# 函 數 論

克 諾 普 著
吳 大 任
陳 已 同 譯

商 務 印 書 館 發 行

# 函　數　論

K. Knopp 著
吳大任
陳己同 譯

中華教育文化基金董事會編譯委員會編輯
商務印書館發行

中華民國三十[illegible]初版
中華民國三十[illegible]月再版



函數論一册
Funktionentheorie

㊥(51502)

定價伍元伍角
印刷地點外另加運費

原著者 K. Knopp
譯述者 吳大任 陳已同
編輯者 中華教育文化基金董事會編譯委員會
發行人 夏鵬
印刷所 商務印書館上海河南中路印刷廠
發行所 商務印書館各地

# 目　　錄

## 第　一　卷

# 解析函數普遍理論的基礎

## 第　一　編

## 基　本　概　念



## 第　二　編

## 關於積分的定理

# 第 三 編

## 級數 解析函數之展爲級數

# 第 四 編

# 關 於 奇 點



# 第 二 卷



# 第 一 編

# 單 値 函 數

# 第 二 編

## 多 値 函 數

# 第 一 編

# 基 本 概 念

## 第一章 平面內之點組

### § 1. 點與數

我們假定讀者對於普通複數已經熟悉，能够作複數的運算，並且知道如何將全部複數與一個平面內的點，作一宗一一對應關係：就是說，我們先在平面上立一個直角坐標，然後令每一個複數 $z=x+iy$（$x$ 與 $y$ 都是實數）與平面上一點相對應，這一點的橫坐標等於 $z$ 的實部 $x$，縱坐標等於 $z$ 的虛部 $y$.❶ 這樣，每一數的確與唯一的一點相對應，反之，每一點也與唯一的一數相對應． 因此，我們用"點"與"數"兩名詞時，他們的意義，可以作爲完全相等，不怕發生誤會． 例如我們以後便可以說"點：$\sqrt{3}$"，或"兩數間的距離"或以 $z_1, z_2, z_3$ 爲頂點的三角形"等等．

若 $r$ 與 $\phi$ 是 $z$ 點的極坐標，則 $r$ 就稱爲 $z$ 的絕對値(absolut Betrag) $\phi$ 爲 $z$ 的角(*arcus*)，用符號表示： $|z|=r$, $\operatorname{arc} z=\phi$.

點與數旣如此相當，我們卽有以下簡單的事實，這些事實值得特別的列舉出來：

(a) 一個點 $z$ 與原點間的距離 $=|z|$；兩點 $z_1$, $z_2$, 間的距離 $=|z_1-z_2|=|z_2-z_1|$；並且以下的關係總是正確：

$$|z_1\pm z_2|\leqq|z_1|+|z_2|,\qquad |z_1\pm z_2|\geqq|z_1|-|z_2|.$$

(b) $|z|=1$ 表示以 $O$ 點爲中心而半徑等於 1 的圓周〔卽所謂么圓(**Einheitskreis**)〕，就是說一切具有 $|z|=1$ 的特性的數 $z$，是這圓周上的

---

❶ 用符號表示：$x=R(z)$, $y=I(z)=R\left(\frac{z}{i}\right)$. 我們有時也將 $iy$（不是 $y$ 自己）當作 $z$ 的虛部；但上下文總使誤會不至於發生．

點,反之亦然.

(c) 同樣,$|z-z_0|<r$ 代表以 $z_0$ 爲中心而半徑等於 $r$ 的圓面的點.但圓周(圓的邊界)不在內.

(d) 同樣,$|z+4i|\leqq 3$ 代表以 $-4i$ 爲中心而半徑等於 3 的圓面的點,圓的邊界在內.

(e) 同樣,$|z-z_1|>R$ 代表在以 $z_1$ 爲中心而半徑等於 $R$ 的圓之外的 $z$ 平面部分.

(f) 同樣,$R(z)>0$ 代表"右"半平面,就是說,有了直角坐標之後,在虛軸右方的 $z$ 平面部分,但邊界不在內.

(g) 同樣,$0<r<|z-z_0|<R$ 代表一個圓環的內部,這圓環的邊界是以 $z_0$ 爲中心而半徑等於 $r$ 與 $R$ 的兩個圓.

(h) 若 $\zeta$ 之值爲固定的,而 $z'$ 爲祇受 $|z'|<\varepsilon$ 的限制的任意一點,則如(c)條,$\zeta+z'$ 代表以 $\zeta$ 爲心,而半徑等於 $\varepsilon$ 的圓面;因爲我們若令 $\zeta+z'=z$,卽得

$$|z'|=|z-\zeta|<\varepsilon.$$

我們或者簡單的說 $\zeta+z'$ 代表點 $\zeta$ 的"一個鄰域"(*Umqebung*).

一個圓的外部(參看 e 條)我們也可以稱之爲"無窮遠點(*Unendliche* 的鄰域". 因爲從以下的討論,我們卽可相信"無窮遠點"確可作爲一個點,作爲"$z=\infty$ 點":

令

$$z'=\frac{1}{z} \qquad \text{或} \qquad z=\frac{1}{z'}$$

則在么圓外的每一點 $z$(就是說,具有 $|z|>1$ 的特性的每一點 $z$)顯然相當於此圓內唯一的一點 $z'$,因爲若 $|z|>1$ 卽得 $|z'|=\dfrac{1}{|z|}<1$. 反之,在么圓內的每一點 $z'$,也相當於圓外唯一的一點 $z$. 祇有圓內的 $z'=0$ 點沒有圓外的 $z$ 點與他相當. 但是因爲一切與 0 點很近的 $z'$ 點相當於很遠的 $z$ 點,❶ 並且凡 $z'$ 點若趨近 0 點,則與他相當的 $z$ 點便趨向無窮遠,所以我們可以說,$z'=0$ 點與 $z=\infty$ 點,彼此相當. ——這祇能看作純粹爲方便起見所設的一種假定,但在函數論裏,這假定給我們的便利很

❶ 因爲當 $|z'|$ 很小的時候,$|z|=1:|z'|$ 就很大.

多.❶

但是除事先聲明者外，我們暫時總不用字母 $z$ 來代表 $\infty$ 點.

習題：以下各式所代表之軌迹爲何？

(α) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=1$,　(β) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=2$,　(γ) $\left|\frac{z}{z+1}\right|=a(>0)$,

(δ) $R(z^2)=\cdot$,　(ε) $I(z^2)=4$,　(ξ) $|z^2-1|=a(>0)$

若將以上各式中的等號換作 $<,>,\leqq$ 或 $\geqq$ 號，則他們所代表的區域又爲何？

## § 2. 點組與數組

我們若按照任意一個標準，在全部複數內選出有盡多個或無盡多個數，這些數就構成一個數組(*Zahlenmenge*)，其相當的點，就構成一個點組(*Punktmenge*). "點組"與"數組"兩名詞的意義，我們也可以看作完全相同. 若如此一組 $M$ 的定義(那特殊的標準)有如下的性質則我們認爲 $M$ 是已知或已經確定；這性質是：每一點 $z$ 祇能或屬於 $M$ 或不屬於 $M$.

以下是這種組的簡單的例：

$M_1$：一切的數 $z=x+iy$，其中 $x, y$ 爲整數. 根據明顯的原因，我們稱這組的點爲平面上的網點(*Gitterpunkt*)。

$M_2$：全部實數.

$M_3$：一切的數 $\frac{1}{n}$, $n=1,2,3\cdots\cdots$，就是說，$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\cdots$諸數.

$M_4$：一切的數 $1\pm\frac{1}{n}$, $n=1,2,3,\cdots\cdots$.

$M_5$：一切的數 $\frac{1+i}{n}$, $n=1,2,3,\cdots\cdots$.

$M_6$：一切的數 $z=\frac{1}{m}+\frac{i}{n}$ 其中 $m$ 與 $n$ 爲任何正整數.

$M_7$：全部的數 $z=x+iy$，其中 $x$ 與 $y$ 爲有理數，同時 $1\leqq|z|\leqq2$(這些數是在一個圓環內)

$M_8$ 至 $M_{12}$：§1, (b) 至 (f) 諸關係所確定的點組，等等.

若一組中的數〔組的"元"(*Element*)〕可以按次序排列，就是說，若他們可以排成第一個，第二個，……，第 $n$ 個，……，或可以用 $z_1, z_2, \cdots\cdots z_n, \cdots\cdots$來表示，使每一個元有一個固定的位置，則我們稱此組爲可枚舉

❶ 爲幫助我們明瞭起見，我們可以想像這平面在無窮遠處是閉合的. 我們在一個平面上放一個球面，使他們的切點在 0 點（南極）上. 然後把平面圍着球面彎過來，使平面上所有的很遠的點都聚在球的北極附近〔球極投影(Stereographishe Abbildung)〕. 從平面上 0 點出發的半線於是變成球面上的緯線，平面在『無窮遠處』成爲閉合的，球面上的北極（在球面上，這簡直是一個實在的點）就是平面上的『無窮遠點（點 $\infty$）』的代表.——當我們這樣用一個球面上的點代表複數時，我們就稱這球面爲(複)數球面(Zahlenkugel)

的（*Abzählbar*）.

$M_3, M_5$ 兩組顯然是可枚舉的；$M_4$ 亦然，我們祇要把他的數，按以下的次序排列．就可以看出來．

$$0,\ 2,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ \cdots\cdots,\ 1-\frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n},\ \cdots\cdots,$$

$M_1$ 也是可枚舉的，這可以說明如下： 我們畫一套的正方形，每個以 0 點爲中心，四邊兩兩平行於兩軸，其邊長則依序爲 2, 4, 6, 8 等． 現在我們就可以把一切的網點排列起來：以 0 爲起點，先排最近於 0 點的正方形四邊上的點，然後由內至外，把一個個正方形四邊上的點排下去．每一正方形上的點，排列方法不一，例如我們可以從那上面的正實數起，沿着正向（就是與鐘針轉動的方向相反）排下去． 這樣所得的網點的敍列，開始幾項如下：

$$0,\ 1,\ 1+i,\ i,\ -1+i,\ -1,\ -1-i,\ -i,\ 1-i,\ 2,\ 2+i,\ 2+2i,\ \cdots$$

如此則每一個網點在敍列中有一個完全固定的位置． 同樣，我們可以證明 $M_6$ 是可枚舉的．

全部（不可約的）命分實數 $\frac{p}{q}$ 也是可枚舉的，因爲我們總可以假定分數 $\frac{p}{q}$ 的分母是正數，再令這數與網點 $p+qi$ 相對應這結果初看時，似乎有矛盾，因爲全部分數是不能按大小排列的，而且在任何兩個命分實數之間，總還可以加入任何多個別的命分數．

反之，全部在一段曲線或在一片曲面內的數所構成的組是不可枚舉的． 這事實的證明我們在此處祇能從略。 但從此可知 $M_2$ 與自 $M_8$ 至 $M_{12}$ 諸組皆不可枚舉．

在繼續討論這問題之前，我們還須把一個關於實數的基本事實，在下節內解釋明白。

**習題：** $M_6, M_7$ 爲可枚舉的． 試將他們各用一種方法排列起來（就是說，把組內所有的數排列成第一個第二個，……）．

## § 3. 實數的綿續性公理

關於實數的理論，我們假設讀者也已熟悉． 但是我們要在其中舉出一個定理；因爲這定理對於以後的討論，有基本的重要性． 這定理可以當作實數論一個最初的公理（這樣他就無須證明的），也可以當作從別的（但涵義相同的）公理推出來的一個定理，這都視各人的觀點而異． 無論如何，在實數論裏的這個定理，總是相當於在幾何裏的直線的綿續性，所以我們或稱之爲實數的綿續性公理（Stetigkeitsaxiom）或稱之爲實數的綿續性定理（Stetigkeitssatz）或完全性定理（Vollständigkeitssatz）．

設全部的實數（在一條直線上全部的點），依照任意一個標準分爲適合以下諸條件的 $A$, $B$ 二股．

1. 兩股確皆含有實數．
2. 每一實數或屬於 $A$ 或屬於 $B$．

3. A股中的每一數 $a$ 小於 $B$ 股中的每一數 $b$.

例如令一切適合條件 $a^3 \leqq 4$ 的實數 $a$ 屬於 $A$,而一切適合條件 $b^3 > 4$ 的實數 $b$ 屬於 $B$,即得一個具以上特性的分股.

這種分一切實數爲兩股的實例,我們以後常常遇到.

從以上三個假定,立刻可以推得以下的結果:若 $a$ 屬於 $A$ 而 $a' < a$,則 $a'$ 亦屬於 $A$;同樣,若 $b$ 屬於 $B$ 而 $b' > b$,則 $b'$ 亦屬於 $B$.

以上所述的全部實數的分股,習慣上亦稱爲實數統(Bereich)的**迭氏分割**(**Dedikindscher Schnitt**).關於這種迭氏分割有以下的一個基本的

**定理**: 實數統中每一個迭氏分割確定唯一的一個實數 $s$〔"割數"(Schnittzahl)〕,此實數 $s$ 具有以下的性質:每數 $a \leqq s$,每數 $b \geqq s$.

由我們直覺的看來,這定理就是說:若我們想像一直條上所有的點,都染上白色($A$股)或藍色($B$股),並且是如此染法:(1)兩種顏色的點的確都存在,(2)每一點都染上顏色,(3)每一白點都在每一藍點之左,則兩色必在一個一定的處所相遇,而這處所的左方都是白的,右方都是藍的.我們這定理的要點,就是說在那個處所,的確有一點在,或者說,這處所可以用一個在實數統內的數來代表.

割數 $s$ 本身可屬於 $A$ 亦可屬於 $B$,視分股的標準而定;但在 $s$ 下的每數必屬於 $A$,在 $s$ 上的每數必屬於 $B$.

從這個定理,我們還要推出另一個定理.就內容說,後一個定理與前一個定理根本上並無差別,但在應用時,後者常常比較方便.

設有一敍列的節(Intervall)$J_1, J_2, \cdots\cdots, J_n, \cdots\cdots$,每一個都含在他前面一個之內(就是說:每一個都含所有在他以後的)並設這些 $J$ 的長 $l_1, l_2, \cdots\cdots l_n, \cdots\cdots$ 隨着 $n$ 的增加而減小,終於小於無論多小的已給正數,[1] 我們稱如此的一個敍列的節爲一個節套[2](*Intervallschachtelung*),關於節套,有

**套定理**(**Einschachtelungssatz**): 已給一個節套,則恆有一點而且祇有一點,屬於此節套中所有的節.[3]

證: 最先我們很容易看出來,不能有兩個不同的點 $s$ 與 $s'$,都屬於

[1] 簡單的說:節長 $l_n$ 趨於0.

[2] 因缺乏較好譯名,暫稱節套——譯者.

[3] 關於這一點,我們說他是被節套所確定;節套中的節,逐漸縮到這一點——節的兩端,作爲也屬於節.

所有的節；因爲否則所有的節的長，至小必等於 $s$ 與 $s'$ 間的正距離，但同時 $l_n$ 又必須隨着 $n$ 的增加而終於減小到比任何小的已給正數還小.

其次，假若 $a_n$ 與 $b_n$ 爲 $J_n$ 的左端與右端，則從假設得

$$a_n \leqq a_{n+1} < b_{n+1} \leqq b_n, \qquad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

我們現在分全部實數爲如下的二股:

A:　所有的節的左端 $a_n$，及每個在某一個 $a_n$ 左方的點.

B:　一切其餘的點（特殊的，所有的節的右端 $b_n$ 都屬於此股）.

我們可以立刻看出，這樣的分股，適合迭氏分割的三個條件. 若 $s$ 爲此分割所確定的割數，則關係 $a_n \leqq s \leqq b_n$ 總是正確的，就是說，$s$ 的確屬於節套中所有的節.

## § 4.　直線上的點組. 點組的上界與下界.

現在回到組的普通的討論，我們先更仔細的考察點組 $M$ 所有的點都在一條直線上的特款. 爲簡單起見，我們選實軸爲那條直線；如此則一切屬於 M 的元都是實數——反之亦然.

$M_2$, $M_3$, $M_4$, 皆爲如是的"實點組" (Reelle Punktmenge).

設 M 爲任意一個實點組. 若我們能在實軸上找到一個有限長的節，例如從 $-G$ 至 $+G (G>0)$，使一切屬於 $M$ 的點都含在這節內，換言之，使組中每個元 $x$ 皆適合

$$-G \leqq x \leqq +G \qquad \text{或} \qquad |x| \leqq G,$$

則我們稱此組爲有欄的(*Beschränkt*). 例如 $M_3$ 與 $M_4$ 都是有欄組，而 $M_2$ 顯然是無欄的. 有些點組，祇在某一方有欄；例如全部正整數所成的組，祇在左方（下方）有欄，全部負數所成的組，祇在右方（上方）有欄. 他們在其他一方都是無欄的.

每一個數，若不小於組中任何的數，稱爲上欄 (*Obere Schranke*)，若不大於組中任何的數，則稱爲下欄(*Untere Schranke*). 一個上欄顯然可以用任何一個比他大的來代替，而一個下欄可以用任何一個比他小的來代替.

由此可以證明，對於有下欄的一組，必有一數 $\alpha$ 在，具有下列二條件:

**1.**　$\alpha$ 的左方，不復有組內的數，或者說，設 $x$ 代表組內任意一點，則沒有一個 $x<\alpha$.

2. 至少有一個 $x<a+\varepsilon$, 其中 $\varepsilon$ 爲任意小的正數, 或者說, $a$ 本身還是一個下欄, 但比他大的任意一數即不復爲下欄; 也可以說, $a$ 是一切下欄中之最大者.

$a$ 稱爲點組 $M$ 的"下界"(Die Untere Grenze). 現在我們有

**定理 1:** 每一個有下欄的組有一個一定的下界 $a$.

對於點組 $M_4$, $a=0$; 對於點組 $M_3$ 也是 $a=0$, 因爲沒有一個 $\frac{1}{n}$ ($n=1, 2, \cdots\cdots$) 是 $<0$, 但無論我們選正數之如何的小, 至少有一個 $\frac{1}{n}$ (其實有無盡多個) $<0+\varepsilon$. ——最後的一例, 同時指出一個組的下界, 不必屬於本組.

證明下界 $a$ 的存在: 我們依下法分一切實數爲 $A, B$ 二股.

若 $a$ 爲一實數而組中沒有一個 $x\leqq a$, 則令 $a$ 屬於 $A$。反之, 若 $b$ 爲一實數而至少有一個 $x\leqq b$, 則令 $b$ 屬於 B.

這分股法已適合條件(1), §3; 因爲這組 $M$ 是有下欄的. 其次, 從 $A, B$ 的定義, 這分股法又適合條件(2). 最後, $b\leqq a$ 的關係永不可能; 因爲至少有一個 $x\leqq b$, 這樣的 $x$ 也將 $\leqq a$, 與 $A$ 股的定義衝突.

從這分割按 §3 所得的割數 $a$, 照本節的定義, 恰爲點組 $M$ 的下界. 因爲假使有一個 $x<a$, 則 $x$ 也將小於介乎 $x$ 與 $a$ 間的任何一數. 這個數既 $<a$, 便是屬於 $A$ 的一數 $a$. 但一個 $x<a$ 是不可能的.

在另一方面, 對於任意一個 $\varepsilon>0$, $a+\varepsilon$ 恆屬於 $B$, 故至少有一個 $x<a+\varepsilon$. 我們的證明於是完成.

同樣一組的"上界"(die obere Grenze), 爲具以下兩性質的數 $\beta$.

1. 沒有一個 $x>\beta$.
2. 無論我們選 $\varepsilon$ 如何小, 至少有一個 $x>\beta-\varepsilon$, ——我們證明:

**定理 2:** 每一個有上欄的組有一個一定的上界 $\beta$。

於是一個有上下欄的組, 有一個一定的上界與一個一定的下界.

【附註】 在此節的證明中, 我們特別要嚴格的區別"$<$"與"$\leqq$"及"$>$"與"$\geqq$".

## § 5. 凝聚點. 上限與下限. 限.

若 $\xi$ 爲任意一實數, $\epsilon$ 爲任意一個(小的)正量, 則節 $\xi-\varepsilon\cdots\cdots\xi+\varepsilon$ 稱爲 $\xi$ 點之鄰域(參看 §1, $h$). 我們立以下的定義:

"一點 $\xi$ 稱爲一個點組的凝聚點 (Häufungspunkt), 若在 $\xi$ 的任意一個(無論多小的)鄰域內, 仍有無盡多個屬於該組的點" 於此, $\xi$ 本身不必屬於此組. 組 $M_3$ 的一個凝聚點爲 0, $M_4$ 的一個凝聚點爲 1. 我們

有下面重要的

**播外二氏定理 (Bolzano-Weierstrass sche satz)：** 每一個有欄的無盡點組（卽無盡多個點所構成的）至少有一個凝聚點。

證： 我們再將全部實數分爲二股.

若 $a$ 的左方並無屬於組的點，或最多祇有有盡多個屬於組的點，亦卽，若最多有有盡多個 $x<a$，則令 $a$ 屬於 $A$ 股.

若 $b$ 的左方有無盡多個屬於組的點，亦卽，若有無盡多個 $x<b$，則令 $b$ 屬於 $B$ 股。

我們立刻可以看出，這個分股法適合 §3 內條件(1)至(3)，故確定一個割數 $\lambda$. 但照上面所說，則 $\lambda-\varepsilon$ 屬於 A，而在 $\lambda-\varepsilon$ 的左方，最多祇有有盡多個屬於組的點 $x$. 在另一方面 $\lambda+\varepsilon$ 屬於 $B$，而在 $\lambda+\varepsilon$ 的左方有無盡多個屬於組的點 $x$. 故在 $\lambda-\varepsilon$ 與 $\lambda+\varepsilon$ 之間，必有無盡多個 $x$，就是說，$\lambda$ 是組 M 的一個凝聚點，於是凝聚點的存在已經證明.

因爲在 $\lambda-\varepsilon$ 的左方祇有有盡多個 $x$，所以在那裏一定不再有凝聚點，於是簡直在 $\lambda$ 的左方都不會再有凝聚點，那就是說，$\lambda$ 是組的左方最遠的（最小的）凝聚點，因此 $\lambda$ 稱爲凝聚點的下界 (*Untere Häufungogrenze*). 或簡稱之爲**下限**(Unterer Limes 或 Limes inferior 簡寫爲 lim inf 或 $\underline{\lim}$).

完全同樣的，我們可以證明，組 $M$ 有一個右方最遠的（最大的）凝聚點 $\mu$，這一點 $\mu$ 稱爲組的**上限**(Oberer Limes 或 Limes superior；簡寫爲：lim sup 或 $\overline{\lim}$). 這上限可以用以下兩條件確定：

在 $\mu+\varepsilon$ 的右方最多祇有有盡多個 $x$.

在 $\mu-\varepsilon$ 的右方有無盡多個 $x$.

很明顯的 $\lambda\leqq\mu$. $\lambda$ 與 $\mu$ 本身也不必爲組中之元. 他們合稱爲組 $M$ 的**主限**(*Hauptlimites*).

對於組 $M_1$，$\lambda=\mu=1$；對於組 $M_2$，$\lambda=\mu=0$，對於全部正的眞分數所成的組，$\lambda=0$，$\mu=1$.

若一組無下欄，我們有時也說，他的下限 $\lambda=-\infty$（並且他的下界 $a$ 也 $=-\infty$）； 同樣，若一組無上欄，我們說 $\beta=M=+\infty$。

若 $\lambda=\mu$（當然皆 $\neq\pm\infty$），則簡稱此點爲點組的**限**(**Limes**)（簡寫作 lim). 此時這點就是組中唯一的凝聚點，我們用 $l$ 來代表他。 一組的限可用以下的特性來確定：在 $l-\varepsilon$ 的左方與在 $l+\varepsilon$ 的右方，至多有有

盡多個 $x$, 而在二者之間有無盡多個 $x$.

以上諸定義與定理, 對於直線上任意一個點組, 都可適用. 特殊的, 他自然也適用於可枚舉的組. 在此特款, 我們將其中的點排成一個任意的（但一經排好, 便是固定的）排列 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n\cdots\cdots$,〔這樣的排定之後, 我們稱 $M$ 爲點敍列 (*Punktfolge*) 或數敍列 (*Zahlenfolge*); 點敍列或數敍列中. 同一個數可以出現多次, 甚至於無盡多次❶〕. 對於點敍列. 以上的定義, 成爲下狀:

下（上）界: $\alpha(\beta)$. 設有一個指數 $n$, 使 $x_n$ 適合條件

$$x_n < \alpha\ (>\beta);$$

而對於任意一個 $\varepsilon>0$, 至少有一個指數 $n$, 使 $x_n$ 適合條件

$$x_n < \alpha+\varepsilon\ (>\beta-\varepsilon)$$

$\underline{\lim}(\overline{\lim})$: 對於任意選定的一個 $\varepsilon>0$, 從某一個固定的, 但與 $\varepsilon$ 有關的 $n$ 起, ❷ 所有的

$$x_n > \lambda-\varepsilon(<\mu+\varepsilon);$$

而且有無盡多個指數 $n$（或者: 如按次序考察下去, 總還有指數 $n$）使

$$x_n < \lambda+\varepsilon(>\mu-\varepsilon),$$

lim: 從某一個指數 $n$ 起, $x_n$ 適合條件

$$l-\varepsilon < x_n < l+\varepsilon.$$

最後三款, 我們寫作

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n=\lambda, \qquad \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n=\mu, \qquad \lim_{n\to\infty} x_n=l.$$

〔讀如: 當 $n$ 趨於 $\infty$ 時, $x_n$ 的（下）,（上）, 限等於……〕. 最後一款, 我們也可縮寫如下:

$$x_n\to l\ (\text{讀如 } x_n \text{ 趨於 } l).$$

必要時更明白的說出, 當 $n\to\infty$ 時 $x_n\to l$. 這樣寫法, 用來特別方便. 於是我們說, 數敍列 $x_n$ 向 $l$ 收斂或趨於限値 $l$.

最後而又最重要的一款, 還可以用許多別的方法來說明, 若 $\varepsilon$ 已隨意

---

❶ 一個點（或數）敍列可以祇含有盡多個不同的點（或數）—— 譯者.

❷ 簡單的說: 對於所有適合條件 $n\geqq n_0$ 的 $n$, 爲清楚起見, 我們也可以明白的表示 $n_0$ 與所選的 $\varepsilon$ 有關係, 而將這條件寫作 $n\geqq n_0=n_0(\varepsilon)$. 此外, 因爲我們總可以用每個比 $n_0$ 大的數代替 $n_0$, 我們也可以用條件 $n>n_0$ 來代替 $n\geqq n_0$ 而條件內的函義沒有因此變更.

選定、則對於所有適合條件 $n \geqq n_1(\varepsilon)$ 的 $n$, 以下的關係成立:

$$l-\frac{1}{2}\varepsilon<x_n<l+\frac{1}{2}\varepsilon,$$

或

$$-l-\frac{1}{2}\varepsilon<-x_n<-l+\frac{1}{2}\varepsilon,$$

故對於所有適合 $p \geqq 0$ 的 $p$, 及所有適合 $n \geqq n_1(\varepsilon)$ 的 $n$,

$$l-\frac{1}{2}\varepsilon<x_{n+p}<l+\frac{1}{2}\varepsilon.$$

最後,將兩式相加,卽得以下關係:

$$-\varepsilon<x_{n+p}-x_n<+\varepsilon$$

或更簡單些

$$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon,$$

就是說, 隨意選定 $\varepsilon>0$ 後,一切的 $x_n$ 點, 其指數大於某一個特殊的數 $n_1(\varepsilon)$者,彼此間的距離,最大不過 $\varepsilon$.

對於限値的存在,這條件不但是必要,而且是充分. 就是說,我們有以下的

**定理 2:** 數敍列 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 有限値(或說, 對於這數敍列, 其當然存在的兩數 $\lambda$ 與 $\mu$ 相等)的充要條件是:選定 $\varepsilon>0$ 後,必有一數 $n_1=n_1(\varepsilon)$, 使對於所有適合 $n \geqq n_1$ 的 $n$ 及所有適合 $p \geqq o$ 的 $p$,以下關係成立:

(1) $$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$$

我們祇須更證這條件是充分的

先從(1), 知一切點 $x$ 所構成的組爲有欄的, 次選 $\varepsilon=1$, 由題設得一個相當於此 $\varepsilon$ 的 $n_1$, 使凡 $n>n_1$ 時.

$$|x_n-x_{n_1}|<1$$

於是

$$|x_n|<|x_{n_1}|+1.$$

故諸數 $|x_1|, |x_2|, \cdots\cdots |x_{n_1-1}|, |x_{n_1}|+1$ 中的最大者,卽是此組的一個欄.

因此,由前一個定理,我們知道凝聚點 $\lambda$ 與 $\mu$ 的存在. 但此時 $\lambda$ 必等於 $\mu$, 因爲若 $\lambda<\mu$, 我們就可以選 $\varepsilon=\frac{1}{3}(\mu-\lambda)$. 從 $\lambda$ 與 $\mu$ 的定義我

們知道大於每一個 $n_1$, 還有一個指數 $n$, 使

$$x_n<\lambda+\varepsilon \qquad 或 \qquad -x_n>-\lambda-\varepsilon$$

並且大於 $n$, 又還有一個指數 $n+p$, 使

$$x_{n+p}>\mu-\varepsilon$$

這兩點 $n_n$ 與 $x_{n+p}$ 將適合以下的條件

$$x_{n+p}-x_n>\mu-\lambda-2\varepsilon=\varepsilon,$$

與假設(1)相衝突,故必須 $\lambda=\mu$, 那就是說

$$\lim_{n\to\infty} x_n=l$$

是存在的.

本節所討論的.都屬於實數論或實數組論　所以我們可以假設讀者對於他們,大致已經熟悉,因此我們的說明,也就很簡略.

習題 1: 試求以下各組的 $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ 諸數之值(如 $l$ 存在,則更求 $l$ 之值)及其所有的凝聚點.

$\alpha$) $1+(-1)^n+\frac{(-1)^n}{n}$　　$n=1,2,3,\cdots\cdots$.

$\beta$) $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$　　$\begin{cases} m=1,2,3,\cdots\cdots \\ n=1,2,3,\cdots\cdots \end{cases}$

(參看 § 2, $M_6$)

$\gamma$) 一切具以下性質的數所成的組:　當這數寫成小數時,第一位是"0"以後各位不是 2 便是 3.

對於以上各組,其 $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ 諸數及其凝聚點,何者屬於組,何者不屬於組.

習題 2: 試證對於習題 1, $\gamma$, 內之組,組中每一點皆同時爲該組的凝聚點.

習題 3: 若 $\alpha$(或 $\beta$)不屬於組,則必定是

$$\lambda=\alpha \quad (或\ \mu=\beta).$$

## § 6.　平面內的點組.

在 §2 內的 $M_1$ 與 $M_6$ 至 $M_{12}$ 各組的點, 是不在一條直線上的, 我們簡稱之爲"平面點組"相當於這些點的數並不全是實數　在平面點組中,我們也分別有欄組及無欄組.　其定義如下:

若組中所有的點,能被一個有限大的,閉合的圖形(例如一圓)所包含,則此組稱爲有欄的.　故若有一數 $G$ 在使組中所有的 $z$ 點適合

$$|z|<G,$$

則此組有欄.　反之, 若在任何一個以 0 爲中心的(無論多大的)圓之

外，總還有組 $M$ 的點，則 $M$ 稱爲無欄的.

因實數點組祇是平面點組的一種特款，故現在的定義必須與以前的相符. 讀者試比較兩者，卽知此言不謬.

"上(下)界"及"上(下)限"($\overline{lim}$ 與 $\underline{lim}$)的概念，在此已失其意義，因這些概念的成立，根本基於右與左的分別——我們現在立以下的定義：

$\zeta$ 稱爲組 $M$ 的凝聚點若在 $\zeta$ 點的任何一個鄰域(參考 §1, $h$)內，總還有無盡多個屬於組 $M$ 的點，也就是說，若已給任意小的一個 $\varepsilon>0$，仍有無盡多個屬於 $M$ 的點 $z$，適合

$$|z-\zeta|<\varepsilon.$$

例： $M_1$ 是無欄的，並且也無凝聚點.

$M_6$ 是有欄的，在實軸上的 $\frac{1}{m}$ $(m=1,2,\cdots\cdots)$ 諸點，在虛軸上的 $\frac{i}{n}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ 諸點，及 0 點皆爲 $M_6$ 的凝聚點.

$M_7$ 是有欄的，每一個適合 $1\leqq|\zeta|\leqq2$ 的 $\zeta$ 點，爲組的凝聚點.

對於無欄組 $M_{12}$，$\zeta=i$ 爲凝聚點.

我們在平面裏也有

**播外氏二定理：** 每一個有欄的無盡(卽無盡多個點所構成的)點組至少有一個凝聚點❶

證： 我們用一個四邊平行於兩軸的正方形 $Q_1$ 把這整個的無盡點組包含在內，再用兩條平行於邊的線，將 $Q_1$ 分成四個全等的正方形. 在這四個新的正方形中，至少有一個也包含無盡多個屬於組中的點. 這樣的一個正方形，稱之爲 $Q_2$ ❷ 把同樣的方法用於 $Q_2$ 我們卽得一個爲 $Q_2$ 的四分之一的正方形 $Q_3$，$Q_3$ 也包含無盡多個屬於組的點，餘類推.

這些正方形 $Q_n$ 在 $x$ 軸及 $y$ 軸上的投影，顯然各成一個節套. 設這兩節套所定的兩點，一有橫坐標 $\xi$，一有縱坐標 $\eta$，則 $\zeta=\xi+i\eta$ 點屬於所有的 $Q_n$.

$Q_n$ 的對角線 $d_n$ 也隨着他的邊趨於 0， 故若已給 $\varepsilon>0$，則對於一個

❶ 若這組是無欄的，則在每一個無論多大的圓之外，仍有屬於此組的點，於是在點 $\infty$ 的每一個鄰域中，仍有無盡多個點屬於此組. 在此情形，我們也就稱點 $\infty$ 爲這組的凝聚點. 若我們把凝聚點的涵義如此推廣，則播外二氏定理對於任何一個無盡點組都是正確的，不僅限於有欄的而已.

❷ 若這種正方形不止一個，則我們可以把四個正方形照通常的方法，排成一個次序而取其中有這種性質的第一個爲 $Q_2$ —— 每個正方形的四邊，也算是屬於正方形.

充分大的指數 $m$，必然的 $d_m<\varepsilon$，於是整個正方形 $Q_m$ 及他所包含的無盡多個屬於 $M$ 的點，都含在 $\zeta$ 的鄰域 $|z-\zeta|<\varepsilon$ 之內，就是說 $\zeta$ 是 $M$ 組的一個凝聚點．於是 $M$ 組的凝聚點之存在已經證明．

若 $M$ 組為可枚舉的，並且若 $z_1, z_2, \cdots, z_n \cdots$ 是 $M$ 的點的任意一個（可是排好之後，便作為固定的）次序，則我們稱之為點敍列或數敍列．和在實數的款一樣，在一個敍列內，同一個數可以出現多次甚至於無盡多次，對於這種數敍列，我們可將剛才所得的最後的結果，解釋如下：若數敍列 $z_1, z_2, \cdots$ 為有欄的，則至少有一數 $\zeta$，具以下性質：當無論多小的 $\varepsilon>0$ 已經給定，總有無盡多個 $n$，使

(3) $$|z_n-\zeta|<\varepsilon.$$

這樣的一數 $\zeta$，稱為此數敍列的一個凝聚值．

最值得注意的是以下的一款，即 $\zeta$ 為數敍列 $z_1, z_2, \cdots\cdots, z_n, \cdots\cdots$ 的唯一的凝敍值之時，此時對於一切充分大的 $n$（對於一切適合 $n>n_0=n_0(\varepsilon)$ 的 $n$），關係(3)成立，$\zeta$ 即稱為該數列的"限"寫如

$$\lim_{n\to\infty} z_n=\zeta.$$

讀如：數敍列 $z_1, z_2, \cdots\cdots, z_n, \cdots\cdots$ 向限值 $\zeta$ 收斂．

用與 §5 中相同的方法，可以證明以下的

**定理 2:** 數敍列 $z_1, z_2, \cdots, z_n \cdots$ 有限值的充要條件為：已給任意一個 $\varepsilon<0$ 之後必有一數 $n_0=n_0(\varepsilon)$，使對於所有適合 $n>n_0(\varepsilon)$ 的 $n$ 與所有適合 $p\geqq 0$ 的 $p$，以下關係成立．

(4) $$|\mathbf{Z}_{n+p}-\mathbf{Z}_n|<\varepsilon$$

〔**普遍的科摩收斂原則** (Allgemeines Cauchysches Konvergenz-prinzip)〕．

**證：** 若 $\lim z_n=\zeta$ 存在，則對於一切適合 $n>n_1(\varepsilon)$ 的 $n$，有以下的關係

$$|z_n-\zeta|<\frac{1}{2}\varepsilon$$

故關於一切適合 $n>n_1$ 的 $n$ 及一切適合 $p\geqq 0$ 的 $p$，有以下的關係

$$\begin{aligned}|z_{n+p}-z_n| &= |(z_{n+p}-\zeta)-(z_n-\zeta)| \\ &\leqq |z_{n+p}-\zeta|+|z_n-\zeta|<\varepsilon;\end{aligned}$$

所以(4)為必要條件．在另一方面，由(4)可推得所與數敍列是有欄的，

其證明與 § 5 中的完全相同． 故至少有一個凝聚值．但從關係（4），可知此數敍列不能有兩個不同的凝聚值．

關於收斂的複數敍列及無盡級數的運算，形式上與實數的完全相同，我們假定讀者已經知道，這裏一概從略．❶

爲使讀者比較容易明瞭起見我們立以下各定義：

1. 若 $z$ 爲一個屬於 $M$ 的點，又若此點有一個鄰域其中不再有其他屬於 $M$ 的點，則 $z$ 稱爲 $M$ 組的一個"孤立點"（*isolierler punkt*）．

$M_1$ 及 $M_3$ 至 $M_6$ 諸組，都祇含有孤立點；$M_2$ 與 § 2 中其他諸組皆無孤立點．

2. 若一個（屬於 $M$ 的）點有一個鄰域其中都是屬於 $M$ 的點，則此點稱爲 $M$ 的一個"內點"（innerer Punkt）．

$M_9$ 至 $M_{12}$ 諸組有內點，其他各組皆無． 又 $M_9$，$M_{11}$，$M_{12}$ 三組，都祇有內點❷

3. 若在一個 $z$ 點或（屬於 $M$ 或不屬於 $M$）的每個鄰域內，至少有一個點是屬於 $M$ 的，也至少有一個點是不屬於 $M$ 的，則 $Z$ 稱爲 $M$ 的一個"界點"（*Randpunkt*）．

對於 $M_8$ 與 $M_9$，圓周上的點都是組的界點，$M_1$ $M_2$，$M_8$，諸組祇含有界點，適合 $|z|>0$ 的 $z$ 點所構成的組，祇有一個界點 $\zeta=0$．

4. 若一個組的凝聚點都屬於組則此組稱爲"閉組"（*abgeschlosse Menge*）

$M_1$，$M_2$，$M_8$ $M_{10}$ 是閉組

5. 一個組中每兩點間的距離的上限，稱爲此組的直徑．

我們很容易就可以驗證出來以下二定理是正確的：

**定理 4：** 一個組的每個不屬於組的凝聚點是該組的一個界點而且每個不屬於組的界點是該組的一個凝聚點．

**定理 5：** 一個組的全部的界點本身構成一個閉組．

完全與在直線上一樣在平面內也有

**套定理：** 設 $G_1$，$G_2$，……$G_n$，……爲一個敍列其中每個 $G_n$ 爲完全

❶ 欲得一個詳細的解說可以參考 K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen，第二版，Berlin．或英文譯本 Theory and application of infinite series，1928．

❷ 這最後的一個事實，常使初學者詫異． 我們可以明確的解釋如下：例如對於 $|z|<1$ 的一組，以他每一點爲中心，可以畫一個圓而此圓仍完全在組內． 所以沒有一點會這樣的"緊靠着邊"使我們不能再畫一個鄰域，把他從邊隔開．

任意的閉點組❶但每組皆整個被他前面的一組所包含（就是說：凡屬於 $G_{n+1}$ 的點也屬於 $G_n$），又設在諸組中，至少有一組是有欄的，而諸組的直徑，隨着 $n$ 的增加而趨於 0，則必有一點而且祇有一點 $\zeta$，屬於所有的 $G_n$。

如此的"域套"（Gebietsschachtelung）的一例，在播外二氏定理的證明中已遇到過。

證：和在節套的款一樣我們可以察驗出來，不能有兩個不同的點，都屬於所有的 $G_n$。我們在每一個 $G_n$ 內，取一點 $Z_n$，則 $Z_n$ 所構成的組有一個凝聚點 $\zeta$。這一點 $\zeta$ 屬於所有的 $G_n$；因爲那整個屬於 $G_p$ 的敍列 $Z_p, Z_{p+1}, \cdots\cdots$ 也以 $\zeta$ 爲一個凝聚值，而 $G_p$ 是閉合的，故 $\zeta$ 屬於 $G_p$。

比較深入而對於此後的討論有重大意義的，是基於以下事實的一個定理：設已給一個有欄的閉組 $M$，並且對於屬於 $M$ 的每一點 $Z$，已給一個圓 $K_z$，$K_z$ 的中心在 $Z$，他的半徑等於某個任意小的正量；於是有一組有盡多個或無盡多個圓，使 $M$ 的每一點，至少被其中的一個圓所"掩蓋"或者說，含在其中一個圓之內部。在這種情形下，我們可以證明以下的。

**海波二氏定理**（Heine-Borelsche Theorem）：若一閉的有欄組 $M$ 中的每一點 $Z$，都是一個圓 $K_z$ 的中心，則在這許多圓中，必有**有盡多個**已經將此 $M$ 組掩蓋。

證：與在播外二氏定理的證明中一樣，我們作一個正方形 $Q$ 將 $M$ 組包含在內，然後又分 $Q_1$ 爲四個全等的小正方形，在每個小正方形（每正方形的邊都作爲屬於該正方形）裏的點，於是又各構成一個閉的有欄組。若本定理爲不確，則這四個子組（Teilmenge）中，至少將有一個必須用無盡多個圓才能掩蓋。我們稱這四個正方形中有這種性質的第一個爲 $Q_2$。從 $Q_2$ 我們同樣的得到一個正方形 $Q_3$，由此類推以至於更普遍的得正方形 $Q_n$。在每個 $Q_n$ 裏總有 $M$ 的一個子組，而且對於這個子組，我們的定理將不正確，就是說必須用無盡多個圓纔能將 $M$ 掩蓋。

這一套的正方形終於縮成一點。設此點爲 $\zeta$，則 $\zeta$ 爲 $M$ 的凝聚點。照定理內的假設，$\zeta$ 屬於 $M$，因此，他也就是我們所正在討論的諸圓中某一個的中心。設這圓的半徑爲 $\rho$。現在，若我們把 $p$ 選得如此的大，使 $Q_p$ 的對角線小於 $\rho$，則在 $Q_p$ 中所有屬於 $M$ 的點，都已被這圓所掩蓋，但我們上面假設定理不確而推得要無盡多個圓去掩蓋這些點．故最後所

❶ 在應用此定理時，$G_n$ 往往都是閉域（Abgeschlossene Gebiet）定義見下節．

說的情形，不能發生，而我們的定理必是正確的.

習題 1. 由關係

$$|z| + R(z) \leqq 1$$

所確定的組，是否有欄？此組的點，占據平面的那一部分？

習題 2: 試證明每個祇含孤立點的組是可枚舉的.

## § 7. 路與域

以後我們常常討論到"域"及平面內的"路"(Weg)兩概念. 因此對於這兩概念我們必需下一個精確的解釋.

1. 假若在節 $\alpha \leqq t \leqq \beta$ 內，$x(t)$ 與 $y(t)$ 爲 $t$ 的綿續(實)函數則

$$x = x(t), \qquad y = y(t)$$

是一個"綿續曲線"的參數方程式. 但爲我們的目的，我們更假設凡兩個不同的 $t$ 的值，相當於兩個不同的點 $(x, y)$，如此則該曲線就是"沒有重點的"(doppolpunktfrei). 我們稱如此一個圖形，爲約當曲線段(*Jordansches Kurvenstück*). 若令 $x+iy=z$，則 $x(t)+iy(t)=z(t)$，而此曲線段可更簡單的用

$$z = z(t), \qquad \alpha \leqq t \leqq \beta$$

來表示. 如此的一個曲線段，不必有一定的長. 若他有一定的長❶，則謂之可伸的(*streckbar*, rektifizierbar)，而我們簡稱之爲"路段" **Wegstück**)，$z(\alpha)$ 稱爲此路段的起點，$z(\beta)$ 爲終點. 由此，一個路段總是"有向的"，就是說，對於他的每兩個點，我們總能確定那一個在先，那一個在後，又能確定這路的那一段，可以看作位於兩點之"間".

我們若將有盡多個路段連接起來，卽得一個"路"(**Weg**). 因此，每個路總有一個一定的長，也是有向的，並且可以用如 $z=z(t)$ 狀之一式來代表. 當其中的 $t$ 在一個一定的(實)節上從頭到尾走一次，$z$ 點就照一

❶ 對於這概念，這裏不能進一步作詳確的討論. 我們祇簡單的將他的定義說明一下：我們將參數 $t$ 所在的節 $(\alpha, \beta)$ 隨意分爲 $n$ 部分，設此 $n$ 部分的端點爲 $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots\cdots t_n = \beta$. 然後在曲線段上記出 $z(t_\lambda)$ 諸點 $(\lambda = 0, 1, 2, \cdots\cdots n)$ 再將諸點依次用線段相連，如此則得屬於此曲線段的一個"內接割線練"(einbescrhiebener Sehnenzug)，這割線練自然有一定的長. 現在若所有這些內接割線練的長所構成的組是有欄的，則我們討論中的曲線段稱爲可伸的，而此組的上界稱爲此曲線段的長. 若將若干個可伸的曲線段相接，以得一條曲線，這曲線的長是等於各曲線段之長之和；同樣的，我們若將一條曲線用點分成若干段，這曲線的長，也等於各段之長之和.

定的方向沿着這路恰好也從頭到尾走一次．但一個路可以自己相交，而一個路段則不可．

因爲 $x(t)$ 與 $y(t)$ 是線續的，一個路上全部的點，構成一個閉點組．若一個路的起點與終點會合則我們稱之爲**閉路** (**geschlossener Weg**)．和以前的情形一樣一個閉路是有向的，就是：若 $t$ 在他的節上從頭到尾走一次，$z(t)$ 就沿着這閉路照一定的方向恰好也走一次．於此，若兩個不同的 $t$ 值——除相當於起點與終點兩值外——總相當於兩個不同的點 $z$，則此閉路稱爲沒有重點的．一個沒有重點的閉路，將平面分成兩部，一在路外一在路內．以後我們總認爲剛纔所解釋的方向是如此的選定，使所謂的內部是在運動中的點 $z(t)$ 之左（算學上的正向），除非我們特別作與此相反的聲明．

2．凡具以下兩性質的點組我們稱之爲**域** (**Gebiet, Bereich**)：

$a$　祇含有內點（參看 §6,2 及底註），

$b$　是連通的 (*Zusammenhangend*)．

這裏，連通的意義如下：若一個點組的每兩點能用一個路段相連，而此路段全部含在點組之內，則此點組稱爲連通的．

按以上的定義，則一個域的界點，不算屬於域．雖如此說，但若要將界點也算在內時，我們就特別的表明，稱之爲"閉域" (abgeschlossene Gebiet)．

照以上所說一個域可以有種種不同的形狀．除很簡單的如圓，如多邊形，如半平面外，例如以下點組亦成爲一個域：在上半平面 $\Gamma(z)>0$ 內，以 0 點及 $\pm\frac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ 諸點爲起點，作線段與實軸垂直，其長各等於 1，則從上半平面 $\Gamma(z)>0$ 取出所有這些線段之後，剩下的部分就是一個域．我們可以注意，在這域內，沒有一個路能達到其邊點 0．

在各種域中，我們要特別提出的，是所謂單連通 (*einfachzusammenhangend*) 域，如此的域的特徵是：在域內的每個沒有重點的閉路，所包圍的點，都屬於此域（故此閉路亦不包圍界點）．

圓，三角形等等是單連通的，反之，在兩個同心圓之間的域，就不是單連通的，域 $|z|>0$ 也不是單連通的．

現在我們還要證明以下的

**定理**：若在域 $G$ 內，有一個路 $L$（或更普遍些：有一個閉點組），則有一個正數 $\rho$ 在使以 $L$ 上任意一點爲中心，而以 $\rho$ 爲半徑的圓，仍全部含在 $G$ 內；或者說，$L$ 不能達到離 $G$ 的邊任意近的地方．

證: 因 $L$ 上的每一點 $z$ 都在 $G$ 內, 故 $z$ 點有一個圓形的鄰域, 也全部屬於 $G$, 設此圓的半徑爲 $\rho_z$. 和在海波二氏定理內一樣, 我們現在對於每一點 $z$, 取一個半徑等於 $\frac{1}{2}\rho_z$ 的圓. 從那個定理, 我們知道, 在這些個圓中, 必有有盡多個, 已將 $L$ 掩蓋. 若 $\rho$ 爲此有盡多個圓 (我們稱之爲掩蓋圓) 中最小一個的半徑則 $\rho$. 已適合定理中的條件. 因爲一個半徑等於 $\rho$ 的圓, 即使他的圓心是在某個掩蓋圓的圓周上, 圓的全部仍包含在 $G$ 內.

# 第二章　含一個複變數的函數

## § 8.　最普遍的含一個複變數的(單值)函數

設 $M$ 爲任意一個點組，並設 $z$ 代表組中任意一點，則 $z$ 稱爲一個(複)變數 (*Veränderliche, variable*) 而 $M$ 爲此變數的變數域 (*Variabilitatsbereich*).

設有一宗運算法則(*Rechenvorschrift*)，使相當於屬於 $M$ 的每一點 $z$，有一個一定的新數值 $w$，則 $w$ 稱爲(複)變數 $z$ 的一個(單值)函數：寫如

$$w=f(z),$$

其中符號"$f$"代表那宗任意給的運算法則. $M$ 稱爲該函數的"定義域"(*Definitionsbereich*)而 $z$ 爲該函數的"自變數"(*Argument*)除 $f$ 之外，還有別的符號，可以代表函數，如 $F$, $g$, $h$, $\phi$ 等等，以後我們也常常取用.

我們若將 $z$ 與 $w$ 實部與虛部分開：$z=x+iy$, $w=u+iv$，則關係

$$w=f(z)$$

亦解作一宗運算法則，這法則使相當於實數耦 $x,y$，有兩個新實數 $u$ 與 $v$. 於是 $u$ 與 $v$ 即可視作變數耦 $x,y$ 的兩個實函數；令

$$u=\psi(x,y), \qquad v=X(x,y).$$

則

$$f(z)=\psi(x,y)+iX(x.y).$$

我們稱 $\psi$ 爲函數 $f(z)$ 的實部 $X$ 爲其虛部. 這樣，則函數 $f(z)$ 似乎僅是兩個各含兩個實變數的函數之一種組合. 應用這種觀點，我們常常可以得到便利——例如在 § 13 內，我們卽將利用這點——但爲一般的討論，仍須將 $w=f(z)$ 看作一個複變數 $z$ 的一個函數而不將他分作兩部分，對於問題的眞正核心，方能得一個明瞭的認識.

我們假設讀者對於所謂的初等函數 (elementare Funktion) 如有理函數，指數函數 $e^z$，三角函數 $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ 等，皆已相當熟悉. 在以上諸款中，$M$ 或爲全部平面(如在 $e^z$, $\sin z$, $\cos z$ 諸款)或爲在全部平面取出某幾點後所餘的部分(例如在有理函數之款，須取去分母的各零點；在 $\operatorname{ctg} z$ 之款，須取去所有具 $k\pi$,$(k=0,\pm 1\cdots\cdots)$形狀之點)；其運算法則，都

是用一個陽式(explizitor Ausdruck),就是説:應用四則運算有盡多次或無盡多次 ❶,我們可以從 $M$ 中的一個 $z$,直接的計算其相當的函數值 $w$.

可是這運算法則,也可以與以上所説的完全兩樣. 例如設 $M$ 爲 §2 中之組 $M_7$,則我們可以將每個 $z$ 中之 $y$ 展成循環小數,而按其循環小數之週率爲 1 位,爲 2 位……或爲 $n$ 位,令

$$f(z)=1,=2,\cdots \text{ 或}=n.$$

或任何類似的運算法則,亦無不可.

於此我們亟應聲明:一個函數恰好用一個陽式來表示是絕對不必須的;他可以用種種別的方法來表示,——衹要基於他的定義,相當於 $M$ 中每一個 $Z$,都必有唯一的一個函數值 $w$.

由此,我們知道如此解釋的函數概念,是極端的寬泛,寬泛得我們不能用若干個普遍的定理或定律來約束他們. 我們當前的問題是:關於函數的假設,應有如何的限制性,使按此標準可以在全部函數內選出一種特殊的,可是特別有價值的函數.(所謂價值是就他們在算學與自然科學內的應用的觀點上説

對於所要討論的函數,我們將舉出的有限制性的假定是綿續性(*Stetigkeit*)及可導微性(*Differenzierbarkeit*).

## § 9. 綿續性

我們最先假設變數域 $M$ 是一個如在 § 7,2 所講的域 $G$. ❷ 如此,則 $G$ 的每一點,都有一個一定的鄰域,也含在 $G$ 內. 因爲 $z$ 可以代表 $G$ 的任何一點,$z$ 就能在 $G$ 內隨便運動所以我們説:$z$ 是在 $G$ 內的一個綿續變數.

其次,我們令函數也是綿續的. 綿續性的定義——在形式上,他與在實數論裏的相同——可採以下三種不同的形式.

**第一形式:** 若給 $\zeta$(在 $G$ 內)及 $\varepsilon>0$,則總可找出一個數 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使對於所有適合 $|z-\zeta|<\delta$ 的 $z$,

$$|W-w|=|f(z)-f(\zeta)|<\varepsilon$$

因此綿續性定義亦可簡述如下:

**第二形式:** 對於兩個距離不遠的點 $z$,其相當的函數值也相差很小;

---

❶ 若是無盡多次,則其中所遇之極限法(Grenzprozess)——多半是一個無盡(冪)級數——當然是收斂的.

❷ 對於下面的討論,我們多半衹須假定 $G$ 爲一個圓的內部.

或最後寫作如下的

**第三形式**：　若 $z_1$, $z_2$, ……, $z_n$……是完全任意的選定的一個級數，唯一的條件是 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\zeta$，則對於其相當的函數值 $w_1, w_2, \cdots\cdots, w_n$ [1]

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \omega = f(\zeta).$$

以上綿續性定義的三個形式所代表的事實完全相同

關於人所共知的兩個綿續函數的加減乘除各定理，我們不再講．但爲解釋綿續性的概念起見我們在此僅再給個不綿續函數的例：

設 $G$ 爲整個平面，並設 $f(z)$ 的定義如下：

$f(0)=0$；　對於 $z\neq 0$，若令 $z=\gamma(\cos\theta+i\sin\theta)$ 其中 $\gamma>0$，$0\leqq\theta<2\pi$，則設 $f(z)=\theta$．那就是說：在同一個從 0 出發的半線上所有的點（除去 $z=0$）其函數 $f(z)$ 有相同的值．這函數在 0 點是不是綿續的呢？

雖然不是的，因爲否則（照定義的第一形式）對於所有密靠 0 點的 $z$ 我們恆有

$$|f(z)-f(0)|<\varepsilon,$$

亦即

$$|f(z)|<\varepsilon.$$

但若 $z$ 在 $\theta>\varepsilon$ 的一條半線上，則此條件當然不能適合．　惟有當 $z$ 點沿着正實軸 $(\theta=0)$ 向 0 點趨近時（參看定義的第三形式），綿續性的條件是適合的，因爲對於在正實軸上所有的點，

$$|f(z)-f(0)|=0, \qquad \text{因此也就} <\varepsilon.$$

但按定義上的條件，無論 $z$ 怎樣的趨近 $\zeta$，函數值 $w$ 總趨近 $\omega$．

我們很容易看出來，除去在正實軸上的點，$f(z)$ 在 $G$ 中所有其他的點都是綿續的，

有時候所討論的函數在 $G$ 的界點上的值，也是確定的（這樣也就是在整個的閉域內，都是確定的，這閉域我們用 $\overline{G}$ 來代表）．　在 $\overline{G}$ 域的一個界點上的綿續性定義如下：對於一切屬於 $\overline{G}$ 的 $z$ 點以前所謂的綿續性的各條件都適合，因爲對於不屬於 $\overline{G}$ 的點 $z$，我們當然可以不去管他．在這種情形下的綿續性我們可以稱之爲"域內綿續性"(*Stetigkeit nach-innen*)．　同樣若綿續性的條件祇在一個路的各點是適合的，則我們亦稱之爲"路上綿續性"(*Stetigkeitlängs eines Wegs*)——此時函數在路外之點的值，我們就不管．　按此意義，則上面所舉例中的函數 $f(z)$ 是"在正實軸上綿續的"，因爲在該軸上任意一點，函數值都是 0．　雖然如此，在這線段上沒有一個點，函數 $f(z)$ 是簡直的"綿續的"．

此節至今所討論的函數，是綿續變數 $z$ 的綿續函數．

至於 $f(z)$ 的綿續性與前節末段所講的函數 $\psi(x,y)$ 與 $X(a,y)$ 的性

[1] 我們給字母 $w$ 一個指數，等於變數 $z$ 的指數，就是，普遍的 $w_n$ 代表函數 $w=f(z)$ 當 $z=z_n$ 時之值．

質，顯然有以下的關係：　我們說 $f(z)$ 是綿續的等於說這兩函數對於 $x$ 與 $y$ 每個實變數都是綿續(實)函數.

與在實變函數之款一樣，對於複變數的綿續函數，我們也有

**齊綿續性** (*gleichmässige Stetigkeit*) **定理**：　若 $f(z)$ 在一個有欄的閉域 $\overline{G}$ 內是綿續的，則已給 $\varepsilon$ 之後，恆有一個數 $\delta=\delta(\varepsilon)$，使對於 $\overline{G}$ 的任意兩點 $z'$ 與 $z''$，凡距離 $|z''-z'|<\delta$ 的，其相當的函數值之差適合

$$|w''-w'|=|f(z'')-f(z')|<\varepsilon.$$

**證**：　因 $f(z)$ 在 $\overline{G}$ 內是綿續的，對於的 $\overline{G}$ 每一點 $z$，我們可以畫一個以 $z$ 爲中心的圓，使函數在此圓內之顫動度 ❶ (*Schwankung*) $<\varepsilon$. 設 $\rho_z$ 爲此圓之半徑.　與在海波二氏定理中相同（更比較 § 7 的定理）. 我們對於每一個屬於 $\overline{G}$ 的點 $z$，取一個半徑等於 $\frac{1}{2}\rho_z$ 的圓.　在這些圓中，有有盡多個已可以掩蓋 $\overline{G}$。　若其中最小一個圓的半徑 $=\delta$，則此 $\delta$ 已適合定理中的條件；因爲若 $|z''-z'|<\delta$，又若 $z'$ 被一個圓心在 $\zeta$ 半徑等於 $\frac{1}{2}\rho$ 的圓所掩蓋，則 $\delta\leq\frac{1}{2}\rho_\zeta$.　因此 $z'$ 與 $z''$ 都含在半徑等於 $\rho_\zeta$，而圓心在 $\zeta$ 的圓內，於是 $|f(z'')-f(z')|<\varepsilon$.

習題.　試察驗以下兩函數之綿續性：

$\alpha$)　當 $z=0$ 時，及當一切的 $z$，其絕對值 $|z|$ 爲一個無理數時，$f(z)=0$，反之若 $|z|=\frac{p}{q}$，則 $f(z)=\frac{1}{q}$.

（$p,q$ 爲沒有公約數的兩個正整數）.

$\beta$)　當 $z=0$ 時，$f(z)=0$，當 $z=\gamma(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中 $\gamma>0$ 時，$f(z)=\sin\theta$.

在以上兩函數內，試確定他們在那些點是綿續的，在那些點是不綿續的.

## § 10.　可導微性.

我們要加於我們的函數的第二個限制是：　他在屬於 $G$ 的每一點，要有一個一定的導微函數.　如此，則我們的函數稱爲在 $G$ 內可導微的 (*Differenzierbar*).

