高中複習叢書

幾何學

(2)

榮方舟編

改訂本

商務印書館發行

高中複習叢書

幾　何　學

榮方舟編

商務印書館發行

高中復習叢書編輯大意

一、本叢書係根據最近教育部頒佈之高級中學課程標準，及本館高中復興教科書分科編輯而成。

二、本叢書編著綱要，表解與圖解並用，務使讀者對於每一科的基本知識，有具體的了解。

三、本叢書搜集近年來全國各省市高中會考試題，按題作答，分析清楚，更可幫助讀者對升學會考作相當的準備。

四、本叢書除參考各教科書編纂外，更於東西文參考書中搜求新穎的解題方法，故益完備。

五、本叢書爲供讀者需要，忽促出版，內容或有忽略脫漏之處，如蒙讀者來函更正，尤所歡迎。

高中複習叢書

幾何學

引　言

幾何學是算學中最不易著手的東西,是最難應付裕如的東西.因為他各個命題,有各個特殊的證法或解法,沒有一定的規律可以引用來解決一切的.隨便那一位大算學家,大幾何學家,他不能誇口說"我能解決一切的幾何命題,"幾何命題的證法和解法,眞是千變萬化,複雜極了.所以幾何學實有複習的必要.可是幾何學的複習也很難著手.各種命題的證法和解法,既沒有一定的規律可以歸納起來,若是漫無統系的隨便選擇些命題,各個的給以證法或解法,不能得舉一反三之效,那又有什麼用處呢?本書有鑒於此,爰將各種命題分為類別.擇要加以詳細證法和解法.玆列舉各類如下:

平面之部

立體之部

幾何學的各種命題,要不出乎以上數類,而無論何類的證法或解法,都以基本定理做根據.職是之故,本書先將基本定理彙集.俾學者首先將基本定理複閱一過,然後循序分類練習各種命題的證法和解法,庶幾可得事半功倍之效.平面部份命題中以等線分等角一類爲最多,故本書關於此一類,共分三節.第一節較易,大多用直線形定理證明.高中學生稍有根柢者,或已習知.第二節多數須引用圓的定理.第三節最難亦爲最要.其證法須引用所有各種定理.蓋本書自面積比例以下的諸題,都須觀察題中性質,隨機應變使假設與終決接近.故本書下半部,對於幾何學較有根柢之高中學生也很有複習的價值.

作圖題解法,注重解析.若但有作法而不先有解析,則不知作法的來源,不知此作法的從何想起,於學者裨益殊鮮.故本書往往有一題數解者,

因本書解題,本不重在個別問題的解決,而重在俾學者熟悉解題的路徑,定理的應用;務使學者能聞一以知十,舉一而反三也.

平面之部

1. 基本定理彙集

定理 1. 凡直線角都相等.

系 1. 凡直角都相等.

系 2. 等角的餘角相等.

系 3. 等角的補角相等.

定理 2. 相隣兩角的外邊成一直線,則這兩角的和是二直角.

定理 3. 相鄰兩角的和是二直角,則這兩角的外邊成一直線.

定理 4. 兩直線相交所成的對頂角相等.

定理 5 兩直線爲一直線所截,若所得一雙內錯角(或同位角)相等,則這兩直線平行.

系. 兩直線爲一直線所截,若所得一雙同旁內角互爲補角,則這兩直線平行.

定理6. 兩平行線爲一直線所截,則所得的各雙內錯角相等;各雙同位角也相等;各雙同旁內角互爲補角.

定理7. 兩直線各與其他一直線平行,則這兩直線互相平行.

定理8. 兩三角形中,第一三角形的兩邊和夾角與第二三角形的兩邊和夾角各對應相等,則這兩三角形是全等形.

定理9. 兩三角形中,第一三角形的兩角及其相共的邊與第二三角形的兩角及其相共的邊各對應相等,則這兩三角形是全等形.

定理10. 二等邊三角形的底角相等.

系. 三角形的三邊都相等,則三角也都相等.

定理11. 三角形的兩角相等,則這三角形是二等邊三角形.

系. 三角形的三角都相等,則三邊也都相等.

定理12. 兩三角形中,第一三角形的三邊與第二三角形的三邊各對應相等,則這兩三角形是全等形.

定理13. 三角形的外角等於他的兩個內對角之和.

系 1. 三角形三內角之和等於二直角.

系 2. 三角形的一角是直角,則其他兩角互爲餘角.

系 3. 兩三角形中,有兩雙對應角對對相等,則他們的第三雙對應角也相等.

系 4. 兩三角形中,有兩雙對應角對對相等,又有一雙等角的對邊亦對應相等,則這兩三角形是全等形

定理14. 兩個直角三角形的一雙斜邊及一雙直角邊各對應相等,則這兩個直角三角形是全等形.

定理15. 三角形兩邊不相等,則大邊的對角大於小邊的對角.

定理16. 三角形兩角不相等,則大角的對邊大於小角的對邊.

定理17. 兩三角形的兩雙對應邊對對相等,而其夾角不等,則他們的第三雙對應邊也不等;夾角大的對邊大.

定理18. 兩三角形的兩雙對應邊對對相等,而第三雙對應邊不等,則兩雙等邊的夾角也不等;第三邊大的對角大.

定理19. 從直線外一點至此直線所引諸線份中,垂線是最小.

定理20. 凸多角形諸內角之和等於二直角的邊數倍數減去四直角.

定理21. 凸多角形各邊順次延長所得諸外角之和等於四直角.

定理22. 平行四邊形的對邊相等,對角相等,對角線互相等分.

定理23. 一個四邊形的兩雙對邊各相等,或兩雙對角各相等,或一雙對邊平行且相等,則這四邊形是平行四邊形.

定理24. 三角形一邊的平行線若過第二邊的中點,則也過第三邊的中點.

定理25. 三角形兩邊中點所聯線分平行於第三邊且等於第三邊之半.

定理26. 同圓或等圓的半徑相等;直徑相等.

定理27. 同圓或等圓中,等中心角,對等弧,對等弦;等弧對等中心角,對等弦;等弦對等中心角,對等弧.

定理28. 同圓或等圓中,大中心角對大弧,對大弦;大弧對大中心角,對大弦;大弦對大中心角,對大弧.(弧指劣弧而說,角指劣角而說)

定理29. 圓的中心與弦的中點的聯線垂直於此弦.

定理30. 與弦垂直的直徑過此弦的中點,並過此弦所張弧的中點.

定理31. 弦的垂直等分線過圓的中心.

定理32. 同圓或等圓中,等弦與中心等距.

定理33. 同圓或等圓中,與中心距離相等的弦相等.

定理34. 同圓或等圓中,大弦與中心距離較近.

定理35. 同圓或等圓中,與中心距離近的弦較大.

定理36. 立於同弧上的圓周角等於中心角的半.

定理37. 立於同弧或等弧上的圓周角相等.

系. 同弓形角相等.

定理38. 弓形是半圓,則他的弓形角是直角;弓形大於半圓,則他的弓形角是銳角;弓形小於半圓,則他的弓形角是鈍角.

定理39. 弓形角是直角,則此弓形是半圓;弓形角是銳角,則此弓形大於半圓;弓形角是鈍角,則此弓形小於半圓.

定理40. 圓內接四邊形的對角互爲補角.

系. 圓內接四邊形的外角等於他的內對角.

定理41. C, D在AB的同旁,若$\angle ACB=\angle ADB$,則A, B, C, D共圓.

定理42. C, D在AB的兩旁,若$\angle ACB+\angle ADB=2rt.\angle$則$A, B, C, D$共圓.

系 1. 四邊形的對角互爲補角,則這四邊形內接於圓.

系 2. 四邊形的外角等於他的內對角,則這四邊形內接於圓.

定理43. 從圓周上一點所作過此點的半徑的

垂線是圓的切線.

系 1. 圓中心與切點的聯線垂直於切線.

系 2. 從中心所作切線的垂線必過切點.

系 3. 從切點所作切線的垂線必過中心.

定理44. 從圓外一點所作圓的兩切線相等.

定理45. 切線與過切點的弦所夾的角等於此角內所含弧上的圓周角.

定理46. 相交兩圓的公共弦垂直於中心線,且爲中心線所等分.

定理47. 相切兩圓的中心線必過切點.

定理48. 相切兩圓的公切線垂直於中心線.

定理49. 同底上在兩平行線間的平行四邊形等積.

系 1. 等底等高的平行四邊形等積.

系 2. 等底平行四邊形的高不等,則他們的面積也不等;高大的面積大,等高平行四邊形的底不等,則他們的面積也不等;底大的面積大.

系 3. 等積等高的平行四邊形等底.

系 4. 等積等底的平行四邊形等高.

定理50. 三角形的面積等於與此三角形等底等高的平行四邊形的面積之半.

系 1. 等底等高的三角形等積.

系 2. 等積等高的三角形等底.

系 3. 等積等底的三角形等高.

系 4. 兩三角形底等高不等,則他們的面積也不等,高大的面積也大;兩三角形高等底不等,則他們的面積也不等,底大的面積也大.

定理51 沿平行四邊形的對角線的兩餘形等積.

平行四邊形之一對角線平分之為兩全等之三角形,過此對角線上一點作各邊之平行線,分此兩三角形各成二小三角形及一小平行四邊形,兩大三角形中之二小三角形各對應全等,則剩餘之小平行四邊形,即謂餘形,雖不全等而等積.

定理52. 兩線分所包矩形等於其一線分及其他一線分所含諸部份所包諸矩形之和.

定理53. 兩線分和上之正方形等於各線分上正方形之和加此兩線分所包矩形之二倍.

定理54. 兩線分差上之正方形等於各線分上正方形之和減此兩線分所包矩形之二倍.

定理55. 兩線分上正方形之差等於此兩線分之和及此兩線分之差所包之矩形.

定理56. 直角三角形斜邊上之正方形等於其他兩邊上正方形之和.

定理57. 鈍角三角形鈍角對邊上之正方形等於其他兩邊上正方形之和加其他兩邊中一邊與他邊在此邊上正射影所包矩形之二倍.

定理58. 三角形銳角對邊上之正方形等於其他兩邊上正方形之和減去其他兩邊中一邊與他邊在此邊上正射影所包矩形之二倍.

定理59. 三角形兩邊上正方形之和等於其第三邊上的中線上的正方形及其第三邊的一半上的正方形之和之二倍.

定理60. 三角形兩邊上正方形之差等於其第三邊及其第三邊上的中線在此邊上的射影所包矩形之二倍.

定理61. 弦的內分點或外分點所分弦的兩部份所包之矩形等於半徑上正方形及此點與中

心所聯線分上正方形之差.

系 1. 過圓內一點所作諸弦的兩部份所包矩形都相等.

系 2. 過圓外一點所作諸割線,其全割線,及圓外部份所包矩形都相等.

系 3. 過圓外一點作切線及任意一割線,全割線及其圓外部份所包矩形等於切線上之正方形.

定理 62. 若 A, B 二量之比等於 m, n 二數之比,則 $nA=mB$. 若 A 量的 n 倍等於 B 量的 m 倍,則 $A:B=m:n$.

定理 63. A, B, C, D 四個同類量,若 $A:B=C:D$ 則 $A:C=B:D$

定理 64. 等比的逆比相等(即若 $A:B=C:D$ 則 $B:A=D:C$)

定理 65. 二量同倍量或同分量的比等於此二量的比(即 $mA:mB=A:B$; $\frac{1}{m}A:\frac{1}{m}B=A:B$)

定理 66. $A, B, C, D, E, F \cdots K, L$ 都是同類量,若 $A:B=C:D=E:F=\cdots=K:L$, 則 $A+C+E+\cdots+K$ 與 $B+D+F+\cdots+L$ 的比等於各原比

定理67. 若$A:B=C:D$,則$A\pm B:B=C\pm D:D$,又$A:A\pm B=C:C\pm D$.

定理68. 若$A:B=P:Q$, $B:C=Q:R$,則$A:C=P:R$.

定理69. 三角形一邊的平行線把其他兩邊分爲四部份成比例.

定理70. 一直線分三角形的兩邊爲四部份成比例,那麼此直線與第三邊平行.

定理71. 兩三角形中,有兩雙對應角對對相等,那麼此兩三角形是相似形.

定理72. 兩三角形中,有一雙對應角相等,夾此角的兩雙對應邊成比例,那麼此兩三角形是相似形.

定理73. 兩三角形的三雙對應邊對對的比相等,那麼此兩三角形是相似形.

定理74. 直角三角形從直角頂點至斜邊所引垂線分原形成兩個相似三角形,且與原形也相似.

系 1. 直角三角形的直角邊是斜邊及此邊在斜邊上正射影的比例中項.

系 2. 直角三角形斜邊上的高是直角兩邊在斜邊上的正射影的比例中項.

定理75. 三角形一角的等分線所分對邊爲二部份之比等於夾此角的二邊之比.外角等分線同.

定理76. 過三角形一角頂作一直線內分對邊爲兩部份,其比等於夾此角兩邊之比,那麼此直線是頂角的等分線;外分對邊之比等於他兩邊之比,那麼是頂角的外等分線.

定理77. 若四線分成比例,那麼兩外項所包矩形等於兩內項所包矩形.

定理78. 兩矩形相等,那麼一矩形的兩邊做外項,他一矩形的兩邊做內項成比例.

定理79. 相似三角形面積之比等於其對應邊上正方形之比.一切相似形同.

定理80. 有一雙對應角相等的兩三角形(或兩平行四邊形)面積之比等於夾此角兩邊所包矩形之比.

定理81. 兩三角形(或平行四邊形)面積之比等於其底邊及高所包矩形之比.

定理82. 四邊形兩對角線所包矩形小於其兩

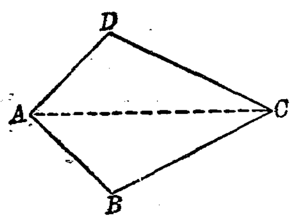
雙對邊所包矩形之和.若四邊形能外接於圓,則其對角線所包矩形與兩雙對邊所包矩形之和等.

定理83. 三角形兩邊所包矩形等於其第三邊上之高及其外接圓直徑所包矩形.

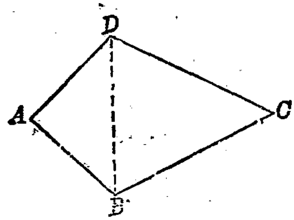
定理84. 從圓外一點至圓作切線及任意一割線,此切線是全割線及此割線的圓外部份的比例中項.

2. 等線分及等角的證例一

(1) 四邊形 $ABCD$ 中,已知 $AB=AD$, $\angle B=\angle D$ 求證 $BC=CD$.



若聯對角線 AC,要證 $\triangle ABC \cong \triangle ADC$, 則 BC 就可等於 CD. 但 $\triangle ABC$, $\triangle ADC$ 中, $AB=AD$, $\angle B=\angle D$, AC 爲公邊,所知的是兩對邊而一雙非等邊所夾之角.不合定理,不能證明.故須另行想法, BC 和 CD 是兩個



相接線份.凡兩個相接線份要證他相等,可聯結其他兩端成一三角形,證其兩底角相等.故聯 BD 觀之,很容易得如下證法.

〔證〕 $\because$ $AB=AD$, (假設)

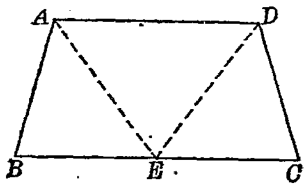
$\therefore$ $\angle ABD=\angle ADB$. (定理10)

但 $\angle ABC=\angle ADC$, (假設)

故 $\angle DBC=\angle BDC$, (等量減等量差相等)

故 $BC=CD$. (定理11) Q. E. D.

(2) 四邊形 $ABCD$ 中,已知 $AB=CD$, $\angle B=\angle C$. 求證 $\angle A=\angle D$.



〔證一〕 BC 上取中點 E,聯 EA, ED. 則在 $\triangle ABE$, $\triangle DCE$ 中,

$AB=DC$. (假設), $\angle B=\angle C$ (假設),

$BE=EC$ (E 是 BC 中點). 故 $\triangle ABE\cong\triangle DCE$ (定理8).

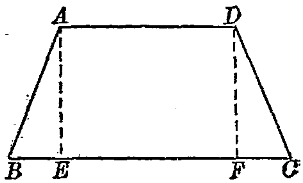
$\therefore$ $\angle BAE=\angle CDE$, $AE=DE$.

故 $\angle EAD=\angle EDA$ (定理10)

$\therefore$ $\angle BAE+\angle EAD=\angle CDE+\angle EDA$,

即 $\angle A=\angle D$. Q. E. D.

〔證二〕 從 A, D 各作 BC 的垂線 AE, DF 交 BC 於 E, F. 則在 $\triangle ABE$, $\triangle DCF$ 中,



$AB=DC$, $\angle B=\angle C$,

$\angle AEB=\angle DFC$ (直角相等), 故 $\triangle ABE \cong \triangle DCF$, (定理 13 系 4).

$\therefore\ \angle BAE=\angle CDF$, $AE=DF$.

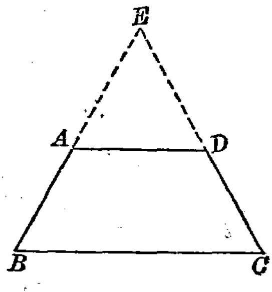
但 $AE \parallel DF$ $\therefore$ $AEFD$ 是 $\square$ (定理 23).

又因 AE, DF 都是 BC 的垂線,

$\therefore$ $AEFD$ 是 $\sqsubset\!\sqsupset$. $\therefore$ $\angle EAD=\angle FDA=rt.\angle$.

故 $\angle BAE+\angle EAD=\angle CDF+\angle FDA$,

即 $\angle A=\angle D$, Q. E. D.



〔證三〕 延長 BA, CD 交於 E. 〔若 BA, CD 不相交, 則必平行,那麼因 BA, CD 又是相等故 $ABCD$ 是平行四邊形(定理 23).

則 $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$.(定理 22).

今 $\angle B=\angle C$, 故 $\angle A=\angle D$, 很顯明了.〕

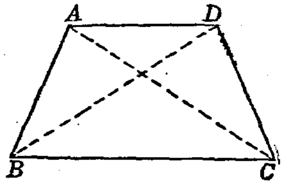
則因 $\angle B=\angle C$, $\therefore$ $EB=EC$ (定理 11).

今 $AB=DC$ (假設), $\therefore$ $EA=ED$ (等量減等量,差相等).

$\therefore$ $\angle EAD=\angle EDA$ (定理 10).

$\therefore$ $\angle BAD=\angle CDA$ (定理 1 系 3). Q. E. D.

〔證四〕 聯 AC, BD 在



$\triangle ABC$, $\triangle DCB$ 中,

$AB=DC$, $\angle B=\angle C$,

$BC=BC$,

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ (定理 8). $\therefore$ $AC=DB$.

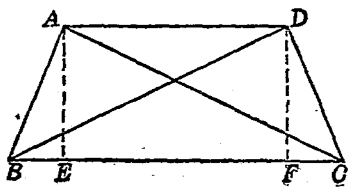
再在 $\triangle ABD$, $\triangle DCA$ 中,

$$AB=DC,\ BD=CA,\ AD=AD$$

$\therefore$ $\triangle ABD \cong \triangle DCA$ (定理 12).

$\therefore$ $\angle A=\angle D$. Q. E. D.

(3) 梯形的兩個對角線若相等,那麼這梯形是二等邊梯形.



已知 $AD \parallel BC$ 和

$AC=BD$.

求證 $AB=DC$.

〔證一〕 作 $AE \perp BC$, $DF \perp BC$.

則因 $AD \parallel BC$, 故 $AEFD$ 是矩形.

$$\therefore\ AE = DF.$$

在 $\triangle AEC$, $\triangle DFB$ 中,

$$AE = DF,\ AC = DB,\ \angle AEC = \angle DFB = rt.\angle,$$

$\therefore$ $\triangle AEC \cong \triangle DFB$ (定理 14). $\therefore$ $EC = BF$.

$\because$ $EC = BF$, $\therefore$ $BE = CF$. (等量減等量差相等)

在 $\triangle ABE$, $\triangle DCF$ 中, $AE = DF$, $BE = CF$,

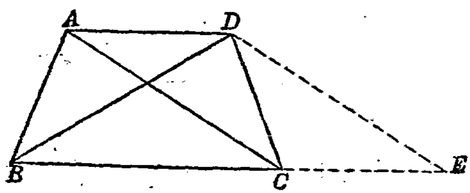
$$\angle AEB = \angle DFC = rt.\angle,$$

$\therefore$ $\triangle AEB \cong \triangle DCF$ (定理 8).

$\therefore$ $AB = DC$. Q. E. D.

〔證二〕 延長 BC 至 E 令 $CE = AD$. 聯 DE.

則 $ACED$ 是 ▱ (定理 23). $\therefore$ $DE = AC$, $DE \parallel AC$.



但 $AC = BD$,

$\therefore$ $DE = DB$, $\therefore$ $\angle DBE = \angle E$ (定理 10).

$\because\ DE \parallel AC,\ \therefore\ \angle ACB=\angle E.$ (定理6)

$\therefore\ \angle DBE=\angle ACB.$

在 $\triangle ABC$, $\triangle DCB$ 中, $AC=DB$, $BC=BC$,

$\angle ACB=\angle DBC,\ \therefore\ \triangle ABC\cong\triangle DCB.$

$\therefore\ AB=DC.$ Q. E. D.

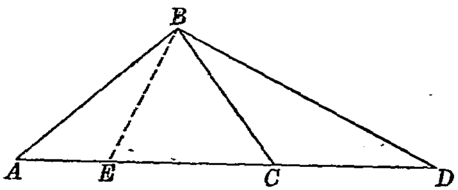
(4) 把任意三角形 ABC 的一邊 AC 延長至 D 令 $CD=CB$. 求證 $\angle ABD=90^\circ+\frac{1}{2}(\angle ABC-\angle A)$.

〔證〕 作 BE 交 AC 於 E, 令 $\angle DBE=rt.\angle$

則 $\angle BED+\angle D=rt.\angle$(定理13系2).

$\because\ CD=CB,\ \therefore\ \angle CBD=\angle CDB,$

$\therefore\ \angle CBE=\angle CEB.$



$$\angle ABE=\angle ABC-\angle EBC=\angle ABC-\angle BEC$$

$$=\angle ABC-(\angle ABE+\angle A)$$

$$=\angle ABC-\angle A-\angle ABE$$

$\therefore\ 2\angle ABE=\angle ABC-\angle A.$

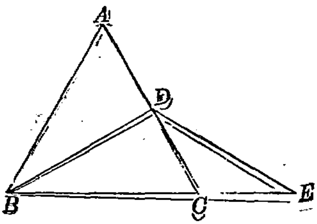
$\therefore \quad \angle ABE=\frac{1}{2}(\angle ABC-\angle A).$

$\therefore \quad \angle ABD=\angle EBD+\angle ABE$

$=90^\circ+\frac{1}{2}(\angle ABC-\angle A).$ Q. E. D.

(5) $\triangle ABC$ 是正三角形. D 是 AC 的中點. 延長 BC 至 E 令 $CE=CD$. 聯 ΓE. 求證 $DE=DB$.

〔證〕 $\triangle ABC$ 是正三角形, $\therefore AB=BC$, D 是 AC 的中點,卽 $AD=DC$. 又 BD 是公共邊.



$\therefore \quad \triangle ABD\cong\triangle CBD$

$\therefore \quad \angle ABD=\angle CBD=\frac{1}{2}\angle ABC.$

$\angle DCB=\angle CDE+\angle CED$ (定理13).

但 $CD=CE$, $\therefore \quad \angle CDE=\angle CED.$

$\therefore \quad \angle DCB=2\angle CED.$

卽 $\quad \angle CED=\frac{1}{2}\angle LCB.$

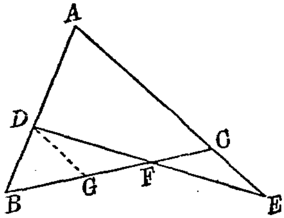
$\because \quad \triangle ABC$ 是正三角形, $\therefore \quad AB=AC$,

$\therefore \quad \angle ABC=\angle DCB. \qquad \therefore \quad \angle CBD=\angle CED$

(等量之半必相等) $\therefore DE=DB$. (定理11) Q. E. D.

(6) $\triangle AEC$ 是二等邊三角形, BC 是底邊. 在一

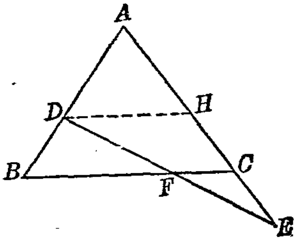
邊 AB 上取任意一點D.延長其他一邊 AC 至 E,令 $CE=BD$,聯 DE 交 BC 於 F.



求證 F 是 DE 的中點.

〔證一〕 過 D 作 AE 的平行線交 BC 於 G. 於是想法證 $\triangle DGF \cong \triangle CEF$.

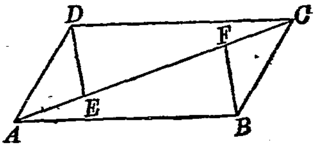
〔證二〕 過 D 作 BC 的平行線交 AE 於 H. 於是想法證 $HC=CE$. 因若能證得 $HC=CE$,則因 $FC \parallel DH$,故根據定理 24 可以證明 DF 亦必等於 FE.



3. 平行線及垂直線的證例

(7) E,F 是平行四邊形 $ABCD$ 對角線 AC 上的兩點,而 $AE=CF$.

求證 $DE \parallel BF$.



要證兩線平行,只要證得他的一雙內錯角

相等. 故本題只要證得 $\angle DEC$ 和 $\angle BFA$ 兩角相等, 卽可得 $DE \parallel BF$. 故得證法如下:

〔證〕 $\because$ $ABCD$ 是▱, $\therefore$ $DC = AB$.

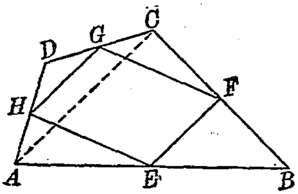
$\because$ $DC \parallel AB$, $\therefore$ $\angle DCA = \angle BAC$.

$\because$ $AE = CF$, $\therefore$ $EC = AF$.

$\therefore$ $\triangle DEC \cong \triangle BFA$ (定理8)

$\therefore$ $\angle DEC = \angle BFA$. $\therefore$ $DE \parallel BF$. Q. E. D.

(8) 任意四邊形各邊中點順次聯結所成的新四邊形是平行四邊形.



已知 E, F, G, H 各爲 AB, BC, CD, DA 的中點.

求證 $EFGH$ 是平行四邊形.

本題要證 $EF \parallel HG$, $EH \parallel FG$. 然題中內錯角, 同位角等,都無從觀察. 因 $ABCD$ 是任意四邊形故 $\triangle AEH$, $\triangle BFE$, $\triangle CFG$, $\triangle DGH$ 諸三角形都無特殊關係. 但已知的是 E, F, G, H 爲各邊中點, 我們因此就想到一條關於平行線的定理25. "三角形兩邊中點的聯線平行於底". 因此就得證法

如下:

〔證〕 聯 AC.

在 $\triangle BAC$ 中, E 是 BA 的中點,

F 是 BC 的中點, $\therefore$ $EF \parallel AC$.

在 $\triangle DAC$ 中, H 是 DA 的中點,

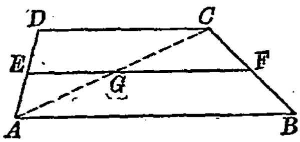
G 是 DC 的中點, $\therefore$ $HG \parallel AC$.

故 $EF \parallel HG$.

同樣聯 BD, 可證 $EH \parallel FG$.

$\therefore$ $EFGH$ 是平行四邊形. Q. E. D.

(9) 梯形兩邊中點的聯線平行於底.



已知 $ABCD$ 是梯形,

即 $DC \parallel AB$, 又知 E, F 各為 DA, CB 的中點.

求證 $EF \parallel AB$.

〔證一〕 聯 AC. 取 AC 的中點 G. 聯 EG, GF.

在 $\triangle ACD$ 中, E, G 各為 AD, AC 的中點,

$\therefore$ $EG \parallel DC$.

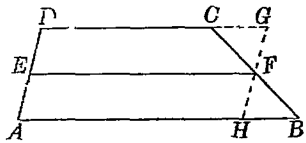
在 $\triangle CAB$ 中, G, F 各為 CA, CB 的中點,

$\therefore$ $GF \parallel AB$.

但 $DC \parallel AB$, $\therefore EG, GF$ 都與 AB 平行.

故 EGF 是一直線(因過一點祇能作一直線與他一直線平行,即過一點而平行於一直線之直線惟一無二,爲幾何公理之一),$\therefore EF \parallel AB$.　　Q.E.D.

〔證二〕 過 F 作 AD 的平行線交 AB 於 H,交 DC 的延線於 G. 在 $\triangle CGF$, $\triangle BHF$ 中



$$CF=FB,\ \angle CFG=\angle BFH,$$

又因 $DG \parallel AB$, $\therefore$ $\angle GCF=\angle HBF$,

$$\therefore\ \triangle CGF \cong \triangle BHF.$$

故 $GF=FH$.

$$\because\ AHGD \text{ 是平行四邊形},$$

故 $AD=HG$. 今 $AE=ED=\frac{1}{2}AD$

又 $HF=FG=\frac{1}{2}HG$

$\therefore AE=HF$

又 $AE \parallel HF$, $\therefore AHFE$ 是平行四邊形

$\therefore EF \parallel AB$.　　Q.E.D.

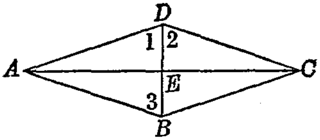
(10) 菱形的對角線互相垂直.

已知 $ABCD$ 是菱形,即 $AB=BC=CD=DA$.

求證 $DB \perp AC$.

〔證〕 $\because\ AD=AB$,

$\therefore\ \angle 1=\angle 3.$



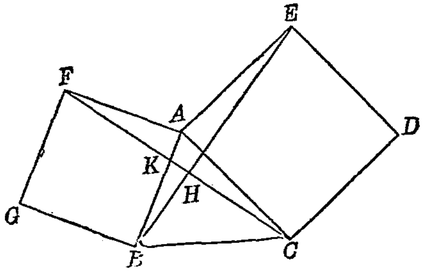
$\because\ DC \parallel AB$ (菱形也是平行四邊形),

$\therefore\ \angle 3=\angle 2,\quad \therefore\ \angle 1=\angle 2.$

又因 $DA=DC$, DE 是公共邊.故 $\triangle ADE \cong \triangle CDE$,

$\therefore\ \angle DEA=\angle DEC=rt\angle.\ \therefore\ DB \perp AC.$ Q.E.D.

(11) $ABGF$, $ACDE$ 是 $\triangle ABC$ 的兩邊 AB, AC 上的兩個正方形.求證 $BE \perp CF$.



〔證〕 在 $\triangle ABE$, $\triangle AFC$ 中,

$AB=AF$, $AE=AC$,

$\angle BAE=\angle FAC\ (rt\angle+\angle BAC)$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle AFC$,

$$\therefore \quad \angle ABE = \angle AFC.$$

名 BE, CF 的交點爲 H, AB, CF 的交點爲 K.

在 $\triangle AFK$, $\triangle HBK$ 中,

$$\angle AFK = \angle HBK, \angle AKF = \angle BKH,$$

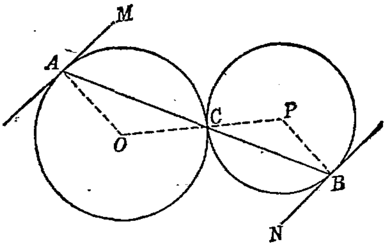
$$\therefore \quad \angle FAK = \angle BHK \text{ (定理13系3)}$$

但 $\angle FAK = rt.\angle$, $\therefore \quad \angle BHK = rt.\angle$.

$$\therefore \quad BE \perp CF. \qquad Q. E. D.$$

(12) 兩圓外切於 C. 過 C 作一直線交兩圓周於 A 及 B. 過 A, B 各作圓的切線 AM, BN.

求證 $AM \parallel BN$.



〔證一〕 聯中心線 OP, 則 OP 必過 C 點 (定理 47).

聯 OA, PB.

$$\because \quad OA = OC, \quad \therefore \quad \angle OAC = \angle OCA.$$

$$\because \quad PB = PC \quad \therefore \quad \angle PBC = \angle PCB.$$

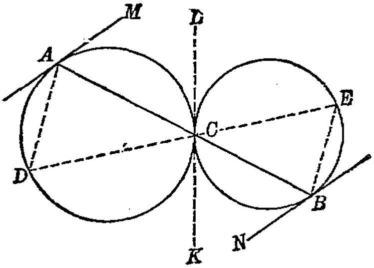
但 $\angle OCA = \angle PCB$, $\therefore \quad \angle OAC = \angle PBC$,

但 $\angle OAM = \angle PBN = rt.\angle$ (定理43系1),

$$\therefore \quad \angle BAM = \angle ABN \text{ (定理1系2)}$$

$\therefore \quad AM \parallel BN.$ **Q. E. D**

〔證二〕 過 C 作兩圓的公切線 LK. 再作任意一割線交兩圓於 D, E.



則 $\angle MAB$

$=\angle ADC$ (定理45)

$=\angle ACL$ (定理45)

$=\angle BCK$ (定理 4)

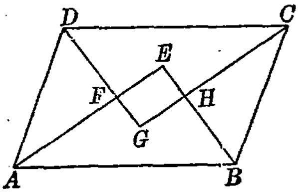
$=\angle CEB$ (定理45)

$=\angle ABN$ (定理45).

