

兒童學算指導法

兒童教育叢書第六種

兒童學算指導法

上海大東書局印行

大東書局新出兒童用書

是兒童唯一良伴 是兒童良好讀物

- 兒童文學叢書
- 兒童故事叢書
- 看圖講故事
- 看圖學說話
- 世界童話集
- 兒歌畫片
- 兒童戲劇叢書
- 兒童社會科學叢書
- 社會研究叢書
- 兒童自然科學叢書
- 算術練習用書
- 兒童作文學習叢書
- 少年世界地理叢書
- 兒童實際生活叢書
- 兒童勞作叢書
- 看故事唱歌

民國二十二年四月初版

家庭教育叢書
第六種 兒童學算指導法

▲全一冊實價大洋五角

(外埠酌加郵費匯費)

主編者 蔣 息 岑

編著者 俞 子 夷

發行人 沈 駿 聲

印刷者 大 東 書 局

發行所 大 東 書 局

分發行所 大東書局

杭州 廣州 北平 天津
長沙 重慶 瀋陽 南京
漢口 梧州 徐州 汕頭
開封 濟南 南昌 廈門
雲南 哈爾濱 新嘉坡

◁版權有所不有准翻印▷

自序

指導學生學習算學，實在並不是十分困難的工作。凡是一種活動，總有一個目標。認定目標，然後再考案合宜的方法去應付，一切問題不難迎刃而解。即使有時方法不合，效果和預期相反，只要目標認清，方法是可以隨時變易的。小學生學算成績，遠不如閱讀。原因有好多，方法當然未能盡合，但是主要的缺點在乎目標的錯誤。本書動機，在說明算學對於人類的功用；小學生學習算學的目標；由目標再推到所用的方法。著者從前曾經寫過二本小學算學教學法。第一本是編譯的，注重普遍原理，未能把本國小學裏現狀詳細說及。這一本當作通論讀。第二本是專重練習材料的分析組織，關於別方面的問題，僅不過約略敘述一二罷了。所以這一本可以說是側重在工具的一方面。算學的功用，主要點在用抽象的方法解決具體的問題。本書的敘述注重在這一方面。工具應當要精細的分析研究。解決問題尤其不可以

忽略。所以這兩本是相輔而行的。單看前一本，似乎流於機械。彷彿只知了科學化，拋棄了社會化。有了本書，學習的兩方面才完成。因為關於練習的，前書已經詳敘，所以本書裏便不再重述了。

中華民國二十二年三月七日 俞子夷在浙江大學

兒童教育叢書
第六種

兒童學算指導法目次

一	奇妙的發明	一
二	科學的基礎	四
三	忠實的公僕	八
四	巧妙的抽象	一一
五	弄巧成拙	一五
六	倒行逆施	一九
七	見多識廣	二三
八	水到渠成	二八
九	面面俱到	三二
十	事事關心	四一

十一	整理教材	五
十二	整理教法	六
十三	遊戲	九
十四	解決問題	一〇
十五	練習	二〇

兒童教育叢書
第六種

兒童學算指導法

一 奇妙的發明

算學是人類的奇妙發明。我們對於一切物體，除了知道他們的性質以外，還要比較他們的大小長短多少。因此我們學會了數，學會了量。這所謂數和量，是指動詞說的，就是數出多少，量出長短大小高低闊狹遠近……等等。由數和量的動作，發明了數目的數和度量稱量等等的量來。這數和量是指名詞說的，就是一二三四……，十百千萬……，分厘毫絲，……幾丈幾尺，幾斤幾兩，幾度幾分，……等等。僅僅發明數數量，僅僅發明數目和量，還不能算奇妙。進一步，我們會得在數和量裏去找出關係來。這一找，五花八門，千變萬化，真是奇妙到難以言語形容。譬如，我們不但會數二個人，三個人；二匹馬，三匹馬；二塊肉，三塊肉；……而且會得從種種不同的二個人，二匹馬，二塊肉……裏找出一個公共的二來；以三

一個人，三匹馬，三塊肉……裏找出一個公共的三來。進一步，我們再發明，二是一和一合併的結果；二是二和一或一和二合併的結果；二比三是少一；三比二是多一；二和三合併了便成五；三的二倍是六；二的三倍也是六；二分三是一個半；三分二是三分之二；……單單就二和三的關係，隨便說說，已經有這許多。若要統體列舉起來，恐怕可以寫成功一厚本的數量大全或數量集成也難說。豈但如此！我們知道凡是正圓形總有一個直徑，也總有一個圓周。正圓形的大小千變萬化，直徑的長短也千變萬化，圓周的尺寸當然也千變萬化。妙哉！千變萬化中，有一個公共不變的關係，就是凡是正圓形，圓周總是直徑的 $3.14159\dots$ 倍。這叫做圓周率，我們用兀的符號來代表他。這兀的發明，不是奇妙的嗎？還多着咧！

畫一個圓是很平凡的。在圓裏畫二個半徑，也是很平凡的。從一個半徑靠圓周的一點，畫一條垂線到另一半徑上，構成了一個三角形，也沒有什麼希罕。然而，這樣一個圓裏的三角形，會得產生什麼正弦，餘弦，正切，餘切，正割，餘割等等。使

學生們見了頭痛的一部三角術，不過是這許多關係中推演出來的妙文罷了。

我在這裏信口開河的講什麼奇妙的發明。學生們却在那裏咒詛這要命的三角術。這不是我造謠言，我有學生的親口供詞在此：

『……本來想開手寫一篇東西，請先生改改，動筆寫不上三行，想到數學就要考試。三角真要我的命，我恨死了！我恨死牠將我餘閒的時光都化去了，而自己愛做的又不能實行。……』

照此說來，我們老祖宗的發明三角，真是多此一舉。奇妙的發明，會得使學生叫苦，這責任是誰負的？發明三角的負這責任嗎？學生們負這責任嗎？不！不！他們都不能負這責任的。三角的發明，的確是奇妙的。學生恨死三角，也的確是事實。奇妙的發明是一個最好看的西洋鏡。學生看不到西洋鏡裏的奇妙而叫恨死，是賣西洋鏡的錯處罷。要是我們指導學生學算的，也有了賣西洋鏡者的江湖訣，手裏拉着繩子，『東東東！堂堂堂！東堂東堂東堂！』的響着，嘴裏咧咧嚕嚕的唱着，走路人模出銅元來，生下長檯看時，他還是唱着拉着。看了一門又一門

，愈看愈好看，不多時，一個銅元的門數看滿了，看的人只覺時間過得太快，不能看一個暢快，他還要咒詛西洋鏡嗎？他也說：『西洋鏡真要我的命，我恨死了』嗎？莫小看了賣西洋鏡者！江湖小技，可以給我們指導學生學算的一個暗示呢。我們來研究指導學算的方法，可以說是一種拆穿西洋鏡的工作。一經拆穿，不值半文。手拉拉，嘴唱唱，小小江湖訣，自然也能引人入勝。

二 科學的基礎

有人說算學是一切科學的基礎。這話是很不錯的。譬如化學，若只不過談談水火風土硫黃磷金銀銅鐵，常識而已，算不得是科學。僅僅定性，化學的功用膚淺得很。定了量，才能做高深的探究功夫，才能成功科學。用鹽化在水裏，不過家常日用泡些鹽湯罷了。要研究鹽在水中的溶解度，要研究溶解度和溫度的相關，然後才好算是科學。有機化學的範圍最廣大。形形色色，彩色香味各各不同，有毒的，無毒的，能燃燒的，會爆發的……不知多少。從科學的立場說起來，不過是 C H O 以

及其他若干原素的構成地位和數目的不同罷了。所以我們說化學是建築在算學上面，這話是不錯的。

物理學也是如此。美妙的樂音，鮮麗的光彩，都是振動不同所生的變化罷了。氣力，水力，那一種不是拿數量來表明的。舉一個很淺近的例子，若要說明爲什麼木塊會得浮在水裏，講到比重，可以不用數量嗎？所謂重，所謂力，若沒有數目和單位的名稱，說的人可以說得明白，聽的人可以聽得懂嗎？電磁部份，我們對於他們的本質，還有些捉摸不定。但是我們有方法計算。假定的電子學說，我們可以推算一個電子的大小，我們也可以知道一個電子所負陰電的量有多少。用到大數目，一百萬以上是常用的。用到小的數目，小數要十八位也不算什麼奇。較量標準弗打電池，據一九三一年的結果，德國和美國相差百萬份之六十弗打，德國和英國相差百萬份之八十九弗打，法國和美國相差百萬份之三十三弗打，英國和美國相差百萬份之二十九弗打，多少精密！要是沒有算學，電學便失了根據。

舉例是舉不完的。生物學，生理學等等，凡是成功科學的，總逃不了數量。社會科學近來也漸漸的科學化了。就是說，從來只憑主觀的議論，現在要用統計，要有數量來表明事實。議論紛紜，莫衷一是的教育學，現在也不能全憑理想，要有數目字來作根據。所以大家說教育也科學化了。譬如，從前的教師，夢想着要學生程度劃一。程度不齊，教授困難，彷彿是教師們的口頭禪。現在却不然。個性不同，成爲一個科學的定律。有統計，有圖表，學生的能力，可以用數量來證明。教育有了科學的根據，再喊程度不齊，教授困難的教師，大家當他瘋子，不再睬他。所謂科學的根據，就是數量罷了。所以有人說，神妖鬼怪的有無，不必用空言來爭執。只要能測量，能用數字來表示，我們只得承認是有。神妖鬼怪若要成立，也非靠算學不可。

算學是各種科學的基礎，這是大家公認的。然而這一個承認，却鬧出大禍來了。我們有一個很容易的推論，就是說，算學是科學的基礎，科學又是一切富國強兵

的工業的基礎。因此，我們應當在小學和初中裏訓練算學，在高中裏訓練科學，然後到了大學可以訓練工業。這一個推論，表面看來，似乎是很合理的。猶之，從前老先生說，若要全篇文章做得好，必須句子做得通；若要句子做得通，必須單字認得切；若要單字認得切，必須筆劃辦得明。那末在小學裏辨筆劃，在初中裏認單字，到高中後造句，到大學時作文。笑話！笑話！大家都知道這是一個絕大的笑話。我說先訓練算學，次訓練科學，然後再訓練工業的推論，也是一樣的一個絕大的笑話。拿一個很淺近的比喻來說罷。幼稚園裏的積木，是可以搭房子的。房子是由積木搭成功的。所以我們若說積木是房子的基礎，大家一定不會否認的罷。我們也來推論推論看，說幼稚園裏學積木，到了小學裏再搭房子，通嗎？更笑話了！不搭房子或別的東西，這樣可以空空洞洞的『學積木？』叫小朋友如何學起？我說，對了。『學積木』而不搭房子或別的東西，的確是絕大絕大的笑話。同樣，『學算學』而不搭科學或別的人生日常的事物，也是絕大絕大的笑話。這搭科學的

『搭』字，用來有些不妥嗎？不！搭字是組織的俗話，很有意思。拿算學和別的學科或人生日常的事物組織在一起，然後可以學算學。這樣的學算學，才可以說是訓練科學的基礎。不然，終日弄些1 2 3 4，加減乘除，A B C X Y，彷彿不許幼稚生搭房子而叫他們『學積木。』怎能叫學生不叫恨死！

三 忠實的公僕

拿算學當了各科學的基礎，有時會得鬧出上面說的笑話來。或者我們改變一個說法，說算學是各科學的公僕，或者說算學是各科學的工具，那末我們不怕誤會，不至於再鬧笑話了罷。說算學是各科學的基礎，似乎把他看得太重。正始基，是我們從來教育上的傳統方法。說算學是各科學的公僕，是各科學的工具，我們便明白公僕和工具是供人服役的，自己不是主人。我們不能丟了主人，只是招待僕役。我們不能拋棄了工作的目的，只弄工具。如此說法，在教育方面或較妥當，惟恐怕數理專家要起來反對。不要慌！數學本來自有的價值，本來他是一種歷史最久，

成績最高的科學。不過，就小朋友學的算學說，還是注重功用方面的好。並且由淺及深，由近及遠，已經是大家承認的教學條件。所以就小學生所學的算學範圍講，我們不妨叫他各科學的公僕，是各科學的工具。

實在，算學做我們的工具，已經是好久好久了。我們在日常生活裏用得很多。我們吃，要用算學。食料的購買，烹調時分量的配合，煮的時間的久暫，……等等都是。我們穿，要用算學。衣料的量，買，裁，……等等都是。我們住，要用算學。造房子用的算學最多，如面積，體積，材料，……等等都是。我們行，何嘗可以離得開算學？至低限度，我們要知道行的速度時，便是算學。賣買要算學。種田要算學。做工要算學。醫病要算學。我們各種職業，沒有一種是可以不用算學的。我們的生活，要是缺了算學，即刻會得混亂起來。現在社會的組織，可以不用算學嗎？即使經濟制度改成新的，然而經濟存在，算學也便存在。所以無論個人生活，社會生活，這最忠實的公僕，最利便的工具——算學——是不能一天缺的。

我們用了算學，可以管理社會，可以控制自然。科學的供獻，一半是發明真理，一半就是控制自然。近今的世界，大家都說是電氣世界。我們曾得產生電。我們又會得控制電。天空的雷電。或者在人類產生以前，已經有了。在不會控制電的時代，我們只是怕雷電，雷電只是使人物受害。現在我們會控制電，會產生電，所以電的用途無論什麼都行。衣，食，住，行，種田，做工，娛樂，醫病，……一切一切，大有不可一日無此君的情形。所謂控制，老實說不過是利用算學罷了。要是發電機的速度我們不能控制調節，那末產生出來的電壓，我們不知道有多少高，電流我們也不知道有多少大，恐怕不但不能供給我們點燈，生火，開車，……反而燒了我們的房屋，害了我們的生命也難說。我們會用算學，所以會得控制。電壓要多少高，我們差不多可以隨心所欲。而且由高變低，由低變高，我們也有確實的把握。調節電流的大小，亦然。在實用方面，我們要用了算學才能控制。在真理方面，我們好多發明，都要用算學才能解釋。

我們教小朋友學算學，却很少當他公僕工具的。我們也和數學專家一樣，把算學當作主人般尊敬崇拜。這不是我的胡說，我們從前不是拿算學當作小學裏的主要學科的嗎？現在名稱上，當然沒有什麼主要不主要，然而教師，學生的心裏，還不能完全沒有『主要』的一個思想。不然，爲什麼考試起來，常常用作文和算學二種做代表？小朋友的遊戲生活中，不是也用得着算學的吗？這切身的遊戲生活不是教小朋友最好的出發點嗎？由此，推到普通人的衣食住行等，不是一個學算學很自然的程序嗎？平常的教科書却不是如此。平常的教學法，却不是如此。捨近圖遠，捨本逐末，日日在1 2 3 4，加減乘除，……裏用功夫。日日在人生外學算學，學生只會做算學書上的題目。自己生活裏要用到算學解決問題時，忠實的公僕，利便的工具。小朋友却不會得用了。

四 巧妙的抽象

算學是抽象的。算學的妙處，就在抽象。抽象和具體，不過是相對的名詞。譬

如一個活活的人，他有他的性情言語行爲動作，這是很具體的。他若扮演電影，即使在有聲片中可以聽到他的聲音，看到他的動作，但是我們覺得不如親接本人那般具體。他若拍了照片，我們在照片上只看見他一瞬間的姿態神情，覺得比電影更不具體。要是我們只看見了那人名片上的姓名，覺得比照相更要抽象。名字還是那人獨有的，姓是許多人公有的。所以單說姓王姓李，我們覺得連想像的印象也沒有了。要是說『中國人，』說『人類，』那末我們更覺得抽象概括，要用文字言語來解釋，也有些不甚方便了。從極具體的到極抽象的，彷彿成功一個鏈鎖。算學也是如此。隨便拿一個三的數目來作例子，這彷彿和『人』字一樣的不容易用文字言語來說明。三所包含的，有三個人，三匹馬，三枝筆，三天，三年，三秒鐘，三國，三代，三寸金蓮，三斤酒，三皇，三星，三友，三人行，……不知多少的三，恐怕化三年，三十年功夫，也不能把他所包含的全體說完。這抽象的三多少巧妙！只要一個三，一切的三都在內了。我們會得抽象，所以算學才得成立。

再拿做統計來作一個例子罷。我們要是不會得抽象，做教師的怎能做統計，謀教育的改進？譬如我們用了新教法，指導小友朋學習算學。到了相當時期，我們要明白新教法的結果如何。我們就按照新教法的精神，根據新教法所幫助學生增長的新經驗，自己編了一種新法考試。經過新法考試以後，我們要研究比較和算學標準測驗的情形，所以揀了幾種請小朋友做。做好以後，拿新法考試的成績，和標準測驗的成績，用披爾森公式，求一個相關度。這問題是很切實的，很具體的。一切工作，也是很切實很具體的。但是等到考試和測驗的結果用數目字表出以後，我們進行計算相關度時，却完全把具體的事實，暫擱不提。我們的思想，工作，只是在好多數目字上，算X方，算Y方，算正XY，算負XY，加的加，減的減，乘的乘，除的除……。全神貫注在抽象的符號上，只在抽象的數目字裏用功夫。萬一我們在計算的進行中，不能拋開具體的事實，因而想到某一個學生平日算合作社裏賬款絲毫不會錯的，然而他的標準測驗的分數却並不高明……。糟了！這樣一分心，

手裏的統計停了！或者竟算錯了！在做統計時，不但學生的具體事實顧不到，連學生的姓名也來不及看。直到結果求出， r 等·八五， P 等·〇一五，立刻，把思想重新回到具體的問題上，自己想，『原來是很有關係的！』