我們將可導微性的定義——在形式上也完全與在實數之款一樣——也寫作三種不同的形式.

---

❶ 對於此圓內任何屬於 $\overline{G}$ 的兩點 $z'$ 與 $z''$，$|f(z'')-f(z')|$ 的上界就是這裏所指的顫動度.

**第一形式：** 相當於在 $G$ 內的每一點 $\zeta$，恆有另一個數，——我們用 $f(\zeta)$ 或 $\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=\zeta}$ 來代表，並稱之爲 $f(z)$ 在 $\zeta$ 點的導微函數 (*Ableitung*) 或微商 (*Differentialquotient*)——具以下性質：對於每一個 $\varepsilon>0$，有一個 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，便凡 $z$ 屬於 $G$ 而適合 $|z-\zeta|<\delta$ 時，

$$\left|\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}-f'(\zeta)\right|<\varepsilon.$$

**第二形式：** 對於所有與 $\zeta$ 相近的（屬於 $G$ 的）點 $z$，差商 ❶

$$\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}=\frac{W-\omega}{z-\zeta}=\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)_\zeta$$

必與一個一定的數相近，此數可以 $f'(\zeta)$ 或 $\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=\zeta}$ 來代表。

**第三形式：** 若 $z_1, z_2, \cdots\cdots, z_n, \cdots\cdots$ 爲 $G$ 中之點所構成的任意一個敍列，其中 $z_n$ 諸點皆異於 $\zeta$，但

$$\lim_{n\to\infty} z_n=\zeta,$$

則對於

$$\Delta_n=\frac{f(z_n)-f(\zeta)}{z_n-\zeta}$$

諸數所構成之敍列限值

$$\lim_{n\to\infty}\Delta_n$$

恆存在—按定義，此限值與特別選出的 $z_n$ 無關，我們用 $f'(\zeta)$ 來代表。

關於人所共知的導微法則，我們這裏不再講，但爲瞭解可導微性的概念起見，我們舉一個例，其中的函數是綿續的，可是按剛才的定義，是不可導微的：

設 $G$ 爲整個平面，而 $f(z)=R(z)=x$.

我們很容易驗出，這函數是綿續的；但在任何一點 $\zeta$，他都是不可導微的. 因爲按定義（參看第二形式），若 $f(z)$ 在 $\zeta$ 是可導微的，差商

$$\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}=\frac{x-\xi}{z-\zeta}$$

必與一個一定的數相近． 現在我們若先選 $z$ 點在經過 $\zeta$ 而與 $y$ 軸平行的線上，則 $x=\xi$，而上面的差商 $=0$；另一方面，若選 $z$ 點在經過 $\zeta$ 而與 $x$ 軸平行的線上，則 $x-\xi=z-\zeta$，而此差商

❶ 差商爲 Differenzenquotient 之譯名 — 譯者.

$=1$；可見此差商決不能對於一切與 $\zeta$ 相近的值 $z$ 都與一個一定的數相近.

雖然由此看來一個綿續函數不必是可導微的，但我們立刻可以看出，一個在 $\zeta$ 點可導微的函數，在那裏必定也是綿續的．因爲從 $\lim\Delta_n=f'(\zeta)$ 卽得

$$\lim\left[f(z_n)-f(\zeta)\right]=\lim\left[(z_n-\zeta)\cdot f'(\zeta)\right]=0,$$

就是說，$\lim f(z_n)=f(\zeta)$，而這也就是我們所要證的.

所以綿續性的假設已包含在可導微性的假設之內.

**定義** 一個在一域 $G$ 內確定的且在那裏處處可以導微的函數，稱爲在 $G$ 內的一個（單值）**正規的解析函數**（regulär analytische Funktion）（或亦祗稱爲"解析"函數，或祗稱爲"正規"函數）.

因此，一個函數正規的．特性祗是對於一個域說，但對於在此域內的每一個單獨的點，我們也說該函數在此點是正規的．但這裏我們就要注意，一個函數在一個點的正規性自然就包含他在這點的某一個鄰域內的正規性，因爲這個點本來就必須是正規域的一個**內點**.

所有以上稱爲初等函數的函數，在他們的定義域內都是正規的；但函數 $f(z)=R(z)$ 就不是一個正規的解析函數.

我們在下面就可以看見，這樣所選出的一種函數，其內在的性質，最有規律，故特殊的在算學的科學內一切應用上，亦最重要.

對於函數 $\psi(x,y)$ 與 $\chi(x,y)$，可導微性假設的意義，我們說明如下：

因爲無論 $z$ 甚樣的趨近 $\zeta$，就是說，無論 $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ 怎樣的趨近 0，差商

$$\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)_{z=\zeta}=\frac{\left[\psi(\xi+\Delta x,\eta+\Delta y)+i\chi(\xi+\Delta x,\eta+\Delta y)\right]-\left[\psi(\xi,\eta)+i\chi(\xi,\eta)\right]}{\Delta x+i\Delta y}$$

恆趨近一個一定的限值．所以特殊的若我們第一次令 $\Delta y=0$，而使 $\Delta x$ 趨近 0，第二次令 $\Delta x=0$，而使 $\Delta y$ 趨近 0，或者說，若我們使 $z$ 第一次沿着平行於 $x$ 軸的方向趨近 $\zeta$，第二次沿着平行於 $y$ 軸的方向趨近 $\zeta$，所得的仍是同一的限值． 因此，我們首先知道，$\psi$ 與 $\chi$ 對於 $x$ 與 $y$ 在點 $(\xi,\eta)$ 的四個第一級偏導微函數（partielle Ableitung erster Ordnung）

$$\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad\frac{\partial\chi}{\partial x},\quad\frac{\partial\chi}{\partial y},$$

必定存在． 於是照前一種的趨近法，

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=\zeta}=\frac{\partial\psi}{\partial x}+i\frac{\partial\chi}{\partial x},$$

而照後一種的趨近法

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=\zeta}=\frac{1}{i}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}+i\frac{\partial\chi}{\partial y}\right).$$

因兩值應當相等，所以這四個第一級偏導微函數之間，必有以下關係

$$\frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{x}}=\frac{\partial\chi}{\partial \mathbf{y}},\qquad \frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{y}}=-\frac{\partial\chi}{\partial \mathbf{x}}.$$

這兩個重要的方程式，$f(z)$ 的實部與虛部所必須適合的，我們稱之爲**科黎二氏(偏)微分方程式**(**Cauchy-Riemannsche**(partiellen)**Differentialgleichungen**).

這兩個微分方程式之所以重要，由於他們是正規函數特有的性質；因爲下面的轉理——這定理，我們現在不擬證明——也是正確的． 這轉理是

**定理**： 若 $\psi$ 與 $\chi$ 對於 $x$ 與 $y$ 的四個偏導微函數存在而且是綿續的，又若他們適合科黎二氏微分方程式，則函數

$$f(z)=\psi(x,y)+i\chi(x,y)$$

爲 $z$ 的一個正規函數．

於是以上所說的兩個微分方程式，唯一的確定凡具形式 $\psi(x,y)$ 與 $\chi(x,y)$ 而可以成爲一個解析函數的實虛兩部分的實函數．

我們進一步再假定 $\psi(x,y)$ 與 $\chi(x,y)$ 的第一級偏導微函數也存在而且是綿續的（在 § 19，我們將證明，他們自然總是存在而且綿續的），則從科黎二氏微分方程式，又可以推得：

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\chi}{\partial y\partial x},\qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2\chi}{\partial y\partial x},$$

故

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0.$$

同樣的更得

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}=0.$$

因此兩函數 $\psi$ 與 $\chi$ 適合一個而且同一個具以下形狀的微分方程式——所謂的**拉伯拉斯微分方程式** (Laplacesche Differentialgleichung).

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0;$$

由此可知 $f(z)$ 的實部或虛部，都是不能任意選擇的，他們個別的必須適合拉伯拉斯微分方程式，而合起來必須適合科黎二氏微分方程式.

習題： 1. 例 §9 的習題內所確定的諸函數，是否可導微的？函數 $f(z)=|z|$ 是否可導微的？

2. 試證明各初等函數，例如

$$f(z)=z,\quad z^2,\quad z^n,\ e^z,\ \sin z,\ \cos z,\ \mathrm{tg}z \text{ 等等}$$

都適合科黎二氏的及拉伯拉斯的微分方程式.

# 第 二 編

# 關於積分的定理

## 第三章　綿續函數之積分

### § 11.　定限積分的定義

在積分學中，實變數 $x$ 的一個實綿續函數 $y=F(x)$，在 $x_0$ 與 $X$ 兩限之間的定限積分，其定義如下：

我們將節 $x_0\cdots\cdots X$（設 $x_0<X$）隨意的分爲 $n$ 段，設分段時所用的點（以下簡稱分點——譯者註）爲

$$x_0<x_1<x_2<\cdots\cdots<x_{n-1}<x_n=X;$$

我們在每一節 $x_{\lambda-1}\cdots\cdots x_\lambda$ 中選一個任意的中間的點 $\xi_\lambda$（以下簡稱介點——譯者註）作以下的和

$$J_n=\sum_{\lambda=1}^{n}(x_\lambda-x_{\lambda-1})F(\xi_\lambda).$$

我們想像對於 $n=1,2,3,\cdots\cdots$，每次都隨意的作如此的一和，則

$$\lim_{n\to\infty}J_n=J$$

恆存在，且與分點及介點之選擇完全無關，唯一的條件是一切節 $x_{\lambda-1}\cdots\cdots x_\lambda$ 之長必須隨着 $n$ 的增大而終於減到比任何量都小．以上所說，又可改述如下：我們有一數 $J$ 在，具以下的性質：若已給 $\varepsilon>0$，卽可決定一數 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使凡一切的節，都適合

$$|x_\lambda-x_{\lambda-1}|<\delta$$

時

$$|J_n-J|<\varepsilon.$$

我們稱這數 $J$ 爲定限積分而用下式代表之：

$$J = \int_{x_0}^{X} F(x)\,dx.$$

這個(實)定限積分的定義及其幾何的意義（就是把他視作許多長方形面積之和的一個近似值），我們假定讀者都已熟悉.

現在設 $w=f(z)$ 在域 $G$ 內為 $z$ 的一個綿續函數,（其可導微性,暫時還不必須），並設 $z_0$ 與 $Z$ 為 $G$ 的任意兩點. 這樣, 完全倣照上面的形式,含複變數的一個函數之定限積分,其定義可述如下:

用一個整個在 $G$ 內的路 $L$ 連 $z_0$ 與 $Z$ 把 $L$ 分為任意的 $n$ 分, 令分點依序為 $z_0, z_1, z_2, \cdots\cdots z_{n-1}, z_n=Z$, 在每一個小路段 $z_{\lambda-1}\cdots\cdots z_\lambda$ 中, 取任意一個介點 $\zeta_\lambda$, 作以下的和:

$$J_n = \sum_{\lambda=1}^{n}(z_\lambda - z_{\lambda-1})f(\zeta_\lambda).$$

我們將要證這裏限值

$$\lim_{n\to\infty} J_n = J$$

也恆存在,且與分點及介點之選擇無關——但當然與連接 $z_0$ 與 $Z$ 的路 $L$ 有關——祇要一切,小路段 $z_{\lambda-1}\cdots\cdots Z_\lambda$ 的長隨着 $n$ 的增大而終於減小到比任何量都小——這就是說,我們在此, 也將要證明, 具有下述特性之一數 $J$ 是存在的;已給 $\varepsilon>0$, 則恆可以決定一數 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使凡一切小路段 $z_{\lambda-1}\cdots\cdots z_\lambda$ 的長小於 $\delta$ 時,

$$|J_n - J| < \varepsilon.$$

上面所說明的限值

$$J = \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{\lambda=1}^{n}(z_\lambda - z_{\lambda-1})f(\zeta_\lambda)\right\}$$

稱為 $f(z)$ 沿 $L$ 的定限積分,而寫作

$$\int_{z_0}^{Z}{}^{(L)} f(z)\,dz \quad \text{或簡寫作} \quad \int^{(L)} f(z)\,dz.$$

像在實積分之款那樣的,一個簡單的幾何解釋,在此處是不可能.

## § 12. 定限積分之存在的證明

為簡便起見,我們稱我們正討論中的和為（$n$ 段的）$\Sigma$ 和: 若提到路

的一段 $(a,b)$ 時，我們總是先寫那（有向的）路段上最前的一點．

經過如此規定之後我們有

**助定理 1**：　設 $(a,b)$ 爲路 $L$ 的一段 $L'$，其長等於 $l'$，又設函數 $f(z)$ 在 $L'$ 上的顫動度 ❶ $<\sigma$．　則若對於此路段 $L'$，當 $n=1$ 與 $n=p(\geqq 1)$ 時各作一個 $\Sigma$ 和，此兩個和的差小於 $l'\sigma$．

證：　設

$$\varsigma=(b-a)f(a_0)$$

與

$$\varsigma'=(a_1-a)f(a_1)+(a_2-a_1)f(a_2)+\cdots\cdots+(b-a_{p-1})f(a_p)$$

爲這兩個 $\Sigma$ 和．　其中，$a_0$ 代表前者的介點，而 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_{p-1}$ 與 $a_1, a_2\cdots\cdots a_p$ 代表後者的分點與介點．

照假設則

$$|f(a_\lambda)-f(a_0)|<\sigma,\qquad \lambda=1,2,\cdots\cdots,p.$$

但因 $\varsigma$ 可寫作以下的形狀：

$$\varsigma=(a_1-a)f(a_0)+(a_2-a_1)f(a_0)+\cdots\cdots+(b-a_{p-1})f(a_0).$$

故

$$|\varsigma'-\varsigma|<\sigma(|a_1-a|+|a_2-a_1|+\cdots\cdots+|b-a_{p-1}|)\leqq l'\sigma.$$

這裏最後一個不等號，是根據下面的事實：一個內接割線練 ❷ 的長，不能大於路本身的長．

**助定理 2**：　設 $S$ 爲路 $L$ 的任意一個固定的 $n$ 段 $\Sigma$ 和，並設一切 $f(z)$ 在此路的 $n$ 個小段內的顫動度都 $<\sigma$．　現在若在舊的分點間加入若干新的分點（簡單的說：若將 $L$ 再向下分），則我們可以從 $S$ 得另一個 $\Sigma$ 和 $S'$．　如此則無論在作成 $S'$ 時，新介點是如何選法，我們又得

$$|S-S'|<l\,\sigma_0,$$

其中 $l$ 爲路 $L$ 之長．

證：　對於路 $L$ 上 $n$ 段的每一段，助定理 1 皆能應用，由此卽得

$$|S-S'|<l_1\sigma_0+l_2\sigma_0+\cdots\cdots+l_n\sigma_0=l\sigma_0,$$

其中 $l_1,l_2,\cdots\cdots,l_n$ 爲 $L$ 上各段之長．

**助定理 3**：　在 $\varepsilon>0$ 選定之後，則一個具以下性質的，　$\delta=\delta(\varepsilon)>0$ 可以決定：若將路 $L$ 用任意兩種方法分段，使每次各段之長 $<\delta$，而 $S_1$ 與

❶ 就是說：對於路段 $L'$ 上任意兩點 $z'$ 與 $z''$，$|f(z'')-f(z')|$ 之值的上限．

❷ 參看第 16 頁的底註——譯者．

$S_2$ 爲這樣所得的兩個 $\Sigma$ 和，則

$$|S_1-S_2|<\frac{\varepsilon}{2}$$

必定成立.

證： 我們依照齊綿續性定理選擇 $\delta$，使對於在路中適合 $|z''-z'|<\delta$ 的任意兩點 $z'$ 與 $z''$ 關係 $|f(z'')-f(z')|<\frac{\varepsilon'}{4l}$ 恆成立. 設 $S_1$ 與 $S_2$ 爲任意兩個 $\Sigma$ 和，但其分段法都使各段之長皆 $<0$. 我們從上面兩個分段法，又作第三個（較細密的）分段法，其分點就是前兩者的分點的全部. 顯然的，這第三個分段法可看作前兩個每個再向下分的結果. 若故 $S_3$ 爲從第三個分段法所得的任意一個 $\Sigma$ 和，則從助定理 2，我們得

$$|S_1-S_3|<l\cdot\frac{\varepsilon}{4l}=\frac{\varepsilon}{4}$$

同樣的得

$$|S_2-S_3|<\frac{1}{4}\varepsilon.$$

故

$$|S_1-S_2|=|(S_1-S_3)-(S_2-S_3)|\leqq|S_1-S_3|+|S_2-S_3|<\frac{1}{2}\varepsilon.$$

這就是我們所要證明的.

**助定理 4**： 設對於 $n=1,2,\cdots\cdots$，我們每次作一個 $n$ 段的 $\Sigma$ 和 $S_n$，並設其中所有小段的長，皆隨着 $n$ 的增大而終於減小到比任何量都小 ❶ 則

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

存在.

證： 設已給 $\varepsilon>0$，我們先依助定理 3 決定一個 $\delta$，然後選定充分大的一個 $n_0$，使凡 $n\geqq n_0$ 時，第 $n$ 個分段法中所有小段之長皆小於 $\delta$. 於是對於所有的 $S_n$，助定理 3 皆可應用，就是說，對於一切適合 $n>n_0$ 的 $n$ 及適合 $p\geqq 1$ 的 $p$，

$$|S_{n+p}-S_n|<\frac{1}{2}\varepsilon<\varepsilon.$$

於是 $\lim S_n$ 的存在已證明（參看 § 6，定理 2）.

若令此限值 $=J$，則我們卽可證明在前節末段所提到的

❶ 更精密些：我們若用 $\lambda_n$ 代表第 $n$ 個分段法中最長的小段的長，則須有以下的關係

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=0$$

**定理**：　若已給 $\varepsilon>0$, 又若按助定理 3, 已決定 $\delta=\delta(\varepsilon)$, 則對於任意一個 $\Sigma$ 和 $J_n$, 祇要一切小段之長 $<\delta$, 以下關係卽成立：

$$|J_n-J|<\varepsilon.$$

**證**：　我們先令在最後一個助定理的證明中，不等式 $|S_{n+p}-S_n|<\frac{1}{2}\varepsilon$ 裏的數 $p$, 無限制的加大，卽得

$$\text{凡 } n\geqq n_0 \text{ 時，}\qquad |S_n-J|\leqq\frac{1}{2}\varepsilon.$$

其次，從助定理 3,

$$|S_n-J_n|<\frac{1}{2}\varepsilon$$

故

$$|J_n-J|=|(S_n-J)-(S_n-J_n)|\leqq|S_n-J|+|S_n-J_n|<\varepsilon$$

於是具以前所講的性質的一個數 $J$ 之存在，亦卽定限積分之存在，已完全證明.

**附註**：　1. 在我們的證明裏，我們祇利用到 $f(z)$ 在 $L$ 上的綿續性，而沒有利用到他在 $G$ 內的綿續性.　所以在路 $L$ 之外，$f(z)$ 的值，簡直不必是確定的.

2. 我們的積分概念，已包含實積分在內，而以之爲一個特款（參看 §11 的開始），欲明此點，祇須將實軸的一段作爲 $L$ 而將 $f(z)$ 看作在此段上有實值的一個函數.

**習題**：　設 $F(z)$ 爲在 $L$ 上綿續的一個含 $z$ 的函數.　試證明以下的限值——其詳細解釋與前相同——

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{\lambda=1}^{n}|z_\lambda-z_{\lambda-1}|F(\zeta_\lambda)\right\}={}^{(L)}\!\!\int F(z)\,|dz|$$

恆存在.

## § 13.　定限積分之計算

現在在一個已給的款中，$J$ 的數值如何計算的問題，其性質就和以前所討論的完全兩樣.　一般的說，祇在某種有限制性的假設之下，$J$ 的值是可以計算的.

設當 $t$ 在節 $\alpha\leqq t\leqq\beta$ 內移動時，實函數

$$x=x(t),\qquad y=y(t)$$

代表在路上移動的一點的坐標，更設這兩函數有綿續的導微函數 $x'(t)$ 與

$y'(t)$. 這樣則這個路自然是可伸的. 我們將他分段如下: 把參數 $t$ 所在的節分爲 $n$ 段,其分點爲

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots\cdots < t_n = \beta,$$

再在各段中選擇介點 $\tau_1, \tau_2, \cdots\cdots \tau_n$, 然後設

$$z_\lambda = z(t_\lambda) \qquad \lambda = 0, 1, 2, \cdots\cdots n;$$

$$\zeta_\lambda = z(\tau_\lambda) \qquad \lambda = 1, 2, \cdots\cdots, n$$

爲簡便起見,我們又設

$$\psi[x(t), y(t)] = \bar{\psi}(t), \qquad \chi[x(t), y(t)] = \bar{\chi}(t)$$

現在可以寫:

$$\sum_{\lambda=1}^{n}(z_\lambda - z_{\lambda-1}) f(\zeta_\lambda) = \sum_{\lambda=1}^{n}[(x_\lambda - x_{\lambda-1}) + i(y_\lambda - y_{\lambda-1})][\bar{\psi}(\tau_\lambda) + i\bar{\chi}(\tau_\lambda)]$$

若我們照以前常常討論別的方法,將路更細密的分段,則上式內兩個方括弧相乘所得的四個實 $\Sigma$ 和,都趨於我們容易察知的限值. 例如

$$\Sigma(x_\lambda - x_{\lambda-1})\bar{\psi}(\tau_\lambda) \text{ 趨於 } \int_\alpha^\beta \bar{\psi}(t) x'(t) dt.$$

因爲根據微分學內的中值定理 ❶

$$x_\lambda - x_{\lambda-1} = x(t_\lambda) - x(t_{\lambda-1}) = (t - t_{\lambda-1}) x'(\tau'_\lambda)$$

其中 $\tau_\lambda$ 也是 $t_{\lambda-1}$ 與 $t_\lambda$ 間的一個介點. 因照假設, $x'(t)$ 在 $(\alpha, \beta)$ 內是綿續的,我們可以設

$$x'(\tau_\lambda') = x'(\tau_\lambda) + \varepsilon_\lambda,$$

其中一切的 $\varepsilon_\lambda$, 都隨着分段的愈趨細密而齊一的 ❷ 減小到比任何量都小.

所以我們所討論的實 $\Sigma$ 和

$$= \sum_{\lambda=1}^{n}(t_\lambda - t_{\lambda-1}) x'(\tau_\lambda) \cdot \bar{\psi}(\tau_\lambda) + \sum_{\lambda=1}^{n}(t_\lambda - t_{\lambda-1}) \varepsilon_\lambda \cdot \bar{\psi}(\tau_\lambda).$$

其中第一項恰好是那個趨於實積分 $\int_\alpha^\beta \bar{\psi}(t) x'(t) dt$ 的 $\Sigma$ 和; 第二項則趨於 0, 因爲若已給 $\varepsilon > 0$, 則經過更細密的分段,第二項的絕對值

$$< \varepsilon(\beta - \alpha) \cdot \bar{\psi}_0$$

---

❶ 中值定理係 Mittelwertsatz 之譯名——譯者.

❷ Gleichmassig——譯者.

其中 $\overline{\psi}_0$ 表示 $|\overline{\psi}(t)|$ 在 $L$ 上的一個上欄——其他三個 $\Sigma$ 和可以照此處置.

由此,我們所討論的複 $\Sigma$ 和所趨的限值 $J$, 也就是說,我們的定限積分,有下面的值:

$$(1)\qquad J={}^{(L)}\int_{z_0}^{Z}f(z)dz=\int_{\alpha}^{\beta}\overline{\psi}x'dt-\int_{\alpha}^{\beta}\overline{\chi}y'dt+i\int_{\alpha}^{\beta}\overline{\psi}\,y'dt+i\int_{\alpha}^{\beta}\overline{\chi}x'dt,$$

這個積分,可寫作如下不至於再令人誤解的形狀:

$$(2)\qquad J=\int_{\alpha}^{\beta}(\overline{\psi}+i\overline{\chi})(x'+iy')dt,$$

或更簡單些:

$$(3)\qquad J=\int_{\alpha}^{\beta}f[z(t)]\cdot z'(t)dt,$$

而最後又可寫作

$$(4)\qquad J=\int_{\alpha}^{\beta}f(z)dz={}^{(L)}\int f(z)dz.$$

其中 $t$ 的兩個限值 $\alpha,\beta$ 可以提醒我們 $z$ 是 $t$ 的一個函數,而在最後的表示法內,我們祇將積分所用的路,明白的記出來,作爲唯一的重要的東西.

這樣,在討論積分值的計算時,我們對於定限積分之特有的記法的意義,同時得到一個更深刻的認識.

例 1.

$$f(z)=\frac{1}{z};\qquad L:\quad z(t)=\cos t+i\sin t,\qquad 0\leqq t\leqq 2\pi.$$

這個路是從 $+1$ 起,依照算學的正向(與時針相反的方向)走,而又回到 $+1$ 的一個么圓.從 (3) 得

$$J={}^{(L)}\int\frac{dz}{z}=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\cos t+i\sin t}(-\sin t+i\cos t)dt=i\int_0^{2\pi}dt=2\pi i$$

這個結果,以後我們將不斷的應用.

例 2.

$$f(z)=R(z)=x;\qquad z_0=0,\qquad Z=1+i.$$

我們將要在不同的兩個路上,計算積分 $\int_{z_0}^{Z}f(z)dz$ 的值:

1. 路 $L_1$: 連接積分上下兩限的直線

$$z=(1+i)t,\qquad 0\leqq t\leqq 1.$$

我們得

$$J_1=\int_0^1 t(1+i)dt=(1+i)\int_0^1 tdt=\frac{1}{2}(1+i).$$

2. 路 $L_2$: 沿直線從 0 到 $+1$, 又沿直線從 $+1$ 到 $1+i$. 我們分別的求在這兩段上的積分值再將兩值相加,卽得

$$J_2=\frac{1}{2}+i.$$

所以用不同的路我們得不同的值(在這裏讀者可參考 §10 內的例).

下列的兩例指出有時候最簡單的方法,是直接應用積分的定義(§11 與 12),從 $\Sigma$ 和以求積分的值.

例 3. 設 $G$ 爲整個平面; $f(z)=1$; 路爲任意的.

此時

$$\begin{aligned}J_n&=\sum_{\lambda=1}^{n}(z_\lambda-z_{\lambda-1})\cdot 1\\&=(z_1-z_0)+(z_2-z_1)+\cdots\cdots+(Z-z_{n-1})\\&=Z-z_0\end{aligned}$$

所以在任何一個路上

$$\lim J_n=J=\int_{z_0}^{Z}dz=Z-z_0$$

特殊的,設 $L$ 爲一個閉路,此時我們用 $C$ 去代表他,則因 $Z=z_0$

$$\int^{(C)}dz=0$$

例 4. 設 $G$ 爲整個平面; $f(z)=z$; 路爲任意的.

此時

$$J_n=\sum_{\lambda=1}^{n}(z_\lambda-z_{\lambda-1})\zeta_\lambda,$$

其中 $\zeta_\lambda$ 爲從 $z_{\lambda-1}$ 到 $z_\lambda$ 的一段曲線上的任意一點. 我們選擇

a) $$\zeta_\lambda=z_{\lambda-1}.$$

若用 $J_n'$ 表示所得的和,則

$$J_n'=(z_1-z_0)z_0+(z_2-z_1)z_1+\cdots\cdots+(Z-z_{n-1})z_{n-1}.$$

b) $$\zeta_\lambda=z_\lambda$$

此時若用 $J_n''$ 表示所得的和,則

$$J_n''=(z_1-z_0)z_1+(z_2-z_1)z_2+\cdots\cdots+(Z-z_{n-1})Z.$$

故若將兩和相加,卽得

$$J_n'+J_n''=Z^2-z_0^2,$$

於是又得

$$\lim(J_n'+J_n'')=2J=Z^2-z_0^2.$$

就是說,在任意一個路上

$$J=\int_{z_0}^{Z}zdz=\frac{1}{2}(Z^2-z_0^2),$$

設 $L$ 又是一個閉路 $C$,則更得

$$^{(O)}\int z\,dz=0$$

例 5: $\int (z-z_0)^m dz$;路 $L$ 爲沿着正向走的,中心在 $z_0$ 半徑等於 $r$ 的圓. $L$ 可以用下式來表示

$$z=z_0+r(\cos t+i\sin t),\qquad 0\leqq t\leqq 2\pi,$$

於是

$$J=\int_0^{2m}[r(\cos t+i\sin t)]^m\cdot r(-\sin t+i\cos t)dt$$
$$=ir^{m+1}\int_0^{2\pi}[\cos(m+1)t+i\sin(m+1)t]dt.$$

但對於每個不等於 0 的(正或負)整數 $k$,我們熟知

$$\int_0^{2\pi}\cos kt\,dt=0\qquad 與\qquad \int_0^{2\pi}\sin kt\,dt=0.$$

當 $k=0$,則前兩積分依序

$$=2\pi\qquad 與\qquad =0.$$

故我們的積分

$$^{(L)}\int(z-z_0)^m dz=\begin{cases}2\pi i, & 若\ m=-1\ (比較例1).\\ 0, & 若\ m\ 爲每個其他的整數.\end{cases}$$

習題 1. 計算最後例中的積分在以下各款中的值:

a) $L$ 爲一個正方形,其中心在 $z_0$,四邊兩兩平行於兩軸

b) $L$ 爲一個橢圓其中心在 $z_0$,兩軸與坐標軸平行

2. 計算 $\int_{-i}^{+i}|z|\,dz$,取以下各路:

(a) 直線, (b) 沿么圓的左半, (c) 沿么圓的右半.

## § 14. 幾個簡單的關於積分的定理

以下的簡單的定理,立刻可以從積分的定義得到,其未曾寫出的被積函數一概是 $f(z)$,積分變數一概是 $z$.

**定理 1:**

$$^{(L)}\int_{z_0}^{Z}+{}^{(L')}\int_{Z}^{Z'}={}^{(L+L')}\int_{z_0}^{Z'}$$

就是說,計算積分時,兩個連接的路可以續在一起;在上式右端的積分,路 $L+L'$ 是沿着 $L$ 從 $z_0$ 到 $Z$ 沿着 $L'$ 從 $Z$ 到 $Z'$.

同樣,若 $z'$ 爲路 $L$ 上介乎 $z_0$ 與 $Z$ 間的一點,則

$$^{(L)}\int_{z_0}^{Z}={}^{(L)}\int_{z_0}^{z'}+{}^{(L)}\int_{z'}^{Z},$$

也就是說,計算積分時,可將所用的路,拆成幾段.

**定理 2:**

$$^{(L)}\int_{z_0}^{Z} = -{}^{(L)}\int_{Z}^{z_0},$$

就是說,計算積分值的時候,沿着同一個路,先沿一個方向走,再沿相反的方向走,則所得結果,絕對值相同而符號相反. 若用 $+L$ 代表這兩個方向之一, $-L$ 代表其餘的一個,則更可簡寫作

$$^{(-L)}\int = -{}^{(+L)}\int \qquad 或 \qquad {}^{(+L)}\int + {}^{(-L)}\int = {}^{(+L)+(-L)}\int = 0.$$

這個可以簡述如下: 若我們沿着同一個曲線段,來回各一次的取積分,則其積分值等於 0.

**定理 3:**

$$^{(L)}\int cf(z)dz = c.{}^{(L)}\int f(z)dz$$

就是說,一個常數因子可以提出放在積分號之前.

**定理 4**

$$^{(L)}\int [f_1(z)+f_2(z)]dz = {}^{(L)}\int f_1(z)dz + {}^{(L)}\int f_2(z)dz.$$

用話敍說就是:兩個(或多個,但有盡多個)函數之和的積分等於各別的積分之和. 簡言之,我們可以將一個(有盡多個函數的)和逐項的積分

**定理 5:**

$$\left| {}^{(L)}\int f(z)dz \right| \leqq Ml.$$

其中 $M$ 爲 $|f(z)|$ 在路 $L$ 上的一個上欄而 $l$ 爲 $L$ 的長.

這個重要公式的證明,從積分的定義,立刻可以得到.因

$$J_n = \sum_{\lambda=1}^{n} (z_\lambda - z_{\lambda-1}) f(\zeta_\lambda),$$

所以

$$|J_n| \leqq \sum_{\lambda=1}^{n} |z_\lambda - z_{\lambda-1}| \, |f(\zeta_\lambda)| \leqq M \sum_{\lambda=1}^{n} |z_\lambda - z_{\lambda-1}|.$$

現在,在最後式中右方的總和,照他的意義,是曲線 $L$ 的一個內接多邊形的長,這多邊形的頂點爲 $z_0, z_1, z_2, \cdots\cdots Z$; 故對於每個 $n$, 這總和 $\leqq l$.
因此對於每個 $n$,

$$|J_n| \leqq Ml,$$

故

$$|J| \leqq Ml,$$

這也就是我們所要證明的.

例如對於 § 13 中的第一例,不用任何計算卽知

$$\left|{}^{(L)}\int \frac{dz}{z}\right| \leqq 1.2\pi = 2\pi,$$

因爲對於么圓 $L$ 上每一點 $z$, $|z|$ 恆$=1$, 而 $L$ 之長$=2\pi$.

習題: 接着 § 12 的習題,證明下面的關係恆成立:

$$\left|{}^{(L)}\int f(z)dz\right| \leqq {}^{(L)}\int |f(z)||dz|.$$

# 第四章　科犀積分定理

## § 15.　定理之敍述

從複變函數的積分的定義，我們知道其值不僅（如在實積分之款）繫乎積分之兩限 $z_0$ 與 $Z$，同時還很重要的繫乎連接這兩點的路 $L$（參考例2 § 13）但在下面將要說明的假設之下，即有以下的定理若一個函數不僅是綿續的，像我們以前所假設的那樣而且還是可導微的；則函數的積分值與路無關．此定理在整個函數論中是一個基本的定理，而我們因他的發現者稱之爲**科犀積分定理**（**Cauchysche Integralsatz**）他有兩種敍述的方式．

**函數論的主要定理**（**Hauptsatz der Funktionentheorie**）

**第一方式：** 設函數 $w=f(z)$ 在一個單連通域（*einfachzusammenhängendes Gebiet*）$G$ 內是正規的，並設 $z_0$ 與 $Z$ 爲 $G$ 的兩個（內）點．則積分

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)dz$$

沿每一個從 $z_0$ 到 $Z$ 而整個含在 $G$ 內的路，有同一的值．

若 $L_1$ 與 $L_2$ 爲兩個不同的如此的路，則按定理

$$^{(L_1)}\!\!\int f(z)dz = {}^{(L_2)}\!\!\int f(z)dz \qquad \text{或} \qquad {}^{(L_1)}\!\!\int - {}^{(L_2)}\!\!\int = 0$$

從 § 14 中定理 1 與 2，以上事實可以敍述如下．沿一個從 $z_0$ 出發又回到 $z_0$ 的路，或即沿一個整個含在 $G$ 內的閉路 $C$（這路即有重點亦無妨），積分之值爲 0，那就是說；從第一方式可得

**第二方式：** 若 $f(z)$ 在一個單連通域 $G$ 內是正規的，則

$$^{(C)}\!\!\int f(z)dz = 0,$$

其中 $C$ 代表含在 $G$ 內的任意的（不必須是無重點的）一個閉路．

若我們從第二方式出發，即可以得到第一方式；因爲設 $L_1$ 與 $L_2$ 爲任

意兩個從 $z_0$ 到 $Z$ 的路，若我們將 $-L_2$ 接在 $L_1$ 之後，則所接成的路為一個（不一定是無重點的）閉路，於是

$$0={}^{(L_1)}\!\!\int-{}^{(L_2)}\!\!\int,\qquad \text{亦卽}\qquad {}^{(L_2)}\!\!\int={}^{(L_1)}\!\!\int$$

因此我們只要證此主要定理的第二方式卽足，在下節內所要證明的就是第二方式，證法分為三步：先證當 $C$ 是一個三角形之款；再證當 $C$ 是任意一個多邊形之款；最後當 $C$ 是任意一個閉路之款。

在 §13 中的例 3 與例 4 內，我們已經證明科摩定理對於兩個特殊的函數之款，就是 $f(z)=1$ 與 $f(z)=z$ 兩款，在那裏我們知道，對於任意一個閉路 $C$

$${}^{(C)}\!\!\int dz=0,\qquad {}^{(C)}\!\!\int zdz=0$$

## § 16. 主要定理的證明

第一步：　$C$ 為一個三角形 $\Delta$

我們畫平行於 $\Delta$ 邊的線將 $\Delta$ 分為全等的四個小三角形 $\Delta'$, $\Delta''$, $\Delta'''$, $\Delta^{IV}$　若積分的路一概是沿着算學的正向，則

$${}^{(\Delta)}\!\!\int={}^{(\Delta')}\!\!\int+{}^{(\Delta'')}\!\!\int+{}^{(\Delta''')}\!\!\int+{}^{(\Delta^{IV})}\!\!\int;$$

因為若沿着四個小三角形的邊取積分（參看圖 1，每個三角形內的箭頭表示積分的路和向）則在我們所添的每個輔助線上，來回各取一次積分，所以他們對於積分值的影響，又自己彼此相消。　因為在上式右端的四個積分，不能每個都小於他們總和的四分之一，❶ 所以其中至少有一個——這個積分所沿的路我們稱之為 $\Delta_1$ ——令

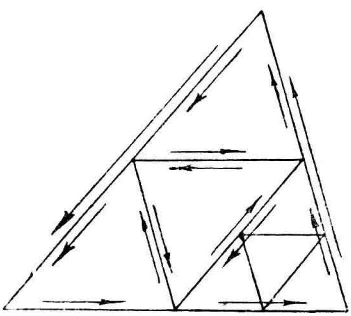

圖　1

$$\left|{}^{(\Delta)}\!\!\int\right|\leqq 4\left|{}^{(\Delta_1)}\!\!\int\right|,$$

對於小三角形 $\Delta_1$，我們又可應用同樣的方法。　這樣則在 $\Delta_1$ 內至少有一個小三角形，$\Delta_2$，令

❶ 以絕對值言——譯者。

$$\left|{}^{(\Delta_1)}\!\!\int\right| \leqq 4 \left|{}^{(\Delta_2)}\!\!\int\right|,$$

故

$$\left|{}^{(\Delta)}\!\!\int\right| \leqq 4^2 \left|{}^{(\Delta_2)}\!\!\int\right|.$$

照此推演下去，我們可以得到一個敍列的三角形 $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \cdots\cdots \Delta_n \cdots\cdots$，每一個的面積都等於前一個的四分之一而又完全含在前一個之內，而且

$$\left|{}^{(\Delta)}\!\!\int\right| \leqq 4^n \left|{}^{(\Delta n)}\!\!\int\right|, \qquad n = 1, 2,$$

從套定理我們知道所有的 $\Delta_n$ 有一個唯一的公共點 $z_0$.

現在設 $\varepsilon$ 爲一個任意小的正量，因爲 $f(z)$ 在 $z_0$ 有微商（參看 §10，第一形式）一個 $\delta > 0$ 可以確定，使凡 $|z - z_0| < \delta$ 時

$$|f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)| < \varepsilon |z - z_0|,$$

或

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + \eta(z - z_0)$$

其中

$$|\eta| < \varepsilon.$$

我們現在將 $n$ 選得如此的大，使 $\Delta_n$ 完全含在 $|z - z_0| < \delta$ 所決定的 $z_0$ 的隣域之內也就是使一切在 $\Delta_n$ 內的與在 $\Delta_n$ 的邊上的點 $z$ 都適合 $|z - z_0| < \delta$. 這樣則

$$\begin{aligned}{}^{(\Delta_n)}\!\!\int f(z)dz = {}^{(\Delta_n)}\!\!\int f(z_0)dz - {}^{(\Delta_n)}\!\!\int z_0 f'(z_0)dz + {}^{(\Delta_n)}\!\!\int z f'(z_0)dz \\ + {}^{(\Delta_n)}\!\!\int \eta\cdot(z - z_0)dz\end{aligned}$$

根據 §14,3 與前節最後所指出的，

$${}^{(\Delta_n)}\!\!\int f(z)dz = 0 + 0 + 0 + {}^{(\Delta_n)}\!\!\int \eta\cdot(z - z_0)dz$$

由此，更根據 §14,5 得

$$\left|{}^{(\Delta_n)}\!\!\int f(z)dz\right| < \varepsilon\cdot\frac{S_n}{2}\cdot S_n = \frac{\varepsilon}{2}\cdot S_n^2,$$

其中 $S_n$ 表示 $\Delta_n$ 的周圍，因爲 $|z - z_0|$ 是在同一個三角形 $\Delta_n$ 內的兩點間的距離，所以最多 $= \dfrac{S_n}{2}$，而全路之長 $= S_n$，又 $|\eta| < \varepsilon$.

現在若 $S$ 爲所給的三角形 $\Delta$ 的周圍，則因

$$S_1=\frac{S}{2},\quad S_2=\frac{S_1}{2}=\frac{S}{2^2},\cdots\cdots,\quad S_n=\frac{S}{2^n},$$

我們最後得

$$\left|{}^{(\Delta)}\!\!\int f(z)dz\right|\leqq 4^n\left|{}^{(\Delta_n)}\!\!\int f(z)dz\right|\leqq 4^n\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{S^2}{4^n}=\frac{\varepsilon}{2}\cdot S^2.$$

但這式裏右端是隨着 $\varepsilon$ 的選擇而可以任意小的一個數，左端則是一個固定積分值，所以左端必須 $=0$. 這就是我們所要證明的.

第二步：　路 $C$ 是一個任意的，可以自已相交的閉多邊形 $P$.

先設 $C$ 是一個四邊形 $V$，則我們總可以用一個含在他的裏面的對角線將他分成兩個三角形 $\Delta$ 與 $\Delta'$，於是又得（參看圖 2）.

$${}^{(V)}\!\!\int={}^{(\Delta)}\!\!\int+{}^{(\Delta')}\!\!\int=0$$

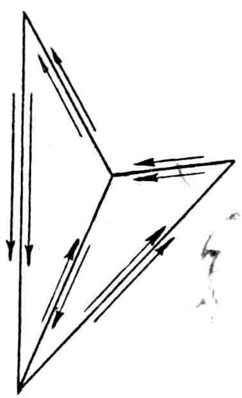

圖　2

同樣，每個任意的，自已不相交的閉多邊形 $P$，也可以用完全含在他裏面的對角線分爲若干個三角形．沿每一個這樣的三角形取積分，則所得的積分每個 $=0$　將這些積分加在一起，則因爲在每一個對角線上都來回各一次的取了積分，其總和等於沿着多邊形 $P$ 的邊所取的積分，所以仍然

$${}^{(P)}\!\!\int f(z)dz=0.$$

最後，若 $P$ 是一個自已相交的多邊形，則我們很容易看出來 $P$ 可以從有盡多個自已不相交的閉多邊形來構成． 我們沿着這些自已不相交的閉多邊形分別的取積分，然後將結果相加，則知此時

$${}^{(P)}\!\!\int f(z)dz=0$$

亦爲眞確.

第三步：　$C$ 是任意的一個閉路.

無論已給 $\varepsilon>0$ 如何的小，我們可以作一個特殊的多邊形 $P$，使

$$\left|{}^{(C)}\!\!\int - {}^{(P)}\!\!\int\right| < \varepsilon,$$

於是由第二步我們得

$$\left|{}^{(C)}\!\!\int\right| < \varepsilon, \qquad \text{也就是} \qquad {}^{(C)}\!\!\int = 0.$$

決定這個多邊形 $P$ 的方法如下:

從定義我們知道

$${}^{(C)}\!\!\int = \lim J_n = \lim \sum_{\lambda=1}^{n} (z_\lambda - z_{\lambda-1}) f(S_\lambda), \quad (\text{其中 } z_0 = z_n).$$

已給一個任意的 $\varepsilon > 0$ 之後,我們把分點 $z_\lambda$ 選得如此之密,自然 $n$ 如此的大,使

(1) $\left|{}^{(C)}\!\!\int - J_n\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ 恆成立,根據 §12 裏的主要的定理,這個總是可能的;

(2) 一切小段的長 $< \frac{1}{2}\rho$, 其中 $\rho$ 爲在 §7 的定理中,對於含在 $G$ 內的路 $C$ 所確定的量;

(3) 小段的長也 $< \delta$, 這裏 $\delta$ 爲按齊綿續性定理所確定的量,其性質如下: 若 $z'$ 與 $z''$ 爲在 $C$ 上的或與 $C$ 的距離至多爲 $\frac{1}{2}\rho$ 而適合 $|z''-z'| < \delta$ 的任意兩點則

$$|f(z'') - f(z')| < \frac{\varepsilon}{2l} \qquad (l = C \text{ 的長}),$$

於是特殊的設 $z$ 爲割線 $z_{\lambda-1} \cdots\cdots z_\lambda$ 上的一點,則我們可寫

$$f(z) = f(\zeta_\lambda) + \eta_\lambda, \qquad \text{其中 } |\eta_\lambda| < \frac{\varepsilon}{2l}.$$

現在若從 $z_0$ 到 $z_1$, $z_1$ 到 $z_2 \cdots\cdots$, $z_{n-1}$ 到 $z_n = z_0$ 作割線,卽得一多邊形 $P$. 從(2)我們知道 $P$ 仍完全含在 $G$ 內. 若我們在 $P$ 的每一邊上分別的(在直線的路上)取積分,卽得

$$\begin{aligned}{}^{(P)}\!\!\int &= \sum_{\lambda=1}^{n} \int_{z_{\lambda-1}}^{z_\lambda} f(z)\,dz = \sum_{\lambda=1}^{n} \int_{z_{\lambda-1}}^{z_\lambda} (f(\zeta_\lambda) + \eta_\lambda)\,dz \\ &= \sum_{\lambda=1}^{n} f(\zeta_\lambda) \int_{z_{\lambda-1}}^{z_\lambda} dz + \sum_{\lambda=1}^{n} \int_{z_{\lambda-1}}^{z_\lambda} \eta_\lambda\,dz = J_n + \sum_{\lambda=1}^{n} \int_{z_{\lambda-1}}^{z_\lambda} \eta_\lambda\,dz,\end{aligned}$$

故

$$\left|{}^{(P)}\!\!\int - J_n\right| \leqq \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2l} \left|z_\lambda - z_{\lambda-1}\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

由此得

$$\left|{}^{(C)}\!\!\int - {}^{(P)}\!\!\int\right| = \left|\left({}^{(C)}\!\!\int - J_n\right) - \left({}^{(P)}\!\!\int - J_n\right)\right|$$

$$\leqq \left|{}^{(C)}\!\!\int - J_n\right| + \left|{}^{(P)}\!\!\int - J_n\right| \leqq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

於是，照最初所說的，

$${}^{(C)}\!\!\int f(z)dz = 0,$$

此卽我們所要證明的．

證法中的第三步可簡述如下：　因爲在任意一個多邊形上的積分恆等於 0，又因任意一個路 $C$，可以用割線多邊形代替，使代替之後，與用 $C$ 本身的結果，其差別任意的小，故沿 $C$ 所取的積分不能異於 0．

## § 17　簡單的推論與擴充

1.　設 $G$ 爲任意一個域，又設 $f(z)$ 在 $G$ 內是正規的，則祇要 $C$ 是在 $G$ 內的一個閉路，而 $C$ 不包圍任何不屬於 $G$ 的點，

$${}^{(C)}\!\!\int f(z)dz = 0$$

因爲主要定理的證明，可以不加修改的應用於這一款．

2.　設 $C$ 爲一個閉路又設對於函數 $f(z)$，我們祇知道他在 $C$ 上的每一點與在被 $C$ 所包圍的域中的每一點都是正規的，則

$${}^{(C)}\!\!\int f(z)dz = 0$$

證：　因 $f(z)$ 在 $C$ 的每一點 $z$ 上是正規的，所以（參看 § 10，第 24 頁）以 $C$ 上每一點爲中心，我們可以作一個圓形的隣域，使 $f(z)$ 在這隣域內是正規的．　從海波二氏定理我們知道，在這些圓中，有盡多個已可以將 $C$ 掩蓋．　現在被 $C$ 所包圍的那個域，添上這有盡多個圓的不在此

域內的部分成爲一個單連通域 $G$，這域 $G$ 含 $C$ 在內，且在 $G$ 內，$f(z)$ 爲正規的． 現在從主要定理，即可推得本段的新結論．

3. 設 $f(z)$ 在一個域 $G$ 內爲單值而正規的． 又設在 $G$ 內有兩個不相交的閉路 $C_1$ 與 $C_2$ ❶ 設 $C_2$ 整個包圍在 $C_1$ 之內，而兩者之間的環形域完全含在 $G$ 內，則——無論 $C_2$ 的內部有無 $G$ 的界點——下式恆爲正確：

$$\int^{(C_1)} f(z)dz = \int^{(C_2)} f(z)dz.$$

證： 我們用完全含在環形域內的，彼此不相交的兩個輔助路 $c'$ 與 $c''$ ❷ 將 $C_1$ 與 $C_2$ 兩路相連接． 此環形域被他們分成兩個單連通域，在這兩域內與他們的邊界上 $f(z)$ 是正規的． 從 2 我們知道，在這兩個邊界上的積分 $=0$，故其和亦 $=0$． 但在相加時，按 § 14，2，沿輔助路上的積分彼此相消，所餘的是

$$\int^{(+C_1)} + \int^{(-C_2)} = 0, \quad \text{亦即} \quad \int^{(C_1)} = \int^{(C_2)},$$

其中 $C_1$ 與 $C_2$ 的方向都是算學的正向． 於是證明已完成．

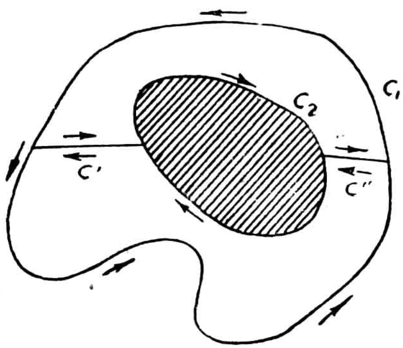


圖 3

例： 從 § 13，例 5 我們知道

$$\int^{(C)} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i,$$

其中 $C$ 爲以 $z_0$ 爲中心的一個圓． 用剛才所證明的定理，我們知道，祇要 $C$ 是任意一個圍繞着點 $z_0$ 一次的，無重點的閉路，那個積分的值即完全與以上的相同． 對於一切在 § 13，例 5

❶ 我們應假設 $C_1$ 與 $C_2$ 各無重點——譯者

❷ $c'$ 與 $c''$ 亦無重點——譯者

內的積分,也可以推得類似的結果.

4. 完全相似的我們證明

**定理** 設在路 $C_0$ 的內部有彼此不相交的諸路 $C_1$, $C_2$, ……$C_m$, 每個不包圍其他任意一個. 又設在 $C_0$, $C_1$, $C_2$, ……$C_m$ 上與在圍於 $C_0$ 內而圈在 $C_1, C_2,$……$C_m$ 之外的域內〔我們稱這樣的一域爲 $C_{0,\, m+1}$ 連通((m+1)-fach zusammenhangend)域〕 $f(z)$ 是單值而正規的,則

$$^{(C_0)}\int = {}^{(C_1)}\int + {}^{(C_2)}\int + \cdots\cdots + {}^{(C_m)}\int .$$

**這裏的證明完全與2相仿. 圖4中的箭頭,表示積分的路.**

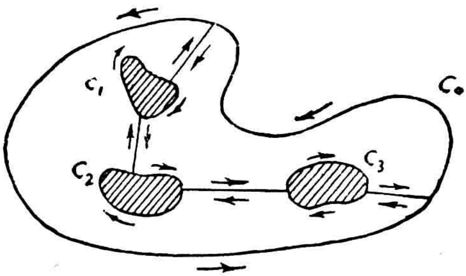


圖 4

**例:** 在下面積分內,將被積函數拆開,我們得

$$^{(C)}\int \frac{2z-1}{z^2-z}dz = {}^{(C_1)}\int \frac{dz}{z} + {}^{(C_2)}\int \frac{dz}{z-1} = 4\pi i,$$

其中閉路 $C$ 圍繞 0 與 1 兩點, 閉路 $C_1$ 祇圍繞 0, 閉路 $C_2$ 祇圍繞 1.

5. **定理:** 設 $f(z)$ 爲在單連通域 $G$ 內綿續的一個函數, 又設對於 $G$ 內任意兩點 $z_0$ 與 $z$, 積分❶

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$$

與路無關,祇須此路是含在 $G$ 內❷ 這樣, 則若令積分下限 $z_0$ 爲固定的, 積分之值即爲積分上限 $z$ 的一個正規函數 $F(z)$. 此外, 對於每一個在 $G$ 內的 $z$, $F'(z) = f(z)$.

❶ 在一個定限積分內,我們當然可以用任何方法去表示積分變法. 此處, 我們用 $\zeta$ 來代表積分變數而 $z$ 自然代表任意的可是在計算積分的時候是固定的一點. 這種記法,以後亦常採用.

❷ 例若 $f(z)$ 在 $G$ 內是正規的則此積分必與路無關.

證：　根據假設，$F(z)$ 在 $G$ 內的值，無論如何是被這個積分唯一的確定．　現在我們還要證明，當 $z'$ 充分的與 $z$ 相近時（參看 § 10，第一形式），

$$\left| \frac{F(z')-F(z)}{z'-z} - f(z) \right| < \varepsilon.$$

因 $z$ 是 G 的一個內點，所以他的某一個隣域，仍然完全含在 $G$ 內；我們想像 $z'$ 是在這隣域內的一點．　於是從 § 14, 1,

$$F(z') - F(z) = \int_z^{z'} f(\zeta) d\zeta,$$

而照假設，這個積分所用的路是任意的，所以我們就可以取連 $z$ 與 $z'$ 的直線爲路．

現在，因爲函數 $f(z)$ 是綿續的，我們祇要把含 $z'$ 在內的那個 $z$ 的隣域取得充分的小，卽可以令

$$f(\zeta) = f(z) + \eta$$

其中的 $\eta$ 對於在線段 $z \cdots\cdots z'$ 上一切的 $\zeta$，適合

$$|\eta| < \varepsilon$$

但這樣則

$$F(z') - F(z) = (z'-z)f(z) + \int_z^{z'} \eta d\zeta,$$

由此，更根據 § 14, 5，得

$$|F(z') - F(z) - (z'-z)f(z)| \leqq \varepsilon |z'-z|$$

而我們所要證的結果，立刻可以推得．

例：　由此定理，我們知道 $\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$ 在每一個含點 $+1$ 而不含點 0 的單連通域內，例如在"右"半平面內（參考 § 1 $f$）是一個正規函數．

習題：　設 $f(z)$ 在 $G$ 內爲正規的，又設已知一個函數 $F(z)$，有以下性質：對於一切在 $G$ 內的點

$$F'(z) = f(z)$$

若 $z_0$, $z_1$, 與積分所取的路皆在 $G$ 內，試證

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0)$$

# 第五章　科犀的幾個積分公式

## § 18.　主要公式

**科犀積分公式**(Cauchysche Integralformel)：在與科犀定理同樣的的假設之下，公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int^{(C)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta \quad ❶$$

成立，其中 $z$ 爲 $C$ 內部的一點．

根據這個定理，我們知道：　若對於一個函數，我們祇知道他在一個域 $G$ 內是正規的，又若沿着一個 $G$ 內的閉路 $C$ 上，他的值我們也知道，而此路不包圍不屬於 $G$ 的點，則在 $C$ 內部的每點，這函數的值立刻可以決定．　從這個解釋，可知此定理是特別的值得注意，他指出一個正規函數的值，彼此之間無形中有很密切的聯繫，此聯繫是如此的，他在 $C$ 上的值完全決定他在 $C$ 內部的值．　適合 § 8 裏的定義的最普遍也就是最任意的函數顯然不能有這類的性質．

證：

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(C)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int^{(C)}\frac{f(z)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int^{(C)}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta$$

從 § 13, 3 與 § 17, 3, 上式右端的第一個積分 $J_1=f(z)$．　根據 § 17, 3, 在第二個積分 $J_2$ 內，路 $C$ 可用任意另一個圍繞着 $z$ 的路來替代，例如我們可用一個以 $z$ 爲中心的小圓 $c$ 來替 $C$，故

$$J_2=\frac{1}{2\pi i}\int^{(c)}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta$$

若我們將 $c$ 的半徑 $\rho$ 選得如此小，使 $c$ 上每一點都適合

$$|\,f(\zeta)-f(z)\,|<\varepsilon,$$

---

❶　於此讀者可參考第 45 頁底註

——而由於$f(\zeta)$的綿續性，這是必定可能的——則按 § 14, 5, 得

$$|J_2| \leqq \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{\rho}\quad 2\pi\rho = \varepsilon,\quad \text{亦即}\quad J_2 = 0.$$

所以

$$J_1+J_2=\frac{1}{2\pi i}\int^{(C)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=f(z),$$

而證明完成.

## § 19 關於各級導微函數的積分公式

設 $L$ 爲任意一個路，又設 $\phi(z)$ 爲在 $L$ 上確定的而且綿續的一個函數，則對於每個不在 $L$ 上的點 $z$，積分

(1)
$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(L)}\frac{\phi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

有一個確定的值，於是在一切不屬於 $L$ 的點，這積分便決定一個單值函數 $f(z)$. 不但這樣，關於這函數，我們還有

**定理 1**: 在每一個不含有 $L$ 的點的域 $G$ 內，(1) 式所決定的函數 $f(z)$ 是正規的而且他的導微函數適合

(2)
$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int^{(L)}\frac{\phi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta.$$

證: 在這裏我們須要證明（參看 § 10, 第三形式）的是：當 $G$ 內的 $z$ 已經固定則

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{f(z_n)-f(z)}{z_n-z}-\frac{1}{2\pi i}\int^{(L)}\frac{\phi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta\right\}=0$$

祇須其中 $z_n$ 都含在 $G$ 內而且趨於 $z$. 但從 (1) 式，我們得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int^{(L)}\frac{\phi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\qquad f(z_n)=\frac{1}{2\pi i}\int^{(L)}\frac{\phi(\zeta)}{\zeta-z_n}d\zeta$$

所以

$$\frac{f(z_n)-f(z)}{z_n-z}=\frac{1}{2\pi i}\int^{(L)}\frac{\phi(\zeta)}{z_n-z}\left[\frac{1}{\zeta-z_n}-\frac{1}{\zeta-z}\right]d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int^{(L)}\frac{\phi(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z_n)}\,d\zeta$$

若以 $A_n$ 表示在我們所要證明的式中，紐括內的部分，則由上式得

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int^{(L)}\phi(\zeta)\left[\frac{1}{(\zeta-z)(\zeta-z_n)} - \frac{1}{(\zeta-z)^2}\right]d\zeta$$

$$= \frac{z_n - z}{2\pi i}\int^{(L)}\frac{\phi(\zeta)}{(\zeta-z)^2(\zeta-z_n)}\,d\zeta$$

設 $M$ 爲具以下性質的一個正數沒有一個 $\zeta$ 可以使以下的，在 $L$ 上綿續的函數

$$\left|\frac{\phi(\zeta)}{(\zeta-z)^2(\zeta-z_n)}\right|$$

比 $M$ 大（我們很容易看出，這樣的一個數 $M$ 是存在的）則若 $L$ 之長爲 $l$

$$|A_n| < \frac{1}{2\pi}M\cdot l\,|z_n - z|,$$

故

$$A_n \longrightarrow 0$$

這也就是所要證的.

公式(2)所說的顯然不外是：$f(z)$ 的導微函數，可用積分號後導微法，從確定 $f(z)$ 的公式(1)求得.

完全和以上相似的，我們要證明這導微法還可以重複一次以至於任意多次：

**定理 2**：(1)式所確定的函數 $f(z)$ 有各級的導微函數而且

(3)
$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i}\int^{(L)}\frac{\phi(\zeta)}{(\zeta-z)^3}\,d\zeta,$$

又普遍的，

(4)
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int^{(L)}\frac{\phi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta,$$

其中 $n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$[1]

(3)的證明我們敍述如下：利用(2)，得

$$B_n = \frac{f'(z_n)-f'(z)}{z_n - z} - \frac{2!}{2\pi i}\int^{(L)}\frac{\phi(\zeta)}{(\zeta-z)^3}\,d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int^{(L)}\phi(\zeta)\left[\frac{1}{z_n-z}\left(\frac{1}{(\zeta-z_n)^2} - \frac{1}{(\zeta-z)^2}\right) - \frac{2}{(\zeta-z)^3}\right]d\zeta,$$

[1] 若我們按照習慣令 $0!$ 等於 1，則當 $n=0$ 時，(4) 化成公式 (1)，故公式 (4) 包括 (1) 在內

而 (3) 式就等於說: $B_n \longrightarrow 0$.

