)$ 改因數 $(\alpha_1-\alpha_2)$ 之符號,而互換第一列之其餘諸因數與第二列之諸因數。其餘諸列之因數不變。故由一單獨之轉換,變 $\sqrt{D}$ 之符號。

因任何置換可表成諸轉換之積,故任意置換對於 $\sqrt{D}$ 之結果必爲變其號或不變其號。若 $\sqrt{D}$ 之號不變,則此置換必含偶數個之轉換;若 $\sqrt{D}$ 之號變,則轉換之數必爲奇數。故置換無能表成偶數及奇數之轉換者。

92. 偶置換及奇置換. 置換之可表成偶數個轉換之積者,謂之偶置換;其可表成奇數個轉換之積者謂之奇置換。全同置換為屬於偶置換。

例題 1. 下列諸置換為奇或偶?

$$s=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&3&2&5&6&4\end{pmatrix},\qquad s=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&5&6&7\\4&6&7&5\end{pmatrix},$$

$$s''=(4\,5\,6)(1\,7\,4\,6\,2\,3),\quad s'''=(1\,2\,3\,4)^3.$$

例題 2. 求證任何置換變一偶置換為偶置換。參看 § 88。

93. 定理. 凡偶置換皆可表成三元素之循環置換之積。

若二轉換有一元素為公共,則得如次之等式:

$$(1\,2)(1\,3)=(1\,2\,3).$$

若二轉換無公共元素,則　次之關係:

$$(1\,2)(3\,4)=(1\,3\,4)(1\,3\,2).$$

如是,任意二對轉換各可以三元素之循環置換表之,由是任何偶置換可如是表之。

例題 1. 試表偶置換$(1\,2\,3\,4)(2\,4\,5\,6)$為三元素之循環置換之積。

第十一章

置換羣

94. 羣之例. 諸置換

$$1,\ (1\,2\,3),\ (1\,3\,2), \qquad \text{I}$$

爲各相異,而有此性質,卽其任意二者之積,不論其所取之次序如何,常等於三者之一。卽

$$(1\,2\,3)(1\,3\,2)=(1\,3\,2)(1\,2\,3)=1.$$

$$1(1\,2\,3)=(1\,2\,3)1=(1\,2\,3).$$

$$1(1\,3\,2)=(1\,3\,2)1=(1\,3\,2).$$

且任一置換之平方,仍得此組內之一置換。蓋因 $(1\,2\,3)^2=(1\,3\,2)$, $(1\,3\,2)^2=(1\,2\,3)$, $1^2=1$。有此性質之三置換 I, 謂之成一羣(Group)。

95. 置換羣之定義. 一組不同置換,其任意二者之積及任一之平方,仍屬此組,則謂之置換羣(Group of substitutions 或 Substitution-group)。

以下當用羣之名稱,常指置換羣而言。

諸置換 $(1\,2)$, $(1\,3)$, $(1\,2\,3)$ 不成一羣;因各置換雖相異,且有數乘積生出此組內之置換,然其他乘積則不然。如 $(13)(12)$ 生出 (132),而不屬於此組。

96. 羣之次及級. 一羣之置換所運用之元

素(文字或數字)之數,謂之羣之次(degree)。一羣內置換之數,謂之羣之級(Order)。如羣

$$1,\ (abc),\ (acb),\ (ab),\ (ac),\ (bc)$$

含 a, b, c 三元素,而有六置換,故此羣爲三次六級。

例題 1. 試述羣 $1, (ac)\ (bd)$ 之次數及級數。

例題 2. 求證全同置換滿足羣之條件。

例題 3. 試證一羣之一置換之任意正整數乘方,爲該羣之一置換。

例題 4. 求證全同置換屬於任何羣。

*例題 5. 求證一羣內任意置換之反置換屬於此羣。

例題 6. 一羣內之各置換 s,等於此羣之二置換之積。

97. 定理. 就相異文字 $a_1a_2\cdots\cdots a_n$ 可行 $n!$ 個置換,此諸置換成一羣。

由初等代數學,知 n 相異文字每次全取之排列之總數爲

$$n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3\cdot2\cdot1=n!.$$

任取一排列 P。行一置換,可使之變成其他排列之任意之一。然因此其餘 $n!-1$ 個排列無二者爲同一置換,故此種置換必較 $n!$ 少一。將全同置換算入,則

有 $n!$ 個置換。

此 $n!$ 置換成一羣。因就排列 P 行任一置換,又就所得之結果行同一置換或其他任意置換;則第二結果必為可直接由排列 P 行一已知置換而得之 $n!$ 排列之一。由是任意二置換之積,或任一置換之平方,等於已知置換之一。

例題 1. 文字 $a_1a_2a_3$ 可有 $a_1a_2a_3$, $a_1a_3a_2$, $a_2a_1a_3$, $a_2a_3a_1$, $a_3a_1a_2$, $a_3a_2a_1$ 六排列。求證此六排列可由 $a_1a_2a_3$ 各行置換 $1, (a_1)(a_2a_3), (a_1a_2)(a_3), (a_1a_2a_3), (a_1a_3a_2), (a_1a_3)(a_2)$ 而得之。求證此等置換成一羣。

98. 對稱函數與對稱羣. n 文字 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 之對稱函數,當交換其任意二文字時,其值不變,當行以屬於上定理所與之羣之一置換,其值不受變化。因此不變性,對稱函數謂之屬於該羣,而此羣有對稱羣 (Symmetric group) 之名。

例題 1. 應用對稱羣 $1, (a_1a_2a_3), (a_1a_3a_2), (a_2a_3), (a_1a_3), (a_1a_2)$ 之各置換,證明對稱函數 $a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3$ 之不變。

99. 定理. n 文字之諸偶置換,共成一羣。

由§92,凡偶置換皆可分解為偶數個轉換之積。故其任意二者之積及其任一之平方生出偶置換。

例題 1. 用文字 a,b,c 可成 $(ab),(ac),(bc)$ 三轉換。依任何次序取其任意二者之積,及各轉換之平方,則得下列相異之置換,皆爲偶置換,而成一羣:

$$1,(abc),(acb).$$

例題 2. 求 n 文字之諸奇置換,不成一羣。

100. 交代函數與交代羣. 命 $a_1, a_2,\cdots,\cdots a_n$ 爲 n 個不同之量。此諸量之函數,若互換其任意二量時,變此函數之符號,則謂之交代函數 (Alternating function)。

例: $$(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)\cdots\cdots(a_1-a_n)$$
$$(a_2-a_3)(a_2-a_4)\cdots\cdots(a_2-a_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(a_{n-1}-a_n).$$

此函數施以偶置換,其值不變。因一偶置換,爲由偶數個轉換而成,將有偶數次變更函數之符號,故能使此函數恢復其原符號。

因 n 文字之偶置換,不致變一交代函數之值,而諸奇置換變更其符號,包含此等偶置換之全數之羣謂之 n 次交代羣 (Alternating group)。因此不變性爲對於諸偶置換,而非對於他置換,故交代函數謂之屬於交代羣。

例題 1.　求證 n 次方程式之判別式,表成根之函數時,爲屬於 n 次交代羣之一函數。

101. 循環函數與循環羣.　任意置換之諸乘冪成一羣。由取置換 s 之不同乘冪所得之相異置換 $s, s^2, s^3, \cdots\cdots$ 之數,不能超過此置換之次數(§87)。若此次數爲 m,則 $s^m=1$。故若將 m 相異置換之任一平方之,或將其任意二者相乘,其結果常爲此 m 相異置換之一。故 m 相異置換組成一羣。

n 文字 $(a_1a_2\cdots\cdots a_n)$ 之循環置換之諸乘冪,成 n 次之循環羣(Cyclic group)。

n 文字之函數,經循環羣之諸置換,然不經其他置換,其值不變,則謂之循環函數(Cyclic function)。屬於 n 次之循環羣之最簡單之循環函數爲

$$a_1a_2^2+a_2a_3^2+\cdots\cdots+a_{n-1}a_n^2+a_na_1^2.$$

例題 1.　求證函數 $a_1a_2^2+a_2a_3^2+a_3a_1^2$ 屬於循環羣 $1, (a_1a_2a_3), (a_1a_3a_2)$。

例題 2.　求證 $(a_1+a_2\omega+a_3\omega^2)^3$ 屬於三次循環羣,ω 爲一之複虛立方根。

例題 3.　由作 $(a_1a_2a_3a_4)$ 之諸乘冪,以求四次之循環羣,

102. 任換羣及定換羣.　於羣

1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)

內,第二置換以 2 換 1,第三置換以 3 換 1, 第四置換以 4 換 1。同樣用此羣內之諸置換,數字 2,3 或 4 可變爲其他任何數字。此羣謂之任換羣。

一置換羣若其任一元素,可以其他任何元素換之,則謂之任換羣(Transitive group)。

不爲任換羣者謂之定換羣 (Intransitive group)。下列之羣,卽爲其一例,

1, (13), (24), (13) (24)。

此處 1 或 3 各決不能以 2 或 4 換之。

103. 原羣及非原羣. 若於由六置換而成之任換羣 1, (123456), (135)(246), (14)(25)(36), (153)(264), (165432)

內,分諸數字爲 1,3,5 與 2,4,6 二組,則知(123456),(14)(25)(36)及(165432)三置換之任一,其一組之數字以他組之數字換之,而(135)(246),(153)(264)二置換之任一則僅互換其一組內之數字。此羣謂之非原羣 (Imprimitive group)。

一任換羣,若其元素可分成相等個之相異元素之組,而各置換之一組之元素悉以他組之元素換之,或僅互換其一組內之元素,則謂之非原羣。不然

則謂之原羣(Primitive group)。原羣之例:

$$1,(1\,2\,3),\ (1\,3\,2).$$

四次之非原羣有三,六次者有十二,而無二次,三次及五次之非原羣。

例題 1. 求證凡其次數爲素數之羣,皆不能爲非原羣。

104. 二次三次四次及五次之羣之表.

茲與前五次之羣之表,惟除去羣 1。$G_q^{(p)}$ 卽表 p 次 q 級之羣之意。Cayley 及他人所用羣之記法,亦舉出之。彼等之記法,四次之對稱羣以$(abcd)\,all$ 表之;cyc 爲循環置換之意;pos 爲正或偶置換之意。欲知八次以下諸羣之表,可考 Am. Jour. of Math., 21 卷 (1899年), 326 頁。於 n 次之羣之表內,僅舉其實含 n 文字者而已。然含少於 n 文字之任意羣可作爲一 n 次之定換羣。例如 $G_2^{(2)}=1,\ (ab)$,可寫爲三次之羣,卽$1,(ab)(c)$。

二次.

$G_2^{(2)}=(ab)all\equiv 1,(ab)$.

三次.

$G_6^{(3)}=(abc)all\equiv 1,(abc),(acb),(ab),(ac),(bc)$.

$G_3^{(3)}=(abc)cyc.\equiv 1,(abc),\ (acb)$.

四次.

$G_{24}^{(4)} = (abcd)\,all \equiv (abcd)\,pos. + (ab), (cd), (acbd), (adbc), (bc),$
$(ad), (acdb), (abdc), (ac), (bd), (abcd), (adcb).$

$G_{12}^{(4)} = (abcd)\,pos. \equiv 1, (ab)(cd), (ac)(bd), (ad)(bc), (abc),$
$(acd), (bdc), (adb), (acb), (bcd), (abd), (adc).$

$G_8^{(4)} = (abcd)_8 \equiv 1, (ac)(bd), (ac), (bd), (ab)(cd), (ad)(bc),$
$(abcd), (adcb).$

$G_4^{(4)}\mathrm{I} = (abcd)\,cyc. \equiv 1, (ac)(bd), (abcd), (adcb).$

$G_4^{(4)}\mathrm{II} = (abcd)_4 \equiv 1, (ab)(cd), (ac)(bd), (ad)(bc).$

$G_4^{(4)}\mathrm{III} = (ab.cd) \equiv 1, (abcd), (ab), (cd).$

$G_2^{(4)} = (ac.bd) \equiv 1, (ac)(bd).$

五 次.

$G_{120}^{(5)} = (abcde)\,all \equiv (abcde)\,pos. + (abcd), (abdc), (abce),$
$(abec), (abde), (abed), (acbd), (acdb),$
$(acbe), (aceb), (acde), (aced), (adbc),$
$(adcb), (adbe), (adeb), (adce), (adec),$
$(aebc), (aecb), (aebd), (aedb), (aecd),$
$(aedc), (bcde), (bdce), (bced), (bdec),$
$(becd), (bedc), (abc)(de), (acb)(de),$
$(abd)(ce), (adb)(ce), (abe)(cd), (aeb).$
$(cd), (acd)(be), (adc)(be), (ace)(bd),$
$(aec)(bd), (ade)(bc), (aed)(bc), (bcd).$

$(ae), (bdc)(ae), (bce)(ad), (bec)(ad),$

$(bde)(ac), (bed)(ac), (cde)(ab), (ced).$

$(ab), (ab), (ac), (ad), (ae), (bc), (bd),$

$(be), (cd), (ce), (de).$

$G_{60}{}^{(5)} = (abcde)pos. \equiv 1, (abcde), (abced), (abdec), (abdce),$

$(abecd), (abedc), (acbde), (acbed),$

$(acdbe), (acdeb), (acebd), (acedb),$

$(adceb), (adcbe), (adecb), (adebc),$

$(adbec), (adbce), (aebcd), (aebdc),$

$(aecbd), (aecdb), (aedcb), (aedbc),$

$(abc), (acb), (acd), (adc), (ade), (aed),$

$(abd), (adb), (abe), (aeb), (ace), (aec),$

$(bcd), (bdc), (bde), (bed), (bce), (bec),$

$(cde), (ced), (ab)(cd), (ab)(ce), (ab)(de),$

$(ac)(bd), (ac)(be), (ac)(de), (ae)(bd),$

$(ae)(bc), (ae)(cd), (ad)(bc), (ad)(be),$

$(ad)(ce), (bc)(de), (bd)(ce), (be)(cd).$

$G_{20}{}^{(5)} = (abcde)_{20} \equiv 1, (abcde), (acebd), (adbec), (aedcb),$

$(bced), (acbe), (aecd), (abdc), (adeb),$

$(bdec), (adce), (abed), (aebc)(acdb),$

$(be)(cd), (ae)(bd), (ad)(bc), (ac)(de),$

$(ab)(ce)$。

$G_{12}^{(5)}=(abc)all(de)\equiv 1,(abc),(acb),)(abc)(de),(acb)(de),$
$(ab)(de),(ac)(de),(bc)(de),(ab),$
$(ac),(bc),(de)$.

$G_{10}^{(5)}=(abcde)_{10}\equiv 1,(abcde),(acebd),(adbec),(aedcb),$
$(be)(cd),(ae)(bd),(ad)(bc)(ac)(de),$
$(ab)(ce)$.

$G_6^{(5)}\mathrm{I}=\{(abc)all(de)\}pos.\equiv 1,(abc),(acb),(ab)(de),$
$(ac)(de),(bc)(de)$.

$G_6^{(5)}\mathrm{II}=(abc)cyc.(de)\equiv 1,(de)(abc),(abc)(de),(acb),(acb)(de)$.

$G_5^{(5)}=(abcde)cyc.\equiv 1,(abcde),(acebd),(adbec),(aedcb)$.

例題 1.　求證任意交代羣之級數爲 $\frac{n!}{2}$，惟 n 爲此羣之次數。

例題 2.　由羣之級數，說明首五次之羣之中，何者爲對稱羣，何者爲交代羣。

例題 3.　由視察求二次，三次及四次之羣之中，何者爲任換羣，何者爲定換羣，何者爲原羣，何者爲非原羣。

例題 4.　求證 §103 內之非原羣，可將其元素分成 1,4;2,5;3,6 三組，而對此諸組亦爲非原羣。

例題 5.　求證五次之羣之中，有三者爲定換羣，

卽 $G_{12}^{(5)}, G_6^{(5)}\mathrm{I}, G_6^{(5)}\mathrm{II}$ 是也。

例題 6. 求證定換羣 $G_4^{(4)}\mathrm{III}$ 爲以羣 $1,(cd)$ 之各置換乘羣 $1,(ab)$ 之各置換而得之者。

例題 7. 求證定換羣 $G_6^{(5)}\mathrm{II}$ 爲以羣 $1,(de)$ 之置換乘羣 $1,(abc),(acb)$ 之置換而得之；$G_6^{(5)}$ 爲羣 $1,(abc),(acb)$ 與羣 $1,(ab),(de)$，之積；$G_{12}^{(5)}$ 爲 $G_6^{(3)}$ 與羣 $1,(de)$ 之積。

題例 8. 求證一三次之羣可視爲一高次之定換羣。

105. 分羣. 四次之交代羣爲(§104)

$$1,(1\,2)(3\,4),(1\,3)(2\,4),(1\,4)(2\,3),(1\,2\,3),(1\,3\,2),(1\,3\,4),$$
$$(1\,4\,2),(1\,2\,4),(1\,4\,3),(2\,3\,4),(2\,4\,3).$$

此十二置換之中，下列四者自成一較小之羣：

$$1,(1\,2)(3\,4),(1\,3)(2\,4),(1\,4)(2\,3).$$

如是可有羣內之羣。若由一個羣之諸置換內，可取出一組，而此組自成一羣，此第二羣謂之第一羣之分羣 (sub-group)。羣與分羣，不過爲相對之名詞。一分羣自其自身觀之，可謂之羣，而一羣可爲他較高級之羣之分羣。

例題 1. 由視察求 $1,(xy)(zw),(xz)(yw),(xw)(yz)$ 之分羣。

例題 2. 問 $G_{24}^{(4)}$ 有若干分羣?參看§104。

例題 3. 問 $G_{12}^{(4)}$ 有若干分羣?

例題 4. 問 $(abcde)_{10}$ 有何分羣? $(abc)all(de)$ 有何分羣? $(abcde)\,all$ 有何分羣?

106. 定理. 分羣之級數爲其所屬之羣之級數之因數。

命分羣之置換爲 $s_1, s_2, s_3, \cdots\cdots s_n$, 命 t 爲羣之任意置換,而不屬於分羣內者。則由羣之定義,如

$$s_1t,\ s_2t,\ s_3t\cdots\cdots, s_nt \qquad \text{I}$$

皆爲屬於羣之置換,然其中無一屬於分羣者;因設 $s_1t=s_r$, 則 $s_1^{-1}s_r=s_1^{-1}s_1t=t$.

而 s_1^{-1} 爲分羣之一置換(參看§96, 例題5),由是其與 s_r 之積,卽 t, 屬於分羣——而此與假設相背。

且 I 內之諸新置換皆爲相異;因設 $s_2t=s_3t$,則 $s_2=s_3$.

若 I 內之諸置換,不能窮盡羣之置換之不屬於分羣者,而設置換 t_1 爲在諸遺下者之內。則由上適所述之理由,

$$s_1t_1,\ s_2t_1,\ s_3t_1,\ \cdots\cdots,\ s_nt_1, \qquad \text{II}$$

爲羣之相異置換之不在表 $s_1, s_2,\cdots\cdots, s_n$ 內者;且彼等亦不在 I 之內;因若設 $s_1t=s_2t_1$,則 $t_1=s_2^{-1}s_1t=s_rt$,此

爲 I 內之某置換,而此結論與關於 t_1 之假設相背。繼續如是,羣之置換分爲各有 n 置換之若干組。因置換之數假定爲有限,故此法必完結之時,而得下列諸組:

$$
\begin{array}{l}
s_1,\ s_2,\ s_3,\cdots\cdots,\ s_n,\\
s_1t,\ s_2t,\ s_3t,\cdots\cdots,\ s_nt,\\
s_1t_1,\ s_2t_1,\ s_3t_1,\ \cdots\cdots,\ s_nt_1,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
s_1t_m,\ s_2t_m,\ s_3t_m,\cdots\cdots,s_nt_m.
\end{array}
$$

故羣內之置換之總數,爲組數之 n 倍,或 $(m+2)n$。然 $(m+2)n$ 爲羣之級數,而 n 爲分羣之級數。故分羣之級數爲羣之級數之因數。

107. 分羣之指數. 若 n 爲羣 G 之等數,而 m 爲分羣 G_1 之等數,則商 $\frac{n}{m}$ 謂之 G_1 低於 G 之指數(Index)。如一交代羣低於同次之對稱羣之指數爲 $n!\div\frac{n!}{2}=2$。

例題 1. 試述各五次羣低於對稱羣之指數。

例題 2. 求證其級數爲素數之羣,不能有分羣(除置換 1 以外)。

108. 標準分羣. 若 G_1 爲 G 之分羣,而 s 爲 G 之任意置換,而不在於 G_1 內,則羣 G_1 與 $s^{-1}G_1s$ 謂之 G 之

共軛分羣(Conjugate sub-groups)。變形$s^{-1}G_1s$表示分羣G_1之各置換各受變形$s^{-1}s_1s$所得之結果。

若G_1與$s^{-1}G_1s$互相同,不論s爲G之若何置換,G_1謂之G之標準分羣(Normal sub-group),或自共軛分羣(Self-conjugate sub-group),或不變分羣(Invariant sub-group)。

109. 單羣. 單羣(Simple group)爲一除由全同置換而成之羣外,無標準分羣之羣。

吾人能證明四次以上之交代羣皆爲單羣(§198)。凡其級數爲素數之諸羣皆爲單羣,此甚易知之。其級數不爲素數,且不超過1092之單羣僅有六,卽60級,168級,360級,504級,660級,1092級之羣是也。其60級及360級之羣各爲五次及六次之交代羣。

非爲單羣之羣,謂之複羣(Composite group)。

例題1. 求在$G_{12}^{(4)}$下$G_2^{(4)}$之共軛羣。

若以$s=(abc)$變$s_1=(ac)(bd)$,則得$s^{-1}s_1s=(ab)(cd)$。同樣變$s_1=1$,則得1。故與$G_2^{(4)}$爲共軛之一羣爲1,$(ab)(cd)$。取置換(acd)及(adb)爲s,得同一之共軛羣。

當$s=(bac)$,則變形$s^{-1}G_2^{(4)}s$生出共軛分羣$(ad)(bc)$,1.若取$s=(acb)$,(bcd),(abd),或(adc),得同一之結果。

取$s=(ac)(bd)$或$(ad)(bc)$,則所得之共軛羣與$G_4^{(2)}$全同.故在$G_{12}^{(4)}$下$G_2^{(4)}$之相異共軛分羣爲

$$1,(ac)(bd),$$

$$1,(ab)(cd),$$

$$1,(ad)(bc).$$

故知 $G_2^{(4)}$ 非為 $G_{12}^{(4)}$ 之標準分羣。

例題 2. 求在 $G_4^{(4)}\mathrm{I}$ 下 $G_3^{(4)}$ 之共軛羣。

例題 3. 求在 $G_{12}^{(5)}$ 下 $G_6^{(5)}\mathrm{II}$ 之共軛羣。

例題 4. 求在 $G_{12}^{(5)}$ 下 $G_6^{(5)}\mathrm{I}$ 之共軛羣。

例題 5. 由實行試驗,證明 $G_3^{(3)}$ 為 $G_6^{(3)}$ 之標準分羣;$G_2^{(4)}$ 為 $G_4^{(4)}\mathrm{II}$ 之標準分羣;$G_4^{(4)}\mathrm{II}$ 為 $G_8^{(4)}$ 之標準分羣;$G_4^{(4)}\mathrm{I}$ 為 $G_8^{(4)}$ 之標準分羣。

例題 6. 求證各羣皆有全同置換為一標準分羣。

例題 7. 求證交代羣 $G^{(n)}\tfrac{1}{2}n!$ 為對稱羣 $G^{(n)}n!$ 之標準分羣。參看§92,例題 2。

例題 8. 求證素數次之循環羣為單羣。

例題 9. 求證交代羣包含一切奇數次之循環置換,然不含偶數次者。

例題 10. 二羣公共之諸置換,自成一羣,其級數為二已知羣之級數之因數。

110. 素指數之標準分羣. 方程式論中之特別有興趣者,為羣之級數

$$P_1,\ P_2,\ \cdots\cdots,\ P_i,\ P_{i+1},\ \cdots\cdots,\ 1$$

有一相互之關係,即每一羣 P_{i+1} 爲其前之羣 P_i 之標準分羣,P_{i+1} 低於 P_i 之指數爲一素數。類此之羣之集合謂之主合成級數 (Principal series of composition)。若除去素指數之限制,則此集合單謂之合成級數。

例題 1. 求證(a)三次之羣之主合成級數爲 $G_6^{(3)}$, $G_3^{(3)}1$; (b)四次之羣之主合成級數爲 $G_{24}^{(4)}$, $G_{12}^{(4)}$, $G_4^{(4)}\mathrm{II}$, $G_2^{(4)}$, 1。

例題 2. 求證關於五次羣 $G_{20}^{(5)}$ 之主合成級數爲 $G_{20}^{(5)}$, $G_{10}^{(5)}$, $G_5^{(5)}$, 1。

例題 3. 求證 $G_4^{(4)}\mathrm{II}$ 爲 $G_8^{(4)}$, $G_{12}^{(4)}$ 及 $G_{24}^{(4)}$ 之標準分羣。

111. 屬於一羣之函數. 當 G_1 爲 G 之標準分羣,若 α_1, α_2, ……, α_n n 文字之有理函數經 G_1 之諸置換不變其值,然經 G 之其他置換變其值,* 則此函數謂之屬於 G_1。

---

*若 $f(x)=0$ 之係數爲自變數,則其根互爲自變。故其根之函數,當變其形狀時,則此函數必視爲變其值。換言之,當諸根互爲自變,則此諸根之二函數,僅當其全等時始互相等。在本章內諸根爲如是取之者。

當 $f(x)=0$ 之係數代表特定之數值,則其根爲一定之數。此諸根之二函數雖有不同之形狀,而此二函數其值可互相等。故於其係數有特定之值之方程式,根之函數,用一置換,可變其形,而不變其數值。例如取有特定係數之方程式 $x^3=1$。若 ω 爲其一複

吾人已知當交代羣視爲對稱羣之分羣時,有屬於此羣之交代函數(§120)。同樣,當循環羣視爲對稱羣之分羣時,有屬於此羣之循環函數(§101)。當循環羣視爲對稱羣之分羣之分羣時,循環函數仍屬於循環羣。

當羣 1,(13),(24) 視爲 1,(13)(24),(12)(34),(14)(23) 之分羣,則函數 $x_1+x_3-x_2-x_4$ 屬於該羣,然當該羣視爲對稱羣之分羣,則此函數即不屬於該羣;因對稱羣內有置換(13),然已知羣內則無之,而(13)使函數不變。當謂一函數屬於一羣,而不說明已知羣爲何一他羣之分羣,則此羣爲指在於對稱羣之下。

112. 求屬於一羣之諸函數. 命 G_1 爲 G 之分羣,G 爲 n 次,又命 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$ 爲相異之量。又命

$$\rho=f(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$$

爲一有理函數,此函數有有理係數,且對於羣 G 之

虛根,則可寫 $\alpha_0=\omega$, $\alpha_3=\omega^3$, $\alpha_1=\omega^3$。函數 $\alpha_0{}^2\omega_1$,用置換 $(\alpha_0\alpha_2\alpha_1)$,變其形,而不變其值;因 $\alpha_0{}^2\alpha_1=\alpha_3{}^2\alpha_0=\omega$ 故也。α_0, α_1, α_3 之函數,可有不同之形狀,而有相同之數值,亦可於等式 $\alpha_0{}^2\alpha_3=\alpha_1\alpha_3=\alpha_1=\alpha_0{}^3$ 知之。

此等事實指出意外之結論,即在以下所發展之理論中,方程式 $f(x)=0$,當諸係爲特定之數時,其所代表者,較諸係數爲變數時,爲一更普通之例。參看§7。

各置換,此函數有不同之值。若分羣 G_1 之級數為 m,當對 ρ 行 G_1 內之諸置換時,得 m 相異之值

$$\rho,\ \rho_1,\ \rho_2,\ \cdots\cdots,\ \rho_{m-1}. \qquad \mathrm{I}$$

今若諸函數 I 施以 G_1 內之任何置換,此諸量僅自為對易;因分羣 G_1 之二置換 s_1 及 s_2 之結果所得之任意值 ρ' 與由 ρ 以此分羣之一置換 $s_3=s_1.s_2$ 所得者相同。

然若函數 I 施以 G 之一置換而不在於 G_1 內者,則得一列之函數

$$\rho',\rho_1',\cdots,\ \rho'_{m-1},$$

其中至少有一 ρ' 不在 I 內。因若 ρ' 在 I 內,則將有與 ρ 不同,由施二不同置換於 ρ 所得之二全同函數。而此為不可能。

今若作一新函數 ψ,使

$$\psi\equiv(t-\rho)(t-\rho_1)\cdots(t-\rho_{m-1}),$$

其中 t 為一變數,當施以分羣 G_1 之諸置換,ψ 仍不變,然當施以 G 之任何置換之不在 G_1 內者,則 ψ 變,此理甚明。故 ψ 為屬於 G 之分羣 G_1 之函數。

吾人可任意指定 t 為任何有理值,使 ψ 能保持與施 ψ 以 G 之不在 G_1 內之一置換所得之任何值相異。$t=0$ 卽為一如此之值也。

113. 屬於求一羣之函數之法，不能常直接得簡單之結果，由下例可以明之。

例題 1. $G_2^{(4)}\equiv 1,(13)(24)$ 視為 $G_4^{(4)}\text{II}\equiv 1,(13)(24),(12)(34),(14)(23)$ 之分羣，求作一 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 之函數屬於 $G_2^{(4)}$。

假定 $\rho=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3+c_4\alpha_4$，使關於 $G_4^{(4)}\text{II}$ 之諸置換，ρ 取四相異之值。施 $G_2^{(4)}$ 之置換於 ρ，則得

$$\rho=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3+c_4\alpha_4,$$

$$\rho_1=c_1\alpha_3+c_2\alpha_4+c_3\alpha_1+c_4\alpha_2,$$

故 $\psi=(t-\rho)(t-\rho_1)=t^2-(\alpha_1+\alpha_3)(tc_1+tc_3)-(\alpha_2+\alpha_4)$

$$(tc_2+tc_4)$$

$$+(\alpha_1{}^2+\alpha_3{}^2)c_1c_3+(\alpha_2{}^2+\alpha_4{}^2)c_2c_4$$

$$+\alpha_1\alpha_3(c_1{}^2+c_3{}^2)+\alpha_2\alpha_4(c_2{}^2+c_4{}^2)$$

$$+(\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_4)(c_1c_2+c_3c_4)+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_4)$$

$$(c_1c_4+c_2c_3).$$

ψ 為所求之函數。由視察知 ψ 為由數部分而成，而諸部分各自為所求之函數。此等部分為

$$-(\alpha_1+\alpha_3)(tc_1+tc_3)-(\alpha_2+\alpha_4)(tc_2+tc_4),$$

$$(\alpha_1{}^2+\alpha_3{}^2)c_1c_3+(\alpha_2{}^2+\alpha_4{}^2)c_2c_4,$$

$$\alpha_1\alpha_3(c_1{}^2+c_3{}^2)+\alpha_2\alpha_4(c_2{}^2+c_4{}^2).$$

當 $t=1$，$c_1=c_3=-1$，及 $c_2=c_4=+1$，則得較簡之形狀

$$\alpha_1+\alpha_3-\alpha_2-\alpha_4.$$

當 $t=0$, $c_1=c_3=1$, $c_2=c_4=i$, 則得較簡之形狀

$$\alpha_1^2+\alpha_3^2-\alpha_2^2-\alpha_4^2,$$

$$\alpha_1\alpha_3-\alpha_2\alpha_4.$$

例題 2.　假定 $\rho=\alpha_1-\alpha_2+i\alpha_3$,試求屬於 $G_6^{(3)}$ 之分羣 $G_3^{(3)}$ 之函數。

取 $t=0$,則得 $(i-2)(\alpha_1\alpha_3^2+\alpha_3\alpha_2^2+\alpha_2\alpha_1^2)+(i+2)(\alpha_2\alpha_3^2+\alpha_3\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2^2)$.由是證明 $\alpha_1\alpha_3^2+\alpha_3\alpha_2^2+\alpha_2\alpha_1^2$ 及 $\alpha_2\alpha_3^2+\alpha_3\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2^2$ 各屬於 $G_3^{(3)}$.

例題 3.　求 $(\alpha_1+\alpha_3)(\alpha_2+\alpha_4)$ 所屬之羣。

由試驗知四次對稱羣之諸置換中何者不致改變此函數,此等置換為 $1,(\alpha_1\alpha_2)(\alpha_3\alpha_4),(\alpha_1\alpha_3)(\alpha_2\alpha_4),(\alpha_1\alpha_4)(\alpha_2\alpha_3),(\alpha_1\alpha_3),(\alpha_2\alpha_4),(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4),(\alpha_1\alpha_4\alpha_3\alpha_2)$.此諸置換組成所求之羣,由§104,知此羣為 $G_8^{(4)}$.由此羣對於已知函數之性質,證明此羣為非原羣。

例題 4.　求 $\alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_4-(\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_4)$ 所屬之羣。

例題 5.　求 $(\alpha-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)$ 所屬之羣。

例題 6.　求 $(\alpha_1\alpha_2-\alpha_3\alpha_4)^2(\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_4)^2$ 所屬之羣。

例題 7. 求證不改變 n 相異文字之函數之諸置換,共成一 n 次之羣。

*例題 8. 求證 $\alpha_1^p\alpha_2^q+\alpha_2^p\alpha_3^q+\cdots\cdots+\alpha_{n-1}^p\alpha_n^q+\alpha_n^p\alpha_1^q$ 爲一循環函數,惟其中 p 及 q 爲相異正整數.

例題 9. 由視察証明 $\{(\alpha-\alpha_2)+i(\alpha_1-\alpha_3)\}^2$ 屬於 $G_{24}^{(4)}$ 之分羣 $G_2^{(4)}$.與例題 1 比較之。

例題 10. 求証四點之複比 (§78) $k=\frac{AC}{BC}\div\frac{AD}{BD}$, 當 k 不等於 -1 或 ω 時,爲一屬於 $G_4^{(4)}$ II 之函數;故有六相異共軛值;當 $k=-1$ 或 $k=\omega$ 時,此等共軛值爲形狀不同;當 $k=-1$ 時,其數值每對相一致;當 $k=\omega$ 時,每三個相一致, ω 爲 -1 之複虛立方根.