$\therefore \quad AM \parallel BN.$ **Q. E. D.**

(13) 平行四邊形各角的等分線圍成一矩形.

$ABCD$ 是平行四邊形. AE, BE, CG, DG 各為 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ 的等分線. 求證 $EFGH$ 是矩形.



〔證〕 $\because$ $ABCD$ 是平行四邊形.

$\therefore\ AD \parallel BC,\quad \therefore\ \angle ADC+\angle BCD=2rt.\angle$, (定理 6).

令　$\angle CDG=\frac{1}{2}\angle ADC,\quad \angle DCG=\frac{1}{2}\angle BCD$

$$\therefore\ \angle CDG+\angle DCG=rt.\angle.$$

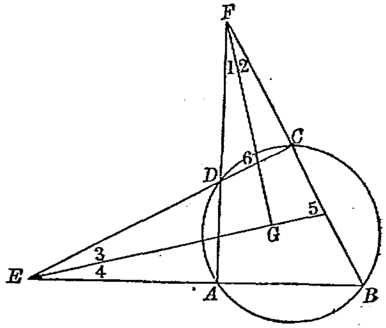
但 $\angle CDG+\angle DCG+\angle DGC=2rt.\angle$, (定理13系 1)

$$\therefore\ \angle DGC=rt.\angle.$$

同樣可證 $\angle CHB, \angle BEA, \angle AFD$ 都等於直角.

$\therefore$ $EFGH$ 是矩形.　　Q. E. D

(14) $ABCD$ 是圓內接四邊形. 延長他的對邊 BA, CD 交於 E, AD, BC 交於 F. EG, FG 各爲 $\angle E$, $\angle F$ 的等分線. 求證 $EG\perp FG$.



〔證一〕

$$\left.\begin{aligned}\angle EDF&=\angle 1+\angle 6\\&=\angle 1+\angle 3+\angle EGF\end{aligned}\right\}(\text{定理}13)$$

$$=\angle 2+\angle 4+\angle EGF.(\because\ \angle 1=\angle 2,\ \angle 3=\angle 4)$$

$$\left.\begin{aligned}\angle EGF&=\angle 2+\angle 5\\&=\angle 2+\angle 4+\angle EBF.\end{aligned}\right\}\text{(定理 13)}$$

故 $\angle EDF-\angle EGF=\angle EGF-\angle EBF$

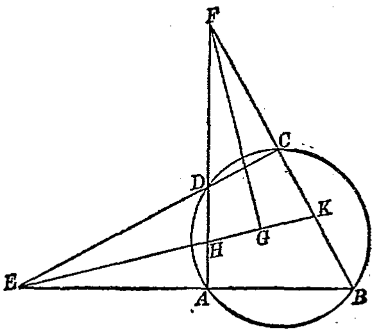
故 $\angle EDF+\angle EBF=2\,EGF.$

但 $\angle EDF+\angle EBF=rt\angle.$(定理 40)

故 $\angle EGF=rt\angle.$

$\therefore$ $EG\perp FG.$ **Q. E. D.**

〔證二〕 命 EG 與 FA, FB 的交點各爲 $H, K.$



$\angle FHG=\angle HED+\angle HDE.$

$\angle FKG=\angle KEB+\angle KBE.$

但因 $\angle HED=\angle KEB,$

$\angle HDE=\angle KBE$ (定理 40 系)

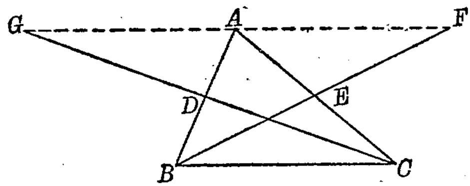
$\therefore$ $\angle FHG=\angle FKG.$ 又因 $\angle HFG=\angle KFG,$

$\therefore$ $\angle FGH=\angle FGK.$ (定理 13 系 3).

$\therefore$ $FG\perp EG.$ **Q. E. D.**

4. 共線共點共圓的證例

(15) 延長$\triangle ABC$的兩中線BE, CD各至F, G,令



$EF=BE, DG=CD$. 求證G, A, F共在一直線上.

〔證〕 聯GA, AF. 在$\triangle ADG, \triangle BDC$中,

$AD=BD, GD=CD, \angle ADG=\angle BDC,$

$\therefore\ \triangle ADG\cong\triangle BDC.$ 故 $\angle GAD=\angle CBD.$

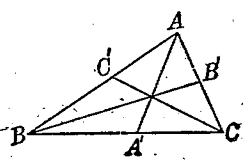
同樣可證 $\angle FAE=\angle BCE.$

但因 $\angle CBD+\angle BAC+\angle BCE=2rt.\angle.$

$\therefore\ \angle GAD+\angle BAC+\angle FAE=2rt.\angle$

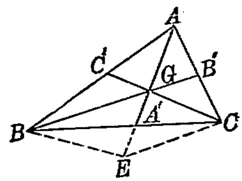
$\therefore\ GA, AF$ 成一直線. Q. E. D.

(16) 任意三角形的三個中線共點.



AA', BB', CC' 是 $\triangle ABC$的中線. 求證AA', BB', CC'共點.

〔證〕 命 BB', CC' 的交點為 G. 聯 AG 而延長之至 E. 令 $GE=AG$. 聯 BE, CE.



在 $\triangle ABE$ 中, $AC'=C'B$,

$$AG=GE, \quad \therefore \quad C'G \parallel BE.$$

在 $\triangle ACE$ 中, $AB'=B'C, AG=GE \quad \therefore \quad B'G \parallel CE.$

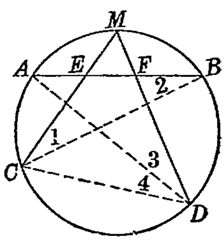
故 $BECG$ 是平行四邊形. 故 BC, EG 互相等分

即 GE 必過 BC 的中點 A'. 故 AE 與 AA' 重合.

即 AA' 過 G 點. 即 AA', BB', CC' 共點. Q. E. D.

註. 三角形三中線所共的點,叫做三角形的重心.

(17) M 是 $\frown AB$ 的中點. 過 M 所作的任意二弦 MC, MD 交 AB 於 E, F. 求證 C, D, F, E 共圓.



〔證〕 聯 AD, BC, CD.

$\because \frown AM = \frown MB \quad \therefore \angle 1 = \angle 3.$

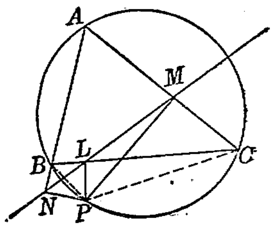
又 $\angle 2, \angle 4$ 同在 $\frown AC$ 上.

$$\therefore \quad \angle 2 = \angle 4.$$

今 $\angle MEF = \angle 1 + \angle 2$, 而 $\angle FDC = \angle 3 + \angle 4$.

$\therefore \quad \angle MEF = \angle FDC, \quad \therefore \quad C, D, F, E$ 共圓. Q. E. D.

(18) 從三角形外接圓周上任意一點.向三邊各作垂線,此三垂線的三個足共線.



P 是 $\triangle ABC$ 外接圓周上任意點. $PL\perp BC$, $PM\perp AC$, $PN\perp AB$. 求證 L,M,N 共線.

〔證〕 聯 LM, LN, PB, PC.

則因 $PL\perp BC$, $PN\perp AB$, $\therefore \angle PLB+\angle PNB=2rt.\angle$.

故 P,L,B,N 共圓. 故 $\angle PLN=\angle PBN$.

又因 A,B,P,C 共圓, 故 $\angle PBN=\angle ACP$.

又 $PL\perp BC$, $PM\perp AC$, $\therefore \angle PLC=\angle PMC=rt.\angle$.

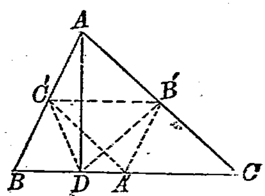
故 P,C,M,L 共圓, 故 $\angle PCM+\angle PLM=2rt.\angle$

但 $\angle PCM=\angle PLN$, 故 $\angle PLN+\angle PLM=2rt.\angle$.

故 NL, LM 是一直線 卽 L,M,N 共線. Q. E. D.

註. 此 L,M,N 所共的線叫做 P 點對於 $\triangle ABC$ 的西摩松線.

(19) 三角形從頂點至底邊所引垂線的足與三邊中點共圓



$AD\perp BC$, A' B' C' 各爲

BC, AC, AB 的中點. 求證 A', B', C', D 共圓.

〔證〕 聯 $A'B', B'C', A'C', DB', DC'$.

則 $\triangle AB'C' \cong \triangle A'B'C'$ ($\because$ $A'B' \parallel AB, A'C' \parallel AC$

而 $AC'A'B'$ 是 ▱) $\therefore$ $\angle C'AB' = \angle C'A'B'$

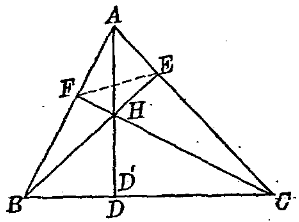
又 $\triangle AB'C' \cong \triangle DB'C'$ ($\because$ $C'B' \parallel BC, \therefore C'B' \perp AD$

且過 AD 的中點. 是以 $C'B'$ 爲 AD 的中垂線)

$\therefore$ $\angle C'AB' = \angle C'DB'$

$\therefore$ $\angle C'A'B' = \angle C'DB'$. $\therefore$ A', B', C', D 共圓. Q.E.D

(20) 任意三角形的過頂點的三垂線共點.



AD, BE, CF 是三角形 ABC 的三個垂線, 即 $AD \perp BC$, $BE \perp AC$, $CF \perp AB$. 求證 AD, BE, CF 共點.

〔證〕 命 BE, CF 的交點爲 H. 聯 AH 而延長之交 BC 於 D'. 聯 FE.

$\because$ $\angle AFH + \angle AEH = 2rt.\angle$, $\therefore$ A, F, H, E 共圓.

$\therefore$ $\angle AFE = \angle AHE$.

$\because$ $\angle BFC = \angle BEC = rt.\angle$, $\therefore$ B, C, E, F 共圓.

$\therefore$ $\angle AFE = \angle BCE$.

$\therefore \angle AHE = \angle BCE$, $\therefore$ H, D', C, E 共圓.

$\therefore \angle HD'C + \angle HEC = 2rt.\angle$.

$\because \angle HEC = rt.\angle$, $\therefore \angle HD'C = rt.\angle$.

即 $AD' \perp BC$, 而與 AD 合. 即 AD 過 H 點.

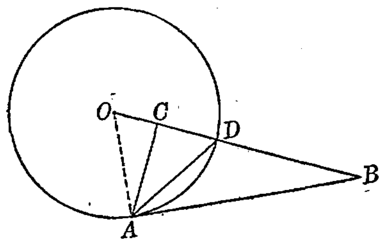
$\therefore$ AD, BE, CF 共點. Q.E.D.

註. 三角形過頂點的三垂線所共之點叫做三角形的垂心.

5. 等線分及等角的證例二

(21) AB 切 $\odot O$ 於 A, AC 垂直於 OB, OB 交圓周於 D. 求證

$\angle BAD = \angle DAC$



〔證一〕 聯 OA.

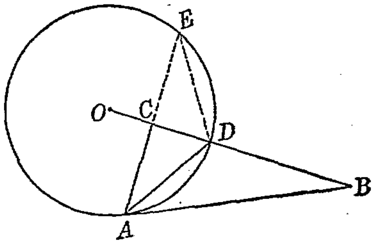
因 AB 是切線, $\therefore \angle OAB = rt.\angle$, 即 $\angle BAD$ 是 $\angle DAO$ 的餘角.

因 $AC \perp OB$, $\therefore \angle CAD + \angle CDA = rt.\angle$, 即 $\angle DAC$ 是 $\angle ADC$ 的餘角.

$\because OA = OD$, $\therefore \angle OAD = \angle CDA$

$\therefore \angle BAD = \angle DAC.$ Q. E. D.

〔證二〕 延長 AC 再交圓周於 E. 聯 ED.



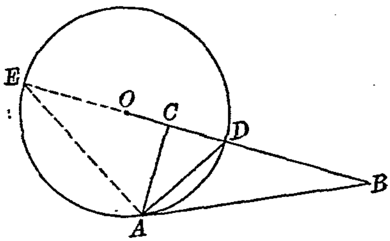
則因 $OD \perp AE$,

$\therefore AD = DE$

$\therefore \angle AED = \angle DAE$. 但 AB 是切線,

$\therefore \angle BAD = \angle AED$. $\therefore \angle BAD = \angle DAC$. Q. E. D.

〔證三〕 延長 BO 再交圓周於 E. 聯 AE.

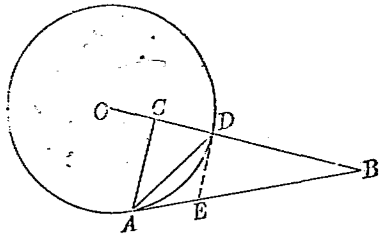


$\because$ DE 是直徑, 故 $\angle DAE$ 是直角. 即 $\angle DAC$ 是 $\angle CAE$ 的餘角. $\because$ AB 是切線, 故 $\angle BAD = \angle AEC$. 又因 $AC \perp EB$, 故 $\angle ACE = rt.\angle$, $\therefore \angle AEC$ 是 $\angle CAE$ 的餘角. $\therefore \angle AEC = \angle DAC$.

$\therefore \angle BAD = \angle DAC.$ Q. E. D.

〔證四〕 過 D 作 CA 的平行線交 AB 於 E.

$\because AC \perp OB$, $\therefore ED \perp OB$,



而 ED 是切線.

$\therefore ED=EA$,

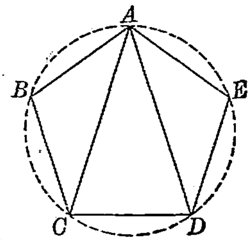
$\therefore \angle EAD=\angle EDA$.

但 $\angle EDA=\angle DAC$

(內錯角),

$$\therefore \quad \angle EAD=\angle DAC. \qquad Q.E.D$$

(22) 過正五角形一角頂所作兩對角線分頂角為三等分.



$ABCDE$ 是正五角形. AC, AD, 是過 A 的兩對角線.

求證 $\angle BAC=\angle CAD=\angle DAE$.

〔證一〕 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E$

$=5\times 2rt.\angle-4rt.\angle$

$=6rt.\angle$ (定理20)

但 $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle E$

$=\frac{1}{5}\times 6rt.\angle=\frac{1}{5}\times 6\times 90^\circ=108^\circ$

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B=108^\circ$, $\because AB=BC$,

$$\therefore \quad \angle BAC=\angle ACB=\frac{1}{2}(180^\circ-108^\circ)=36^\circ.$$

同理 $\angle EAD=36^\circ$.

$\therefore\quad \angle CAD=\angle A-\angle BAC-\angle EAD$

$=108^\circ-36^\circ-36^\circ=36^\circ$.

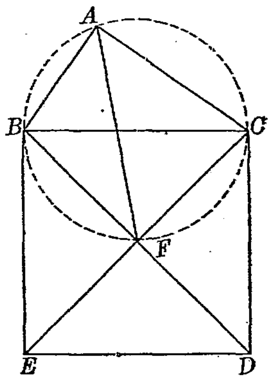
$\therefore\quad \angle BAC=\angle CAD=\angle DAE.$　　　　Q. E. D.

〔證二〕 因 $ABCDE$ 是正五角形. 故可门接於圓. 作他的外接圓 $ABCDE$.

$\because\quad BC=CD=DE.\quad \therefore\quad \frown BC=\frown CD=\frown DE.$

$\therefore\quad \angle BAC=\angle CAD=\angle DAE.$　　　　Q. E. D.

(23) 直角三角形斜邊上向外作正方形. 此正方形對角線的交點與直角三角形直角頂點的聯線平分直角.



$\triangle ABC$ 是直角三角形 $\angle A$ 是直角. $BCDE$ 是正方形. 其對角線 BD, CE 交於 F. 求證 AF 平分 $\angle BAC$.

〔證〕 $\because$ $BCDE$ 是正方形,　　$\therefore$ $BD\perp CE$　　(證略).

即 $\angle BFC=rt.\angle$.　　　但 $\angle BAC=rt.\angle$,

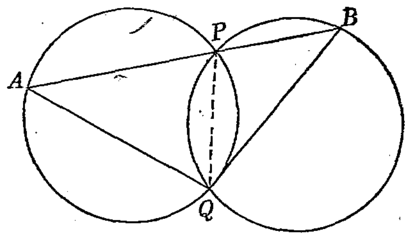
$\therefore \angle BAC+\angle BFC=2rt.\angle.$ $\therefore$ A, B, F, C 共圓,

$\because$ $BCDE$ 是正方形, $\therefore$ $BF=CF$ (證略).

$\therefore$ $\frown BF=\frown CF$, $\therefore$ $\angle BAF=\angle FAC$.

即 AF 平分 $\angle BAC$. Q. E. D.

(24) 相等兩圓交於 P, Q. 過 P 作任意直線交兩圓周於 A, B. 求證 $AQ=BQ$.



〔證〕 聯兩圓的公共弦 PQ. 則因兩圓相等, 故 $\odot APQ$ 的 $\frown PQ=\odot BPQ$ 的 $\frown PQ$. (等圓中等弦對等弧) $\therefore$ $\angle PAQ=\angle PBQ$. (等圓中立於等弧上的圓周角相等).

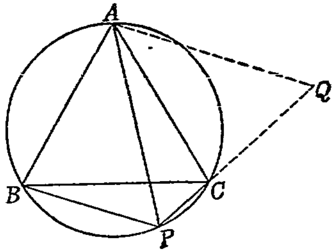
$\therefore$ $AQ=BQ$ Q. E. D.

(25) P 是正三角形 ABC 外接圓的劣弧 BC 上的任意一點. 求證 $PA=PB+PC$.

〔證〕 延長 PC 至 Q 令 $CQ=PB$.

在 $\triangle ABP$, $\triangle ACQ$ 中, $AB=AC$, $BP=CQ$,

$\angle ABP=\angle ACQ$, (定理 40 系) $\therefore$ $\triangle ABP\cong\triangle ACQ$.



$\therefore \quad \angle AQC = \angle APB$

$= \angle ACB = 60^\circ$ 而

$\angle APQ = \angle ABC = 60^\circ$,

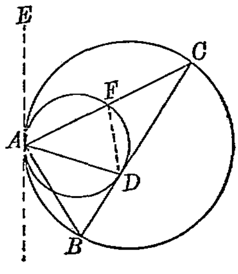
$\therefore \quad \angle PAQ = 60^\circ$.

$\therefore \quad \triangle APQ$是正三角形.

$\therefore \quad AP = PQ = PC + CQ$

$\because \quad CQ = BP, \quad \therefore \quad AP = PB + PC.$ Q. E. D.

(26) 兩圓內切於A. 外圓的弦BC切內圓於D. 求證$\angle BAD = \angle CAD$.



〔證〕 作兩圓的公切線AE. AC與內圓交於F. 從外圓看起來, $\angle EAC = \angle ABC$. 從內圓看起來, $\angle EAC = \angle ADF$

$\therefore \quad \angle ABC = \angle ADF$

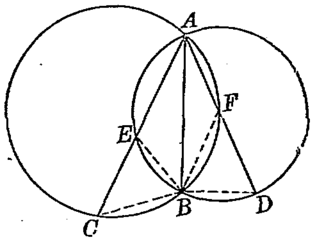
但因BC是內圓的切線, $\therefore \quad \angle ADB = \angle AFD$

即在$\triangle ABD$, 及$\triangle ADF$中, 已有兩雙對應角相等.

$\therefore \quad \angle BAD = \angle CAD$ Q. E. D

(27) 兩圓交於AB. 過A點作兩直線AEC, AFD令$\angle CAB = \angle BAD$. 各交兩圓於C, E, F D.

求證 $EC=FD$.



〔證〕

$\because$ $\angle CAB=\angle BAF$

$\therefore$ $\frown CB=\frown BF$.

$\therefore$ $CB=BF$.

$\because$ $\angle EAB=\angle BAD$. $\therefore$ $\frown EB=\frown BD$.

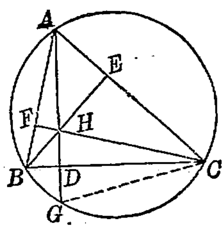
$\therefore$ $EB=BD$. $\because$ $ACBF$ 內接於圓.

故 $\angle CBF$ 是 $\angle CAD$ 的補角. $\because$ $AEBD$ 內接於圓.
故 $\angle EBD$ 是 $\angle CAD$ 的補角. $\therefore$ $\angle CBF=\angle EBD$.

$$\therefore \angle CBE=\angle FBD$$

由是 $\triangle CBE$ 及 $\triangle FBD$ 有兩雙對應邊及一雙夾角各相等而爲合同形. $\therefore$ $EC=FD$. Q.E.D.

(28) H 是三角形 ABC 的垂心. AH 的延線交 BC 於 D, 交 $\triangle ABC$ 的外接圓周於 G. 求證 $HD=DG$



H 是垂心, 卽 $AHD\perp BC$, $BHE\perp AC$, $CHF\perp AB$〔見 (20)〕

〔證〕 聯 GC.

$\because$ $\angle AFC=\angle ADC=rt.\angle$, $\therefore$ A, F, D, C 共圓.

$\therefore \angle FAD=\angle FCD$. 又 $\because$ A, B, G, C 共圓,

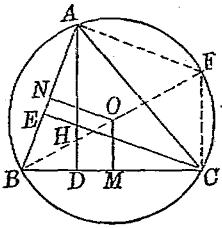
$\therefore \angle FAD=\angle BCG$. $\therefore \angle FCD=\angle BCG$.

於是在$\triangle HCD, \triangle GCD$中, $\angle HCD=\angle GCD$

$$CD=CD, \angle HDC=\angle GDC=rt.\angle.$$

$\therefore \triangle HCD \cong \triangle GCD$. $\therefore HD=DG$ Q.E.D.

(29) $\triangle ABC$的兩個過頂點的垂線AD, CE交於H. (卽$\triangle ABC$的垂心) BC, AB的兩個垂直等分線MO, NO交於O. 求證$AH=2OM, CH=2ON$.



〔證〕 聯BO,延長之交$\odot ABC$於F. 聯AF, CF

$\because O$是BC, AB的垂直等分線的交點,故O與A,B,C等距. $\therefore O$是$\odot ABC$的中心(叫做$\triangle ABC$的外心).

$\therefore BOF$是$\odot ABC$的直徑. $\therefore BCF=rt.\angle, \angle BAF=rt.\angle$.

$\because AD\perp BC, CE\perp AB$, $\therefore FC \parallel AD, FA \parallel CE$.

$\therefore AHCF$是平行四邊形. $\therefore AH=FC, CH=AF$.

又O, M各為BF, BC的中點.

$$\therefore OM=\tfrac{1}{2}FC \text{ 卽 } FC=2OM.$$

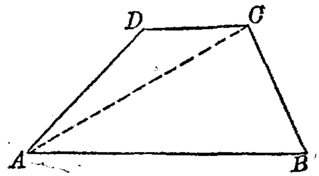
O, N各為BF, BA的中點

$\therefore\quad ON=\frac{1}{2}FA$, 卽 $FA=2\,ON$.

$\therefore\quad AH=2\,OM,\ CH=2\,ON.$　　Q. E. D.

6. 不等量的證例

(30) 四邊形 $ABCD$ 中, AB 是最大邊, CD 是最小邊. 求證 $\angle C>\angle A$, $\angle D>\angle B$.



〔證〕 聯 AC. 因 AB 是最大邊, $\therefore AB>BC$,

$\therefore\quad \angle BCA>\angle BAC.$

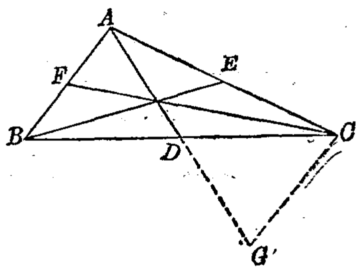
因 CD 是最小邊,

$\therefore\quad AD>CD,\qquad \therefore\quad \angle ACD>\angle CAD.$

$\therefore\quad \angle BCA+\angle ACD>\angle BAC+\angle CAD.$

卽　　$\angle C>\angle A.$

同樣聯 BD, 可證　$\angle D>\angle B.$　　Q. E. D



(31) 三角形的三個中線之和小於他的三邊之和.

AD, BE, CF 是中線, 卽 D, E, F 各

為 BC, AC, AB 的中點.

求證 $AD+BE+CF<AB+AC+BC$.

〔證〕 延長 AD 至 G 令 $DG=AD$. 聯 GC. 則 $\triangle ABD \cong \triangle GCD$ ($\because$ $BD=DC$, $AD=DG$, $\angle ADB=\angle GDC$) $\therefore$ $AB=CG$. 但 $AG<AC+CG$.

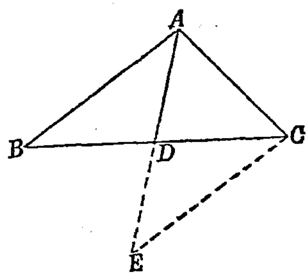
即 $2AD<AB+AC$. 同樣可證 $2BE<AB+BC$,

$$2CF<AC+BC.$$

$$\therefore \quad 2AD+2BE+2CF<2AB+2AC+2BC.$$

$$\therefore \quad AD+BE+CF<AB+AC+BC. \qquad \text{Q. E. D.}$$

(32) 三角形兩邊不等,則第三邊上的中線與大邊所夾的角比他與小邊所夾的角小.



$AB>AC$, D 是 BC 的中點. 求證

$$\angle BAD<\angle DAC.$$

〔證〕 延長 AD 至 E, 令 $DE=AD$

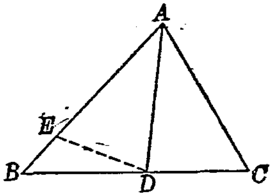
則 $\triangle ABD \cong \triangle ECD$.

$$\therefore \quad CE=AB. \quad \angle E=\angle BAD.$$

$\because$ $AB>AC$, $\therefore$ $CE>AC$, $\therefore$ $\angle E<\angle CAD$.

$\therefore\ \angle BAD < \angle CAD.$　　Q. E. D.

(33) $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, AD 是 $\angle A$ 的等分線. 求證 $BD > DC$.



〔證〕 在 AB 上取 E 點令 $AE = AC$. 聯 DE. 則 $\triangle AED \cong \triangle ACD$. ($\because$ $AE = AC$, AD 公邊, $\angle EAD = \angle CAD$)

$$\therefore\ ED = DC,\ \angle EDA = \angle ADC.$$

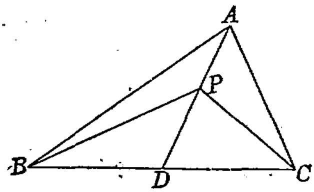
但　$\angle BED > \angle EDA$,

而　$\angle ADC > \angle B$.

$$\therefore\ \angle BED > \angle B,\quad \therefore\ BD > ED.$$

$\therefore\ BD > DC$　　Q. E. D.

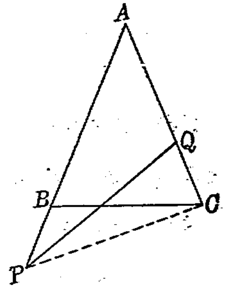
(34) P 是 $\triangle ABC$ 的中線 AD 上任意一點. $\angle ABC < \angle ACB$. 求證 $\angle PBC < \angle PCB$.



〔證〕 $\because$ $\angle ABC < \angle ACB$, $\therefore$ $AC < AB$. (定理16). $\therefore$ $\angle ADC < \angle ADB$. (定理18) $\therefore$ $PC < PB$. (定理17).

$\therefore\ \angle PBC < \angle PCB$. (定理15)　　Q. E. D.

(35) $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$. Q 是 AC 上的一點. P 是 AB 延線上的一點. 而 $BP=CQ$. 求證 $PQ>BC$.



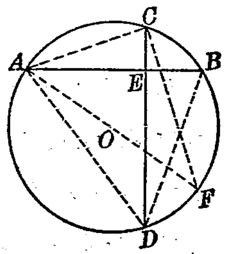
〔證〕 聯 PC. 從 $\triangle CPQ$, 及 $\triangle PBC$ 觀之, PC 是公邊, $CQ=PB$. $\angle PCQ>\angle ACB$ $\angle ABC>\angle BPC$.

$\therefore$ $PQ>BC$. Q. E. D.

7. 面積的證例

(36) 圓內兩弦 AB, CD, 直交於 E. 求證 $\overline{AE}^2+\overline{BE}^2+\overline{CE}^2+\overline{DE}^2=$ 此圓直徑上的正方形.

〔證〕 作直徑 AOF. 聯 AC, BD, CF, AD.



在 $\triangle AFC$, $\triangle ADE$ 中,

$\angle AFC=\angle ADC$,

$\angle ACF=\angle AED$, ($rt\angle$)

$\therefore$ $\angle CAF=\angle EAD$. (定理13系3) $\therefore$ $\frown CF=\frown BD$

$\therefore$ $CF=BD$

因 $\overline{AE}^2+\overline{CE}^2=\overline{AC}^2$, $\overline{BE}^2+\overline{DE}^2=\overline{BD}^2$,

故 $\overline{AE}^2+\overline{BE}^2+\overline{CE}^2+\overline{DE}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$

$$=\overline{AC}^2+\overline{CF}^2$$

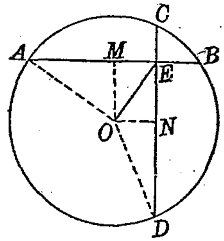
但因 $\angle ACF=rt.\angle$ $\therefore$ $\overline{AC}^2+\overline{CF}^2=\overline{AF}^2$

$\therefore$ $\overline{AE}^2+\overline{BE}^2+\overline{CE}^2+\overline{DE}^2=\overline{AF}^2$ Q.E.D

(37) ⊙O內兩弦AB, CD直交於E. 求證

$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=8R^2-4\overline{OE}^2$ R是⊙O的半徑).

〔證〕 作 $OM\perp AB$, $ON\perp CD$.



聯半徑OA, OD.

$\because$ $OM\perp AB$, $\therefore$ $AM=MB$.

$\because$ $ON\perp CD$, $\therefore$ $CN=ND$.

又因$AB\perp CD$,

$\therefore$ $ONEM$是矩形, $\therefore$ $OM=NE$.

$\therefore$ $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=(2AM)^2+(2DN)^2$

$$=4\overline{AM}^2+4\overline{DN}^2$$

$$=4[\overline{OA}^2-\overline{OM}^2+\overline{OD}^2-\overline{ON}^2]$$

$$=4[\overline{OA}^2+\overline{OD}^2-\overline{NE}^2-\overline{ON}^2]$$

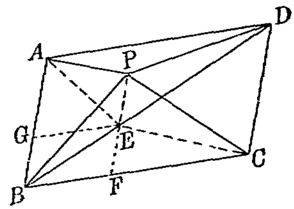
$$=4[R^2+R^2-(\overline{NE}^2+\overline{ON}^2)]$$

$$=4[2R^2-\overline{OE}^2]$$

$$=8R^2-4\overline{OE}^2.$$ Q.E.D.

(38) $ABCD$ 是平行四邊形. P是$\triangle ABD$內任意一點. 求證$\triangle PBD=\triangle PBC-\triangle PAB$.

〔證〕 過P作AB的平行線PE交BD於E,交BC於F.



則 $\triangle PAB=\triangle EAB$.

次作EG平行於BC,則$EGBF$亦爲平行四邊形, $\triangle EGB=\triangle EBF$ 而由定理51,一平行四邊形中兩餘形等積,其半亦等積,

則 $\triangle AGE=\triangle EFC$

$\therefore$ $\triangle AGE+\triangle EGB=\triangle EFC+\triangle EBF$

卽 $\triangle ABE=\triangle EBC$

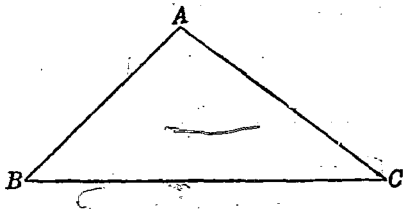
又因PE與DC也平行.

$$\therefore \quad \triangle PED=\triangle PEC.$$

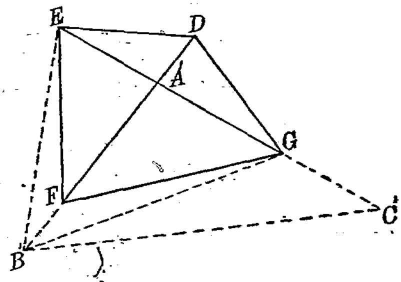
$$\begin{aligned}\therefore \quad \triangle PBD&=\triangle PBE+\triangle PED\\&=\triangle PBE+\triangle PEC\\&=\triangle PBC-\triangle EBC\\&=\triangle PBC-\triangle EBA\\&=\triangle PBC-\triangle PAB.\end{aligned}$$

Q.E.D.

(39) $\triangle ABC$ 的兩邊 AB, AC 各等於四邊形



$DEFG$的兩對角線DF,EG.又$\angle A$等於DF,EG所夾的角.求證$\triangle ABC=DEFG$.



〔證〕延長DF至B'令$FB'=DA'$,

延長EG至C'令$GC'=EA'$.聯$B'C'$.

