SCRITTI INEDITI

DEL

P. D. PIETRO COSSALI

CHIERICO REGOLARE TEATINO

PUBBLICATI

DA BALDASSARRE BONCOMPAGNI

SOCIO ORDINARIO DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE' NUOVI LINCEI, E SOCIO CORRISPONDENTE
DELL' ACCADEMIA REALE DELLE SCIENZE DI TORINO,
DELLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI NAPOLI,
E DELLA PONTIFICIA ACCADEMIA DELLE SCIENZE
DELL'ISTITUTO DI BOLOGNA

SEGUITI DA UN' APPENDICE

CONTENENTE

QUATTRO LETTERE

DIRETTE AL MEDESIMO P. COSSALI

ED UNA NOTA INTORNO A QUESTE LETTERE

ROMA
TIPOGRAFIA DELLE BELLE ARTI
Piazza Poli n.° 91.
1857

PREFAZIONE

Le nobili signore contesse Teodora Cossali moglie del nobile signor conte Pandolfo di Serego Allighieri, e Teresa Cossali posseggono una raccolta di manoscritti e di carte stampate, divisa in trentasette cartelle numerate sul dorso I—XXXVII, e composta: 1.° Di parecchi scritti inediti del Padre Don Pietro Cossali: 2.° Di lettere manoscritte a lui dirette : 3.° D'altre carte relative alla sua persona ed ai suoi studi.

Una delle cartelle suddette ha sul dorso un cartellino nel quale si legge: « I ‖ elenco » opere ‖ stampate ed ‖ inedite- ‖ elogio Cossali - ‖ e carte relative ». Questa cartella, composta di 121 carte, numerate nel *recto* 1-121, trovasi chiamata più oltre nel presente volume: « cartella prima (1) ».

Un'altra delle cartelle suddette ha sul dorso un cartellino nel quale si legge : « III. ‖ » Analisi ‖ I ‖ Estratti ‖ per l'elogio di ‖ Leonardo Pisano ». Questa cartella che contiene 275 carte, numerate tutte nel *recto* coi numeri 1-275, è citata nel presente volume in ciascuno di questi tre modi: « cartella III (2), Cartella III (3), Cartella terza (4) ».

Un'altra delle cartelle suddette ha sul dorso un cartellino nel quale si legge: « V. ‖ » Analisi ‖ III. ‖ Estratto di F. Luca ‖ suo Elogio, e Storia ‖ I: (*sic*) (5) Aritmetica. » Questa cartella che contiene 242 carte, numerate tutte nel *recto* coi numeri 1-242, è citata più oltre nel presente volume in ciascuno dei cinque seguenti modi: « cartella V (6), Car- » tella V (7), Cartella quinta (8), cartella quinta (9), quinta cartella (10) ».

Un' altra delle cartelle suddette ha sul dorso un cartellino nel quale si legge : « XXX. ‖ Carteggio ‖ Scientifico ‖ IV ‖ e famigliare ». Questa cartella che contiene 187 carte, numerate tutte nel *recto* coi numeri 1-187, è citata più oltre nel presente volume in ciascuno di questi due modi: « cartella XXX (11), Cartella XXX (12) ».

Un' altra delle cartelle suddette ha sul dorso un cartellino nel quale si legge : « XXXVII. ‖ testamento ‖ ed ‖ eredità ‖ del ‖ P. Cossali ». Questa cartella che contiene 115 carte, numerate tutte nel *recto* coi numeri 1-115, è chiamata più oltre nel presente volume: « cartella XXXVII (13) ».

---

(1) Vedi più oltre, pag. V, lin. 33.
(2) Vedi più oltre, pag. III, lin. 11, 19, 49—50; pag. IV, lin. 4, 11—13; pag. 401, lin. 9—10.
(3) Vedi più oltre, pag. 401, lin. 28—29, 34, 47—48; pag. 402, lin. 31; pag. 403, lin. 47—48; pag. 404, lin. 45—46; pag. 405, lin. 23, 28 ; pag. 406, lin. 37; pag. 408, lin. 21.
(4) Vedi più oltre, pag. 312, lin. 31, 33.
(5) Ciascuno dei *sic* che si trovano nel presente volume fra parentesi in carattere corsivo è una mia giunta.
(6) Vedi più oltre, pag. III, lin. 24—25, 28, 34; pag. IV, lin. 19, 26, 38, 40—41, 43—46, 48, 50,
(7) Vedi più oltre, pag. 402, lin. 33—37; pag. 403, lin. 43—44; pag. 404, lin. 41; pag. 406, lin. 39—41; pag. 407, lin. 23.
(8) Vedi più oltre, pag. 133, lin. 23, 26; pag. 260, lin. 35; pag. 267, lin. 28; pag. 268, lin. 34 ; pag. 269, lin. 41 ; pag. 270, lin. 30; pag. 275, lin. 35.
(9) Vedi più oltre, pag. 191, lin. 37; pag. 192, lin. 31, 35; pag. 198, lin. 24; pag. 201, lin. 17; pag. 203, lin. 30—31; pag. 204, lin. 24; pag. 211, lin. 25.
(10) Vedi più oltre, pag. 196, lin. 25—26.
(11) Vedi più oltre, pag. 401, lin. 11.
(12) Vedi più oltre, pag. 401, lin. 44; pag. 402, lin. 32; pag. 407, lin. 25.
(13) Vedi più oltre, pag. II, lin. 10, 62.

Il Padre Don Pietro Cossali in un testamento olografo da lui fatto in Padova ai 3 di luglio del 1814 (1) istituì suoi eredi universali i nobili signori conti Bennassù e Carlo Cossali (2) figliuoli di Domenico, morto ai 5 di febbraio del 1812 (3), e fratello del medesimo P. D. Pietro. I detti signori conti Bennassù e Carlo Cossali, avendo accettata questa eredità, divennero per tal modo proprietari della collezione menzionata di sopra nelle linee 2-8 della pagina I. Uno di essi per altro, cioè Bennassù, essendo morto ai 30 di luglio del 1819 (4) prima dell'anzidetto conte Carlo, quest'ultimo rimase da quel giorno fino all'ultimo di sua vita unico proprietario della collezione suddetta. Il detto conte Carlo Cossali morì in Verona ai 14 di dicembre del 1849 (5). Le suddette signore contesse Teodora e Teresa

(1) Nella cartella XXXVII (carta 13 *recto*, lin. 26 — carta 14 *recto*, lin. 24) si legge :
» N.° 370. » Adì (*sic*) 3 Luglio 1814: Padova: E.
» Scielgo (*sic*) a mio Executor testamentario il Nobil Sig.r Francesco Venezze q. di Marcantonio.
» Lascio miei Eredi universali li miei Nipoti ex fratre C.ti Bennassù, e Carlo Cossali.
» Con l'aggravio però di pagare ogni anno anticipatamente all'Egregia mia Sorella ex monaca Lugrezia Cossali vita sua durante lire
» ital. 30: dico trenta.
» Item di pagare anticipatamente ogni anno all'ottima mia cognata C.a Teresa Ridolfi Cossali vita sua durante lire Ital. 100: dico cento.
» Item con l'aggravio di ripartir in 4. uguali parti alle quattro mie Nipoti Lugrezia, Camilla, Marianna, Elisabetta Cossali le lire
» italiane 6129: che tengo impiegate a Censo con Monsignor Scipione Dondi dall'Orologio Vescovo di Padova, avendo già la Nipote Laura
» percepita una corrispondente quota.
» Item con l'aggravio di passare ad Angioletta Bissari mia Cameriera tanto già cara a mia sorella defonta, e tanto diligente, e fedele
» in continuare a servir me ogni mese anticipatamente vita sua durante lire ital. 16: dico sedeci (*sic*), essendo attualmente in ponto (*sic*)
» di mia morte a mio servizio.
» Item di donare al mio Servidore Pietro Pastorello, trovandosi in punto di mia morte a mio servigio, il mio Orologietto semplice
» di argento con lire ital. 100: dico cento una volta tanto, e di più tutto il mio vestiario bianco, ed il mio abitone di Malpago.
» Item di pagare all'ex Teatino Converso Gio: Meneghelli una volta per sempre lire ital. 30: dico trenta con tutto il mio vestiario nero vecchio
» Item di pagare all'ex Teatino Converso Giambattista Pirato lire ital. 32: dico trentadue.
» Item di pagare al mio Gastaldo Bio: Pinzo lire ital. 15: dico quindici.
» Item di pagare a Battista Andreato Cappellaro lire ital. 20 = dico venti.
» Lascio poi tutti i miei Istrumenti Matematici, e Fisici — con tutti i miei Libri di Matematica, Fisica, Chimica, Storia naturale, Agri-
» coltura, Architettura Civile, e Militare, Geografia e di Arti, e di incisioni, con tutti gli esemplari stampati delle mie opere a Floriano
» Pasetti; ed a lui dò il carico di scegliere tra i miei manuscritti (*sic*) i meno imperfetti, copiarli, o consegnarne le copie all'Ateneo di Pa-
» dova; e gli aggiungo l'Enciclopedia di Losanna.
» Lascio al mio Nipote ex sorore C. Antonio Guarienti tutti i miei Libri di Poesie, e Prose greche, latine, toscane, francesi, e di più
» i Codici in Pergamena, e in carta ordinaria. Suppongo nel Conte Guarienti le dabita licenza.
» Lascio alla mia famiglia Cossali i libri di Metafisica, e di Gius, eccettuati i Libri proibiti di 1.a Classe, come il *Systeme* (*sic*) *de*
» *la Nature*, l'indiferenza (*sic*) del secolo XVII. m; ed inoltre lascio la serie delle Storie delle Repub. per l'elsevieri
» Alla Pub. Biblioteca di Padova oltre le accennate Opere di Metafisica, e di Gius proibite, lascio le opere tutte di Erasmo di Roterdam.
» Lascio i Libri miei di gram. greca, latina, italiana, dizionarj, d'instituzione Rettorica, di Storia profana, e sacra in custodia ai miei
» Eredi per consegnarli, o vendendoli, consegnarne l'equivalente ricavato alla prima casa Teatina, che risorgesse nello Stato entro 6: dico
» sei anni, con l'aggiunta di 3000: dico tremila lire italiane.
» Intanto lascio ai Teatini che stavano concentrati in Venezia lire ital. 400: dico quattrocento da distribuirsi tra loro non compresi
» i due sopranominati.
» Item lascio lire 100: dico cento in limosina ai Poveri della Parrocchia.
» Lascio i miei Libri Inglesi alla Signora Contessa Zucco dimorante in Padova nella Strada al Ponte dipinto.
» I miei libri di Anatomio (*sic*) e di Medicina al signor Dottor Montesanti con quella rimunerazione di più in danaro che sarà giudi-
» cata congrua per l'ultima malattia, avendolo io già rimunerato con Libri, non volendo egli altro per le antecedenti.
» Lascio il mio Calice d'argento del peso di Onze 29 al sig.r D. Pietro Berti Direttore della Chiesa detta di San Gaetano, propria-
» mente di (*sic*) Santi Simeone e Giuda
» Lascio al sig.r Ab. Susanetto proposito di Ogni Santi tutte le mie Pianette (*sic*), e tutti i miei Camici, ed altro per servizio della Messa,
» e di più il mio Anello di Topaso (*sic*).
» Lascio alla mia Nipote C.a Marianna Cossali la mia bella Reliquia di S. Gaetano in ricca borsa.
» Lascio alla Con.a Elisabetta Guarienti maritata in Carcasola una volta per sempre lire italiane 600: dico seicento.
» Lascio alla sig.a Elisabetta Rinaldi uno dei più bei miei reliquiarj.
» Un altro alla Contessa Dotto Venezze.
» Le opere di Bourdelan (*sic*), di (*sic*) Pensieri di Pascal alla Sig.a Silvia Curtoni Verza.
» Lascio il mio Cameo la Jole al mio Executor Testamentario il sig.r Francesco Venezze, ed unitamente le mie Edizioni Aldine.
» Io Pietro Cossali di proprio pugno ».

Tutto ciò che si legge nelle prime nove linee della presente pagina II, e nelle prime cinque linee della pagina III mi è stato gentilmente comunicato dal sig. Professore Francesco Longhena. La sig.ra contessa Laura Cossali, vedova Bottagisio, si è compiaciuta d'inviarmi da Verona a Roma tutta la raccolta menzionata nella linee 5—9 della pagina I. Credo mio dovere il far qui nota la mia viva riconoscenza per questo favore singolarissimo.

(2) Vedi la linea 13 di questa pagina II.

(3) Nella cartella XXXVII (carta 19, *recto*, lin. 1—8) si legge: « Dominico. Cossali. Veronensi. ‖ Viro. ‖ Perho-
» nesto. Prudenti. Pio. ‖ De Sua Familia. Optime Merito. ‖ Anno MDCCCXII. ‖ Die V. Februarj ‖ e vivis ere-
» pto ‖ Bennanatus et Carolus ‖ Dolentes Filij Posuere ».

(4) Ho presso di me una fede di morte nella quale si legge: « *Verona il giorno* 19 *del mese di* Aprile *anno*
» *1836.* ‖ *Dichiaro io sottoscritto che nei libri parrocchiali di que-* ‖ *sta Venerabile Pieve dei Santi Apostoli* tro-
» *vasi re-* ‖ *gistrato che nel giorno* trenta *del mese* ‖ di Loglio *anno 18*19 morì C.te Bennassù ‖ Cossali fu C.te Do-
» menico, e Co: Teresa ‖ Ridolfi, Celibe, in età di anni 35. In fede ‖ *In fede ec.* ‖ *Dall'archivio parrocchiale dei*
» *Santi Apostoli* ‖ (*l. s*). *Il Parroco* ‖ Pre Angelo Vicenzi Ass.° » Tutto ciò ch'è in carattere tondo fra le vir-
golette doppie « » nella linee 65—69 della presente pagina II trovasi manoscritto nella fede suddetta. Il rimanente di questa fede è stampato.

(5) Ho presso di me manoscritta una fede di morte nella quale si legge: « Per uso d'Ufficio ‖ Verona li 17
» settembre 1857 ‖ Da questi Parr. Registri consta, che il sig. Bottagisio Giovanni ‖ fu Sig. Carlo: marito della

Cossali figliuole della contessa Maria Bevilacqua, dopo la morte del loro genitore essendo rimaste sue eredi, divennero uniche proprietarie della collezione medesima. La signora contessa Laura Cossali loro zia, sorella dei detti signori conti Bennassù e Carlo Cossali, e vedova del conte Giovanni Bottagisio, morto ai 3 di dicembre del 1821 (1), è ora unica depositaria di fatto e di diritto di questa collezione.

Sette scritti del suddetto Padre Don Pietro Cossali trovansi stampati nel presente volume. Questi scritti sono i seguenti:

I. *Frammento di un Elogio di Leonardo Pisano.*

Questo scritto trovasi stampato nelle seguenti pagine e linee del presente volume: pag. 1, lin. 3-40; pag. 2, lin. 1-20. Un esemplare autografo di questo scritto trovasi nelle carte 2, 3 *recto* della cartella III. Le carte numerate 1-4 di questa cartella sono legate con cartone coperto di carta turchina. Sul primo cartone di questa legatura trovasi incollato un cartellino, nel quale si legge: « Cartella III.ª || Carte 1-4 || Frammento di un Elogio || di Leonar- » do Pisano ».

II. *Estratto del Libro di Leonardo Pisano.*

Questo scritto trovasi stampato nelle seguenti pagine e linee del presente volume: pag. 3, lin. 3-35; pag. 4-58; pag. 59, lin. 1-26, e margine laterale esterno lin. 1-2; pag. 60, lin. 1-21; pag. 61, lin. 1-14. Un esemplare autografo di questo scritto trovasi nelle carte seguenti della cartella III: carte 29-35, carta 36 *recto*, lin. 1-27, e margine laterale esterno, lin. 1-26; carte 37-42, 44-52, carta 63 *recto* (2).

III. *Elogio di Fra Luca Pacioli.*

Questo scritto trovasi stampato nelle seguenti pagine e linee del presente volume: pag. 63, lin. 2-41; pag. 64-99; pag. 100, lin. 1-43; pag. 101-110. Un esemplare autografo di questo scritto trovasi nelle carte 36-59, 60 *verso* - 68 *recto*, 69-74 *recto* della cartella V. Le carte numerate 35-75 della medesima cartella V sono legate con cartone coperto di carta turchina. Sul primo cartone di questa legatura trovasi incollato un cartellino nel quale si legge: « Cartella V.ª || carte 35=75 || II. || Esemplare Originale || dell' || Elogio di Fra Luca Pacioli ». Un altro esemplare di questo *Elogio* trovasi nelle carte 2-29 della medesima cartella V. Le prime trentaquattro carte di questa cartella sono legate in cartone coperto di carta turchina. Sul primo cartone di questa legatura trovasi incollato un cartellino, nel quale si legge: « Cartella V.ª || Carte 1-34 || I. || Copia || dell' || Elogio di Fra Luca Pacioli ».

IV. *Estratto della Somma di F. Luca.*

Un esemplare autografo d'una parte di questo scritto trovasi nelle carte 149-152, 156-160, 162-163, 166-174, 175 *verso* - 221 *recto* della cartella V. Questa parte trovasi nelle seguenti pagine e linee del presente volume: pag. 111, lin. 2-39; pag. 112-114; pag. 115, lin. 1-42; pag. 116-124; pag. 125, lin. 1-40; pag. 126-132; pag. 133, lin. 1-20; pag. 134-190; pag. 191, lin. 1-34, 40; pag. 192, lin. 1-28; pag. 193-195; pag. 196, lin. 1-23; pag. 197; pag. 198, lin. 1-22; pag. 199-200; pag. 201, lin. 1-14, 19-21; pag. 202; pag. 203, lin. 1-28; pag. 204, lin.

» Nob. Sig. Laura Cossali mancò a' || vivi li 3. Decembre 1821. vent'uno. In Fede || Dalla Matrice di S. Nicolò || » Bonetti Amadio Curato || Visto || per Il Podestà || G. B. Maraldi ».

(1) Ho presso di me una fede di morte nella quale si legge: « *Per uso d'Ufficio* || VENERABILE PLEBANA » MATRICE || DEI SANTI APOSTOLI. *in Verona* || Dichiaro io sottoscritto che nei Libri Parrocchiali di questa || Ve- » nerabile Pieve (*sic*) trovasi (*sic*) registrato che nel giorno *14. quattordici* || del mese di *Dicembre* anno *1849. qua-* » *rantanove* || *morì il sig. Co. Carlo Cossali del fu Domenico,* || *e della fu Teresa Ridolfi, Vedovo della fu Co. Ma-* || » *ria Bevilaqua.* || In fede ecc. || *Dall'Archivio Parrocchiale dei Ss. Apostoli* || *Verona 17. Settem-* » *bre 1857.* || *p. Il Parroco* || *Pre Ang. Vicenzi Assᵉ.* || *Visto* || *p. Il Podestà* || *G B Moraldi* ». Tutto ciò ch'è in carattere corsivo più piccolo fra le virgolette doppie « » nelle linee 41, 43—46 della presente pagina II, salvo i « (*sic*) », trovasi manoscritto in questa fede. Il rimanente di questa fede è stampato.

(2) Nelle linee 1—2 della carta 28 *recto* della suddetta cartella III si legge: « Quinterno I. || Estratto del libro » di Leonardo Pisano. » Nelle linee 1—2 della carta 43 *recto* della suddetta cartella III si legge: « Quinterno » 2.° || Estratto del libro di Leonardo Pisano. » Null'altro trovasi scritto nelle medesime carte 29 e 43, salvo il numero 28, ch'è sul *recto* della prima, ed il numero 43, ch'è sul *recto* della seconda.

1-22; pag. 205-210; pag. 211, lin. 1-23; pag. 212-259; pag. 260, lin. 1-33; pag. 261-266; pag. 267, lin. 1-26; pag. 268, lin. 1-31; pag. 269, lin. 1-39; pag. 270, lin. 1-28; pag. 271-274; pag. 275, lin. 1-15. Un esemplare autografo di tutto il rimanente del suddetto *Estratto della Somma di F. Luca* (1) trovasi nelle carte 236-242, 245 della cartella III. Questa parte dell'Estratto medesimo trovasi nelle seguenti pagine e linee del presente volume: pag. 275, lin. 16-33 e margine laterale esterno; pag. 276-288 (2).

V. *Note sul Trattato Generale di numeri e misure di Nicolò Tartaglia stampato in Venezia anno* 1556.

Questo scritto trovasi stampato nelle seguenti pagine e linee del presente volume: pag. 289, lin. 4 — pag. 311; pag. 312, lin. 1-29; pag. 313-314; pag. 315, lin. 1-17. Un esemplare autografo di questo scritto trovasi nella cartella III (carta 246 *recto*, lin. 3 — carta 261 *verso*, col. 2, lin. 11). Nelle prime due linee del *recto* della carta 246 di questa cartella III, si legge: « Note sul Trattato Generale di numeri e misure di Nicolò Tartaglia » stampato in Venezia an. 1556 ».

VI. *Lezioni sull'aritmetica*.

Questo scritto trovasi stampato nelle seguenti pagine e linee del presente volume : pag. 317, lin. 2 — pag. 323; pag. 324, lin. 1-40; pag. 325-332; pag. 333, lin. 1-43; pag. 334-350. Un esemplare autografo di questo scritto trovasi nelle carte 78-86, 88-93, 97-101, 103-110, 113 *recto* della cartella V. Nel *recto* della carta 77 (lin. 1-4) della cartella V si legge: « Lezioni sull'aritmetica || I. || II. || III. » Null'altro trovasi scritto nella medesima carta, salvo il numero 77 ch'è nel *recto* della carta medesima.

VII. *Memorie storico-scientifiche su l'origine dell'odierna Aritmetica, e dell'Algebra, loro trasporto dall'Oriente in Italia, e primi progressi nelle contrade di questa*.

Questo scritto trovasi stampato nelle seguenti pagine e linee del presente volume : pag. 351, lin. 7 - pag. 354; pag. 355, lin. 1-41; pag. 356-397. Un esemplare autografo di questo scritto trovasi nelle carte seguenti della cartella V : carta 120 *recto*, lin. 7 - carta 131 *verso*, lin. 11 - carte 133-144.

Ciascuno de'seguenti opuscoli, articoli, e passi contiene notizie intorno alla vita ed alle opere del Padre D. Pietro Cossali, ovvero componimenti poetici in sua lode.

1. Un'opuscolo finora inedito, intitolato : « Notizie||della vita, e degli scritti del Padre » Conte Pietro Cossali || Chierico Regolare Teatino || tratte da varie memorie ricordate e » raccolte || dal Conte Antonio Guarienti Nipote materno di Lui || coll'intendimento dap- » prima veramente propostosi di || stenderne (*sic*) l'elogio suo || corredate quelle || di una » lettera preliminare || alla Nob. Contessa Laura Cossali Bottagisio || e nel fine || di alcune » utili annotazioni ». Posseggo una copia manoscritta di quest'opuscolo, contenuta in 66 carte, in foglio, numerate tutte, nel *recto*, coi numeri 1-66 (4). Il conte Antonio Guarienti,

---

(1) Vedi sopra, pag. III, lin. 32.

(2) Nella carta 148 *recto* (lin. 1—2) della cartella V si legge: « Estratto della Somma di F. Luca.||Quaderno I. » Nella carta 164 *recto* (lin. 1—2) della cartella medesima si legge: » Estratto di F.Luca.||Quaderno II. »; il che anche si legge nella carta 165 *recto* (lin. 1—2) di questa cartella. Null'altro trovasi scritto nelle carte 148, 164 della cartella V, salvo le parole seguenti: « Ricordi spettanti all'astronomia », cassate nel *recto* della carta 148, e salvo i numeri 148, 164, il primo de'quali è sul *recto* della prima, ed il secondo sul *recto* della seconda. Nel margine laterale interno (lin. 1—2) della carta 178 *recto* della cartella V si legge: « Estratto di F. Luca||Quaderno III. » Nel margine laterale interno (lin. 1—2) della carta 187 *recto* della cartella V si legge: « Estratto di F. Luca » Quaderno IV. » Nel margine laterale interno (lin. 1—2) della carta 199 *recto* della cartella V si legge: « Estratto » di F. Luca||Quaderno V. » Nel margine laterale interno (lin. 1—2) della carta 211 *recto* della |cartella V si legge : « Estratto di F. Luca || Quaderno VI. »

(3) Nelle prime sei linee della carta 120 *recto* della cartella V si legge: « Memorie storico-scientifiche || Su l'ori- » gine dell'odierna Aritmetica, e dell'Algebra|| Loro trasporto dall'Oriente in Italia || E primi progressi nelle con- » trade di questa||Di || D. Pietro Cossali C. R. » Nel *recto* della carta 132 della cartella V (lin. 1—2) si legge: « Proseguimento della Memoria || Del P. Cossali. » Null'altro trovasi scritto nella medesima carta 132, salvo il numero 132 scritto sul *recto* di questa carta.

(4) Nel *recto* (lin. 1—12) della seconda delle 66 carte menzionate nelle linee 35—36 della presente pagina IV, trovasi il titolo riportato nelle linee 30—35 della medesima pagina IV.

autore di questo scritto, nacque di Francesco Nobile Guarienti e della contessa Cecilia Cossali ai 3 di agosto 1780 in Verona, nella parrocchia, che più non esiste, di S. Maria alle Fratte, e morì ai 4 di giugno del 1856 (1).

2. Un articolo d'un opera intitolata: « I SCRITTORI ‖ DE' CHERICI REGOLARI ‖ DETTI TEA- » TINI ‖ D' ANTONIO FRANCESCO VEZZOSI ‖ DELLA LORO CONGREGAZIONE ‖ IN ROMA MDCCLXXX. ‖ » NELLA STAMPERIA DELLA SACRA CONGREGAZIONE ‖ DI PROPAGANDA FIDE ‖ *CON LICENZA DE' SUPE- » RIORI.* » (Due parti in-4°; *PARTE PRIMA*, pag. 287, lin. 2-18). Quest'articolo incomincia così (2): « COSSALI = Pietro = Veronese, Teatino vivente, che professò l'Instituto in Mi- » lano a'16 Febbrajo del 1768 », e finisce (3): « che poi nel 1578. furono trasportate » nel Monastero di S. Sofia di Padova ».

3. Un articolo che trovasi in un'opuscolo in 8° intitolato: « RITRATTI ‖ D'ALCUNI ILLUSTRI » AMICI ‖ DI ‖ SILVIA CURTONI VERZA ‖ IN ARCADIA ‖ FLAMINDA CARITEA. ‖ VERONA ‖ *TIPOGRAFIA » GAMBARETTI* ‖ MDCCCVII » (pag. 27, lin. 2 - pag. 30, lin. 18). Quest' articolo intitolato (4): « *PIETRO COSSALI* » incomincia (5): « *Altro cielo ora illustra il nostro matematico Cos- » sali* », e finisce (6): « *una vita cotanto preziosa ad essi, alle scienze, ed alla patria, a » cui tanto onore egli accresce* ».

4. Un passo d'un opuscolo stampato di 44 pagine in 4°, nella terza delle quali si legge: « PROSPETTO ‖ DELLE ‖ LETTURE DELLA SEZIONE DI PADOVA ‖ DEL ‖ CESAREO-REGIO ISTI- » TUTO ‖ DI SCIENZE LETTERE ED ARTI ‖ NEL CORSO DELL'ANNO ACCADEMICO MDCCCXV-MDCCCXVI ‖ » PADOVA ‖ PER BETTONI E COMPAGNI ‖ M.DCCC.XVI. » Questo passo incomincia (7): « P. S. » Nel corso di quest'anno accademico », e finisce (8): « Una sì dolce illusione non ebbe » lunga durata! »

5. Una carta della quale una sola pagina è stampata. Nelle prime sei linee di questa pagina si legge: « IN MORTE ‖ DEL PRECLARISSIMO MATEMATICO E FISICO ‖ *IL SIGNOR* ‖ DON PIETRO » COSSALI ‖ DI VERONA ‖ PROFESSORE NELLA REGIA UNIVERSITÀ DI PADOVA ». Trovansi quindi nella medesima pagina in due colonne due sonetti, il primo dei quali incomincia nella seconda linea della prima di tali colonne: « Dappoichè 'l suo maestro e lo suo autore », e finisce nella linea 15 della colonna medesima: « Giovine stuolo, in cui virtute sculse ». Il secondo di tali sonetti incomincia nella seconda linea della seconda di queste colonne: « Quel, » che all'alma natura il vel disciolto », e finisce nella linea 15 di questa colonna: « Mor- » te, che impero tien sommo e sovrano ». Nelle ultime due linee della medesima pagina si legge; « G. B. ‖ *VERONA. TIPOGR. MORONI* ‖ *ANNO MDCCCXVI.* » Due esemplari di questa carta trovansi nelle carte numerate 114, 119 della cartella prima.

6. Un opuscolo intitolato: « Versi ‖ in lode dell'Abate ‖ Pietro Conte Cossali ‖ Profes- » sore di Calcolo Sublime ‖ e Membro dell'Istituto Italico ‖ recitati ‖ da G. B. Rinaldi ‖ » nell'Accademia di Verona - Padova ‖ Tipografia Bettoni e Comp. ‖ M. DCCC. XVI ». Quest' opuscolo è di sedici pagine, in 8°, numerate tutte, salvo le prime quattro, la 14ª e l'ultima, coi numeri 5-15 ».

---

(1) In una lettera scritta dal Padre Bartolommeo Sorio Veronese della Congregazione dell' Oratorio al sig. Professore Francesco Longhena in data degli 8 di Luglio 1856, si legge: « E quanto al Conte Antonio Guarienti, » egli è morto a dì 4 Giugno prossimo passato. Egli è nato di Francesco Nob. Guarienti, e della Contessa Ceci- » lia Cossali ai 3 di Agosto 1780 in Verona nella Parrocchia, che più non esiste, di S.ta Maria alle Fratte ».

(2) *Vezzosi, I scrittori de' Cherici Regolari detti Teatini, parte prima*, pag. 287, lin. 2—3.

(3) *Vezzosi, I scrittori de' Cherici Regolari detti Teatini, parte prima*, pag. 287, lin. 15—16.

(4) *Ritratti d'alcuni illustri amici di Silvia Curtoni Verza*, pag. 27, lin. 1. L' opuscolo menzionato nelle linee 11—16 della presente pagina V è composto di 80 pagine, numerate tutte, salvo le prime quattro, coi numeri V—VIII, 1—72.

(5) *Ritratti d'alcuni illustri amici di Silvia Curtoni Verza*, pag. 27, lin. 2—3.

(6) *Ritratti d'alcuni illustri amici di Silvia Curtoni Verza*, pag. 30, lin. 16—18.

(7) *Prospetto delle letture della sezione di Padova del Cesareo-Regio Istituto di scienze lettere ed arti nel corso dell'anno accademico MDCCCXV—MDCCCXVI*, pag. 38, lin. 1.

(8) *Prospetto delle letture della sezione di Padova del Cesareo-Regio Istituto di scienze lettere ed arti nel corso dell'anno accademico MDCCCXV—MDCCCXVI*, pag. 38, lin. 15—16. — Le 44 pagine menzionate nella linea 17 di questa pagina V sono numerate tutte, salvo le prime quattro, e le ultime quattro, co'numeri 3—38.

7. Un articolo che trovasi in un'opera dell' abate Luigi Federici, intitolata: « *ELOGI* || ISTO- » RICI || DE' PIÙ ILLUSTRI || ECCLESIASTICI || VERONESI. || IN VERONA || DALLA TIPOGRAFIA RAMAN- » ZINI || MDCCCXVIII-MDCCCXIX. » (Tre tomi, in-4°; *TOMO III*, pag. 253, lin. 3 - pag. 272, lin. 40 (1). Quest'articolo, intitolato « COSSALI||PIETRO » (2), incomincia (3): « Tra le di- » stinte Veronesi Famiglie ebbe li genitori il Cossali », e finisce (4): « a lui addossate » dal Governo Austriaco ». Nelle linee 7-9 della prima pagina del *TOMO III* sopracci- tato nella linea 3 di questa pagina VI si legge: « IN VERONA DALLA TIPOGRAFIA RAMANZINI » M DCCC XIX ».