例題 11. 求 $x^4-x^3-x+1=0$ 之根之值,并證明關於此諸值,函數 $\alpha^2\alpha_1+\alpha_1^2\alpha_2+\alpha_2^2\alpha_3+\alpha_3^2\alpha_1$ 不屬於循環羣,雖此函數因 $G_{24}^{(4)}$ 內而不在 $G_4^{(4)}$ I 內之諸置換而變其形。

*例題 12. 求證關於普通四次方程式,下列函數屬於循環羣:

$$(\alpha+2\alpha_1)(\alpha_1+2\alpha_2)(\alpha_2+2\alpha_3)(\alpha_3+2\alpha),$$

$$\alpha^3\alpha_1(\alpha^2+2\alpha_1)+\alpha_1^3\alpha_2(\alpha_1^2+2\alpha_2)+\alpha_2^3\alpha_3(\alpha_2^2+2\alpha_3)$$
$$+\alpha_3^3\alpha(\alpha_3^2+2\alpha).$$

第十二章

拉格蘭之分解式

114. 分解式. "拉格蘭之分解式",於方程式之代數的解法之研究,甚爲重要。分解式(Resolvent)之名詞,用於二不同意義:第一,表已知方程式之解法中所用之某補助方程式;第二,表方程式之解法中所用之某函數。拉格蘭之分解式爲第二種,而爲一之根及已知方程式之根之函數。

115. 定義. 命 $f(x)=0$ 爲以 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_{n-1}$ 爲根之方程式。命 ω 爲一之 n 次根之任一,且命函數 $[\omega, \alpha]$ 限定之如次:

$$[\omega, \alpha] \equiv \alpha+\omega\alpha_1+\omega^2\alpha_2+\cdots\cdots+\omega^{n-1}\alpha_{n-1}. \qquad \text{I}$$

I 式謂之拉格蘭之分解式(Lagrangian resolvent)。

116. 以分解式表示諸根. 若寫拉格蘭之分解式

$$\left.\begin{array}{l}
[\omega, \alpha] \equiv \alpha+\omega\alpha_1+\omega\alpha_2+\cdots\cdots+\omega^{n-1}\alpha_{n-1}, \\
[\omega_1, \alpha] \equiv \alpha+\omega_1\alpha_1+\omega_1\alpha_2+\cdots\cdots+\omega_1{}^{n-1}\alpha_{n-1}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
[\omega_{n-1}, \alpha] \equiv \alpha+\omega_{n-1}\alpha_1+\omega_{n-1}{}^2\alpha_2+\cdots\cdots+\omega_{n-1}{}^{n-1}\alpha_{n-1}
\end{array}\right\} \text{I}$$

相加之,則得　$\overset{n}{\Sigma}\,[\omega, \alpha]=n\alpha,$　　II

其中 $\overset{\omega}{\Sigma}$ 表依次以 $\omega,\ \omega_1,\ \omega_2,\cdots,\omega_{n-1}$ 代 ω 所得諸$[\omega,\alpha]$之總和。

若 I 內諸方程式,各以 $\omega^{-k},\omega_1^{-k},\cdots,\omega_{n-1}^{-k}$ 乘之,然後相加,則得較普通之結果

$$\overset{\omega}{\Sigma}\,\omega^{-k}[\omega,\alpha]=n\alpha_k. \qquad \text{III}$$

故若已知 n 次方程式 $f(x)=0$ 之拉格蘭分解式之值,及 1 之 n 次根,則方程式 $f(x)=0$ 卽可解之。

117. 定理. $[\omega,\alpha]$內 α 之下之字,若施以循環置換$(0\,1\,2\,3\cdots(n-1))$,則$[\omega,\alpha]$變爲$\omega^{-1}[\omega,\alpha]$;若施以$(0\,1\,2\cdots(n-1))^k$,則$[\omega,\alpha]$變爲 $\omega^{-k}[\omega,\alpha]$。

若 $$[\omega,\alpha]\equiv\alpha+\omega\alpha_1+\cdots\cdots+\omega^{n-1}\alpha_{n-1}$$

施以置換$(0\,1\,2\cdots\cdots(n-1))$,則知 $\omega^{n-1}=\omega^{-1}$ 等等,故得

$$\begin{aligned}\omega^{-1}[\omega,\alpha]&\equiv\alpha_1+\omega\alpha_2+\omega^2\alpha_3+\cdots+\omega^{n-1}\alpha\\&\equiv\omega^{-1}(\alpha+\omega\alpha_1+\omega^2\alpha_2+\cdots+\omega^{n-1}\alpha_{n-1}).\end{aligned}$$

如此連施 k 次,則此定理之第二部爲眞,甚易確定。

118. 定理. 若$[\omega,\alpha]$內 α 下之字,施以循環置換$(0\,1\,2\cdots(n-1))$,則$[\omega,\alpha]^\nu$內 ω 之各乘冪之係數下之字,受循環置換$(0\,1\,2\cdots(n-1))^\nu$,ν 爲任意正整數。

由多項式公式,展開

$$[\omega,\alpha]^\nu\equiv(\alpha+\omega\alpha_1+\cdots+\omega^{n-1}\alpha_{n-1})^\nu,$$

并用關係 $\omega^n=1$,化 ω 之諸指數爲小於 n 之指數。由

是集合有ω之同乘冪之諸項。則得

$$[\omega,\alpha]^{\nu}=A_{0}+\omega A_{1}+\omega^{2}A_{2}+\cdots+\omega^{n-1}A_{n-1}, \qquad \mathrm{I}$$

其中$A_{0},A_{1},\cdots,A_{n-1}$為$\alpha,\alpha_{1},\alpha_{2},\cdots,\alpha_{n-1}$之$\nu$次之式，而有整數係數。

若於公式I，依次以$\omega,\ \omega_{1},\ \omega_{2},\cdots,\omega_{n-1}$代$\omega$，則得次$n$公式：

$$\left.\begin{array}{l}
[\omega,\alpha]^{\nu}\equiv A_{0}+\omega A_{1}+\omega^{2}A_{2}+\cdots+\omega^{n-1}A_{n-1},\\
[\omega_{1},\alpha]^{\nu}\equiv A_{0}+\omega_{1}A_{1}+\omega_{1}^{2}A_{2}+\cdots+\omega_{1}^{n-1}A_{n-1},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
[\omega_{n-1},\alpha]^{\nu}\equiv A_{0}+\omega_{n-1}A_{1}+\omega_{n-1}^{2}A_{2}+\cdots+\omega_{n-1}^{n-1}A_{n-1}.
\end{array}\right\} \mathrm{II}$$

於§69，例題5，已證明一之諸n次根之p乘冪之和為n或0因p為可以n除盡或不能以n除盡而定。記此而II內之n式各以$\omega^{-k},\ \omega_{1}^{-k},\ \cdots,\ \omega_{n-1}^{-k}$乘之($k$為任何整數)，將所得$n$式相加，則得

$$nA_{k}=\Sigma\,\omega^{-k}\cdot[\omega,\alpha]^{\nu}. \qquad \mathrm{III}$$

而Σ表依次以$\omega,\ \omega_{1},\ \omega_{2},\cdots,\omega_{n-1}$代$\omega$所得諸式之總和。今若在III右邊之$\nu$個$[\omega,\alpha]$因數之每個內$\alpha$下之字，施以循環置換$(012\cdots\cdots n-1)$，則由§117，得

$$\Sigma\,\omega^{-k-\nu}\cdot[\omega,\alpha]^{\nu} \qquad \mathrm{IV}$$

今於公式III內，以$k+\nu$代k，則得

$$\Sigma\,\omega^{-k-\nu}[\omega,\alpha]^{\nu}=nA_{k+\nu}.$$

換言之,施置換$(012\cdots(n-1))$於III之右邊內α下之字,則其結果使A_h以$A_{h+\nu}$代之。然A_h施置換$(012\cdots(n-1))^\nu$於其下方之字,可直接變為$A_{h+\nu}$.故此定理成立。

例題 1. 以三次方程式之根α_0, α_1, α_2,說明此定理,取$\nu=2$.

$$[\omega,\alpha_0]=\alpha_0+\omega\alpha_1+\omega^2\alpha_2,$$

$$[\omega,\alpha_0]^2=A_0+A_1\omega+A_2\omega^2,$$

其中$A_0=\alpha_0{}^2+2\alpha_1\alpha_2$, $A_1=\alpha_2{}^2+2\alpha_0\alpha_1$, $A_2=\alpha_1{}^2+2\alpha_0\alpha_2$.

$[\omega,\alpha]$內α下方之字,施以(012),則得

$$\alpha_1+\omega\alpha_2+\omega^2\alpha_0,$$

及 $$(\alpha_1+\omega\alpha_2+\omega^2\alpha_0)^2=A_2+A_0\omega+A_1\omega^2.$$

由是知A_0, A_1, A_2,當施以$(012)^2$時,則各變為A_2, A_0, A_1.

例題 2. 於例題1,取$\nu=3$以說明此定理,且證明此函數屬於循環羣。

例題 3. 求證施(012)於$[\omega^2,\alpha]^2=(\alpha_0+\omega^2\alpha_1+\omega^4\alpha_2)^2=A_0+A_1\omega+A_2\omega^2$內$\alpha_0$, α_1, α_2下方之字,與施$(012)^4$於A_0, A_1, A_2下方之字得同一之效果。

例題 4. 求證施(0123)於$[\omega^3,\alpha]^2=(\alpha_0+\omega^2\alpha_1+\omega^6$

$\alpha_2+\omega^9\alpha_3)^2=A_0+A_1\omega+A_2\omega^2+A_3\omega^3$ 內 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$ 下方之字其中 $\omega=-i$ 與施 $(0123)^6$ 於 A_0, A_1, A_2, A_3 下方之字得同一之效果。

119. 定理 若 α 下方之字施以循環置換

$$(012\cdots(n-1)),$$

則乘積 $[\omega,\alpha]^{\nu}\cdot[\omega^{\lambda_1},\alpha]^{\nu_1}\cdot[\omega^{\lambda_2},\alpha]^{\nu_2}\cdots$ 內 ω 之各乘冪之係數下方之字,受置換 $(012\cdots(n-1))^{\nu_1+\lambda\nu_1\nu_1+\lambda_2\nu_2+\cdots}$,其中 ν, ν_1, ν_2,⋯ 爲正整數,而 λ_1, λ_2, ⋯ 爲正或負之整數。

此定理爲上定理之推廣者,而以同法證明之。乘積生出等式

$[\omega,\alpha]^{\nu}\cdot[\omega^{\lambda_1},\alpha]^{\nu_1}\cdot[\omega^{\lambda_2},\alpha]^{\nu_2}\cdots=B_0+\omega B_1+\omega^2B_2+\cdots+\omega^{n-1}B_{n-1}$,其中 B_0, B_1, ⋯, B_{n-1} 爲根 α, α_1, ⋯, α_{n-1} 之函數。依次以 ω, ω_1, ω_2, ⋯, ω_{n-1} 代 ω, 則共有 n 式。各以 ω^{-k}, ω_1^{-k}, ω_2^{-k},⋯ 乘之,然後將所得之乘積相加,則得

$$nB_k=\sum\omega^{-k}[\omega,\alpha]^{\nu}\cdot[\omega^{\lambda_1},\alpha]^{\nu_1}\cdots \qquad \text{I}$$

施置換 $(012\cdots(n-1))$ 於 I 之右邊內 α 下方之字,則得

$$\sum\omega^{-k-\nu-\nu_1\lambda_1\cdots}[\omega,\alpha]^{\nu}\cdot[\omega^{\lambda_1},\alpha]^{\nu_1}\cdots,$$

由 I 知此式爲等於 $nB_{k+\nu+\nu_1\lambda_1}+\cdots$. 然若 B_k 施以置換 $(012\cdots(n-1))^{\nu+\nu_1\lambda_1+\cdots}$,則 B_k 以 $B_{k+\nu+\nu_1\lambda_1}+\cdots$ 代之,故此

定理成立。

*例題 1.　求證函數$[\omega,\alpha]^n$屬於n次循環羣。

若$[\omega,\alpha]$施以循環羣之任何置換$(0\,1\,2\cdots(n-1))$,施於$[\omega,\alpha]^n$之係數B_k,與直接施置換$(0\,1\,2\cdots(n-1))^n$於B_k下方之字,其效果同,§118.然$(0\,1\,2\cdots(n-1))^n$為全同置換;故不能使生變化。由是$[\omega,\alpha]^n$對於循環置換為不變。此不變對於n次對稱羣之置換不能成立,惟對於同在循環羣內之置換能成立。故$[\omega,\alpha]^n$屬於循環羣。

*例題 2.　求證乘積$[\omega,\alpha]^{n-\lambda}\cdot[\omega^\lambda,\alpha]$屬於$n$次循環羣。

由§118, IV,施循環置換$(0\,1\,2\cdots(n-1))$於$[\omega,\alpha]^{n-\lambda}$內$\alpha$下方之字,則得$\omega^{-n+\lambda}[\omega,\alpha]^{n-\lambda}$.當施於$[\omega^\lambda,\alpha]$內$\alpha$下方之字,得$\omega^{-\lambda}[\omega^\lambda,\alpha]$。故當施於二者之積,則得$\omega^{-n+\lambda-\lambda}[\omega,\alpha]^{n-\lambda}\cdot[\omega^\lambda,\alpha]$,而$\omega^{-n+\lambda-\lambda}=\omega^{-n}=1$。

例題 3.　求證$(\alpha-i\alpha_1-\alpha_2+i\alpha_3)^4$屬於四次循環羣。

為便利計,命$-i=\omega$,則得$(\alpha+\omega\alpha_1+\omega^2\alpha_2+\omega^3\alpha_3)^4$,由§118, IV,當此施以$(0\,1\,2\,3)$,則變為$\omega^{-4}(\alpha+\omega\alpha_1+\omega^2\alpha_2+\omega^3\alpha_3)^4$.

例題 4.　試告下例諸函數之屬於四次循環羣

者：

$$(\alpha+i\alpha_1-\alpha_2-i\alpha_3)^4,$$

$$(\alpha-i\alpha_1-\alpha_2+i\alpha_3)(\alpha+i\alpha_1-\alpha_2-i\alpha_3),$$

$$(\alpha-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)(\alpha-i\alpha_1-\alpha_2+i\alpha_3)^2,$$

$$(\alpha-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)^2.$$

第十三章

葛羅華代數數之理論。可化。

120. **範圍之定義.** 當一組數內任意數數之和,差,積及商(祇除以0除所得之商以外),其結果常得屬於該組之數,則此組之數謂之有理範圍(Domain of rationality),或單謂之範圍(Domain)。

凡諸有理數(整數及有理分數,二者皆不拘正負)成一如此之範圍,因此組之量,自能完備次意義,卽合此諸數之任何數之四種運算之任何運算,其結果決不至得一不屬於此組之數。

諸整數不自成一範圍,因二整數之商可為分數也。

一範圍Ω之諸數,可全合於第二較大之範圍Ω內。斯時較小之範圍Ω謂之他範圍Ω'之分範圍(Divisor),而Ω'謂之在Ω上之範圍。

例如$i=\sqrt{-1}$,而a及b表有理數,則形如$a+ib$之諸複虛數,為一範圍,而有理數之範圍,為其分範圍。

數之範圍其他之例,為一包含或有理數或無理數之諸實數之範圍。又其他之例,為由$a+ib$諸數而成之範圍,其中a及b為有理數或無理數。

121. 範圍$\Omega_{(1)}$. 有理數之範圍為諸範圍之分範圍,因各範圍至少含一非 0 之數n;故亦含$n\div n$或 1.然若一屬於此範圍,則此範圍包含由加一及減一所得之諸數,即諸正及負之整數;由整數用除法可得諸有理分數。故諸有理數在於任何範圍內。此後有理數之範圍,將以 $\Omega_{(1)}$ 表示之。

122. 添加法. 命Ω表任何範圍.若加未屬於此範圍之任意α於其內,則此新組之數,除非將含α及範圍Ω內諸數之有限數之加,減,乘,除,所生諸數亦加入,不能成一範圍。命以$\Omega_{(\alpha)}$表示如是所得之新範圍。則Ω為$\Omega_{(\alpha)}$之分範圍甚明。

此由Ω得範圍$\Omega_{(\alpha)}$之法謂之添加法(Adjunction).而謂添加α於Ω得$\Omega_{(\alpha)}$。添加 i 於有理數之範圍$\Omega_{(1)}$,得複虛數之範圍$\Omega_{(1,\,i)}$此範圍包圍$a+ib$類之諸數,其中 a 及 b 為有有理值。普通添加α於$\Omega_{(1)}$則得$\Omega_{(1,\,\alpha)}$。

例題 1. 求證諸有理(眞)分數,不成一範圍。

例題 2. 求證 0 滿足範圍之定義。

123. 可化之定義. 命整函數

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

之係數 $a_0,a_1,\cdots,a_n$, 皆屬於某範圍Ω,則謂$f(x)$為Ω

內之函數，而$f(x)=0$謂爲Ω內之方程式。若函數$f(x)$，其中n爲大於1之某整數，可分爲關於x之低次因數，且其因數之係數爲屬於範圍Ω之數，則函數$f(x)$謂之於Ω內爲可化(Reducible)，不然，則謂之於Ω內爲不可化(Irreducible)。

例如Ω表有理數之範圍，則x^2-y^2於Ω內爲可化，因其生出因數$(x+y)(x-y)$故也。反之，x^2-3y^2於Ω內爲不可化，因其因數$(x+\sqrt{3}y)(x-\sqrt{3}y)$之幾係數，非爲有理數也。

然若添加$\alpha=\sqrt{3}$於有理數之範圍，作一新範圍，則得範圍$\Omega_{(1,\alpha)}$，包含$a+ib$一類之數，其中a及b爲有理數。對於此較大之範圍，函數x^2-y^2及x^2-3y^2爲在相等之地位，蓋二者於$\Omega_{(1,\alpha)}$內皆爲可化，因各函數之二因數之係數，爲屬於同一範圍$\Omega_{(1,\alpha)}$內之數故也。

例題1.　求出下列諸函數中何者於有理數之範圍$\Omega_{(1)}$內爲可化：

(a)　x^2+2x+1,

(b)　x^4+x^2+1,

(c)　x^2+x-1,

(d)　x^2+x+1,

(e)　x^2+1.

例題 2. 上列諸函數中,於 $\Omega_{(1)}$ 內爲不可化者;由添加法,各求最小新範圍,使其內各函數爲可化。

例題 3. 求一範圍,使例題 1 內諸函數在其內皆爲可化。

124. 代數數. 凡爲有整係數之代數方程式

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

之根之數,謂之代數數(Algebraic numbere)。不能爲代數方程式之根之數,謂之超越數(Transcendental numbers)。自然對數之底 e 爲超越數,郝密特(Hermite)於1873年,首先證明之。1882年,林德曼(Lindemann)始證明圓周與其直徑之比 π,亦爲超越數。若添加 π 於有理數之範圍 $\Omega_{(1)}$,則得一超越範圍(Transcendental domain)。若添加於 $\Omega_{(1)}$ 之數爲代數數,則新範圍謂之代數範圍(Al-gebraic domain)。

125. 不可化方程式. 一方程式 $f(x)=0$ 謂之於範圍 Ω 內爲可化或不可化,因函數 $f(x)$ 於 Ω 內爲可化或不可化而定。

若添加方程式 $f(x)=0$ 之一根 α 於範圍 Ω,若 α 不屬於範圍 Ω,則得一新範圍 $\Omega_{(\alpha)}$,而此範圍爲在 Ω 上之代數範圍。

126. 定理. 若 $f(x)=0$ 及 $F(x)=0$ 均爲範圍 Ω 內

之方程式,若 $f(x)=0$ 於 Ω 內爲不可化.且有一根滿足 $F(x)=0$, 則諸根皆滿足 $F(x)=0$。

因此二方程式至少有一公共之根。故二函數 $f(x)$ 及 $F(x)$ 有一含 x 之因數。然最高公因數可用通常除法以求之,即用一法,此法決不至引入不在已知有理數之範圍內之數。故最高公因數爲在 Ω 內之函數。然 $f(x)$ 爲不可化,故除本數外無含 x 在 Ω 內之因數。故最高公因數必爲 $f(x)$ 或與 $f(x)$ 差一常數之量。換言之,必得 $F(x)=c\cdot f(x)$ 或 $F(x)=f(x)\cdot g(x)$,其中 $g(x)$ 爲在 Ω 內之函數。

例題 1.　三次方程式 $x^3-2x^2-x+1=0$ 有三不可公約根,故於範圍 $\Omega_{(1)}$ 內爲不可化。此方程式與 $x^4-3x^3+x^2+2x-1=0$ 有一公根。求二函數之 H. C. F., 幷證明第一方程式之根,皆滿足第二方程式。

例題 2.　函數 x^2+6x+7 於 $\Omega_{(1)}$ 爲不可化,且不爲 x^3+3x^2+3x+1 之除數。由此等已知件,求證二函數不能有公因數。

例題 3.　在 $\Omega_{(1)}$ 內之方程式 $ax^2+bx+c=0$,與 $x^3+5x^2+10x+1=0$ 有一公根。求證 $a=b=c=0$.

例題 4.　在 Ω 內之二函數 $\phi(x)$ 及 $f(x)$, 若 $f(x)$ 爲不可化.且不爲 $\phi(x)$ 之約數,求證此二函數不能

有為在 Ω 內之函數之公因數。

例題 5. 若 Ω 內之不可化方程式 $f(x)=0$ 之一根,滿足 Ω 內之方程式 $\phi(x)=0$,且若 $f(x)$ 較 $\phi(x)$ 為高次,則 $\phi(x)$ 之係數必皆為零。

127. 高斯之補題. 若 $f(x)$ 有整係數,且能分解為有理因數,則能分解為有整係數之有理因數。

試考二函數

$$G(x)\equiv\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots}{m},\quad H(x)\equiv\frac{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots}{n}.$$

命 k 為整數 a_0, a_1, a_2,…之 H. C. F.;又命 l 為整數 b_0, b_1, b_2,…之 H. C. F.。

又命 k 與 m 互為素數,而命 l 與 n 互為素數。

茲可書 $$G(x)\equiv k\cdot g(x),\quad H(x)\equiv l\cdot h(x),$$

其中 $g(x)$ 及 $h(x)$ 為各以 m 及 n 為分母之函數。$g(x)$ 之分子為 x 之整函數,而有整係數,此等係數無除 1 以外之公因數。$h(x)$ 之分子亦如之。故乘積 $g(x)\cdot h(x)$ 之最小分母為 $m\,n$.

試考當乘積 $G(x)\cdot H(x)$ 僅有整係數時之情形。則 $k\cdot l$ 必可以 $m\cdot n$ 除盡甚明。因 k 與 m 互為素數,及 l 與 n 互為素數,由是

$$k=pn,\qquad l=qm,$$

式中 p 及 q 為整數。今可書

$$G(x)\equiv\frac{pn}{m}g_1(x),\qquad H(x)\equiv\frac{qm}{n}h_1(x),$$

式中函數 $g_1(x)$ 及 $h_1(x)$ 僅有整係數。故若 $f(x)$ 可分解爲有分數係數之二有理因數 $G(x)$ 及 $H(x)$，則得

$$f(x)=G(x)\cdot H(x),$$

故又得

$$f(x)=pq\cdot g_1(x)\cdot h_1(x),$$

其中諸係數皆爲整數。故若 $f(x)$ 可分解爲有理因數，則可解爲有整係數之有理因數。

128. $f(x)$ 之可化. 函數 $f(x)$，其中諸係數爲整數，而其次數 n 不超過 4 或 5，於範圍 $\Omega_{(1)}$ 內，爲可化與否，用高斯之補題及尋常代數學，可易決定之。

假定 $f(x)$ 內 x^n 之係數 a_0 爲 1. 若 a_0 不爲 1，則變此函數，使 a_0 爲 1，即取 $x=\dfrac{y}{a_0}$ 而以 $a_0{}^{n-1}$ 乘之。

對於使 $f(x)$ 消盡 x 之各整數值 α，有一 $f(x)$ 之因數 $x-\alpha$（§3）。此處 α 必爲 a_n 之因數。此考察常可助吾人以決定二次或三次之函數 $f(x)$ 之可化或不可化。

若 $f(x)$ 爲四次，若無一次有理因數，則不能有三次有理因數。欲辨別二次有理因數，則以 $x^2+\alpha x+\beta$ 除 $x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$，其中 α 及 β 爲須行決定之整數，惟不知能決定否。若無餘數，則必

$$a_3-a_1\beta+\alpha\beta=\alpha(a_2-\beta-a_1\alpha+\alpha^2),$$

$$a_4=\beta(a_2-\beta-a_1\alpha+\alpha^2). \qquad \text{I}$$

故
$$\alpha=\frac{a_3\beta-a\ \beta^2}{a_4-\beta^2}. \qquad \text{II}$$

故得法則:試察 a_4 之任何因數 β，使 II 內 α 成一整數否。若 α 及 β 為如是之整數，且亦滿足 I，則 $x^2+\alpha x+\beta$ 為一所求之因數。

同樣，若 $f(x)$ 為五次。先求一次有理因數 $x-c$。若無一次有理因數，則無四次有理因數。次求二次有理因數 $x^2+\alpha x+\beta$。若亦無二次因數，則不能有三次有理因數，而函數為不可化。

以 $x^2+\alpha x+\beta$ 除 $x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5$，則得無餘數之條件

$$a_4-a_2\beta+\beta^2+a_1\alpha\beta-\alpha^2\beta$$
$$=\alpha(a_3-a_1\beta+2\alpha\beta-a_2\alpha+a_1\alpha^2-\alpha^3),$$
$$a_5=\beta(a_3-a_1\beta+2\alpha\beta-a_2\alpha+a_1\alpha^2-\alpha^3). \qquad \text{III}$$

由是
$$\alpha=\frac{-c_1\pm\sqrt{c_1{}^2-4c_0c_2}}{2c_0},$$

式中
$$c_0=\beta^2,$$
$$c_1=a_5-a_1\beta^2,$$
$$c_2=a_2\beta^2-a_4\beta-\beta^3.$$

若 β 為 a_5 之因數，而 α 為整數，且滿足 III 式，則 $x^2+\alpha x+\beta$ 為所求之因數。

例題 1.　於 $\Omega_{(1)}$ 內 $f(x)\equiv x^5+4x^4+4x^3+9x^2+8x+2$ 為

可化乎?

因 $x=\pm 1$ 或 ± 2, $f(x)$ 不消盡,故於 $\Omega_{(1)}$ 內無一次或四次之因數。取 $\beta=2$, 則 $c_0=4$, $c_1=-14$, $c=-8$, $\alpha=4$, 且滿足條件 III。故 x^2+4x+2 為一因數。

例題 2.　於 $\Omega_{(1)}$ 內下列諸式為可化乎?

(1) x^3+2x^2+3x-6.　(5) $x^4+10x^3-100x^2-x+1$.

(2) x^3+3x^2+8x-2.　(6) $x^5+x^3+x^2+x+7$.

(3) $x^4+x^3+x^2+x-4$.　(7) $x^5+2x^4+3x^3+4x^2+3x+2$.

(4) $x^4+9x^3+25x^2+22x+6$.　(8) x^5+x+1.

129.　愛孫斯坦(Eisenstein)之定理.　若 p 為素數,而 $a_0, a_1, ,\cdots, a_n$ 為整數,皆(除 a_0 以外)可以 p 除盡,而 a_n 不能以 p^2 除盡,則 $f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$ 為不可化。

若 $f(x)$ 能分解成因數,而因數之諸係數為整數。則得

$$f(x)\equiv(c_0x^h+c_1x^{h-1}+\cdots+c_h)(d_0x^k+d_1x^{k-1}+\cdots+d_k),$$

而
$$h+k=n.$$

a_n 既不能以 p 除盡,而不能以 p^2 除盡,且 $a_n=c_h\cdot d_k$, 故因數 c_h, d_k 之一能以 p 除盡,而其他一則不能。命 c_h 為能以 p 除盡之因數。則因諸係數 c 不能皆以 p 除盡,否則,a_0 將能以 p 除盡。命 c_v 為不能以 p

除盡之係數，而 c_{v+1}, c_{v+2}, …, c_h 各可以 p 除盡。則 $f(x)$ 之二因數之積內 x^{h-v} 之係數爲

$$d_h\, c_v + d_{h-1}\, c_{v+1} + d_{h-2} c_{v+2} + \cdots\cdots.$$

因此多項式內之各項，除首項外，皆能以 p 除盡，故多項式不能以 p 除盡。然由假定，$f(x)$ 之係數之不能以 p 除盡者，惟有 a_0。故 $x^{h-v}=x^n$，而此爲不能，因 h 必須小於 n 也。

例題 1.　由 §129，證明

$$2x^3+9x^2+6x+12, \qquad 4x^5+14x^4+21x+35$$

爲不可化。

130. $\dfrac{x^p-1}{x-1}$ 之不可化.　當 p 爲素數時，方程式 $\dfrac{x^p-1}{x-1}=0$ 爲不可化。

於 $\dfrac{x^p-1}{x-1}=0$，若令 $x=z+1$，展開二項式而化簡之，則得

$$z^{p-1}+pz^{p-2}+\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}z^{p-3}+\cdots+\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}z+p=0.$$

由 §129，此方程式爲不可化，故所與之方程式爲不可化。

131. 重根之除去.　除非特別聲明，此後常假定方程式 $f(x)=0$ 無重根。吾人行此，決不致失其普偏性。蓋因若 $f(x)=0$ 有重根，則如 §21 內所述，以 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 之 H. C. F. 除 $f(x)$，而得商 $g(x)$。則 $g(x)=0$ 爲於

Ω 內之方程式,其諸根皆相異,而欲與之定理,可施用之於 $g(x)=0$。

例題 1. 若 $f(x)=0$ 有重根,求證其爲可化。

132. 範圍之次數之定義及標準範圍之定義. 若不可化方程式 $f(x)=0$ 爲 n 次,α 爲其根之一,則範圍 $\Omega_{(\alpha)}$ 謂爲 n 次。

因於 Ω 內,$f(x)=0$ 爲不可化,由是其根無屬於範圍 Ω 者。因若根 α 爲範圍 Ω 內之數,則 $x-\alpha$ 爲 Ω 內之因數,而 $f(x)$ 爲可化。$f(x)=0$ 之各根,當添加於 Ω 時,則生一在 Ω 上之範圍,此爲甚明(§120)。例如若 α, α_1, α_2, …, α_{n-1} 爲 $f(x)=0$ 之根,則得 n 範圍

$$\Omega_{(\alpha)},\ \Omega_{(\alpha_1)},\ \Omega_{(\alpha_2)},\cdots,\ \Omega_{(\alpha_{n-1})} \qquad \mathrm{I}$$

諸範圍 I 謂爲 $\Omega_{(\alpha)}$ 之共軛範圍 (Conjugate domains)。此等範圍,可各不相同;其數個或全數可相同。

與其諸共軛範圍全同之範圍,謂之標準範圍 (Normal domain)。標準範圍之定則較之他範圍者,極其簡單。代數學內葛羅華所成之大進步,大半依賴於化任何已知範圍爲標準範圍。

133. 定理. 範圍 $\Omega_{(\alpha)}$ 內之任何數,可表成在 Ω 內 α 之函數。

由範圍之定義(§120),於其內之任二數,以加,減,乘,

或除合之,生出在此範圍內之數;又任何數加於本數,或由本數減之,或以本數乘之或除之,亦生出屬於此範圍內之數。

範圍$\Omega_{(\alpha)}$由添加α於Ω而得之。故$\Omega_{(\alpha)}$之數,不論其在Ω內否,為由對於α及Ω內之數,行加,減,乘,除四種運算而得。此卽表示$\Omega_{(\alpha)}$內各數可表成於Ω內α之函數。

例題 1. 求證$x^4-10x^2+1=0$之根,決定一標準範圍。

其諸根為$\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\alpha_1=-\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\alpha_2=-\sqrt{2}-\sqrt{3}$, $\alpha_3=\sqrt{2}-\sqrt{3}$.故得$\alpha=-\alpha_2=\dfrac{1}{\alpha_1}=-\dfrac{1}{\alpha_3}$.由是$\Omega_{(1,\alpha)}=\Omega_{(1,\alpha_1)}=\Omega_{(1,\alpha_2)}=\Omega_{(1,\alpha_3)}$.

例題 2. 求證不可化方程式$x^3+x+1=0$之根所決定之範圍,非為標準範圍。

由狄卡德之法則,知此方程式祗有一實根。而複虛根決不能為實根之有理函數。由是$\Omega_{(1,\alpha)}$,$\Omega_{(1,\alpha_1)}$,$\Omega_{(1,\alpha_2)}$三範圍不能全同,故非為標準範圍。

然複虛根所決定之二範圍為相同;因若$\beta+i\gamma$及$\beta-i\gamma$為複虛根,$\beta-i\gamma=\dfrac{\beta^2+\gamma^2}{\beta+i\gamma}$.故$\beta-i\gamma$為由添加$\beta+i\gamma$所得之範圍內之數.

例題 3. 求證$x^4-22x^2+1=0$之根生出一標準範

圍。

例題 4. 求證一不可化二次方程式之根,決定一標準範圍。

例題 5. 求證 $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ 之任何三根爲其第四根之乘冪,且範圍 $\Omega_{(1,\alpha)}$ 爲標準範圍。參看§67,例題 2.

例題 6. 試表下列範圍 $\Omega_{(1,i\sqrt{5})}$ 內諸數爲於 $\Omega_{(1,i)}$ 內 $\sqrt{5}$ 之函數:

$$1,\ 10i,\ 3+4\sqrt{-5}.$$

例題 7. 試決定包含數 $(\sqrt{2}+i\sqrt{3}-\sqrt{6})^{-3}$ 之範圍 Ω。

134. 共軛數,原數. 設數 $N=\phi(\alpha)$,其中 ϕ 表 Ω 內之一函數.若 $\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 爲不可化方程式 $f(x)=0$ 之根,則

$$N=\phi(\alpha),\ N_1=\phi(\alpha_1)\cdots,\ N_{n-1}=\phi(\alpha_{n-1}), \qquad \text{I}$$

表 n 數,而每一數各由共軛範圍

$$\Omega_{(\alpha)},\ \Omega_{(\alpha_1)},\ \cdots,\ \Omega_{(\alpha_{n-1})}$$

之一而來。諸數 I 謂之 N 之共軛數(Conjugate numbers)。

N 之此諸共軛數之幾個或全數可互相等。

範圍 $\Omega_{(\alpha)}$ 內之一數 N,與其諸共軛數皆不同,謂之此範圍之原數(Primitive number)。不然,則謂之非原

數(Imprimitive number)。

135. 原範圍. 範圍$\Omega_{(\alpha)}$，當其不含除範圍Ω內之數以外之非原數，謂之原範圍(Primitive domain)；當其含以外其他非原數，則謂之非原範圍。

例題 1. 方程式$f(x)=x^2+1=0$之根爲$\pm i$. 此處$\alpha=i$, $\alpha_1=-i$.假定$\phi(\alpha)\equiv\dfrac{\alpha^2+\alpha+2}{\alpha}$,則$\phi(\alpha)=-i+1=N$,而$N_1=i+1$. 故N既與$N_1$不同,而於$\Omega_{(1,i)}$內爲原數。

次假定$\phi(\alpha)\equiv\alpha-\alpha=\alpha_1-\alpha_1=0$, 故0於$\Omega_{(1,i)}$內爲非原數。

更一般,若$\phi(i)\equiv a+ib$,其中a及b爲有理數,則$\phi(-i)=a-ib$;若$\phi(i)\equiv\dfrac{ai^n}{i^n}=a$,則$\phi(-i)\equiv a$. 故於此題內,非原數爲限於有理數,而範圍$\Omega_{(1,i)}$爲原範圍。因$\Omega_{(1,i)}$及$\Omega_{(1,-i)}$均爲含數$a+ib$之範圍,而$a$及$b$爲有理數,可爲正或負,由是此二共軛範圍爲全同。故$\Omega_{(1,i)}$爲標準範圍。

例題 2. 不可化方程式$x^2-2=0$之根爲$\pm\sqrt{2}$. 求證$\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$爲$\Omega_{(1,\sqrt{2})}$之原數,10爲非原數,範圍$\Omega_{(1,\sqrt{2})}$爲原範圍且爲標準範圍。

例題 3. 若α爲$x^2+10x+1=0$之根,試決定α之函數,使N爲非原數5。

例題 4. 求證於§67,例題2,屬於標準範圍$\Omega_{(1,\alpha)}$

之數 $N=\alpha^2+\alpha^3$，爲非原數，而範圍 $\Omega_{(1,\alpha)}$ 爲非原範圍。

例題 5. 若 $N=\alpha^2$，而 α 爲 $x^4+1=0$ 之根，求證 N 爲非原數，$N_1=\alpha^2-\alpha$ 爲原數，而範圍 $\Omega_{(1,\alpha)}$ 爲標準範圍且爲非原範圍。

例題 6. 若 $N=\alpha^{16}$，而 α 爲 $x^8+1=0$ 之根，求證 N 爲非原數，而 $\Omega_{(1,\alpha)}$ 爲標準範圍且爲非原範圍。

例題 7. 若 α 爲 $x^7-1=0$ 之根，求證 $\Omega_{(1,\alpha)}$ 爲非原範圍。

136. 定理. n 次範圍 $\Omega_{(\alpha)}$ 內之各數 N 爲 Ω 內某 n 次方程式之根，此方程式之其他諸根爲與 N 共軛之其餘諸數，即 $N_1, N_2, \cdots, N_{n-1}$。

取乘積

$$(y-N)(y-N_1)\cdots(y-N_{n-1})=y^n+p_1y^{n-1}+\cdots+p_n\equiv\Phi(y),$$

式中
$$-p_1=N+N_1+\cdots+N_{n-1},$$
$$p_2=NN_1+NN_2+\cdots+N_{n-2}N_{n-1},$$
$$\pm p_n=NN_1\cdots\cdots N_{n-1}.$$

吾人知諸係數 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，皆爲數 $N, N_1, \cdots, N_{n-1}$ 之有理對稱函數。因 $N=\phi(\alpha)$, $N_1=\phi(\alpha_1)$, $\cdots$, $N_{n-1}=\phi(\alpha_{n-1})$ (§134)，而 ϕ 爲 Ω 內之函數，$p_1, p_2, \cdots, p_n$ 又爲 Ω 內 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 之對稱函數，此爲甚明；因如 α 與

α_1之互換,祗使N與N_1互換,因N與N_1之互換,不致改變此等函數,故α與α_1之互換,不改變此等函數。

今$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$爲方程式$f(x)=0$之根;故$\Phi(y)=0$之係數$p_1, p_2, \cdots, p_n$,既爲$\Omega$內$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$之函數,可表成$\Omega$內$f(x)=0$之係數之函數(§70)。

然由假說,$f(x)=0$之係數,爲屬於範圍Ω之數,故同理對於$p_1, \cdots, p_n$爲眞。由是$\Phi(y)=0$爲Ω內之n次方程式,其根爲$N, N_1, \cdots, N_{n-1}$.