則 $$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'.$$

聯$B'E,B'G$.則$\triangle GFB'=\triangle GDA'$,

$\triangle B'GC'=\triangle B'EA',\triangle EB'F=\triangle EA'D$.　　(等底同高)

故 $\triangle A'B'C'=\triangle A'FG+\triangle GFB'+\triangle B'GC'$

$=\triangle A'FG+\triangle GDA'+\triangle B'EA'$

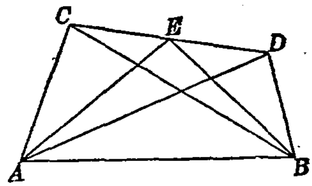
$=\triangle A'FG+\triangle GDA'+\triangle B'EF+\triangle EFA'$

$=\triangle A'FG+\triangle GDA'+\triangle EA'D+\triangle EFA'$

$=DEFG$.　　Q. E. D.

(40) $\triangle ABC$和$\triangle ABD$共有底邊AB. E是CD的中點.求證$\triangle ABE=\frac{1}{2}(\triangle ABC\pm\triangle ABD)$

(第一) C, D 在 AB 同旁時,則 $\triangle ABE = \frac{1}{2}(\triangle ABC + \triangle ABD)$.



〔證一〕 $\because \quad CE = ED$,

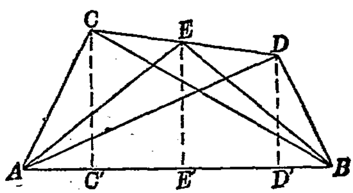
$\therefore \quad \triangle ACE = \triangle ADE.$ 又 $\triangle BCE = \triangle BDE.$

$$\triangle ABE = ABEC - \triangle ACE$$
$$= \triangle ABC + \triangle BCE - \triangle ACE.$$
$$\triangle ABE = ABDE - \triangle BDE$$
$$= \triangle ABD + \triangle ADE - \triangle BDE.$$

$$\therefore \quad 2\triangle ABE = \triangle ABC + \triangle ABD + \triangle BCE + \triangle ADE - \triangle ACE - \triangle BDE$$
$$= \triangle ABC + \triangle ABD.$$

$\therefore \quad \triangle ABE = \frac{1}{2}(\triangle ABC + \triangle ABD).$ Q. E. D.

〔證二〕 從 C, E, D 各作 AB 的垂線 CC', EE', DD'. 則 $EE' = \frac{1}{2}(CC' + DD')$.



$\triangle ABC = \frac{1}{2}AB \cdot CC'$, $\triangle ABD = \frac{1}{2}AB \cdot DD'$.

$$\therefore \quad \triangle ABE = \frac{1}{2}AB \cdot EE'$$
$$= \frac{1}{2}AB \cdot \frac{1}{2}(CC' + DD')$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}AB\cdot CC'+\frac{1}{2}AB\cdot DD'\right]$$

$$=\frac{1}{2}(\triangle ABC+\triangle ABD). \qquad Q.E.D.$$

(第二) C, D 在 AB 的兩旁時,則

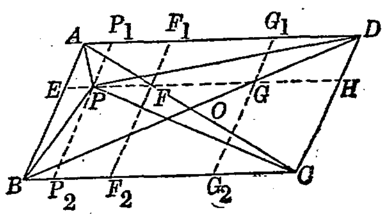
$$\triangle ABE=\frac{1}{2}(\triangle ABC\sim\triangle ABD)$$

〔證法仿上,略〕

(41) 平行四邊形 $ABCD$ 的對角線 AC, BD 交於 O. P 是 $\triangle ABO$ 中任意一點. 求證

$$\triangle PCD=\triangle PAB+\triangle PAC+\triangle PBD.$$

〔證〕 過 P 作 BC 的平行線交 AB, AC, DB, DC 於 E, F, G, H. 過 P, F, G 各作 AB 的平行線 P_1P_2, F_1F_2, G_1G_2.



則 $\triangle PAC=\triangle PAF+\triangle PCF$

$$=\frac{1}{2}\square PF_1+\frac{1}{2}\square PF_2=\frac{1}{2}\square P_2F_1,$$

$$\triangle PBD=\triangle PDG+\triangle PBG$$

$$=\frac{1}{2}\square PG_1+\frac{1}{2}\square PG_2=\frac{1}{2}\square P_2G_1,$$

$$\triangle PAB=\frac{1}{2}\square BP_1,$$

$\triangle PCD = \frac{1}{2}\square P_2D.$

又因 $\triangle AEF : \triangle ABC = \overline{AE}^2 : \overline{AB}^2$

$= \overline{DH}^2 : \overline{DC}^2 = \triangle DGH : \triangle DBC$

而 $\triangle ABC = \triangle DBC$, 則 $\triangle AEF = \triangle DGH$,

$\therefore \quad EF = GH$

$\therefore \quad \square BF_1 = \square G_2D.$

$\therefore \quad \square P_2D = \square G_2D + \square P_2G_1$

$= \square BF_1 + \square P_2G_1$

$= \square BP_1 + \square P_2F_1 + \square P_2G_1$

$\therefore \quad \triangle PCD = \triangle PAB + \triangle PAC + \triangle PBD.$ Q.E.D

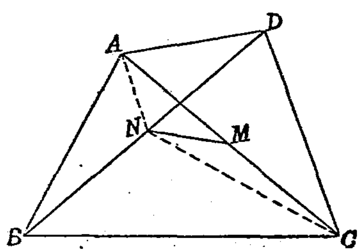
〔注意〕 本題與38題類似,故也可以仿照38題的證法證明. 又38題也可以用本題證法證明.

(42) 四邊形各邊上正方形的和等於對角線上正方形的和加其中點聯線上正方形的四倍

M,N 各為 AC, BD 的中點. 求證

$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2$

$= \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{MN}^2.$



〔證〕 聯 AN,CN.

$\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = 2\,\overline{BN}^2 + 2\overline{AN}^2.$

$\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = 2\,\overline{BN}^2 + 2\,\overline{CN}^2.$

$\therefore\ \overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{AD}^2=4\,\overline{BN}^2+2(\overline{AN}^2+\overline{CN}^2)$

但 $4\,\overline{BN}^2=\overline{BD}^2$,

$$2(\overline{AN}^2+\overline{CN}^2)=2\,[2\,\overline{AM}^2+2\overline{MN}^2]$$

$$=4\,\overline{AM}^2+4\,\overline{MN}^2$$

$$=\overline{AC}^2+4\,\overline{MN}^2.$$

$\therefore\ \overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{AD}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+4\,\overline{MN}^2.$

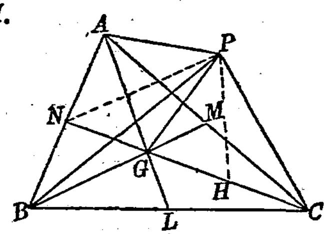
Q. E. D.

(43) G是$\triangle ABC$的重心.P是其他任意一點.

求證 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$

$$=\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2+3\,\overline{GP}^2.$$

〔證〕取CG中點H.



聯PN, PH.則

$NG=GH=HC$.

$\therefore\ \overline{PN}^2+\overline{PH}^2$

$=2\overline{PG}^2+2\,\overline{GN}^2.$

$2\,\overline{PN}^2+2\overline{PH}^2=4\,\overline{PG}^2+4\,\overline{GN}^2.$ ………………(1)

又 $\overline{PG}^2+\overline{PC}^2=2\,\overline{PH}^2+2\overline{GH}^2=2\,\overline{PH}^2+2\,\overline{GN}^2$ (2)

又 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2\overline{PN}^2+2\,\overline{AN}^2$ ………………(3)

(1)+(2)+(3),得 $2\overline{PN}^2+2\overline{PH}^2+\overline{PG}^2+\overline{PC}^2+\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$

$$=4\overline{PG}^2+2\,\overline{PH}^2+6\overline{GN}^2+2\,\overline{PN}^2+2\overline{AN}^2.$$

即 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=3\,\overline{PG}^2+6\,\overline{GN}^2+2\,\overline{AN}^2$

又 $\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2=2\,\overline{AN}^2+2\overline{GN}^2+(2\overline{GH})^2$

$$=2\,\overline{AN}^2+2\overline{GN}^2+4\overline{GN}^2$$

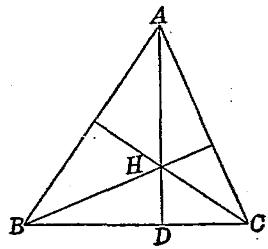
$$=2\,\overline{AN}^2+6\overline{GN}^2$$

$\therefore\ \overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2=\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2+3\overline{GP}^2.$

Q. E. D.

(44) H 是 $\triangle ABC$ 的垂心.

求證 $\overline{AB}^2+\overline{CH}^2=\overline{AC}^2+\overline{BH}^2.$



〔證〕 $\because\ AD\perp BC,$

$\therefore\ \overline{AD}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2$

又 $\overline{AD}^2+\overline{CD}^2=\overline{AC}^2.$

$\therefore\ \overline{BD}^2-\overline{CD}^2=\overline{AB}^2-\overline{AC}^2.$

又因 $HD\perp BC,\ \therefore\ \overline{HD}^2+\overline{BD}^2=\overline{HB}^2.$

又 $\overline{HD}^2+\overline{CD}^2=\overline{HC}^2.$

$\therefore\ \overline{BD}^2-\overline{CD}^2=\overline{HB}^2-\overline{HC}^2.$

$\therefore\ \overline{AB}^2-\overline{AC}^2=\overline{HB}^2-\overline{HC}^2.$

$\therefore\ \overline{AB}^2+\overline{HC}^2=\overline{AC}^2+\overline{HB}^2.$ *Q. E. D.*

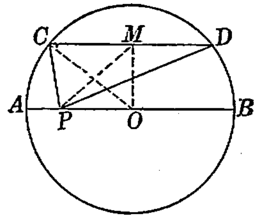
(45) P 是圓內直徑 AB 上任意一點.弦 CD 平行於 AB. 求證 $\overline{PC}^2+\overline{PD}^2=\overline{PA}^2+\overline{PB}^2.$

〔證〕 從中心 O 作 CD 的垂線 OM. 聯 PM, CO. 則

$\overline{PC}^2+\overline{PD}^2=2(\overline{PM}^2+\overline{CM}^2)$

$=2(\overline{OP}^2+\overline{OM}^2+\overline{OC}^2-\overline{OM}^2)$

$=2(\overline{OP}^2+\overline{OC}^2)$



$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=(OA-OP)^2$

$+(OB+OP)^2$

$=(OC-OP)^2+(OC+OP)^2$

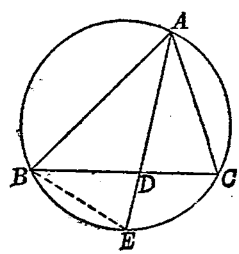
$=2(\overline{OP}^2+\overline{OC}^2)$

$\therefore\ \overline{PC}^2+\overline{PD}^2=\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ Q. E. D.

8. 比例量及等矩形的證例

(46) $\triangle ABC$, $\angle A$ 的等分線交 BC 於 D, 交外接圓周於 E. 求證 $AB\cdot AC=AD\cdot AE$.

〔證〕 聯 BE. 在 $\triangle ABE$, $\triangle ADC$ 中, $\angle BAE=\angle DAC$, $\angle BEA=\angle DCA$.

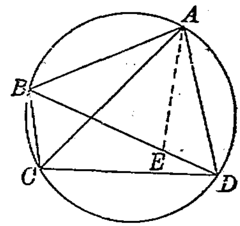


$\therefore\ \triangle ABE\backsim\triangle ADC$ (定理71)

$\therefore\ AB:AD=AE:AC$

$\therefore\ AB\cdot AC=AD\cdot AE$ Q. E. D.

(47) 圓內接四邊形兩雙對邊所包矩形之和



等於兩對角線所包之矩形.

A, B, C, D 內接於圓. 求證 $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$.

〔證〕 作 AE 交 BD 於 E 令

$$\angle EAD = \angle BAC.$$

$\because$ $\angle ADE = \angle ACB$ ($\frown AB$ 上圓周角)

$\therefore$ $\triangle AED \backsim \triangle ABC$ $\therefore$ $ED : BC = AD : AC$,

$\therefore$ $BC \cdot AD = AC \cdot ED$.

又 $\because$ $\angle EAD = \angle BAC$, $\therefore$ $\angle CAD = \angle BAE$.

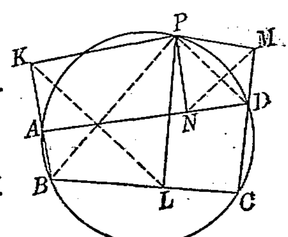
而 $\angle ACD = \angle ABD$, $\therefore$ $\triangle ACD \backsim \triangle ABE$.

$\therefore$ $AC : AB = CD : BE$, $\therefore$ $AB \cdot CD = AC \cdot BE$.

$\therefore$ $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BE + AC \cdot ED$

$$= AC(BE + ED) = AC \cdot BD.$$ Q.E.D

(48) 從圓周上一點 P 向內接四邊形 $ABCD$ 的各邊上作垂線 $PK \perp AB$, $PL \perp BC$, $PM \perp CD$, $PN \perp DA$. 求證 $PK \cdot PM = PL \cdot PN$.



〔證〕 聯 PB, PD, KL, MN.

$\because$ $\angle PKB, \angle PLB$ 都是直角,

$\therefore$ P, K, B, L 共圓. 又 $\because$ $\angle PMD$, $\angle PND$ 都是直角.

$\therefore$ P, N, D, M 共圓.

$\therefore$ $\angle PLK=\angle PBK=\angle PDN=\angle PMN$

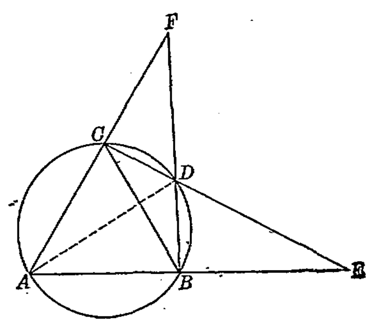
又 $\angle KPL$ 是 $\angle KBL$ 的補角. $\angle MPN$ 是 $\angle MDN$ 的補角.

$\because$ $\angle KBL=\angle MDN$, $\therefore$ $\angle KPL=\angle MPN$.

於是 $\triangle PKL$ 和 $\triangle PNM$ 有兩雙等角而為相似三角形.

$\therefore$ $PK : PN=PL : PM$ $\therefore$ $PK\cdot PM=PL\cdot PN$. Q. E. D.

(49) D 是正三角形 ABC 外接圓 $\frown BC$ 上任意一點. 延長 AB, CD 交於 E; AC, BD 交於 F. 求證 BC 是 BE, CF 的比例中項.



〔證〕 聯 AD.

$\angle CFB=\angle ACB-\angle CBF$

$=\angle CAB-\angle CAD$

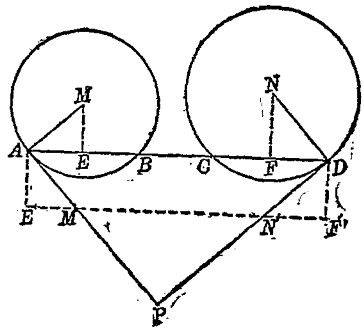
$=\angle DAB=\angle DCB.$

同樣可證 $\angle CEB=\angle DBC$. $\therefore$ $\triangle FBC\backsim\triangle CEB$

$\therefore$ $FC : BC=BC : BE$. Q. E. D.

(50) 一直線交 $\odot M$ 於 A, B 交 $\odot N$ 於 C, D 而 $AB = CD$. 從 A, D 各作兩圓的切線相交於 P. 求證 $PA : PD = AM : DN$.

〔證一〕 作 $ME \perp AB$, $NF \perp CD$, 再從 A, D 作 AD 的垂線 AE', DF' 令 $AE' = AE$, $DF' = DF$. 聯 $E'F'$ 交 PA 於 M', PD 於 N'.



則 $\because$ $AB = CD$, $\therefore$ $AE = DF$, $\therefore$ $AE' = DF'$.

$\therefore$ $AE'F'D$ 是矩形而 $M'N' \parallel AD$.

$$\therefore \quad PA : PD = AM' : DN'.$$

但 $\triangle AEM \cong \triangle AE'M'$ (證略), $\triangle DFN \cong \triangle DF'N'$.

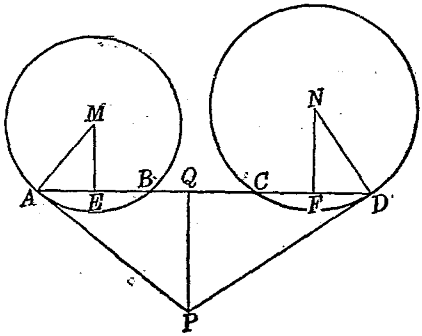
故 $AM = AM'$, $DN = DN'$.

$$\therefore \quad PA : PD = AM : DN. \qquad Q. E. D.$$

〔證二〕 作 $ME \perp AB$, $NF \perp CD$, $PQ \perp AD$.

則 $\triangle AEM \backsim \triangle PQA$ (證略)

$$\therefore \quad AM : AP = AE : PQ$$



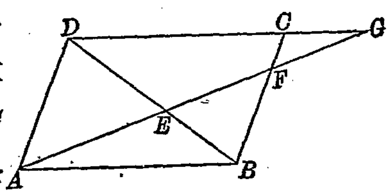
同樣可證$\triangle NFD\backsim\triangle DQP$

$\therefore$ $DN:DP=DF:PQ.$ $\because$ $AB=CD,$ $\therefore$ $AE=DF.$

$\therefore$ $AM:AP=DN:DP.$

$\therefore$ $AP:DP=AM:DN.$ Q. E. D.

(51) $ABCD$是▱. 過 A 作任意一直線交 BD 於 E, BC 於 F, DC 的延線於 G. 求證EA是EF, EG的比例中項.

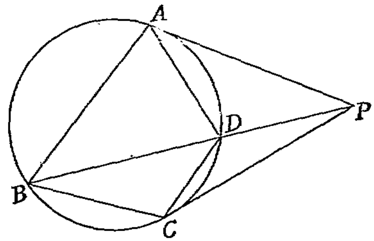


〔證〕 $\because$ $AD\parallel BF$ $\therefore$ $EF:EA=EB:ED.$

又 $\because$ $AB\parallel DG,$ $\therefore$ $EB:ED=EA:EG.$

$\therefore$ $EF:EA=EA:EG.$ Q. E. D.

(52) 從圓外一點至圓作兩切線及任意一割線,則此兩切點與兩交點所成內接四邊形的兩雙對邊所包矩形相等.



PA, PC 是切線. PDB 是任意一割線. 求證

$$AD \cdot BC = AB \cdot CD.$$

〔證〕 $\because \quad \angle PAD = \angle PBA,\ \angle P$ 公共,

故 $\triangle PAD \backsim \triangle PBA. \quad \therefore \quad AD : AB = AP : BP.$

同樣 $\triangle PCD \backsim \triangle PBC. \quad \therefore \quad CD : CB = CP : BP.$

$$\because \quad AP = CP, \quad \therefore \quad AP : BP = CP : BP,$$

$$\therefore \quad AD : AB = CD : CB.$$

$$\therefore \quad AD \cdot BC = AB \cdot CD.$$ Q. E. D.

(53) P, Q 是 $\triangle ABC$ 的兩邊 AB, AC 上的點而 $AP = AQ$. PQ 交 $\triangle ABC$ 的中線 AM 於 N. 求證 $PN : QN = AC : AB$.

〔證一〕 過 C 作 $CD \parallel PQ$ 交 AM 於 E.

則 $AD = AC,\ PN : QN = DE : CE.$

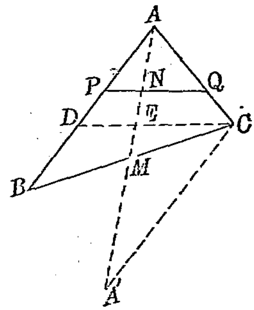
延長 AM 至 A' 令 $MA'=AM$,

聯 CA' 則 $\triangle A'CM \cong \triangle ABM$

而 $AB \parallel CA'$, $AB=CA'$.

$\therefore$ $\triangle ADE \backsim \triangle A'CE$

$\therefore$ $DE:CE=AD:CA'$



但因 $AD=AC, CA'=AB$,

$\therefore$ $DE:CE=AC:AB$.

$\therefore$ $PN:QN=AC:AB$.　　Q E D.

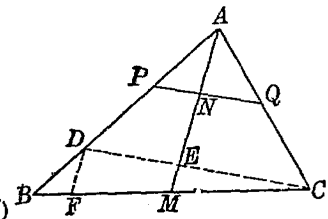
〔證二〕 過 C 作 $CD \parallel PQ$ 交 AM 於 E; 過 D 作 $DF \parallel AM$ 交 BC 於 F.

$PN:QN=DE:EC$

$=FM:MC$

$=FM:BM$

$(\because BM=MC)$



$=AD:AB=AC:AB$.　　Q. E. D.

〔證三〕 $\dfrac{\triangle APN}{\triangle ABM}=\dfrac{AP\cdot AN}{AB\cdot AM}=\dfrac{AP}{AB}\cdot\dfrac{AN}{AM}$.

$\dfrac{\triangle AMC}{\triangle ANQ}=\dfrac{AC\cdot AM}{AQ\cdot AN}=\dfrac{AC}{AQ}\cdot\dfrac{AM}{AN}$.

$$\frac{PN}{NQ}=\frac{\triangle APN}{\triangle AQN}=\frac{\triangle APN}{\triangle ABM}\times\frac{\triangle AMC}{\triangle ANQ}$$

$(\because \quad \triangle ABM=\triangle AMC.)$

$$=\frac{AP}{AB}\cdot\frac{AN}{AM}\cdot\frac{AC}{AQ}\cdot\frac{AM}{AN}=\frac{AP}{AB}\cdot\frac{AC}{AQ}=\frac{AP\cdot AC}{AB\cdot AQ}$$

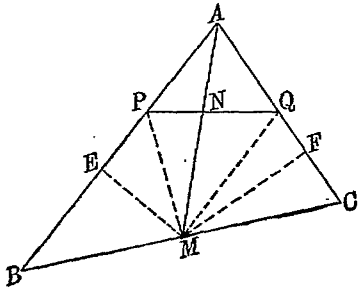
$$=\frac{AC}{AB}.\quad (\because \quad AP=AQ)$$ Q. E. D.

〔證四〕 作

$ME\perp AB$,

$MF\perp AC$.

聯 MP, MQ.



$$\frac{PN}{QN}=\frac{\triangle APN}{\triangle AQN}$$

$$=\frac{\triangle PNM}{\triangle QNM}$$

$$=\frac{\triangle APN+\triangle PNM}{\triangle AQN+\triangle QNM}=\frac{\triangle APM}{\triangle AQM}=\frac{AP\cdot ME}{AQ\cdot MF}=\frac{ME}{MF}.$$

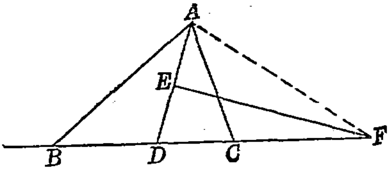
但因AM是中線, $\therefore \quad \triangle AMB=\triangle AMC.$

$\therefore \quad AB\cdot ME=AC\cdot MF. \qquad \therefore \quad ME:MF=AC:AB$

$\therefore \quad PN:QN=AC:AB$ Q. E. D.

(54) $\triangle ABC$, $\angle A$的等分線AD, AD的垂直等分

線 EF 交 BC 的延線於 F. 求證 FD 是 FB, FC 的比例中項.



〔證〕 聯 AF, 則

$\triangle AEF \cong \triangle DEF$,

$FD = FA$.

$$\angle ADF = \angle DAB + \angle ABD.$$

$$\angle DAF = \angle DAC + \angle CAF.$$

今 $\because \quad FA = FD$,

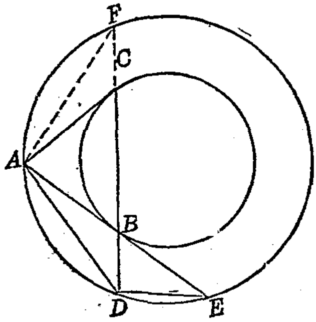
$\therefore \quad \angle ADF = \angle DAF$. 又 $\angle DAB = \angle DAC$. (假設)

$\therefore \quad \angle ABD = \angle CAF$. $\therefore \quad \triangle FAC \backsim \triangle FBA$.

$\therefore \quad FC : FA = FA : FB$. 但 $FA = FD$,

$$\therefore \quad FC : FD = FD : FB. \qquad Q. E. D.$$

(55) 從兩個同心圓外圓圓周上任意一點 A, 作內圓的兩個切線 AB, AC. AB, CB 的延長線各交外圓於 E, D. 求證



$$DB : DC = \overline{DE} : \overline{DA}$$

〔證〕 延長DC交外圓於F. 則因

$\triangle DEB \backsim \triangle AFB$, $\therefore$ $DE : AF = DB : AB$

又 $DE : AF = BE : BF$

$\therefore$ $\overline{DE}^2 : \overline{AF}^2 = (DB : AB) \cdot (BE : BF)$

但 $AF = AD$(證略), $BE = AB$ (證略),

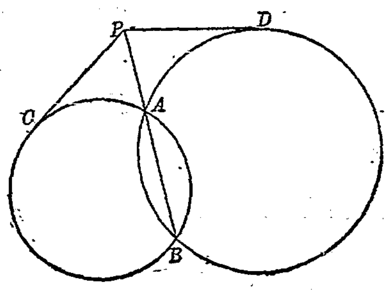
$BF = DC$(證略),

$\therefore$ $\overline{DE}^2 : \overline{AD}^2 = (DB : AB) \cdot (AB : DC)$

$= DB : DC$. Q.E.D.

9. 等線分及等角的證例三

(56) 從相交兩圓的公共弦的延長線上的任意一點至兩圓各作切線,那麼這兩個所作的切線必相等.



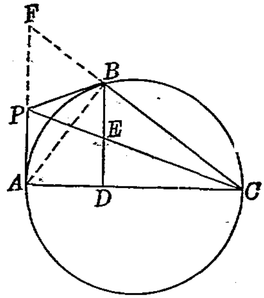
兩圓交於 A, B. P是AB延線上任意一點. PC, PD各爲兩圓的切線. 求證 $PC = PD$.

〔證〕 $\overline{PC}^2 = PA \cdot PB$.(定理84)

$\overline{PD}^2=PA\cdot PB$.(定理 84)

$\therefore\ \overline{PC}^2=\overline{PD}^2$. $\therefore\ PC=PD$. Q. E. D.

(57) 從圓外一點 P 向圓作兩個切線 PA,PB 過 A 作直徑 AC. 過 B 作 $BD\perp AC$. 聯 PC.交 BD 於E. 求證 $BE=ED$.



〔證一〕 延長 AP, CB 交於 F. 聯 AB. 則因 AC 是直徑,故 $\angle ABC=rt\angle$.

$\therefore\ \angle ABF=rt\angle$.

$\because\ PA=PB$, $\therefore\ \angle PAB=\triangle PBA$,

$\therefore\ \angle PBF=\angle PFB$, (餘角相等)

$\therefore\ PF=PB$, $\therefore\ PA=PF$

又 $\because\ BD\parallel FA$, $\therefore\ BE:FP=CE:CP$,

$ED:PA=CE:CP$.

$\therefore\ BE:FP=ED:PA$.

今已知$EP=PA$, $\therefore$ $BE=ED$. Q. E. D.

〔證二〕 過C作切線交PB的延長線於Q.

則 $PA\parallel BD\parallel QC$. 又 $PA=PB$ $QB=QC$.

令 $PA=PB=a$, $QB=QC=c$,

$BE=b$, $ED=d$,

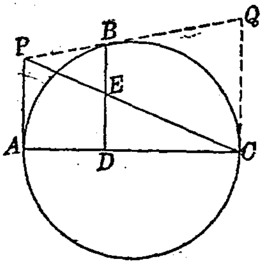
$BE:QC=PB:PQ$,

即 $b:c=a:a+c$,

$ED:PA=EC:PC$

$=BQ:PQ$,

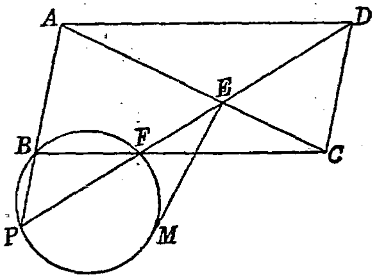
即 $d:a=c:a+c$



$\therefore\ b=d=\dfrac{ac}{a+c}$. 即 $BE=ED$. Q. E. D.

(58) P是平行四邊形$ABCD$一邊AB延長線上任意一點.PD交AC於E,交BC於F.從E作$\triangle PBF$外接圓的切線EM.

求證 $ED=EM$.



〔證〕

$\because\ \triangle ADE \backsim \triangle CFE$,

$\therefore\ EF:ED$

$=EC:EA$

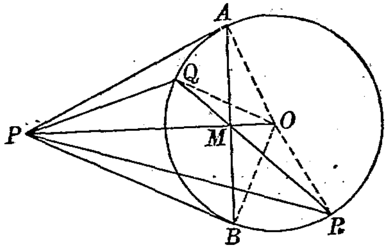
$\because\ \triangle APE \backsim \triangle DCE$,

$\therefore\ ED:EP=EC:EA$. $\therefore\ EF:ED=ED:EP$.

$\therefore\ \overline{ED}^2=EF\cdot EP$. 但 $\overline{EM}^2=EF\cdot EP$. (定理84)

$\therefore \overline{ED}^2=\overline{EM}^2$. $\therefore$ $ED=EM$. **Q. E. D.**

(59) PA, PB 切 $\odot O$ 於 A, B. OP 交 AB 於 M. 過 M 作任意弦 QR. 求證 $\angle QPM=\angle RPM$.



〔證〕 聯 OA, OB, OQ, OR 因 PA, PB 是切線,

$\therefore$ $\angle PAO=\angle PBO=$ rt.$\angle$, $\therefore$ $\angle PAO+\angle PBO=2$ rt.$\angle$,

$\therefore$ A, P, B, O 共圓, $\therefore$ $PM\cdot MO=AM\cdot MB$.

又 A, Q, B, R 共圓, $\therefore$ $QM\cdot MR=AM\cdot MB$.

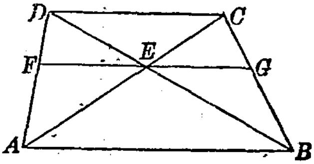
$\therefore$ $PM\cdot MO=QM\cdot MR$. $\therefore$ P, R, O, Q 共圓.

$\therefore$ $\angle QPO=\angle QRO$, $\angle RPO=\angle RQO$.

但 $OQ=OR$, $\therefore$ $\angle QRO=\angle RQO$.

$\therefore$ $\angle QPO=\angle RPO$, 即 $\angle QPM=\angle RPM$. **Q. E. D.**

(60) $ABCD$ 是梯形他的兩對角線 AC, BD 交於 E. 過 E 作兩底邊 DC, AB 的平行線 FG 求證 $FE=EG$.



〔證一〕 $\because$ $DC \parallel AB$, $\therefore$ $\triangle DAB = \triangle CAB$. (定理 50 系 1)

$\therefore$ $\triangle DAB - \triangle EAB = \triangle CAB - \triangle EAB$,

即 $\triangle DAE = \triangle CBE$.

設若 $FE > EG$, 則 $\triangle DEF > \triangle CEG$, (定理 50 系 4)

$\triangle AEF > \triangle BEG$.

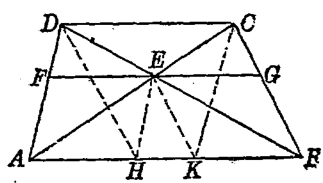
故 $\triangle DEF + \triangle AEF > \triangle CEG + \triangle BEG$,

即 $\triangle DAE > \triangle CBE$.

但今已證得 $\triangle DAE = \triangle CBE$, $\therefore$ $FE \not> EG$

同樣可證 $FE \not< EG$. $\therefore$ $FE = EG$. Q. E. D.

〔證二〕 作 $EH \parallel DA$, $EK \parallel CB$. 聯 DH, CK. 則 $AHEF, KBGE$ 都是平行四邊形.



$\therefore$ $FE = AH, EG = KB$.

$\because$ $DC \parallel AB$ $\therefore$ $\triangle DAB = \triangle CAB$, (定理 50 系 1)

$\therefore$ $DAB - \triangle EAB = \triangle CAB - \triangle EAB$,

即 $\triangle DAE = \triangle CBE$.

$\because$ $EH \parallel DA$, $\therefore$ $\triangle DAE = \triangle DAH$ (定理 50 系 1)

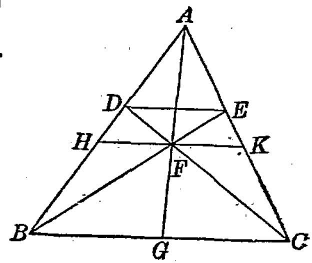
$\because \quad EK \parallel CB, \quad \therefore \quad \triangle CBE = \triangle CKB$ (定理50系1)

$\therefore \quad \triangle DAH = \triangle CKB.$

$\therefore \quad AH = KB.$ (定理50系2)

$\therefore \quad FE = EG.$ Q. E. D.

(61) 作$\triangle ABC$底邊的平行線DE交AB於D,交AC於E. BE,CD交於F. 則AF的延線必過BC的中點.



〔證〕 過F作$HK \parallel BC$.

則$HF = FK$ (60題證明)

$\because \quad HF \parallel BG,$

$\triangle AHF \backsim \triangle ABG,$

$\therefore \quad HF : BG = AF : AG.$

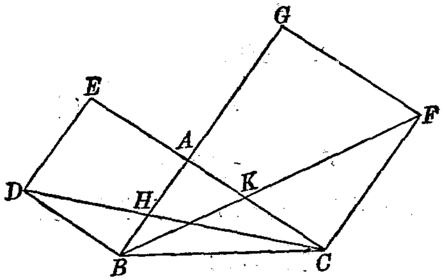
$\because \quad FK \parallel GC, \quad \therefore \quad \triangle AFK \backsim \triangle AGC,$

$\therefore \quad FK : GC = AF : AG. \quad \therefore \quad HF : BG = FK : GC.$

$\therefore \quad BG = GC$ Q. E. D.