上店買布，我們都知道這是一件極具體的行動。然而在計算貨價，給付銀錢時，却也要暫把具體的事實丟一丟開，才行。譬如布價是每尺二角五分，買的布是一丈四尺。這是一個很平凡的乘法，答數是三元五角。試問用十四乘點二五時，不論珠算，筆算，或是心算，是不是心目中既無布匹，又無銀錢，而只是一個抽象的四五，二十；二四，八；……？若心裏丟不開布匹銀錢的話，那末勢必具體的想，店夥量出一尺布來時，給他大洋票二角，銅元十四枚，……。不然，心裏想定了一丈四尺長的一段布，再想定了大洋二角五分，始終也算不出什麼答數來的。一經算好，思想便立即回到布匹銀錢的具體事實上來。這一種抽象功夫，就是暫時拋開具體事實，具體問題而只顧計算，是我們利用算學時最巧妙的方法。所以我說這

是巧妙的抽象。

巧妙的抽象，不是生而知的，是學了才會的。天生而知的事，怕是很少的罷。就是嬰兒吃奶，從前都說是我們生而知和本能，現在也有人懷疑，更有人完全否認。這是心理學中的問題，這裏不多深究。在沒有得到確切解答以前，我們指導小朋友學算，與其當抽象是生而知的，不如當他是學了才會的，比較妥善。萬一我們假定了抽象是生而知的，而實際是非學不會的，那末，我們誤人子弟，怎樣對得起自己的責任？反過來，抽象是生而知的，我們假定是學了才會的話，至多我們白化了許多光陰去磨刀背罷了。磨刀背比玩忽責任，我是呆笨的，所以寧使犯前者。讀者也贊同我呆人的呆法嗎？

五 弄巧成拙

巧妙的抽象彷彿是一把極鋒利的刀，也好像是一架極靈的機器。會得用的人，用來可以做很好的工作。不會得用的人，或者割破了手，或者傷害了自己的生命。

會得教人用的，別人得到了巧妙的工具，一生吃着不盡，不會得教人用的，反而害了人家。愈是巧妙的利器，愈容易有這等危險。所以巧妙的抽象，要是指導不得法，反而弄成笨拙。這叫做弄巧成拙。自作聰明和弄巧成拙，往往是相關的。所以做教師的，自己不要太聰明了。

下面是一個例子。這是從一本五年級上學期用算學教科書的第一課中摘出來的。這書是上海三大書坊之一出版的，書名上還帶着『新……』的堂皇高帽子呢。

表明各種東西的多少，所用的名稱，叫做數。

從一到九的九個數，叫做基數。

一以上的許多數，叫做整數。

從一累次遞進加十倍，變成十，百，千，萬，十萬，百萬，千萬，億，十億，百億，千億，兆，十兆，百兆，千兆，……等；這遞加十倍變成的位數，叫做整數位。

凡把基數和整數位來定數的名稱的，叫做整數命數法。

有了基數，有了整數位，就可以定出整數的名稱。

這彷彿是詞典罷。這又好像是一本點名冊。要小朋友認識同學，叫他讀點名冊，同學錄行嗎？叫他看同學的照片行嗎？還是由他和同學一起工作，遊戲，談話的好？這是誰都知道的，要認識人，非和人在一起生活不可；單看姓名錄或名片是不濟事的。用上面一段教科書教小朋友學命數法，彷彿是拿了點名冊或同學錄，和他們講各同學姓名的意義。要是我們走進教室，看見一位教師，在那裏講：『王和生是一年級的小朋友。王是姓，這是三劃王，和草頭黃不同。和是和氣，好性子，不和別人吵鬧的。和也可以當同字講。生是生產，生死，先生，學生，……王和生是怎樣的人，大家都知道了嗎？你們都認識他了嗎？明天我要問的，大家記牢！』我們心中有什麼感想？用如此方法叫學生認識同學，真正是滑稽之至。然而上面的一段教科書，不是同樣的滑稽之至嗎？我們指導的責任，是領導小朋友自己抽象，幫助小朋友自己抽象；不是替他們抽象，不是把抽象的結果叫他們記熟，抽

象的巧妙在乎抽的當兒。已經抽成後的結果，在自己沒有親自抽過的人看來，詞典而已，名冊而已，屍身而已，骷髏而已。

做母親的未必個個人懂得教學方法。然而母親們教導小孩子從具體的生活裏得到抽象的年齡觀念所用的方法，却要比我們學過教學法的教師們教命數法高明得多。『寶寶今年幾歲了？』『今年三歲。』過了年，正是看燈，吃年糕，放花爆的熱鬧時節，高明的母親們又在那裏問：『寶寶今年幾歲了？』『今年三歲。』『不！寶寶今年四歲了，吃過年夜飯了。寶寶又大了一歲了。』年復一年，我們各人的年齡觀念，那一個不是從高明的母親那裏如此學來的？母親們若是用了上面一段教科書彷彿的教法，正正式式，同孩子們解釋，和孩子們討論，說：『凡是表明各人生活經過年代的多少，所用的名稱，叫做歲。從一月一日到十二月三十一日，叫做一年。凡人生活經過了一年，他的歲數加一。從一累次遞加一年，由二歲，三歲，四歲，……等，叫做年齡。』我們不要笑母親們在那裏發痴，母親們在那

裏弄巧成拙？

記載抽象結果的教科書，弄巧成拙，連教師也上過大當呢。某小學的教師，教過上面一段的教科書。結果，把36的數目，認為6是基數，3十是整數位；把2845的數目，認為5是基數，2千8百4十是整數位。這也不能怪那教師疏忽的。實在上面一段抽象的詞典，太和日常生活離得遠了。恐怕只有專攻數理的編輯先生才明白其中的奧妙。這等奧妙，決不是言語文字所能說明的。我們如能學母親們教小孩子年齡觀念的方法，由漸培養，到了經驗相當時，巧妙的抽象自然會得成熟。如何培養，就是我們所當細細研究的問題。

六 倒行逆施

從具體的到抽象的，是我們大家知道的，大家嘴裏說着的。從具體的到抽象的，實在就是從特殊的到概括的。所謂抽象，就是在許多特殊的中間去找出共通的概括的罷了。譬如上店買布，看貨論價，是具體的。所買的布有特殊的花色，有特殊

的定價。開發票，計算銀錢，便有抽象的作用在裏頭了。用所買布的尺數乘每尺定價的銀錢數，可以求得布價的總銀錢數。這是共通的，概括的；凡是買布算價，不論布的花色如何，每尺布的定價貴賤如何，這算法是一樣的。再推而廣之，不限定買布算價是用這等算法，凡是買東西；米，書，紙，筆，衣，鞋，……一切，知道了每件的定價而所買件數比一多時，要知總價數時，都可以用此等乘法去求。再推而廣之，凡是知道了一個單元的數量，並且同樣的單元好幾個時，可以用乘法求得各單元中數量的總和。這樣，一步一步的進行，從特殊的買布而到比較共通的買一切物品，再到更共通的求同樣若干單元中數量的總和，我們叫做抽象。抽象的結果，便是一個適用於好多情境的乘法。指導學生學算，培養學生抽象，不是應當按照這進行的次序，一步一步，由特殊的而到共通的，概括的嗎？

我們討論教學法理論時，都知道由具體而抽象的口號。到了實際和小朋友學算時往往適得其反。由抽象而具體，由共通的概括的而特殊的。這不是倒行逆施！

試隨便拿一種教科書翻開來，無論學命數法，記數法，加法，減法，乘法，除法，那一單元的教材不是先教定義，次教法則，再次練習計算，結末才做什麼所謂應用問題？某教科書五年級用第一冊的第十八及第十九面上，如此寫着：

2. 小數加法

總括：凡把兩個小數或兩個以上的小數，相併起來，使他變成一個總數，叫做小數加法。

法則：把小數點對齊一行相加，其餘都和整數加法一樣。

舉例：求 $2.34 + 53.2 + 7.245 = 62.785$ (演算式從略)

注意：(從略)

練習七

(1) 求下列各式的和：

$$2.74 + 35.6 + 8.04 + 0.023 + 7.19 = ?$$

$$4.392 + 51.63 + 725.2 + 82 + 6.15 = ?$$

26. $43元 + 18.75元 + 584元 + 6元 = ?$

45. $62兩 + 3.02兩 + 8.2兩 + 792.5兩 = ?$

(2) 米三桶，一桶2石5斗，一桶1石1斗，一桶9石9斗；問共多少？

以下(3)(4)(5)三題從略。(3)是算書價，(4)是求圍牆四邊的共長，(5)是求學生開學時繳費的總數。以上教材共占第十八及第十九兩面。以前是整數加法。以後是整數減法。

總括和法則是最抽象的，在第一。舉例較具體，較特殊，却在第二。練習的題目，第一題中四式，前二式是不名數，較抽象；後二式是名數，較具體較特殊。結末四題最特殊，最具體。如此排列，可以說是依照從具體到抽象的原則嗎？可以說不是倒行逆施嗎？我們學比例的進程序，不也是先說明比例的定義，再記熟解比例式題的法則？我們練習比例題目時，不也是先算了好多好多……等特一類的式子，然後再算『三小時能抄書十五頁的人，十六小時可以抄多少？』等特

殊而具體的問題？學過加減乘法的五六年生，難道還不懂得這一類題目算法，一定要從定義法則練習比例式題，從抽象起繞上一個大圈子，才會得做這具體而特殊的抄書問題嗎？習學百分法時，我們也先拿定義，母數子數成數等抽象名詞，以及共通的概括的 $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ 等抽象公式排在前面。直等學生做過好多好多式子以後，才教『一本書定二角五分，八折，實價多少？』等他們經驗中很熟悉的具體題目。要是從具體到抽象是教小朋友學習時主要的原則，那末這種倒行逆施的算學教科書，完全應當禁止印行了呢。曾經審定的教本，難免也有此等倒行逆施的方法在內。這不是審查的疏忽，實在我們自己受毒太深，以為非如此排列進行，似乎變成了大逆不道。我自己也不能保證我從前編的小學算學教科書沒有這等倒行逆施的病。我自己更不能保證我從前指導小朋友學算時，沒有用過這倒行逆施的方法。從前種種，譬如昨日死。從今以後，我們來用心想些正行順施的方法罷。

七 見多識廣

拿抽象的結果叫學生記熟，是弄巧成拙，從抽象的定義法則教學生計算，是倒行逆施。那末，所謂正當的道路是什麼？我們用一個具體的例子來說明罷。譬如在初步指導小朋友學算時，有這樣的一個題目：『媽媽給我吃兩塊糖。姊姊又給我吃三塊糖。我共得幾塊糖吃？』裏面計有三步。一步是媽媽給糖，姊姊給糖，要算共有幾塊糖的一件特殊的事實和一個特殊的問題。一步是共通的加法觀念。一步是二加三是五的抽象計算。上面已經說過，我們若先教了第二步的加法觀念，再教二加三是五的抽象計算，然後再來解決這特殊的吃糖問題，便是倒行逆施的方法。我們應當從具體而抽象，從特殊而共通概括。我們應當使學生對於具體的特殊的事例有豐富的經驗，才能教他抽象出加法的觀念及二加三是五的計算來。要學生見得多，然後才能識得廣。道德觀念是抽象的，人生行爲是具體的。要是我們的見聞淺陋狹窄，沒有和人交際過的，怎樣能明白『恭敬，』『禮貌，』等等抽象的道德觀念。自己沒有經手過金銀的，那會明白『節儉，』『廉潔，』等名詞的意義？所以

見多識廣，是學抽象的第一關鍵。

從吃糖問題，可以使學生知道，媽媽給的和姊姊給的同是糖，可以合併。再使他們知道不但是糖可以合併，就是橘子，花生等等，只要同類的都可以合併。再使他們知道不但是吃的可以合併，就是玩的皮球，喇叭，泥人，竹馬等等，只要是同類的，都可以合併。再使他們知道不但是玩的可以合併，就是戴的帽子，穿的衣服鞋子，念的書，看的圖，寫字用的筆，連同學，先生等等，只要是同類的都可以合併。再使他們知道不但是獨立的單體可以合併，就是用秤稱的斤數，用尺量的尺數，用鐘表計的時間數，用寒暑表量的溫度數，只要是同類的也都可以合併。不但是兩個可以合併，三個，四個，五個，……十幾個，幾十個都可以合併的。不但是同時同地的可以合併，遠的距離，久的時期都可以合併的。當然，這許多許多說不盡的具體的特殊的事實，決不是一天二天可以學完，也決不是用講演的方式可以使學生明白。由漸進行，要經過很久的時期，使學生親身經歷，才行。一方面從特殊事

例而漸漸明瞭加法的意義。又一方面，從兩塊糖和三塊糖合成五塊糖；二隻橘子和三隻橘子合成五隻橘子；……二個皮球和三個皮球合成五個皮球；……二本書和三本書合成五本書；……兩位先生和三位先生合成五位先生；……兩斤茶葉和三斤茶葉合成五斤茶葉；二分鐘和三分鐘合成五分鐘；……等得到抽象的計算二加三是五。抽象不是一朝一夕所能成功，更不是三言兩語所能說明。要學生見多識廣，我們指導的責任不在多講定義，多說法則，而在開拓學生的環境，使他們接觸的範圍由漸展開，那末他們的經驗，自然而然的會得豐富起來了。領導見多識廣的人自己抽象，並不是難事。要見聞淺狹，經驗不夠的人自己抽象，簡直是點金乏術；除叫他們死記背熟外，還有什麼方法？所以每學一種算法，只用一二個例題作說明，決不足以增廣學生見識，豐富學生經驗的。

加減乘除觀念和計算的學習是如此；諸等小數百分數利息以及其他一切觀念和計算的學習也是如此。每見好多學生，嘴裏能背誦『一斤是十六兩，一兩是十錢，

一錢是十分，一分是十厘，』絲毫無誤，計算斤化兩，兩化斤的式子也絲毫無誤，然而叫他們用秤或戥去稱物品的重量，却不識得桿上的星點是什麼單位。這等學生可以說是已經學會了關於重量的諸等法嗎？會得背誦『一日是二十四時，一時是六十分，一分是六十秒，』等句子，死記熟了算法的學生，手裏拿到了一只表時，不懂得表面上長短針所在地位是幾點幾分的，比比皆是。這等學生可以說是已經學會了關於計時的諸等法嗎？這等學生，專靠死記表中句子，計算方法的，會得解決自己生活中的實在問題嗎？他們對於書本上列在式子計算後的所謂應用問題，不是依樣葫蘆的演算？有一班高級學生，已經在學比例了。題目是：『有米一桶，五個人吃，可以吃九天。今若六個人吃，可以吃幾天？』多數學生，正是鬧不清的正比例，反比例。因為學比例。也是從定義法則入手的，學生的見識實在淺狹得很，所以正比例和反比例的區別，教師說了好久，總是一個糊塗不清。忽然一個小朋友說：『先生，這是反比例，我明白了。但是一桶米的一，應該列在式子裏的那

一項呢？』呀！真使我大吃一驚！這位小朋友太精細了。到學比例時，有這等的妙問，我們以前四五年功夫的學算，不是完全浪費了嗎？老實說，這一個題目只是在那裏算這一桶米。但是式子中却不必列進這一桶米的一字。不從見多識廣入手的教法，結果往往如此。很精細的孩子，在不知不識中被我們摧殘了已經四五年了。

八 水到渠成

上面說過，抽象是算學的妙用。指導學生學算，須叫他們學會抽象。領導學生學抽象，須使他們對於具體的特殊的有豐富的經驗。上面我們用學習加法做了說明的例子。不但是加法，不但是各種計算的方法，就是數目的認識，也該如此。在第一節裏，曾經也約略說過了。現在的教科書，初學第一課，並不是在那裏教學生認識數目，僅僅叫學生學唱數目的名字或學寫數目字的形式罷了。編教科書的，做教師的，自己太聰明了，所以常常要假定學生對於某事某物是已經知道的。初上學的

小孩子，你若叫他念數目的名稱，他們或者會得順流而下，一，二，三，四，……連續唱到十，或竟二十，三十。你若仔細一些，舉出手指來叫他們數時，他們或者會得按指數去，隨口唱着，一，二，三，四……以至十。但是你若再仔細一些，等他們數完時，再問『什麼是三個手指？指點給我看。』他們竟會按照剛才數點時的次序，僅僅指着一個在第三位的手指，說道這是三個。誤第二作二，誤第三作三，誤第四作四，……是小學生常常犯的弊病。這種誤解，就可以證明他們對於人生日常生活中具體的特殊的數目，還沒有正確而充足的經驗。要是我們假定他們已經明白而急速進行叫他們命數，記數，他們如何會得抽象？除死記呆背外，他們還有什麼別的方法可以學習？

有人以為不名數固然是抽象的，名數一定是具體了。於是開始教學，便叫學生在命數記數時，不用不名數而用名數，例如一個，二本，三匹，四條，五枝等類。或者更道地些，下面再連上一件物品的名詞，例如一個人，二本書，三匹馬，四條

毛巾，五枝筆，等類。單單加上單位名稱，未必比不名數較為具體。試問，二本，三匹，四條，究竟是什麼東西？就是連上人，書，馬，毛巾，筆等東西，也不過像一篇雜貨賬罷了。所謂具體，所謂特殊，是重在事實，重在實在的問題。上節裏我們用的吃糖的例子，主要點在給糖吃糖，不單在糖。單單是糖，二塊由他二塊，三塊由他三塊，和我們什麼相干？因為給我吃，因為我要吃，所以才要明白多少，所以才要算學。雜貨賬，在他們店裏也有實在的用途，重要的功用，決不是隨隨便便記寫了就算完事的。我們教學生學命數記數，從來沒顧到什麼功用，什麼用途。爲了命數記數，所以學命數記數。這樣盲目的學習，難怪他們寫十一，十二，成爲101, 102了呢！

所謂使學生見多識廣，是要在他們的生活中，使他們覺得這增廣的見識是於他們有用的；使他們感覺缺少了這些見識是有問題的。小孩子的生活，遊戲是大部份。利用這遊戲生活，可以使他們認識數目，學習算學。這是引導他們入門的第一步。