例題 1.　玆舉例說明之,命$f(x)=x^4+1=0$,則$\Omega=\Omega_{(1)}$,而諸根爲$\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$, $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-i)$. 若$\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$,則範圍$\Omega_{(1,\alpha)}$爲由諸數$a+ib$而成,其中$a$及$b$可爲有理數或含$\sqrt{2}$之無理數。命$N=\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1$,則$N=1+(1+\sqrt{2})i$,且與之爲共軛之數爲

$$N=1+(1+\sqrt{2})i \qquad N_2=1-(1+\sqrt{2})i$$

$$N_1=1+(1-\sqrt{2})i \qquad N_3=1-(1-\sqrt{2})i$$

而

$$\Phi(y)=(y-N)(y-N_1)(y-N_2)(y-N_3)$$

$$=y^4-4y^3+12y^2-16y+8=0.$$

由是N與其共軛數爲於$\Omega_{(1)}$內四次代數方程式之根,卽$\Phi(y)=0$爲與$f(x)=0$在同一範圍內之方程式,而二者爲同次。

例題 2.　求證 5, i, $\sqrt{2}$ 各爲在例題 1 之範圍

$\Omega_{(\alpha)}$內之數，而各爲某四次可化方程式之根。

137. 定理. 範圍$\Omega_{(\nu)}$內各數，可表成$\Omega_{(\alpha)}$之任何原數N Ω內之函數。

命N'爲$\Omega_{(\alpha)}$內之任何數，而$N', N'_1, N'_2, \cdots, N'_{n-1}$爲其共軛數。命　$\Phi(x)\equiv(x-N)(x-N_1)\cdots(x-N_{n-1})$，

其中$N, N_1, \cdots, N_{n-1}$爲原數N之共軛數。茲作一新函數$\psi(x)$如次：

$$\psi(x)\equiv\frac{N'\Phi(x)}{x-N}+\frac{N'_1\Phi(x)}{x-N_1}+\cdots+\frac{N'_{n-1}\Phi(x)}{x-N_{n-1}}.$$

此爲x之$n-1$次函數。

因　$N=\phi(\alpha)$　$N_1=\phi(\alpha_1),\cdots,$

及　$N'=\phi_1(\alpha)$，　$N'_1=\phi_1(\alpha_1),\cdots,$

由是，如α與α_1之互換，不僅互換N與N_1，且互換N'與N'_1，及互換$\psi(x)$之式內之首二分數。

然$\Phi(x)$不致爲如此之互換所變。故不論何二α互換，$\psi(x)$不變。由是$\psi(x)$爲於Ω內$\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$之對稱函數，而$\psi(x)$之諸係數爲$\Omega$內之數。

今若命$x=N$，則$\Phi(N)=0$. 因N爲原數故與$N_1, N_2, \cdots$不同，由是當$x=N$，$\psi(x)$內之各分數，除第一個外，各爲零；因其分子爲零，而分母爲有限數故也。第一分數得$\frac{0}{0}$。由§20，對此不定，得關係$\frac{N'\Phi(x)}{N-N}=N'\Phi'(N)$，其中$\Phi'$表$\Omega$關於$x$之微分係數。由此關係得$\psi(N)$

$=N'\Phi'(N)$ 或 $N'=\psi(N)/\Phi'(N)$，因 $\Phi(x)$ 無重根，故式中 $\Phi'(N)$ 不為零。因 $\psi(N)$ 及 $\Phi'(N)$ 皆為 Ω 內 N 之函數，故任何數 N' 能表成任何原數 N Ω 內之函數。

例題 1. N 為 $\Omega_{(\alpha)}$ 內之原數，求證範圍 $\Omega_{(n)}$ 與範圍 $\Omega_{(\alpha)}$ 全同。

例題 2. 於 §135，例題 5，已證明 $N=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$ 為 $\Omega_{(1,\sqrt{2})}$ 之原數，其中士 $\sqrt{2}$ 為不可化方程式 $x^2-2=0$ 之根。試表 $5+3\sqrt{2}$，5 及 $\sqrt{2}$ 為 N 之在 $\Omega_{(1)}$ 內之函數。

例題 3. 試各表 §136，例題 2 內之 5，i，$\sqrt{2}$ 為 α 於 Ω 內之函數。

138. 定理. 若 N 為 $\Omega_{(\alpha)}$ 內之原數，則諸數 N，$N_1,\cdots,N_{n-1}$ 為 n 次不可化方程式 $\Phi(x)=0$ 之根；若 N 為非原數，則此諸數可分為 n_1 組，每組有 n_2 相等數，而 $\Phi(x)=0$ 為 n_1 次不可化方程式之 n_2 乘方。

若 $\qquad \Phi(x)\equiv(x-N)(x-N_1)\cdots(x-N_{n-1})=0$

為可化，分解之使成其不可化因數。取此等不可化因數之一，例如 $\theta(x)$。則 $\theta(x)=0$ 至少必有 $N,N_1,\cdots,N_{n-1}$ 諸數之一為其一根。命 N_1 為一如此之根。則 $\theta(N_1)=0$，且因由 §134，$N_1=\phi(\alpha_1)$，故得 $\theta[\phi(\alpha_1)]=0$；即 $\theta[\phi(x)]=0$ 之諸根之一為 α_1。由是 $\theta[\phi(x)]=0$ 及 $f(x)=0$ 二代數

方程式有一公根，卽 α_1 因 $f(x)=0$ 已假定爲不可化；故由§126，方程式 $f(x)=0$ 之根 $\alpha,\ \alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_{n-1}$，必各滿足 $\theta[\phi(x)]=0$。因 $N_i=\phi(\alpha_i)$，故知 $N,\ N_1,\ \cdots,\ N_{n-1}$ 諸數必各滿足 $\theta(x)=0$。

今若 $N,\ N_1,\ \cdots,\ N_{n-1}$ 皆爲相異，則 $\theta(x)=0$ 必爲 n 次，而 $\Phi(x)=0$ 與 $\theta(x)=0$ 全同；因由假設，$\theta(x)=0$ 爲不可化，故 $\Phi(x)=0$ 必爲不可化。

反之，若根 $N,\ N_1,\ \cdots,\ N_{n-1}$ 之數個相同；命 $N,\ N_1,\ \cdots,\ N_{n_1-1}$，表相異之根，則不可化方程式 $\theta(x)=0$，爲 n_1 次。由分解 $\Phi(x)=0$ 爲因數所得之任何他方程式 $\theta_1(x)=0$，一組之根 $N,\ N_1,\ \cdots,\ N_{n_1-1}$，至少必有一根滿足之，因 $\Phi(x)=0$ 內之各重根，於相異根之表內各有一代表，故 $\theta_1(x)=0$，必被此組內之各根所滿足，而與方程式 $\theta(x)=0$ 全同，此二方程式，其 n_1 根皆爲公共。

故知若 $\Phi(x)=0$ 爲可化，而分解爲其不可化因數，則此等因數互爲全同。由是 $\Phi(x)=0$ 爲 $\theta(x)=0$ 之乘方。因 $\Phi(x)=0$ 爲 n 次，而 $\theta(x)=0$ 爲 n_1 次，故 n 必爲 n_1 之倍數，卽 $n=n_1n_2$。

例題 1. 試取不可化方程式 $f(x)\equiv x^4+1=0$ 以說明之。此方程式之根爲 $\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$，$\alpha_1=-\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$，$\alpha_2=+\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-i)$，$\alpha_3=-\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-i)$。命 $N=\phi(\alpha)$

$=\alpha^3$,則 $N=N_1=i$,而 $N_2=N_3=-i$. 故 $\Phi(x)=(x+i)^2(x-i)^2=(x^2+1)^2=0$. 故得 $\theta(x)=x^2+1=0$,而此方程式 N, N_1, N_2, N_3 皆滿足之。$f(x)=0$ 之根 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$,皆滿足方程式 $\theta[\phi(x)]=0$.

例題 2.　由 §133,例題 5 之方程式之根,當 $N=\alpha^2+\alpha^3$ 時,求 N, N_1, N_2, N_3. 求決定此例內之方程式 $\Phi(x)=0$ 爲可化否;若此方程式爲可化,試求 n_1 與 n_2,且證明所與方程式 $f(x)=0$ 之根,滿足 $\theta[\phi(\alpha)]=0$.

例題 3.　由 §133,例題 5 內之方程式之根,當 $N=4\alpha$ 時,求 N_1, N_2, N_3, $\Phi(x)=0$ 爲可化否?

例題 4.　於 §136 例題 5 內,作 $\Phi(y)=0$,且當 $N=\alpha^2$ 時,考察其可化。

139.　標準方程式.　標準方程式(Normal equation)者,乃一不可化方程式,其中各根能表成諸根之一於 Ω 內之函數者也。

例題 1.　於 §138 例題 1 內,$x^4+1=0$ 之根 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$,能以 α 表之,即:$\alpha_1=-\alpha$, $\alpha_2=-\alpha^3$, $\alpha_3=+\alpha^3$.故不可化方程式 $x^4+1=0$ 爲標準方程式。

例題 2.　求證 $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ 爲標準方程式。

例題 3.　求證 $x^4-2x^2+9=0$ 爲標準方程式。

第十四章

標準範圍

140. 定理. n次標準範圍之一原數,為一n次標準方程式之根。

若添加一數ρ於Ω,成一n次範圍$\Omega_{(\rho)}$,範圍$\Omega_{(\rho)}$內之各數N,為於Ω內一n次方程式$F(x)=0$之根,由§136,此方程式之其他諸根,為N之其餘之共軛數,卽

$$N_1,\ N_2,\ \dots,\ N_{n-1}.$$

N既假定為原數,故$F(x)=0$為不可化(§138)。

以$\phi(\rho_i)$決定之任何數N_i,屬於範圍$\Omega_{(\rho_i)}$。因$\Omega_{(\rho)}$為標準範圍,故得$\Omega_{(\rho)}=\Omega_{(\rho_1)}=\dots=\Omega_{(\rho_{n-1})}$(§132)。故N, N_1, …, N_{n-1}諸數屬於範圍$\Omega_{(\rho)}$,而可表為於Ω內原數N之函數(§137)。由是$F(x)=0$為標準方程式。

141. 定理. 反之,若ρ為一標準方程式之根,則$\Omega_{(\rho)}$為一標準範圍,其次數與方程式之次數同。

命ρ_0為此根,而其他諸根為於Ω內之函數;卽命$\rho^\nu=\phi^\nu(\rho_0)$,其中$\nu$可為1, 2, …, 或$(n-1)$。$\rho_0$既為所與n次不可化方程式之根,範圍$\Omega_{(\rho_0)}$及其諸共軛範圍為n次(§132)。

範圍$\Omega(\rho_\nu)$內,卽範圍$\Omega[\phi_\nu(\rho_0)]$內之任何數,爲於Ω內$[\phi_\nu(\rho_0)]$之函數,故亦爲Ω內ρ_0自身之函數;卽範圍$\Omega[\phi_\nu(\rho_0)]$內之任何數,亦在於$\Omega(\rho_0)$之內。其逆亦爲眞。故諸共軛範圍爲全同,而$\Omega(\rho_0)$爲標準範圍。

系. 因範圍$\Omega[\phi_\nu(\rho_0)]$包含所與標準方程式之諸根,則此諸根之每個,可表成於Ω內根$\phi_\nu(\rho_0)$之函數,而$\phi_\nu(\rho_0)$可代表諸根之任一。由是,於一標準方程式,各根不僅可表成於Ω內某一根之函數,且可表成於Ω內諸根之任一之函數。

例題 1. 求證$\dfrac{x^7-1}{x-1}=0$爲標準方程式。

例題 2. 求證$x^4+10x^2+40x+205=0$爲標準方程式。

142. 數個量之添加. 數個量之添加,可以一單量之添加代之。

命$\alpha, \beta, \gamma, \cdots$爲添加於範圍$\Omega$之數,而得擴大之範圍$\Omega(\alpha, \beta, \gamma\cdots)$.求證可求得一數$\rho$,使範圍$\Omega(\alpha, \beta, \gamma, \cdots)$與$\alpha(\rho)$爲全同。

命α爲於Ω內之代數方程式$f_1(x)=0$之諸根$\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_{m-1}$之一。同樣,命$\beta$爲$f_2(x)=0$之諸根$\beta, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}$之一,$\gamma$爲$f_3(x)=0$之諸根$\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{0-1}$之一,如是類推。吾人可假定此等方程式皆無重根,不致失其普徧性。今假定ρ爲如下之$\alpha, \beta, \gamma, \cdots$之一次

函數.卽

$$\rho=a\alpha+b\beta+c\gamma+\cdots, \qquad \text{I}$$

式中 a, b, c 等為不定係數,於特別之例,此等係數可與以 Ω 內之任何適宜之數值。ρ 為 $\Omega_{(\alpha,\beta,\gamma,\cdots)}$ 內之量甚明,因其為 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 之有理函數也。ρ 之式合諸方程式 $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0,\cdots$ 之每一方程式之一根。

次以由各方程式取一根所得諸根之任何他組合 α_1, β_1, $\gamma_1,\cdots$ 代諸根 α, β, γ, $\cdots$。得

$$\beta_1=a\alpha_1+b\beta_1+c\gamma_1+\cdots.$$

同樣得 ρ_2, ρ_3, $\cdots$. ρ 之總數等於可為之組合之總數,卽 $m\cdot n\cdot o\cdots$, 而 m, n, o, 等各為各方程式之次數。與 a, b, c, $\cdots$ 以適宜之值,則諸 ρ 可均互相異。

茲作函數 $\mathrm{F}(t)$, 如下:

$$\mathrm{F}(t)\equiv(t-\rho)(t-\rho_1)(t-\rho_2)\cdots. \qquad \text{II}$$

若以 α_i 代 α 或以 β_i 代 β, $\mathrm{F}(t)$ 不變。故由行所示之乘法所得 II 之係數,為方程式 $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0$, $\cdots$ 之各方程式之根之對稱函數;故諸係數為於 Ω 內之數,而 $\mathrm{F}(t)$ 為於 Ω 內之函數。

今 $\Omega_{(\alpha,\beta,\gamma,\cdots)}$ 內之任何數 N, 為 α, β, γ, $\cdots$ 之有理函數。命對於變 ρ 為 ρ_1, ρ_2, $\cdots$ 之諸置換, N 變為

$N_1, N_2, \cdots$。因是作新函數 $G(t)$,定之如次:

$$G(t)\equiv F(t)\left\{\frac{N}{t-\rho}+\frac{N_1}{t-\rho_1}+\frac{N_2}{t-\rho_2}+\cdots\right\}. \qquad \text{II}$$

$G(t)$關於 $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0$, $\cdots$ 之根爲對稱。故其係數在 Ω 內。由 II 知當 $t=\rho$, $F(t)$ 等於零。然分母 $t-\rho$ 亦等於零。

故當 $t=\rho$, 由 §20, 得

$$G(\rho)=\frac{NF(\rho)}{\rho-\rho}=NF'(\rho),$$

式中 $F'(t)$ 爲 $F(t)$之第一微分係數。

故
$$N=\frac{G(\rho)}{F(\rho)}.$$

此卽表示 N 爲之 ρ 有理函數;卽 $\Omega_{(\alpha,\beta,\gamma,\cdots)}$ 內之任何數爲 ρ 之有理函數,故在範圍 $\Omega_{(\rho)}$ 內。反之,$\Omega_{(\rho)}$ 內之任何數在 $\Omega_{(\alpha,\beta,\gamma,\cdots)}$內,蓋因 $\Omega_{(\rho)}$ 內之各數,皆爲 ρ 之有理函數,故爲 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 之有理函數。此卽表明 $\Omega_{(\rho)}$ 與 $\Omega_{(\alpha,\beta,\gamma,\cdots)}$爲同大之範圍,而添加 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 於 Ω,可以添加 ρ 代之。

例題 1.　試考上證明對於特別例,卽

$$\alpha=\sqrt{2},\ \beta=\sqrt[3]{5},\ \gamma=\delta=\cdots=0,\ a=b=1,\ N=3\sqrt{2}\sqrt[3]{5}.$$

此處 $f_1(x)=x^2-2=0$, $f_2(x)=x^3-5=0$. 所以 $\rho=\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}$. 有六不同之 ρ, 而 II 爲 t 之六次。問 III 爲幾次?

$$G(t)=N(t-\rho_1)(t-\rho_2)\cdots(t-\rho_5)+N_1(t-\rho)(t-\rho_2)\cdots(t-\rho_5)$$
$$+\cdots$$

$G(\rho)=N(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)\cdots(\rho-\rho_5)=540\rho^2+360$, 而

$$\rho=\sqrt{2}+\sqrt[3]{5},\qquad \rho_3=-\sqrt{2}+\sqrt[3]{5},$$

$$\rho_1=\sqrt{2}+\omega\sqrt[3]{5},\qquad \rho_4=-\sqrt{2}+\omega\sqrt[3]{5},$$

$$\rho_2=\sqrt{2}+\omega^2\sqrt[3]{5},\qquad \rho_5=-\sqrt{2}+\omega^2\sqrt[3]{5}.$$

由 §71,例題 14, 其根爲 $\rho,\rho_1,\cdots,\rho_5$ 之方程式爲

$$F(t)=t^6-6t^4-10t^3+10t^2-60t+17=0.$$

$$\therefore\ F'(\rho)=6\rho^4-24\rho^3-30\rho^2+24\rho-60.$$

故知 $G(\rho)\div F'(\rho)=N$.

例題 2.　添加 $\sqrt{-2}$ 於 $\Omega_{(1)}$ 與添加 $i+\sqrt{2}$ 爲同效否?

例題 3.　二範圍 $\Omega_{(1,\sqrt{2},\sqrt{3})}$ 及 $\Omega_{(1,\sqrt{6})}$ 爲同大否?若不同大,則其一爲其他之分範圍否?

143. 葛羅華範圍. 若 $f(x)=0$ 爲有相異根 α, α_1, $\cdots$, α_{n-1} 之 n 次方程式,則由添加其諸根於 Ω. 所得之範圍 $\Omega_{(\alpha,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})}$ 謂之方程式 $f(x)=0$ 之葛羅華範圍。如三次方程式 $x^3+3x^2-2x-6=0$ 之根爲 -3, $\pm\sqrt{2}$;故其葛羅華範圍爲 $\Omega_{(1,\sqrt{2})}$。

例題 1.　求 $x^4+6x^2+5=0$ 之葛羅華範圍。

例題 2. 求 §133 例題 5 內之方程式之葛羅華範圍,求證於此例內,$\Omega_{(\alpha,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})}=\Omega_{(\alpha)}=\Omega_{(\alpha_1)}=\Omega_{(\alpha_2)}=\Omega_{(\alpha_3)}$.

144. 定理. 任何代數方程式之葛羅華範圍爲標準範圍。

葛羅華範圍 $\Omega_{(\alpha,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})}$ 之次數，不常與方程式 $f(x)=0$ 之次數相同；命之爲 m。

命 ρ 爲葛羅華範圍內之一原數，則 $\Omega_{(\alpha,\cdots,\alpha_{n-1})}=\Omega_{(\rho)}$. 由是 ρ 爲一 m 次不可化方程式，即方程式

$$g(y)=0 \qquad \text{I}$$

之根(§138)。

根 ρ，既爲葛羅華範圍之數，可表成於 Ω 內 α_0，$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 之函數；即

$$\rho=f_1(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}). \qquad \text{II}$$

試考諸 α 字下方之 n 字每次全取之所能行之諸排列。此等排列之數爲 $n!$。此等排列與置換之對稱羣相當(§98)。

若 II 內之諸下方之字，依次施以 $n!$ 級之對稱羣之各置換，則得 ρ 之諸值，而各以

$$\rho,\rho_1,\cdots,\rho_{n-1} \qquad \text{III}$$

表示之。

次若施對稱羣之任何置換於 III 內諸 ρ，則復得同組之 ρ，惟其次序不同而已；蓋因由此第二次運算所得之任何數，爲由 II 經二置換而得之者，而由

羣之定義,二置換之積,與羣內一置換全同故也。故若作方程式

$$H(y)\equiv(y-\rho)(y-\rho_1)\cdots(y-\rho_{n-1})=0, \qquad \text{IV}$$

此方程式受對稱羣之任何置換爲不變;故行IV內所示諸乘法所得 y 之係數爲不變。然此等係數爲於 Ω 內根 $\rho,\rho_1,\cdots$ 之函數,而由關係II,亦爲於 Ω 內 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 之函數。

因IV之諸係數受對稱羣爲不變,故諸係數爲於 Ω 內 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 之對稱函數,即爲於 Ω 內 $f(x)=0$ 之根之對稱函數。故IV爲 Ω 內之方程式(§123),而其根爲 $\Omega_{(\alpha,\cdots,\alpha_{n-1})}$ 內之數。

然 ρ 爲 $H(y)=0$ 之根,又爲 $g(y)=0$ 之根。$g(y)=0$ 既爲不可化,故其諸根悉爲 $H(y)=0$ 之根(§126)。然 $H(y)=0$ 之根。皆爲 $\Omega_{(\alpha,\cdots,\alpha_{n-1})}$ 內之數;故 $g(y)=0$ 之根(即其輗數 $\rho,\rho_1,\cdots,\rho_{m-1}$),皆爲 $\Omega_{(\alpha,\cdots,\alpha_{n-1})}$ 內之數。然

$$\Omega_{(\rho)}=\Omega_{(\alpha,\cdots,\alpha_{n-1})},$$

故得
$$\Omega_{(\rho)}=\Omega_{(\rho_1)}=\cdots=\Omega_{(\rho_{m-1})}.$$

即 $\Omega_{(\alpha,\cdots,\alpha_{n-1})}$ 爲標準範圍。

145 葛羅華之分解式. §144內之方程式 $g(y)=0$,謂之於範圍 Ω 內所與方程式 $f(x)=0$ 之葛羅華分解式,而以方程式 $f(x)=0$ 之係數定之。此分解

式有次諸性質:

(1)　$g(y)=0$ 爲不可化。

(2)　$f(x)=0$ 之各根,可表成於 Ω 內方程式 $g(y)=0$ 之一根 ρ 之函數。即根 $\alpha,\ \alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 之每個,在與 $\Omega_{(\rho)}$ 同大之範圍 $\Omega_{(\alpha,\cdots,\alpha_{n-1})}$內。

(3)　$g(y)=0$ 之一根,可表成於 Ω 內 $f(x)=0$ 之 n 根之函數。即由 §144, II,得 $\rho=f_1(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\cdots\alpha_{n-1})$.

例題 1.　三次方程式 $x^3+3x^2+x-1=0$ 之根爲

$$\alpha=-1,\ \alpha_1=-1+\sqrt{2},\quad \alpha_2=-1-\sqrt{2}.$$

故葛羅華範圍爲 $\Omega_{(1,\sqrt{2})}$。又 $\rho=\sqrt{2}$ 爲不可化方程式 $g(y)=x^2-2=0$ 之根,而爲葛羅華範圍之原數。方程式 $x^2-2=0$ 爲葛羅華分解式,因(1)此方程式爲不可化;(2)根 $\alpha=-\sqrt{2}/\sqrt{2}$及根$\alpha_1,\alpha_2$,各爲於 Ω 內 $\sqrt{2}$ 之函數;(3)ρ可表成 α,α_1,α_2之函數,即 $\rho=\sqrt{2}=\alpha^2_2-\alpha_1+4\alpha$.

例題 2.　求證於例題1, a 及 b 爲有理數,方程式 $x^2-2ax+a^2-2b^2=0$ 之根 $\rho=a+b\sqrt{2}$,爲於範圍 $\Omega_{(\sqrt{2})}$ 內之原數,而此二次方程式爲所與三次方程式之葛羅華分解式。

例題 3.　求證 n 次方程式葛羅華分解式之次數,不能過 $n!$,參看 §144。

例題 4.　求對於普通三次方程式 $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$，其根爲 α，α_1，α_2，作 §144 內之方程式 $H(y)=0$。

如 §142 內，選擇係數 c，c_1，c_2 在 Ω 內之適宜之値，使對於關係 $\rho\equiv c\alpha+c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$ 內根 α，α_1，α_2 之各排列，ρ 得相異之値。

施以三次對稱羣之六置換，§104，則得

$$\rho\equiv c\alpha+c_1\alpha_1+c_2\alpha_2,\qquad \rho'\equiv c\alpha+c_1\alpha_2+c_2\alpha_1,$$
$$\rho_1\equiv c\alpha_1+c_1\alpha_2+c_2\alpha,\qquad \rho_1'\equiv c\alpha_1+c_1\alpha+c_2\alpha_2,$$
$$\rho_2\equiv c\alpha_2+c_1\alpha+c_2\alpha_1,\qquad \rho_2'\equiv c\alpha_2+c_1\alpha_1+c_2\alpha.$$

玆先作其根爲 ρ，ρ_1，ρ_2 之三次方程式。則得

$$\Sigma\rho=\Sigma c\Sigma\alpha=-a_1\Sigma c,$$
$$\Sigma\rho\rho_1=\Sigma c^2\cdot\Sigma\alpha\alpha_1+\Sigma\alpha^2\cdot\Sigma cc_1+\Sigma cc_1\cdot\Sigma\alpha\alpha_1$$
$$=a_2\Sigma c^2+(a_1^2-a_2)\Sigma cc_1.$$

欲得乘積 $\rho\rho_1\rho_2$，知此乘積內有 $cc_1c_2\alpha^3$，$cc_1c_2\alpha_1^3$，$cc_1c_2\alpha_2^3$ 諸項;其和爲 $cc_1c_2\Sigma\alpha^3$. 因 c,c_1,c_2 及 α，α_1，α_2 爲相似合之,故此乘積內亦有式 $\alpha\alpha_1\alpha_2\Sigma c$. 項 $cc_1c_2\alpha\alpha_1\alpha_2$ 凡遇三次,故有 $3cc_1c_2\alpha\alpha_1\alpha_2$.

於此乘積內,知 $\alpha^2\alpha_1$ 有係數 $p_c\equiv c^2c_1+c_1^2c_2+c_2^2c$，且 $\alpha_1^2\alpha_2$ 及 $\alpha_2^2\alpha$ 各有此同一係數。故 $q_c\,q_\alpha$ 爲乘積之一部,惟 $p_\alpha\equiv\alpha^2\alpha_1+\alpha_1^2\alpha_2+\alpha_2^2\alpha$. 同樣 $\alpha\alpha_1^2$,α_1

α_2^2, $\alpha_2\alpha^2$ 各有係數 $p_c' \equiv cc_1^2+c_1c_2^2+c_2c^2$. 故乘積內有 $p'_c\,p'_\alpha$, 惟 $q'_\alpha \equiv \alpha\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2^2+\alpha_2\alpha^2$. 茲已共求得屬於乘積 $\rho\rho_1\rho_2$ 之 27 項;此諸項組成全乘積。即

$$\rho\rho_1\rho_2 = cc_1c_2\Sigma\alpha^3+\alpha\alpha_1\alpha_2\Sigma c^3+3cc_1c_2\alpha\alpha_1\alpha_2+p_cp_\alpha+p'_cp'_\alpha.$$

因 $p_\alpha+p'_\alpha=\Sigma\alpha\cdot\Sigma\alpha\alpha_1-3\alpha\alpha_1\alpha_2=3a_3-a_1a_2\equiv q\alpha$,

$$p_\alpha-p'_\alpha=\alpha\alpha_1(\alpha-\alpha_1)+\alpha_2^2(\alpha-\alpha_1)-\alpha_2(\alpha^2-\alpha_1^2)$$

$$=(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)\equiv\sqrt{D_\alpha},$$

其中 D_α 爲所與三次方程式之判別式,故

$$2p_\alpha=q_\alpha+\sqrt{D_\alpha},$$

$$2p'_\alpha=q_\alpha-\sqrt{D_\alpha}.$$

同樣得

$$2p_c=q_c+\sqrt{D_c},$$

$$2p'_c=q'_c-\sqrt{D_c}.$$

故

$$\rho\rho_1\rho_2=cc_1c_2(3a_1a_2-a_1^3-3a_3)-a_3\Sigma c^3-3cc_1c_2a_3+\frac{1}{2}(q_cq_\alpha+\sqrt{D_cD_\alpha}).$$

茲已求得其根爲 ρ ρ_1, ρ_2 之三次方程式之係數,以所與三次方程式之係數表之。

當求其根爲 ρ', ρ'_1, ρ'_2 之三次方程式之係數,注意 $\Sigma\rho'=\Sigma\rho$, 及 $\Sigma\rho'\rho'_1=\Sigma\rho_1\rho_1$. 乘積 $\rho'\rho'_1\rho'_2$ 與 $\rho\rho_1\rho_2$ 僅於根號前之符號不同而已。故當二三次方程式之左邊相乘,則根號消滅,而得一六次方程式,其係數爲於

Ω內之數。此六次方程式爲所求之方程式$H(y)=0$，其根爲ρ, ρ_1, ρ_2, ρ', ρ_1', ρ_2'.

例題5. 求證當例題4之六次方程式內D_α之值爲完全平方時，則此六次方程式可化爲於Ω內之二三次方程式。故當此時，$g(y)=0$爲三次方程式。

例題6. 普通四次方程式之葛羅華分解式爲幾次？普通五次方程式之葛羅華分解式爲幾次？

例題7. 求方程式$x^5+x^4-x^3-x^2-2x-2=0$之根。由此諸根決定葛羅華範圍。證明$x^4-2x^2+9=0$爲葛羅華分解式。

146. 定理. 葛羅華分解式。爲標準方程式，而任何標準方程式自爲其葛羅華分解式。

因(1)分解式爲不可化，(2)其諸根皆在葛羅華範圍$\Omega_{(\rho)}$內，而ρ爲分解式之根(§145)，故爲於Ω內一根之函數(§139)，故此分解式爲標準方程式。

欲證明第二部分，命$f(x)=0$爲一標準方程式，而有根α, α_1, ⋯, α_{n-1}.則$\Omega_{(\alpha)}$爲一標準範圍(§141)；$f(x)=0$，因其爲不可化，故滿足§145內之性質(1)，且其諸根皆在$\Omega_{(\alpha)}$內，故爲於Ω內α之函數，而亦滿足性質(2)及(3)，故$f(x)=0$自爲其葛羅華分解式。

例題1. 求證§133例題5內之方程式，自爲其葛

羅華分解式。

例題 2. 求證 §145 例題 2 內之葛羅華分解式。滿足標準方程式之定義。

例題 3. 求 §133 例題 3 內之方程式葛羅華範圍。求 $\Omega_{(1)}$ 以原數 $\sqrt{6}+\sqrt{5}$ 爲其一根之不可化方程式。求證此方程式自爲其葛羅華分解式，且葛羅華範圍爲標準範圍。

147. 定理. 若 $f(x)=0$ 爲一 n 次標準方程式，而有一根 ρ 爲於標準範圍 $\Omega_{(\rho)}$ 內之原數，則轉換 $(\rho\rho_h)$ 使 ρ 之共軛數之每個，以其己組之某他數代之，然無二數以同一數代之者。

命 ρ 之共軛數爲 $\rho, \rho_1, \cdots, \rho_{n-1}$. 此諸數皆爲方程式 $f(x)=0$ 之根 (§138)。因 $\Omega_{(\rho)}$ 既假定爲標準範圍，故諸數含於其內。故得

$$\rho=\phi_0(\rho),\ \rho_1=\phi_1(\rho)\ \cdots,\ \rho_{n-1}=\phi_{n-1}(\rho) \qquad \mathrm{I}$$

其中 $\phi_0, \phi_1, \cdots$ 爲 Ω 內之函數。若於 $f(x)=0$ 之一根 $\phi_h(\rho)$ 內，以 ρ_h 代 ρ，則結果得 $\phi_h(\rho_h)$ 與 $\phi_h(\rho)$ 爲共軛，而爲 $f(x)=0$ 之他根 (§136)。故級數

$$\phi_0(\rho_h),\ \ \phi_1(\rho_h),\ \cdots,\ \phi_{n-1}(\rho_h) \qquad \mathrm{II}$$

內之數與 I 內之數全同，惟其所寫之次序相異而已。玆若能證明諸根 II 皆相異，則定理卽證明。

諸根 II 無相同者,蓋因設 $\phi_i(\rho_h)=\phi_b(\rho_h)$,即

$$\phi_i(\rho_h)-\phi_b(\rho_h)=0, \qquad \text{III}$$

則 III 爲以 ρ_h 爲其一根之方程式。然不可化方程式 $f(x)=0$ 亦有根 ρ_h.故 $f(x)=0$ 之根,必皆滿足 III;例如 ρ 必滿足之。

由是
$$\phi_i(\rho)-\phi_b(\rho)=0.$$

由 I,此方程式可寫爲 $\rho_i-\rho_h=0$,而此不能爲真,因 ρ 爲原數也。

例題 1. 於 §133 例題 5 內,已與一不可化方程式:其根 ρ, ρ_1, ρ_2, ρ_3, 於標準範圍 $\Omega_{(\rho)}$ 內,與 ρ 共軛。因 $\rho_1=\rho^2$, $\rho_2=\rho^3$, $\rho_3=\rho^4$. 故諸根可以級數

$$\rho,\ \rho^2,\ \rho^3,\ \rho^4 \qquad \text{II}$$

表之.若於 I 內,寫 ρ_3 代 ρ, 則得

$$\rho_3,\ \rho_3{}^2,\ \rho_3{}^3,\ \rho_3{}^4,$$

而 $\rho_3{}^2=\rho_2$, $\rho_3{}^3=\rho_1$, $\rho_3{}^4=\rho$. 故僅轉換 $(\rho\rho_3)$ 改變根之次序。

例題 2. 若於例題 1 內,行轉換 $(\rho\rho_2)$, 則根之次序如何?