(62) 直角三角形ABC二邊AB, AC上各向外側作正方形$ABDE$, $ACFG$. 聯CD交AB於H. 聯BF交AC於K. 求證$AH = AK$.

〔證〕 $\because \quad AH \parallel ED,$



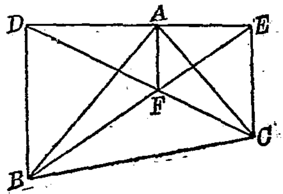
$\therefore\ AH : ED = AC : EC.$

$\therefore\ AH : AC = ED : EC.$

又 $\because\ AK \parallel GF,\ \ \therefore\ AK : GF = AB : GB.$

但 $\because$ $ABDE$, $ACFG$ 都是正方形, 故 $AC=GF$, $ED=AB$, $EC=GB$, $\therefore\ AH=AK.$ Q. E. C.

(63) DE 是 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的外角等分線. BD, CE, 都是 DE 的垂線. BE, CD 交於 F.



求證 $\angle BAF = \angle CAF$.

〔證〕 $\because$ DE 是 $\angle A$ 的外角等分線, 即 $\angle DAB = \angle EAC$, 又 $\angle BDA = \angle CEA = rt.\angle$,

$\therefore\ \triangle DAB \backsim \triangle EAC,\ \therefore\ DB : EC = DA : AE.$

又因 BD, CE 都是 DE 的垂線，　$\therefore\ DB \parallel EC.$

$$\therefore\ \triangle DBF \backsim \triangle CEF$$

$\therefore\ DB : EC = DF : FC.\ \therefore\ DA : AE = DF : FC.$

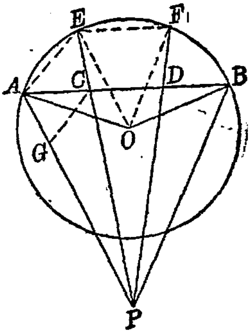
$$\therefore\ AF \parallel EC.\ (\text{定理}70)$$

$\because\ \angle DEC = rt.\angle,\qquad \therefore\ \angle DAF = \angle EAF = rt.\angle.$

$\therefore\ \angle DAF - \angle DAB = \angle EAF - \angle EAC.$

即　　$\angle BAF = \angle CAF.$

(64) A, B 是 $\odot O$ 圓周上任意兩點. $\frown AB$ 三等分於 E, F. 弦 AB 三等分於 C, D. EC, FD 的延長線會於 P. 求證 $\angle APB = \frac{1}{3}\angle AOB.$



〔證〕 聯 OE, OF, AE, EF. 作 $CG \parallel EA$.

$\because\ \frown AE = \frown FB,\ \therefore\ EF \parallel AB.$

$$\therefore\ EF : CD = EP : CP.$$

又因 $AE \parallel GC,\quad \therefore\ AE : CG = EP : CP.$

$$\therefore\ EF : CD = AE : CG.$$

$\because\ \frown AE = \frown EF,\ \therefore\ AE = EF,\ \therefore\ CG = CD.$

又 $\because$ $AC=CD$, $\therefore$ $AC=CG$,

$\therefore$ $\angle CGA=\angle CAG$.

又 $\because$ $PA=PB$, (證略),

$\therefore$ $\angle BAP=\angle ABP=\angle CAG=\angle CGA$.

$\therefore$ $\triangle CAG\backsim\triangle PAB$.

$\because$ $\frown EB=2\frown EF$, $\therefore$ $\angle EAB=\angle EOF$.

又 $\because$ $CG \parallel EA$, $\therefore$ $\angle EAB=\angle ACG$,

$\therefore$ $\angle ACG=\angle EOF$.

然 $\triangle CAG$, $\triangle OEF$, 都是二等邊三角形,

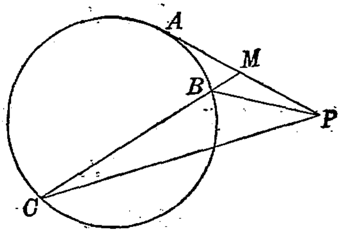
$\therefore$ $\triangle CAG\backsim\triangle OEF$.

故 $\triangle PAB\backsim\triangle OEF$. $\therefore$ $\angle APB=\angle EOF$.

$\because$ $\frown EF=\frac{1}{3}\frown AB$, $\therefore$ $\angle EOF=\frac{1}{3}\angle AOB$.

$\therefore$ $\angle APB=\frac{1}{3}\angle AOB$. Q. E. D.

(65) 從圓外一點 P 作切線 PA. 過 PA 中點 M 作任意割線 MBC 交圓周於 B, C. 聯 PB, PC. 求證 $\angle MCP=\angle MPB$.



〔證〕 PA 是切線, 卽 MA 是切線. 故

$\overline{MA}^2 = MB \cdot MC$ (定理61系3). 今 $PM = MA$,

$\therefore\ \overline{PM}^2 = MB \cdot MC.\quad \therefore\ MC : MP = MP : MB.$

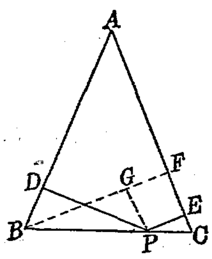
在 $\triangle MCP$, $\triangle MPB$ 中, $\angle CMP = \angle PMB$,

$MC : MP = MP : MB$, $\therefore\ \triangle MCP \backsim \triangle MPB$. (定理72)

$\therefore\ \angle MCP = \angle MPB.$ Q. E. D.

10. 關於一定的證例

(66) 從二等邊三角形 ABC 底邊 BC 上任意一點 P 至二邊引垂線 $PD \perp AB$, $PE \perp AC$. 求證 $PD+PE$ 之長一定.



〔證〕 過 B 作 $BF \perp AC$, B 是定點, AC 是定直線, 故 BF 之長一定. 作 $PG \perp BF$. $PEFG$ 是矩形,

$\therefore\ PE = GF.$

$\because\ AB = AC,\quad \therefore\ \angle B = \angle C$, 又因 $GP \parallel AC$,

$\therefore\ \angle GPB = \angle C,\quad \therefore\ \angle B = \angle GPB.$

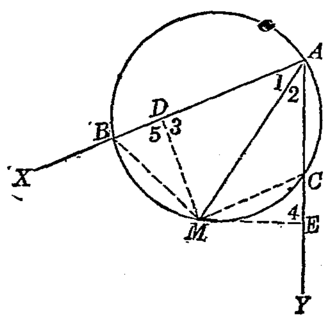
又 $\angle BDP = \angle PGB = rt.\angle$ 而 BP 是公邊,

$\therefore\ \triangle BDP \cong \triangle GPB,\quad \therefore\ PD = BG.$

$\therefore\ PD + PE = BG + GF = BF.$

$\therefore$ $PD+PE$之長一定. Q. E. D

(67) 定角XAY的等分線上一定點M.以AM爲弦作任意圓交AX, AY於B, C.求證$AB+AC$是定長.



〔證〕 作$MD\perp AX$, $ME\perp AY$. 聯MB, MC.

$\because$ $\angle 1=\angle 2$,

$\angle 3=\angle 4=rt.\angle$,

AM是公邊,

$\therefore$ $\triangle AMD\cong\triangle AME$.

$\therefore$ $AD=AE$, $MD=ME$.

$\because$ $\angle 1=\angle 2$, $\therefore$ $\frown BM=\frown MC$, $\therefore$ $BM=MC$.

又 $MD=ME$, $\angle 5=\angle 4=rt.\angle$, $\therefore$ $\triangle MBD\cong\triangle MCE$.

$\therefore$ $BD=CE$. $\therefore$ $AB+AC=AD+BD+AE-CE$

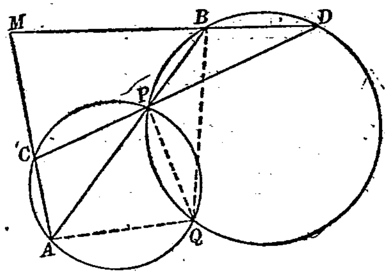
$=AD+AE$.

因M是定點,AX, AY是定線,故D, E也是定點,AD, AE都是定長,故$AD+AE$是定長.

$\therefore$ $AB+AC$是定長. Q. E. D.

(68) 過相交兩定圓交點P作任意兩直線AB,

CD交各圓於A,B,C,D.兩弦AC,BD交於M.求證$\angle M$的大小一定.



〔證〕

聯 PQ, AQ, BQ.

則 $\angle PCM= \angle PQA$ (定理40系),

$\angle PDM= \angle PQB$ (定理37).

$\therefore \angle PCM+\angle PDM=\angle AQP+\angle PQB=\angle AQB$.

$\therefore \angle M=2rt\angle-(\angle PCM+\angle PDM)=2rt\angle-\angle AQB$

$=2rt\angle-[2rt\angle-(\angle QAB+\angle QBA)]$

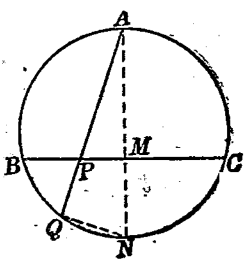
$=\angle QAB+\angle QBA$.

$\because P,Q$是兩個定圓的交點,故兩個$\frown PQ$都一定.

$\therefore \angle PAQ$和$\angle PBQ$的大小都一定.

$\therefore \angle M$的大小一定. Q.E.D.

(69) BC是定圓的定弦.A是$\frown BC$的中點.過A作任意弦AQ交BC於P.求證AP,AQ所包矩形的面積一定.



〔證一〕 作直徑AN交BC於M.

$\because \frown AB = \frown AC$, $\therefore AM \perp BC$, 卽 $\angle AMP = rt\angle$.

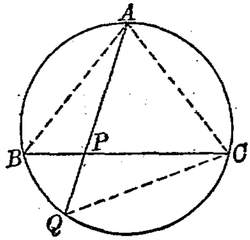
$\because$ AN 是直徑, $\therefore$ $\angle AQN = rt\angle$. 故在 $\triangle APM$, $\triangle ANQ$ 中, $\angle AMP = \angle AQN$, $\angle MAP = \angle QAN$.

$\therefore$ $\triangle AMP \backsim \triangle AQN$. $\therefore$ $AM : AQ = AP : AN$.

$\therefore$ $AP \cdot AQ = AM \cdot AN$. 但 AM, AN 都一定,

$\therefore$ $AP \cdot AQ$ 一定. Q. E. D.

〔證二〕 聯 AB, AC, CQ.



$\because$ $\frown AB = AC$,

$\therefore \angle ACB = \angle AQC$(定理 37)

在 $\triangle APC$, $\triangle ACQ$ 中

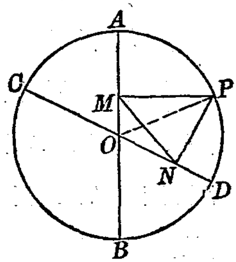
$\angle ACP = \angle AQC$,

$\angle PAC = \angle CAQ$,

$\therefore \triangle ACP \backsim \triangle AQC$. $\therefore$ $AP : AC = AC : AQ$.

$\therefore AP \cdot AQ = \overline{AC}^2$. 但 AC 是定長.

$\therefore AP \cdot AQ$ 一定. Q. E. D.



(70) AB, CD 是定圓內的兩個定直徑. P 是圓周上任意一點. $PM \perp AB$, $PN \perp CD$. 求證 MN 是定長.

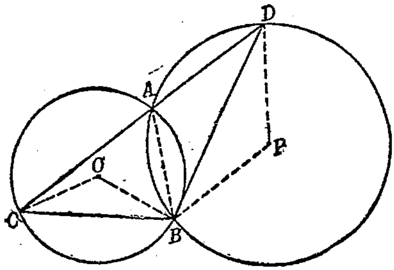
〔證〕 聯 OP. ∵ $\angle OMP=\triangle ONP=rt\angle$.

∴ M,N在 OP 做直徑的圓周上∴因 OP 的大小一定,

∴ O,N,P,M所共之圓的大小一定.又因 $\angle MON$ 是定角.故MN是等圓內對等圓周角的弦.

∴ MN是定長. Q.E.D.

(71) A,B 是兩定圓的交點.過 A 作任意直線交兩圓於 C,D. 求證 $BC:BD$一定.



〔證〕 作半徑 $OB,OC,PB\ PD$. 聯 AB.因 $\angle BPD=2(2rt.\angle-\angle BAD)$

而 $\angle BAC=2rt.\angle-\angle BAD$

∴ $\angle BPD=2\angle BAC$.

但 $\angle BOC=2\angle BAC$.

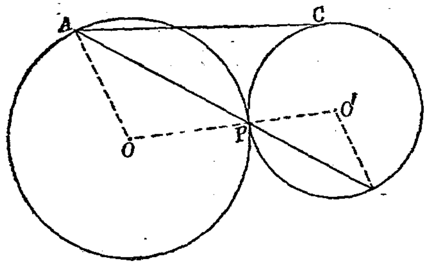
∴ $\angle BOC=\angle BPD$

又因 $\triangle OBC$, $\triangle PBD$ 都是二等邊三角形.今其頂角相等, ∴ $\triangle OBC\backsim\triangle PBD$.

∴ $BC:BD=OB:PB$, 卽兩圓半徑之比.

$\therefore\ BC:BD$ 一定。 Q. E. D.

(72) $\odot O,\odot O'$ 兩個定圓切於 P. 過 P 作任意直線交兩圓於 A,B 從 A 作 $\odot O'$ 的切線 AC. 求證 $AP:AC$ 一定.



〔證〕 $\overline{AC}^2=AP\cdot AB,\quad \therefore\ AP:AC=AC:AB.$

$$\therefore\left(\frac{AP}{AC}\right)^2=\frac{AP}{AC}\cdot\frac{AC}{AB}=\frac{AP}{AB}.$$

但因 $\triangle OAP\backsim\triangle O'BP$(用題12證二的方法證知 $OA\parallel O'B$ 而得兩等腰三角形之頂角相等).

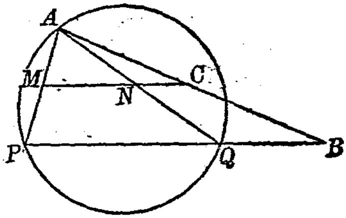
$$\therefore\ \frac{AP}{PB}=\frac{OP}{PO'},\quad \frac{AP}{AP+PB}=\frac{OP}{OP+PO'},$$

即
$$\frac{AP}{AB}=\frac{OP}{OO'},$$

$$\therefore\ \left(\frac{AP}{AC}\right)^2=\frac{OP}{OO'}\text{ 是定值}$$

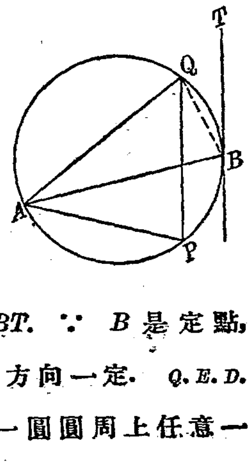
$\therefore\ AP:AC$ 一定. Q. E. D.

(73) A 是定圓周上一定點. B 是定圓外一定點過 B 作任意割線交圓周於 P, Q. M, N 各爲 PA, AQ 的中點.求證直線 MN 必過一定點.



〔證〕 M, N 各爲 AP, AQ 的中點, $\therefore$ $MN \parallel PQ$ $\therefore$ MN 必過 AB 的中點 C $\because$ A, B 都是定點, $\therefore$ C 是定點. $\therefore$ MN 過定點 C. Q. E. D.

(74) AB 是定圓內的定弦. AP, AQ 是其他兩個不定弦,但與 AB 成等角,求證 PQ 的方向一定.

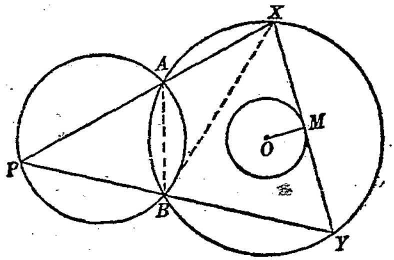


〔證〕 過 B 作切線 BT. 聯 BQ. 則 $\angle TBQ = \angle BAQ$(定理45) $\angle BQP = \angle BAP$ (定理37) 但今 $\angle BAQ = \angle BAP$,

$\therefore$ $\angle TBQ = \angle BQP$. $\therefore$ $PQ \parallel BT$. $\because$ B 是定點, $\therefore$ BT 是定直線. $\therefore$ PQ 的方向一定. Q. E. D.

(75) 兩定圓交於 A,B. P 是一圓圓周上任意一

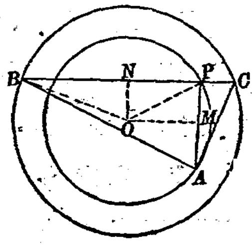
點. PA, PB 的延線交他圓於 X, Y. 求證 XY 切於一定圓.



〔證〕 $\because$ AB 一定, $\therefore$ $\angle APB, \angle AXB$ 的大小都一定. $\therefore$ $\angle XBY = \angle BPX + \angle BXP =$ 定值
$\therefore$ XY 是定長. (定理36與27). 故與中心 O 的距離一定. (定理32). 作 $OM \perp XY$, 則 OM 是定長.
$\therefore$ 以 O 爲中心, OM 爲半徑所作之圓是定圓. 而 XY 必與此圓相切.

$\therefore$ XY 切於一定圓.　　　Q. E. D.

(76) P 是兩個定同心圓內圓圓周上的一定點. PA 是內圓的任意弦. 過 P 作外圓之弦 BC 令與 AP 垂直. 求證



(a) $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$ 一定;

(b) $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$ 一定.

(c) $\triangle ABC$的重心的位置一定.

〔證〕 (a) 作 $OM\perp PA$, $ON\perp BC$. 則 $OMPN$ 是矩形. $\therefore\ \overline{PA}^2=(2PM)^2=4\overline{PM}^2=4\overline{ON}^2$.

$$\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=(BN+NP)^2+(CN-NP)^2$$
$$=\overline{BN}^2+\overline{NP}^2+2\overline{BN}\cdot\overline{NP}+\overline{CN}^2+\overline{NP}^2-2CN\cdot NP$$
$$=2\overline{BN}^2+2\overline{NP}^2.\quad(\because\ BN=CN)$$
$$\therefore\ \overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=4\overline{ON}^2+2\overline{BN}^2+2\overline{NP}^2$$
$$=2(\overline{ON}^2+\overline{NP}^2)+2(\overline{ON}^2+\overline{BN}^2)$$
$$=2\overline{OP}^2+2\overline{OB}^2.$$

但因 OP, OB, 都是定圓的半徑,其長一定.

$\therefore\ \overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$ 一定. Q. E. D.

(b) $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$

$$=(\overline{PA}^2+\overline{PB}^2)+(\overline{PA}^2+\overline{PC}^2)+(PB+PC)^2$$
$$=2\overline{PA}^2+2\overline{PB}^2+2\overline{PC}^2+2\overline{PB}\cdot\overline{PC}$$
$$=2(\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2)+2(BN+NP)(NC-NP)$$
$$=4(\overline{OP}^2+\overline{OB}^2)+2(\overline{BN}^2-\overline{NP}^2)\qquad\text{〔見(a)〕}$$

$=4\overline{OP}^2+4\overline{OB}^2+2(\overline{OB}^2-\overline{ON}^2)-2(\overline{OP}^2-\overline{ON}^2)$

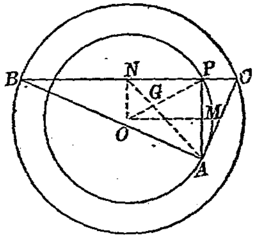
$=2\overline{OP}^2+6\,\overline{OB}^2.$

$\therefore\ \overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$ 一定. Q. E. D.

(c) 聯 AN, 與 OP 交於 G.

$ON \parallel AP$, $\therefore\ \angle ONG \backsim \triangle PAG$.

$\therefore\ ON:PA=NG:GA=OG:GP$.



但因 $ON=PM=\frac{1}{2}PA$,

$\therefore\ NG=\frac{1}{2}GA$, $OG=\frac{1}{2}GP$

$\because\ N$ 是 BC 的中點,

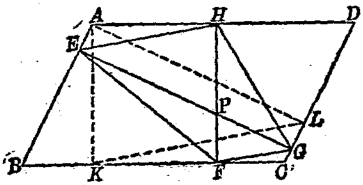
$\therefore\ AN$ 是 $\triangle ABC$ 的中線.

今 $NG=\frac{1}{2}GA$, 即 $AG=\frac{2}{3}AN$,

$\therefore\ G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心. $\because\ O, P$ 都是定點, 今 $OG=\frac{1}{2}GP$, 故 G 是定點.

故 $\triangle ABC$ 的重心的位置一定. Q. E. D.

(77) 過定平行四邊形內任意一點作各邊的垂線.則順次聯其垂足所成四邊形的面積一定



P 是 $\square ABCD$ 內任意一點. $PE\perp AB$, $PF\perp BC$, $PG\perp CD$, $PH\perp AD$. 求證四邊

形 $EFGH$ 的面積一定.

〔證〕 作 $AK \perp BC$, $AL \perp CD$. 聯 KL. 則 $AKFH$, $AEGL$ 都是矩形.

$$\therefore \quad HF = AK, \quad EG = AL,$$

又 $\angle FPG = \angle KAL$. (兩雙平行線夾角)

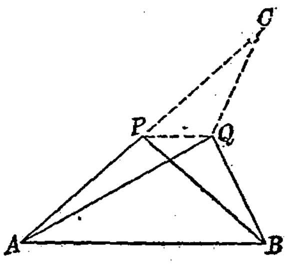
$\therefore \quad EFGH = \triangle AKL$. (見例題 39)

但 AK, AL 的位置一定, $\therefore$ $\triangle AKL$ 的面積一定.

$\therefore$ 四邊形 $EFGH$ 的面積一定. Q. E. D.

11. 最大最小問題證例.

(78) 同底等高諸三角形中,二等邊三角形的周圍最小.



$\triangle PAB$, $\triangle QAB$ 共有底邊 AB, 且爲等高, $PA = PB$. 求證

$$PA + PB + AB < QA + QB + AB.$$

〔證〕 延長 AP 至 C 令 $PC = AP$. 聯 CQ, PQ.

$\because$ $\triangle PAB$, $\triangle QAB$ 等高, $\therefore$ $PQ \parallel AB$.

$\angle BPQ=\angle PBA$,(內錯角) 又 $\angle CPQ=\angle PAB$.

(同位角)

$PA=PB$, 故 $\angle PBA=\angle PAB$,(底角)

故 $\angle BPQ=\angle CPQ$.

又 $\because$ $PC=PA=PB$,PQ是公邊,

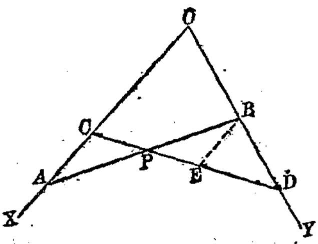
$\therefore$ $\triangle BPQ\cong\triangle CPQ$, $\therefore$ $QB=QC$.

$\because$ $AQ+QC>AC$,

$\therefore$ $AQ+QB=AQ+QC>AP+PC=AP+PB$.

$\therefore$ $PA+PB+AB<QA+QB+AB$. Q. E. D.

(79) 過定角內一定點作諸直線與定角的兩邊所成諸三角形中,以定點是所作一邊中點的三角形面積最小.



P是定$\angle XOY$內一定點AB,CD是過P的兩直線,而P是AB的中點.求證$\triangle OAB<\triangle OCD$.

〔證〕 $\because$ $\angle ABD>\angle BAO$,(三角形的外角大於他的內對角)即$\angle PBD>\angle PAC$故可在$\angle PBD$內作BE令.

$$\angle PBE=\angle PAC.$$

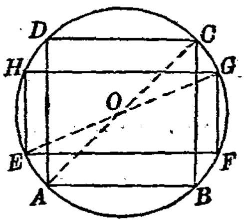
$\because$ $PA=PB$, $\angle CPA=\angle EPB$. $\therefore$ $\triangle CPA\cong\triangle EPB$.

$\therefore\ \triangle OAB = OCPB + \triangle CPA = OCPB + \triangle EPB$

$$= OCEB.$$

但 $OCEB < \triangle OCD$, $\quad \therefore\ \triangle OAB < \triangle OCD$. Q. E. D.

(80) 定圓內接諸矩形中，以正方形的面積爲最大.



$ABCD$ 是圓內接正方形. $EFGH$ 是圓內接矩形.求證 $\square ABCD > \square EFGH$.

〔證一〕 聯 AC, EG. 因 $AB = BC$,

$$\therefore\ 2\overline{AB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2.$$

又 $\overline{EF}^2 + \overline{FG}^2 = \overline{EG}^2$. $\because\ \angle B = \angle F = rt\angle$, $\therefore\ AC, EG$ 都是直徑. $\quad \therefore\ AC = EG$, $\overline{AC}^2 = \overline{EG}^2$.

$$\therefore\ 2\overline{AB}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{FG}^2.$$

因 $EF > FG$ (或 $FG > EF$),

$$\therefore\ (EF - FG)^2 > 0.$$

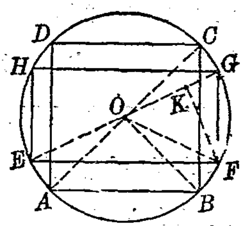
$$\therefore\ (EF - FG)^2 = \overline{EF}^2 + \overline{FG}^2 - 2\overline{EF}\cdot\overline{FG} > 0.$$

$$\therefore\ \overline{EF}^2 + \overline{FG}^2 > 2\overline{EF}\cdot\overline{FG}.$$

$$\therefore\ 2\overline{AB}^2>2\ \overline{EF}\cdot\overline{FG},\quad \therefore\ \overline{AB}^2>\overline{EF}\cdot\overline{FG}.$$

卽 $\square ABCD>\square EFGH$. Q. E. D.

〔證二〕 聯 AC, EG.



因 $\angle B=\angle F=\text{rt}\angle$, $\therefore$ AC,EG 是直徑,故交於中心 O.

聯 OB, OF 作 $FK\perp EG$.

$\because$ $AB=BC$, $OA=OC$,

$\therefore$ $BO\perp AC$.(BO 爲距 AC 兩端等遠之軌跡)

$\therefore$ $\square ABCD=2\triangle ABC=2(\frac{1}{2}\overline{BO}\cdot\overline{AC})=\overline{BO}\cdot\overline{AC}$.

又 $\square EFGH=2\triangle EFG=2(\frac{1}{2}\overline{FK}\cdot\overline{EG})=\overline{FK}\cdot\overline{EG}$.

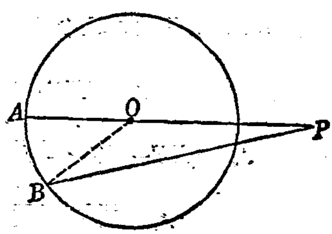
$\because$ AC, EG 都是直徑,

$\therefore$ $AC=EG$, 而 $OF>FK$, (斜線大於垂線).

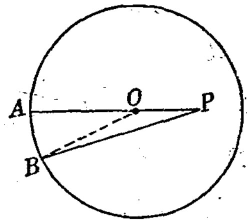
$\therefore$ $BO>FK$, $\quad\therefore$ $\overline{BO}\cdot\overline{AC}>\overline{FK}\cdot\overline{EG}$.

$\therefore$ $\square ABCD>\square EFGH$. Q. E. D.

(81) 定圓周上諸點與一定點所聯諸線分中,以過中心者爲最大.



P 爲定點(圓外或



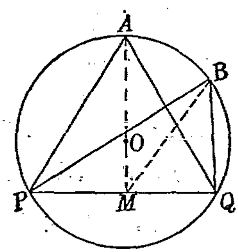
圓內). PA 過中心 O.
PB 不過中心 O. 求證

$$PA > PB.$$

〔證〕 聯 OB.

$\because$ $OA=OB$, $\therefore$ PA

即 $PO+OA=PO+OB>PB$. Q. E. D.



(82) P, Q 爲圓周上兩定點. 圓周上其他諸點中, 以優弧 PQ 的中點與 P, Q 聯成兩弦上正方形之和爲最大.

設 A 爲優弧 PQ 的中點, B 是圓周上其他任意一點. 求證 $\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2>\overline{BP}^2+\overline{BQ}^2$.

〔證〕 取 PQ 的中點 M. 聯 AM, BM.

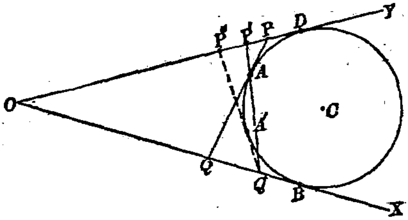
則 $\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2=2\overline{AM}^2+2\overline{PM}^2$. $\overline{BP}^2+\overline{BQ}^2=2\overline{BM}^2+2\overline{PM}^2$. (定理59)

但因 A 是優 $\frown PQ$ 的中點, M 是 PQ 的中點,

故 AM 過中心 O. $\therefore$ $AM>BM$. (見上例)

$$\therefore\ \overline{AP}^2+\overline{AQ}^2>\overline{BP}^2+\overline{BQ}^2.$$ Q. E. D.

(83) A是定角$\angle XOY$內一定點.



$\odot C$ 過A且切OX, OY於B, D.

過A所作諸線份中,以$\odot C$的切線與OX, OY所成三角形的周圍為最小.

PQ過A,切於$\odot C$. $P'Q'$是過A的其他任意一線.

求證 $OP+OQ+PQ<OP'+OQ'+P'Q'$.

〔證〕 $\because$ $PA=PD,\ QA=QB$ (定理44),

$$\therefore\ OP+OQ+PQ=OP+OQ+PA+QA$$
$$=OP+OQ+PD+QB.$$
$$=OD+OB.$$

從Q'作$\odot C$的切線交OY於P'',切$\odot C$於A'.

則 $\because$ $P''A'=P''D,\ Q'A'=Q'B$ (定理44),

$$\therefore\ OP''+OQ'+P''Q'=OP''+OQ'+P''A'+Q'A'$$
$$=OP''+OQ'+P''D+Q'B$$
$$=OD+OB.$$

$$\therefore\quad OP+OQ+PQ=OP''+OQ'+P''Q'.$$

又　　$\because\quad P''Q'<P''P'+P'Q'$

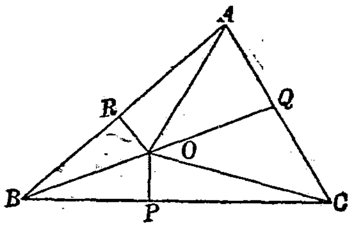
$\therefore\quad OP''+OQ'+P''Q'<OP''+OQ'+P''P'+P'Q',$

卽　$OP''+OQ'+P''Q'<OP'+OQ'+P'Q'.$

$\therefore\quad OP+OQ+PQ<OP'+OQ'+P'Q'$　　Q. E. D.

12. 其他各種雜題證例.

(84)　O 是 $\triangle ABC$ 內任意一點. OP, OQ, OR 各爲 $\angle BOC$, $\angle COA$, $\angle AOB$ 的等分線.求證



$$\frac{BP}{CP}\cdot\frac{CQ}{AQ}\cdot\frac{AR}{BR}=1.$$

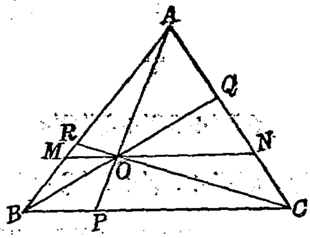
〔證〕　$\because\quad \angle BOP=\angle COP,$

$\therefore\quad BP:CP=OB:OC$ (定理 75).

同理　$CQ:AQ=OC:OA,$　　　$AR:BR=OA:OB$

$$\therefore\quad \frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{AQ}\cdot\frac{AR}{BR}=\frac{OB}{OC}\cdot\frac{OC}{OA}\cdot\frac{OA}{OB}=1.\quad \text{Q. E. D.}$$

(85) O 是 $\triangle ABC$ 內任意一點. AO 延長交 BC 於 P. BO 延長交 AC 於 Q. CO 延長交 AB 於 R. 求證



$$\frac{OP}{AP}+\frac{OQ}{BQ}+\frac{DR}{CR}=1.$$

〔證〕 過 O 作 $MN \parallel BC$ 交 AB 於 M, AC 於 N

則因 $\triangle OQN \backsim \triangle BQC$, (定理 69 與 71),

$$\therefore\ OQ : BQ = ON : BC$$

又因 $\triangle ORM \backsim \triangle CRB$, $\qquad \therefore\ OR : CR = OM : BC$

$$\therefore\ \frac{OQ}{BQ}+\frac{OR}{CR}=\frac{ON}{BC}+\frac{OM}{BC}=\frac{ON+OM}{BC}=\frac{MN}{BC}$$

因 $MO \parallel BP$, $\therefore\ OP : AP = MB : AB$. (定理 69 與 67)

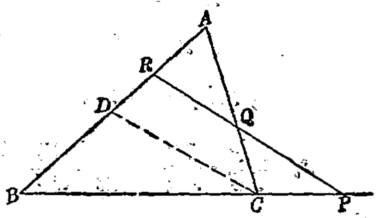
因 $\triangle AMN \backsim \triangle ABC$, $\therefore\ MN : BC = AM : AB$.

$$\therefore\ \frac{OP}{AP}+\frac{OQ}{BQ}+\frac{OR}{CR}=\frac{OP}{AP}+\frac{MN}{BC}$$

$$=\frac{MB}{AB}+\frac{AM}{AB}=\frac{MB+AM}{AB}=\frac{AB}{AB}=1$$

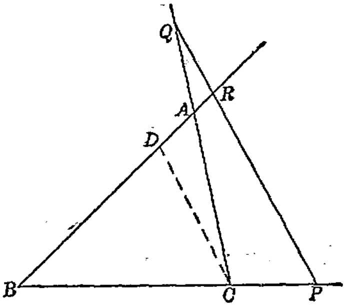
Q. E. D.