8. Un opuscolo, in 4°, di 46 pagine, nella terza delle quali si legge: « ELOGIO || » DI || PIETRO COSSALI || SCRITTO || DAL SOCIO || AB. GIUSEPPE AVANZINI || INSERITO NEL TOMO » XIX. DEGLI ATTI || DELLA || SOCIETÀ ITALIANA || DELLE SCIENZE || RESIDENTE IN MODENA || MO- » DENA || PRESSO LA TIPOGRAFIA CAMERALE || MDCCCXXIV. » (5) L'abate Giuseppe Avanzini, autore di questo « ELOGIO » nacque ai 13 di dicembre del 1753, in Gaino, piccola terra della riviera Bresciana del lago di Garda (6); e morì in Padova ai 18 di giugno del 1827 (7). Le 46 pagine menzionate nella linea 9 della presente pagina VI sono numerate tut- te, salvo le prime quattro, e l'ultima coi numeri 3-43. Tutto ciò che si legge nelle pagine

---

(1) L'opera menzionata nelle linee 1—3 della presente pagina VI contiene tre lettere dedicatorie (*Federici, Elogi istorici de' più illustri ecclesiastici Veronesi*, tomo I, pag. III—VI; tomo II, pag. III—VI; tomo III, pag. III—VI). Ciascuna di queste dedicatorie è firmata così: « Umilissimo Obbl.mo Servitore || LUIGI FEDERICI » Prete ». (*Federici, Elogi istorici de' più illustri ecclesiastici Veronesi*, t. I, pag. VI, lin. 5—6; t. II, pag. VI, lin. 5—6; t. III, pag. VI, lin. 7—8).

(2) *Federici, Elogi istorici de' più illustri ecclesiastici Veronesi*, t. III, pag. 253, lin. 1—2.

(3) *Federici, Elogi istorici de' più illustri ecclesiastici Veronesi*, t. III, pag. 253, lin. 3—4.

(4) *Federici, Elogi istorici de' più illustri ecclesiastici Veronesi*, t. III, pag. 272, lin. 40.

(5) Nella seconda pagina dell'opuscolo menzionato nelle linee 9—12 della presente pagina VI trovasi un ritratto inciso sotto al quale nella medesima seconda pagina (lin. 2—6) si legge: « *Natale Schiavoni dis. Gaetano* » *Bozza inc.* || AB. PIETRO COSSALI || *P. P. di Calcolo Sublime* || *nella Imp. R. Università di Padova* || *Membro del* » *Ces. R. Istituto* || *nato in Verona il 29. Giugno 1748. morto in Padova il 20. dicembre 1815.* »

(6) Posseggo un esemplare d'un' opera intitolata: « BIOGRAPHIE || UNIVERSELLE, || ANCIENNE ET MODERNE, || » OU HISTOIRE, PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE, DE LA VIE PUBLIQUE ET PRIVÉE || DE TOUS LES HOMMES QUI SE » SONT FAIT REMARQUER PAR LEURS ÉCRITS, || LEURS ACTIONS, LEURS TALENTS, LEURS VERTUS OU LEURS CRI- » MES. || OUVRAGE ENTIÈREMENT NEUF, || RÉDIGÉ PAR UNE SOCIÉTÉ DE GENS DE LETTRES ET DE SAVANTS. || » A PARIS, || CHEZ MICHAUD FRÈRES. || 1811—1813 (TOME PREMIER — TOME DIXIÈME); CHEZ L. G. MICHAUD; » 1814—1847 (TOME ONZIÈME — TOME QUATRE-VINGTIÈME); AU BUREAU DE LA BIOGRAPHIE UNIVERSELLE » ET CHEZ BECK, LIBRAIRE, RUE GÎT-LE-COEUR 12, 1847—1853 (TOME QUATRE-VINGT-UNIÈME — TOME QUA- » TRE-VINGT-TROISIÈME) »; (ottantatrè tomi, in 8°). Nel tomo 56° di quest'opera (*Biographie universelle, ancienne et moderne, tome cinquante-sixième*, pag. 587, col. 1, lin. 8—42) trovasi un articolo che incomincia così: « AVANZINI (l' abbé JOSEPH), mathématicien, né à Gaino, village près de Salo, dans les états de » Venise, le 13 déc. 1753. » (*Biographie universelle, ancienne et moderne, tome cinquante-sixième*, pag. 587, col. 1, lin. 8—11). Quest'articolo è firmato: « G—G—Y. » (*Biographie universelle, ancienne et moderne, tome cinquante-sixième*, pag. 587, col. 1, lin. 43). Una tavola che trovasi nella pagina settima non numerata del tomo 56.° suddetto è intitolata (*Biographie universelle ancienne et moderne, tome cinquante-sixième*, pag. 7.ª non numerata, lin. 1—2): « SIGNATURES DES AUTEURS || DU CINQUANTE-SIXIÈME VOLUME ». In questa tavola si legge: « G—G—Y. DE GRÉGORY ». (*Biographie universelle, ancienne et moderne, tome cinquante-sixième*, pag. settima non numerata, col. 1, lin. 29). Una traduzione italiana dell'articolo menzionato nelle linee 36—38 di questa pagina VI, trovasi nel volume primo d'una edizione intitolata: « BIOGRAFIA || UNIVERSALE || ANTICA E MODER- » NA. || SUPPLIMENTO, || OSSIA || CONTINUAZIONE DELLA STORIA PER ALFABETO DELLA VITA PUBBLICA E PRI- » VATA || DI TUTTE LE PERSONE CH' EBBER FAMA PER AZIONI, SCRITTI, INGEGNO, || VIRTÙ, O DELITTI. || OPE- » RA AFFATTO NUOVA || COMPILATA IN FRANCIA DA UNA SOCIETÀ DI DOTTI || E PER LA PRIMA VOLTA RECATA » IN ITALIANO. || VENEZIA || PRESSO GIAN BATTISTA MISSIAGLIA || MDCCCXXXIV.—MDCCCXLI. » (nove volumi, in 8°, vol. I, pag. 632, col. 1, lin. 12—45). Questa traduzione incomincia così (*Biografia universale antica e moderna. Supplimento*, vol. I, pag. 632, col. 1, lin. 12—14): « AVANZINI (l'abate GIUSEPPE), matematico, nato » a Gaino, villaggio presso Salò, il dì 13 dicembre 1753 ». In un' opera intitolata: « BIOGRAFIA || DEGLI ITA- » LIANI ILLUSTRI || NELLE SCIENZE, LETTERE ED ARTI || DEL SECOLO XVIII, E DE' CONTEMPORANEI || COMPI- » LATA || DA LETTERATI ITALIANI || DI OGNI PROVINCIA || E PUBBLICATA PER CURA DEL PROFESSORE || EMILIO » DE TIPALDO || VENEZIA || DALLA TIPOGRAFIA DI ALVISOPOLI || MDCCCXXXIV—MDCCCXLI » (otto volumi, in 8°, volume quarto, pag. 27, col. 1, lin. 32 — pag. 31, col. 1, lin. 14) trovasi un articolo firmato: « ALBERTO » GABBA » (*De Tipaldo, Biografia degli Italiani illustri*, volume quarto, pag. 31, col. 1, lin. 15). Quest'articolo incomincia così (*De Tipaldo, Biografia degli Italiani illustri*, volume quarto, pag. 27, col. 1, lin. 32—35): » AVANZINI (GIUSEPPE), nacque ai 13 dicembre del 1753 in Gaino piccola terra della Riviera Bresciana del » lago di Garda ».

(7) Nell'articolo che di sopra si è detto (Vedi le linee 36—40 di questa pagina VI) essere inserito nella *Bio-*

5ª-43ª di quest'opuscolo, salvo i numeri 3-43 co'quali esse sono numerate (1), trovasi anche stampato in un volume, in 4.°, intitolato: « MEMORIE ‖ DI MATEMATICA ‖ E DI FISICA ‖ DELLA ‖ SO- » CIETÀ ITALIANA ‖ DELLE SCIENZE ‖ RESIDENTE IN MODENA ‖ TOMO XIX. ‖ PARTE CONTENENTE LE » MEMORIE DI MATEMATICA. ‖ MODENA ‖ PRESSO LA SOCIETÀ TIPOGRAFICA ‖ MDCCCXXI. » (pag. CXI, lin. 1-5, 7-30; pag. CXII, lin. 2-36; pag. CXIII, lin. 2-36; pag. CXIV, lin. 2-36; pag. CXV, lin. 2-37; pag. CXVI, lin. 2-36; pag. CXVII, lin. 2-35; pag. CXVIII, lin. 2-35; pag. CXIX, lin. 2-36; pag. CXX, lin. 2-36; pag. CXXI, lin. 2-34; pag. CXXII, lin. 2-35; pag. CXXIII, lin. 2-35; pag. CXXIV, lin. 2-35; pag. CXXV, lin. 2-35; pag. CXXVI, lin. 2-35; pag. CXXVII, lin. 2-35; pag. CXXVIII, lin. 2-36; pag. CXXIX, lin. 2-35; pag. CXXX, lin. 2-36; pag. CXXXI, lin. 2-34; pag. CXXXII, lin. 2-35; pag. CXXXIII, lin. 2-36; pag. CXXXIV, lin. 2-34; pag. CXXXV, lin. 2-36; pag. CXXXVI, lin. 2-36; pag. CXXXVII, lin. 2-36; pag. CXXXVIII, lin. 2-36; pag. CXXXIX, lin. 2-36; pag. CXL, lin. 2-36; pag. CXLI, lin. 2-36; pag. CXLII, lin. 2-36; pag. CXLIII, lin. 2-36; pag. CXLIV, lin. 2-36; pag. CXLV, lin. 2-36; pag. CXLVI, lin. 2-35; pag. CXLVII, lin. 2-36; pag. CXLVIII, lin. 2-36; pag. CXLIX, lin. 2-30; pag. CL, lin. 2-33; pag. CLI, lin. 2-18). In questo volume l'ELOGIO suddetto è intitolato (2): « ELOGIO ‖ DI ‖ PIETRO COSSALI ‖ SCRITTO ‖ DAL SOCIO AB. GIUSEPPE AVANZINI ‖ *Ricevuto li* 30. » *Dicembre* 1822 ». Il volume citato di sopra nelle linee 2-4 di questa pagina VII fa parte d'una raccolta composta di 25 tomi, in 4°, de'quali i primi otto sono intitolati: « MEMORIE ‖ » DI ‖ MATEMATICA ‖ E FISICA ‖ DELLA ‖ SOCIETÀ ITALIANA. ‖ VERONA PER DIONIGI RAMANZINI. » M.D.CCLXXXII.—M.DCC.XCIV. (TOMI I—VII), MODENA PRESSO LA SOCIETÀ TIPOGRAFICA. ‖ MDCCXCIX. » (TOMO VIII) » e gli altri sono intitolati: « MEMORIE DI MATEMATICA E DI FISICA DELLA SO- » CIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE MODENA PRESSO LA SOCIETÀ TIPOGRAFICA MDCCCII.—MDCCCVII. (TO- » MI IX—XIII), VERONA ‖ DALLA TIPOGRAFIA GAMBARETTI E COMPAGNO ‖ MDCCCIX (TOMO XIV), VE- » RONA DALLA TIPOGRAFIA DI LUIGI MAINARDI ‖ MDCCCXI—MDCCCXVI (TOMI XV-XVII), MODENA » MDCCCXVIII—MDCCCLV (TOMI XVIII-XXV) ». Questo volume è composto di 920 pagine, numerate tutte, salvo le pagine 1-12, 21-22, 65-66, 100-102, 129-130, 172, 412-416, 920 coi numeri I—LXXXIII, LXXXV—CLI, 1—239, 241—737. Il titolo riportato di sopra nelle linee 2-4 della presente pagina VII trovasi nella prima di queste 920 pagine.

6. Un articolo d'una edizione intitolata: « BIOGRAFIA ‖ UNIVERSALE ‖ ANTICA E MODERNA ‖ OS- » SIA ‖ STORIA PER ALFABETO DELLA VITA PUBBLICA E PRIVATA DI TUTTE LE PERSONE ‖ CHE SI » DISTINSERO PER OPERE, AZIONI, TALENTI, VIRTÙ E DELITTI. ‖ OPERA AFFATTO NUOVA ‖ COM- » PILATA IN FRANCIA DA UNA SOCIETÀ DI DOTTI ‖ ED ORA PER LA PRIMA VOLTA ‖ RECATA IN » ITALIANO CON AGGIUNTE E CORREZIONI ‖ VENEZIA ‖ PRESSO GIO. BATTISTA MISSIAGLIA ‖ MDCCCXXII- » MDCCCXXXI. » (65 volumi, in 8°, VOLUME XIII, pag. 344, col. 2, lin. 43 — pag. 347, col. 2, lin. 31). Quest'articolo trovasi ristampato in un'opera intitolata: « BIOGRAFIA ‖ DEGLI ITALIANI » ILLUSTRI ‖ NELLE SCIENZE, LETTERE ED ARTI ‖ DEL SECOLO XVIII, E DE'CONTEMPORANEI ‖ COMPI- » LATA ‖ DA LETTERATI ITALIANI ‖ DI OGNI PROVINCIA ‖ E PUBBLICATA ‖ PER CURA DEL PROFESSO-

---

graphie universelle ancienne et moderne, si legge: « Après la mort de Bettoni, Avanzini professa la physique » et les mathématiques dans plusieur collèges, et succéda à Cossali dans la chaire de mathématiques tran- » scendantes à l'université (*sic*) de Padoue, qu'il remplit jusqu'à sa mort, arrivée le 18 juin 1827. » (*Biographie universelle, ancienne et moderne, tome cinquante-sixième*, pag. 587, col. 1, lin. 22—20). Nella traduzione italiana sopraccitata di questo articolo (Vedi sopra, pag. VI, lin. 45—51) si legge (*Biografia universale antica e moderna. Supplimento*, vol. I, pag. 632, col. 1, lin. 25—32): « Dopo la morte di Bettoni, Avan- » zini professò la fisica e le matematiche in diversi collegj, e successe a Coccoli (*sic*) nella cattedra di matemati- » che trascendenti nell'università di Padova, cui tenne fino alla sua morte avvenuta il dì 18 giugno 1827 ». Nell'articolo che di sopra si è detto (Vedi sopra, pag. VI, lin. 53—58) trovarsi nella *Biografia degli italiani illustri*, ecc. si legge (*De Tipaldo, Biografia degli italiani illustri*, volume quarto, pag. 30, col. 2, lin. 30—44): « Vari altri lavori minori, di cui qui si tace, pubblicò Giuseppe Avanzini, ed alcuni altresì rimasero » inediti. Imperocchè egli tenne la cattedra di matematica applicata, e continuò le sue ricerche sulla resistenza » e sull'urto dei fluidi fino alla morte.

» Questa lo colpì in Padova ai 18 giugno dell'anno 1827, causata da insulti nervosi, cui il suo corpo era » stato predisposto da una salute, che negli ultimi due anni si era in lui del tutto logorata ».

(1) Vedi sopra, pag. VI, lin. 15—16.

(2) *Memorie di matematica e di fisica della Società Italiana delle scienze, tomo XIX. Parte contenente le memorie di matematica*, pag. CXI, lin. 1—6.

» RE ‖ EMILIO DE TIPALDO ‖ VENEZIA ‖ DALLA TIPOGRAFIA DI ALVISOPOLI ‖ MDCCCXXXIV-MDCCCXLI. » (Otto volumi, in 8°, VOLUME PRIMO, pag. 407, col. 2, lin. 7 — pag. 410, col. 2, lin. 11) incomincia (1): « COSSALI (PIETRO), fu uno de' più chiari matematici italiani del secolo XVIII. » e finisce (2): « *Sul corso del fiume Po*. Memorie dell' Istituto del Regno lombardo-ve» neto. Vol. II, Milano 1821 ». Nelle linee 12-13 della pagina terza del VOLUME XIII citato di sopra nella linea 31 della pagina VII si legge: « VENEZIA ‖ PRESSO GIO. BATTISTA » MISSIAGLIA ‖ MDCCCXXIII ‖ DALLA TIPOGRAFIA DI ALVISOPOLI ». L'articolo menzionato di sopra nelle linee 28-33 della pagina VII essendo firmato nella suddetta *Biografia degli Italiani illustri* (VOLUME PRIMO, pag. 410, col. 2, lin. 12) « ANGELO ZENDRINI », fu certamente composto dal signor professore abate Angelo Zendrini, nato in Venezia ai 2 d'aprile del 1763 (3), e morto ai 6 di maggio del 1849 (4). Nella *Biografia universale antica e moderna* (VOLUME XIII, pag. 347, col. 2, lin. 32) quest'articolo è firmato: « A. Z—I ».

10. Uno scritto che trovasi in un'opera intitolata : « GALLERIA ‖ dei ‖ Letterati ed » Artisti ‖ Illustri ‖ delle ‖ *Provincie Veneziane* ‖ NEL ‖ SECOLO DECIMOTTAVO ‖ Vene» zia ‖ TIPOGRAFIA DI ALVISOPOLI ‖ *Per cura di Bartolommeo Gamba* ‖ 1824 » (due volumi, in 8°, VOL. II , pag. 29ª, non numerata , lin. 3-34). Questo scritto intitolato (5) : « PIETRO COSSALI ‖ VERONESE » essendo firmato « Z — I » (6) fu certamente compo-

---

(1) *Biografia universale antica e moderna*, vol. XIII, pag. 342, col. 2, lin. 43—45. — *De Tipaldo, Biografia degli Italiani illustri, volume primo*, pag. 407, col. 1, lin. 7—9.

(2) *Biografia universale antica e moderna*, vol. XIII, pag. 347, col. 2, lin. 28—31. — *De Tipaldo , Biografia degli Italiani illustri , volume primo*, pag. 410, col. 2, lin. 8—11.

(3) Posseggo un esemplare d'un opuscolo intitolato: « DISCORSO ‖ SULLA VITA E SULLE OPERE ‖ DEI MEMBRI » EFFETTIVI ‖ DEL VENETO I. R. ISTITUTO ‖ DI Scienze, Lettere ed Arti ‖ MANCATI A' VIVI NEL BIENNIO 1848— » 1849 ‖ LETTO ‖ NELL'ADUNANZA DELLO STESSO ISTITUTO DEL 14 LUGLIO 1850 ‖ Dal Membro effett. e Segr. » PROVV. DOTT. G. VENANZIO. ‖ VENEZIA ‖ CO'TIPI DI GIO. CECCHINI ‖ 1851 ». Quest'opuscolo è composto di quaranta pagine, in 8°, numerate tutte, salvo le prime tre e le ultime due, coi numeri 4—38. Nelle linee 17—19 della pagina numerata 4 di quest'opuscolo si legge: » Angelo Zendrini nacque in Venezia il giorno 2 aprile 1763, » di Matteo e di Antonia Baldini, onesti ed agiati negozianti, oriundi della Val—Camonica. » Questo DISCORSO, trovasi anche stampato in un volume, in 8°, intitolato: « ATTI ‖ DELLE ADUNANZE ‖ DELL'I. R. ‖ ISTITUTO VENETO ‖ » DI ‖ SCIENZE, LETTERE ED ARTI. ‖ DAL MAGGIO ALL'OTTOBRE 1850. ‖ VENEZIA, ‖ PRESSO LA SEGRETERIA DELL' » ISTITUTO ‖ NEL PALAZZO DUCALE ‖ 1850 » (pag. 79, lin. 11 — pag. 85, lin. 10). Questo volume è composto di 168 pagine, numerate tutte, salvo le pagine 1ª—5ª , 24ª—25ª , 40ª—41ª , 77ª , 115ª , 126ª—127ª , 146ª—147ª, 160ª—163ª, coi numeri 6—23, 26—39, 42—76, 78—114, 116—125, 128—145, 148—159, 164—168. Nella terza di queste 168 pagine trovasi il titolo riportato di sopra nelle linee 29—31 della presente pagina VIII. Nelle linee 9—10 della pagina 79 di questo volume si legge: » Poscia il M. E. Segretario provvisorio dott. Venanzio lesse il seguente: » *Discorso sulla vita e sulle opere dei Membri effettivi, mancati a' vivi nel biennio* 1848—1849 ». Nelle linee 17—19 della pagina numerata 80 di questo volume trovasi il passo del suddetto DISCORSO riportato nelle linee 27—28 della presente pagina VIII.

(4) Nel sopraccitato opuscolo (Vedi le linee 22—25 di questa pagina VIII) intitolato : » DISCORSO ‖ SULLA VITA » E SULLE OPERE ‖ DEI MEMBRI EFFETTIVI DEL VENETO I. R. ISTITUTO Di Scienze, Lettere, ed Arti, ec. » (pag. 8, lin. 26 — pag. 9, lin. 7) si legge: « Egli (il professore abate Angelo Zendrini) rimase a Mestre fino al » maggio 1848; ma in quel mese, scorgendo ingrossare la italica fortuna, e temendo i romori e i tafferugli di » quel paese , riparò a Venezia , dove , consumato il corso della vita , e conservata fino all' istante supre» mo la serenità della mente e la fermezza del cuore, il giorno 6 maggio 1849 ridonò piamente l'anima al » suo Fattore, quando le sorti della patria si agitavano fieramente, e sopra di noi stava sull'ale cupo e miste» rioso un gran momento ». Questo passo del precitato DISCORSO del Sig. dott. Venanzio, trovasi stampato nel soddetto volume (Vedi le linee 29—31 di questa pagina VIII) intitolato: » ATTI ‖ DELLE ADUNANZE DELL' I. » R. ‖ ISTITUTO VENETO DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI ‖ DAL MAGGIO ALL'OTTOBRE 1850 » dalla linea 26 della pagina 84 alla linea 7 della pagina 85.— Posseggo un esemplare d'un opuscolo in 8.° intitolato: « MENZIONI ONORI» FICHE ‖ DEI DEFUNTI ‖ OSSIA ‖ *Raccolta di elogi, biografie, lapidi, necro-* ‖ *logie, poesie, annunzi spettanti a di*» *stinti* ‖ *defunti, in Venezia nell'* anno 1849; *per* ‖*cura di G. B. Contarini.* ‖ VENEZIA ‖ 1850 ‖ NELLA TIPOGRAFIA » GASPARI ‖ A SPESE DEI SOCI ». Quest'opuscolo è composto di cinquantasei pagine, numerate tutte, salvo le prime quattro, e l'ultima, coi numeri 5—55. Nelle linee 21—27 della pagina numerata 12 di quest'opuscolo si legge: » Il » Sacerdote veneziano, *Angelo Zendrini*, Professore emerito di matematica nell'Università di Padova; già Segretario » dell' Istituto Italiano; attuale membro pensionato del Veneto Istituto di Scienze, Lettere ed Arti, ed Onorario » degli Atenei di Venezia e di Treviso, e di altre Accademie, nell'età d'anni 86, mesi 1, giorni 4, dopo breve » decubito morì piamente, come visse, munito di tutti conforti della Cattolica Religione, nel giorno 6 marzo » 1849. » Per errore, forse di stampa, si trova *marzo* in vece di *maggio* in questo passo dell'opuscolo medesimo, giacchè il Sig. professore abate Angelo Zendrini essendo nato ai 2 d' aprile del 1763 (Vedi le linee 10—11, 26—27 di questa pagina VIII), e morto in età di 86 anni, un mese e quattro giorni (Vedi le linee 53—57 di questa pagina VIII), morì certamente ai 6 di maggio del 1849.

(5) *Galleria dei Letterati ed Artisti Illustri delle Provincie Veneziane nel secolo decimottavo*, vol. II, pag. 29ª, lin. 1—2.

(6) *Galleria dei Letterati ed Artisti Illustri delle Provincie Veneziane nel secolo decimottavo*, vol. II, pag. 29ª, lin. 35.

sto dal sig. professore abate Angelo Zendrini, giacchè in una prefazione contenuta nel volume secondo di questa GALLERIA (pag. 3ª, lin. 3 — pag. 6ª, lin. 10), e nel volume stesso (pag. 3ª, lin. 1-2) intitolata : « AI LEGGITORI || BARTOLOMMEO GAMBA », si legge (1): « lo mi » farò lecito di osservare che le 50 Vite scritte dal chiariss. Prof. Ab. *Angelo Zendrini*, » segnate in calce Z—1, e le 50 scritte dal ch. *Francesco Negri*, segnate in calce N—1, » sì vantaggiate sono di sapore e di succo da poter far sofferire esse sole quella medio- » crità che traspare nelle 50 Vite scritte da me medesimo, e segnate in calce G—A ». Le pagine 345.ª-362.ª del volume secondo di questa GALLERIA contengono un *Indice* che nelle prime quattro linee della pagina 345ª del volume stesso è intitolato: « INDICE || DEGLI UOMINI » ILLUSTRI COMPRESI NELLA GALLERIA || AGGIUNTI I FONTI DAI QUALI FURONO TRATTE || LE LORO » VITE ». In quest'*Indice* si legge (2) :

» COSSALI, *Pietro*, di Verona. Matematico. N. 1748
» M. 1815. Z—1.
» Cartoni Verza (Silvio), Ritratti. Verona, 1807, in 8.vo - Federici,
» Elogi d'ill. eccles. veronesi, T. III. - Biografia Universale. Ven. 1828.
» Art. di Ang. Zendrini. »

11. Un articolo che trovasi in un'opera intitolata : « CONTINUAZIONE || AL || NUOVO DIZIO- » NARIO ISTORICO || DEGLI UOMINI CHE SI SONO RENDUTI PIÙ CELEBRI PER TALENTI, || VIRTÙ, » SCELLERATEZZE, ERRORI, CC., LA QUALE ABBRACCIA IL || PERIODO DEGLI ULTIMI 40 ANNI DELL' » ERA VOLGARE. || COMPILATA || DA GIOACCHINO M.ª OLIVIER-POLI. || NAPOLI, || PRESSO » R. MAROTTA E VANSPANDOCH, || 1824-1826 » (nove tomi, in 8º; TOMO III, pag. 131, col. 1, lin. 42 — pag. 134, col. 1, lin. 11). Quest' articolo incomincia (3) : « COSSALI » (Pietro), fu uno de'più chiari matematici italiani del secolo XVIII », e finisce (4): « *Sul* » *corso del fiume Po*; ec., ec., ec., ». Nelle linee 13-15 della prima pagina del TOMO III citato di sopra nella linea 21 della presente pagina IX si legge : « NAPOLI || PRESSO R. MA- » ROTTA E VANSPANDOCH, LIBRAI TIPOGRAFI. || 1824 ».

12. Un articolo che trovasi in un'opera intitolata: « DICTIONNAIRE || HISTORIQUE, || OU || BIO- » GRAPHIE UNIVERSELLE CLASSIQUE. || Ouvrage entièrement neuf, || PAR M. LE GENERAL BEAU- » VAIS, || AUTEUR DES VICTOIRES ET CONQUÊTES, etc., || Et par une Société de gens de let- » tres. || REVU ET AUGMENTÉ, POUR LA PARTIE BIBLIOGRAPHIQUE, || PAR M. BARBIER, || CHEVA- » LIER DE LA LÉGION D'HONNEUR, ANCIEN ADMINISTRATEUR DES BIBLIOTHÈQUES PARTICULIÈRES » DU || ROI, ET ANCIEN BIBLIOTHÉCAIRE DU CONSEIL D'ÉTAT, AUTEUR DU DICTIONNAIRE DES ANO- » NYMES, etc. || Un seul volume in-8º. || PARIS, || CHARLES GOSSELIN, LIBRAIRE || DE SON AL- » TESSE ROYALE MONSEIGNEUR LE DUC DE BORDEAUX; || COSSON, IMPRIMEUR, || RUE SAINT-GERMAIN- » DES-PRÉS, N.º 9, PRÈS LA POSTE AUX CHEVAUX. || M DCCC XXVI. » (pag. 737, col. 1, lin. 28-40). Quest'articolo incomincia (5): « COSSALI (PIERRE), né à Verone en 1748, » e finisce (6): « plus. *Mém.* de physique, de mathémat. et d'astronomie. » Una traduzione italiana di questo articolo trovasi in una edizione intitolata: « NUOVO || DIZIONARIO || STORICO || OVVERO || » BIOGRAFIA CLASSICA || UNIVERSALE || NELLA QUALE SONO REGISTRATI PER ORDINE ALFABETICO I » NOMI || DEGLI UOMINI CELEBRI D'OGNI NAZIONE DAL PRINCIPIO DEL MONDO || INFINO A NOI, E SI » NARRANO IN COMPENDIO I FATTI PRINCIPALI || DELLA LOR VITA. || *COMPILAZIONE* || DI || UNA SO- » CIETÀ DI DOTTI FRANCESI || PUBBLICATA NEL 1830 || PRIMA VERSIONE ITALIANA || CON AGGIUNTE || » TORINO || PRESSO GIUSEPPE POMBA || 1831-1837 ». (Cinque volumi, in 8º, VOLUME 1, PARTE II', pag. 1204, col. 2, lin. 27-43).

(1) *Galleria dei Letterati ed Artisti Illustri delle Provincie Veneziane nel secolo decimottavo*, vol. II, pag. 4ª, lin. 5—13.
(2) *Galleria dei Letterati ed Artisti Illustri delle Provincie Veneziane nel secolo decimottavo*, vol. II, pag. 349ª, lin. 20—24.
(3) *Olivier-Poli, Continuazione al nuovo dizionario istorico*, t. III, pag. 131, col. 1, lin. 42—43, col. 2, lin. 1.
(4) *Olivier-Poli, Continuazione al nuovo dizionario istorico*, t. III, pag. 134, col. 1, lin. 10—11.
(5) *Beauvais, Dictionnaire historique*, pag. 737, col. 1, lin. 28.
(6) *Beauvais, Dictionnaire historique*, pag. 737, col. 1, lin. 39—40.

13. Un passo d'una edizione intitolata: « STORIA ‖ DELLA LETTERATURA ITALIANA ‖ NEL SECO-
» LO XVIII. ‖ SCRITTA ‖ DA ANTONIO LOMBARDI ‖ PRIMO BIBLIOTECARIO ‖ DI SUA ALTEZZA REALE ‖
» IL SIG. DUCA DI MODENA ‖ Socio e Segretario della Società Italiana ‖ delle Scienze. ‖
» MODENA ‖ PRESSO ‖ LA TIPOGRAFIA CAMERALE ‖ MDCCCXXVII-MDCCCXXX. » (Quattro tomi, in 8°; *Tomo* I, pag. 392, lin, 8 — pag. 395, lin. 13. Libro II, §. LXIV). Questo passo trovasi anche in una edizione intitolata: « STORIA ‖ DELLA LETTERATURA ITALIANA ‖ NEL SECOLO XVIII ‖
» SCRITTA ‖ DA ANTONIO LOMBARDI ‖ PRIMO BIBLIOTECARIO ‖ DI S. A. R. IL DUCA DI MODENA ‖
» SOCIO E SEGRETARIO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE ‖ IN VENEZIA ‖ CO'TIPI DI FRAN-
» CESCO ANDREOLA ‖ 1832 ». (Sei tomi, in 16°, tomo II, pag. 164, lin. 23-35; pag. 165-167; pag. 168, lin. 2-3). Questo passo incomincia (1): « La Società Italiana ascrisse pure al ceto de'suoi
» socii attuali il Padre Don Pietro Cossali », e finisce (2): « ma al tempo stesso oscuro ed
» intralciato nella maniera con cui è scritto. »

14. Un articolo che trovasi in un' opera intitolata: « DIZIONARIO ‖ UNIVERSALE ‖ DELLA ‖
» LINGUA ITALIANA ‖ *ED INSIEME DI* ‖ Geografia (antica e moderna); ‖ Mitologia; Storia
» (sacra, politica ‖ ed ecclesiastica); Biografia; Antiquaria; Storia naturale; e ‖ di tutti
» i vocaboli di origine greca, usati nella Medicina, ‖ Chirurgia, Farmacia, Chimica, Fi-
» sica, Astronomia, Teologia ‖ e Giurisprudenza, ‖ preceduto da una ‖ ESPOSIZIONE GRAM-
» MATICALE RAGIONATA ‖ DELLA LINGUA ITALIANA ‖ DI ‖ CARLO ANT. VANZON. ‖ LIVORNO ‖ 1828.-
» 1842. » (Otto tomi in 8°, TOMO SECONDO, pag. 747, col. 2, lin. 22 —pag. 748, col. 1, lin. 17). Quest'articolo incomincia (3): « Cossali (Pietro) biog. Uno de'più profondi matematici del
» sec. XVIII. », e finisce (4): « circa quaranta produzioni scientifiche e letterarie. » Nelle linee 18-21 della prima pagina del TOMO SECONDO citato di sopra nella linea 19ª della presente pagina x si legge: « LIVORNO ‖ DALLA TIPOGRAFIA DI GIO. SARDI E FIGLIO. ‖ Co'caratteri di
» Antonio Ponthenier di Genova. ‖ 1828 ».