。拍拍皮球，踢踢毬子，供供泥人，都可以發生數目的需要。有了數目的需要，使他們嘴裏說，就是命數；使他們用方法記錄出來，就是記數。譬如拍皮球，拍了三個。問他『你拍了幾個？』他說：『拍三個。』這一問一答，根據在要解決拍球多少個的特殊問題，是一種有功用有需要的命數的學習。再教他用適當的方法，把這三個記出來，成爲『3:。』這3字後不必一定要加上『個』字，或再連帶『皮球』等字，但是意義却比了空空洞洞命令他寫『3匹馬』來得具體。從拍皮球的具體事實中學到一次三的命法和記法，再同樣在踢毬子，供泥人，……以及其他的遊戲中，一次一次的學三或別的數目的命法和記法。等他們自己親身經歷的經驗漸漸豐富時，可以用故事講給他們聽，使他們從聽故事的想像中擴充經驗。經驗一天一天的增加，抽象也會得由漸萌芽起來了。這不是三課二課書所能速成的。更不是教師在黑板上寫些例子，口講指劃，用用『這是3，就是三匹馬，三本書的三。』『你們都明白了嗎？記牢！這就是三個人，三條魚的三。』『現在，看那位小朋友會

得寫的？我讀出來，你們大家寫。』……等問答說明所能成功的。要拿數目用得
多，對於數目才能識得透。故曰水到渠成。

九 面面俱到

擴張經驗是多方面的。指導時宜面面俱到，切忌偏廢。譬如學習減法的觀念，
我們可以從種種不同的事例中歸納成下面的三個樣子：

- 1 帶了十個銅元出去。買糖用了五個銅元。還剩五個銅元。
- 2 花生糖十個銅元一包。豆糖五個銅元一包。花生糖比豆糖每包貴五個銅元。
- 3 帶了五個銅元出去買糖吃。花生糖要十個銅元一包。還缺少五個銅元。

從理論上說，第一例是求剩餘，第二例是比較多少，第三例是補足。這三種情形的
問題，都可以用減法來解決。減法是一樣的；只有一種，並沒有三種。不過利用減
法來解決的事例，却可以歸納成上述的三大類。每類的事實當然很多很多。在指導
學生學得減法的用途時，宜面面顧到。通行的教材教法，貪圖省便，往往只用求剩

餘一類的事實一二個作爲例題。因此學生到後來逢到上述第二第三類的事實時，不知道利用減法。

再就第二類的比較細細研究，還有比多和比少的不同。譬如做遊戲，王生拍皮球十拍，李生拍皮球五拍。比較誰勝誰負。就王生說是勝了五拍，就李生說却是輸了五拍。再譬如學生考試測驗的分數，自己前後比較，也有進步和退步的不同。第一次得八十分的人，第二次得了八十五分。就是進步五分。第一次得七十五分的人，第二次得七十分，便退步了五分。在小學裏，本來用不着教代數裏的負量。然而使學生在相當程度時明白比多和比少，進步和退步的區別，無形中不是培養了他們對於負量得一種基本觀念，免得將來初學代數時，看到了負量大吃一驚！

還有呢！攝氏寒暑表的刻度方法，好是很好的。不過冰點作爲零度，在寒冷的地方，不免有些周折。中央氣象台每天的溫度報告，往往有最高六·八度，最低零下四·五度等話。用了這最高最低的材料，求其相差，是十一·三度。求相差，

原來是一種比較的減法。在這例子中，却要把六·八和四·五相加起來。原因是一係正量，一係負量；由正六·八減負四·五，便得正十一。三·這是初學代數者最不容易明白的。在小學裏有機會，用寒暑表實地觀察，學些此等比較，當然是不可非議的罷。又如：『甲乙二人從同地出發，一人向東走，一人向西走。甲每點鐘走六里。乙每點鐘走七里。過了四點鐘以後，二人相距幾里？』『甲乙二人，從同地出發，向同一方向進行。甲每點鐘走六里。乙每點鐘走八里。過了四點鐘，二人相距幾里？』這等題目是普通教科書中常常遇到的。同是一個求相距，就是比較相差，前者相加，後者相減。實在，都是減法。前者一東一西，就是一正一負。後者同一方向，就是同是正的，或同是負的。用方向說明正量負量的不同，是很容易明白的。我們不必教學生做代數中負量減法的算式。我們當利用這等機會和學生研究方向相同的求差，和相反時的求差，有什麼兩樣。

除法是只有一種。用除法的事實却很多很多。這很多很多的事例，大概可以歸

納成功下列的二十大類：

1 姑母把橘子十二隻送給我們三個人。我們三人各得四隻。

2 媽媽有橘子十二隻，要分給小朋友吃。預備每人給三隻，可以分給四人。

第一類，可以叫做等分，第二類可以叫做比，或叫包含。平常教師用例子說明除法時，最歡喜用等分，因此，學生逢到第二類的問題，或將來做別的除法或別的算學時，教師問：『想想看，三十六裏有幾個十二？』之類的問句，學生的心裏便覺得想不通了。因為凡是除，在他們的經驗裏，只有『三十六個銅元，十二個人分』的一方面；從來想不到『三十六個中可以有幾個十二』的。

有的教師或教科書是很道地的，把除法嚴密的區別。像上述第一類的例子，叫做『不名數除名數，答是名數；』第二類的例子，叫做『名數除名數，答是不名數。』這等區別似乎欠妥。我已說過，除法只有一種。上面二例，都是一個 $12 \div 3 = 4$ 。用除法可以解決的問題，却可以分成二十大類。不一定和名數不名數發生關係的。

我們單純的研究起來，也可以抽象的說：『把十二分作三個等分時，每份是四；』
『十二比三是四倍；』或者說：『十二裏有四個三；』『十二是三的四倍。』當然，這種種抽象的話，不是在初學除法時就向學生說的。在初學時我們要用實在的，特殊的，具體的事實做出發點。然而教到畢業而學生還不懂得『三十六中有幾個十二？』那又錯了。從抽象起，是倒打逆施。只在具體中鬧不清而不會抽象，我們幾年的指導，不是等於零嗎？使學生的經驗，面面俱到，然後再引導他們向抽象的路上進行，這是我們教算學的責任。簡括說一句，就是從具體到抽象。切實的做，差不多要幾年功夫占教算學時間的大半。又如買物論價，有時用除法求物品一個單位的價值，如：『綢五尺，共值銀二元五角。綢每尺價是五角。』有時却要用除法求一定單位的貨幣所能買的物品數量，計算才便。如：『魚五十斤，共值銀三元。今有銀五元可以買這種魚二十五斤。』等題目，是我們日常生活裏常常遇得到的。在這例中我們要會得先求一元可買魚五斤，計算才快。

諸等數單位，是一種有標準的，較精密的辦法。用物品的個體，作計算的單位，是比較粗糙的方法。譬如雞蛋，平常是講幾個銅元買一個的。然而雞蛋有大小，有輕重。我們若要精密些，便應當論斤計價。在原始時代，魚價或者是拿每條算的，雞價或者是拿每隻算的。現在却因為價值貴了，所以不得不用較精密的算法，就是定價不論條數或隻數，拿斤或兩作標準。當然，有許多像石斗升合等量的發明，目標並不是單在乎精確，却因為米麥黍豆的個體太小，不能一粒一粒的計算；酒油醬油醋等沒有顯明可分的個體，所以不得不另定一種有標準的量或權來計算。有時單體是可以顯明分別的，但又嫌太大，我們日常只能割取他的一小部份，那末割的部份只好用某種有標準的單位計算。譬如牛肉，羊肉，豬肉等，在遊獵時代或遊牧的民族裏，儘不妨拿頭數來計算。我們平常的肉類賣買，却論不到一頭那麼大，所以要用斤兩了。

現在我們日常用的所謂諸等數，其實還欠精密。在沒有統一時，同是用尺的名

稱的，有海關尺，市尺，木尺，裁縫尺……等種種的不同。同是用斤或兩的名稱的，有庫秤，漕秤，市秤，……等種種的不同。同是用石的名稱的，除漕斛外，各地大小出入，有相差到七八倍之多。現在推行新制，目標是在謀全國統一。並且要使統一的市制和世界通用的公尺，公斤，公升制有個一定不變的比率。從不一致的標準到統一的標準；從一國的統一標準到和世界公制有一定不變的比率。這是諸等單位精密程度的進化。在科學中用的單位，比日常計算用的更要精密。譬如計算振動，我們用週率作單位。實在，所謂週率是秒週率，就是一秒時間中的週率。家常日用的電表，俗語說是二角大洋一度。這一度就是一千個瓦特時。因為一個瓦特時太小，所以用他的千倍。所謂瓦特時，是說一小時中電力一瓦特的意思。單講振動次數，單講電力的瓦特數，還嫌太粗，所以我們加上一個時間的標準進去，使單位更加精密。拆穿西洋鏡說，百分法沒有時間性，利息是有時間性的；瓦特時，秒週率等，當他們年利率，月利率一樣看待就是了。

僅就單位的精密程度論，要面面俱到的使小朋友經驗豐富，已經有這許多。現行的教法，把許多經驗丟開不管，只叫他們死背一斤等於十六兩，一分等於六十秒，……等所謂諸等表，叫他們呆做所謂諸等數的化法聚法加減乘除，以及關秤改算市秤，公尺改算木尺，……等等式子。結果，使學生對於諸等數，只覺得繁複瑣碎，難於記憶。受過如此教育的學生，將來成長起來，叫他們推行新的統一的度量衡制，他們會得有良好的態度沒有？勢必說：『鬧什麼新制度！我們幼時在小學裏，被這等新制度頭也鬧昏的了。』要是我們不拿繁複的表叫他們強記；不拿瑣碎的改算去減衰他們的興趣，我引導他們從各方面觀察諸等數各單位的精密程度，單位所據標準的必須統一，不但增加了他們的經驗，同時從學生對於諸等數濃厚的興趣中，產生出一種推行新制的潛力。或者有人以為不呆做練習題，學生不會熟習。這是不必擔憂的。呆做熟的，一出校門便易忘記。由用而熟的，到死也不會忘記。學生所學算學，若是永遠用不到的，由他們忘記了也沒有什麼可惜。這是另一問題，以後再

細細的談罷。

普通教材中的百分法，百分率，就是成數，總是在百分之一百以下的。但是我們大都市的日報中，常常記載着物價指數拿一類的材料，裏面有百分之八十六，也有百分之九十八，更有百分之一百另二，百分之一百二十，……等等。學過百分法的學生，看不懂這物價指數的意義，我們的指導學算，可以算是圓滿了嗎？百分率一定要比百分之一百小，猶之除去的除數一定要比被除數小，一樣的笑話。做慣百分率一定比百分之一百小的學生，逢到『去年的米價平均每石九元六角。今年的米價，平均每石十二元。照去年平均價做標準，今年的平均價是百分之幾？』一類題目，會得誤認九元六角是子數，十二元是母數，求得的成數變成百分之八十。因為一向做慣了母數比子數大，成數不滿百分之一百，所以決不敢破例把十二元當作子數，把九元六角當作母數。要是有一位聰明些的學生，報告成數是百分之一百二十五，大家聽了，或者笑他是做錯了。這是教百分法極容易忽略的一面。

十 事事關心

就一種教材說，我們應當把他的各方面都使學生經驗到。就教材的全般說，我們指導學生學算，不僅僅是教他變成活的算盤。在小學程度的算學科，內容實在包含得很廣泛。因為小學教員的目標，是在養成會得在社會中生活的完人。要在社會中生活，我們有多方面的準備。身體的健康，發表的能力，和人合作的精神，……以及關於經濟方面數量方面一切的常識常能，都應當顧到的。就小學的課程論，所有關於經濟和數量方面的常識常能，只有算術科來負擔這個責任。學生學算學，不單單是會了二加三等於五；二乘三等於六，便了事。只會計算的人，自己不能解決自己的問題，只好供人使役，彷彿是一個活的算盤罷了。單單會得解決自己的問題，不過是一個自私自利的個人主義者，有時不但於社會沒有利益，反而使社會受到無窮的損害。不要說貪污，就是一個守錢奴，已經足夠使社會暗暗中受累不淺。若就計算劃策和解決自己問題方面說，守錢奴和貪污者的算學，一定是高人

一等呢。我們的教育，應當使學生能合作的解決社會問題。社會問題中有好多是關於經濟方面的。單單靠社會科裏的研究討論，怕效力太淺。算學科如能和社會科互相聯絡起來，一定可以使學生得到深切的興味與良好的態度。譬如學生學習利息，不但應當使他們明白利息的意義，利息的算法，並且應當使他們明白銀行，錢莊，典當，高利貸等習慣，和這種習慣對於社會所生影響的好壞。為什麼錢可以生錢，本金可以生利息？為什麼國家對於利率有相當的限制？為什麼高利貸會得使農民破產？……等等，都是高級學生應當同時研究的。不然，單單就計算利息方面說，利率愈高，利息愈大；貪多是人之常情，學利息愈熟的人，心理上愈容易發生傾向高利貸的態度。

即使退一步講，在現在的經濟制度下，提倡儲蓄，當然有相當的價值。然而儲蓄有郵政儲蓄，銀行儲蓄，存放店鋪，直接貸與，以及有獎儲蓄，……等等的不同。同是銀行儲蓄，利率也各家高低不一。貪多的人，往往不明利害，只揀利率高的

。其實就信用論，利率高的或者反是不可靠。貪圖利率的優厚，因而連本一起被倒的事例，近來常常有得聽到。我們若希望學生將來在這等社會中生活，可以不把內中關係指導他們嗎？所以像那一種儲蓄方法最妥當？利率的高低和信用有什麼密切的關係？為什麼拿利率優厚來號召的未必一定可靠？有獎儲蓄的利弊是什麼？……等等問題，都是學利息時應當一一顧到的。

有好多事物，表面上看來，似乎是大家都知道，不必再詳教的；有的似乎不屬算學範圍，教算學時只須直接拿來應用的。但是經驗告訴我們，這許多事物是不能不詳教的。要是疏忽了，連相關的計算方法，也弄得糾纏不清。舉一個淺近的例子罷。譬如單位的名稱，多少重是一斤，多少長是一尺，多少久是一分鐘，……：都應當使學生從具體的事物中，得到確切豐富的經驗。要使學生得到這種經驗，決不是教員的講解，教科書的誦讀，可以求成功；要使他們從實實在在的事情中用秤稱物，用斗量物，用尺度物，用鐘表計時。用會的，才是真正的經驗。念熟強記的，

不久便要忘記。對於單位有了確切的經驗，才會得用了單位去計算，由計算來解決人生的問題。從前的教法，單位的經驗，往往是略去不管的。其實，這是計算的基礎。

又譬如買賣，收付銀錢，我們成人是天天用到的，用來極熟，不必多想，沒有不能應付裕如。然而小學生一向不管這等事，日常需要都是父母代他們辦好了的，所以他們對於買賣的經驗是極貧乏的。他們既沒有確切而豐富的買賣經驗，怎樣會得算『買綢五尺，每尺價七角六分，共值多少？ 付五元鈔票一張，應找回銀多少？』等題目？有許多小學裏，開設販賣部，合作社，這是很好的。有了這等機關，可以增加他們好多買賣的經驗。有一位教育家，他每逢開學繳費，一定是領了子女，叫他們自己去繳的。這也是使子女多得一種銀錢出納的經驗。實在，到了相當程度時，最好學生個人的費用，完全自己處理。這樣，可以得到出納，記賬等等經驗。要是機會不夠的話，儘可以在教室裏開起店來，用表演遊戲的方式，使學生得

到買賣記賬等等經驗。假想的開一引舊貨店，可以使學生得到折扣的經驗；做一個遊戲，可以使學生得到保險的經驗（詳商務出版小學算術教學法第三十五頁及六十七頁。）

兌換是我們幣制沒有統一的社會裏的特有的怪現象。但是在這社會裏生活，却不可不有這種經驗。某教科書，在四年級的下學期的結末幾課，教發票時，附帶的大約有二三頁光景的材料。四年級生在放假前，草草的把書上的題目算過，大半是莫明其妙。有一個學生要我在假期中教他補習。我開倒車，從最後的發票和找錢兌換等開始。預料最後教的，復習的機會最少，所以最容易忘記。而且也想到兌換找錢的複雜，怕學生未必真正能澈底瞭解。第一天，出了三五個題目叫他做。不出我所料，大半是錯的。再細細的問他，我知道，他對於大洋，小洋，貼水的經驗，完全沒有。從第二天起，每天化一點鐘的功夫，把兌換的手續，細細的分了十多個步驟，每次進一步，學習三天或兩天。教科書上二三頁的材料，我擴充到四十天的一

個假期。這是我呆人用的呆方法。得到經驗，或者呆方法來得安穩些。要是太聰明了，怕只學了一句說話，一個名詞，連意義也不會明白，那裏談得上什麼經驗！

前一章裏我們也提到過度量衡的統一問題。我們的意思是新制的學習宜注重使學生明白標準統一的重要，不宜多叫他們做換算的問題。同理，萬國公制的學習，外國度量衡貨幣的學習，都不必太重記算。這等教材的功用，是在養成一種良好的態度和傾向。公制何以比我們統一的新制更好？因為我們的新制，至多能統一全國；公制却可以統一世界各國。要是世界各國都採用了一致的公制，所有學問上，事業上的換算問題，完全可以省去。最低限度，我們看到日報雜誌上關於統計的報告，可以便利不少。

學習外國度量衡貨幣，目的不在換算，是在比較。世界各國中度量衡制，英美最壞，德法最好。在英美，度量衡都不是十進的。日常生活的計算，處處非用分數不可。他們的測量者，也覺得長度不十進的周折，所以特別規定把一英尺分作十個

等分。在美國，他們深感鎊先令便士等的周折麻煩，所以獨立以後，貨幣制度便改成十進的金圓。這是他們的聰明處。不過度量衡因積習相沿，至今還和英國一樣，不能改用十進的公制。這是他們的呆笨處。德法的度量衡，完全是用公制。他們的貨幣也完全是十進的。歐洲拉丁民族的幾個國家，連貨幣也統一了。這是世界制度中最合理的。再拿我們的制度來和世界比較，度量衡十進的居多數，只有斤和兩，里和丈是非十進的。我們的度量衡制，雖沒有德法那般便利，比英美却要進步許多。所可惜的是一向來標準的不定。現在第一步統一標準，正在努力進行。將來再把斤和兩以及里和丈的關係也改成了十進，一定更加便利。再進一步，完全採用公制，那末便是『以進大同』了。和小朋友如此研究，不是無形中給他們一個『以進大同』的具體經驗嗎？不是養成他們一種『以進大同』的良好態度嗎？統一固有的標準，是『以建民國；』採用公制是『以進大同。』算學和唱歌，在學生心理上得到了一個密切的聯絡。