(86) 一直線交任意三角形 ABC 的三邊 BC, AC, AB 或其延線於 P, Q, R.



求證

$$\frac{BP}{CP}\cdot\frac{CQ}{AQ}\cdot\frac{AR}{BR}=1.$$



〔證〕 過 C 作

$CD \parallel PR$.

則 $BP:CP=BR:DR$,

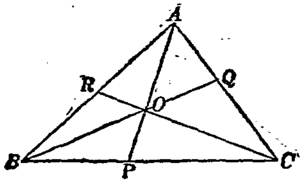
$CQ:AQ=DR:AR$.

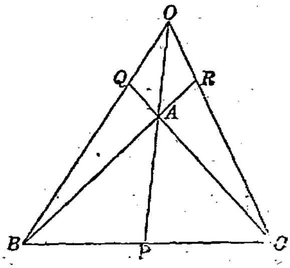
(定理69)

$$\therefore\ \frac{BP}{CP}\cdot\frac{CQ}{AQ}\cdot\frac{AR}{BR}=\frac{BR}{DR}\cdot\frac{DR}{AR}\cdot\frac{AR}{BR}=1.$$ Q. E. D.

(87) 一點 O 聯任意三角形 ABC 的三頂點 OA OB, OC 各交對邊 BC, CA, AB 或其延線於 P, Q, R.

求證 $\dfrac{BP}{CP}\cdot\dfrac{CQ}{AQ}\cdot\dfrac{AR}{BR}=1.$





〔證一〕 因直線 COR 交 $\triangle ABP$ 的三邊於 C, O, R

$$\therefore\ \frac{BC}{PC}\cdot\frac{PO}{AO}\cdot\frac{AR}{BR}=1 \qquad \text{(例題86)}$$

又因直線BOQ交$\triangle ACP$的三邊於B,O,Q,

$$\therefore\quad \frac{PB}{CB}\cdot\frac{CQ}{AQ}\cdot\frac{AO}{PO}=1 \qquad \text{(例題86)}$$

$$\therefore\quad \left(\frac{BC}{PC}\cdot\frac{PO}{AO}\cdot\frac{AR}{BR}\right)\left(\frac{PB}{CB}\cdot\frac{CQ}{AQ}\cdot\frac{AO}{PO}\right)=\frac{BP}{CP}\cdot\frac{CQ}{AQ}\cdot\frac{AR}{BR}$$

$$=1. \qquad Q.E.D.$$

〔證二〕

$$\frac{BP}{CP}=\frac{\triangle ABP}{\triangle ACP}=\frac{\triangle OBP}{\triangle OCP}=\frac{\triangle ABP\sim\triangle OBP}{\triangle ACP\sim\triangle OCP}=\frac{\triangle ABO}{\triangle ACO}.$$

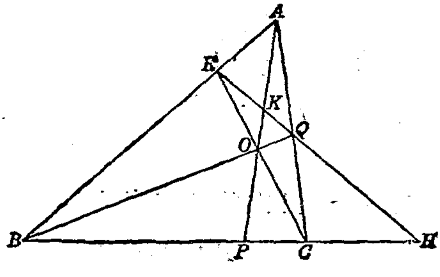
$$\frac{CQ}{AQ}=\frac{\triangle BCQ}{\triangle BAQ}=\frac{\triangle OCQ}{\triangle OAQ}=\frac{\triangle BCQ\mp\triangle OCQ}{\triangle BAQ\mp\triangle OAQ}=\frac{\triangle BCO}{\triangle ABO}.$$

$$\frac{AR}{BR}=\frac{\triangle CAR}{\triangle CBR}=\frac{\triangle OAR}{\triangle OBR}=\frac{\triangle CAR\mp\triangle OAR}{\triangle CBR\mp\triangle OBR}=\frac{\triangle ACO}{\triangle BCO}$$

$$\text{故}\quad \frac{BP}{CP}\cdot\frac{CQ}{AQ}\cdot\frac{AR}{BR}=\frac{\triangle ABO}{\triangle ACO}\cdot\frac{\triangle BCO}{\triangle ABO}\cdot\frac{\triangle ACO}{\triangle BCO}=1.$$

Q.E.D.

(88) O 是 $\triangle ABC$內任意一點. AO, BO, CO 各交 BC, CA, AB於P,Q, R. RQ交AP於



K，交 BC 於 H.

求證 (a) B, P, C, H 是調和點列.

(b) R, K, Q, H 是調和點列.

(c) A, K, O, P 是調和點列.

〔證〕 (a) $\because$ 直線 RQH 交 $\triangle ABC$ 的三邊於 H, Q, R, 故

$$\frac{BH}{CH}\cdot\frac{CQ}{AQ}\cdot\frac{AR}{BR}=1. \qquad \text{(例題 86)}$$

又 $\because$ OA, OB, OC 交 $\triangle ABC$ 的三邊於 P, Q, R, 故

$$\frac{BP}{CP}\cdot\frac{CQ}{AQ}\cdot\frac{AR}{BR}=1. \qquad \text{(例題 87)}$$

$\therefore$ $BH : CH = BP : CP$.

$\therefore$ B, P, C, H 是調和點列. Q. E. D.

(b) $\because$ 直線 ROC 交 $\triangle KPH$ 的三邊於 C, R, O, 故

$$\frac{PC}{HC}\cdot\frac{HR}{KR}\cdot\frac{KO}{PO}=1. \qquad \text{(例題 86)}$$

又 $\because$ 直線 QOB 交 $\triangle KPH$ 的三邊於 B, Q, O, 故

$$\frac{PB}{HB}\cdot\frac{HQ}{KQ}\cdot\frac{KO}{PO}=1. \qquad \text{(例題 86)}$$

$\because$ B, P, C, H 是調和點列(本題 a),

$\therefore \quad \frac{PC}{HC}=\frac{PB}{HB}. \quad \therefore \quad \frac{HR}{KR}=\frac{HQ}{KQ}$

$\therefore$ R, K, Q, H 是調和點列. Q. E. D.

(c) $\because$ 直線 ROC 交 $\triangle KPH$ 的三邊於

C, R, O, 故 $$\frac{PC}{HC}\cdot\frac{HR}{KR}\cdot\frac{KO}{PO}=1$$

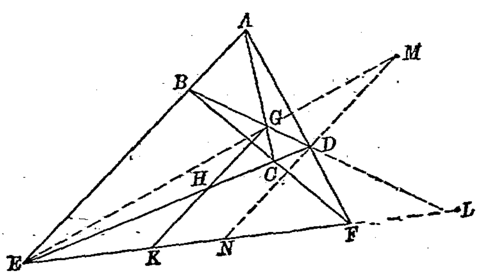
又 $\because$ 直線 AQC 交 $\triangle KPH$ 的三邊於 C, Q, A,

故 $$\frac{PC}{HC}\cdot\frac{HQ}{KQ}\cdot\frac{KA}{PA}=1$$

又 $\because$ R, K, Q, H 是調和點列,(本題 b)

$\therefore \quad \frac{HR}{KR}=\frac{HQ}{KQ}. \quad \therefore \quad \frac{KO}{PO}=\frac{KA}{PA}.$

$\therefore$ A, K, O, P 是調和點列. Q. E. D.



(89) 四邊形 $ABCD$ 的兩雙對邊延長相交於 E, F. 從其對角線交點 G 引 AE 的平行線交 ED

於 H, EF 於 K. 求證 $GH=HK$.

〔證〕 延長 BD 交 EF 於 L. 過 D 作 GK 的平行線交 EF 於 N, 交 EG 於 M.

則 $\because$ $GK \parallel AE$, $\quad\therefore$ $MN \parallel AE$,

$\therefore$ $\triangle MGD \backsim \triangle EGB$, $\quad\therefore$ $MD:BE=GD:GB$.

又 $\triangle DNL \backsim \triangle BEL$, $\quad\therefore$ $DN:BE=LD:LB$.

但 B, G, D, L 是調和點列(例 " 88 b)

$\therefore$ $GD:GB=LD:LB$ 則 $MD:BE=DN:BE$

$\therefore MD=DN$.

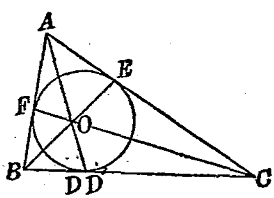
又 $\because$ $\triangle EHG \backsim \triangle EDM$, $\quad\therefore$ $HG:DM=EH:ED$.

$\triangle EHK \backsim \triangle EDN$, $\quad\therefore$ $HK:DN=EH:ED$.

$\therefore$ $HG:DM=HK:DN$. 今 $DM=DN$,

$\therefore$ $HG=HK$. Q. E. D

(90) $\triangle ABC$ 的三邊切其內切圓於 D, E, F. 求證 AD, BE, CF 共點.



〔證〕 聯 BE, CF 交於 O.

作 AO 交 BC 於 D'. 則 $\dfrac{BD'}{CD'}\cdot\dfrac{CE}{AE}\cdot\dfrac{AF}{BF}=1$. (87)

$\because$ $AE=AF$, $CE=CD$, $BF=BD$ (定理 44)

$$\therefore \frac{BD'}{CD'}\cdot\frac{CD}{BD}=1$$

$\therefore \quad BD':CD'=BD:CD,$

$\therefore \quad BD'+CD':CD=BD+CD:CD,$ (合比)

即 $BC:CD'=BC:CD, \quad \therefore \quad CD'=CD,$

$\therefore \quad D'$ 合於 $D.$

$\therefore \quad AD, BE, CF$ 共點. Q.E.D.

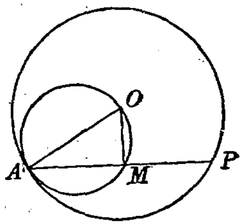
13. 軌跡證例

證軌跡之常用方法.

(1) 軌跡上之任意一點適合於所設條件.

(2) 適合於條件之點輒在軌跡上.

(91) A 是定 $\odot O$ 圓周上一定點. AP 是任意弦 M 是 AP 的中點. 求證 M 的軌跡是 OA 爲直徑所作之圓周.

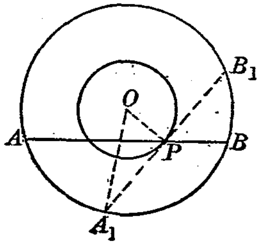


〔證〕 (1) 設 M 是 OA 爲直徑所作之圓周上任意一點, 則 $\angle AMO=rt.\angle$. 故 M 是 AP 的中點. 故此圓周上之點適合於所設條件.

(2) 設 M 是 AP 的中點, 則 $OM \perp AP$,

$\therefore \quad \angle AMO=rt.\angle \quad \therefore \quad M$ 在 OA 爲直徑的圓周上故適合於所設條件之點在此圓周上.

故 M 的軌跡是 OA 爲直徑所作之圓周. Q.E.D.



(92) 定圓O,其半徑爲r,圓內一動點P.過P作任意弦APB,其兩部份AP,BP所包矩形等於一定值k^2.求證P的軌跡是以$\sqrt{r^2-k^2}$爲半徑的$\odot O$的同心圓.

〔證〕 (1) 設P是此同心圓上任意一點.過P作切線A_1B_1聯OP,OA_1.

則 $AP\cdot BP=A_1P\cdot B_1P=\overline{A_1P}^2=\overline{OA}^2-\overline{OP}^2$(定理61系1).

$$=r^2-(\sqrt{r^2-k^2})^2=k^2$$

故此同心圓上之點適合於所設條件.

(2) 設P適合條件的點.同樣過P作切線A_1B_1.聯OP,OA_1.

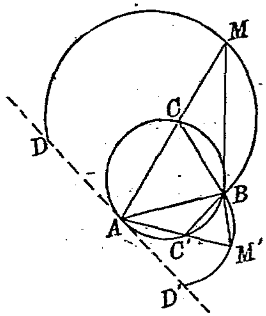
則 $\overline{OA_1}^2-\overline{OP}^2=\overline{A_1P}^2=A_1P\cdot B_1P=AP\cdot BP=k^2$.

$\therefore$ $\overline{OP}^2=\overline{OA_1}^2-k^2=r^2-k^2$. $\therefore$ $OP=\sqrt{r^2-k^2}$.

故P在O爲中心$\sqrt{r^2-k^2}$爲半徑的圓周上.

故P的軌跡是以$\sqrt{r^2-k^2}$爲半徑的$\odot O$的同心圓.

Q. E. D.



(93) AB是定圓O內的一定弦. C是$\odot O$圓周上任意點. AC延線$CM=CB$. 求M的軌跡.

〔解〕 AB是定弦, 故$\angle ACB$一定. 設$\angle ACB=2a$,

$\angle AC'B=2rt.\angle-2a=2(rt.\angle-a)$.

則因$CM=CB$, $\therefore$ $\angle CMB=\angle CBM=\frac{1}{2}\angle ACB=a$.

(定理10與13).

同樣 $\angle C'M'B=\angle C'BM'=\frac{1}{2}\angle AC'B=rt.\angle-a$.

故M的軌跡當爲AB爲弦, a及$rt.\angle-a$爲弓形角的兩個弓形弧. 但當C或C'接近於A時AM或AM'是切線. 因A是定點, 故過A所作切線是定直線如圖DD'. 故當C接近於A時, M接近於D, 而當C'接近於A時, M'接近於D'.

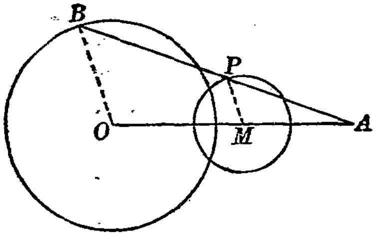
故M的軌跡是以AB爲弦, a及$rt.\angle-a$爲弓形角所作的兩個弓形弧的一部份,

$$\frown DMB, 與 \frown BM'D'.$$

〔證略〕

(94) A是定點, $\odot O$是定圓, 其半徑$=r$. B是

$\odot O$圓周上任意一點，P是AB的中點.求證P的軌跡是以OA的中點M爲中心，$\frac{1}{2}r$爲半徑所作之圓.



〔證〕 (1) 設P是$\odot M$上任意一點.

聯MP，過O作$OB \parallel MP$與AP延線交於B.

則因$AM=MO$, $MP \parallel OB$ $\therefore$ $AP=PB$, $MP=\frac{1}{2}OB$.(定理25) 但因$MP=\frac{1}{2}r$, $\therefore$ $OB=r$,

$\therefore$ B是$\odot O$上一點. P是AB的中點

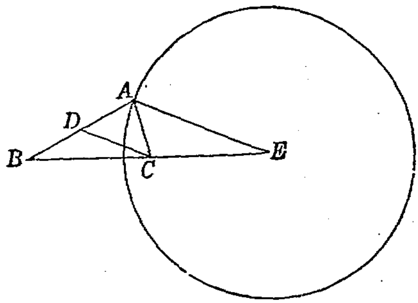
$\therefore$ P適合於所設條件.

(2) 設B是$\odot O$上任意點.P是AB的中點.聯OB, PM.則$PM=\frac{1}{2}OB=\frac{1}{2}r$.故$P$在$\odot M$上.

$\therefore$ 適合於條件之點在$\odot M$上.

故P的軌跡是以OA的中點M爲中心，$\frac{1}{2}r$爲半徑所作之圓. Q. E. D.

(95) $\triangle ABC$中底邊BC的位置一定.CD是中線其長等於一定値k.求證頂點A的軌跡是一圓周，其中心在BC延線上一點E, $CE=BC$，其半徑爲$2k$.



〔證〕 (1) 設A是$\odot E$上任意一點.則$AE=2k$過C作$CD \parallel EA$, ∵ C是BE的中點,故D亦是AB的中點.(定理24) ∴ CD是中線.又$CD=\frac{1}{2}EA=\frac{1}{2}(2k)=k$.

∴ $\odot E$上點適合於所設條件.

(2) 設A是適合於條件的頂點.

則$\triangle ABC$中AB上的中線$CD=k$.

聯AE. ∵ D是AB中點,C是BE中點.

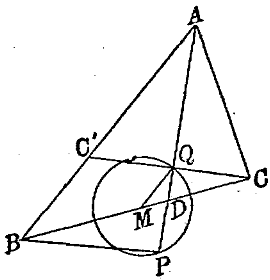
∴ $DC=\frac{1}{2}AE$,卽$AE=2DC=2k$. ∴ A在$\odot E$上.

∴ 適合於所設條件之點在$\odot E$上.

故$\odot E$是A的軌跡. Q. E. D.

(96) $\triangle ABC$中底邊BC的位置一定.AB, AC兩邊之差等於一定長k, AD是$\angle A$的等分線.從B.

與C作AD之垂線BP,CQ.求證垂足P及Q的軌跡是以BC中點M爲中心,以$\frac{1}{2}k$爲半徑所作之圓.



〔證〕(1) 設Q是$\odot M$上任意一點.則$MQ=\frac{1}{2}k$.聯CQ.作$QA\perp CQ$.作$AB\parallel MQ$.QA,BA交於A.延長CQ.交BA於C',$\because$ $BC'\parallel MQ$,又$BM=MC$,

$\therefore$ $C'Q=QC$ (定理24).$\therefore$ $\triangle AC'Q\cong\triangle ACQ$ (定理8).

$\therefore$ $AC'=AC$.

$\therefore$ $AB-AC=AB-AC'=BC'=2MQ=2(\frac{1}{2}k)=k$.

又 $\because$ $\triangle AC'Q\cong\triangle ACQ$.故$AQ$是$\angle A$的等分線,$AQ$合於$AD$.$\therefore$ $CQ\perp AD$.

故$\odot M$上之點適合於所設條件.

(2) 設Q是適合於所設條件之點.

則$CQ\perp AD$.延長CQ交AB於C'.$\because$ $AQ\perp CC'$.

$\angle C'AQ=\angle CAQ$,$\therefore$ $\triangle AC'Q\cong\triangle ACQ$(定理9).

$\therefore$ $C'Q=QC$.又因$BM=MC$.$\therefore$ $MQ=\frac{1}{2}BC'$(定理25).

又因$AB-AC=k$(所設條件).但$AC=AC'$,

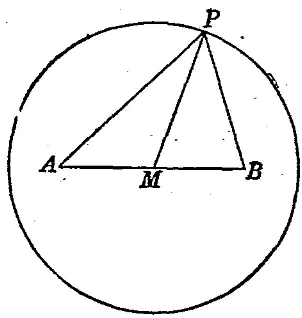
$\therefore$ $BC'=AB-AC'=AB-AC=k$.$\therefore$ $MQ=\frac{1}{2}k$.

故Q在$\odot M$上.

故Q的軌跡是$\odot M$.

同理P的軌跡是$\odot M$. Q. E. D.

(97) A,B是兩定點. P是一動點. PA,PB上正方形之和等於一定值k^2.求P的軌跡.



〔解〕 取AB中點M聯PA,PB,PM.則

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2\overline{PM}^2+2\overline{AM}^2$

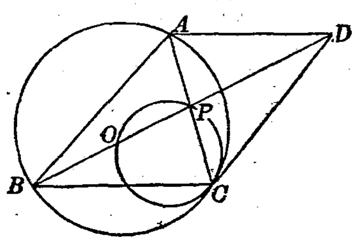
(定理59)

因$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=k^2$爲定值,

$\therefore\ 2\overline{PM}^2+2\overline{AM}^2=k^2$.

$\because$ A, B 是定點,故其中點M是定點,AM是定長, $\therefore\ \overline{PM}^2=\dfrac{k^2-2\overline{AM}^2}{2}$爲定值. $\therefore$ PM是定長由是得P之軌跡爲以AB中點. M爲中心,以$\sqrt{\dfrac{k^2-2\overline{AM}^2}{2}}$爲半徑所作之圓.

〔證略〕

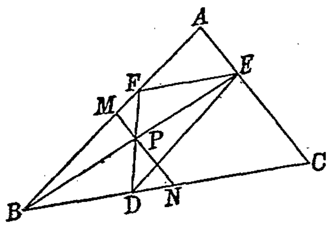


(98) BC是定圓內一定弦.BA是任

意弦. $ABCD$ 是平行四邊形,其對角線交於 P. 求 P 之軌跡.

〔解〕 $ABCD$ 是平行四邊形,故 AC,BD 互相等分,故 P 是 AC 的中點. 故 P 的軌跡是以半徑 OC 爲直徑所作圓周. (見例題 91).

(99) 定 $\triangle ABC$ 內接一 $\square BDEF$ 與 $\triangle ABC$ 共有 $\angle B$. 其對角線交於 P. 求證 P 的軌跡是 BA,BC 的中點 M,N 所聯線分.



〔證〕 (1) 設 P 是 MN 上任意一點,作 BP 延長交 AC 與 E. $\because$ $AM=MB, CN=NB$, $\therefore$ $MN \parallel AC$, (定理 25) $\therefore$ $BP=PE$ (定理 24). 作 EF, ED 成 $\square BDEF$. P 是 BE 中點,故必爲 BE,DF 之交點.

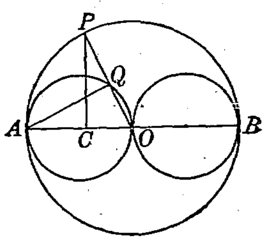
$\therefore$ MN 上任意點適合於所設條件.

(2) 設 P 是內接 $\square BDEF$ 對角線的交點. 則 $BP=PE$, $\because$ $BM=MA$, $\therefore$ $MP \parallel AC$, 但 $MN \parallel AC$. 故 MP 合於 MN, 卽 P 在 MN 上. (因過一點平行於一直線之直線惟一無二).

故適合於條件之點在 MN 上.

故 MN 是 P 點的軌跡.　　　　Q. E. D.

(100) 定圓 O 的圓周上一動點 P. 從 P 作定直徑 AOB 的垂線 PC. OP 上取 Q 令 $OQ=OC$. 求 Q 的軌跡.



〔解〕 聯 AQ. 在 $\triangle PCO$, $\triangle AQO$ 中, $OP=OA$, $OC=OQ$ $\angle POC=\angle AOQ$.

$\therefore$ $\triangle PCO \cong \triangle AQO$(定理 8).

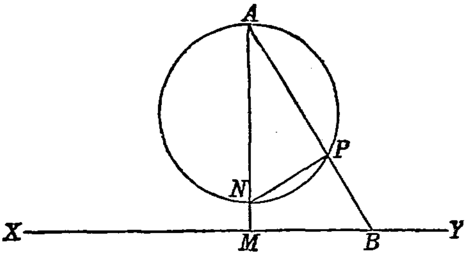
$\therefore$ $\angle AQO=\angle PCO=rt\angle$.

$\therefore$ Q 在 AO 為直徑所作的圓上. 若 $\frown PA > \frown PB$ 時, 則 Q 在 BO 為直徑所作的圓上. 又設 Q 是 AO 為直徑所作圓上任意點, 則 $\angle AQO=rt.\angle=\angle PCO$, 又 $\because$ $\angle AOQ=\angle POC$, $AO=PO$,

$\therefore$ $\triangle AOQ \cong \triangle POC$(定理 13 系 4), $\therefore$ $OQ=OC$. 適合於所設條件.

故 Q 之軌跡是以 AO, 及 BO 為直徑所作的兩個圓周.

(101) 從定點 A 至定直線 XY 引任意線分 AB.



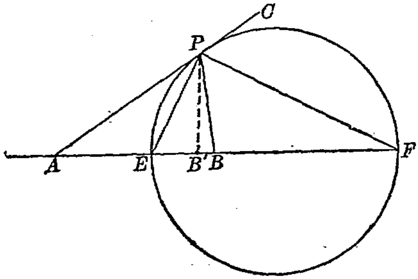
在 AB 上取 P 令 AB, AP 所包矩形等於一定值 k^2. 求 P 的軌跡.

〔解〕 作 $AM \perp XY$. 在 AM 上取 N 令 AM, AN 所包矩形 $=k^2$, 卽 $AN=\frac{k^2}{AM}$ ∵ AM 是定線分, k^2 是定值, 故 AN 是定長, 故 N 是定點.

又因 $AB \cdot AP = k^2 = AM \cdot AN$, ∴ N, M, B, P 共圓. 故 $\angle APN = \angle AMB = rt.\angle$ (定理 40 系). ∴ P 在 AN 爲直徑所作圓周上. 從此求得 P 之軌跡是以 AN 爲直徑所作之圓周 (證略).

(102) A, B 是兩定點. P 是一動點. $PA:PB=m:n$ 是定值, 求證 P 的軌跡是分 AB 線分爲 $m:n$ 的內外兩分點間線分爲直徑所作之圓.

〔證〕 (1) 設 P 是合於所設條件之點, 卽



$PA : PB = m : n.$ $\because$ $AE : EB = m : n$

$\therefore$ $PA : PB = AE : EB$, 故 PE 是 $\angle APB$ 的等分線

同樣 $\because$ $AF : FB = m : n.$ $\therefore$ $PA : PB = AF : FB.$

$\therefore$ PF 是 $\angle APB$ 的外等分線. $\therefore$ $\angle EPF = rt.\angle.$

故 P 在 EF 為直徑所作圓上.

(2) 設 P 是 EF 為直徑所作圓周上的任意一點.

則 $\angle EPF = rt.\angle.$ 聯 $PA, PE, PF.$

作 PB' 令 $\angle EPB' = \angle APE.$ 則 $\angle B'PF = \angle FPC.$

(證略)

$$\therefore \quad PA : PB' = AE : B'E = AF : B'F.$$

$$\therefore \quad AE : AF = B'E : B'F$$

$$\therefore \quad AE + AF : AF = B'E + B'F : B'F$$

即 $$AE + AF : AF = EF : B'F.$$

但因 $AE:BE=AF:BF=m:n.$

$$\therefore\ AE:AF=BE:BF$$

$$\because\ AE+AF:AF=BE+BF:BF$$

即 $AE+AF:AF=EF:BF$

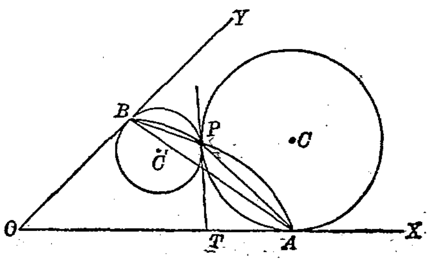
由是可得 $B'F=BF$ 而 B' 合於 B.

故 $PA:PB=AE:BE=AF:BF=m:n.$

故在 EF 為直徑所作圓上之點適合於所設條件.

故 P 的軌跡是 EF 為直徑所作之圓,即分線分 AB 為 $m:n$ 的內外兩分點間的線分為直徑所作之圓. Q. E. D.

(103) $\angle XOY$ 是定角. A,B 是 OX,OY 上兩定點.



$\odot C,\odot C'$ 是兩個動圓. $\odot C$ 切 OX 於 A, $\odot C'$ 切 OY

於 B. ⊙C, ⊙C' 在 $\angle XOY$ 內互相外切於 P. 求 F 之軌跡.

〔解〕 聯 PA, PB, AB, 過 P 作兩圓公切線 PT 與 OX 相交於 T.

則 $\angle TPA = \angle TAP,\quad \angle TPB = \angle OBP.$

（切點弦與兩切線所成之角互等）

$\therefore\ \angle APB = \angle TPA + \angle TPB = \angle OAP + \angle OBP.$

$\therefore\ \angle APB + \angle OAP + \angle OBP + \angle XOY = 4rt.\angle$ (定理2 i)

$$\therefore\qquad 2\angle APB + \angle XOY = 4rt.\angle$$

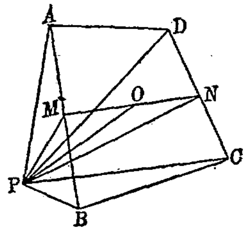
$$\therefore\ 2\angle APB = 4rt.\angle - \angle XOY$$

$$\therefore\ \angle APB = 2rt.\angle - \tfrac{1}{2}\angle XOY.$$

$\therefore\ \angle APB$ 的大小一定.

故得 P 之軌跡是 AB 爲弦 $2rt.\angle - \frac{1}{2}\angle XOY$ 爲弓形角所作的一個弓形弧 (證略)

(104) $ABCD$ 是一定四邊形. P 是一動點. 但 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 = k^2$, k 爲定值, 求 P 的軌跡.



〔解〕 取 AB 的中點 M, CD 的中點 N, 聯 MN, 再取其中點 O. 設 P 是合於所設條件的點, 聯 $PA, PB, PC, PD, PM, PN, PO$.

則　$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2\overline{AM}^2+2\overline{PM}^2,$

$\overline{PC}^2+\overline{PD}^2=2\overline{DN}^2+2\overline{PN}^2$ (定理59).

$\therefore\ \overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2=2\overline{AM}^2+2\overline{PM}^2+2\overline{DN}^2+2\overline{PN}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{DN}^2)+2(\overline{PM}^2+\overline{PN}^2).$

但因　$\overline{PM}^2+\overline{PN}^2=2\overline{PO}^2+2\overline{MO}^2$

$\therefore\ \overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2=2\overline{AM}^2+2\overline{DN}^2+4\overline{OM}^2+4\overline{PO}^2$

$\therefore\ 4\overline{PO}^2=\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2-2\overline{AM}^2-2\overline{DN}^2-4\overline{OM}^2=k^2-2\overline{AM}^2-2\overline{DN}^2-4\overline{OM}^2$

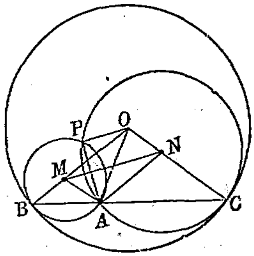
$\therefore\ \overline{PO}^2=\frac{1}{4}(k^2-2\overline{AM}^2-2\overline{DN}^2-4\overline{OM}^2).$

今k是定值,A,D,M,N,O都是定點,

$\therefore\ \overline{PO}^2$一定,故$PO$之長一定.

故P之軌跡是以O爲中心以$\frac{1}{2}\sqrt{(k^2-2\overline{AM}^2-2\overline{DN}^2-4\overline{OM}^2)}$,爲半徑所作之圓.

(105)　$\odot O$是定圓.A是圓內一定點.BC是過A的任意弦.$\odot M,\odot N$是過A點所作$\odot O$的內切圓.$\odot M$切$\odot O$於B,$\odot N$切$\odot O$於C.求$\odot M,\odot N$的又一交點P的軌跡.



〔解〕 聯 OA, OB, OC, OP, AP, MN.

∵ $\odot O$, $\odot M$ 內切， ∴ M在 OB 上. 同理 N 在 OC 上. ∵ $OB=OC$(半徑), ∴ $\angle OBC=\angle OCB$(底角).

又因 $NA=NC$(半徑)， ∴ $\angle NAC=\angle OCB$(底角).

∴ $\angle OBC=\angle NAC$. ∴ $OM \parallel NA$(因同位角等).

同理可證 $\angle OCB=\angle MAB$， 而 $ON \parallel MA$.

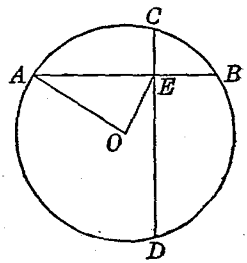
∴ $ANOM$ 是平行四邊形(兩對對邊各平行).

∴ MN過OA的中點(對角線互等分).

但MN必過PA的中點(定理46). ∴ $PO \parallel MN$(定理25).

但$PA \perp MN$(定理46)， ∴ $PA \perp OP$.

即 $\angle APO=rt.\angle$. 故P的軌跡是以OA爲直徑所作之圓.(證略)



(106) AB, CD 是定圓 $\odot O$ 內兩個任意弦. 但 $AB \perp CD$, 且 $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=m^2$, m 是定值. 求此兩弦交點的軌跡.

〔解〕 設 AB, CD 直交於 E.

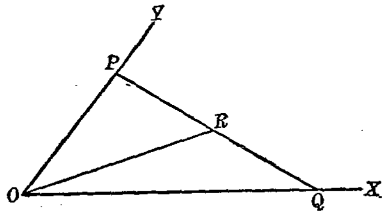
則 $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=8\overline{OA}^2-4\overline{OE}^2$.(證法見例題37)

∴ $4\overline{OE}^2=8\overline{OA}^2-(\overline{AB}^2+\overline{CD}^2)=8\overline{OA}^2-m^2$

$OE^2=\frac{1}{4}(8\overline{OA}^2-m^2)=2\overline{OA}^2-\frac{1}{4}m^2$, 是定值,故$E$

的軌跡是以O爲中心,以$\sqrt{2\overline{OA}^2-\frac{1}{4}m^2}$爲半徑所作之圓.

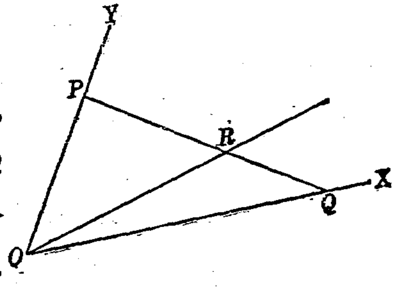
(107) $\angle XOY$是定角.P是OY上一定點. PQ是從P至OX上的動線分. R是PQ上的內分或外分點,而$PQ\cdot PR=\overline{PO}^2$.求$R$的軌跡.