但這在被積函數中，方括內的部分 $= (z_n - z)\dfrac{3\zeta - z - zz_n}{(\zeta - z)^3(\zeta - z_n)^2}$，故若 $M_1$ 爲一正數，其意義與以上的 $M$ 相似，則

$$|B_n| \leqq \frac{1}{2\pi} M_1 \cdot l \cdot |z_n - z| \quad \text{所以} \quad B_n \longrightarrow 0,$$

這就是所要證明的.

利用這個結果，我們現在可以推得正規函數的一種重要的性質. 以前祇要一個（單值的）函數有第一級導微函數，我們即稱之爲正規的. 對於實變數函數我們知道，從這個假設，不能推得關於這導微函數的任何性質：他簡直不一定是綿續的. 反之，對於正規的複變函數，則有以下特別可注意而且基本的

**定理 3:** 若一個（單值的）複變函數在 $G$ 內有第一級導微函數，則一切高級的導微函數皆存在（由此更知他們都是綿續的）

證: 設 $C$ 爲 $G$ 內的一個任意的閉路，而 $z$ 含在 $C$ 的內部，則因 $f(z)$ 在 $C$ 上爲綿續的，從定理 1，知函數

$$\frac{1}{2\pi i} \int^{(C)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

在 $C$ 內部任意一點爲正規的，而且是可以任意多次導微的. 根據 § 18 的科犀積分公式，此函數就是 $f(z)$ 本身，所以 $f(z)$ 在 $C$ 內部同樣的也有各級的導微函數. 因爲 $C$ 可以完全任意的選擇，故對於 $G$ 的每一點，這個結果都爲正確.

**副定理:** 在與主要公式同樣的假設之下，以下各式亦成立:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int^{(C)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta,$$

其中 $n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$

從這個基本的結果我們更得一個重要的推論:

**摩列拉定理:** (Satz von Morera) 若 $f(z)$ 在單連通域 $G$ 內爲綿續的，且對於在 $G$ 內的任意一個閉路 $C$,

$$\int^{(C)} f(z) dz = 0,$$

則 $f(z)$ 在 $G$ 內爲正規的（＝科犀定理的轉理）

證：　像我們從主要定理（§15）的第二方式推得第一方式那樣，我們在這裏推知

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

的值與所取的路無關，而因此他（參考 §17 定理 5）代表一個在 $G$ 內正規的函數 $F(z)$，適合 $F'(z)=f(z)$．　但從上面所得的結果，$F(z)$ 旣是正規的函數，他在 $G$ 內有第二級導微函數，亦即 $f(z)$ 在 $G$ 內有第一級導微函數．　所以 $f(z)$ 在 $G$ 內爲正規的．

習題：　試將公式 (4) 對於 $n=3$ 及對於任意的 $n$ 的證明完全補出來．

# 第 三 編

# 級數　解析函數之展爲級數

## 第六章　變項級數

如在第 23 頁上所說，我們假設讀者對於複常數項無盡級數的理論已經熟悉．因此我們現在就可以對於變項級數（Reihe mit veränderlichen Gliedern）作一個較普遍的研究．

### § 20　收斂域

設

$$f_0(z),\ f_1(z),\ \cdots\cdots,\ f_n(z),\ \cdots\cdots$$

爲一個無盡敘列，其每項爲任意的函數（§ 8）．設已知某些點 $z$ 屬於所有這些函數的定義域．若 $z$ 爲諸點中的某一個，則下列級數

$$f_0(z)+f_1(z)+f_2(z)+\cdots\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(z)$$

或收斂或否．我們用 $M$ 來代表具有下列性質的一切點所構成的組：在這些點，級數內一切函數 $f_i(z)$ 是確定的，而且級數是收斂的．$M$ 稱爲上面級數的收斂域（*Konvergenzbereich*）．

對於普通的冪級數（Potenzreihe）則有下面特殊的假設：

$$f_n(z)=a_nz^n \quad 或 \quad =a_n(z-z_0)^n$$

這些冪級數的第一個重要的特性是：他的收斂域 $M$ 爲某一個以 $z_0$ 爲中心的圓的內部——所謂收斂圓（*Konvergenzkreis*）——，有時包括圓周上的某些點．

我們將要用一種方法，證明這個事實，同時從這方法，我們可以得到

收斂圓的半徑.

我們討論以下（非負的）實數所構成的（可枚舉的）組

$$|a_0|, \quad |a_1|, \quad |\sqrt{a_2}|, \cdots\cdots, |\sqrt[n]{a_n}|, \cdots\cdots$$

這個組當然是左方有欄的（有下欄的）. 我們要證明：

1. 若這個組在右方是無欄的，則 $\Sigma a_n(z-z_0)^n$ 在任何異於 $z_0$ 的點 $z$，都是不收斂的.

反之，若他在右方是有欄的，而且若 $\mu$ 爲他的上限（§ 5），則

2. 當 $\mu=0$ 時，$r=\infty$，

3. 當 $\mu>o$ 時，$r=\dfrac{1}{\mu}$.

所以在 $1:\mu$ 是有意義時的款我們有

**科阿二氏定理** (**Cauchy-Hadamardsche satz**)： 公式

$$r=\frac{1}{\mu}=\frac{1}{\overline{\lim}|\sqrt[n]{a_n}|}$$

決定冪級數的準確的收斂半徑 (Konvergenzradius) $r$. 當 $|z-z_0|<r$ 時，級數爲絕對 (*absolut*) 收斂的，當 $|z-z_0|>r$ 時 級數爲發散的 (*divergent*).

證： 因 $z-z_0$ 可用 $z$ 來代替，所以我們可以假設 $z_0=0$. 這樣，再假設

1. $\Sigma a_n z^n$ 對於一個不等於零的值 $z=z_1$ 是收斂的. 這時即有一個數 $K>1$，使對於一切 $n=0, 1, 2, \cdots\cdots$

$$|a_n z_1^n|<K.$$

因爲 $z_1\neq 0$，我們由此得

$$|\sqrt[n]{a_n}|<\frac{\sqrt[n]{K}}{|z_1|}<\frac{K}{|z_1|},$$

就是說，我們所討論的組，一定是有欄的，而定理的第一部分已經證明.

2. 今設 $\mu=0$，我們要證明，對於每一個 $z=z_1$，我們的級數都是收斂的 但 $\mu=0$ 的意義是（參看 § 5，第 11 頁）對於一切充分大的 $n$

$$|\sqrt[n]{a_n}|<\varepsilon; \quad 例如 \quad <\frac{1}{2|z_1|}.$$

這樣則

$$|a_n z_1{}^n| < \frac{1}{2^n},$$

由此我們立刻知道 $\Sigma a_n z_1{}^n$ 是絕對收斂的，因為 $\frac{1}{2^n}$ 原是收斂的.

3. 最後，設 $\mu$ 是一個異於零的有限的數，我們要證明：對於每一個 $z=z_1$ 若其中 $|z_1| < \frac{1}{\mu}$, $\Sigma a_n z^n$ 是絕對收斂的，而且對於每一個 $z_2$ 若其中 $|z_2| < \frac{1}{\mu}$, 這級數是發散的.

按照 $\mu$ 的意義，則對於一切充分大的 $n$,

$$|\sqrt[n]{a_n}| < \mu + \varepsilon, \quad 例如 \quad < \frac{1+|z_1|\mu}{2|z_1|};$$

因為 $1 > |z_1|\mu$, 這分數的確是

$$> \frac{|z_1|\mu + |z_1|\mu}{2|z_1|} = \mu,$$

也就是 $= \mu + \varepsilon$. 於是

$$|a_n z_1{}^n| < \left(\frac{1+|z_1|\mu}{2}\right)^n,$$

也就是小於一個（因 $|z_n|\mu < 1$）眞分數的 $n$ 次方. 從此即知 $\Sigma a_n z_1{}^n$ 是絕對收斂的.

完全同樣的，我們可以證明，當 $|z_2| > \frac{1}{\mu}$ 時，$\Sigma a_n z_2{}^n$ 是發散的.

至於在收斂圓的周界上，這級數在那些點是收斂的，在那些點是不收斂的，這定理沒有告訴我們什麼. 並且這個也隨着級數而各異：$\Sigma z^n$ 不在任何界點上收斂，$\Sigma \frac{z^n}{n^2}$ 在一切界點上收斂，$\Sigma \frac{z^n}{n}$ 在某些（但非一切）界點上收斂.❶

若 $f_n(z)$ 的性質比較複雜，則要決定一個精確的收斂域多半困難.

但在任何情形之下，一個級數 $\Sigma f_n(z)$ 的值，在他的收斂域內每一點，都是一個確定的數，所以（參看 § 8）對於 $M$ 內一切的點他都是一個確定的函數 $f(z)$. 這無盡級數是一個運算法則，按照 § 8 所說，從這法則可以確定一個函數. 我們說這級數在 $M$ 內代表函數 $f(z)$, 或 $f(z)$ 在 $M$ 內可以展為級數， 例如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ 在幺圓內代表函數 $\frac{1}{1-z}$, 或這函數在幺圓內可展為該冪級數.

❶ 對於這三個級數 $\gamma$ 都是 $=1$.

綿續而可導微的函數我們既已認為特別的有價值，以下的問題自然發生：什麽時候一個級數代表一個如此的正規函數？

若要對於這個問題給一個普遍的答案；我們需要齊收斂的概念，這概念我們在下一節內要加以討論.

**習題：** 1．在以下各款決定冪級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 的收斂半徑.

$$\alpha)\ a_n = \frac{1}{n^n},\qquad \beta)\ a_n = n\log n,\qquad \gamma)\ a_n = \frac{n!}{n^n}.$$

2．在以下各款，決定級數 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 的收斂域：

$$\alpha)\ f_n(z) = \frac{1}{n^z},\ \text{亦即}\ = e^{-z\log n}\ (\log n \geqq 0),$$

$$\beta)\ f_n(z) = \frac{z^n}{1-z^n}.$$

從此更決定級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}\quad \text{與}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$$

的收斂域.

## § 21 齊收斂性

我們說級數 $\Sigma f_n(z)$ 的收斂域為 $M$，就等於說：若 $z_1$ 為 $M$ 的任意一點，則已給 $\varepsilon>0$，一個數 $n_1=n_1(\varepsilon)$ 可以決定，使對於一切適合 $n\geqq n_1$ 的 $n$ 與一切適合 $p\geqq 1$ 的 $p$，

$$|f_{n+1}(z_1)+f_{n+2}(z_1)+\cdots\cdots+f_{n+p}(z_1)|<\varepsilon.$$

若我們在 $M$ 中選出另外一點 $z_2$，則相當於 $z_2$ 又可決定一個數 $n_2$，餘類推．所以在已給 $\varepsilon$ 之後，相當於 $M$ 的每一點，有一個整數 $n_z=n_z(\varepsilon)$，具以下性質，若先將 $z$ 替入級數內，再取所得級數第 $n_z$ 項後面的任意長的一段，則其絕對值 $<\varepsilon$．$n_z$ 的大小——在已給 $\varepsilon$ 與 $z$ 之後，假定我們儘可能的取最小的 $n_z$——可用來量這級數的收斂速度：若 $n_z$ 很大，則級數在 $z$ 點收斂得慢，反之則快.

現在若有一個數 $N$，比一切相當於 $M$ 中任意一點 $z$ 的 $n_z$ 大，則若 $n$，$p$ 為任意適合 $n\geqq N$，$p>1$ 的數，對於 $M$ 的每一點

$$|f_{n+1}(z)+f_{n+2}(z)+\cdots\cdots+f_{n+p}(z)|<\varepsilon$$

總是眞確；因為 $n$ 既 $\geqq N$，也大於任何各個的 $n_z$．所以剛才所說的用來

量收斂速度的數，對於 $M$ 一切的點，都可以算是相同。這時我們簡單的說：這級數在 $M$ 內是**齊收斂的**.

因此我們有以下的

**定義**：設已給級數 $\Sigma f_n(z)$ 與域 $M$，❶ 若已選定 $\varepsilon>0$，一個正整數 $N=N(\varepsilon)$ 可以決定，使對於一切適合 $n\geqq N$ 的 $n$，一切適合 $p\geqq 1$ 的 $p$ 與一切屬於 $M$ 的 $z$，

$$(1)\qquad |f_{n+1}(z)+f_{n+2}(z)+\cdots\cdots+f_{n+p}(z)|<\varepsilon,$$

則我們說，級數 $\Sigma f_n(z)$ 在 $M$ 內是齊收斂的.

因為級數在點 $z$ 是收斂的，又因我們可以使 $p$ 無限的增大，所以，若級數在 $M$ 為齊收斂的，則對於一切屬於 $M$ 的 $z$ 及一切適合 $n\geqq N$ 的 $n$，

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} f_\nu(z)\right|\leqq\varepsilon$$

按上面的定義，則例如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ 在他的收斂域內（即么圓內）就不是齊收斂的，因爲祗要我們在線段 $0\cdots\cdots+1$ 上，把 $z$ 取得充分的靠近 $+1$，即無論 $n$ 有何值，總可以使 $\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty} z^\nu=\dfrac{z^{n+1}}{1-z}$ 變成任意的大.

**定理 1**：一個冪級數在每個與他收斂圓同心而較小的圓內是齊收斂的——所以收斂的齊一性祇在邊界的附近纔會破壞.

證：設 $\Sigma a_n(z-z_0)^n$ 的收斂半徑為 $r>0$；又設 $\rho<r$，而 $z$ 為適合 $|z-z_0|\leqq\rho$ 的任意一點；則對於一切如是的 $z$，

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu(z-z_0)^\nu\right|\leqq\sum_{\nu=n+1}^{n+p}|a_\nu|\rho^\nu.$$

但因 $z=z_0+\rho$ 點是在收斂圓內部，$\Sigma|a_n|\rho^n$ 為收斂的故若已給 $\varepsilon>0$，即可決定一個數 $n$，使對於一切適合 $n\geqq N$ 的 $n$ 與一切適合 $p\geqq 1$ 的 $p$，

$$|a_{n+1}|\rho^{n+1}+\cdots\cdots+|a_{n+p}|\rho^{n+p}<\varepsilon.$$

於是同樣的，對於一切適合 $|z-z_0|\leqq\rho$ 的 $z$，一切適合 $n\geqq N$ 的 $n$，與一切適合 $p\geqq 1$ 的 $p$，

$$|a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}+\cdots\cdots+a_{n+p}(z-z_0)^{n+p}|<\varepsilon,$$

---

❶ 照以上所說，凡是齊收斂總是在一個域或一個無盡點組 $M$ 內才談得到，在個別的點上永遠談不到.

這就是所要證明的.

在一切款中,下面的檢驗法爲眞確:

**定理 2:** 設諸正數 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots\cdots, \gamma_n\cdots\cdots$ 具以下性質：若 $M'$ 爲級數 $\Sigma f_n(z)$ 的收斂域的一部分,則對於一切 $M'$ 的點 $z$,

$$|f_n(z)| \leqq \gamma_n \qquad (n=0,1,2,\cdots\cdots),$$

而且

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n$$

爲收斂的;這樣則 $f_n(z)$ 在 $M'$ 內爲齊收斂的.〔**外氏收斂定理(Weierstrass scher Konvergenzsatz)**〕

這定理的證明與剛纔所述的特款的證明完全相仿.

習題: 1. 討論 § 20, 習題 2 中所給各級數之齊收斂性.

2. 試證冪級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ 在他整個收斂域內爲齊收斂的.

## § 22. 解析函數的齊收斂級數

現在我們進一步假設全部的函數 $f_n(z)$ 爲解析的,這樣我們要證明,這級數所代表的函數也是解析的. 更精確些:

設無盡數列 $f_0(z), f_1(z), \cdots\cdots$ 中,一切函數 $f_n(z)$ 在一個同一的域 $G$ 內皆爲正規的,又設級數 $\Sigma f_n(z)$ 在 $G$ 的每一個閉的子域(Teilgebiet)$G'$ ❶ 爲齊收斂的.則以下三定理爲眞確:

**定理 1:** 這級數代表在 $G$ 內綿續的一個函數 $f(z)$.

**定理 2** 若將這級數沿着每一個在 $G$ 內的路 $L$ 逐項積分所得的級數是收斂的,而且就代表 $f(z)$ 沿路 $L$ 的積分,用符號表示:

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}^{(L)}\!\!\int f_n(z)dz \quad \text{是收斂的而且} \quad = {}^{(L)}\!\!\int f(z)dz$$

**定理 3:** $f(z)$ 爲在 $G$ 內正規的一個函數,而且若將代表 $f(z)$ 的級數逐項導微 $p$ 次所得的每個級數,在 $G$ 內每點爲收斂的——並且在 $G$ 的每一個閉子域 $G'$ 內爲齊收斂的——又在 $G'$ 內,這級數代表 $f(z)$ 的第 $p$ 級導微函數;用符號表示:

❶ 也就是說在每一個連界點都含於 $G$ 內的閉域 $G'$ 內.

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n{}^{(p)}(z) \text{ 在 } G \text{ 內爲收斂的而且 } = f^{(p)}(z).$$

證:

1. 設已給 $\varepsilon>0$ 與在 $G$ 內的一點 $z_0$. 我們祇須證明, 對於一切含在 $G$ 內而充分靠近 $z_0$ 的 $z$,

$$|f(z)-f(z_0)|=|\Sigma f_n(z)-\Sigma f_n(z_0)|<3\varepsilon.$$

爲這個目的,我們先選一個以 $z_0$ 爲中心而含於 $G$ 內的(連邊界在內)圓 $G'$, 若令

$$\sum_{n=0}^{N} f_n(z)=A(z), \qquad \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(z)=R(z),$$

則根據 § 21, 我們可以決定 $N$, 使對於一切屬於 $G'$ 的 $z$,

$$|R(z)|\leqq\varepsilon.$$

現在若我們將 $z$ 限制在含於 $G$ 內的一個 $z_0$ 的隣域內,這隣域是如此之小,使在屬於他的一切 $z$,

$$|A(z)-A(z_0)|<\varepsilon.$$

——因爲 $A(z)$ 是有盡多個綿續函數的和,他本身也是綿續的, 所以如此的一個隣域是存在的, ——則的確的.

$$|\Sigma f_n(z)-\Sigma f_n(z_0)|\leqq|A(z)-A(z_0)|+|R(z)|+|R(z_0)|$$
$$<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon,$$

這就是定理 1 內所要證的.

2. 因爲我們已經證明 $f(z)$ 是綿續函數, 所以無論如何第二個定理內所述的 $f(z)$ 的積分是存在的. 並且根據 § 14 定理 4, 我們得

$$\int^{(L)} f(z)dz=\int^{(L)} A(z)dz+\int^{(L)} R(z)dz;$$

但從同一個定理,我們得

$$\int^{(L)} A(z)dz=\int^{(L)} f_0(z)dz+\int^{(L)} f_1(z)dz+\cdots\cdots+\int^{(L)} f_N(z)dz.$$

由此得

$$\left|\int^{(L)} f(z)dz-\sum_{n=0}^{N}\int^{(L)} f_n(z)dz\right|=\left|\int^{(L)} R(z)dz\right|\leqq\varepsilon\cdot l,$$

其中 $l$ 表示路 $L$ 的長. 但因祇要適當的選擇 $\varepsilon$, 可以令 $\varepsilon l$ 任意的小, 所以上式表示

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int^{(L)} f_n(z)dz \quad \text{爲收斂的, 而且} \quad =\int^{(L)} f(z)dz.$$

我們現在發現, 在上面的證法中, 我們祇須假設 $\Sigma f_n(z)$ 沿着路 $L$ 是齊收斂的, 故我們可將 § 14, 4 推廣而得下面的定理:

**定理 4:** 一個(綿續函數的)無盡級數也可以逐項積分, 祇要這級數在路上是齊收斂的.

3. 若 $C$ 爲 $G$ 內的任意的閉路, 則 $\Sigma f_n(z)$ 在 $C$ 上是齊綿續的, 所以, 根據 2:

$$\int^{(C)} f(z)dz=\int^{(C)}[\Sigma f_n(z)]dz=\Sigma\int^{(C)} f_n(z)dz,$$

又因按科犀的積分定理, 這級數的項各個的 $=0$, 所以上式 $=0$. 但 $C$ 在 $G$ 內是任意取的, 故按摩列拉定理 $f(z)$ 在 $G$ 內是正規的.

現在若 $G'$ 爲 $G$ 的任意一個閉的子域, 則我們可以選擇 $C$, 將 $G'$ 包圍而與 $G'$ 沒有公共點. 於是 $C$ 的點與 $G$ 的點的距離的下限 $\rho$ 仍爲正的.

現在, 在 $G$ 內一點 $z$, $f(z)$ 的第 $p$ 級導微函數必然存在. 根據和上面同樣的理由,

$$f^{(p)}(z)=\frac{p!}{2\pi i}\int^{(C)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}}d\zeta$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p!}{2\pi i}\int^{(C)}\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}}d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}f_n^{(p)}(z).$$

於此, 定理 3 的第二部分已經證明.

至於這個級數($p$ 是固定的)在 $G'$ 還是齊收斂的, 我們可以從下面易於驗證的估計式❶ 看出來.

❶ 估計式是德文 abschätzung 的譯名, 所謂 abschätzung 通常是一個不等式, 表示某一個數量的值, 不能超過(或低於)另一個數量, 而這另一個數量的值, 或爲已知, 或比較上易於估計——譯者.

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{n+r} f_\nu^{(p)}(z)\right| = \left|\frac{p!}{2\pi i}\int^{(C)} \frac{\sum\limits_{\nu=n+1}^{n+r} f_\nu(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}} d\zeta\right| \leqq \frac{p!}{2\pi}\cdot l\frac{\varepsilon}{\rho^{p+1}}.$$

（於此可更參看本節的習題 2.）

在冪級數上的應用：

1. 設 $f_n(z)=a_n(z-z_0)^n$, $(n=0,1,2\cdots\cdots)$, 則 $\Sigma f_n(z)$ 就是冪級數 $\Sigma a_n(z-z_0)^n$. 設收斂半徑 $r$(§20)$>0$, 又設 $\rho$ 爲在 0 與 $r$ 間 $(0<\rho<r)$ 選出的一個數，則我們可以將圓 $|z-z_0|<r$ 當作域 $G$, 又根據 §21 定理 1, 一個以 $\rho$ 爲半徑, $z_0$ 爲圓心的圓, 可以當作 $G$ 的子域 $G'$. 於是我們得

**定理 5:** 一個冪級數代表一個在他收斂圓的內部正規的函數 $f(z)$; 這函數的導微函數可以從冪級數用逐項導微法求得, 並且如此所得的冪級數與所給的冪級數有相同的收斂半徑：也就是當 $|z-z_0|<r$ 時

$$f^{(p)}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots\cdots(n-p+1)a_n(z-z_0)^{n-p}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+p)a_{n+p}(z-z_0)^n$$

爲收斂的.

特殊的,

$$f^{(p)}(z_0)=p!a_p,\quad a_p=\frac{1}{p!}f^{(p)}(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int^{(C)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{p+1}}d\zeta$$

其中 $C$ 代表 $|z-z_0|=\rho$ 的圓周. 從最後一個公式——我們將 $p$ 寫作 $n$ ——更得很有用的科厙估計公式：

$$|a_n|\leqq\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\rho\cdot\frac{M}{\rho^{n+1}}=\frac{M}{\rho^n},$$

其中 $M$ 爲 $|f(z)|$ 在 $|z-z_0|=\rho$ 上的極大值.

習題： 1. 試檢察 § 20, 習題 2 內所述的級數, 在他的收斂域內是否代表一個解析函數.

2. 接着 §§ 12 與 14 中的習題,試證明：若在每個 $G'$ 內, 級數 $\Sigma f_n(z)$ 連同 $\Sigma|f_n(z)|$ 都是齊收斂的, 則定理 3 可補充如下：當 $p$ 固定時, 級數 $\Sigma|f_n^{(p)}(z)|$ 在 $G'$ 內也是齊收斂的.

# 第七章　解析函數之展爲冪級數

前一章的諸定理告訴我們，冪級數在他的收斂域內代表一個正規函數，但這個性質爲很多更普遍的級數所共有，因爲凡齊收斂級數，其每項本身爲正規函數的，都具此性質．故在解析函數的研究上，冪級數之所以重要，並不以這個性質爲基礎，其所以重要，倒是因爲以上事實的轉理也是眞確：每一個正規函數可以用一個冪級數來代表．所以從全部但凡可能的冪級數，就可以得到全部但凡可以想像的正規函數．

## § 23　展爲冪級數之可能性的證明

**展開法定理**：設 $f(z)$ 爲在某一個域 $G$ 內正規的一個函數，而 $z_0$ 爲 $G$ 的一個(內)點．則總有一個但祇有一個如下狀的冪級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

具以下性質：在 $z_0$ 的某一個隣域內，此級數爲收斂的，並且代表函數 $f(z)$．此外

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0),$$

而此級數的準確的收斂圓，爲以 $z_0$ 爲心而且具下列性質的最大的圓（我們設 $r$ 爲此圓的半徑）；$f(z)$ 在此圓內部一切的點，或者原來就是綿續與可導微的，或者可以解釋爲綿續與可導微的．(**戴勞開展法 Taylorsche Entwicklung**)．

**證**：設在以 $z_0$ 爲中心，$r$ 爲半徑的圓裏，選定任意一個內點 $z$，於是先要證明：若 $a_n$ 的意義如上所述，則

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ 爲收斂的而且 } =f(z)$$

因 $|z-z_0|=\rho<r$, 我們可以選擇 $\rho_1$, 供 $\rho<\rho_1<r$, 設 $k_1$ 爲以 $z_0$ 爲心, $\rho_1$ 爲半徑的圓周, 而 $\zeta$ 爲 $k_1$ 上的任意一點, 則

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}};$$

因

$$\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|=\frac{\rho}{\rho_1}<1$$

上面的特殊的等比級數當 $\zeta$ 在 $k_1$ 上時 (根據 §21 定理 2) 爲齊收斂的. 同樣的, 級數

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n$$

也有這性質. 若將上式兩端都沿着路 $k_1$ 取積分, 則在右方我們可以用逐項積分法,而且按 §22 定理 2, 所得的級數一定是收斂的. 所以, 若再用 $2\pi i$ 除上式兩端, 卽得

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(k_1)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int^{(k_1)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n d\zeta,$$

於是, 根據 §18 與 19, 我們又得

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\cdot(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,$$

這就是所要證明的.

至於上面所求得的展開式之所以是唯一的可能的, 我們從下面的定理立刻可以推知:

**關於冪級數的恒等定理.** 若兩個冪級數

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \quad 與 \quad \sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n$$

的收斂半徑都是正的，而且在 $z_0$ 的一個隣域中一切的點，或祇是在含在這隣域中而以 $z_0$ 爲一個凝聚點的無盡多個點，這兩個級數之值，完全相等，則他們彼此恆等

證：令 $z=z_0$，我們即得 $a_0=b_0$．假設現在已經證明，兩級數前的 $m$ 個係數完全相同，則在一切那無盡多個點

$$a_{m+1}+a_{m+2}(z-z_0)+\cdots\cdots=b_{m+1}+b_{m+2}(z-z_0)+\cdots\cdots$$

於此我們令 $z$ 經過那些點趨近（凝聚點）$z_0$，則因冪級數是代表綿續函數的，根據 § 9，第二形式，得

$$b_{m+1}=a_{m+1};$$

故兩個展開式恆等．

在實變函數之款，即使函數具有各級的導微函數，這函數還不一定像上面所說的那樣，可以展爲冪級數．　在此處則只要第一級導微函數是存在的，一切都隨之而得．

如以前所說過的，我們所求得的展開式，在以 $z_0$ 爲心而具以下性質的最大的圓 $K$ 內爲收斂的，這裏的性質是：在圓的內部，$f(z)$ 仍爲或可以解釋爲綿續與可導微的函數．

從此可以推知，在這個圓的圓周上至少必有一個點是沒有法子能歸入正規域以內的❶．

如此的點，我們稱爲函數的奇點（*Singulärer Punkt*）（欲得關於奇點的更詳細的性質參看第四編）於是我們可以說，

**定理 2：** 在一個冪級數的收斂圓的圓周上，這級數所代表的解析函數至少有一個奇點．

例：在 § 17,5，我們已經證明，$f(z)=\int_1^z\frac{d\zeta}{\zeta}$ 是 $z$ 的一個正規函數，祇要 $z$ 與積分所取的路是限制在右半平面的內部，所以 $f(z)$ 必可展爲一個冪級數，例如在 $z_0=+1$ 的一個隣域內，此時 $r$ 至少 $=1$．因

$$f'(z)=\frac{1}{z},\qquad f''(z)=-\frac{1}{z^2},\cdots\cdots,$$

$$f^{(n)}(z)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{z^n},\cdots\cdots$$

---

❶ 因爲若 $K$ 的圓周上一切的點，都仍然屬於 $f(z)$ 的正規域，則繞每一點可以作一個圓，也完全含在正規域內．按海波二氏定理，這圓周可以用有盡多個這樣的圓來掩蓋；現在已很明顯，在一切以 $z_0$ 爲中心的圓中，在其內部 $f(z)$ 可以解釋爲綿續與可導微的函數的，$K$ 並不是最大的一個．

故若 $z=z_0=1$，則

$$a_0=0,\quad a_1=1,\quad a_2=-\frac{1}{2},\cdots\cdots,a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n},\cdots\cdots$$

而

$$f(z)=(z-1)-\frac{1}{2}(z-1)^2+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n+\cdots\cdots;$$

從這式我們知道 $r$ 恰好 $=1$❶

將一個已給函數展爲冪級數時我們常常利用

**外氏二進級數定理** (**Weierstrassschen Doppelreihensatz**)：設對於 $n=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots$，所有的函數

$$f_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k{}^{(n)}(z-z_0)^k$$

至少當 $|z-z_0|<r$ 時爲正規的，又設

$$\begin{aligned}F(z)=\sum_{r=0}^{\infty} f_n(z)=&[a_0{}^{(0)}+a_1{}^{(0)}(z-z_0)+\cdots\cdots+a_k{}^{(0)}(z-z_0)^k+\cdots\cdots]\\&+[a_0{}^{(1)}+a_1{}^{(1)}(z-z_0)+\cdots\cdots+a_k{}^{(1)}(z-z_0)^k+\cdots\cdots]\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+[a_0{}^{(n)}+a_1{}^{(n)}(z-z_0)+\cdots\cdots+a_k{}^{(n)}(z-z_0)^k+\cdots\cdots]\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

當 $|z-z_0|\leqq\rho<r$ 時爲齊收斂的．則在同一縱列內的係數，依序排列所得的各級數都爲收斂的；又若對於 $k=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots$，令

$$a_k{}^{(0)}+a_k{}^{(1)}+\cdots\cdots+a_k{}^{(n)}+\cdots\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} a_k{}^{(n)}=A_k,$$

則

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k(z-z_0)^k$$

爲 $F(z)$ 的冪級數，而且至少當 $|z-z_0|<r$ 時爲收斂的❷

證：　按 §22，定理 3，當 $|z-z_0|<r$ 時 $F(z)$ 是正規的，所以以這樣的點 $z$ 爲中心，$F(z)$ 可以展爲冪級數，他的第 $k$ 個係數是

❶ 因爲在收斂圓的圓周上，不在右半平面內部的唯一的點是 0 點，所以祇有這一點可能是奇點，而按定理 2，他又必須是奇點．

❷ 就是說：在這裏的假設之下，我們可以將那無盡多的冪級數逐項相加．

$$= \frac{1}{k!} F^{(k)}(z_0) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f_n^{(k)}(z_0) = \sum_{r=0}^{\infty} a_k^{(n)} = A_k,$$

於是一切已經證明.

習題: 將 § 20 內的第二題所述的兩個級數展爲冪級數，對於第一個級數以 $z_0 = +z$ 爲中心，對於第二個以 $z_0 = 0$ 爲中心.

## § 24. 幾種推論

從科犀定理與利用這定理所得的正規函數的戴勞展開式，我們可以得到幾種最重要的推論，從這些推論，我們才能察知正規解析函數的特殊性質. 爲這個目的，我們先要作一些初期的觀察:

按 § 8 所解釋的，最普遍的函數概念我們所得的函數是如此的隨意，從他在定義域的一部分內的性質，我們完全不能推測他在定義域另一部分內的性質. 例如設 $M$ 爲整個 $z$ 平面，又設當 $|z| \leqq 1$ 時 $f(z) = 3i$；則說這裏我們不能推出 $|z| > 1$ 時 $f(z)$ 的值是如何的，因爲當 $|z| > 1$ 時，也許有一個完全不同的計算法 (參看第 32 頁的例). 若函數爲綿續的，情形就已經不同，因爲這樣，則在上面的例內，$f(z)$ 在么圓附近的點的值，必須與 $3i$ 相近. 所以這個函數要受一種限制；函數在各點的值，彼此之間，要被某種法則所聯繫. 這種將函數的值彼此互相關聯的，內在的法則，使我們從函數在 $z$ 平面的一部分的值，多少能推測他在鄰近的部分的值——若從全部函數中選出某一類的函數，則這些函數的性質愈特殊，其法則顯然愈精嚴. 從一個實變數 $x$ 的實函數論裏，我們現在舉一個例，可以令上面所述的更爲明白:

例如我們現在專研究三次有理整函數 (三次曲線)

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \qquad (a_\lambda, x, y \text{ 爲實數})$$

則一個如此的函數或曲線，已經被很少的條件 (假設) 完全確定. 若我們知道這個曲線經過某四個一定的點，(就是說，若我們知道這函數在四個不同的 $x$ 的值)，則這個函數已經完全確定.——這四點彼此還可以非常的靠近. 所以從函數在任意一個小節內的情狀，可以推測這曲線在整個 $x, y$ 平面的情狀，連他一切的正規的及特殊的性質在內. 故三次有理函數所構成的一類函數，卽有一種極精嚴的內在法則，將函數值彼此互相

聯繫.

顯然的，應用於算學的自然科學的函數，最主要的，都具有這樣的內在法則，因爲自然現象的本身，是具有內在法則的.

現在下列的事實格外的值得注意，就是在全部最普遍的複變函數內，祇要根據可導微性的一個條件，也就是根據正規性的條件，即可選出一類函數，這些函數一方面仍舊是十分普遍的，幾乎包括一切在應用方面所遇見的函數，但另一方面，他們又有一種精嚴的內在法則：從他們在 $z$ 平面內一個（無論多小的）子域內的性質，可以推測他們在 $z$ 平面內整個其餘部分的性質.　我們——若要把其中最重要的結果預告出來——將證明，當一個解析函數在一個（完全任意的）小曲線段上的值已經知道，則這個解析函數連着他一切正規的與奇異的❶性質，完全確定.　或者，若沿着如此的一個小曲線段，兩個解析函數有相同的值，則他們完全恆等.

在這個方面的第一個定理爲科犀公式，（參考第 67 頁的公式），按這公式，從函數在一個邊界 $C$ 上的值，可以推知函數在 $C$ 內部的值.

根據展開法定理，我們現在可以推得一個結果，從這結果可以引到以上所舉出的定理，並且還更遠些.　因爲這結果對於函數論的構成極爲重要，我們不能不把他和科犀積分定理並列入最基本的定理之內.

**關於解析函數的恆等定理：**　若兩個函數在一個域 $G$ 內爲正規的，且在屬於 $G$ 的一點 $z_0$ 的一個（無論多小的）鄰域內，或沿着一個從 $z_0$ 出發的（無論多小的）小路段上，或祇在以 $z_0$ 爲凝聚點的無盡多個點上，處處相等，則這兩個函數在 $G$ 內處處相等.

證：　從展開法定理，這兩個函數——我們稱之爲 $f_1(z)$ 與 $f_2(z)$——都可以以 $z_0$ 爲中心展爲冪級數.他們至少在那個以 $z_0$ 爲中心而完全含在 $G$ 內的最大的圓內——我們稱之爲 $k_0$——爲收斂的.　但按定理的假設，更根據關於冪級數的恆等定理，我們立刻知道這兩個展開式完全相同.所以在 $k_0$ 內處處 $f_1(z)=f_2(z)$

現在若 $\zeta$ 爲 $G$ 內任意一個點，我們要證明，$f_1(\zeta)=f_2(\zeta)$.　爲此目的，我們用一個完全含在 $G$ 內的路 $L$ 連接 $z_0$ 與 $\zeta$.　設 $\rho$ 爲按照 § 7 的定理所確定的正量.　然後隨意用路上的點 $z_0$, $z_1$, $z_2$, $\cdots\cdots z_{m-1}$, $z_m=\zeta$ 將 $L$ 分成小段，使他們的長都 $<\rho$.

❶ Singuläre Eigenschaft——譯者.

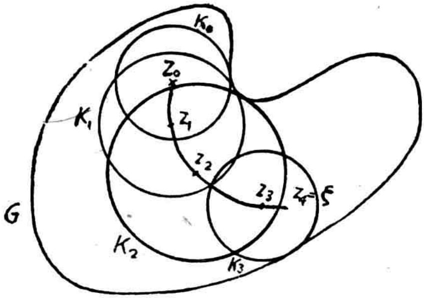


圖 5.

以每點 $z_\lambda$ 爲中心，畫一個完全屬於 $G$ 的最大的圓 $K_\lambda$，則他們的半徑都 $\geqq \rho$，而每個圓都將次一個圓的圓心含在內. 簡單些，我們說他們構成一個圓鍊. 現在我們想像以每一個 $z_\lambda$ 爲中心，函數 $f_1(z)$ 與 $f_2(z)$ 都展爲冪級數與以前對於 $\lambda=0$ 一樣. 這些展開式每次至少在 $K_\lambda$ 內是收斂的. 在 $K_0$ 內我們已經證明，他們是恆等的；所以 $f_1(z)$ 與 $f_2(z)$ 在（在 $K_0$ 內的）點 $z_1$ 與在他的鄰域內也是相等的. 於是（還是利用關於冪級數的恆等定理）在 $K_1$ 裏的兩個展開式也相同的，故這兩函數在 $z_2$ 與他的鄰域內也必須彼此相等. 於是他們在 $K_2$ 內又有相同的展開式，餘類推. 照這樣下去到第 $m$ 步，我們就推得：這兩函數在 $z_m=\zeta$（與在他的鄰域內）相等. 於是定理完全證明.

此處所採用的特殊的方法，因其圖形，也稱爲**圓鍊法**.

從這定理所可推得的，最重要的結果，我們要在下一章內加以更精確的討論，現在祇列舉出幾個很簡單的結果.

爲便於敍述起見，我們採用以下的

**定義：** 若在函數 $f(z)$ 的正規域內的一點 $z_0$，$f(z_0)=0$，則此點稱爲函數的零值點或**零點**❶（**Nullstelle**）若更普遍的 $f(z_0)=a$，則 $z_0$ 稱爲 $f(z)$ 的 $a$ 值點.——於是有

**定理 1：** 若 $f(z)$ 爲一個在 $G$ 內正規的函數，則無論 $a$ 是如何的一個數，除非 $f(z)$ 處處 $=a$❷

❶ 但勿與 0 點相混——譯者.

❷ 或者，除非 $f(z)$ 處處 $=a$，許多 $a$ 值點的一個凝聚點，永遠不屬於正規域，反之，他必定是 $f(z)$ 的一個奇點.

或者：除非 $f(z)$ 處處 $=a$，否則若 $z_0$ 爲一個正規點，不能每一個 $z_0$ 的鄰域都含無盡多個 $a$ 值點.

證　若使 $f(z)$ 在 $G'$ 內有無盡多個 $a$ 值點，則這些 $a$ 值點在 $G'$ 內就有一個凝聚點 $z_0$，這 $z_0$ 自然也含在 $G$ 內．但在平面內處處都 $=a$ 的那個函數，自然在無論何處，特殊的在 $G$ 內，是正規的；於是按恆等定理，$f(z)$ 必須就是這個函數．

這個結果，也可以寫作下狀，往往比較便於應用：

**定理 2**：　設 $f(z)$ 在 $z_0$ 爲正規的，則我們可以繞 $z_0$ 爲中心畫一個小圓，使他在圓內任何一點的值與他在圓心的值不同，——除非 $f(z)$ 處處都有這同樣的值——

**定理 3**：　設 $f_1(z)$ 與 $f_2(z)$ 在 $G$ 內爲正規的，並且祇知這兩個函數及他們一切的導微函數在 $G$ 內的一個點 $z_0$ 兩兩相等，則兩函數相等。

證：　以 $z_0$ 爲中點將兩個函數展開，則我們得兩個恆等的級數，因爲這些係數——除去相等的常數因子——原是函數的導微函數在 $z_0$ 的值，而按假設這些導微函數在 $z_0$ 是兩兩相等的．於是按恆等定理，這兩函數在 $G$ 內彼此處處相等．

**定理 4**：　設（異於常數的）函數 $f(z)$ 在正規點 $z_0$ 上有一個 $a$ 值點，則必有一個一定的正整數 $\alpha$，使

$$f_1(z)=\frac{f(z)-a}{(z-z_0)^{\alpha}}$$

在 $z_0$ 的一個隣域內可展爲冪級數

$$f_1(z)=b_0+b_1(z-z_0)+\cdots\cdots,$$

其中第一係數不等於 0❶.

證：　在 $f(z)$ 以 $z_0$ 爲中心的展開式 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ 內 $a_0=a$，而且後面至少有一個係數不等於 0．　設 $a_\alpha$ 爲第一個如此的係數則

$$f(z)-a=a_\alpha(z-z_0)^{\alpha}+a_{\alpha+1}(z-z_0)^{\alpha+1}+\cdots\cdots,\qquad (a_\alpha\neq 0),$$

從這裏我們可以推得所求證的事實．

我們現在證明以下的定理，以爲恆等定理的最後的應用，這定理旣奇特又重要

**定理 5**：　一個解析函數 $f(z)$ 的絕對值，在 $f(z)$ 的正規域內任何一

---

❶ 當然 $b_0=a_\alpha$，而且普遍的 $b_\lambda=a_{\alpha+\lambda}$，　$\lambda=0,1,2,\cdots\cdots$ 我們稱 $\alpha$ 爲 $a$ 值點 $z_0$ 的級 (Ordnung)．所以相當於每一個 $a$ 值點都有一個一定的整數的級．

點 $z_0$，不能有極大值❶，除非 $f(z)$ 在域內處處都有同樣的值 $f(z_0)$.

證：　在 $z_0$ 的隣域內，我們有

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots\cdots \qquad (r>0).$$

在 $a_0=f(z_0)$ 的後面，至少有一個係數不等於 0；設 $a_m(m\geqq 1)$ 爲如此的係數中最前的一個．　這樣若我們令

$$a_0=Ae^{i\alpha},\quad a_m=A'e^{i\alpha'}(A'>0),\quad z-z_0=\rho e^{i\phi}(0<\rho<r),$$

則

$$f(z)=Ae^{i\alpha}+A'e^{i\alpha'}\rho^m e^{im\phi}+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots\cdots.$$

關於 $\phi$，我們令 $\alpha'+m\phi=\alpha$❷．　於是

$$f(z)=(A+A'\rho^m)\rho^{i\alpha}+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots\cdots$$

$$|f(z)|\geqq A+A'\rho^m-(|a_{m+1}|\rho^{m+1}+\cdots\cdots)$$

$$\geqq A+\rho^m[A'-(|a_{m+1}|\rho+\cdots\cdots)].$$

由於在圓括內的冪級數的綿續性，我們對於 $\rho$ 可以選一個值 $\rho_0$，$\rho_0$ 是如此之小，足使 $(|a_{m+1}|\rho_0+\cdots\cdots)<\frac{1}{2}A'$.　於是對於一切適合 $0<\rho<\rho_0$ 的 $\rho$，

$$|f(z)|>A+\frac{1}{2}A'\rho^m>|f(z_0)|,$$

就是說，在某一個從 $z_0$ 出發的半徑上，凡離 $z_0$ 充分近的點 $z$，都的確令 $|f(z)|>|f(z_0)|$.

習題：　1.　若閉路 $C$ 含在 $f(z)$ 的正規域內，則他祇包圍有盡多個 $f(z)$ 的零點（更普遍些：$f(z)$ 的 $a$ 值點）.

2.　$\sin\frac{1}{1-z}$ 在么圓的內部爲正規的，而且在么圓內有無盡多個從 $\frac{1}{1-z}=k\pi$ 算出的零點 $1-\frac{1}{k\pi}(k=1,2,\cdots\cdots)$. 這個是否與定理 1 或習題 1 相矛盾？　試將這問題加以仔細的考察.

3.　接着定理 5，試證在 $z_0$ 點 $|f(z)|$ 也不能有一個異於 0 的極小值，而且 $R(f(z))$ 與 $J(f(z))$ 在 $z_0$ 既不能有極大值也不能有極小值.

---

❶　就是說，$|f(z_0)|$ 不能 $\geqq$ 在 $z_0$ 的一個隣域內一切 $|f(z)|$ 的值.

❷　就是說，在經過 $z_0$ 出發的許多半徑中我們選出其一個固定的.

# 第八章　解析開拓與解析函數之完全的定義

## § 25.　解析開拓原理

前章的討論所達到的最高峯，是關於解析函數的恆等定理：　若兩個解析函數在一點的隣域內（或祇沿一個小路段，或祇在某些無盡點組上）相等，則他們簡直恆等．

如在第 63 頁所說的，這定理說明解析函數的一種最精嚴的內在的連繫：　從他在那個點組的值，一個函數已完全的（就是說，他整個的值域 (Wertvorrat)[1]，與他一切正規的與奇異的性質）確定．

我們現在要將這個已經證明的性質，加以闡發，使他更爲清楚．

爲此目的，我們假設已給兩個函數 $f_1(z)$ 與 $f_2(z)$，前者在 $G_1$ 內，後者在 $G_2$ 內爲正規的．　我們又假設 $G_1$ 與 $G_2$ 有某一個（無論多小的）公共域 $g$，但此外並無公共點（參看圖 6，其中有陰影的爲 $g$），最後又設在 $g$ 內處處 $f_1(z)=f_2(z)$．

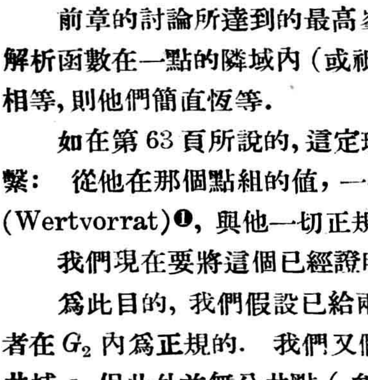

圖　6.

於是在這種情形之下，我們又得以下的結果：$f_1$ 與 $f_2$ 兩函數，每個完全唯一的確定其他一個．因爲按恆等定理，除去 $f_1(z)$，再也沒有其他函數在 $G_1$ 正規而在 $g$ 內又有與 $f_2$ 相同的值．

$f_1(z)$ 被他在 $g$ 內的值（於是也就是：被 $f_2(z)$）完全的確定；同樣的，$f_2(z)$ 被 $f_1(z)$ 完全的確定．

所以我們可以說：若兩個域 $G_1$ 與 $G_2$ 的位置如上所述，又若在 $G_1$ 內已給一個正規函數 $f_1(z)$，則或有一個而且祇有一個函數在 $G_2$ 內正規而在 $g$ 內與 $f_1(z)$ 相等，或這樣的函數根本不存在．

若如此一個函數 $f_2(z)$ 是存在的，而且我們已將他確定，則我們也可以說，我們將在 $G_1$ 內的已給函數向域 $G_2$ 內解析的開拓了．　但完全同樣

---

[1] 卽他在定義域內一切點的值，所構成的組．　正確的定義見 § 27 第 108 頁——譯者．

的，$f_1(z)$ 也是 $f_2(z)$ 向域 $G_1$ 內的解析開拓 (*analytische Fortsetzung*). 我們現在根本不該再將 $f_1(z)$ 與 $f_2(z)$ 看作不同的函數. 旣然他們每一個簡直完全確定其他的一個，我們必須將他們都看作一個而且同一個函數 $F(z)$ 的一個部分表示式 (*Teildarstellung*) 或"元" (*Element*)，而此 $F(z)$ 在 $G_1$ 與 $G_2$ 所合成的域內是正規的.

我們舉一個例，就可以更爲明白：設 $G_1$ 爲么圓 $|z|<1$, $G_2$ 爲半徑等於 $\sqrt{2}$ 而圓心在 $i$ 的圓，亦即圓 $|z-i|<\sqrt{2}$；顯然的這兩個圓公有一個域 $g$（讀者可畫一草圖）. 設在 $G_1$ 內已給 $f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. 在 $G_2$ 內是否有一個正規函數，在 $g$ 內與 $f_1(z)$ 相等? 若一個如此的函數存在，則無論如何，衹有唯一的一個. 現在 $f_2(z)=\frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n$ 適合我們的條件，因爲這級數當 $\left|\frac{z-i}{1-i}\right|<1$ 時，亦即當 $|z-i|<\sqrt{2}$ 時爲收歛的，而且我們立刻可以看出，這兩個冪級數在 $g$ 內的值是相等的，因爲這兩個等比級數在他們的收歛圓內的值，都完全可以求得，於是就可以互相比較.（在 $g$ 內我們兩次所得都是 $\frac{1}{1-z}$）

故 $f_1(z)$ 與 $f_2(z)$ 每個是其他一個的解析開拓，他們都是同一個函數 $F(z)$ 的元，此函數（至少）在 $G_1$ 與 $G_2$ 所合成的域 $G$ 內爲正規的.

在這個簡單的例內我們連函數 $F(z)$ 都能顯明的寫出來；他本來就是 $F(z)=1:(1-z)$. 但普通這是簡直不可能的. 在一般的情形，$F(z)$ 除了從他的部分表示式或元來計算外，不能再用別的方法來實際計算. 雖然如此，但按 §8，我們仍然稱他爲一個函數，以他不同的表示式合起來爲運算法則，而函數 $F(z)$ 則由這法則確定.

我們綜合這些結果如下：

**解析開拓原理**： 設在一個域 $G_1$ 內已給一個正規函數 $f_1(z)$，又設 $G_2$ 爲另一個域，與 $G_1$ 有某一個公共的子域 $g$，但沒有別的公共點. 此時若在 $G_2$ 內有一個正規函數 $f_2(z)$，在 $g$ 內與 $f_1(z)$ 相等，則無論如何衹能有唯一的一個. $f_1(z)$ 與 $f_2(z)$ 每一個，稱爲其他一個的解析開拓；他們共同確定一個函數 $F(z)$，他們都構成 $F(z)$ 的部分表示式或元，而 $F(z)$ 在 $G_1$ 與 $G_2$ 所合成的域內爲正規的.

現在以下的問題立刻就會發生：

(1) 若在第一個域 $G_1$ 內已給一個在該域內正規的函數（例如一個冪級數在他的收歛圓內），我們如何知道，照剛才所解釋的意義，$f_1(z)$ 能

或不能向另一個域 $G_2$ 開拓,我們又如何去求這開拓 $f_2(z)$?——其次.

(2)　還有沒有其他的域 $G_3$, $G_4$,……, 他們每個都與以前的某一個有一個公共的子域,而在這些域 $G_3$, $G_4$,……內,也有函數 $f_3(z)$, $f_4(z)$……,每個照上面所解釋的意義為以前的開拓?

若這個答案是正面的,則這函數就都被 $f_1(z)$ 唯一的確定,而他們都可以看作同一個函數的元——於此,下面的問題,又隨着發生:

(3)　若已給一個函數的一個元, 我們如何找一切可能的其他的元,或者說,一切在相銜接的域內的開拓?

這整個很廣洽而又似乎很難的問題, 有一個——至少在理論上——很簡單的解答.

在我們在 §27 內敍述這個解答之先, 我們再從另一方面來討論解析開拓.

以前在展開法定理,我們曾利用以下的事實;就是一個解析函數被他在一個小的子域內的值已經確定.　其實祇要知道這函數在一個小路段上的值即足.

因此,我們想像在平面上已給一個小路段 $L$,而且在此路上的每一點,設已給一個函數 $\phi(z)$ 的值.　然後我們釐任意一個域 $G$, 將 $L$ 包含在內,則祇有兩種可能性:在 $G$ 內或者根本沒有正規函數,在 $L$ 上與 $\phi(z)$ 相等,或者祇有一個,而這時此函數卽被 $L$ 上的值唯一的確定.

在後一情形之下, 我們也說我們已將在 $L$ 上所給的函數,向 $G$ 域內解析的開拓了.

特殊的,若 $L$ 為實軸上的一段,譬如說,節 $x_0 \leqq x \leqq X$,我們令 $\phi(x)$ 為在節上各點的函數值(不必需是實的), 則我們當前的問題是求實變數 $x$ 的一個函數的解析開拓.　若我們成功, 則我們也可以說, 我們已將 $\phi(x)$ "向複數方面"開拓了,關於這個我們可述下面的

**定理:**　實變數 $x$ 的一個函數, 祇要可以向複數方面解析開拓, 則祇有一個唯一的開拓是可能的.

以下的解說,可以將一個解析函數的精嚴的內在聯繫,表現得更明白:

設 $L$ 為實線段 $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$,$G$ 為包涵 $L$ 的么圓,又設 $\phi(x)$ 在 $L$ 上已經確定.　若我們專取 $\phi(x)$ 在 $0 \leqq x \leqq \frac{1}{4}$ 半個線段上的值, 則按前一個定理, 這裏的函數值, 已經可以判定

$\phi(x)$ 可否向么圓內開拓．　若是可以，則 $\phi(z)$ 在線段其餘的一半的值，也就是在 $\frac{1}{4}<x\leqq\frac{1}{2}$ 上的值，已被他在前半線段上的值完全確定．所以祇要我們不故意使這開拓爲不可能，則 $\phi(z)$ 在後半的線段上的值，我們已經不再有選擇的自由．在前半線段 $0\leqq x\leqq\frac{1}{4}$ 上，我們現在又可以照樣處置，餘類推．簡單的說，選擇 $\phi(x)$ 的值的自由——假使這結論不純粹是虛幻的——其實當然是限制在有盡多個點上，因爲按恆等定理，從函數在無盡多點的值，開拓的可能性已經可以判定．

習題：設在一切的實數 $x$，已給實函數 $F(x)=+\sqrt{x^2}$（就是說：等於 $\sqrt{x^2}$ 的正號値）．此函數可否向複數方面開拓？

## § 26．所謂的初等函數

現在，接着上面的定理，我們可以考察我們熟悉的實變數 $x$ 的函數，看他是否可以向複數方面開拓，若是可以，我們還要研究如何去求這開拓所得的解析函數．

1．有理函數——設

$$\phi(x)=\frac{a_0+a_1x+\cdots\cdots+a_mx^m}{b_0+b_1x+\cdots\cdots+b_kx^k}$$

（$a_\lambda$ 與 $b_\lambda$ 爲複數）

爲一個有理函數，則我們立刻可以看出來，$\phi(x)$ 爲可開拓的，而且

$$f(z)=\frac{a_0+a_1z+\cdots\cdots+a_mz^m}{b_0+b_1z+\cdots\cdots+b_kz^k}$$

爲開拓到複數方面的函數．$f(z)$ 在整個平面內，除去使他的分母 $=0$ 的點，處處是正規的．（在 § 30 內我們將證明，至多祇有 $k$ 個點，使分母 $=0$）．

2．$e^z$, $\sin z$, $\cos z$，——對於實數 $x$，冪函數 $e^x$ 與三角函數 $\sin x$ 與 $\cos x$ 可以用下列各式確定

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

若在這些式內，我們用 $z$ 代替 $x$，則得級數

$$f_1(z)=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},$$

$$f_2(z)=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$f_3(z)=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!},$$

這三個都是冪級數：($z_0=0$, $r=\infty$)，每一個代表在整個平面正規的一個函數．因爲在 $z=x$ 時他們依序與 $e^x$, $\sin x$, $\cos x$ 相等，所以他們爲這些函數向複數方面的開拓．因此我們稱 $f_1(z)$ 爲指數函數而以 $e^z$ 來代表；同樣的我們用 $\sin z$ 與 $\cos z$ 代表 $f_2(z)$ 與 $f_3(z)$ —— 以後這些解析函數的性質，我們作爲已知的．上面我們從函數 $e^z$, $\sin z$, $\cos z$ 的已知部分（就是說，當 $x$ 爲實變數時 $e^x$, $\sin x$, $\cos x$ 的定義），推得當 $z$ 爲複變數時，這幾個函數的定義，但現在讀者可以看出來，按照本章的討論，這些定義，表面上雖然是完全隨意的，其實是絕對的必需如此的：因爲若要他們繼續與可導微，則他們的定義，祇能像上面所說的那樣．

3. 函數 $\log x$, $a^x$, $\sqrt[m]{x}$ 及其他函數的開拓，要等到我們在下一節內，將解析函數的概念完全樹立之後，才能討論．

## § 27. 利用冪級數的開拓及解析函數之完全的定義

現在我們要解答 § 25 所發生的問題 (1) 至 (3)，他們可以用同一的步驟來解決．

設已給一個在域 $G_1$ 內的正規的函數．若 $z_1$ 爲 $G_1$ 的任意一點，則我們可以用他爲中心，將該函數展爲冪級數：

$$(1)\qquad f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(1)}(z-z_1)^n$$

若他們的半徑 $r_1=\infty$，就是說，若這級數對於每一個 $z$ 爲收斂的（或者說，這級數爲永遠收斂的），則我們對於以上的每一個問題，都已有答案：我們有一個函數，是 $f_1(z)$ 從 $G_1$ 向外的開拓；這函數在整個平面是正規的，所以除去那個永遠收斂的冪級數所確定的函數，再不能有任何其他正規函數，可以從 $f_1(z)$ 開拓得到．

例：設

$$g(z)=1-\frac{z^2}{2}-\frac{2}{3!}z^3-\cdots\cdots-\frac{n-1}{n!}z^n-\cdots\cdots=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-1}{n!}z^n$$

（此級數永遠收斂）

$$h(z)=1+z+z^2+\cdots\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$

（此級數祇當 $|z|<1$ 時收斂），又在么圓內，令

$$f_1(z)=g(z)\cdot h(z)$$

但函數 $f_1(z)$ 在么圓外的值，這些公式一概沒有規定. 現在若以 $z_1=0$ 爲中心，將此函數展開則從兩冪級數的相乘，我們得❶

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},$$

這是那函數的一個在整個平面都可用的展開式.

若展開式 (1) 的半徑爲有限的（但 $>0$），則我們在收斂圓的內部，取一個異於圓心的點 $z_2$. 令

$$(2)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(2)}(z-z_2)^n,\qquad 其中\quad a_n^{(2)}=\frac{1}{n!}f_1^{(n)}(z_2),$$

爲以 $z_2$ 爲中心的函數的展開式. 根據 § 22, 定理 5, 這式可以直接從(1)得到.

這展開式的半徑 $r_2$, 顯然的是 $\geqq r_1-|z_2-z_1|$（就是說，至小等於 $z_2$ 到圓周的距離）.

若 $r_2=r_1-|z_2-z_1|$（參看圖 7, a), 則從 (2) 所得的函數值，祇是在(1)的收斂圓內一部分的點的值，而這部分的函數值，已可從(1)得到. 故(2)並沒有給我們新的供獻❷. 若 $r_2>r_1-|z_2-z_1|$（參看圖 7, b），則新的收斂圓越過舊的一個：於是 $f_1(z)$ 已經沿着半徑 $z_1\cdots\cdots z_2$ 的方向，開拓到舊的收斂圓之外.

所以祇要沿着某一個方向的開拓是可能的，我們就可以利用這簡單的冪級數以得這個開拓

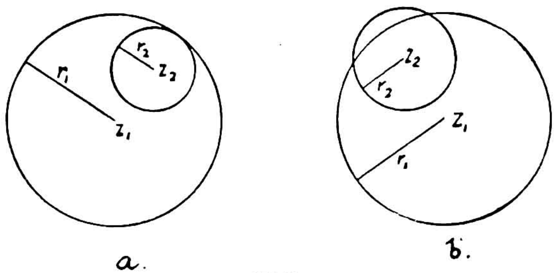


圖 7.

---

❶ 利用關係 $1-\frac{1}{2!}-\frac{2}{3!}-\cdots\cdots-\frac{k-1}{k!}=\frac{1}{k!}$, $(k=0,1,2\cdots\cdots)$

❷ 其實祇給我們反面的供獻，就是兩圓的切點，一定不能屬於正規域；他必須是由 $f_1(z)$ 所確定的解析函數的奇點.