我們的貨幣制度，却是世界上最紛亂混雜的。英國的幣制雖完全不是十進，但各單位間的比率却是固定不變的。我們有用銀碼的；有用銀圓，即俗所謂洋碼的；更有用小洋碼以及錢碼的。銀兩，銀圓，小銀圓，銅元，各自成一標準，彼此間的關係，有早晚不同的市價。所謂市價，實在就是等於外國貨幣的匯兌。同在一國裏，同是銀兩，或同是銀圓，各地方的市價也各各不同；彷彿各地方各自成功一國。這種紛糾複雜，只有靠銀錢兌換吃飯的人弄得明白。他們靠此取利，我們却受到『拿銀圓一個換小銀圓，再拿小銀圓換銅元，再拿銅元換小銀圓，幾回的兌換，一個銀圓可以變成幾個銅圓』的苦痛。廢兩改圓是統一貨幣制度的第一步，就是所謂『以建民國』的工作。將來或者更進一步謀『以進大同』。

此外，我們可以和學生研究物價的漲落，公債股票匯兌率的升降。不必太重計算，應當討論升降漲落的原因，和對於我們個人和社會生活的影響。這是最初步的經濟常識。又如統計圖表的想法；電表，煤氣表，自來水表，寒暑表的想法；經度

緯度的意義；標準時，時差的意義；郵政寄費表的用法；以及角度等等，都應當注重經驗的養成，不必太重計算。某地方初中畢業生會考，在算學題目中，大多數會得把攝氏寒暑表上的度數改算華氏表的度數。但是自然題目中，卻有好多人回答：『人體平常溫度是攝氏六十八度！』教成這種學生，我們可以說自然教員失敗，算學教員已經成功嗎？嚴密的講，教育的全體都是失敗。因為學生是一個人，那裏可以分割成功算學自然……？一方面不健全，全人格便有了虧損。同樣的笑話是舉不完的。譬如計算時差題目很熟的學生，不知道漢口，南京，上海的鐘表應當那一個早，那一個遲。學過算學和物理學的學生，電燈電壓二百二十弗打的『弗打』會得和電燈泡二十五瓦特的『瓦特』混為一談。方音，弗打和瓦特是相似的。電燈泡的『瓦特』和電表上的度數有什麼關係？電表上的轉數和度數有什麼關係？我嘗把此類問題，和研究小學教材的高中師範生提出討論時，他們都覺得新穎有趣。

總之，算學教材不一定要算的。凡是關數量經濟方面和社會個人有關係，別科裏不容易顧到而和學生程度適合的都要教。但是不一定教學生算。最重要的，還是在增加他們的見識，擴充他們的經驗。小言之，我們不能在衣袋裏常常帶好尺秤等度量器具，所以我們應當對於平常的長短大小輕重等會得約略估計。這也是一種常能。用遊戲比賽的方法，叫小朋友猜平常物品的長短大小輕重；再用度量器具來校驗，看誰猜得頂近似，這是一種很有興味而且很有價值的方法。學角度的學生，叫他們用了三角板和分度器測看房屋，塔，烟囱，樹，太陽等的高度。或者叫他們先猜，然後再測。這樣，『日上三竿』等不合理的說話，可以改作『日上三十度』了。這不是養成一種科學化的態度嗎？

我們說擴充具體經驗，我們的意思是要學生親身經歷的。普通所謂實物教學，拿幾塊木頭在教桌上排列給學生看看，算不得是具體。學生在旁觀的地位，算不得是觀察。教發票時，拿出店家的發票來給學生傳觀，只可以算是一種參考罷了。要

真正得到發票的經驗，非叫他們表演開店買賣，或參加販賣部，合作社，親自活動不可。經過多方面的活動，才能夠得到多方面的經驗。

十一 整理教材

前章裏我們說過，平常教科書二三百頁的發票教材裏關於兌換大小銀圓的一部份，可以分作十幾個步驟，每天一點鐘，經過四十天的假期，才得弄個明白。以前各章裏我們也常常提到各種教材不能直接開始教學生計算，教學生解決問題，應當用種種方法，在各方面增加他們的具體經驗。並且所謂經驗不是由教師說明幾句，便可成功，一定要由學生親自活動經歷。我們更提到有好多關於數量和濟經方面的事物，從來算學科裏不管的，也應當一一顧到，詳細研究。這麼一來，教材方面發生了一個很嚴重的問題了。問題是什麼？就是時間不夠。反過來說，就是教材太多了。原來一星期或三天草草可以教了的，現在要化到三四十天。那末本來預定要教的別種教材，不是沒有相當的時間了嗎？原來的教材正嫌時間不夠分配，還要加出

本來算學科不管的東西，不是時間更不夠了嗎？我們來增加時間罷。這是要牽涉別科的。小學裏的科目有好多。各科都覺得教材多，時間少。算學加多，勢必別科減少。統盤籌劃，實在是沒有一科可以割讓時間的。若說不減別科而獨獨加增算學的時間，那又使小朋友全體的時間加多，就身體的發育方面說，似乎又欠妥當。注意健康教育的人，對於現在的總時間數，還嫌過多呢。

增加時間是做不通的。那末只有減少教材。前面我們說有好多教材要添加出來，這裏又說要減少教材，不是自相矛盾了嗎？教育是有時代性的。因為社會是進化的。進化的歷程中有一個新陳代謝的機能。教育是社會事業的一種，我們也希望他進化，不希望墨守陳法，更不願開倒車。所以教材和教法，當然也有一種新陳代謝的作用。前面所說要加的教材，或者可以算是屬於新的。我們不妨拿算學科裏全般的教材來，細細檢討一下，看看有沒有因社會情形的進化而在時代性方面落伍的。要是有的，可以刪去，讓出時間來了。數學家聽了這話，或者要羣起反對，說算學

是一種科學，沒有時代性的。譬如在發明的當初，圓周率是三·一四一五九……，到現在仍舊是三·一四一五九……。即使數理方面，或者經後來人的精密研究有所修正，但是決不會有什麼新陳代謝。決不能因為新加了別的教材，把舊來的圓周率淘汰不學。

就純粹的數理講，我也同意。但是小學裏的算學，屬於人生日用的居多數，屬於純粹數理的居少數。小學生中，將來能成功數學專家的，當然也有。但是大多數，却是將來用算學來解決個人和社會問題的。用算學解決人生問題，却因時代的進化而有重大的變遷。譬如折扣，從前有外扣和內扣的分別。這分別不好算是數理，只可以算是人定的制度罷了。現在社會通行的折扣，只有一種，所以教材中早已把內扣和外扣的區別淘汰了。譬如有人能發明一種輕便價廉的計算機器，大小不過香匣子彷彿，製造的成本不過幾角錢，差不多大家可以備一個放在衣袋裏。這種小巧玲瓏的計算機，只須用手指撥動數目，可以做出加減乘除的答數來，絲毫沒有差誤

。到了這時候，我們小學生不必再像現在般，化好多功夫練習筆算的加減乘除。當然，笨重的算盤也可以淘汰而珠算的教學不成什麼問題，我們教小朋友學算，或者和現在教打字一樣，着重在手指的運用，不必較量答數的錯不錯了。因為答數有機器在那裏管理，只要機器不壞，答數是絕對不會錯的。修理機器，或者變成人人必學的常能，也列在算學教材中呢。這不是新陳代謝嗎？然而數理還是沒有變。到那時淘汰的筆算珠算，二加三是五，二乘三是六；在那時新興的計算機器，二加三仍舊是五，二乘三仍舊是六。數學家可以安心了罷。我們的新陳代謝，是在用的方面，和純數理是沒有關係的。

下面是現在通行的某一種高級小學用算術課本的內容大綱：

第一冊五年上學期用

- 一 整小數的命數法 整數命數法二頁半，小數命數法二頁。
- 二 整小數的記數法 整數記數法三頁半，小數記數法二頁半。

- 三 整小數的讀法二頁。
- 四 整小數的加法 整數加法四頁半，小數加法二頁。
- 五 整小數的減法 整數減法二頁半，小數減法二頁。
- 六 整小數的乘法 整數乘法四頁，小數乘法二頁。
- 七 整小數的除法 整數除法五頁半，小數除法二頁半。
- 八 加減及乘除的關係 加減的關係二頁，乘除的關係二頁。
- 九 加減乘除的關係及括弧 加減乘除的關係二頁，括弧二頁半。
- 十 總習三頁。
- 十一 本國十進複名數 意義二頁，長度二頁，面積二頁。
- 十二 續上 體積二頁，容量一頁半，貨幣二頁。
- 十三 非十進複名數 意義一頁半，重量的化法二頁半，重量的加減法二頁半，重量的乘除法二頁半。
- 十四 續上 里程二頁。

- 十五 續上 地積二頁半。
 - 十六 續上 時數三頁。
 - 十七 續上 圓度二頁。
 - 十八 總習三頁。
- 第二冊五年下學期用
- 一 奇數偶數及素數複數 奇數和偶數一頁半，素數和複數二頁。
 - 二 約數和倍數 倍數二頁，約數二頁。
 - 三 素因數 素因數推測法二頁，素因數分解法一頁半。
 - 四 公約數和公倍數 公約數一頁半，公倍數一頁半。
 - 五 最大公約數 簡數的最大公約數求法二頁，大數的最大公約數求法三頁半。
 - 六 最小公倍數 簡數的最小公倍數求法二頁半，大數的最小公倍數求法三頁。
 - 七 總習二頁。

- 八 分數的意義和記法種類 意義二頁，記法一頁半，種類二頁半。
- 九 分數的性質和化法 性質二頁，化法二頁。
- 十 分數的約法和通法 約法一頁，通法二頁。
- 十一 分數加法 同母分數加法二頁半，異母分數加法三頁。
- 十二 分數減法 同母分數減法三頁，異母分數減法三頁。
- 十三 分數乘法四頁半。
- 十四 分數除法五頁。
- 十五 總習三頁。
- 十六 小數分數互化法 小數化分數法二頁。分數化小數法一頁半。
- 十七 續上 循環小數化法二頁半。
- 十八 總習三頁。

第三册六年以上學期用

- 一 萬國名數 意義二頁，長度二頁，面積和地積二頁半。
- 二 續上 體積和容量二頁半，重量二頁半。
- 三 英美名數 意義一頁半，長度二頁，重量二頁。
- 四 外國貨幣二頁。
- 五 複名數分數 複名數分數的化法二頁半，複名數分數的加法減法二頁。
- 六 續上 複名數分數的乘法除法二頁半。
- 七 總習二頁。
- 八 百分法的意義和記法讀法及互求 意義二頁半，成數的記法和讀法三頁，母數子數成數互求法三頁半。
- 九 百分法的應用 折扣二頁半，佣錢一頁半。
- 十 續上 匯兌二頁。關稅二頁。
- 十一 續上 保險二頁。

十二 總習一頁半。

十三 單利法的意義和利率 意義二頁，利率四頁。

十四 單利法的計算 利息二頁，本銀一頁半。

十五 續上 利率二頁，時期一頁半。

十六 續上 本利和三頁半。

十七 複利法的計算 本利和三頁，利息二頁。

十八 續上 本銀三頁。

十九 總習三頁。

第四冊六年下學期用

一 比 比三頁半，單比三頁。

二 續上 複比二頁半，連比四頁半。

三 比例 意義二頁半，求缺項法三頁。

- 四 單比例 正比例三頁。
- 五 續上 反比例三頁。
- 六 複比例四頁半。
- 七 連鎖比例四頁。
- 八 配分比例四頁。
- 九 混合比例五頁。
- 十 總習二頁半。
- 十一 求面積 三角形八頁半。
- 十二 續上 四邊形八頁，圓形二頁半。
- 十三 求體積 柱體四頁半，錐體和球體五頁。
- 十四 總習一頁半。
- 十五 簿記的意義和種類 意義二頁，單式簿記四頁半。

十六 續上 複式簿記六頁。

十七 總習六頁半。

就用的立場論，第一冊各項教材，都是人生日常用得到的，沒有什麼可討論的地方，第二冊却有問題了。前六次是整數的性質。這是從純粹的數理方面流傳下來的。其中有一部份，可以作為分數的預備，第八項到第十四項，完全是分數。我們日常要用到分數的，實在太少了。我們的祖宗比西洋人聰明，雖沒有發明小數點，却早已會得使用小數。所以非十進的斤兩關係，我們不用二分之一，四分之一，八分之一，十六分之一，而有『一退六二五；二，一二五；四，二五；八作五』等簡捷的方法，人生日用的度量衡，我們比英美進步；我們不必像英美人的需要分數。那末，這一學期的教材，可以說全是不必要的。就是在英美，除日常生活的度量衡以外，現在利用小數的地方實在比分數多。因為分數的用途太少，所以做分數預備的整數性質，連帶也失去存在的價值。即使我們有時用些分數，分母也逃不出，2

，3，4，5，6，7，8，9，10，12，16，20，等等。第六第七兩項中的大數的最大公約數和大數的最小公倍數的求法，學了做什麼？第十七項的循環小數，也和整數一樣，研究數理，是很有趣的；人生日用總是用四捨五入，或五捨六入法，誰也不管什麼循環不循環。有空時，和學生弄弄數理，也有相當價值。不過應當在人生日用的教材學了以後。不然，先緩後急，不是排列顛倒了嗎？我是主張不必學分數的。詳細請看小學算術科教學法第十章（商務出版萬有文庫本。）

第三冊的前三分之一是外國度量衡和外國貨幣。因為內容太重了換算，所以化的時間太多。若能照前章所說的方法處理，或者時間不一定要化得如此多，而效用却可以增加不少。最奇怪的是第五第六兩項的複名數分數。在諸等數大多數是十進的社會裏，也模仿了英美人學4—7担，3—4斗，豈不是滑天下之大稽！抄襲別人的東西，應當先想一想這東西是什麼用的。依樣葫蘆，不是白白的浪費小朋友的精神和時間！第三冊的中三分之一是百分法。百分法的應用，折扣和調錢，用

途還普遍。匯兌和關稅，簡直是商業算學了。利息占了後三分之一。這一冊的一半以上是商業算學。農工商都是重要的職業，何以獨獨重商？鄉村小學應重農，何以獨少農的教材？這是有一個理由的。外國起先的小學，是專供城市裏商人子弟就學的。這是初等教育史中的事實，大家都知道。社會進化了。商業中心的城市以外，又加了工業中心的地方。初等教育也推行到農村裏去了。所以近來年外國的算學教材，已經漸漸的加多農工方面的問題，把從前純粹商業教材，轉移到職業性質的商科算學裏去。我們抄了他們從前的老教科書，一勞永逸，以誤傳誤，再也不注意他們新近的進步改良，更不留心考量一考量我們的縣城，鄉鎮的實在情形。要是稍稍留心本國情形的，典當和錢莊，在我國至今還有重大的勢力，他的利息問題，一定要詳細討論研究的。處理的方法，前章已經詳細說過，不必太重計算。

第四冊的前半是比例。單比例儘可以用平常的四則來計算。別種比例，我們除了做學生時照樣的學習以外，無論日常生活或是職業方面，用到的地方實在太少。

複比例中有開溝計工或計時的問題。但是真正開溝時，工程師，工匠，誰也不用複比例計算。多少錢一方，是通用的算法。計算土方的單位，全部算學教科書中，始終找不到呢。後半是求積和簿記。求積中三角形四邊形占到十六頁多，還有九頁多的柱體積，錐體積，和球體積。簿記却只有十二頁多。不常用的教材特別多；常常用的簿記特別少，可以說是本末倒置。

四冊教材書中，第二冊至少可以淘汰三分之二，或竟全刪了。第四冊的比例至少可以淘汰四分之三，求積亦然。這樣，不是可以多出一個學期半光景的時間了嗎？此外，像外國度量衡貨幣，利息，百分應用等照前章所述的方法處理，或者還可以節省一部份浪費在抄題目，計算，對答數等工作的時間。就大體論，已經有好多時間可以節省出來。如再把諸等數，百分法等內部組織改變一下，或者還可以節省不少。改組的詳細辦法，可以參考小學算術教學法（商務出版，非萬有文庫本）第二章第三節及第四節。還有好多節省浪費時間的問題，因為不屬教材範圍，所以

留到後面再說。

新出的課本，未必完全和上述的例子一樣。但是比這一種更多應行淘汰的教材的課本，或者還有。我們不是要批評教科書的好歹，我們是討論教材的應當整理。總之，社會不斷的在那裏進化，社會中應用的算學就不得不跟了有變遷。教材的變更，往往比社會的進化落後，所以經過若干時期以後，不得不用大刀闊斧的手段來清理一下。社會變遷中最大的，是從前的小學只在城市，所以教材偏重商業。在當時，小學校差不多總帶上些商科職業準備的意味。現在的小學，有的在工業中心地方，有的在農村。因此，職業準備，不能不隨社會情形而化分。有人主張普通的小學算學，完全不包含職業準備的材料。也有人主張，不必絕對把職業準備的教材刪除，應斟酌調劑，使農工商材料各方面都顧到，不專偏在某一方面。還有一個主張，是課本分三類，各各包含不同的職業準備材料。三個主張各有相當的理由。我們應當就普通人必要的先教，時間容許，然後再顧到職業準備。