15. Un articolo che trovasi in un' opera intitolata : « Allgemeine ‖ Encyclopädie ‖
» der ‖ Wissenschaften und Künste ‖ in alphabetischer Folge ‖ von genannten Schri-
» ftstellern bearbeitet ‖ und herausgegeben von ‖ I. S. Ersch und I. G. Gruber ». (*Erste Section* (Prima Sezione) A—G, *Erster Theil—Sechsundsechzigster Theil* (Volumi 1°—66°), Leipzig 1818-1857, 66 volumi, in 4°, *Zweite Section* (Seconda Sezione) H—N, *Erster Theil-Einunddreissigster Theil* (Volumi 1°—31°) Leipzig 1827-1855, 31 volumi, in 4°, *Dritte Section* (Terza Sezione) , O—Z , *Erster Theil—Funfundzwanzigster Theil* (Volumi 1°—25°). Leipzig 1830—1850, 25 volumi, in 4°. *Erste Section*, A—G, *Zwanzigster Theil* (volume 20°), pag. 12, col. 1ª, lin. 41, — col. 2, lin. 5). Questo articolo che incomincia (5): « COSSALI, Pietro Graf, geb. zu Verona 1748 », e finisce (6) « Parma, stampa (*sic*)
» reale, 1797. 2 Bände in 4° » è firmato (7) : « (*Graf. Henckel von Donnersmarck*) ». Nella linea 13ª della terza pagina del volume 20° citato nella linea 33ª della presente pagina x si legge: « Leipzig im Verlag von Johann Friedrich Gleditsch 1829. »

16. Un articolo che trovasi in una edizione intitolata: « DIZIONARIO ‖ STORICO ‖ ossia ‖ STO-
» RIA COMPENDIATA ‖ DEGLI UOMINI MEMORABILI PER INGEGNO, DOTTRINA, VIRTÙ , ERRORI, DE-
» LITTI, ‖ DAL PRINCIPIO DEL MONDO FINO AI NOSTRI GIORNI ‖ dell'Abbate ‖ *Francesco Save-*

(1) *Lombardi, Storia della letteratura italiana nel secolo XVIII*, edizione citata nelle linee 1—5 della presente pagina X, *Tomo* I, pag. 392, lin. 8—10; edizione citata nelle linee 6—9 della presente pagina X, *Tomo* II, pag. 164, lin 23—25.

(2) *Lombardi, Storia della letteratura italiana nel secolo XVIII*, edizione citata nelle linee 1—5 della presente pagina X, *Tomo* I, pag. 395, lin. 12—14; edizione citata nelle linee 6—9 della presente pagina X, Tomo II, pag. 167, lin. 34; pag. 168, lin. 2—3.

(3) *Vanzon, Dizionario universale della lingua italiana*, tomo secondo, pag. 747, col. 2, lin. 22—23.

(4) *Vanzon, Dizionario universale della lingua italiana*, tomo secondo, pag. 748, col. 1, lin. 16—17.

(5) *Ersch und Gruber, Allgemeine Encyclopädie*, Sezione 1ª, vol. 20, pag. 12, col. 1, lin. 41.

(6) *Ersch und Gruber, Allgemeine Encyclopädie*, Sezione 1ª, vol. 20, pag. 12, col. 2, lin. 5.

(7) *Ersch und Gruber, Allgemeine Encyclopädie*, Sezione 1ª, vol. 20, pag. 12, col. 2, lin. 6.

» *rio de Feller* ‖ PRIMA TRADUZIONE ITALIANA ‖ SULLA SETTIMA EDIZIONE FRANCESE, CON NOTA-» BILI CORREZIONI ED AGGIUNTE, TRATTE ‖ DAI MIGLIORI BIOGRAFI. ‖ Edizione Economica ‖ VE-» NEZIA. ‖ *Girolamo Tasso Edit. Tip. Calc. Lit. Lib.* ‖ 1830.-1836. » (undici volumi in 8°; VOL. III., pag. 705, col. 2, lin. 35 — pag. 706, col. 1, lin. 25). Quest'articolo incomincia (1): « * COSSALI (Pietro), fu uno de'più chiari matemotici itoliani del secolo XVIII. », e finisce (2): « e di parecchie altre accademie. » In una prefazione intitolata (3): « L'EDITORE » VENETO. », che trovasi nel volume primo (pag. 7ª, lin. 2 — pag. 9ª, lin. 14) di questa edizione, si legge (4): « A tor via quanto più è possibile queste mende mira principalmente » l'assunto nostro: se ci verrà ciò fatto giudicheranno i lettori, ai quali perchè agevole » sia di discernere ogni cosa, siccome le successive aggiunte fatte oltremonti al libro di » Feller sono state segnate con una croce ✝, così le italiane saranno contrassegnate da un » asterisco * ». Nelle linee 14-16 della pagina terza del « VOL. III. » citato nella linea quarta della presente pagina XI si legge: « VENEZIA ‖ *Girolamo Tasso* ‖ *Edit. Tip. Calc. Lit.* » *Lib.* ‖ 1832 ».

17. Un articolo che trovasi in un'opera intitolata: « BIOGRAPHIE ‖ UNIVERSELLE, ‖ OU ‖ DI-» CTIONNAIRE HISTORIQUE ‖ DES HOMMES QUI SE SONT FAIT UN NOM PAR LEUR GÉNIE, ‖ LEURS » TALENTS, LEUR VERTUS, LEURS ERREURS OU LEURS CRIMES, ‖ PAR ‖ F.—X. DE FELLER. ‖ NOU-» VELLE ÉDITION, ‖ AUGMENTÉE DE PLUS DE 3000 ARTICLES, RÉDIGÉS ‖ PAR M. PÉRENNÈS, ‖ PRO-» FESSEUR DE LITTÉRATURE FRANÇAISE, À L'ACADÉMIE DE BESANÇON. ‖ A PARIS, ‖ CHEZ GAUTHIER » FRÈRE ET C.ie, LIBRAIRES, ‖ Rue Haute-feuille, n.° 22. ‖ MÊME MAISON DE COMMERCE À BE-» SANÇON. ‖ 1834. » (12 tomi in 8°; *TOME QUATRIÈME*, pag. 77, col. 2, lin. 2-18). Quest'articolo incomincia (5): « * COSSALI (PIERRE) né à Vérone en 1748, mort en 1815 », e finisce (6): « plusieurs *Mémoires* de physique, de mathématiques et d'astronomie. »

18. Un articolo che trovasi in un'opera intitolata: « DICTIONNAIRE ‖ BIOGRAPHIQUE ‖ UNI-» VERSEL ET PITTORESQUE, ‖ CONTENANT 3,000 ARTICLES ENVIRON DE PLUS QUE LA PLUS COM-» PLÈTE ‖ DES BIOGRAPHIES PUBLIÉES, JUSQU'À CE JOUR; ‖ ORNÉ DE ‖ CENT VINGT PORTRAITS, ‖ » IMPRIMÉS DANS LE TEXTE. ‖ PARIS, ‖ AIMÉ ANDRÉ, LIBRAIRE-ÉDITEUR, ‖ 1834. » (Quattro tomi in 4°, *TOME DEUXIÈME*, pag. 173, col. 2, lin. 27-32). Questo articolo incomincia (7): « COS-» SALI (Pierre) né à Vérone, 1748, théatin », e finisce (8): « Parme, 1797, 2 vol. in-4. » M. 1815. »

19. Un articolo inserito in un'opera intitolata (9): « BIOGRAPHIE ‖ UNIVERSELLE, ‖ AN-» CIENNE ET MODERNE, ‖ OU ‖ HISTOIRE, PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE, DE LA VIE PUBLIQUE ET » PRIVÉE DE ‖ TOUS LES HOMMES QUI SE SONT FAIT REMARQUER PAR LEURS ÉCRITS, ‖ LEURS » ACTIONS, LEURS TALENTS, LEURS VERTUS OU LEURS CRIMES. ‖ OUVRAGE ENTIÈREMENT NEUF, ‖ » RÉDIGÉ PAR UNE SOCIÉTÉ DE GENS DE LETTRES ET DE SAVANTS. ‖ A PARIS, ‖ CHEZ MICHAUD » FRÈRES, 1811-1813 (TOME PREMIER - TOME DIXIÈME); CHEZ L. G. MICHAUD; 1814-1847 (TOME » ONZIÈME - TOME QUATRE-VINGTIÈME); AU BUREAU DE LA BIOGRAPHIE UNIVERSELLE ET CHEZ BECK » LIBRAIRE RUE GÎT-LE-COEUR 12, 1847-1853 (TOME QUATRE-VINGT-UNIÈME - TOME QUATRE-VINGT-» TROISIÈME) » (ottantatre tomi in 8°, (TOME SOIXANTE-UNIÈME, pag. 418, col. 1, lin. 39 — pag. 420, col. 1, lin. 23). Quest' articolo che incomincia (10): « COSSALI (le P.

---

(1) *De Feller, Dizionario storico*, vol. III, pag. 705, col. 2, lin. 35—37.
(2) *De Feller, Dizionario storico*, vol. III, pag. 706, col. 1, lin. 24—25.
(3) *De Feller, Dizionario storico*, vol. I, pag. 7ª, non numerata, lin. 1.
(4) *De Feller, Dizionario storico*, vol. I, pag. 8, non numerata, lin. 25—30.
(5) *De Feller, Biographie universelle, tome quatrième*, pag. 77, col. 1, lin. 2—3.
(6) *De Feller, Biographie universelle, tome quatrième*, pag. 77, col. 2, lin. 16—19.
(7) *Dictionnaire biographique, tome deuxième*, pag. 173, col. 2, lin. 27.
(8) *Dictionnaire biographique, tome deuxième*, pag. 173, col. 2, lin. 31—32.
(9) Vedi sopra, pag. VI, lin. 29—36.
(10) *Biographie universelle ancienne et moderne, tome soixante-unième*, pag. 418, col. 1, lin. 39—41.

» PIERRE), mathématicien, né le 29 juin 1748 à Vérone », e finisce (1): « et l'*Eloge* de Cos- » sali, par Jos. Avanzini, dans le tome XIX des *Mémoires de la Société italienne* » è firmato (2): « W—s » cioè « WEISS »; giacchè in una tavola che trovasi nel tomo 61° della medesima *Biographie* sotto il titolo di (3) « SIGNATURES DES AUTEURS ‖ DU SOIXANTE-UNIÈME » VOLUME. », si legge (4): « W—s. WEISS ». Nella terza pagina non numerata del medesimo tomo 61° (lin. 14-17) si legge: « A PARIS, ‖ CHEZ L.—G. MICHAUD, LIBRAIRE-ÉDITEUR, ‖ RUE RICHELIEU, » N° 67. ‖ 1836 ». L'articolo menzionato di sopra nelle linee 31-41 della pagina XI trovasi ristampato in una edizione intitolata: « BIOGRAPHIE ‖ UNIVERSELLE ‖ ANCIENNE ET MODERNE, ‖ OU ‖ HI- » STOIRE, PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE, DE LA VIE PUBLIQUE ET PRIVÉE DE TOUS LES HOMMES QUI SE SONT » FAIT REMARQUER PAR LEURS ÉCRITS, ‖ LEURS ACTIONS, LEURS TALENTS, LEURS VERTUS OU LEURS » CRIMES. ‖ NOUVELLE ÉDITION, ‖ Publiée sous la direction de M. Michaud; ‖ REVUE, COR- » RIGÉE, ET CONSIDÉRABLEMENT AUGMENTÉE D'ARTICLES INÉDITS ET NOUVEAUX; ‖ OUVRAGE RÉ- » DIGÉ ‖ PAR UNE SOCIÉTÉ DE GENS DE LETTRES ET DE SAVANTS. ‖ PARIS. ‖ 1843-1857. » (Dicinnove tomi, in 8° gr., TOME NEUVIÈME, pag. 293, col. 1, lin. 8—pag. 294, col. 1, lin. 7). Una traduzione italiana di quest'articolo trovasi in una edizione (5) intitolata: « BIOGRAFIA ‖ UNIVER- » SALE ‖ ANTICA E MODERNA. ‖ SUPPLIMENTO, ‖ OSSIA ‖ CONTINUAZIONE DELLA STORIA PER ALFABETO » DELLA VITA PUBBLICA E PRIVATA ‖ DI TUTTE LE PERSONE CH'EBBER FAMA PER AZIONI, SCRITTI, IN- » GEGNO, ‖ VIRTÙ, O DELITTI. ‖ OPERA AFFATTO NUOVA ‖ COMPILATA IN FRANCIA DA UNA SO- » CIETÀ DI DOTTI ‖ E PER LA PRIMA VOLTA RECATA IN ITALIANO. ‖ VENEZIA PRESSO GIAN BATTI- » STA MISSIAGLIA, ‖ MDCCCXXXIV.—MDCCCXLI. » (nove volumi, in 8°, VOLUME V, pag. 594, col. 2, lin. 35 — pag. 596, col. 2, lin. 24).

20. Un articolo che trovasi in un volume in foglio, intitolato: « ATLANTE ‖ STORICO, » LETTERARIO, BIOGRAFICO, ‖ ARCHEOLOGICO ‖ DAI SECOLI OMERICI AI GIORNI NOSTRI ‖ O ‖ REPER- » TORIO DELLE PRINCIPALI NOZIONI ‖ *intorno al linguaggio, all'erudizione di ogni popolo » antico e moderno; ai migliori suoi libri in verso e in prosa; ai sistemi;* ‖ *ai progressi » ch'ebbero gli studii e le scienze; ai più celebri monumenti delle belle arti; aggiunte- » vi* ‖ *parecchie postille di bibliografia e filologia, onde possa la gioventù procacciarsi » i libri che trattano questi subbietti;* ‖ OPERA ‖ racchiusa entro tavole sincrono-crono- » logiche, per seguire il metodo usato ‖ DA A. LE SAGE (LAS CASAS), ‖ compendiata in » parte sopra epitomi oltramontani, ed in più di due terzi compilazione originale, » critica, poligrafica ‖ DI GIAMBATTISTA ALBRIZZI ‖ CITTADINO VENETO ‖ VENEZIA DALLO STABI- » LIMENTO TIPOGRAFICO CALCOGRAFICO DI GIROLAMO TASSO ‖ 1840 » (pag. 136, col. 3°, lin. 5-11). Quest'articolo incomincia (6): « 1815. COSSALI *p.* PIETRO di Verona n. nel 1748. », e finisce (7): « Nel 1807 ebbe la cattedra di Matem. subl. nella Università di Padova. »

21. Un articolo che trovasi in un'opera intitolata: « DIZIONARIO ‖ DELLE ‖ SCIENZE MA- » TEMATICHE ‖ PURE ED APPLICATE ‖ COMPILATO DA UNA SOCIETÀ ‖ DI ANTICHI ALLIEVI DELLA » SCUOLA POLITECNICA DI PARIGI ‖ SOTTO LA DIREZIONE ‖ DI ‖ A.—S. DE MONTFERRIER ‖ MEM- » BRO DELL'ANTICA SOCIETÀ REALE ACCADEMICA DELLE SCIENZE ‖ DI PARIGI, DELL'ACCADEMIA » DELLE SCIENZE DI MARSILIA, ‖ DI QUELLA DI METZ EC. EC. ‖ PRIMA VERSIONE ITALIANA ‖ CON » NUMEROSE AGGIUNTE E CORREZIONI ‖ DEL D. GIUSEPPE GASBARRI ‖ E ‖ DI GIUSEPPE FRANÇOIS ‖ » FIRENZE ‖ 1838.-1849. » (nove volumi in 8°; VOLUME TERZO, pag. 182, lin. 12 — pag. 184,

(1) *Biographie universelle ancienne et moderne, tome soixante-unième*, pag. 420, col. 1, lin. 20—23.
(2) *Biographie universelle ancienne et moderne, tome soixante-unième*, pag. 420, col. 1, lin. 23.
(3) *Biographie universelle ancienne et moderne, tome soixante-unième*, pagina quinta non numerata, lin. 1—2.
(4) *Biographie universelle ancienne et moderne, tome soixante-unième*, pagina quinta non numerata, col. 2, lin. 30.
(5) Vedi sopra, pag. VI, lin. 45—50.
(6) *Albrizzi, Atlante storico, letterario, biografico, archeologico*, pag. 136, col. 3, lin. 8.
(7) *Albrizzi, Atlante storico, letterario, biografico, archeologico*, pag. 136, col. 3, lin. 10—11.

lin. 21). Quest'articolo incomincia (1): « COSSALI (PIETRO) uno de' più illustri matematici del passato secolo », e finisce (2): « e che si legge nel Tomo XIX delle *Memorie* della Società Italiana ». Nelle linee 17-19 della pagina terza del VOLUME TERZO sopraccitato (Vedi sopra, pag. XII, lin. 42) di questa edizione ha nel suo frontespizio la data seguente: « FIRENZE ‖ PER V. BATTELLI E COMPAGNI ‖ 1841 ».

22. Un articolo che trovasi in un'opera intitolata: « BIOGRAPHIE ‖ UNIVERSELLE ‖ OU ‖ DICTIONNAIRE HISTORIQUE ‖ CONTENANT ‖ LA NÉCROLOGIE DES HOMMES CÉLÈBRES DE TOUS LES PAYS ‖ DES ARTICLES CONSACRÉS A L'HISTOIRE GÉNÉRALE DES PEUPLES ‖ AUX BATAILLES MÉMORABLES, AUX GRANDS ÉVÈNEMENTS POLITIQUES ‖ AUX DIVERSES SECTES RÉLIGIEUSES, ETC., ETC. ‖ DEPUIS LE COMMENCEMENT DU MONDE JUSQU'À NOS JOURS ‖ PAR UNE SOCIÉTÉ DE GENS DE LETTRES ‖ sous la direction ‖ *DE M. WEISS* ‖ BIBLIOTHÉCAIRE A BESANÇON ‖ NOUVELLE ÉDITION ‖ PARIS ‖ FURNE ET C^{ie}, LIBRAIRES-ÉDITEURS ‖ 55 RUE SAINT-ANDRÉ-DES-ARTS ‖ MDCCCXLI ». (Sei tomi in 8° grande; TOME DEUXIÈME, pag. 229, col. 2, lin. 8-27). Quest'articolo incomincia (3): « COSSALI (don PIERRE), célèbre mathémat., né à Vérone en 1748 », e finisce (4): « mais son principal ouvr. est l'*Histoire de l'origine et des progrès de l'algèbre en Italie*, Parme, 1797, 2 vol. in-4 ». Una traduzione in lingua italiana di quest'articolo trovasi in un'opera intitolata: « DIZIONARIO ‖ BIOGRAFICO UNIVERSALE ‖ CONTENENTE ‖ LE NOTIZIE PIÙ IMPORTANTI SULLA VITA E SULLE OPERE ‖ DEGLI UOMINI CELEBRI; ‖ I NOMI DI REGIE E DI ILLUSTRI FAMIGLIE; ‖ DI SCISMI RELIGIOSI; DI PARTI CIVILI; DI SETTE FILOSOFICHE, ‖ DALL'ORIGINE DEL MONDO FINO A' DÌ NOSTRI. ‖ PRIMA VERSIONE DAL FRANCESE ‖ CON MOLTE GIUNTE E CORREZIONI ‖ E CON UNA RACCOLTA ‖ DI ‖ TAVOLE COMPARATIVE ‖ ORA PER LA PRIMA VOLTA COMPILATE ‖ DIMOSTRANTI PER SECOLI E PER ORDINI IL TESORO DI CHIARI INGEGNI ‖ CHE PUÒ VANTARE OGNI NAZIONE POSTA A RISCONTRO DELLE ALTRE, ‖ DAL PRINCIPIO DELL'ERA VOLGARE ALL'ETÀ PRESENTE. ‖ FIRENZE ‖ DAVID PASSIGLI TIPOGRAFO-EDITORE ‖ M DCCC XL - M DCCC XLIX ». (Cinque volumi, in 8°, VOLUME SECONDO, pag. 197, col. 2, lin. 37-56). Subito dopo questa traduzione nel medesimo *Dizionario biografico universale* (vol. II, pag. 197, col. 2, lin. 56-64), trovasi una giunta che incomincia (5): « ** In quest' opera l' autore prende a dimostrare », e finisce (6): « (Verona, 1784, in 8.°) ». In una prefazione intitolata (7): « IL COMPILATORE ‖ A CHI LEGGE », e firmata (8): « *F. S.* », si legge (9): « *Tutte le nostre giunte saranno distinte nel seguente modo. Gli articoli che già si trovano nella* Biografia francese, *ma che sono stati rifatti da capo a fondo, porteranno un* *. *Quelli poi nuovi del tutto e così pure le nuove giunte agli articoli tradotti si noteranno con due* ** ».

23. Un articolo che trovasi nell'opera intitolata: « DIZIONARIO ‖ DELLE DATE ‖ DEI FATTI, LUOGHI ED UOMINI STORICI ‖ O ‖ REPERTORIO ALFABETICO DI CRONOLOGIA UNIVERSALE ‖ *CONTENENTE* ‖ UN CENNO CARATTERISTICO DI TUTTI GLI STORICI AVVENIMENTI, LA NASCITA, LE AVVENTURE ‖ PRINCIPALI DELLA VITA, E LA MORTE DI TUTTI GLI UOMINI ILLUSTRI, LA FONDAZIONE ‖ DELLE CITTÀ, DEGLI STATI, DEI REGNI E DELLE REPUBBLICHE; LE RIVOLUZIONI ‖ E LE PARTICOLARITÀ DELLE LORO DURATE; LA GENEALOGIA DI TUTTE LE CASE ‖ STORICHE E SOVRANE; LE ORIGINI, LE INVENZIONI E LE SCOPERTE DI TUTTI I POPOLI; ‖ LE ISTITUZIONI, LE SETTE, LE TRADIZIONI, GLI SCISMI, LE ERESIE, I CONCILII, ‖ I SINODI; I MONUMENTI DI TUTTE

(1) *De Montferrier, dizionario delle scienze matematiche*, vol. III, pag. 182, lin. 12.
(2) *De Montferrier, dizionario delle scienze matematiche*, vol. III, pag. 184, lin. 20—21.
(3) *Biographie universelle ou Dictionnaire historique, tome deuxieme*, pag. 229, col. 2, lin. 8—9.
(4) *Biographie universelle ou Dictionnaire historique, tome deuxieme*, pag. 229, col. 2, lin. 24—26.
(5) *Dizionario biografico universale*, vol. II, pag. 197, col. 2, lin. 56.
(6) *Dizionario biografico universale*, vol. II, pag. 197, col. 2, lin. 63—64.
(7) *Dizionario biografico universale*, vol. I, pag. 5ª non numerata, lin. 1—2.
(8) *Dizionario biografico universale*, vol. I, pag. 7, col. 2, lin. 25.
(9) *Dizionario biografico universale*, vol. I, pag. 5ª, non numerata, col. 2, lin. 34—39, nota (1).

» LE NAZIONI; FINALMENTE LA INDICAZIONE DI TUTTI ‖ I NOMI DEI LUOGHI CHE HANNO QUALCHE » STORICA CELEBRITÀ ‖ Pubblicato a Parigi ‖ DA UNA SOCIETÀ DI DOTTI E LETTERATI ‖ SOTTO » LA DIREZIONE ‖ DI A.-L. D'HARMONVILLE ‖ *Prima Versione Italiana* ‖ *RISCONTRATA, CORRET-» TA E DI OLTRE* 8000 *AGGIUNTE ARRICCHITA, SPECIALMENTE IN QUANTO SPETTA ALLE COSE » DELLA NOSTRA PENISOLA* ‖ VENEZIA ‖ A. DCCC XLII — A DCCC XLVII ». (Sei tomi, in 8°; TOMO SECONDO, pag. 678, col. 1, lin. 31 — pag. 679, col. 1, lin. 29). Questo articolo incomincia (1): « * COSSALI (Pietro), fu uno de'più chiari matematici italiani del secolo 18.° », e finisce (2): « Scrisse fino a 40 utilissime opere sulla scienza ». In uno scritto intitolato (3): « PREFAZIONE » e firmato: « I TRADUTTORI E COMPILATORI ITALIANI » (4) che trovasi nel tomo primo di questo DIZIONARIO DELLE DATE (TOMO PRIMO, pag. 3ª non numerata, lin. 2 — pag. 10ª, numerata VIII, lin. 10) si legge: « Gli articoli da noi aggiunti, ampliati o » rettificati sono segnati con asterisco in fronte, ed al fine d'ogni volume notiamo il nu-» mero loro in esso contenuto affinchè si veda che la nostra promessa delle 8000 giunte » non fu punto illusoria » (5). Nella pagina terza (lin. 23-25) del TOMO SECONDO citato nella linea quinta della presente pagina XIV, si legge: « VENEZIA ‖ DAL PREMIATO STA-» BIL. DI G. ANTONELLI ED. ‖ A DCCC XLIV ».

24. Un articolo che trovasi in un'opera intitolata: « NUOVA ‖ ENCICLOPEDIA ‖ POPOLARE ‖ OV-» VERO ‖ DIZIONARIO GENERALE ‖ DI SCIENZE, LETTERE, ARTI, STORIA, GEOGRAFIA, ECC. ECC. ‖ » OPERA ‖ COMPILATA SULLE MIGLIORI IN TAL GENERE, INGLESI, TEDESCHE E FRANCESI ‖ COLL'AS-» SISTENZA E COL CONSIGLIO DI SCIENZIATI E LETTERATI ITALIANI ‖ corredata ‖ DI MOLTE IN-» CISIONI IN LEGNO INSERITE NEL TESTO ‖ E DI TAVOLE IN RAME ‖ TORINO ‖ GIUSEPPE POMBA E » COMP. EDITORI ‖ 1841-1849 ». (Quattordici tomi, in 8° grande; TOMO QUARTO, pag. 505, col. 1, lin. 40-col. 2, lin. 33). Quest'articolo incomincia (6): « COSSALI (PIETRO)-Nato in Verona il 24 » giugno 1748 », e finisce (7): « in cui quest'illustre matematico nel farne uso, rende » la dovuta lode all'autore ». Nella pagina terza (lin. 15-17) del TOMO QUARTO citato nella linea 22 della presente pagina XIV si legge: « TORINO ‖ GIUSEPPE POMBA E COMP. EDI-» TORI ‖ 1844 ».

25. Un articolo che trovasi in un'opera intitolata: « BIOGRAPHIE UNIVERSELLE ‖ OU ‖ DI-» CTIONNAIRE ‖ DE TOUS LES HOMMES ‖ QUI SE SONT FAIT REMARQUER PAR LEURS ÉCRITS, ‖ LEURS » ACTIONS, LEURS TALENTS, LEURS VERTUS OU LEURS CRIMES, ‖ DEPUIS LE COMMENCEMENT DU » MONDE JUSQU'A CE JOUR; ‖ d'après la Biographie universelle ancienne et moderne de Mi-» CHAUD, ‖ la Biographie universelle historique de WEISS; l'Encyclopédie nouvelle; le Di-» ctionnaire de la Conversation; ‖ l'Art de vérifier les dates, etc., etc.; ‖ PAR UNE SOCIÉ-» TÉ DE GENS DE LETTRES. ‖ BRUXELLES, ‖ CHEZ H. ODE, BOULEVARD DE WATERLOO, N.° 34, ‖ » AU BUREAU DE LA MACÉDOINE LITTÉRAIRE. ‖ 1842-1847 ». (Ventuno tomi, in 4°; *TOME CINQUIÈ-ME*, pag. 252, col. 2, lin. 56-pag. 253, col. 1. lin. 13). Questo articolo incomincia (8): « COS-» SALI (dom PIERRE) célèbre mathématicien, né à Verone le 29 juin 1748 », e finisce (9): « mais son principal ouvrage est *l'Histoire de l'origine et des progrès de l'algèbre » en Italie*, 1797, 2 vol. in-4.° » Nella pagina terza (lin. 14-17) del *TOME CINQUIÈME* citato nelle linee 35-36 della presente pagina XIV si legge: « BRUXELLES CHEZ A. ODE, BOU-

(1) *Dizionario delle date, tomo secondo*, pag. 678, col. 1, lin. 31—32.
(2) *Dizionario delle date, tomo secondo*, pag. 679, col. 1, lin. 28—29.
(3) *Dizionario delle date, tomo primo*, pag. 3ª, non numerata, lin. 1.
(4) *Dizionario delle date, tomo primo*, pag. 10ª numerata VIII, lin. 11.
(5) *Dizionario delle date, tomo primo*, pag. VII, lin. 28—31.
(6) *Nuova enciclopedia popolare, tomo quarto*, pag. 505, col. 1, lin. 40—41.
(7) *Nuova enciclopedia popolare, tomo quarto*, pag. 505, col. 2, lin. 32—33.
(8) *Biographie universelle ou dictionnaire de tous les hommes qui se sont fait remarquer, tome cinquième*, pag. 252, col. 2, lin. 56—57.
(9) *Biographie universelle ou dictionnaire de tous les hommes qui se sont fait remarquer, tome cinquième*, pag. 253, col. 1., lin. 11—13.

» LEVARD DE WATERLOO N.° 34, ‖ AU BUREAU DE LA MACÉDOINE LITTÉRAIRE. ‖ 1844. » L'articolo menzionato di sopra nelle linee 25-28 della pagina XIV trovasi anche stampato in una edizione intitolata: « BIOGRAPHIE ‖ UNIVERSELLE ‖ ANCIENNE ET MODERNE, ‖ OU ‖ DICTIONNAIRE DE » TOUS LES HOMMES ‖ QUI SE SONT FAIT REMARQUER PAR LEURS ÉCRITS, LEURS ACTIONS, LEURS » TALENTS, LEURS VERTUS OU ‖ LEURS CRIMES, ‖ Depuis le commencement du monde jusqu'à » ce jour; ‖ OUVRAGE RÉDIGÉ PAR PLUS DE 300 COLLABORATEURS, ET ENTRE AUTRES PAR ‖ MM. » Arago, Auger, Barante (de), Benjamin Constant, Beuchot, Biot, Bonald (de), ‖ Capefi- » gue, Châteaubriand, Clavier, Cousin, Cuvier, Daumont, Delambre, Eyriès, Feletz (de), » Gerando (de), Guinguenée, Guizot, Humboldt (de), ‖ Klaproth, Lacretelle, Lally-Tollen- » dal, Laplace (de), Malte-Brun, Michaud, Michelet, Naudet, Ch. Nodier, Parisot, » Portalis, ‖ Rooul Rochette, Rémusat, Salvandy, Silvestre de Sacy, Simonde de Sis- » mondi, Staël (Mad. de), Stassart, ‖ Suard, Tissot, Villemain, Visconti, Walkenaër, » Weiss, Winter, etc., etc. ‖ NOUVELLE ÉDITION, ‖ REVUE, CORRIGÉE, ET CONSIDÉRABLEMENT » AUGMENTÉE D'ARTICLES OMIS, NOUVEAUX, ‖ ET ‖ DE CÉLÉBRITÉS BELGES, ‖ PAR UNE SOCIÉTÉ DE » GENS DE LETTRES ET DE SAVANTS. ‖ BRUXELLES. ‖ MELINE, CANS ET COMPAGNIE ‖ LIVOURNE. ‖ » MÊME MAISON. ‖ LEIPZIG. ‖ J. P. MELINE ‖ 1851 ». (Dieci tomi, in 4°, TOME TROISIÈME, pag. 252, col. 2, lin. 56 — pag. 253, col. 1, lin. 13).