148. 定理. 標準範圍 $\Omega_{(\rho)}$ 內之各轉換 $(\rho_h\rho_k)$, 等於諸轉換 $(\rho\rho_1)$, $(\rho\rho_2)$,…,$(\rho\rho_{n-1})$之某一。

因
$$\rho_h=\phi_h(\rho), \qquad \text{I}$$

而 $\phi_h(\rho)$ 爲標準方程式 $f(x)=0$ 之根。施轉換 $(\rho\rho_i)$ 於 $\phi_h(\rho)$，得 $\phi_h(\rho_i)$．此爲 $\phi_h(\rho)$ 之共軛數，故爲 $f(x)=0$ 之其他諸根之一，假定爲 ρ_k（§138），以此 $\rho_k=\phi_h(\rho_i)$　II

因轉換 $(\rho_h\rho_k)$ 變 ρ_h 爲 ρ_k，而轉換 $(\rho\rho_i)$ 變 $\phi_h(\rho)$ 爲 $\phi_h(\rho_i)$，故由方程式 I 及 II 得 $(\rho_h\rho_k)=(\rho\rho_i)$．

例題 1.　於§133例題5內，其四根滿足次諸關係：

$$\rho=\rho_2^2,$$

$$\rho^2=\rho_2^4,$$

$$\rho^3=\rho_2,$$

$$\rho^4=\rho_2^3.$$

此諸等式之左邊，施以轉換 $(\rho\rho_2)$，而右邊施以轉換 $(\rho_2\rho_3)$，幷證明 $(\rho\rho_2)=(\rho_2\rho_3)$．

例題 2.　於例題1，求等於 $(\rho_1\rho_3)$ 之轉換 $(\rho\rho_i)$。

例題 3.　於§136例題1求 i，使 $(\alpha\alpha_i)=(\alpha_1\alpha_2)$。

149.　範圍 $\Omega(\rho)$ 之換置. 因任何轉換 $(\rho_h\rho_k)=(\rho\rho_i)$，式中 i 爲 $0, 1, 2, \dots, (n-1)$ 諸數之一；由是於所與標準範圍 $\Omega(\rho)$ 內，無 n 個以上相異之轉換，此數與範圍之次數及其根決定此範圍之方程式 $f(x)=0$ 之次數相符合，因 $\Omega(\rho)$ 內之各數可表成 Ω 內 ρ 之函數，因各數施以 $(\rho\rho_i)$，則變爲範圍內與之共軛之他某數，且因無二數變爲同一數者（§147），由是各如

此之置換,施於標準範圍內之諸數,範圍之全體不變。

諸置換$(\rho\rho_i)$,其中i依次取0, 1, …, $(n-1)$諸值,謂之範圍$\Omega_{(\rho)}$之置換。

若$N=\phi(\rho)$受$(\rho\rho_i)$不變,即$N=\phi(\rho)=\phi(\rho_i)$則謂N容納置換$(\rho\rho_i)$. 注意容納(admits)與屬於(belongs to, 見§111二語之異點。於二者,受某羣G_1之置換,函數皆必不變,然於後語內,須有次加添之條件,即函數必不因G之不在於G_1內之各置換而變,G_1視爲G之分羣

若$N=\phi(\rho)$爲一原數,則此數與其他諸共軛數$\phi(\rho_1)$, $\phi(\rho_2)$, …, $\phi(\rho_{n-1})$之每個皆相異。故N不容納除全同置換1以外諸置換$(\rho\rho_i)$之一。

150. 定理. 標準範圍$\Omega_{(\rho)}$之諸置換,成一n級之羣。

試憶置換羣之定義(§95),則祇須證明於此n相異轉換,任意二者假定$(\rho\rho_i)$及$(\rho\rho_h)$之積,等於此組內諸轉換之一,假定$(\rho\rho_k)$。

由§148知$(\rho\rho_i)=(\rho_h\rho_k)$. 兩邊以$(\rho\rho_h)$乘之,得

$$(\rho\rho_h)(\rho\rho_i)=(\rho\rho_h)(\rho_h\rho_k)=(\rho\rho_k);$$

即任意二置換$(\rho\rho_h)$及$(\rho\rho_i)$之積,爲一屬於該組之置換。

151. 定理. 若方程式$f(x)=0$生出葛羅華範圍$\Omega_{(\rho)}$，則該範圍之諸置換$(\rho\rho_i)$之羣,於方程式之根內,有一置換s_i同級之羣,與之對應,範圍內之任何二置換$(\rho\rho_i)$, $(\rho\rho_j)$之積,有$f(x)=0$之根之二對應置換s_i, s_j之積與之對應。

命$f(x)=0$之根為α, α_1, ⋯, α_{n-1},此諸根皆互相異。因此諸根為m次之葛羅華範圍$\Omega_{(\alpha,\cdots,\alpha_{n-1})}=\Omega_{(\rho)}$內之數,由是

$$\rho=\Phi[\alpha,\cdots,\alpha_s,\cdots,\alpha_{n-1}], \qquad \text{I}$$

且$\alpha_s=\phi_s(\rho)$,式中s可為0, 1, ⋯, $(n-1)$任意之值。由I,代入諸α之值,得

$$\rho=\Phi[\phi(\rho),\cdots,\phi_s(\rho),\cdots\phi_{n-1}(\rho)]. \qquad \text{II}$$

今因ρ為葛羅華範圍$\Omega_{(\rho)}$內之原數(§144),故為葛羅華分解式$g(y)=0$之根,其他諸根,為ρ之共軛數,即ρ_1, ⋯, ρ_{m-1}。視II為有根ρ之方程式,則不可化方程式$g(y)=0$與方程式II有一公根ρ,故ρ之諸共軛數為二方程式之公根(§126)。以ρ之任何共軛數ρ_i代ρ,則得

$$\rho_i=\Phi[\phi(\rho_i),\cdots,\phi_s(\rho_i),\cdots,\phi_{n-1}[\rho_i)]. \qquad \text{III}$$

於II內以ρ_j代ρ,而i與j相異,得

$$\rho_j=\Phi[\phi(\rho_j),\cdots,\phi_s(\rho_j),\cdots,\phi_{n-1}(\rho_j)]. \qquad \text{IV}$$

因 α_s 爲 $f(x)=0$ 之根,而 $\alpha_s=\phi_s(\rho)$, 則得方程式 $f[\phi_s(\rho)]=0$,而 ρ 爲其一根。然 ρ 亦爲不可化方程式 $g(y)=0$ 之根;故(§126)得 $f[\phi_s(\rho_i)]=0$;卽 $\phi_s(\rho_i)$ 爲方程式 $f(x)=0$ 之諸根 α_i 之某一。同理 $\phi_s(\rho_j)$ 爲此諸根之某一。

因 $\phi_s(\rho_i)$ 及 $\phi_s(\rho_j)$ 各表 $f(x)=0$ 之某根,故知 III 及 IV 之各括號內各爲根 α, α_1, …, α_{n-1},之某排列。

此二排列不全同;因若全同,則不論 s 爲何值, $\phi_s(\rho_i)=\phi_s(\rho_j)$; III 及 IV 之右邊相等,故左邊須相等;卽 $\rho_i=\rho_j$. 然此爲不能,因其爲不可化方程式 $g(y)=0$ 之根,故不能相等。由是對於任意二相異置換$(\rho\rho_i)$, $(\rho\rho_j)$,於諸 α 內有二相異置換與之對應。

由此得另外之結論,卽因諸 α 屬於範圍 $\Omega_{(\rho)}$,而全範圍僅有 m 相異置換,故於諸內 α 適有 m 相異置換。故諸置換 $(\rho\rho_i)$ 與諸根 α 之置換之間,有一"一一對應"。

今乘積 $(\rho\rho_i)(\rho\rho_j)$ 等於羣內某他置換$(\rho\rho_h)$。若$(\rho\rho_i)$, $(\rho\rho_j)$, $(\rho\rho_h)$,於諸根內,各有 s_i, s_j, s_h 與之對應,且若

$$(\rho\rho_i)(\rho\rho_j)=(\rho\rho_h),$$

則亦得 $s_is_j=s_h$.

例題 1.　四次方程式 $x^4-12x^3+12x^2+176x-96=0$

之根爲

$$\alpha=2+2\sqrt{7},\qquad \alpha_1=2-2\sqrt{7},$$

$$\alpha_2=4+2\sqrt{3},\qquad \alpha_3=4-2\sqrt{3}.$$

葛羅華範圍 $\Omega_{(\rho)}$ 爲由添加 $\sqrt{7}+\sqrt{3}$ 於 $\Omega_{(1)}$ 而得者。因

$$\rho=\sqrt{7}+\sqrt{3},\qquad \rho_1=\sqrt{7}-\sqrt{3},$$

$$\rho_2=-\sqrt{7}+\sqrt{3},\qquad \rho_3=-\sqrt{7}-\sqrt{3}.$$

由視察得

$$\alpha=\phi(\rho)\equiv 2+\tfrac{1}{4}(24\rho-\rho^3),$$

$$\alpha_1=\phi_1(\rho)\equiv 2-\tfrac{1}{4}(24\rho-\rho^3),$$

$$\alpha_2=\phi_2(\rho)\equiv 4-\tfrac{1}{4}(16\rho-\rho^3),$$

$$\alpha_3=\phi_3(\rho)\equiv 4+\tfrac{1}{4}(16\rho-\rho^3).$$

依次以 ρ, ρ_1, ρ_2, ρ_3, 代 ρ, 則得次表:

$$\phi(\rho)=\alpha,\quad \phi_1(\rho)=\alpha_1,\quad \phi_2(\rho)=\alpha_2,\quad \phi_3(\rho)=\alpha_3. \qquad \mathrm{I}$$

$$\phi(\rho_1)=\alpha,\quad \phi_1(\rho_1)=\alpha_1,\quad \phi_2(\rho_1)=\alpha_3,\quad \phi_3(\rho_1)=\alpha_2. \qquad \mathrm{II}$$

$$\phi(\rho_2)=\alpha_1,\quad \phi_1(\rho_2)=\alpha,\quad \phi_2(\rho_2)=\alpha_2\quad \phi_3(\rho_2)=\alpha_3. \qquad \mathrm{III}$$

$$\phi(\rho_3)=\alpha_1,\quad \phi_1(\rho_3)=\alpha,\quad \phi_2(\rho_3)=\alpha_3,\quad \phi_3(\rho_3)=\alpha_2. \qquad \mathrm{IV}$$

I 行內 $\phi(\rho)$, $\phi_1(\rho)$, $\phi_2(\rho)$, $\phi_3(\rho)$, 施以轉換 $(\rho\rho_1)$, 則得 II 行。I 行內排列 α, α_1, α_2, α_3 於 II 行內變爲排列 α, α_1, α_3, α_2, 故 $(\rho\rho_1)$ 與 $(\alpha_2\alpha_3)$ 對應。如是,對於範圍之置換,即

$$1,\quad (\rho\rho_1),\quad (\rho\rho_2),\quad (\rho\rho_3), \qquad \mathrm{V}$$

於諸根內各有置換

$$1,\ (\alpha_2\alpha_3),\ (\alpha\alpha_1),\ (\alpha\alpha_1)(\alpha_2\alpha_3). \qquad \text{VI}$$

與之對應。後者易知其成一羣。羣之互相關連，如此二者，謂之同形羣(Isomorphic groups)。羣VI謂之所與四次方程式之葛羅華羣。

例題 2. 於§104所舉之羣之表內，求例題1之羣VI。

例題 3. 於例題1，$\phi_2(\rho)=\alpha_2$，及 $\phi_2(\rho_1)=\phi_3(\rho)=\phi_3(\rho_2)=\phi_2(\rho_3)=\alpha_3$，求證於置換之組V內，$(\rho\rho_1)(\rho\rho_2)=(\rho\rho_3)$。盡作二轉換之積，證明V實為一羣。

例題 4. 三次方程式 $x^3+3x^2+x-1=0$ 之根為 $\alpha=-1$，$\alpha_1=-1+\sqrt{2}$，$\alpha_2=-1-\sqrt{2}$，及葛羅華範圍為 $\Omega_{(1,\sqrt{2})}$，而 $\rho=\sqrt{2}$，$\rho_1=-\sqrt{2}$。求二形之葛羅華羣。

152. Ω 內 $f(x)=0$ 之葛羅華羣. 在方程式 $f(x)=0$ 之根 $\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 內，與此方程式之葛羅華範圍 $\Omega_{(\rho)}$ 之羣對應(同形)之置換羣，謂之此方程式之葛羅華羣(Galois group)。葛羅華羣此名詞，實可公用之於二同形羣。因二(祇二)同形羣，抽象考之，為全同，因對於一羣之各置換，有他羣之一惟一置換與之對應，反言之亦眞，且因對於一羣內任何二置換之積，於他羣內有二對應置換之積與之對應。為便

剎計，葛羅華羣之名詞，將限於以根爲原素之置換羣。

例題 1. 求證 $G_2^{(4)}$ 與 $G_2^{(2)}$ 爲同形羣；又 $G_6^{(5)}$ 與 $G_6^{(3)}$ 爲同形羣。

例題 2. 求證 $G_6^{(3)}$ 僅與

$$G\equiv 1,\ (\alpha_1\alpha_2)(\alpha_3\alpha_6)(\alpha_4\alpha_5),\ (\alpha_1\alpha_3)(\alpha_2\alpha_5)(\alpha_4\alpha_6),\ (\alpha_1\alpha_4)(\alpha_2\alpha_6)(\alpha_3\alpha_5),\ (\alpha_1\alpha_5\alpha_6)(\alpha_2\alpha_3\alpha_4),\ (\alpha_1\alpha_6\alpha_5)(\alpha_2\alpha_4\alpha_3)$$

爲同形。

153. 定理.
Ω 內等於 Ω 內一數之各函數 $f(\alpha,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})$ 容納 $f(x)=0$ 之葛羅華羣之各置換。

因 $\Omega_{(\alpha,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})}=\Omega_{(\rho)}$，各 α_i 爲 Ω 內 ρ 之函數，而 $i=0,\ 1,\ \cdots,(n-1)$。故得

$$f(\alpha,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})=\theta(\rho)=N, \qquad \text{I}$$

式中 f 及 θ 爲 Ω 內之函數。因 $\theta(\rho)-N=0$，而此方程式於 Ω 內有一根 ρ 滿足之，故屬於葛羅華分解式 $g(y)=0$ 之諸根皆滿足之(§126)。即 $\theta(\rho_i)=N$. 然由 I，施轉換 $(\rho\rho_i)$ 於 $\theta(\rho)$ 與施葛羅華羣之對應置換於 $f(\alpha,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})$ 得相同之結果。因 $\theta(\rho)$ 不變，故 $f(\alpha,\cdots,\alpha_{n-1})$ 不變。

154. 定理.
Ω 內容納葛羅華羣之諸置換之

各函數$f(\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})$,為$\Omega$內之數。

於§153所與之方程式$f(\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})=\theta(\rho)$內,由假設$f(\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})$容納葛羅華羣之置換;故$\theta(\rho)$容納葛羅華範圍$\Omega_{(\rho)}$之對應轉換。即$\theta(\rho)$,既為不變,故等於其諸共軛數$\theta(\rho_i)$。

然$\theta(\rho)$為範圍$\Omega_{(\rho)}$內之數,而為Ω內一n次方程式之根,故其他諸根,為此數之其餘之共軛數(§136)。因此諸根皆相等,故其方程式為$\{x-\theta(\rho)\}^n=0$。故$x-\theta(\rho)=0$為一Ω內之方程式。故$\theta(\rho)$為Ω內之數,而其相等之數$f(\alpha, \cdots, \alpha_{n-1})$亦為$\Omega$內之數。

例題1.　於§151例題1,葛羅華羣為$1, (\alpha_2\alpha_3), (\alpha\alpha_1), (\alpha\alpha_1)(\alpha_2\alpha_3)$. $f(x)=0$之根為$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. 則$\alpha^2+4\alpha_1+10$為於$\Omega_{(1)}$內$f(x)=0$之二根之函數.此函數之值為50,為$\Omega_{(1)}$內之數;即屬於範圍$\Omega_{(1)}$.施置換$(\alpha\alpha_1)$,得$\alpha_1^2+4\alpha+10$,而仍等於50。其他置換亦不至影響此函數。此可說明§153。

例題2.　用例題1之羣及根,以方程式$(\alpha^2+4\alpha_1-24)^2(\alpha_2^2+8\alpha_3-60)^3=0$說明§153。此處方程式之左邊為所用之函數,而於$\Omega$內之數為0。

例題3.　$f(x)\equiv x^4-x^2-2=0$之葛羅華範圍為$\Omega_{(\rho)}$惟$\rho=\sqrt{2}+i$, $\rho_1=\sqrt{2}-i$, $\rho_2=-\sqrt{2}+i$, $\rho_3=-\sqrt{2}-i$.　(1)

表 $f(x)=0$ 之各根爲 ρ 之函數。(2)求此範圍之羣。(3)求 $f(x)=0$ 之葛羅華羣。

例題 4. 於例題 3，證明 $f(\alpha,\cdots,\alpha_{n-1})\equiv\alpha^3+\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3$ 容納葛羅華羣之諸置換；由是由實行置換，證明 $f(\alpha,\cdots,\alpha_{n-1})$ 爲 $\Omega_{(1)}$ 內之數。此可以說明§154。

155. 定理 當(A) Ω 內根 α_i 之各函數爲 Ω 內之數者容納 G 之置換，(B) Ω 內根 α_i 之各函數容納 G 之置換者爲 Ω 內之數，則羣 G 爲範圍 Ω 內方程式 $f(x)=0$ 之葛羅華羣。

先證 G 之各置換屬於葛羅華羣。

如於§142，於 Ω 內選擇係數 $c, c_1, \cdots, c_{n-1}$ 適宜之值，使於關係

$$c\alpha+c_1\alpha_1+\cdots+c_{n-1}\alpha_{n-1}=\rho \qquad \text{I}$$

內對於根 $\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 之各排列，ρ 得相異之值。ρ 爲葛羅華分解式 $g(y)=0$ 之根。於 $g(\rho)=0$，ρ 以其在 I 內之值代之，得 Ω 內 $\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 之函數，而等於零。若此函數滿足假設(A)，則容納已知羣 G 之任何置換 s。然由 I，此置換變 ρ 爲某相異值 ρ_a，故 $g(\rho_a)=0$，而 ρ_a 爲 ρ 之共軛數。然相當於 s 之置換 $(\rho\rho_a)$ 爲葛羅華範圍之轉換；故 s 屬於葛羅華羣，而 G 爲葛羅華羣或其分羣之一。

次證葛羅華羣即爲 G 自身。

設 G 含 j 個置換，卽

$$s,\ \cdots,\ s_h,\ s_{j-1}, \qquad \text{II}$$

則施此諸置換之每個於 I 內之函數 ρ，得次諸值，

$$\rho,\ \cdots,\ \rho_i,\ \rho_{j-1}. \qquad \text{III}$$

若施II內任何置換 s_h 於 III 內任何值 ρ_i，其結果 ρ'_i 必與直接施 $s_i\ s_h$ 於 ρ 者同。然由羣之定義，$s_i\ s_h$ 必爲 II 內之一置換；故 ρ_i' 必爲 III 內之一值。如是，施 s_h 於 III 之各值，僅使生III內諸值之一排列，此乃甚明。故以關係

$$g'(y)\equiv(y-\rho)(y-\rho_1)\cdots(y-\rho_{j-1})$$

決定之之函數 $g'(y)$，y 之係數經 G 之置換皆各不變。若應用假設(B)於此各係數，則各爲 Ω 內之數。故 $g'(y)$ 爲 Ω 內 y 之函數。

今 $g'(y)=0$ 與葛羅華分解式 $g(y)=0$ 有公根 ρ，故 (§126) $g'(y)=0$ 之次數不能小於 $g(y)=0$ 之次數；卽 G 之級數 j 不能小於葛羅華羣之級數。故此二羣爲同一。

156. 定理　方程式爲可化或不可化，因其葛羅華羣爲定換或任換而定。

命　$$f(x)=\mathrm{F}(x)\cdot h(x)=0,$$

其中 $f(x)=0$ 爲不可化，而 $f(x)$，$\mathrm{F}(x)$，$h(x)$ 爲 Ω 內之函

數。命 $F(x)=0$ 之根爲

$$\alpha,\ \alpha_1, \cdots, \alpha_s, \cdots, \alpha_{\nu-1}. \qquad \text{I}$$

此諸根亦爲 $f(x)=0$ 之根，其餘諸根如次：

$$\alpha_\nu, \cdots, \alpha_j, \alpha_{n-1}. \qquad \text{II}$$

於方程式 $F(x)=0$，I 組之根 α_i 不能以 II 組之根 α_j 代之，此爲甚明，因 α_j 不爲 $F(x)=0$ 之根故也。但 $F(x)=0$ 之 x 之係數容納 $f(x)=0$ 之葛羅華羣之諸置換(§153)。故此羣不能有以 α_j 代 α_i 之置換，而此羣爲定換羣(§102)。

反之，若羣 P 爲定換，而僅於 II 內諸根自爲排列，如此 α_i 不致以 ρ 代之，則乘積

$$F(x) \equiv (x-\alpha)(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{\nu-1})$$

容納 P 之諸置換，故爲 Ω 內 x 之函數。故 $F(x)$ 爲於 Ω 內 $f(x)$ 之因數，而 $f(x)=0$ 爲可化。

例題 1.　證明 §151 例題 1 及 4 之葛羅華羣爲定換，以說明此定理。

157.　定理. 一非原範圍有一非原羣。

命 $f(x)=0$ 有 $\alpha,\ \alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_{n-1}$ 諸根，爲不可化.則其葛羅華羣 P 爲任換羣(§156)。命範圍 $\Omega_{(\alpha)}$ 爲非原羣；卽命其有非全爲 Ω 內之數之非原數(§135)。若 $N=\phi(\alpha)$ 爲一非原數，則其共軛數可分成 n_1 組，每組有

n_2個相等之數,所以$n=n_1\cdot n_2$(§138)。由是得次之$f(x)=0$之根之n_1組,每組內有n_2根:

$$\left.\begin{array}{l} A=\alpha,\alpha_1,\cdots,\alpha_{\frac{n}{2}-1}, \\ B=\beta,\beta_1,\cdots\cdots, \beta_{\frac{n}{2}-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ S=\sigma,\ \sigma_1,\ \cdots,\ \sigma_{\frac{n}{2}-1}, \end{array}\right\} \qquad \text{I}$$

所以

$$\left.\begin{array}{l} N=\phi(\alpha)=\phi(\alpha_1)=\cdots=\phi(\alpha_{\frac{n}{2}-1}), \\ N_1=\phi(\beta)=\phi(\beta_1)=\cdots=\phi(\beta_{\frac{n}{2}-1}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ N_{n-1}=\phi(\sigma)=\phi(\sigma_1)=\cdots=\phi(\sigma_{\frac{n}{2}-1}) \end{array}\right\} \qquad \text{II}$$

爲N之共軛數。

由II知$f(x)=0$之葛羅華羣P如是構成,卽A, B, ..., S每組之根於其組內自爲交換及A, B, ..., S諸組全體交換,決不能同組之二根以屬於異組之二根代之者。故P爲非原羣(§103)。

例題 1. 求證由(0123)之諸乘冪而成之羣爲非原羣。

例題 2. 求證其級數非爲素數之任何循環羣爲非原羣。

158. 定理. n次對稱羣爲普通n次方程式$f(x)=0$於$f(x)$之係數所決定之範圍Ω內之葛羅華

羣。

普通方程式$f(x)=0$，其諸根間，並不假定有關係存在；卽諸根作爲自變數。

在諸種情形，Ω內根之對稱函數，等於Ω內一數(§70)。若承認對於普通方程式，此爲於Ω內有此性質之惟一函數，則§155之條件A僅要求

諸根之各對稱函數須容納對稱羣之置換，

而條件B要求

各如此之對稱函數須等於Ω內之某數。

此二陳述皆眞。故對稱羣爲普通方程式之葛羅華羣。

159. 葛羅華羣之實際決定法. 於§151之例題1及4，借助於方程式之根，以決定在方程式之根所定之範圍內簡易方程式之葛羅華羣。當諸根爲未知，P可由作葛羅華分解式以得之。然葛羅華分解式不易作得。在實際上，葛羅華羣，由將行推斷之定理，較易決定。當$f(x)=0$爲不可化葛羅華羣之次數等於方程式之次數，此宜加記憶。當$f(x)=0$爲可化，而諸因數爲已知；考究由$f(x)$之不可化因數所得之諸方程式，是爲最易。玆進而證明次定理，其中M爲於Ω內根$\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$之任何函數，而

屬於對稱羣之分羣Q:

若函數M為Ω內之數,則對於範圍Ω之葛羅華羣為Q或其分羣之一。

因由假設,M為於Ω內根$\alpha, \alpha_1 \cdots, \alpha_{n-1}$之函數,而為$\Omega$內之數,由是由§153, M容納葛羅華羣之各置換。由定義,M屬於Q,卽根之置換,除Q內之置換外,無能使M不變其值者。故葛羅華羣為Q或其分羣之一。

例題1. 對於範圍$\Omega_{(\alpha,\cdots,\alpha_{n-1})}$, $f(x=0)$之葛羅華羣為1。

命$Q=1$, 且$M=c\alpha+c_1\alpha_1+\cdots+c_{n-1}\alpha_{n-1}$為於$\Omega$內諸根之函數,對於根之每一交換,此函數改變其值。則M屬於Q,而為所與範圍內之數。故由上定理,對於$\Omega_{(\alpha,\cdots,\alpha_{n-1})}$, $P=1$.

例題2. 求三次方程式$x^3+3x^2-6x+1=0$之葛羅華羣.

判別式(§35)知為27^2. 由§77, $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$之交代函數等於判別式之平方根。此函數容納交代羣。參看§100例題1。取$M=(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)=27$, $Q=G_3^{(3)}$及$\Omega=\Omega_{(1)}$. 吾人知M不因$G_3^{(3)}$之置換而變其值,然因$G_6^{(3)}$之其餘諸置換而變其代數符號。故M屬

於 $G_3^{(3)}$; M 爲 $\Omega_{(1)}$ 內之數。故所求之羣爲 $G_3^{(3)}$ 或羣 1。由 §54 知方程式有無理根,故對於範圍 $\Omega_{(1)}$, P 不能爲 1,而必爲 $G_3^{(3)}$.

例題 3.　求牛頓之三次方程式 $x^3-2x-5=0$ 之葛羅華羣。

因判別式不爲一完全平方,故對於 $\Omega_{(1)}$, $P=G_6^{(3)}$.

例題 4.　求證對於三次方程式

$$x^3-3(c^2+c+1)x+(c^2+c+1)(2c+1)=0$$

及範圍 $\Omega_{(1,c)}$, $P=G_3^{(3)}$。

例題 5.　求證 $G_4^{(4)}$ II 爲對於範圍 $\Omega_{(1)}$, $x^4+1=0$ 之葛羅華羣。

由 §51,判別式爲 256,爲一完全平方。故屬於 $G_{12}^{(4)}$ 之交代函數,爲一 $\Omega_{(1)}$ 內之數。所求之羣爲 $G_{12}^{(4)}$ 或其一分羣。此羣不能爲全同羣,因諸根不爲有理數故也;又此羣不能爲 $G_2^{(4)}$,因此爲定換羣,然 x^4+1 爲不可化(§156)故也。故此羣爲 $G_{12}^{(4)}$ 或 $G_4^{(4)}$ II。吾人知 $y=(\alpha-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)$ 不因 $G_4^{(4)}$ II 而變,然因不在 $G_4^{(4)}$ II 內之諸置換而變其形。分解三次方程式,有一根 y, 爲 $y^3-12y+16=0$ (§71 例題 17)。因此分解式之根爲有理數,故 y 爲 $\Omega_{(1)}$ 內之數。因此諸根爲相異,故 y 受不在 $G_4^{(4)}$ II 內之置換,不僅其形變,其值亦變。故 y

屬於 $G_4^{(4)}$II，而可取 $y=M$. 故 $G_4^{(4)}$II 爲所求之羣。

例題 6. 求對於方程式 $(x^2+2)(x^2+x+1)=0$, $\Omega_{(1)}$ 之 P.

$x^2+2=0$ 對於 $\Omega_{(1)}$ 之葛羅華羣爲 $P=1,(\alpha\alpha_1)$。方程式 $x^2+x+1=0$ 對於 $\Omega_{(1)}$ 得 $P'=1$, $(\alpha_2\alpha_3)$。若以 P' 之置換乘 P 之置換,得定換羣。$1,(\alpha\alpha_1),(\alpha_2\alpha_3),(\alpha\alpha_1)(\alpha_2\alpha_3)\equiv G_4^{(4)}$ III, 爲對於範圍 $\Omega_{(1)}$ 所求之羣。參看 §104 例題 6。

例題 7. 對於範圍 $\Omega_{(1)}$, $x^3-2x-5=0$ 有 $P=G_6^{(3)}$. 求證對於範圍 $\Omega_{(1\sqrt{11})}$, $P=G_3^{(3)}$.

例題 8. 求下列各方程式對於所與範圍之葛羅華羣:

(*a*) $x^2+5x+6=0$, $\Omega_{(1)}$.

(*b*) $x^2+5x+5=0$, $\Omega_{(1)}$.

(*c*) $x^4+10=0$, $\Omega_{(1,\sqrt{10})}$.

(*d*) $(x+1)^3=0$, $\Omega_{(1)}$.

(*e*) $x^3-21x+35=0$, $\Omega_{(1)}$.

(*f*) $x^3-3(3+\sqrt{2})x+7(1+\sqrt{2})=0$, $\Omega_{(1,\sqrt{2})}$.

(*g*) $x^4+x^3+x^2+x+1=0$, $\Omega_{(1)}$.

(*h*) $(x^2+5)(x^3-21x+35)=0$, $\Omega_{(1)}$, 又 $\Omega_{(1,\sqrt{5})}$. 參看 §104 例題 7。

(*i*) $x^6-1=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)=0$, $\Omega_{(1)}$.

(*j*) $x^{12}-1=0$, $\Omega_{(1)}$.

(*k*) $x^4+(a+b)x^2+ab=0$, $\Omega_{(1,a,b)}$.

(*l*) $x^3-2=0$, $\Omega_{(1)}$.

(*m*) $x^4+4x^3+6x^2+4x+2=0$ 對於 $\Omega_{(1)}$.

例題 9. 求其葛羅華羣爲 $G_8^{(4)}$ 之四次方程式之普通式。

假定
$$(\alpha-\alpha_2)^2+(\alpha_1-\alpha_3)^2=8c,$$
$$[(\alpha-\alpha_2)^2-(\alpha_1-\alpha_3)^2]^2=64b,$$
$$[(\alpha-\alpha_2)^2-[\alpha_1-\alpha_3)^2][\alpha-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3]=8\sqrt{b}\cdot 4d\sqrt{b},$$
式中 b, c, d 爲有理數，而 b 不爲完全平方。此等假定爲次事實所證實，卽各方程式之左邊爲一屬於 $G_8^{(4)}$ 之數函，§154。故得
$$(\alpha-\alpha_2)^2=4(c+\sqrt{b}),\quad (\alpha-\alpha_3)^2=4(c-\sqrt{b}),$$
$$\alpha-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=4d\sqrt{b},$$
$$\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=4b_1.$$
故 $\alpha=b_1+d\sqrt{b}+\sqrt{c+\sqrt{b}}$, $\alpha_2=b_1+d\sqrt{b}-\sqrt{c+\sqrt{b}}$,
$$\alpha_1=b_1-d\sqrt{b}+\sqrt{c+\sqrt{b}},\quad \alpha_3=b_1-d\sqrt{b}-\sqrt{c+\sqrt{b}}.$$
各根減小 b_1，而作四次方程式，得結果
$$y^4-2(bd^2+c)y^2-4bdy+(bd^2-c)^2-b=0.$$

例題 10. 其葛羅華羣爲 $G_4^{(4)}$ III 之四次方程式爲不可化方程式

$$x^4-2(c^2+d)x^2-4cex+(c^2-d+e)(c^2-d-e)=0,$$

式中$(d+e)$及$(d-e)$不爲完全平方。

假定
$$\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4=4c,$$
$$(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\alpha_3-\alpha_4)^2=8d,$$
$$(\alpha_1-\alpha_2)^2-(\alpha_3-\alpha_4)^2=8e$$

以誘導之。

例題 11. 求有葛羅華羣 $G_4^{(4)}$ I 之四次方程式之普通式。

用函數
$$(\alpha_1-i\alpha_2-\alpha_3+i\alpha_4)^4,$$
$$(\alpha_1+i\alpha_2-\alpha_3-i\alpha_4)^4,$$
$$(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4)^2,$$
$$(\alpha_1-i\alpha_2-\alpha_3+i\alpha_4)(\alpha_1+i\alpha_2-\alpha_3-i\alpha_4),$$
$$(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_1-i\alpha_2-\alpha_3+i\alpha_4)^2,$$

且命式內爲四次方程式之係數之文字,無其他之條件,惟此諸文字須爲有理數,且諸文字之一,須不爲完全四次方。參看 §176 例題 3。

例題 12. 若§71例題 11 內之三次方程式之根皆爲有理根,求證有根 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$,之四次方程式之葛羅華羣爲 $G_4^{(4)}$II 或其分羣之一。

試考　　$(\alpha\beta+\gamma\delta)-(\alpha\gamma+\beta\delta)$.

例題 13.　乘積

$(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4)$

為 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 之對稱函數。首二因數之積之平方屬於 $G_4^{(4)}$II。求以 $G_4^{(4)}$ 為其葛羅華羣之普通四次方程式,故可假定諸因數各等於 $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, $d\sqrt{bc}$, 惟 b, c, d 為有理數,而 bc 不為完全平方。

所求之方程式除去其第二項為

$$y^4-2(b+c+bcd^2)y^2-8bcdy+(b-c-bcd^2)^2-4bc^2d^2=0.$$

例題 14.　當 b 及 c 僅受 b^2-c 不為 $\Omega_{(1,b,c)}$ 內一數之平方之條件,求證 $x^4+2bx^2+c=0$ 有羣 $G_8^{(4)}$。

例題 15.　當 c 為 $\Omega_{(1,b)}$ 內一數之平方,而 b^2-c 則不然,求證 $x^4+2bx+c=0$ 有羣 $G_4^{(4)}$II。

例題 16.　若 s 為 $\Omega_{(1)}$ 之任何數,求證 $x^4-8sx^2+8s^2-8s^4=2$ 有羣 $G_4^{(4)}$I。參看例題 11。

第十五章

由添加化葛羅華分解式

160. M之定義. 命有根 $\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 之方程式$f(x)=0$之葛羅華羣 P (p級)有 q 級之分羣 Q,而$p=qj$, j 爲 Q 低於 P 之指數,爲以下諸章內之定理,茲殆如 §159 以定 M.