〔解〕 $\because$ $PQ\cdot PR=\overline{PO}^2$, $\therefore$ $PQ:PO=PO:PR$,而$\angle OPQ$與$\angle RPO$合一. $\therefore$ $\triangle OPQ\backsim\triangle RPO$. (定理72)

$\therefore$ $\angle PRO=\angle POQ$, 即$\angle XOY$. 故R的軌跡是以OP爲弦以$\angle XOY$爲弓形角所作的弓形弧.

(108) $\angle XOY$是定角. PQ的方向一定,交OX於Q, OY於P. R是PQ上的內分或外分點,而$\overline{PQ}\cdot\overline{PR}=\overline{PO}^2$. 求$R$的軌跡.



【解】 $\triangle OPQ \backsim RPO$, $\therefore$ $\angle PRO = \angle XOY$.(證法見上例)因PQ的方向一定, $\therefore$ $\angle PQO$是定角.
$\therefore$ $\angle XOR = \angle PRO - \angle RQO = \angle XOY - \angle PQO$ 是一定,故R的軌跡是從O所作的一個半射線,此半射線與OX所夾之角等於$\angle XOY - \angle PQO$.

14. 基本作圖題彙集

作圖題 1. 作定線分的中點.

作圖題 2. 等分定線分爲n份.

作圖題 3. 分一定線分令其比爲$l:m:n:\cdots$.

作圖題 4. 內分或外分一定線分等於定比.

作圖題 5. 作定角的等分線.

作圖題 6. 從定直線內或外一點作垂線.

作圖題 7. 從定直線內或外一點作直線令與定直線所成之角等於一定角.

作圖題 8. 過定點作定直線的平行線.

作圖題 9. 平分定圓弧.

作圖題 10. 過三定點作圓.

作圖題 11. 從定圓外一定點作圓的切線.

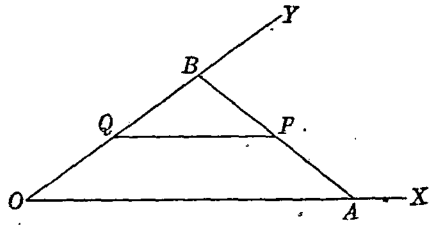
作圖題 12. 以定線分爲弦作弓形令所含弓形角等於一定角.

作圖題 13. 作三個定長的第四比例項.
即已設三個長a,b,c,求長x令$a:b=c:x$.

15. 作圖題解法雜例

(109) 過定角$\angle XOY$內一定點P求作一直線交OX於A,交OY於B令$AP=BP$.

〔解析一〕 設AB是所求之線.則P是$\triangle OAB$一邊的中點.若過P作AO的平行線交OY於Q,則

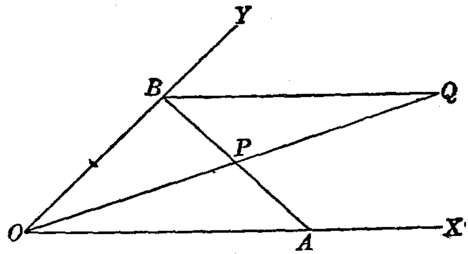


Q必爲OB的中點.因P是定點,故PQ一定,Q一定,從可求得B點,因得作法如下:

〔作法一〕 過P作$PQ \parallel AO$.在OY上取B,令$QB=OQ$.聯BP延長之交OX於A.則AB即所求作之線. Q. E. D.

〔證〕 $\because PQ \parallel OA$, $OQ=QB$, $\therefore PA=PB$(定理24).故AB即所求作之線.

〔解析二〕 設AB是所求之線.聯OP,延長之至Q令$PQ=OP$.聯QB.則$\triangle POA \cong \triangle PQB$(定理8).



$\therefore \angle PQB = \angle XOP$ (兩全等形之對應角等). 因 $\angle XOP$ 是定角, Q 是定點, 從可求得 B 點如下:

〔作法二〕 聯 OP 延長之至 Q 令 $PQ=OP$. 過 Q 作 QB 令 $\angle PQB = \angle XOP$. QB 交 OY 於 B. 聯 BP 延長之交 OX 於 A. 則 AB 卽所求. Q. E. F.

〔證〕 在 $\triangle POA$, $\triangle PQB$ 中, $OP=PQ$,

$\angle POA = \angle PQB$, $\angle OPA = \angle QPB$,

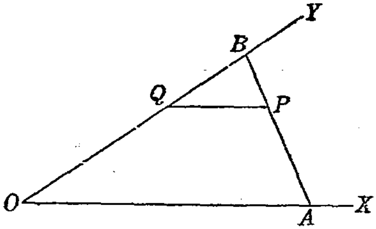
$\therefore \triangle POA \cong \triangle QPB$ (定理 9) $\therefore PA=PB$ (兩全等形之對應邊等).

$\therefore AB$ 卽所求作之線. Q. P. D.

(110) 過定角 $\angle XOY$ 內一定點 P, 求作一直線交 OX 於 A, 交 OY 於 B, 令 $PA:PB=m:n$.

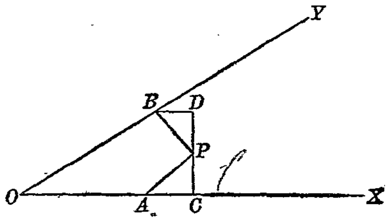
〔解析〕 設 AB 是所求之線作 $PQ \parallel AO$. 則 $PA:PB=QO:QB=m:n$ 因 P 是定點, 故 Q 是定點,

$\therefore$ OQ 是定長.又因 m,n 是已知值,故可求得 QB 之長(基本作圖13)而得 B 點.(作法及證略).



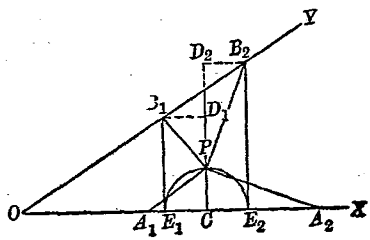
(111) 過定角 $\angle XOY$ 內一定點 P.求作兩個線分 PA, PB.令 PA 交 OX 於 A, PB 交 OY 於 B,且令 $PA=PB, PA\perp PB$.

〔解析一〕設 PA. PB 是所求兩線分,過 P 作 $DC\perp OX$,



作 $BD\perp CD$.則因 $PA=PB, \angle APB=rt\angle$,故 $rt.\triangle PAC\cong rt.\triangle PBD$.因得作法如下:

〔作法一〕作 $PC\perp OX$.以 C 爲中心, CP 爲半徑作圓交 OX 於 E_1, E_2.從 E_1 及 E_2 作 OX 的垂線交 OY 於 B_1, B_2.聯 PB_1, PB_2.過 P 作 PA_1,



PA_2 合 $\angle B_1PA_1=rt.\angle$, $\angle B_2PA_2=rt\angle$. 則 PA_1, PB_1 及 PA_2, PB_2 都是所求的線分. Q.E.D.

〔證〕 作 $B_1D_1 \perp CP$ 交 CP 延線於 D_1. 則因 $PC=E_1C=B_1D_1$, $\angle PCA_1=\angle PD_1B_1=rt.\angle$.

又因 $\angle B_1PA_1=rt.\angle$, $\therefore$ $\angle A_1PC=\angle PB_1D_1$ (都是 $\angle B_1PD_1$ 的餘角); $\therefore$ $\triangle PA_1C\cong\triangle PB_1D_1$, $\therefore$ $PA_1=PB_1$. 但 $PA_1\perp PB_1$. 故 PA_1,PB_1 卽所求線分. 同理可證 PA_2,PB_2 也是所求線分. Q.E.D.

〔解析二〕 設 PA,PB 是所求線分. 聯 OP. 作 PQ, 令 $\angle OPQ=rt.\angle$, 且令 $PQ=OP$. 聯 AQ. 則

$\because$ $\angle APB=\angle OPQ=rt.\angle$ $\therefore$ $\angle OPB=\angle QPA$.

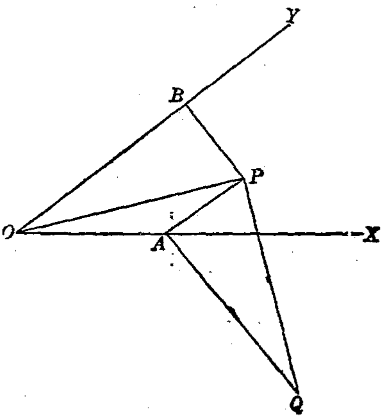
又 $PB=PA$,

$PO=PQ$.

$\therefore$ $\triangle OPB\cong\triangle QPA$.

$\therefore$ $\angle PQA=\angle POB$.

因 $\angle POB$ 一定, 故可求得 A 點. 因得作法如下:



〔作法二〕 聯 OP. 作 PQ 令

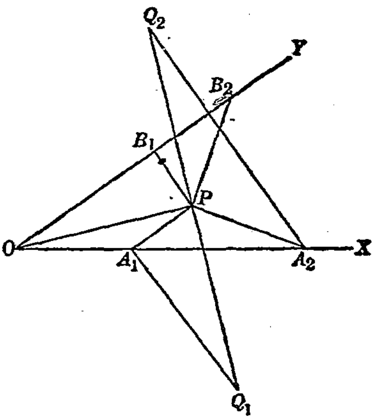
$\angle OPQ = rt.\angle$,

且令 $PQ=OP$. 過 Q 作 QA 交 OX 於 A, 令 $\angle PQA=\angle POY$. 聯 PA. 過 P 作 PB 交 OY 於 B, 令

$\angle APB = rt.\angle$.

則 PA, PB 卽所求.

Q. E. F.

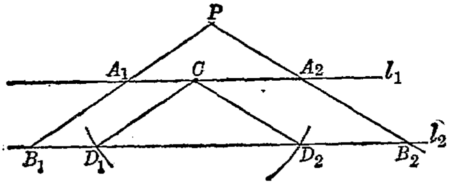


〔圖中示兩個解答. 證略.〕

〔討論〕本題有兩個解答. 但若 $\angle XOY=rt.\angle$ 而 P 在 $\angle XOY$ 的等分線上時, 因過定點 P 而垂直於 OX 之直線平行於 OY, BD 常等於 PC 而使 $\triangle PBD$ 與 $\triangle APC$ 常全等, 是以有無數解答. 又若 $\angle XOY=rt.\angle$ 而 P 不在 $\angle XOY$ 的等分線上時, 則 BD 無有等於 PC 之時, 卽 $\triangle PBD$ 與 $\triangle APC$ 無有全等之時, 是以無解答.

(112) 兩定直線 l_1, l_2 互相平行. 過定點 P 求作一直線交 l_1 於 A, l_2 於 B, 令 AB 等於定長 d.

〔作法〕 以l_1上任意點C爲中心,定長d爲半徑作圓交l_2於D.聯CD.過P作CD的平行線交l_1於



A,l_2於B.則PAB卽所求之線. Q. E. F.

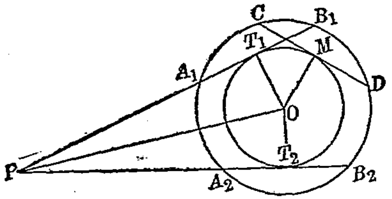
〔證〕 $\because$ $ABDC$是平行四邊形, $\therefore$ $AB=CD$.

$\because$ $CD=d$, $\therefore$ $AB=d$. Q. E. D.

〔討論〕 若d大於l_1,l_2的距離,則以C爲中心d爲半徑所作之圓能與直線l_2相交於兩點,是以有兩個解答如圖PA_1B_1,PA_2B_2.若d小於l_1,l_2的距離,則圓與直線l_2不能相交,是以無解答.若d等於l_1,l_2的距離則圓與直線l_2相切於一點,是以有一個解答,卽過P所作l_1,l_2的垂線.

(113) 從定圓O外一定點P求作一直線交定圓O於兩點A,B,令弦AB等於定長d.

〔作法〕 以$\odot O$上任意一點C為中心,d為半徑作弧交圓周於D. 作$OM\perp CD$. 以O為中心.OM為半徑作圓MT_1T_2過P作$\odot MT_1T_2$的切線交$\odot O$於AB.則PAB即所求之線 Q.E.F.

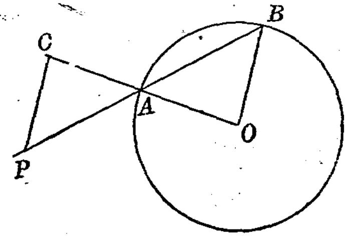


〔證〕 設PAB切$\odot MT_1T_2$於T.則$OT=OM$.

$\therefore$ $AB=CD=d$.(距中心等遠之弦相等) Q.E.D.

〔討論〕 若d小於直徑,則圓MT_1T_2內容於定圓其切線割定圓於兩點而成弦,自P可作兩切線以割定圓,是以有兩個解答;若d等於直徑則圓MT_1T_2之半徑為零而成點圓O,自P過O祇能作一直線是以只有一個解答;若d大於直徑,而弦無有大於直徑者,是以無解答.

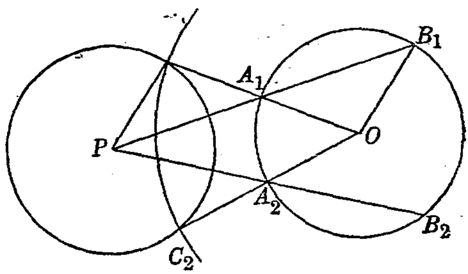
(114) 從定圓O外一定點P求作一直線交$\odot O$於A,B令$PA=AB$.



〔解析一〕 設PAB為所求之線.聯OA延長至C

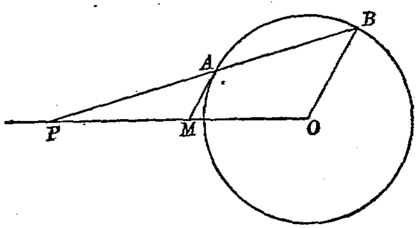
令 $AC=OA$.聯 OB,CP.則 $\triangle OAB \cong \triangle CAP$. $\therefore PC=OB$, $OC=2OA$ 都是已知之長.因得作法如下:

〔作法一〕 以 P 爲中心,$\odot O$ 半徑爲半徑作 $\odot P$.以 O 爲中心,$\odot O$ 半徑的二倍爲半徑作圓交 $\odot P$ 於 C.聯 OC 交 $\odot O$ 於 A.聯 PA 延長之交 $\odot O$ 於 B.則 PAB 即所求之線. Q. E. F.

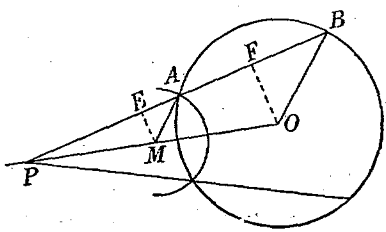


〔證略〕

〔解析二〕 設 PAB 是所求之線.聯 OB.過 A 作 $AM \parallel BO$ 交 PO 於 M.則 M 必爲 PO 的中點.而 $AM=\frac{1}{2}OB$.故 M 是定點而 AM 是定長.因得



〔作法二〕 聯 PO.以 PO 中點 M 爲中心,



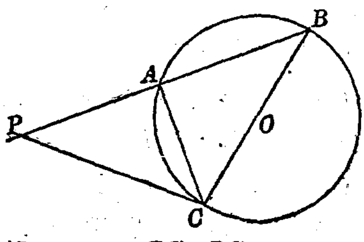
⊙O半徑的半做半徑作圓交⊙O於A.聯PA延長再交⊙O於B則PAB卽所求之線.　　Q.E.F.

〔證〕自M,O作PB之垂線ME,OF. $\triangle PME$與$\triangle POF$兩直角三角形有一銳角相共,則相似,而$PE:PF=ME:OF=PM:PO=1:2$.次於$\triangle MEA$與$\triangle OFB$兩直角三角形中,$ME:OF=1:2$而$MA:OB=1:2$.是以$MA.OB=ME:OF$; $MA:ME=OB:OF$; $\overline{MA}^2:\overline{ME}^2=\overline{OB}^2:\overline{OF}^2$; $\overline{MA}^2-\overline{ME}^2:\overline{ME}^2=\overline{OB}^2-\overline{OF}^2:\overline{OF}^2$; 卽$\overline{EA}^2:\overline{ME}^2=\overline{FB}^2:\overline{OF}^2$;

$EA:ME=FB:OF$; $EA:FB=ME:OF=1:2$是以$\triangle MEA$與$\triangle OFB$相似而對應角$\angle PAM$與$\angle PBO$相等,則因同位角等而$MA \parallel OB$而$\triangle PMA$與$\triangle POB$相似,於是$PA:PB=PM:PO=1:2$而得$PA=AB$故PB卽所求之直線.　　Q.E.F.

〔解析三〕設PAB是所求之線.作直徑BOC,聯AC,PC.則

$\angle BAC=rt\angle$.



$\because PA=AB$,　$\therefore PC=BC$

然BC是直徑爲定長,因得

〔作法三〕以P爲中心,⊙O的直徑爲半徑作圓

交$\odot O$於C.過C作直徑COB.聯PB交圓周於A.則PAB卽所求之直線. Q. E. F.

〔證略〕

〔討論〕 若P,O的距離小於$\odot O$半徑的三倍,則以PO中點爲中心以$\odot O$半徑之半爲半徑所作之M圓與O圓相交於兩點,是以有兩個解答;等於半徑的三倍,則M圓與O圓相切於一點,是以祇有一個解答;大於半徑的三倍,則M圓與O圓相離,是以無解答.

(115) 求作一直線交同心兩圓周於A,B,C,D四點令$AB=BC=CD$

〔解法同(114),略〕

(116) 從定圓O外一定點P,求作一直線交圓周於A,B令$PA=2AB$.

〔解法可做(114),略〕

(117) 從定圓O上一定點P,求作一直線交一定直線於A,再交$\odot O$於B令$PA=PB$.

〔解法可做(114),略〕

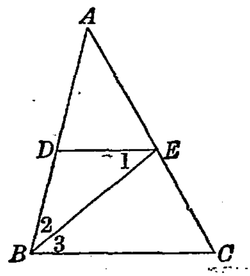
(118) $\triangle ABC$是所設一定三角形.求作一直線交AB於D,交AC於E,令$DE \parallel BC, DE=DB$.

〔解析〕 設DE是所求之線.試聯BE觀之.

$\because\ DE \parallel BC,\quad \therefore\ \angle 1=\angle 3.$

$\therefore$ $DE=DB$, $\therefore$ $\angle 1=\angle 2$.

$\therefore$ $\angle 2=\angle 3$, 卽 BE 是 $\angle B$ 的等分線. 故可得



〔**作法**〕 作 $\angle B$ 的等分線 BE 交 AC 於 E. 過 E 作 BC 的平行線 ED 交 AB 於 D. 則 DE 卽所求之線.

Q.E.F.

〔證略〕

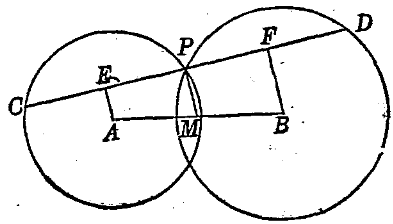
(119) 求作一直線交 $\triangle ABC$ 的 AB 邊於 D, AC 邊於 E, 令 $DE \parallel BC$, $DE=DB+EC$.

〔解法倣照 (118) 平分 B 與 C 之內角〕

(120) 求作一直線交 $\triangle ABC$ 的 AB 邊於 D, AC 邊於 E, 令 $DE \parallel BC$, $DE=DB\sim EC$.

〔解法倣照 (118) 平分 B 之內角與 C 之外角〕

(121) P 是所設兩圓 $\odot A$, $\odot B$ 的一個交點. 求過 P 作一直線交 $\odot A$ 於 C, 交 $\odot B$



於D，令$PC=PD$.

〔解析〕設CPD是所求之線．作$AE\perp CP$，$BF\perp PD$．則E,F各爲PC,PD的中點．今既$PC=PD$，則$EP=PF$而P爲EF的中點．過P作EA,FB的平行線交AB聯線於M，則M必也是AB的中點，而PM必$\perp CD$．因得作法如下：

〔作法〕聯AB．取AB的中點M．聯PM．過P作PM的垂線交$\odot A$於C，交$\odot B$於D．CPD即所求之線．　Q. E. F.

〔證〕作$AE\perp PC$，$BF\perp PD$．則因$PM\perp CD$，

$\therefore\ AE\parallel MP\parallel BF.\quad \because\ AM=MB,\quad \therefore\ EP=PF.$

但過中心所作弦的垂線，必過弦的中點，

$\therefore\ CP=2EP, PD=2PF.\quad \therefore\ PC=PD.$　Q. E. D.

(122) 過相交兩圓的交點P求作一直線交兩圓於C,D，令$PC=2PD$.

〔解法倣照(121)〕

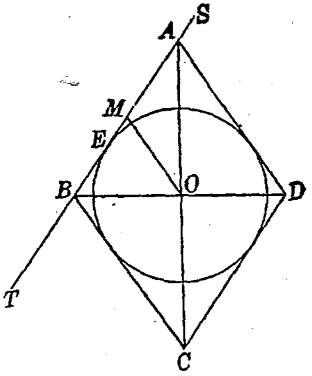
(123) 過相交兩圓的交點P求作一直線交兩圓於C,D，令$PC:PD=m:n$．$m:n$是定比

〔解法倣照(121)〕

(124) 過相交兩圓的交點P求作一直線交兩圓於C, D,令$CD=l$. l是所設長.

〔解法倣照(121)作法以聯心線爲直徑作圓,以一圓心爲心,$\frac{1}{2}l$爲半徑畫弧與前圓相交,各交點與圓心相聯,過P作直線平行於聯線之長爲$\frac{1}{2}l$者,交兩所設圓於C與D,CD即爲所求〕

(125) 求作一菱形令外接於所設圓O,而其各邊等於所設長l.



〔**解析**〕 設$ABCD$是所求菱形.聯對角線AC, BD. 因AC等分$\angle A$,故必過中心O. BD等分$\angle B$,故亦必過中心O. 故AC, BD交於中心O. 又$AC\perp BD$, $\therefore$ $\triangle ABO$是直角三角形,而AB是其斜邊. AB上取中點M. 聯OM,則$OM=AM=MB=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}l$.因得作法如下:

〔**作法**〕 過$\odot O$上任意點E作切線ST. 以O爲中心,$\frac{1}{2}l$爲半徑作弧交ST於M. 以M爲中心,$\frac{1}{2}l$爲半徑作弧交ST於A,B. 聯AO延長至C,令$OC=OA$,聯BO延長至D令$OD=OB$聯AD,CD,BC. 則$ABCD$

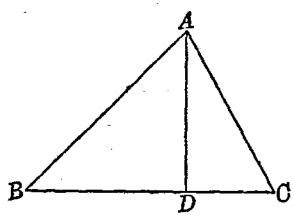
即所求之菱形. $Q.E.F.$

〔證略〕

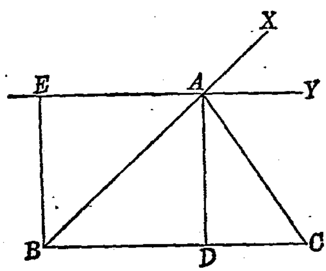
〔討論〕 若l小於$\odot O$的直徑,則以O為中心,以$\frac{1}{2}l$為半徑作弧全在圓內不能與切線相交,是以無解答.若l等於$\odot O$的直徑,則各邊中點重合於切點,所得解答是正方形.

(126) 求作一三角形,令其底邊及高各等於定長l, m,其一個底角等於定角a.

〔解析〕 設$\triangle ABC$是所求的三角形,$BC=l$, $AD=m$, $\angle B=a$,都是已知之值.很易得作法如下:

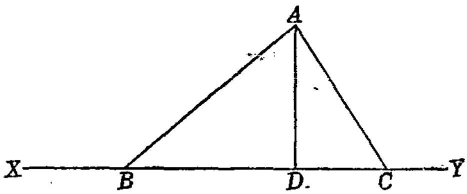


〔作法一〕 作線分BC令等於l.從B作BX令$\angle CBX=a$.從B作BC的垂線BE,且令等於m.過E作BC的平行線EY交BX於A.聯AC.則$\triangle ABC$即所求之三角形. $Q.E.F.$



〔證略〕

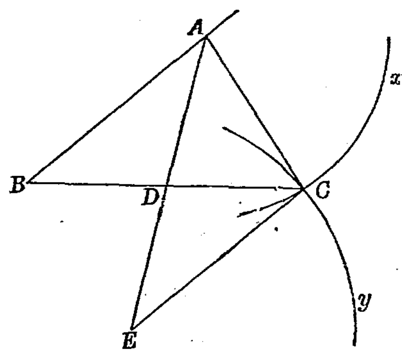
〔作法二〕 作線分 AD 令等於 m. 過 D 作直線 XY 垂直於 AD. 從 A 作 AB 令與 XY 所夾角等



於 a. XY 上取 C 令 $BC=l$. 則 $\triangle ABC$ 即所求之三角形　　Q. E. F.

(127) 求作一三角形令其兩邊之長及其第三邊上中線之長各等於定長 l, m, n.

〔解析〕 設 $\triangle ABC$ 是所求之三角形. $AB=l$, $AC=m$, BC 上的中線 $AD=n$. 延長 AD 至 E 令 $DE=AD=n$. 聯



CE,則 $\triangle CDE\cong\triangle ABD$,(證略) $\therefore CE=AB=l$ 故得作法如下:

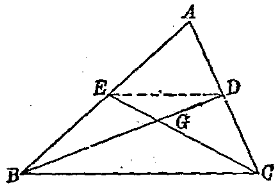
〔作法〕 作 $AD=n$. 延長 AD 至 E 令 $DE=n$. A 爲中心, m 爲半徑作弧 x, E 爲中心, l 爲半徑作弧 y. x, y 交於 C. 聯 CD 延長至 B 令 $DB=CD$. 聯 AB. 則 $\triangle ABC$ 即所求. Q. E. F.

〔證略〕

〔討論〕 若 n 大於 $\frac{1}{2}(l+m)$ 或等於 $\frac{1}{2}(l+m)$, 則本題不能作(因 $AC+CE>AE$, 故 $l+m$ 須大於 $2n$).

(128) 求作一三角形令其底邊及其他兩邊上的兩個中線各等於定長 l, m, n.

〔解析〕 設 $\triangle ABC$ 爲所求. $BC=l, BD=m, CE=n$. BD, CE 交於 G.



則 $BG=\frac{2}{3}BD=\frac{2}{3}m$,

$CG=\frac{2}{3}CE=\frac{2}{3}n$.

因得作法如下:

〔作法〕 先作 $\triangle GBC$ 令 $BC=l$, $BG=\frac{2}{3}m$, $CG=\frac{2}{3}n$. 延長 BG 至 D, 令 $GD=\frac{1}{3}m$, 延長 CG 至 E, 令 $GE=\frac{1}{3}n$. 聯 BE, CD, 延長之交於 A. 則 $\triangle ABC$ 即所求. Q.E.F.

〔證〕 聯 ED. 則 $\because EG:GC=DG:GB=1:2$ $\angle EGD=\angle BGC$, 故 $\triangle EGD \backsim \triangle BGC$.

$\therefore\quad ED:BC=EG:GC=1:2.$

又因 $\angle EDG=\angle CBG\quad\therefore\quad ED\parallel BC$

$\therefore\quad \triangle AED\backsim\triangle ABC$

$\therefore\quad AE:AB=AD:AC=ED:BC=1:2.$

$\therefore\quad E,D$ 各爲 AB,AC 之中點. 故 BD,CE 是中線.

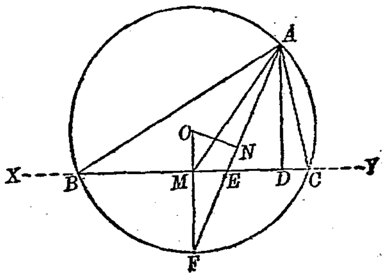
又 $BD=BG+GD=\frac{2}{3}m+\frac{1}{3}m=m$, 同理 $CE=n$.

又 $BC=l.\quad\therefore\quad\triangle ABC$ 卽所求 Q.E.D.

〔討論〕 若 $l\geqq\frac{2}{3}(m+n)$, 或 $l\leqq\frac{2}{3}(m\sim n)$.

則本題不能作. $(BG+GC>BC,\ BG\sim GC<BC)$.

(129) 求作一三角形令過其同一頂點的中線, 等分角線, 及高各等於定長 l,m,n.



〔解析〕 設 $\triangle ABC$ 是所求中線 $AM=l$. 等分線 $AE=m$, 高 $AD=n$. 作 $\triangle ABC$ 的外接圓 O, 延長 AE 交 $\odot O$ 於 F. 則因 $\angle BAF=\angle CAF,\quad\therefore\quad\frown BF=\frown CF$.

$\because\quad M$ 是 BC 的中點, 故 $FM\perp BC$. 故可先作直角三角形 $\triangle AMD$ 及 AE, 由是可得 F, 再求得 O 如下.

〔作法〕 作任意直線 XY. 過 XY 上任意一點 D

作$DA\perp XY$,且令$DA=n$. 以A爲中心,l爲半徑作弧交XY於M. 再以A爲中心,m爲半徑作弧交MD於E.過M作XY的垂線交AE的延線於F.作AF的垂直等分線ON交FM於O.以O爲中心,OF爲半徑作圓交XY於B及C.聯AB,AC.則$\triangle ABC$卽所求. Q.E.F

〔證〕 $\because$ ON是AF的垂直等分線, $\therefore$ $OA=OF$. 故$\odot O$必過A點. $\because$ $OM\perp BC$, $\therefore$ $BM=CM$ $\therefore$ AM是$\triangle ABC$的中線.又$\frown BF=\frown FC$,

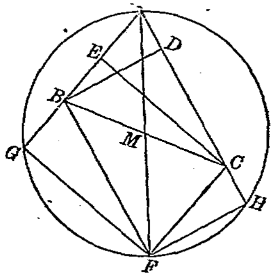
$\therefore$ $\angle BAF=\angle CAF$. $\therefore$ AE是$\angle A$的等分線.

AD是高.照作法$AM=l$,$AE=m$, $AD=n$. $\therefore$ $\triangle ABC$卽所求. Q.E.D.

〔討論〕 本題必須$l>m>n$方有解答.因垂線最短而與短邊相近.平分角線分底邊如夾角兩邊之比而與短邊較近.底邊中點M在平分角線所分底邊之較大線分之中,是以中線離短邊最遠.

(130) 已知三角形一邊上的中線和其他二邊上的兩個高,求作此三角形.

〔解析〕 設$\triangle ABC$是所求的三角形. AM是BC上的中線等於已知之長l,BD,CE是AC,AB上的



高各等於已知之長 m,n.
延長 AM 至 F 令 $MF=AM$.
聯 BF, CF. 則 $ABFC$ 是平行四邊形.從 F 作 $FH \perp AC$, 作 $FG \perp AB$, 則 $BFHD$, $CFGE$ 都是矩形

$\therefore$ $FH=BD$. $FG=CE$. 又 $\angle FHA=\angle FGA=rt\angle$.

$\therefore$ G, H 都在以 AF 爲直徑所作之圓周上. 因得作法如下:

〔作法〕 作線分 $AF=2l$. 以 AF 爲直徑作 $\odot M$ 以 F 爲中心, m 爲半徑作弧交 $\odot M$ 於 H (在 AF 之一旁) 以 F 爲中心, n 爲半徑作弧交 $\odot M$ 於 G. (在 AF 之他旁)

聯 AG, AH, FG, FH. 從 F 作 $FB \parallel HA$ 交 AG 於 B.
從 F 作 $FC \parallel GA$ 交 AH 於 C. 聯 BC. 則 $\triangle ABC$ 卽所求.

〔證〕 作 $BD \perp AC$, $CE \perp AB$. 因 AF 是直徑.

$\therefore$ $\angle AGF=\angle AHF=rt.\angle$. $\because$ $ABFC$ 是 $\square$,

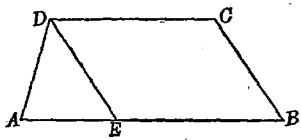
$\therefore$ $BFHD$, $CFGE$ 都是矩形. $\therefore$ $BD=FH=m$,

$CE=FG=n$. 又 $ABFC$ 是 $\square$, $\therefore$ AF, BC 互相等

分於M. $\therefore$ AM是中線且等於$\frac{1}{2}AF=l$. 故$\triangle ABC$即所求. Q.E.D.

〔討論〕 若$m \geqq 2l$, 或$n \geqq 2l$, 則本題無解答.（因G, H, 有一點與A相重或不能與M圓相交）

(131) 已知梯形兩底之長及兩邊之長,求作此梯形.



〔解析〕 設梯形$ABCD$是所求梯形, 兩底AB, CD各等於所給與之長a, b. 兩邊AD, BC各等於所給與之長c, d. 作$DE \parallel CB$. 則$EBCD$是平行四邊形, $\therefore EB=CD=b$.

$\therefore$ $AE=AB-EB=a-b$. 又 $DE=BC=d$.

故可先作$\triangle AED$令$AE=a-b$, $AD=c$, $DE=d$. 由是完成此梯形.

〔作法和證略〕

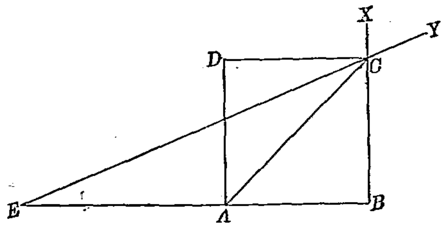
〔討論〕 所給與的四個定長a, b, c, d中,若$c+d \leqq a\sim b$或$c\sim d \geqq a\sim b$, 則無解答.