26. Un articolo che trovasi in una edizione intitolata: « BIOGRAPHIE UNIVERSELLE ‖ OU ‖ » DICTIONNAIRE ‖ HISTORIQUE, ‖ DES HOMMES QUI SE SONT FAIT UN NOM ‖ PAR LEUR GENIE, LEURS » TALENTS, LEURS VERTUS, LEURS ERREURS OU LEURS CRIMES; ‖ PAR F.-X. DE FELLER. ‖ Edi- » tion revue et continuée jusqu'en 1848, ‖ SOUS LA DIRECTION ‖ DE M. CH. WEISS, ‖ CONSER- » VATEUR DE LA BIBLIOTHÈQUE DE BESANÇON, MEMBRE DE PLUSIEURS ACADÉMIES, ‖ ET DE M. » L'ABBÉ BUSSON, ‖ ANCIEN SECRÉTAIRE DU MINISTÈRE DES AFFAIRES ECCLÉSIASTIQUES ‖ ET VI- » CAIRE GÉNÉRAL HONORAIRE DE MONTAUBAN ‖ PARIS. ‖ 1847.-1850. » (Otto tomi, in 8° grande; TOME III, pag. 55. col. 1, lin. 38-53). Quest'articolo incomincia (1): « * COSSALI (Pierre) célèbre » mathématicien né à Vérone en 1748, mort en 1815 », e finisce (2): « On lui doit en outre » plusieurs *Mémoires* sur les différentes parties qu'il a professées ». Nella pagina terza (lin. 15-21) del TOME III citato nella linea 5.ª della presente pagina XV si legge: « PARIS, ‖ J. LE- » ROUX, JOUBY ET C.° LIBRAIRES, ‖ Rue des Grands-Augustins, 9 ‖ GAUME, FRÈRES, LIBRAIRES, ‖ » Rue Cassette, 4. OUTHENIN CHALANDRE, ‖ rue de Savoie, 5. ‖ LILLE L. LEFORT, IMPRIMEUR-LIBRA- » IRE. ‖ BESANÇON. OUTHENIN CHALANDRE FILS. ‖ 1848. »

27. Un opuscolo intitolato: « IN OCCASIONE ‖ DELLE FAUSTISSIME NOZZE ‖ SALVASI-BRO- » GNOLIGO ‖ CENNI STORICI ‖ sulla vita ‖ DEL PADRE CONTE PIETRO COSSALI ‖ MATEMATICO FI- » SICO ASTRONOMO ‖ DEDICATI ‖ All'Esimio Merito della Nobile Signora ‖ CONTESSA CAMILLA » COSSALI SALVASI ‖ Nipote del Celebre Filosofo ‖ MADRE AMOROSISSIMA DELLO SPOSO ‖ VE- » RONA DALLA STAMPERIA VICENTINI E FRANCHINI ‖ 1849. » Quest'opuscolo è composto di 16 pagine, in 8°, numerate tutte, salvo le prime sette e le tre ultime, co'numeri 8-13. Nella prima di tali pagine trovasi il titolo riportato di sopra nelle linee 32-30 della presente pagina XV.

28. Un articolo che trovasi in un volume in 8.° intitolato nella terza delle sue pagine « BIOGRAPHIE ‖ PORTATIVE ‖ UNIVERSELLE ‖ SUIVIE ‖ D'UNE TABLE CHRONOLOGIQUE ET ALPHABÉTIQUE ‖ OU » SE TROUVENT REPARTIS ‖ EN CINQUANTE-QUATRE CLASSES ‖ LES NOMS MENTIONNÉS DANS L'OUVRAGE ‖ » PAR LUD. LALANNE, L. RENIER, ‖ TH. BERNARD, C. LAUMIER, S. CHOLER, J. MONCIN, ‖ E. JANIN, A. » DELOYE, C. FRIESS. ‖ PARIS ‖ GARNIER FRÈRES, ÉDITEURS ‖ 10, RUE RICHELIEU: PALAIS-NATIO-

(1) *Biographie universelle ou dictionnaire historique par F. — X. de Feller*, t. III, pag. 55, col. 1, lin. 38—39.

(2) *Biographie universelle, ou dictionnaire historique par F. — X. de Feller*, t. III, pag. 55, col. 1, lin. 52—53.

» NAL, 215 ‖ 1852 » (colonna 409, lin. 17-18). Quest'articolo incomincia (1): « COSSALI (le » P. P.) », e finisce (2): « 2. vol. in-4.° »

29. Un articolo che trovasi in un volume in 8°, intitolato nella terza delle sue pagine: « APPENDICE ‖ ALLA ‖ ENCICLOPEDIA ITALIANA ‖ E ‖ DIZIONARIO DELLA CONVERSAZIONE ‖ OPERA ORI- » GINALE ‖ CORREDATA DI TAVOLE ILLUSTRATIVE INCISE IN RAME ‖ VOL. X. ‖ VENEZIA ‖ STABILI- » MENTO ENCICLOPEDICO DI GIROLAMO TASSO TIPOGR. EDIT. ‖ 1853. » (pag. 479, col. 1, lin. 22 — col. 2, lin. 10). Quest' articolo che incomincia (3): « COSSALI (PIETRO). Uno de'più illu- » stri matematici italiani dello scorso secolo », e finisce (4): « *Sulla tensione delle* » *funi. — Metafisica delle equazioni* », è firmato (5): « M. B. ». Il volume citato nelle linee 3-6 della presente pagina XV, è il volume decimo di un'opera composta di dodici volumi, in 8°, ed intitolata: « ENCICLOPEDIA ‖ ITALIANA ‖ E ‖ DIZIONARIO ‖ DELLA CON- » VERSAZIONE. ‖ OPERA ORIGINALE ‖ VENEZIA ‖ DALLO STABILIMENTO ENCICLOPEDICO DI GIROLAMO » TASSO ‖ 1837-1851 »

30. Un articolo che trovasi in un'opera intitolata: « NOUVELLE ‖ BIOGRAPHIE GÉNÉRALE » DEPUIS LES TEMPS LES PLUS RÉCULÉS ‖ JUSQU'À NOS JOURS, ‖ AVEC LES RENSEIGNEMENTS BIBLIO- » GRAPHIQUES ‖ ET L'INDICATION DES SOURCES À CONSULTER; ‖ PUBLIÉE PAR ‖ MM. FIRMIN DIDOT FRÈ- » RES, SOUS LA DIRECTION DE M. LE D.r HOEFER. PARIS M DCCC LIV—M DCCC LVII ». (21 tomi in 8°; *Tome Douzième*, col. 41, lin. 64 — col. 44, lin. 8). Quest' articolo che incomincia (6): « COSSALI (L'abbé *Pierre*) mathématicien italien, naquit à Verone, le 29 juin » 1748 », e finisce (7): « *Sul corso del fiume Po*, dans les *Memorie dell'Istituto del* » *regno Lombardo-Veneto*, tome II; Milan, 1821 »; è firmato (8): « MAFFRE ». Nelle linee 13-17 della pagina terza del *Tome Douzième* citato nella linea 18 della presente pagina XVI si legge: « PARIS, ‖ FIRMIN DIDOT FRÈRES, ÉDITEURS, ‖ IMPRIMEURS LIBRAIRES DE » L'INSTITUT DE FRANCE, ‖ RUE JACOB, 56 ‖ M DCCC LV ».

(1) *Biographie portative universelle*, col. 409, lin. 17.
(2) *Biographie portative universelle*, col. 409, lin. 18.
(3) *Appendice alla enciclopedia italiana*, pag. 479, col. 1, lin. 22—23.
(4) *Appendice alla enciclopedia italiana*, pag. 479, col. 2, lin. 9—10.
(5) *Appendice alla enciclopedia italiana*, pag. 479, col. 2. lin. 11.
(6) *Nouvelle biographie générale, Tome Douzième*, col. 41, lin. 64 — col. 42, lin. 1.
(7) *Nouvelle biographie générale, Tome Douzième*, col. 44, lin. 5.
(8) *Nouvelle biographie générale, Tome Douzième*, col. 44, lin. 2—5.

BALDASSARRE BONCOMPAGNI.

FRAMMENTO DI UN ELOGIO

DI LEONARDO PISANO

La prima fondamentale gloria dell'Italia nell'analitico genere si è il vantare in Leonardo, figliuolo di Bonaccio Bigoli di Pisa, quell'uomo benemerito che dalle coste dell'Affrica, in un con l'indiana aritmetica che oggidì in tutta Europa si usa, trasportò in Italia, donde poi per l'Europa si diffuse, l'analisi di primo e di secondo grado probabilmente indiana del pari. La concede egli pur all'Italia questa gloria lo storico francese delle matematiche Montucla. Ma quanto oscura e difettosa manifestasi la notizia che egli ne ebbe per non essersi preso il pensiero di procurarsi dalle biblioteche della Toscana i convenienti lumi intorno alle opere dell'immortale trapiantatore? Quindi l'errare di due secoli e più nell'epoca del prezioso acquisto dall' Italia fatto ponendola nel corso del secolo decimo quinto, laddove i codici dell'Abaco di Leonardo portano in fronte che questo dottrinale suo libro della nuova aritmetica e dell'analisi ad un tempo fu da lui composto l'anno 1202, e rifatto l'anno 1228, a miglior forma condotto e dedicato a quel s.° (*sic*).

Quindi l'ignorare che l'analisi da Leonardo insegnata non si limitava già ai problemi determinati, ma ricca pur era del ramo dei problemi indeterminati che lussureggia nel suo libro de'numeri quadrati, dove oltre a sommare le serie dei numeri quadrati e dei cubici per industri vie dalle Diofantee diverse scioglie i più bei problemi di quel greco analista, e coraggioso affronta altri sottili problemi, ai quali resistono gli artificii più fini dell'Eulero e del La Grange, e non riesce no a darne risoluzioni dirette, ma sì indirette brillanti d'ingegno, e capaci di ampio estendimento, come io ho fatto vedere.

Quindi il non conoscere la sua invenzione, alla quale con lunga meditazione egli si dice giunto, delle parti onde componesi il cubo di una quantità in due membri divisa e del metodo che ne scaturisce per estrarre da qualunque numero la radice cubica.

Quindi il lasciare nell'obblivione sepolta l' aurea regola per ottenere di una quantità di parte razionale e di parte irrazionale composta la radice senza quell' involgimento d' immaginarie specie, nel quale oggi si cade.

E quindi finalmente, rispetto alla persona stessa di Leonardo, l'infingersi che dovizioso di fortuna per desiderio di veder mondo e' si recasse in oriente.

Eh no! Figlio anzi Leonardo di un uomo, che in Bugea sulle coste di Barberia soprastava ad una dogana di negozianti pisani, colà chiamollo il padre per procurargli pane nel servigio del commercio: ma l'anima sua era una di quelle anime piene di celeste fuoco, che disdegnano i limiti del bisogno ed alto nel sapere si sollevano, non altrimenti che aria di fuoco pregna tra i fracidumi dei vegetabili nelli paludosi terreni e nei fondi de' stagni incarcerata intendendo la sua elastica virtù si sprigiona, e tocca da elettrica scintilla per l'atmosfera si spigne, o scorre presso terra in fiammelle terrore del volgo, o nelle più elevate regioni striscia in stelle cadenti, o serpeggia in lampi o variaforme splende in boreali aurore.

Vanta l'Italia in Leonardo Fibonacci di Pisa la gloria di aver dall'oriente nel suo sen trasportata, e quinci all'Europa diffusa, l'aritmetica più semplice e bella, l'indiana, che col sistema di nove cifre, a valore dieci volte maggiore ad ogni lor passo da destra a sinistra alzate, tutte determina le regole delle computazioni; e di averla trasportata e diffusa, non qual seme nulla più contenente che l'embrione; ma qual pianta adulta, ricca già di tutti gli artificii, de'quali anche oggidì i più valenti aritmetici si fanno pregio maggiore, e di quello che chiaman l'aureo, e di quello detto di società, e di quello nomato di alligazione, e di quello falsa posizione o semplice o doppia appellato; anzi più, poichè estesa allo scioglimento delle equazioni di 2° grado, nè . . . (*Qui finisce in tronco questo frammento d' Elogio di Leonardo Pisano*).

ESTRATTO

DEL LIBRO DI LEONARDO PISANO (*)

Incipit capitulum primum.

Dopo date le nove figure degli Indi, che sono:

. . . . (**)

dice che con esse e col segno 0 si compongono tutti i numeri, distinguendo i gradi delle figure numeriche; i quali gradi le fanno crescere di dieci in dieci da destra a sinistra. E nel levare il valore del numero oltre 6 figure insegna a levarlo come facciamo noi italiani, non come i francesi, e così 678 935 784 105 296 leva seicento settanta otto bilioni (*milia milia milia milium*) novecento trenta cinque mille settecento ottanta quattro milioni (*milia milium*) 105 mille due cento novanta cinque. Insegna pure a dividerlo di tre in tre da destra a sinistra, ed ommessi i tre primi, a tirare sopra gli altri tre qualunque, ed infine sopra i due, sopra l'uno, di mano in mano una virgola in arco: indi cominciando a sinistra, e levato il numero, aggiugnere tante volte il mille quante sono le virgole arcuate, e quindi $\widehat{678}\ \widehat{935}\ \widehat{784}\ \widehat{105}\ 295$ si leverà sei cento settanta otto *milia milia milia milium*, essendo il numero posto sotto la 4ª arcuata virgola: poi novecento trentacinque *milia milia milium*, essendo il 935 il numero posto sotto la terza arcuata virgola; poscia settecento ottanta quattro *milia milium*, essendo il 784 sotto la seconda arcuata virgola, e finalmente cento cinque *milium*, essendo il 105 sotto la prima arcuata virgola.

Introductiones in additione et multiplicatione numerorum.

Sotto due tavole una di addizioni divise in *januas* vi è *janua binarii*, e nelle tavole di addizioni vi è l'addizione di 2 col 2, col 3 sino al 10; dipoi *janua ternarii*, e consiste nell'addizione del 3 col 3, col 4 sino al 10, e così del 5, del 7, del 8, del 9. Segue la *janua* del 10 col 10, col 20 sino al 90, indi del 30 col 30 sino al 90, poi del 40 col 40, col 50 sino al 90, e così via via sino al 90 col 90 . . . Similmente vi sono le *januae* delle moltipliche sino al numero 10 per 10.

Incipit capitulum secundum de multiplicatione numerorum integrorum.

Lo divide nelle seguenti 6 parti:

Incipit pars prima de multiplicatione duarum figurarum contra duas.

Inseguare a porre il numero maggiore sotto il minore (come

(*) Tutte le note che trovansi a pie' di pagina nelle pagg. 3 e seguenti del presente volume, sono del P. Cossali, salvo le seguenti:

Pagg. 3, nota (**); 100, nota (1); 111, nota (6), 115, nota (1); 125, nota (1); 191, nota (2); 192, note (1), (2), (3) e (4); 196, nota (1); 198, nota (*); 201, nota (*); 203, nota (*); 204, nota (*); 211, nota (*); 260, nota (*; 267, nota (1); 268, nota (1); 269, nota (1); 270, nota (1); 275, nota (1); 312, nota (*); 315, nota (*); 324, nota (*); 333, nota (*); 335, nota (*).

(**) « La lacuna indicata con punti nella linea quinta di questa pagina trovasi anche nel manoscritto originale sopraccitato (vedi sopra, pag. XLI, lin. 9—10) di questo *Estratto*. »

1813
37
49

nella figura) moltiplicando 7 per 9 verrà 63: del quale prodotto si scriva il 3 sopra il 7 e si conservi nelle mani il 6, e si moltiplichi *in croce* 7 per 4 e 3 per 9, e si congiungano i prodotti che fanno 55, al quale si aggiungano il 6 servato nelle mani, e si avrà 61. Si scriva 1 sopra il 3; indi si moltiplichi il 3 per 4, che dà 12: ed aggiunto il 6 si ha 18, il quale si scriva dopo il 13 a sinistra, e si avrà 1813.

Probatio. Si congiungano il 3 col 7 del 37, si forma 10: da cui detratto il 9, resta 1, che si dirà *Pensa* del 37; parimenti congiunti il 4 ed il 9 del 49, che forma 13, si detragga il 9, resta 4 *pensa* del 49; si moltiplichi 1 *pensa* del 37 col 4 *pensa* del 49, si ha 4. Si congiungano 1, 8, 1, 3 del 1813, si ha 13: dal quale detratto 9, resta 4 *pensa* del 1813, come deve restare.

La dimostrazione di questa prova è fondata su questi principii:

1.° *Residuum quod remanet ex quovis numero diviso per 9 est summa quae procreatur ex additatione omnium figurarum facientium ipsum numerum.*

2.° *Cum aliquis numerus dividitur in partes, et unaquaeque partium multiplicatur per aliquem numerum, sunt illae multiplicationes in unum collectae aequales multiplicationi totius numeri divisi in numerum, in quem multiplicatae fuerint omnes partes ipsius.*

Applica primieramente questi principii al 37 in 37, il cui prodotto è 1369. Dividendo 37 per 9 resta 1, come sottraendo 9 da 3 più 7, e dividendo 1369 per 9 rimane pure 1, come da 1 più 3 più 6 più 9 detratto 9 due volte. Il moltiplicare poi 37 per 37 è lo stesso che il moltiplicare 36 per 37, più il moltiplicare 1 per 37. Or il prodotto di 36 per 37 deve essere esattamente divisibile per 9, ed il prodotto di 37 per 1 è lo stesso che il prodotto di 36 per 1 nuovamente divisibile per 1, ed il prodotto di 1 per 1, dunque uguale all'1 per 1 dei due 37 divisi per 9.

Similmente 37 diviso per 9 dà di residuo 1, e 49 dà 4, siccome congiungendo il 4 col 9, e sottraendo 9, e moltiplicando 1 con 4, si ha 4. Ora 37 in 49 uguale al prodotto di 36 in 49 divisibile per 9 più 1 in 49, il quale è uguale ad 1 in 45 divisibile per 9 più 1 in 4.

De multiplicatione unius figurae contra plures.
Incipit pars secunda secundi capituli. - De tribus figuris contra tres.

56088
123
456

Esempio. Sia da moltiplicare 123 per 456: si ponga il numero 456 maggiore sotto il 173 minore; 3 in 6 dà 18: si ponga 8 sopra il 3 e si conservi l'1; si moltiplichi il 3 col 5, e ne verrà 15: al quale aggiungasi l'1 fa 16; si moltiplichi il 2 col 6 fa 12, che col 16 fa 28, si scriva l'8 sopra il 2, e si salvi il 2, si moltiplichi il 3 per 4, il 6 per 1, il 2 per 5, ed alla somma di questi prodotti che è 28 si aggiunga il 2, e si avrà 30: si scriva 0 sopra l'1, e si conservi il 3; si moltiplichi il 2 per 4, il 5 per 1, ed alla somma dei prodotti che è 13 si aggiunga il conservato 3, e si avrà 16; si ponga il 6 a sinistra dello 0, e si conservi l'1, al quale si aggiunga il prodotto dell'1 in 4, con che ne verrà 5, e si avrà per prodotto totale 56088.

Pars tertia de multiplicatione quatuor figurarum.

Esempio. In 2345 moltiplicato per 6789 : similmente che per 3 figure. Prova. La pensa di 2345 è 5, quella di 6789 è 3, il prodotto 3 in 5 15, la pensa 6, che è quella pure del prodotto di 2345, in 6789 uguale a 15920205: poichè 1 più $5+9+2+2+5=6+9+9$, che detratto due volte 9 lascia 6.

Pars quarta secundi capituli. - De multiplicatione quinque figurarum per quinque.
Pars quinta secundi capituli. - De multiplicatione octo figurarum per octo.
Pars sexta secundi capituli. - De multiplicatione unius figurae aut duarum per duas cordetenus in manibus.

Versa sul modo di moltiplicare *cordetenus et in manibus:* come a moltiplicare 12 per 12 si ritenga *descriptionem illorum in corde,* e si moltiplichi il 2 per 2 che fa 4, e si ponga nella sinistra mano nel luogo delle unità; poi si moltiplichi il 2 superiore per l'1 inferiore, e reciprocamente il 2 inferiore coll'1 superiore, e si congiungano i prodotti che daranno 4, e li ponga nella sinistra mano stessa nel segno *quadragenario*; poscia moltiplichi 1 per 1, cioè la seconda figura per la seconda, e l'1 che ne risulta lo ponga nella mano destra nel luogo de' centenari, e così si avrà il prodotto 144.

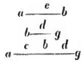
Pars VII secundi capituli.- De multiplicatione trium figurarum per tres qualiter in manibus cordetenus multiplicentur.
Pars octava de multiplicatione omnium numerorum in alium modum.

Quest' altro modo consiste in formare un quadrilatero in forma della scacchiera avente nella lunghezza una casella di più che il numero maggiore figure, e tante caselle in larghezza quante figure il numero minore. Pongasi il numero maggiore sopra il quadrilatero della casella a destra andando a sinistra, ed il numero minore a fianco lungo le caselle della larghezza. Per esempio: sia il numero maggiore 4321, ed il numero minore 567. Disponili come vedi; poi moltiplica tutto il numero maggiore 4321 per la prima figura 7 del minore, e disponi il prodotto lungo le caselle della lunghezza da destra a sinistra nella fila più alta. Similmente scrivi il prodotto di tutto il numero stesso maggiore per la seconda figura del minore nella fila seconda, ed il prodotto di esso numero per la terza figura del minore nella terza fila. Poscia somma i numeri nelle caselle ad angoli opposte: così prendi prima il 7 nella casella della prima fila a destra che è sola e senza opposta, poi somma il 4 ed il 6 nelle due caselle ad angoli opposte, e formando 10 scrivi a sinistra del 7 il 0, e conserva l'1, a cui aggiugni la somma 2 più 2 più 5 delle tre caselle ad angoli opposte

Somma
2450 0 0 7

	4	3	2	1	
3	0	2	4	7	7
2	5	9	2	6	6
2	1	6	0	5	5

susseguenti, e di nuovo formandosi 10 scrivi di nuovo 0, e serba 1: al quale aggiungi il 9 somma delle tre susseguenti caselle ed angoli opposte 0 più 9 più 0; scrivi di nuovo 0, e salva 1, al quale aggiungi la somma delle tre caselle ad angoli opposte 3, 5, 6, che formerai 15: del quale scrivi il 5 e salva l'1, al quale aggiungi la somma delle due caselle ad angoli opposte 2, 1, con che avrai 4 che scriverai dopo il 5 a sinistra, e finalmente scrivi il 2 ed avrai il prodotto totale 2450007.



Incipit capitulum tertium de addictione integrorum numerorum.

Estende all'addizione la prova del 9 con la seguente dimostrazione. Sieno da aggiungere i due numeri *ab*, *bg*: e sarà il congiunto numero, dico che aggiunta la pensa del numero *ab* alla pensa del numero *bg* proviene la pensa dell'addizione. Sia primieramente che l'uno e l'altro dei due numeri si divida intieramente per 9, e sarà il 9 la comune misura di entrambi i numeri *ab*, *bg*; per la qual cosa l'intero numero *ag* sarà divisibile per 9 e la sua pensa sarà 0, siccome la somma delle pense dei due numeri. Sia in secondo luogo uno dei due numeri, per esempio, *ab* divisibile per 9, e dal numero *bg* diviso per 9 rimanga il numero *dg*: dunque il numero *db*, e *ba* sono divisibili per 9; e perciò tutto il *da* è divisibile per 9: e poichè il numero *ag* supera il *ad* di *dg*, rimarrà di tutto *ag* il *dg* indivisibile per 9 che sarà la sua pensa uguale alla somma delle pense di *ab* che è 0, e di *bg* che è *dg*. Sia finalmente ambi i numeri indivisibili per 9, e dalla divisione di *ah* per 9 resti *eh*, e dalla divisione per 9 del numero *hg* resti *dg*: se *eb* più *dg* sarà divisibile per 9, la loro pensa sarà 0, e 0 sarà pure la pensa di *ag*: e se *eb* più *dg* avranno la pensa *p*, tale sarà pure la pensa di *ag*.

Segue l'addizione dei numeri che noi diciamo eterogenei di lire soldi e denari, d'onde apprendiamo che anche allora la lira era composta di 20 soldi ed il soldo di 12 danari. Volendo nominare il tesoriere lo chiama *Camerarius,* giusta il Du-Cange.

Incipit capitulum quartum de extractione numerorum minorum e majoribus.

Si noti il termine *extractione* in luogo di *subtractione.* Esempio. Sia
482 da sottrarre 457 da 939: si cominci dal sottrarre 7 dal 9, rimane 2,
939 che si ponga sopra la prima figura del numero maggiore: poi si do-
457 vrebbe sottrarre 5 da 3, ma non si può: si aggiunga 10 e si formi 13, dal quale sottratto il 5 riman 8, che si scriva sopra la seconda figura del numero maggiore, e per li 10 aggiunti alla seconda figura del numero maggiore si ritenga in mano 1 che si aggiunga alla terza figura 4 del numero minore, e formato 5 lo si sottragga da 9, e resterà 4, che si scriva sopra la terza figura del numero maggiore, e sarà 432 il residuo della sottrazione.

Prova — Si prendano le pense dei due numeri e si sottragga la pensa del numero minore, se è possibile, dalla pensa del maggiore: il residuo sarà eguale alla pensa del residuo della sottrazione. E se la pensa del minor numero fosse maggiore della pensa del numero maggiore, si aggiungano sopra questa 9, poi si sottragga la pensa del numero minore — — — —

Incipit capitulum quintum de divisionibus integrorum numerorum.

Ha il modo di scrivere i rotti o frazioni (usando egli indifferentemente questi vocaboli) nel modo con cui noi li scriviamo: così

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots \frac{1}{9}$$

$\frac{1\ \ 4}{2\ \ 7}$ significa presso di lui $\frac{4}{7}$ ed $\frac{1}{2}$ di $\frac{1}{7}$, e $\frac{1\ \ 5\ \ 7}{2\ \ 6\ \ 10}$ significa $\frac{7}{10}$, e $\frac{5}{6}$ di $\frac{1}{10}$ ed $\frac{1}{2}$ di $\frac{1}{6}$ di $\frac{1}{10}$

Chiama egli nelle frazioni il numero superiore alla virgola *denominans*, l'inferiore *denominatus*.

Nella divisione il numero da dividere il chiama *divisus vel dividendus*, e quello per cui si deve dividere *dividens vel divisor*, e il numero proveniente dalla divisione *procedens vel exiens*.

Nel dividere il numero per numero se In fine riesca frazione, ordina di scriverla avanti il procedente intero così $\frac{365}{2}$ uguale ad $\frac{1}{2}$182, sebbene poi comandi di pronunciare prima il procedente intero, poi il rotto.

Stende una tavola di divisioni di 1 sino a 30 per 3, di 1 sino a 40 per 4, di uno sino a 20 per 2, di 5 sino a 50 lungo la scala dei multipli di 5, e così intendi di quelli che seguono sino a dove si è espresso, cioè sino all'11 per 5, di 6 sino a 60 per 6, di 7 sino a 70 per 7, di 8 sino a 80 per 8, di 9 sino a 90 per 9, di 10 sino a 100 per 10, di 11 lungo la scala de'suoi multipli sino a 110 per 10, di 12 similmente sino a 120 per 12, di 13 sino a 130 per 13, di 14 sino a 140 per 14 . . . .

Regula universalis de divisione numerorum per numeros primi gradus.

12
1346
4
336

Il modo di operare è essenzialmente quello che da noi si usa: non differisce che nel modo di scrivere. Esempio. Avendo a dividere 1346 per 4, scrive 4 sotto il 6 come vedi nella figura: poi diviso per 4 il 13: nota il procedente 3 sotto il 3 del 13, ed il superfluo 1 sopra il 4: ed accoppiati insieme e forman 14 si divida per 4 che uscirà di nuovo 3 da scriversi sotto il 4 del dividendo, e resterà di superfluo 2 da scriversi sopra il 6, che con esso 6 formerà 26, il quale diviso per 4 darà 6 da scriversi sotto il 6, e rimarrà di superfluo 2, che darà la frazione $\frac{2}{4}$ uguale col $\frac{1}{2}$. Onde il procedente totale sarà $\frac{1}{2}$ 336.

De divisione cordetenus in manibus per eosdem numeros.

A dividere 7543 per 6 ritenga il numero 7548 nelle mani, e divida il 7 che sono nella mano destra per 6: uscirà 1 e rimarrà 1. Scancelli il 7 dalla destra, e ponga in essa 1, e ritenga *in corde* l'uno rimanente, il quale accoppi col 5 che sta nella destra nel luogo de'contenuti; si avrà 15 da dividere per 6, uscirà 2, e rimarrà 3: scancelli dalla destra il 5 e vi ponga al luogo stesso il 2, e ritenga in cuore il 3, che accoppiato col 4 esistente nella sinistra mano in luogo delle decine farà 34 da dividere per 6, uscirà 5 e rimarrà 4: scancelli 4 dalla mano e vi ponga al luogo stesso il 5 ritenendo in cuore il 4, che accoppiato col 3 esistente nella stessa sinistra mano darà 43 da dividere per 6, ne uscirà 7 e rimarrà 1: scancelli dalla sinistra il 3 e vi sostituisca il 7, e per la rimanenza di 1 dica un sesto, e si avrà per la divisione totale $\frac{1}{6}$ 1257.

Incipiunt divisiones numerorum incompositorum secundi gradus.

Per numeri di secondo grado intende numeri di due figure.

Ripartendo i numeri in incomposti e composti dice che quelli in aritmetica e geometria si chiamano primi, dagli arabi *Hasam*, dai greci *evris canon*, egli *sine regula*, siccome i composti regolari.

Stende una tavoletta di numeri primi, o irregolari, da 11 sino al 97.

La divisione per un numero primo, o irregolare, la fa come noi, eccetto il modo di scrivere analogo a quello della divisione per un numero di una sola figura; e ne dà la prova per il 9. Ad esempio: diviso 13976 per 13. La pensa di $1+3+9+7+6$ per 9 si è 8, la pensa del precedente intero 607 è 4, essendo $6+7=13$ che diviso per 9 dà 4, quella di 23 è 5, il prodotto $4 \times 5 = 20$, la sua pensa è 2, aggiunta con 15 denominante il rotto $\frac{15}{23}$ fa 17, la cui pensa è 8 uguale a quella del dividendo.

Passando alla divisione de' composti stende una tavola di composti di due figure dal 12 sino al 100 con la risoluzione ne'suoi componenti.

Regula universalis de reperiendis compositionibus imparium numerorum.

I numeri impari composti si compongono da numeri impari.

Il numero dispari, che a prima figura (a destra) ha il 5, è divisibile per 5.

Se abbia a prima figura altro numero che il 5, e la sua pensa sia 0, avrà per divisore il 9.

Se abbia per pensa il 3 o il 6, avrà per divisore il 6.

Se non abbia alcuna di queste pense, dividasi per 7: e se rimane qualche cosa, dividasi per 11, poi per 13, e così via via sino a pervenire alla sua radice: e se niuno dei numeri primi minori della sua radice si troverà esserne divisore, sarà esso stesso numero primo.

Che se riesca la divisione per qualcheduno di essi numeri primi, il procedente si divida per esso numero primo, ed il nuovo procedente parimenti, e così si prosegnisca; e di poi si tenti con ordine per gli altri numeri primi sino a quello che della sua radice maggiore non sia. Così ritrovasi $624481 = 11 \times 11 \times 13 \times 397$; che Leonardo scrive, *regula de* 624481 *est* $\frac{1 \quad 0 \quad 0 \quad 0}{11 \quad 11 \quad 13 \quad 397}$.