從前的小學，也有人誤會當作是中學的預備，所以小學裏的科目，完全變成中學的雛形。教材內容，也是具體而微。說得好些，叫做具體而微。說得不好些，却變成中學教材的骷髏。算學教材，種類多極。每種寥寥幾頁，草草處理，弄成一個食多嚼不爛的大病。小學本身有一定的目標，現在大家都已承認。所以小學教材的取捨，應當根據小學的目標決定。中學裏要學整數性質，由他在中學裏去學就是了。小學目標，是養成普通的人，在社會中好好生活的人。他們所需要的算學，是供生活用的。小學畢業以後，是否個人進中學，我們不能預定，何必白化功夫，丟開生活必用的而去預備那將來不可預料的？淘汰學究式的，純數理的，專作中學預備的教材，是當今很急切的問題。這一關打不破，小學算學始終受了中學的支配，小學自身的目的難以達到。因此成效總是個囫圇吞棗，半生不熟。

還有是我們從前抄襲外國教材抄錯了的。譬如上面說過，英美的注重分數，完全是因為度量衡的非十進。我們不可盲目的抄用；應當根據社會情形，自己來決定

一個合理的辦法。究竟小學生應不應學分數？要學多少？這是我們今後當詳細研究解決的。更有一部份是抄譯外國教材時，把本國材料替代錯了的。例如度量衡制度中的『步』『斛』『畝分厘毫』改作畝，分，方丈，方步，方尺』等，都是應當改正的。新出教本中，知道改的也有。仍舊沿用筆算數學中錯誤的，也還不少。

根據了這幾點，我們整理教材，可得幾個總括的要點。第一是淘汰不必要的，例如商科用的關稅，爲中學預備的整數性質及比例，不合社會日常應用的分數等等。第二是增加新的。例子以前舉了好多，譬如計算裘的面積用的單位，計算木板用的單位，計算沙土用的單位，物價指數，生活指數，計算工資的單位，用 \times 解決問題等等。從前教算學的態度，不肯把簡便有效的方法教學生，偏偏要繞幾個大圈子，作難他們。譬如像雞兔同籠，鐘面長短針相重或成若干角度之類。又如用普通四則極容易計算的問題，硬要叫學生列什麼正比例反比例的式子。從前有個謬說，叫做心力訓練，亦名『形式陶冶』，以爲拿這等難題目作難學生是開發他們心思的。

經過一番這種訓練以後，學生的思想會得精密。此等教育理論，現在已經用科學的方法證明錯誤，毫無價值。小學算學的目標是在用。彷彿給學生一種利器。用X解決問題，是利器中最好的一種。第三是改變處理的注重點，例子以前也舉了不少，如外國度量衡貨幣，公債股票等等。第四是內部排列組織的改善，前面也已提到。整理教材的問題，到此暫告結束。下面要討論學習方法的整理了。

十一 整理教法

算學的教法在我們從前是很簡單的，只有熟讀口訣，練習手法。這可以說是我們學習珠算的唯一方法。在筆算初輸入時，我們也沿用這方法。口訣是必須熟讀的。不過筆算和珠算不同，只須抄題目，寫答數，沒有什麼手法。從學習的理論上說，這是呆板的，機械的練習。讀熟口訣，不免耗費時間。曾經看見一級二年生，上課前半時，完全是共同朗誦乘法口訣，到下半時才做題目。心理學家說，計算的熟習是養成習慣。習慣是刺激和反應的連結。連結愈直捷，習慣愈良好，計算愈迅速

。譬如珠算，算盤上放了一個十二，現在要用五去乘，最直捷的是手指和乘法發生密切的連結，就是個位上的二改作一，十位上的一撥去，個位上珠撥下，結果是六十。若是筆算，要練成眼和手的直接連結，就是看見個位25一便寫0進一；看見十位125一0便把五和一合寫成6在0的左面，結果紙上出現60的答數。若是心算，要練成五個十二是六十的連結，脫口而出，不再借助口訣。要是做一算學題，一定要先念口訣，再耳聽口訣的聲音，然後再撥珠，寫答，或口念答數，實在是太周折。題目是刺激，和口訣的反應發生連結。口訣的聲音再做刺激，和手指撥珠的反應發生連結，或和手指寫答數的反應發生連結，或和口念答數的反應發生連結。要兩個連結，才能成功一個習慣，算學題目和答數的連結，要經由口訣，不是直接的，是間接的。多一度口訣的轉折，效力要比直接的連結薄弱得多。所以按照學習心理說，熟讀口訣是笨拙而耗時的方法。

悶頭練習也有好多不妥當的地方。就練習和時間的關係說，初開始時效力不很

好，後來效力漸漸加增，到了相當時間以後，效力不能再增。再後來精神疲乏，效力反要減小。這時間的長短和年齡有密切的關係。從來一味叫學生呆做，要是時間過久，後半節，差不多只會使學生的精神增加疲乏，使學生對於練習增加厭惡罷了。練習時的興味和效果的好歹有重大的關係。興味未必就是開心或有趣。爲避免誤會，我們可以改作『志願。』志願和興味，意思不是完全相等；實在是一種活動的兩個方面。我們願做的事，即使不開心，不有趣，或者竟是十分的麻煩，或者竟是有若干痛苦的，我們練習起來也不討厭。練習的效果也很美滿。效果美滿了，下次的練習，志願更加堅強、練習時的努力可以克勝一切的單調，呆板，寂寞，麻煩，痛苦。有了好的志願，練習的效果會得好。有了好的效果，可以鼓勵下次練習時的志願。我們要學生計算純熟，當然不能不叫他們有耐性的練習。我們的要點，是在怎樣使學生志願練習？這不是用訓話命令可以激起的。這也不是用講演說明可以成功的。『循循善誘，』的確是教育方法中的一句至理名言。這『誘』不是欺騙，

是領導；就是帶了學生，走進算學的樂園，使他們自己心底裏發出要練習的志願來。所以悶頭練習，只要時間適宜，方法經濟，是應當的，不悶頭練，如何能造成連結？如何能純熟？不過這『悶頭克苦』的工作要是學生自願的，效果才大。若由教員或家長強迫，表面上看來，似乎在那裏悶頭練習，其實學生的心，却在想『時間快些過去罷！爲什麼鐘表走得這樣的慢？是不是搖鈴的人忘記了嗎？』或者更偷看教員或家長是否嚴密監督着，想找一個機會，做一些自己願做的事。學生的心理狀態如此，他只是分心在練習以外，那裏再肯努力？

我們的學算方法，始終只有上述的一種。外國人研究教育，有相當的歷史和成績。他們研究學算的方法，也有好多。在從前，大多數注重在數目的本身上。第一個問題，便是數目的來源，就是說：『數目是怎樣產生的？』明白了數目的來源，便可如法泡製，教小學生去。有一個主張，說數目的來源是數。這『數』字是動詞，就是小孩子用手指指着了東西，嘴裏念着一，二，三，四，……等的動作。數完

以後，得到一個結果，便是數目。數目是數的結果。數是產生數目的根本動作。數目字就是記載數的結果的符號。我們可以在數目字的形式上，推想到從前人由數產生數目的遺跡。譬如羅馬字的記數法和用手指數是一致的。| || ||| 就是代表一，二，三，四個手指。五在起先是寫作 VIII 形的。第五直稍稍傾斜，彷彿是人手的拇指。後來改作 𠄎𠄎。現在外國人計算選舉票或作統計時，還用類似的記法，如 𠄎𠄎。我們是用『正』字的。後來五字省寫作 V 或 𠄎；十字省寫作 𠄎 而再縮成 ×。阿刺伯數目字，亦然。有人以為，是用方匡記數目脫胎出來的。1 是 1。2 是由 𠄎 變來的。3 是由 𠄎 變來的。𠄎 變 𠄎，再變 4。𠄎 變 5，再變 5。5 變 6。日省作 𠄎。再變 7。𠄎 變 8。𠄎 省作 𠄎。再變 9。我們的『一 二 三』至今還留着數的遺跡。

根據數目由數產生的理論，教算學應當從數入手。加法不過是數的連續者。說明四加三是七時，應當叫學生從四起，連續數三個，『五，六，七，』結果是七。

減法是加法的反動，就是連續倒退的數。說明八減三是五時，應當叫學生從八起，連續退數三個，『七，六，五，』結果是五。乘法是同數連加的變相，除法是乘法的反動，也就是同數連減的簡便方法。學乘法，應當拿連加作基礎。連加是一種較複雜的數。在²的乘法前面，有『從²起，每兩個順數。』『從²⁰起，每兩個倒數。』等題目做準備。學生不必計算，只須²，4，6，8，10，12，14，16，18，20；或²⁰，18，16，14，12，10，8，6，4，2的念着或寫着。現行的教科書中，還可以看到這種教材。因為注重數，所以注重數目的系列。彷彿六的存在，一定要介乎五七之間。這理論是不錯。完全用古代人笨拙的數來教學生學算，未免是開倒車。一定要叫小學生在小學的幾年功夫中，把我們祖宗的文化進程重演一遍，也不是經濟的辦法。生活是隨環境變的；人心的反應是跟生活變的。教育是重演人類文化史的學說，現在已經證明不確的了。學生在學時間不多，學習的方法要用最經濟的。四加三的刺激應當和七發生密切的連結，不應當繞大圈子，再經過什麼五，

六等等的中間物。一有中間物的五，六存在，連結便成間接。間接的連結，不但學習時不經濟，將來人生日常應用，也不經濟。若說初學時借助於數，學熟了再不用數。這仍舊是個不經濟的辦法。學了數，將來再把數拋棄，出爾反爾，不是白白把時間浪費！

還有一種主張，以為數目不是單獨存在的，是由各方面的關係而成立的。譬如一個六，決不是，單純的數，『一，二，三，四，五，六，』便可以得到；也決不是介在五與七之間的，就可以代表六的全體。六是五與一，四與二，三與三的合併。六是三的兩倍，二的三倍。六是十二的一半，二十四的四分之一。從多方面的關係中學習六，六的真意才能澈底明白。簡單的說，就是學習算學，要注重數目的分合。分是合的反面。單說數目的組合也行。從這理論產生的學習法，是每一數目，加減乘除，所謂四則，都是同時並進的。譬如，除一以外，教2的組合是一單元，教3的組合是一單元，教4的組合又是一單元。依次5，6，7，8，9……等，

凡是一個數目，都要加減乘除，各種組合一一顧到。而且一個數目的各種組合在同時教完。例如2的單元，有下列各組合， $1+1$ ； $2-1$ ； 1×2 ； 2×1 ； $2+1$ ； $2+2$ ； $2\cdot 2$ 的單元，有下列各組合， $1+2$ ； $2+1$ ； $3-1$ ； $3-2$ ； 1×3 ； 3×1 ； $3+1$ ； $3+3$ ； 4 的單元，有下列各組合， $1+3$ ； $3+1$ ； $2+2$ ； $4-1$ ； $4-2$ ； $4-3$ ； 2×2 ； 1×4 ； $4+1$ ； $4+1$ ； $4+2$ 。

這方法，有好處，也有壞處。主張數目發源於數的，只顧了原始社會的情形。數目是有關係的，不是單獨的。注重數目的組合，的確比單單顧的數的進了一步。並且加和減，乘和除，都是相關而相反的計算方法，能聯絡在相近的時期裏學習，彼此可以互相發明，互相參證，因此學生所成的連結，可以得到融會貫通的妙處。這是好處。一定要在同時期內，把一個數目的各種組合教完，却未免矯枉過正，使學生覺眼花撩亂，無所適從。這是壞處。加和減的聯絡不必在同時。儘可以先學若干加的關係，例如二個基數，各不超過五，而結果不超過九的，像 $4+3$ — 5 — 4 — 4

5—3—2—1—2—3—1之類。這時候，叫學生專心一致的學加，得到關於加的相當的具體經驗，練習加的算法。等到習慣稍有基礎，就拿和上述加法相反的減法如7—4—1—7—3—1—9—5—1—9—4—1等，介紹給學生，使他們得到關於減的具體經驗，練習減的算法，養成減的習慣。4加3與3加4是可以聯絡在同時教的。7減4與7減3也可以聯絡在同時教的。4加3與3加4，和7減4與7減3，却應當有個先後，不必同時。拿新近學成的，做將要學的準備，也是一種聯絡。先專心一致的學若干加法，再由此引導到相關的減法，可以收聯絡的長處，却沒有上述混亂的壞處。同樣，學過若干連加法以後，由同數連加法而引導到乘法。時期是有先後的。前後是貫串的。如此，在學習某種時，各各可以專心一致，毫無紛擾。要明白現在的方法，可以利用已經熟習的舊經驗，舊習慣做基礎。這種折衷的方法，現在已經通行了。試看小學課程標準中，各學年作業要項表，加與減，乘與除，相間進行，按照由易而難，由簡而繁，由淺而深的次序，循環聯絡。我們決不能把加法先學完了，再學減

法。減法完全學完了，再學乘法。因為加法有難的，減法有容易的。把容易的減法，在學過難的加法以後才學，是倒行逆施。在初級裏，大體都能顧到這一點。高級裏却難說了。試看前章所擬的例子，不是分數擠在五年的下學期，比例擠在六年的下學期嗎？若是這二項照前章所說，淘汰不教，那末沒有什麼問題。若是仍舊保留要教的話，分數和乘法除法有可以聯絡的。分數和比例有可以聯絡的。比例和乘法除法有可以聯絡的。例如分數，可以分作若干段落，各段落分別插在和別種可以聯絡的地方。學過除法，便可以學『二十四的六分之一，』『四十五的五分之一，』等等。學過乘法除法混合題，便可以學，『二十四的六分之五，』『四十五的五分之二，』等等。試想，這等乘法比了四分之三加六分之五等加減題目，那個容易？前章所舉例的第二冊中，這等乘法，在五十二頁，四分之三加六分之五等的加法在四十三頁。這可以說不是倒行逆施嗎？同母分數的加法減法，一定要在小公倍，大公約，通分後才教，也是犯了同樣的弊病。外國度量衡貨幣，不和本國度量衡貨幣

聯絡，不和小數乘法除法聯絡，而延到六年上學期才教。四本課本中，教材全是一大堆一大堆的積着，絲毫沒有顧到學習而組織。編書者自己是很方便的。學生學習却受罪了。

還有一種理論，把數目根於數的主張加以修改，說數目的來源是由於量。數是粗疏的，量是精密的。數只能用在可以分作單個的東西。量却可以用到不可以分作單個的東西。數的單位，就是單個。量得單位，却有較精密的標準。數不過是量時的一種活動；量是求得數目的全過程。譬如我們現在有一條繩子，想用來掛東西，但是不知道這繩子的長夠不夠。過長或是過短，都不合用。這是我們的問題。我們要解決這問題，須把這繩子的長度量出，再把掛東西時合宜的距離也量出。量時要用一相當的單位。有尺時，當然用尺。沒有尺，也可以用自己的手指跨開來臨時代作單位。跨手指代作單位是粗疏的。用尺量是精密的。結果，把單位的倍數數出，就得到尺的數目或手指跨的次數。如此，才算量的全過程了結。數尺數或手指跨的

次數，不過是量的全過程中一部份罷了。又譬如學校裏開一個懇親會，要請到會的家長用茶點，我們的問題是『要多少份數的茶點，才可夠？』要解決這個問題，我們便要量到會的家長。量時的單位，是一個人。所以我們數點人數，就可以知道正確的答案。量的全過程裏，包含：問題，決定單位，拿單位和全體比，數單位的數目，用所得的數目解決問題。教學生學算，應當要有問題；教他們學解決問題，就是量。

這方法，比單單叫學生數的，的確是進步了許多。學算要解決人生問題；沒有問題時，不但不必算，連數也不必。這一點是最有價值的改革。這是與新教育的理論完全一致的。還有一個好處，是當然的副產物，就是學生因學量而加多和實在事物接觸的機會，可以得到很豐富的具體經驗。開始學算，便要用尺，用秤，用升，用種種日用的單位。從前學生背熟了諸等表，不識得尺，升，秤，和鐘表的怪現象，決不至於再有的了。但是這方法也有一個重大的弊病。因為量是單位和全體的比

，所以開始學算，就從比入手。外國曾經盛行過一時，初學時，用長短不同的木條，木片，大小不同的木塊，和學生討論：『甲比乙是幾倍？ 乙比丙是幾倍？ 丙比丁又是幾倍？……』從這等倍數的答案，引導他們學習，2，3，4，1，7，5，等數目及數目字。加的觀念應在前，倍的觀念應在後，這是自然的順序。現在開始就從倍的觀念來學數目，未免有些先後顛倒的樣子。這或者不是這理論本身的壞處，而是用這理論創案方法時的錯誤。雖曾盛行過一時，現在却銷聲匿跡了。行不通，總是為效果未必良好。若把初學方法稍加改良，不要咬文嚼字的，從數理方面討論什麼幾倍，而根據原理論的精要一點，就是使學生在他們自己的生活裏用量來解決問題，或者效果可以較好。

小孩子的生活是遊戲為主，我們就拿他們最愛的遊戲來引導他們對於量有問題。譬如他們用積木搭房子，本來是不預計多少，隨要隨拿的。現在我們可以問他們，『要多少積木才夠？』積木的單位是塊。用塊的單位比，就是數出塊數來。這樣

·可以教他們學數目。若怕嘴說容易忘記，或者各人報告塊數時聲音嘈雜，那末教他們把這數目，用相當的符號記錄下來。這樣，可以教他們學數目字。學生做手工時，領導他們用尺量。做遊戲時如有關距離的問題，也可以量。如此，不必問什麼幾倍，也儘可以把這理論一一實行。並且，這樣的實行，似乎更能切合這理論的真意。呆呆板板的問學生甲比乙是幾倍，在學生心理何嘗有切身的問題要待解決！

我們問學生要幾倍積木才夠搭成他的房子，學生心中的確是有問題的。極好的理論，往往被錯誤的方法弄糟，這也是一個例子。教算學的理論有好多是很價值的。我們實行這等理論時，要密切注意；不可以把方法弄錯了，使理論受不白之冤！

又有一種主張，以為數目是和形象有密切關係的。譬如五的觀念和 \therefore 的形象是密切不可離的。因此教初學算學的學生，應當充份利用這等形象。簡單的說，叫做『數象。』這理論有好多證據。日本的某教育雜誌裏，曾經記有一則很有趣的事實。說他們的中央財政部裏有一位從來沒有算錯過算學的人，專任復核的工作。他