命 M 爲 Ω 內根 $\alpha, \cdots, \alpha_{n-1}$ 之任何函數,而屬於 P 之分羣 Q(§111)。

161. 定理. 施 M 以 P 之諸置換,則得 j 個相異 M 之值,而爲 Ω 內 j 次不可化方程式之根。

若 t 爲葛羅華羣 P 之置換,而不在分羣 Q 內,又若 $s, s_1, \cdots, s_{q-1}$ 爲 Q 之置換,則由羣之定義,

$$st, \quad s_1t, \quad \cdots, \quad s_{q-1}t, \qquad \text{I}$$

皆爲 P 之置換。然 I 內之諸置換 s_1t 當施於 M,皆生同一效果,因在任何情形,當施乘積 s_rt,可先施以 s_r,而後施 t 於所得之結果。由假設,施 s_r 於 M,無論如何,不生變化,故 s_rt 常僅生僅由 t 之結果。

由假設,因 t 不在分羣 Q 內,施 t 於 M,得一新值 M_1。

由 §106, 知羣 P 內所有置換 I 之組數,與 p 含 q 之數同;卽 j 組。任一組之置換,施於 M,皆得同一 M

之值,然無二組生同一之值。

因設 $s_r t_i$ 及 $s_r t_k$ 生同一 M 之值;卽設

$$M_i = M \text{ 施以 } s_r t_i$$

及 $$M_i = M \text{ 施以 } s_r t_k,$$

則施 $(s_r t_i)^{-1}$ 於 M_i,得 $M = M$ 施以 $(s_r t_k)(s_r t_i)^{-1}$.

卽 $(s_r t_k)(s_r t_i)^{-1}$ 爲一含於羣 Q 內之置換,而設等於 s_m. 若 $s_m \equiv (s_r t_k)(s_r t_i)^{-1}$, 施以 $s_r t_i$, 則得

$$s_r t_k = s_m s_r t_i = s'_m t_i,$$

其中 s'_m 爲 Q 內之置換。因 $s_r t_k$ 及 $s_m' t_i$,施於 M 之效果,爲 t_k 及 t_i 之效果,由是 $t_k = t_i$, 而此與假設相反。故 $s_r t_i$ 及 $s_r t_k$,當施於 M,必生不同之值。

故知函數 $\phi(y) \equiv (y-M)(y-M_1)\cdots(y-M_{j-1})$,受 P 之任何置換,不變。

$\phi(y)$內由行所示之乘法所得 y 之係數,爲 $M, M_1, \cdots, M_{n-1}$ 之對稱函數,故由 M 之定義,爲於 Ω 內,$f(x)=0$ 之根之函數,爲容納葛羅華羣 P 之置換之函數。故此等係數爲 Ω 內之數(§154)。

欲證 $\phi(y)$ 爲不可化,假定 $\theta(y)$爲 Ω 內 y 之任意函數,而當 $y=M$ 時等於零。則 $\theta(M)=0$。因 $\theta(M)$ 必容納葛羅華羣之諸置換 (§153),故得 $\theta(M_i)=0$, 其中 i 可有任何值 0, 1, 2, ⋯, $(j-1)$. 故 $\theta(y)$ 不能低於 j 次。因

$\phi(y)=0$ 之諸根 $M, M_1, \cdots, M_{j-1}$ 皆滿足 $\theta(y)=0$，故 $\theta(y)$ 可以 $\phi(y)$ 整除之。

若 $\phi(y)$ 爲可化，則當 $y=M$，其因數之一必等於零，因 $\theta(y)$ 可爲 Ω 內 $y=M$ 時等於零之任意函數，命 $\theta(y)$ 爲此因數。則此因數可全乘積 $\phi(y)$ 整除之，而此爲不能。故 $\phi(y)$ 爲不可化。

162. 葛羅華所推廣之拉格蘭定理 葛羅華羣內容納羣 G 之置換之任何數，含於範圍 $\Omega_{(M)}$ 內。

於 §161，已知 M 爲一屬於 Q 之函數，當施以 P 之置換，取次諸異值：

$$M, M_1, \cdots, M_{j-1}. \qquad \mathrm{I}$$

命 M' 爲 Ω 內根 $\alpha, \cdots, \alpha_{n-1}$ 之任意函數，而此函數容許 Q 之置換。命 P 之變 M 爲 M_i 之任何置換變 M' 爲 M_i'，則得次諸值與 I 內諸值相當：

$$M', M_1', \cdots, M_{j-1}. \qquad \mathrm{II}$$

此諸值不必相異。

故當數之級數 I 及 II 施以 P 之一置換，則在各級數內有一排列，且若 M_i 變爲 M_r，則 M'_i 變爲 M'_r。

如 §161 內以定 $\phi(y)$，試考函數

$$\Phi(y)\equiv\phi(y)\left(\frac{M'}{y-M}+\frac{M_1'}{y-M_1}+\cdots+\frac{M'_{j-1}}{y-M_{j-1}}\right),$$

此為 y 之 $j-1$ 次整函數。此函數受 P 之諸置換皆不變。故此為 Ω 內之函數。取 $y=\mathrm{M}$。試憶 $\phi(y)$ 無等根，得（如 §142 所推論）

$$\mathrm{M}'=\frac{\Phi(\mathrm{M})}{\phi'(\mathrm{M})},$$

式中 ϕ' 表示 ϕ 之關於 y 第一微分係數。故 M' 為範圍 $\Omega_{(\mathrm{M})}$ 內之數。

例題 1.　求以 $\alpha-\alpha_1$ 表方程式 $x^2+2=0$ 之根 α 之值，已知 $\mathrm{P}=1,(\alpha\alpha_1)$。

若取 $\mathrm{Q}=1$，則知 $\mathrm{M}=\alpha-\alpha_1$ 為一屬於 Q 之函數，而 $\mathrm{M}'=\alpha$，為一容許 Q 之函數。求得 $\mathrm{M}_1=\alpha_1-\alpha$，$\phi(y)=(y-\mathrm{M})(y-\mathrm{M}_1)=y^2-(\alpha-\alpha_1)^2$，$\Phi(y)\equiv y(\alpha+\alpha_1)+\alpha^2+\alpha_1{}^2-2\alpha\alpha_1=-8$，$\phi'(y)=2y$。故 $\alpha=\Phi(\mathrm{M})/\phi'(\mathrm{M})=-4/\mathrm{M}$。此結果之眞確，甚易證明。

例題 2.　對於方程式 $x^2+ax+b=0$，有羣 $\mathrm{P}=1,(\alpha\alpha_1)$，求 $\alpha^3-\alpha_1{}^2$ 為 $\Omega_{(1)}$ 內 α 之函數。

取 $\mathrm{Q}=1$，$\mathrm{M}=\alpha$，$\mathrm{M}'=\alpha^3-\alpha_1{}^2$，則 $\Phi(y)=(3ab+2b-a^2-a^3)y+3ab+2b^2-a^2b-a^3$，$\phi'(y)=2y+a$。故

$$\mathrm{M}'=[(3ab+2b-a^2-a^3)\mathrm{M}+3ab+2b^2-a^2b-a^3]\div(2\mathrm{M}+a).$$

例題 3.　對於三次方程式 $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$，求以交代函數 $(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)=\sqrt{\mathrm{D}}$ 表 $[\omega,\alpha]^3$ 之值。

命 $M=\sqrt{D}$, 則 $M_1=-\sqrt{D}$.

因 $M'=[\omega,\alpha]^3$, $M_1'=[\omega^2,\alpha^3]$, $\phi(y)\equiv y^2-D$,

$\Phi(y)=y(M'+M_1')+\sqrt{D}(M'-M_1')$.

由 §71 例題 15, $M'+M_1'=-2a_1{}^3+9a_1a_2-27a_3$. 求得 $M'-M_1'=-3i\sqrt{3D}$, $\Phi(M)\equiv\sqrt{D}(-2a_1{}^3+9a_1a_2-27a_3-3i\sqrt{3D})$, $\phi'(M)\equiv 2\sqrt{D}$,

$M'=\frac{1}{2}(-2a_1{}^3+9a_1a_2-27a^3-3\,i\sqrt{3D})$. 參看 §173 內之解法。

例題 4. 對於四次方程式 $x^4+4b_1x^3+6b_2x^2+4b_3x+b_4=0$, 求以 M 表 $M'=(\alpha+\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_3)$ 之值,而 $16M_1\equiv(\alpha-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)^2$.

M 及 M′ 皆屬於羣 $G_8{}^{(4)}$.注意 M 爲三次方程式 III 之根,§62。又參看 §169。故三次方程式爲 $\phi(y)=0$。求得 $16^2\Phi(y)\equiv16^2(M'+M'_1+M'_{11})y^2-16(\{M_1+M_{11}\}M'+\{M+M_{11}\}M'_1+\{M+M_1\}M'_{11})y+M_1M_{11}M'+MM_{11}M'_1+MM_1M'_{11}$

$$=16^2\cdot2\Sigma\alpha_1\alpha_2\cdot y^2-16(4\Sigma\alpha\alpha_1\cdot\Sigma\alpha^2-8\Sigma\alpha^2\alpha_1\alpha_2)y$$
$$+(2\Sigma\alpha^5\alpha_1-6\Sigma\alpha^4\alpha_1\alpha_2+4\Sigma\alpha^3\alpha_1{}^2\alpha_2-4\Sigma\alpha^3\alpha_1{}^3$$
$$-4\Sigma\alpha^2\alpha_1{}^2\alpha_2\alpha_3).$$

於 §71 例題 16,此處所有諸對稱函數之值,皆已表出。

例題 5. 對於特別四次方程式 $x^4+6x^2+4x+1=0$, 完成例題 4 內之計算。求得 $\Phi(y)\equiv12y^2-16y-3$,

$$\phi(y) \equiv y^3+3y^2+2y-\tfrac{1}{4},\quad M'=\frac{\phi(M)}{\phi'(M)}=4-\frac{40M+11}{3M^2+6M+2}.$$

163. 葛羅華羣之化法. 若添加函數M於Ω,則葛羅華羣化爲Q.

第一,$\Omega_{(M)}$內原方程式$f(x)=0$之根$\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$之各函數等於$\Omega_{(M)}$內之數者,容納Q之置換;因$\Omega_{(M)}$內此數爲M之函數,而M容納Q之諸置換故也。

第二,$\Omega_{(M)}$內根$\alpha, \cdots, \alpha_{n-1}$之各函數容納Q之置換者,由§162,爲$\Omega_{(M)}$內之數。

然此爲範圍$\Omega_{(M)}$內葛羅華羣之二特性(§155)。故Q爲於新範圍$\Omega_{(M)}$內$f(x)=0$之葛羅華羣。

此化葛羅華羣之級數p爲q之法;乃由添加j次補助方程式之根M(§161)以成者也。

*例題1. 已知$x^4+x^3+1=0$對於$\Omega_{(1)}$有葛羅華羣$G_{24}^{(4)}$. 依次添加四無理數M,而證明葛羅華羣變化且範圍增大,如次所示:

M	P	$\phi(y)=0$, §161	範圍
	$G_{24}^{(4)}$		$\Omega_{(1)}$
$\sqrt{D}$	$G_{12}^{(4)}$	$D=229$	$\Omega_{(1,\sqrt{229})}$
$y=(\alpha-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)$	$G_4^{(4)}$ II	$y^3-12y+\sqrt{229}=0$, §71 例題177	$\Omega_{(1,\sqrt{D},y)}$
$z=\alpha-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$	$G_2^{(4)}$	$9z^2=137+18y-16y^2-2y\sqrt{D}$	$\Omega_{(1,\sqrt{D},y,z)}$
$w=\alpha-\alpha_1$	$G_1^{(4)}$	$w^2-zw+y=0$	$\Omega_{(1,\sqrt{D},y,z,w)}$

求證 y 含無理數 $\sqrt[3]{12\sqrt{-3}-4\sqrt{229}}$。

例題 2. 求證例題 1 內四次方程式之根可以 z 及 w 之二次方程式之根有理表之。

*例題 3. 應用例題 1 之法於四次方程式 $x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$,而誘導逐次分解方程式 $\phi(y)=0$;卽

$$D=256(I^3-27J^2)\ (\S 51),\quad y^3-12I+\sqrt{D}=0,$$

$$72Jz^2=72a_1{}^2J-192a_2J+144yJ+8Iy^2+y\sqrt{D}-64I^2,\ w^2-zw+y=0.$$

164. 葛羅華分解式之分解法. 命葛羅華分解式 $g(y)=0$ 有一根 ρ. 若施分羣 Q 之諸置換 s_i 於 ρ,每次一個,則得

$$\rho,\ \rho_1,\ \rho_2,\ \cdots,\ \rho_{q-1} \qquad \text{I}$$

諸值,其中 ρ_i 爲由施置換 s_i 於 ρ 而得者。

若 I 內諸 ρ 施以羣 Q 之任一置換,I 內之 ρ_i 僅受一排列;因如此所得之各結果,爲由 ρ 依次施二置換而得,而與 ρ 施以 Q 之該二置換之積之置換同效。

故
$$g(y,M)\equiv(y-\rho)(y-\rho_1)\cdots(y-\rho_{q-1}) \qquad \text{II}$$

受 Q 不變,而 II 式內 y 之係數爲 $\Omega_{(M)}$ 內之數, §162。此處記法 $g(y,M)$ 意爲 y 之函數,其中 y 之係數爲 $\Omega_{(M)}$ 內之數。

今 $g(y,\mathrm{M})$ 爲範圍 $\Omega_{(\mathrm{M})}$ 內 $g(y)$ 之約數，因前者爲 q 次，後者爲 p 次，而 $p=jq$ 故也，§160。

若II施以在P內而不在Q內之置換 t，得

$$g(y,\mathrm{M}_t)\equiv(y-\rho^{(t)})(y-\rho_1{}^{(t)})\cdots(y-\rho_{q-1}{}^{(t)}).\qquad \mathrm{III}$$

$\rho^{(t)}$, $\rho_1{}^{(t)}$, ..., $\rho_{q-1}{}^{(t)}$ 諸值爲 $g(y)=0$ 之根，故III亦爲 $g(y)$ 之約數。

由二相異置換 t 所得二組之根 $\rho^{(t)}$, $\rho_1{}^{(t)}$, ..., $\rho_{q-1}{}^{(t)}$，或爲全同，或無公根。故二相異函數 $g(y,\mathrm{M}_t)$ 無公因數，而得分解爲相異因數

$$g(y)=g(y,\mathrm{M})\cdot g(y,\mathrm{M}_1)\cdots g(y,\mathrm{M}_{j-1}).\qquad \mathrm{IV}$$

注意，於此分解法，諸因數 $g(y,\mathrm{M}_i)$ 不常屬於同一範圍，而屬於範圍 $\Omega_{(\mathrm{M})}$, $\Omega_{(\mathrm{M}_1)}$, ..., $\Omega_{(\mathrm{M}_{j-1})}$。$g(y)$ 之他分解法爲可能，其中諸因數皆屬於同一範圍。

165. 任何無理數之添加. 若添加任何無理數X於Ω，得一範圍 $\Omega_{(\mathrm{X})}$，其中葛羅華分解式 $g(y)=0$ 變爲可化方程式，所以

$$g_1(y,\mathrm{X})\equiv(y-\rho)(y-\rho_1)\cdots(y-\rho_{q-1})$$

爲 $\Omega_{(\mathrm{X})}$ 內 $g(y)$ 之 q 次不可化因數，則在此新範圍內，葛羅華羣化爲分羣

$$1,\ (\rho\rho_1),\ \cdots,\ (\rho\rho_{q-1}).$$

添加X. 因 $g(y)=0$ 爲在Ω內之標準方程式，§146,

得 $\rho_i=\phi_i(\rho)$.

於
$$g_1(y,X)\equiv(y-\rho)(y-\rho_1)\cdots(y-\rho_{q-1})=0 \qquad \mathrm{I}$$
內,以 $\phi_i(y)$ 代 y; 得一 y 之新方程式,即
$$g_1(\phi_i(y),X)\equiv(\phi_i(y)-\rho)(\phi_i(y)-\rho_1)\cdots(\phi_i(y)-\rho_{q-1})=0. \qquad \mathrm{II}$$

因 I 於 Ω 內爲不可化,而 I 與 II 有一公根 ρ,故 I 之諸根皆滿足 II。命 ρ_h 爲 I 之任一根;則命 $y=\rho_h$, II 內諸因數之一必等於零;假定爲因數 $\phi_i(\rho_h)-\rho_k$.

今有關係
$$\rho_i=\phi_i(\rho),$$
$$\rho_k=\phi_i(\rho_h).$$

故得置換之等式
$$(\rho_i\rho_k)=(\rho\rho_h).$$

以 $(\rho\rho_j)$ 乘之,得 $\qquad (\rho\rho_i)(\rho_j\rho_k)=(\rho\rho_i)(\rho\rho_h),$

或
$$(\rho\rho_k)=(\rho\rho_j)(\rho\rho_h).$$

即組 $1, (\rho\rho_1), \cdots, (\rho\rho_{q-1})$,內任何二置換之積,等於此組內之一置換。故此諸置換成一羣(§95)。命之爲分羣 Q.

方程式 I 爲對於範圍 $\Omega_{(x)}$ $f(x)=0$ 之葛羅華分解式;因由假設,此方程式於 $\Omega_{(x)}$ 內爲不可化,且由 §145 因關係 $\Omega_{(\alpha,\cdots,\alpha_{n-1})}=\Omega_{(\rho)}=\Omega_{(\rho_i)}$, 其他二條件亦滿足。

故Q爲於範圍$\Omega_{(x)}$內$f(x)=0$之葛羅華羣。

166. M爲X之函數. M能表爲在Ω內化葛羅華羣爲之任意無理數X之函數。

吾人已知$g_1(y,X)$爲$\Omega_{(x)}$內y之函數,其係數容納分羣Q之置換。因M屬於Q,且此諸係數容納Q,故諸係數爲$\Omega_{(M)}$內之數(§162)。故乘積

$$(y-\rho)(y-\rho_1)\cdots(y-\rho_{q-1})$$

可表爲y及X之函數,如上以$g_1(y,X)$示之,或可表爲y及M之函數,以$g(y,M)$示之,由是

$$g(y,M)=g_1(y,X). \qquad \text{I}$$

今M爲Ω內j次不可化方程式,卽方程式

$$\phi(z)=0 \qquad \text{II}$$

之根,其他諸根爲M_1, M_2, ..., M_{j-1}, §161. 由§164, 得

$$g(y)=g(y,M).g(y,M_1)\cdots g(y,M_{j-1}) \qquad \text{III}$$

當方程式I左邊之M,以其他共軛數之一代之,不能適合;因若假設能適合,則$g(y,M)$等於III之右邊其他諸因數之一,而此結論與$g(y)$於Ω內既爲不可化,不能有等根之事實相違。

故可與y以如此之有理値,使方程式

$$g(y,z)-g_1(y,X)=0, \qquad \text{IV}$$

其中z視爲未知量,與方程式II僅有一公根;卽$z=$

M.

故 II 與 IV 之 H. C. F. 為一關於 z 之一次二項式。因 II 及 IV 內 z 之係數皆為 $\Omega_{(x)}$ 之數，且求 H. C. F. 之法，僅含減，乘，除之運算，是以決不生新無理數，由是 H. C. F.，$z-M$ 為 $\Omega_{(x)}$ 內之函數。換言之，M 為 $\Omega_{(x)}$ 內之數，故為在 Ω X 內之函數。

系 I. j 次之範圍 $\Omega_{(M)}$ 為範圍 $\Omega_{(x)}$ 之分範圍，因 $\Omega_{(M)}$ 內各數為 Ω 內 X 之函數故也。

系 II. 數 X 為與範圍 $\Omega_{(x)}$ 同次之不可化方程式 $h(y)=0$ 之根，§138。故 $h(y)=0$ 之次數，為方程式 II 之次數 j 之倍數。

系 III. 若 X 視為 Ω 內 M 之函數，則 $\Omega_{(x)}$ 與 $\Omega_{(M)}$ 為全同。

系 IV. 不在葛羅華範圍內之任意無理數所使之葛羅華羣之化法，亦能以葛羅華範圍內某數 M 以成之。即葛羅華羣之所有之化法，皆可以添加屬於葛羅華範圍之某數以成之。

方程式 $f(x)=0$ 之葛羅華範圍內之數，克羅內克 (Kronecker) 名之曰 $f(x)=0$ 之"自然無理數"(Natural irrationalities)。此系茲可述之如次：葛羅華羣所有之化法。皆可添加一自然無理數以成之。

例題 1.　於§163例題1，添加 $X=\sqrt[n]{\sqrt{D}}$ 於 $\Omega_{(1)}$。此處 X 容納交代羣之置換，而葛羅華羣化為 $G_{12}^{(4)}$。因 X 不在於葛羅華範圍 $\Omega_{(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}\equiv\Omega_{(1,\sqrt{D},y,z,w)}$ 內，故不為一自然無理數。X 所致之化法能以 $\sqrt{D}$ 成之，此 $\sqrt{D}$ 為葛羅華範圍內之數，故為自然無理數。此說明系 IV。

關係 $\sqrt{D}=X^n$ 說明定理本身。因

$$g(y)\equiv(y-\sqrt{D})(y+\sqrt{D})=0,\quad 或\ y^2=D。$$

命 $y_1=\sqrt[n]{\sqrt{D}}$，$y_2=\sqrt[n]{-\sqrt{D}}$，且得 $h(y)\equiv(y^n-\sqrt{D})(y^n+\sqrt{D})=0$，或 $y^{2n}=D$。此說明系 II 及系 I。

例題 2.　若一方程式之羣 P 為 $G_8^{(4)}$，取 $X=\sqrt[3]{(\alpha\alpha_1-\alpha_2\alpha_3)^2(\alpha\alpha_2+\alpha_1\alpha_3)^2}$ 以說明上之定理及諸系。

第十六章

由葛羅華之理論之論點以觀察方程式之解法

167. 普通方法. 二次方程式. 解一代數方程式之問題,於葛羅華之理論,代以他問題,使有葛羅華羣之化法,及以依次添加簡單代數數,降低葛羅華分解式之次數。若添加函數 M 於 Ω,葛羅華羣化為 Q。所以對於所與方程式 $f(x)=0$, 決定 M 之數值,成為必要。而此由 j 次之補助方程式之作法及解法試為之,惟 j 為 Q 低於 P 之指數。此補助方程式或分解式之根,為所求之 M 之共軛數之值。對於所化之葛羅華羣復行此同一之法,及至此羣變為 1 而後止。由是此增大之範圍含所與方程式之根,而諸根之值,可以添加於原來之範圍之數 M, M′, …. 以求之。

二次方程式. $x^2+a_1x+a_2=0$ 之葛羅華羣為對稱羣 $G_2^{(2)}$, §158. 其惟一之分羣為 1, §104 其指數 $j=2$。取 $M=\alpha-\alpha_1$. 其他共軛值為 $M_1=\alpha_1-\alpha$. M 及 M_1 為方程式 $y^2=\alpha^2-2\alpha\alpha_1+\alpha_1{}^2=a_1{}^2-4a_2$ 之根, §161. 故得 $y=\pm\sqrt{a_1{}^2-4a_2}$ 為 M 及 M_1 之值。添加 M 之後,葛羅華

羣爲1;增大之範圍爲$\Omega_{(1a_1, a_2, \sqrt{a_1^2-4a_2})}$。吾人知 $\alpha+\alpha_1=-a_1$ 及 $\alpha-\alpha_1=\sqrt{a_1^2-4a_2}$. 故

$$2\alpha=-a_1+\sqrt{a_1^2-4a_2} \text{ 及 } 2\alpha_1=-a_1-\sqrt{a_1^2-4a_2}.$$

在理論上,因有無限數之函數 M 以供選擇,故有無限數解二次方程式之方法。例如可取 $M=S(\alpha-\alpha_1)^{2n+1}$, 式中 n 可爲使 M 及 M_1 得相異之值之任意值,而 S 爲 α, α_1 之任意對稱函數。

168. 三次方程式. 由葛羅華之理論之見解, §59 內所與之解法,可略述之如次:變 x 爲 z, 爲一不變範圍之運算。求得 z 之後,變 z 爲 x, 同理爲眞;又以 $u+v$ 代 z, 與其反運算,及 v 之消去,亦不變範圍。三次方程式之解法,可明示之如次(其中 $\sqrt{D_1}=\sqrt{-3}\sqrt{D}$):

$\phi(y)=0$, §161	M	P	Ω
		$G_6^{(3)}$	$\Omega_{(b_0, b_1, b_2, b_3)}=\Omega'$
$u^6+Gu^3-H^3=0$	$u^3=\frac{-G}{2}+\frac{b_0^3}{18}\sqrt{D_1}$	G	$\Omega'_{(\sqrt{D_1})}$
$u^3=\frac{-G}{2}+\sqrt{\frac{G^2}{4}+H^3}$	$u=\frac{1}{2}(\alpha+\omega\alpha_1+\omega^2)\alpha_2$	G	$\Omega'_{(\sqrt{D}, u)}$

添加於 Ω' 之數,可由二分解方程式 $\phi(y)=0$ 之根以決定之,其第一分解式爲一二次方程式,其第二

分解式為一純三次方程式。

169. 四次方程式.　茲將§62之解法內之諸步程,包含範圍之擴張者,列舉於此。命

$$16u\equiv(\alpha-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)^2,$$

$$16v\equiv(\alpha+\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)^2,$$

$$16w\equiv(\alpha-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)^2.$$

$\phi(y)=0$	M	P	Ω
		$G_{24}^{(4)}$	$\Omega_{(b_0,\dots,b_4)}\equiv\Omega'$
$4b_0^3x^3-b_0Ix+J=0$	$b_0^2x_1\equiv b_0b_2-b_1^2+u$	$G_8^{(4)}$	$\Omega'_{(u)}$
$v=b_1^2-b_0b_2+b_0^2x_2$	$\sqrt{v}$	$G_4^{(4)}\mathrm{III}$	$\Omega'_{(u)\sqrt{v}}$
		$\begin{cases}G=1,(ab)\\G'=1,(cd)\end{cases}$	$\Omega'_{(u,\sqrt{v})}$
$\begin{cases}u=b_1^2-b_0b_2+b_0^2x_1\\w=b_1^2-b_0b_2+b_0^2x_3\end{cases}$	$\begin{cases}\sqrt{u}\\\sqrt{w}\end{cases}$	$\begin{cases}1\\1\end{cases}$	$\begin{cases}\Omega'_{(\sqrt{u},\sqrt{v})}\\\Omega'_{(\sqrt{w},\sqrt{v})}.\end{cases}$

因$G_4^{(4)}\mathrm{III}$為定換羣,故四次方程式於範圍$\Omega_{(u,\sqrt{v})}$內能分解為因數。按是所得之二二次方程式各以$1,(ab)$及$1,(cd)$為其葛羅華羣。由§62,VI,知$\Omega'_{(\sqrt{u},\sqrt{v})}=\Omega'_{(\sqrt{w},\sqrt{v})}$。故無須添加多於$\sqrt{u}$, $\sqrt{w}$二無理數之一。

四次方程式較二次方程式及三次方程式,供獻葛羅華之理論一更好之表現,因不僅在各添加,可選擇種種不同函數M,且可選擇不同之羣。上解法

中,所取一連之羣爲 $G_{24}^{(4)}$, $G_8^{(4)}$, $G_4^{(4)}$III, $G=(1,(ab))$, $G=1$, 然可選擇他連之羣,卽 $G_{24}^{(4)}$, $G_{12}^{(4)}$, $G_4^{(4)}$II, $G_2^{(4)}$, 1。在 §163 例題 1 及例題 3, 略述一四次方程式之解法,其中卽用此一連之羣。

又吾人可添加一屬於循環羣 $G_4^{(4)}$ I 之函數,譬如

$$y=\alpha\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2^2+\alpha_2\alpha_3^2+\alpha_3\alpha^2,$$

而後解之。

第一分解方程式 $\phi(y)=0$ 爲六次,誠然,然此可視爲一三次方程式及一二次方程式論之。

自塔太利亞及卡但之時以來,所與三次方程式及四次方程式之各種解法極夥。關於各種解法之知識,可考 L. Matthiessen 之 Grungdzüge der Antikon u. Moder-nen Algebra.

上之辦法,似可引至普通五次方程式之解法。然因吾人不能解諸分解方程式,而遂生意外之困難,因生出四次以上之分解式故也。葛羅華之理論,可供證明用根數解普通五次方程式及普通高次方程式爲不能。在後諸章內,吾人將證明此不可能,且討論可以代數解之之特種高次方程式之理論。

第十七章

循環方程式

170. 定義. 循環方程式 (Cyclic equation) 者,乃一方程式,其葛羅華羣爲循環羣者,§101。克羅內克名此種方程式爲"einfache Abel'sche Gleichungen."

二次方程式爲循環方程式;因其葛羅華羣爲對稱羣 $G_2^{(2)}$, 此羣同時又爲二次之循環羣。

普通三次方程式,於其係數所定之範圍內,非爲循環方程式;因其葛羅華羣爲 $G_6^{(3)}$ 而不爲循環羣。然若添加

$$\sqrt{D}\equiv(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2),$$

則葛羅華羣變爲$G_3^{(3)}$(§163) 而此爲循環羣。故普通三次方程式,於範圍$\Omega_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\sqrt{D})}$內,爲循環方程式。

普通四次方程式,於其係數所定之範圍內,非爲循環方程式,然若添加一屬於循環羣 $G_4^{(4)}$ I 之函數,則於新範圍內,爲循環方程式。一可添加之如此之函數爲

$$M=\alpha\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2^2+\alpha_2\alpha_3^2+\alpha_3\alpha^2.$$

若 n 爲素數,則於範圍 $\Omega_{(1)}$ 內,

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=0 \qquad \text{I}$$

爲循環方程式。因由§130，此方程式爲不可化。循環函數

$$\omega_1{}^2\omega_2+\omega_2{}^2\omega_3+\cdots+\omega_{n-1}{}^2\omega_1,$$

由 $\omega_2=\omega_1{}^2$, $\omega_3=\omega_1{}^3$, 等關係,知其等於諸根之和,卽爲 -1。故葛羅華羣或爲 $n-1$ 次之循環羣或其分羣之一,§162。因 I 爲標準方程式,故自爲其葛羅華分解式;葛羅華範圍爲 $n-1$ 次,而葛羅華羣爲 $n-1$ 級。故 I 之葛羅華羣爲 $n-1$ 級之循環羣。

例題 1. 若 n 爲素數,求證於範圍 $\Omega_{(1)}$ 內,$x^n-1=0$ 爲循環方程式。以下將其根不皆爲無理數之循環方程式,置之不論。

171. 定理. 循環方程式之各根,可表成 Ω 內任何他根之函數。

若 α, α_1, ⋯, α_{n-1} 爲循環方程式 $f(x)=0$ 之根,則 Ω 內 x 之 $n-1$ 次函數

$$\Phi(x)\equiv f(x)\left(\frac{\alpha_1}{x-\alpha}+\frac{\alpha_2}{x-\alpha_1}+\cdots+\frac{\alpha}{x-\alpha_{n-1}}\right)$$

容納循環羣之排列,故爲 Ω 內之數,§154。若依次令 $x=\alpha$, α_1, ⋯, α_{n-1}, 且若用記法 $\dfrac{\Phi(x)}{f'(x)}=\phi(x)$, 則由§142, 得 $\alpha_1=\phi(\alpha)$, $\alpha_2=\phi(\alpha_1)$, ⋯⋯, $\alpha_{n-1}=\phi(\alpha_{n-2})$, $\alpha=\phi(\alpha_{n-1})$.

雖當 $f(x)=0$ 爲可化方程式,若假定其無重根,此

定理仍成立。

例題 1. 何時循環方程式為標準方程式?

例題 2. 求證二次方程式之一根,可表成在 $\Omega_{(a_1, a_2)}$ 內他根之函數。

例題 3. 求證三次方程式之任何根,可表成在 $\Omega_{(a_1, a_2, a_3, \sqrt{D})}$ 內他二根之一之函數。

例題 4. 求證 $\alpha_2=\phi^2(\alpha), \alpha_3=\phi^3(\alpha)$ 等等,式中上角之字,非為指數,而表示重行函數的運算 ϕ. 如 $\phi^2(\alpha)=(\phi(\alpha))$.

例題 5. 求證 $\alpha_1=\phi^{n+1}(\alpha)$, $\alpha_2=\phi^{n+2}(\alpha)$,等等。

例題 6. 若 $\phi(\alpha)\equiv\dfrac{a\alpha+b}{c\alpha+d}=\alpha_1$, $\phi^2(\alpha)\equiv\dfrac{a\alpha_1+b}{c\alpha_1+d}=\alpha_2$ 等等,則可證明 $a+d=2\cos\dfrac{k\pi}{m}$,及 $ad-bc=1$ 時, $\phi^m(\alpha)=\alpha$, 惟 k 與 m 互為素數(參看奈圖(Netto)之置換論(Theory of substitution) Cole 之譯本,204—207頁)求證當 $a=0$, $-b=c=d=1$, $k=1$, $m=3$, 得 $\alpha_1=-\dfrac{1}{\alpha+1}, \alpha_2=+\dfrac{1}{\alpha}$, 式中 α, α_1, α_2 為循環方程式 $x^3+x^2-2x-1=0$ 之根。

例題 7. 求證於例題 6 內,若 $a=0$, $b=-c=d=k=1$, $m=3$,則 α, α_1, α_2 為 $x^3+ax^2-(a+3)x+1=0$ 之根。

172. 循環方程式之解法. 循環方程式之普通解法,用拉格蘭分解式,§115,甚易得之。

由 §118 內之定理,$[\omega, \alpha]^n$ 所表之式,其中 $\alpha, \alpha_1, \cdots$,

α_{n-1} 爲 $f(x)=0$ 之根，而 ω 爲一之原 n 次根(§66)，其 ω 之各乘冪之係數爲 $f(x)=0$ 之根之循環函數。參看 §119 例題 1。所以屬於循環羣之$[\omega,\alpha]^n$ 爲 $\Omega(a_1, a_2, \cdots, a_n, \omega)$ 內之函數。此函數爲 $\Omega(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \omega)$ 內之數，§154。命$[\omega^\lambda,\alpha]^n$ 內 ω 之各乘冪之係數爲 c_0, c_1, $\cdots$, c_{n-1}. 書

$$[\omega^\lambda\alpha]^n \equiv c_0+c_1\omega^\lambda+c_2\omega^{2\lambda}+\cdots+c_{n-1}\omega^{(n-1)\lambda}\equiv T_\lambda.$$

循環函數 T_λ 可計算得之.茲視之爲已知，得

$$[\omega^\lambda,\alpha]=\sqrt[n]{T_\lambda}.$$

依次與 λ 以 1, 2, $\cdots$, $(n-1)$諸值，得

$$\alpha+\omega\alpha_1+\cdots+\omega^{n-1}\alpha_{n-1}=\sqrt[n]{T_1},$$
$$\alpha+\omega^2\alpha_1+\cdots+\omega^{2(n-1)}\alpha_{n-1}=\sqrt[n]{T_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha+\omega^{n-1}\alpha_1+\cdots+\omega^{(n-1)^2}\alpha_{n-1}=\sqrt[n]{T_{n-1}},$$
$$\alpha+\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}=-a_1.$$

而 α_1 爲已知。相加得

$$n\alpha=-a_1+\sqrt[n]{T_1}+\sqrt[n]{T_2}+\cdots+\sqrt[n]{T_{n-1}}. \qquad \text{I}$$

如是，根 α 爲以 n 次之根數表之，其中 T_λ 爲由 $\Omega(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1})$ 內之數及 1 之 n 次根所成。I 內之各根數有 n 值，此 n 值互差一因數，即爲 1 之根。

I 式含有一困難，提起吾人之注意。因各根數有

n 值，由是$(n-1)$個根數代表 n^{n-1} 之值。故 I 內除所與方程式之 n 根以外，有 $n^{n-1}-n$ 無關之值，而無法可說出何值代表所與方程式之根。

為欲除去困難，魏伯爾處置之如次：若施置換 $(0\,1\,2 \ldots n-1)$ 於 $[\omega, \alpha]^{n-\lambda} \cdot [\omega^\lambda, \alpha]$，則由 §119，此乘積之係數之指數，受置換$(0\,1\,2 \ldots n-1)^{n-\lambda+\lambda}$。因此為全同置換，故諸係數不變。

命　$[\omega, \alpha]^{n-\lambda} \cdot [\omega^\lambda, \alpha] \equiv E_\lambda \equiv \varepsilon_0^{(\lambda)} + \varepsilon_1^{(\lambda)}\omega + \cdots + \varepsilon_{n-1}^{(\lambda)}\omega^{n-1}$，

則 E_λ 為 $\Omega_{(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \omega)}$ 內之循環函數，而可視為已知。因得　$[\omega, \alpha]^{n-\lambda} \cdot [\omega^\lambda, \alpha] = (\sqrt[n]{T_1})^{n-\lambda} \cdot \sqrt[n]{T_\lambda} = E_\lambda$.