現在我們想像將函數的第一個元向一切可能的方向開拓；再想像將這許多新的元，又從新得的域向一切可能的方向開拓．則從第一個元產生出一個函數，他在一個不逐漸擴大的域內是正規的．

但這裏我們須先注意以下的事實：

1. 第一個冪級數可能的沿着任何方向都不能開拓的．這樣，就沒有一個函數，在一個比第一個收斂圓更大的域內爲正規的（而同時以那個冪級數爲元）．我們說這函數是不可開拓的，這收斂圓是他的自然疆界 (Natürliche Grenze)．

例：$f(z)=\sum_{\lambda=1}^{\infty} z^{n!}=z+z^2+z^6+\cdots+z^{n!}+\cdots,$

此時 $r=1$．若這函數 $f(z)$ 可以越過么圓而開拓；則么圓的某一段弧上，一定全是正規點．但在每一個如此的弧上，必有（而且有無盡多個）具以下形狀的點：$z_0=e^{2\pi i\frac{p}{q}}$，其中 $p,q$ 爲正整數．我們若能證明，具 $z_0$ 的形狀的各點，簡直不是 $f(z)$ 的綿續點，則 $f(z)$ 的不可開拓性已經證明．現在設已給 $g$ 是任意大的（正整數），則當 $z=\rho z_0$ 時，其中 $0<\rho<1$，

$$f(z)=\sum_{n=1}^{q-1} z^{n!}+\sum_{n=q}^{\infty}\rho^{n!}$$

因爲當 $n\geqq q$ 時，$z^{n!}=\rho^{n!}$ 所以若 $m=2q+g$，

$$|f(z)|>\sum_{n=q}^{m}\rho^{n!}-\sum_{n=1}^{q-1}|z|^{n!}>(m-q+1)\rho^{m!}-(q-1).$$

當 $\rho\to 1$ 時，右端的值，就趨於 $m-2q+2=g+2$，故 $\rho_0$ 可以適當的選定，使當 $\rho_0<\rho<1$ 時，$|f(z)|<g$．但 $g$ 既是任意的，我們就可以說：當 $z$ 沿着半徑趨近 $z_0$ 時，$|f(z)|$ 增大以至超過一切的限制；所以 $z_0$ 不能是一個綿續點，這就是所要證明的．

2. 另一方面的極端之款，就是冪級數可以越過收斂圓向一切的方向開拓，但這是不會發生的．因爲按 § 23, 定理 2, 在收斂圓的邊界上至少有一個奇點，而一個奇點決不能包括在一個新的收斂圓之內．但假使冪級數可以向一切方向開拓，則原收斂圓上的奇點，卽必須包括在新的收斂圓之內．所以這一款是不可能的．

3. 所以由以上所說的這種開拓的方法，一切遇到的點，自然的會分爲兩類：正規點與奇點，就是說，其中一類可以被圈在一個新的收斂圓之內，另一類則不可以，在後一類的點，函數是不能解釋爲綿續與可導微的．在每一個已證實爲正規的點，函數有一個一定的值．

據此我們可以立以下的定義：

**定義：** 在一切按上法證實爲正規的點的函數值 $w$，其全部構成一個(完全的)解析函數.

我們稱正規點的全部爲這個解析函數的存在域，(*Existenzbereich*)，綿續域 (*Stetigkeitsbereich*)，或正規域(*Regularitätsbereich*)，相當於這些點的函數值 $w$ 的全部，稱爲他的值域 (Wertevorrat).

因爲解析函數可以從一個元漸漸的長成，我們又有解析結構(*analytisches Gebild*)的一個名詞，所謂解析結構包括一切正規的 $z$ 與相當於每個正規的 $z$ 的函數值. 其實解析函數就是連繫每個 $z$ 與函數值 $w$ 的內在的"帶子"

這個現在已差不多完全的定義還有兩個罅隙：

(a) 要研究一個函數在無窮遠點的性質，我們還須制定種種的定義和假設。 這個我們在 § 34 內加以討論.

(b) 以下的情形可以發生：

當我們經過多次開拓以後，一個新的圓與第一個圓又相重叠—— 在圖 8 內，我們假設最初的收斂圓爲么圓，而在此圓上，$z = +1$ 是唯一的奇點，則第五個新的圓與第一個圓，在畫有陰影的部分相重叠，——這樣，在那些重新遇到的，原收斂圓的點(在圖內這部分是畫有陰影的)，這新的冪級數所確定的值，或者就是那原來的函數的值 $w$，——但也可能是一個新的函數值[1].

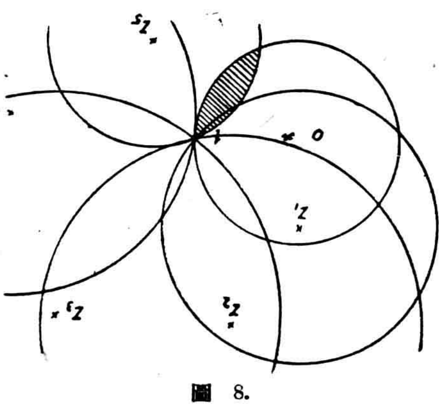

圖 8.

在第一款，我們稱這函數爲單值的 (*eindeutig*)，在其餘的款則稱爲多值的(*mehrdeutig*).

上面所述的解析函數的定義，這個可能性還該包括在內，但由此所達到的結論，在這裏祇好從略.

---

[1] 我們簡直可以想像——而事實上也眞是可能!——，第一個圓的一個內點(也就是正規點)，當我們經過上述的方法回到第一個圓時，會成爲奇點.

習題：冪級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ 的收斂圓爲么圓．試以 $z_1 = +\frac{1}{2}$ 爲中心，將這級數在么圓內所代表的函數，展爲新的冪級數，而由此證明，點 $+1$ 爲這函數的奇點。

（注意：雖然如此，這個級數在 $z=+1$ 是收斂的！！）

## § 28. 多值函數的幾個例

欲實際的（用計算方法）製成整個的解析結構，就是說，欲將一切的 $z$ 分別正規點與奇點，並求出相當於每個正規點的函數值，上面所述的方法，在一般情形下是不能應用的．這方法的價值在使我們首先得一覩這問題的本質；所以他的作用簡直和一個存在性的證明相同．

以下不多幾個的例要指出，對於個別的例，如何用完全不同的方法，去達到我們的目的．

1．$w = f(z) = \log z$.

在 § 17 我們已經證明

$$f(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$$

爲一個在右半平面內正規的解析函數，祇要這積分所用的路是限制在這半個平面以內的．但對於 $x > 0$，自然對數的定義可寫作

$$\log x = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi},$$

於是我們立刻知道，$f(z)$ 爲 $\log x$ 向複數方面的解析開拓，因爲事實上對於 $z = x > 0$，$f(z) = \log x$.

$f(z)$ 的存在域及其値域爲何？

祇要 $f(z)$ 的定義中的積分所採用的路，不經過零點，這積分總是確定的．所以（參看 § 17,5）除去零點，函數 $f(z)$ 在整個平面內是正規的．

但 $f(z)$ 不是單值的．

例如求 $f(-1) = \log(-1)$ 時，我們可以先用上半個么圓爲路，再用下半個么圓爲路．這樣所得，依序爲（參看 § 13 例 1）

$$+\pi i \quad 與 \quad -\pi i,$$

這個與以下事實相符合：若沿整個的么圓，依正向計算積分，結果爲 $2\pi i$.

根據科厚定理，若我們任意另選兩個路，其一整個在上半平面內，其一整個在下半平面內，所得的積分値，應當依序與前相同．

但我們若選一個路，從 $+1$ 出發；先依正向繞零點 $m$ 次再達到 $-1$，則得（參看 § 13, 1）

$$\log(-1) = \pi i + 2m\pi i$$

因爲沿着繞零點一次的路所得的積分 $= 2\pi i$；同樣，依負向繞零點 $m$ 次，則得

$$\log(-1) = -\pi i - 2m\pi i.$$

所以按照路的選擇，我們得無盡多個 $\log(-1)$ 的値，這些値皆作下狀

$$\log(-1) = \pi i + 2k\pi i, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots).$$

我們很容易驗證：按照科摩定理，每一個從 $+1$ 到 $-1$ 的積分路，與以前所述的某一個路作用相同——對於點 $-1$ 所說的一切，自然也適用於每個其他的點，所以我們可以說：

函數 $\log z$ 在整個平面，除零點外，都是正規的；但他是無盡多值的，而且 $\log z$ 一切的值，都可以從他某一個值加上 $2\pi i$ 的一個任意的整數倍數得到． $\log z$ 這些無盡多個值的每一個我們稱為 $\log z$ 在點 $z$ 的一格 (*Bestimmung*)

每一個如此的格在每一個異於 0 的點的隣域內，（更普遍些：在每一個不含 0 點的單連通域 $G$ 內），構成一個單值的正規函數． 在這域內，$\log z$ 的整個值域所構成的一個單值的函數元，我們也稱之為這個多值函數的一個支頁 (*Zweig*).

在 § 23 內，我們曾經將 $\log z$ 的如此的一個支頁〔所謂的主值或主頁 (*Hauptwert*)〕，在 $+1$ 的隣域內，展為冪級數．

若以這冪級數為最初的已給函數元，則從此出發，利用前節的普遍的方法，我們仍可推得 $\log z$ 同樣的性質，但比較上不方便．

在 0 點的隣域內，$\log z$ 不是單值的（並且 0 點是 $\log z$ 唯一的奇點）． 這一點稱為 $\log z$ 的結合點(Verzweigungspunkt, Windungspunkt)；對於 $\log z$，他是一個無盡多頁的 (*Unendlichvielblättrig*) 或無盡高級的 (*Von unendlich hoher Ordnung*) 結合點．

函數 $\log z$ 的淺近的性質，我們假設為已知的． 我們祇還要聲明：$\log z$ 的多值性，在初等的討論中，似乎是很隨意的，但這實在是函數的一個重要的性質；根據開拓原理，無論我們從那一個函數元出發，這性質是絕對必須出現的．

在 $\log z$ 的無盡多格中取任意一格，關係 $e^{\log z}=z$ 總是真確．

## 2. $\quad w=f(z)=\sqrt[m]{z}$

當 $x>0$ 時為確定的而且是正的實函數 $\sqrt[m]{x}$，也可以向複數方面開拓． 因為 $\log z$ 在整個 $z$ 平面，除 $O$ 點外，是正規的，但在 $O$ 點的隣域裏不是單值的，

$$f(z)=e^{\frac{1}{m}\log z}$$

也是如此的一個函數． 但若我們選擇不包含 $O$ 點的一個單連通域 $G$，例如除去 $\leqq 0$ 的實數的整個平面❶，則在這域內，$\log z$ 的每一個支頁，為單值的正規函數． 特殊的，若我們選定在 $+1$ 等於 0 的支頁，則這支頁對於一切 $x>0$，就等於實值 $\log x$——我們用 $\operatorname{Log} z$ 來表示這個所謂的主值——，則在 $G$ 內正規的函數

$$f_0(z)=e^{\frac{1}{m}\operatorname{Log} z}$$

是我們所求的正的實函數 $\sqrt[m]{x}$ 的開拓；因為 $f_0(x)=e^{\frac{1}{m}\log x}=x^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{x}$． 因此我們用 $\sqrt[m]{z}$ 來表示 $f(z)$；而 $f_0(z)$ 則稱為 $\sqrt[m]{z}$ 的主值．

按這個定義，函數 $\sqrt[m]{z}$ 似乎是無盡多值的；其實他祇是 $m$ 值的：因為 $\log z$ 的所有的值，

❶ 我們稱這個為沿着負實軸"割開"的平面．

已都包括在

$$\log z = \operatorname{Log} z + 2k\pi i, \quad (k=0, \pm1, \pm2, \cdots\cdots)$$

之內，故

$$f(z) = \sqrt[m]{z} = e^{\frac{1}{m}\operatorname{Log} z} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{m}} = e^{\frac{2k\pi i}{m}} \cdot f_0(z).$$

但在 $f_0(z)$ 前面的因子，祇可以有 $m$ 個不同的值❶，因爲兩個不同的 $k$ 之差，若爲 $m$ 的倍數，則對於這兩個 $k$，$e^{\frac{2k\pi i}{m}}$ 有相同的值；所以 $\sqrt[m]{z}$ 的 $m$ 個支頁每個都是主頁的一個固定的倍數，而他們的差別，也祇在一個倍數．故若合 $k$ 的值爲 $0, 1, 2, \cdots\cdots m-1$，卽得這 $m$ 個支頁的表示法：

$$f_k(z) = e^{\frac{2k\pi i}{m}} e^{\frac{1}{m}\operatorname{Log} z}, \qquad k = 0, 1, 2, \quad , m-1.$$

於是我們得以下的結果：

(1) $\sqrt[m]{x}$ 可以向複數方面開拓．

(2) 如此所得的單值解析函數 $\sqrt[m]{z}$，在整個平面，除去 0 點外爲正規的．

(3) 但這整個函數是 $m$ 値的．0 點是唯一的結合點而且是一個 $m$ 頁的❷ 結合點．凡繞着這點開拓一次，這函數就多乘一個 1 的 $m$ 次根．$(\sqrt[m]{z})^m = z$ 總是眞確．

函數 $\sqrt[m]{z}$ 的淺近的性質，我們也作爲是已知的，所以對於他的解析性質，我們祇須作如上的一個簡短的敘述．

習題： 1. 試將 $\sqrt[m]{z}$ 的主値，在點 $+1$ 的隣域內展爲冪級數；特殊的，求當 $m=2$ 時之級數．

2. 普通的冪函數 $a^z$，其中 $a$ 爲任意的複常數，定義如下

$$a^z = e^{z\log a}$$

試研究這個函數．— 根據此式，$i^i$ 的意義爲何?

---

❶ 他們是 1 的 $m$ 個不同的 $m$ 次根，因 $\left(e^{\frac{2k\pi i}{m}}\right)^m = e^{2k\pi i} = +1.$

❷ 我們也稱他 $m-1$ 次結合點，因爲當 $m=2$ 時，所得的顯然是多値性的頭一種．

# 第九章　超越整函數

## § 29.　定義

從前一章的討論，具以下性質的函數，顯然最爲簡單：這些函數的冪級數展開式，在整個平面是收斂的；因爲這種函數在整個平面是正規的，他的冪級數展開式決定在每一點 $z$ 的函數．　由此，這函數也必定是單值的．　此時這展開式可以寫作下狀

$$w = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

這種函數，簡稱爲整函數（ganze Funktion）——而又按他的展開式的係數 $a_n$，有無盡多個或有盡多個異於 0 而分別稱之爲超越整函數（*ganze transzcendente Funktion*）或有理整函數（*ganze rationale Funktion*）．在後一款，若 $a_m$ 爲最後一個異於 0 的係數，則 $m$ 稱爲該有理整函數的次（Grad）．

$e^z$, sin$z$　與　cos$z$，等等都屬於超越整函數．

下節內的定理都是講整函數的特性．——但若 $f(z)$ 對於一切的 $z$，都有相同的值 $c$，則 $f(z)$ 當然也是一個整函數（一次有理整函數），不過這代表一種降秩的款❶，對於此款，下面的定理不能適用．

## § 30.　整函數對於大的 $|z|$ 的性質

1.　**里奧維定理**（**Lionvilleschesatz**）：一個（異於常數的）整函數在每一個圓之外，仍可有任意大的值；就是說，若 $R$ 與 $G$ 爲任意（大的）正數，則必有點 $z$，使以下兩式同時成立：

$$|z| > R, \qquad |f(z)| > G.$$

證：　若定理是錯誤的，則在 § 22 之末所證明的估計式 $|a_n| \leqq M : \rho^n$

❶ Degeneration——譯者

內，我們可以用這固定的數 $G$ 代表 $M$ 而用任意大的一數代 $\rho$. 因此對於 $n=1, 2, \cdots\cdots$, 即得 $a_n=0$: 換言之：一個有欄的[1] 整函數必定化爲一個常數.

2. 特殊的，若我們所討論的是一個有理整函數則定理 1 可代以

**定理 2:** 若 $f(z)$ 爲一個 $m$ 次 $(m \geqq 1)$ 的有理整函數，而 $G$ 爲一個任意的正數，則可以選擇正數 $R$, 使凡 $|z|>R$ 時 $|f(z)|>G$.

**證:** 已知

$$f(z)=a_0+a_1z+\cdots\cdots+a_mz^m$$

$$=z^m\left[a_m+\frac{a_{m-1}}{z}+\cdots\cdots+\frac{a_0}{z^m}\right].$$

若令 $|z|=r$, 則

$$|f(z)| \geqq r^m\left[|a_m|-\frac{|a_{m-1}|}{r}-\cdots\cdots-\frac{|a_0|}{r^m}\right],$$

由此式，因 $a_m \neq 0$, 對於一切充分大的 $r$, $|f(z)|$ 大於 $\frac{1}{2}|a_m|r^m$, 所以 $>G$,——不但這樣，我們還可以令 $|f(z)|>Gr^{m-1}$.

3. 從這兩個定理，我們對於代數的基本定理，可以得一個很簡單的證明.

**代數的基本定理:** 若 $f(z)$ 爲一個 $m$ 次的 $(m \geqq 1)$ 有理整函數，則方程式 $f(z)=0$ 至少有一個解. 簡單些說：$f(z)$ 有零點.

**證:** 假設 $f(z)$ 總 $\neq 0$, 則 $\frac{1}{f(z)}=g(z)$ 就也是一個（異於常數的）整函數；這樣根據里奧維定理，在每一個圓之外，總還有點 $z$, 使

$$|g(z)|>1, \quad \text{於是使} \quad |f(z)|<1.$$

這個與剛剛所證明的定理 2 衝突.

（一個超越整函數不必有零點；例如 $e^z$ 就是一個沒有零點的整函數）

4. 另一方面若在里奧維定理內，我們所討論的是一個超越整函數，則那個定理可代以

**定理 4:** 設 $f(z)$ 爲一個超越整函數，又設 $G>0$, $R>0$ 與整數 $m>0$ 都任意給定，則總有點 $z$ 使以下兩式同時成立.

$$|z|>R, \qquad |f(z)|>G|z|^m$$

---

[1] 若一個函數在一個域內的值，構成一個有欄的數組，則稱爲在該域內有欄的.

就是說,在每一個圓之外,必有某些個點 $z$, 使 $f(z)$ 大於 $|z|$ 的每一個(任意大的)冪.

證: 若定理是錯誤的,則與在定理 1 一樣,我們得

$$|a_n| \leqq \frac{G}{\rho^{n-m}},$$

從此,則對於 $n>m$, 必要的 $a_n=0$, 就是說, 若凡 $|z| \geqq R$ 時, $|f(z)|$ 總 $\leqq G|z|^m$ 則 $f(z)$ 卽化爲一個有理整函數,他的次最高爲 $m$. ——故此定理又可述如下狀:

若數 $G(>0)$ 與 $m(\geqq 0)$ 存在,使凡 $|z|>R$ 時,

$$|f(z)| \leqq G|z|^m,$$

則 $f(z)$ 爲一個有理整函數,他的次最高爲 $m$.

5. 現在從這幾個定理,我們可以推得下面極可注意的

**卡外二氏定理** (**Satz von Casorati-Weierstrass**): 一個超越整函數,在每一個圓之外,仍可以趨近每一個值. 或用符號來表示:若已給任意的複數 $c$ 與正數 $\varepsilon$ 及 $R$, 則對於一個適當的,適合 $|z|>R$ 的 $z$,

$$|f(z)-c|<\varepsilon. \text{❶}$$

證: $a)$ 若 $f(z)$ 有無盡多個 $c$ 值點, 則按 § 24, 定理 1, 他們不能都在圓 $|z|=R$ 之內,故在這圓之外, 自然還有點 $z$, 簡直適合 $f(z)-c=0$.

$b)$ 若 $f(z)$ 沒有 $c$ 值點, 則 $\frac{1}{f(z)-c}=f_1(z)$ 也是一個(異於常數的)整函數,於是按定理 1 我們可以決定一個適合 $|z|>R$ 的 $z$, 使 $|f_1(z)|>\frac{1}{\varepsilon}$, 就是說, 使 $|f(z)-c|<\varepsilon$.

$c)$ 若 $f(z)$ 有有盡多個 $c$ 值點, 則我們可以設這些點爲 $z_1, z_2, \cdots\cdots z_k$, 並且可以介其級依序爲 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_k$. 於是(參看 § 24, 定理 4)

$$\frac{f(z)-C}{(z-z_1)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2}\cdots\cdots(z-z_k)^{\alpha_k}}=f_1(z)$$

---

❶ 或另述如下: 無論事先將 $R$ 選得如何大, $f(z)$ 在圓 $|z|=R$ 外的值所構成的組, 在平面內是密點組.——譯者附註:若平面上任意一點之每個鄰域內,都含有屬於點組 $M$ 的一點,(於是也就含有無盡多個屬於 $M$ 的點),則我們說 $M$ 在平面內爲密點組 (überall dicht in der Ebene).

又是一個整函數，但這函數沒有零點，所以 $\frac{1}{f_1(z)}=f_2(z)$ 也是一個整函數，而且必定是超越整函數．故從定理 4，對於在每個圓外某些點 $z$，

$$(1)\qquad \left| f_2(z) \right| > \frac{2}{\varepsilon} \left| z \right|^m$$

在此式內，設 $m=\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_k$．於是得

$$\left| f(z)-c \right| < \frac{\varepsilon}{2} \left| \frac{(z-z_1)^{\alpha_1}\cdots\cdots(z-z_k)^{\alpha_k}}{z^m} \right|.$$

但對於一切充分大的 $z$，例如對於 $|z|>R_1>R$，我們卽得

$$(2)\qquad \left| \frac{(z-z_1)^{\alpha_1}\cdots\cdots(z-z_k)^{\alpha_k}}{z^m} \right| < 2,$$

所以若我們在 (1) 內也令 $|z|>R_1$，則對於這個 $z$，關係 (1)，(2) 都成立，於是這個 $z$ 也適合

$$\left| f(z)-c \right| < \varepsilon.$$

習題：　試參照 §§ 31 與 32 求 $\frac{1}{f(z)-c}$ 對於大的 $|z|$ 的羅朗展開式，而從此較簡單而便捷的證明卡外二氏定理．

# 第四編

# 關於奇點

## 第十章 羅朗展開式

### § 31. 展開式

一直到現在我們總假設函數在某些域內是正規的，而研究函數在這裏面的性質． 現在我們要較仔細的討論以下一款：假設在域的內部也有奇點，但函數在那裏卻是單值的． 要使我們的討論具體一點，我們假設 $f(z)$ 在一個以 $z_0$ 爲圓心的同心圓環內爲單值及正規的，而在大圓 $K_1$（半徑等於 $r_1$）之外，小圓 $K_2$（半徑等於 $r_2$；$r_2 < r_1$）之內，函數的性質，我們完全不知道．

這樣，我們可以求一個展開式，此式在以 $r_1 > |z| = \rho > r_2$ 所表示的環內的每一個點 $z$ 爲收斂的，並且代表 $f(z)$． 爲這目的，我們選定兩個半徑 $\rho_1$ 與 $\rho_2$，適合

$$r_1 > \rho_1 > \rho > \rho_2 > r_2$$

令 $C_1$ 與 $C_2$ 爲以 $z_0$ 爲中心而半徑等於 $\rho_1$ 與 $\rho_2$ 的兩圓． 於是這兩圓所成的環，完全含在第一個環的內部，故 $f(z)$ 在這個小環內及在他的邊界上是正規的． 我們用兩個輔助路 $c'$ 與 $c''$ 將 $C_1$ 與 $C_2$ 相連但 $c'$ 與 $c''$ 都不經過 $z$． 現在完全仿照 §17, 3 的方法，即得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int^{(C_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int^{(C_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

其中 $C_1$ 與 $C_2$ 的方向都是正的． 但是（參照 § 23 的證明）：

*a*) 關於第一個積分，因爲這裏 $\zeta$ 爲圓 $C_1$ 上的一點，故

$\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|=\frac{\rho}{\rho_1}<1$, 所以級數

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$$

在一切 $C_1$ 上的 $\zeta$ 是齊收斂的.

$b$) 關於第二個積分,因為 $\zeta$ 在 $C_2$ 上,故 $\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|=\frac{\rho_2}{\rho}<1$, 所以級數

$$\frac{1}{\zeta-z}=-\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}$$

在一切 $C_2$ 上的 $\zeta$ 是齊收斂的.

我們將這兩個特殊的 $\frac{1}{\zeta-z}$ 的展開式替入積分內,則因他們的齊收斂性,我們可以逐項的以 $\zeta$ 為變數取積分,於是得

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}{}^{(C_1)}\!\!\int\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n d\zeta$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}{}^{(C_2)}\!\!\int\frac{f(\zeta)(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}d\zeta.$$

為簡單起見,我們令

$$\frac{1}{2\pi i}{}^{(C_1)}\!\!\int\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta=a_n\qquad(n=0,1,2,\cdots\cdots),$$

$$\frac{1}{2\pi i}{}^{(C_2)}\!\!\int f(\zeta)(\zeta-z_0)^{n-1}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}{}^{(C_2)}\!\!\int\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}=a_{-n},$$

$$(n=1,2,\cdots\cdots),$$

即得

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}(z-z_0)^{-n},$$

這個展開式,我們也可以簡寫作

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n.$$

所以我們已求得代表 $f(z)$ 的一個展開式，這是一個昇級數 (aufsteigende Potenzreihe) $\Sigma_1$ 與一個降級數 (Absleigende Potenzreihe) $\Sigma_2$ 之和. 當 $z$ 含在 $K_1$ 與 $K_2$ 所成的環形域之內時，兩個級數都是收斂的. 因爲我們事後看出來，係數 $a_n$ 與 $a_{-n}$ 的值，與確定他們的積分所取的路的形狀無關：按 § 17, 3, $C_1$ 與 $C_2$ 每一個都可以用任意一個完全在 $K_1$ 與 $K_2$ 之間而繞 $K_2$ 一次的路來代替.

這個所求得的級數，我們稱之爲在環形域內的 $f(z)$ **的羅朗展開式** (**Laurentsche Entwicklung**).

## § 32. 解說與例證

要正確的明瞭前節公式的意義我們將 $\Sigma_1$ 與 $\Sigma_2$ 兩個和所代表的函數，分別加以研究.

$$f_1(z)=\Sigma_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n.$$

是一個普通的，$z-z_0$ 的冪級數，所以對於一切在 $K_1$ 內的 $z$ 都是收斂的，並且在那裏代表一個正規函數. 至於

$$f_2(z)=\Sigma_2=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^{-n},$$

我們立刻可以看出，也可以當作一個普通的冪級數；因爲我們祇須令

$$a_{-n}=b_n,\qquad (z-z_0)^{-1}=z'$$

卽得

$$f_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz'^n.$$

因爲當 $r_2<|z-z_0|<r_1$ 時，$\Sigma_2$ 必然是收斂的，所以當

$$\frac{1}{r_1}<|z|<\frac{1}{r_2}$$

時，這個新的級數，也必然是收斂的，於是，因爲他是 $z'$ 的一個普通的冪級數，凡 $|z'|<\frac{1}{r_2}$ 時，他都是收斂的，並且代表一個在那裏正規的，$z'$ 的函數．我們回到 $z$，則可以說：對於一切適合 $|z-z_0|>r_2$ 的 $z$，也就是在 $K_2$ 外的任何一點，$\Sigma_2$ 是收斂的，並且代表一個在那裏正規的，$z$ 的函數．

這樣 $f(z)$ 就顯然分爲兩個函數，一個在 $K_1$ 之內是正規的，一個在 $K_2$ 之外是正規的．在環形域內，兩個都是正規的．

從此，更根據下面就要證明的羅朗展開式的唯一性，我們立刻知道，這展開式的精確的收斂域，是一個圓環，這圓環可以按以下方法決定：從 $K_1$，$K_2$ 兩圓所成的圓環爲出發點，將裏面的圓 $K_2$ 儘量的縮小（圓心不變），將外面的圓 $K_1$ 儘量的放大（圓心也不變）但新的圓環內部不能有奇點，這樣所得的圓環中最寬的一個，就是收斂域．——故在代表收斂域的圓環的兩個邊界圓上，必須至少各有一個奇點．（若在 $K_2$ 以內根本沒有奇點，則在他以內的域與 $f_2$ 及 $\Sigma_2$ 就都完全消滅！）

與戴勞展開式完全相同，這個剛剛求得的羅朗展開式也是唯一可能的一個，因爲假使在同一個環形域內，同時

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n (z-z_0)^n \quad 與 \quad =\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

則若我們用 $(z-z_0)^{-k-1}$ 乘兩式，所得的兩級數，在一個以 $z_0$ 爲中心而整個含在環形域內的圓上，對於 $z$ 是齊收斂的．故若將這兩個級數沿這個圓取積分，卽得：

$$2\pi i a_k=2\pi i c_k, \quad 故 \quad a_k=c_k, \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots).$$

例：毫無困難的我們可以求得下列展開式：

$$(1) \qquad \frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n},$$

$$(1<|z|<2)$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-1}-1}{z^n}, \qquad (2<|z|<\infty).$$

這裏，對於同一個函數，我們有兩個不同的展開式；但這個並不與剛才所證明的定理衝突；因爲他們是在兩個不同的環形域內的展開式．

(2) $$e^z+e^{\frac{1}{z}}=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}=1+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{z^n}{|n|!}$$

$$(0<|z|<\infty).$$

(3) $$\sin\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{5}{6}\frac{1}{z^3}+\frac{1}{2}\frac{1}{z^4}+\cdots\cdots$$

$$(1<|z|<\infty).$$

**習題：** 展開下列兩函數各為羅朗級數.

$e^{\frac{1}{1-z}}$　當　$|z|>1$ 時,

$\sqrt{(z-1)(z-2)}$　當　$|z|>2$ 時

# 第十一章　各種不同的奇點

## § 33.　本性奇點與非本性奇點或極點

最有興趣一款，是在 $K_2$ 的內部，圓心 $z_0$ 爲 $f(z)$ 唯一的奇點之時，這時羅朗展開式

$$(1) \qquad f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$

對於一切適合 $0<|z-z_0|<r_1$ 的 $z$，都是收斂的，其中 $r_1(>0)$ 爲 $z_0$ 與最近的奇點的距離．

在這一款，$z_0$ 稱爲一個孤立奇點．(*isolierte singuläre Stelle*)．若 $f(z)$ 在如此的一個孤立奇點的隣域內是單值的，則一個具 (1) 式形狀的展開式總是可能的．　若我們再將展開式 (1) 內的降級數部分（見前）寫成 $\Sigma b_n z'^n$ 之狀，即可以知道這部分在目前的款內，代表一個 $z'$ 的整函數．

現在按這個整函數是一個超越整函數或是一個有理整函數，也就是按這展開式的降級數部分有無盡多項或有有盡多項（但在後一款內，則至少有一項），我們依序稱 $z_0$ 爲一個本性奇點 (*Wesentlich singuläre Stelle*) 或非本性奇點 (*Ausserwesentlich singuläre Stelle*)．　在後一款內，我們亦簡稱 $z_0$ 爲一個**極點** (**Pol**)．　設此時 $a_{-m}(m\geqq 1)$ 爲最後一個異於 0 的係數，則 $z_0$ 稱爲一個 $m$ 級的極點 (*Pol mter Ordnung*)；若將 $(z-z_0)^m$ 乘 $f(z)$，即得一個在點 $z_0$ 及其隣域內正規的函數，而且這函數在 $z_0$ 不等於 0（但若用 $z-z_0$ 的一個較低的冪乘 $f(z)$，即不能得如此的函數）．

按以上所講，則所謂"極點"與"本性奇點"，都祇是孤立的奇點，在這點的隣域，函數是單值的（參看第 109 頁）．

我們稱函數展開式的降級數部分爲函數在 $z_0$ 的主要部分 (*Hauptteil*)．

以下兩個定理指出這兩個奇點的性質，彼此有重大的區別．

**定理 1**:　設 $f(z)$ 在 $z_0$ 有一個極點，（也就是設 $\Sigma_2=\Sigma b_n z'^n$ 爲 $z'$ 的一個有理整函數）. 又設已給任意的 $G>0$，則有一個 $\delta>0$ 在，使對於一切適合 $|z-z_0|<\delta$ 的 $z$,

$$|f(z)|>G,$$

就是說對於一切在 $z_0$ 鄰近的 $z$，$f(z)$ 的絕對值很大;或者: 當 $z$ 趨近一個極點時，函數值必定變爲無限大.　（比較這定理與 §30, 2）

證:　設 $z_0$ 爲一個 $\alpha$ 級的極點，則

$$f(z)=\frac{a_{-\alpha}}{(z-z_0)^\alpha}+\cdots\cdots+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots\cdots$$

$$=\frac{a_{-\alpha}}{(z-z_0)^\alpha}[1+b_1(z-z_0)+\cdots\cdots]$$

$$\left(\text{其中 } a_{-\alpha}\neq 0,\ b_k=\frac{a_{-\alpha+k}}{a_{-\alpha}},\ k=1,2,\cdots\cdots\right)$$

我們將 $\delta$ 選得如此的小，使 $\delta^\alpha<|a_{-\alpha}|:2G$ 並且使凡 $|z-z_0|<\delta$ 時，紐括中級數的絕對值 $>\frac{1}{2}$; 這當然是可能的，因爲這冪級數的常數項等於 $+1$.　於是，凡 $|z-z_0|<\delta$ 時，

$$|f(z)|\geqq\frac{|a_{-\alpha}|}{\delta^\alpha}\cdot\frac{1}{2}>G.$$

這就是所要證明的.

**卡外二氏定理**: 設 $f(z)$ 在 $z_0$ 有一個本性奇點（也就是設 $\Sigma_2=\Sigma b_n z'^n$ 爲 $z$ 的一個超越整函數），則 $f(z)$ 在 $z_0$ 每一個鄰域內，仍可任意的趨近每一個值（比較這定理與 §30, 5）.　或更精確些:　若 $c$ 爲任意一個複數而 $\delta$ 與 $\varepsilon$ 爲兩個任意（小的）正量，則總有點 $z$，使

$$|z-z_0|<\delta \quad \text{與} \quad |f(z)-c|<\varepsilon$$

同時成立[1]

證:　我們令

---

[1] 或另述如下:　無論事先將 $\delta$ 選得如何小，$f(z)$ 在圓 $|z-z_0|<\delta$ 內的值所成的組，在平面內是密點組.

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_{-n}(z-z_0)^{-n}=\phi_1(z)+\phi_2(z).$$

其中我們將常數項移在第一個和內. 在這式內, $\phi_1(z)$ 在 $z_0$ 爲綿續的, 而且 $\phi_1(z_0)=0$. 因此我們可以將 $\delta_1 \leqq \delta$ 如此選擇,使凡當 $|z-z_0|<\delta$ 時, $|\phi_1(z)|<\frac{1}{2}\varepsilon$. 另一方面, $\phi_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z'$ 是 $z'$ 的一個超越整函數, 根據對於這種函數的卡外二氏定理,在某一個絕對值很大的 $z'$, 例如,在某一個適合 $|z'|>1:\delta_1$ 的 $z'$, $|\phi_2(z)-c|<\frac{1}{2}\varepsilon$. 這就是說: 對於某一個適合 $|z-z_0|<\delta_1$ 的 $z$, $|\phi_2(z)-c|<\frac{1}{2}\varepsilon$.

於是對於這個 $z$,

$$|f(z)-c|\leqq|\phi_1(z)|+|\phi_2(z)-c|<\varepsilon,$$

這就是所要證明的.

例:

1. $e^{\frac{1}{z}}$ 在 $z=0$ 有一個本性奇點(參看 §32, 例 2).

2. 一個有理函數

$$f(z)=\frac{a_0+az_1+\cdots\cdots+amz^m}{b_0+b_1z+\cdots\cdots+b_kz^k}$$

祇在使分母等於 0 的點,可以有奇點. 若 $z_1$ 爲分母的一個 $\alpha$ 級的零點(參看第 68 頁), 我們很容易看出, $f(z)$ 在 $z_1$ 有一個 $\alpha$ 級的極點❶. 所以,已給一個有理函數, 卽可以決定一個從 0 點量起的距離,在這距離之內, 除了極點不能有別的奇點(在這裏我們還可參看 §24 例 2, 3 與定理 1).

3. 函數 tg$z$ 與 ctg$z$ 依序在 cos$z$ 與 sin$z$ 的零點爲不綿續的, 所以在這些點有奇點. 我們很容易察知,他們在那些點,有初級的極點:

例如我們考察 ctg$z$ 在 $z=0$ 的性質. 這點無論如何是一個孤立奇點, 因爲 sin$z$ 的零點中,離 $z=0$ 最近的是 $z=\pm\pi$. 於是 ctg$z$ 可以展爲羅朗展開式, 而從上面所說的,我們立刻可以知道,凡

$$0<|z|<\pi$$

時(也祇是此時),這展開式必定眞確.

若用 sin$z$ 的冪級數除 cos$z$ 的冪級數,則得以下展開式的前幾項:

---

❶ 假定分子分母沒有相同的零點——譯者.

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3} z - \frac{1}{45} z^3 - \cdots.$$

由於一個如此的展開式的唯一性（參看 § 32），這就是 $\operatorname{ctg} z$ 在點 $z=0$ 的隣域內的羅朗展開式．從這式我們卽知 $z=0$ 爲一個初級極點．

至於不是孤立的奇點，及在其隣域內函數不是單値的點（如 $z=0$ 之於 $\log z$ 與 $\sqrt[m]{z}$），我們此時不加討論．

習題：驗證在函數 $e^{\frac{1}{z}}$ 之款，卡外二氏定理的眞確性．爲此目的，讀者可以取從零點出發的各半徑，考察這函數在零點隣近的値．——試再確定令 $e^{\frac{1}{z}} = i$ 的各點 $z$．這些點所構成的點組爲何？

## § 34. 解析函數在無窮遠處的性質

我們的全解析函數的定義（§ 27），還有一個罅隙：我們還須制定，某種的假定，以便說明一個函數在無窮遠處的性質．

和以前一樣，我們專討論 $f(z)$ 在點 $\infty$ 的隣域內（參看 § 1）爲單値與正規的之款．於是我們設 $f(z)$ 當 $|z|>R$ 時爲單値與正規的．和在 § 1 內一樣，我們令 $z=\frac{1}{z'}$，則方程式 $f(z)=f\left(\frac{1}{z'}\right)=\phi(z')$ 對於適合 $|z'|<\frac{1}{R}$ 的 $z'$ 確定一個函數 $\phi(z')$，此函數在這種 $z'$ 點爲單値與正規的——唯一可能的例外是點 $z'=0$．

現在，我們所說的假定，不過是如下：$\phi(z')$ 在 $z'=0$ 點的性質我們作爲函數 $f(z)$ 在無窮遠點的性質．

這些性質，我們將逐項討論：按我們假設，對於適合 $0<|z'|<1:R$ 的 $z$，$\phi(z')$ 有一個羅朗展開式，

$$(1)\qquad \phi(z') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z'^n,$$

從這式，$\phi(z')$ 在 $z'=0$ 的性質可以按上一節察知．另一方面，對於適合 $|z|>R$ 的 $z$，$f(z)$ 當然也有一個羅朗展開式

$$(2)\qquad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n,$$

這兩個展開式祗在寫法上互有區別，因爲 $a_n = b_{-n}$，而 $z=\frac{1}{z'}$，$z'=\frac{1}{z}$．

因此，若將從 (1) 式所測知的 $\phi(z')$ 的性質詮譯成 $f(z)$ 的性質，則"點 $\infty$"現在是我們所討論的孤立點，而 (2) 式裏的昇級數的部分，我們就當作相當於這點的主要部分，所以

$a$) 若 (2) 式含無盡多個正冪，則 $f(z)$ 在 $\infty$ 有一個本性奇點；

$b$) 若 (2) 式祇含有盡多個正冪，而其中 $a_\beta$ 爲最後一個異於 0 的係數 $(\beta \geqq 1)$，則 $f(z)$ 在 $\infty$ 有一個 $\beta$ 級的極點；

$c$) 若 (2) 式簡直不含正冪，則 $f(z)$ 在 $\infty$ 是正規的.——在這最後一款，我們以 $a_0$ 爲函數在 $\infty$ 之值：$f(\infty)=a_0$. 若 $a_{-1}=\cdots\cdots=a_{-(p-1)}=0$, $a_{-p}\neq 0$, 則函數在 $\infty$ 有一個"$p$ 級的 $a_0$ 値點".

例：

1. $\dfrac{1}{1-z}$ 在 $z=\infty$ 是正規的，（因爲當 $|z|>1$ 時，這函數 $=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{z^n}$）而且在那裏有一個初級零點.

2. 每個有理函數，其分母的次 $k$ 大於或等於他分子的次 $m$ 的，在 $z=\infty$ 是正規的；$f(\infty)=0$ 或 $\neq 0$，視 $k>m$ 或 $=m$ 而定.

3. 每個有理函數，凡 $k<m$ 的，在 $z=\infty$ 有一個 $(m-k)$ 級極點——特別的：一個 $m$ 次的有理整函數在 $z=\infty$ 有一個 $m$ 級極點.

4. $e^z$, $\sin z$, $\cos z$ 及每個其他的超越整函數，在 $z=\infty$ 有一個本性奇點.

因爲這些新的定義都祇是敍述方法的改變，前節的兩個定理（祇須將字句加以適當的更改），對於 $\infty$ 點也是眞確.

**定理 1:** 若 $f(z)$ 在 $\infty$ 有一個極點，當則 $G>0$ 已知選定之後，總可以決定這點的一個小的隣域❶，使對於其中一切的點，（就是說，當 $R$ 充分的大時，對於一切適合 $|z|>R$ 的 $z$）$|f(z)|>G$.

**卡外二氏定理：** 若 $f(z)$ 在 $\infty$ 有一個本性奇點，則當複數 $c$ 及正數 $\varepsilon$ 與 $R$ 已經選定之後，總有點 $z$，使

$$|z|>R \quad 與 \quad |f(z)-c|<\varepsilon$$

同時成立.——（這兩個定理顯然包括 § 30, 2 與 5 兩定理，後二者是前二者的特款）.

我們還要應用以上的結果，證明有用的

**曼黎定理 (Satz von Riemann):** 若函數 $f(z)$ 在一個點 $z_0$——這點也可以是 $\infty$ 點——的隣域內是單値的，而且除去 $z_0$ 本身之外，$f(z)$ 在

❶ 一個"$\infty$ 的小的鄰域"自然是指一個（以 0 爲中心的）大圓的外部.

這鄰域內是正規的，則

$z_0$ 是一個正規點的充要條件爲：$f(z)$ 在 $z_0$ 的一個鄰域內爲有欄的；

$z_0$ 是一個極點的充要條件爲：在 $G>0$ 已經選定之後，我們可以如此的決定 $z_0$ 的鄰域，使在該域內處處 $|f(z)|>G$；

$z_0$ 是一個本性奇點的充要條件爲：上面兩種條件都不適合．

證：根據假設，$f(z)$ 可以在 $z_0$ 的鄰域內展爲一個羅朗級數，而按 $z_0$ 是有窮遠點或 $=\infty$，這羅朗級數可以寫成

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \quad 或 \quad f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n\left(\frac{1}{z}\right)^n.$$

從這節與前節的兩個定理，又因爲一個函數在一個正規點的鄰域內是有欄的，我們知道這些條件是必要的．再注意 $f(z)$ 在 $z_0$ 的性質，祇有以上三種可能性，而且這三種可能性，彼此不並立，我們就推知這些條件也是充分的．

習題：函數

$$\frac{z^2+4}{e^z},\quad \cos z-\sin z,\quad \operatorname{ctg} z,$$

在點 $z=\infty$ 有那一種的奇點？

## § 35. 殘數定理

設 $f(z)$ 在 $z_0$ 的鄰域內爲正規的，則按科犀定理，

$$\int f(z)dz=0,$$

其中積分所選的路是一個小的，包圍 $z_0$ 點而沿着正向走的路 $C$．相反的，若 $f(z)$ 在 $z_0$ 有一個孤立的奇點，但在 $z_0$ 的鄰域內 $f(z)$ 爲單值與正規的，則這積分普通不等於零．這積分的值，可以立即求得：因爲 $f(z)$ 在 $z_0$ $(0<|z-z_0|<r)$ 的一個鄰域內，可以展爲羅朗級數，所以按 § 31，我們立刻得以下的關係：

$$\frac{1}{2\pi i}{}^{(C)}\!\!\int f(z)dz=a_{-1}.$$

這個積分的值，或即，在羅朗展開式內第一個負冪的係數，我們稱爲

$f(z)$ 在 $z_0$ ❶ 的殘數 (Residuum) 而上式在某種意義下代表科屖定理的推廣.

**更普遍些:** 設閉路 $C$ 含在 $f(z)$ 的正規域內, 又設在他的內部, 除有盡多個奇點 $z_1, z_2, \cdots\cdots, z_k$ (這些奇點自然都是孤立的) 外, $f(z)$ 爲單值與正規的;則

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(C)} f(z)dz = f(z) \text{ 在 } z_1, z_2, \cdots\cdots z_k, \text{ 的殘數之和.}$$

證: 根據 § 17, 3,

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(C)} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int^{(C_1)} f(z)dz$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int^{(C_2)} f(z)dz + \cdots\cdots + \frac{1}{2\pi i}\int^{(C_k)} f(z)dz,$$

其中每個 $C_\lambda(\lambda=1, 2, \cdots\cdots, k)$ 是一個較小的, 祇包圍 $z_\lambda$ 點的路, 但從此式,我們的定理已經證明;因爲這式的右端,就是所求的殘數之和.

在應用時,普通是從羅朗展開式求得殘數, 於是積分的值, 就可以寫出來.

1. 例若閉路 $C$ 仍含在 $f(z)$ 的正規域內, 但 $f(z)$ 在 $C$ 的內部爲單值的,並且處處正規的, 而且在 $C$ 上每點, $f(z)$ 的值異於零,則 $C$ 祇能包圍有盡多個零點在內 (參看 § 24 定理 1). 設這些零點爲 $z_1, z_2, \cdots\cdots z_k$, 又設他們的級依序爲 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_k$. 我們將一個 $\alpha$ 級的零點, 作爲一個 $\alpha$ 重的零點,而在枚舉零點的時候, 我們把他枚舉 $\alpha$ 次. 這樣 $f(z)$ 在 $C$ 內的零點之數爲

$$N = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots\cdots + \alpha_k.$$

關於這個數 $N$, 我們有

**定理 1:**

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int^{(C)} \frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

證: 這裏面的被積函數在 $C$ 的邊界上是正規的; 在 $C$ 的內部則 $z_1, z_2, \cdots\cdots z_k$ 都是奇點. 我們很容易察知, $z_\lambda$ 是一個初級極點, 而 $f(z)$ 在

❶ 此處 $z_0$ 又必須是一個有窮遠點.

$z_\lambda$ 的殘數是 $a_\lambda$. 因爲普遍的若 $f(z)$ 在 $\zeta$ 有一個 $a$ 級零點,則

$$f(z)=a_a(z-\zeta)^a+a_{a+1}(z-\zeta)^{a+1}+\cdots\cdots,$$
$$f'(z)=aa_a(z-\zeta)^{a-1}+(a+1)a_{a+1}(z-\zeta)^a+\cdots\cdots,$$

從此,又因 $a_a \neq 0$,

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{a}{z-\zeta}+c_0+c_1(z-\zeta)+\cdots\cdots$$

是 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 的羅朗展開式,這展開式在 $\zeta$ 的某一個隣域內爲正確的(係數 $c$ 等很容易的可以從 $a$ 計算出來);故 $\zeta$ 是附有殘數 $a$ 的一個初級極點. 於是從殘數定理,卽得

$$\frac{1}{2\pi i}{}^{(C)}\!\!\int\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k=N,$$

這就是所要證明的.

2. 設 $f(z)$ 在 $\zeta$ 有一個 $\beta$ 級極點,則與上面完全相同的,我們可以推知 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 在 $\zeta$ 有一個初級極點,而且他在 $\zeta$ 的殘數是 $-\beta$. 所以若在 $C$ 的內部還有有盡多個極點, $z_1'$, $z_2'$, $\cdots\cdots z_m'$ 他們的級依序爲 $\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots \beta_m$, 則

$$\frac{1}{2\pi i}{}^{(C)}\!\!\int\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$
$$=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k-(\beta_1+\beta_2+\cdots\cdots+\beta_m).$$

其中 $\beta_1+\beta_2+\cdots\cdots+\beta_m=P$ 是代表 $f(z)$ 在 $C$ 的內部的極點之數,這裏枚舉的方法,與枚舉那裏的零點之數 $N$ 相彷. 於是我們有

**定理 2:** 若閉路 $C$ 含在 $f(z)$ 的正規域之內,又若 $f(z)$ 在 $C$ 上異於零,而在 $C$ 的內部爲單值的,並且除有盡多個極點之外是正規的,則

$$\frac{1}{2\pi i}{}^{(C)}\!\!\int\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=N-P,$$

就是說,等於 $f(z)$ 在 $C$ 內部零點之數減去極點之數,其中每一個零點或極點枚舉的次數,都等於他的級.

習題 1: 設 $f(z)$ 在 $z_1$ 有一個 $a$ 級零點,若 $\phi(z)$ 代表任意一個在 $z_1$ 正規的函數,則

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} \quad 與 \quad \phi(z)\frac{f'(z)}{f(z)},$$

的殘數爲何?若 $f(z)$ 在 $z_1$ 有一個 $\beta$ 級極點,則答案又如何?

習題 2: 接着習題 1, 試求以下積分的值與其意義

$$\frac{1}{2\pi i}{}^{(C)}\!\!\int z\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \quad 與 \quad \frac{1}{2\pi i}{}^{(C)}\!\!\int \phi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz,$$

其中 $f(z)$ 與 $C$ 的意義先設與本節定理 1 所假設的相同,次設與定理 2 的相同.

## § 36. 有理函數

我們在第 72 頁曾經說過,一個解析函數,很少能用一個陽式來表現,使我們從此可以計算函數之值. 可以如此表現的函數,我們至今祇遇見整函數與有理函數. 所以,若我們想"純粹"根據"函數論的理論"將函數分類, 則必須完全不顧函數的表示法而單從他本身的特徵(如他的值域,他奇點的性質等等)入手. 我們將整函數從函數中析別出來, 就是專根據他在整個平面上是正規的之特徵, —— 雖然整函數全部有一種共同的表示法,但這種可能性是偶然的,我們並未以此爲根據——而 § 30 的定理 2 與 5, 就是"純粹"根據"函數論的理論"將整函數區別爲有理整函數與超越整函數.

以下兩種定理, 卽用相仿的方法, 利用有理函數的特徵,將他們從函數中析別出來:

**定理 1**: 一個有理函數, 除極點外, 在有窮遠處與無窮遠處沒有其他奇點.

這個定理的證明已包含在 § 33 的例 2 與 § 34 的例 2 及例 3 之內:若我們再將這定理以下的轉理證明,則目的已經達到.

**定理 2**: 若一個單值函數,在有窮遠處與 $z=\infty$, 除極點外, 沒有其他奇點,則這函數是一個有理函數.

證: 因 $f(z)$ 既然在 $z=\infty$ 最多不過有一個極點, 在一個充分大的圓之外(就是說,在 $z=\infty$ 的某一個鄰域內),也許除去 $z=\infty$ 本身, $f(z)$ 處處是正規的. 所以一切在有窮遠處的奇點,都含在某一個可以決定的圓之內. 於是在這圓內祇能有有盡多個極點,否則這些奇點在圓內就(根據 § 6, 定理 1)必須有一個凝聚點;而這個凝聚點決不會是極點,因爲一

個極點必須是孤立的. 現在,若在有窮遠處根本沒有奇點,則 $f(z)$ 爲一個整函數,並且按 § 34, 例 4, 他必須是一個有理整函數.

現在設 $z_1, z_2, \cdots\cdots z_k$ 爲在有窮遠處的有盡多個極點, 則在每個極點的一個隣域內, $f(z)$ 都可以展爲羅朗級數, 而這些級數都祇能有有盡多個負冪;

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(\lambda)}(z-z_\lambda)^n+\frac{a_{-1}^{(-\lambda)}}{z-z_\lambda}+\cdots\cdots+\frac{a_{-\alpha_\lambda}^{(\lambda)}}{(z-z_\lambda)^{\alpha_\lambda}};$$

其中 $\alpha_\lambda$ 有極點 $z_\lambda$ 的級 $(\lambda=1, 2, \cdots\cdots, k)$. 令 $h_\lambda(z)$ 代表在冪級數後面的主部,則 $h_\lambda(z)$ 是一個有理函數, 這有理函數祇有一個奇點 $z_\lambda$, 而且在 $z=\infty$ 是正規的——其實他在那裏還 $=0$.

現在

$$f(z)-h_1(z)-h_2(z)-\cdots\cdots-h_k(z)$$

顯然是一個整函數, 而且因爲他在 $\infty$ 也至多祇有一個極點, 他還是一個有理整函數 $g(z)$. 這函數若在點 $\infty$ 時也是正規的,則化爲一個常數(一個 0 次的有理整函數).

於是

$$f(z)=g(z)+h_1(z)+h_2(z)+\cdots\cdots+h_k(z)\ \text{❶},$$

從這裏我們已可推知 $f(z)$ 是一個有理函數. 從主要部分 $h_\lambda(z)$ 的這個特殊的形狀,我們又推得

**定理 3:** 一個有理函數可以分解爲分項分數 (Partialbruch).

我們利用殘數定理, 以得代數基本定理(參看 § 30, 2)的又一個證明,作爲本節的結束.

若 $f(z)$ 爲一個有理整函數 $a_0+a_1z+\cdots\cdots+a_mz^m$ $(m\geqq 1,\ a_m\neq 0)$, 則按 § 30, 定理 2, 我們可以決定一個以 $O$ 爲心, $R$ 爲半徑的圓 $K$, 在 $K$ 之外, $|f(z)|$ 處處 $>1$, 故一定不會再有零點. 於是, $f(z)$ 若有零點, 這些零點自然都含在 $K$ 的內部.

按 § 35 定理 1, 零點之數是

❶ 在上面已經解決之款,就是,若 $f(z)$ 在有窮遠處是正規的,則此處缺 $h_\lambda(z)$ 各項.

$$N = \frac{1}{2\pi i} {}^{(K)}\!\int \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz.$$

但當 $|z| > R$ 時,被積函數的羅朗展開式開始幾項是

$$\frac{m}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \cdots\cdots,$$

其中各係數 $c$ 之值,我們無須曉得. 從上式我們立刻知道積分的值爲 $m$, 於是得

$$N = m.$$

就是說, 一個 $m$ 次的有理整函數, 恰有 $m$ 個零點 (根), 但每個零點枚舉的次數, 須等於他的級.

# 緒論

在本書第一卷內，我們已將解析函數普遍的理論的基礎奠定，在那裏我們祇偶然涉及特殊的函數(如 $e^z$, $\sin z$, $\log z$, $\sqrt[m]{z}$ 等等)或特殊的函數類(如有理函數或整函數)．現在我們先將這些特殊的函數與函數類個別的加以更精密的研究，然後再繼續較普遍的討論，但我們的目的，不外是將卷一，§ 27 中我們未能討論的情形，加以淸理而已．我們將要看出，那裏關於單值函數與多值函數所定的區別，是極基本的．因此，整個的討論，就以這區別爲出發點．

這樣，從這主要的兩類函數中，我們再檢出幾種特別有特殊性而又特別重要的函數．這本小書，範圍旣狹，我們所檢的自然談不到完全，故在選擇時，有些地方總不免稍爲任意．但爲減少這種危險起見，我們從最重要的初等函數(有理整函數，有理分函數，與 $e^z$, $\sin z$, $\log z$, $\sqrt[m]{z}$,……)出發，而根據他們的主要性質，以探求我們所要研究的重要概念與普遍規律．❶

有理整函數——顯然是最簡單又最易於瞭解的函數——是可以純粹根據"函數論的理論"析別出來的，他們的特徵是：在整個平面正規而在∞點祇有一個極點．若減去後一個限制，則我們所得到較普遍的函數類就是整函數，故整函數的特徵是：在整個平面(除去∞點)是正規的；有理函數與超越函數，都是其中的特款．因此，在卷一，§ 29 中，我們發現他們也是最簡單的函數，因爲一個整函數以任意一點爲中心的展開式，在整個平面內爲收斂的，於是也就在整個平面內代表這函數．在這裏解析開拓旣完全用不着，他們自然是單值的；全部整函數也就是全部具

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

形狀的，永遠收斂的冪級數，而且從此我們看出，他們是有理整函數的一種直接的擴充．

在本卷第一章內，關於這些函數，我們要提出以下的問題；有理整函

---

❶照此說來，我們下面所討論的，祇是我們所檢出——所謂信手拈來——的函數．函數論的領域廣袤，決不是一天或幾天可以遊歷完的，但旣要在這寥寥幾頁之內，將這領域內某些要地作簡短的速寫，我們就必須鄭重的請讀者注意不要認爲這本小書的內容，就等於函數論的內容．

數的基本特性中，那些爲一般整函數所共有，那些不爲他們所共有？——並且對於這些問題，我們提出一些答案.

根據卷一，§ 36，定理 1 與 2，有理分函數（*gebrochene rationale Funktion*）也可以純粹根據函數論的理論完全的析別出來，他們的特徵是：在整個平面與在∞點，除極點外沒有其他的奇點. 這裏，若也減去最後的在∞點的限制，則又得更普遍的一類函數，所謂半純函數（*meromorphe Funktion*），故半純函數唯一的特徵是：在整個平面（∞不在內）除極點外沒有其他的奇點.

在第二章內，我們將證明這些函數爲單值的，並將提出與以上相類似的問題.

就函數論的理論上講，函數 $e^z$，$\sin z$ 等最有興趣的性質，是他們的週期性（Periodizität）. 這個週期性本是從各函數的特性發生的；在第三章內，我們純粹根據函數論的理論，將這性質加以較細密的考察. 如此，我們得到單週期函數（*einfach-periodische Funktion*）與雙週期函數（*dopelt-periodische Funktion*）. 在後一類中，特殊的我們遇到橢圓函數（*elliptische Funktion*）——在單值函數的領域中，我們祇能以此爲止.

關於多值函數，我們必須先將多值的概念加以解剖，使這概念較之卷一 § 27 內所能解釋的更加清楚，再將多值性的本質書出一個較明晰的輪廓. 在第四章內，我們利用一種很簡單的工具以達到這個目的，這工具就是所謂的黎曼面（*Riemannsche Fläche*），因其簡單故這工具也可謂特別巧妙. 對於最簡單的多值函數，如

$$\sqrt[p]{z},\quad \log z,\quad \sqrt{(z-a_1)(z-a_2)\cdots\cdots(z-a_k)},$$

我們將說明其黎曼面的構造，而在第五章內，我們要頗詳盡的討論一種特別重要的多值函數；因其重要，前人對於這類函數的研究，也特別的透澈，這類函數就是代數函數（*algebraische Funktion*）.

最後利用由此所得的代數奇點（*algebraische Singularität*）的概念，凡在卷一內曾經解釋的，完全的解析函數的定義及解析結構的定義內所遺的罅隙，我們在第六章內都要加以塡補，於是我們對於解析結構的概念，可以得其最普遍的涵義，——但想在第一次遇見他時，卽予以基本的解決，則勢有所不能. 不成問題的，在全部的算學內，他是最美麗最深奧的概念之一.