比較試驗。結果，才決定他的四方或扁方是最容易學習。最不容易錯誤。

在實在事物和抽象的數目或數目字之間，當然可以用圖畫，圖形來作過渡。圖形比圖畫來得概括，把一切事物，歸納用點子或線條來代表，實在已經快要到產生數目字的程度了。幫助記數，的確是數象的好處。排列的形式，一定要齊齊整整，並且說和學習的難易有密切的關係，却又未免錯了。要知道學算是為人生日用。人生日用的事物，未必是排得很整齊的。我們學習的目標，是要會得應付這排列不整齊的日常問題，決不能叫日常事物先排列得整齊齊齊來遷就我們的應用算學。在試驗時，或者排列整齊的學習容易，但是將來達到排列不整齊的却難以應用。那末，這學習容易，還有什麼用？我們學習不可以為了學習而學習。做試驗時，當然應把複雜的環境化得單純，但是不可以使環境和實在的人生完全不同。譬如我們試驗某種植物在特種空氣（不是現在的氮氣混合物）中生產的成績，要比在普通空氣中大十倍。然而我們現在沒有方法大規模的把普通空氣改成試驗時一樣的特種空氣，那末

這試驗至多是發現了一個理論，於農業的實際還是無用。嚴密些說，形象是我們用來代表數目觀念的一種工具，是人為的，和數目字彷彿的符號罷了。主張數象者，以為形象是數目的本身或來源，實在是一個大大的錯誤。在介紹數目字以前用些圖形是可以的。排列的形式不必整齊，更不可呆定不變，顏色也要多變化。這是一個過渡。不久，便應當使學生覺得圖形還太麻煩，發生一種更簡單明瞭的符號的需要。於是介紹數目字給他們。用了數目字，圖形便可不必要了。所以對於圖形，不宜使成習慣。若是每逢 $3+2=5$ 的加法，一定要借助於 $\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$ 等圖形，那又造成間接的連結。可不是嗎？依賴慣算盤的人，逢到八乘十二等很簡單的題目，在沒有算盤時，也要從錢袋裏拿出銅元來，按照算盤上的圖形排列起來，然後才能算出九十六的答數。這不是笨拙的方法！凡是養成間接連結的，都是笨拙的方法。耳聽數目，頭望天花板，彷彿有一把算盤，實在也是笨拙的間接連結。不過他用得多，所以比別人熟。若定直接連結而一樣的用得熟，效果或者更快也難說。

自從實驗心學，測驗等發達以來，關於練習的心理，我們得到好多新的學說。怎樣可以養成學生良好的習慣，我們已經有可靠的科學根據。算學裏的計算技能，是屬於習慣一類的。我們已經有很詳盡，很確實可靠的方法，可以使學生的計算技能進步到又正確又敏速的地步。而且要達到這地步，用不着耗費許多的無謂光陰。我們可以用最少的時間，得到最大的效果。同時，我們又知道，達到同一目的，各人所化的時間和努力，各各不同。所以技能的練習，應當有不妨礙各人進步的個別方法。這等方法，通常叫做練習測驗。利用成功的興味，使學生常常知道自己用多少努力可以得到多少成功。練習的進行，按部就班，每一次只限養成一種習慣，不貪多，不躐等。這等方法，行來已有相當的成效。練習的時間，我們也知道要支配得妥當。太少了，效力不好。太多了，白白的浪費。反復的支配，我們也已明白。一曝十寒是最無效的。習慣沒有成熟時，要遵守『拳不離手，』『曲不離口，』的格言。到了相當成熟時，反復的日期可以漸漸的稀疏。練習的興味應當如何維持？

注意應當如何集中？刺激與反應應如何連結？……等等我們都有根據科學的辦法。總結一句說，我們這一方面的教法，近來已經受過科學的洗禮。這是近世算學教學法中值得注意的，也值得崇拜的一個空前的大進步，大供獻。根據這種科學研究的教科書，在外國，出版的不少。專供學生練習用的材料，在我國，也有好多種。有的，像練習測驗等，專供高年級用的。有的專為初學用的。一方面，用科學的方法，比較研究算學教材和教法的，也層出不窮，日新月異。例如除數兩位以上的除法，試求商數是一個很難的手續。有人把各種不同的方法，比較試驗，一一分析出難易的關鍵來。又一方面，正進行研究診斷和救濟的辦法。我們有相當的方法，只須用少許時間，行幾種測驗，可以明白學生計算技能的缺點。我們也有相當的方法來補救這些缺點。算學教法的科學化，真是方興未艾呢。

世界上的事，有了一利，常有一弊。研究算學教法的人，偏於計算技能方面的居多，關於解決問題方面的少。因此，有一種畸形的發達，彷彿只要計算的技能嫻

熟，算學教法的全般，已告成功。這也有個道理的。科學的試驗研究要控制環境使單純，使無變化。算學中最容易控制的是計算算式。因此，大家就趨到這一方面去了。這不能怪研究者的避難就易。先易後難，是凡百科學發展過程中必經的順序。近來注重研究解決問題的，也漸漸的興起。不過時期較短，所得的成績較為零碎。整個的辦法，還沒有到大成的地步。這也不能怪研究者的貪圖省便。凡百科學的成功，都是經過零碎小問題的試驗，然後再集合組織的。解決問題的教法，現在還不過在前半時期。將來把各方面所得結果，融會而貫通之，作成有系統，有組織的辦法。這是我們今後當共同努力的。

有少數心理學者的主張，未免過份重視了計算技能，忽略了算學的根本目的是在解決人生問題。因此，他們主張，教算學唯一的方法在乎練習。練習最主要的工在乎刺激和反應的連結。只要有相當的時間，合宜的材料，叫學生計算。計算純熟，到又正又快的程度，教算學的使命已經完畢。此外什麼興味，什麼遊戲，什麼

講故事，什麼表演等等，都是迂遠的方法。譬如我們教乘法，四九三十六的目的是在造成四九和三十六的連結。我們只須把四九不斷的刺激學生，使學生不斷的發生三十六的反應就是了。如有錯誤，不必多加說明，不必管所以錯誤的原因，只須教他們三十六是對的，只有三十六是對的。更不必叫學生表演開店做遊戲來證明四九的答數是三十六。開店，遊戲和四九三十六是沒有直接關係的。開店，遊戲不能使四九和三十六的連結更加良好。這理論，看來似乎是很對的。細細的研究起來，可以說是只對了一半。我們要叫學生表演開店，做遊戲，目的不是幫助四九和三十六的連結。我們是要他們在反復復練之前，先有一個肯努力練習的志願。志願是從需要來的。表演，遊戲是一種使學生發生需要的辦法。藥是可以治病的，但是小孩子不肯每天三次的服藥，你怎樣辦？四九和三十六的關係，彷彿是病和藥的關係。心理學者所說，只是醫生的話罷了。只要每天三次，把藥服下，病自然會得好的。但是做母親的問題，却不在乎病和藥的關係，在乎怎樣使孩子肯每天三次服藥的問題。

。我們研究的教法，彷彿就是母親引導孩子服藥的方法。

根據了教育即生活的原理，算學教法，便有所謂『社會化』的新趨勢。人的生活是社會的。因為人是有社會組織的。社會化亦可以說是生活化。事實是一個，不過說法分作兩方面罷了。社會生活，成人和孩子不同。那末教小學生時，應用拿成人生活作標準，還是拿兒童生活作標準？若是拿成人生活做了標準，教育只不過準備生活，就是說，教兒童學將來做成人時生活所必須的，在未做成人以前，先下一番準備功夫。這理論有極大的弊病。只顧了成人需要的準備、蔑視了兒童的興味和志願。結果，教育變成強迫兒童做不願做的事。自從兒童心理學發達以來，這準備生活的理論，更加難以成立。照自然生長的原理，再合上兒童心理的發展過程，現在大家認為較妥善的辦法，還是拿兒童生活做教育的目標。兒童對於自己現在的生活，一定有深切的興味，一定有重大的需要。教他們學，他們自會得有志願，自會得努力。並且人生活不是呆滯在一個水平線上，是進展的。人在現在的生活中

活動，在他經驗所及的範圍裏，一定也會得對於最近的將來發生興味。老實說一句，所謂現在生活，都不過是爲了解決最近將來的問題。只要一步一步的進展，經驗一天一天的豐富，想像一天一天的擴大，於將來生活的準備仍有極大的利益。專事準備將來生活而拋開了兒童的現在生活，正犯了欲速不達的弊病。

拿社會化做了教學法的根據，教算學的方法，便起了一個重大的革命。初年級的算學，彷彿拿遊戲做了中心。正式式的算學功課，可延到第二年級，或竟延到第三年級才教。課程標準裏教學方法要點第一條說：

第一學年的算術，應隨機教學而不特定正式時間，或和別的設計聯絡教學。第二學年，或如第一學年，或特定正式時間教學，由各校各依自己的方便而施行。

第二條說：

第三四學年以下的算術，應充分和別的設計聯絡教學。

第四條說：

第一二學年的作業，必須寄託於遊戲，利用競爭比賽或開店演習等的方法而教學；第三學年以後，也須時常應用此種方法，以使兒童因興趣而努力。

學生的興味，隨年齡經驗的增長，而範圍漸漸擴張。到後來，遊戲表演，雖然還有相當興味，但是對於日常衣食住行，家事校事等，也漸漸感到和自己發生關係起來。這時候的兒童生活，已經漸漸和我們的生活接近，對於我們的問題，也發生相當的興味。算學教法，便應當推進一步，使他們嘗試嘗試日常問題的解決。到了第五六年級，距離畢業的日子漸近，學生們也自然會想到畢業後升學或就職等問題。他們的興味範圍，已經從學校家庭推廣到本地的社會，或竟關心全國，和世界。這時候的算學教法，便應當更進一步，使他們研究研究社會問題的解決。如此一步一步的推進，由現在而最近的將來，由家庭而社會國家以及全世界，不是一種腳踏實地的準備嗎？不拿兒童想像不到的將來做標準，實際是一種極妥善的準備。這便是社會化。這便是自然生長。這便是教育即生活。

算學教法的花樣真正多。上面講的，不過是些大綱。每一方法，總有若干特別的好處。我們應當比較利弊，捨短取長，不偏不倚，整理出一個比較完美的方法來。前面所講，大多是利弊的比較。從下章起，我們再來詳細的談一談實施的方法。

十二 遊戲

遊戲是兒童生活的中心。我們宜利用遊戲，做一切教學的出發點。所以低年級的算學，大部份可以利用遊戲。第一方面是利用遊戲來擴張學生的經驗。最早，學數目的意義，就可以利用遊戲。這時候不必正式設算學時間，也不必使學生自覺在那裏學數目。遊戲為主；在遊戲時把數目的學習聯絡進去。譬如拍皮球，我們要知道誰拍得多，誰拍得少，便會發生數目的需要。這時候學生的目的，只在拍得多少，並沒有意識到學習數目，實際却因為有急切的需要而很努力的學習數目了。教學生學數目字，若呆呆板板，使他們意識的練習寫法，實在很難維持他們長時期的注意和努力。若能把數目字寫法的學習，組織在遊戲裏面，那便有生氣了。譬如

比拍球的人有好多，各人拍得的數目各不相同，要一一記在心裏，極容易混亂，極容易發生爭執。口說無憑，一落筆便有憑據。因這等需要，學生自然願意把自己拍的數目很正確，很清楚的記錄。並且還注意別人記錄的是否錯誤。若有一人，拍的數目是九，記的數目字是6，大家一定要喊他更正。沒有自己的需要，單單由教員叫他們練寫時，6和9是沒有生機的，寫錯便寫錯了。即使教員和他們說明，訂正比較，在學生也不過隨便聽聽罷了。

一切單位名稱，意義的學習，也逃不出兩途，一是日常需要，一是遊戲。小孩子日常需要中，關於數量方面的很少，所以我們還是利用遊戲來得便利。譬如長度，距離，只有極少數的孩子，因家庭環境的關係，自己常常留心長得多少高。此外，他們的生活中，始終用不到尺寸的。爸爸媽媽在家裏用尺，孩子們或者也見到過。但是他們拿家裏的尺，有時當作遊戲中的木棒用；誰看見過孩子拿了尺量什麼長短？重量亦然。有的地方，每逢立夏節要稱人，那末孩子們也有用斤的單位的需要

。一年一度，如是而已。小孩子在家裏遊戲，有時也要學成人買菜，在菜籃中放一枝秤。但是他們只求表演買菜的動作，對於斤的單位，絲毫沒有什麼需要。一枝竹竿，幾條繩子，拿木塊或磚瓦代作秤錘，手中表演着稱物的姿勢，嘴裏也說着三斤五斤等等。這可以算是斤的單位的真正需要嗎？不！這不過是姿勢動作的表演罷了。

利用他們遊戲的興味，把單位的學習，組織進去，使他們發生真正的需要。他們愛玩偶人，我們同他們替偶人造房子住，做衣服穿，……。造房子要知道大小高矮，做衣服要知道長短，……。不用尺和寸的單位，不懂得一尺就是十寸的關係，怎能度量長短大小高矮？在這種遊戲的需要中學習尺寸，尺寸便有了生機。譬如偶人的衣服應長三寸，若有人說是三尺，大家一定要大喊道：『連頭帶腳，一起裹在裏頭，還嫌太長呢。』有的，或者說：『三尺長可以做門帘還嫌多。我們洋囡囡的房子也不過三尺高。』他們愛表演成人買賣的姿勢和動作，我們便引導他們進一步

，好好的做擺攤子，開店鋪的遊戲。除表演言語，動作，姿勢外，我們的買賣，真正要計算長短，輕重，容量。我們雖不用真的貨幣，我們也有正式的代用貨幣——紙銀圓，冥國銀行鈔票——等。在這等遊戲的環境中，自然有斤兩，尺寸，升斗，元角，等等的需要。有需要，便容易學習。

平常的遊戲未必一定需要算學，這是當然的。我們教算學的，要研究一妥善的辦法，把算學組織進去。在遊戲中學算學，是自然的，不是勉強的。自然的學習，學時興味好，肯努力，所以效果大。勉強的學習，學時注意分散，心理上有一種中立或反抗或逃避的態度，所以效果小。我們學習本國語言是用自然學習法的，我們不覺得經過什麼困難，但是結果却很優良。我們說本國話時，決沒有搜索用語或留心語法的苦痛。我們學習外國話，平常是用勉強學習法的。學時深覺生字的難記，文法的周折。臨用時，常常要搜索枯腸，找不到一個合宜的字。其實，這字是書上常常讀到的。到了外國，即使沒有學好外國語的人，不須半年功夫，日常語言，也

能純熟。這是因爲在有實際需要的環境裏，用自然的方法學習，所以似乎費力少而成效著了。對低年級學生，利用遊戲，擴大他們的經驗，彷彿是把小孩子放在北平人的家庭中去學國語，是一種最經濟的自然的學習法。

第二方面是利用遊戲做教學生解決問題。遊戲是有目的的。大多數遊戲的目的，是在比較。比較，便是遊戲中的數量問題。譬如拍皮球，套藤圈，踢毽子等等，都有一個比較的問題。技巧是重要的。怎樣使皮球不離手的拍？怎樣使藤圈恰巧套在木柱上？怎樣使毽子向上而不傾斜等等？都是技巧方面的問題。除技巧問題以外，還有比較多少的問題。比較的問題不會解決，遊戲的目的，只達了一半。看來雖不過是很淺近的一個比較多少的問題，但心理上的抽象功夫，却和工程師解決建築問題，會計師解決審計問題，一樣的重要。譬如拍皮球，拍時是具體的數，拍完便只剩一個抽象的數目。比較多少，要離開拍皮球的具體事實，抽象的用數目，才能得到結果。若是做藤圈的遊戲時，一定要各人各拿五個或十個，分別投擲，各人再

把套上的一起拿下來，具體的用籐圈，你一個對我一個的比，然後看誰對多了的，再數多幾個，豈不是呆笨已極。我們只須一副籐圈，各人輪流投擲。每人投完，檢點套上的圈數便可抽象得一個數目。以後比較，不用具體的籐圈，用抽象的數目直接處理。我們分析研究，有這麼許多話可以說。實際做遊戲，這等心的活動不過一瞬間耳。

從遊戲開始，學生可以學得抽象的本領，解決問題的經驗。年齡漸漸的長大起來，他們興味的範圍也漸漸擴張開來。本來只自願自的遊戲，不過和少數人作比較的，現在漸漸的注意到全級的活動。一級裏有共同的數量問題，他們可以共同學習解決。這是他們生活中的實在問題。不但全級有實在問題，個人，家庭，全校，都有實在問題。這都是教學生學習解決問題的絕好機會。一方面在實在問題中學解決法。一方面引導他們做一種表演的遊戲。開店便是一個例子。以前已經說過，這裏不再重復。數量問題的表演，原本不限於商業的開店，工業農業，也應當一一顧到

，教他們做小木匠小泥水匠的表演，做小農夫的表演。表演木匠造房子，不是有好多關於尺寸，面積，材料價格，做工日期等問題嗎？表演農夫耕種，不是有買種，肥料，人工，收穫量，以及土地面積，種植日期等問題嗎？同時，有他們實在的問題，可以相互參證。手工，園藝，都需要用數量來解決的。表演是近乎想像的，應當先有實在的經驗做基礎。先學解決實在問題若干，然後教類似的表演。譬如手工裏造過偶人的房子，然後才可以表演小木匠。自然裏養過雞，然後才可以表演農夫養牛。先後不可顛倒。

表演是要用想像的。用慣想像若干時，可以教故事。故事比表演，用想像的地方更多。表演有動作可以看，還帶幾分具體。故事只有耳朵聽，眼睛看不到什麼。耳朵聽了，要自己去想像故事裏的動作，再由這想像的動作中去抽象，求解決。有人不叫故事，名叫想像的問題。把故事用文字寫出來，便成功所謂『應用問題。』關於這方面，下章再細細的講。總結一句，在解決問題一方面遊戲的功用是在實在