Probatio per pensam de 7. La pensa di $624481 = \frac{6+2+4+4+8+5}{7} = \frac{25}{7} = 4$. La pensa di $\frac{11}{7} = 4$, moltiplicata per la pensa 4 degli altri 11 fa 16, la pensa de' quali $\frac{56}{7} = 2$, moltiplicata per la pensa $\frac{13}{7} = 6$, fa 12; la pensa de'quali $\frac{12}{7} = 5$ moltiplicata per 5, pensa di $\frac{397}{7}$, dà 25, la pensa de' quali $\frac{25}{7}$ è 4.

De regula reperiendi compositiones parium numerorum.

Per ritrovare la regola di qualche numero pari si prenda parimenti la pensa per 9; se sarà 0 avrà per componente il 9; se sarà 3, ovvero 6, avrà per componente il 6; se non sarà alcuna di queste la pensa, tentisi la divisione per 8 delle due figure che sono di primo e secondo grado (cioè che sono prima e seconda da destra a sinistra), e se il superfluo sia 0 e la figura del 3° grado sia pari, come 2, 4, 6, 8, ovvero 0, tutto il numero si potrà dividere per 8. Che se la terza figura sia dispari, come 1, 3, 5, 7, 9, il numero riceverà per divisore il 4. Che se il superfluo sia 4, e la figura di 3° grado sia dispari, tutto il numero si dividerà similmente per 8; e se essa figura 3ª si è dispari, tutto il numero non avrà in sua composizione che il 4. Se esso superfluo sia 2, ovvero 6, il numero non avrà tra i pari numeri per divisore che il 2. E così si perverrà sino al numero che avrà per regola un numero dispari. Che se il numero pari avrà a prima figura lo 0, avrà per divisore il 10: e così se avrà per seconda figura parimenti lo 0, avrà di nuovo per divisore il 10, ecc.

La pensa di 126 per 9 è 0; dunque 126 divisibile per 9, e riesce $14 = 2 \times 7$: dunque $126 = 9 \times 2 \times 7$.

La pensa di 156 è 3; dunque divisibile per 6, e ne esce $26 = 2 \times 13$: dunque $156 = 6 \times 2 \times 13$.

La pensa di 2112 è 6; dunque divisibile per 6, e ne esce 352; la pensa del quale è 1, che dimostra che non può dividersi nè per 6 nè per 9; onde divider si devono 52 per 8: il superfluo è 4, il quale congiunto con la figura di 3° grado, che è dispari, cioè 3, ci fa palese che tutto il numero 352 è divisibile per 8, e ne esce $44=11\times4$: laonde $2112=6\times8\times11\times4=3\times8\times8\times11$.

La pensa di 4664 è 2, onde non può aver per divisori nè 6 nè 9: e perchè dalla divisione di 64 per 8 rimane 0, e la figura 3, cioè 6, è pari; per ciò il numero è divisibile per 8, e ne esce 583, la cui regola, per la dottrina sopra esposta dei numeri impari, è 11 in 13: laonde $4664=8\times11\times13$.

La pensa di 13652 per 9 è 8, e dimostra non aver esso numero nè il 6, nè l'8 per divisori. Dividendo il 52 per 8, si ha il superfluo 4: onde essendo pari il 6 terza figura, il 4 ne è divisore, e ne esce 3413 mancante di regola: laonde $13652=4\times3413$.

Il numero 15560 è divisibile per 10. La pensa di 1556 è 8, che dimostra non esser esso divisibile nè per 6 nè per 9: e poichè diviso 56 per 8 dà per superfluo 0, e la terza figura 5 è dispari, si fa manifesto non esservi tra numeri pari maggiore che il 4, pel quale diviso ne esce 389: onde $15560=10\times4\times389$.

Il numero 32600 è divisibile per 10 e di nuovo per 10, e n'esce 326 avente per pensa il 2, che nega ad esso 336 per divisori il 6, il 9; e diviso per 8 il 26, si ha per superfluo il 2, che fa conoscere che il 326 non è divisibile per altro numero pari che il 2, e ne esce 163 mancante di regola: laonde $32600=10\times10\times2\times163$.

Il numero 7546000 è tre volte divisibile per 10, e ne esce 7546, la cui pensa è 4, che nega avere in sua composizione il 6, il 9; e diviso 46 per 8 resta per superfluo 6: per lo che non può avere pari numero che il 2 a divisore, e ne esce 3773 che per regola de'numeri dispari è uguale a $7\times7\times7\times11$: onde $7546000=10\times10\times10\times2\times7\times7\times7$.

Divisio numerorum per numeros Hasam tertii gradus.

Dà qui la prova per l'11. La divisione di 174930 per 563 si prova dare $\frac{107}{563}1021$, poichè la pensa di 574930 per 11 è 4, di 1021 è 9, che moltiplicato per 2, pensa di 963, dà 18; a cui, aggiunto 8 dato per pensa, da 107 sale a 26, che ha per pensa 4, siccome 574930.

Incipit capitulum sextum de multiplicatione integrorum numerorum cum ruptis.

Incipit pars prima de multiplicatione numerorum integrorum cum uno rupto sub una virga.

Intende il rotto tanto in uno quanto nell'altro dei numeri da moltiplicare insieme, incominciando gli esempi da $\frac{1}{3}22$ da moltiplicarsi con $\frac{1}{2}11$, e per effettuar la moltiplica li riduce a $\frac{67}{3}$, e $\frac{23}{2}$.

Altro Esempio: $\frac{2}{3}\,13$ per $\frac{5}{7}\,24 = \frac{41}{3}\times\frac{173}{7} = \frac{7093}{21} = \frac{7093}{3\times7} = \frac{2364\frac{1}{3}}{7}$ $= 337\frac{5}{7} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{7}$, che Leonardo scrive $\frac{1\ \ 5}{3\ \ 7}\,337$, intendendo per $\frac{1\ \ 5}{3\ \ 7}$ le frazioni $\frac{5}{7}$, ed $\frac{1}{3}$ di $\frac{5}{7}$.

Prova. La pensa di 13 è 4, che moltiplicata pel 3 di $\frac{2}{3}$ dà 12, ed aggiunto il 2 di $\frac{2}{3}$ rende 14, la pensa del quale è 5. La pensa di 41 è parimenti 5, come deve essere. La pensa di 24 è 6, che moltiplicata per 7 produce 42, ed aggiunto 5 dà 47, che ha per pensa 2 siccome 173. Moltiplicando la pensa di 41, che è 5, per la pensa di 173, che è 2, si ha 10, la cui pensa è 1. La pensa di 337, che è 4, moltiplicata per 7 produce 28, a cui aggiunto 5 si ha 33, che a pensa ha 6, che moltiplicata per 3 produce 18; ed aggiunto 1 fa 19, la cui pensa parimenti è 1, come dovea essere. La stessa è la pensa di 7093.

Altro Esempio in $\frac{1}{4}16\times\frac{2}{5}27$ colla prova pel 7. Qui parla Leonardo del modo di trovare la massima comune misura di due numeri, che consiste in dividere il numero maggiore pel minore, poi il minore pel residuo, poi il residuo primo pel residuo secondo, e così via via, e cita Leonardo le dimostrazioni di Euclide.

Incipit pars secunda de multiplicatione numerorum cum pluribus ruptis sub una virga.

Esempio: 1.3 e tre ottavi con la metà di un ottavo moltiplichisi con 24 e 2 noni con tre quarti di nono, e Leonardo rappresenta così: $\frac{1\ \ 3}{2\ \ 8}\,13$ moltiplicato per $\frac{3\ \ 2}{4\ \ 9}\,24$. L'operare suo è il seguente: $\frac{(13\times8+3)2+1}{2\times8}\times\frac{(24\times9+2)\times4+3}{4\times9} = \frac{125}{16}\times\frac{875^1}{36}$. Il seguito delle operazioni e le prove pel 9 e pel 7 sono simili a quelle della 1.ª parte.

Incipit pars tertia de multiplicatione numerorum cum duobus ruptis sub duabus virgulis.

Esempio: $\frac{1}{4}\frac{1}{3}15\times\frac{1}{6}\frac{1}{5}26 = \frac{(15\times5+1)4+1\times3}{4\times3}\times\frac{(26\times3+1)6+1\times5}{6\times5}$ $= \frac{187}{4.\,3}\times\frac{791}{6.\,5} = \frac{147917}{3.4.5.6} = 410\,\frac{317}{3.4.5.6}$ al modo nostro.

$\frac{1\ 5\ 3}{2\ 8\ 11} = \frac{3}{11} + \frac{5}{8}\times\frac{1}{11} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{11} = \frac{3}{11} + \frac{5}{8.11} + \frac{1}{2.8.11} = \frac{29}{8.11} + \frac{1}{2.8.11} = \frac{59}{2.8.11}$; similmente $\frac{1\ 4\ 7}{3\ 9\ 13} = \frac{7}{13} + \frac{4}{9}\times\frac{1}{13} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{13} = \frac{202}{3.9.13}$. Leonardo dà per prodotto $\frac{2\ 2\ 5\ 5\ 2}{6\ 8\ 9\ 11\ 13}$. Di fatto, significando questo numero $\frac{2}{13} + \frac{5}{11}\times\frac{1}{13} + \frac{5}{9}\times\frac{1}{11}\times\frac{1}{13} + \frac{2}{8}\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{11}\times\frac{1}{13} + \frac{2}{6}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{11}\times\frac{1}{13}$, si trova $\frac{2}{13} + \frac{5}{11}\times\frac{1}{13} = \frac{27}{11.13}$, $\frac{27}{11.13} + \frac{5}{9}\times\frac{1}{11}\times\frac{1}{13} = \frac{248}{9.11.13}$, $\frac{248}{9.11.13} + \frac{2}{8}\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{11}\times\frac{1}{13} = \frac{1986}{8.9.11.13}$, $\frac{1986}{8.9.11.13} + \frac{2}{6}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{11}\times\frac{1}{13} = \frac{11918}{6.8.9.11.13}$. Il modo di trovare il $\frac{2\ 2\ 5\ 5\ 2}{6\ 8\ 9\ 11\ 13}$ di Leonardo si è di dividere il 11918 ordinariamente per 6, 8, 9, 11, 13. Dividendo per 6, si ha $1986 + \frac{2}{6}$. Dividendo questo per 8, si ha $248 + \frac{2}{8} + \frac{2}{6}\times\frac{1}{8}$. Dividendo questo per 9, viene $27 + \frac{5}{9} + \frac{2}{8}\times\frac{1}{9} + \frac{2}{6}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{9}$. Dividendo questo per 11, viene $2 + \frac{5}{9}\times\frac{1}{11} + \frac{2}{8}\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{11} + \frac{2}{6}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{11}$. Finalmente dividendo questo per 13, viene $\frac{2}{13} + \frac{5}{9}\times\frac{1}{11}\times\frac{1}{13} + \frac{2}{8}\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{11}\times\frac{1}{13} + \frac{2}{6}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{11}\times\frac{1}{13}$.

De eodem cum duobus virgis.

Esempio: $\frac{1\ 2}{4\ 3}\times\frac{1\ 3}{6\ 5} = \frac{2\times4+1\times3}{4.3}\times\frac{3\times6+1\times5}{6.5} = \frac{11}{4.3}\times\frac{23}{6.5} = \frac{253}{4.3.6.5}$.

De eodem cum duobus ruptis sub unaquaque virga.

Esempio: $\frac{1\ 3}{4\ 8}\frac{1\ 4}{2\ 7}\times\frac{1\ 3}{6\ 11}\frac{1\ 5}{3\ 9} = \frac{(4\times2+1)8\times4+(3\times4+1)2\times7}{4.8.2.7}\times\frac{(5\times3+1)11\times6+(3\times6+1)3\times9}{6.11.3.9} = \frac{288+182}{4.8.2.7}\times\frac{1056+513}{4.8.2.7} = \frac{470}{4.8.2.7}\times\frac{1569}{6.11.3.9}$.

De tribus ruptis.

Esempio: $\frac{1\ 1\ 1}{5\ 4\ 3}\times\frac{1\ 1\ 2}{7\ 6\ 5}=\frac{1\times4\times5+1\times5\times3+1\times4\times3}{5.\ 4.\ 3}$
$\times\frac{2\times7\times6+1\times7\times5+1\times6\times5}{7.\ 6.\ 5}=\frac{47}{5.4.3}\times\frac{149}{7.6.5}$.

De eodem cum duobus ruptis sub unaquaque virga.

Esempio: $\frac{3\ 2}{4\ 9}\ \frac{2\ 3}{3\ 10}\ \frac{1\ 6}{2\ 11}\times\frac{1\ 1}{5\ 8}\ \frac{1\ 3}{3\ 7}\ \frac{1\ 7}{2\ 13}=\frac{(6\times2+1)10\times3\times9}{4.\ 9.\ 3.}$
$\frac{\times4+(3\times3+2)\times9\times4\times2\times11+(2\times4+3)3\times10\times2\times11}{10.\ 2.\ 11}\times$
$\frac{(7\times2+1)7\times3\times8\times5+(3\times3+1)8\times5\times2\times13+(1\times8+1)3\times7\times2\times13}{5.\ 8.\ 3.\ 7.\ 2.\ 13}$
$=\frac{30012}{4.\ 9.\ 3.\ 10.\ 2.\ 11}\times\frac{27914}{5.\ 8.\ 3.\ 7.\ 2.\ 13}$.

Incipit pars septima de multiplicatione numerorum et ruptorum, quorum virgulae terminantur in circulo.

Esempio. *Si vis* 11 *et quatuor nonas et quinque octavas quatuor nonarum et duas tertias quinque octavarum de quatuor nonis, quae sic scribuntur* $\frac{2\ 5\ 4}{3\ 8\ 9}\circ$ 11, *multiplicare per* 22 *et sex septimas octo nonarum et novem decimis, quae sic scribuntur* $\circ\frac{6\ 8\ 9}{7\ 9\ 10}$ 22. Così si operi:
$\frac{((11\times9+4)8+5\times4)3+2\times5\times4}{3.\ 8.\ 9}\times\frac{22\times10\times9\times7+6\times8\times9}{7.\ 9.\ 10}$
$=\frac{2572}{3.8.9}\times\frac{14292}{7.\ 9.\ 10}$.

Prova per 11. La pensa di 11 è 0; moltiplicata per 9 dà 0; aggiunto 4 si ha 4, la cui pensa è 4; moltiplicata per 8 dà 32, la cui pensa è 10: aggiunto il prodotto di $5\times4=20$ si ha 30, la cui pensa è 8: moltiplicata per 3 dà 24, la cui pensa è 2: aggiunto il prodotto $2\times5\times4=40$, si ha 42, la cui pensa è 9: qual'è quella di 2572, che diviso per 11 lascia appunto 9.

Dà la maniera di trovare in parti di un intero il valore di un rotto, la cui verga termina in circolo.

Esempio: $\frac{2\ 5\ 4}{3\ 8\ 9}$. Si moltiplichino $3\times8\times9=216$. Si prenda di questo 216 $\frac{4}{9}$, e si avrà 96; si prenda di questo 96 $\frac{5}{8}$, e si avrà 60; di questo 60 si prenda $\frac{2}{3}$, e si avrà 40. Sommando $96+60+40$ si avrà

196, e sarà $\frac{196}{216}=\frac{49}{54}$ il valore cercato. Di fatto la frazione in circolo $\frac{2}{3}\,\frac{5}{8}\,\frac{4}{9}$ è $=\frac{4}{9}+\frac{5}{8}\times\frac{4}{9}+\frac{2}{3}\times\frac{5}{8}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{9}+\frac{20}{8.\,9}+\frac{40}{3.8.9}=\frac{52}{8.\,9}+\frac{40}{3.8.9}=\frac{156+40}{3.\,8.\,9}$ $=\frac{196}{3.\,8.\,9}$.

Incipit pars octava de multiplicatione partium numerorum cum ruptis.

Esempio: $\frac{3}{5}$ di $\frac{4}{7}\,29\times\frac{6}{11}$ di $\frac{2}{3}\,38$. Ordina di scriver così: $\frac{4}{7}\,29\,\frac{3}{5}$ moltiplicato per $\frac{2}{3}\,38\,\frac{6}{11}$.

Operare. $\frac{(29\times7+4)3}{7.\,5}\times\frac{(38\times3+2)6}{3.\,11}=\frac{621}{7.\,5}\times\frac{696}{3.\,11}$.

De eodem.

Esempio: $\frac{2}{7}\,\frac{5}{9}\,33\,\frac{1}{5}\,\frac{3}{4}\times\frac{1}{11}\,\frac{5}{6}\,244\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{7}=\frac{((33\times9+5)7+2)(3\times5+1\times4)}{7.\,9.\,5.\,4}$ $\times\frac{((244\times6+5)\,11+1)\,(3\times4+1\times7)}{11.\,6.\,4.\,7}=\frac{40204}{7.\,9.\,5.\,4}\times\frac{307040}{11.6.4.7}$.

Prova accennata pel 13.

Incipit capitulum septimum de addictione et extractione et divisione numerorum integrorum cum ruptis et de reductione plurium partium in singulis partibus.

In sex partes dividitur.

Pars prima de additione unius virgae cum alia nec non extractione unius de alia.

Vi ha la maniera di ridurre alla stessa denominazione, e di più un'altra di trovare un numero in cui si trovino i rotti proposti: così, dati i rotti $\frac{1}{3}\,\frac{1}{4}$, si ritrova il numero cercato in $3\times4=12$, di cui prendendo la terza parte si ha 4, e prendendo la quarta si ha 3; onde $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$. Ma per aggiugnere $\frac{1}{6}+\frac{5}{9}$, avendo 6 e 9 la comune misura di 3, si divida il 6 per 3, e si moltiplichi il procedente 2 per 9; con che verrà 18, nel quale si ritrovano li $\frac{5}{9}$, $\frac{1}{6}$.

Pars secunda de addictione et extractione duorum ruptorum ad invicem et de eorum divisione.

Adopera anche qui l'uno e l'altro metodo; e riguardo a quello di ridurre alla medesima denominazione lo chiama *Magisterium nostrum*.

Esempio: $\frac{1}{4}\ \frac{1}{3}$ da aggiugnere ad $\frac{1}{7}\ \frac{1}{5} = \frac{389}{420}$.

Se vuoi aggiugnere $\frac{1}{4}\ \frac{1}{3}$ con $\frac{1}{5}\ \frac{1}{6}$ troverai che il numero in cui si trovano i dati rotti è $60 = 3 \times 4 \times 5$, e non importa che si moltiplichi il 60 per 6 per la comune misura del 6 e del 3; onde non fa di bisogno che si moltiplichi che per la terza parte del $6 = 2$, anzi non fa di bisogno neppur ciò, essendo qui la moltiplica per 4; ed in ogni numero in cui si trovano $\frac{1}{4}\ \frac{1}{3}$, ritrovasi pure $\frac{1}{6}$.

Dà anche qui il modo di calcolare coll'ajuto delle mani. Moltiplica $3 \times 4 = 12$, e salvalo nella man destra, e poi 5 in $6 = 30$, e salvalo nella sinistra, e dividi 12 e 30 per la comune loro massima misura 6, e ne verranno 2, 5; moltiplica 2 con $5 + 6 = 11$ e ne verrà 22; moltiplica 5 con $3 + 4$, ne verrà 35; somma 22 con 35, ne verrà 57: e $\frac{57}{60}$ sarà la somma dei rotti $\frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}$.

A mostrare come si trovi il minimo numero misurato dai dati rotti reca l'esempio $\frac{1}{10}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}$. Si moltiplichi il 10 in 9 che fa 90; non in 8, ma in 4, perchè $8 = 4 \times 2$, ed il 2 entra in 10; si avrà $90 \times 4 = 360$, che moltiplicato in 7 produce 2520, che non fa di bisogno moltiplicare in 6, entrando il 3 nella composizione del 9, ed il 2 nel 4; neppure pel 5, entrando in 10; nè tampoco pel 4, ed il 2: laonde 2520 è il numero minimo misurato dai dati rotti.

Ma non trovo qui esempio alcuno di divisione.

Incipit pars tertia de divisione integrorum numerorum per integros cum ruptis etiam et de eorum contrario.

Esempio: $83 : \frac{2}{3}5 = \frac{83 \times 3}{3} : \frac{2 + 5 \times 3}{3} = \frac{249}{17}$.

Cita Euclide, che *peritissimus geometra* dichiara *quod quam proportionem habet quilibet numerus ad quemlibet numerum eamdem proportionem habent equa quelibet multiplicia.* — — —

Esempio 2°: $323 : \frac{1\;5}{9\;6}\,14 = \frac{323 \times 6 \times 3}{6.\,3} : \frac{(14 \times 6 + 5)3}{6.\,3}$
$= \frac{323 \times 6 \times 3}{(4 \times 6 + 5)3} = \frac{5814}{269}$.

Incipit pars quarta de addictione et extractione seu divisione integrorum numerorum cum ruptis.

Esempio : $\frac{3}{4}\,13$ con $\frac{2}{3}\,171 = \frac{(13 \times 4 + 3) \times 5 + (171 \times 5 + 2)4}{4.\,5}$
$= \frac{275 + 3428}{4.\,5} = \frac{3703}{4.\,5}$.

Prova pel 7. La pensa di 13 è 6; moltiplicata per 4, ed aggiunto il 3, produce 27, la cui pensa è 6, che moltiplicata per 5 dà 30, la cui pensa 2 è la pensa di 275. Similmente la pensa di 171, che è 3, moltiplicata per 5 ed aggiunto il 2, dà 17, la cui pensa è 3, che moltiplicata per 4 dà 12, la cui pensa è 5; qual è quella di 3428. Si aggiunga la pensa 2 di 275 alla pensa 5 di 3428, e si ha 7, la cui pensa è 0; e tale deve essere ed è la pensa di $275 + 3428 = 3703$.

Il dividere $\frac{2}{5}\,171$ per $\frac{3}{4}\,13$ si riduce a dividere $\frac{3428}{275}$.

Altro esempio: $\frac{1\;1}{4\;3}\,15$ aggiunto con $\frac{1\;3}{7\;5}\,322 = 322 + 15 + \frac{1}{4}$
$+ \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{5}$, aggiunto come s'insegnò nella seconda parte.

La divisione di $\frac{1\;1}{4\;3}\,15$ per $\frac{1\;3}{7\;5}\,322$ si riduce alla divisione dei numeratori, dopo aver ridotto tutto alla stessa denominazione.

Incipit pars quinta de addictione et extractione et (Leonardo usa *seu* in luogo di *et*) *divisione partium numerorum integrorum cum ruptis.*

Esempio 1°: $\frac{3}{4}$ di $\frac{2}{5}\,29$ aggiunto con $\frac{5}{7}$ di $\frac{2}{9}\,128 = \frac{(29 \times 5 + 2)3 \times 7 \times 9}{4.\,5.\,7.\,9}$
$+ \frac{(128 \times 9 + 2)5 \times 4 \times 5}{4.\,5.\,7.\,9} = \frac{27783 + 115400}{4.\,5.\,7.\,9}$. Prova per 11.

Esempio 2°: $\frac{1\;3}{5\;4}$ di $\frac{2\;5}{7\;9}\,33 + \frac{1\;3}{4\;7}$ di $\frac{1\;5}{10\;6}\,244$. Ma $\frac{1\;3}{5\;4}$ di $\frac{2\;5}{7\;9}\,33$
$= \frac{((33 \times 9 + 5)7 + 2)(3 \times 5 + 1 \times 4)}{5.\,4.\,7.\,9} = \frac{40204}{5.\,4.\,7.\,9}$. La pensa di 40204

per 13 è 8. Si dovrebbe moltiplicare 40204 per 4, 7, 11, 6; ma già entra in esso 40204 il 4 ed il 7, e rispetto al 6 vi entra il 3: dunque non resta che a moltiplicare 40204 in 2 in 11, ossia in 22, e ne viene 884488, la cui pensa è 7. Troverai poi $\frac{1\ \ 3}{4\ \ 7}$ di $\frac{1}{11}\frac{5}{6}244 = \frac{(244 \times 6 + 5)\,11 + 1 \times 6}{4.\,7.\,11.\,6} = \frac{16165}{4.\,7.\,11.\,6}$, la cui pensa è per 13 il 6. Moltiplica 3 in 4 ed aggiugni 1 avrai 13, che moltiplicato per 16165 dà 219145, che dovresti moltiplicare per 5, 4, 7, 9; ma, per una ragione simile alla detta, moltiplicherai soltanto per 3 e 5, cioè per 15, e ti verrà 3152175, la cui pensa è 0: la quale avrai nella somma $884488 + 3152175 = \frac{406663}{4.\,5.\,7.\,11}$.

Esempio 3°: $\frac{2\ \ 3\ \ 5}{7\ \ 8\ \ 9}$ di $\frac{2\ \ 1\ \ 3}{13\ 11\ 5}42 + \frac{1\ \ 3\ \ 5}{9\ \ 8\ \ 7}$ di $\frac{2\ \ 0\ \ 3}{3\ \ 5\ \ 11}331$. Ma $\frac{2\ \ 3\ \ 5}{7\ \ 8\ \ 9} = \frac{(5 \times 8 + 3)\,7 + 2}{7.\,8.\,9} = \frac{303}{7\ \ 8\ \ 9}$; $\frac{2\ \ 1\ \ 3}{13\ 11\ 5}42 = ((42 \times 5 + 3)\,11 + 5)13 + 2 \times 5 \times 11) = \frac{30634}{13.\,11.\,5}$: onde $\frac{2\ \ 3\ \ 5}{7\ \ 8\ \ 9}$ di $\frac{2\ \ 1\ \ 3}{13\ 11\ 5}42 = \frac{303 \times 30634}{7.\,8.\,9.\,13.\,11.\,5} = \frac{9282102}{7.\,8.\,9.\,13.\,11.\,5}$, che dovrebbesi moltiplicare per i numeri sotto le verghe nell' altro numero, cioè per 9, 8, 7, 3, 5, 11; ma, contenendo già i numeri 9, 8, 7, 5, 11, non si avrà a moltiplicare che per 3. Le frazioni $\frac{1}{9}\frac{3}{8}\frac{5}{7} = \frac{(9 \times 3 + 8)7 + 5 \times 9.\,8}{9.\,8.\,7} = \frac{605}{9.\,8.\,7}$. La frazione $\frac{2\ \ 0\ \ 3}{3\ \ 5\ \ 11} = \frac{3}{11} + \frac{0}{5}.\frac{1}{11} + \frac{2}{3}.\frac{0}{5}.\frac{1}{11} = \frac{15}{11.\,5} + \frac{2}{3.\,5.\,11} = \frac{47}{3.\,5.\,11}$. Leonardo trova così il valore di $\frac{2\ \ 0\ \ 3}{3\ \ 5\ \ 11} = \frac{(3 \times 5 + 0)3 + 2}{3.\,5.\,11}$. La moltiplica di $331 \times 3.\,5.\,11 = 54615$, alla quale aggiunta $\frac{47}{3.\,5.\,11}$ si ha $\frac{54662}{3.\,5.\,11}$. Dunque $\frac{1}{9}\frac{3}{8}\frac{5}{7}$ di $\frac{2\ \ 0\ \ 3}{3\ \ 5\ \ 11}331 = \frac{605 \times 54662}{9.\,8.\,7.\,3.\,5.\,11}$, che si dovrebbe moltiplicare per i numeri posti sotto le verghe del primo numero, se già tutti non li contenesse, eccetto il 13, pel quale solo resta a moltiplicarlo.

Incipit pars sexta septimi capituli de disgregatione plurium partium in singulis partibus.

Si è insegnato di sopra ad aggregare in parti di un numero le parti di diversi numeri: qui s'insegna *plures partes unius numeri in singulas partes disgregare*. Si divide il trattato in sette *distinzioni*.

1ª *Distinzione o differenza* quando il maggior numero sotto la verga si divide pel minore sopra, e si ha la parte.

Esempio $\frac{3}{12}$. Dividendo 12 per 3 si ha 4: dunque $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.

Si divide questa *differenza* in tre: *semplice* qual è quella di cui si è addotto esempio; *composta* quando la *semplice* si riferisce alle parti di altro numero, come in $\frac{2\ \ 0}{4\ \ 9}$, poichè li $\frac{2}{4}$ si riferiscono alle parti di 9, per lo che si ha $\frac{2\ \ 0}{4\ \ 9}=\frac{1\ \ 0}{2\ \ 9}=\frac{1}{18}$, e per $\frac{2\ \ 0}{6.\ 9}$ si ha $\frac{1\ \ 0}{3.\ 9}=\frac{1}{27}$ etc.; e la *revoluta composita* è $\frac{3\ \ 0}{5\ \ 9}=\frac{3\ \ 0}{9.\ 5}=\frac{1\ \ 0}{3\ \ 5}=\frac{1}{15}$. Similmente $\frac{5\ \ 0}{9\ \ 10}=\frac{5\ \ 0}{10\ \ 9}=\frac{1\ \ 0}{2\ \ 9}=\frac{1}{18}$.

Distinzione o differenza seconda è quando il numero maggiore non si divide pel minore; ma del minore si possono fare parti tali per ciascuna delle quali si può il maggiore dividere: come $\frac{5}{6}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, e $\frac{7}{8}=\frac{4}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$. Ha anche questa *differenza* la sua parte *composta*, e la sua *revoluta composta*.

Esempio della *composta* $\frac{3\ \ 0}{4.\ 10}$: e poichè $\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$, perciò $\frac{3\ \ 0}{4\ \ 10}=\frac{1\ \ 0}{4\ \ 10}+\frac{1\ \ 0}{2\ \ 10}=\frac{1}{40}+\frac{1}{20}$. Della *revoluta composta* esempio sia $\frac{3\ \ 0}{5\ \ 10}=\frac{3\ \ 0}{10\ \ 5}=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right)\frac{1}{5}=\frac{1}{5.\ 5}+\frac{1}{10.\ 5}=\frac{1}{25}+\frac{1}{50}$.

Distende qui una tavola di disgregazioni di 1 sino a 5 diviso pel 6, con $\frac{1\ \ldots\ 5}{6}$ di $\frac{1\ \ldots\ 7}{8}$ di $\frac{1\ \ldots\ 11}{12}$ di $\frac{1\ \ldots\ 23}{24}$ di $\frac{1\ \ldots\ 59}{60}$ di $\frac{1\ \ldots\ 99}{100}$, che rappresenteremo nella penultima; però dopo il 31 salta al 35, quindi al 40, indi al 50, e nell'ultima, passato il 10, procede di 5 in 5 sino all'85, poi salta al 95, poi torna a procedere per 1 sino al 99.

La terza *distinzione* o *differenza* si è quando, preso un numero di una unità maggiore del maggiore, si divide pel minore, e si ha il rotto della unità divisa pel procedente, più la parte per tal rotto significata della parte espressa dall'unità divisa pel maggiore.

Esempio. Sia $\frac{2}{11}$; prendasi $11 + 1 = 12$ che, diviso per 2, dà 6; si avrà $\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1\ 0}{6.\,11}$. Generalmente si può esprimere la regola così: $\frac{m}{n}$, $\frac{n+1}{m} = p$; si avrà $\frac{m}{n} = \frac{1}{p} + \frac{1\ 0}{p\ n}$. Di fatto $\frac{1}{p} + \frac{1}{pn} = \frac{n+1}{pn}$. Ma $n + 1 = pm$; dunque $\frac{n+1}{pn} = \frac{pm}{pn} = \frac{m}{n}$.

Anche questa *differenza* ha la sua *composta.*

Esempio: $\frac{2\ 0}{3\ 7} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{7} = \frac{1\ 0}{6\ 7} + \frac{1\ 0}{2.\,7}$; ed anche questa si revolve come $\frac{3\ \ 0}{7\ 11} = \frac{3\ 0}{11\ 7} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4.\,11}\right)\frac{1}{7} = \frac{1.\ 0}{4\ 7} + \frac{1\ \ 0}{44\ 7}$, poichè col metodo qui spiegato $\frac{3}{11} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4.\,11}$. Continuando questa *differenza* colla seconda si ha $\frac{8}{11} = \frac{6}{11} + \frac{2}{11}$. E siccome pel metodo di questa 3ª si ha $\frac{6}{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.\,11}$, e $\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6.\,11}$, così ne segue $\frac{8}{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.\,11} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6.\,11}$.