故
$$\sqrt[n]{T_\lambda} = \frac{E_\lambda}{(\sqrt[n]{T_1})^{n-\lambda}} = \frac{(\sqrt[n]{T})^\lambda E_\lambda}{T_1} \qquad \text{II}$$

由 II 知對於 ω 之一定原值，I 內 $n\alpha$ 之值內所有諸根數之每個，可表成在 Ω 內諸根數之一之函數。若該一根數為已知其總 n 個值，則 $n\alpha$ 之式有 n 個值，而為所與方程式之 n 根。

173.　T_λ 之計算.　在大多數之例，此量之計算極複雜，而必須用特別巧法。此種巧法之理想，將於分圓方程式之討論內述之，該處解法分為最簡單之分運算。此處述 $T_1 = (\alpha + \alpha_1\omega + \alpha_2\omega^2)^3$ 之計算。

命　$A \equiv \alpha^2\alpha_1 + \alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_2^2\alpha$,

$$A' \equiv \alpha_1{}^2\alpha+\alpha_2{}^2\alpha_1+\alpha^2\alpha_2,$$

則

$$A+A'=3a_3-a_1a_2,$$

$$A-A'=\sqrt{D},$$

$$T_1=\alpha^3+\alpha_1{}^3+\alpha_2{}^3+6\alpha\alpha_1\alpha_2+3\omega A+3\omega^2A'$$

$$=\tfrac{1}{2}(9a_1a_2-2a_1{}^3-27a_3)+\tfrac{3}{2}\sqrt{-3D}=\tfrac{1}{2}(S+3\sqrt{-3D}),$$

$$T_2=\tfrac{1}{2}(9a_1a_2-2a_1{}^3-27a_3)-\tfrac{3}{2}\sqrt{-3D}=\tfrac{1}{2}(S-3\sqrt{-3D}),$$

式中 $S\equiv 9a_1a_2-2a_1{}^3-27a_3$.由是得

$$\sqrt[3]{T_1}=\alpha+\omega\alpha_1+\omega^2\alpha_2=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(S+3\sqrt{-3D})},$$

$$\sqrt[3]{T_2}=\alpha+\omega^2\alpha_1+\omega\alpha_2=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(S-3\sqrt{-3D})}.$$

如是求得三次方程式之拉格蘭分解式之值後,甚易求得普通三次方程式之根之式,卽加 $\sqrt[3]{T_1}$ 及 $\sqrt[3]{T_2}$ 諸值於 $\alpha+\alpha_1+\alpha_2=-a_1$ 卽可。參看§162例題3之解法。

例題 1. 對於四次方程式 $x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$,計算

$$T\equiv(\alpha+\omega\alpha_1+\omega^2\alpha_2+\omega^3\alpha_3)^4,$$

式中 $\omega=i$ 或 $-i$.

命

$$T_1\equiv(\alpha+i\,\alpha_1-\alpha_2-i\,\alpha_3)^4,$$

$$T_2\equiv(\alpha-i\,\alpha_1-\alpha_2+i\,\alpha_3)^4,$$

得 $T_1+T_2=2(\alpha-\alpha_2)^4-12(\alpha-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2+2(\alpha_1-\alpha_3)^4$

$$=4\{(\alpha-\alpha_2)^2-(\alpha_1-\alpha_3)^2\}^2-2\{(\alpha-\alpha_2)^2+(\alpha_1$$

$$-\alpha_3)^2\}^2$$

$$=4\rho_2\rho_3-2(a_1{}^2-2a_2-2\phi_1)^2,$$

式中 $\phi_1=\alpha\alpha_2+\alpha_1\alpha_3$ 爲§71例題11內之三次方程式之根，

又 $\rho_2=(\alpha+\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)^2$，$\rho_3=(\alpha-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)^2$.

命 $\rho_1=(\alpha-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)^2$,

則 $\rho_1=a_1{}^2-4a_2+4\phi_1$,　　$\rho_1\rho_2\rho_3=(a_1{}^3-4a_1a_2+8a_3)^2$,

§71例題18。故 $\rho_2\rho_3$ 之值爲已知。又得

$$T_1T_2=(a_1{}^2-2a_2-2\phi_1)^4.$$

故 T_1 及 T_2 爲已知二次方程式 $y^2-(T_1+T_2)y+T_1T_2=0$ 之根。

例題2.　取 $a_1=a_2=0$, $a_3=a_4=5$, 完成例題1內之計算，且證明T有值 $60\pm80i$，而此在範圍 $\Omega_{(1,i)}$.

例題3.　當四次方程式內 $a_1=a_2=a_4=0$, $a_3=1$, 求 T_1 及 T_2. 當此情形，循環羣爲 $\Omega_{(1,i)}$ 內之葛羅華羣乎？

例題4.　取
$$\alpha-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=\sqrt{\rho_1},$$
$$\alpha+\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=\sqrt{\rho_2},$$
$$\alpha-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=\sqrt{\rho_3},$$

述一普通四次方程式之解法，ρ_1, ρ_2, ρ_3 爲

$$\rho^3+(8a_2-3a_1{}^2)\rho^2+(3a_1{}^4-16a_1{}^2a_2+16a_1a_3+16a_2{}^2-64a_4)\rho$$

$-(a_1{}^3-4a_1a_2+8a_3)^2=0$ 之根。參看例題 1。

例題 5. 取 $\alpha+i\,\alpha_1-\alpha_2-i\,\alpha_3=\sqrt[4]{T_1}$,

$$\alpha-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=A(\sqrt[4]{T_1})^3,$$

$$\alpha-i\,\alpha_1-\alpha_2+i\,\alpha_3=B(\sqrt[4]{T_1})^3,$$

求普通四次方程式之解法,其中

$$A=(\alpha-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)(\alpha+i\,\alpha_1-\alpha_2-i\,\alpha_3)^{-2}$$
$$=\frac{\rho_1[T+(a_1{}^2-2a_2-2\phi_1)^2]}{2T_1(4a_1a_2-a_1{}^3-8a_3)},$$
$$B=(\alpha-i\,\alpha_1-\alpha_2+i\,\alpha_3)(\alpha+i\,\alpha_1-\alpha_2-i\,\alpha_3)^{-2}$$
$$=\frac{a_1{}^2-2a_2-2\phi_1}{T_1}.$$

174. 素數次之循環方程式. 任何循環方程式之解法,可使依賴於其次數爲素數之循環方程式之解法。

§172 內之解法可應用任意次之循環方程式,而爲完全普通。雖然,對於後來之發展,則證明現在之定理,實爲重要。茲述關於 $12=3\cdot4$ 次之證法。推廣至 $n=e\cdot f$ 之例,爲甚明顯。

命 $s=(\alpha\alpha_1\cdots\alpha_{11})$,其中 $\alpha_1=\phi(\alpha)$, $\alpha_2=\phi(\alpha_1)$, $\alpha_3=\phi(\alpha_2)$,…,則 s^3 可分爲 c, c_1, c_2 三循環如次:

$$c=(\alpha\alpha_3\alpha_6\alpha_9),$$

$$c_1=(\alpha_1\alpha_4\alpha_7\alpha_{10}),$$

$$c_2=(\alpha_2\alpha_5\alpha_8\alpha_{11}).$$

命 y 為在 Ω 內根 α, α_3, α_6, α_9 之函數 ψ, 而屬於循環 c. 應用 $f(x)=0$ 之葛羅華 $P=\{1,s,s^2,\cdots s^{n-1}\}$ 之諸置換於 y, 得三個不同之值,

$$y=\psi(\alpha\alpha_3\alpha_6\alpha_9)$$

$$y_1=\psi(\alpha_1\alpha_4\alpha_7\alpha_{10})$$

$$y_2=\psi(\alpha_2\alpha_5\alpha_8\alpha_{11}),$$

而此為三次方程式

$$(t-y)(t-y_1)(t-y_2)=0 \qquad \text{I}$$

之根。

I 內 t 之係數為 Ω 內 y, y_1, y_2 之對稱函數,故受 P 之置換不變。故此等係數為 Ω 內之數,§154。

今進而證明 I 為循環方程式,其羣為 $P_1=\{1,(yy_1y_2)(yy_2y_1)\}$. 羣 P 之置換,循環交換 y,y_1,y_2, 此宜記憶,第一吾人知容納 P_1 之置換 y, y_1, y_2 之任意函數,為容納 P($f(x)=0$ 之葛羅華羣)之置換 α, $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 之函數,而此種函數為在 Ω 內之數;第二,在 Ω 內之數 y, y_1, y_2 之任何函數為在 Ω 內之數根 α, α_1, $\cdots$, α_{n-1} 之函數,故容納葛羅華羣 P (§153), 如是已證明 y, y_1, y_2 之函數容納 P_1 之置換。故 P_1 為方程式 I 之葛羅華羣,§155。

茲可證明 $f(x)$ 能分成各為四次之三個因數,即

如 $$f(x)=F(x,y)\cdot F(x,y_1)\cdot F(x,y_2),\qquad \text{II}$$
式內 $F(x,y)=0$ 爲一四次循環方程式,其中 x 之係數爲範圍 $\Omega_{(y)}$ 內之數。蓋因令

$$F_1(x)=(x-\alpha)(x-\alpha_3)(x-\alpha_6)(x-\alpha_9),\qquad \text{III}$$

則III內 x 之各係數容納循環置換 c; 故亦容納 $f(x)=0$ 之葛羅華羣添加 y 後所成之羣之置換。此羣必僅由 c, c_1, c_2 之乘冪而成。故 x 之此等係數爲 y 之函數 (§162),而得 $F_1(x)=F(x,y)$. 且 $F(x,y)=0$ 爲 $\Omega_{(y)}$ 內之循環方程式,因其根之諸循環方程式在此範圍內故也。

若於 $n=e\cdot f$, e 或 f 爲非素數,則重復此法於新循環方程式,及至諸因數方程式皆爲素數次而後止。

按是任何 n 次之循環方程式之解法,使依賴於其次數爲素數之循環方程式之解法。

例題 1. 取 $x^4+x^3+x^2+x+1=0$, 而 $\alpha=\omega$, $\alpha_1=\omega^2$, $\alpha_2=\omega^4$, $\alpha_3=\omega^8=\omega^3$, 以作一說明. 故 $s=(\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=(\omega,\omega^2,\omega^4,\omega^3)$, $c=(\omega\ \omega^4)$, $c_1=(\omega^2\omega^3)$. 取 $y=\alpha\alpha_2{}^2+\alpha_2\alpha^2=\omega^4+\omega$, 則 $y_1=\alpha_1\alpha_3{}^2+\alpha_3\alpha_1{}^2=\omega^3+\omega^2, y+y'=-1$, $yy'=-1$, $(t-y)(t-y_1)=t^2+t-1=0$, $\quad 2t=-1\pm\sqrt{5}$, $\quad f(x)=\{t^2+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5})t+1\}\{t^2+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5})t+1\}=F(x,y)\cdot F(x,y_1)$. 各二次因數等於零爲一循環方程式。

例題 2. 已知 $f(x)\equiv x^6+x^5-5x^4-4x^3+6x^2+3x-1=0$ 為循環方程式,其中 $\alpha=2\cos a$, $\alpha_1=2\cos na$, $\alpha_2=2\cos n^2a$, $\cdots$, $\alpha_5=2\cos n^5a$, 而 $n=2$, 又 $a=\frac{2\pi}{13}$. 欲說明此定理,得 $s=(\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5)$, $c=(\alpha\alpha_2\alpha_4)$, $c_1=(\alpha_1\alpha_3\alpha_5)$. 取 $y=\alpha\alpha_2{}^2+\alpha_2\alpha_4{}^2+\alpha_4\alpha^2$, $y_1=\alpha\alpha_3{}^2+\alpha_3\alpha_5{}^2+\alpha_5\alpha_1{}^2$. 稍加努力求得 $y+y_1=-5$, $yy_1=3$. 故 $(t-y)(t-y_1)=t^2+5t+3=0$, $2t=-5\pm\sqrt{13}$. 故得 $f(x)=(t^3-dt^2-t+d-1)\{t^3+(d+1)t^2-t-d-2)=0$, 式中 $2d=-1\pm\sqrt{13}$.

此三次因數生出素數次之循環方程式。此例題內所選 y 之式稍難使用。於 §180 之週期內,得一較好之選擇。

例題 3. 若 m 為奇數,而等於 $2n+1$, 求證 $\frac{(z^m-1)}{z-1}=0$, 當 $z+\frac{1}{z}=x$ 時,生出循環方程式

$$0=x^n+x^{n-1}-(n-1)x^{n-2}-(n-2)x^{n-3}+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}x^{n-4}+\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}x^{n-5}-\cdots,$$

而此方程式有諸根 $\alpha=2\cos ka$, 其中 $a=\frac{2\pi}{2n+1}$, 且其中 k 依次取 $1, 2, 3, \cdots, n$ 諸值。當 $2n+1$ 為素數時,此方程式為不可化方程式。

175. 定理. 不可化循環方程式之根在 Ω 內之各函數,自為循環方程式之根。

命 α 爲已知之不可化循環方程式之根,而 $g(\alpha)$ 爲函數。則若

$$g(\alpha),\ g(\phi(\alpha)),\ g(\phi^2(\alpha)),\ \cdots,g(\phi^{n-1}(\alpha)) \qquad \mathrm{I}$$

諸值,非皆相異,如命 $g(\alpha)=g(\phi^k(\alpha))$,而由§138,得長方形

$$\begin{array}{llll} g(\alpha), & g(\phi(\alpha)), & \cdots, & g(\phi^{k-1}(\alpha)), \\ g(\phi^k(\alpha)), & g(\phi^{k+1}(\alpha)), & \cdots, & g(\phi^{2k-1}(\alpha)), \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}$$

其中各直行內之值相等,而各列內之值相異,且爲 Ω 內之不可化方程式即下方程式之根,

$$h(y)\equiv(y-g(\alpha))(y-g(\phi(\alpha)))\cdots(y-g(\phi^{k-1}(\alpha)))=0.$$

如§142內,試考函數

$$\Phi(y)\equiv h(y)\left[\frac{g(\phi(\alpha))}{y-g(\alpha)}+\frac{g(\phi(\alpha_1))}{y-g(\alpha_1)}+\cdots+\frac{g(\phi(\alpha_{k-2}))}{y-g(\alpha_{k-2})}\right]$$

得結論

$$g(\phi(\alpha))=\phi_1[g(\alpha)],$$

$$g(\phi^2(\alpha))=\phi_1[g(\phi(\alpha))],\cdots.$$

若 I 之諸值皆相異,得同樣之結論。

例題 1. 若 ω 爲 1 之複虛五次根,求證 $1+\omega$, $1+\omega^2$, $1+\omega^3$, $1+\omega^4$ 爲循環方程式之根。

例題 2. 由§175,作六次之循環方程式之根。

例題 3. 求證於有理數所成之範圍內:(1)若循環方程式之一根爲實根,則其諸根皆爲實根;(2)奇

數次之循環方程式之根皆爲實根;(3)當偶數次之循環方程式之一根爲複虛根,則其諸根皆爲複虛根。

176. 普通循環三次方程式. 欲決定普通三次不可化循環方程式,命α, α_1, α_2爲所求三次方程式之根,而$\alpha_1=\phi(\alpha)$, $\alpha_2=\phi(\alpha_1)$.由是由§80, Ω內最普通之代數函數爲

$$\phi(\alpha)=a\alpha^2+b\alpha+c. \qquad \text{I}$$

由 §175, $d\alpha+e$ 亦爲循環方程式之根,於 I 內以 $d\alpha+e$ 代 α,且選擇 d 及 e 之值,使 α 之係數消滅,而 α^2 之係數爲1,則得較簡而普通之函數 $\phi(\alpha)=\alpha^2+c$.故得

$$\alpha_1=\alpha^2+c,$$
$$\alpha_2=\alpha_1^2+c,$$
$$\alpha=\alpha_2^2+c.$$

消去 α_1 及 α_2, 得

$$(\alpha^2+c)^4+2c(\alpha^2+c)^2-\alpha+c^2+c=0.$$

因α_1不能等於 α,故式 $\alpha_1-\alpha=(\alpha^2+c)-\alpha$ 不能爲零。以 $(\alpha^2+c)-\alpha$ 除之,得

$$\alpha^6+\alpha^5+(3c+1)\alpha^4+(2c+1)\alpha^3+(3c^2+3c+1)\alpha^2$$
$$+(c^2+2c+1)\alpha+(c^3+2c^2+c+1)=0. \qquad \text{II}$$

若所求之三次方程式爲 $x^3-a_1x^2+a_2x-a_3=0$，則

$a_1=\alpha+\alpha_1+\alpha_2=\alpha^4+(2c+1)\alpha^2+\alpha+(c^2+2c)$,

$a_2=\alpha^6+\alpha^5+3c\alpha^4+(2c+1)\alpha^3+(3c^2+c)\alpha^2+(c^2+2c)\alpha+(c^3+c^2)$.

由 II， $\qquad =-a_1+(c-1)$.

$a_3=\alpha^7+3c\alpha^5+(3c^2+c)\alpha^3+(c^3+c)\alpha$.

由 II， $\qquad =ca_1+(c+1)$.

方程 II 爲三根 α，α_1，α_2 所滿足，亦爲他三根 α'，α'，α'_2 所滿足，此他三根之和以 a_1' 表之。得

$$a_1+a_1'=-1,$$

$$a_1a_1'=3c+1+a_1+a_1'-2(c-1),$$

$$=c+2,$$

而 a_1，a_1' 爲下之二次方程式之根，

$$z^2+z+c+2=0.$$

六次方程式 II 既爲不可化三次方程式之根 α，α_1，α_2 所滿足，故 II 必可化爲二個三次方程式。故 a_1 及 a'_1 必爲 Ω 內之數。故二次方程式之判別式 $-(4c+7)$ 必爲完全平方；卽

$$-(4c+7)=(2f+1)^2,$$

$$c=-(f^2+f+2).$$

二次方程式之根爲 f 及 $-(f+1)$。命 $a_1=f$，則得 $a_2=$

$-(f^2+2f+3)$，$a_3=(f^3+2f^2+3f+1)$．如是所求之三次方程式之係爲已求得，其中 f 爲 Ω 內之任何數。欲除去此三次方程式之第二項，取 $f=\frac{3m}{2}$ 及 $y=x-\frac{m}{2}$，則得

$$y^3-3(m^2+m+1)y+(m^2+m+1)(2m+1)=0. \qquad \text{III}$$

凡循環三次方程式皆可化爲III。參看§159 例題 4。

例題 1.　求證III之判別式爲一完全平方，$D=9^2(m^2+m+1)^2$.

例題 2.　對於方程式 III，決定關係 $\alpha_1=\phi(\alpha)$ 內之函數 ϕ.

例題 3.　任何四次循環方程式可化爲 $y^4-2b(2s+r^2)y^2-4br(1+bs^2)y+b^2(r^2-2s)^2-b(1+bs^2)^2=0$ 之形式，其中 b, r, s 爲有理數，且 b 非爲完全四次方。參看 §159 例題 11。求證此方程式可不開立方根而解之。

分圓方程式；幾何學之作圖．

177.　緒論． 於 §63 及 §64，已證明 $x^n-1=0$ 之根，可表之如次，

$$\alpha_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},$$

式中 k 依次取 0, 1, 2, ..., $n-1$ 諸值，而 $x^n-1=0$ 之解法，與幾何學內分圓周爲 n 等分相當。§63 所述 $x^n-1=0$ 之解法爲三角的解法。茲進而證明常能得一

代數的解法。吾人將指示此解法如何成就，且研究用直線尺及圓規分圓周爲等分能成就之例。

178. 分圓方程式. 若由 $x^n-1=0$，以 $x-1$ 除之，除去根 1，得 $x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=0$. I

若 n 爲素數，則方程式 I 謂之分圓方程式 (Cyclotomic equation)。於範圍 $\Omega_{(1)}$ 內，分圓方程式爲不可化 (§130) 且爲循環 (§170)。

若 n 爲非素數，由 §66，知 $x^n-1=0$ 之解法，可化爲形如 $x^m-A=0$ 諸二項方程式之解法，其中指數 m 爲 n 之素因數。取 $x:\sqrt[m]{A}=z$，方程式 $x^m-A=0$ 變爲 $z^m-1=0$. 故當能解 $z^m-1=0$ 之形其次數爲素數之二項方程式，即能得二項方程式之普通解法。前方程式以 $z-1$ 除之，則得分圓方程式。

分圓方程式既爲循環方程式，就理論言之，其解法含於§172內。然普通 T_λ 之計算極複雜。玆進而發現高斯之方法，用此方法，分圓方程式之解法，可分爲較簡單之分運算。

例題 1. 求證分圓方程式爲倒數方程式。

179. 原等餘根 (Primitive congruence roots). 於數論內已證明對於各素數 n，有數 g (謂之 n 之原等餘根) 存在，使級數

$$g,\ g^2,\ g^3,\ \cdots,\ g^{n-1}$$

內各數,以 n 除之,所得之餘數爲級數

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$$

內之數(惟不論其次序)。

例如若 $n=5$, 可取 $g=2$. 若 2, 2^2, 2^3, 2^4 各以 5 除之,其餘數各爲 2, 4, 3, 1。此諸餘數與級數 1, 2, 3, 4, 僅其出來之次序不同。又取 $n=7$ 及 $g=3$ 以說明之。

由此等事實及關係 $\omega^n=1$ 觀之,分圓方程式 I 之根 $\omega, \omega_1, \cdots, \omega_{n-1}$ 可書之如次:$\omega=\omega, \omega_1=\omega^g, \omega_2=\omega^{g^2}, \cdots, \omega_{n-2}=\omega^{g^{n-2}}$. 此記法可得某種利益。故 I 之諸根可書爲:

$$\omega,\ \omega^g,\ \omega^{g^2},\ \cdots,\ \omega^{g^{n-2}} \qquad \text{II}$$

例題 1. 由試驗求當 $n=11$ 時,g 可取之值之最小整數,且證明 $\omega, \omega^g, \omega^{g^2}, \cdots, \omega^{g^{10}}$ 與 $\omega, \omega^2, \omega^3, \cdots, \omega^{10}$ 表同樣之根。求證當 $n=13$, g 可爲 2 或 6。

180. 分圓方程式之解法化爲素數次之方程式. 由 §174, 知 §178 之方程式 I 之解法可根據於其次數爲 $n-1$ 之素因數之循環方程式甚明。當 n 爲素數,則 $n-1$ 爲非素數。命 $n-1=e\cdot f$,而 e 爲素因數。如前,命 ω 爲分圓方程式 I 之根。由是作 $\eta, \eta_1, \cdots, \eta_{e-1}$ 諸式所謂周期 (Periods)者如次:

$$
\left.\begin{aligned}
\eta &\equiv \omega+\omega^{g^{e}}+\omega^{g^{2e}}++\omega^{g^{(f-1)e}},\\
\eta_1 &\equiv \omega^{g}+\omega^{g^{e+1}}+\omega^{g^{2e+1}}++\omega^{g^{(f-1)e+1}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\eta_{e-1} &\equiv \omega^{g^{e-1}}+\omega^{g^{2e-1}}+\omega^{g^{3e-1}}+\cdots+\omega^{g^{fe-1}}
\end{aligned}\right\}\qquad \text{III}
$$

在各周期內有 f 項,且首項爲末項之 g^e 次方,而首項以後各項,爲其前項之 g^e 次方。故各周期爲屬於循環羣　　$G=\{1,\ s^e,\ s^{2e},\ \cdots,s^{(f-1)e}\}$

之函數,其中置換 $s=(\omega,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_{n-2})$.諸周期 III 爲 §174 內函數 $y,\ y_1,\ y_2$ 可有之特別形式。由是由 §174 諸周期 III 爲一不可化循環方程式

$$(x-\eta)(x-\eta_1)\cdots(x-\eta_{e-1})=0. \qquad \text{IV}$$

之根。此方程式爲 Ω 內 e 次之方程式。倘此方程式之解法,諸周期變爲已知量。

181.　二周期之積.　欲計算 §180 內方程式 IV 之係數,必須以一周期乘他周期。取

$$\eta_h\equiv\omega^{g^h}+\omega^{g^{h+e}}+\cdots+\omega^{g^{h+(f-1)e}}$$

$$\eta_k\equiv\omega^{g^k}+\omega^{g^{k+e}}+\cdots+\omega^{g^{k+(f-1)e}}$$

試察當 ω^{g^h} 以 $\omega^{g^{h+e}}$ 或以該周期內之任何他根代之,η_h 仍不變,故可書二周期之積如次:

$$
\begin{aligned}
\eta_h\eta_k\equiv{}&\omega^{g^k}\left(\omega^{g^k}+\omega^{g^{k+e}}+\cdots+\omega^{g^{h+(f-1)e}}\right)\\
&+\omega^{g^{k+e}}\left(\omega^{g^{h+e}}+\omega^{g^{h+2e}}+\cdots+\omega^{g^{h+fe}}\right)
\end{aligned}
$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\omega^{g^{k+(f-1)e}}\left(\omega^{g^{h+(f-1)e}}+\omega^{g^{h+fe}}+\cdots+\omega^{g^{h+2(f-1)e}}\right)$$

在此乘積內,第一直行內之項爲

$$\omega^{(g^k+g^h)}+\omega^{(g^k+g^h)g^e}+\omega^{(g^k+g^h)g^{2e}}+\cdots+\omega^{(g^k+g^h)g^{(f-1)e}}$$

若 (g^k+g^h) 爲 n 之倍數,則此直行變爲等於 f. 若 (g^k+g^h) 不爲 n 之倍數,則此直行爲 III 內諸周期之一,§180。

對於積內各直行,得同樣之結論。故此積諸周期之一次函數,此函數內之係數爲已知範圍 $\Omega_{(1)}$ 內之數。

182. 當 f 爲非素數. 當關係 $n-1=ef$ 內, e 及 f 皆爲素數,則分圓方程式之解法,明爲依賴於二素數次方程式之解法,其一方程式爲 e 次,其他方程式爲 f 次。

當 f 爲非素數,則須添加一步或數步,以化此問題爲素數次方程式之解法。若 $f=e'\cdot f'$, 而 e' 爲素數,則可作 ee' 個各有 f 項之周期如次:

$$\eta'\equiv\omega\qquad+\omega^{g^{ee'}}\qquad+\omega^{g^{2ee'}}\qquad+\cdots+\omega^{g^{(f'-1)ee'}}$$

$$\eta_1'\equiv\omega^g\qquad+\omega^{g^{ee'+1}}\qquad+\omega^{g^{2ee'+1}}\qquad+\cdots+\omega^{g^{(f'-1)ee'+1}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\eta'_e\equiv\omega^{g^e}\qquad+\omega^{g^{ee'+e}}\qquad+\omega^{g^{2ee'+e}}\qquad+\cdots+\omega^{g^{(f'-1)ee'+e}}$$

....

$$\eta'_{2e} \equiv \omega^{g^{2e}} + \omega^{g^{ee'+2e}} + \omega^{g^{2ee'+2e}} + \cdots + \omega^{g^{(f'-1)ee'+2e}},$$

....

$$\eta'_{ee'-1} \equiv \omega^{g^{ee'-1}} + \omega^{g^{2ee'-1}} + \omega^{g^{3ee'-1}} + \cdots + \omega^{g^{f'ee'-1}}.$$

注意,若於此組內選擇各第 e 周期,如是所擇諸周期之和,等於§180已知之周期III之一。例如

$$\eta = \eta' + \eta'_e + \cdots + \eta'_{(e'-1)e}.$$

此等周期 $\eta', \eta'_e, \eta'_{2e}, \cdots$ 爲一 e' 次之不可化循環方程式之根,此方程式之諸係數,爲諸已知周期III之一次函數。

若 f' 爲非素數。假定 $f'=e''\cdot f''$,復行上法。若 $n=e\cdot e'\cdot e''\cdot f''$,則上法引出各素數次 e, e', e'', f'' 之方程式之解法。當分圓方程式之一根已求得,則他諸根卽可作該根之二次方,三次方,............以得之。

183. 用直線尺及圓規之作圖法. 加減乘除諸運算,於幾何學中,可施於二已知長之直線。例如於初等幾何學,吾人知用比例 $x:1=a:b$ 如何作 a 英寸長之直線與 b 英寸長之他直線之商。於初等幾何學中,吾人又知用直線尺及圓規如何作無理數 $\sqrt{ab}$。$\sqrt{c+\sqrt{ab}}$ 之幾何的作圖法,僅爲上述之法更複雜之應用。然吾人用直線尺及圓規不能作如

$\sqrt[3]{ab}$ 之無理數。如是，凡有理運算及僅含平方根之無理運算，於幾何學中，皆可以直線尺及圓規作之，甚爲明顯。

反之，含直線互相之交點或與圓之交點，或圓互相之交點之任意幾何作圖法，與有理代數運算或開平方相當。若記得解析方面，作圖所用之各直線及圓，以一次及二次之方程式表之，則此理益明。故用直線尺及圓規之作圖法，與純爲有理或含平方根之代數運算之間有一"一一對應。"

故若欲證明用直線尺及圓規作一量爲不能，只須證明該量以已知量所表之代數式，不能以有限個之平方根表之即可。

應用此等理想於以直線尺及圓規分圓周爲 n 等分之問題，此問題爲能或不能，因 $x^n-1=0$ 之根能以有限個之平方根表之與否而定。

若 n 爲 2^k+1 形之素數，則分圓方程式之次數 $n-1$ 爲 2 之乘羃，而 §182 內所引出之運算，僅含平方根。故當 n 爲 2^k+1 形之素數，用直線尺及圓規分圓周爲 n 等分常爲可能。此重要結果爲高斯所得者。

例題 1. 用高斯之法，解 $x^5-1=0$。

分圓方程式爲 $x^4+x^3+x^2+x+1=0$。此處 $n-1=4=2\cdot2$;

$e=2.$ $f=2.$ 故僅須解二個二次方程式。由試驗對於 $n=5$ $g=2$，得根

$$\omega,\ \omega^{g},\ \omega^{g^2},\ \omega^{g^3};$$

此諸根生出二周期

$$\eta=\omega+\omega^{g^2}=\omega+\omega^4,$$

$$\eta_1=\omega^{g}+\omega^{g^3}=\omega^2+\omega^3.$$

故 §180 方程式 IV 變為

$$x^2-(\eta+\eta_1)x+\eta\eta_1=0.$$

然 $$\eta+\eta_1=\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=-1,$$

及 $$\eta\eta_1=(\omega+\omega^4)(\omega^2+\omega^3)=\omega^3+\omega^2+\omega+\omega^4=-1.$$

故上二次方程取形式

$$x^2+x-1=0, \text{ 而 } x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

取 $\eta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. 其根為 ω 及 ω^4 之二次方程式為

$$x^2-(\omega+\omega^4)x+\omega\cdot\omega^4=0,$$

或 $$x^2-\eta x+1=0.$$

故 $$x=\frac{\eta}{2}+\sqrt{\frac{\eta^2}{4}-1}=\frac{-1+\sqrt{5}+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

依 §183，用直線尺及圓規作內接於圓之正五邊形為可能。

例題 2. 求解 $x^{13}-1=0$.

此處 $n-1=3\cdot2\cdot2$. 故引出一三次方程式及二二次方程式之解法，而用直線尺及圓規作內接於圓之

正十三邊形為不能。取 $g=6$,則 $\dfrac{x^{13}-1}{x-1}=0$ 之根為

$$\omega,\ \omega^{g},\ \omega^{g^2},\ \cdots,\omega^{g^{11}},$$

或 $\omega,\ \omega^6,\ \omega^{10},\ \omega^8,\ \omega^9,\ \omega^2,\ \omega^{12},\ \omega^7,\ \omega^3,\ \omega^5,\ \omega^4,\ \omega^{11}$。

若取 $n-1=e\cdot f=12=3\cdot4$,其中 $e=3$,則得

$$\eta\equiv\omega+\omega^8+\omega^{12}+\omega^5,$$

$$\eta_1\equiv\omega^6+\omega^9+\omega^7+\omega^4,$$

$$\eta_2\equiv\omega^{10}+\omega^2+\omega^3+\omega^{11}.$$

計算以 η, η_1, η_2 為根之三次方程式,得

$$\eta+\eta_1+\eta_2=-1,$$

$$\eta\eta_1=2\eta+\eta_1+\eta_2,$$

$$\eta_1\eta_2=\eta+2\eta_1+\eta_2,$$

$$\eta\eta_2=\eta+\eta_1+2\eta_2,$$

$$\eta\eta=4+2\eta_1+\eta_2,$$

$$\eta\eta_1\eta_2=\eta\eta+2\eta\eta_1+\eta\eta_2=-1,$$

$$\eta\eta_1+\eta_1\eta_2+\eta\eta_2=4(\eta+\eta_1+\eta_2)=-4.$$

故三次方程式為 $x^3+x^2-4x+1=0$. 解此則得 η, η_1, η_2 之值。

次取 $f=4=e'f'=2\cdot2$. 得 $\eta'=\omega+\omega^{12}$, $\eta'_3=\omega^8+\omega^5$. 因 $\eta'+\eta'_3=\eta$, 及 $\eta'\eta'_3=\eta_1$, 故知 η' 及 η'_3 為二次方程式

$$x^2-\eta x+\eta_1=0$$

之根,故為已知數。次作以 ω 及 ω^{12} 為根之二次方程

式。因 $\omega+\omega^{12}=\eta'$,及 $\omega\cdot\omega^{12}=1$, 此二次方程式為

$$x^2-\eta'x+1=0.$$

此二次方程式之二根皆為分圓方程式之原根,其他諸根皆可由此求得。

例題 3. 求解 $x^{17}-1=0$。

一根為1. 欲求一原根,作16次之分圓方程式,且取 $g=3$. 則諸根以 ω 之下列諸乘冪表之:

$$1,\ g,\ g^2,\ g^3,\ g^4,\ \cdots,\ g^{15},$$

而此各與下列諸乘冪同值:

1, 3, 9, 10, 13, 5, 15, 11, 16, 14, 8, 7, 4, 12, 2, 6.