問題之前做出發點；在實在問題之後，做引導到想像問題的過渡。用表式寫出來，如下：

遊戲 → 實際問題 → 表演 → 故事 → 想像問題

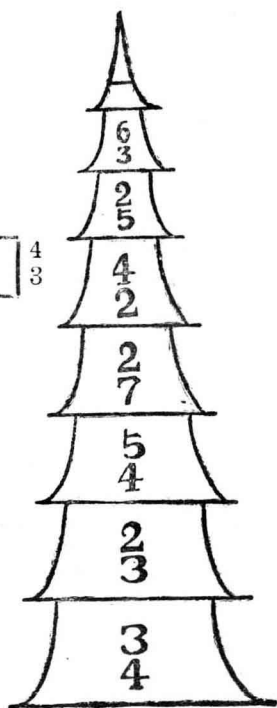
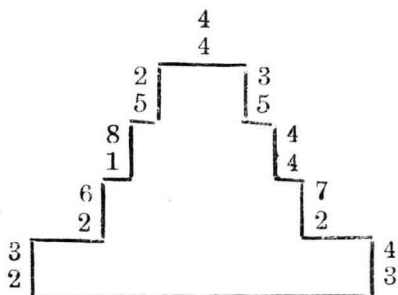
第三方面是利用遊戲來做練習的出發點。算學裏的技能最要純熟。欲求純熟，必須屢屢的反復，同樣的反復，不可有例外。但是反復是單調的，是沉悶的。小孩子見異思遷，最沒耐性做單調的反復工作。因此，興味衰，注意散，即使表面上在那裏反復練習，實際的效果也很有限。這彷彿是一個互相循環的難問題。利用遊戲，可以把這難問題解決大半。最早不必正式練習，把應練習的組織在遊戲中。這時候還是拿遊戲做主體，譬如拍皮球，套籐圈，是普通的遊戲，不是專為計算練習而編成的。遊戲的本身，自有他固有的興味和價值。我們利用這等遊戲，可以使學生練習數目，練習寫數目字，練習加法減法，等等。這是第一步。這叫做『在遊戲中用算學。』經過這等遊戲以後，學生對於數目，數目字，以及加法減法等等計算技

能，漸漸有相當的興味，漸漸感到相當的需要。進一步，可以引導學生做『算學遊戲。』算學遊戲是算學中特有的，和普通的遊戲不同。他的興味完全在算學上，就是用遊戲的方式來做算學。譬如在木板上或地上，按照魔方的形式，劃如下的九格

4	9	2
3	5	7
8	1	6

，各生用沙袋等，站在相當距離投擲。每人投擲一回，可以練習數目，數目字，和初步的減法。每人投擲二回，可以練習稍進步的加法和減法。每人投擲三回以上，可以練習連加法和減法。

再進一步，可以做如下的遊戲。在黑板上畫一塔形或橋形，每級，每層，各有一個算式如圖。學生自下而上，做對一個題目，算是走上一級一層。做錯了，算是中途跌倒。比較誰跌倒的回數最少。這等遊戲比前面的一種，計算興味的成份愈加多，普通遊戲興味的成份愈加少。和式子的計算練習沒有多大分別，不過有一種想像的塔或橋，大家比賽上進罷了。從這等遊戲，可以引導到普通的計算練習。先共



自己比賽，是一種成功的興味。好勝近乎幼稚。成功或者可以說是比較高尚。所謂與世無爭，便是一種自求成功的表示。學生這時候的練習，不必再用遊戲的方式，老老實實，就是：『這裏如許題目，看今天做正的數目，比昨天多多少！』到此地步，已經入了練習的門。現在通行的種種練習測驗，都是供給這時候用的。逐日有

同比賽，看誰做錯得最少？誰做完得最早？後來從共同比賽而變到自己比賽。共同比賽，是一種好勝的興味。

記載，經過相當時期有測驗，都是使學生確切明瞭自己的成功，根據於學生成功與味的練習還有一種好處，就是不必彼此牽累，練習可以適合各人的能力。總結上述過程，彷彿如下：

平常遊戲中用算學——↓算學遊戲——↓共同比賽練習——↓練習測驗

分了三方面講，是爲了我們討論時的便利，並不是小朋友的心理是有三面。生活是整個的，學習是整個的，遊戲也是整個的。從遊戲可以使學生經驗擴充。從遊戲可以引導學生解決問題。擴充經驗和解決問題，有極密的關係。所以上述第一方面和第二方面是相通的，而且是相互補充的。有了若干基本經驗，才會得解決問題。在解決問題的進程中，同時也就增加好多新的經驗。這種新經驗就是將來解決更進一步問題時的基礎。譬如買賣的表演是領導解決問題的一種方法。由表演而增加了好多商店裏的經驗，如定價，折扣，實價，等等。將來學折扣，百分時，不是就拿這等經驗做基礎的嗎？所以第一方面和第二方面又可以說是相循環的。第二方面

和第三方面的關係也是這樣。引起學生練習的需要，可以用遊戲做發端，也可以用實在問題或表演等作引子。有一位教員，和學生設計一個救濟苦人的方案。計劃中有一件工作是贈送食物給他們的小朋友。計算食物的價值時，有好多種的數量較多。學生還沒有學過乘法，所以計算時是用同數連加法來解決。有些學生，看見了同數連加法，有些奇怪，教員便在黑板上，做了一個乘法計算的樣子給他們看，說：『我有這樣一個省便的算法！』學生更覺奇怪，大家要求學習。於是從學生的實在問題，引起了系統練習乘法九九。還有一位教員，因為學生久練算式，厭倦乏味，而且錯誤百出，毫不注意。他撇開學算，另外和學生討論商店。由這上面引起了學生表演開店的興味。於是教室一角裏裝置賬桌櫃台，學生家裏的空罐空瓶空匣，一一拿來作商品的代表。開店的興味是很好的。可是買賣常起爭執，賬目時生錯誤。這不是『生意經。』大家公決，除開店以外，每天做系統練習幾分鐘。這是從表演引導到系統練習的一例。三方面都是有密切關係的。融會貫通，是在教者。捉住機

會，可以從一方面轉到另一方面。

用遊戲做練習，常常要使用教具。在平常遊戲中用算學時，教具的製作，當然拿平常遊戲作目標。算學遊戲用的教具，却要注意。標準是很單純的，只有一句話，『製作簡單，耐用而多變化。』譬如用較厚的紙片，上面寫加，減，乘，除等九九式子，是製作很簡單的一種教具。每天抽用，較厚的紙還不易破爛。用法有好多种方式，或由教員抽，或由學生中推舉一人出來抽，或者抽了出來放在黑板邊上，或者抽了出來傳給回答正確的人，抽出時可以練習一遍，收回時又可以練習一遍，可以叫學生口答，可以叫學生筆寫答數。一套片子，可以變化出好幾種練習方式。又如前面說過的九方格，橋等，只須在板上劃了樣子，數目字或式子時常可以變換。木板，沙袋也是製作簡單而久用不壞的。譬如做一木匣，匣子正面裝了玻璃，右方有可以旋轉的搖柄。柄連軸，軸上捲長條的紙或布，上面寫了式子。搖動柄時，式子在玻璃中顯出。這一個匣子，製造太複雜，工本太貴。並且不容易做得靈巧，往

往因搖柄旋轉時發生障礙，用力過猛，便把紙條或布條拉斷。長條上的算式，次序呆定，譬如寫了85一在前，72一在後時，永遠如此排列，不能變換。若要變換，全長條統統要重寫一遍。玩的方法，也只有搖了旋轉。這等教具，恰恰和我們的標準相反。教具是一種工具。目標是在遊戲，是在遊戲時練習算學。只求教具的形式好看，往往要失却練習的主要目的。數具的大小尺寸，也是很緊要的。共同用的，要大，使好多人都能看得清楚。個人或二三人用的，要小。在課桌上可以按放了分組練習。不大不小的教具，共同用時，三尺以外看不清楚，個人或小組用時課桌上按放不下，那末要來何用？只好送教具展覽會中去陳列罷了。教具的做法，請看小學教學漫談（中華印行）第十四章

十四 解決問題

解決問題是我們學習算學的主要目的。嚴密些說，遊戲也是一個問題，不過是孩子生活中的問題罷了。我們成人，除自己日常生活以及職業的問題以外，有時在

消遣娛樂中也有好多算學問題。解決問題，有三個重要的條件。第一是對於問題中事物的經驗。沒有做過的遊戲，非學不會做的。學做，就是得到這遊戲的經驗。要先有買賣的經驗，然後才會解決買賣的問題；要先有工廠的經驗，然後才會解決工人，工資，工時等問題；要先有耕作牧畜的經驗，然後才會解決種植畜養等問題。以前屢屢說過，這裏不再多講。第二是抽象，就是從具體的事物，切身的問題中擺脫開來，利用抽象的數和算法來計算得一結果。這一層以前也詳細講過。第三是要有純熟的計算技能，才會得用敏速的方法，求得正確的結果。三個條件，不能缺一。教學生練習計算技能，是爲了要使他們解決問題時迅速正確。三個條件中，計算技能不過是一種工具罷了。事實的經驗，不過是一種基礎罷了。抽象才是主體。譬如閱讀，也有三個條件。第一是對於所讀的內容，要有相當的基本經驗。第二是想像，就是從基本經驗推想到文中記載的新事物方面而得到新的經驗。第三是工具，就是文字，詞句等等的聲音筆劃。這三個條件和學算的三個條件是相似的。都要有

相當的基本經驗，是同的。閱讀要想像，彷彿算學要抽象。閱讀要文字詞句的工具，彷彿算學要計算的技能。閱讀的目的，在由想像而得新經驗。算學的目的，在由抽象而解決問題。

從來的教法，是分式題和應用題二大類的，並且喧賓奪主，工具的計算技能做了算學教學的主宰，解決問題，成功了式題練習的附屬。算學教材的排列，完全依照計算技能。一個一個的算法，就是一個一個的教材單元。每一單元，頭上總是些說明和例題，其次便是算法。算法以後，列上好多式子，叫學生練習。結末，才有五六個或二三個應用問題。若拿讀書來作比喻，彷彿讀書教材，按照字典部首，或別種分類法，每部每類作一單元。各單元先學單字的聲音筆劃，再反復練習。結末，附上幾句句子，作為應用。此種閱讀教法，已成過去。現在若再施行，大家一定要批評，說是太蔑視兒童心理。然而同樣依此方法教算學，大家還公認是最妥善的辦法。難怪小朋友讀書的本領，近來大大的進步，自己課外也找了書，津津有味的。

看個不息，而算學成績却依然是錯誤百出，或竟像一把活的算盤，只會計算式子，不會應付問題，對於算學的興味，遠不及閱讀的濃厚！閱讀的教法，是拿全篇文做主體的。全文是一個問題。『讀書必先識字，』是早已被否認的陳腐教法。然而算學裏却依然死守『解決問題必先計算』的老教訓。積相習沿，誰也不想謀一個澈底的改革！拿算學教法和讀書教法比，的確是落伍得很呢。

前章說過，算學應從小孩子的遊戲做出發點。遊戲是主體。遊戲是不按照數目的多少或計算的方法排列先後的。先易後難，先簡後繁，當然是我們應當遵守的教法原則。但是拍皮球決不能限定學生只許拍到五以下，或九以下；有的只拍二三拍，有的能拍十多拍，二三十拍也不一定。甲拍五拍，乙拍十一拍，比較誰多，就有一個十一減五等於六的減法。我們決不能因為沒有學過加法的遊戲，所以不許學生用減法比較拍皮球。我們也決不能因為和在九以下的加法沒有學熟，所以逢到這等十一比六的減法取消不算。這不能再死守算法的次序。學生不知道十一比六多多少

時，直接教他們是六就是了。彷彿學生遇到故事中有一個『海』字不識，我們也直接教他聲音，意義，決不說因為人字部的字還沒有學完，這水字部的海字，要留待將來再學。若要把各種算法練習得純熟，當然要下一番克苦的功夫。彷彿國語教員，也要教學生練習寫字，也要教學生字典部首。這是應當另外特別練習的，決不能拖泥帶水，和閱讀夾雜在一起。夾雜了，顧此失彼，兩不討好。計算練習也不可以 and 遊戲或日常問題夾雜。另外練習的方法，詳下章。

關於遊戲表演的問題，前章已經詳細說過，這裏不必再行重復。我們先來講日常生活中的實在問題。從前的學校是念死書的場所，需要數量的實在問題，的確無由發生。小孩子的經濟問題，完全由父母作主，自己不必顧問。就是自己的學費，書費，以及用品等等的購買，也完全由父母或學校代辦，不必管，也不許管。因此，除教科書上的算學題目以外，絲毫沒有什麼實在的算學問題。其實，這是設施的錯誤，並不是學校中絕對沒有學生實在問題的可能。現在的新式學校，往往有學校

商店或消費合作社的組織。這是供給算學實在問題的絕好機會。有的，寄宿生的膳食，也由師生共同組織機關，自己管理。這又是一個實在問題的需要。學校裏每學期往往有一次二次的運動會，遊藝會，懇親會，音樂會等帶有社交性質的大集會，有的，更有規模較小，範圍較窄些的同樂會，郊遊會，遠足會，級會，週會，等等。每逢集會，總有關於地位大小，路程遠近，距離長短，時間久暫，人數多少，物品數目，以及物價等等關於算學的問題。這都是很有價值的實在問題。臨時的募捐救濟，日常的儲蓄，也是極好的實在問題。國語中現在通行叫學生做日記。算學中也可以叫學生每天記自己的零用賬。

上面說的實在問題，好像都在教科以外的。其實，教育是整個的，本不應當有什麼課內課外的區別。上述各種活動，要是我們認為有教育價值的，那末應當歡迎之不暇，趕快列入課內。要是價值是不大的，那末便不應當叫學生去做。學生做的，總含有教育的作用。其實，這課內課外的區別是一種沿襲的成見。科學式的死念

書，算是課內，或叫正課。合於原理的良好活動，課內因法令等行政上的束縮，放不進去，所以遮遮掩掩，叫是課外活動。這原來是一時不得已的苟安辦法。死念書，早該打倒！現在的課外活動，早應該作爲正課。單拿算學說，從來的所謂正課裏的算學科，效力怎樣？把日常生活中的實在問題來替代教科書中的應用問題，是很明顯的，很急切的改革。

即使我們退一百步講，同是正課，各學科間也不應當嚴分界域。譬如做工，不是要畫圖樣，量長短大小，估計材料的嗎？這不是學生的實在問題嗎？爲什麼做工材料一定要教員預先量好，割好，上課時發給學生，只叫他們依樣葫蘆的粘接起來。這等教法，就做工方面說，蔑視個性，阻礙創造。就算學方面說，坐失良好的實在問題的機會。這不是世界上最愚劣的教法嗎？豈但材料！工作時間，材料成本，也應當細細的計算。這不但是多供給了些算學的實在問題，實在是一種很重要的教育，使學生得到經濟和效力的具體經驗。不但東西要做得好；材料要用得省，時間

要化得短，才是經濟。能用最少的材料，化最短的時間，做出最實用堅固而美觀的東西來時，才是效力最大的工作。自然，園藝，也有這等好機會。全校園地農場的分配，爲什麼一定要由校長的獨斷，或教員會的討論，而不許學生共同計劃？由學生共同計劃，不是有好多關於面積計算的實在問題嗎？支配以後，開始種植，爲什麼不叫學生留心種子，肥料，人工，時期，收穫，等數量方面的實在問題？有人說小學校裏的做工種植，不但不能養成學生勤勞，反而培植浪費。不計成本，不問原料，人工時間都可以無窮大的化下去，結果也從不計較數量。這的確是一個大弊病。種植的收穫，至少要知道多少地面上出產了多少東西？照市價計算，產出可以值多少錢？如能和農人做一比較，當然更加深切。這就是真正的生產教育。種了菜，一定要賣了錢，算是生產教育，不過是皮相的見解罷了。出賣或自己吃，不關生產的。產品的價值和肥料，種子，人工等的比較，才是生產。要是三畝多的園地，用了六七元的種子肥料，人工還不計在內，結果，得了十多斤的油菜，即使售價貴到

二角大洋一斤，從生產教育的立場說，還是個大大的失敗！要實施真正的生產教育，算學中便有了好多實在的問題，只須撤去學科間的界限，雙方都可以得到成效。

自然研究的試驗，小學生定性的居多數，定量的居少數。但是譬如學做肥皂，儘不妨計算用多少原料，可以製成多少物品。又譬如試驗水的側壓力時，儘可以叫學生計算，筒內水柱多少高時，在多少高的側孔中可以射到多少遠。在科學方面，這等現象是極淺近的；在計算方面又是可以用普通算法解決的。又如地理科的面積，人口，爲什麼呆叫學生死記數目而不引導他們用算學來作一個比較？某國面積當我們某省的幾倍？某地人口每方里比某地大幾倍？某國海岸線比我國如何？而他們的沿海航業又比我們如何？拿海岸線作標準，某國的沿海航業比我國大幾倍？……等等，都是很好的實在問題。不必把學科目的界限完全推翻，只須稍稍聯絡，我們算學中的實在問題，已經取之不盡。如能連合組織，改成一個一個的設計，當然機會更多了。

其次便是想像問題。我們所謂想像問題和現在通行的應用問題不同。想像問題比實在問題範圍廣闊，不能一一親身經歷，但是仍舊可以用各人的經驗想像得到。譬如地理，初學時也可以使學生得到相當的具體經驗。稍進一步，便都是想像的問題。從前的地理，只不過是一篇賬目，四址境界是何地，人口有多少，面積幾方里，有什麼物產，有什麼名勝古蹟。現在的地理不是這樣的呆板乾枯了。有假想的遊記，有參觀的筆記，敘述生動，一切拿人民的生活做活動的中心，彷彿是故事。從前學地理，死記呆念以外，沒辦法。現在學地理，用想像來解決人生和地的問題。這是幾年來的大進步。歷史亦然。只有帝王年號，人名，地名的家譜式的教材，一變而為敘述社會生活，前因後果的故事。惟有算學裏的問題，依然如故，絲毫沒有進步。拿社會化做教學的根據，我們在第十二章裏已經說及。想像問題的社會化，就是故事化。我們應當參酌近來地理歷史教法的改革，把想像問題改成拿人生生活做中心的故事。前者注重社會的，後者注重數量的。只有如許區別而已。利用想像