La quarta *distinzione*, risguardante la 4ª *differenza*, è quando il maggior numero è numero *primo*; ed il numero maggiore stesso, accresciuto di 1, si divide pel minore diminuito di 1, come $\frac{5}{11}$, $\frac{7}{11}$. In tali casi forma $\frac{1}{11}$, e sottratto da $\frac{5}{11}$ resterà $\frac{4}{11}$, che per la 3ª *differenza* è $= \frac{1}{3} + \frac{1}{3.\,11}$: onde $\frac{5}{11} = \frac{1}{11} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.\,11}$.

La quinta *distinzione*, spettante alla 5ª *differenza*, si è quando il numero maggiore sia pari, ed accresciuto di 1, si divide pel minore diminuito di 2. Estraggasi dal minore 2, e per esempio da $\frac{11}{26}$ si formi $\frac{2}{26} + \frac{9}{26}$, e $\frac{9}{26}$ per la regola della *differenza* 3ª $= \frac{1}{3} + \frac{1}{3.\,26}$; e per altra parte $\frac{2}{26} = \frac{1}{13}$: dunque $\frac{11}{26} = \frac{1}{13} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.\,26}$.

La sesta *distinzione*, rapporto alla 6ª *differenza*, si è quando il maggior numero si divide integralmente per 3; ed, accresciuto di 1, si divide pel minore diminuito di 3, come $\frac{17}{27}$. Prendi dal 17 tre parti con che avrai $\frac{17}{27} = \frac{3}{27} + \frac{14}{27} = \frac{1}{9} + \frac{14}{27} =$ per la regola della terza *differenza* $= \frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.\,27} = \frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.\,27}$.

La settima *distinzione*, appartenente alla 7ª *differenza*, si è allorchè non accade veruna delle sopra esposte 6 *differenze*; la regola della quale è molto utile siccome quella, per cui si trovano alle volte le parti di esse *differenze* meglio che per le regole loro. Dividendo il numero maggiore pel minore, come di $\frac{4}{13}$ il 13 per 4, considera i numeri tra quali cade il procedente, che nel nostro caso sono il 3 ed il 4; dal che si viene a conoscere che $\frac{1}{4}$ è la maggiore singolar parte che di $\frac{4}{13}$ si possa prendere. Si sottragga $\frac{1\ \ 4}{4\ 13.}$ da $\frac{4}{13}$, rimarrà $\frac{3\ \ 0}{4\ 13}$ $= \frac{3}{52} =$ per la regola della seconda *differenza* $\frac{1}{52} + \frac{2}{52} = \frac{1}{52} + \frac{1}{26}$; e perciò $\frac{4}{13} = \frac{1}{4} + \frac{1}{26} + \frac{1}{52}$.

Regula universalis in disgregatione partium numerorum.

Ritrova un numero che abbia molte regole, o sia molti componenti, come 12, 24, 36, 48, 60 ecc., e che sia maggiore della metà del numero maggiore; come pel rotto $\frac{17}{29}$ prendi il 24 maggiore della metà di 29, ed opera così. Moltiplica il 17 per 24, che ti darà 408; dividilo prima per 29, che ti darà $14\frac{2}{9}$; dividilo per 24, che ti darà $\frac{14}{24} + \frac{2}{9} \times \frac{1}{24} = \frac{2\ \ 14}{29\ 24}$: a scrivere al modo di Leonardo $\frac{14}{24} = \frac{7}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12} + \frac{1}{2}$, e $\frac{2}{9} \times \frac{1}{24} = \frac{1}{9 \times 12} = \frac{1}{348}$; dunque $\frac{17}{29} = \frac{1}{348} + \frac{1}{12} + \frac{1}{2}$.

Se più rotti sono sotto la stessa verga si riducano prima ad un rotto semplice, come se fosse dato $\frac{2\ 3\ 4}{3\ 5\ 9}$, che trovasi uguale $\frac{(4 \times 5 + 3)3 + 2}{3.\,5.\,9} = \frac{23 \times 3 + 2}{3.\,5.\,9} = \frac{71}{135}$.

Incipit capitulum octavum de reperiendis pretiis mercium per maiorem guisam.

La maggiore guisa è la regola del tre, di cui cita la dimostrazione geometrica ed aritmetica. Prende questo capitolo dal quaderno IV al VI. Questo è un capitolo estesissimo dal quale si possono trarre molte cognizioni riguardo ai pesi, alle misure, alle monete di quel tempo; ma ne riserbo l'estratto a parte.

Incipit capitulum nonum de baractis mercium atque earum similium (*).

È diviso in 4 parti: la 1ª delle quali versa su i baratti di cose venali; la seconda sulla compra della *bolsonalia* a modo di baratto; la 3ª delle regole dei cavalli mangianti *ordeum* in giornate stabilite. Spiegando la *bolsonalia* dice che monete di *bolsonalia* si chiamano quelle che non si comprano se non a quanto vale l'argento sopra il fuoco, onde altre monete si formino.

Esempio di *bolsonalia*. Uno ha da vendere 11 libre di bolsonalia la quale contiene oncie 2 di argento per ogni libra, e la libra di argento vale a Pisa lire 7; qual è il prezzo di detta bolsonalia? $= \frac{11 \times 2 \times 7}{12} = \frac{154}{12} = 12\,\frac{5}{6}$. Al contrario; dato il prezzo, e dato il peso della *bolsonalia*, si può trovare l'argento in essa compreso.

Anche da questo capo si può estrarre quantità di cognizioni riguardo alle merci, ai prezzi, ec.

Incipit capitulum decimum de societatibus factis inter consocios.

Manca per intero nel codice della biblioteca Ambrosiana, e per conseguenza nella mia copia.

Incipit capitulum undecimum.

De consolamine monetarum atque regulis que ad consolamen pertinent.

È nel codice Ambrosiano, e nella mia copia imperfetto, saltando dalla *differenza* 2ª alla 6.ª

Incipit capitulum duodecimum.

È diviso in 8 parti.

Incipit pars prima de collectionibus numerorum et quarumdam similium questionum.

Vi è la somma delle progressioni aritmetiche; la somma dei quadrati dei numeri in progressione naturale aritmetica, che chiamando s la somma n l'ultimo termine dall'unità, sarà $s = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(*) Questo trattato lo dice Leonardo *Magisterium Castellani*. Nel Prob. 1° cita *Ameto* figlio di *Ioseph* autore di un libro *de proportionibus*; e Montfaucon nella sua Bibl. delle Bibl. M. S., Tom. I, pag. 427 dice nella Bibl. dei Domenicani di S. Marco in Firenze *in Armario 4°, sub num. 13 exstare Epistolam Ameti Filii Ioseph de proportione et proportionabilitate*. Ed è maraviglia che il Casiri nel suo gran Catalogo dei Mat arabi Tom. I, pag. 402 e seguenti, non nomini alcuno *Ahmed vel Ahmad ben Ioseph*.

la somma dei quadrati dei numeri impari la quale è $s=\frac{n(n+2)(2n+2)}{6}$, come se $n = 9$, $s = \frac{9.\ 11.\ 20}{6.\ 2} = \frac{1980}{12} = 165 = 3.11.5$; similmente la somma dei quadrati dei numeri pari, come se $n=10$, $s=\frac{10.12.22}{12} = 10.\ 22. = 220$. Alla stessa guisa si può aver la somma s dei quadrati ascendenti per 3, per 4, ec.

Esempio. Incominciando dal 16 quadrato di 4; sia il $20 = n$, sarà $s = \frac{n(n+4)(2n+4)}{6\times 4} = \frac{n(n+4)(2n+4)}{24} = \frac{20.\ 24.\ 44}{24} = 20.44 = 880$.

De duobus viatoribus quorum unus imitabatur alterum per adscensionem numerorum per ordinem.

Un viaggiatore viaggi 20 miglia per giorno; l'altro ordinatamente 1 miglio, 2 miglia, ec.; in quanti giorni il secondo raggiugnerà il primo? Duplica il 20 che avrai 40, da cui sottrai 1, sarà in 39 giorni il raggiungimento.

Se il primo fa ogni giorno 21 miglia, il secondo ascenda per i numeri impari, sarà il raggiugnimento in 21 giorni.

Se il primo fa ogni giorno miglia 30, l'altro ascenda per i numeri pari: da 30 sottrai 1 rimane 29, che dimostra il giorno del raggiungimento.

Se il primo faccia ogni giorno un numero di miglia che integralmente divider si possa per l'ascensione quotidiana del secondo, si duplichi il procedente, e dal doppio sottrai 1; il residuo denota il giorno del raggiungimento.

Esempio. Il primo faccia ogni giorno 60 miglia, il secondo ascenda per 5, sarà il giorno del raggiungimento $= 2\ \frac{60}{5} - 1 = 24 - 1 = 23$.

Se il numero delle miglia fatte dal primo non si può dividere integralmente per l'ascensione del secondo, rimarrà un rotto, sul quale si conterà a proporzione: come se il primo faccia 10 miglia, il secondo ascenda per 3, si avrà $3\ \frac{1}{3}$; duplicando il 3, si avrà 6; dal quale sottratto 1, rimane 5. Il primo in 5 giorni fa miglia 50, il secondo $45 = 50 - 5$; nel sesto giorno il primo fa 10, il secondo fa $18 = 10 + 8$: sarà dunque $\frac{5}{8}\ 5$ il tempo del raggiungimento.

Incipit pars secunda de proportionibus numerorum.

Date le nozioni attinenti, scioglie il problema di dividere il 10 in quattro parti proporzionali. Presi perciò i numeri 3, 7, 6, 14, proporzionali fra loro, ne fa la somma che è 30, di cui il 10 è la terza parte: dunque le sue parti proporzionali saranno $\frac{3}{3}=1$, $\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$, $\frac{6}{3}=2$, $\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}$.

Se si cerchi $\frac{2}{7}x=\frac{3}{8}y$ sarà $\frac{2\times8}{7.8}x=\frac{3\times7}{7.8}y$, $16x=21y$ $\frac{x}{y}=\frac{21}{16}$, $x=21$ $y=16$.

Incipit pars tertia de questionibus arborum et similium.

Esempio. Vi è un albero di cui $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$ sono sotto terra, e sono palmi 21. Prendi il 12 che ha $\frac{1}{4}$ ed $\frac{1}{3}$, e formano $\frac{7}{12}$. Argomenta 7:21::12: a quella lunghezza dell'albero che cerchi, ed avrai 36 palmi.

Se 21 palmi sieno quelli che restano sopra terra, prendi il 12 per tutta la lunghezza della pianta; sottratte le 7, rimane 5. Argomenta $5:21::12:\frac{21\times12}{5}$.

De arbore vel numero super quem additis $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$ *faciunt* 38.

De arbore vel numero de quo extractis $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$ *si residuum addatur super ipsam arborem surget* 15.

Gli scioglie usando del 12.

De arbore vel numero cujus $\frac{4}{5}+\frac{3}{4}$ *sunt* 33 *plus arbore vel numero.* Lo scioglie assumendo 20.

De inventione cujusdam numeri de quo $\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$ *sint radix eiusdem numeri.*

Assume il 60, e vi aggiugne la spiegazione geometrica.

De inventione numeri cujus radix est residuum de $\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$ *ipsius.*

Inventio alterius numeri cui cum super additur $\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$ *ipsius est radix numeri.* Assume parimenti il 60.

De numero cum superadditur ei residuum de $\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$ *et radix ipsius numeri.*

De juvenis vita reperienda.

De leone qui erat in puteo.

De duobus serpentibus.

De petiis quatuor panni - Aliter.

De ovis - De eisdem - De regula secundum reglam ovorum.

De cane et vulpe.

De eo qui misit filium in Alexandria.

De divisione 10 *in tres partes inequales secundum continuam proportionem - De eodem in partes quatuor - De eodem in partes quinque.*

De leone et leopardo et urso.

De duabus formicis quarum una immitatur aliam.

De duabus navibus se se invicem conjungentibus.

De tina quae habet quatuor foramina in fundo - Assume in 12 giorni.

De eadem tina cum super ipsa sint canales quatuor.

De bucte que habet quatuor foramina unum super aliud. Conta qui il giorno di ore 12 - *Aliter - Aliter - Modus alius de bucte.*

De quatuor hominibus navem locantibus.

De homine retento in obsequio.

De numero cui superadditur $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$ *et* 12, *et a quo extrahitur* $\frac{1}{6}+\frac{2}{5}$, *et* 12, *et nihil remanet - Item alia consimilis,* ma più complicata in frazioni.

Questio proposita a quodam constantinopolitano magistro.

De cuppa cujus fundus est tertia pars, coperchium est quarta - Aliter - item.

De quatuor hominibus denarios habentibus.

De duobus hominibus qui habent denarios ex quibus unus petit alteri aliquam quantitatem, et proponit excedere eum in aliqua proportione. De eadem - Questio de eadem re nobis apud Constantinopolim a quodam magistro proposita. Insegna cinque modi per tale quistione, ed uno lo chiama *la regola retta.*

Questio consimilis inter tres homines.

De eodem inter quatuor homines questio impossibilis - De quinque hominibus questio consimilis. Dà però i casi possibili.

De homine qui ad vendendas tres margheritas Costantinopolim properavit. De eodem per regulam rectam.

La *regola retta* è la regola della cosa (*rei*): vediamo nell'esempio del mercadante. La margarita infima valeva *rem,* la seconda *due res,* la terza 4 *res minus* $\frac{1}{3}$ di bisanzio; dunque in somma valevano 7 *res minus* $\frac{1}{3}$ *bisautii.* Alla prima margarita n'ebbe $\frac{1}{10}$ di tutte, cioè $\frac{1}{10}$ di 7 cose, meno $\frac{1}{3}$ di bisanzio; vale a dire $\frac{7}{10}$ di cosa $\frac{1}{30}$ di bisanzio: la qual quantità detratta da 1ª cosa, prezzo della prima margherita, resta

$\frac{3}{10}$ di cosa — $\frac{1}{30}$ di bisanzio : il qual residuo pel problema era = al prezzo della seconda margarita $+ \frac{1}{10} + \frac{1}{30} + 21$ bisanzi; cioè ad $\frac{1}{4}$ del prezzo della prima margarita; cioè ad $\frac{1}{4}$ della cosa $+ \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$ di bisanzio $+ 21$ bisanzi. Dando alle due parti $\frac{1}{30}$ di bisanzio, si avrà $\frac{3}{10}$ di cosa $= \frac{1}{4}$ della cosa $+ \frac{1}{10} + \frac{2}{30}$ 21 di bisanzio $=$ bisanzi $21 + \frac{2}{5}$ di bisanzio; e, levando da $\frac{4}{10}$ di cosa $\frac{1}{4}$ di cosa, resterà $\frac{1}{20}$ di cosa = bisanzi $21\frac{2}{5}$: dunque il prezzo della prima margarita si fu di bisanzi $20 \times 21\frac{2}{5} =$ bisanzi 428.

La stessa *regola retta* fu applicata alla quistione propostagli presso a Costantinopoli da un certo maestro ed era: « di due uomini l'uno » chiede all'altro 7 denari con che viene ad avere il quintuplo di lui, ed il » secondo chiede al primo 5 danari con che viene ad avere il settuplo » di esso ». Si ponga che il secondo abbia una cosa $+ 7$ danari; dunque dati questi danari al primo resterà con una cosa, ed il primo avrà 5 cose; e se il primo dà al secondo 5 danari egli avrà una cosa $+ 12$ danari ed al primo resteranno 5 cose $- 12$ danari, e così il secondo avrà il settuplo di 5 cose $- 12$ danari: dunque 1 cosa $+ 12$ danari $= 7 \times (5$ cose $- 12)$ danari $= 35$ cose $- 60$ danari; dunque, per i principj *si equalibus equalia addas.... si ab equalibus equalia demas*, sarà 34 cose $= 96$ danari, e la cosa $= \frac{96}{34}$ danari $= 2\frac{14}{17}$ danari. Dunque il secondo avea danari $9\frac{14}{17}$, ed il primo danari $= 5\left(2\frac{14}{17}\right) - 7 = 14\frac{2}{17} - 7 = 7\frac{2}{17}$.

Di questa *regola retta*, applicandola al problema del maestro presso Costantinopoli, dice così : *In solvendis questionibus est regula quedam que recta dicitur qua harabes utuntur, et est illius regule modus valde laudabilis, cum per ipsam infinite questiones solvi valeant.*

Oltre la regola retta dà pei problemi dei danari tra i due uomini altre regole.

Esempio 1°. Due uomini dicono il primo al secondo : dammi 1 de' tuoi danari, e ti sarò uguale ; e l' altro al primo : dammene 1 de' tuoi, ed avrò dieci volte più di te. Dunque il primo, avuto dal secondo 1, aveva $\frac{1}{2}$ della somma; ed il secondo, avuto 1 dal primo, aveva $\frac{10}{11}$ della somma. Il problema è simile a quello di un albero, del quale $\frac{1}{2} + \frac{10}{11}$ supera la lunghezza totale di palmi 2. Moltiplica così $\frac{1 \times 11 + 2 \times 10}{2 \times 11} = \frac{35}{22}$, $35 - 22 = 9$. Ma in vece di 9 non si ha di eccesso che 2. Moltiplica questo 2 per 11, e dividi per 9, ed avrai $2\frac{4}{9}$ pei danari del primo, avuto 1 dal secondo: onde di proprio avrà avuto $1\frac{4}{9}$. Moltiplica $2 \times 2 \times 10 = 20$, e dividi per 9, ed avrai i denari del secondo, computato l'1 avuto dal primo, $= 4\frac{4}{9}$: onde di proprio $3\frac{4}{9}$.

Esempio 2.° Il problema propostogli presso Costantinopoli dal maestro. Dimostrazione geometrica. Sia la linea *ab* la somma dei danari, e la *ag* la porzione del primo, la *gb* quella del secondo, e si segni tra *g*, *b* il punto *d*, e sia $gd = 7$, e tra *a*, *g* si segni il punto *e*, e sia $ge = 5$, e perchè il primo domanda al secondo il *gd* avrà il numero *ad*, che deve essere $= 5\,db$. Dunque *db* è $\frac{1}{6}\,a\,b$. Parimenti se sopra i danari *gb* del secondo uomo si aggiungano li 5 *eg*, avrà egli *eb*, e rimarranno al primo *ae*; e poichè deve essere *be* 7, sarà $ae = \frac{1}{8}\,a\,b$. Dunque *bd*, ed *ae* sono $\frac{1}{8}\;\frac{1}{6}$ di tutto il numero *a b*. Per lo che se da *ab* si leveranno $\frac{1}{8}\;\frac{1}{6}$ di esso, rimarrà $ed = 12$, essendo $ag = 5$, $gd = 7$. Poni dunque secondo la regola dell'albero pel numero *ab* 24, di cui $\frac{1}{6} = 4$ sarà $= bd$, ed $\frac{1}{8} = 3$ sarà $= ea$, e se da 24 si detraggano i numeri *bd*, ed $ea = 7$, resterà $17 = ed$. Per lo che starà 17 ad $ed = 12 :: 24 : ab = \frac{24 \times 12}{17}$ e :: 4 : *bd*, e :: 3 al numero *ea*. Per lo che $bd = \frac{4 \times 12}{17}$, $ea = \frac{3 \times 12}{17}$, ed a *bd* aggiunti $7 = gd$ si avrà $9\,\frac{14}{17}$, ed a *ae* giunto $eg = 5$, si avrà per $ag = 7\frac{2}{17}$.

Esempio 3°. Il primo uomo dice al secondo: dammi 6 de'tuoi danari, ed io ne avrò il quintuplo de'tuoi più $\frac{1}{4}$; ed il secondo dice al primo: se tu mi dai 4 de'tuoi, io ne avrò il settuplo di quelli che ti rimarranno più $\frac{2}{3}$. Il primo avrà $5\,\frac{1}{4}$, ed il secondo 1, e la somma intera sarà $6\frac{1}{4}=\frac{25}{4}$; ed il secondo avendo $1=\frac{4}{4}$ avrà $\frac{4}{25}$ della somma. Parimenti il secondo, avuti dal primo i 4, avrà $7\frac{2}{3}$, ed il primo 1; la somma sarà $8\frac{2}{3}=\frac{26}{3}$, ed il primo $1=\frac{3}{3}$, onde avrà della somma intera $\frac{3}{26}$. Essa è la quistione dell'albero da cui estratto $\frac{3}{26}+\frac{4}{25}$ rimangono 6 e $4=10$.

Operare. $\frac{4\times 26+3\times 25}{26\times 25}=\frac{104+75}{650}=\frac{179}{650}$ $650-179=471$ di residuo; ma il residuo del caso deve essere 10: dunque $471:104::10:\frac{1040}{471}=2\frac{98}{471}$ sarà il danaro avuto dal secondo, dati 6 al primo; e per ciò l'intero suo $=8\frac{98}{471}$, ed $\frac{75\times 10}{471}=1\frac{249}{471}$ sarà il numero de'danari del primo, datine 4 al secondo; e per ciò il suo intero $=5\frac{249}{471}=5\frac{93}{151}$.

Esempio 4.° Il primo dice al secondo: se mi dai 7 danari io ne avrò un quintuplo degli a te restanti più 1; ed il secondo al primo: se tu mi dai s de'tuoi io ne avrò un settuplo degli a te rimanenti, più 1. Si dica somma maggiore s la somma dei danari di ambedue insieme, e $s-1$ somma minore. Il primo era $7-1$ avrà 5 volte il secondo, e fra tutti e due $5-1$: dunque il primo ha $\frac{5}{6}$ di $s-1$ meno 6, ed il secondo ha $\frac{1}{6}$ di $s-1$ piu 7. Similmente il secondo ha con $s-1$, 7 volte quanto il primo, e fra tutti e due $s-1$; dunque il secondo ha $\frac{7}{8}$ di $s-1$ meno 4, ed il primo $\frac{1}{8}$ di $s-1$ più 5. Dunque fra l'uno e l'altro hanno $\frac{5}{6}\,\frac{7}{8}$ di $s-1$ meno 6, meno 4; hanno insieme la somma maggiore. Dunque $\left(\frac{5}{6}+\frac{7}{8}\right)s-1-10=5$; dunque $\left(\frac{5}{6}+\frac{7}{8}\right)5-1-11=s-1$, e per ciò $\left(\frac{7}{8}+\frac{5}{6}\right)s-1-(s-1)=1$. Si assuma per s il 24, si avrà $\frac{7}{8}$ di $24=21$, $\frac{5}{6}$ di $24=20$ $\left(\frac{7}{8}+\frac{5}{6}\right)$ $24=41$, $41-24=17$. Ma si deve aver 11, non 17: dunque $\frac{7}{8}\cdot\frac{24\times 11}{17}=\frac{21\times 11}{17}=\frac{231}{17}=13\frac{10}{17}$, e $13-4\frac{10}{17}=9\frac{10}{17}$ sarà il numero dei danari del secondo, e $\frac{5}{6}\,\frac{24\times 11}{17}=\frac{20\times 11}{17}=\frac{220}{17}$

$= 12\ \frac{16}{17}$; e $12 - 6\frac{16}{17} = 6\frac{16}{17}$ saranno i danari del secondo.

In altro modo. Il primo ha $\frac{1}{8}$ di $s-1$ più dan. 5, ed il secondo $\frac{1}{6}$ di $s-1$ più danari 7; dunque fra l'uno e l'altro hanno $\frac{1}{8}+\frac{1}{6}$ di $s-1$ più danari 12, ed hanno insieme la maggior somma; dunque $\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{6}\right)s-1+12=s$; dunque $\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{6}\right)s-1+11=s-1$; dunque $11 = s-1-\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{6}\right)s-1$. Supponi $s-1=24$; dal quale estratti $\frac{1}{8}\,24+\frac{1}{6}\,24=7$, rimangono 17 in luogo di 11. Si moltiplichi 3×11, e si divida per 17, ed avrai $\frac{33}{17}=1\frac{16}{17}$; al quale giunti 5, proverrà $6\frac{16}{17}$ pel numero dei danari del primo, e quello dei danari del secondo sarà $\frac{4\times 11}{17}+7=9\frac{10}{17}=10$.

In altro modo. Il primo ha $\frac{5}{6}$ di $s-1$ meno dan. 6, od $\frac{1}{8}$ di $s-1$ più danari 5; dunque $\frac{5}{6}\,s-1-6=\frac{1}{8}\,s-1+5$; dunque $\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{8}\right)5-1=11$, cioè $20-3=17=11$. Uscendo 17 in luogo di 11 sarà $\frac{20\times 11}{17}-6$ il danaro del primo, ovvero $\frac{3.\,24}{17}$. Similmente essendo $\frac{7}{8}\,s-1$ meno 4, ovvero $\frac{1}{6}\,5-1$ più 7 il denaro del secondo, si avrà $\left(\frac{7}{8}-\frac{1}{6}\right)s-1=11$; cioè supposto $s-1=24$; $21-4=17=1$: onde il numero de'danari del secondo $=\frac{21\times 11}{17}-4$, ovvero $\frac{4\times 11}{17}+7$.

Esempio 5°. Il primo, avuti dal secondo, viene ad avere cinque volte tanto quanto esso più 1; ed il secondo avuti 5 dal primo ha sette volte tanto quanto esso più 2. Si devono distinguere tre somme: la prima totale dei danari dei due che chiamerò s, la media $= s-1$, la minore $= s-2$. Il primo ha $\frac{5}{6}$ di $s-1$ meno dan. $7-1=6$, ed il secondo ha $\frac{1}{6}$ di $s-1$ più dan. 7. Similmente il secondo ha $\frac{7}{8}$ di $s-2$ meno $5-2=3$, ed il primo $\frac{1}{8}\,s-2$ più 5. Si possono ridurre le porzioni di ciaschedunno a parti delle somme s, $s-1$, $s-2$. E prima a parti di $s-2$. $\frac{5}{6}$ di $s-2$ con $\frac{5}{6}$ di 1 $=\frac{5}{6}(s-1)$;

dunque il primo $\frac{5}{6}(s-2)+\frac{5}{6}-6=\frac{5}{6}(s-2)-5\frac{1}{6}$. Ed il secondo si è trovato avere $\frac{7}{8}(s-2)-3$; dunque fra tutti e due hanno $\left(\frac{7}{8}+\frac{5}{6}\right)(s-2)-8\frac{1}{6}$. Hanno pur essi la maggior somma: onde $\left(\frac{7}{8}+\frac{5}{6}\right)(s-2)-8\frac{1}{6}=5$; e per ciò $\left(\frac{7}{8}+\frac{5}{6}\right)(s-2)-10\frac{1}{6}=s-2$, e quindi $\left(\frac{7}{8}+\frac{5}{6}\right)(s-2)-s-2)=10\frac{1}{6}$. Si ponga $s-2=24$ e si avrà $21+20-24=10\frac{1}{6}$. Ma $21+20-24=17$; dunque si ha 17 in luogo di $10\frac{1}{6}$. Sarà il numero dei danari del primo $=\frac{20\times10\frac{1}{6}}{17}-5\frac{1}{6}=11+\frac{16}{17}+\frac{2}{3.17}-5\frac{1}{6}=$ e del secondo $=\frac{21\times10\frac{1}{6}}{17}-3$.

Si calcoli per la somma media $s-1$. Il primo ha $\frac{5}{6}(s-1)-6$; ed il secondo avendo $\frac{7}{8}(s-2)\,s$ avrà $\frac{7}{8}(s-1)-3\frac{7}{8}$; e fra l'uno e l'altro $\left(\frac{7}{8}+\frac{5}{6}\right)(s-1)-9\frac{7}{8}=5$, dunque $\left(\frac{7}{8}+\frac{5}{6}\right)(s-1)-10\frac{7}{8}=s-1$, dunque $\left(\frac{7}{8}+\frac{5}{6}\right)(5-1)-5-1=10\frac{7}{8}$. Dunque, supposto $s-1=24$, sarà il numero dei danari del primo $=\frac{20\times10\frac{7}{8}}{17}-6$, e quello del secondo $=\frac{21\times10\frac{7}{8}}{17}-3\frac{7}{8}$. Si calcoli secondo la somma maggiore. Il primo avendo $\left(\frac{5}{6}\right)(s-1)-6$ avrà $\frac{5}{6}s-6\frac{5}{6}$, ed il secondo $\frac{7}{8}s-3\frac{7}{8}.2=\frac{7}{8}5-4\frac{3}{4}$. Dunque fra tutti e due $\left(\frac{7}{8}+\frac{5}{6}\right)s-10-\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=\left(\frac{7}{8}+\frac{5}{6}\right)s-11-\frac{7}{12}$. Dunque $\left(\frac{7}{8}+\frac{5}{6}\right)s-11\frac{7}{12}=s$. Supposto $s=24$, saranno i danari del primo $=\frac{20\times11\frac{7}{12}}{17}-6\frac{5}{6}$, e i danari $\left(\frac{7}{8}+\frac{5}{6}\right)s-5=11\frac{7}{12}$. Supposto del secondo $\frac{21\times11\frac{7}{12}}{17}-4\frac{3}{4}$.

Si è proceduto triplicatamente per $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{6}$; si può parimenti procedere triplicatamente per $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{6}$. Per la somma minore. Il primo ha $\frac{1}{8}$ di $(s-2)+5$ dan., ed il secondo $\frac{1}{6}(s-1)+7=\frac{1}{6}(5-2)+7\frac{1}{6}$. Dunque fra tutti e due $\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{6}\right)(s-2)+12\frac{1}{6}=s$; dunque $\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{6}\right)$ $(s-2)+10\frac{1}{6}=s-2$; e per ciò $\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{6}\right)(s-2)-(s-2)=10\frac{1}{6}$. Si supponga $s-2=24$, e si proceda al solito: si avrà pel primo $6\frac{27}{34}$, pel secondo $9\frac{19}{34}$. Per la somma media il primo $\frac{1}{8}(s-1)+4\frac{7}{8}$, ed il secondo $\frac{1}{6}(s-1)+7$. Dunque fra tutti e due $\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{6}\right)(s-1)$ $+11\frac{7}{8}=s$; dunque $s-1-\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{6}\right)s-1=10\frac{7}{8}$; dunque similmente si trova il primo avere $\frac{1}{8}s+4\frac{3}{4}$, il secondo $\frac{1}{6}s+6\frac{5}{6}$; dunque etc.

Si possono ancora ritrovare le quantità di danari di ambi. Poichè si è trovato che il primo ha $\frac{1}{8}(s-1)+5$, ovvero $\frac{5}{6}(s-1)-5\frac{1}{5}$; dunque $\frac{1}{8}(s-1)+s=\frac{5}{6}(5-1)-5\frac{1}{5}$ etc. Così per le altre somme.

Esempio 6°. Il primo, avuti dal secondo 7, ha cinque volte tanto quanto esso più 6; ed il secondo, avuti dal primo 5, ne ha sette volte tanto quanto esso meno 8. In tal quistione è $s-6$ la minor somma, la media è la somma di tutti i danari $=s$, la maggiore è $s+8$. Il primo ha $\frac{5}{6}(s-6)+7-6=\frac{5}{6}(s-6)+1$, il secondo $\frac{1}{6}(s-6)+7$; e della $s+8$ ha il primo $\frac{1}{8}(s+8)+5$, ed il secondo $\frac{7}{8}(s+8)-s-8$. Riduciamo queste porzioni alla media somma, sebbene ridurre ugualmente si possano alle altre due, e facciamolo in uno dei tre modi ne'quali si può fare. Poichè la maggiore è $s+8$, essendo s la media si avrà $\frac{s+8}{8}=\frac{1}{8}s+1$; onde, avendo il primo $\frac{1}{8}(s+8)+5$, avrà $\frac{1}{8}$ $s+6$. Parimenti essendo $s-6$ la minor somma, essendo s la media, sarà $\frac{s-6}{6}=\frac{s}{6}-1$; e per ciò, avendo il secondo $\frac{1}{6}(s-6)+7$, avrà $\frac{1}{6}s-1+7=\frac{1}{6}s+6$; dunque fra tutti e due hanno $\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{6}\right)s+12$

ed è s la somma dei danari tutti; dunque $\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{6}\right)5+12=s$; dunque $s-\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{6}\right)s=12$. Suppongasi $s=24$ e si operi al solito; e troverai pel primo $8\,\frac{2}{17}$, pel secondo $8\frac{14}{17}$.