取 $n-1=16=e\cdot f=2\cdot8$, 其中 $e=2$. 則

$$\eta=\omega+\omega^9+\omega^{13}+\omega^{15}+\omega^{16}+\omega^8+\omega^4+\omega^2,$$

$$\eta_1=\omega^3+\omega^{10}+\omega^5+\omega^{11}+\omega^{14}+\omega^7+\omega^{12}+\omega^6.$$

吾人知 $\eta+\eta_1$ 等於諸根之總和或 -1, 而 $\eta\eta_1=-4$. 故 η 及 η_1 為

$$x^2+x-4=0$$

之根。

次取 $f=8=e'f'=2\cdot4$, 其中 $e'=2$; 則

$$\eta'=\omega+\omega^{13}+\omega^{16}+\omega^4,$$

$$\eta'_1=\omega^3+\omega^5+\omega^{14}+\omega^{12},$$

$$\eta'_2=\omega^9+\omega^{15}+\omega^8+\omega^2,$$

$$\eta'_3=\omega^{10}+\omega^{11}+\omega^7+\omega^6.$$

周期η'及η'_2，其和爲η，爲

$$x^2-\eta x-1=0$$

之根；而η'_1，及η'_3，其和爲η_1，爲

$$x^2-\eta_1 x-1=0$$

之根。故得 $\eta'=\frac{\eta}{2}+\sqrt{\frac{\eta^2}{4}+1}$ $\eta'_2=\frac{\eta}{2}-\sqrt{\frac{\eta^2}{4}+1}$,

$$\eta'_1=\frac{\eta_1}{2}-\sqrt{\frac{\eta_1{}^2}{4}+1},\quad \eta'_3=\frac{\eta_1}{2}-\sqrt{\frac{\eta_1{}^2}{4}+1}.$$

第三步，$f'=4=e''f''=2\cdot2$,

$$\eta''=\omega+\omega^{16},\qquad \eta_4''=\omega^{13}+\omega^4,$$

$$\eta_1''=\omega^3+\omega^{14},\qquad \eta_5''=\omega^5+\omega^{12},$$

$$\eta_2''=\varepsilon^9+\omega^8,\qquad \eta_6''=\omega^{15}+\omega^2,$$

$$\eta_3''=\omega^{10}+\omega^7,\qquad \eta_7''=\omega^{11}+\omega^6.$$

因η''及η_4''其和爲η'，其積爲η'_1，故爲

$$x^2-\eta' x+\eta_1'=0$$

之根，而得 $\eta''=\frac{\eta'}{2}+\sqrt{\frac{\eta'^2}{4}-\eta'_1}.$

最後知ω及ω^{16}爲二次方程式

$$x^2-\eta'' x+1=0$$

之根；卽 $\omega=\frac{\eta''}{2}+\sqrt{\frac{\eta''^2}{4}-1}$

爲16次之分圓方程式之一原根。

當解上諸二次方程式之一以後，則有問題發生，

即二根之何者表一已知周期?例如 $x^2-\eta_1 x-1=0$ 之根,何者為表 η'_1?欲決定此事,作乘積

$$(\eta'-\eta'_2)(\eta'_1-\eta'_3)=2(\eta\eta_{-1})=+\sqrt{17}=\sqrt{\frac{\eta^2}{4}+4}\,(\eta'_1-\eta'_3).$$

故 $\eta'_1-\eta'_3$ 為正,而 η'_1 其根號之前有正號,η'_3 有負號。

因方程式 $x^{17}-1=0$,其解不含平方根以外之其他無理數,故易知能用直線尺及圓規作內接於圓之正十七邊形。高斯當其僅十九歲時,已發見內接此多邊形之法。引其以研究數學為其終身事業者,皆此發見之力也,欲明正十七邊形之作法,可參考巴舒曼 (Bachmann) 之 Lehre von der Kreistheilung, 67 頁, 1872 年 Leipzig 出版,或 Klein 之初等幾何學之著名問題 Famous Problems of Elementary Geometry, W. W. Beman 與 D. E. Smith 所校訂), 41 頁 1897 年 Boston 出版。圓周之分法,吾人依巴舒曼之說明。

例題 4. 求證以直線尺及圓規,作其體積為一已知立方體之體積之二倍之立方體之一邊為不能。

〔作一立方體使其體積二倍於已知立方體之體積之問題,即所謂"立方倍積問題"(Duplication of the Cube)。此即為希臘數學家耗費無數氣力之三問題之一。Myth 謂此問題之起原如次:德羅斯(Delos)人受瘟疫,

而神諭命之將某立方神二倍之,愚純之匠人作其稜二倍長之立方體。然似此愚笨之工作,不能鎮靜神道。錯誤發見後,有將此"德羅斯問題"(Delian Problem)請問於柏拉圖者。此問題遂因柏拉圖而得數學家之注意。]

例題 5. 求證用直線尺及圓規三等分任意已知角爲不能。

三等分一已知角,爲希臘數學家所首先研究之三著名問題之第二問題。其第三問題卽爲"圓積問題"(Quadrature of the Circle)。

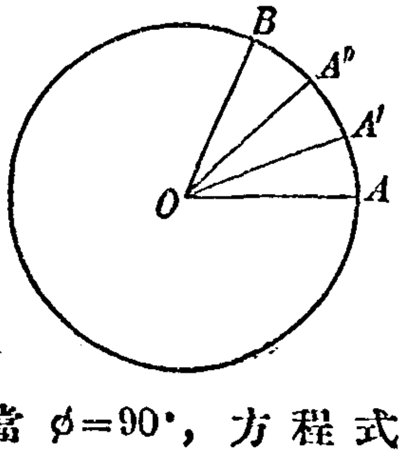
命 x 爲一複虛數,OA′ 爲單位長。命

$$\angle AOB=\phi,\ \angle AOA'=\angle A'OA''=\angle A''OB=\frac{\phi}{3}.$$

則
$$x=\cos\frac{\phi}{3}+i\sin\frac{\phi}{3},$$

$$x^2=\cos\frac{2\phi}{3}+i\sin\frac{2\phi}{3},$$

及
$$x^3=\cos\phi+i\sin\phi. \qquad \mathrm{I}$$



按問題,吾人已與I,其中 $x^3=$ OB,將證明用直線尺及圓規作 OA′ 爲不能。

玆將證明方程式I,普通爲不可化。此方程式有時爲可化。例如當 $\phi=90°$,方程式 I 變爲 $x^3=i$,而此可因數分解爲

$(x+1)(x^2-ix-1)$，此等因數爲$\Omega_{(1,i)}$內之函數。

當 I 之右邊爲一任意數，卽當ϕ爲一任意之角，則 I 爲不可化，不然，其諸根至少有一能表成 $\cos\phi$ 及 $\sin\phi$ 之函數。由特麥佛之定理，I 之諸根爲

$$x_1=\cos\frac{\phi}{3}+i\sin\frac{\phi}{3},$$

$$x_2=\cos\frac{\phi+2\pi}{3}+i\sin\frac{\phi+2\pi}{3}.$$

$$x_3=\cos\frac{\phi+4\pi}{3}+i\sin\frac{\phi+4\pi}{3}.$$

若於x_1，x_3，x_3之此諸式內，以$\phi+2\pi$代ϕ，諸根受一循環排列；卽x_1變爲x_2，x_2變爲x_3，x_3變爲x_1。經此等變化，普通無一根能爲$\sin\phi$及$\cos\phi$之有理函數；因當以$\phi+2\pi$代ϕ，$\sin\phi$及$\cos\phi$之值不變，故根不受變化。故對於一任意之角，方程式 I 爲不可化。其次數爲 3，此非爲 2 之整數乘冪，其根不能用直線尺及圓規作之，故三等分爲不能。

例題 6.　求證若取$\cos\frac{\phi}{3}$等於數值$\leqq 1$且爲有理或僅含平方根之值α，得$x^3=(\alpha+i\beta)$，其中$\beta^2=1-\alpha^2$，且$x=\alpha+i\beta$爲一能幾何作圖之根。求證可三等分之角ϕ之任何數，可用此法得之。取$\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$，證明 45°之角能三等分之。假定$\alpha$至少含一其次數非爲 2 亦非 2 之乘冪之根數，求證如何得不能三等

分之諸角。

例題 7. 假定 $2\cos\frac{\phi}{3}=x$，求證 ϕ 角之三等分依賴於方程式 $x^3-3x=2\cos\phi$. 命 $\cos\phi=m/n$，及 $nx=y$，誘出 $y^3-3n^2y=2mn^2$，當第一三次方程式有有理根時，此方程式有整數根。若整數 m 及 n 互為素數，且 n 能可奇素數 p 除盡，然不能以 p^2 除盡，求證 ϕ 不能三等分。求證 $120°$, $60°$, $30°$, $\cos^{-1}\frac{1}{6}$ 諸角不能三等分。

例題 8. 求證其係數為有理數，且其三根為實根之不可化三次方程式，不能以實根數解之。

此即所謂"不可化之例"(§60)。吾人須證明所與三次方程式之代數解法內，不能免去開複虛數之立方根。對於此目的，先注意當添加 $\sqrt{D}$ 於 Ω 時，此三次方程式變為標準方程式(§171例題 3)。此處 $\sqrt{D}$ 為實數。方程式 $x^n-a=0$ 為不可化，惟其中 a 非為完全 n 乘方，且 n 為素數。若當添加實根 $X=\sqrt[n]{a}$，此標準三次方程式能變為可化，則由§166 系 2，$x^n-a=0$ 之次數為新葛羅華羣 $P=1$ 低於 $G_3^{(3)}$ 之指數 j 之倍數。因 n 為素數，$n=3$。此使 $\Omega_{(X)}=\Omega_{(\rho)}$，其中 ρ 為標準三次方程式之根。故 $x^n-a=0$ 之根為 X 之共軛值 (§136)，而此諸值皆在標準範圍 $\Omega_{(\rho)}$ 內。茲若標準方程式之一根為實根，則其諸根皆為實根。故 $x^n-a=0$

之諸根爲Ω內ρ之函數,將皆爲實根。然當$n=3$,此爲不能。所以所與三次方程式能以素數次之實根數解之之假定,生出矛盾之結論。

又以非素數次之實根數——如$\sqrt[n]{a}$,而$n=pq$爲一非素數——解之,亦屬不能;因在此例可寫爲$\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}$,而可依次添加素數次之根數$y=\sqrt[q]{a}$及$\sqrt[p]{y}$。然上適已證明,此類添加,不能使標準三次方程式爲可化。

第十八章

亞伯爾方程式

184. 定義. 有 $\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 諸根之 n 次方程式 $f(x)=0$ 若其各根能表成在 Ω 內其諸根之某一之函數,如

$$\alpha_1=\phi_1(\alpha),\ \alpha_2=\phi_2(\alpha),\ \cdots, \alpha_{n-1}=\phi_{n-1}(\alpha),$$

且若關於此諸根之任何二者,有交換關係

$$\phi_h\rho_k(\alpha)=\phi_k\phi_h(\alpha), \qquad \text{I}$$

則此方程式謂之亞伯爾方程式(Abelian equation)。

此處 $\phi_h\ \phi_k\ (\alpha)$ 爲 $\phi_h[\phi_k(\alpha)]$ 之意。

$x^4-1=0$ 爲亞伯爾方程式,因其諸根爲 $\pm 1, \pm i$, 故得 $-1=i^2$, $-i=i^3$, $1=i^4$, $(i^2)^3=(i^3)^2$ 等等。

例題 1. 求證循環方程式爲亞伯爾方程式之特例。

例題 2. 求證 $x^6-1=0$ 爲亞伯爾方程式,然非循環方程式;又 $x^3-1=0$ 既爲亞伯爾方程式,又爲循環方程式。

例題 3. 求證當亞伯爾方程式爲不可化時,則爲標準方程式。

例題 4. 求證 $x^n-1=0$ 爲亞伯爾方程式,其中 n

爲任意正整數。

例題 5. 方程式 $x^5+22x^4-440x^3-3520x^2+11264x+32768=0$ 以 $-2, 4, -8$ 爲其根之三。求證其爲亞伯爾方程式。

例題 6. $x^6-5=0$ 於範圍 $\Omega_{(1)}$ 內爲亞伯爾方程式乎? 又於範圍 $\Omega_{(1,\omega)}$ 內,惟 ω 爲 1 之原六次根,爲亞伯爾方程式乎?

185. 亞伯爾羣. 其置換遵守乘法內交換定則之羣,謂之亞伯爾羣(Abelian group)。例如 1, (ab) 爲此類之羣,因 $1\cdot(ab)=(ab)\cdot1$ 故也。

例題 1. 亞伯爾羣之各分羣,自爲亞伯爾羣。

例題 2. 若 G_1 非亞伯爾羣,而 G_1 爲 G 之分羣,則 G 非亞伯爾羣。

例題 3. 求證 $G_3^{(3)}$, $G_2^{(4)}$, $G_4^{(4)}$I, $G_4^{(4)}$II, $G_4^{(4)}$III, $G_5^{(5)}$, $G_6^{(5)}$II 爲亞伯爾羣。

186. 亞伯爾方程式有亞伯爾羣. 若亞伯爾方程式之諸根皆相異,則其葛羅華羣爲亞伯爾羣。

命 $f(x)=0$ 爲亞伯爾方程式,且命其根爲

$$\alpha,\ \alpha_1=\phi_1(\alpha),\ \alpha_2=\phi_2(\alpha),\cdots,\ \alpha_{n-1}=\phi_{n-1}(\alpha).\quad \text{I}$$

若 $f(x)=0$ 爲可化,命 $g(x)$ 爲一不可化因數。且命 $g(x)$

$=0$ 之根為 $\alpha,\ \alpha'=\phi(\alpha),\ \alpha''=\phi''(\alpha),\ \cdots\cdots.$ II

II 之諸根,自然皆在級數 I 內。今 $g(x)=0$ 滿足 $f(x)=0$ 之葛羅華分解式之諸條件。故 $f(x)=0$ 之羣,由次諸置換而成,

$$\rho\equiv(\alpha\alpha),\ \rho'=(\alpha\alpha'),\cdots\cdots.$$

此羣遵守乘法內之交換定則,因

$$\rho'=(\alpha\alpha')=(\alpha,\phi'(\alpha)),$$

$$\rho''=(\alpha\alpha'')=(\alpha,\phi''(\alpha)),$$

而由 §148,

$$\rho'\rho''=\{\alpha,\phi'(\alpha)\}\{\phi'(\alpha),\ \phi'\phi''(\alpha)\}=\{\alpha,\ \phi'\phi''(\alpha)\};$$

$$\rho''\rho'=\{\alpha,\phi''(\alpha)\}\{\phi''(\alpha),\phi''\phi'(\alpha)\}=\{\alpha,\phi''\phi'(\alpha)\}.$$

$f(x)=0$ 既為亞伯爾方程式,得

$$\phi''\phi'(\alpha)=\phi'\phi''(\alpha);$$

故 $$\rho'\rho''=\rho''\rho'.$$

由是範圍 $\Omega_{(\alpha)}$ 之置換羣為可交換,方程式 $f(x)=0$ 之同形羣亦為可交換,§151。故 $f(x)=0$ 之葛羅華羣為亞伯爾羣。

187. 有亞伯爾羣之方程式為亞伯爾方程式. 有交換羣之不可化方程式為亞伯爾方程式。

命 $\alpha,\ \alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_{n-1}$ 為 $g(x)=0$ 之根,且命 G 表此方程式之羣。因 $g(x)=0$ 為不可化,故 G 為任換羣,§156。

命s為羣G內不變數字0之任意置換,又命s_i為羣G內以i代0之任意置換。則$s_i^{-1}\cdot s\cdot s_i$為G之不變i之置換;因

s_i^{-1}變i為0,

s不變0,

s_i變0為i。

羣G既假定為可交換,所以得

$$s_i^{-1}\cdot s\cdot s_i=s_i^{-1}\cdot s_i\cdot s=s.$$

故s不僅使數字0不變,且數字i亦不變。然羣G為任換羣;故數字0必能以其他1, 2, 3, ..., $(n-1)$諸數字之每個代之。然不論取此諸數字之何者為i,置換s使i不變。此等關係,僅當s為羣G內之全同置時,始能成立。故G內之各置換,除1以外,皆以某他數字代0。

應用已應用於0之同樣理論於他各數字,則知羣G內之各置換,除置換1以外,皆含該數字於其元素內;換言之,除1以外,G內無使任何數字不變之置換。

次添加量M=α於範圍Ω,惟α為$f(x)=0$之一根。因羣G內,除1以外,無使α_x之指數不變之置換,且因全同置換滿足羣之定義,故1為M所屬之分羣。

如 $Q=1$，且由添加 α_x，葛羅華範圍之羣化爲 1，§163。

由 §143，$g(x)=0$ 之葛羅華範圍爲 $\Omega_{(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})}$。$\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 諸根之每個爲葛羅華範圍內之數，且各根容納分羣 $Q=1$ 之置換；故各根含於範圍 $\Omega_{(\alpha)}$ 內 (§162)，而各根能表成在 Ω 內諸根之一之函數。故 $g(x)=0$ 爲標準方程式，而範圍 $\Omega_{(\alpha)}$ 爲標準範圍，§132。由是

$$\alpha_h=\phi_h(\alpha),$$

而 $g(x)=0$ 之葛羅華羣由諸置換

$$\rho_h=(\alpha,\phi_h(\alpha))$$

而成 (§149)。由 §148，$\rho_h\rho_k=(\alpha,\phi_h\phi_k(\alpha))$，

$$\rho_k\rho_h=(\alpha,\phi_k\phi_h(\alpha)).$$

此羣既假定爲可交換，故必得

$$\phi_h\phi_k(\alpha)=\phi_k\phi_h(\alpha),$$

即 $g(x)=0$ 爲亞伯爾方程式。

188.　定理. 於屬於任換亞伯爾羣之一置換內，諸循環皆由同數之元素而成。

命置換 s 分解爲其循環，且命 r 爲任何循環內元素之最小之數。施置換 s^r 於該循環內之元素，使元素不變。因由 §187，在一任換亞伯爾羣內，除全同置換外，無使一元素不變之置換，故 s^r 必爲全同置

換。然此僅當他諸循環(若有他循環)皆由 r 元素而成始可。

例題 1. 試舉五次之亞伯爾羣,其中一置換內之循環與此同一置換,非有同數之元素者。試說明之。參看 §185 例題 3 及 §104。

例題 2. 由 §187 及 §188, 證明不能有循環羣以外之素數次之任換亞伯爾羣,且證明無循環方程式以外之素數次之不可化亞伯爾方程式。

例題 3. 求證 n 次之任換亞伯爾羣無能低於 n 級者。

例題 4. 求證 n 次之任換亞伯爾羣爲 n 級。

189. 亞伯爾方程式之解法. 亞伯爾方程式之解法可化爲循環方程式之解法

在一任換亞伯爾羣內,除全同置換外,各置換皆含總元素,且各循環內有同數之元素。故若 n 爲元素之總數,r 爲一循環內元素之數,則必得 $n=r\cdot t$,其中 t 爲置換內循環之數。

命 G 爲不可化亞伯爾方程式 $f(x)=0$ 之羣,又命 s 爲除 1 以外之任意置換。若 c, c_1, …, c_{t-1} 爲 s 內之循環,則可寫

$$s=cc_1c_2\cdots c_{t-1}.$$

此等循環之每個,皆以方程式 $f(x)=0$ 之 r 個根爲

其元素。故得

$$c\equiv(\alpha\alpha_1\cdots\alpha_{r-1}),$$

$$c_1\equiv(\beta\beta_1\cdots\beta_{r-1}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_{t-1}\equiv(\sigma\sigma_1\cdots\sigma_{r-1}),$$

其中諸 α, β, ..., 諸 σ 皆爲 $f(x)=0$ 之根。

命 s_1 爲羣 G 內之任何置換。由 §187,得

$$s_1^{-1}\cdot s\cdot s_1=s.$$

乘積 $s_1^{-1}\cdot s\cdot s_1$ 爲施置換 s_1 於 s 之各循環而得,§88。因此運算,s 全體不變,由是運算之後,諸循環雖或互換其位置,然各循環仍有同樣之文字在其內,且有同樣之循環次序。s 旣可爲羣 G 內除 1 以外之任何置換,故當 $t>1$, 此羣爲非原羣,§103。

命 M 爲 α, α_1, ..., $\alpha_{r=1}$ 諸根之循環函數, M_1 爲 β, β_1, ..., β_{r-1} 諸根之循環函數,由是類推。則得

$$M\equiv\psi(\alpha,\alpha_1,\cdots,\alpha_{r-1}),$$

$$M_1\equiv\psi(\beta,\beta_1,\cdots,\beta_{r-1}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

共有 t 個此類共軛循羣函數 M, M_1, M_2, ..., M_{t-1}.

命 Q 表羣 G 內不變一循環爲他循環,惟交換每循環內之元素之諸置換之集合。此置換之集合爲

一羣;其任意二者之積,爲一屬於 G 而不互換循環之置換。由是 Q 爲 G 之分羣。

因 Q 內無能變 α_h 爲不屬於循環 c 之任意元素,故 Q 爲定換羣。

函數 M 易知其容納 Q 內之置換,且僅容納此等置換;故若添加 M 於範圍 Ω,則 $f(x)=0$ 之羣化爲 Q,§163。

因 Q 爲定換羣,方程式 $f(x)=0$ 於範圍 $\Omega_{(M)}$ 內爲可化(§156)。

命 $f(x,M)$ 爲 x 之函數,定之如次:

$$f(x,M)\equiv(x-\alpha)(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{r-1}).$$

茲進而證明此函數爲範圍 $\Omega_{(M)}$ 內 $f(x)$ 之因數。Q 既爲定換羣,且僅使各循環內之根自相排列,故 $f(x,M)$ 之係數容納 Q 之諸置換。故 $f(x,M)$ 爲 $\Omega_{(M)}$ 內 x 之函數(§154)。因 $f(x,M)=0$ 之根皆爲 $f(x)=0$ 之根,故 $f(x,M)$ 爲 $\Omega_{(M)}$ 內 $f(x)$ 之因數。

同樣可證明 $f(x,M_1)\equiv(x-\beta)(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_{r-1})$,

$f(x,M_2)\equiv(x-\gamma)(x-\gamma_1)\cdots(x-\gamma_{r-1})$,等等

爲 $f(x)$ 之因數。故得

$$f(x)\equiv f(x,M)\cdot f(x,M_1)\cdots f(x,M_{t-1}).$$

因 $f(x,M)=0$ 爲其根之循環函數,故此方程式之

羣爲循環羣或其一分羣(§159)。然循環羣不能有任換分換，故不可化方程式 $f(x,\mathrm{M})=0$ 爲循環方程式。同理 $f(x,\mathrm{M}_1)=0$ 等等亦爲循環方程式。

兹須說明如何可得 $\mathrm{M}, \mathrm{M}_1, \cdots, \mathrm{M}_{t-1}$ 之值。由 §161，此諸值爲 Ω 內 t 次之不可化方程式 $g(\mathrm{M})=0$ 之根。兹進而證明 $g(\mathrm{M})=0$ 爲亞伯爾方程式。因 $f(x,\mathrm{M})=0$ 爲循環方程式，故得 M 之共軛值

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{M}=\psi[\alpha,\phi(\alpha),\cdots,\phi^{r-1}(\alpha)]=\mathrm{F}(\alpha) \\ \mathrm{M}_1=\psi[\beta,\phi(\beta),\cdots,\phi^{r-1}(\beta)]=\mathrm{F}(\beta) \\ \mathrm{M}_2=\psi[\gamma,\phi(\gamma),\cdots,\phi^{r-1}(\gamma)]=\mathrm{F}(\gamma) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad \mathrm{I}$$

由假定，$\beta=\Phi(\alpha)$, $\gamma=\Phi_1(\alpha)$. 故

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_1&=\psi[\Phi(\alpha),\phi\Phi(\alpha),\cdots,\phi^{r-1}\Phi(\alpha)] \\ &=\psi[\Phi(\alpha),\Phi\phi(\alpha),\cdots,\Phi\phi^{r-1}(\alpha)] \\ &=\psi_1[\alpha,\alpha_1,\cdots,\alpha_{r-1}], \end{aligned}$$

式中 ψ_1 容納循環羣之置換。故由 §162，M_1 爲 Ω 內 M 之函數。同理對於 M_i 亦眞。

由 I 知以 β 或 γ 代 α，則 M 變爲 M_1 或 M_2. 故若

$$\mathrm{M}_1=\lambda(\mathrm{M})=\mathrm{F}\Phi(\alpha), \quad \mathrm{M}_2=\lambda_1(\mathrm{M})=\mathrm{F}\Phi_1(\alpha),$$

故可寫　$\lambda(\mathrm{M}_2)=\mathrm{F}\Phi(\gamma)=\lambda\lambda_1(\mathrm{M})=\mathrm{F}\Phi\Phi_1(\alpha)$,

$$\lambda_1(\mathrm{M}_1)=\mathrm{F}\Phi_1(\beta)=\lambda_1\lambda(\mathrm{M})=\mathrm{F}\Phi_1\Phi(\alpha).$$

因由假定，$\Phi\Phi_1(\alpha)=\Phi_1\Phi(\alpha)$，故得$\lambda\lambda_1(M)=\lambda_1\lambda_1\lambda(M)$。同理對於M之他共軛數亦眞。茲已證明$g(M)=0$爲亞伯爾方程式。

故已證明已知亞伯爾方程式$f(x)=0$之解法，可爲循環方程式及他較低次之亞伯爾方程式之解法，後之亞伯爾方程式可以論$f(x)=0$之同法論之；故結果$f(x)=0$之解法化爲諸循環方程式之解法而已。

例題1. 亞伯爾舉次亞伯爾方程式之例。命$a=\frac{2\pi}{n}$；則$\cos a$, $\cos 2a$, ..., $\cos na$能證其爲次方程式之根，

$$x^n-\frac{n}{4}x^{n-2}+\frac{1}{16}\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-4}-\cdots\cdots=0. \qquad \text{I}$$

關於此方程式之由來，參看Serret之代數學(G. Wertheim所刋行)，1878，卷一，195頁至199頁。用二項式定理展開特麥佛之公式$\cos ma+i\sin ma=(\cos a+i\sin a)^m$之右邊，則$\cos ma$可表爲$\Omega_{(1)}$內$\cos a$之函數。故可寫$\cos ma=\theta(\cos a)$，式中$\theta$爲此函數。同理得$\cos m_1a=\theta_1(\cos a)$。在前方程式內，以$m_1a$代$a$，得

$$\cos(mm_1a)=\theta(\cos m_1a)=\theta\theta_1(\cos a).$$

若於$\theta_1(\cos a)=\cos m_1a$內，以$ma$代$a$，得

$$\cos(m_1ma)=\theta_1(\cos ma)=\theta_1\theta(\cos a).$$

故I之各根，皆可表成在Ω內諸根之一之函數，且

$$\theta\theta_1(\cos a)=\theta_1\theta(\cos a).$$

故 I 爲一亞伯爾方程式。

例題 2. 求證例題 1 內之 I 爲於其係數所定之範圍 Ω 內之可化方程式。

試考根 $\cos na$ 之值。

例題 3. 方程式 $x^4+1=0$ 有羣 $P=G_4^{(4)}II$(§159, 例題 5)。其根爲 $\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$, $\alpha_1=-\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-i)$, $\alpha_2=-\alpha$, $\alpha_3=-\alpha_1$. 說明化亞伯爾方程式之解法爲循環方程式之解法。

命 $s=(\alpha\alpha_1)\ (\alpha_2\alpha_3)$, $c=(\alpha\alpha_1)\ c_1=(\alpha_2\alpha_3)$, $M=\alpha\alpha_1^2+\alpha_1\alpha^2$, $M_1=\alpha_3\alpha_2^2+\alpha_2\alpha_3^2$, $Q=1,(\alpha\alpha_1)(\alpha_2\alpha_3)$.此處 M 及 M_1 爲 $t^2+2=0$ 之根，卽 $M=i\sqrt{2}$, $M_1=-i\sqrt{2}$. 則 $f(x,i)\equiv x^2+i=0$, $f(x,-i)\equiv x^2-i=0$ 二者皆爲循環方程式。

例題 4. 方程式 $x^4-8x^3+20x^2-16x+1=0$ 有葛羅華羣 $G_4^{(4)}II$;故爲不可化及亞伯爾方程式。此處 $\alpha_1=-\alpha+4$, $\alpha_2=-\alpha^3+6\alpha^2-8\alpha+2$, $\alpha_3=\alpha^3-6\alpha^2+8\alpha+2$. 如例題 1, 說明其化法。奈圖之代數學, 卷二, 231 頁。

第十九章

方程式之代數的解法

190.　二項方程式之根之添加. 此章內擬發現任意次之代數方程式之可解之必須且充足之條件。對此目的,於本節內假定 $f(x)=0$ 爲可用代數解之之方程式;即假定已知方程式 $f(x)=0$ 之諸根,皆可由其係數,用有限數之加,減,乘,除及開任意次之方而得之。

命 $\sqrt[m]{c}$ 爲表方程式 $f(x)=0$ 之根 $\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 之式內所有之根數之任一,其中 c 爲一代數數。譬如若 $c=\frac{G^2}{4}+H^3$, 且 $m=2$, 則 $\sqrt[m]{c}$ 爲三次方程式之解內之根數之一(§59)。若 $c=-\frac{G}{2}+\sqrt{\frac{G^2}{2}+H^3}, m=3$, 則得三次方程式之根之式內之他根數。今任何根數 $\sqrt[m]{c}$ 之 m 乘方,爲範圍 $\Omega_{(c)}$ 內之數。即每根數爲 $x^m-a=0$ 之形之二項方程式之根。如是組成 $f(x)=0$ 之一根之諸根數,皆爲二項方程式之根,此甚明顯。

若 $f(x)=0$ 於其係數所定之範圍 Ω 內爲可化,則可應用次所述之論法於其不可化因數,若 $f(x)=0$ 於該範圍內爲不可化,則由逐次添加表其根之式內所有諸根數之數個或全數,於此擴大之範圍內,

此方程式變爲可化。卽經添加二項方程式之某數根，$f(x)=0$ 變爲可化。

試察 §167 內二次方程式之解法，使依二項方程式 $y^2=a_1{}^2-4a_2$ 之根 y 之添加，以作一說明。

於三次方程式之例，§168，先添加 $\sqrt{D}$，而此爲由二次方程式 $u^6+Gu^3-H^3=0$，革去第二項所得之二項方程式之根。次添加二項式之立方根 u。

於四次方程式之例(§169)，先添加 u，此與 x_1 僅差一有理常數。此處 x_1 爲一三次方程式之根，此三次方程式之解法，如適所見，可以二項方程式之根之添加說明之。次添加二項方程式之諸根 $\sqrt{v}$，$\sqrt{u}$，$\sqrt{w}$。

191.　依賴於循環方程式.　凡二項方程式，已知其皆爲亞伯爾方程式(§184 例題 4 及例題 6)，且亞伯爾方程式，可以一列素數次之循環方程式依代數解之(§189)。故當 $f(x)=0$ 爲一可解方程式，其解法可使依於素數次之循環方程式之解法。

192.　問題之複述.　茲設 $f(x)=0$ 爲任意代數方程式。此方程式能以根數解之與否之問題，可以同義之問題，卽此方程式能以素數次之循環方程式之根解之與否代之。如是吾人達到次之疑問，

n次之方程式$f(x=0)$之羣G經素數次之循環方程式之一根之添加而化,則此羣受何條件?