# 第一編

## 單值函數

## 第一章　整函數

### §1. 外氏乘積定理

有理整函數最重要的性質，見於代數的基本定理中：每一個(不等於常數的)有理整函數必有零點．　但例如 $e^z$——由於 $e^z\cdot e^{-z}=1$——就沒有零點，於是我們對於緒論裏所提出的問題，似乎已經不能獲得結果．其實我們若稍深入核心，較仔細的觀察，即知並不如此．　要看出此點，我們設

$$g_0(z)=a_0+a_1z+\cdots\cdots+a_mz^m,$$
$$(m\geqq 1,\qquad a_m\neq 0)$$

爲任意一個不等於常數的有理整函數，則若 $z_1, z_2, \cdots\cdots, z_k$ 爲 $g_0(z)$ 的彼此互異的零點，而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_k$ 依序爲他們的級，我們即可根據代數基本定理，將 $g_0(z)$ 更精確的寫成下狀：

$$(1)\qquad g_0(z)=a_m(z-z_1)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2}\cdots\cdots(z-z_k)^{\alpha_k}.$$

這事實我們敍述如下：

(A)每一個有理整函數，都有一個所謂的乘積表示式(*Produkt darstellung*)，這表示式將函數零點的位置與級，很明顯的指示出來．❶

從這表示式，我們立刻更可知道，凡與 $g_0(z)$ 有相同的零點，而且零點的級也相同的另一個有理整函數 $g(z)$，與 $g_0(z)$ 的區別，祗能在因子 $a_m$；

❶這話對於"沒有零點"的有理整函數也可適用，這種有理整函數的級是 0 (也就是異於 0 的常數)，他們的乘積表示式祇包含一個因子 $a_m$ ($=a_0\neq 0$)——但對於常數 0，一切我們的討論，自然不再適用．

此外我們還知道，我們可以任意的指定零點的位置與級，換言之．

(B)我們總可構成一個有理整函數，使他的零點，具有預先指定的位置(自然是有盡多個)與級，——並且這函數是寫成乘積的形狀，而這乘積將零點很顯明的指示出來；又若要從一個特殊的，具此性質的函數以得其最普遍的，我們祇要加上一個任意的異於零的因子，("乘上一個沒有零點的有理整函數")．

我們若將(A)(B)兩條解釋爲代數基本定理的內容，則我們將可看出，所有這些話可以逐字擴充以適用於任何整函數．

爲此目的，我們先要提出相當於(B)條的問題，作爲以後一切的基本，我們要考察，能否以及如何構造一個整函數，具有預先指定的零點，❶更考察從他的零點，一切整函數可以確定到如何一個程度．

沒有零點的整函數． 若我們所要構造的整函數簡直沒有零點，則例如常數1或函數 $e^z$ 或 $e^{z^2}$ 或更普遍些 $e^{h(z)}$，都是這問題的一解；其中 $h(z)$ 代表完全任意的一個整函數． 最後一個答案是這問題最普遍的解，換言之，〔若 $h(z)$ 爲任意的整函數〕不僅 $e^{h(z)}$ 總是一個沒有零點的整函數，而且倒轉來，每一個如此的函數，可以寫成 $e^{h(z)}$ 之狀． 這結果我們簡述如下：

**定理 1：** 若 $h(z)$ 表示一個任意的整函數，則 $e^{h(z)}$ 爲最普遍的，沒有零點的整函數．❷

證： 我們祇還須證明，若 $H(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots\cdots$ 爲已給的一個沒有零點的整函數，則必有另一個整函數 $h(z)=b_0+b_1z+\cdots\cdots\cdots$，使 $e^{h(z)}=H(z)$． 現在因 $H(z)\neq 0$，特殊的 $a_0=H(0)\neq 0$，所以我們可以選擇 $b_0$，使 $e^{b_0}=a_0$；這是因爲 $e^z$ 可以有任何異於0的值． 其次，由於相同的理由，函數 $\dfrac{1}{H(z)}$ 處處是單值而正規的，故也是整函數． 因爲 $H'(z)$

❶詳細些說，那函數的零點恰有預先指定的位置與預先指定的級，——並且在一切其他的點，函數 $\neq 0$．

❷若我們利用多值函數 log，這定理就幾乎是很顯然的。因爲若 $H(z)$ 爲一個總 $\neq 0$ 的整函數，我們作函數 $h(z)=\log H(z)$，且規定 $h(0)$ 例如爲 $\log H(0)$ 的主值，則無論如何，這函數在0點的某一個鄰域之內是正規的。於是他在那裏的展開式 $h(z)=b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots\cdots$ 有一個正的收斂半徑，但這半徑(根據卷一，§23，定理2)必須是 $+\infty$，因爲祗在 $H(z)$ 有奇點或 $=0$ 的地方，$\log H(z)$ 才能有奇點，故 $h(z)$ 在有窮遠處不能有奇點．

也有同樣的性質，所以

$$\frac{H'(z)}{H(z)}=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots\cdots$$

也是一個整函數，於是這新級數永遠是收斂的．這樣，級數

$$b_0+c_0z+\frac{c_1}{2}z^2+\cdots\cdots+\frac{c_{n-1}}{n}z^n+\cdots\cdots$$

$$=b_0+b_1z+\cdots\cdots+b_nz^n+\cdots\cdots,$$

也永遠是收斂的，因此他代表一個整函數 $h(z)$．現在我們若設 $e^{h(z)}=H_1(z)$，則

$$\frac{H_1'(z)}{H_1(z)}=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots\cdots=\frac{H'(z)}{H(z)},$$

故 $H_1\cdot H'-H\cdot H_1'=0$．於是

$$\frac{H\cdot H_1'-H_1\cdot H'}{H^2}=\frac{d}{dz}\left(\frac{H_1(z)}{H(z)}\right)=0,$$

所以 $H_1(z)$ 與 $H(z)$ 兩函數的商爲常數．當 $z=0$，我們求得這個常數 $=1$，故

$$H(z)=H_1(z)=e^{h(z)}$$

證畢．❶

在簡直沒有零點的一款，我們的問題旣已完全解決，我們很容易看出來，一個整函數被他的零點決定到如何一個程度．例如設 $G_0(z)$ 與 $G(z)$ 爲兩個整函數，其零點的位置與級完全相同，則（參看卷一，§24，定理4）這兩個函數的商又是一個整函數，並且是沒有零點的．所以 $G(z)$ 與 $G_0(z)$〔比較(B)條〕的區別，更多在一個沒有零點的整函數的因子；反之若將 $G_0(z)$ 乘以一個如此的函數，零點的位置與級，自然也不會變更．聯合定理1，我們將這結果敍述如下：

**定理2：** 設 $G_0(z)$ 爲一個特殊的整函數，而 $h(z)$ 代表一個任意的整函數，則

$$G(z)=e^{h(z)}\cdot G_0(z)$$

爲最普遍的，其零點的位置與級與 $G_0(z)$ 完全相同的整函數．

❶從這裏所述的證明，我們更普遍的知道：若兩個函數 $f(z)$ 與 $f_1(z)$ 在一個域 $G$ 內爲單值而正規的，且異於 0，並且在域內他們的對數導微函數 $f':f$ 與 $f_1':f_1$ 相等，則他們的區別，至多是一個常數因子．——若 $f$ 與 $f_1$ 在 $G$ 內任意的一點有相同的值則他們自然就沒有區別．

據此，則餘下所要解決的問題是：我們能否以及如何構造一個特殊的，具有任意預給零點的整函數.

這裏，我們還必須立刻提出一個限制：因爲一個整函數在有窮遠處沒有奇點，故根據卷一，§24，定理1，在每一個有窮遠處的域內，這函數祇能有有盡多個零點. 所以預先指定的點，在有窮遠處不得有凝聚點. 現在，若我們祇加上這一個由於天然的需要所產生的限制，我們卽將看出，我們必可以構造一個具有上述性質的整函數. 這函數可以用一個乘積的形狀表示〔與有理整函數相仿——參看(1)〕，而其零點的位置與級，則在乘積內明顯的指示出來. 於此，我們有下面的，因他的發現者而得名的定理.

**外氏乘積定理**(**Weierstrass sche Produktsatz**)：若預給一個任意的，在有窮遠處沒有凝聚點的(有盡或無盡)點組，又若對於組中每一個點，預先指配某一個正整數以爲級，則必有一個整函數，恰在預給的點上有零點，而這些零點的級，又恰等於預給的級，而且在其餘的點異於 0. 這函數可以寫成一個乘積的形狀(最終的公式在第 115 頁內)，從這乘積，我們又可看出零點的位置與級〔與(1)相仿〕. 於是——根據定理 2 我們立刻可以繼續推知——若 $G_0(z)$ 爲如此的一個函數，則

$$G(z)=e^{h(z)}\cdot G_0(z)$$

爲最普遍的適合這問題的條件的函數，其中 $h(z)$ 代表任意一個整函數.❶

我們若暫時作爲這個基本的定理已經證明，則由此立刻知道，關於有理整函數的(A)條，也完全可以擴充以適用於任意一個整函數.

要證此點，設 $G(z)$ 爲任意已給的一個整函數，則他的零點所構成的組，在任何有窮遠處沒有凝聚點. 根據外氏定理，我們可以構造另外一個整函數 $G_0(z)$，其零點的位置與級完全與 $G(z)$ 相同，——而且 $G_0(z)$ 還可寫成乘積的形狀，其零點的位置與級都在乘積中顯明的表示出來. 但根據定理 2，若 $h_0(z)$ 代表一個適宜的整函數，則必需的

$$G(z)=e^{h_0(z)}\cdot G_0(z),$$

於是事實上我們已求得所給整函數 $G(z)$ 的一個乘積表示式，從這表示式函數零點的位置與級，我們可以一目了然.——因此，關於有理整函數的

❶ 若我們所要構造的整函數簡直沒有零點，則因子 $G_0(z)$ 可以取消，亦卽可以用 1 來代替，——也就是用一個具有預給的零點的整函數來代替.

(A)與(B)兩條,可以逐字擴充以適用於任何整函數. 而我們所要證的已完成。

現在所缺的,祇是外氏乘積定理的證明,這個證明,成爲下一節的目標.

習題 1. $\dfrac{\sin iz}{e^{2z}-1}$ 是一個沒有零點的整函數(證?). 根據定理 1,他可以寫成 $e^{h(z)}$ 的形狀. 此處的 $h(z)$ 應如何選擇?

2. $\cos iz$ 與 $e^{2z}+1$ 的零點有同樣的位置與級(證?). 根據定理 2,將前者乘以一個具形狀 $e^{h(z)}$ 的因子,可以得後者. 此處 $h(z)$ 應如何選擇?

## §2. 外氏乘積定理的證明

如上文所說,適合外氏定理的條件的整函數,可以用一個乘積來表示.——並且普通是用一個無盡乘積 (unendliches Produkt)——如在無盡級數之款一樣,含常數因子的無盡乘積論中最簡單的事實,我們將假定爲已知的.

雖然如此,因爲這些事實,未必爲一般所熟悉,故爲對於以後的討論,有一個堅固的基礎起見我們將這些最重要的定義與定理,凡是我們須要應用的,不加證明,很簡單的列舉如下.❶

**定義**: 設無盡乘積

$$u_1\cdot u_2\cdot\cdots\cdots u_\lambda\cdot\cdots\cdots=\prod_{\lambda=1}^{\infty}u_\lambda \tag{1}$$

中,各因子爲任意的複數. 乘積(1)稱爲(眞)收歛之充要條件是: 從某一個指數起——例如凡 $\lambda>m$ 時——沒有一個因子等於 0,而且

$$\lim_{n\to\infty}(u_{m+1}\cdot u_{m+2}\quad\cdots u_n)$$

存在,並有一個有限的,異於 0 的值. 令此值爲 $U_m$,則

$$U=u_1\cdot u_2\cdots\cdots u_m\cdot U_m$$

顯然與 $m$ 無關,這數稱爲無盡乘積(1)的值.❷

---

❶欲得詳細的證明,可參看著者的"Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen",第三版, Berlin 1931, Tulius Springev.

❷仿照無盡乘積收斂的定義,我們本可將此定理縮短如下:祇要

$$\lim_{n\to\infty}(u_1\cdot u_2\cdots\cdots u_n)=U,$$

乘積(1)已經稱爲收斂的,而 $U$ 稱爲他的值。但按此,則每個乘積祇要有一個因子等於 0,即是收斂的,而其值恆爲 0,同樣,每個乘積,祇要例如凡 $\lambda>m$ 時,$|u_\lambda|\leqq\theta<1$ 恆爲正確,也是收斂的,且其值恆爲 0. 爲要將此種情形除外,我們採用上面的定義較爲適宜,並且——在必需的時候——我們稱之爲"眞"收斂以提醒我們所加的限制.

關於這些收斂的無盡乘積,以下的幾個定理爲眞確,這幾個定理很容易證明.

**定理 1:** 一個收斂乘積的值爲 0 的充要條件是:他的因子中有一個等於 0.

**定理 2:** 無盡乘積(1)爲收斂的充要條件是:在選擇任意一個 $\varepsilon>0$ 之後,一個指數 $n_0$ 可以確定,使凡 $n>n_0$ 而且 $r\geqq 1$ 時

$$|u_{n+1}\cdot u_{n+2}\cdots u_{n+r}-1|<\varepsilon$$

恆爲正確(比較卷一,§5,定理 2 與 §6 定理 2).

因爲根據這定理——我們令 $r=1$, $n+1=\lambda$——必需的 $\lim\limits_{\lambda\to\infty} u_\lambda=1$,普通我們令乘積的因子 $=1+c_\lambda$,如此則乘積(1)改作下狀

$$\prod_{\lambda=1}^{\infty}(1+c_\lambda). \tag{2}$$

$c_\lambda\to 0$ 當然是這個乘積收斂的一個必需條件(但他絕不是充分的!).——其次,我們須要

**定義:** 若

$$\prod_{\lambda=1}^{\infty}(1+|c_\lambda|)$$

爲收斂的,❶則乘積(2)稱爲絕對收斂的。——於是以下諸定理亦爲眞確.

**定理 3:** 絕對收斂爲普通收斂的充分條件;或者從 $\Pi(1+|c_\lambda|)$ 的收斂,可以推知 $\Pi(1+c_\lambda)$ 的收斂.

根據這個定理,祇須對於絕對收斂的乘積,我們有收斂的檢驗標準,爲我們的目的已够.關於這種乘積,以下兩定理成立,這兩定理將收斂與否的問題,完全解決.

**定理 4:** 若 $\gamma_\lambda\geqq 0$,則乘積 $\Pi(1+\gamma_\lambda)$ 收斂的一個充要條件是:級數 $\Sigma\gamma_\lambda$ 爲收斂的.

**定理 5:** $\Pi(1+c_\lambda)$ 絕對收斂的一個充要條件是:$\Sigma c_\lambda$ 爲絕對收斂的.❷

與級數之款相仿,我們有

**定理 6:** 若在絕對收斂的乘積內,我們將因子的次序,完全隨意的顚倒,所得的乘積,仍是收斂的,並且有相同的值.❸

在這個含常數因子的乘積之外——完全相當於卷一,第六章所討論

❶最先想到的定義:"若 $\Pi|u_\lambda|$ 是收斂的,則 $\Pi u_\lambda$ 稱爲絕對收斂的"是不合實用的,因爲如此則每一個收斂乘積同時也絕對收斂.

❷由此,則例如 $\prod\limits_{\lambda=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{z^2}{\lambda^2}\right)$ 對於 $z$ 的每一個值都是收斂的,因爲級數 $\Sigma\left|\dfrac{z^2}{\lambda^2}\right|=|z|^2\,\Sigma\dfrac{1}{\lambda^2}$ 是收斂的.

❸用另一方法表示:像含有盡多個因子的乘積之款一樣,對於絕對收斂的乘積對易律(Kommutationsgesetz)爲眞確,對於不絕對收斂的乘積,對易律就不適用,但締合律(Assoziationsgesetz)適用於一切收斂的乘積,就是:我們可以用任意的方法,將前後相連的因子用括弧括起,作爲一個因子.

的——我們同時還要討論另一種乘積，其因子是一個複變數 $z$ 的函數，這種乘積，可寫作

$$(3)\qquad \prod_{\lambda=1}^{\infty}(1+f_{\lambda}(z))$$

的形狀，與卷一第六章完全相仿，一個如此乘積的收斂域，是一切具以下性質的點 $z$ 所構成的組 $M$：第一，$z$ 屬於一切 $f_{\lambda}(z)$ 的定義域；第二，對於 $z$，乘積(3)是收斂的.❶　因爲據此，這乘積對於每個屬於 $M$ 的點，都有一個固定的數值，所以我們也和從前一樣的說：這乘積在 $M$ 內代表一個固定的(單值)函數.　爲我們函數論理論上的目的，現在特別重要的，仍是(比較卷一，§ 22，定理 3)去求：一個如此的乘積在收斂域內代表一個解析函數的一個可應用的條件.　爲我們的目的，以下的定理已可敷用：

**定理 7**：　設 $f_1(z)$，$f_2(z)$，……，$f_{\lambda}(z)$，……爲一個無盡敍列的函數；設有一個域 $G$ 在，具以下性質：一切這些函數在 $G$ 內都是正規的，而且 $\sum_{\lambda=1}^{\infty}|f_{\lambda}(z)|$ 在 $G$ 中每一個閉子域 $G'$(參看卷一，第 82 頁)內爲齊收斂的.

這樣，則乘積(3)在整個域 $G$ 內爲收斂的，而且代表一個在 $G$ 內正規的函數 $f(z)$.　此外，根據定理 1，在屬於 $G$ 的一點，若乘積的因子至少有一個等於零，——而且祇在這些點——則這函數在這點有零點.　如此的一個零點的級，等於在那裏本身等於 0 的因子❷的級之和.

證：　設 $G'$ 爲 $G$ 的任意一個閉子域.　因爲不但

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty}|f_{\lambda}(z)|,\qquad \text{而且}\ \sum_{\lambda=m+1}^{\infty}|f_{\lambda}(z)|$$

對於一切 $m\geqq 0$ 爲齊收斂的，所以根據定理 5，我們先知道，無論如何，乘積

$$(4)\qquad \prod_{\lambda=m+1}^{\infty}(1+f_{\lambda}(z))$$

在 $G'$ 內爲絕對收斂的，於是他在那裏代表某一個函數，這函數可稱爲

---

❶例如，根據上頁底註❷，$\prod_{\lambda=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda^2}\right)$ 的收斂域爲整個 $z$ 平面.

❷我們從證明中可以推知，如此的因子祇有有盡多個.

$F_m(z)$. 現在我們將正整數 $m$ 如此的選擇——這個根據卷一，§ 21 是可能的——，使凡 $n \geqq m$，與 $r \geqq 1$ 而 $z$ 屬於 $G'$ 時，

(5) $$|f_{n+1}(z)|+|f_{n+2}(z)|+\cdots\cdots+|f_{n+r}(z)|>\tfrac{1}{2}.$$

這樣，$F_m(z)$ 更是在 $G'$ 內正規的且異於 0 的一個函數. 要證此點，爲簡單起見，當 $n>m$ 時，我們令

$$\prod_{\lambda=m+1}^{n}(1+f_\lambda(z))=P_n, \quad P_m=0,$$

則得

$$F_m(z)=\lim_{n\to\infty} P_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}[P_{m+1}-P_m)+(P_{m+2}-P_{m+1})+\cdots\cdots+(P_n-P_{n-1})],$$

$$F_m(z)=\prod_{\lambda=m+1}^{\infty}(P_\lambda-P_{\lambda-1}),$$

這裏 $F_m(z)$ 是用一個無盡級數來代表. 現在利用卷一，§ 22 內諸定理，我們可以迅速的達到目的. 因爲當 $n>m$ 時，

$$|P_n|\leqq(1+|f_{m+1}(z)|)\cdots\cdots(1+|f_n(z)|)$$
$$\leqq e^{|f_{m+1}(z)|+\cdots\cdots+|f_n(z)|}<e^{\frac{1}{2}}<2 \text{ ❶}$$

所以對於剛才所得的級數之各項(從第二項起)，以下的估計式成立:

$$|P_\lambda-P_{\lambda-1}|=|P_{\lambda-1}|\cdot|f_\lambda(z)|<2|f_\lambda(z)|.$$

$\Sigma|f_\lambda(z)|$ 既是齊收斂的，新的級數(6)在 $G'$ 內也是如此，而且因此他所決定的函數 $F_m(z)$ 爲一個在 $G'$ 內正規的函數. 又在 $G'$ 內這函數異於 0 因爲根據(5)，凡 $n\geqq m$ 時，在 $G'$ 內

$$|f_{n+1}(z)|<\tfrac{1}{2},$$

所以當 $\lambda\geqq m+1$ 時，

$$|1+f_\lambda(z)|\geqq 1-|f_\lambda(z)|>\tfrac{1}{2},$$

故 $F_m$ 沒有一個因子能等於 0. 因

$$f(z)=[1+f_1(z)]\cdots\cdots[1+f_m(z)]\cdot F_m(z),$$

故 $F_m(z)$ 在 $G'$ 的每點 $z$ 既爲正規的，$f(z)$ 也是如此，而且在 $G'$ 的一點，祇當前面的因子中有一個等於 0 時，$f(z)$ 才能等於 0；而一個如此的零點的級，又的確等於在那裏等於 0 的因子之級的總和.

---

❶ 當 $x\geqq 0$ 時，$1+x\leqq 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots=e^x$.

但若 $z$ 是從 $G$ 內完全任意的取的，則——因爲 $z$ 當然是 $G$ 的內點——我們總可以如此的選擇 $G'$，使 $z$ 也屬於 $G'$． 於是剛才所得的結果，適用於整個的 $G$ 域，而一切皆已證明．

相當於卷一，§22，定理 3 內的，進一步的內容，我們在此也可述一些關於 $f(z)$ 的導微函數的事實；但因爲含許多因子之乘積的普通導微函數，不能用簡明的方法表示，這裏採取所謂的對數導微函數 (logarithmische Ableitung)❶較爲便利． 關於 $f(z)$ 的導微函數，我們有

**定理 8:** 在定理 7 的假設之下，在 $G$ 的每一點，凡是 $f(z)\neq 0$ 的

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{f_\lambda'(z)}{1+f_\lambda(z)}; \tag{7}$$

換言之，右邊的級數，對於每一個如此的 $z$ 是收斂的，並且代表 $f(z)$ 的對數導微函數．

證: 設 $z$ 爲適合定理中條件的一個固定的點，又設我們選擇子域 $G'$，使 $z$ 仍在 $G'$ 之內，則我們先有

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{f_1'(z)}{1+f_1(z)}+\cdots\cdots+\frac{f_m'(z)}{1+f_m(z)}+\frac{F_m'(z)}{F_m(z)}. \tag{8}$$

但現在因爲級數(6)在 $G'$ 內爲齊收斂的，故根據卷一，§22，定理 3，

$$F_m'(z)=\sum_{\lambda=m+1}^{\infty}(P_\lambda'-P_{\lambda-1}')=\lim_{n\to\infty}P_n',$$

其中 $P_n'$ 爲 $P_n$ 的導微函數． 據此，又因爲 $F_m(z)$ 與當 $n>m$ 時一切的 $P_n$，皆不等於 0，

$$\frac{F_m'(z)}{F_m(z)}=\lim_{n\to\infty}\frac{P_n'}{P_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f'_{m+1}(z)}{1+f_{m+1}(z)}+\cdots\cdots+\frac{f_n'(z)}{1+f_n(z)}\right)$$
$$=\sum_{\lambda=m+1}^{\infty}\frac{f_\lambda'(z)}{1+f_\lambda(z)},$$

從此與(8)，即得我們所要證的結果．

關於剛才求得的級，還有

**定理 9:** 在每一個含於 $G$ 內而不含 $f(z)$ 的零點的閉子域 $G''$ 裏，級

❶也就是，普通的導微函數，除以原來的函數． 設 $F(z)=g_1(z)\cdot g_2(z)\cdots\cdots g_k(z)$，又設各因子在 $z_0$ 皆可導微且 $\neq 0$，則

$$\frac{F'(z_0)}{F(z_0)}=\frac{g_1'(z_0)}{g_1(z_0)}+\frac{g_2'(z_0)}{g_2(z_0)}+\cdots\cdots+\frac{g_k'(z_0)}{g_k(z_0)}.$$

數(7)爲絕對而且齊收斂的，故級數(7)在那裏可以逐項微分任意多次。

證：因爲沒有一個因子 $[1+f_\lambda(z)]$ 能在 $G''$ 內等於0，故每一個這樣的因子的絕對值總大於一個正數，❶ 我們稱之爲 $\gamma_\lambda$。因爲凡 $\lambda>m$ 時(參看上文)，$\gamma_\lambda$ 一定 $>\frac{1}{2}$，所以必有一個正數 $\gamma$ 在，使對於一切的 $\lambda$，$\gamma_\lambda \geqq \gamma > 0$ 總是正確。故對於一切的 $\lambda$ 與一切在 $G''$ 內的 $z$，

$$\left|\frac{f_\lambda'(z)}{1+f_\lambda(z)}\right| < \frac{1}{\gamma}\,|f_\lambda'(z)|.$$

但根據卷一，§ 22 定理 3 的證明(再參考那裏的習題 2)，即知 $\sum|f_\lambda'(z)|$ 在 $G''$ 內爲齊收斂的。從最後一個估計式，我們知道級數(7)也是如此。

在我們對於無盡乘積稍爲稔熟之後，要證外氏乘積定理是容易的。

若預先指定的祇有有盡多個點 $z_1, z_2, \cdots\cdots z_k$ 及其依序的級 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_k$，則乘積

$$(1)\qquad (z-z_1)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2}\cdots\cdots(z-z_k)^{\alpha_k}$$

已是這問題的一解，於是這一款即已解決。但若預先指定無盡多個點作爲零點，則不能如此簡單，因爲這樣所作成的乘積，普通是無意義的；即使我們將乘積(1)寫作

$$(2)\qquad \left(1+\frac{z}{z_1}\right)^{\alpha_1}\left(1+\frac{z}{z_2}\right)^{\alpha_2}\cdots\cdots\left(1+\frac{z}{z_k}\right)^{\alpha_k},$$

而仿照此式作一個無盡乘積，所得的結果普通也還是無意義的。

我們於是更向另一方面進行——外氏構造無盡乘積的特點就在這個轉變

因爲在每一個有欄的域內，祇能有有盡多個預給的點，所以一切預給的點，必須構成一個可枚舉的(參看卷一，第 9 頁)組，於是可以排成一個點敍列。❷ 這些點的次序是無關重要的；但若原點也在內，其級爲 $\alpha_0$，則用 $z_0$ 表示原點而暫時將他擱置一旁，其餘的我們依任意的次序，但經排定後就是固定的次序，用 $z_1, z_2, \cdots\cdots z_\lambda\cdots\cdots$ 表示。設其相當的級爲 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_\lambda\cdots\cdots$。一切的 $z_\lambda$ 都異於 0，而且因在有窮遠處無凝聚點，故

❶因爲 $|1+f_\lambda(z)|$ 是綿續函數，他可以達到他的下限；所以在 $G''$ 內這下限不能等於 0。

❷爲這目的，我們例如可以以 0 爲中心，以 1，2，3……爲半徑畫圓，再按諸圓環相鄰接的次序，將所有的點排列，在同一個圓環內的點(祇有有盡多個)，我們可以採取任意的觀點定其次序。

$$z_\lambda \to \infty, \qquad |z_\lambda| \to +\infty.$$

因此我們可以(而且有種種不同的方法)選定一個正整數的敍列 $k_1, k_2 \cdots k_\lambda \cdots\cdots$,使對於每個 $z$,

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda \left(\frac{z}{z_\lambda}\right)^{k_\lambda} \tag{3}$$

爲絕對收斂的. 事實上例如我們取 $k_\lambda = \lambda + \alpha_\lambda$ 卽足,❶ 因爲無論 $z$ 有何(固定的)值,由於 $z_\lambda \to \infty$, 對於一切充分大的 $\lambda$,

$$\left|\frac{z}{z_\lambda}\right| < \frac{1}{2}, \qquad \text{並且} \qquad \left|\alpha\left(\frac{z}{z_\lambda}\right)^{\lambda+\alpha_\lambda}\right| < \alpha_\lambda\left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda+\alpha_\lambda} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda}, \text{❷}$$

故若令 $k_\lambda = \lambda + \alpha_\lambda$, 該級數必定是絕對收斂的.

若我們將適合這條件的數 $k_\lambda$ 任意的選定, 但選定後卽固定不改, 則我們現在要證明,乘積

$$G_0(z) = z^{\alpha_0} \cdot \prod_{\lambda=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{z_\lambda}\right)e^{\frac{z}{z_\lambda}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_\lambda}\right)^2+\cdots\cdots+\frac{1}{k_\lambda-1}\left(\frac{z}{z_\lambda}\right)^{k_\lambda-1}}\right]^{\alpha_\lambda}$$

(外氏乘積定理)

代表具所需的特性的一個整函數.❸ 〔但若原點不是預給的零點之一(參看上文),則此處在乘積之前的因子 $z^{\alpha_0}$ 卽應取消; 同樣, 若 $k_\lambda$ 中之一個 $=1$,則相當於他的指數因子,也應取消〕.

現在這定理的證明很簡單:爲要利用上面關於乘積的諸定理起見,我們令無盡乘積的因子$=1+f_\lambda(z)$,於是根據定理 7, 我們祇要證明

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty}|f_\lambda(z)| = \sum_{\lambda=1}^{\infty}\left|\left[\left(1-\frac{z}{z_\lambda}\right)e^{\frac{z}{z_\lambda}+\cdots\cdots+\frac{1}{k_\lambda-1}\left(\frac{z}{z_\lambda}\right)^{k_\lambda-1}}\right]^{\alpha_\lambda}-1\right| \tag{4}$$

在每一個有欄域內是齊收斂的. 因爲這樣我們就可以取整個平面爲定理 7 內的域 $G$, 根據定理 7, 這無盡乘積是一個整函數, $G_0(z)$ 因子也是一個整函數; 並且從 $G_0(z)$ 因子的形狀,再應用定理 7 的第二部分, 卽知 $G_0(z)$ 更有所需的特性. 在以 0 爲圓心, $R$ 爲半徑的圓($R>0$ 爲任意的,但以後卽爲固定的)內,級數(4)的齊收斂性,我們證明如下:

❶往往比這個小得多的數已可應付.

❷對於每一個自然數 $\alpha$, $\frac{\alpha}{2^\alpha}<1$ 恆爲正確.

❸在方括內的指數部分使乘積收斂,若沒有這部分,這乘積普通是發散的,因此我們稱這部分爲令乘積收斂的因子(*Konvergenzerzeugender Faktor*).

因爲級數(3)對於 $z=R$ 也是收歛的，又因 $z_\lambda\to\infty$，所以 $m$ 可以選得如此的大，使凡 $\lambda>m$ 時，

$$(5)\qquad \alpha_\lambda\left|\frac{R}{z_\lambda}\right|^{k_\lambda}<\frac{1}{2},\qquad \text{而且}\ \frac{R}{|z_\lambda|}<\frac{1}{2}.$$

現在若暫時以 $u$ 代 $\frac{z}{z_\lambda}$ 以 $k$ 代 $k_\lambda$，以 $\alpha$ 代 $\alpha_\lambda$，則當 $\lambda>m$ 時，級數(4)第 $\lambda$ 項作下狀：

$$\left|\left[(1-u)e^{u+\frac{u^2}{2}+\cdots\cdots+\frac{u^{k-1}}{k-1}}\right]^\alpha-1\right|,\qquad \text{其中}\begin{cases}|u|<\frac{1}{2}\\ \alpha\,|u|^k<\frac{1}{2}.\end{cases}$$

但當 $|u|<1$ 時，我們可寫❶

$$1-u=e^{-u-\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{3}-\cdots\cdots}$$

於是上面所說的 $\lambda$ 項，又

$$=\left|e^{\alpha\left(-\frac{u^k}{k}-\frac{u^{k+1}}{k+1}-\cdots\cdots\right)}-1\right|,\qquad \text{因此}❷$$

$$\leqq e^{\alpha\left(\frac{|u|^k}{k}+\frac{|u|^{k+1}}{k+1}+\cdots\cdots\right)}-1\leqq e^{\alpha|u|^k(1+|u|+|u|^2+\cdots\cdots)}-1.$$

現因 $|u|<\frac{1}{2}$，故此式又

$$<e^{2\alpha|u|^k}-1,$$

因當 $x\geqq 0$ 時，$e^x-1\leqq xe^x$ 總是眞確，❸ 所以此式又

$$\leqq 2\alpha|u|^k e^{2\alpha|u|^k}<6\alpha|u|^k,$$

後一個不等號是因爲根據 (5) $e$ 的指數小於 1．故對於一切充分大的 $\lambda$ 與一切適合 $|z|\leqq R$ 的 $z$，我們有

$$|f_\lambda(z)|<6\alpha_\lambda\left|\frac{z}{z_\lambda}\right|^{k_\lambda}\leqq 6\alpha_\lambda\left|\frac{R}{z_\lambda}\right|^{k_\lambda}.$$

---

❶因右端指數中的級數的值爲 $\log(1-u)$ 的主值。——這個簡單的事實，也可以根據第 107 頁底註中所述的定理，從以下兩點看出來：當 $u=0$ 時，等號兩端相等；當 $|u|<1$ 時，他們的導徵函數相等。

❷因對於每一個複數 $w$，下式恆成立：

$$|e^w-1|\leqq|w|+\left|\frac{w^2}{2!}\right|+\cdots\cdots=e^{|w|}-1.$$

❸ $e^x-1=x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots=x\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots\cdots\right)\leqq xe^x.$

對於每個 $\lambda$，這裏面最後一式代表正數，由於 $k_\lambda$ 等的選擇，他們所構成的級數是收斂的。根據卷一，§ 21 的外氏收斂定理，$\Sigma|f_\lambda(z)|$ 在以 0 爲圓心，$R$ 爲半徑的圓內是齊收斂的，於是外氏乘積定理乃完全證明。

習題 1. 試精確的證明定理 1—6.

2. 試決定以下含常數因子的各乘積的收斂性與其值：

a) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)$； b) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$； c) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$.

3. 決定以下各乘積的收斂域：

a) $\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^n)$； b) $\prod_{n=0}^{\infty}(1+z^{2^n})$； c) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^z}\right)$；

d) $\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^z}\right)$， $p$ 取一切的質數.

e) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+c_n z)$， 其中 $\Sigma c_n$ 爲一絕對收斂級數.

4. 試證以下公式：

a) $\prod_{p}\frac{1}{1-\frac{1}{p^z}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$ 〔參看 3. (c) 與 (d)〕；

b) $\Pi(1+z^{2^n})=\frac{1}{1-z}$ 〔參看 3. (b)〕.

5. 若在式

$$\prod_{p}\left(1+\frac{1}{p^z}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n}{n^z}$$

中，$p$ 仍取一切的質數，則右端係數 $\mu_n$ 的值爲何？

6. 設 $z_1, z_2, \cdots\cdots z_n, \cdots\cdots$ 爲變爲無限的任意一個數敍列，若一切 $z_n \neq 0$，則對於所有的 $z$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{[\log n]}$$

爲收斂的.——因此，在外氏乘積定理中的 $k_\lambda$，總可以選擇得較書中所採用的略小。這些較小的 $k_\lambda$ 爲何？

7. 試證明外氏乘積定理，對於么圓所包的域，可有以下的推廣：

設敍列 $z_1, z_2, \cdots\cdots z_n \cdots\cdots$ 爲在么圓內任意不同的點，但他們在么圓的內部沒有凝聚點(祗在圓周上有之)，又設 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_n \cdots\cdots$ 爲任意正整數所成的敍列。則總可以構造一個函數 $f(z)$——而且是寫成與外氏乘積完全相仿的形狀的——，在么圓內是正規的，並且在各個 $z$ 點(而不在別處)恰好有一個 $\alpha_n$ 級的零點。

8. 試利用上題構造一個以么圓爲自然疆界的函數。

## § 3. 外氏乘積定理的幾個例

在預給零點之後，整函數的構造旣是非常簡單，—祗是這個定理精密的證明較爲冗長—，所以我們可以很容易的作任意多的例. 在以下的情形，所得的乘積最簡單所預給的零點與其級是如此的，使從敍列 $z_1$, $z_2$……所構成的級數

$$\Sigma \frac{\alpha_\lambda}{z_\lambda}, \qquad \text{於是也使 } \Sigma\alpha_\lambda\left(\frac{z}{z_\lambda}\right)$$

對於每個 $z$ 絕對收斂. 因爲如此則我們可以取一切的 $k_\lambda=1$, 而所求的函數就成

$$G_0(z)=z^{\alpha_0}\cdot\prod_{\lambda=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_\lambda}\right)^{\alpha_\lambda}$$

的形狀。 例若 0, 1, 4, 9,……$\lambda^2$,……爲初級零點,則我們即得這問題的最普遍的解:

$$G(z)=e^{h(z)}\cdot z\cdot\prod_{\lambda=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\lambda^2}\right),$$

其中 $h(z)$ 爲任意的整函數.——若 1, 8,……$\lambda^3$,……爲零點,其級依序爲 1, 2,……$\lambda$,……, 則最普遍的解是

$$G(z)=e^{h(z)}\cdot\prod_{\lambda=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\lambda^3}\right)^{\lambda}.$$

在這些易於仿造的例之外，我們現在還要敍述在函數論的理論上特別重要的，乘積定理的幾種應用。

**例 1: $\sin\pi z$.** 假設要構造一個整函數,在一切實網點(就是在 0, ±1, ±2,……)恰有初級的零點. 我們將他們排列如下: $z_0=0$, $z_1=+1$, $z_2=-1$,……$z_{2\nu-1}=\nu$, $z_{2\nu}=-\nu$,……($\nu=1, 2,$……)。 則對於每一個 $z$, 級數

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left(\frac{z}{z_\lambda}\right)^2=z^2\cdot\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{{z_\lambda}^2}$$

絕對收斂,故我們可以取一切的 $k_\lambda=2$. 於是我們立刻得這問題的最普遍的解:

$$G(z)=e^{h(z)}\cdot z\cdot\prod_{\lambda=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{z_\lambda}\right)e^{\frac{z}{z_\lambda}}\right]$$

$$=e^{h(z)}\cdot z\cdot\prod_{\nu=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{\nu}\right)e^{\frac{z}{\nu}}\right]\left[\left(1+\frac{z}{\nu}\right)e^{-\frac{z}{\nu}}\right]$$

$$=e^{h(z)}\cdot z\cdot\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\nu^2}\right).$$

顯然的,函數 $\sin\pi z$ 也是這問題的一個解,所以他必定也可以寫成剛才所求得的式樣,就是說,有一個整函數 $h_0(z)$ 在,使

$$\sin \pi z = e^{h_0(z)} \cdot z \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\nu^2}\right).$$

若我們更將 $h_0(z)$ 找出，則按照 § 1 (參看第 108 頁)的意義，我們於此已求得 $\sin \pi z$ 的乘積表示式。

但僅僅根據零點的情形，我們當然不能求得 $h_0(z)$。要決定這函數，我們必須利用特殊函數 $\sin \pi z$ 的其他性質，例如他的羃級數展開式，他的週期性，由他所得的等角變換，他在無窮遠處的性質等等。決定 $h_0(z)$ 的一個方法，我們簡述如下。❶

我們先證明 $h_0''(z)$ 是一個常數。根據 § 2，定理 8，從(1)得

(2) $$\pi \operatorname{ctg} \pi z = h_0'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-\nu} + \frac{1}{z+\nu}\right).$$

更根據定理 9，再微分一次，得

$$-\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = h_0''(z) - \frac{1}{z^2} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z-\nu)^2} + \frac{1}{(z+\nu)^2}\right).$$

這式可簡寫成

$$h_0''(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-\nu)^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z},$$

——這個關係在每一個不含實網點的閉域內都成立。若在右端以 $z+1$ 代 $z$，則因 $\sin^2 \pi z$ 的週期爲 $+1$，又因

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z+1-\nu)^2} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[z-(\nu-1)]^2} = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-\mu)^2},$$

故結果無變更。所以 $h_0(z)$ 是一個以 $+1$ 爲週期的整函數。要證明 $h_0''(z) = \text{const}$，根據卷一，§ 30，1，祇要證明 $|h_0''(z)|$ 不會變得任意大。又因爲剛才所證明的 $h_0''(z)$ 的週期性，我們祇須證明，有一個常數 $K$ 在，使對於一切適合 $0 \leqq x \leqq 1$，$|y| \geqq 1$ 的 $z = x+iy$，$|h_0''(z)| < K$。對於這些 $z$ 我們首先有

$$\left| \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-\nu)^2} \right| \leqq \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-\nu)^2 + y^2} \leqq 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + y^2},$$

又因 $\sin \pi z = \frac{1}{2i}(e^{i\pi z} - e^{-i\pi z})$，故對於每一個 $z$，

$$\left| \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} \right| = \frac{4\pi^2}{e^{2\pi y} + e^{-2\pi y} - 2\cos 2\pi x} < \frac{4\pi^2}{e^{2\pi |y|} - 2}.$$

---

❶這裏所遇到的是一個標準的問題：我們有兩個解析式，設爲 $A_1(z)$ 與 $A_2(z)$，如在上款中，一方面有我們一向熟悉的 $\sin \pi z$ 的表示式——如羃級數——另一方面有無盡乘積 $z\prod\left(1-\frac{z^2}{\nu^2}\right)$。從我們研究的過程，我們自會推測這兩式或者代表同一函數，或者彼此之間有一個簡單的關係。這個如何可以證明？從本文中 $h_0(z)$的決定，我們看出，雖在這個似乎很簡單的款，這問題還不是很容易解決的。

由此卽知對於這些 $z$，

$$|h_0''(z)| < 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+y^2}+\frac{4\pi^2}{e^{2\pi|y|}-2},$$

並且對於一切適合 $|y|\geqq 1$ 的 $y$，上式當然在一個固定的欄之下。所以

$$h_0''(z)=\text{const}=c''.$$

但從剛才所得的估計式，可知當 $|y|$ 充分大的時候，$|h_0''(z)|$ 可以任意的小，故 $c''$ 必須 $=0$。於是

$$h_0''(z)=0,\qquad h_0'(z)=\text{const}=c',$$

因此，從(2)得

$$\Pi\text{ctg}\,\pi z=c'+\frac{1}{z}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-\nu^2}.$$

若以 $-z$ 易 $z$，則由此知 $c'=-c'$，故 $c'=0$。於是 $h_0(z)$ 與 $e^{h_0(z)}$ 也都是常數，故

$$\sin\pi z=c\cdot z\cdot\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\nu^2}\right).$$

若以 $z$ 除上式，又令 $z$ 趨於 0，則得 $\pi=c$。於是——對於一切的 $z$——

$$\sin\pi z=\pi z\cdot\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\nu^2}\right)$$

爲所求的正弦函數的乘積表示式。

**例 2.** 外氏 $\sigma$ 函數(Weierstrass sche $\sigma$-Funktion)。設 $\omega$ 與 $\omega'$ 爲兩個異於 0 的數他們的商不是實數(或者:他們與原點不在一條直線上)。我們要構造一個函數，在所有具形狀

$$k\omega+k'\omega'\qquad\begin{cases}k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots\cdots\\k'=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots\cdots\end{cases}$$

的各點——並且不在其他的點——有初級零點。經過 0 與 $\omega$ 及 0 與 $\omega'$ 各畫一直線 $L$ 及 $L'$ (參看圖 1)，在他們上面，記出 $k\omega$ 及 $k'\omega'$ 各點，並且經過每一個如此的點畫兩直線與 $L$，$L'$ 平行，則這兩束平行線恰好相交於預給的諸點 $k\omega+k'\omega'$。這些點組成"一個平行四邊形網的網點(*Gilterpunkte eines Parallelogramm netzes*)"，而這個網則爲 $\omega$ 與 $\omega'$ 兩點所確定。

在卷一，§2 內所述的，網點所構成的點組 $M_1$，是上面所講的一個特款；在 $M_1$ 裏，$\omega=1$，$\omega'=i$。

這些點的排列，可以完全依照這特款的樣子，——現在相當於那裏的正方形的是平行四邊形；他們的邊在圖 1 內用加重的虛線表示。於是，他們所成的敍列開始幾項是：

$$0,\ \omega,\ \omega+\omega',\ \omega',\ -\omega+\omega'\ \ -\omega,\ \ -\omega-\omega',\ \ -\omega',$$
$$\omega-\omega',\ \ 2\omega,\ \ 2\omega+\omega',\ \ 2\omega+2\omega',\cdots\cdots.$$

我們按這個已排定的次序，用 $z_0, z_1, z_2,\cdots\cdots$ 代表各點。這樣，我們先要證明，對於一切的 $z$，級數

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left(\frac{z}{z_\lambda}\right)^3$$

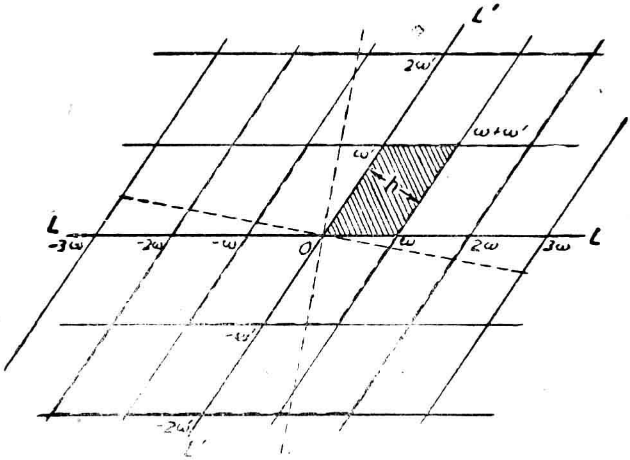


圖 1

是絕對收斂的. 若在剛才用來排列網點的各平行四邊形中,我們按他們由小到大的次序,稱之爲第一個,第二個,……,則普遍的,在第 $p$ 個上面,恰有 $8p$ 個網點. 以 $0, \omega, \omega+\omega', \omega'$ 爲頂點的"基本平行四邊形(*Fundamental Parallelogramm*)"的較小的高,我們若用 $h$ 代表,則這 $8p$ 個網點的絕對值,每個 $\geqq ph$. 故第 $p$ 個平行四邊形的點,供獻給級數 $\Sigma\left|\frac{z}{z_\lambda}\right|^3$ 的部分

$$\leqq 8p\left(\frac{|z|}{ph}\right)^3=\frac{8|z|^3}{h^3}\cdot\frac{1}{p^2},$$

但因 $\Sigma\frac{1}{p^2}$ 爲收斂的,所以上文所寫的級數,對於每一個 $z$ 爲收斂的. 故在外氏乘積定理內,我們祗須取一切的 $k_\lambda=3$, 於是

$$G_0(z)=z\cdot\prod_{\lambda=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{z_\lambda}\right)e^{\frac{z}{z_\lambda}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_\lambda}\right)^2}\right]$$

是具所需性質的一個整函數,其中 $z_\lambda$ 的意義如上所述. 在外氏的橢圓函數論中,這函數稱爲屬於週期耦(Periodenpaar)$(\omega, \omega')$的 $\sigma$ 函數(Sigmafunktion),而用

$$\sigma(z)=\sigma\left(z\,|\,\frac{1}{2}\omega,\ \frac{1}{2}\omega'\right)$$

表示.

由於上述乘積的絕對收斂性,其因子的次序絲毫無關重要(參看 §2, 定理 6),因此我們不必將網點的次序固定,而可以寫

$$\sigma\left(z\,|\,\frac{1}{2}\omega,\ \frac{1}{2}\omega'\right)=$$

$$z\cdot\prod_{k,k'}{}'\left[\left(1-\frac{z}{k\omega+k'\omega'}\right)e^{\frac{z}{k\omega+k'\omega'}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{k\omega+k'\omega'}\right)^2}\right],$$

其中 $k, k'$ 各不相關的採取一切 $\gtreqless 0$ 的整數，但不得同時等於 0。 乘積號後面的 $'$ 號，就是表示最後所說的限制。

例 3. 最後我們還要構造一個整函數，在 $z_0=0$, $z_1=-1$, $z_2=-2$, ………, $z_\lambda=-\lambda$, ……，——而不在其他地方——每處有一個初級零點。 很明顯的，我們祇須取 $k_\lambda=2$, 如此則

$$G(z)=e^{h(z)}\cdot z\cdot\prod_{\lambda=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{\lambda}\right)e^{-\frac{z}{\lambda}}\right]$$

即是具所求性質的最普遍的函數。 這函數與所謂的(歐氏)Γ函數(Eulersche Gamma funktion)有極密切的關係。 對於實變數的 Γ 函數，讀者在積分學中已熟悉，而對於任何的複數 $z\neq 0, -1, -2, \cdots\cdots$, Γ 函數的值，高斯(Gauss)用限值

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}$$

$$(n^z=e^{z\log n},\ \log n\ 為正實數)$$

來表示。❶ 當 $z$ 有一切上述的值時，要證這限值的存在是容易的。 因為，若將上式的倒數寫作

$$e^{-z\log n}\cdot z\cdot\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)$$

的形狀，則此倒數又

$$=e^{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)z}\cdot z\cdot\prod_{\lambda=1}^{n}\left[\left(1+\frac{z}{\lambda}\right)e^{-\frac{z}{\lambda}}\right].$$

但我們知道

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\right)-\log n\right]=c$$

---

❶除初等函數外，這函數是解析中最重要的函數之一。在純粹與應用算學極多方面的研究中，從數論以至於理論物理，都不能缺他。 故對於他的解析性質的確切認識，是絕對必需的。

這函數最初的研究，是從下一問題發生：對於階乘積(Fakultäten) 0!(=1), 1!, 2!,……的敍列，推出其中間之值 (*interpolieren*)，就是將(λ, λ!)各點，或者〔仿效歐拉(*Euler*)，我們也常這樣說〕將坐標 $x=\lambda+1$, $y=\lambda!$ $(\lambda=0, 1, 2, \cdots\cdots)$用一個可能的最簡單的曲線連接；於是也就是作一個可能的最簡單的實變數 $x$ 的實函數 $y=F(x)$, 使對於 $x=\lambda+1$ 時，$y=\lambda!$. 歐拉所給的解，是對於一切 $R(z)>0$ 時收斂的積分 $\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$, 高斯(*Gauß*)所給的解，就是上文所舉的限值，當 $R(z)>0$時，從這兩個解所得的函數相同；但關於這最後一點的證明，因限於篇幅，我們祇好從略。一個特別淺近的證明可在 *Pringsheim* 文中找到(mathematische Annalen, Bd. 31)。

是存在的，❶所以當 $n\to\infty$ 時，最後一式（並且對於每一個 $z$）趨於整函數

$$K(z)=e^{Cz}\cdot z\cdot\prod_{\lambda=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{\lambda}\right)e^{-\frac{z}{\lambda}}\right]$$

之值，從我們例 3 的解內，令 $h(z)=c_z$，即可得這函數．因對於 $z\neq 0, -1, -2, \cdots\cdots$，這函數必異於 0，故高斯的限值在正討論中的情形內是存在的而且 $=\dfrac{1}{K(z)}$．這限值確定一個單值的解析函數，即整函數 $K(z)$ 的倒數．（關於這方面更參看 § 6，例 3）．

習題：1．從 sin 乘積求以下三個乘積的值：

a)
$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\cdots$$

〔瓦力斯乘積（Wallisches Produkt）〕，

b)
$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{14}{13}\cdots\cdots$$

c)
$$2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{14}{15}\cdot\frac{16}{15}\cdots\cdots$$

2．試求以下各整函數的乘積展開式：

a) $e^z-1$；　b) $e^z-e^{z_0}$；　c) $\sin z-\sin z_0$；　d) $\cos z-\cos z_0$．

3．試證有函數在，在任意預給的點 $z_1, z_2, \cdots\cdots, z_n, \cdots\cdots\cdots$，有任意預給的值 $w_1, w_2, \cdots\cdots, w_n, \cdots\cdots$，但這些點在有窮遠處不得有凝聚點．

---

❶對於每個 $n=1, 2, \cdots\cdots$，因為下面積分的幾何意義為面積，很明顯的

$$\frac{1}{n}>\int_n^{n+1}\frac{dx}{x}>\frac{1}{n+1}，\text{故}\ \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}>\frac{1}{n}-\int_n^{n+1}\frac{dx}{x}>0.$$

令 $\dfrac{1}{n}-\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{dx}{x}=\gamma_n$，則從此，$0<\gamma_n<\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$．所以 $\Sigma\gamma_n=C$ 為收斂的，而且 $0<C<1$．因此知

$$(\gamma_1+\gamma_2+\cdots\cdots+\gamma_{n-1})=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n-1}\right)-\int_1^n\frac{dx}{x}\to C;$$

於是又因 $\dfrac{1}{n}\to 0$ 與 $\displaystyle\int_1^n\frac{dx}{x}=\log n$，知

$$\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\right)-\log n\right]\to C.$$

$C$ 稱為歐拉或馬斯克羅尼（*Mascheroni*）常數；其值在 0 與 1 之間，較精確些，$C=0.5772156649\cdots\cdots$

# 第二章　半純函數

## §4. 米萊兩氏分項分數定理

在卷一，§36 定理 1 至 3 内，我們純粹根據函數論的理論，將有理分函數從其他的函數完全的區別出來．我們仿照前一章，將那裏所述的分函數之基本性質，析成以下兩條：

(A)對於每一個有理(分)函數，有一個所謂的分項分數分解式(*Partialbruchzerlegung*)，這分解式將他的極點與屬於各極點的主部很顯明的指示出來．

例如設 $f_0(z)$ 爲已給的有理函數，又設 $z_1, z_2, \cdots\cdots, z_k$ 爲其極點，而

$$(1)\qquad h_\lambda(z)=\frac{a_{-1}^{(\lambda)}}{z-z_\lambda}+\frac{a_{-2}^{(\lambda)}}{(z-z_\lambda)^2}+\cdots\cdots+\frac{a_{-\alpha_\lambda}^{(\lambda)}}{(z-z_\lambda)^{\alpha_\lambda}},$$
$$(\lambda=1, 2, \cdots\cdots, k)$$

爲屬於各極點的主部．於是若 $g_0(z)$ 爲一個適宜的整函數，則可令

$$(2)\qquad f_0(z)=g_0(z)+h_1(z)+h_2(z)+\cdots\cdots+h_k(z).$$

從這個分項分數分解式，我們立刻可以推知：每另一個有理函數 $f(z)$ 若與 $f_0(z)$ 有相同的極點及各極點的主部，則與 $f_0(z)$ 的差別，祇能在(2)式中的 $g_0(z)$ 項，其次，我們可以任意的預先指定這些極點和他們的主部，換言之：

(B)我們總可以構造一個有理函數，使具有預給的極點及其主部——並且這函數是寫成一個分項分數分解式的形狀，而這分解式將極點及其主部很顯明的指示出來，又若要從這種函數的特殊的一個以得其最普遍的，我們祇要加上一項任意的有理整函數．

這些關於有理函數的根本事實，我們也可以完全推廣以適用於較普遍的半純函數，在序論裏，半純函數的定義我們已介紹過，現在我們更精確些敍述如下：

**定義**：若一個單值函數——不管他在無窮遠處的性質——在整個平

面內，除了至多有極點外，沒有其他的奇點，則稱爲半純函數(*meromorphe Funktion*)．

根據此定義，我們立刻得

**定理 1**： 在每一個有限的域內一個半純函數至多祇有有盡多個極點．

因爲否則在那域內一定有一個極點的凝聚點，這凝聚點本身也是一個奇點，但決不是極點．

由此，可知有理函數爲半純函數的特款；整函數也當視爲半純函數的特款．

函數 $\frac{1}{\sin z}$ 爲半純的，因爲在有窮遠處，他祇在 $\sin z$ 有零點的地方有奇點，而且這些奇點都是初級極點． 同樣的我們察知，$\operatorname{ctg} z=\frac{1}{\sin z}\cdot\cos z$ 與 $\operatorname{tg} z$ 爲半純函數． 更普遍些，若 $G(z)$ 代表任意一個整函數，他的倒數 $1:G(z)$ 就是一個半純函數〔例如前節之末所討論的 $\Gamma(z)=1:K(z)$〕． 因爲在 $G(z)$ 有零點的地方而且祇在這些地方，$1:G(z)$ 才有極點（而此外更無奇點）；並且兩者的級相等． 設 $G_1(z)$ 爲另一個整函數，與 $G(z)$ 沒有相同的零點，則我們立刻知道，$G_1(z):G(z)$ 爲一個半純函數，其極點的位置與級與 $1:G(z)$ 的相同（但其主部則普通不相同）．[1]

現在，我們先又要討論相當於(B)條的問題就是要考察，能否以及如何構造一個半純函數使他具有預給的極點與預給的屬於各極點的主部．更考察從他的極點與主部，這函數可以確定到如何的一個程度．

這最後的問題，我們立刻就可囘答． 設 $M_0(z)$ 與 $M(z)$ 爲兩個半純函數，他們的極點與各極點的主部相同，則他們的差 $M(z)-M_0(z)$ 顯然是一個整函數． 所以他們的差別至多在一項整函數（“沒有極點的半純函數”）． 又因函數 $M_0(z)$ 加上如此的一項，不會變更他的極點或極點的主部，所以我們可述

**定理 2**： 若 $M_0(z)$ 爲一個特殊的半純函數，又若 $G(z)$ 代表一個任意的整函數，則

$$M(z)=M_0(z)+G(z)$$

爲最普遍的，與 $M(z)$ 有相同的極點及相同的屬於各極點的主部的半純函

[1] 這最後一例已可算是最普遍的款；因以下定理是眞確的 每一個半純函數 $f(z)$ 可寫成兩個無共同零點的兩個整函數之商． 證：因爲 $f(z)$ 的極點在有窮遠處無凝聚點，所以我們可以應用外氏乘積定理構造一個整函數 $G(z)$，使他零點的位置與級，和 $f(z)$ 極點的位置與級相同．但這樣則 $f(z)\cdot G(z)$ 顯爲一個整函數 $G_1(z)$，於是 $f(z)=G_1(z):G(z)$，$G_1(z)$ 與 $G(z)$ 無共同零點．

數.

按此,我們祇要研究能否並且如何構造一個特殊的,具有任意預給極點的半純函數.

由於定理 1,預給的極點所成之組,在有窮遠處不得有凝聚點. 將這情形除開之後,則不必再加限制,目前的問題即有解,也就是下面這個因他的發現者而得名的定理成立:

**米萊二氏分項分數定理(Mittag-Leffler Partialbruchsatz)**: 若預給任意一個(有盡或無盡的)在有窮遠處無凝聚點的點組,並且相當於組中每一點預給一個主部,也就是預給一個具特殊形狀(1)的有理函數,則必有一個半純函數在,他恰在預給之處有極點,在這些極點上有預給的主部,而且在其他各處是正規的. 這函數可寫成分項分數分解式的形狀(最終的公式在第 127 頁內). 從這分解式,我們又可看出他的極點與極點的主部〔與(2)式相仿〕. 於是——根據定理 2 我們立刻可以繼續推知——若 $M_0(z)$ 爲一個如此的函數,則

$$M(z)=M_0(z)+G(z)$$

爲適合問題中條件的,最普遍的函數,其中 $G(z)$ 代表一個任意的整函數.

這個定理解答了相當於有理函數的(B)條的問題. 若這定理暫時作爲已經證明,則相當於(A)條的問題,也迎刃而解. 設 $M(z)$ 爲一個已給的任意的半純函數,則他的極點所構成的組,在有窮遠處無凝聚點. 根據米萊二氏定理,我們可以構造另一個半純函數 $M_0(z)$ 與 $M(z)$ 有相同的極點與主部,——並且還是寫成分項分數分解式的形狀,其極點與主部,都在式內顯明的指示出來. 但根據定理 2,若 $G_0(z)$ 代表一個適宜的整函數,則

$$M(z)=M_0(z)+G_0(z),$$

於是事實上我們已求得所給半純函數 $M(z)$ 的一個分項分數分解式,從這分解式,$M(z)$ 的極點與其附屬的主部,我們可以一目了然.

習題 1. $\operatorname{ctg} z$ 與 $\dfrac{2i}{e^{2iz}-1}$ 爲兩個半純函數,他們的極點與其附屬的主部相同(證明?). 根據定理 2,將第二個加上一項整函數可以得第一個. 此整函數爲何?