Estende Leonardo il problema a tre uomini ed a quattro ed a cinque.

Esempio di tre uomini. Il primo, avuti dagli altri due 7 danari, ha cinque volte tanto quanto essi. Il secondo, avuti dagli altri due 9, ne ha sei volte tanto: ed il terzo, avutine dagli altri due 11, ne ha sette volte tanti. Il primo viene ad avere $\frac{5}{6}s-7$, il secondo $\frac{6}{7}s-9$, il terzo $\frac{7}{8}s-11$; dunque fra tutti hanno $\left(\frac{5}{6}+\frac{6}{7}+\frac{7}{8}\right)s-7-9-11=s$; dunque $\left(\frac{5}{6}+\frac{6}{7}+\frac{7}{8}\right)s-s=27$. Si ponga $s=168$ e si troveranno $\frac{5}{6}\,168=140$, $\frac{6}{7}\,168=144$, $\frac{7}{8}\,168=147$ e la somma 431 , $438-168=263$, che dovrebbe essere 27. Saranno i danari del primo $=\frac{140\times 27}{263}-7=14\frac{98}{263}=7\frac{98}{263}$, del secondo $=\frac{144\times 27}{263}-9=5\frac{206}{263}$: del terzo $=\frac{147\times 27}{263}-11=4\frac{24}{263}$.

Sull'esempio quarto riflette, che quando ciascheduno dei due uomini superi ugualmente sopra la sua multiplicità, se superi da 1 sino ad 11 il problema è solubile; ma è insolubile se superi più di 11, per esempio 12. Domandi il primo al secondo 7, e venga ad averne 5 volte tanto quanto esso $+\,12$; ed il secondo al primo ne chieda 5, e ne abbia in seguito 7 volte tanto quanto esso $+\,12$. Si avrà s per la somma di tutti i danari, che si dirà *somma maggiore*, e $s-12$ la somma minore. Il primo avrà $\frac{5}{6}\,(s-2)+12-7=\frac{5}{6}(s-2)+s$; ed il secondo $\frac{7}{8}\,(s-12)+12-s=\frac{7}{8}\,(s-12)+7$; dunque fra tutti e due $\left(\frac{5}{6}+\frac{7}{8}\right)(s-12)+12=s$. E poichè $s=s-12+12$, si avrà $\left(\frac{5}{6}+\frac{7}{8}\right)(s-12)=s-12$: onde $\left(\frac{5}{6}+\frac{7}{8}\right)(s-12)-(s-12)=0$, il che è impossibile.

Dà anche il problema dell'esempio 6° sciolto per la *Regola Retta*. Pongasi $x=$ alla cosa , e suppongasi che il primo abbia $5x-1$, il secondo $x+7$: dati 7 dal secondo al primo ne avrà $5x+6$, ed al secondo resterà x: ma, dati dal primo al secondo 5, il secondo ne avrà $x+12$ ed il primo $5x-6$; di cui deve esser settuplo $x+12+8$: dunque $7(5x-6)=x+12+8$, cioè $35x-42=x+20$, $34x=62$, $x=\frac{31}{17}=1\frac{14}{17}$. Dunque il primo $=8\frac{2}{17}$, e pel secondo $8\frac{14}{17}$.

Il problema tra quattro uomini lo chiama *insolubile* per le condizioni particolari, non altrimenti che qui sopra il riflesso sull'esempio 4° dei due uomini: come sarebbe se il primo ed il secondo, chiesti 7 dagli altri, avessero 3 volte tanto quanto essi; il secondo ed il terzo, chiesti 8 dagli altri, avessero 4 volte tanto quanto essi; il terzo ed il quarto, chiesti 9, avessero 5 volte tanto quanto essi; il quarto ed il primo chiesti 11 dagli altri, avessero 6 volte quanto essi — e diviene il problema solubile se il primo e secondo ricevono dagli altri 100, il secondo ed il terzo danari 106, il terzo ed il quarto danari 145, il quarto ed il primo danari 170.

Ecco il modo con cui scioglie il seguente problema fra tre uomini. Il primo ed il secondo, avuti dal terzo danari 7, abbiano 5 volte quanto essi; il secondo ed il terzo, avuti dal primo 9, abbiano 6 volte tanto quanto il primo; il terzo ed il primo, avuti danari 11, abbiano 7 volte tanto quanto il secondo. Avrà il terzo $\frac{1}{6}s+7$; il primo $\frac{1}{7}s+9$; il secondo $\frac{1}{8}s+11$. Dunque fra tutti e tre $\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)s+27=s$; dunque $s-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)s=27$. Si supponga $s=168$, e sarà $(28+24+21)$ $s=73$, e $168-73=95$ in luogo di 27. Dunque il terzo $=\frac{28\times27}{95}+7=14\frac{91}{95}$; il primo $=\frac{24\times27}{95}+9=15\frac{78}{95}$; il secondo $=\frac{21\times27}{95}+11=16\frac{92}{95}$.

Esempio tra cinque uomini. Il primo e secondo e terzo, ricevuti dal quarto e quinto 7 danari, hanno 2 volte tanto quanto essi; il secondo, terzo, quarto ricevuti dal quinto e primo danari 8, hanno 3 volte tanto quanto essi; il terzo, il quarto e quinto, ricevuti dal primo e secondo danari 9, hanno 4 volte tanto quanto essi; il quarto, quinto, primo, ricevuti dal secondo e terzo danari 10, hanno 5 volte tanto quanto essi; il quinto, primo e secondo ricevuti dal terzo e quarto danari 11, hanno 6 volte tanto quanto essi; il quarto e quinto hanno $\frac{1}{3}s+7$; il quinto e primo hanno $\frac{1}{4}s+8$; il primo e secondo hanno $\frac{1}{5}s+9$; il secondo e terzo hanno $\frac{1}{6}s+10$; il terzo e quarto hanno $\frac{1}{7}s+11$; dunque fra tutti hanno $\frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)s+\frac{1}{2}(7+8+9+10+11)=s$; dunque

$2\times s-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)s=7+8+9+10+11=45$. Si supponga $s=420=3\times4\times5\times7$, e si avrà $\frac{420}{3}=140$, $\frac{420}{4}=105$, $\frac{420}{5}=84$, $\frac{420}{6}=70$, $\frac{420}{7}=60$, $2\times s = 840\,2\times s-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)s=840-459=381$, che dovrebbe essere 45. Dunque il quarto e quinto hanno $\frac{140\times45}{381}+7=\frac{140\times15}{127}+7=23\frac{68}{127}$; il quinto e primo hanno $=\frac{105\times15}{127}+8=20\frac{51}{127}$; il primo e secondo hanno $\frac{84\times15}{127}+9=18\frac{117}{127}$; il secondo e terzo hanno $\frac{70\times15}{127}+10=18\frac{34}{127}$; il terzo e quarto hanno $18\frac{11}{127}$. Moltiplica ora 45 per 420, somma immaginata, e dividi per 381, e si avrà $\frac{420\times45}{381}=\frac{420\times15}{127}=49\frac{77}{127}$ per la somma vera. Si aggiungano i danari del primo e secondo $=18\frac{117}{127}$ con quelli del terzo e quarto $=18\frac{11}{127}$ e si avrà $36\frac{128}{127}=37\frac{1}{127}$, che sottratti dalla somma vera $49\frac{77}{127}$ e si otterrà i danari del quinto $=12\frac{76}{127}$, i quali, sottratti da $20\frac{51}{127}$, danari del quinto e primo, rimarrà pel primo $9\frac{25}{127}$; i quali, sottratti dai danari del primo e secondo $=18\frac{117}{127}$, rimarranno pel secondo danari $10\frac{92}{127}$; i quali, sottratti dai danari $18\frac{34}{127}$ del secondo e terzo, rimarranno pel terzo $7\frac{65}{127}$; i quali sottratti dai danari del terzo e quarto $18\frac{11}{127}$ rimarranno pel quarto danari $11\frac{58}{127}$.

In altro modo. Il secondo e terzo $=\frac{1}{6}s+10$, il quarto e quinto $=\frac{1}{3}s+7$; dunque il secondo, terzo, quarto, quinto $=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)s+17$: onde al primo rimane $s-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)s-17=\frac{1}{2}s-17$. Similmente perchè tra il terzo e quarto hanno $\frac{1}{7}s+11$, e tra il quinto e primo hanno $\frac{1}{4}s+8$; tra il terzo, quarto, quinto, primo hanno $\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{4}\right)s+19=\frac{11}{28}s+19$: onde al secondo rimane $\frac{17}{28}s-19$. Similmente il quarto e quinto $=\frac{1}{3}s+7$; il primo e secondo $=\frac{1}{5}+9$; dunque il quarto, quinto, primo, secondo $=\frac{8}{15}15+16$: onde il terzo $\frac{7}{15}s-16$.

Parimente il quinto, primo, secondo, terzo $= \frac{1}{4}s + 8 + \frac{1}{6}s + 10 = \frac{10}{24}s + 18$: onde rimane al quarto $\frac{7}{12}s - 18$. Di pari modo il primo, secondo, terzo, quarto $= \frac{1}{5}s + 9 + \frac{1}{7}s + 11 = \frac{12}{35}5 + 20$: onde rimane al quinto $\frac{23}{35}s - 20$: e, ritrovata la porzione di ciascheduno, opera come nel problema dei tre uomini.

A questi problemi tra i danari di più uomini segue il problema sopra recato delle tre margarite, che un negoziante andò a vendere a Costantinopoli ; indi seguono vari problemi di più uomini che ritrovano disuguali numeri di bisanzi; poscia alcuni problemi su i numeri.

Incipit pars 4ª duodecimi capituli de inventione bursarum.

Sono problemi simili a quelli dei danari di più uomini.

Regola della Cosa. Esempio trattato colla *regola retta.* Due uomini ritrovano una borsa di danari pe' quali il primo dice al secondo : se avessi oltre i miei i danari della borsa avrei tre volte tanto quanto tu ; al che risponde il secondo: se io avessi oltre ai miei i danari della borsa avrei quattro volte tanto quanto tu. Si dica il numero dei danari del primo cosa, e si significhi per x; dunque il primo, avuta la borsa, ha x + borsa, e questo è uguale a 3 i denari del secondo; dunque il secondo ha $\frac{x + \text{borsa}}{3}$; dunque, avuta la borsa, ha $\frac{x + \text{borsa}}{3} + \text{borsa}$, il che si uguaglia a $4x$; dunque x + borsa + 3 borse $= 12x$; dunque 4 borse $= 11x$ ed $x = \frac{4}{11}$ borsa: onde, se la borsa conteneva 11 danari, il primo aveva 4 danari, ed x + borsa $= 15$; e $\frac{15}{3} = 5$ danari del secondo.

Esempio in cinque uomini. Il primo, avuta la borsa, ha 2 volte e mezza tanto quanto gli altri; il secondo $3\frac{1}{3}$ volte quanto gli altri; il terzo $4\frac{1}{4}$ volte quanto gli altri; il quarto $5\frac{1}{5}$ volte tanto quanto gli altri; il quinto $6\frac{1}{6}$ volte quanto gli altri. Avendo il primo $2\frac{1}{2}$ volte quanto gli altri, se egli ha 5 gli altri hanno 2; dunque fra tutti hanno 7; dunque il primo ha $\frac{5}{7}$ della somma 5 cioè $\frac{5}{7}$ 5 fra i suoi e la borsa; e gli altri hanno $\frac{2}{7}$. Similmente il secondo colla borsa ha $\frac{10}{13}5$, e gli altri $\frac{3}{13}5$; e nella stessa maniera il terzo ha $\frac{17}{21}$ 5, e gli altri $\frac{4}{21}$; il quarto ha $\frac{26}{31}5$ e gli altri $\frac{5}{31}5$, ed il quinto $\frac{37}{43}5$ e gli altri $\frac{6}{43}5$. Onde si deve vedere in qual numero si comprendano $\frac{37}{43}, \frac{26}{31}, \frac{17}{21}, \frac{10}{13}, \frac{5}{7}$. Esso si conterrà in $7 \times 13 \times 3 \times 31 \times 43 = 363909$, e si avrà $\frac{5}{7}.363909$ e troverai $\frac{5}{7}.363909 = 259935$: e così ordinatamente $\frac{5}{7}.363909$, $\frac{10}{13}.363909$, $\frac{17}{21}.363909$, $\frac{26}{31}.363909$, $\frac{37}{43}.363909$ 259935 279930, 294593, 305214, 313131.

Un altro modo di trovar queste parti si è di moltiplicare per la prima $5 \times 13 \times 3 \times 31 \times 43 = 259935$, per la seconda $10 \times 13 \times 3 \times 31 \times 43$, e si avrà $259935 + 279930 + 294593 + 305214 + 313131 = 1452803$, e quindi $1452803 - 363909 = 108894$ che sono i danari della borsa. E poichè gli uomini sono cinque per ciò la borsa è stata computata cinque volte invece di una; onde si moltiplichi 363909 per 4 onde si avrà 1455636, che è la somma della borsa e dei cinque uomini. E perchè il primo uomo ha $\frac{5}{7}5 = \frac{5}{7}.1455636 = 1039740$ saranno i suoi danari $1039740 - 1088894$; dunque o avrà *debito* o il problema sarà insolubile. Parimenti $\frac{10}{13}.1455636 = 1119720$ sarà il numero dei danari del secondo, aggiunta la borsa: onde i suoi danari $= 1119720 - 1088894 = 30826$; i danari del terzo $= \frac{17}{21}.1455636 - 1088894 = 1178372 - 1088894 = 89478$; i danari del quarto $= \frac{26}{31}.1455636 - 1088894 = 1220856 - 1088894 = 131962$; i danari del quinto $= \frac{37}{43}.1455636 - 1088894 = 1252524 - 1088894 = 163630$ - - -

Una qualche idea della quantità negativa e così in alcune delle quistioni degli uomini volenti comprar cavalli.

Cita qui Leonardo alcune quistioni non solubili per la Elcataym. *Hee et similes questiones per Elcataym solvi non possunt in integra nisi fortuitu acciderent quod positiones que ponuntur in ipso Elcataym essent numeri in quibus in integra caderent.* Di tal sorta è la quistione seguente: quattro uomini hanno ritrovate delle borse nella seconda delle quali vi erano 3 danari più che nella prima; nella terza 7; nella quarta 13: ed il primo con la borsa ha due volte tanto quanto il secondo; il secondo con la seconda 3 volte tanto quanto il terzo; il terzo con la terza 4 volte tanto quanto il quarto; il quarto colla quarta 5 volte tanto quanto il primo. Quanto in ciascuna borsa fu ritrovato ?- Dalle condizioni della quistione si ha $\frac{1^o + 1^a b}{2} = 2^o$; $\frac{2^o + 2^a b}{3} = 3^o$;

$\frac{3^o}{4} + \frac{3^a\,b}{4} = 4^o$; $\frac{4^o}{5} + \frac{4^a\,b}{5} = 1^o$. Inoltre: $\frac{2^a\,b}{3} = \frac{1^a\,b}{3} + \frac{3}{3} = \frac{1^a\,b}{3} + 1$; $\frac{3^a\,b}{4} = \frac{1^a\,b}{4} + \frac{7}{4} = \frac{1^a\,b}{4} + 1\,\frac{3}{4}$; $\frac{4^a\,b}{5} = \frac{1^a\,b}{5} + \frac{13}{5} = \frac{1^a\,b}{5} + 2\,\frac{3}{5}$. Dunque $\frac{1^o}{6} + \frac{1^a\,b}{6} + \frac{1^a\,b}{3} + 1 = \frac{1^o}{6} + \frac{1^a\,b}{2} + 1 = 3^o$; $\frac{1^o}{24} + \frac{1^a\,b}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1^a\,b}{4} + \frac{3}{4} + 1 = \frac{1^o}{24} + \frac{3}{8}\,1^a\,b + 2 = 4^o$; $\frac{1^o}{120} + \frac{3}{40}\,1^a\,b + \frac{2}{5} + \frac{1^a\,b}{5} + 2 + \frac{3}{5} = \frac{1^o}{120} + \frac{11}{40}\,1^a\,b + 3 = 1^o$. Onde $\frac{11}{40}\,1^a\,b + 3 = \frac{119}{120}\,1^o$. Per lo che si devon trovare due numeri tali che $\frac{119}{120}$ dell'uno sieno quanto $\frac{11}{40}$ dell' altro $+ 3$. Non si può prendere pel primo 120, poichè li $\frac{119}{120}$ di 120 sarebbero 119, dai quali estratti 3, rimarebbero 116 che non possono essere li $\frac{11}{40}$ dell' altro numero che deve essere numero intero; poichè $\frac{116 \times 40}{11}$ non dà procedente intero. Si prenda $4 \times 120 = 480$, di cui li $\frac{119}{120}$ sono 476, e sottratti li 3 restano 473 divisibile per 11, e ne riesce 43 che moltiplicato per 40 dà 1720. Dunque il primo uomo ebbe 480, e nella prima borsa si ritrovarono 1720; nella seconda 1723; nella terza 1727; nella quarta 1733: con le quali borse e con i danari del primo il secondo avere avuti danari 1100, il terzo 941, il quarto 667.

Quistione insolubile

Nota anche una quistione insolubile qual'è se i danari del primo e secondo colla borsa sieno il doppio dei danari terzo e quarto del secondo e terzo, triplo di quelli del primo e quarto del terzo e quarto, quadruplo di quelli del primo e secondo.

Incipit pars quinta de emptione equorum inter consocios secundum datam proportionem.

Quistione sciolta per la Regola Retta

Esempio sciolto colla *regola retta*. Due uomini aventi dei bisanzi dicono il primo al secondo: col $\frac{1}{3}$ de'tuoi avrei il prezzo del cavallo (che è di 15 bisanzi), ed il secondo al primo, ed io l'avrei col $\frac{1}{4}$ de' tuoi. Si ponga che il primo abbia la cosa che io significherò alla moderna per x; il secondo avrà $15 - \frac{1}{4}x$, e perchè il primo con $\frac{1}{3}$ delli bisanzi del secondo ha il prezzo del cavallo, dunque $x + \frac{15}{3} - \frac{1}{12}x = 15$; dunque $x - \frac{1}{12}x = 15 - 5 = 10$; dunque $\frac{11}{21}$

$x = 10$, $x = \frac{12 \times 10}{11} \frac{120}{11} = 10 \frac{10}{11}$. Lo stesso problema, incognito il prezzo del cavallo, $1° + \frac{1}{3} 2° = 2° + \frac{1}{4} 1°$; dunque $1° = \frac{2}{3} 2° + \frac{1}{4} 1°$, e $\frac{3}{4} 1° = \frac{2}{3} 2°$ $\frac{9}{12} 1° = \frac{8}{12} 2°$; dunque $1° = 8$, $2° = 9$ ed il prezzo del cavallo $8 + \frac{1}{3} 9 = 11$.

Estende le quistioni ai cinque uomini, ed a due uomini con due cavalli i prezzi de' quali differiscono di una data quantità, ed a tre uomini e tre cavalli, a quattro uomini con quattro cavalli.

Problema indeterminato con molti altri pure indeterminati

Esempio in due uomini e due cavalli, il secondo de'quali vale bisanzi 2 più del primo. Il primo uomo con $\frac{1}{3}$ dei bisanzi del secondo ha il prezzo del primo cavallo; ed il secondo uomo ha con $\frac{1}{4}$ dei bisanzi del primo il prezzo del cavallo secondo: si cercano i prezzi dei cavalli ed i danari dei due uomini. $1° + \frac{1}{3} 2° = 2° + \frac{1}{4} 1° - 2$; dunque $1° = \frac{2}{3} 2° + \frac{1}{4} 1° - 2$, e $\frac{3}{4} 1° = \frac{2}{3} 2° - 2$ $\frac{3}{4} 1° + 2 = \frac{2}{3} 2°$. Si trovi un numero che si divida intieramente per 4 ed al procedente moltiplicato per 3 aggiugni 2 ed avrai, se prendi ad esempio 8, $\frac{8}{4} = 2$ che moltiplicato per 3 dà 6 ed aggiunto 2 torna 8, che deve essere $= \frac{2}{3} 2°$; onde $2° = \frac{24}{2} = 12$ il prezzo del primo cavallo $= 8 + \frac{12}{3} = 12$, il prezzo del secondo $= 14$. Se prendi che $1°$ abbia 16, $\frac{3}{4} 16 = 12$ e $12 + 2 = 14 = \frac{2}{3} 2°$, onde $2° = 21$ ed il prezzo del primo cavallo $= 16 + \frac{21}{3} = 23$, il secondo $= 25$.

Passa alle domande di ciascuno dei quattro uomini a due degli altri pel prezzo di un cavallo; indi alle domande di due al terzo, di tre e di due agli altri due, di quattro e di tre ad uno di cinque.

Propone anche una quistione insolubile qual'è se di quattro uomini il primo e secondo domandi agli altri due $\frac{1}{2}$ del loro, il secondo e terzo $\frac{1}{3}$ agli altri, il terzo e quarto agli altri $\frac{1}{4}$, il quinto e primo agli altri $\frac{1}{5}$, e la dimostra insolubile risultando dapprima per la somma del terzo e quarto $= 73$, poi $= 41$ ed il prezzo del cavallo $\frac{7}{10}$ della somma dei quattro uomini di poi $\frac{7}{11}$.

Incipit pars 6ª de viaggiorum proportionibus atque eorum similium.

Quistioni sciolte per la Regola Retta

Esempio sciolto colla regola retta. Un mercadante andando a Lucca duplicò il suo capitale e spese dan. 12, indi recandosi a Firenze lo duplicò di nuovo, e spese 12, e ritornato a Pisa duplicollo di nuovo, e spese dan. 12. Si ponga il capitale $=x$: dunque dopo il primo viaggio il capitale $=2x-12$, dopo il secondo $=2(2x-12)-12 = 4x-36$, dopo il terzo $= 2(4x-36)-12 = 8x-84$: e poichè gli rimase $x+9$ si avrà $8x-84 = x+9$, $7x = 93$, $x = \frac{93}{7} = 13\frac{2}{7}$.

Esempio 2°. Sia il capitale $9\frac{1}{4}$ che in quattro viaggi ha sempre triplicato, ed in fine ha lucrato 20. Si cerca la spesa. Questa si ponga $=x$: dopo il primo viaggio egli ha avuto $27\frac{3}{4}-x$; dopo il secondo $3\left(27\frac{3}{4}-x\right)-x = 83\frac{1}{4}-4x$; dopo il terzo $3\left(83\frac{1}{4}-4x\right)-x = 249\frac{3}{4}-13x$; dopo il quarto $3\left(249\frac{3}{4}-13x\right)-x = 749\frac{1}{4}-40x = 9\frac{1}{4}+20$: dunque $720 = 40x$, $x = \frac{720}{40} = \frac{72}{4} = 18$. Lo stesso dice uscire per la regola versa, che consiste (*sic*) si consideri $=x$ il dispendio si avrà pel quarto viaggio $x+9\frac{1}{4}+20 = 2+29\frac{1}{4}$; pel terzo viaggio $\frac{x+29\frac{1}{4}}{3}+x = \frac{4}{3}x+9\frac{3}{4}$; pel secondo $\frac{\frac{4}{3}x+9\frac{3}{4}}{3}+x = \frac{13}{9}x+3\frac{1}{4}$; pel primo viaggio $\frac{\frac{13}{9}x+3\frac{1}{4}}{3}+x = \frac{13}{27}x+1\frac{1}{12}+x = \frac{40}{27}x+1\frac{1}{12} = 27\frac{3}{4}$: onde $\frac{40}{27}x = 27\frac{3}{4}-1\frac{1}{12}$ $26\frac{2}{3}x = \frac{26\frac{2}{3}\times 27}{40} = \frac{13\frac{1}{3}\times 27}{20} = \frac{360}{20} = 18$ siccome prima. —

Regola versa della Cosa

Esempio 3° sciolto colla regola retta. Nel primo viaggio il mercadante duplicò il capitale; nel secondo di 2 fece 3; nel terzo di tre fece 4; e nel quarto di 4 fece 5; e nel primo viaggio spese non si sa quanto; nel secondo 3 di più, nel terzo 2 più che nel secondo, e nel quarto 2 più che nel terzo; in fine non gli rimase nulla. Si ponga il dispendio $1^{\circ}=x$. dopo il primo viaggio ebbe 2 capitali che diremo $2c-x$; dopo il secondo $\frac{3}{2}(2c-x)-x-3 = 3c-\frac{3}{2}x-2-3 = 3c-\frac{5}{2}x-3$; dopo il terzo viaggio ebbe $\frac{4}{3}\left(3c - \frac{5}{2}x - 3\right) - x - 5 = 4c - \frac{20}{6}x - 4 - x - 5 = 4c - \frac{13}{3}x - 9$; dopo il quarto ebbe $\frac{5}{4}\left(4c - \frac{13}{3}x - 9\right) - x - 7 = 5c - \frac{65}{12}x - \frac{5.9}{4} - x - 7 = 5c - \frac{77}{12}x - 18\frac{1}{4} = 5c - 6\frac{5}{12}x = 18\frac{1}{4}$, che deve essere $= 0$; dunque $5c - 18\frac{1}{4} = 6\frac{5}{12}x$, ovvero $6\frac{5}{12}x + 18\frac{1}{4} = 5c$, e $\frac{6\frac{5}{12}x + 18\frac{1}{4}}{5} = c$. Laonde si tratta di trovare un numero x, il quale moltiplicato per $6\frac{5}{12}$ ed aggiunto $18\frac{1}{4}$, abbia il suo quinto numero intero. Si prenda un numero che moltiplicato per $6\frac{5}{12}$ faccia $\frac{3}{4}$ più del sano, e sarà il numero che moltiplicato per $6\frac{5}{12}$ dà $57\frac{3}{4}$; a cui aggiunto $18\frac{1}{4}$ dà 76: ma $\frac{76}{5}$ non è intero. Dunque prendi 12, e moltiplica $6\frac{5}{12}$ per 12, e proverrà 77; aggiugni 77 sopra 76 tante volte finchè $\frac{1}{5}$ della somma sia un intero, e troverai che $2 \times 77 + 76 = 230$ è per 5 divisibile e ne esce 46. Dunque $46 = c$: e perchè a 76 si è aggiunto 2×77, si aggiunga anche a 9 il 2×12, e sarà 33 il primo dispendio, il secondo $= 36$, il terzo $= 38$, il quarto $= 40$. E, se vuoi lo scioglimento in altri numeri interi infiniti, moltiplica il 5 ed il $6\frac{5}{12}$ per 12, e si avrà $77x + 18\frac{1}{4} \times 12 = 60c$, cioè $77x + 219 = 60c$. Per la qual cosa aggiugni quante volte ti piace il 60 sopra il trovato dispendio 33, e tante volte aggiugni sopra il trovato capitale il 77, ed avrai infinite soluzioni.

Scioglie lo stesso problema supposto che dopo il quarto viaggio sia al mercadante rimasto 12 per la *regola versa* della cosa. Gli rimase dunque $c + 12$ dopo l'ultimo dispendio che fu $x + 7$; dunque al quarto viaggio, quando fece 5 di 4, aveva $c + 12 + x + 7 = c + x + 19$; dunque $5c - 6\frac{5}{12}x - 18\frac{1}{4} = 12$: e se infine poni che sia rimasto col suo capitale, si avrà $5c - 6\frac{5}{12}x - 18\frac{1}{4} = c$: e se poni che sia rimasto col suo capitale $+ 12$, si avrà $5c - 6\frac{5}{12}x - 18\frac{1}{4} = c + 12$; dunque al fine del terzo viaggio $\frac{4}{5}c + \frac{4}{5}x + 15\frac{1}{5}$; a cui aggiunto $x + 5$, dispendio del viaggio, si ha $\frac{4}{5}c + \frac{9}{5}x + 20\frac{1}{5}$: e quindi al fine del secondo viaggio $\frac{3}{4}\left(\frac{4}{5}c + \frac{9}{5}x + 20\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5}c + \frac{27}{20}x + 15\frac{3}{20}$; a cui aggiunto $x + 3$, dispendio del secondo viaggio, risulta $\frac{3}{5}c + \frac{27}{20}x + 15\frac{3}{20} + 2 + 3 = \frac{3}{5}c + \frac{47}{20}x + 18\frac{3}{20}$: onde al fine del primo viaggio $= \frac{2}{3}\left(\frac{3}{5}c + \frac{47}{20}x + 18\frac{3}{20}\right) = \frac{2}{5}c + \frac{54}{60}x + 12\frac{1}{10} = \frac{2}{5}c + \frac{47}{30}x + 12\frac{1}{10}$; a cui aggiunto il dispendio x, si avrà $\frac{2}{5}c + \frac{77}{30}x + 12\frac{1}{10}$. E questo è il duplo del primo viaggio; dunque, dividendo per 2, si avrà $\frac{c}{5} + \frac{77}{60}x + 6\frac{1}{20}$, che deve essere $= c$; dunque $\frac{4}{5}c = \frac{77}{60}x + 6\frac{1}{10}$; $4c = 6\frac{5}{12}x + 30\frac{1}{2}$.

Ha pure una quistione in cui si tratta di trovare l'esponente, ed è la seguente.

Uno ha bisanzi 13, e con essi fa non so quanti viaggi, duplicando ogni viaggio, e spendendo 14. Il doppio di 13 è 26; da cui sottratto 14, resta 12: or $2 \times 12 = 24$, e $24 - 14 = 10$. Dal primo viaggio $13 - 12 = 1$, dal secondo $12 - 10 = 2$; dunque la diminuzione del capitale di viaggio in viaggio si duplica; dunque cresce nella progressione 1. 2. 4. 8: ma $1 + 2 + 4 = 7$, $13 - 7 = 6$; dunque non può fare intero il quarto viaggio: ma $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ di viaggio e la spesa $\frac{3}{4} . 14 = 10\frac{1}{2}$. Ma, poichè sembra incongruo il dire che uno abbia fatto $\frac{3}{4}$ di un viaggio, si computi così: in un viaggio egli raddoppia, dunque lucra 1; dunque in $\frac{3}{4}$ lucra $\frac{3}{4}$ di 1, cioè di 4 fa 7; dunque saranno quattro viaggi, nei tre primi de'quali raddoppia, e nel quarto di 4 fa 7, e spende di 14 soltanto $10\frac{1}{2}$.

Alla stessa quistione riduce l'altra di uno che impiega lire 100 al 5 per 100 all'anno, e paga lire 30 per anno; e scioglie questa quistione, preso per ignoto qualunque degli elementi, riducendo tutti i casi ai casi di viaggi: ed a casi simili di viaggi riduce quest' altra quistione. Un feudatario riceve dal suo re 300 bisanzi a 75 ogni tre mesi, ed avendo bisogno di danaro chiede ad un ricco una somma al 2 per 100 per mese, da scontarsi con li 75 bisanzi per ogni tre mesi: si cerca la somma dal ricco datagli. Ed ha altre quistioni più complicate, tutte però ridotte alle regole de'viaggi.

Incipit pars 7ª de regulis erraticis. De duobus hominibus qui detulerunt lanam ad naulum.

Propone molte quistioni, tra le quali quella di un padre che venuto a morte divise la sua sostanza lasciando al primo de'figli 1 bisanzio $+ \frac{1}{7}$ del restante; al secondo bisanzi $2 + \frac{1}{7}$ del restante; al terzo 3 bisanzi $+ \frac{1}{7}$ del restante e così via via, e l'ultimo ebbe il residuo: ed accadde che tutti avessero ugualmente. Quanti furono i figli, e quale la sostanza fra loro divisa ? Procedendosi per 7, il numero de'figli sarà $7-1=6$ ed all'ultimo toccando 6, ed a tutti toccando ugualmente, sarà $6\times6=36$ tutta la sostanza del padre. E se il primo avesse $\frac{1}{7}$ della sostanza paterna, e di più 1 bisanzio; ed il secondo $\frac{1}{7}$ del restante e 2 bisanzi, e così via via, i figli sarebbero ugualmente 6, e la sostanza paterna $=6\times7=42$: e se nell'una e nell'altra quistione il primo avesse avuto 3 bisanzi, il secondo 6, e così via via montando per ternario, i figli sarebbero similmente 6 e le somme dei bisanzi sarebbero 3×36, 3×42.