，解決較遠大的問題，是一樣的。課程標準裏教學方法要點第五條說：

問題要具體而有興趣；低年級應充分利用表演方法，把問題演成事實，讓兒童直觀；至三四年級也應使問題故事化，幫助兒童想像事實。

故事式的想像問題，例如下：

馬夫阿三養三匹馬。一匹是黃馬，一匹是白馬，一匹是黑搭白的花馬。三匹馬都跑得很快，大家都愛騎。阿三天天請馬吃青草。上星期裏一共吃了一百七十七斤。只算三匹馬吃草是一樣的多，阿三想，一匹馬吃了……斤青草呢。

這是從某種教科書初級第三年用第六冊裏的一個應用題改編的。原題目是：『青草176斤，分給8匹馬吃，一匹馬吃多少斤？』像原文這等題目，只可以供考試的用。我們日常生活中那裏常有人來問：『吃多少斤？』這不過是一個例子，詳細的討論，請看小學教學漫談（中華印行）第十五章及小學算術教學法（商務出版，非萬有文庫本）第四章第三節及小學算術科教學法（商務出版，萬有文庫本）第八章。

聽故事的人。和看小說的人，最喜歡連續下去。故事化的想像問題，宜多連續。事實連續，愈久愈好。數量方面，最好不要連續得過多。不然，前面算錯了，以下便一直要錯到底。故事的提示，或用口述，或用文字。不一定低年級完全要口述，高年級完全用文字。有時兩者間用，可以多變化，使學生興味好些。不過無論口述或用文字，關於用語上的困難，要注意避免。『幾個，』『幾個人，』『幾天，』是平常說話中常用的。『若干』是從前算學題目裏的特別用語。我們應當言文一致，淘汰『若干』這用語。隨便翻一套教科書，看他裏面的應用問題，有一句：『有男婦童三等災民，』我以為不如改作：『一羣災民，有男的，有女的，也有孩子。』又有一句：『孟仲叔兄弟三人，』我以為不如改作：『王家三弟兄，老大，老二，老三。』這不過是二個例子。總之，用語要平民化，要合口語，要能幫助想像，不要反而阻礙想像。通例應用問題中用的『某人，』『某地，』『某日，』等，都應改用具體的人名地名，如『王老二，』『李家小妹妹，』……等等。像『3人

1月吃米9斗；問4人1月吃米多少？」等問題，實在和抽象的式子題目，沒有多少兩樣。試問這問題中有什麼具體的事物，可以幫助我們想像？試問和「3除9斗」等的式子題目有什麼兩樣？我們要問題故事化，應當先就消極方面把文字語言上的種種障礙打倒。不然，這等典雅的故事，小朋友看了還是想像不出內中的事物。事物不明，怎能推考其間的關係？關係是抽象時最重要的一點。

其次要講抽象和推理。這是解決問題時最重要的心理作用，但是教學時最沒有辦法。因為心理作用是學生自然的反應，教員沒有方法可以強制。講演說明，有時也有相當的效果。但是我們沒有方法使學生的思想一定依照着講演說明進行。舉例作證，當然是更具體，更切實。但是例子是舉不完的，我們所舉的只一，學生自己不會得觸類旁通而反三，還是無用。在第四章裏，我們也詳細講過抽象。仍舊拿上店買布這個例子來說：第一次買布，或者不會得抽象。在這時候，我們的講演說明，效力極微，還是老老實實的做給他們看，做一個十四乘二角五分的乘法。有的學

生，經過這一次實例的演示以後，已經懂得其中門道。有的，第二次逢到買物計價時，依舊不會得推理。或者我們可以拿前次買布的事例來提醒提醒，或者再做給他們看。二次不成的三次，三次不成的四次，……不要性急，學生的悟性有遲速，一次一次的做，每次和從前的使發生密切關係。到後來，就是較愚的學生，也漸漸知道『類推。』由類推而總括，抽象推理的反應便成功了。在這過程中，最要緊的，不可以使所要解決的問題，完全屬於同一形式。買物計價是用乘法的。儘不妨插些比較物價的減法和計算各物總價的加法。這樣，才可以使學生用心推考。不然，他們對於問題的意義不求甚解，只須找到兩個數目拿來一乘，便可以答正。只有同類的，用不着類推。在不同的中間去找相同的，才能助成類推的功夫。用文字寫示題目時，或者全用中國文字，或者每逢數目全用數目字。切不可把計算時要用的寫數目字，其他却用中國字。這種辦法極容易使學生不肯細心推考，只在題目中找數目字，盲目的計算。如此，問題等於式子，完全失却了抽象推理的功用。題目裏略有

些計算時不必用的數目，是有利無弊的。例如：『李荷生同他妹妹小弟弟三個人到姑母家裏去。姑母給他們吃點心。他們吃的是饅頭。饅頭是三個銅元一個。他們三個人共吃了六個。姑母請他們的點心共是（ ）個銅元。』這問題裏三個人的三是不必拿來算的。

學生程度漸高，抽象推理的本領漸大。我們應當領導他們作更進一步的抽象，就是用公式及 \times 解決問題。這是我們教算學的目標。達到這目標的過程，是很長的，不是呆記法則可以速成的。學生的個性千差萬別。能達到用公式及 \times 解決問題的遲速，各不相同。也有若干較遲鈍的，到了六年畢業，還不能到這地步。不必強求。強求無益，反而有害。只要平時不浪費學生的時間精神，教員對學生便可告無罪。強制學生學不能學的東西，反而對不起他們！學生到了能用公式和 \times 解決問題時，他們對於抽象的數理，自然覺得有濃厚的興味。那末整數的性質，棄九法，魔方的構成，以及其他數學遊戲中彷彿謎一類的問題，即使如雞兔同籠，鐘面長短針，

帶雞狗過河，用瓶分油等等的問題，都可以介紹給他們。這種學生，或者不過全級中的極少數罷了。不要勉強大多數學生和他們一樣。也不要勉強這等學生呆等大多數而不得充分發展上進。

十五 練習

從來教算學，差不多把學習時間的大部份化在計算技能的練習。然而學生的成績仍舊不能純熟，既不能正確，又不能敏速。原因是有很多。教材的種類太多，不必練習的也要練習，那末應當練習的自然沒充份時間練習了。教材的組織不合，把應當聯絡的，拆得零零碎碎，失却彼此間相互參證的利益。因此，化了加倍的功夫，只能收到一半的效果。倘使能刪繁就簡，小學生必須練習純熟的，不過整數四則，小數四則，諸等數各單位間的關係罷了。即使要學些分數，至多再加上簡易分數的四則，也就夠了。百分法利息等等，從計算技能說，不過是小數的應用罷了。第十一章裏，我們已經把整理教材的辦法，詳細說過，這裏不再重複。就教法方面說

，我們應當明白學生的練習心理。關於這方面的研究，近來進步非常的快。我們已得到確切有效的原則。我們如能努力把這等原則一一實施，成效自見。養成習慣的原則裏有一條說：『每次學會一種的技能，不要貪多。』這是很容易明白的。貪多嚼不爛，是我們古來的成語。養成習慣，好像建築，一步一步的進行，自能穩固。我們從前的練習，這一點最疏忽。譬如某種教科書，初級三年上學期用的第五冊裏，共有十種不同的材料。第六種是『乘數一位乘二位』的乘法。全書四十頁中，這一個單元共占四頁，從二十頁到二十三頁。二十頁上標明是不進位的。計有三條研究用的題目，一個例題。二十一頁上標明是進位的，也是三條研究用的題目，一個例題。末一行有兩個練習用的式子。二十二頁上有二十六個練習題。二十三頁上是九個應用題。除去應用題及說明例題以外，只有二十八個題目。籠籠統統分進位不進位兩段，實在太嫌粗疏。要是拿一種技能作為一步的話，不進位的，可以分下列的六步：

每一步各有一特殊的困難。第二步的困難在 0；第三步不算進位，但是答數要到百位；第四步困難在十位的 0；第五步兼有第三第四兩步的困難；第六步兼有第四第五兩步的困難。進位的，可以分作下列的八步：

$$\begin{array}{r}
 (1) \quad 32 \quad 3 \\
 \hline
 96 \\
 (2) \quad 30 \quad 3 \\
 \hline
 90 \\
 (3) \quad 32 \quad 4 \\
 \hline
 128 \\
 (4) \quad 41 \quad 5 \\
 \hline
 205 \\
 (5) \quad 30 \quad 5 \\
 \hline
 150 \\
 (6) \quad 50 \quad 4 \\
 \hline
 200
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 (1) \quad 24 \quad 3 \\
 \hline
 72 \\
 (2) \quad 25 \quad 2 \\
 \hline
 50 \\
 (3) \quad 46 \quad 6 \\
 \hline
 276 \\
 (4) \quad 55 \quad 4 \\
 \hline
 220 \\
 (5) \quad 37 \quad 3 \\
 \hline
 111 \\
 (6) \quad 17 \quad 6 \\
 \hline
 102 \\
 (7) \quad 46 \quad 9 \\
 \hline
 414 \\
 (8) \quad 34 \quad 9 \\
 \hline
 303
 \end{array}$$

第一步只有 4 3 一要進位。第二步同第一步，但是有 0。第三步二位都要進位。第四步同第三步，但是有 0。第五步十位上 3 3 一原本是不進位的，因個位進二，所以被迫進到百位。第六步同第五步，但是十位有 0。第七步十位 4 9 一原來只進三，受下一位進位的影響，所以進四。第八步同第七步，但是十位有 0。合計進位與不進位的，共有十種。若也只列二十八個習題，不是每一步只不過二題罷了。我來把這二十八個題目抄在下面，請讀者細細校對一番，看上列十四步中，有什麼脫漏

沒有？若是脫漏不管，學生既經沒有機會練習，當然不能成功習慣，將來做到進步的乘法要應用這習慣時，怎能叫他們不錯誤？

2×3
 6×8
 4×2
 7×4
 32×2
 28×3
 21×4
 12×6
 11×9
 13×4
 43×2
 28×3
 24×2
 13×6
 12×4
 21×3
 23×2
 27×2
 23×3
 19×3
 16×5
 17×5
 12×4
 45×2
 48×2
 47×2
 13×3
 35×2

編書人出題目如此疏忽，實在太說不過去。教員在上課時臨時出練習題目更容易如此疏忽。這是應當特別注意的。

有人以為關於0的，學生自然會得類推，何必多所周折？這話錯了。習慣是不能類推的。會做43—7的，未必也會做34—7；做熟93—27的，未必會做39—27；加法九九做熟的，未必能類推到連加法；乘法九九做熟的，未必能做普通乘法。這都不是空理論，是有人用科學方法調查研究得來的。從前加九九，乘九九，往往缺漏關於1及0的，如91—，40—，17—，05—等等。這是極大的疏忽。因為基礎練習時，脫漏了以後，將來做39—11，54—30，61—17，40—85等時，勢必重新補習。到應用時再補習，是最危險的辦法。0是人類的大發明。羅馬數目字是沒有0的。

；十作 \times ，五十作 \square ，所以完全沒有位子的關係。現行的十進記數法，巧妙處在乎位子。但是要利用位子，却非有0不可。不然，五和五十，便難區別。這等巧妙的方法，小朋友在初學時很不容易理會。所以教了他們十寫作10，五寫作5時，他們會得把十五寫 10^5 的！0的妙處還有！譬如40一做加法，結果是4；若做乘法，結果便成0。000一加起來，無論多少，總不過是0。除法商數中的0；小數點以後，有效數字前的0，都是小學生最容易弄錯的。小數右方的0可多可少，1和10沒有區別。整數左方的0，也不必寫出，0400⁴都是4。這等都是小朋友難於明瞭的。我們要是只管，任憑學生去類推，結果，勢必弄到錯誤百出。反對練習關於0的，原因是爲0的意思難明白，呆板的練習，怕減衰了學生的興味。這是一個啓發的問題，不是練習的問題。我們應當在練習開始以前，先使學生感到0的關係的重大。學生覺到了0的需要，自然練習時有志願，肯努力。做一種遊戲好了。把各人得到分數一一記下，看誰的分數多？約定各人輪做二次或三次。要是某人做了一

次，得不到分數時，應當記一個0，這0是表示已經做過而沒得分數。若不記0，他不是可以多做一次了嗎？記0不記0的功用，這樣便顯明了。這是一個啓發0的觀念的例子。別種關於0及1的啓發法，詳小學算術科教學法（商務萬有文庫本）。

要練習有效，細分步驟是第一個要件。第二要件便是不必強同。這就是適應個性的換一個說法。同一技能，各人練習成功所須的時間努力各各不同。這是無可勉強的。近來各種練習片，練習測驗，已經出了好多，前面也曾提及。我們新近又編成一套練習書，專供小學二年到六年生用。每年十二個月，每月一冊，每冊有二十四頁到三四頁不等。每天化十分到二十分的時間，做一百或二頁。時間不必太多，只須不間斷，成效是可以預定的。材料的種類極少，揀人生日常必須用的。因為一時廢不掉分數，所以高年級也有分數練習。每種中的步驟，分得極細，使務學生每次只須練成一個新的習慣。單就二年練習的不進位的加法說，計有下列各步：這

- (1) 4 2
- (2) 2 4
- (3) 6 3
- (4) 3 6
- (5) 6 4
- (6) 4 9
- (7) 3 1 2
- (8) 1 1 4

- (9) 2 4 3 (10) 1 2 6 (11) 3 3 4 (12) 1 3 6 (13) 1 2 1 3 (14) 1 1 1 4
- (15) 3 1 2 2 (16) 1 1 1 6 (17) 5 2 1 2 (18) 1 1 1 7 (19) 0 5 (20) 5 0
- (21) 0 2 3 (22) 3 0 2 (23) 3 2 0

不過是答不超過十的。每一步各有一個特殊的困難點。假定每步用二十個光景的題目，每天練習十五分到二十分鐘，一個月間，可以練習完成上列二十三步。這是一個折衷的假定罷了。學生儘可隨各人能力伸縮。快的，一天做二頁三頁；慢的，一天做半頁，或者一頁做三天也可以。錯得太多，某頁儘可重做。開始時大家從第一頁起，半月或一星期以後，便各各不同。彼此進行，絕少牽累。在寒暑假中，仍有練習材料，可以免去間斷的弊病。在養成習慣的過程中，最忌的是寒暑假的間斷。練習測驗，通例假期中也停止的。這一種練習書，絕對不必停止。假中做的，可作假期作業論。前後仍舊一貫，一方面使上學期學過的，在假期中復習，又一方面可以作下學期的準備。

第三個要件是經濟。經濟的反面，名叫浪費。練習的目標在乎習慣的養成。習慣是刺激和反應的連結。用全副精神，化相當時間在這連結上用反復的功夫，習慣自然容易養成。若因無謂的手續太多，把練習的時間耗費在連結以外的工作，不是把光陰虛耗？並且分心在別種手續上面，注意反難集中在連結上面，即使時間不計多少，也易犯事倍功半的弊。抄寫題目，是無謂手續中最通行的一種。有人算過，學生用在抄寫的時間，有時反而要比用在計算的時間大幾倍。譬如做74一的一個加法，真正化在計算出11來和寫答數的時間，不過半秒或一秒鐘已經很夠。若要叫學生把題目抄過一遍，時間至少要加出一倍。有的教員，還規定每一個題目，要先列橫式，然後再寫豎式計算，如： $\begin{array}{r} + \\ 74 \\ \hline 11 \end{array}$ 。一個題目，要寫兩遍，不是時間又要加倍。有的教員更叫學生在做完時，寫『答十一』的一句。這樣，時間又加上一倍。全部份的時間中，真正用在計算的，不過五分之一或四分之一罷了。因此，十分鐘裏可以算二十題的，只好算四五題了。一天如此，一星期如此，一學

期如此，一年如此，四年如此，六年如此，累積起來，實在是最浪費的辦法了。我們讀的書，是印刷好的，從來沒有要字字抄寫到二遍以上。何以獨有算學，一定要抄了做？若讀書也一定要抄了讀，化在抄的時間，或者也要比讀的時間大上四五倍。抄了做，還有一個不良的結果，就是容易抄錯。有人把學生算學錯誤，細細分析研究，因為學生抄寫錯誤的，不在少數。即使抄得不錯，學生寫的地位形式也極容易參差不齊，教員檢閱時，本子上東一個西一個的，要去找尋，因此又白化了好多無謂的光陰。有的教員，因為自己檢閱便利起見，限定抄寫題目的地位格式。這樣，學生在抄寫時化的時間格外多了。根本辦法，除特意要學生練習抄寫時以外，一律廢止抄寫。新出的練習測驗，練習片，都是如此。有的是題目印在硬紙上，打了洞，洞下放白紙，答數寫在洞裏。這種辦法最經濟。可惜印刷和製作的成本過重，所以金錢方面要貴許多。統盤籌算，也並不十分貴。只因為初用時要一宗較大的購置費，所以經濟拮据的小學，便不能普遍使用了。上述的兒童算學練習書，是迎

合普通小學經濟能力印行的。印刷和普通教科書一樣，定價很廉。用時只須把單張白紙湊在書上題目下面或旁邊，依次把答數寫在白紙上。整整齊齊的，一行一條，都是答數。每本後面附有答案。形式地位恰恰和題目一致。所以白紙上的答數，移到答案下面或旁邊時，上下左右，一目瞭然，校對極便。做完一行一條時，只須把白紙摺一摺，便可換一行一條再做。摺一摺，略為要耗些時間。我們兼顧時間和金錢，所以用此折衷辦法。

此外，關於練習的興味問題，時間支配問題等等，以前也一一說過，這裏不再重復，並請參看小學算術教學法（商務非萬有文庫本）第三章各節，小學教學漫談（中華）第十一章，第十二章。