2. 同樣的討論函數

$$\frac{1}{2i\cos z} \quad 與 \quad \frac{\sin z}{e^{2iz}+1}$$

## §5.　米莱二氏定理的證明

若所要構造的函數簡直沒有極點，則每一個整函數都是這問題的解。若他有有盡多個極點 $z_1, z_2, \cdots\cdots, z_k$，其附屬的主部依序爲 $h_1(z), h_2(z), \cdots\cdots h_k(z)$，則

$$M_0(z)=h_1(z)+h_2(z)+\cdots\cdots+h_k(z)$$

顯然是一個解．若預給無盡多個極點，則我們不能如此簡單的達到目的，因爲若仿上法，所得的普通是一個發散的無盡級數．雖然我們還是可以與 §2 相似的，將級數的項，用一個適當的方法改變，使他收斂．

爲此目的，我們將這些極點排列，恰好在 §2，第 115 頁中我們之排列零點一樣，此處若原點也是極點，我們也令之爲 $z_0$，並且先暫時將他擱置一旁．然後令屬於點 $z_0, z_1, \cdots\cdots, z_\lambda\cdots\cdots$ 的主部依序爲 $h_0(z), h_1(z), \cdots\cdots h_\lambda(z), \cdots\cdots$，——$h_\lambda(z)$ 具有第 124 頁公式(1)所寫的形狀．於是對於 $\lambda=1, 2, 3, \cdots\cdots$，一切函數 $h_\lambda(z)$ 在原點的鄰近是正規的，在這鄰近，他們的冪級數展開式

$$h_\lambda(z)=a_0{}^{(\lambda)}+a_1{}^{(\lambda)}z+a_2{}^{(\lambda)}z^2+\cdots\cdots \qquad (\lambda=1, 2, \cdots\cdots)$$

當 $|z|<|z_\lambda|$ 時爲收斂的，故凡 $|z|\leqq\frac{1}{2}|z_\lambda|$ 時爲齊收斂的．因此，我們(對於每一個 $\lambda=1, 2, 3, \cdots\cdots$)可以如此的決定一個整數 $n_\lambda$，使冪級數中從第 $n_{\lambda+1}$ 項起的以後各項所構成的新冪級數之絕對值，小於任何一個已給的正數，例如 $<\frac{1}{2^\lambda}$．級數之前部分我們以 $g_\lambda(z)$ 代表．於是 $g_\lambda(z)$ 爲 $n_\lambda$ 次的有理整函數

$$g_\lambda(z)=a_0{}^{(\lambda)}+a_1{}^{(\lambda)}z+\cdots\cdots+a_{n_\lambda}{}^{(\lambda)}z^{n_\lambda} \qquad (\lambda=1,2,3,\cdots\cdots)$$

而對於一切適合 $|z|\leqq|z_\lambda|$ 的 $z$，

$$|h_\lambda(z)-g_\lambda(z)|<\frac{1}{2^\lambda}.$$

這樣

$$M_0(z)=h_0(z)+\sum_{\lambda=1}^{\infty}[h_\lambda(z)-g_\lambda(z)]$$

(米萊二氏分項分數定理)

爲一個適合定理中的條件的半純函數．(若原點不是一個預給極點，則

$h_0(z)$ 一項當然消滅).

要證這一點,我們祇須證明,右端決定一個解析函數,而此函數在每一個有限的域內,例如在以 0 爲中心 $R$ 爲半徑之圓內,恰有預給的極點及其附屬的主部而無其他奇點.

因爲 $|z_\lambda|\to+\infty$,我們可以將 $m$ 選得如此大,使凡 $\lambda>m$ 時,$|z_\lambda|$ 恆 $>2R$,或者也就是 $R<\frac{1}{2}|z_\lambda|$,於是凡 $|z|\leqq R$ 與 $\lambda>m$ 時,我們總有

$$|z|<\tfrac{1}{2}|z_\lambda|, \qquad \text{而因此} \quad |h_\lambda(z)-g_\lambda(z)|<\frac{1}{2^\lambda}.$$

由此級數

$$\sum_{\lambda=m+1}^{\infty}[h_\lambda(z)-g_\lambda(z)]$$

對於一切適合 $|z|\leqq R$ 的 $z$ 是(絕對與)齊收歛的,又因對於 $|z|\leqq R$,他的各項都是正規的〔因爲當 $\lambda>m$ 時,$h_\lambda(z)$ 的極點原是在圓 $|z|=R$ 之外〕,這級數在那裏決定一個正規函數,這函數我們用 $F_m(z)$ 代表. 於是

$$M_0(z)=h_0(z)+\sum_{\lambda=1}^{m}[h_\lambda(z)-g_\lambda(z)]+F_m(z)$$

顯然也是一個解析函數,這函數在以 0 爲中心,$R$ 爲半徑的圓內,除去在那裏的 $z_\lambda$ 點,是正規的,而在 $z_\lambda$,他有具主部 $h_\lambda(z)$ 的極點. 又因 $R$ 爲完全任意的,上述的情形,對於每一個有限的域都適用,於是 $M_0(z)$ 的確是一個具有所需的性質的半純函數.

從這個證明,我們還可知道,有理整函數 $g_\lambda(z)$〔冪級數 $h_\lambda(z)$ 的前幾項〕的次 $n_\lambda$,祇要選得如此大即足:在選定一個任意的 $R>0$ 之後,$|h_\lambda(z)-g_\lambda(z)|$ 各項,當 $|z|\leqq R$ 時,最後(亦即:對於一切充分大的 $\lambda$)總小於一個正項收歛級數之各項.

習題: 1. 若預給的主部含有無盡多個負冪,米莱二氏定理仍能成立否? 若然,則定理作何狀,其證明又若何?

2. 在米莱二氏定理中,在一切(或幾個或一個)點 $z_\lambda$,羅朗展開式的昇部分也可預給否? 或者至少可預給其中有盡多項否?

3. 像外氏定理那樣,米萊二氏定理也可以推廣至幺圓之內(參看 §2,習題 7). 試擬出此定理並加以證明.

4. 應用現在所得的方法重解 §3,習題 3.

## §6. 米莱二氏定理的幾個例

與外氏乘積定理的情形相仿，此處使分項分數收斂的整函數$g_\lambda(z)$諸項有時也完全不必需；這時所要構造的函數，自然是特別簡單。例如若 $0, 1, 4, \cdots \lambda^2, \cdots$ 爲初級極點其主部爲 $\frac{1}{z-\lambda^2}$ 則

$$M_0(z)=\frac{1}{z}+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{z-\lambda^2}=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{1}{z-\lambda^2}$$

已是一解。因爲，若 $R>0$ 是任意選擇的而 $m>\sqrt{2R}$，則從 $\lambda=m+1$ 起所得的級數，在 $|z|\leqq R$ 內顯然已是齊收斂的，❶ 於是 $g_\lambda(z)$ 諸項果然都是不必需——下面我們要構造與 §3 內的諸例相當的半純函數

例 1：　$\operatorname{ctg}\pi z$.　設一切實網點❷爲具有殘數$+1$的初級極點，即設其主部爲

$$h_\lambda(z)=\frac{1}{z-z_\lambda},\quad (z_0=0,\quad z_{2\nu-1}=\nu,\quad z_{2\nu}=-\nu).$$

對於 $\lambda=1, 2, 3, \cdots\cdots$

$$h_\lambda(z)=-\frac{1}{z_\lambda}-\frac{z}{z_\lambda{}^2}-\frac{z^2}{z_\lambda{}^3}-\cdots\cdots,$$

此時祇須令一切 $n_\lambda=0$，也就是祇須令

$$g_\lambda(z)=-\frac{1}{z_\lambda};$$

因爲如此則對於一切充分大的 $\lambda$ (例如對於一切適合 $\lambda>4R$ 的 $\lambda$) 與一切適合 $|z|\leqq R$ 的 $z$，

$$|h_\lambda(z)-g_\lambda(z)|\leqq\frac{R}{|z_\lambda|(|z_\lambda|-R)}<\frac{2R}{|z_\lambda|^2},$$

於是也就是小於一個顯然是收斂的正項級數之各項。

故根據上節之末所說的若 $G(z)$ 爲任意一個整函數，則

$$M(z)=G(z)+\frac{1}{z}+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z-z_\lambda}+\frac{1}{z_\lambda}\right]$$

$$=G(z)+\frac{1}{z}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\left[\frac{1}{z-\nu}+\frac{1}{\nu}\right]+\left[\frac{1}{z+\nu}-\frac{1}{\nu}\right]\right)$$

$$=G(z)+\frac{1}{z}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z-\nu}+\frac{1}{z+\nu}\right]$$

爲具所需性質的函數中之最普遍者。

---

❶因爲凡 $\lambda>m$ 時，

$$\left|\frac{1}{z-\lambda^2}\right|\leqq\frac{1}{\lambda^2-R}<\frac{1}{\lambda^2-\frac{1}{2}\lambda^2}=\frac{2}{\lambda^2}.$$

❷即一切的整數 $0, \pm1, \pm2, \cdots\cdots$——譯者。

函數 $\operatorname{ctg}\pi z$ 在 $0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots\cdots$ 各點也有初級極點。若 $n$ 爲其中之一，則在這點的殘數

$$=\lim_{z\to n}\frac{(z-n)\cos\pi z}{\sin\pi z}=\lim_{z\to n}\frac{(z-n)[(-1)^n+\cdots\cdots]}{(-1)^n\pi(z-n)+\cdots\cdots}=\frac{1}{\pi}.$$

從他在點 $z=n$ 的隣域的級數展開式，立刻可以看出這結果。

故函數 $\pi\operatorname{ctg}\pi z$ 包括在剛才所構成的函數 $M(z)$ 之內。

於是我們完全從另一方向又求得 § 3 的公式 (2)。其中尚未決定的整函數 $G(z)$，在那裏稱爲 $h_0'(z)$ 的，在此處單就極點的地位與本性也是不能決定的。要決定這函數，和在那裏一樣，我們必須利用函數的特殊性質。但我們在決定 $\sin\pi z$ 之乘積的過程中，已經求得 $h'(z)$ 或即 $G(z)=0$，所以

$$\pi\operatorname{ctg}\pi z=\frac{1}{z}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z-\nu}+\frac{1}{z+\nu}\right]$$

爲 ctg 的分項分數分解式。

**例 2: 外氏 $\wp$ 函數 (Weierstrasssche $\wp$-Funktion)。** 設已給 § 3，例 2 內的網點，並且設其排列與前同，我們現在要構造一個半純函數，在每一個網點 $z_\lambda=k\omega+k'\omega'$ 有一個二級的極點，並有主部

$$h_\lambda(z)=\frac{1}{(z-z_\lambda)^2}\qquad(\lambda=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots)$$

這裏，對於 $\lambda=1,\ 2,\ 3\cdots\cdots$,

$$h_\lambda(z)=\frac{1}{z_\lambda^2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{z}{z_\lambda}\right)}=\frac{1}{z_\lambda^2}+2\frac{z}{z_\lambda^3}+3\frac{z^2}{z_\lambda^4}+\cdots\cdots.$$

此處又祇須令一切 $n_\lambda=0$，也就是祇須令此展開式的第一項爲 $g_\lambda(z)$。因如此則

$$h_\lambda(z)-g_\lambda(z)=\frac{1}{(z-z_\lambda)^2}-\frac{1}{z_\lambda^2}=\frac{2z\,z_\lambda-z^2}{z_\lambda^2(z-z_\lambda)^2};$$

於是若 $R>0$ 爲任意的，對於一切適合 $|z|\leqq R$ 的 $z$ 與一切充分大的 $\lambda$ (例如祇 $|z_\lambda|>2R$)，

$$|h_\lambda(z)-g_\lambda(z)|\leqq\frac{R(2|z_\lambda|+R)}{|z_\lambda|^2(|z_\lambda|-R)^2}<\frac{3R|z_\lambda|}{|z_\lambda|^2\left(\frac{1}{2}|z_\lambda|\right)^2}=\frac{12R}{|z_\lambda|^3}.$$

但這是一個正項收斂級數的普遍項(根據 § 3，第 120 頁)，故

$$M_0(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(z-z_\lambda)^2}-\frac{1}{z_\lambda^2}\right]$$

爲具所需性質的一個半純函數，這類函數之最普遍的，即可從此求得。

在外氏的橢圓函數論裏此函數 $M_0(z)$ 稱爲具週期耦 (Periodenpaar) $(\omega,\ \omega')$ 的 $\wp$ 函數 (Pe L Funktion)，而以

$$\wp(z)=\wp\left(z\,\middle|\,\frac{1}{2}\omega,\ \frac{1}{2}\omega'\right)$$

來表示。由於代表這函數的級數的絕對收斂性，各項的次序無關重要，故此處我們也可以(參

看第 12 頁)不必固定網點的次序，而寫

$$\wp(z\mid\frac{1}{2}\omega,\ \frac{1}{2}\omega')=\frac{1}{z^2}+\sum_{k,k'}{}'\left[\frac{1}{(z-k\omega-k'\omega')^2}-\frac{1}{(k\omega+k'\omega')^2}\right],$$

其中 $k$ 與 $k'$ 互不相關的各取 $\gtreqless 0$ 的一切整數，但不得同時等於 0。 我們仍在連加號之後加一個 $'$ 號以表示這最後所說的限制。

這個 $\wp$ 函數與 § 3 的 $\sigma$ 函數有密切的關係，猶如 ctg 之於 sin. 因為根據 § 2 定理 8,

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(z)=\frac{1}{z}+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z-z_\lambda}+\frac{1}{z_\lambda}+\frac{z}{z_\lambda{}^2}\right],❶$$

又根據 § 2, 定理 9,

$$-\frac{d}{dz}\left[\frac{\sigma'}{\sigma}(z)\right]=\frac{1}{z^2}+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(z-z_\lambda)^2}-\frac{1}{z_\lambda{}^2}\right]=\wp(z);$$

所以

$$\wp(z)=-\frac{d^2}{dz^2}[\log\sigma(z)]=\frac{[\sigma'(z)]^2-\sigma(z)\sigma''(z)}{\sigma^2(z)}.$$

因本節的例 1 與例 2 和 § 3 的例 1 與例 2 關聯之密切，使我們發生一個問題：在這兩個主要定理——外氏定理與米萊二氏定理——本身之間，是否同樣的也有一個直接的關係存在。 事實上確是如此：我們可以從後者推證前者(但不能倒過來)。 其法簡述如下：

假設我們要構造一個具 $\alpha_\lambda$ 級零點 $z_\lambda$ 的整函數 $G_0(z)$。 我們先根據米萊二氏定理作一個半純函數 $M_0(z)$，在各 $z_\lambda$ 點有具殘數 $\alpha_\lambda$ 的初級極點，也就是在 $z_\lambda$ 有主部 $h_\lambda=\frac{\alpha_\lambda}{z-z_\lambda}$。 於是我們幾乎立刻可以看出，$M_0(z)$ 為一個整函數 $G_0(z)$ 的對數導微函數，這函數 $G_0(z)$ 可以寫成一個無盡乘積之狀，並且適合外氏定理的條件。

**例 3:** $\Gamma$ **函數** 我們已經證明，在外氏定理的例 3 內所提及的 $\Gamma(z)$，是在那例內所構成的整函數 $K(z)$ 的倒值。 從此我們立刻知道

(1) $\Gamma(z)$是一個半純函數，他祇在 0, −1, −2, ……諸點各有一個初級極點〔他的殘數見下面的(7)式〕；此外，他是一個整函數的倒數，因此他沒有零點。

關於這個重要的函數，我們更討論一些其他的性質：

(2) 對於每個 $z\neq 0,\ -1,\ -2,\ \cdots\cdots$,

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$$

〔$\Gamma$ 函數的函數方程式(Funktionalgleichung der $\Gamma$-Funktion)〕

---

❶ $\frac{\sigma'}{\sigma}(z)$ 為 $\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}$ 的一個縮寫。 這函數也常稱為外氏 $\zeta$ 函數(*Weierstrasssche $\zeta$-Funktion*)而以 $\zeta(z)$ 來代表。 他自然與例 4 中所論的黎曼 $\zeta$ 函數 (*Riemannsche $\zeta$-Funkton*) 無關。 $\frac{\sigma'}{\sigma}(z)$ 同時是半純函數的一例，他在我們討論中的平行四邊形網的每一個網點上有一個具殘數 +1 的初級極點。

證
$$\Gamma(z+1)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\cdots\cdots(z+n+1)}$$
$$=z\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^z}{z(z+1)\cdots\cdots(z+n)}\cdot\frac{n}{z+n+1}$$
$$=\Gamma(z),\qquad \text{證畢.}$$

(3) 對於每個整數 $\lambda\geqq 0$,
$$\Gamma(\lambda+1)=\lambda!$$
就是說, $\Gamma(z)$ 是第 122 頁底註中所提及的推值問題(Interpolationsproblem)的解。

證: 根據(2),當 $\lambda>0$ 時,
$$\Gamma(\lambda+1)=\lambda\cdot\Gamma(\lambda)=\lambda(\lambda-1)\Gamma(\lambda-1)\cdots\cdots=\lambda!\,\Gamma(1);$$
又從高斯的定義,我們立刻知道 $\Gamma(1)=1$.

(4) 對於每一個 $z$,
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(z+n+1)}{n!\,n^z}=1\ ❶$$

證: 從高斯的定義,我們知道,當 $n\to\infty$ 時,
$$\frac{n!\,n^z}{(z+n)(z+n-1)\cdots\cdots(z+1)z\cdot\Gamma(z)}\to 1.$$
若我們將函數方程式應用 $(n+1)$ 次,即知上式的分母 $=\Gamma(z+n+1)$——於是已得所求證的事實。

(5) 對於每個非整數 $z$,
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

證 根據高斯的定義,左端的倒數
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{z(z+1)\cdots\cdots(z+n)}{n!\,n^z}\cdot\frac{(1-z)(2-z)\cdots\cdots(n+1-z)}{n!\,n^{1-z}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-z}{n}\cdot z(1-z^2)\left(1-\frac{z^2}{2^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$
$$=z\cdot\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\nu^2}\right)=\frac{\sin\pi z}{\pi},\qquad \text{證畢.}$$

(6)
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=+\sqrt{\pi}\ ❷$$

證: 當 $z=\frac{1}{2}$ 時,從(5)得: $\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\pi$, 即從此得到我們所要證的事實,因爲按高斯的定義, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ 是正的。

---

❶函數方程式(2)與這個限值關係,合起來爲 Γ 函數的特徵性質,換言之,除 $\Gamma(z)$ 外,沒有其他解析函數同時適合(2)與(4)——其證明我們留給讀者。

❷這個特殊的結果也可寫作。

(7) 在(1)裏所確定的極點 $-\lambda$, ($\lambda=0, 1, 2, \cdots\cdots$), $\Gamma$ 函數有殘數

$$a_{-1}^{(\lambda)}=\frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda!}.$$

證: 按一個初級極點 $z=-\lambda$ 的殘數的意義,這殘數等於限值

$$\lim_{\to-\lambda}(z+\lambda)\Gamma(z).$$

但根據(2),

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+1)}{z}=\cdots\cdots=\frac{\Gamma(z+\lambda+1)}{z(z+1)\cdots\cdots(z+\lambda)},$$

所以當 $z\to-\lambda$ 時,

$$(z+\lambda)\Gamma(z)\to\frac{\Gamma(1)}{(-\lambda)(-\lambda+1)\cdots\cdots(-2)(-1)}=\frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda!},$$

證畢.

例 4: **黎曼 $\zeta$ 函數.** 在解析的數論裏,有一個函數佔基本的位置,就函數論的理論上講,他最重要的性質,是黎曼所確定的.——從現在起,若 $t$ 是正的, $t^z$ 就代表(單值)整函數 $e^{z\log t}$, 其中 $\log t$ 代表他的實值,如此,則級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$$

的各項,都是整函數(參看卷一, §20,習題 2α). 在閉的半平面 $R(z)\geqq 1+\delta(\delta>0$,為任意的)

---

$$\frac{n!\sqrt{n}}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{2}+n\right)}\to\sqrt{\pi}.$$

或者,經過容易的變化後

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots(2n)}\backsim\frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

其中符號"$\backsim$"表示: 兩端的商,當 $n\to\infty$ 時,有限值 1, 於是也就是我們習慣上所說的,兩端"漸近的相等(*asymptotisch gleich*)". 這裏,左端不過是二項式級數(binomische Reihe)

$$\frac{1}{\sqrt{1-z}}=1+\frac{1}{2}z+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}z^2+\cdots\cdots+(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}z^n+\cdots\cdots$$

中 $z^n$ 的係數;所以就內容說, (6)的涵義,與

$$(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}\backsim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

相同。 最後,我們還可以將此式寫作

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\cdots\frac{2k}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k+1}\cdots\cdots,$$

由此式可見我們的結果就是所謂的瓦力斯乘積(*Wallissches Produkt*). 這乘積也可以從 sin 乘積令 $z=\frac{1}{2}$ 立刻得到。 (參看 § 3, 習題 1 a.)

內，這些項的絕對值

$$\left|\frac{1}{n^z}\right|=\frac{1}{n^{R(z)}}\leqq\frac{1}{n^{1+\delta}}.$$

故根據外氏收斂定理，這級數在這個閉的半平面內爲齊收斂的，又因 $\delta>0$ 爲任意的，根據卷一，§22，定理 3，這級數在 $R(z)>1$ 半平面內代表一個正規函數。 這就是所謂的黎曼 $\zeta$ 函數，我們用 $\zeta(z)$ 來代表。 關於這函數，我們要證明

**定理：** $\zeta(z)$ 可以超過上面所說的半平面的邊 $R(z)=1$ 向外開拓，並且是一個具唯一的極點 $z=1$ 的半純函數，屬於此極點的主部爲 $\frac{1}{z-1}$，就是，這極點爲初級的，其殘數爲 $+1$. ❶

第一步： 開拓到直線 $R(z)=0$.——對於 $n=1, 2, \cdots\cdots\cdots$, $n^{-z}$ 既是整函數， $\frac{1}{n^{z-1}}-\frac{1}{(n+1)^{z-1}}$ 也是整函數． 因爲後者在 $z=1$ 有一個零點，故

$$\frac{1}{z-1}\left[\frac{1}{n^{z-1}}-\frac{1}{(n+1)^{z-1}}\right]=\int_0^1\frac{dt}{(n+t)^z}=\int_n^{n+1}\frac{dt}{t^z}$$

也都是整函數。 當 $R(z)\geqq 1+\delta$ 時，後一個積分的絕對值 $\leqq n^{-1-\delta}$ (參看卷一，§14，定理 5) 故根據與以上相同的理由，當 $R(z)>1$ 時，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{dt}{(n+t)^z}=\int_1^{\infty}\frac{dt}{t^z}=\frac{1}{z-1}$$

爲收斂的． 從

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^z}=\zeta(z)-1$$

減去上式，又注意

$$\frac{1}{(n+1)^z}-\int_0^1\frac{dt}{(n+t)^z}=-z\int_0^1\frac{tdt}{(n+t)^{z+1}}$$

——我們將右端分部積分，即可得這方程式——，得

$$\text{(a)}\qquad \zeta(z)=1+\frac{1}{z-1}-z\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{tdt}{(n+t)^{z+1}}.$$

於此，我們所求的開拓巳經成功． 爲要看出這點，因右端前兩項的形狀，我們祗要證明，對於 $R(z)>0$，第三項，或者連加號裏的新級數，代表一個正規函數． 但這個事實可以從與以前完全相仿的討論推知：這級數的項，又都是整函數（因爲這每項原是兩個整函數之差！）並且對於 $R(z)\geqq\delta$，他們的絕對值 $\leqq n^{-1-\delta}$，於是與以前一樣，一切都可推到。 由(a)式，我們所要證的，在 $+1$ 處的性質，可以一看而知，並且 $\zeta(z)$ 的存在域，向左加闊了一單位寬的一幅(Streifen).

❶換言之：$\zeta(z)-\frac{1}{z-1}$ 爲一個(超越)整函數。

現在可以完全照樣的將存在域一幅一幅的向左加闊，而最後將這定理完全證明。——我們更述其次的兩步於下。

第二步：開拓到直線 $R(z)=-1$. 再用分部積分法，即得

$$-z\int_0^1 \frac{tdt}{(n+t)^{z+1}} = -\frac{z}{2(n+1)^{z+1}} - \frac{z(z+1)}{2}\int_0^1 \frac{t^2dt}{(n+t)^{z+2}},$$

於是又得

$$\text{(b)}\qquad \zeta(z)=1+\frac{1}{z-1}-\frac{z}{2}[\zeta(z+1)-1]-\frac{z(z+1)}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{t^2dt}{(n+t)^{z+2}}.$$

根據第一步的結果，第二項內方括中的函數，對於 $R(z)>-1$，除在 $z=0$ 外，是正規的，而在 $z=0$，這函數有一個初級極點. 由於方括外的因子 $z$，第二項本身，對於 $R(z)>-1$ 的一切的點，是一個正規函數. 最後一項亦有此性質，因爲這裏面的新級數的各項，又都是整函數，祇要當 $R(z)>-1+\delta$，這些整函數的絕對值已經 $\leqq n^{-1-\delta}$，——從此一切皆已證明.

第三步：開拓到直線 $R(z)=-2$. 又用一次分部積分法，即得

$$\int_0^1\frac{t^2dt}{(n+t)^{z+2}}=\frac{1}{3(n+1)^{z+2}}+\frac{z+2}{3}\int_0^1\frac{t^3dt}{(n+t)^{z+3}},$$

於是更得

$$\text{(c)}\qquad \zeta(z)=1+\frac{1}{z-1}-\frac{z}{2!}[\zeta(z+1)-1]$$

$$-\frac{z(z+1)}{3!}[\zeta(z+2)-1]-\frac{z(z+1)(z+2)}{3!}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{t^3dt}{(n+t)^{z+3}}$$

根據與前完全相當的討論，我們知道 $\zeta(z)$ 在半平面 $R(z)=-2$ 內，除在 $+1$ 有一個具主部 $\frac{1}{z-1}$ 的初級極點外，也沒有其他的奇點.

這樣，當 $\zeta(z)-\frac{1}{z-1}$ 在半平面 $R(z)>-k$ 內的正規性已經證明之後，再證明這函數在半平面 $R(z)>-(k+1)$ 內的正規性($k=2, 3, \cdots\cdots$)的步驟，已是充分的明顯. 於是可見一切我們所要證的，關於 $\zeta(z)$ 的性質，都是正確的.❶

習題：1. 試求以下半純函數的米桼二氏分項分數分解式：

---

❶ $\zeta(z)-\frac{1}{z-1}$ 是一個超越整函數的事實，可證如下：從 $\zeta(z)$ 的級數，我們立刻可以看出，$\lim_{z\to+\infty}\zeta(z)=1$. 假若我們的函數是一個有理整函數，則一定恆等於 1，於是 $\zeta(z)=1+\frac{1}{z+1}$. 但若令 $z=2$，我們即看出這是不確的.——關於黎曼 $\zeta$ 函數及他在數論裏的應用，其詳盡的討論見 *E. Landan* 的兩卷 Handbuch der lehre von der Verteilung der Primzahlen, Leipzig, 1909, 與 *Landau* 的三卷 Vorlesungen über Zahlentheorie, Leipzig, 1927.

a) $\operatorname{tg} z$;　　b) $\dfrac{1}{\sin z}$;　　c) $\dfrac{\pi}{\cos\frac{\pi}{2}z}$;

d) $\dfrac{1}{e^z-1}$;　　e) $\dfrac{1}{e^z+1}$;　　f) $\dfrac{1}{\cos z-\sin z}$.

2. 函數

$$f_n(z)=\frac{n!\,n^z}{z(z+1)\cdots\cdots(z+n)}$$

所構成的敍列，在每一個不含 0, −1, −2, ……諸點的有欄閉域內是齊收歛的。

3. 設 $z_1$ 與 $z_2$ 爲兩個異於 0, −1, −2……的點。試求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_1(z_1+1)\cdots\cdots(z_1+n)}{z_2(z_2+1)\cdots\cdots(z_2+n)}.$$

4. 對於書上所解釋的整函數 $K(z)$，有以下的積分表示式：

$$K(z)=\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int^{(L)} e^t t^{-z}dt,$$

其中 $L$ 代表一條路，從左邊的無窮遠處起始，緊靠在負實軸之下，一直到原點的附近，又按正向繞原點以至於負實軸之上，然後緊靠負實軸又回至無窮遠處。（注意式中 $t^{-z}$——對於固定的 $z$，看作 $t$ 的函數——的多值性；較詳細的討論見第二編）。

5. 試將書中所述的，由米萊二氏定理推出外氏定理的簡單步驟，詳細補足，使無遺漏。

6. 證明第 132 頁底註中所述的事實，即 Γ 函數可由其特徵 2 與 4 (第 131 頁與第 132 頁)唯一的確定。

7. 參看 § 2，習題 4a，試證黎曼 ζ 函數在半平面 $R(z)>1$ 內沒有零點。

# 第三章　週期函數

## §7.　週期解析函數

**定義**：　設 $f(z)$ 爲一個解析函數．若有一個異於 0 的數 $\Omega$ 在，具以下性質，則 $f(z)$ 稱爲週期函數(*Periotische Funktion*)：對於每個在 $f(z)$ 的正規域內的 $z$, $z+\Omega$ 也屬於此域內，而且

$$(1)\qquad f(z+\Omega)=f(z).$$

每一個如此的數 $\Omega$ 稱爲 $f(z)$ 的週期(*Periode*)．

在初等函數中，$e^z$ 與三角函數爲週期的．例如 $\operatorname{tg} z$ 有週期 $-7\pi$；而 $13\pi$ 與 $2\pi$ 也是 $\operatorname{tg} z$ 的週期．

爲要將我們的討論限於最重要之款起見，我們更假設除孤立奇點外，$f(z)$ 在整個平面內爲單值與正規的(按此則整函數及半純函數特殊的也在討論之列)；此外，$f(z)$ 不得化爲常數，因爲如此(1)式即無重要意義．

若我們在(1)式內用 $z+\Omega$ 代替 $z$，即可看出，若 $\Omega$ 爲函數的週期，$2\Omega$ 也是函數的週期．同樣容易的我們可以看出，更普遍的以下的定理爲眞確．

**定理 1**：　一個函數的兩個週期的和與差，也是這函數的週期．若 $\Omega$ 爲週期，則一切的數 $n\Omega$ 爲週期，又若 $\Omega$ 與 $\Omega'$ 爲週期，則一切的數 $n\Omega+n'\Omega'$ 亦爲週期，其中 $n$ 與 $n'$ 爲任意 $\gtreqless 0$ 的整數．

現在想像我們將一切相當於一個函數的週期的點〔所謂“週期點”(Periodenpunkt)〕在平面上記出來．於是我們先有以下重要的

**定理 2**：一個單值函數的週期點所構成的組，在有窮遠處無凝聚點．

**證**：　設此定理爲不眞確，則在這凝聚點的附近，將有無窮多個週期點，於是有些週期點彼此之間，有任意小的距離(＝差的絕對值)．根據定理 1，有些週期的絕對值將任意的小，而我們將可以構成一個週期的敍列 $\Omega_1$ $\Omega_2,\cdots$，使 $\Omega_n\to 0$．但現在若 $z_0$ 爲 $f(z)$ 的任意一個正規點而 $f(z_0)=a$，則對於每一個 $n=1,2,3,\cdots\cdots$，

$$f(z_0+\Omega_n)=f(z_0)=a,$$

這就是說，在 $z_0$ 的每一個隣域內還有其他的 $a$ 值點. 但根據卷一 §24，定理 1，這是不可能的，因爲 $f(z)$ 不是常數.——這個已證明的定理可述如下：

**定理 3**： 一個單值函數不能有任意小的週期.

這幾個定理給我們最初的南針. 現在從此即可推得重要的結果：

若 $f(z)$ 有週期 $\Omega$；則按定理 1，一切的數 $n\Omega$ 也都是週期，他們在一條經過 0 與 $\Omega$ 的直線 $L$ 上，排成一列等距離的點（參看圖 2）. 若在 $L$ 上還有一個其他的週期點（例如 tg $z$ 有週期 $-7\pi$，但除週 $-7\pi n$ 外，還有週期 $3\pi$），則這一點必可寫成

$$n\Omega+\delta\Omega,\qquad (n \text{ 爲整數}, 0<\delta<1),$$

的形狀. 根據定理 1，$\delta\Omega$ 本身也是一個週期，換言之，若在 $L$ 上除週期 $n\Omega$ 外，還有其他的週期，則在 0 與 $\Omega$ 之間也必還有週期. 但（由於定理 2）在那裏祇能有有盡多個，故有一個與 0 最近；這個週期，我們稱之爲 $\omega$，❷ 於是有

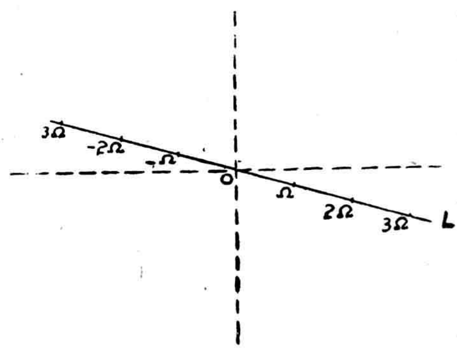


圖 2

**定理 4**： 在 $L$ 上每個週期均作

$$n\omega,\quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$$

的形狀.

證： 根據定理 1，一切的數 $n\omega$ 都是週期；設在 $L$ 上此外還有一個其他的週期，則在 $L$ 上，0 與 $\omega$ 之間還有一個週期，這與我們的假設，$\omega$ 爲在 $L$ 上離 0 最近的週期點衝突.——由此可知除其（無關重要的）符號尚可更改外，在 $L$ 上 $\omega$ 被 $\Omega$ 完全確定，$\omega$ 稱爲 $f(z)$ 的一個原週期(Primitive Periode).

例如 tg $z$ 有週期 $\Omega=-7\pi$；此時 $L$ 爲實軸. 在 0 與 $-7\pi$ 之間，tg $z$ 還有六個週期，$-\pi$，$-2\pi$，……，$-6\pi$，其中 $-\pi$ 與 0 最近. 故 $-\pi$ 爲 tg $z$ 的一個原週期，而一切在 $L$ 上的（此處即實的）週期都具形狀 $-n\pi$.

❶設 $f(z)$ 爲週期的，則我們也將 0 算作他的週期；在此處及下文都要注意此點.

❷若在 0 與 $\Omega$ 之間無其他的週期，則令 $\omega=\Omega$.

若函數除剛才所說的週期 $n\omega$ 之外，沒有其他，則此函數稱爲**單週期的**(einfach periodisch)． 在其他的款，所有週期不盡在一直線上，而構成一個平面點組． 下面我們將這一款作一個鳥瞰．

因爲根據定理 2，在每一個圓內，祇有有盡多個週期點，故以 0 爲中心，必有最小的一個圓，在他上面有一個或多個(異於 0 的)週期(參看圖 3)． 其中一個我們稱之爲 $\omega$；他必是這函數的一個原週期，而在經過 0 與 $\omega$ 的直線 $L$ 上，恰有週期 $n\omega$ 而無其他． 現在我們假設暫時將這些週期從平面中取去． 於是以 0 爲中心，又有一個最小的圓，在他上面，有一個或多個餘下的週期． 這些週期，祇有有盡多個，我們從由 0 至 $\omega$ 的半線起，沿着正向繞這圓，首先遇到的一個週期，稱之爲 $\omega'$． 於是有以下的定理，這定理將週期點的分佈問題完全解決．

**定理 5:** 函數的一切週期點都包含在

$$n\omega+n'\omega', \qquad \begin{cases} n=0,\ \pm1,\ \pm2, \\ n'=0,\ \pm1,\ \pm2, \end{cases}$$

之內．

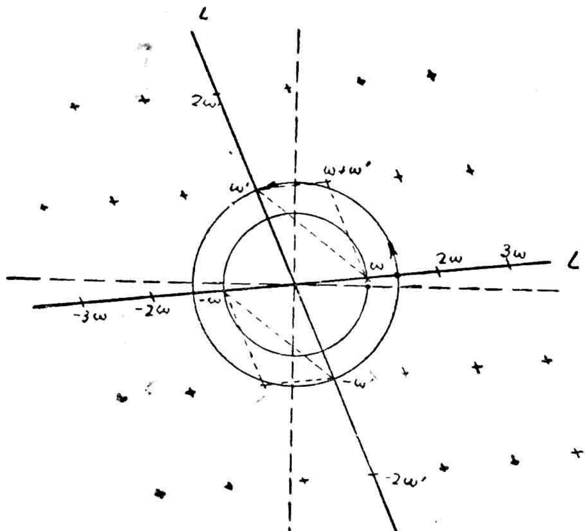


圖 3

**證:** 根據定理 1，這些當然都是週期，若此外還有其他的一個，則此

點必具形狀

$$(n+\delta)\omega+(n'+\delta')\omega', \qquad 0\leqq\delta\leqq 1, \qquad 0\leqq\delta'\leqq 1,$$

而其中 $\delta$ 與 $\delta'$ 不同時爲整數(亦卽 0 或 1). 於是

$$\Omega=\delta\omega+\delta'\omega'$$

也將是一個週期；這個點一定在頂點爲 $0, \omega, \omega+\omega', \omega'$ 的平行四邊形內，而不與此四點中的任何一點疊合. 由於我們決定 $\omega$ 與 $\omega'$ 的方法，這一點也决不在三角形 $0, \omega, \omega'$ 內，故必在那平行四邊形之另一半內. 但 $\Omega$ 旣是週期，

$$\Omega'=-\Omega+\omega+\omega'$$

也必是一個週期；但這一點是在三角形 $0, \omega, \omega'$ 內的，而在此三角形內，我們剛才證明不能有週期. 故除去點 $n\omega+n'\omega'$ 之外還有其他週期的假設是不眞確的.

所以，若一個週期函數不是單週期的，則他的週期的分佈，一定像定理 5 所描寫的那樣. 我們以後卽將證明(第 146 頁至第 147 頁)，如此的函數是存在的. 我們稱這樣的函數爲**雙週期的**(Doppelt-Periodisch)，於是得

**定理 6:** 一個單值解析函數祗能是單週期的或雙週期的；他不會是三週期的.❶

$\omega$ 與 $\omega'$ 兩數稱爲函數的**原週期耦** (Primitives Periodenpaar)；❷因爲他們與 0 不在同一直線上，故他們的比必是複數:

$$R\left(\frac{\omega'}{i\omega}\right)\lessgtr 0.$$ ❸

在單週期函數之款，一個原週期，除他的(完全無關重要的)符號外，

❶已給 $k$ 個複數 $\omega_1, \omega_2, \cdots\cdots\omega_k$，若不能找出一組不同時等於 0 的 $k$ 個實整數 $n_1, n_2, \cdots\cdots n_k$，使 $n_1\omega_1+n_2\omega_2+\cdots\cdots n_k\omega_k=0$，則這 $k$ 個複數可稱爲平直無關(*linear unab hängig*). 若採用這定義，此定理可改述如下："一個單值函數不能有多過兩個平直無關的週期".

❷此定義似不甚妥. 一個雙週期函數的原週期耦，應該是適合定理 5 中條件的任意兩數 $\omega$ 與 $\omega'$. 照此，則原週期耦之數無盡，但照書上定義，則祗有按第 139 頁的方法所求得的兩數 $\omega, \omega'$ 才能稱爲原週期耦，而這樣所得的 $\omega, \omega'$，祗有有盡多對(參看本節的習題 3)，與第 141 頁所講，有無盡多方法可以決定原週期耦不合——譯者.

❸按我們決定原週期耦的方法，"週期比(Periodenverhältnis)" $\omega' : \omega$ 的虛部，還必是正的，因爲從方向$(0\cdots\cdots\omega)$到方向$(0\cdots\cdots\omega')$的正向轉角$<\pi$.

是唯一的確定，但在雙週期函數之款 則有種種（無盡多個）方法去決定一個原週期耦（參看圖 1 與圖 3，其中同一個點組 $n\omega+n'\omega'$ 可以由不同的 $\omega$ 與 $\omega'$ 構成）.

習題： 1. 一個（不是常數的）有理函數不能是週期的.

2. 一個（不是常數的）單值解析函數不能具有週期 1 與 $\sqrt{2}$.

3. 關於第 139 頁中 $\omega$ 與 $\omega'$ 的確定可補充如下：在 $\omega$ 所在的圓（以 0 爲中心的）上，至多祇能有 2，4 或 6 個週期. 這些週期依序在直徑的兩端，長方形的四頂或正六邊形的頂上. 試證之。

4. 若在習題 3 中所說的圓上，恰有兩個週期（即 $\omega$ 與 $-\omega$），則照書上所述的方法選出的 $\omega$ 與 $\omega'$，其週期比（*Periodenverhältnis*）$\tau=\dfrac{\omega'}{\omega}$ 適合條件

$$|\tau|\geqq 1,\qquad -\frac{1}{2}<R(\tau)\leqq\frac{1}{2}.$$

當在該圓上有 4 個或 6 個週期時，這些條件也適合，但須從中選一個適宜的爲 $\omega$. 試將以上各點加以證明.

## §8 單週期函數

用以下的方法可使一個單週期函數的週期性易於透視：經過 $L$ 上任意一點 $c$，例如 0 點，作任意直線 $L'$ 不與 $L$ 疊合（參看圖 4），又經過一切點 $c+n\omega$，各作直線與 $L'$ 平行. 於是 $z$ 平面被分成許多幅，我們稱之爲週期幅（**Periodenstreiten**）.

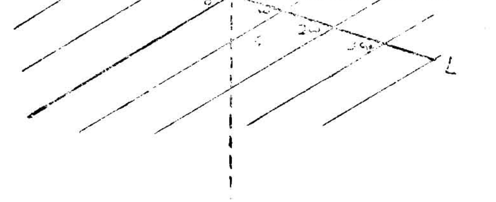


圖 4

現在方程式

$$f(z+n\omega)=f(z)$$

不過表示函數 $f(z)$ 在"疊合"點（*Kongruenter Punkt*）有相同的值. 所謂疊合點就是在兩個週期幅內有疊合的位置的點❶（參看圖 4，其中我們記出幾個與 $z_0$ 相疊合的點）. 故一個週期函數在一個週期幅內的值，已充滿他整個值域，而且我們祇須將

❶故若兩點之差 $z_1-z_0$ 爲一個週期 $n\omega$，則此兩點稱爲疊合.

幅的兩邊之一作爲屬於幅——我們以後總如此假定——;在其他各幅內,函數一切的值重覆一次,於是一切正規性與奇性皆重覆一次:凡函數在一個點 $z_0$ 的性質,也是他在一切與 $z$ 疊合的點的性質.

$e^z$ 有原週期 $2\pi i$; 故此時 $L$ 爲虛軸,而我們可以取實軸爲 $L'$. 這樣則例如域 $0 \leqq \mathfrak{I}(z) < 2\pi$ 爲一個週期幅. $\sin z$ 有原週期 $\omega = 2\pi$; 我們可以取域 $\gamma \leqq R(z) < \gamma + 2\pi$ 爲他的週期幅,其中 $\gamma$ 代表任意一個實數。

因此,若要完全認識一個單週期函數,我們祇要研究他在一個週期幅內的性質. 於此我們還值得注意,我們可以假設 $\omega$ 有特殊的值 $+1$,而這假設簡直不能算是一種限制. 因爲若令 $z = \omega z'$, 則 $f(z) = f(\omega z')$ 化爲一個 $z'$ 的函數,而這函數顯然有原週期 $+1$.❶ 於是函數的週期,恰是一切的實整數, $L$ 爲實軸,而現在可以取虛軸爲 $L'$. 如此則函數的週期幅,將平面特別醒目的劃開.

現在若利用以下人爲的方法,則函數 $f(z)$ 的性質更容易看清楚:令

$$z = \frac{1}{2\pi i} \log \zeta, \qquad \zeta = e^{2\pi i z}, \tag{a}$$

再引用新變數 $\zeta$ 以代 $z$, 而研究由式

$$f(z) = f\left(\frac{1}{2\pi i} \log \zeta\right) = \phi(\zeta)$$

所決定的函數 $\phi(\zeta)$. 因

$$f(z) = \phi(\zeta) = \phi(e^{2\pi i z}),$$

故這個方法又可如此解釋:我們將所給的週期函數,不看作 $z$ 本身的函數,而看作或寫作 $e^{2\pi i z}$ 的函數.

因 $\log \zeta$ (參看卷一, §28, 1) 爲一個無限多值的函數,表面上似乎 $\phi(\zeta)$ 也是一個多值函數,而我們的研究,於是似乎更加困難. 但因爲 $\log \zeta$ 一切的值,都可以從一個特殊的值加上一切 $2\pi i$ 的整數倍數得到,所以 $\frac{1}{2\pi i} \log \zeta$ 一切的值,彼此之差,祇是一個任意的整(實)數,也就是祇是 $f(z)$ 的一個週期. 所以從 $\log \zeta$ 不同的格,我們得 $z$ 的疊合的值,而由此可見 $\phi(\zeta)$ 爲單值函數. 故 $\log$ 的多值性恰好被 $f(z)$ 的週期性抵消.

❶故我們以前已常常將函數寫作 $e^{2\pi i z}$, $\sin 2\pi z$, $\operatorname{ctg} \pi z$, 無非使在問題中的函數之週期爲 $+1$, 而將討論變得較爲簡單。

現在 $\phi(\zeta)$ 的存在域爲何? $\phi(\zeta)$ 的奇點又如何? 因 $\log\zeta$ 在 0 與 $\infty$ (但不在其他各點) 有奇點, 故對於 $\phi(\zeta)$, 這兩點先可能是奇點. 但 log 函數不會帶來其他的奇點. 其次; 祇當 $f(z)$ 在 $z$ 有奇點時, $\phi(\zeta)$ 才能在按 (a) 式所得的對應點 $\zeta$ 有奇點. 但是 $\phi(\zeta)$ 的奇點要大爲減少, 因爲若 $z_0$ 爲 $f(z)$ 的奇點, 則一切具形狀 $z_0+k$ 的點, 也都是奇點, 其中 $k \gtreqless 0$ 爲整數. 故 $f(z)$ 整整一列的奇點, 現在祇相當於 $\phi(\zeta)$ 的一個奇點

$$\zeta_0 = e^{2\pi i z_0} = e^{2\pi i (z_0+k)}$$

所以我們可以說 $\phi(z)$ 祇得到 $f(z)$ 在一幅內的奇點.

我們將上面的結果綜合如下:

**定理 1**: 我們所討論的, 具原週期 1 的每個單週期函數 $f(z)$, 都可以看作或寫作 $\zeta = e^{2\pi i z}$ 的單值函數 $\phi(\zeta)$. 這個新函數的性質, 普通是比較 $f(z)$ 簡單; 因爲由於 (a), $f(z)$ 的每一列疊合的奇點祇相當於 $\phi(\zeta)$ 的一個奇點. 除這些點與可能新出現的奇點 0 與 $\infty$ 外, $\phi(\zeta)$ 是正規的.[❶]

例: 1. 對於 sin 函數, 我們都知道

$$\sin 2\pi z = \frac{1}{2i}(e^{2\pi iz} - e^{-2\pi iz}) = \frac{1}{2i}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right).$$

故此處 $\phi(\zeta)$ 是一個很簡單的有理函數.

2. 同樣, 相當於函數 $\cos 2\pi z$ 的是有理函数 $\phi(\zeta) = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$.

3. 同樣

$$\operatorname{tg} \pi z = -i\frac{\zeta-1}{\zeta+1}, \qquad \operatorname{ctg} \pi z = +i\frac{\zeta+1}{\zeta-1}.$$

(例如在函數 $\operatorname{ctg} \pi z$ 的款中, 初級極點 $0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$ 相當於一個極點 $\zeta = e^0 = +1$. 按之定理 1, 原該如此).

經過以上的手續, 我們很容易作一種展開式, 適用於一切所論的函數 $f(z)$: 因 $f(z)$ 除孤立奇點外, 處處是正規的, 我們可以有種種方法, 從週期幅內, 用平行於實軸的兩直線, 割出一個長方形, 使在這長方形內及其兩縱邊上, $f(z)$ 爲正規的. 設 $y_1$ 與 $y_2$ $(>y_1)$ 爲所作平行線的縱坐標, 則 $f(z)$ 在由

$$y_1 < J(z) < y_2$$

所確定的平行於實軸的一整幅 $(P)$ 內爲正規的. 因此, 祇要 $\zeta = e^{2\pi i z}$ 內的 $z$, 適合剛才所說的條件, 亦卽祇要

❶ 這結果適用於每一個週期函數, 故也適用於下一節內所討論的雙週期函數.

$$e^{2\pi y_2}=r_2<|\zeta|<r_1=e^{-2\pi y_1}$$ ❶

$\phi(\zeta)$ 爲正規的. 故 $\phi(\zeta)$ 在一個對應於剛才所割出的長方形的圓環內爲單值與正規的,而因此,在環內有唯一的一個羅朗展開式

$$\phi(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n\zeta^n,\quad (r_2<|\zeta|<r_1)$$

這展開式在用以下方法所得的最寬的圓環內是收斂的:這方法是(參看卷一,§32)將原有圓環的內外兩圓,裏面的(同心的)縮小,外面的擴大,但新得的環內不得有奇點. 若將 $\zeta$ 的值代入,則從此得

**定理 2:** 若 $f(z)$ 爲具原週期 1 的一個單值函數,則在每一個不含有奇點的,平行於實軸的幅 $(P)$ 內,有唯一的一個具形狀

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_ne^{2\pi iz}$$

的展開式;此級數在用以下方法所得的最寬的幅內是收斂的:這方法是將 $(P)$ 的兩邊平行的上下移動,但新幅內不得有奇點在這最寬的幅之外,級數是發散的.

若這收斂幅含實軸在內——祇要實軸上無奇點,這是總可以做到的——則若令 $e^{2\pi iz}=\cos 2\pi z+i\sin 2\pi z$,即可由此得到一個實解析函數的福里哀展開式(Fourier-Entwickelung). 但在這裏我們不能更沿這方向繼續討論.

此外,關於 $f(z)$ 的展開式,我們還祇能指出,從單值函數 $\phi(\zeta)$ 的每一個其他的展開法——普通的羃級數,乘積表示式,分項分數分解式——當然都可以得到 $f(z)$ 爲 $e^{2\pi iz}$ 的函數的一個相當的表示式.

到現在爲止,我們所遇見的週期函數還祇是初級函數;在下一節才討論其他的. 對於幾個初級函數,我們在上面已將相當於他們的函數 $\phi(\zeta)$ 求出;這些 $\phi(\zeta)$ 是特別的簡單,即都是有理的.❷ 由此可知,單週期函數 $f(z)$ 中,其相當的函數 $\phi(\zeta)$ 爲有理的,是特別的簡單,但也特別的重要. 這一類的函數——也就是 $e^{2\pi iz}$ 的有理函數——也當服從特別美麗與典型的規律. 其中幾條,我們在這裏還要推證.

**定理 3:** 每一個這一類的函數 $f(z)$,有一個代數的加法定理 (*alge-*

❶ $|e^{2\pi iz}|=|e^{2\pi i(x+iy)}|=e^{-2\pi y}$.

❷ 指數函數本身自然相當於函數 $\zeta$.

*braisches Additionstheorem*)，就是：若 $z_1$ 與 $z_2$ 各為變數時 $f(z_1+z_2)$ 可以寫作 $f(z_1)$ 與 $f(z_2)$ 的一個代數式.

例如，若我們使 sin 函數的原週期為 $+1$，則寫成代數形式的加法定理為

$$\sin 2\pi(z_1+z_2)$$
$$=\sin 2\pi z_1\sqrt{1-\sin^2 2\pi z_2}+\sin 2\pi z_2\sqrt{1-\sin^2 2\pi z_1}.$$

證： 據假設，$f(z)=R(\zeta)$，其中 $R$ 為 $\zeta$ 的一個有理函數． 故若令 $e^{2\pi iz_1}=\zeta_1$，$e^{2\pi iz_2}=\zeta_2$ 於是 $e^{2\pi i(z_1+z_2)}=\zeta_1\zeta_2$，則

$$f(z_1)=R(\zeta_1),\qquad f(z_2)=R(\zeta_2)\qquad f(z_1+z_2)=R(\zeta_1\zeta_2).$$

從這三個含 $\zeta_1$，$\zeta_2$ 的有理方程式，可以用代數方法消去 $\zeta_1$，$\zeta_2$，而所得的結果就是所求的代數加法定理.

**定理 4:** 屬於這類的每兩個函數 $f_1(z)$ 與 $f_2(z)$ 之間，有一個代數的關係.

證： 從假設，

$$f_1(z)=R_1(\zeta),\qquad f_2(z)=R_2(\zeta)$$

由兩式消去 $\zeta$ 即得所求的結果.

若 $f(z)=\phi(\zeta)$ 屬於這類的函數，則 $f'(z)$ 也屬於此類，因為 $f'(z)=2\pi i\zeta\phi'(\zeta)$. 於此，利用前一定理即得

**定理 5:** 屬於這一類的每個函數 $w=f(z)$，適合一個具以下簡單形狀

$$w'=\frac{dw}{dz}=A(w)$$

的代數微分方程式，其中 $A(w)$ 代表一個代數函數.❶

現在若將變數 $w$ 加以一個適宜的限制，由上式我們得

$$dz=\frac{dw}{A(w)},\qquad z=\int_{w_0}^{w}\frac{dw}{A(w)}=F(w),$$

故最後我們又得

**定理 6:** 每一個如此的函數是一個代數函數的積分 $z=F(w)$ 的反函數.❷

❶這微分方程式是一次的而且不含自變數.

❷試驗此定理對於 $e^{2\pi iz}$ 與三角函數的眞確性，並試對於這些特殊函數，證明此定理.

習題: 1. 具有預給零點(與預給的級)的一個(單值的)單週期函數是否存在? 若然,則如何構造這函數的一個賜式?

2. 在週期幅內有預給孤立奇點的一個(單值的)單週期函數是否存在? 若已給奇點的主部,如何構造這函數的一個賜式?

3. $(\omega, \omega')$ 在 $z$ 平面上確定一個平行四邊形網. 在函數 $w=e^{\frac{2\pi i}{\omega}}$ 所定的變換中,這網的一個基本平行四邊形,與 $w$ 平面那一個域相對應?

## § 9. 雙週期函數,橢圓函數

像以上所講的款一樣,雙週期函數 $f(z)$ 的週期性,也可利用一種方法,變為易於透視. 若 $\omega$ 與 $\omega'$ 為 $f(z)$ 的一個原週期耦,我們(參看圖 1 或 3)經過一切點 $n'\omega'$ 作直線與 $L$ 平行,又經過一切點 $n\omega$ 作直線與 $L'$ 平行. 於是整個平面就劃成一個平行四邊形網,其網點恰為週期點 $n\omega+n'\omega'$. 若我們畫出這個平行四邊形網,或任意一個由這個經過平行移動所得的平行四邊形網,則函數的雙週期性顯然不外是:在疊合點,$f(z)$ 或有相同的值,或有同樣的奇點;所謂疊合點,現在是指同一個網中,在不同的平行四邊形內,有疊合位置的點(所以他們每兩個之差為一個週期). 每一個如此的平行四邊形(也就是每一個有頂點 $a, a+\omega, a+\omega+\omega', a+\omega'$ 的平行四邊形;其中 $a$ 為任意的),我們稱為函數 $f(z)$ 的一個週期平行四邊形〔或直稱為 $f(z)$ 的週期平行四邊形〕,我們說,$f(z)$ 為屬於這週期平行四邊形的一個雙週期函數.

若要完全認識一個如此的雙週期函數,我們祗須研究他在週期平行四邊形內的性質,例如在所謂的"基本平行四邊形"內的性質,此平行四邊形之頂點為 $0, \omega, \omega+\omega', \omega'$:這函數在一個點 $z_0$ 的性質,無論是正規的或奇的,也是他在一列的點 $z_0+n\omega+n'\omega'$ 的性質,這一列的點,構成一個上文所說的平行四邊形網的網點.

從這些觀察,我們立刻可得

**定理 1:** 一個(不是常數的)雙週期整函數是不存在的(里奧維第一定理 **Ersler Liouvillescher Satz**).

證: 若 $f(z)$ 為整函數則在每個有限的域內,$f(z)$ 是有欄的. 故對於一個週期平行四邊形的一切的點,必有如 $|f(z)|<K$ 的關係,其中 $K$ 為一個適宜的常數. 但這樣則對於一切其他的點,也就是在整個平面內,

$|f(z)|<K$，於是根據卷一，§30，1，$f(z)$ 必是一個常數．但這一無關重要的款，在定理中我們先已除外．

故一個（不是常數的）雙週期函數，在週期平行四邊形內至少有一個奇點．這些奇點的性質，在每個平行四邊形內自然是相同的．根據這些奇點的性質，我們可將雙週期函數分類．

**定義**：在週期平行四邊形內除了極點❶外沒有其他奇點的一個雙週期函數，也就是，一個半純雙週期函數，稱爲屬於此週期平行四邊形的一個**橢圓函數**(**elliptische Funktion**)．

在下面我們將專論橢圓函數．但這種函數我們至今還未遇見過，故先該發生一個問題：就是這種函數根本是否存在，❷不過因爲我們以後不久就會知道，在§6，例2內所作的函數 $\wp(z)$ 是一個雙週期函數，故這個存在的問題，我們暫時不加討論．

按定義，一個橢圓函數在週期平行四邊形內祇有有盡多個極點．若我們要枚舉這些點，則平行四邊形的各邊之屬於四邊形與否，必須有一個適宜的規定．現在我們規定：若取具頂點 $a$，$a+\omega$，$a+\omega+\omega'$，$a+\omega'$ 的週期平行四邊形，則祇有頂點 $a$ 與經過 $a$ 的兩邊，而不連此兩邊的其他端點，是屬於這平行四邊形．根據這個規定，則對於平面上每一點，在任意一個週期平行四邊形內，總有一個而且祇有一個疊合點．

現在若談到一個橢圓函數"在週期平行四邊形內"的極點，其意義是完全確定的．根據這個規定，我們有

**定義**：一個橢圓函數在週期平行四邊形內的極點的級之和，稱爲此函數的**級**(**Ordnung**)．

里奧維第一定理，現在又可述如下：

**定理 1a**：（不是常數的）0 級橢圓函數不存在．

其次，關於任意的雙週期函數，我們立刻看出

**定理 2**：兩個具原週期耦$(\omega, \omega')$的雙週期函數 $f_1(z)$ 與 $f_2(z)$之和，差，積，商，及一個雙週期函數的導微函數，也都是一個具週期 $\omega$ 與 $\omega'$ 的週期函數．（但對於如此所得的新函數，$\omega$，$\omega'$ 不必是原週期耦；新函數

❶在一個平行四邊形內的極點，必是有盡多個．

❷橢圓函數是亞倍爾(*Abel*)與雅谷比(*Jacobi*)發現的，這在當時是一個很有意義的科學的事件．

也可能是常數)． 若 $f_1$ 與 $f_2$ 爲橢圓函數則新函數亦然．

由定理 1 與 2，我們立刻又得

**定理 3:** 屬於同一個週期平行四邊形的兩個橢圓函數，若在該處具相同的極點與其主部，則他們之差，祇是一個常數．——因爲他們之差是一個 0 級的橢圓函數．

關於在極點的殘數，我們有以下的重要定理：

**定理 4:** 在一個橢圓函數 $f(z)$ 的週期平行四邊形內，❶諸極點的殘數之和總是 $=0$． (里奧維第二定理，Zweiter Liouvillescher Satz)．

證：根據卷一，§35，這裏面所說的殘數之和——除因子 $2\pi i$ 外——可以由一個周境積分 $\int f(z)dz$ 求得，這積分之路，爲依正向所取的平行四邊形的邊，祗要邊上沒有極點． 若最初所選的週期平行四邊形不適合這條件，則利用一個充分小的平行移動（例如沿對角線的方向移動）立刻可使這條件適合，而此移動對於我們所要證的事實顯然沒有影響． 所以我們可以假定這個條件開始卽已適合． 若 $a$ 爲屬於此平行四邊形的頂點，則

$$\int f(z)dz=\int_a^{a+\omega} f(z)dz=\int_{a+\omega}^{a+\omega+\omega'} f(z)dz+\int_{a+\omega+\omega'}^{a+\omega'} f(z)dz+\int_{a+\omega'}^{a} f(z)dz.$$

現在我們卽可以看出，此處第一與第三兩個積分，絕對值相等而符號相反，第二與第四兩個積分亦然，所以他們的和等於 0． 因爲，若在第三個積分內以 $z+\omega'$ 代 $z$，則這積分

$$=\int_{a+\omega}^{a} f(z+\omega')dz=-\int_a^{a+\omega} f(z)dz$$

恰恰就是第一個積分換了一個符號． 同樣，我們可以證明第二與第四兩個積分也是如此． 所以殘數之和爲 0． 證畢．

由此定理卽可得

**定理 5:** 初級橢圓函數不存在．

證：若存在，則此函數在平行四邊形內祗能有一個初級的極點． 若其殘數 $=c$，則該處的殘數和也 $=c$；但據前一定理此殘數和應 $=0$，故如此的一個極點，根本不能存在．

---

❶從定理的證明，我們可以看出，卽使 $\omega, \omega'$ 不是 $f(z)$ 的原週期耦，這定理仍爲眞確．

根據定理 2, 若 $f(z)$ 爲具週期 $\omega$ 與 $\omega'$ 的一個橢圓函數, 則 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 也如此. 若將定理 4 應用於這個函數, 更參考卷一, § 35 定理 1 與 2 的證明, 卽得

**定理 6:** 在一個橢圓函數的週期平行四邊形內, 零點之數等於極點之數——亦卽等於函數之級. (里奧維第三定理, **Dritter Liouvillescher Satz**).

若將這定理應用於 $f(z)-a$, 則最後我們又得以下的定理, 而一個橢圓函數的值域完全解決:

**定理 7:** 一個 $m$ 級橢圓函數在週期平行四邊形內取任何的值, 而每一值恰取 $m$ 次.

在普遍的討論之後, 我們現在要實際的構造幾種橢圓函數與探求他們最重要的性質. 上面說過, 在 § 6 例 2 內所作的函數 $\wp(z)$ 爲一個橢圓函數. 我們先證明, 他的導微函數是橢圓函數. 因爲這導微函數可由代表 $\wp(z)$ 的級數逐項微分求得, 我們卽得

$$\wp'(z)=-\frac{2}{z^3}-2\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{(z-z_\lambda)^3},$$

因爲 $z_0$ 本來代表原點, 上式又可寫作

$$\wp'(z)=-2\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{1}{(z-z_\lambda)^3}=-2\sum_{k,\,k'}\frac{1}{(z-k\omega-k'\omega')^3},$$

在最後的級數裏, $k$ 與 $k'$ 獨立的依任何的次序取一切 $\gtreqless 0$ 的整數. 但若 $k$ 採取一切 $\gtreqless 0$ 的整數, 則 $(k-1)$ 亦然. 故若我們以 $z+\omega$ 代替 $z$, 則

$$\wp'(z+\omega)=-2\sum_{k,\,k'}\frac{1}{[z-(k-1)\omega-k'\omega']^3},$$

這果然就是原來的級數. 因此

$$\wp'(z+\omega)=\wp'(z),$$

完全同理, 我們又得

$$\wp'(z+\omega')=\wp'(z).$$

於是 $\wp'(z)$ 的雙週期性及雙週期函數之存在已經證明.