193. 定理. 若方程式$f(x)=0$之羣G,經素數次m之循環方程式之一根之添加而化,則羣G有一標準分羣,其指數為素數m。

命$f(x)=0$為可化或不可化,然無重根。命$h(x)=0$為m次之循環方程式,而m為素數。假定添加$h(x)=0$之一根,化羣G為其一分羣Q。

命$h(x)=0$之根為$X, X_1, \cdots, X_{m-1}$.因$h(x)=0$為循環方程式,故其諸根皆能表成Ω內諸根之一之函數。若G為Ω內$f(x)=0$之羣,則Q為在範圍$\Omega_{(x)}$內或在同大之範圍$\Omega_{(x1)}, \cdots, \Omega_{(x_{m-1})}$內此同一方程式之羣。

依§165系II,$h(x)=0$之次數m為羣Q低於G之指數之j倍數。因m為素數,且j必大於1,故得$m=j$。

命M為在Ω內$f(x)=0$之根之函數,且命M屬於分羣Q.則M為在Ω內X之函數(§165)。

又由§165系I,範圍$\Omega_{(M)}$為範圍$\Omega_{(x)}$之分範圍。然$\Omega(X)$之次數為素數,由定義(§132,)與以X為一根之方程式$h(x)=0$之次數同。

因$\Omega_{(M)}$為$\Omega_{(x)}$之分範圍,且$\Omega_{(x)}$之次數為素數,

故必得 $\Omega_{(X)}=\Omega_{(X)}$。故不僅 M 爲 Ω 內 X 之函數，X 亦爲 Ω 內 M 之函數，且各函數容納他函數所容納之諸置換。故 X 與 M 同樣屬於羣 G。

施 G 之諸置換於 X，得次諸相異之值：$X, X'_1, \cdots, X'_{m-1}$。由 §161，此諸值爲一不可化方程式之根，此方程式必與不可化方程式 $h(x)=0$ 同。因此二者有公根 X 故也(§126)。如是 $X, X_1 \cdots, X_{m-1}$ 諸值各與 $X, X'_1, \cdots, X'_{m-1}$，相等。

命 s 爲 G 內變 X 爲 X_1 之置換。此同一置換變分羣 Q 爲共軛分羣 $s^{-1}Qs=Q_1$。今分羣 Q_1 內之置換，不致改變 X_1。因施 Q_1 內之置換與施 $s^{-1}Q s$ 同，其中 s^{-1} 變 X_1 爲 X，且 X 經 Q 內之置換不變，而 s 復變 X 爲 X_1 故也。然 X 及 X_1 爲一循環方程式之根；故 X_1 爲 Ω 內 X 之函數，而 X 爲 Ω 內 X 之函數，所以 X 及 X_1 屬於同一羣 Q。故 $Q=Q_1$。

因此同一理論可用於 X 及他諸根 $X_2, \cdots, X_{m-1}$ 之任一，故 Q 與其總共軛羣皆同；即 Q 爲 G 之標準分羣，其指數爲 m。

194. 逆定理. 若方程式 $f(x)=0$ 之羣 G 有一標準分羣 Q，其指數爲素數 m，則由 m 次之循環方程式之一根之添加，羣 G 化爲 Q。

若羣 G 有一素指數 m 之標準分羣 Q，且若擇一屬於分羣 Q 之函數 M，則諸共軛函數皆屬於此同一羣 Q。由 §162，各函數 $M, M_1, \cdots, M_{m-1}$ 包含於範圍 $\Omega_{(M)}$ 內。故此範圍爲一標準範圍，§132，而 M 爲一標準方程式之根，§139。於範圍 $\Omega_{(M)}$ 內，Q 爲方程式 $f(x)=0$ 之羣，§163。然若 m 爲一素數，則準標方程式又爲循環方程式；蓋因標準方程式之次數 m，亦爲葛羅華羣之級數（§149 及 §150）故也。取葛羅華羣內之任意置換 s（非全同置換）。s 之各種乘冪成一分羣，其級數爲葛羅華羣之級數之因數。因 m 爲素數，s 之級數必爲 m，而分羣爲 $s, s^2, s^3, \cdots, s^m$。葛羅華羣與其分羣，既爲同級，故爲全同。故葛羅華羣爲循環羣 $s, s^2, \cdots, s^m$，而標準方程式爲一循環方程式，§170。

195. 可解方程式. 一方程式，當其解法可化爲一列循環方程式之解法時，謂之可解方程式 (Metacyclic or solvable equation)。亞伯爾方程式爲可解方程式之一特種。後者包含凡可以根數解之諸方程式，而不含其他。

於 §191 內，已證明可以根數解之之任意方程式，可用素數次之循環方程式解之。於 §193 內，已證明若添加素數次之循環方程式之根，致化羣 G，則有

一素指數之標準分羣存在;而於 §194 已證明若 G 有標準分羣,則此化法常可以一如此之根之添加成之。

196. 可解之標準. 一已知代數方程式爲可解之必須且充足之條件爲有一列之羣。

$$G, G_1, G_2, \cdots, G_b=1$$

存在,其第一羣爲於 Ω 內此方程式之葛羅華羣,最後之羣爲全同羣,而各羣爲在其前之羣之標準分羣,且爲素指數。

可解方程式之羣 G 必有一素指數 j 之標準分羣。命此分羣爲 G_1. 若 G_1 僅由全同置換(其級爲 1)而成,則 $j=\frac{p}{1}$。卽 G 之級數自爲一素數,而 G 無除 1 以外之分羣.而此僅當 G 自身爲一循環羣,而所與可解方程式自身爲一循環方程式時始能立。

若 G_1 非爲 1, 則由假設,因此方程式可以根數解之,故 G_1 必復有標準分羣 G_2,其指數爲一指數 j_2. 如是類推,最後至全同羣 1。此已證明此定理。

197. 標準之應用. 普通 n 次方程式之葛羅華羣爲 n 次之對稱羣。對稱羣常有一交代羣爲其分羣。此交代分羣爲指數 2 之標準分羣。添加判別式之平方根,則此分羣變爲所與方程式之羣。關

於二次方程式之主合成級數 (§110) 爲 $G_2^{(2)}$, 1; 關於普通三次方程式爲 $G_6^{(3)}$, $G_3^{(3)}$, 1; 關於普通四次方程式者爲 $G_{12}^{(4)}$, $G_4^{(4)}$ II, $G_2^{(4)}$, 1。在此諸例，交代羣知其有一素指數之標準分羣。玆將證明當普通方程式之次數大於4，卽葛羅華羣之次數大於4時，交代羣無素指數之標準分羣。

198. 定理. 高於四次之交代羣，無素指數之標準分羣。

一交代羣之諸置換，皆爲偶置換 (§99 及 §100)，且可表成三元素之循環之積 (§93)。命此等置換如是表之。

玆先證明於交代羣內能擇一置換 s，使一三元素之已知循環，譬如 $(1\,2\,3)$，變爲交代羣內之任意他三元素之循環。設 $1, 2, 3, 4, r, t, u, v$ 爲此羣之元素，而吾人欲變 $(1\,2\,3)$ 爲 $(r\,t\,u)$。置換 $s=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ r & t & u & v\end{pmatrix}$ 能爲此，甚易知之；因 $s^{-1}(1\,2\,3)s=(r\,t\,u)$ 故也。此 s 明爲交代羣內之置換，因由 §82, $s=(1\,2\,t)(1\,2\,r)(3\,4\,v)(3\,4\,u)$，爲一偶置換故也。

次命 Q 爲交代羣之標準分羣，命 s_1 爲 Q 內任意置換(除置換 1 以外)，而 s 爲交代羣內之任何置換。由標準分羣之性質，易知 $s^{-1}s_1s$ 亦爲 Q 內之一置換。

若 s_1 爲由三元素之循環而成，於運算 $s^{-1}s_1s$ 內，擇

適宜之s，可變s_1爲任何他三元素之置換。故當Q含一三元素之循環置換，則Q必含總三元素之循環置換，故必與交代羣同。

因s_1^{-1}及$s^{-1}s_1s$皆爲Q內之置換，其積

$$\lambda=s_1^{-1}\cdot s^{-1}s_1s,$$

必爲Q內之置換。

茲將證明當$n>4$，s常可由交代羣之置換如是擇之，使置換λ表一三元素之循環，因之證明標準分羣Q實與交代羣同；換言之，即證明除1以外，無與交代羣自身相異之標準分羣。

欲證此，假定交代羣內及Q內之諸置換皆分解(因其常能分解)爲循環，使無二循環有一公共元素(§86)。當作λ，無須考究置換s_1內其元素不因s而變之循環，因在乘積$s_1^{-1}s^{-1}s_1$內，此等循環皆互相消去故也。茲將$n>4$時，s_1可取之形式分別研究之。

(1)命標準分羣Q內某一置換s_1有一三以上元素之循環$(1\,2\,3\cdots m)$。則$s=(1\,2\,3\cdots m)c_1c_2\cdots$，其中$c_1$, c_2, ⋯爲不含諸元素$1\ 2\ 3\ \cdots\ m$之循環。選擇$s=(1\,2\,3)$，則$s_1s^{-1}s_1=s^{-1}(1\,3\,2)s_1=(2\,4\,3)$，而$\lambda=s_1^{-1}s^{-1}s_1s=(2\,4\,3)\cdot(1\,2\,3)=(1\,2\,4)$。故Q含一由一三元素之循環而成之置換$\lambda$，故Q與交代羣同。故無含置換$(1\,2\,3\cdots m)c_1c_2\cdots$之標準

分羣。

(2)命Q內某一置換s_1由二或二以上循環而成，其二循環各含三元素。命此二循環爲(1 2 3)(4 5 6)。取$s=(1\,3\,4)$，則$s_1^{-1}s^{-1}s_1=(2\,5\,1)$，而$\lambda=(2\,5\,1)(1\,3\,4)=(1\,2\,5\,3\,4)$。Q內之此置換$\lambda$，其循環內有三以上元素，而可歸於例(1)。故交羣代無含置換$s_1=(1\,2\,3)(4\,5\,6)$之標準分羣。

(3)命s_1由諸置換而成，包含一三元素之循環及他二元素之循環，即循環(1 2 3) (4 5)。選擇$s=(1\,2\,4)$，則$\lambda=(2\,5\,3)(1\,2\,4)=(1\,2\,5\,3\,4)$，而此可歸於例(1)。故無含$s_1=(1\,2\,3)(4\,5)$之標準分羣。

(4)命s_1包含三轉換(1 2)(3 4)(5 6)。選擇$s=(1\,3\,5)$，則$\lambda=(2\,6\,4)(1\,3\,5)$，而此可歸例(2)。故不能有含$s_1=(1\,2)(3\,4)(5\,6)$之標準分羣存在。

(5)命s_1之部分或全體由二轉換及一不變元素而成。即命s_1含(1 2)(3 4)(5)於其循環內。取$s=(1\,2\,5)$，則得$\lambda=(1\,2\,5)(1\,2\,5)=(1\,5\,2)$。故Q復與交代羣一致。

上諸例葢括當$n>4$時總能有之例。

當$n=4$時，則生新能有之例；即$s_1=(1\,2)(3\,4)$。不論選擇交代羣$G_{12}^{(4)}$內何置換以爲s，終不能得一三元素之循環以爲λ。由他方面言之，分羣

$$1,(1\,2)(3\,4),\ (1\,3)(2\,4),(1\,4)(2\,3)$$

滿足 $G_{13}^{(4)}$ 之標準分羣之特性。

羣 1 爲任何羣之標準分羣,然不爲高次於四次之交代羣之素指數之標準分羣。n 次之交代羣之級數爲 $\frac{\lfloor n}{2}$.今 $\frac{\lfloor n}{2}\div 1$ 爲羣 1 低於交代羣之指數。當 $n>4$ 時,此指數決不爲素數。故此定理已證明矣。

199. 普通五次方程式及高次方程式之不能解. 由§196 及§198,知普通高於四次之方程式不滿足可解之條件。雖然,特種之高於四次之方程式其羣不爲對稱羣或交代羣者,能有一列必須之素指數之標準分羣,而可以根數解之。如其羣不爲對稱羣或交代羣之五次方方程式,能以根數解之。

其次數不過八次之295個交換羣,其中僅有28個爲不可解。參看美國數學雜誌 (Am. Jour. of Math.), 第21卷,326頁。

例題 1. 求證§159 例題 9 內之四次方程式爲可解方程式,然不爲亞伯爾方程式;試求其主合成級數。

200. 素數次之可解方程式之標準. 首四次諸代數方程式皆爲可解。下法可用之以決定一已知之五次或高素數次之方方程式爲可解與否。

若已知不可化方程式 $f(x)=0$ 爲可解,則 §196 內一列之羣 $G, G_1, \cdots, G_h$ 之一必爲已知方程式之葛羅華羣。如 §159 內所述,命 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 爲其根,又命 y 爲 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 之函數,不以 G 內之置換而變其形,且僅限於此等置換,而 G 爲此列內最高級之羣。命 G 對於 n 次之對稱羣之指數爲 j。施對稱羣之諸置換於 y,則得 j 個 y 之形式相異之式,即 $y_1, y_2, \cdots, y_j$。作 j 次之方程式

$$F(y)\equiv(y-y_1)(y-y_2)\cdots(y-y_j)=0. \qquad \text{I}$$

I 之諸係數爲 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 諸根之對稱函數;故於 Ω 內爲有理數,而能計算之。

若於函數 y 內,代入一 n 次可解方程式諸根之值,則 y 取一在 Ω 內之數值。因假定方程式爲可解,則其葛羅華羣必爲 G 或其分羣 $G_1, \cdots, G_h$ 之一(§196);故 y 容納葛羅華羣之置換,故爲 Ω 內之數(§154)。

反之,若當 n 爲素數,$f(x)=0$ 之根之值代入函數 y 時,y 變爲 Ω 內之數,所以 I 有一有理數,而此不爲重根,則 $f(x)=0$ 爲可解方程式。因受此等條件,y 屬於 G,而 $f(x)=0$ 之葛羅華羣必爲 G 或其分羣之一(§159)。若此爲 G,則立得結論;若此爲其分羣之一則能證明(此處證法略去)當 n 爲素數,此分羣爲可

解羣 G_1, G_2,…, G_{k-1} 之一,故 $f(x)=0$ 為可解方程式。

故得此法則:擇一函數 y,不因 G 內之置換而變其形,且僅限於此等置換,以致 $F(y)=0$ 無重根。若 $F(y)=0$ 有一有理根,則 $f(x)=0$ 為可解,不然則為不可解。

就理論言之,不論以 α_0, α_1, …, α_{n-1} 之何函數為 y 皆可,僅須其屬於羣 G。然就實際言之,此選擇關係甚重,因某數函數之代數的運算,較他數函數者甚為複雜故也。$F(y)=0$ 之係數之計算,雖於五次方程式之例,常甚不易。因 1786 年 Bring 及 1834 年 Jerrard 能變普通五次方程式為 $x^5+cx+d=0$ 之形式(關於此變形,可參看奈圖之代數學,卷 1, 124 頁及 125頁),關於此特別形式計算 $F(y)=0$, 甚覺便利。

例題 1.　求不可化方程式 $x^5+cx+d=0$ 為可解之條件。

查考 §104, 知關於五次方程式,最高級之可解羣 G 為 $(abcde)_{20}$. 選擇 y^2 以為屬於此羣之函數(依照 C. Runge 之 Acta Math. 7(1885),173 頁),而 $y=\alpha_0\alpha_1+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_4+\alpha_4\alpha_0-\alpha_0\alpha_2-\alpha_2\alpha_4-\alpha_4\alpha_1-\alpha_1\alpha_3-\alpha_3\alpha_0$.

此處 $j=6$, 而 $F(y)=0$ 為六次之分解方程式。研究

---

*欲求完全之討論,可參看韋伯爾之代數學,卷 I, 1898 年, §183, 或奈圖之代數學,卷 II, 1900 年, §611 至 §615。

y自身,而此非爲可解函數,稍覺便利。施以對稱羣,y生出十二值,其中六值與他六值僅符號相異。命一組之六值爲$y_1, y_2, \cdots, y_6$. 又命以此諸值爲根之方程式爲

$$y^6+a_1y^5+a_2y^4+a_3y^3+a_4y^2+a_5y+a_6=0. \qquad \mathrm{I}$$

其係數$a_1, a_2, \cdots, a_6$不必爲有理數,然爲$y_1, \cdots, y_6$之對稱函數。視$y_1, \cdots, y_6$爲$\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$之函數,而以交代羣施之;則$y_1, \cdots, y_6$諸值僅自相排列。不屬於交代羣之置換,致生一符號之變化。故係數$a_1, a_2, \cdots, a_6$爲$\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$之對稱函數或交代函數。諸係數中,$a_2, a_4, a_6$爲對稱函數,因其爲偶數次之齊次函數,不以$y_1, y_2, \cdots, y_6$內符號之變化而變故也。在他方面言之,$a_1, a_3, a_5$爲$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$之交代函數,因其爲奇數次之齊次函數。

若D爲五次方程式之判別式。則$\sqrt{D}$,爲屬於交代羣$\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$之函數。故係數$a_1, a_3, a_5$爲$m_1\sqrt{D}$ $m_2\sqrt{D}$, $m_3\sqrt{D}$之形,而m_1, m_2, m_3爲對稱整函數。關於$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$,知$a_1$爲二次。然$a_1$又爲$m_1\sqrt{D}$之形,惟$m_1$爲整數,而$\sqrt{D}$爲十次。故必得$m_1=0$。同樣$a_3$爲六次,致$m_3=0$。就他方面言之,$a_5$與$\sqrt{D}$皆爲十次。命$a_5=m\sqrt{D}$. 方程式I變爲

$$y^6+a_2y^4+a_4y^2+m\sqrt{D}\,y+a_6=0. \qquad \text{II}$$

於方程式 $x^5+cx+d=0$, c 及 d 各爲根之 4 次及 5 次之齊次函數。因 a_2, a_4, a_6 各爲 4 次, 8 次, 12 次,故可命

$$a_2=m_2c,\ a_4=m_4c^2,\ a_6=m_6c^3,$$

其中 m_2, m_4, m_6 爲整數.欲求 m, m_2, m_4, m_6 之値,與 c 及 d 以特別之値 $c=-1$, $d=0$. 則 $D=-4^4$; 五根爲 0, i, i^2, i^3, i^4; y_1, y_2, ..., y_6 六値爲 $-2i$, $-2i$, $-2i$, $-2i$, $2+4\,i$, $-2+4\,i$. 方程式 II 變爲

$$0=y^6-m_2y^4+m_4y^2-m_6+16imy=(y+2i)^4(y^2-8iy-20)$$
$$=y^6+20y^4+240y^2-320+512iy.$$

故 $m_2=-20$, $m_4=240$, $m_6=-320$, $m=32$. 代入 II 內,平方之以去根號,

得 $$(y^6-20cy^4+240c^2y^2+320c^3)^2=4^5Dy^2, \qquad \text{III}$$

或 $$(y^2-4c)^4(y^4-24cy^2+400c^2)=4^5\cdot 5^5\cdot d^4\,y^2,$$

其中 $D=4^4c^5+5^5d^4$. 命 $y^2=4z$, 則 y^2 旣爲可解,故 z 爲可解。故得

$$(z^3-5cz^2+15c^2z+5c^3)^2=Dz, \qquad \text{IV}$$

而此又可書爲

$$(z-c)^4(z^2-6cz+25c^2)=5^5d^4z. \qquad \text{V}$$

若 $x^5+cx+d=0$ 爲不可化,則當 IV 或 V 有一有理

時爲可解,且僅限於此時。若此五次方程式爲可化,則常爲可解。關於五次方程式之不同論法,可參看美國數學雜誌 7(1885 年) Glashan 及 Young 著者,及同書 8(1886 年) 及 20 (1898 年) McClintock 著者。

例題 2.　求證 $x^5+5x+5t=0$ 之形之方程式,無爲可解者,其中 t 爲非爲 5 之倍數之任意整數。

由 §129, 此方程式爲不可化。因此五次方程式之係數爲整數,且第一項爲 x^5,故若例題 1 內之 IV,於此時有一有理根,則此根必爲整數。此根又必爲既知項 $25c^6$ 或 5^8 之因數。然 5^8 之因數,無爲此方程式之根者。

例題 3.　求證 $x^5+15x+12=0$ 爲不可化且爲可解。

例題 4.　$x^5+5x^4+10x^3+10x^2+7x+5=0$ 爲可解乎?變其形,使革去其第二項。

例題 5.　於例題 1 內之 V, 命 $d=c\mu$, $z=c\lambda$, 其中 μ 及 λ 爲範圍 $\Omega_{(1)}$ 內或任何他範圍內之數。求證當

$$c=\frac{5^5\mu^4\lambda}{(\lambda-1)^4(\lambda^2-6\lambda+25)},$$

$$d=\frac{5^5\mu^5\lambda}{(\lambda-1)^4(\lambda^2-6\lambda+25)},$$

$x^5+cx+d=0$ 常爲可解。

例題 6.　求作其中 $\mu=\sqrt{2}$, $\lambda=\sqrt{6}$ 之可解五次

方程式。參看例題 5。

例題 7.　$x^5+x+1=0$ 爲可解乎?

例題 8.　範圍 Ω 內諸不可化可解六次方程式,皆可以添加一平方數於 Ω,於是於增大之範圍內作諸三次方程式以求之。參看魏伯爾之代數學卷二,1896 年,296 頁。所以添加 $\sqrt{2}$ 於 $\Omega_{(1)}$,可寫 $x^3+x+1+\sqrt{2}=0$,移 $\sqrt{2}$ 而平方之,則得可解六次方程式 $x^6+2x^4+2x^3+x^2+x-1=0$。用根數 $\sqrt{3}$,誘導同樣之方程式。

例題 9.　求證 $x^5+5px^4+10p^2x^3+10p^3x^2+5p^4x+p^5-1=0$ 爲可解。幷決定其葛羅華羣。

將其諸根增加 p。

例題 10.　求證 $y^5+py^3+\frac{1}{5}p^2y+r=0$ 爲可解。

取
$$y=z-\frac{p}{5z}.$$

例題 11.　求證例題 1 內之方程式 V,當 $c=\pm1$ 時,不能有有理根。由是證明若 $x^5\pm x+d=0$ 爲可解,則此方程式爲可化。

例題 12.　求證 $x^5-A=0$,其中 A 不爲完全五乘冪,爲可解,且於範圍 $\Omega_{(1,A)}$ 內有羣 $G_{20}^{(5)}$。

例題 13.　求證素數次 n 之不可化方程式 $f(x)=0$,由添加根數 $\sqrt[m]{a}$,而 m 爲素數,僅當 $m=n$ 時,始能變

爲可化。

命 $$y^m-a=0 \qquad \text{I}$$

爲不可化,命其根爲 $\gamma,\omega\gamma,\cdots,\omega^{m-1}\gamma$, 其中 ω 爲 1 之複虛 m 次根。命當 γ 添加於 Ω 時, $f(x)=0$ 變爲可化,所以 $$f(x)=f_1(x,\gamma)\cdot f_2(x,\gamma), \qquad \text{II}$$

各多項式內 x 之最高乘冪之係數爲 1。I 及 II 可視爲在同一範圍內之方程式,有公根 γ. 由是 II 必爲 I 之諸根所滿足。將如是所得之 m 方程式各邊相乘,得

$$f(x)^m\equiv F_1(x)\cdot F_2(x),$$

其中 $$F_1(x)=f_1(x,\gamma)\cdot f(x,\omega\gamma)\cdots f_1(x,\omega^{m-1}\gamma),$$
$$F_2(x)=f_2(x,\gamma)\cdot f_2(x,\omega\gamma)\cdots f_2(x,\omega^{m-1}\gamma),$$

$F_1(x)$ 及 $F_2(x)$ 各爲 mn_1 次及 mn_2 次;其係數爲 I 之根之對稱函數,故在 Ω 內. $f(x)$ 既爲不可化,且 m 及 n 皆爲素數,故必得

$$F_1(x)=f(x)^p, \qquad F_2(x)=f(x)^q,$$

$$pn=mn_1, \quad qn=mn_2, \quad n_1+n_2=n, \quad n=m.$$

例題 14. 求證例題 13 內, $f(x)=f_1(x,\gamma)\cdot f_1(x,\omega\gamma)\cdots f_1(x,\omega^{m-1}\gamma)$, 其中 $f_1(x,\gamma)$ 於範圍 $\Omega_{(\omega,\gamma)}$ 內爲不可化,且關於 x 爲一次函數。

例題 15. 求證於例題 14,若 $f_1(x,\gamma)=0$ 使

$$\alpha_0=c_0+c_1\gamma+c_2\gamma^2+\cdots+c_{n-1}\gamma^{n-1},$$

則
$$\alpha_1=c_0+c_1\omega\gamma+c_2\omega^2\gamma^2+\cdots+c_{n-1}\omega^{n-1}\gamma^{n-1},$$

等等，其中 α_0,α_1，等等為 $f(x)=0$ 之根，而 $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$ 為 Ω 內之數。求證 $f(x)=0$ 之二根之差不能為一 Ω 內之數。

例題 16. 求證有實係數之不可化可解五次方程式，不能有三實根及二複虛根。

證明葛羅華羣 (1) 必為五次；(2) 不能為 $G_{12}^{(5)}$ $G_6^{(5)}\mathrm{I}$, $G_6^{(5)}\mathrm{II}$ (§104 例題 5)；(3) 不能為 $G_5^{(5)}$ (§171)；(4) 欲試 $G_{20}^{(5)}$，取例題 1 內容此羣之 y^2. 若任意二根，譬如 α_0 及 α_1，假定為共軛虛數，則

$$y=\alpha_0 A+\alpha_1 B+C.$$

其中 A, B, C 為實值。因 $A=\alpha_4-\alpha_2-\alpha_3$, $B=\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4$，故不能有 $A=B$，因若然，則將使 $\alpha_2=\alpha_4$ 矣。如是，知 y 不能為實數。故除非 y 為純虛數，y^2 不能為實數。故 $y=(\alpha_0-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)$。欲 y^2 可在 Ω 內，須 $y=i\sqrt{f}\cdot\sqrt{g}$，而 $\alpha_0-\alpha_1=i\sqrt{f}$, $\alpha_4-\alpha_2=\sqrt{g}$，其中 f 及 g 為 Ω 內之正數。然由例題 15，f 及 g 不能為完全平方。由例題 13, 14, 15，知所與方程式之根為範圍 $\Omega_{(\omega,\gamma)}$ 內之數，惟 ω 為 1 之複虛五次根，而 γ 為不可化方程式 $y^5-a=0$ 之根，故 $\sqrt{f}$ 及 $\sqrt{g}$ 不在 $\Omega_{(\omega,\gamma)}$ 之內，而

方程式 $\alpha_0-\alpha_1=i\sqrt{f}$，$\alpha_4-\alpha_2=\sqrt{g}$ 爲不能。故 $G_{20}^{(5)}$ 不爲此羣(§155,B)

(5) $G_{10}^{(5)}$ 既不改變 y^2,故不爲此羣。

(6) 故此羣必爲 $G_{120}^{(5)}$ 或 $G_{60}^{(5)}$，二者皆爲不可解。

關於各種證法,可參看魏伯爾之代數學,卷1,669頁及魏伯爾之 Encyklopädie der Elementaren Algebra und Analysis, 327 頁。

例題 17. 求證 $x^5-4x-2=0$ 有二複虛根,且爲不可解。關於實根之近似值,可看 §26.

例題 18. 求證 $x^5-16x^2-2x+6=0$ 爲不可解。

例題 19. 求證 $x^5+1+i=0$ 爲可解。

例題 20. 試決定下列諸方程式何者爲可解:

(a) $x^5+5x+3i=0$.　　(c) $\dfrac{x^6-1}{x-1}=0$.

(b) $x^5-2ix+7=0$.　　(d) $x^5-27x^4+3x+6=0$.

201. 歷史的參考. 關於方程式論之先前及較初等部分之發展,考查 Ball, Fink, Marie, Zeuthen 及 Cajori 所著之數學史,及 Burnside 與 Panton 之方程式論第一卷之末之"註"。或考 Moritz Cantor 之名著,稱爲 Vorlesungen über Geschichte der Mathematik 者,更善。關於近來之發展,可看 C. A. Bjerknes 之 Niels-Henrik Abel (巴黎,

1885年); Picard 所編輯(1897年)之 Évariste Galois 之 Œuvres; Zeitsch. fur Mathematik und Physik (卷37增補119頁至159頁,1892年)內 H. Burkhardt 之 "Anfänge der Gruppentheorie und Paolo Ruffini". 看 Bulletin of the American Mathematical Society 內 James Pierpont 所著關於置換論內拉格蘭之位置(卷1, 2頁,196頁至204頁, 1895年),葛羅華之方程式論之從前的歷史(卷4, 332頁至337頁,1898年),葛羅華之集成著作(卷5, 296頁至300頁,1899年)之數篇;G. A. Miller 所作有限級之羣之理論內近來之進步之報告(卷5, 227頁至249頁,1889年); Henry B. Fine 所作"克羅內克及其代數方程式之算學的理論"(卷1, 173頁至184頁,1892年)。又參考 Monatshefte für Mathematik und Physik (卷6, 15頁至68頁, 1895年) 內 James Pierpont 之 "Zur Geschichte der Gleichung des V. Grades (閏 1858年); American Mathematical Monthly (卷8, 213頁至216頁,1901年)內 G. A. Miller 之有限級之羣之理論內數個基本定理之歷史; Felix Klein Vorlesungen über das Ikosaeder (1884年), 又數學之論文 (the Evanston Colloquium, 1894年); B. S. Easton 之 the Constructive Development of Group-theory (Philadelphia, 1902年)。

(終)

答案

§6，例題4：47112。

例題5：-252493。

例題6：$\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-29})$。

§14，例題3：$-\frac{1}{3}, \pm\sqrt{5}$。

例題4：$-\frac{3}{2}, -1\pm\sqrt{2}$。

例題5：$-\frac{3}{2}, -5, -5$。

例題6：$\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -3, -3$。

§15，例題2：a^2-2b。

例題6：$c-ab$。

例題7：a^2-2b。

例題8：$3c-ab$。

例題9：$b^2-2ac+2d$。

例題12：$-\frac{2}{21}, \frac{1}{105}$。

§21，例題4：-1為三重根，$\frac{5}{2}$為二重根。

§29，例題7：$x^4-60x^2+700x-100=0$。

例題8：$x^4-3x^3+768x+1024=0$。

§31，例題3：$a_m=0$。

例題6：$c, \pm1, \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a^2}}{2a}$。

§34，例題1：$H=\frac{1}{3}, G=-12$。

例題2：$H=-\frac{50}{3}$，$G=-135, I=-\frac{59}{3}$。

§35，例題5：$z^3-42z^2+411z+1388=0$。

§37，例題2：I之二根相等，或三根成等差級數。

例題3：-2376。

例題4：0。

§39，例題2：(1) $41, 1\frac{10}{23}$。

(2) $4\frac{1}{3}, 1\frac{10}{21}$。

(3) 37, 7。

(4) $3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}$。

§41，例題3：(1) $\frac{21}{5}$ 及 -5.

(2) 4 及 $-\frac{7}{4}$.

(3) 12 及 $-\frac{46}{29}$.

§42，例題3：(1) 在 8 與 9，-1 與 -2，-4 與 -5 之間.

(2) 在 3 與 4，4 與 5，-4 與 -5，-5 與 -6 之間.

(3) 在 1 與 2，2 與 3，5 與 6，6 與 7 之間。

§44，例題2：156，31。

§49，例題5：(1) 二實根 2.+，-2.+。

(2) 3.21，3.22，-17.4。

(3) 三實根

§50，例題1：$H=9$，$G=25$，$I=289$，$J=-940$，$D=+$。

§56，例題1：(1) 1.335759..

(2) -1.53172..

(3) .885119..

-1.46057..

(4) 1.3518..

(5) 1.51851..

$-.50849$..

-1.24359..

§67，例題1：-1，$-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3}$，$\pm i$。

§71，例題1：

$$\frac{(3c-ab)(a^2-2b)}{(b^2-2ac)(a^2b-b^2-3ac)}.$$

例題5：關於 $f(x)=0$，$a_1^2a_2-2a_2^2-a_1a_3+4a_4$.

例題6：$-a_2a_3+3a_1a_4-5a_5$.是。

例題 7: $\frac{18}{b_0{}^2}(b_1{}^2-b_0b_2)$.

例題 8: 24.

例題 11: $x^3-a_2x^2+(a_1a_3-4a_4)x-a_3{}^2-a_1{}^2a_4+4a_2a_4=0$.

例題 15: $-2a_1{}^3+9a_1a_2+27a_3$.

例題17: $x^3-12I+\sqrt{D}=0$.

§77, 例題 3: $49a^2-163a+283=0$ 之根。

例題 5: n.

例題 6: 0.

§93, 例題 1: (123)(412)(256).

§113, 例題 4: $G_4{}^{(4)}$ II.

例題 5: $G_4{}^{(4)}$ II.

例題 6: $G_4{}^{(4)}$ II.

§123, 例題 2: (c) $\sqrt{5}$.

(b) $\sqrt{-3}$.

(e) $\sqrt{-1}$.

例題 3: $\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{-1}$.

§128, 例題 2: (1), (3), (4), (7), (8), 爲可化。

§133, 例題 7: $\Omega=(i+\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

§135, 例題 7: 試 $N=\alpha+\alpha^4+\alpha^2=\alpha^4+(\alpha^4)^4+(\alpha^4)^2$.

§141, 例題 2: 命 $x=4x_1+1$.

§142, 例題 2, 例題 3: 非.

§148, 例題 3: $(\alpha\alpha_3)$.

§159, 例題 8: (a) $P=1$,

(b) $P=G_2{}^{(2)}$.

(c) $P=G_4{}^{(4)}$ II.

(d) $P=1$.

(e) $P=G_3{}^{(3)}$.

(g) $P=G_4{}^{(4)}$ I.

(i) $P=G_4{}^{(4)}$ III.

(k) $P=G_8{}^{(4)}$, $G_2{}^{(2)}$, $G_2{}^{(2)}$

$G_2^{(2)}$ 之積，各羣合其自己之相異之根爲之素。

$(l) P=G_4^{(4)}\mathrm{III}$，或其一分羣。

$(m) P=G_6^{(3)}$。

(n) 命 $x=g-1$。

§163,例題2: $4\alpha_1=1-z-w+w_1+z_1$.

$4\alpha_2=1+z-w+w_1-z_1$.

$4\alpha_3=1-z+w-w_1-z_1$.

$4\alpha=1+z+w-w_1+z_1$.

§188,例題1: $G_6^{(5)}\mathrm{II}$.

§199,例題1: $G_8^{(4)}$, $G_4^{(4)}\mathrm{II}$, $G_2^{(4)}$, 1.

中西名詞索引
(數字指頁數)

升學預備

算術問題解法指導　匡文濤編　一冊　四角

本書就算術問題指導解法，與代數、平面幾何、立體幾何、平面三角等，合爲一組．於預備升學及自修參考，均甚適用．所選問題，多饒興味，且對於中等程度概括無遺，解法則嶄新便捷，簡明得當．各種解法之首，均有摘要，列入有關係之定理及公式等，學者宜熟記而善用之．

代數學問題解法指導　匡文濤編　一冊　四角

是書與算術、幾何、三角等問題解法指導各書，合爲一組，體例大致相同．其包舉代數學之事項，爲因數分解、多項式之最大公約、及最小公倍、聯立一次方程式、分數方程式、聯立二次方程式、冪及根、比及比例、級數、對數、複利、年金等問題，淺深有序，排比綦費苦心，務使學者手此一編，於代數學解法，有事半功倍之效．

平面幾何問題解法指導　匡文濤編　一冊　四角

是書爲幾何學問題解法指導之平面部，與立體部分而爲二，便於研究幾何學者之采購．內容概列於下：（一）直綫形，（二）圓，（三）軌跡及作圖之重要問題，（四）面積，（五）比及比例，（六）軌跡及作圖，（七）正多角形及圓．

立體幾何問題解法指導　匡文濤編　一冊　二角半

是書爲幾何學問題解法指導之立體部，其體例與平面部大致相同．內容擇要列下：（一）空間之綫與平面，（二）多面體．（三）旋轉體．關於立體幾何學之問題，已包括無遺，且圖形準確，解釋詳明．

平面三角法問題解法指導　匡文濤編　一冊　二角

是書與算術代數幾何各科合爲一組，內容擇要列下：（一）三角函數之關係，（二）三角和差之三角函數，（三）特別角之三角函數，（四）三角方程式之消去法，（五）三角及函數，（六）三角函數值之極限，（七）三角形之性質及解法．

中華書局發行

專門辭典

中華百科辭典　精裝一冊　八元

全書約二百萬言：凡關於政治、社會、教育、經濟、文學、藝術、數學、哲學、理化博物等科學術語，以及社會流行名詞，無不盡量搜羅，詳加解釋。

中國教育辭典　精裝一冊　七元

本書體裁略仿德國萊因，法國畢松，美國孟祿等教育辭書之例：於教育原理、方法、行政、史傳以及有關教育之他種科學，均分別敘入，而於中國近代教育制度之沿革，古今教育思想之變遷，尤三致意焉。

中外地名詞典　精裝一冊　二元五角

是書為研究地理參攷之善本，搜集中外圖籍至數十種，合中外地名為一書。不惟供教科之參攷及自修之用，且足備旅行家實業家之研究。

理化詞典　精裝一冊　一元八角

本書凡理化上名詞、術語、計算法、實驗式、原子價、分子量等之測定法，均示以實例，附以圖表，並有英文名稱譯名，極便檢查。

博物詞典　精裝一冊　三元

本書凡植物學、動物學、礦物學、生理學各科名詞，無不搜羅完備，解釋詳明。附有中西對照表，檢查極便。

數學詞典　精裝一冊　三元

本書內容：❶辭典，❷英漢名詞對照，❸數學用略字及符號，❹定理及公式，❺數學用諸表，❻度量衡及貨幣表，❼外國數學家事略，❽本國數學家事略。

中華書局發行

常識叢書

本局出版常識叢書，分門別類，語簡意詳；是中等以上學生及各科專家必備的參考書．

地震淺說	楊鍾健 王恭睦	一冊	二角
南洋	黃栩園	一冊	三角半
殖民政策	吳應圖	一冊	三角半
現代五大強國	許士騏	一冊	三角
摩托車與道路	吳山	一冊	五角
道爾頓制淺說	舒新城	一冊	二角半
進化論淺說	陳兼善	一冊	二角半
國際貿易	吳應圖	一冊	二角半
貨幣概論	王恆	一冊	二角半
中國喪地史	謝彬	一冊	四角
人口問題	吳應圖	一冊	二角半
燃料問題	吳應圖	一冊	二角半
資本問題	吳應圖	一冊	二角半
駕駛汽車法	吳琢之	一冊	二角半
臭蟲與蚊蟲	尤其偉 陳家祥	一冊	二角半
心理學大意	舒新城	一冊	二角半
工業會計撮要	李賽	一冊	四角
近世之新發明	葛綏成	一冊	四角

利息問題	吳應圖	一冊	三角
遺傳學淺說	陳兼善	一冊	三角半
青年四大問題	莊澤宣	一冊	二角半
最近之日本	陳懋烈	一冊	三角半
跳蚤與蒼蠅	尤其偉 陳家祥	一冊	三角半
商法概要	吳應圖	一冊	三角半
歐洲遠古文化史	李璜	一冊	二角半
夢	舒新城	一冊	三角
科學的家庭	羅世疑	一冊	三角
華僑	李長傅	一冊	四角
深呼吸與冷水浴	褚東郊	一冊	三角
道教源流	傅代言	一冊	三角
文學概論	田漢	一冊	三角
中國之交通	葛綏成	一冊	五角
運動與衛生	葛綏成	一冊	五角
細菌與人生	張東民	一冊	二角
世界醫藥之新發明	丁錫康	一冊	六角

中華書局發行

(262)

民國十四年五月發行
民國十九年四月四版

算學叢書 方程式論（全一冊）
【定價銀一元二角】
（外埠另加郵匯費）

著者 FLORIAN CAJORI
譯者 諸暨倪德基
校者 松江雷璪
發行者 中華書局
印刷者 中華書局
印刷所 上海靜安寺路二七七號 中華書局
總發行所 上海棋盤街 中華書局
分發行所 北平 天津 張家口 石家莊 邢台 保定 濟南 青島 太原 開封 鄭州 西安 蘭州 成都 重慶 長沙 常德 衡州 漢口 南昌 中華書局 九江 安慶 蕪湖 南京 徐州 杭州 溫州 福州 廈門 廣州 汕頭 潮州 梧州 雲南 遼寧 吉林 長春 哈爾濱 香港 新加坡