(132) 已知梯形兩底之長及兩對角線之長,求作此梯形.

〔解法倣照 (131)〕

(133) 求作一正方形令其一邊及對角線之和等於一定長.

〔解析〕 設 $ABCD$ 是所求的正方形. $AB+AC$ 等於所給與的定長 l. 延長 BA 至 E 令 $AE=AC$, 聯 EC, 則 $EB=AC+AB=l$. 又 $\angle E=\angle ECA$. 故 $\angle BAC=\angle E+\angle ECA=2\angle E$. 然 $\angle BAC=\frac{1}{2}rt.\angle$.



$\therefore$ $\angle E=\frac{1}{4}rt.\angle$. 因得作法如下:

〔作法〕 作線 $EB=l$. 過 B 作 BE 之垂線 BX. 過 E 作半射線 EY 令 $\angle BEY=\frac{1}{4}rt.\angle$. EY, BX 交於 C. 以 BC 爲正方形之一邊. 作正方形 $ABCD$ 卽所求. Q. E. F.

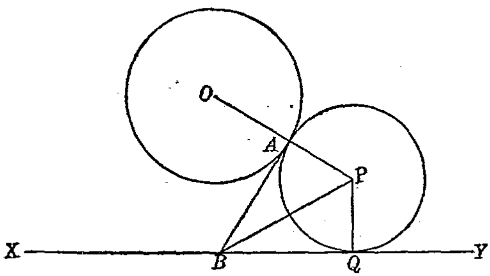
〔證略〕

(134) 求作一正方形令其對角線減去一邊之差等於一定長.

〔解法倣照 (133)〕

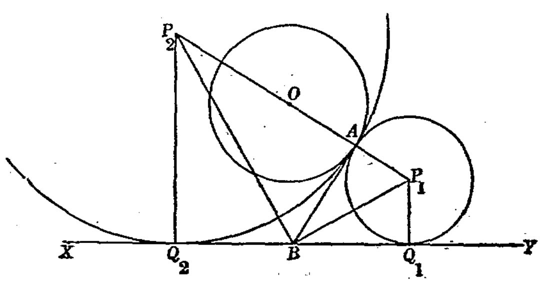
(135) 求作一圓令切一定圓於其圓周上一定點,且切一定直線.

〔解析〕 設$\odot O$是定圓,A是$\odot O$上一定點.XY是定直線.$\odot P$是求作之圓切$\odot O$於A,並與XY



切於Q.則$AP=PQ$,$PQ\perp XY$.過A作OP之垂線AB交XY於B,則$\triangle ABP\cong\triangle QBP$. $\therefore$ $BQ=BA$.因得作法如下:

〔作法〕 聯半徑OA.過A作OA的垂線AB交



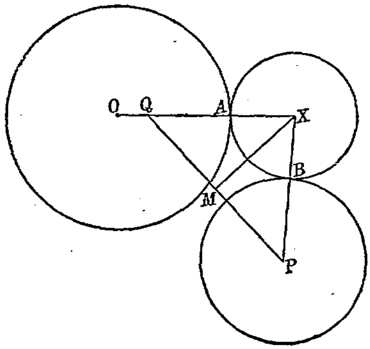
XY於B. 以B為中心,BA為半徑作圓交XY於Q. (如圖Q_1或Q_2)過Q作XY的垂線交OA的延線於P(如圖P_1或P_2). P為中心,PA為半徑,作$\odot P$即所求. *Q. E. F.*

〔證〕 聯PB. $\because$ $BA=BQ$, $\angle BAP=\angle BQP=rt.\angle$, BP為公邊, 故$\triangle BAP\cong\triangle BQP$. $\therefore$ $PQ=PA$. $\therefore$ $\odot P$過Q. 即與XY相切. 但$\odot P$又切$\odot O$於A. 故$\odot P$即所求之圓. *Q. E. D.*

〔討論〕 本題有兩個解答如圖$\odot P_1$, $\odot P_2$. 但若$OA\perp XY$時, 則$AB \parallel XY$, 故不能得與XY的交點B. 但OA旣與XY垂直,則$OAPQ$為一直線. 故Q即OA在XY上的垂足,而中心P即AQ的中點. 此時只有一個解答.

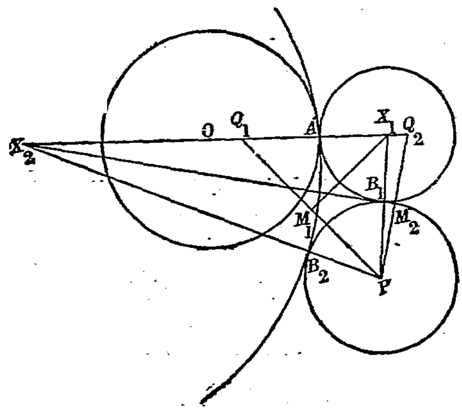
(136) 求作一圓令切一定圓於其圓周上一定點,且切又一定圓.

〔解析〕 設$\odot O$, $\odot P$是兩個定圓. A是$\odot O$上一定點. $\odot X$是求作之圓切$\odot O$於A,並與$\odot P$切於B. 則OAX, PBX都是直線. $XA=XB$. 在OA上取Q令$AQ=BP$, 則$QX=PX$, 即X與P, Q等距. 於



是得作法如下:

〔作法〕 以 A 爲中心, $\odot P$ 的半徑爲半徑作圓



交 OA 於 Q (Q_1 或 Q_2) 作 PQ 的垂直等分線 MX 交

OA於X (M_1X_1或M_2X_2). 以X為中心XA為半徑作$\odot X$即所求. *Q.E.F.*

〔證略〕

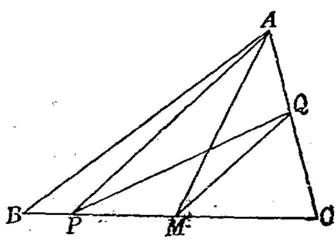
〔討論〕本題有兩個解答如圖 $\odot X_1$, $\odot X_2$. 若PQ_1, PQ_2兩線中有一個垂直於OA時,則只有一個解答.(因垂直於OA者,其垂直等分線平行於OA而不能相交)

(137) 求作一圓令切一定直線於其上一定點,且切一定圓.

〔解法倣照(136)〕

(138) 過三角形一邊上一定點求作一直線令等分此三角形的面積.

〔解析〕設P是$\triangle ABC$中BC邊上一定點.PQ是求作之線.則$\triangle CPQ=\frac{1}{2}\triangle ABC$.作中線$AM$,則



$\triangle AMC=\frac{1}{2}\triangle ABC$. $\therefore$ $\triangle CPQ=\triangle AMC$.

$\therefore$ $\triangle CPQ-\triangle CMQ=\triangle AMC-\triangle CMQ$.

即$\triangle PMQ=\triangle AMQ$. $\therefore$ $AP \parallel MQ$.因得作法如下:

〔作法〕 聯 AP 從 BC 中點 M 作 $MQ \parallel AP$ 交 AC 於Q. 聯 PQ. 卽所求之線. Q. E. F.

〔證〕 聯 AM. $\because$ $AP \parallel MQ$, $\therefore$ $\triangle PMQ = \triangle AMQ$.

$\therefore$ $\triangle PMQ + \triangle MQC = \triangle AMQ + \triangle MQC$,

卽 $\triangle PQC = \triangle AMC$.

$\because$ $BM = CM$, $\therefore$ $\triangle AMC = \triangle ABM = \frac{1}{2}\triangle ABC$.

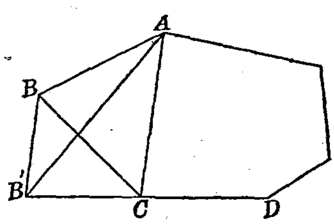
$\therefore$ $\triangle PQC = \frac{1}{2}\triangle ABC = ABPQ$.

故 PQ 卽所求之線. Q. E. D.

(139) 過三角形一邊上一定點求作二直線令三等分此三角形的面積.

〔解法倣照(138)〕

(140) 求作一多角形令與一所設多角形等積, 而邊數少一.



〔解析〕 設 $ABCD\cdots\cdots$ 是所設多角形, $AB'D\cdots\cdots$ 是所作多角形. $B'CD$ 是一直線故其邊數較 $ABCD\cdots\cdots$ 少一. 兩形面積相等, 故必 $\triangle ABC = \triangle AB'C$, $\therefore$ $BB' \parallel AC$. 因得作法如下:

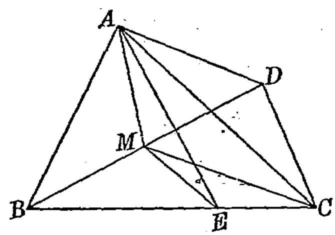
〔作法〕聯 AC, 過 B 作 $BB' \parallel AC$ 交 DC 的延線於 B'. 聯 AB'. 則多角形 $AB'D\cdots$ 即所求. *Q. E. F.*

〔證略〕

(141) 求作一三角形令與一所設多角形面積相等.

〔解法同 (140)〕

(142) 過四角形的一角頂求作一直線令等分此四角形的面積.



〔解析〕設 AE 是所求之線, 則

$\triangle ABE = \frac{1}{2} ABCD.$

聯 BD. 取 BD 中點 M.

聯 AM, CM, 則 $\triangle ABM = \frac{1}{2}\triangle ABD$, $\triangle BCM = \frac{1}{2}\triangle BCD$.

$$\therefore\quad \triangle ABM + \triangle BCM = \tfrac{1}{2}(\triangle ABD + \triangle BCD)$$
$$= \tfrac{1}{2} ABCD = \triangle ABE.$$

$$\therefore\quad \triangle ABM + \triangle BCM - \triangle ABM - \triangle BEM$$
$$= \triangle ABE - \triangle ABM - \triangle BEM.$$

即 $\triangle MEC = \triangle MEA$. $\therefore$ $AC \parallel ME$. 因得作法如下:

〔作法〕聯 AC, BD. 從 BD 的中點 M 作 $ME \parallel AC$

交 BC 於 E. 聯 AE 卽所求. *Q. E. F.*

〔證略〕

(143) 過四角形的一角頂求作兩直線令三等分此四角形的面積.

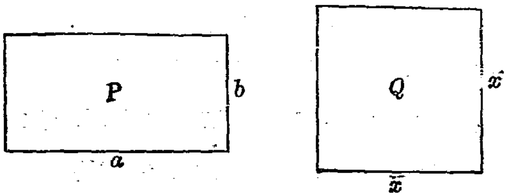
〔解法倣照(142)〕

(144) 過四角形一邊上一定點作一直線令等分此四角形的面積.

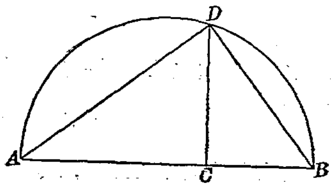
〔解法引用(143)和(138)〕

(145) 求作一正方形令與一所設矩形等積.

〔解析〕 設 P 是所設矩形其鄰邊各長 a, b. Q 是所作正方形其各邊之長爲 x. 則因 $P=Q$, $\therefore ab=x^2$.



故 $a:x=x:b$. 因得如下的幾種作法:



〔作法一〕 作線分 $AC=a$. 延長至 B 令 $CB=b$. 以 AB 爲直徑畫半圓. 從 C 作 AB 的垂

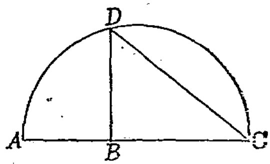
線交半圓周於 D. 則 CD 卽所求正方形各邊之長. *Q. E. F.*

〔證〕 聯 AD, BD. 則 $\angle ADB = rt.\angle$.

$\therefore$ $\triangle ACD \sim \triangle DCB$ (定理74). $\therefore$ $AC : CD = CD : CB$

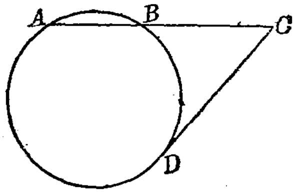
故 $\overline{CD}^2 = AC \cdot CB = ab$. *Q. E. D.*

〔作法二〕 作線分 $AC = a$. 在 AC 上取 B 令 $CB = b$. 以 AC 爲直徑作半圓. 從 B 作 AC 的垂線交半圓周於 D. 聯 CD. 則 CD 卽所求正方形各邊之長. *Q. E. F.*



〔證同作法一〕

〔作法三〕 作 $AC = a$. AC 上取 B 令 $CB = b$. 以 AB 爲弦作一任意弓形. 從 C 向此弓弦弧上作切線 CD. 則 CD 卽所求正方形各邊之長 *Q. E. F.*



〔證法根據定理84〕

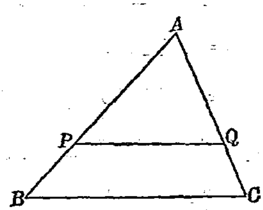
(146) 求作一正方形令與一所設三角形等積.

〔解法可先將所設三角形改爲等積矩形後再用(145)的作法〕

(147) 求作一正方形令與一所設多角形等積.

〔解法可先將所設多角形改爲等積三角形(見141)後再用(146)的作法〕.

(148) 求作一直線令與一所設三角形的底邊平行,且等分其面積.



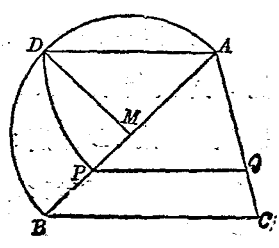
〔解析〕 設 ABC 是所設三角形, PQ 是所求的線. 則因 $PQ \parallel BC$,

$\therefore$ $\triangle APQ \sim \triangle ABC$. 又因 PQ 等分 $\triangle ABC$ 的面積,

$\therefore$ $\triangle APQ = \frac{1}{2}\triangle ABC$.

$\therefore$ $\triangle APQ : \triangle ABC = \overline{AP}^2 : \overline{AB}^2 = 1 : 2$.

$\therefore$ $AP : AB = 1 : \sqrt{2}$. $\therefore$ $AP = \dfrac{1}{\sqrt{2}}AB = \dfrac{\sqrt{2}}{2}AB$.



〔作法〕 AB 上取中點 M. 作 $MD \perp AB$, 且令 $MD = AM = \frac{1}{2}AB$. AB 上取 P 令 $AP = AD$. 作 $PQ \parallel BC$ 即所求之直線. Q.E.F.

〔證〕 $\overline{AP}^2=\overline{AD}^2=\overline{AM}^2+\overline{MD}^2=(\frac{1}{2}AB)^2+(\frac{1}{2}AB)^2$

$$=\frac{1}{4}\overline{AB}^2+\frac{1}{4}\overline{AB}^2=\frac{1}{2}\overline{AB}^2$$

$\therefore$ $\overline{AP}^2:\overline{AB}^2=1:2$. 又 $\because$ $PQ\parallel BC$,

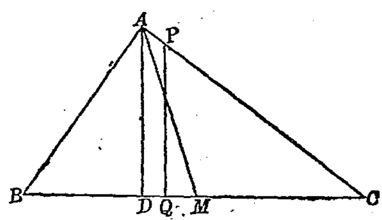
$\therefore$ $\triangle APQ\sim\triangle ABC$.

$\therefore$ $\triangle APQ:\triangle ABC=\overline{AP}^2:\overline{AB}^2=1:2$.

$\therefore$ $\triangle APQ=\frac{1}{2}\triangle ABC$. Q. E. D

(149) 求作一直線令與一所設三角形的底邊垂直,且等分其面積.

〔解析〕 設 PQ 是所求之線.



作 $AD\perp BC$,

則 $AD\parallel PQ$.

$\therefore$ $\triangle PQC\sim\triangle ADC$.

$\therefore$ $\triangle PQC:\triangle ADC=\overline{QC}^2:\overline{DC}^2$. 作中線 AM,

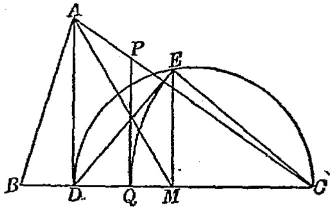
則 $\triangle PQC=\triangle AMC=\frac{1}{2}\triangle ABC$.

然 $\triangle ADC:\triangle AMC=DC:MC$.

$$\therefore\ \frac{\triangle PQC}{\triangle AMC}=\frac{\triangle PQC}{\triangle ADC}\cdot\frac{\triangle ADC}{\triangle AMC}=\frac{\overline{CQ}^2}{\overline{CD}^2}\cdot\frac{CD}{CM}=\frac{\overline{CQ}^2}{CD.CM}.$$

因 CD, CM 都是定長,故得作法如下:

〔作法〕 作 $AD\perp BC$ 以 DC 爲半徑作半圓過 BC 中點 M 作 BC 的垂線交半圓周於 E. BC 上取 Q 令 $CQ=CE$.



作 $PQ\perp BC$. 則 PQ 卽所求之直線.　　Q. E. F.

〔證〕 聯 DE. $\angle DEC=rt.\angle$,　$\therefore$　$\triangle CED\sim\triangle CEM$.

$\therefore$　$CM:CE=CE:CD$.　$\because$　$CQ=CE$,

$\therefore$　$CM:CQ=CQ:CD$,　$\therefore$　$\overline{CQ}^2=CD\cdot CM$.

聯 AM. 則

$$\frac{\triangle PQC}{\triangle AMC}=\frac{\triangle PQC}{\triangle ADC}\cdot\frac{\triangle ADC}{\triangle AMC}=\frac{\overline{CQ}^2}{\overline{CD}^2}\cdot\frac{CD}{CM}=\frac{\overline{CQ}^2}{CD\cdot CM}.$$

今 $\overline{CQ}^2=CD\cdot CM$,　$\therefore$　$\triangle PQC=\triangle AMC=\frac{1}{2}\triangle ABC$.

又 $PQ\perp BC$.　$\therefore$　PQ 是所求之線.　　Q. E. D.

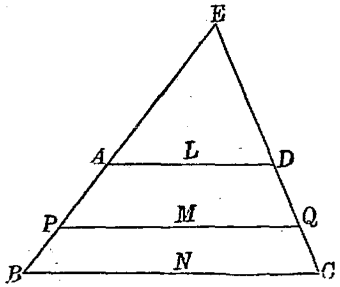
(150) 求作一直線等分一所設三角形的面積,且與其一邊所成之角等於一定角.

〔解法同 (149)〕

(151) 在三角形的底邊上求作兩個垂線令三等分此三角形的面積.

〔解法倣照(149)〕

(152) 求作三角形底邊的兩個平行線令三等分此三角形的面積.



〔解法同上〕

(153) 求作一直線令等分一所設梯形的面積且與其兩底平行.

〔解析〕 設$ABCD$是所設梯形. PQ是所求直線. 延長BA CD交於E. 命$\triangle EAD$為L, 梯形$APQD$為L, $PBCQ$為N. 則因$AD \parallel PQ \parallel BC$,

$$\therefore \quad \triangle EAD \sim \triangle EPQ \sim \triangle EBC. \quad \text{又因 } M=N,$$

$$\therefore \quad \frac{L}{\overline{EA}^2}=\frac{L+M}{\overline{EP}^2}=\frac{L+M+N}{\overline{EB}^2}=\frac{L+2M}{\overline{EB}^2}=\frac{L+L+2M}{\overline{EA}^2+\overline{EB}^2}$$

$$=\frac{2(L+M)}{\overline{EA}^2+\overline{EB}^2}=\frac{2(L+M)}{2\overline{EP}^2} \quad \therefore \overline{EP}^2=\frac{\overline{EA}^2+\overline{EB}^2}{2}$$

因EA, EB都是定長, 故可求得P點.

〔作法及證略〕

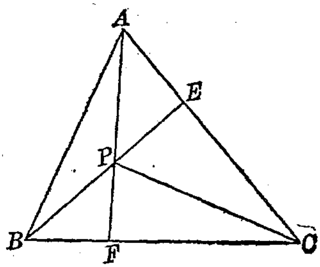
(154) 在$\triangle ABC$內求作一點P令

$$\triangle PAB : \triangle PBC : \triangle PCA = 1 : 2 : 3.$$

〔解析〕 設P是所求之點.則

$\triangle PAB:\triangle PBC=1:2$.延長$BP$交$AC$於$E$

$\triangle ABP$與$\triangle CBP$同以BP為底,其面積之比等於其高之比,而其高為立於BP或其延線上之兩垂線,在AC之異側,構成相似之兩直角三角形,是以其高之比等於AE與EC之比.而$\triangle ABE$與$\triangle CBE$同以BE為底,其面積之比亦因等於高之比而等於AE與EC之比.



由是得$\frac{AE}{CE}=\frac{\triangle ABE}{\triangle CBE}=\frac{\triangle ABP}{\triangle CBP}=\frac{1}{2}$

同理延長AP交BC於F,可證$BF:FC=1:3$.

故得作法如下:

〔作法〕 在AC上取E令$AE:EC=1:2$.

在BC上取F令$BF:FC=1:3$.

聯BE,AF交於P.P卽所求之點. Q.E.F.

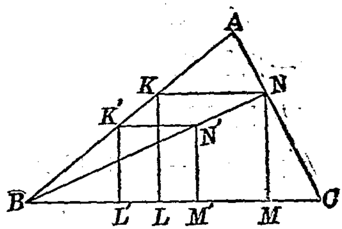
〔證略〕

(155) 在$\triangle ABC$內求一點P令

$\triangle PAB:\triangle PBC:\triangle PCA=l:m:n$.

〔解法同上〕

(156) 求作正方形令內接於一所設三角形.



〔解析〕 設 $KLMN$ 是所求的正方形內接於 $\triangle ABC$. 聯 BN. 在 BN 上任意取一點 N'. 作 $N'K' \parallel NK$, 作 $N'M' \parallel NM$, 各交 AB, BC 於 K', M'. 則 $NK : N'K' = NB : N'B = NM : N'M'$. $\because$ $NK = NM$, $\therefore$ $N'K' = N'M'$. 作 $K'L' \perp BC$. 則 $K'L'M'N'$ 也是正方形. 因得作法如下:

〔作法〕 在 AB 上任意取一點 K' 作 $K'L' \perp BC$. 以 $K'L'$ 爲正方形的一邊作正方形 $K'L'M'N'$. 聯 BN' 延長交 AC 於 N. 作 $NM \perp BC$, $NK \parallel BC$, $KL \perp BC$, 則 $KLMN$ 卽所求之正方形. Q. E. F.

〔證略〕

(157) 作一四邊形令內接於一所設三角形且與一所設四邊形相似.

〔解法同上〕

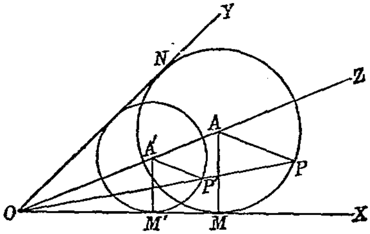
(158) 作一正方形令內接於一所設半圓.

〔解法倣照(156)〕

(159) 作一圓內接矩形令其兩鄰邊之長的比等於一所設定比.

〔解法同上〕

(160) 求作一圓令與相交二定直線相切且過一定點.



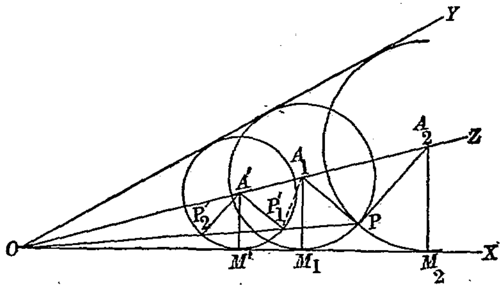
〔解析〕 二定直線 OX, OY 交於 O. P 是定點. 設 $\odot A$ 是所求之圓, 切 OX 於 M 切 OY 於 N. 聯 OA. 則 OA 必為 $\angle XOY$ 的等分線. 在 OA 上任意取一點 A', 作 $A'M' \perp OX$. 以 $A'M'$ 為半徑作 $\odot A'$ 作 $A'P' \parallel AP$ 交 OP 於 P'. 則

$$A'P' : AP = OA' : OA = A'M' : AM.$$

$\because AP = AM$, $\therefore A'P' = A'M'$, $\therefore P'$ 在 $\odot A'$ 上. 因得作法如下:

〔作法〕 作 $\angle XOY$ 的等分線 OZ. 在 OZ 上任意

取一點 A'. 作 $A'M \perp OX$. 以 $A'M'$ 爲半徑作 $\odot A'$ 交

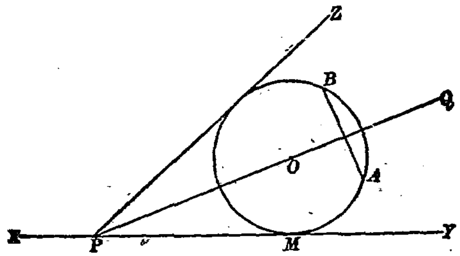


OP 於 P'_1, P'_2. 聯 $A'P'_1$, $A'P'_2$. 過 P 作 $PA_1 \parallel P'_1A'$, 作 $PA_2 \parallel P'_2A'$ 各交 OZ 於 A_1A_2 則 A_1A_2 即所求圓的中心. 　　Q. E. F.

〔證略〕

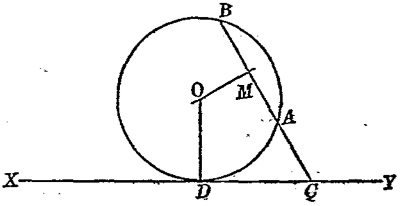
(161) 求作一圓令過二定點, 且切一定直線,

〔解析一〕 設 A, B 是二定點, XY 是定直線. $\odot O$



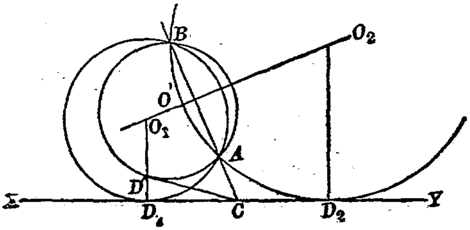
是所作之圓，切 XY 於 M. 則 O 必在 AB 的垂直等分線 PQ 上. 設 PQ 交 XY 於 P. 過 P 作 PZ 令 $\angle ZPQ=\angle QPY$, 則 $\odot O$ 必亦與 PZ 相切. 因 A,B 是定點，故 PQ 是定直線，P 是定點，$\angle QPY$ 是定角，PZ 也是定直線，因得依照160的作法作之.

〔作法及證略〕



〔解析二〕 設 $\odot O$ 是所作之圓切 XY 於 D. 直線 AB 交 XY 於 C. 則 $\overline{CD}^2=CA\cdot CB$. 因 A,B 一定，故 C 一定，由是可求得 D 如下:

〔作法〕 聯 AB 交 XY 於 C. 過 A,B 作一任意 $\odot O'$. 過 C 作 CD' 切 $\odot O'$ 於 D'. 在 XY 上取 D 令

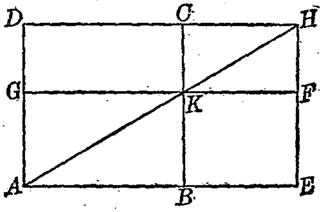


$CD=CD'$ (如圖 D_1 及 D_2) 過 D 作 $DO \perp XY$ 交 AB 的垂直等分線於 O (O_1 及 O_2). 則 O 卽所求圓的中心. Q. E. F.

〔證略〕

〔討論〕 本題有兩個解答. 但若 $AB \parallel XY$ 時, 則只有一個解答. 若 A, B 在 XY 的兩旁時, 則無解答.

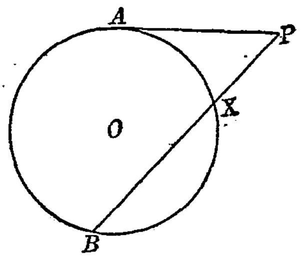
(162) 作矩形令其一邊爲定長, 其面積等於一定正方形.



〔解析一〕 設 $ABCD$ 是定正方形. $AEFG$ 是所求矩形, 其一邊 AE 等於定長 l. GF 交 BC 於 K. 延長 DC, EF 會於 H. 則因 $\square ABCD=\square AEFG$, $\therefore \square GC=\square KE$ 故 K 在 AH 上 (餘形等積) 因得作法如下:

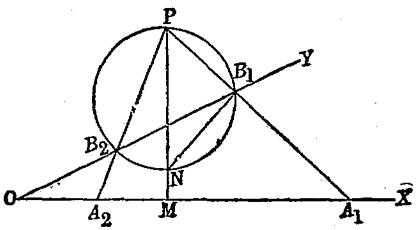
〔作法〕 延長 $\square ABCD$ 之一邊 DC 至 H 令 DH 等於定長 l. 作 $\square ADHE$. 聯 AH 交 BC 於 K. 過 K 作 $GF \parallel AE$. 則 $\square AEFG$ 卽所求之矩形. Q. E. F

〔解析二〕 設定正方形一邊之長爲 a. 所求矩形的一個已知邊之長爲 b. 按題所言卽要求長 x 令 $bx=a^2$. 今試任意作一圓 O. PA 是切線 PXB 是割線. 則 $PB\cdot PX=\overline{PA}^2$ 故可從 PA, PB 已知之長, 求得 PX 之長如下:



〔作法〕 從任意一$\odot O$ 的圓周上任意一點 A 作 $\odot O$ 的切線 $PA=a$. 以 P 爲中心, b 爲半徑作弧交 $\odot O$ 於 B. 聯 PB 交 $\odot O$ 於又一點 X. 則 PX 卽所求矩形又一邊之長. Q. E. F.

(163) $\angle XOY$ 是定角 P 是定點求過 P 作一直線交 OX, OY 於 A, B, 令 $PA\cdot PB=m^2$.



〔解析〕 設 PA 即所求之線. 作 $PM \perp OX$. 過 B 作 $BN \perp PA$ 交 PM 於 N. 則因 $\angle AMN$, $\angle ABN$ 都是直角, 故 $AMNB$ 共圓. $\therefore$ $PM \cdot PN = PA \cdot PB = m^2$. $\because$ PM 是定長. 故可求得 N 後作圖如下:

〔作法〕 作 $PM \perp OX$. 在 PM 上取 N 令 $PM \cdot PN = m^2$. (作法見上例) 以 PN 為直徑作圓交 OY 於 B. 聯 PB 交 OX 於 A. 則 PBA 即所求. Q. E. F.

〔證〕 $\because$ PN 是直徑, $\therefore$ $\angle PBN = rt.\angle$,

$\because$ $\angle NMA = rt.\angle$ $\therefore$ A, M, N, B 共圓.

$\therefore$ $PA \cdot PB = PM \cdot PN = m^2$.

$\therefore$ PBA 即所求直線. Q. E. D.

立體之部

1. 基本定理彙集

定理 1. (1) 過一直線及一點的平面有一無二. (2) 過相交兩直線的平面有一無二. (3) 過平行兩直線的平面有一無二.

定理 2. 平行兩面與交截面的交線是平行線.

定理 3. 一平面僅含兩平行線之一,則必平行於其二.

定理 4. 若一平面與一線平行,則過此線所作任意一平面與此平面之交線,亦必與此線平行.

定理 5. 兩直線與平行諸面相交,則此兩直線爲此諸面所截之對應部份成比例.

定理 6. 平行於同一直線之線互相平行.

定理 7. 兩角的兩邊互爲同向平行,則此兩

角相等.

定理 8. 若一線垂直於其他相交二線,則此線亦垂直於其他二線所定之平面.

定理 9. 一平面垂直於兩平行線之一.則必垂直於其二.

定理 10. 垂直於同一直線之平面互相平行.

定理 11. 一直線垂直於兩平行平面之一,則必垂直於其二.

定理 12. 一直線垂直於一平面,則過此直線所作諸面都垂直於此平面.

定理 13. 兩面各與第三平面垂直.則其交線亦必與第三平面垂直.

定理 14. 三面角的兩個面角之和必比第三個面角大.

定理 15. 多面角各面角之和小於四直角.

定理 16. 兩個三面角中,若 (1) 第一個三面角的兩個面角及其所夾的一個兩面角與第二個三面角的兩個面角及其所夾的一個兩面角順次對對相等,(2) 第一個三面角的兩個兩面角

及其所夾的一個面角與第二個三面角的兩個兩面角及其所夾的一個面角順次對對相等,(3)第一個三面角的三個面角與第二個三面角的三個面角順次對對相等,則此兩個三面角是合同形.

定理 17. 定理 16 中順次改爲逆次時,則兩個三面角是對稱形.

定理 18. 平面與球面的交線是圓周.

定理 19. 兩個球面的交線是圓周.

定理 20. 球面三角形兩邊之和大於第三邊.

定理 21. 球面凸多角形各邊之和小於大圓.

定理 22. 若第一個球面三角形是第二個的極三角形,則第二個亦是第一個的極三角形.

定理 23. 若兩個球面三角形互爲極三角形,則第一個的每一角的度數與第二個的對應邊的度數之和是 180 度.

定理 24. 同球面上的兩三角形中,若 (1) 第一個三角形的兩邊及夾角與第二個三角形的兩邊及夾角順次對對相等,(2) 第一個三角形的兩

角及夾邊與第二個三角形的兩角及夾邊順次對對相等,(3)第一個三角形的三邊與第二個三角形的三邊順次對對相等,(4)第一個三角形的三個角與第二個三角形的三個角順次對對相等,則此兩三角形是合同形.

定理25. 定理24中順次改爲逆次時,則兩三角形是對稱形.

定理26. 球面三角形的兩邊相等,則其對角亦相等;兩角相等,則其對邊相等.

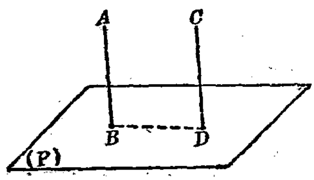
定理27. 球面三角形的兩邊不等,則大邊的對角大;兩角不等,則大角的對邊大.