更精確些, 我們還可證明 $\omega$ 與 $\omega'$ 構成 $\wp'(z)$ 的一個原週期耦, 也就

是 $z_\lambda=k\omega+k'\omega'$ 諸數爲 $\wp'(z)$ 全部的週期.❶ 設 $\Omega$ 爲 $\wp'(z)$ 的任意一個週期,則對於 $\wp'(z)$ 的正規域內任意一點 $z$, $\wp'(z+\Omega)=\wp'(z)$. 這裏若令 $z$ 趨於一個網點 $z_\lambda$〔亦即 $\wp'(z)$ 的一個極點〕, 則 $\wp'(z)$ 變爲無限大, 於是 $\wp'(z+\Omega)$ 亦然. 所以 $z_\lambda+\Omega$ 也必是 $\wp'(z)$ 的一個極點, 於是他本身也是一個網點 $z_\mu$. 由此可知 $\Omega=z_\mu-z_\lambda$, 故 $\Omega$ 也寫成 $k\omega+k'\omega'$ 的形狀. 證畢.

現在從上段的結果,我們卽可容易的推知, $\wp(z)$ 本身也是一個雙週期函數, 且具相同的原週期耦. 證明如下:根據上面的證明,我們得

$$\wp'(z+\omega)-\wp'(z)=0,$$

故

$$\wp(z+\omega)-\wp(z)=c,$$

其中 $c$ 是某一個常數,但這常數必須 $=0$. 要從此點,從 §6 中 $\wp(z)$ 的表示式, 我們先立刻看出 $\wp(-z)=\wp(z)$. 因爲, 在此式中, $k$ 與 $k'$ 應獨立依任何次序取一切的整數, 祇不可同時等於 0. 所以我們一樣的也可以用 $-k$ 與 $-k'$ 代 $k$ 與 $k'$. 但由此我們(因爲級數裏的指數都是 2)立刻知道,若以 $-z$ 代 $z$, 對於級數也無影響. 故 $\wp(z)$ 的確是一個偶函數(*gerade Funktion*).

現在若在 $\wp(z+\omega)-\wp(z)=c$ 內, 令 $z=-\frac{1}{2}\omega$, 卽得所要證的 $\wp(\frac{1}{2}\omega)-\wp(-\frac{1}{2}\omega)=0=c$. 所以

$$\wp(z+\omega)=\wp(z).$$

完全同樣的我們可證

$$\wp(z+\omega')=\wp(z),$$

故 $\wp(z)$ 的雙週期性已經證明. 現在因爲 $\omega$ 與 $\omega'$ 構成 $\wp'(z)$ 的原週期耦又因爲普遍的由

$$\wp(z+\Omega)=\wp(z) \text{ 總可以推得 } \wp'(z+\Omega)=\wp'(z),$$

也就是因爲 $\wp(z)$ 除 $\wp'(z)$ 的週期外不能有其他的週期,故 $\omega$ 與 $\omega'$ 也構成 $\wp(z)$ 的原週期耦. 最後, $\wp(z)$ 與 $\wp'(z)$ 旣然都是半純函數,綜合起來,我們得

**定理 8:** 雙週期函數,特殊的,橢圓函數是存在的, 而且具有預給的原週期耦的橢圓函數也存在. 外氏 $\wp$ 函數卽此類函數的第一個例.

---

❶參看第 142 頁底註❶——譯者.

根據種種不同的原因，我們必須認為這個 $\wp$ 函數是最簡單的橢圓函數．因為 0 級與初級橢圓函數不存在，所以祇有二級的橢圓函數才能是最簡單的．在這些函數之中，其在平行四邊形內祇有一個二級極點——此極點稱為 $\zeta$——而具可能的最簡單的主部 $\dfrac{1}{(z-\zeta)^2}$ 的，我們將認為最簡單．若在基本平行四邊形裏，這極點又位於那唯一的頂點 $\zeta=0$ 上，則我們恰好得到 $\wp(z)$，——這裏，根據定理 3，還成問題的是一個外加的常數項，除此之外，函數已完全確定．

在 $\wp(z)$ 的款，這個——其實是沒有大關係的——常數項，在我們可想像的範圍內，也已選得最簡單．以 $\wp(z)$ 每一個極點為中心，我們可以將函數展為羅朗級數．在原點的隣域內這展開式具以下形狀：

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+c_0+c_2z^2+c_4z^4+\cdots\cdots.$$ [1]

從

$$\wp(z)-\frac{1}{z^2}=\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(z-z_\lambda)^2}-\frac{1}{{z_\lambda}^2}\right],$$

我們立刻可以看出，前一級數中的常數 $c_0$ 之值為 0．

現在這個"最簡單的"橢圓函數在外氏的橢圓函數論中[2] 占首要的位置，像指數函數在單週期函數中那樣．我們祇能隨意提出幾點以說明函數 $\wp(z)$ 這個重要性．我們先證(參看 § 8，定理 5)基本的

**定理 9**：　函數 $w=\wp(z)$ 適合初級代數微分方程式

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2=(w')^2=4w^3-g_2w-g_3,$$

其中 $g_2$ 與 $g_3$ 為某兩個專由 $\omega$ 與 $\omega'$ 決定的常數，所謂的"$\wp$ 函數的不變數"．此不變數中不含自變數，而 $w'$ 為 $w$ 的一個代數函數．

證：　從我們剛才所利用的 $\wp(z)-\dfrac{1}{z^2}$ 的級數，又由於根據外氏二進

---

[1] 因為他的主部是 $=\left(\dfrac{1}{z-\zeta}\right)^2=\dfrac{1}{z^2}$，又因已知 $\wp(z)$ 為偶函數，故級數裏沒有奇冪．

[2] 在(較舊的)雅谷比的橢圓函數論中，有另一函數占有這"最簡單的"函數的位置，那函數在週期平行四邊形內有兩個分開的初級極點，其殘數(當然)有相等的絕對值與相反的符號．這兩個極點位於基本平行四邊形的兩邊的中點．

級數(卷一，§ 23)所得的級數

$$\frac{1}{(z-z_\lambda)^2}=\frac{1}{z_\lambda{}^2}+2\frac{z}{z_\lambda{}^3}+3\frac{z^2}{z_\lambda{}^4}+\cdots\cdots,$$

則若我們暫時爲簡單起見(對於 $n\geqq 3$)令

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{z_\lambda{}^n}=s_n\text{；}❶$$

即得

$$\mathfrak{p}(z)=\frac{1}{z^2}+2s_4z^2+4s_5z^3+5s_6z^4+\cdots\cdots.$$

現在，若依照外氏的方法，令

$$60s_4=g_2=60\sum_{k,k'}{}'\frac{1}{(k\omega+k'\omega')^4}$$

與

$$140s_6=g_3=140\sum_{k,k'}{}'\frac{1}{(k\omega+k'\omega')^6},$$

再注意有奇數指數的 $s_n$ 必須 $=0$，❷即知所求的展開式開始是

$$\mathfrak{p}(z)=\frac{1}{z^2}+\frac{g_2}{20}z^2+\frac{g_3}{28}z^4+\cdots\cdots.$$

現在由此又得

$$\mathfrak{p}'(z)=-\frac{2}{z^3}+\frac{g_2}{10}z+\frac{g_3}{7}z^3+\cdots\cdots,$$

$$[\mathfrak{p}(z)]^3=\frac{1}{z^6}+\frac{3}{20}g_2\cdot\frac{1}{z^2}+\frac{3}{28}g_3+\cdots\cdots,$$

若從這幾個展開式構造下式：

$$[\mathfrak{p}'(z)]^2-[4\mathfrak{p}^3(z)-g_2\mathfrak{p}(z)-g_3],$$

則先根據定理 2，這又是一個橢圓函數，與 $\mathfrak{p}$ 函數有相同的週期而無其他極點．現在我們可以立刻驗出，這函數在原點鄰近的展開式中沒有負幕．因此，根據定理 1a，這函數化爲一個常數，——而事實上還是化爲常數 0，因爲由我們的計算，知道這展開式也沒有常數項． 所以，如我們所要證

❶由第 34 頁，此級數對於 $n\geqq 3$ 爲絕對收斂的．

❷因爲網中的網點逐對有相等的絕對值與相反的符號，所以當 $n$ 爲奇數時，$s_n$ 的級數中的項逐對相消．

的，

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

其中 $g_2$ 與 $g_3$ 的意義，如前所定.❶ 我們知道，一個如此的微分方程式倒轉來也唯一的確定一個適合他的函數，祇要已給一對對應的變數值. 對於 $\wp$ 函數，則例如 $z=0$ 與 $w=\infty$ 為如此的一對對應值；故我們從

$$\frac{dw}{dz} = \sqrt{4w^3 - g_2w - g_3},$$

卽得

$$z = \int_\infty^w \frac{dw}{\sqrt{4w^3 - g_2w - g_3}},$$

所以 $w=\wp(z)$ 爲這積分所確定的函數 $z=z(w)$ 的反函數.❷ 一個如此的積分——更普遍些每一個如下述的積分：被積函數爲一個有理函數，而此有理函數所含變數爲積分變數本身與積分變數的一個三次或四次有理整函數之二次根，——我們稱爲一個橢圓積分(elliptisches Integral)，(原因頗爲特別；因爲當初計算這積分時，得到橢圓的周長). 亞倍爾與雅谷比最初發現的雙週期函數，是由橢圓積分所確定的函數的反函數，故他們命這些函數爲"橢圓函數".

❶這個結果在許多方面都很有意義. 這裏我們還可提出以下的一點：方程式

$$y^2 - (4x^3 - g_2x - g_3) = 0$$

確定 $y$ 爲 $x$ 的(多值)函數，而 $x$ 也爲 $y$ 的(多值)函數. ($x$ 與 $y$ 及下文的 $t$，在此處都表示複變數). 他們彼此互爲代數函數(詳見第五章)；或者，若我們把他們都作爲實數，則可以說：這方程式確定一個代數曲線(*algebraische Kurve*)。 從我們以上的結果，可知

$$x = \wp(t), \qquad y = \wp'(t)$$

是這"曲線"的一個參數表示式. 這裏，先有一個含 $x$ 與 $y$ 的陰方程式，這陰方程式確定變數 $x$ 與 $y$ 中每一個爲其他一個的多值函數，而從此陰方程式我們求得一個參數 $t$ 的兩個單值函數，他們恰好與所給的陰方程式代表相同的曲線. 表示這個事實，我們也說，我們將這曲線劃一了(Uniformisiert)，此處我們利用 $\wp$ 函數劃一了一個特殊的三次曲線. 關於曲線的劃一(Uniformizierung)，一個較簡單的款是：我們利用三角函數 $x=\cos t$，$y=\sin t$ 代表圓 $x^2+y^2-1=0$. 此處所討論的劃一問題，在新的函數論中佔重要的位置.

❷我們原來是從週期 $\omega$ 與 $\omega'$ 出發，構造具原週期耦 $\omega$, $\omega'$ 的 $\wp$ 函數，而對於這函數求得上面的微分方程式，在這方程式內的不變數 $g_2$ 與 $g_3$ 專由 $\omega$ 與 $\omega'$ 所確定. 所謂的逆問題，涵義如下：倒過來，我們要決定，$g_2$ 與 $g_3$ 是否可以任意預給，然後上述的積分函數 $z=z(w)$ 的反函數，是否果然是具不變數 $g_1$ 與 $g_2$ 的一個 $\wp$ 函數.

我們現在還要證一個定理，作爲我們最後的目的，這定理在某一個意義上，使我們可以對於全部的橢圓函數作一個鳥瞰。

**定理 10:** 每一個具週期 $\omega$ 與 $\omega'$ 的橢圓函數，祇要 $\omega':\omega$ 不是實數，都可寫成含函數 $\wp(z\mid\frac{1}{2}\omega,\frac{1}{2}\omega')$ 與他導微函數的一個有理函數.❶

這定理的證明，同時給我們一個機會去認識這幾個函數的一些其他重要性質：

從 $\wp(z+\omega)=\wp(z+\omega')=\wp(z)$，得(參看第 150 頁)

$$(1)\qquad \frac{\sigma'}{\sigma}(z+\omega)=\frac{\sigma'}{\sigma}(z)+\eta;\qquad \frac{\sigma'}{\sigma}(z+\omega')=\frac{\sigma'}{\sigma}(z)+\eta',$$

其中 $\eta$ 與 $\eta'$ 代表兩個適宜的常數.❷ 由此又得

$$\sigma(z+\omega)=c\cdot e^{\eta z}\sigma(z),\qquad \sigma(z+\omega')=c'\cdot e^{\eta' z}\sigma(z).$$

又因 $\sigma(z)$ 也是一個奇函數，若再令 $z=-\frac{1}{2}\omega$，卽可計算這兩個新的常數，更精確些，我們得

$$(2)\qquad \begin{cases}\sigma(z+\omega)=-e^{\eta(z+\frac{1}{2}\omega)}\sigma(z),\\ \sigma(z+\omega')=-e^{\eta'(z+\frac{1}{2}\omega')}\sigma(z).\end{cases}$$

從 $\wp(z)$ 的羅朗展開式，經過相同的兩個積分步驟，卽得在原點鄰近的羅朗展開式之開始幾項：

$$(3)\qquad \frac{\sigma'}{\sigma}(z)=\frac{1}{z}+b_3z^3+\cdots\cdots,$$

$$(4)\qquad \sigma(z)=z+d_5z^5+\cdots\cdots,$$

其中很容易計算的兩係數 $b_3$ 與 $d_5$ 及所有以後的係數之值，我們都無須曉得.

現在，根據(2)，可知函數

$$-\frac{\sigma(z-a)\sigma(z+a)}{\sigma^2(z)\cdot\sigma^2(a)}$$

具週期 $\omega$ 與 $\omega'$，式中 $a$ 爲任意一個異於一切網點的點，又因這函數在 $\wp(z)$ 的基本平行四邊形內祇有一個極點 $z=0$，所以他代表一個屬於這個

❶倒轉來，根據定理 2，每一個含 $\wp(z)$ 與他的導微函數的有理函數，當然是一個具有週期 $\omega$ 與 $\omega'$ 的橢圓函數.

❷因爲 $\frac{\sigma'}{\sigma}(z)$ 爲一個奇函數，故若令 $z=-\frac{1}{2}\omega$，卽得 $\frac{1}{2}\eta=\frac{\sigma'}{\sigma}\left(\frac{1}{2}\omega\right)$，所以 $\eta$ 可以從一個級數計算而得. 同樣的 $\eta'$ 自然也可如此求得.

平行四邊形的橢圓函數$\phi(z)$. 現在因爲

$$\sigma(z\pm a)=\pm\sigma(a)+\sigma'(a)\cdot z\pm\tfrac{1}{2}\sigma''(a)\cdot z^2+\cdots\cdots,$$

故在原點鄰近，$\phi(z)$ 的展開式的開始幾項是

$$\phi(z)=\frac{1}{z^2}+\frac{\sigma(a)\cdot\sigma''(a)-[\sigma'(a)]^2}{\sigma^2(a)}+c_2z^2+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{z^2}-\wp(a)+e_2z^2+\cdots\cdots$$

其中的係數 $e_2$，……之值，我們也無須曉時.

但從這開始幾項，可知$\phi(z)-\wp(z)+\wp(a)$ 爲常數 0，因爲他是一個 0 級的橢圓函數，而且當 $z=0$ 時他等於 0. 若將 $a$ 寫成 $z'$，以便鮮明的表示 $a$ 可以自由選擇，即得基本公式

$$\wp(z)-\wp(z')=-\frac{\sigma(z-z')\sigma(z+z')}{\sigma^2(z)\cdot\sigma^2(z')}$$

若先對於 $z$ 再對於 $z'$ 取這公式兩端的對數導微函數，然後將結果相加，則得所謂的函數 $\frac{\sigma'}{\sigma}(z)$ 的加法定理:

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(z+z')=\frac{\sigma'}{\sigma}(z)+\frac{\sigma'}{\sigma}(z')+\frac{1}{2}\cdot\frac{\wp'(z)-\wp'(z')}{\wp(z)-\wp(z')}.$$

對於 $z$ 再微分一次，則由此又得函數 $\wp(z)$ 的加法定理:

$$\wp(z+z')=\wp(z)-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\wp'(z)-\wp'(z')}{\wp(z)-\wp(z')}\right].$$ [1]

有了這些準備之後，我們現在可以將定理 10 的證明陳述如下:

設已給的橢圓函數 $f(z)$，在以 0, $\omega$, $\omega+\omega'$, $\omega'$ 爲頂點的週期平行四邊形內，有 $k$ 個極點 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots\cdots \zeta_k$，這些極點依序具有附屬的主部

$$h_\lambda(z)=\frac{a_{-1}^{(\lambda)}}{z-\zeta_\lambda}+\cdots+\frac{a_{-\alpha_\lambda}^{(\lambda)}}{(z-\zeta_\lambda)^{\alpha_\lambda}}.$$

現在，因爲函數

---

[1] 若將裏面的微分實際計算出來，再利用 $\wp(z)$ 的微分方程式——從此式我們得 $\wp''(z)=6\wp^2(z)-\frac{1}{2}g_2$——即知加法定理也可寫成

$$\wp(z+z')=\frac{\left[2\wp(z)\wp(z')-\frac{1}{2}g_2\right][\wp(z)+\wp(z')]-g_3-\wp'(z)\wp'(z')}{2[\wp(z)-\wp(z')]^2},$$

由此式可見這是一個代數的加法定理（參看 § 8，定理 3），因爲 $\wp'(z)$ 與 $\wp'(z')$ 原是 $\wp(z)$ 與 $\wp(z')$ 的代數函數。

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(z), \qquad \wp(z), \qquad \frac{1}{2!}\wp'(z), \qquad +\frac{1}{3!}\wp''(z), \cdots\cdots$$

在原點各有一個極點，依序具簡單的主部

$$\frac{1}{z}, \qquad \frac{1}{z^2}, \qquad \frac{1}{z^3}, \qquad \frac{1}{z^4}, \cdots\cdots,$$

所以我們一看就曉得函數

$$H_\lambda(z)=a_{-1}^{(\lambda)}\cdot\frac{\sigma'}{\sigma}(z-\zeta_\lambda)+a_{-2}^{(\lambda)}\cdot\wp(z-\zeta_\lambda)-\frac{a_{-3}^{(\lambda)}}{2!}\wp'(z-\zeta_\lambda)$$
$$+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{\alpha_\lambda}a_{-\alpha_\lambda}^{(\lambda)}}{(\alpha_\lambda-1)!}\wp^{(\alpha_\lambda-2)}(z-\zeta_\lambda)$$

是一個半純函數，他在 $\zeta_\lambda$ 有一個具主部 $h_\lambda(z)$ 的極點。

根據 $\wp$ 函數的加法定理，$\wp(z-\zeta_\lambda)$ 可以寫成含 $\wp(z)$ 與 $\wp(z)$ 的諸導微函數的有理函數，而因此 $\wp(z-\zeta_\lambda)$的諸導微函數也如此 於是參照定理的內容，我們就將 $H_\lambda(z)$ 更簡單的寫作

$$H_\lambda(z)=a_{-1}^{(\lambda)}\frac{\sigma'}{\sigma}(z-\zeta_\lambda)+R_\lambda(\wp,\wp',\cdots\cdots),$$

其中 $\wp$, $\wp'$……代表 $\wp(z)$, $\wp'(z)$……的縮寫，而 $R_\lambda$ 代表含其中變數的一個有理函數. 若作一切 $H_\lambda(z)$, $(\lambda=1,2,\cdots\cdots k)$ 的和，則其中有一部分爲

$$a_{-1}^{(1)}\frac{\sigma'}{\sigma}(z-\zeta_1)+a_{-1}^{(2)}\frac{\sigma'}{\sigma}(z-\zeta_2)+\cdots\cdots+a_{-1}^{(k)}\cdot\frac{\sigma'}{\sigma}(z-\zeta_k),$$

根據函數$\frac{\sigma'}{\sigma}(z)$的加法定理，這部分可以寫作❶

$$(a_{-1}^{(1)}+a_{-1}^{(2)}+\cdots+a_{-1}^{(k)})\frac{\sigma'}{\sigma}(z)-\left[a_{-1}^{(1)}\frac{\sigma'}{\sigma}(\zeta_1)+\cdots\cdots+a_{-1}^{(k)}\frac{\sigma'}{\sigma}(\zeta_k)\right]$$

$+\wp(z)$ 與 $\wp'(z)$ 的一個有理函數.

但根據定理 4，第一個(圓)括弧內$=0$，又因第二個(方)括弧內係一常數，故討論中的部分，可以寫成 $\wp$ 與 $\wp'$ 的有理函數.

令此部分$=R_0(\wp,\wp')$，則得

$$H_1(z)+\cdots\cdots+H_k(z)=R_0(\wp,\wp')+\sum_{\lambda=1}^{k}R_\lambda(\wp,\wp',\cdots\cdots).$$

---

❶若有一個 $\zeta_\lambda=0$，則方括內相當於這個 $\zeta_\lambda$ 的一項應當取消

所以一切 $H_\lambda(z)$ 之和，爲 $\wp(z)$ 與 $\wp(z)$ 的導徵函數的一個有理函數，故特殊的，〔雖然個別的項 $\frac{\sigma'}{\sigma}(z-\zeta_\lambda)$ 都不是橢圓函數！〕也就是一個橢圓函數。若從 $\wp(z)$ 減去這個函數，則所得的函數失去一切的極點而化爲一個常數 $C_0$，於是我們求得以下的表示式：

$$f(z)=C_0+R_0(\wp,\ \wp')+\sum_{\lambda=1}^{k}R_\lambda(\wp,\ \wp',\cdots\cdots)=R(\wp,\ \wp',\cdots\cdots),$$

於是我們定理已經證明。❶

從橢圓函數的很寬廣的理論裏，我們祇拈出這一點點，但以這本小書的範圍說，我們應當可以滿足了。

習題：1. 若 $\omega$ 爲正數，$\omega'$ 爲正虛數，❷則 $\wp$ 函數 $\wp\left(z \,\middle|\, \frac{1}{2}\omega,\ \frac{1}{2}\omega'\right)$ 在基本平行四邊形(這時是一個長方形)的邊上是實的。試證明之。

2. 在習題 1 的條件之下，經過變換 $w=\wp(z)$，基本長方形在 $w$ 平面上對應於如何的一個域？

3. 繼續前一習題，試作從一個已給的長方形到么圓的等角變換(Konforme Abbildung)。

4. $e^{\wp(z)}$ 是一個橢圓函數否？

5. 試詳細證明第 155 頁底註所述的 $\wp$ 函數的代數加法定理。

6. 試證 $\wp'(z)$ 在基本平行四邊形內有初級零點 $\frac{1}{2}\omega,\ \frac{1}{2}(\omega+\omega'),\ \frac{1}{2}\omega'$，——而無其他零點。

---

❶從 $\wp'^2=4\wp^3-g_2\wp-g_3$，經過微分得

$$\wp''=6\wp^2-\frac{1}{2}g_2,$$ 於是又得

$$\wp'''=12\wp\wp',$$

$$\wp''''=12\wp'^2+12\wp\wp''=120\wp^3-18g_2\wp-12g_3,$$

等等。普遍的，我們看出，一切 $\wp(z)$ 的高級導徵函數是 $\wp(z)$ 與 $\wp'(z)$ 的有理整函數。利用這結果，我們可以將定理 10 更精密的改述如下：一切橢圓函數可以寫作 $\wp(z)$ 與 $\wp'(z)$ 的有理函數。

❷即其實部 $=0$，其虛部 $>0$——譯者。

# 第二編

# 多值函數

## 第四章　根與對數

### §10.　多值函數與黎曼面初論

我們現在再回到卷一第八章，特別是 §27 內的討論． 在那裏我們看見，如何從第一個函數元（這個函數元例如是寫成冪級數的形狀），利用解析開拓——這每個開拓都是絕對唯一而必然的——，普遍的總可推得新的函數元，因而將函數的存在域擴大． 我們想像，祗要還有開拓的可能，我們就繼續的開拓下去．這樣從一個函數元所產生的函數，稱爲單值的，假使對於每個固定的點 $z_0$，無論經那一條路用解析開拓達到這一點，這函數總有同樣的性質，也就是：假使每一點 $z_0$，若有一次屬於一個收斂圓的內部，則這一點絕不會阻礙任何一個開拓，而且對於每一個開拓，函數在這一點的值，總是相等． 如此，則 $z$ 平面一切的點，都毫無二義的區別爲正規的與非正規的，而每一個正規點相當一個唯一的函數值． 正規點的全部（按卷一，§7 的意義），構成一個域，稱爲函數的存在域，這個域內的點，爲單值函數 $w=f(z)$ 的函數值之“荷點”(Trägev)．❶

這類的函數，天然比其他的容易研究，❷ 因此我們至今差不多都是在

---

❶我們可以想像，在存在域內的每一點 $z$，將在那裏的函數值 $w$ 紀錄，或聯繫，或攜帶，——爲便利起見，我們有時把極點也算在存在域之內，而令他們爲函數值 $\infty$ 的荷點．

❷雖然如此，一個單值函數未必能很方便的用一個單獨的算式完全代表，如在整函數與半純函數之款那樣．——存在域也可以有種種不同的與極複雜的形狀；因爲我們簡直有以下的定理：對於每一個域 $G$（參看卷一，第 29 頁），總有解析函數在，恰好以 $G$ 爲存在域，而這函數不能超過此域開拓．

討論這類函數.

若我們取一個多值函數,則在開拓的時候,以前的條件就不能適合,而一切就都兩樣.這時,同一個點在不同的開拓裏會得到不同的函數值,甚至於同一個點在一個開拓裏是正規的,而在另一個開拓裏還許是奇的.所以我們暫時將每一點 $z$,作為相當於他在所有可能的開拓裏所得的一切函數值,此外祇要他在任意一個開拓裏是一個奇點,即稱之為"奇點".

若 $w=F(z)$ 為如此所得的函數結構 (Funktionsgebilde),則對於一個已給的 $z$,符號 $w=F(z)$ 不再代表一個唯一的固定的意義,而可以有(有盡或無盡)多個意義. 關於這一款,$\sqrt{z}$ 與 $\log z$ 為我們曾經較精確討論過的少數的例.

於是主要的問題——暫時極浮泛的敍述起來——普遍的是:如何去區別一個多值函數的不同的格而對於函數的值域,如何能得其條理與其鳥瞰?

在固定的個別的款中,這問題多半成以下的形狀:若有一個問題,要利用一個多值函數來解決,但按其性質,應有一個絕對唯一的解,——則在函數的各格中,將用那一個?

從以下幾個例,這問題的性質與其困難即可瞭然,在這些例中,我們應用稍為熟悉的多值函數 log.

1. 設(參看第 110 頁底註)$H(z)=a_0+a_1z+\cdots\cdots$ 為一個沒有零點的整函數;又設 $b_0$ 為對數在 $a_0(\neq 0)$ 的主值. 這樣,則如前所說,加上條件 $h(0)=b_0$, $h(z)=\log H(z)$ 即成為一個完全確定的整函數. 對於每一個 $z$, $h(z)$ 是 $H(z)$ 的一個對數,例如 $h(1)$ 是 $\log\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\right)$ 的一個值. 這是那一個值?

2. 設 $a$ 與 $b$ 為兩個不同的複常數 $(\neq 0)$, $L$ 為連接兩點而不經過 0 的一條路. 則 $\int_a^b \frac{dz}{z}$ 為一個完全確定的複數. 因為 $\frac{d}{dz}\log z=\frac{1}{z}$,這個複數包括在 $\log b-\log a$ 的無盡多個值內. 他是那一個值?

3. 設單值函數 $f(z)$ 在閉路 $C$ 上及其內部為正規的(參看卷一, § 35, 定理 1),又設沿路 $C$, $f(z)\neq 0$. 因為 $\frac{d}{dz}[\log f(z)]=\frac{f'(z)}{f(z)}$,所以,若 $a$ 代表 $C$ 上任意一點,

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(C)}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{\log f(a)-\log f(a)}{2\pi i}$$

必是一個 $\gtreqless 0$ 的整數. 這是那一個整數?

4. 我們還要利用一個例來說明,一個點可能在有些開拓裏是正規的而在有些其他開拓裏

是奇的：$\sqrt{-2\pi i}$ 有兩值，選其中一個固定的而稱之爲 $c_0$. 於是我們立刻可以看出，有一個而且祇有一個冪級數 $\Sigma c_n(z-1)^n$ 在，第一項爲 $c_0$，在 $+1$ 的鄰近爲收歛的，並且適合

$$[c_0+c_1(z-1)+\cdots\cdots]^2=-2\pi i+(z-1)-\frac{(z-1)^2}{2}+\cdots\cdots.$$

簡言之，這級數代表 $\sqrt{\operatorname{Log}z-2\pi i}$ 的一個值，其中 $\operatorname{Log}z$ 代表 $\log z$ 的主值。對於這個函數元，$z=+1$ 自然是一個正規點。現在，我們想像這個元例如沿着么圓依正向開拓——這顯然是可能的——則回來的時候，$+1$ 就成爲奇點，因爲 $\operatorname{Log}z$ 增加了 $2\pi i$；而 $\sqrt{\operatorname{Log}z}$ 在 $z=+1$ 顯然不再是正規點。❶

因此，這問題也可以較精確些敍述如下：設 $w=f_0(z)$ 爲多值函數 $w=F(z)$ 在 $z=z_0$ 的一個正規函數元；設此元沿從 $z_0$ 到 $\zeta$ 的路 $L$ 是可開拓的。則當我們到 $\zeta$ 時，一定得一個完全確定的函數值 $F(\zeta)$。這值是那一個？

對於克服這個困難的方法，我們目前祇好作一個膚淺的介紹；等到在這一章與下一章內精密的討論過幾個例之後，然後我們在最末一章內尋求一個普遍的答案。

作爲出發點的函數元，可以假定爲冪級數。我們想像他的收歛圓從紙上剪下來，向這個圓的點我們作爲這個圓的(單值的)函數值的荷點。現在，若我們將開始的元用第二個冪級數開拓出來，則我們又想像他的收歛圓也剪了下來，然後將他與第一個圓片在位置相同的部分黏起來。(如此我們得一個像卷一，圖 7b 那樣的圖)。黏起的部分，本來是相同的函數值的荷點，所以從此這部分簡直可作爲祇附有一重的值的一頁。若我們又得一個新的開拓，則又將新的圖片依法黏上，餘仿此。每一個新的圓片，總是照以上所說的樣子黏在他的前一個圓片上，他就是從這前一個(當然是單值的)開拓出來的。

現在，若經過幾次開拓以後，一個新的圓又囘到舊的區域上(參看卷一，第 78 頁與圖 8)，——自然是囘到以前的一個但不是緊接的前一個圓片上——則當這新舊兩圓片負荷相同函數值時，而且祇當此時，這兩圓片就黏在一起，並且黏的時候，祇能黏負荷相同的函數值的部分。❷ 若

❶相仿的情形，即在實數之款，也可發現：$x^3+y^3-3axy=0$ 代表所謂的笛卡兒葉形線(Folium Cartesii)。對應於一切適合條件 $0<x<a^3\sqrt{4}$ 的 $x$ 值，$y$ 有三個值。三個曲線段中，最上的兩個，在 $x=a^3\sqrt{4}$ 時都是奇的(其微商爲 $\infty$)，並"在那裏是相連的"；而其餘的一個則是正規的。

❷若函數爲單值的，則黏在一處的圓片漸漸的將整個存在域恰好鋪滿一次，而如此所得的一頁上所負荷的函數值，就完全代表這函數。

他們所負荷的函數值不同，則我們讓他們相疊而不相黏. 於是平面在這一部分上就有兩頁相疊，他們負荷不同的——但在每一頁上完全單值的——函數值.

我們想像，祇要還有可能，這步驟就無止境的向前進行，但總遵守以上的規定. 如此則得一個面狀的圖形，但他有許多"頁"(*Blätter*)，而且普遍的甚至於無盡多頁，將平面掩蓋. 這些頁可有種種不同的形狀，而且也可按種種不同的方法彼此相連.❶ 我們稱之爲由開始的元所確定的多值函數 $w=F(z)$ 的黎曼面 (**Riemannsche Fläche**). $F(z)$ 的整個值域，將這面到處舖滿一次，就是，每一頁上的每一點，祇負荷一個唯一值. 〔這面上一切的懸界(freier Rand)或懸界點，對於產生本頁的開拓是奇的，詳見下文〕.

一直要等到我們將這個很普遍的論列，利用幾個易於明瞭的例，解釋清楚之後，我們才能完全認識這個表示法的功用.

我們祇還指出，祇要我們遵守以上的規約，我們專用圓片抑或用其他的域——例如在卷一，第 68 頁所描寫的——來開拓，自然無關重要.

習題: 1. 一個多值函數，在他的黎曼面上兩個上下相疊的點，能否有相同的值? 他能否在如此兩點的隣域內的一切點有相同的值?

2. 以下的式，確定什麼樣的函數(單值的或多值的)?

a) $\sqrt{e^z}$; b) $\sqrt{\cos z}$, $\cos\sqrt{z}$; c) $\sqrt{1-\sin^2 z}$;

d) $\sqrt{\wp(z)}$; e) $\sqrt{\wp(z)-\wp\left(\frac{1}{2}\omega\right)}$; f) $\log(e^z)$?

## § 11. $\sqrt[2]{z}$ 與 $\log z$ 的黎曼面

1. 我們可以把 $w=\sqrt{z}$ 看作最簡單的多值函數. 在卷一，§ 28，2 內，我們曾經看見，對於 $x>0$ 確定而有正值的實函數 $\sqrt{x}$，可以向複數方面開拓. 例如在 $+1$ 的隣近，這函數可以用二項級數

$$[1+(z-1)]^{\frac{1}{2}}$$
$$=1+\frac{1}{2}(z-1)-\frac{1}{2\cdot 4}(z-1)^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}(z-1)^3-+\cdots\cdots$$

❶當我們將圓片黏起來時，有時一頁與另一頁須相黏，但這兩頁被位於中間的某幾頁所隔開. 這時我們必須想像，這兩頁相黏而不與中間的頁相交，就是說，不與他們相遇. 在實際上這自然是不可能，但在純粹理想的構圖，這是毫無困難的，而我們這裏的目的，也祇是要構成如此的一個圖.

開拓。從這個元出發，我們可以完全單值的而且毫無阻礙的向前開拓，祇要我們總避開負實軸。若按前節所描寫的方法構造黎曼面，則這個事實表示：若將這些區域連起來可以舖滿整個沿負實軸剖開的平面，這剖開的平面上每一點負荷一個$\sqrt{z}$的值，而這個值是被所選函數元唯一的決定。我們說，我們已經從 $w=\sqrt{z}$ 的整個的值域（每一個 $z\neq0$ 負荷兩個值），剖出在剛才所說的域內正規的一支(Zweig)。

但現在因為 0 是有窮遠處唯一的奇點(關於∞點參看第 164 頁)，超過這域的邊界；還可有一個相仿的開拓。但是，我們例如超過上面的邊界向下開拓，則我們不能再與以前所得的域黏在一起，因為從上面的邊界侵入下半平面的域，現在負荷另外的函數值。這函數值我們知道比原來的多一個因子 $e^{\frac{2\pi i}{2}}=-1$，也就是與原來在那裏的函數值絕對值相等而符號相反。所以這平面被這個域再掩蓋一次，❶並且因為除去 0 我們的開拓到處不會遇到阻礙，所以這第二頁終於擴充到整個平面(除去 0)而至回到負實軸為止，但他所聯繫的值，總與以前的絕對值相等而符號相反。

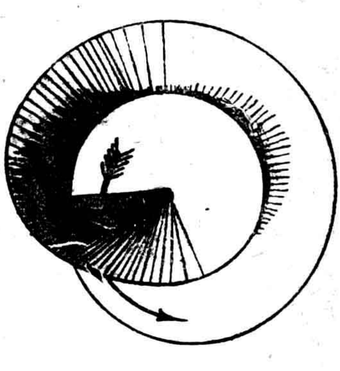

圖 5

如此則整個平面為兩頁所掩蓋，在原點那裏，他們好像螺旋曲面 (Schraubenfläche) 那樣繞兩次，而在這兩頁上，$\sqrt{z}$值域的全部，恰好舖滿一次(參看圖 5)。這個面在上頁與下頁，沿着負實軸都還有一個懸界，超過這兩個懸界都還可以開拓。例如我們又超過上面的邊而開拓到下半平面裏，則這個將平面疊上第三次的新增加的域，所負荷的值，比他下面一頁所負荷的多一個因子$(-1)$；因此他所負荷的函數值，與最下一頁的下半平面所負荷的相同。所以我們並未得到第三頁，而簡單的說，我們必須將這兩個懸界，穿透中間的一頁黏在一起。但這樣一來，一切都已完成。現在因為不再有懸界，繼續開拓已不可能：我們已求得函數 $w=\sqrt{z}$ 的黎曼面，函數的整個值域在這面上完全單值的舖滿。$\sqrt{z}$是一個在這面上的位(rt) ❷ 的單值函數。若我們在這面上從一點沿任何的路到另一點，則我們是在一個單值的值域內移動，一如我們在單值函數之款。❸

但這面上一個(異於 0 的)點現在不再能單由 $z$ 確定；我們還須指定這點所在的頁。這兩

❶我們想像第二頁例如是位於第一頁之上。

❷黎曼面上的"點"有時稱為"位"，以別於 $z$ 平面上的點。——譯者。

❸因為在完成第一頁之後，我們可以不自上向下，而自下向上，或向兩方面同時開拓，可見這兩頁的穿透線 (Durchdringungslinie) 的形狀與位置，完全不關重要。這穿透線可以說根本不存在，或者說，他之所以存在，祗是因為我們從經驗所得的空間觀念並不健全。我們祗須注意，這個螺旋面的特性是：在每一個異於 0 的地方，都有上下兩頁，並且我們若從任意(異於 0 的)一點出發，繞原點兩圈，可以又回到出發的點；我們簡直無須想像，在眞實的空間，我們一定要穿過中間的一頁，這一頁我們完全不加以理會。

頁中那一頁稱爲第一，那一頁稱爲第二，旣完全無關緊要，通常我們假設這面連上其聯繫的值，隨意用一種方法構成的，但一經構成之後，則固定不變。 這樣若給一個值 $z$，與其所聯繫的 $\sqrt{z}$ 的值，則這面上的一點，已唯一的決定。 此外，兩頁相連處的 0 點，也作爲屬於面的，但在面上祇作爲一個點；我們將他算作值 0 的荷點，而稱之爲這面的一個二頁結合點 (*zweiblättriger Verzweigungspunkt der Fläche*)(或初級結合點)。 現在我們很容易驗證，每一個複數 $w$，聯繫在我們的黎曼面上一次，而且祇有一次。

在每一個異於 0 的點的鄰域內，其聯繫的值域，構成一個單值正規函數。 這個鄰域可以一直向外擴充，祇要他還是單頁的，也就是祇要他不含 0 點在內。 若 $G$ 爲如此一個域(例如在某一頁內一個以 $z_0$ 爲中心，$|z_0|$ 爲半徑的圓，或一頁的右半平面，或沿着負實軸剖開的平面等等)，則我們說，這域連上附着於他的函數值，代表函數的一支。

(例如若 $E$ 代表依正向走的么圓而我們取 $+1$ 爲始點，更取按上頁所解釋的 $\sqrt{z}$ 的值，爲 $\sqrt{z}$ 的起始的值，則得

$$\int_{+1}^{+1\,(E)}\frac{dz}{\sqrt{z}}=\left[2\sqrt{z}\right]_{+1}^{+1\,(E)}=-2-2=-4$$

2. 函數 $w=\sqrt[p]{z}$，$(p>2)$ 的情形，與以上完全相似。 由於完全相仿的推論，從卷一，§28, 2 所得的結果，這裏我們知道，繞原點開拓兩週後，已得圖 5 那樣的圖形，但這開拓還未完成。 若我們再從已得的面的懸界(例如我們又由上面的懸界向下半平面)開拓，則 $z$ 平面必須有第三層去容納值域；照此下去，一直到第 $p$ 層。❶ 這時若再越過最後的懸界開拓到下半平面，則所得的值，並不是新的，而祇是最底下一頁的下半平面所聯繫的值。所以我們將第 $p$ 頁面上的邊界，穿透中間的 $(p-1)$ 頁，與第一頁下面的邊界黏合爲一。 於是一切的懸界都已消失，而開拓的步驟完成。 函數 $w=\sqrt[p]{z}$ 整個的值域在他這個 $p$ 頁的黎曼面上單值的鋪滿，並且我們在特款 $p=2$ 內所說的，在此一概適用。 原點稱爲一個 $p$ 頁結合點(*p-blättriger Verzweigungspunkt*)〔或一個 $(p-1)$ 級結合點〕。 此外，我們將他作爲一個點，也屬於面，並且令他爲 0 值的荷點。

我們還要簡單的指出，同樣的論列，我們所用於數平面的，可用於數球面(參考卷一，第 6 頁底註)。 我們得到一個完全相仿的將球面掩蓋的 2 頁或 $p$ 頁的黎曼球面(*Riemannsche Kugelfläche*)。 這個每人自己都可以毫無困難的構造。 這時 $p$ 頁結合點 0，位於南極，而我們發現——利用球面的優點就在此——北極點，亦卽 ∞ 點，與 0 點具有完全相同的性質，也就是一個 $p$ 頁結合點。 故我們有一個具兩個結合點的 $p$ 頁黎曼球面，而在球面上，這兩點的地位，完全沒有輕重的區別。 所以和關於 0 點所說的一樣，我們也將 ∞ 點作爲一個點，也屬於這球面，並

❶第二頁內的點所負荷的值比較第一頁的多一個因子 $e^{\frac{2\pi i}{p}}$，第三頁內的多一個因子 $e^{2\frac{2\pi i}{p}}$，第 $p$ 頁內的多一個因子 $e^{(p-1)\frac{2\pi i}{p}}$，故再進一步時，卽多一個因子 $e^{p\cdot\frac{2\pi i}{p}}=1$，也就是和最初的全無差別。

且令他爲值$\infty$的荷點。

這樣即可看出，每一個複數 $w$（包括 0 與$\infty$）聯繫在這面上一次，並且祗有一次。

對於這個事實，我們可以利用以下的方法，得一個更生動的印象：我們研究一個函數 $w=f(z)$ 時，一向是將點 $z$ 作爲數 $w$ 的荷點。現在，在 $z$ 平面（或球面）之外，我們再取一個 $w$ 平面（或球面），在他上面，將點 $w=f(z)$ 標出來。我們簡稱之爲 $z$ 對於變換函數❶ $f(z)$ 的象（*Bild*）。若將 $z$ 在他的球面上綿續的移動〔自然是在 $w=f(z)$ 的存在域內〕，則 $w$ 在他的球面上也綿續的移動。因此我們稱這變換的本身爲綿續的，並且由於這個綿續的變換在 $z$ 平面或 $z$ 球面上一切的點，線，圖形，在 $w$ 平面上都有一個相當的"象"。這變換的性質我們必須視作這函數的特徵。❷

若利用這個解釋，最後的結果也可敍述如下：由於 $w=\sqrt[p]{z}$ 屬於這函數的 $p$ 頁黎曼球面即被一個一一對應的變換，變換到單層的（亦即一頁的）$w$ 球面。每個圖形上的每一點，相當於其他圖形上的一個唯一的點。❸

3. $w=\log z$ 的黎曼面的構造，完全與 $w=\sqrt[p]{z}$ 的相彷，因爲這裏也祗有 0 與$\infty$爲奇點。我們例如又從在 $+1$ 正規的主值開始，也就是我們從函數元

$$(z-1)-\frac{(z-1)^2}{2}+\frac{(z-1)^3}{3}-+\cdots\cdots$$

開始。這函數元，在沿負實軸剖開的 $z$ 平面裏，可以（參看卷一 § 28, 1）毫無阻礙的並且單值的向外開拓。如此，我們即得一個在這個域內單值與正規的函數，亦即 $\log z$ 的主值（*Hauptwert*）或主支（*Hauptzweig*）。

超過剖開的邊界，我們可以繼續開拓。這樣，則如在 $\sqrt[p]{z}$ 之款，得一個第二頁（我們想像他是位於第一頁之上）；他上面的點所負荷的值，比下面一頁的增加 $2\pi i$。若我們開拓到第三頁，則相同的情形發生，餘類推。像在 $\sqrt[p]{z}$ 之款那樣，這個面逐步長成，但在這裏，他是永無止境的，因爲每一頁所負荷的值，比緊接在他下面一頁的增加 $2\pi i$。因此我們想像，在每一頁的上面還有一頁，而向上的開拓於此完成，就是說，在這方面，此外不可能再有其他的開拓。

現在還有第一頁下面的邊界是懸的，而我們可以超過他（向上半平面）開拓。我們想像所得的新頁是位於第一頁之下；他所負荷的值，比上面一頁的（主）值減少 $2\pi i$，——故他所負荷的總是新的值。而從這個，向下的開拓永遠可能，故所得的負荷新值的新頁，也永無止境。因爲每一頁負荷的值，比與他緊接着的上面一頁的，減少 $2\pi i$。因此，我們想像，在每一頁之下還有一頁，於是這面的構造即告完成，這個面現在向任何方面都不能擴充。

---

❶"決定變換之函數"的簡稱——譯者。

❷此處不能更詳細的討論這種變換的性質——他的綿續性是早已顯然的——，雖然這個對於函數論整個的發展是如此的重要。屬於這叢書的 Nr. 768. *L. Bieberbach*, Einführung in die Konforme Abbildung（第二版，1927）一書的內容，就是研究這種變換。

❸若我們想像，$z$ 面上的每一點 $z$，與他在 $w$ 面的象 $w$ 之間，用一根看不見的線相聯繫，則這些線的全部，就表示我們在卷一第 78 頁所說的"內在的聯繫"。

現在，$w=\log z$ 的整個的值域在這個無盡多頁的黎曼面上，完全單值的鋪滿，在他上面，$\log z$ 是他的位的一個單值函數。

若將同樣的辦法施於球面上——我們要想像有無盡多個重重疊繞的球面——，則我們立刻看出來，點$\infty$(北極點)與點 0 的性質完全相同。於是我們有一個具兩個無盡高級的結合點之無盡多頁的黎曼球面。一個如此的無盡多頁結合點，我們總不將他們作爲屬於面，並且總不會他爲函數值的荷點。

關於 $\log z$ 的值域在我們這個面上的分佈，我們還有幾句話要說：第一頁所負荷的，是 $\log z=\int_1^z\frac{d\zeta}{\zeta}$ 的主值，若取整個含在沿負實軸剖開的平面內的——但任意的——一個路爲積分路，則所得的積分值爲這個主值。要由 $+1$ 到 $z$，我們例如可以先沿正實軸到點 $|z|$，再從 $|z|$ 沿以 0 爲心，$|z|$ 爲半徑的圓，經過最短的路到 $z$，如此則得

$$\log z=\int_1^{|z|}\frac{d\zeta}{\zeta}+\int_{|z|}^{z}\frac{d\zeta}{\zeta}=\int_1^{|z|}\frac{dx}{x}+i\int_0^{\operatorname{arc} z}d\phi$$
$$=\operatorname{Log}|z|+i\operatorname{arc} z,$$

其中 $\operatorname{Log}|z|$ 代表正數 $|z|$ 的實對數，而

$$-\pi<\operatorname{arc} z\leqq+\pi \text{ ❶}$$

($\log z$ 的多值性，照此看來，是由於一個複數的角的多值性)。$w=\log z$ 的主值，適合條件

$$-\pi<J(w)\leqq+\pi,$$

而點 $w$ 就位於這不等式在 $w$ 平面上所確定的幅內，這幅的寬爲 $2\pi$，其位置與實軸對稱。又從 $z=e^w$，可知這幅內每一點 $w$ 爲一個異於 0 的 $z$ 的象。故從那個剖開的平面，除 0 點外，到上面所說的 $w$ 平面內的幅，函數 $\log z$ 的主值決定一個一一對應的變換。別的頁上所負荷的，其餘的 $\log z$ 的值，與主值祇差一個如 $2k\pi i$ 狀的一項，其中 $k$ 爲 $\gtrless 0$ 的整數。所以與他們對應的點 $w$，在不等式

$$(2k-1)\pi<J(z)\leqq(2k+1)\pi, \qquad (k=\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$$

所確定的幅內。這些幅與第一幅嚴密的相接，而將整個 $w$ 平面恰好填滿一次。❷ 所以我們可以說：由於 $w=\log z$，從那個在 0 與$\infty$具有兩個(不作爲屬於面的)結合點的無盡多頁的黎曼 $z$ 平面，到單頁的 $w$ 平面，函數 $w=\log z$ 決定一個一一對應(而且綿續)的變換；或者：每一個複數($\neq\infty$)聯繫於 $\log z$ 的黎曼面上唯一的一個位。

在第 160 頁的例裏所舉出的問題，現在可以很容易的解決：

1. $\log H(z)$ 可以完全唯一的確定如下：選擇 $\log H(0)$ 者，就是選擇 log 面上一頁的 $H(0)$ 點爲始點，這一頁是任意選擇的，但既選定之後，即作爲固定不變。若我們從 0 沿兩條路 $L_1$，$L_2$ 到一點 $z_0$，則函數 $H$ 的值也從 $H(0)$ 沿兩條路到 $H(z_0)$，但因 $H(z)\neq0$，這兩條路

❶ 將剖線(Schnitt)上面的一個邊界($\operatorname{arc} z=+\pi$)，除 0 點外，作爲屬於剖開的平面，於是每一個 $z\neq0$ 恰好算在這剖開的平面上一次。

❷ 這些顯然就是函數 $e^w$ 的週期幅——由此可知 $w=\log z$ 這個加上一個任意的 $2k\pi i$ 項的多值性，根本就是他的反函數 $z=e^w$ 的單週期性的反現象，因爲 $z=e^w$ 有原週期 $2\pi i$。

既不經過 0 又不能將 0 包圍在裏面。所以他們把我們引到 log 面的完全固定的一頁上完全固定的同一點。在這一點，所聯繫的函數值 $\log H(z_0)$ 是唯一的。

2. $\displaystyle {}^{(L)}\int_a^b \frac{dz}{z} = \log b - \log a$ 的值，現在可以如此解釋：我們在任意一頁上的 $a$ 點開始(就是說，我們任意選擇一個 $\log a$)，在 log 面上作路 $L$。因這條路不經過 0，所以他把我們引到一個完全固定的頁上的 $b$ 點，在這裏，所聯繫的唯一的函數值，就是所求的 $\log b$ 的值。

3. 這裏一切也可唯一的解決，祇要當 $z$ 沿 $C$ 走時，我們將 $f(z)$ 所走的路在 log 面上畫出來。——我們還要證以下的定理，作爲上文結果的應用。

**定理：** 設函數 $f(z)$ 與 $\phi(z)$ 在單連通域 $G$ 內爲正規的。設 $C$ 爲在 $G$ 內的一個閉路，$f(z)$ 在 $C$ 上異於 0，而且以絕對值言，大於 $\phi(z)$，即：

$$\text{在 } C \text{ 上,}\qquad f(z)\neq 0,\qquad \text{而且 } |f(z)| > |\phi(z)|.$$

這樣，則函數 $f(z)$ 與 $f(z)+\phi(z)$，在 $C$ 所包圍的，$G$ 的子域內，有同樣多的零點。

證：根據卷一，§ 35，定理 1，我們祇須證明

$$ {}^{(C)}\int\left[\frac{f'}{f}-\frac{f'+\phi'}{f+\phi}\right]dz = {}^{(C)}\int\frac{\left(1+\frac{\phi}{f}\right)'}{\left(1+\frac{\phi}{f}\right)}dz = 0.$$

但後一積分 $=\left[\log\left(1+\frac{\phi}{f}\right)\right]_{(C)}$，就是說，等於當 $z$ 在 $C$ 上依正向走時，$\log\left(1+\frac{\phi}{f}\right)$ 的始值與末值之差。但若 $z$ 在 $C$ 上走，則因 $\left|\frac{\phi}{f}\right|<1$，$1+\frac{\phi}{f}$ 的值總在右半平面內(並且還是在以 $+1$ 爲心，以 1 爲半徑的圓內)。但在那裏那個(更精確些，每一個)對數的值，是完全單值的，所以這個差是等於 0，證畢。

習題：1. 試計算積分

$$ {}^{(L)}\int_1^i \frac{dz}{\sqrt[p]{z}},\qquad {}^{(L)}\int_1^i \log z\, dz,$$

其中 $L$ 代表一個么圓的第一象限，位於各該黎曼面的最初一頁。

2. 先作函數 $\sqrt[3]{z}$ 的黎曼面。若在這面上，(在 $p$ 個不同的點 $+1$ 中)，以一個固定的爲起點，沿任意的路走到(在 $p$ 個不同的點 $z_0$ 中的)一個固定的點 $z_0\neq 0$，則積分 $\displaystyle\int_1^{z_0}\frac{dz}{\sqrt[3]{z}}$ 可取如何的值？在相仿情形之下，積分 $\displaystyle\int_1^{z_0}\log z\,dz$ 又可取如何的值？

3. 利用 § 11 中最後一個定理，試證代數基本定理。爲此目的可設

$$\phi(z)=a_0+a_1z+\cdots\cdots+a_{n-1}z^{n-1},\qquad f(z)=a_nz^n,\qquad (a_n\neq 0),$$

而選一個有充分大的半徑的圓爲 $C$。

## § 12. 函數 $w=\sqrt{(z-a_1)(z-a_1)\cdots\cdots(z-a_k)}$ 的黎曼面

函數 $w=\sqrt{z-a}$ ($a$ 是任意的)的情形，與 $w=\sqrt{z}$ 完全相仿。此處的二頁結合點不是原

點而是 $a$ 點. 在球面上,這種差別更不重要,因爲現在所得的也是一個具兩個結合點的二頁黎曼球面,和以前一樣,祇是以前在南極的結合點,現在到了 $a$;——此外的一切,前節的討論都可適用無須更改。

從這個面,我們祇要稍加變動,即可得函數 $w=\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)}$ 的黎曼面,其中 $a_1$, $a_2$ 除適合條件 $a_1 \neq a_2$ 外,爲兩個任意的複數。我們又得一個二頁黎曼球面,在 $a_1$ 與 $a_2$ 兩點,各有一個結合點。這裏,$\infty$點與任何一個異於 $a_1$ 及 $a_2$ 的點沒有分別,就是說兩頁在那點經過時,一上一下,各不相關。

這一切的事實,我們要根據 §10 的普遍討論,很直接的推出:

$$w=\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)}$$

在一切異於 $a_1$ 與 $a_2$ 的點是正規的。若 $z_0$ 爲如此一點,則設 $\sqrt{z_0-a_1}$ 與 $\sqrt{z_0-a_2}$ 爲各該平方根兩值中任意的一個,但在下文內再不更改。於是利用第 162 頁所用過的二項級數,從在 $z_0$ 正規的兩函數元

$$f_\lambda(z)=\sqrt{z_0-a_\lambda}\left(1+\frac{z-z_0}{z_0-a_\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (\lambda=1,\ 2),$$

得

$$f=f_1\cdot f_2=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots\cdots,$$

這是在 $z_0$ 的鄰近收斂的一個 $w$ 的展開式,$f$ 構成我們函數的一元。我們要從這個元出發.構造函數的黎曼面:祇要避免 $a_1$ 與 $a_2$,我們可以毫無阻礙的向整個平面開拓。由於 $w=\sqrt{z-a_1}\cdot\sqrt{z-a_2}$,在一個點 $z$,我們總得同一個函數值,除非我們沿兩條路從 $z_0$ 到 $z$,而這兩條路包括 $a_\lambda$ 兩點之一。所以,若我們將這平面從 $a_1$ 經過 $a_2$ 到$\infty$剖開,而開拓的時候,永不超過這條線,❶ 則經過我們的開拓,相當於這剖開的平面上每一點,有一個唯一的函數值,這平面負荷我們函數的一支。❷ 現在超過剖線的兩邊,還可以向外開拓;我們祇是要問,這樣所得是否是新的函數值。若我們僅有函數$\sqrt{z-a_1}$ 的元 $f_1(z)$,則祇須作剖線從 $a_1$ 到$\infty$(相當於 §11 內沿負實軸的剖線),並且知道超過這剖線,時 $\sqrt{z-a_1}$ 即乘上一個因子 $(-1)$. 對於函數$\sqrt{z-a_2}$ 的元 $f_2(z)$,若作剖線從 $a_2$ 到$\infty$,則相仿的話也可適用。因此,我們剛才從 $a_1$ 過 $a_2$ 到$\infty$的剖線,對於兩個根都可適用;而我們發現:若超過剖線從 $a_1$ 到 $a_2$ 的(並且方向也是從 $a_1$ 到 $a_2$ 的)一段開拓;則因 $f_1$ 變成 $-f_1$, $f_2$ 不變,已經附有函數值的域,又得到新的函數值,新值與舊值,符號相反。於是得一個第二頁——我們想像他是位於第一頁之上——附有另一個(符號相反的)函數值。簡單的說,他與第一頁沿上面所說的剖線線段交叉的相連,每超過這線段,即從一頁到另一頁。在第二頁上我們要想像從 $a_0$ 到$\infty$也是剖開的。

但現在兩頁在沿 $a_2$ 到$\infty$都是剖開的,超過這線開拓還是可能,若這樣實行開拓,則以上所說的兩個根都乘上一個$(-1)$,而 $w$ 却不變,就是說,超過這線並不得新的函數值,所以沿這條線每一頁,應該自己又連起來。於是一切的懸界都已消失而開拓不再可能:我們又得一個具有

❶剖開的曲線可以完全任意,祇要自己不相交,並須避免經過 $z_0$ 點。

❷此處我們利用以下顯然的定理:若(單值的)$f(z)=f_1(z)\cdot f_2(z)$,又若 $f_1$ 與 $f_2$ 可以開拓,則他們的開拓的積,是 $f(z)$ 本身的一個開拓。

兩個結合點的二頁黎曼面，如上文所描寫的那樣。

在這面上，$\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)}$為位的單值函數。若將點 $a_1$ 與 $a_2$（每個祇算一次）仍作爲屬於面，而令他們爲值 0 的荷點，更令兩頁上的$\infty$點（兩頁在那裏各不相關的經過一次）爲值$\infty$的荷點，卽有以下的事實：每一個複數 $w$（連$\infty$在內）恰好與黎曼面上兩點相聯繫。

現在，以上的討論可以毫無困難的擴充到函數

$$w=\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)\cdots\cdots(z-a_k)},$$

其中 $k>2$，$a_1, a_2, \cdots\cdots a_k$ 代表任意的，但各不相同的複數：我們祇須從 $a_1$ 過 $a_2$，$a_3\cdots\cdots$，到$\infty$，作一條自己不相交的剖線，❶並且一如 $k=1$ 與 2 之款，我們可以討論這函數所劈開的 $k$ 個因子$\sqrt{z-a_\lambda}$，$(\lambda=1, 2\cdots\cdots k)$。這樣我們發現，在 $a_1$ 與 $a_2$，$a_3$ 與 $a_4$，$\cdots\cdots$之間，兩頁是交叉的相連，但在 $a_2$ 與 $a_3$，$a_4$ 與 $a_5\cdots\cdots$之間，每頁仍是本身相連。無論 $k$ 爲奇的或偶的（例如 $=2r-1$ 或 $2r$），我們都得一個二頁黎曼面，具有偶數 $2r$ 個二頁結合點，他們是在 $a_\lambda$ 上與——當 $k$ 爲奇數時——在$\infty$上。❷

$k=3$ 與 $k=4$ 之款特別重要，在這兩款，我們都得一個具四個結合點的二頁黎曼面。

因爲，從上文所說，這兩個黎曼面與當 $k=1$ 及 $k=2$ 所得的，具有兩個結合點的面，似乎完全相仿，所以我們値得將其中一個基本的差別提出來：從具兩個結合點的二頁球面到單頁球面的變換是單值與綿續的，其逆變換也是如此。由此可知——直接考察也可推知——每一個在這面上的閉曲線，❸將這面分成兩部分，而這兩部分被這曲線完全隔離，——如在單頁球面上那樣。表示這事實，習慣上我們說，這兩個面有相同的欵數（*Geschlecht*）而在這裏所討論之款，欵數是 0。

具有 4 個結合點的二頁球面（卽當 $k=3$ 與 $k=4$ 時所得的）在這方面的性質就完全不同：若我們在上面的一頁畫一個完全含在這頁內而將 $a_1$ 與 $a_2$ 包圍（但祇包圍這兩個結合點）的閉曲線 $c$（參看圖 6），則在這頁上的兩點 $z_0$ 與 $z_1$，若一在 $C$ 內部一在 $C$ 外部，仍可以用一條不越過 $C$ 的路相連。這個事實我們從圖 6 內可以看出，這個路在上面一頁的部分用實線表示，在下面一頁的部分用虛線表示；兩頁相交的剖線用點點表示。❹ 所以我們給這個面另外一個欵數，令其欵數爲 1。普遍的，對於 $k=2r-1$ 與 $k=2r$ 所得的，具有 $2r$ 個結合點的面，我們令其欵數爲$(r-1)$。

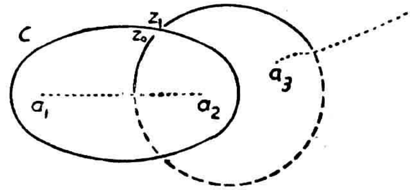

圖 6

❶爲便利起見，$a_\lambda$ 的次序可以更換。

❷當 $k$ 爲偶數時，$\infty$爲普通的一點，就是說，兩頁經過他的時候是各不相關的，故在這面聯繫兩次，——如我們在 $k=2$ 之款所詳細描寫的那樣。

❸就是說，這曲線從某一頁內的某一點 $z_0$ 出發，又回到這頁上的這一點。

❹從 $a_3$ 出發的剖線到$\infty$或到 $a_4$，視 $k=3$ 或 $=4$ 而定。

我們祗能泛泛的指出，這種連通性❶關係重大，例如積分

$$z=\int_0^w \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}} \qquad 與 \qquad z=\int_\infty^w \frac{dw}{\sqrt{4w^3-g_2w-g_3}},$$

或更明顯些，他們的反函數

$$w=\sin z \qquad 與 \qquad w=\wp(z)$$

之所以有迥然不同的性質（這兩函數一個是單週期的一個是雙週期的），其最深切的原因，是 $\sqrt{1-w^2}$ 與 $\sqrt{4w^3-g_2w-g_3}$❷的黎曼面，有根本不同的連通性。

習題：1. 試證第 106 頁底註 2 所述的定理

2. 若積分 $\int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ 所取的路是，從兩個 0 點中的某一個出發避免 $\pm 1$ 兩點，任意的到兩個 $z_0(\neq \pm 1)$ 點中的某一個，則此積分可得如何的值？ 對於 $z_0=\pm 1$ 與 $z_0=\infty$，此積分仍有意義否？ 若然則其值爲何？

---

❶粗糙的說，連通性即指缺數——譯者。

❷爲與 § 8，§ 9 一致起見，此處我們不得不將字母 $z$ 與 $w$ 對換——這兩個根，除一個常數因子外，顯然屬於所討論的 $k=2$ 與 3 兩款

# 第五章　代數函數

## §13. 問題之敍述

至今所討論的多值函數的例，除 $\log z$ 外，都是代數函數(*algebraische Funktionen*)．我們如此稱他們，因爲他們是從解一個代數方程式而產生的，就是解一個具形狀 $G(z,w)=0$ 的方程式，其中 $G$ 代表 $z$ 與 $w$ 的一個有理整函數．若想像將這方程式按 $w$ 的冪的大小排列，則他又可寫作

$$g_0(z)+g_1(z)\cdot w+g_2(z)\cdot w^2+\cdots\cdots+g_m(z)\cdot w^m=0,$$

其中的係數 $g_\lambda(z)$ 現在代表單含變數 $z$ 的有理整函數．

現在，若有一個函數元 $w=f(z)$，當代入上述的方程式內時，則此方程式恆適合，就是說，對於某一個域內一切的 $z$，$G(z,f(z))=0$，則我們說，$f(z)$ 爲 $G(z,w)=0$ 所確定的代數函數之一元．若 $m\leqq 4$，則我們可以解這方程式而得這函數的一個陽式，然後加以研究．若 $m>4$，則這個不再可能，是爲已知的事實．這樣，即發生一個問題：一個如此的方程式，根本是否相仿的確定一個函數，並且他是否祇確定一個，❶ ——而這函數的本性又如何．

我們先可假設 $G(z,w)=0$ 是不可約的 (*irreduzibel*)，就是說，不可劈成兩個同類的有理整函數的乘積．❷　因一個具形狀

$$G_1(z,w)\cdot G_2(z,w)=0$$

的方程式的討論，顯然可完全代以方程式 $G_1=0$ 與 $G_2=0$ 分別的討論．

現在，若想像以某一個定值 $z_0$ 代替 $z$，則我們得一個含 $w$ 的方程式，其係數都是常數，這方程式普通有 $m$ 個不同的根 $w_0^{(1)}, w_0^{(2)},\cdots\cdots w_0^{(m)}$．祇當以下兩種情形發生時，才有例外：

---

❶一個方程式可以確定多個函數之一個簡單的例是 $w^2-z^2=0$，這方程式顯然產生兩個函數．

❷在兩個變數的款這個概念是絕對的，但在一個變數的款，則其係數的數的特性必先假定，然後這概念才有固定的意義．

a)　$g_m(z_0)=0$，因此時這方程式的冪卽減低，

b)　$G(z_0, w)=0$ 有多重的根.

以下從代數裏得來的事實，我們必須作爲已知：b)款之發生，是當方程式的係數的某一個有理整函數，所謂判別式（*Diskriminante*）等於 0 之時，而且祇當此時；此外，這個判別式，在 $G(z,w)$ 不可約的假設之下，不恆等於 0，而是一個具有一定的級的有理整函數. 這判別式我們用 $D(z)$ 代表. 無論如何，在 a)，b) 內所述的例外，祇能當 $z$ 取有盡多個特殊的值時發生，這些值我們用 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_r$ 代表，而稱之爲"阨點"（Kritische stelle），而在討論中，暫時把他們除外. 於是我們就可以說：對於每一個異於阨點的 $z=z_0$，方程式 $G(z_0,w)=0$ 恆恰好有 $m$ 個不同的根 $w_0^{(1)},\cdots\cdots w_0^{(m)}$，我們令 $z_0$ 爲他們的荷點. 於是我們的目標是

**定理：** 對於〔除去各 $a_\lambda$ 點的"去點"（*punktierte*）的〕$z$ 平面內的點，方程式 $G(z,w)=0$ 所決定的 $m$ 重值域，是一個唯一的 $m$ 值解析函數 $w=F(z)$ 的值域. 或簡單些：在去點的平面內，$G(z, w)=0$ 確定唯一的一個正規 $m$ 值函數 $w=F(z)$.

這樣確定的函數，就是所謂的**代數函數**.

在下兩節內，我們要證明這個構成代數函數論的基礎的定理，並且還要討論 $F(z)$ 在阨點的性質，在那裏，我們將$\infty$也算在阨點之內.

## § 14. 根在小處❶的解析特性

設 $z_0$ 爲一點，在那裏我們暫時祇須假設 $g_m(z_0)\neq 0$. 於是無論如何 $G(z_0, w)=0$ 都有 $m$ 個根，但其中可有重根. 設 $w_0$ 爲一個 $\alpha$ 重的根，$1\leqq\alpha\leqq m$，則有以下的

根的綿續性定理： 若以 $w_0$ 爲圓心，作一個具充分小的半徑 $\epsilon>0$ 的圓 $K_\epsilon$，則以 $z_0$ 爲圓心，可以作一個具半徑 $\delta=\delta(\varepsilon)$ 的小圓，使對於 $K_\delta$ 中每一個 $z_1\neq z_0$，方程式 $G(z, w)=0$ 在 $K_\epsilon$ 內恰有 $\alpha$ 個不同的根.❷

證： 令 $w=(w-w_0)+w_0$，更將 $G(z, w)$ 按 $(w-w_0)$ 的冪的大小排列，則得

---

❶德文 im Klein 英文 in the small 的暫譯——譯者.

❷這定理同時使我們對於根的多重性得一個深刻的認識，因爲從這定理我們知道：若我們將一個方程式的係數稍稍變更，則這方程式的一個 $\alpha$ 重根卽分裂成 $\alpha$ 個單根.

$$G(z, w)=\bar{g}_0(z)+\bar{g}_1(z)\cdot(w-w_0)+\cdots\cdots+\bar{g}_m(z)\cdot(w-w_0)^m,$$

而其中新的係數適合

$$\bar{g}_0(z_0)=\bar{g}_1(z_0)=\cdots\cdots=\bar{g}_{\alpha-1}(z_0)=0, \quad \bar{g}_\alpha(z_0)\neq 0$$

據此，我們可以先繞 $z_0$ 作一個小圓 $K_{\delta'}$，具半徑 $\delta'$，使在 $K_{\delta'}$ 的內部及邊界上(若 $\alpha>1$，則除去圓心 $z_0$)，$D(z)$ 與 $\bar{g}_\alpha(z)$ 總異於 0. 於是我們令

$$G(z, w)=\bar{g}_\alpha(z)\cdot(w-w_0)^\alpha\cdot[1+A+B],$$

其中 $A$, $B$ 依序代表❶

$$A=A(z,w)=\frac{\bar{g}_{\alpha+1}}{\bar{g}_\alpha}\cdot(w-w_0)+\cdots\cdots+\frac{\bar{g}_m}{\bar{g}_\alpha}(w-w_0)^{m-\alpha},$$

$$B=B(z,w)=\frac{\bar{g}_{\alpha-1}}{\bar{g}_\alpha}\cdot\frac{1}{w-w_0}+\cdots\cdots+\frac{\bar{g}_0}{\bar{g}_\alpha}\cdot\frac{1}{(w-w_0)^\alpha}.$$

今設對於一切在 $K_{\delta'}$ 內的 $z$，$|\bar{g}_\alpha(z)|$ 的下界爲 $c>0$ (這下界是 $>0$，因爲 $\bar{g}_\alpha(z)$ 在 $K_{\delta'}$ 的內部及邊界上都異於 0)，並設 $M$ 爲在 $K_{\delta'}$ 內一切 $|\bar{g}_\lambda(z)|$ 的一個上欄. 於是若先取任意的 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$，則對於一切在 $K_{\delta'}$ 內的 $z$，以及一切在以 $\varepsilon$ 爲半徑，$w_0$ 爲圓心的圓 $K_\varepsilon$ 內的 $w$,

$$|A|<\frac{M\cdot\varepsilon}{c}(1+\varepsilon+\cdots\cdots+\varepsilon^{m-\alpha-1})<2\frac{M}{c}\cdot\varepsilon$$

現在我們想像選擇 $\varepsilon$ 又 $<\frac{c}{4M}$，但除此之外，$\varepsilon$ 爲完全任意的，但一經選定之後，以下就固定不變，則對於一切在 $K_{\delta'}$ 內的 $z$，與一切在 $K_\varepsilon$ 內的 $w$,

$$|A|=|A(z,w)|<\tfrac{1}{2}$$

恆爲正確.

現在將 $\delta<\delta'$ 選得如此的小，使在以 $z_0$ 爲心，$\delta$ 爲半徑的圓內，絕對值 $|\bar{g}_0(z)|$, $|\bar{g}_1(z)|$, ……, $|\bar{g}_{\alpha-1}(z)|$ 都小於

$$\mu=\frac{c}{2\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{\varepsilon^\alpha}\right)},$$

這個現在是一個固定的值. (這是可能的，因爲所有這些係數在點 $z_0$ 都等於 0). 於是對於一切在 $K_\delta$ 的 $z$ 與在 $K_\varepsilon$ 邊界上的 $w$，亦即對於適合

❶在 $\alpha=1$ 與 $\alpha=m$ 之款，這個應作何解是顯然的.

條件

$$|z-z_0|\leqq\delta \quad 與 \quad |w-w_0|\overset{(注意!)}{=}\varepsilon$$

的一切 $z$ 與 $w$,

$$|B|=|B(z,w)|<\mu\cdot\frac{1}{c}\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{\varepsilon^\alpha}\right)=\frac{1}{2}$$

恆爲正確.

現在如此所決定的圓 $K_\delta$ 與 $K_\epsilon$ 具有定理中所需的性質. 因爲 $A$ 與 $B$ 的絕對值此時旣 $<\frac{1}{2}$,若 $z_1$ 爲 $K_\delta$ 內任何一點,則對於一切在 $K_\epsilon$ 邊界上的 $w$,

$$|\bar{g}_\alpha(z_1)\cdot(w-w_0)^\alpha|>|\bar{g}_\alpha(z_1)\cdot(w-w_0)^\alpha[A(z_1,w)+B(z_1,w)]|,$$

故若將第 104 頁的定理應用於含在兩個絕對值號內的 $w$(!)的函數與圓周 $K_\epsilon$,卽知在圓 $K_\epsilon$ 內, $G(z_1,w)$ 零點的數,恰與左端函數 $\bar{g}_\alpha(z_1)(w-w_0)^\alpha$ 的相同,也就是 $G(z,w)$ 在 $K_\epsilon$ 內恰有 $\alpha$ 個零點. 又因點 $z_1$ 也在 $K_\delta'$ 內,故 $D(z_1)\neq 0$, 所以這 $\alpha$ 個零點必各不相同.

現在更假設在 $z_0$ 點, $D(z_0)\neq 0$,也就是假設 $\alpha=1$. 於是對於每一個 $K_\delta$ 內的 $z=z_1$, $G(z_1,w)=0$ 在 $K_\epsilon$ 內有一個唯一的根. 故這個根是 $z$ 的一個單值綿續函數 $f_1(z)$. 關於這函數,我們有

**根的可微分性定理:** $w=f_1(z)$ 在 $K_\delta$ 內爲 $z$ 的一個正規函數.

證: 設 $z_1$ 爲在 $K_\delta$ 內部的任意一點, $z_1+\zeta$ 爲 $z_1$ 的一個鄰點,但同時也在 $K_\delta$ 內. 又設 $f_1(z_1)=w_1$, $f_1(z_1+\zeta)=w_1+\omega$,則除 $G(z_1,w_1)=0$ 外,又有 $G(z_1+\zeta,w_1+\omega)=0$,並且——由於函數 $f_1(z)$ 的綿續性——$\zeta\to 0$ 時 $\omega\to 0$. 現在我們所要證的,簡言之是:值限

$$\lim_{\zeta\to 0}\frac{f_1(z_1+\zeta)-f_1(z_1)}{\zeta}=\lim_{\zeta\to 0}\frac{\omega}{\zeta}$$

存在. 但若我們將 $G(z_1+\zeta,w_1+\omega)$ 按 $\zeta$ 與 $\omega$ 的冪的大小排列,則 $G(z_1+\zeta,w_1+\omega)=G(z_1,w_1)+\zeta\cdot G_z'(z_1,w_1)+\omega\cdot G_w'(z_1,w_1)+$某些其他的項,而未寫出的各項,至少都含有因子 $\zeta^2$, $\zeta\omega$ 或 $\omega^2$. 這裏,與平常習慣一樣, $G_z'(z_1,w_1)$ 與 $G_w'(z_1,w_1)$ 依序代表 $G(z,w)$ 在點 $(z_1,w_1)$ 對於 $z$ 與 $w$ 單獨所取的(偏)微分. 因左端與右端的第一項$=0$,我們可以寫

$$0=\zeta[G_z'(z_1,w_1)+P\cdot\zeta+Q\cdot\omega]+\omega[G_w'(z_1,w_1)+R\cdot\omega],$$

其中 $P, Q, R$ 表示 $\zeta$ 與 $\omega$ 的某些有理整函數的縮寫. 今因 $w_1$ 爲 $G(z_1, w)=0$ 的一個單根,故在上式內, $G_w'(z_1,w_1)\neq 0$, 而我們可以想像 $\zeta$ 而因此 $\omega$, 已經是如此的小,使

$$|R\cdot\omega|<|G_w'(z_1, w_1)|,$$

於是在最後一個方程式中,第二個方括就$\neq 0$,而由此卽可推知

$$f_1'(z_1)=\lim_{\zeta\to 0}\frac{\omega}{\zeta}\text{ 存在, 且}=-\frac{G_z'(z_1, w_1)}{G_w'(z_1,w_1)},$$

於是定理已經證明.

## §15. 代數函數

從前節所講的定理,我們得到以下的結果:相當於平面內每一個異於阨點的點 $z_0$, 有 $m$ 個不同的函數値, 在每個以如此一點爲圓心的充分小的圓內——簡言之卽"在小處"——這些値可以看作 $m$ 個完全獨立的單値正規函數元. 這些函數元我們用

$$f_1(z;\,z_0),\qquad f_2(z;\,z_0),\cdots\cdots,\qquad f_m(z;\,z_0)$$

來表示,他們可以作爲是寫成以 $z_0$ 爲中心的冪級數.

其次,我們須證明,一切這些元是屬於同一個 $m$ 値解析函數.

**1.** 我們先可看出,每一個元可以毫無阻礙的在這個去點的平面上開拓. 因爲,若 $K_0$ 爲任意一個圓,其中我們的一個函數元,例如 $f_1(z;\,z_0)$, 是正規的,又若 $z_1$ 爲 $K_0$ 邊界上一個異於阨點的點,則——由於以上 $m$ 個函數元在小處的唯一性——必恰好有一個元 $f_\mu(z;z_1)$, $(\mu=1,2,\cdots\cdots m)$, 在 $z_1$ 的隣域含在 $K_0$ 內的部分, 與 $f_1(z;\,z_0)$ 相合.——於是已證明 $f_1(z;\,z_0)$ 可以開拓.

**2.** 現在想像,用一個簡單的, 自己不相交的線段鍊, ❶ 將阨點 $a_1, a_2,\cdots\cdots a_r$ 依任意的次序一一相連,最後並連至$\infty$點,再將平面沿 $L$ 剖開(參看圖 7). 於是每一個元 $f_\mu(z;\,z_0)$可以毫無阻礙的在這剖開的平面——我們將稱此單連通域爲$E$——上開拓. 所以每一個元產生一個在$E$

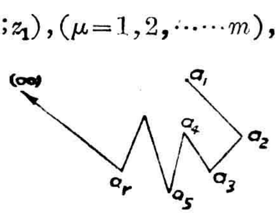

圖 7

❶卽若干個線段所接成的曲線——譯者.

內單值與正規的函數;❶這些函數我們依序以 $F_1(z)$, $F_2(z)$, $\cdots\cdots F_m(z)$ 代表. 現在這些函數顯然與出發點 $z_0$ 的選擇無關,他們'在大處'❷構成被 $E'$ 所負荷的全部 $m$ 重值域,這 $m$ 重值域於是被分成 $m$ 個獨立的,在 $E$ 內單值與正規的函數,並且若以這些函數代 $w$, 對於每一個在 $E'$ 內的 $z$, 代數方程式 $G(z,w)=0$ 即可適合. 現在所有我們還須證明的是:這 $m$ 個函數,都可以利用超過 $E'$ 的邊界 $L$ 的開拓,而由此得彼,——簡言之,他們是同一的解析函數的 $m$ 個支. 爲證明這點,我們現在要研究.

**3.** 函數在各阨點與在∞點的性質:設 $a$ 爲一個阨點, $K$ 爲一個以 $a$ 爲圓心的圓周,而 $K$ 不再包圍或含有其他的阨點, 又設 $z_0$ 爲屬於此圓周的一點. 於是我們可以將 $m$ 個元 $f_\mu(z;z_0)$ 中的每一個, 沿着 $K$(例如依正向)開拓. 在回到點 $z_0$ 時,每一個這樣的元——還是由於這 $m$ 個元在小處的唯一性——必變成他們中固定的一個(但普通變成另一個)——並且兩個不同的元,永不會變成同一個,因爲如此則以相反的開拓時,這個元必將變成不同的兩個. 簡言之,開拓之後,這 $m$ 個元經過一個排列 (*Permutation*). 現在假設我們選擇他們的次序,使 $f_1$ 變成 $f_2$, $f_2$ 變成 $f_3,\cdots\cdots,f_{p-1}$ 變成 $f_p$; 而 $f_p$ 又變成 $f_1$ $(1\leqq p\leqq m)$,就是說,使前 $p$ 個元構成一個排列循環(*zyktus*).❸

這樣,在繞 $a$ 點 $p$ 次開拓之後,特殊的 $f_1(z;z_0)$ 就變成自己,於是 $F_1(z)$ 也是一樣. 若根據這個事實,令

$$(z-a)=(z')^p, \qquad F_1(z)=F_1(z'^p+a)=\phi_1(z'),$$

則 $\phi_1(z')$ 在 $z'=0$ 的鄰域內,除 $z'$ 本身外,不但是正規的,而且是單值的. 因爲當變數 $z'$ 繞原點一次(也就是他的角綿續的增加 $2\pi$)時, $(z')^p$ 繞原點,或即 $z$ 繞 $a$ 點恰好 $p$ 次,因爲 $z-a$ 的角增加了 $2p\pi$. 所以 $\phi_1(z')$

❶此處我們已暗中的應用以下定理:若已給一個單連通域,與在此域中一點的鄰域內一個正規函數元,而這元可以在域內毫無阻礙的開拓,則這個元在該域內產生一個單值的正規函數. ——這定理的證明,每人自己都可以很容易的推出來. (參看 *C. Jordan*, Cours d'analyse, I, § 346).

❷德文 im Grossen 英文 in the large 的暫譯——譯者.

❸若在 $m$ 物的一個排列裏,其中一部分照這樣彼此循環的代換,則我們說,他們構成一個排列循環,並且有以下的簡單定理:每個排列可以裂成若干個排列循環.——例如若 $m=9$, 又若數字 1,2,3,4,5,6,7,8,9 依序變爲 3,7,5,4,1,8,9,6,2, 則數字 1,3,5 與 2,7,9 各構成一個三項排列循環,數字 6,8 構成一個二項排列循環,數字 4 自己構成一個單項排列循環.

在原點的隣近，可以展成一個羅朗級數:

$$\phi_1(z')=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n z'^n,$$

於是 $F_1(z)$ 在阨點附近有一個展開如下: ❶

$$F_1(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(\sqrt[p]{z-a})^n$$

現在進一步你們要證明:

在這展開式內祇有有盡多個負冪.

證: 若 $g_m(a)\neq0$，也就是若 $G(a, w)=0$ 恰有 $m$ 個根，但其中或有多重的，則根的綿續性定理告訴我們，這些根在 $a$ 點仍是綿續的. 於是在上面的展開式內，簡直沒有負冪.

但若 $g_m(a)=0$，例如設 $a$ 是 $g_m$ 的 $q$ 級零點，則我們自然得到兩樣的結果. 此時我們可設 $g_m(z)=(z-a)^q\cdot h_m(z)$，其中 $h_m(z)\neq0$. 若作函數

$$(z-a)^{q(m-1)}\cdot G(z,w),$$

再令 $(z-a)^q\cdot w=v$，則我們即可驗證出來，這函數可寫如下狀:

$$\Psi(z,v)=h_0(z)+h_1(z)\cdot v+\cdots\cdots+h_m(z)\cdot v^m$$

其中 $h_0, h_1, \cdots\cdots h_{m-1}$ 代表 $z$ 的某些有理整函數. 方程式 $\Psi(z,w)=0$ 顯然又是不可約的，並且他裏面 $v$ 的最高冪的係數 $h_m(a)\neq0$. 因此，這個新的方程式的根，在 $z=a$ 爲綿續的，而且像先前所討論的 $g_m(a)\neq0$ 一款那樣，也有一個具問題中的形狀的展開式，但其中簡直沒有負冪. 現在，由於 $w=(z-a)^{-q}\cdot v$，我們立刻可以推知，所給方程式的根，也就是我們的函數 $F_\mu(z)$，在阨點，$z=a$ 的隣近，有同形狀的一個展開式，而他裏面至多祇能有有盡多個(因至多有 $p\cdot q$ 個)負冪. 證畢.

對於點 $z=\infty$，我們的推論與前完全平行；我們祇須在各處以 $\dfrac{1}{z}$ 代 $z-a$，而以一個充分大的圓，作爲繞$\infty$點的圓周 $K$. 這裏的推論，其詳細的步驟，每人都可自己補充. 我們的結果是每一個函數 $F_\mu(z)$，在$\infty$點的隣近有一個具形狀

❶並且我們很容易看出，在這式內將 $\sqrt[p]{z-a}$ 的 $p$ 個值代入，則這個展開式代表我們 $p$ 項排列循環內所有的 $p$ 個函數 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_p$. 但是我們並不須利用這一點.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\left(\sqrt[p]{\frac{1}{z}}\right)^n, \qquad (1 \leqq p \leqq m)$$

的展開式，其中至多有有盡多個 $p$ 次根的負冪.

由此可見這些阨點，連$\infty$點在內，是特別簡單的一種奇點. 關於這種奇點，我們有

**定義**: 若一個解析函數在點 $a$ 或點$\infty$的隣近——除這點的本身外——是正規的，但不必是單值的，並且在那裏依序有具形狀

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(\sqrt[p]{z-a})^n \quad \text{或} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\left(\sqrt[p]{\frac{1}{z}}\right)^n$$

的展開式，而其中的 $p$ 次根祇有有盡多個負冪，則我們稱之爲一個代數點 (*algebraische Stelle*).❶ 我們也說，函數在該點具有一個代數函數的特徵.

4. 現在到了最後一步，我們要證明，那 $m$ 個函數 $F_\mu(z)$ 中之每一個，經過適宜的超過剖線 $L$ 的開拓，可以變成其他的每一個.

爲此目的，我們自然祇須證明，從 $F_1$ 可以開拓到任意一個別的 $F_\mu$; 因爲若從 $F_1$ 可以得 $F_\mu$ 又可以得 $F_\nu$，則先用方向相反的開拓，可從 $F_\mu$ 到 $F_1$，然後再轉到 $F_\nu$，故無論如何，可從 $F_\mu$ 得 $F_\nu$. 現在若假設從 $F_1$ 不能得每一個 $F_\mu$，則我們可以想像這些函數的次序是如此排列，使我們從 $F_1$ 祇能得 $F_2, F_3, \cdots\cdots F_k$, $(k<m)$，而不能得 $F_{k+1}, \cdots\cdots, F_m$. 那就是說，在那去點的平面內，經過任意的開拓，這前 $k$ 個函數永遠是彼此顛來倒去的排列，而總也不變成其餘的. 這樣，若我們構造他們的任意一個對稱函數(*symmetrische* Funktion) $S(F_1, F_2, \cdots\cdots, F_k) = \Phi(z)$，則這函數將不因開拓而變更，故在這去點的平面內爲單值與正規的. 於是在一個阨點(連上$\infty$點)的隣近，$\Phi(z)$ 將可以展爲一個普通的羅朗級數，而根據 3，這級數將祇有有盡多個負冪.

這事實的意義是: $\Phi(z)$在整個的平面內 (連上$\infty$點)，除至多有極點外，將沒有其他的奇點，故根據卷一，§36，定理 2，將是 $z$ 的一個有理函數. 於是特殊的

❶若 $p=1$，則我們所得的，卽是一個普通的極點; 此外，若展開式內簡直沒有負冪，則這一點是正規的. 當我們談到一個代數奇點時，自然假定最後所說的情形並不發生.

$$(w-F_1)(w-F_2)\cdots\cdots(w-F_k)=\phi_0(z)+\phi_1(z)\cdot w$$
$$+\cdots\cdots+\phi_k(z)\cdot w^k=0$$

爲一個方程式，其係數 $\phi_\lambda(z)$ 將全是 $z$ 的有理函數．若將這方程式乘以係數的公分母，則得方程式

$$g(z,w)=\gamma_0(z)+\gamma_1(z)\cdot w+\cdots\cdots+\gamma_k(z)\cdot w^k=0,$$

其係數都是 $z$ 的有理整函數，故我們得一個對於函數 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_k$ 都可適合的代數方程式．但對於 $k<m$ 這是不可能的，因爲我們先已假設 $G(z,w)$ 爲不可約的．❶

於是 § 13 內所述的定理，每一部分都已證明，並且此外更已證明

**定理：** 在整個平面內（連上∞點），一個代數函數除代數奇點外沒有其他奇點．

**5.** 現在我們很容易的可以構造 $G(z,w)=0$ 所確定的代數函數的黎曼面．相當於那 $m$ 個函數 $F_\mu(z)$，我們取 $m$ 個頁，每頁都沿 $L$ 剖開，他們的點依序負荷函數 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_m$ 的值．現在若將這些函數中的一個，超過 $L$ 上連兩個銜接的阨點的一段開拓，則函數 $F_\mu$ 的每一個，變成其中完全固定的一個．這種轉變是完全唯一確定的，而我們若按照這種轉變將 $m$ 頁彼此沿這一段剖線相連，❷ 則這段剖線卽消失．

若想像我們將同樣的步驟施於剖線的每一段（連上到∞的一段），則一切的邊界都消失，而由 $G(z, w)=0$ 所確定的代數函數的黎曼面於是完成．若我們開始不用平面而用球面，則所得的黎曼面更是完整，而且點∞的特殊地位也隨之消失．此時我們就有一個閉的 $m$ 頁黎曼球面，在上面異於阨點的每一點，負荷一個唯一的函數值．

最後我們還要令阨點爲函數值的荷點，顯然的該是這樣：在繞一個阨點（這也可以是∞點）一週開拓之後，那 $m$ 個函數 $F_\mu$ 經過一個固定的排列．這個排列分裂爲若干個，例如 $l$ 個（$1\leqq l\leqq m$），排列循環．這樣，則這個點 $a$ 在面上祇算 $l$ 次（不算 $m$ 次），並且所有在同一個排列循環內

---

❶因爲我們有以下純粹的代數的定理：若方程式 $g(z,w)=0$ 與不可約的方程式 $G(z,w)=0$，在一個域內所有的 $z$，有一個共同的根，則 $g(z,w)$ 可以 $G(z,w)$ 除盡，所以 $g$ 對於 $w$ 至少與 $G$ 有相等的級．

❷此時有些頁可能自己經過這段剖線而不與他頁發生關係，——當函數 $F_\mu$ 超過這段剖線後仍爲自己時，其相當的頁卽是如此．

相連接的頁，$a$ 點在面上合起來祇算一次．現在這 $l$ 個上下相疊的 $a$ 點，每一個作爲值 $c_0$ 或$\infty$的荷點，依序視相當於他的展開式，卽我們在 3 內所得的展開式，第一項是常數項 $c_0$ 或其中的確有負冪而定．❶

在值域如此擴充之後，則全部的值耦 $(z, w)$，其中第一分量 (Komponente) 爲黎曼球面上全部的 $z$ 點，而第二分量爲唯一的相當函數值 $w_1$ 稱爲 $G(z, w)=0$ 所確定的**代數結構** (algebraische Gebilde)．這結構進一步的研究，形成代數函數論的內容．

習題： 1. 試證第 117 頁底註所述的，所謂的唯一性定理(*monodromiesatz*)．

2. 方程式．

a) $w^3-1-z=0$,

b) $w^3-3w-z=0$,

c) $w+\dfrac{1}{w}-z=0$

各確定一個 $z$ 的函數 $w$． 試詳細討論這些函數的黎曼面的構造(阨點，各頁在阨點相連的情形；函數在阨點之性質；值域的分佈等等)．

---

❶ 若這 $l$ 個排列循環依序爲 $p_1$ 項，$p_2$ 項，……$p_l$ 項的，則在 $a$ 恰有 $l$ 個結合點相疊，而這些結合點依序爲 $p_1$ 頁的，$p_2$ 頁的，……$p_l$ 頁的(特殊的其中也可能含有一頁結合點，亦卽普通的點)．這些結合點不但在面上作爲 $l$ 個不同的點，而且自然也可以是完全不同的函數值的荷點．

# 第六章　解析結構

## §16.　單微商解析函數

現在，我們可以將在卷一，第 108 頁所解釋的，但仍有幾個罅隙的，關於完全的解析函數的定義，加以補充，然後將我們的討論，至少對於主要的概念——解析函數之主要概念——作某一個結束．為此目的，我們將 §10 內中斷的討論，重新檢起來．

在 §10 內，我們從一個已給的函數元——例如一個冪級數——出發，並且祇要還有可能，我們就將他不斷的向前開拓．現在我們要較精確的說明，如何實施這個開拓，至少在純粹的理論上，我們如何想像這開拓的步驟．因為普通必需有了無盡多個冪級數之後，才能達到開拓不到新收獲的地步．雖然如此，但我們若要規定一種有建設性的方法，使我們的開拓可以完成，則祇需可枚舉的多個步驟．乍看起來，這似乎是不可能；因為即使我們祇要將第一個冪級數全部可能的開拓都實施——而我們是必須如此的——似乎必須繞收斂圓上每一點作函數的展開式．這樣所得，已經是不可枚舉的多個的新冪級數．

但是我們很容易的可以驗證出來，在開拓的過程中——例如假定從以 $z_0$ 為中點的冪級數 $\mathfrak{f}$ 出發，沿 $L$ 向 $\zeta$ 開拓，——我們祇須用以具有理坐標的點為圓心的新的冪級數．❶　因為祇要沿 $L$ 的開拓是可能的，則這裏所需的，以 $z_0, z_1 \cdots\cdots z_{m-1}, z_m=\zeta$ 為圓心的收斂圓（參看卷一，第 93 頁與圖 5），掩蓋一個域，這路 $L$ 與這域的邊界，有一個正號的距離 $\rho$．現在我們若用任何有理的圓心 $z_1', z_2', \cdots\cdots$，以代替 $z_1, z_2, \cdots\cdots$，祇要這些點 $z_1', z_2' \cdots\cdots$ 與 $L$ 的距離不超過 $\frac{1}{2}\rho$，則我們顯然仍可以達到點 $\zeta$，而得同一個函數元．

但有理點構成一個可枚舉的點組，而從此可以推知，由一個函數元出發的全部開拓，可以用可枚舉的多個步驟完成．因為從已給的冪級數 $\mathfrak{f}$

---

❶ 如此的點簡稱有理點（*rationaler Punkt*）．

出發，若祇以有理點爲新展開式的圓心，則僅得可枚舉的多個新冪級數，名之爲

$$\mathfrak{f}_{01},\quad \mathfrak{f}_{02},\cdots\cdots,\quad \mathfrak{f}_{0n},\cdots\cdots;$$

從這些新冪級數的每一個出發，又至多得可枚舉的多個，所以我們總共也祇得可枚舉的多個新的冪級數，❶名之爲

$$\mathfrak{f}_{11},\quad \mathfrak{f}_{12},\cdots\cdots\mathfrak{f}_{1n},\cdots\cdots.$$

從這些冪級數出發，我們再施行同樣的手續，繼續下去，則我們前後得到，可枚舉的多個敍列的可枚舉的多個冪級數，於是我們總共也祇得可枚舉的多個冪級數，這些我們最後用

$$\mathfrak{f}_0,\quad \mathfrak{f}_1,\quad \mathfrak{f}_2,\cdots\cdots,\quad \mathfrak{f}_k\cdots\cdots$$

代表．於此，我們先已證明

**定理1**：我們可以適宜的選定一個冪級數敍列 $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \cdots\cdots \mathfrak{f}_k, \cdots\cdots$，具以下性質：若從一個元 $\mathfrak{f}_0$ 出發，能沿任意的一條路(用冪級數)開拓，使一點 $z$ 含在一個新的冪級數的收斂圓之內部，則我們祇須從這個敍列裏檢出有盡多個，作爲這個開拓所利用的(有盡多個)冪級數．

照這樣既可以得到一個已給函數元 $w=f(z)$ 所有可能的開拓，故我們得以下的結論：平面上每一個點 $z_0$，祇須有一次含在 $\mathfrak{f}_k$ 的一個收斂圓的內部，他的隣域卽有有盡多組或可枚舉的無盡多組不同的函數值而每組函數值構成一個在 $z_0$ 隣域內單值與正規的函數．設這些函數爲

$$f_1(z;\, z_0),\qquad f_2(z;\, z_0),\ \cdots\cdots,$$

則我們令點 $z_0$ 爲這些函數在 $z=z_0$ 時的值的荷點，這些函數值我們用 $w_0^{(1)}$, $w_0^{(2)}$, ……表示．若此時同一個值重複多次，則 $z_0$ 作爲負荷這個值同樣多次．最後，若想像對於至少含在一個 $\mathfrak{f}_k$ 的收斂圓的內部的每一個 $z_0$，我們作數耦

$$(z_0,\, w_0^{(1)}),\qquad (z_0,\, w_0^{(2)}),\ \cdots\cdots,$$

則這些數偶的全部，構成開始的元所產生的單微商解析函數(monogene analytische Funktion)．於是關於這個函數，有以下的事實：

1. 相當於平面上或平面的一部分上的每一個點 $z$，有有盡多個或可枚舉的無盡多個函數值 $w^{(1)}, w^{(2)}, \cdots\cdots$(其中一個值可以任意重複多次)．

2. 若 $(z_0,\, w_0)$ 爲其中一個特殊的值耦，則全部值耦 $(z,\, w)$，其第一分

❶可枚舉的多個敍列的可枚舉的多個事物，仍構成一個可枚舉的組．這個我們在卷一，第9頁內，關於平面上的網點的例中，曾經指出．

量屬於 $z_0$ 的一個隣域的，構成有盡多個或可枚舉的無盡多個在 $z_0$ 點正規的函數 $f_\nu(z;\ z_0)$.

3. 若 $f_\nu(z;z_0)$ 與 $f_\mu(z;z_1)$ 爲任意兩個如此構成的函數，則每一個爲其他一個的（自然不是緊接的）解析開拓.

4. 若將函數元 $f_\nu(z;\ z_0)$ 中任意一個，以一個有理點爲中心，展爲冪級數，則得冪級數 $\mathfrak{f}_k$ 中的一個.

根據以上所論，我們可以特殊的述以下兩定理：

**定理 2:** 每個任意的，"在小處"已給的值域，❶ 祇要是可能，產生唯一的一個完全確定的單微商解析函數.

**定理 3:** 在一點 $z_0$，一個多值函數所能有的函數值，構成一個有盡組或可枚舉的無盡組.

## §17. 黎曼面

現在照 §10 所解釋的方法去構造一個單微商解析函數的黎曼面，已無困難：我們按所得的 $\mathfrak{f}_k$ 的次序，將其收斂圓的圓片，照 §10 所說的方法，彼此相連——必須時要（理想上）穿透位於中間的各頁——而得我們所求的面. ❷

這黎曼面的連通性質，當然可能是極複雜的. 但他也可能是很顯明而容易把握的，如在第四章及第五章內的例那樣. 因爲黎曼面的作用，並不在其本身，而在幫助我們表顯函數的性質，所以若這個面的連通性質太不易把握，我們在面上尋求函數值的變動比從函數本身還困難，在一切這樣的款中，我們就不再構造黎曼面. 例如若要透視函數 $w=\operatorname{arc}\sin z$ 的值的變化，則他的黎曼面的構造，即無若何值得說的利益，雖然，若從 $z=\sin w=-\frac{1}{2}i(e^{iw}-e^{-iw})$ 解 $w$，我們很容易的可以得 $w=\operatorname{arc}\sin z=-i\log(iz+\sqrt{1-z^2})$，而根據此式，黎曼面是很容易構造的. ❸ 但例如對於外氏 $\sigma$ 或 $\wp$ 函數的逆函數，則其黎曼面的構造，更無利益可言.

---

❶就是說，對於 $z$ 平面上一個無論多小的域（或一個曲線段，或一個有欄的無限點組）所給的 $w$ 值（參看卷一，第 101 頁的討論）.

❷我們自然也可以用任意其他的域來替代圓片，特殊的可以用可能的最大的域，祇要在此域內，函數的一個支是正規的. 故例如在代數函數之款，我們即可以用整個剖開的面.

❸雖如此說，但爲練習這種表示法起見，在理想上構造這個面，還是很有用處的.

因此，在最普遍的款中，黎曼面的構造是不值得的．我們應逐款的考察，黎曼面的構造是否能幫助我們去瞭解這函數．可利用黎曼面的最重要之款，在以前兩章內，我們已討論過．關於普遍的款，我們衹須知道，對於一個已給的函數，在一切情形之下，我們可以構造一個黎曼面，在他上面，函數值構成一個位的單值函數，而每一個點 $z$ 的隣域內，有若干個(有盡多個或可枚舉的無盡多個)不同的函數元，他上面即有若干頁(參看下文)；此外，這些頁是用完全固定的方法相連的．最後一點的意義是：若從一個固定的頁上的一個固定的點出發，作任意一條固定的路(更精確些，作一條路，他在普通的 $z$ 平面上的投影是已給的)，則在這面上，這條路所經歷的途徑是完全確定的，他把我們引到一個完全固定的頁上一個完全固定的點，——祇要這條路不越出這個面的範圍，就是祇要他避免所經過的頁之奇的界點(參看下文)．

最後，上文常用之幾種概念，現在已可有更精確的解說：

1. **黎曼面的一頁**是如此得來的：從我們圓片中的任意一個出發，依以上所描寫的方法，將新的圓片(或其圓片的一部分)不斷的黏上去，但祇不得在平面上重疊．故我們特別鄭重的指出，頁的概念是並非絕對的，而與剛才所描寫的構造方法的步驟有關．但若談到一個特殊的點 $z_0$ 所在的不同的各頁，則有一個完全固定的意義：$z_0$ 為若干個不同的(就是，在 $z_0$ 與他的隣域內不黏起的)圓片的內點，則 $z_0$ 在若干個不同的頁上．屬於同一個頁的點 $z$ 的全部，按 §7 內所解釋的，構成一個域．

2. 一個已給(多值)解析函數 $F(z)$ 的一個**支**，指每一個聯繫於黎曼面上一頁的函數值所構成的，在該頁內(或者，根據 1 所解釋的，在相當於這頁的域內)單值的解析函數．

3. 一個解析函數 $F(z)$ 的一個**函數元**，指任意一個支或支的一部分的表示法，特殊的，每一個冪級數 $\mathfrak{P}_k$ 及每一個在 §16 內所用的函數 $f_\nu(z;z_0)$，——對於函數 $f_\nu(z;z_0)$，問題中的 $z_0$ 的隣域，可有種種不同的形狀．

4. **奇點的概念**與支或頁的概念相同，也不是絕對的：祇是對於某一支或某一頁來講，一個特殊的點才可說是奇的或正規的(參看第 92 頁的例)．但對於某一支或頁，則這概念是完全確定的．因為屬於一頁的全部的點 $z$，根據 1，構成一個域，這個域與一個值域相聯繫，而這值域，根據

2,構成一個在該域內單值的解析函數——屬於這一頁的一支. 但對於這函數,上述的域的界點,卽完全確定的區別爲正規點與奇點,就是說對於一種的點,超過邊界開拓是可能的,對於另一種,這是不可能的.

習題 1. 試詳細說明以下函數的黎曼面之構造:

a) $w=z^a$ ($a$ 爲任意的複數),

b) $w=\arc\sin z$.

2. 試構造一個函數,以么圓爲自然疆界,在么圓之內部是: a)恰好雙值的, b)無盡多值的.

## §18. 解析結構

我們還須作一個最後的小小的補充(與我們在§15之末,關於代數函數所論的相彷),經過這個補充,則完全的解析函數的意義,在一切方面,都已完整無缺.

到現在,我們有以下的結果: 就是黎曼面上一頁的一個點(當然是內點)其隣域所聯繫的值域,構成一個在這域內正規的函數元,而每一個別的支(頁)上,一切的奇點,暫時根本不算屬於面. 在這些奇點之中,有些的性質是如此的簡單,我們——更由於其他的理由——若將他們算在正規點之內,或無論如何算在面內,是有利的. 簡單的說,他們是代數的奇點,——也就是以下的各種奇點.

1. 一個頁上的極點,就是說,在一個頁上的每一個孤立而有以下性質的界點 $z_0$: 與 $z_0$ 的隣域聯繫的值域,可以展爲一個(普通的)祇具有盡多個負羃的羅朗級數.❶ 我們令如此的一個點爲值∞的荷點,並且將數耦 $(z_0, \infty)$ 也算在單微商解析函數的數耦之內.

2. 代數的結合點,就是在一頁上具以下性質的每個奇的界點: 在這點附近,有有盡多個,例如 $p(>1)$ 個,固定的頁連起來,像 $\sqrt[p]{z}$ 的面在原點那樣,此外,在 $z_0$ 的隣域內,聯繫於這 $p$ 個頁的值域,若展爲

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\left(\sqrt[p]{z-z_0}\right)^n$$

形狀的級數(這在任何情形之下是可能的),級數內或完全沒有或祇有有盡多個 $\sqrt[p]{z-z_0}$ 的負羃.

❶ 在另一頁內,$z_0$ 儘可以是一個正規點或是一個別一類的奇點.

如此的一個點，對於這 $p$ 個頁，在面上總共祇算作一個點，我們並按展開式內有無負冪，令這點爲值$\infty$或 $c_0$ 的荷點，而將值耦$(z_0,\infty)$或$(z_0,c_0)$也算在我們的值耦$(z,w)$之內，但祇算一次.

3. 最後，在完全相當的條件之下，我們還要將點$\infty$算在面內，這條件簡單的說是：假使把他看作在球面上，則他的性質與上文所描寫的 $z_0$ 的性質相同；也就是以下兩種情形之一：

a)在點$\infty$的隣近，有一個固定的頁，與其他的頁不相關的經過，❶ 並且與此隣域相聯繫的值域，在這隣域內構成一個單值正規函數，其在域內的羅朗展開式，至多有有盡多個$\left(\frac{1}{z}\right)$的負冪.

b)在點$\infty$有有盡多個，例如 $p(>1)$個，固定的頁相連，像$\sqrt[p]{z}$ 的面在點$\infty$那樣，而且若與該處相聯繫的值域展爲

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\left(\sqrt[p]{\frac{1}{z}}\right)^n$$

形狀的級數（這在任何情形之下是可能的），這級數內至多有有盡多個$\sqrt[p]{\frac{1}{z}}$的負冪.❷

在款 a)，我們說$\infty$點是一個普通的點，在款 b)，我們說，在$\infty$點有一個 $p$ 頁的結合點. 在兩款中，對於討論中的 $p$ 頁，點$\infty$總共祇算作一點，而按在該處的展開式有無負冪，我們令他爲值$\infty$或 $c_0$ 的荷點. 並且將數耦$(\infty,\infty)$或$(\infty,c_0)$也算在我們的數耦之內.

於是我們說如此所擴充的數耦$(z,w)$的全部，代表開始的元所確定的(單微商)解析結構❸〔(monogene) analytische Gebilde〕.

在我們的函數元$f_\nu(z;z_0)$之內，我們還應加入有盡多個或可枚舉的無盡多個在 1—3 內所論的展開式. 於是，從一個任意的已給的冪級數，或

❶就是說，討論中的頁，含有一切在某一個圓之外的點.

❷款 1 與 $3a$ 自然也可以當作 2 與 $3b$ 中 $p=1$ 的特款.

❸我們加敍以下的事實而不予以證明：在從一個函數元 $w=f(z)$ 所得的解析結構中，若將每一個數耦的兩個分量次序顚倒，則仍得一個單微商解析結構 $(w,z)$，後者我們稱之爲前者的反結構(*inverse Gebilde*). 若我們沒有這一節的補充，則從一個解析函數到他的反函數的過程，就不能如此簡單而明白的表述出來. 單是這個事實，已充分說明這補充的必要.

一個正規函數"在小處"的一個其他的表示式,用開拓的步驟產生的解析結構,其整個的性質,從這一切的函數元或這一切的數耦可以一目了然.

最後,我們還有幾句話可說:在第 81 頁,底註 2 所提到的劃一論(*Uniformisierungsthorie*),在某種程度,構成我們研究的兩個主要對象的橋樑,這兩對象就是單值函數與多值函數. 因爲在劃一論中,我們證明定理:每一個任意的(多值)解析函數 $w=F(z)$,可以完全利用單值函數來表示(劃一);更精確些,這句話的意義是,總有兩個複變數 $t$ 的單值函數 $z=z(t)$ 與 $w=w(t)$ 在,具以下的性質:若變數 $t$ 在他的平面上某一個區域內變動,則數耦 $(z,w)=[z(t),w(t)]$ 產生完全的解析函數 $w=F(z)$.(普客二氏普遍的劃一定理, Allgemeines Uniformisierungstheorem von *Poincare* und *Koebe*)。

# 德中名詞對照表

(中文名詞大致依照科學社科學名詞審查會所擬,有 + 者曾酌加更改,有 * 者自擬)。

Abbildung 變換
abgeschlossen 閉的
Ableitung 導微函數
Abschätzung 估計式*
absolus konvergent 絕對收斂
absolute Konvergenz 絕對收斂性
Additionstheorem 加法定理*
algebraische Funktion 代數函數
algebraisches Gebilde 代數結構*
algebraische Kurve 代數曲線
algebraische Singularität 代數奇點+
algebraische Stelle 代數點*(代數位)*
algebraischer Verzweigungspunkt 代數結合點
allgemeines Uniformisierungstheorem von Poincare und Koebe 普寇二氏普遍的劃一性定理*
analytische Fortsetzung 解析開拓
analytische Funktion 解析函數
analytisches Gebilde 解析結構*
Annährung 近似值
Aquivalenz 相當
Arcus 角
Argument (自)變數
Assoziationsgesetz 結合律
a-Stelle a 值點
asymptotisch gleich 漸近的相等
ausserwesentlich singuläre Stelle 非本性奇點
Bereich 域
Bereich der Reellen Zahlen 實數域
beschränkt 有欄的*
beständig konvergent 永遠收斂*
bestimmtes Integral 定限積分
Bestimmung 格*
Bild 象*
binomische Reihe 二項式級數
Blatt 頁
Bolzano-Weierstrassscher Satz 播外二氏定理*
Carosati-Weierstrassscher Satz 卡外二氏定理*
Cauchy-Hadamardsher Satz 科阿二氏定理*
Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen 科黎二氏微分方程式*
Darstellung 表示式*
Dedekindscher Schnitt 迭氏分割*
Definitionsbereich 定義域*
Differentialgleichung 微分方程式
Differentialquotient 微商
Differenzenquotient 差商
differenzierbar 可導微的
Differenzierbarkeit 可導微性
Differentiation unter dem Integralzeichen 積分號後導微法
Diskriminant 判別式
divergent 發散的
Doppelpunkt 重點
doppelpunktfrei 沒有重點的
Doppelreihe 二進級數
doppelt-periodische Funktion 雙週期函數

Durchdringungolmen 穿透線*
eigentliche Konvergenz 眞收斂性
einbeschriebener Sehnenzug 內接割線練*
eindeutig 單值的
eindeutige Funktion 單值函數
einfach-periodische Funktion 單週期函數
einfach-zusammenhängend 單連通的
Einheitskreis 么圓
Einschachtelungssatz 套定理*
Element (einer Funktion) (函數)元*
elementare Funktionen 初等函數
elliptische Funktion 橢圓函數
elliptisches Integral 橢圓積分
endliche Zahl 有限的數*
endlich viel 有盡多個
Entwicklung 展開法,展開式
Existenzbereich, (—gebiet) 存在域*
expliziter Ausdruck 陽式
Faktor 因子
Fakultät 階乘積
Folge 敍列
Folium Cartesii 笛卡兒葉形線
Fortsetzung 開拓
freier Rand 懸界*
Fundamentalparallelogram 基本平行四邊形
Fundamentalsatz der Algebra 代數的基本定理
Funktion 函數
Funktionalgleichung 函數方程式
Funktionselement 函數元*
Funktionsgebilde 函數結構*
Gammafunktion (Γ-Funktion) Γ 函數
ganze Funktion 整函數
ganze rationale Funktion 有理整函數
ganze transzendente Funktion 超越整函數
Gebiete 域
Gebietsschachtelung 域套*
Gebilde 圖形,結構
gebrochene rationale Funktion 有理分函數
geometrische Reihe 等比級數
gerade Funktion 偶函數
Geschlecht 虧數
geschlossen 閉的,閉合的
geschlossener Weg 閉路
Gitterpunkt 網點+
gleichmässige Konvergenz 齊收斂性
gleichmässige Stetigkeit 齊綿續性
gliedweise Differentiation 逐項微分法
gliedweise Integration 逐項積分法
Grad 次
Grenze 界
Grenzprozess 極限法
Grenzwert 限值
Häufungspunkt 凝聚點+
Hauptlimes 主限*
Hauptsatz 主要定理
Hauptteil 主要部分,主部
Hauptwert 主值,*主頁
Hauptzweig 主支
Heine-Borelsches Theorem 海波二氏定理*
Hilfssatz 助定理
Hilfsweg 輔助路*
Identitätssatz 恆等定理*
Imaginärer Teil 虛部
im Endlichen 在有窮遠處*
im Grossen 在大處*
im Kleinen 在小處*
Innere 內部*
inner Punkt 內點
Integral 積分

Integralformel 積分公式*
Integralsatz 積分定理*
Jntrgralzeichen 積分號
Integration 積分法
Integrationsgrenze 積分(上,下)限
Jntegrationsweg 積分路
Integrand 被積函數
Interpolation 內推法,推值法
Intervall 節
Intervallschachtelung 節套*
Invariante 不變數
inverse Funktion 反函數
inverses Gebilde 反結構*
irreduzibel 不可約的
isolierter Punkt 孤立點
Jordansches Kurvenstück 約當曲線段*
Klass 股,*類*
Kommutationsgesetz 對易律
Komponente 分量
konforme Abbildung 等角變換
kongruente Punkte 疊合點+
konvergent 收斂的
Konvergenz 收斂性
Konvergenzbereich 收斂域
Konvergenzkreis 收斂圓
Konvergenzprinzip 收斂原則
Konvergenzradius 收斂半徑
Konvergenzsatz 收斂定理
Kreiskette 圓練*
Kreiskettenverfahren 圓練法*
Kreisring 圓環
Kriterien 檢驗標準
kritische Stelle 阨點*
Limes 限
Limes interior 下限
Limes superior 上限
linear unabhängig 平直無關
logarithmische Ableitung 對數導微函數
Logarithmus 對數(函數)
m-fach m 重的
m-fach zusammenhängend m 連通的
Maximum 極大值
mehrdeutig 多值的
mehrdeutige Funktion 多值函數
Menge 組
meromorphe Funktion 半純函數
Mittelwertsatz 中值定理
Mittag-Lefferscher Partialbruchsatz 米萊二氏分項分數定理*
Monodromiesatz 唯一性定理*
monogene Funktion 單微商函數
ntes Grad n 次的
n-teilige n 段的*
nter Ordnung n 級的
natürliche Grenze 自然疆界
natürlicher Logarithmus 自然對數
Nullstelle 零點,零值點
obere Grenze 上界
oberer Limes 上限
obere Schranke 上欄*
Ordnung 級
orientiert 有向的
Ort 位*
Parallelogrammnetz 平行四邊形網*
Parallelverschiebung 平行移動+
Parameterdarstellung 參數方程式
Partialableitung nter Ordnung n 級偏導微函數
Partialbruchsatz 分項分數(定理)
Partialbruchzerlegung 分項分數分解式*
$p$-blättriger Verzweigungspunkt $p$ 頁結合點
Periode 週期
Periodenpaar 週期耦

*Periodenpunkte* 週期點
Periodenstreifen 週期幅*
Periodenverhältnis 週期比
periodische Funktion 週期函數
Periodizität 週期性
Permutation 排列
℘-Funktion ℘函數
Pol 極點
positiver Umlaufssinn 正向
Potenzreihe 冪級數+
primitive Periode 原週期
primitives Periodenpaar 原週期耦
Produktdarstellung 乘積表示式*
Produktsatz 乘積定理*
punktierte Ebene 去點平面*
Rand 邊界+
Randpunkt 界點*
rationale Funktion 有理函數
rationaler punkt 有理點*
Rechenvorschrift 運算法則*
reeller Teil 實部
reguläre Funktion 正規函數*
regulärer Punkt 正規點*
Regularitätsgebiet (—bereich) 正規域*
Reihe 級數+
Reihenentwicklung 展爲級數
Reihe mit veränderlichen Gliedern 變項級數
rektifizierbar 可伸的
Residuensatz 殘數定理
Residunm 殘數
Riemannsche Fläche 黎曼面
Riemannsche Kugelfläche 黎曼球面
Ring (Kreisring) 圓環
Ringsgebiet 環形域
Schnitt (—linie) 剖線
Schnittzahl 剖數*

*Schranke* 欄*
Schraubenfläche 螺旋曲面
Schwankung 顫動度
Sigma ($\sigma$—) Funktion $\sigma$ 函數
singuläre Punkte 奇點+
Singularität 奇性,奇點+
stereographische Abbildung 球極投影
stetig 綿續的
Stetigkeit 綿續性
Stetigkeit längs eines Wegs 路上綿續性*
Stetigkeit nach innen 域內綿續性*
Stetigkeitsaxiom 綿續性公理*
Stetigkeitsgebiet (—bereich) 綿續域*
streckbar 可伸的
Streifen 幅*
symmetrische Funktion 對稱函數
Teildarstellung 部分表示式*
Teilgebiet 子域
Teilmenge 子組
Teilpunkt 分點*
Träger 荷點*
überall dichte Menge 密點組
Umgebung 隣域,+ 隣近+
Umkehrfunktion 反函數
Umkehrung (eines Satzes) 轉理
unendlich 無窮,無盡
unendlich ferner Punkt (Unendlichen) 無窮遠點
unendlich Reihen 無盡級數+
unendliches Produkt 無盡乘積+
Uniformisierung 劃一*
Uniformisierungstheorie 劃一論*
untere Grenze 下界
untere Schranke 下欄*
unterer Limes 下限
Variabilitätsbereich 變數域*
Veränderliche 變數

Verzweigungspunkt 結合點

vielblättig 多頁的*

Vollständigkeitsaxiom 完全性公理*

von unendlich hoher Ordnung 無盡高級的*

Weg 路

Wegstück 路段*

Wertvorrat 值域*

wesentlich singuläre Stelle 本性奇點+

Windungfläche 螺旋面

Windungspunkt 結合點

Zahlenkugel 數球*

$\zeta$-Funktion $\zeta$函數

zusammenhängend 連通的

Zusatz 系

*Zweig* 支+

Zwischenpunkt 介點*

Zyklus 循環+

# 人 名 索 引

I 指卷一，II 指卷二，亞拉伯數字指頁數。



# 內 容 索 引

I 指卷一，II 指卷二，亞拉伯數字指頁數。

## 五 畫



## 六 畫

## 十 畫



## 十 一 畫



## 十 二 畫

## 十 三 畫



## 十 四 畫



## 十 五 畫



## 十 六 畫

## 十 七 畫



## 十 八 畫



## 十 九 畫



## 二十一畫



## 二十二畫



## 二十三畫