2. 雜題證例

(1) 垂直於同一平面的兩直線互相平行.

設 $AB\perp(P)$, $CD\perp(P)$.

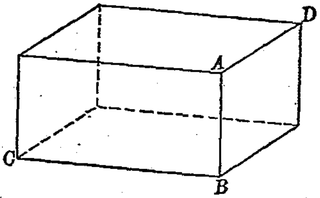
求證 $AB \parallel CD$.



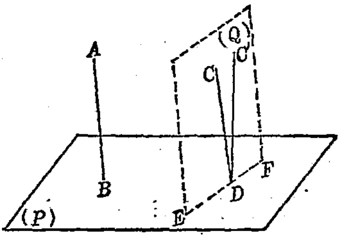
立體題往往誤證,茲先舉本題的誤證如下.學者務須細加辨正.

〔謬誤的證明〕 聯 BD. $\because AB\perp(P)$, $\therefore AB\perp BD$. $\because CD\perp(P)$ $\therefore CD\perp BD$. 今既 AB 與 CD 都與 BD 垂直,故 $AB\parallel CD$.

上面的證法,好像很有根據.其實錯了.因"垂直於同一直線的兩線互相平行."一語,只能適用於平面圖形,於立體圖形並不適合.試看右圖是一個直方體.$CB\perp AB$. $DA\perp AB$. 然 CB 與 DA 並不平行,是很顯明的事實.從此可知以上證法的不可靠了.茲眞確證明如下:



〔證〕 過 D 作 DC' 令與 AB 平行.則 $DC'\perp(P)$. (定理 9) 過 DC, DC' 作平面 (Q). (Q) 與 (P) 交於 EF.

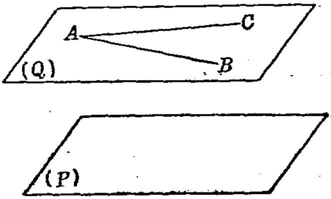


則因 $CD\perp(P)$, $\therefore CD\perp EF$. $C'D\perp(P)$, $\therefore C'D\perp EF$. 但 DC, DC', EF 都在 (Q) 內, $\therefore C'D$ 合於 CD, (因

在一平面內,過 EF 上 D 點所作 EF 的垂線只有一個). $\therefore AB \parallel CD$. *Q.E.D.*

〔註〕 以上的證法叫做合一證法.

(2) 相交兩直線各與一平面平行,則過此兩線所作之面必與此平面平行.



AB,AC 交於 A, (Q) 是過 AB, AC 之平面.

$AB \parallel (P)$, $AC \parallel (P)$. 求證 $(Q) \parallel (P)$.

〔證〕 設若 (Q) 與 (P) 不平行而相交,其交線爲 l. 則 $\because AB \parallel (P)$ $\therefore AB \parallel l$. (定理4)

又 $\because AC \parallel (P)$ $\therefore AC \parallel l$. (定理4)

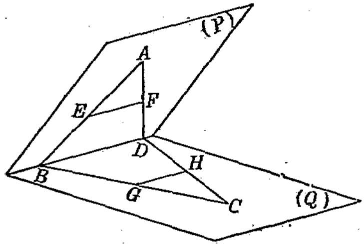
$\therefore AB \parallel AC$ (定理6). 然此與假設矛盾. 故 (Q) 與 (P) 決不相交. $\therefore (Q) \parallel (P)$. *Q.E.D.*

〔註〕 以上的證法叫做歸謬證法.

(3) 四邊形兩鄰邊中點所聯線分與其他兩鄰邊所聯線分平行且相等.

$ABCD$ 是空間任意一個四邊形. E,F,G,H 各爲 AB, AD, CB, CD 的中點. 求證 $EF \parallel GH$; $EF = GH$.

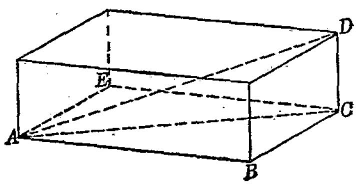
〔證〕過 AB, AD 作平面 (P).過 BC,CD 作平面 (Q).(P),(Q) 交於 BD. 在 (P) 內, ∵ E,F 各為 AB, AD



的中點, ∴ $EF \parallel BD$, $EF=\frac{1}{2}BD$. 在 (Q) 內, ∵ G,H 各為 CB,CD 的中點, ∴ $GH \parallel BD$, $GH=\frac{1}{2}BD$

∴ $EF \parallel GH$; $EF=GH$. 　　Q. E. D

(4) 直方體內對角線上之正方形等於其長廣,高三邊上正方形之和.



設直方體長 AB, 廣 BC, 高 CD. 其對角線 AD.

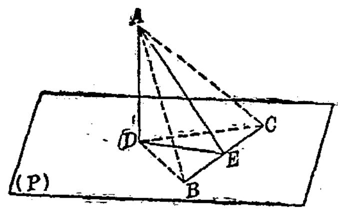
求證　　$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2$.

〔證〕∵ $\angle DCB=rt.\angle$, $\angle DCE=rt\angle$, ∴ DC 垂直於底面 $ABCE$. (定理8).∴ $DC \perp CA$. 即 $\angle DCA=rt\angle$.

∴ $\overline{AD}^2=\overline{AC}^2+\overline{CD}^2$. 又因 $\angle ABC=rt\angle$,

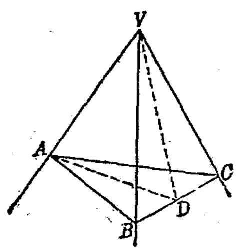
故 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$ ∴ $\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2$. Q.E.D

(5) 從平面(P)外一點A,向(P)及(P)中任意一直線BC各作垂線AD, AE. 聯垂足DE. 求證$DE \perp BC$.



〔證〕 在BC上取B, C兩點令$BE=CE$. 聯AB, AC, DB, DC. 因AE是BC的垂直等分線, 故$AB=AC$. 又因$AD \perp (P)$, $\therefore$ $\angle ADB=\angle ADC=rt.\angle$. $\therefore$ $\triangle ADB \cong \triangle ADC$, $\therefore$ $DB=DC$. 又因$BE=EC$ $\therefore$ $\triangle DBE \cong \triangle DCE$ $\therefore$ $\angle DEB=\angle DEC$. $\therefore$ $DE \perp BC$. Q. E. D.

(6) 一個三面角的兩個面角相等,則他的相對的兩個兩面角也相等.



設三面角$V-ABC$中, $\angle AVB=\angle AVC$. 求證兩面角$VB=$兩面角VC.

〔證〕 在兩面角VA內, 作一等分角面交面VBC於VD, 則在兩個三面角V-ABD, V-ACD中,

$\angle AVB = AVC$ (假設), $B\text{-}VA\text{-}D = C\text{-}VA\text{-}D$($VAD$ 等分 $B\text{-}VA\text{-}C$), $\angle AVD$ 公共,故 $V\text{-}ABD$ 與 $V\text{-}ACD$ 是對稱形. (定理 17)

$\therefore$ 兩面角 $VB =$ 兩面角 VC. Q. E. D.

〔注意〕 立體圖形裏面的三面角好比平面圖形裏面的三角形.三面角的三個面角相當於三角形的三個邊.三面角的三個兩面角相當於三角形的三個角.故本題好比就是平面部份的基本定理 10:"二等邊三角形的底角相等". 上面的證法,也同基本定理 10 的證法一樣.

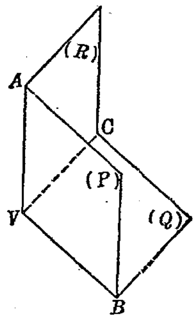
(7) 一個四面角 $V\text{-}ABCD$ 中,已知 $\angle AVB = \angle AVD$, 兩面角 $VB=$ 兩面角 VD. 求證 $\angle BVC = \angle DVC$.

〔證法可做平面部份 (1)〕

(8) 一個三面角的三個面角都是直角,則他的三個兩面角也都是直角.

三面角 $V\text{-}ABC$ 中 $\angle AVB = \angle BVC = \angle CVA = rt\angle$. 求證兩面角 VA, VB, VC 也都是直角.

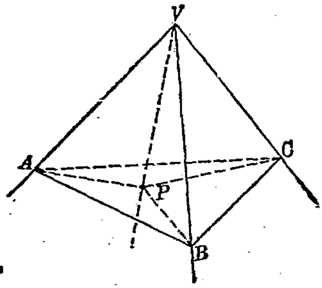
〔證〕 設 VA, VB 之面為 (P); VB, VC 之面為 (Q);



VC, VA 之面爲 (R). 則因 $\angle AVB = rt.\angle$, $\angle BVC = rt.\angle$, $\therefore BV \perp AV$, $BV \perp CV$. $\therefore BV \perp (R)$, (定理8).
$\therefore (P) \perp (R)$, $(Q) \perp (R)$. (定理12).
即兩面角 VA, VC 都是直角.
同理可證兩面角 VB 也是直角. Q. E. D.

(9) P 是三面角 $V-ABC$ 內的任意一點.

求證 $\angle AVP + \angle BVP + \angle CVP > \frac{1}{2}(\angle AVB + \angle BVC + \angle CVA)$.



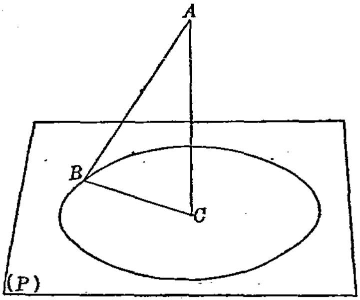
〔證〕 聯 PV. 成三個三面角 $V\text{-}ABP$, $V\text{-}BCP$, $V\text{-}CAP$. 在 $V\text{-}ABP$ 中, $\angle AVP + \angle BVP > \angle AVB$. (定理14). 同樣在 $V\text{-}BCP$, $V\text{-}CAP$ 中, $\angle BVP + \angle CVP > \angle BVC$, $\angle CVP + \angle AVP > \angle CVA$.

$\therefore 2\angle AVP + 2\angle BVP + 2\angle CVP > \angle AVB + \angle BVC + \angle CVA$.

$$\therefore\ \angle AVP+\angle BVP+\angle CVP>\tfrac{1}{2}(\angle AVB+\angle BVC+\angle CVA).$$ Q.E.D.

(10) A是平面(P)外的一定點AB是一個動線分交(P)於B.AB之長一定求B之軌跡.

〔解〕 從A作$AC\perp(P)$.聯BC.則$AC\perp BC$.



故 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2-\overline{AC}^2$.因$AB,AC$都是定長,故$\overline{AB}^2-\overline{AC}^2$是定值.故$\overline{BC}^2$是定值而$BC$之長一定.又因$C$是定點.故$B$之軌跡是以$C$爲中心,$\sqrt{AB^2-AC^2}$爲半徑在$(P)$上所作之圓.

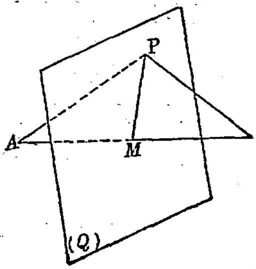
〔證略〕

(11) A,B是兩定點.P是一動點.$PA=PB$.求證P之軌跡是AB的垂直等分面(Q).

〔證〕 (1) 設P是(Q)中任意一點.聯PA, PB, PM (M爲AB的中點), $\because\ AB\perp(Q)$, $\therefore\ AB\perp PM$. 又$AM=MB$.則$\triangle PMB\cong\triangle PMA$, $\therefore\ PA=PB$.卽(Q)中所有點適合於所設條件.

(2)設P是適合於所設條件的點,而$PA=PB$.聯PM.則$\triangle PAM\cong\triangle PBM$(三邊各等).$\therefore \angle PMA=\angle PMB=rt.\angle$.

$\therefore PM\perp AB$.

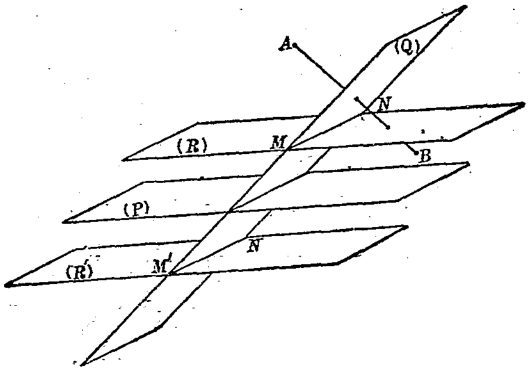


故PM在(Q)內.即P在(Q)上.故適合於所設條件的點在(Q)上.

$\therefore P$之軌跡是AB的垂直等分面(Q). Q.E.D.

(12) 平面(P)及面外兩定點A,B.求距A,B等遠並距(P)面l寸之點之軌跡.

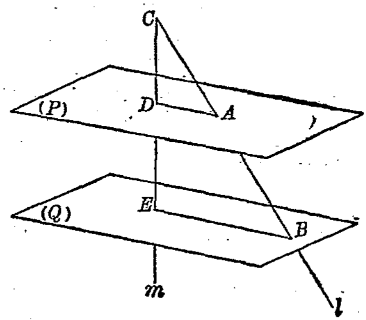
〔解〕 距A,B等遠之點之軌跡是AB之垂直



等分面. 距 (P) l 寸之點之軌跡是 (P) 面兩旁一雙平行面,此一雙平行面與 (P) 間之公垂線各長 l 寸. 設 AB 之垂直等分面為 (Q). (P) 之一雙平行面為 (R) 及 (R'). (Q) 與 (R) 及 (R') 各交於 MN 及 $M'N'$. 則所求點之軌跡是 MN 及 $M'N'$ 一雙平行線.

〔證略〕

(13) 一直線與兩個平行平面相交所夾之角必相等.

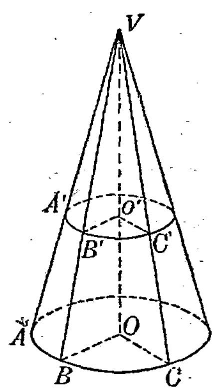


(P), (Q) 是兩個平行平面. 一直線 l 交 (P) 於 A, 交 (Q) 於 B. 求證 l 與 (P) 所夾之角等於 l 與 (Q) 所夾之角.

〔證〕 從 l 上任意一點 C 作直線 m 令與 (P) 垂直交 (P) 於 D, 交 (Q) 於 E. $\because$ $(P) \parallel (Q)$, $m \perp (P)$, $\therefore$ $m \perp (Q)$. $\therefore$ l, m 所定之面亦必垂直於 (P) 及 (Q). $\therefore$ AD 是 AC 在 (P) 上之射影; BE 是 BC

在(Q)上之射影. $\therefore \angle CAD$ 卽 l 與 (P) 所夾之角. $\angle CBE$ 卽 l 與 (Q) 所夾之角. $\because (P) \parallel (Q)$, $\therefore AD \parallel BE$ (定理2). $\therefore \angle CAD = \angle CBE$. 卽 l 與 (P) 所夾之角等於 l 與 (Q) 所夾之角. Q. E. D.

(14) 圓錐體的截面平行於底的是圓.



$V-ABC$ 是圓錐體, O 是底 $\odot ABC$ 的中心. $A'B'C'$ 是截面與 ABC 平行. 求證 $A'B'C'$ 是圓.

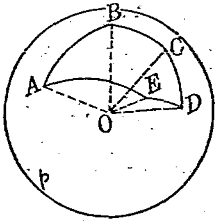
〔證〕 聯 VO 交截面 $A'B'C'$ 於 O'. 在底面 $\odot ABC$ 中作任意半徑 OB. 過 VO, OB 的平面交截面 $A'B'C'$ 於 $O'B'$. 則因 $A'B'C' \parallel ABC$, $\therefore O'B' \parallel OB$.

$\therefore \triangle VOB \backsim \triangle VO'B'$. $\therefore O'B' : OB = VO' : VO$. 但 OB, VO', VO 都是定長, $\therefore O'B'$ 也是定長. 又 O' 是定點. 故 $A'B'C'$ 是圓. Q. E. D.

(15) 球面凸多角形各邊之和小於此球面上之大圓周.

$ABCDE$ 是球面上的凸多角形. p 是大圓周. 求

證 $\frown AB+\frown BC+\frown CD+\frown DE$
$+\frown EA<p.$



〔證〕 聯球的諸半徑 OA, OB, OC, OD, OE, 成多面角 O-$ABCDE$.

則因 $\angle AOB+\angle BOC+\angle COD+\angle DOE$
$+\angle EOA<4ri\angle$. (定理15)

$\therefore \frown AB+\frown BC+\frown CD+\frown DE+\frown EA<p.$ Q. E. D.

〔注意〕 凡球面多角形中邊和角的關係是與球心做頂點所成多面角中面角和兩面角的關係一樣,因爲牠們的量度是由此而來的.

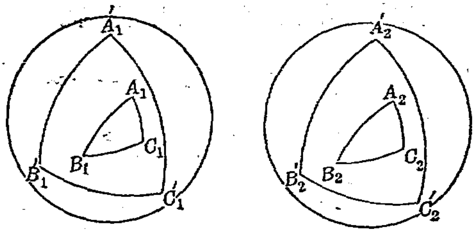
(16) 同球或等球面上兩個三角形中,若他們的三對對應角互相等,則他們的三對對應邊也互相等,而此兩三角形或是合同形或是對稱形.

$A_1B_1C_1$ $A_2B_2C_2$ 是等球面上的兩個三角形.

$\angle A_1=\angle A_2$, $\angle B_1=\angle B_2$, $\angle B_1=\angle C_2$.

求證 $\frown A_1B_1=\frown A_2B_2$, $\frown B_1C_1=B_2C_2$,
$\frown A_1C_1=\frown A_2C_2$.

若順次時, $\triangle A_1B_1C_1$ 及 $\triangle A_2B_2C_2$ 是合同形. 若逆



次時,則爲對稱形.

〔注意〕 此卽定理24的(4).此係球面三角形與平面三角形不同之點.平面兩三角形中.兩雙角各相等,則第三雙角也必等,而三雙角各相等時僅爲相似形,未必爲合同形.球面兩三角形中,兩雙角各相等時.第三雙角未必相等.若三雙角各相等,則兩三角形卽是合同形或對稱形.玆證如下:

〔證〕 作 $A_1B_1C_1$ 的極三角形 $A'_1B'_1C'_1$, $A_2B_2C_2$ 的極三角形 $A'_2B'_2C'_2$. 則因 $\angle A_1=\angle A_2$, $\angle B_1=\angle B_2$, $\angle C_1=\angle C_2$, $\therefore$ $\frown B'_1C'_1=\frown B'_2C'_2$, $\frown A'_1C'_1=\frown A'_2C'_2$, $\frown A'_1B'_1=\frown A'_2B'_2$. (根據定理23). $\therefore \triangle A'_1B'_1C'_1$與$\triangle A'_2B'_2C'_2$ 是合同形或對稱形 (定理24(3)).

$\therefore \angle A'_1=\angle A'_2$, $\angle B'_1=\angle B'_2$, $\angle C'_1=\angle C'_2$. $\therefore$ $\frown B_1C_1=\frown B_2C_2$, $\frown A_1C_1=\frown A_2C_2$, $\frown A_1B_1=\frown A_2B_2$. (根據定

理23). $\therefore$ $\triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$ 是合同形,或是對稱形. *Q. E. D.*

3. 基本計算公式彙集

〔式中 V 表體積, T 表全面積, L 表側面積, B 和 b 表底面積, S 表斜高, E 表棱, H 表高, R 和 R' 表半徑.〕

1. 長方體: $V=$ 長×廣×高.

   $T=2$ (長×廣+長×高+廣×高).

2. 直角壔: $V=B\times H$.

   $L=E\times$ 底的周圍.

   $T=L+2B$.

3. 正角錐: $V=\frac{1}{3}B\times H$

   $L=\frac{1}{2}S\times$ 底的周圍.

   $T=L+B$.

4. 正角錐台: $V=\frac{1}{3}H(B+b+\sqrt{Bb})$.

   $L=\frac{1}{2}S$ (兩底周圍之和).

   $T=L+B+b$.

5. 直圓壔: $V=\pi R^2H$.

$L=2\pi RH.$

$T=2\pi R(H+R)$

6. 直圓錐：$V=\frac{1}{3}\pi R^2H.$

$L=\pi RS.$

$T=\pi R(S+R).$

7. 直圓錐台：$V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+R'^2+RR')$

$L=\pi S(R+R')$

$T=L+\pi(R^2+R'^2).$

8. 球：$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{1}{6}\pi D^3.$〔$D$表直徑〕

$T=4\pi R^2.$

9. 球面帶形：$T=2\pi RH.$

10. 球面月形：$T=\frac{\text{月形角}}{\text{直角}}\times\pi R^2$

11. 球面三角形：$T=\frac{\text{球面過剩}}{2\text{直角}}\times\pi R^2$

注：$\triangle BAC$ 的球面過剩是

$\angle A+\angle B+\angle C-2rt.\angle s$

12. 球角錐體：$V=\frac{1}{3}BR.$

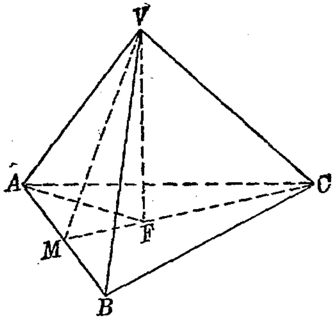
13. 球扇形體：$V=\frac{1}{3}R\times$球面帶形

$=\frac{2}{3}\pi R^2H.$

14. 球分：$V=\frac{\pi H}{2}(R^2+R'^2)+\frac{\pi H^3}{6}$

4. 計算題雜例

(17) 一正三角錐高三寸，底每邊長五寸，求其棱，側面積及體積．



〔解〕 V為角錐頂．$\triangle ABC$為底．VF為高．F是$\triangle ABC$的重心．CM是中線．M是AB的中點．故從假設$AB=AC=BC=5$寸，

$$\therefore\ AM=\frac{5}{2}\text{寸},\quad MC=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AM}^2}=\frac{5}{2}\sqrt{3}\text{寸},$$

$$AF=CF=\frac{2}{3}CM=\frac{5}{3}\sqrt{3}\text{寸},MF=\frac{1}{3}CM=\frac{5}{6}\sqrt{3}\text{寸},$$

$$VM=\sqrt{\overline{VF}^2+\overline{MF}^2}=\sqrt{9+\frac{75}{36}}=\frac{1}{6}\sqrt{399}\text{寸}.$$

$$VA=\sqrt{VF^2+AF^2}=\sqrt{9+\frac{75}{9}}=\frac{2}{3}\sqrt{39}\text{寸}.$$

$$\triangle VAB=\frac{1}{2}VM\cdot AB=\frac{5}{12}\sqrt{399}\text{方寸}.$$

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}CM\cdot AB=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\sqrt{3}\times 5=\frac{25}{4}\sqrt{3}\text{ 方寸.}$$

$$V=\frac{1}{3}BH=\frac{1}{3}\times\frac{25}{4}\sqrt{3}\times 3=\frac{25}{4}\sqrt{3}\text{ 立方寸.}$$

故此錐體之各棱長$\frac{2}{3}\sqrt{39}$寸.側面積爲$\frac{5}{4}\sqrt{399}$方寸.體積爲$\frac{25}{4}\sqrt{3}$立方寸.

(18) 設一正圓錐體之底半徑爲5尺,其高爲12尺.求其側面積全面積及體積.

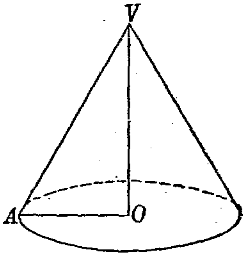
〔解〕 $S=VA=\sqrt{VO^2+AO^2}$

$=\sqrt{R^2+H^2}$

$=\sqrt{5^2+12^2}$ 尺

$=\sqrt{25+144}$ 尺

$=\sqrt{169}$ 尺 $=13$ 尺



$\therefore$ 側面積 $=L=\pi RS=3.1416\times 5\times 13$ 方尺

$=204.2$ 方尺.

全面積 $=T=\pi R(S+R)$

$=3.1416\times 5\times(13+5)$ 方尺

$=3.1416\times 5\times 18$ 方尺

$=282.7$ 方尺.

體積 $=V=\frac{1}{3}\pi R^2H$

$=\frac{1}{3}\times 3.1416\times 5^2\times 12$ 立方尺

$=314.16$ 立方尺.

(19) 有兩個立方體,一個每邊長 120 寸,一個每邊長 209 寸.今又有一個立方體,其表面積適等於以上兩個表面積之和.求其每邊之長.

〔解〕 設其每邊之長爲 x 寸,則其表面積當爲 $6x^2$ 方寸而其他兩個表面積之和爲

$$6\times 120^2+6\times 209^2$$

$\therefore\ 6x^2=6\times 120^2+6\times 209^2$. $\therefore\ x=\sqrt{120^2+209^2}=241$.

$\therefore$ 每邊長 241 寸.

(20) 半徑爲 3 寸, 4 寸, 5 寸, 的三個鐵球鎔合鑄成一個大球.問大球之半徑如何?

〔解〕 設大球之半徑爲 x 寸.則其體積當爲 $\frac{4}{3}\pi x^3$ 立方寸.然三球之體積各爲 $\frac{4}{3}\pi\times 3^3$, $\frac{4}{3}\pi\times 4^3$ $\frac{4}{3}\pi\cdot 5^3$ 立方寸. $\therefore\ \frac{4}{3}\pi x^3=\frac{4}{3}\pi(3^3+4^3+5^3)$

$$\therefore\quad x=\sqrt[3]{3^3+4^3+5^3}$$

$$=\sqrt[3]{27+64+125}$$

$$=\sqrt[3]{216}$$

$$=6.$$

∴ 大球之半徑為 6 寸.

(21) 圓錐體之全面積為 176, 斜高為 10. 問此圓錐底之半徑為幾何?

〔解〕 依公式 6, $T=\pi R(S+R)$.

以已知值代入得 $176=\frac{22}{7}\times R(10+R)$

$$7\times 8=10R+R^2$$

$$R^2+10R-56=0$$

$$(R+14)(R-4)=0$$

故得 $R=4$. 或 $R=-14$.

但半徑決非負數,故此圓錐底之半徑為 4.

(22) 正方台體上底每邊長 6 寸,下底每邊長 8 寸,高 5 寸.求其體積.

〔解〕 $V=\frac{1}{3}H(B+b+\sqrt{Bb})$

今 $B=8^2=64,\ b=6^2=36,\ \sqrt{Bb}=\sqrt{8^2\times 6^2}=8\times 6=48$

$$\therefore\ V=\frac{1}{3}\times 5(64+36+48)=\frac{1}{3}\times 5\times 148=\frac{740}{3}=246\frac{2}{3}$$

故其體積為 $246\frac{2}{3}$ 立方寸.

(23) 今有米若干公石堆成一圓錐形,其高為

4 公尺,底之半徑為 5 公尺.若以底每邊 4 公尺之正方形之倉儲之,問高若干公尺.

〔解〕 設高 x 公尺,則米之體積共為 4^2x 立方公尺等於圓錐形之體積.

$$\therefore \quad 4^2x=\frac{1}{3}\pi 5^2\times 4$$

$$\therefore \quad x=\frac{5^2\times 4\times 3.1416}{3\times 4^2}=\frac{5^2\times 0.7854}{3}$$

$$=5^2\times 0.2618 \qquad =6.545$$

$\therefore$ 高為 6.545 公尺.

(24) A, B 兩球體積之比為 125 : 216. 求其表面積之比.

〔解〕 設 A 球之半徑為 a, B 球之半徑為 b, 則其體積各為 $\frac{4}{3}\pi a^3$, $\frac{4}{3}\pi b^3$. 而其表面積各為

$$4\pi a^2,\ 4\pi b^2.$$

今 $\dfrac{\frac{4}{3}\pi a^3}{\frac{4}{3}\pi b^3}=\dfrac{125}{216}$, 即 $\dfrac{a^3}{b^3}=\dfrac{125}{216}$ $\therefore \dfrac{a}{b}=\dfrac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{216}}=\dfrac{5}{6}$.

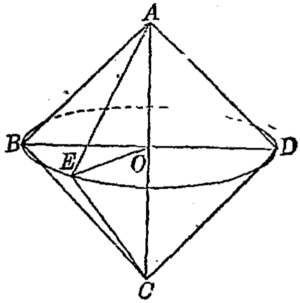
$$\therefore \quad \frac{a^2}{b^2}=\frac{25}{36}, \quad \therefore \frac{4\pi a^2}{4\pi b^2}=\frac{25}{36}.$$

故兩球表面積之比為 25 : 36.

(25) 一個正方形每邊長 4 寸. 繞了他的一個

對角線旋轉成一體.求其體積和表面積.

〔解〕 $ABCD$ 是正方形. AC 是他的對角線圍繞 AC 旋轉所成之體是一雙圓錐體 $A-BED$ 及 $C-BED$.



因 $AB=4$ 寸,故 $AC=4\sqrt{2}$ 寸.

$\therefore AO=CO=EO=2\sqrt{2}$ 寸.

從公式 6, $V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$,

得 $A-BED$ 及 $C-BED$ 的體積各爲 $\frac{1}{3}\pi\cdot(2\sqrt{2})^2(2\sqrt{2})$ 立方寸

故體積爲 $2\times\frac{1}{3}\times 3.1416\times 16\times 1.4142$ 立方寸

$=47.39$ 立方寸

又 $T=\pi R(S+R)$

故全面積爲 $2\times 3.1416\times 2\sqrt{2}(4+2\sqrt{2})$ 方寸

$=2\times 3.1416\times 2\times 1.4142\times 6.8284$ 方寸

$=121.36$ 方寸

(26) 一珈琲壺上口直徑 4 寸,底直徑 5 寸,高 8 寸.若珈琲杯之容量爲每杯 10 立方寸,則此壺

可容珈琲幾杯?

〔解〕 此壺係圓錐台形,故體積公式爲

$$V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+R'^2+RR')$$

卽此壺容量爲$\frac{1}{3}\times 3.1416\times 8\times\left(\frac{25+16+20}{4}\right)$立方寸.

因每杯容量爲10立方寸.

故此壺所容杯數爲$\frac{1}{10}\times\frac{1}{3}\times 3.1416\times 2\times(25+16+20)$

$$=\cdot 10472\times 2\times 61$$

$$=12\cdot 77$$

∴ 此壺約容珈琲13杯不滿.

(27) 若球面一帶形的面積是80方寸,其高是4寸,則此球半徑幾寸?

〔解〕 帶形面積公式爲$T=2\pi RH$.

故 $R=\frac{T}{2\pi H}=\frac{80}{2\times 3.1416\times 4}=\frac{10}{3.1416}=3.183$寸.

(28) 一圓壔形罐直徑4寸內有一部份水.若將一球浸入罐內水中,則罐內之水升高一寸.求此球半徑.

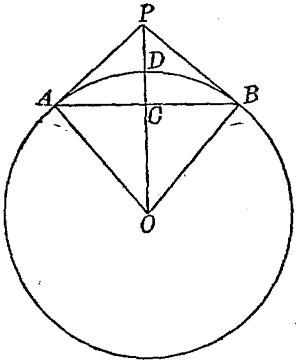
〔解〕 此球排水量等於直徑4寸高1寸的圓壔體,故當爲$\pi R^2H=\pi 2^2\times 1=4\pi$立方寸.設此球

之半徑爲 R, 則

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3=4\pi.\ \therefore\ R^3=3.\ R=\sqrt[3]{3}$$

故此球半徑爲 $\sqrt[3]{3}$ 寸 $=1.442$ 寸.

(29) 假定地球是眞確球體其半徑爲四千英里.在高出地面一千英里處俯視地面得見地面幾平方里?



〔解〕 圖示截面 $OA=OD=OB=4000$ 英里 $PD=1000$ 英里. $\frown AB$ 表在 P 點所得見之地面,是一個球面帶形.其高爲 CD. $\because$ PA 是切線, $\therefore$ $\angle PAO$ 是直角.又 $AC\perp OP$. $\therefore$ $\overline{OA}^2=OC\cdot OP$ $\therefore$ $OC=\overline{OA}^2\div OP$ $=\overline{OA}^2\div(OD+DP)=4000^2\div(4000+1000)=\frac{16}{5}\times 1000$ $=3200$ 英里. $\therefore$ $CD=OD-OC=4000-3200$ $=800$ 英里. $\therefore$ 從公式 $T=2\pi RH=2\pi\cdot 4000\times 800$ $=6400000\pi=20,106,240$.

故得見地面 20,106,240 方英里.

(30) 一個球角錐體,他的底是一個正三角形,每角爲 80°. 球半徑長 10 寸. 求此錐體積.

〔解〕 先從公式 11, 求 $\triangle ABC$ 的面積.

$$T=\frac{\text{球面過剩}}{2\text{直角}}\times\pi R^2=\frac{3\times80^\circ-180^\circ}{180^\circ}\times\pi\cdot100.$$

$$=\frac{100}{3}\pi \text{ 方寸.}$$

再從公式 12. 求體積, $V=\frac{1}{3}BR=\frac{1}{3}\times\frac{100}{3}\pi\times10$

$$=\frac{1000}{9}\pi \text{ 立方寸.}$$

中華民國二十四年五月初版
中華民國二十四年九月改訂三版
中華民國二十六年五月改訂六版

高中複習叢書 幾何學一冊 (52272·9)

每冊實價國幣叁角伍分
外埠酌加運費匯費

編著者 榮方舟

發行人 王雲五 上海河南路

印刷所 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

(本書校對者 王養吾 徐培生)

周

二二四三上