Seguita *de quibusdam divisionibus*, tra le quali ve ne ha una trattata colla regola retta della cosa, ed è la seguente. Divisi un numero di dragme x in parti e ne diedi alla prima 2, onde rimase $x-2$; alla quale prima parte diedi del residuo $\frac{6}{31}$, onde la prima parte venne ad essere $2+\frac{6}{31}(x-2) = 2 - \frac{12}{31} + \frac{6}{31}x = \frac{6}{31}x + \frac{19}{31}$, che estratta da x lascia $x - \frac{6}{31}x - 1\,\frac{19}{31} = \frac{25}{31}x - 1\,\frac{19}{31}$; di cui diedi alla seconda parte 5, onde rimase $\frac{25}{31}x - 6\,\frac{19}{31}$, di cui diedi alla stessa seconda parte $\frac{6}{31}$, cioè $\frac{150}{31.\,31}x - 1\,\frac{269}{31.\,31}$; dunque la seconda parte $=5+\frac{150}{31.\,31}x - 1\,\frac{269}{31.\,31} = 4 - \frac{269}{31.\,31} + \frac{150}{31.\,31}x = 3\,\frac{692}{961} + \frac{150}{961}x = 3\,\frac{692}{31.\,31} + \frac{150}{31.\,31}x$, che deve essere = alla prima, cioè $\frac{6}{31}x + 1\,\frac{19}{31}$. Dunque $3\,\frac{692}{31.\,31} + \frac{150}{31.\,31}x = \frac{6}{31}x + 1\,\frac{19}{31}$ e $3\,\frac{692}{31.\,31} - 1\,\frac{19}{31} = \left(\frac{6}{31} - \frac{150}{31.\,31}\right)x$ $2\,\frac{692}{31.\,31} - \frac{19.\,31}{31.\,31} = \frac{6.\,31 - 150}{31.\,31}x$: onde $2\,\frac{103}{961} = \frac{36}{961}x$: $2\times 961 + 103 = 36x$ e $2025 = 36x$: onde $x = \frac{2025}{36} = 56\,\frac{1}{4}$.

Regola Retta

Ha quivi anche problemi simili al cronologico, qual è il seguente: « trovare un numero che diviso per 2 lasci 1., per 3 lasci 2., per 4 la» sci 3, così via via, ed infine sia interamente divisibile per 11 ». Descrivi le frazioni $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}$, e trova il minimo numero commensurato da tutti i denominatori $= 2\times3\times4\times5\times7\times3 = 2520$ e sarà $2520 - 1 = 2519$ il numero ricercato.

Il numero 301 si può dividere da 2 sino a 6, lasciando sempre 1, ed è divisibile per 7; ed aggiugnendo a 301 il 7430, divisibile per tutti i numeri da 2 a 6, si avrà lo stesso: e similmente $301 + n\times430$. Il numero 25201 sarà divisibile per tutti i numeri da 2 sino a 10, lasciando costantemente 1, e perfettamente divisibile per 11. Similmente 698377681, diviso per tutti i numeri da 2 sino a 22, lascierà costantemente 1; e diviso per 23, lascierà 0; ed il numero 4655851199, diviso per qualunque numero minore di 23, lascia sempre un numero di 1 minore del numero per cui si divide, e si trova il 4655851199 pel numero minimo commensurato dai numeri 2 sino a $22-1$.

Soggiugne la regola di trovare i *numeri perfetti*, quelli cioè che sono uguali alla somma dei loro procedenti interi, come: $6 = \frac{1}{2}6 + \frac{1}{3}6 + \frac{1}{6}6 = 3 + 2 + 1$. Si formi la progressione $1.\ 2.\ 4.\ 8 \ldots 2.^n$, incominciato n da 0, e tutti i numeri 2^n-1, che riusciranno *primi*, moltiplicati in $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$ saranno *numeri perfetti*.

De hominibus denarios habentibus. Fa vedere esservi delle quistioni solubili e delle insolubili. Insolubile si è la seguente. Il primo ed il secondo hanno danari 27; il secondo e terzo 31; il terzo ed il quarto 34; il quarto e primo 37. Ella è insolubile, perchè 1° e 2° + 3° e 4° non è = 2° e 3° + 4° e 1°, e sarà solubile se si dirà che il 4° e 1° hanno 3°, poichè proverrà 1° e 2°+3°, e 4° =37 + 34 = 2°, e 3° + 4° e 1° = 31 + 30. La quistione poi è indeterminata ed al primo puoi dare che danari vuoi dei 27 che ha col secondo.

De quatuor pesonibus quorum pondus erat 40 librarum. Vuol dire di quattro pesi coi quali si poteva pesare da 1 sino 40 libre. Il primo peso $= 1$, il secondo $= 1 \times 2 + 1 = 3$, il terzo $= 2(1+3)+1=3 \times 3=9$, il quarto $= 2(1 + 3 + 9) + 1 = 27$.

Del pagare per trenta giorni ad un operaio una marca di argento con cinque sole monete. Progresso delle monete una marca di argento, 2, 4, 8, 15.

Regula notabilis de 5 numeris integris reperiendis. $1°+2°+3° = 4° + \frac{4°}{2}$; $1°+3°+4°=2 \times 5°+\frac{5°}{4}$; $1+4°+5°=3 \times 2° + \frac{2°}{5}$; $1°+2°+5°=4\times 3° + \frac{3°}{6}$. Dall'equazione $1°+2°+3° = 4° + \frac{4°}{2}$ si ha $4° = \frac{2}{3}(1° + 2° + 3°)$: e similmente dalle altre equazioni risulta $5° = \frac{9}{4}$

$(1^\circ + 3^\circ + 4^\circ)$; $2^\circ = \frac{5}{16}(1^\circ + 4^\circ + 5^\circ)$; $3^\circ = \frac{6}{25}(1^\circ + 5^\circ + 1^\circ)$. Si scriva $\frac{2\ \ 4\ \ 5\ \ 6}{3\ \ 9\ \ 16\ \ 25}$ e si faccia l'operazione che segue: $\Big(\big((3 + 2)\,4 + 3 \times 9\big)\,5 + 3 \times 9 \times 16\Big)\,6 = 40023 \times 16 \times 4 \times 6 = 1152\,(4 \times 16 + 5 \times 9)\,2 \times 6 = 1308$ $4002 + 1152 + 1308 = 6462$: aggiugnendo $2 \times 4 \times 5 \times 6 = 240$ al 1308 si avrà 1548. Moltiplica $3 \times 9 \times 16 \times 25$ risulterà 10800. Moltiplica ancora $3 \times 4 \times 5 \times 6 = 360$. Ora $1152 + 1308 + 240 + 360 = 3060$, e $10800 - 3060 = 7740$: si hanno dunque i tre numeri 6462, 1548, 7740 divisibili per 18, e $\frac{6462}{18} = 359$, $\frac{1548}{18} = 86$, $\frac{7740}{18} = 430$

$86 \times 25 = 2150$, $430 \times 6 = 2580$, $2580 - 2150 = 430$, $430 \times 9 \times 3 = 11610$; $2580 \times 4 \times 2 = 20640$, $11610 + 20640 = 32250$, $86 \times 6 \times 4 \times 5 = 10320$; $32250 + 10320 = 42570$, e sarà il primo numero. Indi moltiplica $359 \times 25 = 8975$ e sottrai, $430 \times 6 = 2580$, rimane 6395; che moltiplica per 9, sarà 57555; dal quale sottrai $2580 \times 4 = 10320$, rimane 47235 che moltiplica per 3 ed avrai 141705; dal quale sottrai $10320 \times 2 = 20640$, rimane 121065; dal quale sottrai la moltiplica $359 \times 6 \times 4 \times 5 = 43080$ rimane 77985. Ma per avere esso ed il primo numero 42570 in minori numeri, divideli per 9 ed avrai $\frac{42570}{9} = 4730$, $\frac{77985}{9} = 8665$: il terzo numero $= \frac{4730 \times 359 + 8665 \times 86}{43} = 5682$: il quarto $= \frac{2}{3}(4730 + 8665 + 5682) = 12718$; il quale aggiunto col terzo e col primo, e tolti $\frac{4}{9}$ della somma, avrai pel quinto 10280.

Incipit pars octava duodecimi capituli de quibusdam divinationibus.

Incipit pars nona duodecimi capituli de duplicatione schacherii et quarundam aliarum similium.

Osserva che la duplicazione dello scacchiere si propone in due maniere: 1ª che il punto conseguente sia doppio dell'antecedente; 2ª che sia doppio della somma di tutti gli antecedenti. Osserva inoltre che nella serie 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256 ... il $16 - 1 = 1 + 2 + 4 + 8$, ed il $256 - 1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128$. Ma $16 = 4^2$, $256 = 16^2 = 2^8$, essendo 8 il numero de'termini; dunque in generale io dico 2^n: intendendo per n il numero dei termini $= 2\,s^{(n)} + 1$, intendendo per $s^{(n)}$ la somma del numero dei termini; e quindi $256^2 = 2^{8 \times 2} = 2^{16} = 65536 = 2\,s^{(16)} + 1$, e $65536^2 = 2s^{64} = 2^{8 \times 4} = 2^{32} = 4294967296 = 2\,s^{(32)} + 1$, e $4294967296^2 = 2^{32 \times 2} = 2^{64} =$ 18446744073709551616 (*) $+ 1$ della scacchiera intiera. Moltiplicando questo numero in se stesso si otterrà la duplicazione sopra due scacchiere, e cosi via via, la qual sarà 340 282 366 920 938 463 463 374 607 431

(*) Qui sta 0 ma nel foglio seguente in luogo di 0 è posto 6.

768 211 456. Leonardo così realizza in certo modo il problema: 65536 monete fanno un'arca, 65536 arche riempiono una casa, 65536 case formano una città, e 65536 città formano la scacchiera.

Ma realmente la uguaglianza $2^n = 2.s^{(n)} + 1$ nulla ha a che fare colla duplicazione semplice dello scacchiere la sola formola 2^n essendo la progressione delle potenze di 2, dà $n=0$.

L'altra duplicazione procede così: 1. 2. 6. 18. 54. . Vedi la spiegazione della regola nell'estratto di fra Luca.

Soggiugne: regole de'baratti dalle quali si possono estrarre cognizioni di commercio; le quali regole però sembrano dell' antico possessore del codice.

Propone la quistione di uno che passando per 12 città, dando in ciascheduna la decima parte dei suoi bisanzi, $\frac{9}{10}$ gli restava per ciascuna città; onde il residuo ultimo si fu 100 $\cdot\frac{9\quad 9\quad 9\quad 9\quad 9\quad 9\quad 9}{10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10}$ $\frac{9\quad 9\quad 9\quad 9\quad 9}{10\ 10\ 10\ 10\ 10}$, frazione in circolo. A rilevare il valore, opera come segue: $\frac{9\times 9\times 9\times 9\times 9\times 9\times 9\times 9\times 9\times 9\times 9\times 9\times 100}{10\times 10\times 10\times 10\times 10\times 10\times 10\times 10\times 10\times 10\times 10\times 10}$ $=\frac{28243953648100}{1000000000000} = 28\,\frac{243953348}{10000000000}$. Riflette essere a questa simile la questione di una botte dalla quale per un anno si cavasse ogni mese la decima parte del residuo.

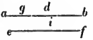
Incipit capitulum decimum tertium de regula alcataym qualiter per ipsam fere omnes questiones abbaci solvuntur.

Dice che *Elcataym* o *Elchataym* significa la regola di due false posizioni, per le quali si trova lo scioglimento di *quasi tutte* (*fere omnes* non dunque tutte come si è di sopra notato) le quistioni: tra le quali una si è quella per la quale nella 3ª parte del XII capitolo ha insegnato le regole degli alberi e di simili quistioni, nelle quali *totum Elchataym scilicet duas positiones ponere non oportet, cum per unam earum ipse questiones solvi possint; tamen qualiter ipse et multe alie questiones per Elcataym solvi debeant volumus demonstrare.*

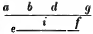
Principia dal trovare la verità *secundum proportionem differentie unius positionis ad aliam, hoc est quando cadit in regula quarte proportionis in qua tres numeri sunt noti, per quas quartus (aut tertius) ignotus scilicet solutionis veritas reperitur, quorum primus numerus est differentia numeri unius false positionis ad aliam, secundus est appropinquatio que fit veritati per ipsam differentiam, tertius qui est quartus in ordine proportionum, et ultimus est residuum quod est adpropinquandum veritati.*

Esempio. Il cantaro o sia rotoli 100 vagliono lire 13. Quanto vale un rotolo? Si ponga che vaglia 1 soldo, e rotoli 100 varranno lire 5: onde la distanza dalla verità sarà $13 - 5 = 8$. Si ponga che vaglia soldi 2, ed i rotoli 100 varranno lire 10: onde la distanza dalla verità sarà di lire 13 — 10 = 3. Or la differenza delle due posizioni si è soldi 2 — 1 = 12 danari. La vicinanza alla verità per tale differenza si è 8 — 3 = 5; il residuo per cui resta di avvicinarsi alla verità, o a toccarla, si è 3: si dica $5 : 12 :: 3 : \frac{12 \times 3}{5} = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}$: e questo è quanto si deve aggiugnere alli soldi 2 della seconda posizione falsa. Similmente si operi nei casi in cui le due posizioni portassero oltre la verità od una portasse oltre, l'altra di qua.

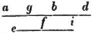
Passa a dare la regola ordinaria delle due false posizioni la quale chiamando F, f le due false posizioni E, e i due errori, si riduce $\frac{F.e \pm f.E}{E \pm e}$, adoperando il segno + quando gli errori sono uno per eccesso l'altro per difetto, ed il segno — quando sono entrambi per eccesso, o per difetto.



E procede a dare di ambe le regole una dimostrazione geometrica. Sia ab l'ignoto numero, cioè la vera soluzione della quistione che *solvi possit per Elcataym*: dal quale numero si prenda ag, numero noto per prima posizione, il quale porti il difetto ef: si prenda a seconda posizione il noto ad, il quale porti il difetto if, e saranno numeri noti ef, if, e la loro differenza ei: similmente sarà noto $gd = ad - ag$, ma resterà ignoto db. Essendo per tanto necessario, se *la quistione sia per Elcataym solubile*, che sia $ei : if :: gd : db = \frac{if \times gd}{ei}$, e per ciò nel primo modo abbiamo moltiplicato la differenza delle posizioni gd col secondo difetto if, e diviso il prodotto per la differenza dei difetti, e secondo la seconda regola $\frac{ef \times ad - if \times ag}{ei} = ab$ cercato numero. Poichè $ef \times ad = (ei \times if)\, ad = ei \times ad + if(ag + gd) = ei \times ad + if \times ag + if \times gd$. Ma $if \times gd = ei \times db$; dunque $ef \times ad = ei\,(ad + db) + if \times ag = ei \times ab + if \times ag$; dunque $\frac{ef \times ad - if \times ag}{ei} = \frac{ei \times ab + if \times ag - if \times ag}{ei} = ab$.



Similmente sia ab l'ignoto numero della quistione *que solvi possit per Elcataym*, e siano ag, ad le due posizioni ed i rispettivi errori *addentes* (di eccesso) siano ef, if. Per lo che dovrà essere $ei : if :: dg : bd = \frac{if \times dg}{ei}$ pel primo modo; e pel secondo si dimostra ugualmente $\frac{ef \times ad - if \times ag}{ei} = ab$.



Sia poi ab il numero ignoto per cui si scioglie la quistione *que solvi possit per Elcataym*, e siano le due false posizioni ag, ad ed i due rispettivi errori uno per difetto ef, l'altro per eccesso fi. Dovrà, *si questio solvi potest per Elcataym*, essere $ei : ef :: gd : bg = \frac{ef \times gd}{ei}$ pel primo modo; e pel secondo $\frac{fi \times ag + ad \times ef}{ei}$. Poichè $ef \times ad = ef(ag+gd) = ef \times ag + ef \times gd$; e conseguentemente $ef \times ad + fi \times ag = ef \times ag + fi \times ag + ef \times gd = ei \times ag + ei \times bg = ei(ag+gb) = ei \times ab$. Laonde $\frac{fi \times ag + ad \times ef}{ei} = b$.

Incipit pars prima.

Esempio in cui si cerca tempo. Uno pagando per una casa 50 soldi al mese diede al padrone lire 6 ad usura di 4 danari per lira al mese. Si cerca quanti mesi dovette tenere la casa per uguagliar le partite. In quattro mesi l'affitto $= 10$ lire, l'usura $=$ soldi 8; dunque l'errore $= 200 - 120 - 8 = 72$ soldi: in 3 mesi l'affitto $= 7\frac{1}{2}$ lire, quello che doveva ricevere $=$ lire 6 + soldi 6. Errore $= 150 - 120 - 6 = 24$. Per la differenza di un mese si è accostato alla verità di $48 = 72 - 24$. Si moltiplichi 1×24, e si divida per 48 e sarà $\frac{1 \times 24}{48} = \frac{1}{2}$ mese da aggiugnere ai due, numero cercato.

Incipit pars secunda de solutione quarumdam questionum per Elcataym que per proprias regulas in hoc libro demonstrate non fuerunt.

Regola della cosa per cui *promptius solvitur questio.*

La prima questione di due uomini il primo de'quali, ricevuto dal secondo $\frac{1}{3}$ dei danari di lui, ha 14; ed il secondo, avuto $\frac{1}{4}$ dei danari del primo, viene ad aver 17, è anche trattata colla regola della cosa nella seguente maniera. Posto che il secondo abbia cosa $= x$, il primo avrà $14 - \frac{1}{3}x$; della qual somma il secondo, avuto $\frac{1}{4}$, cioè $\frac{1}{4}\left(14 - \frac{1}{3}x\right) = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{12}x$ ha 17; dunque $2\frac{1}{2} - \frac{1}{12}x = 17$. E se si tratti di tre uomini il primo de' quali con $\frac{1}{3}$ degli altri ha 14; il secondo con $\frac{1}{4}$ degli altri ha 17; il terzo con $\frac{1}{5}$ degli altri ha 19: poni che il secondo ed il terzo abbiano x; dunque il primo ha $14 - \frac{1}{3}x$, e poni che il terzo abbia $\frac{1}{n}x$; dunque il secondo ha $x - \frac{1}{n}x$, ed $x - \frac{1}{n}x + \frac{1}{4}\left(14 - \frac{1}{3}x\right) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n}x = x - \frac{1}{n}x + 3\frac{1}{2} - \frac{1}{12}x + \frac{1}{4n}x = \frac{11}{12}x - \frac{3}{4n}x + 3\frac{1}{2} = 17$, $\frac{11}{12}x - \frac{3}{4n}x = 13\frac{1}{2}$. Di più $\frac{1}{n}x + \frac{1}{5}\left(14 - \frac{1}{3}x\right) + \frac{1}{5}\left(x \; \frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{n}x + 2\frac{4}{5} - \frac{1}{15}x + \frac{1}{5}x - \frac{1}{5n}x = 19 \; \frac{2}{15}x + \frac{4}{5n}x = 16\frac{1}{5}$. Dunque $\frac{5}{6}\left(\frac{2}{15}x + \frac{4}{5n}x\right)$

$= \frac{5}{6} \cdot 16\frac{1}{2} = 13\frac{1}{2}$; e quindi $\frac{10}{6.\ 15}x + \frac{4.\ 5}{6.\ 5.\ n}x = \frac{11}{12}x - \frac{3}{4n}x$, $\frac{1}{9}x + \frac{2}{3n}x = \frac{11}{12}x - \frac{3}{4n}x$, $\left(\frac{3}{4n} + \frac{2}{3}n\right)x = \left(\frac{11}{12} - \frac{1}{9}\right)x$, cioè $\frac{17}{12n}x = \frac{29}{36}x$; ovvero $\frac{51}{36n} = \frac{29}{36}$, $\frac{51}{n} = 29\ \frac{51}{29} = n$. Onde il secondo $= x - \frac{1}{n}x = x - \frac{29}{51}x = \frac{51-29}{51}x = \frac{22}{51}$; x il terzo $\frac{29}{51}x$: e poichè $\frac{11}{12}x - \frac{3}{4n}x = 13\frac{1}{2}$, si avrà $\frac{11}{12}x - \frac{3.\ 29}{4.\ 51}x = 13\frac{1}{2}$, vale a dire $\frac{11 \times 51 - 9 \times 29}{3\ .\ 4.\ 51}x = \frac{565-261}{12\ .\ 51}x = \frac{300}{12.\ 51}x = \frac{100}{4.\ 51}x = \frac{25}{51}x = 13\frac{1}{2}$. Onde $x = \frac{51}{25} \times 13\frac{1}{2} = \frac{688\frac{1}{2}}{25} = 27\frac{27}{50}$. E finalmente il secondo $= \frac{22}{25} \times 13\frac{1}{2}$; il terzo $= \frac{29}{25} \times 13\frac{1}{2}$; ed il primo $14 - \frac{17}{25} \times 13\frac{1}{2}$: cioè il secondo $= \frac{11 \times 27}{25}$, il terzo $= \frac{29 \times 27}{50}$, il primo $= 14 - \frac{17 \times 27}{50}$, vale a dire il secondo $11\frac{22}{25}$, il terzo $15\frac{33}{50}$, il primo $4\frac{41}{50}$.

Leonardo chiama $\frac{1}{n}x$ *partem rei*; poichè, avendo il secondo ed il terzo *rem*, il terzo non ha che *partem rei*.

Problema di complicazione di varii Elcataym.

Scioglie anche la quistione seguente tra cinque uomini. Il primo, ricevuto $\frac{1}{3}$ del secondo, e terzo, e quarto, ha 14; il secondo, ricevuto $\frac{1}{4}$ del terzo, e quarto, e quinto, ha 17; il terzo, ricevuto $\frac{1}{5}$ del quarto, e quinto, e primo, ha 19; il quarto, ricevuto $\frac{1}{6}$ del quinto, e primo, e secondo, ha 21; il quinto, ricevuto $\frac{1}{7}$ del primo, e secondo, e terzo, ha 23. Ed ecco la soluzione. Poni i denari del primo $=8$; avranno dunque il secondo, e terzo, e quarto $=3(14-8)=18$, che per Elcataym bisogna dividere fra i tre. Poni che il secondo abbia $=6$; rimarranno al terzo e quarto 12, che per Elcataym bisogna di nuovo dividere fra i due. Si chiami la posizione del primo uomo 1ª del 1° Elcataym, la posizione del secondo 1ª del 2° Elcataym. Dipoi, per aver posto al secondo uomo 6, devesi fra il terzo, e quarto, e quinto uomo, porre $4(17-6)=4\times11=44$; de'quali avendo il terzo, e quarto 12, il quinto avrà 32. Poscia pel terzo Elcataym dividi 12 fra il terzo, e quarto uomo in modo, che il terzo colla ricevuta dal quarto, e quinto, e primo abbia 19; il che si può fare per due vie. Primieramente ponendo che il terzo abbia una certa quantità dei 12, e provandola per l' Elcataym, secondo che di sopra molte volte si è dimostrato. Od in altra maniera: aggiugni 44, avere del terzo, e quarto, e quinto, cogli 8 del primo, ed avrai 52 dei quali bisogna dare al terzo tanto che, ricevuto $\frac{1}{5}$ del residuo, venga ad avere 19. Poni che il terzo abbia 2; dunque $2 + \frac{1}{5} 50 = 2 + 10 = 12 = 19$, con errore in difetto di 7. Poni per seconda posizione del 3° Elcataym che il terzo abbia 7: onde $7 + \frac{1}{5} 45 = 7 + 9 = 16 = 19$, con errore in difetto di 3. L'avvicinamento alla verità della prima alla seconda posizione di questo 3° Elcataym è 4; la differenza delle posizioni è 5, il secondo errore è 3; dunque $\frac{3 \times 5}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$ è ciò che si deve aggiugnere alla 2ª posizione 7, con che si avrà $10\frac{3}{4}$ per l'avere del terzo uomo. Od in altra maniera: perchè il terzo uomo, ricevuto il $\frac{1}{5}$ del quarto, e quinto, e primo, ha 19; e perchè il terzo, e quarto, e quinto, e primo, hanno 52, dunque $3^\circ + \frac{1}{5} 4^\circ 5^\circ 1^\circ = 19$ e $3^\circ 4^\circ 5^\circ 1^\circ = 52$: onde sottraendo la prima equazione dalla seconda $\frac{4}{5} 4^\circ 5^\circ 1^\circ = 33$, ovvero $\frac{1}{5} 4^\circ 5^\circ 1^\circ = \frac{33}{4} = 8\frac{1}{4}$; per lo che $3^\circ + 8\frac{1}{4} = 19$, e $3^\circ = 10\frac{3}{4}$ come per Elcataym si è trovato. Ma $3^\circ, 4^\circ = 12$: dunque $4^\circ = 1\frac{1}{4}$, $5^\circ = 44 - 12 = 32$. Ai danari $1\frac{1}{4}$ del quarto aggiugni $\frac{1}{6} (5^\circ 1^\circ 2^\circ) = \frac{1}{6} (32 + 8 + 6) = 7\frac{2}{3}$ ed avrai $8\frac{11}{12}$, che dovrebbe essere 21; dunque per la prima posizione del secondo Elcataym vi ha errore in difetto di $12\frac{1}{12}$. Laonde poni per seconda posizione del secondo Elcataym che il secondo abbia 5 dei sopraddetti 18 che egli ha col terzo e quarto, e così rimarrà al terzo e quarto 13, che col quinto devono avere $4(17 - 5) = 48$; dunque il quinto avrà 35. Dipoi dividerai il 13 fra il terzo e quarto così che il terzo colla sua petizione abbia 19, il che farai per un quarto Elcataym, e per l'altro modo che è più bello, e ritroverai che di essi 13 il terzo ha $9\frac{3}{4}$, il 4° $3\frac{1}{4}$, a cui aggiunto $8 = \frac{1}{6} (5^\circ 1^\circ 2^\circ) = \frac{1}{6} (35 + 8 + 5)$, si avrà $11\frac{1}{4}$, che dovrebbero essere 21; laonde si ha dalla seconda posizione del secondo Elcataym un errore in difetto di $9\frac{3}{4}$, laddove nella prima posizione si aveva un errore in difetto di $12\frac{1}{12}$; dunque l'1 di differenza nelle posizioni ha portato l'avvicinamento alla verità di $2\frac{1}{3}$: onde $\frac{1\times 9\frac{3}{4}}{2\frac{1}{3}}=\frac{117}{28}=4\frac{5}{28}$, che sottratto da 5, dà $\frac{23}{28}$, e tanto ha il secondo, avendo il primo 8. Di poi per un quarto Elcataym, o per l'altro sopra usato modo ritrova le quantità del terzo, del quarto, del quinto, e vedrai che risulta pel terzo $5\frac{4}{7}$, pel quarto $47\frac{15}{28}$, ai quali aggiugni $\frac{1}{7}$ (1° 2° 3°) $=\frac{1}{7}\left(8+\frac{23}{28}+5\frac{4}{7}\right)$ $=2\frac{11}{196}$, e si avrà $49\frac{29}{49}$, che dovrebbero essere 23: dunque nella prima posizione dell'Elcataym si ha un errore di eccesso di $26\frac{29}{49}$. Laonde poni a seconda posizione del primo Elcataym che il primo abbia 7, e così il secondo e terzo e quarto avranno 21, che studierai di dividere per Elcataym di modo che ciascheduno colla sua petizione ottenga il suo proposto numero, cioè il secondo 17, il terzo 19, il quarto 21: e troverai che il secondo di essi 21 avrà $1\frac{5}{7}$; il terzo $6\frac{5}{7}$; il quarto $12\frac{4}{7}$: dal che troverai che il quinto avrà $41\frac{6}{7}$. Al che aggiugnendo $\frac{1}{7}$ (1° 2° 3°) $=\frac{1}{7}\left(7+1\frac{5}{7}+6\frac{5}{7}\right)=2\frac{10}{49}$ si avrà $44\frac{3}{49}$, che dovrebbero essere 23; laonde si ha un errore in eccesso di $21\frac{3}{49}$ per la seconda posizione del primo Elcataym, laddove per la prima si ebbe un eccesso di $26\frac{29}{49}$; il perchè per 1 di differenza tra le posizioni si ha avuto l'avvicinamento alla verità di $5\frac{26}{49}$, e resta di avvicinarsi $21\frac{3}{49}$; dunque $\frac{1\times 21\frac{3}{49}}{5\frac{26}{49}}$ $=3\frac{219}{271}$ e sottratta da 7 dà $3\frac{52}{271}$, e tanto ha il primo. Ritrovato il qual numero, studia di ritrovare per Elcataym i danari degli altri nel prescritto modo, e troverai che il secondo aveva $5\frac{31}{271}$; il terzo aveva $11\frac{18}{271}$; il quarto $16\frac{60}{271}$; il quinto $17\frac{63}{271}$ *et sic studeas operari in similibus questionibus que omnes per Elcataym mirabiliter solvuntur*. Chiama Leonardo la prima Elcataym *universale*, e le altre *particolari*; e le posizioni della prima *universali*, delle altre *particolari*.

Vi ha tra simili problemi di quelli non solubili che col debito di un uomo. Idea della quantità negativa.

Incipit capitulum 14 de reperiendis radicibus quadratis et cubicis et de multiplicatione et divisione et extractione earum inter se et de tractatu binomiorum et recisorum et earum radicum.

Premette sei proposizioni del 2° di Euclide.

Incipit pars 1ª 14 *capituli.*

Appoggia l'estrazione della radice quadrata sul teorema di Euclide espresso per la formola $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Estrazione della radice quadrata da un numero non quadrato.

Esempio: da 10 si ha $3 + \frac{1}{3 \times 2}$, che supera quadrato il 10 di $\frac{1}{36}$; si divida $\frac{1}{36}$ per il doppio di $3\frac{1}{6}$ ed il procedente $= \frac{1}{228}$ si sottragga da $\frac{1}{36}$ e si avrà un maggior avvicinamento alla verità, poichè si avrà

$$3\frac{1}{6} - \frac{32}{6.\,38} = \frac{19}{6} - \frac{32}{6.\,38} = \frac{2\,19^2 - 32}{6.\,38} = \frac{722 - 32}{6.\,38} = \frac{690}{6..38} = \frac{115}{38} = 3\,\frac{1}{38}.$$

Ma io rifletto che $\left(3\,\frac{1}{8}\right)^2 = 9 + \frac{6}{38} + \frac{1}{38^2}$, che differisce da 10 in eccesso più che in difetto $\left(3\,\frac{1}{6}\right) = 10\,\frac{1}{36}$.

Uso delle decimali. Del resto Leonardo dà per approssimazione alla radice vera l'artificio di moltiplicare il numero non quadrato per un numero quadrato del 10, del 100, del 1000 e poi separarne dalla radice una figura, due, tre, . . . Così ad estrarre la radice da 7234 moltiplicalo per 10000.

Pars secunda de multiplicatione radicum in radicibus et numeris.

Pars tertia de additione et extractione radicum inter se et reliquorum duorum simplicium numerorum.

Si ha la considerazione delle radici comunicanti.

Pars 4ª de divisione radicum et simplicium numerorum inter se.

Incipit pars ... (sic) *de divisione binomiorum et recisorum per numeros ratiocinatos et inratiocinatos et contra.*

Vi ha l'artificio di togliere dal divisore $\sqrt{c} \pm \sqrt{d}$ la irrazionalità moltiplicando per $\sqrt{c} \mp \sqrt{d}$; e di toglierla da $\sqrt[4]{c} \pm \sqrt[4]{d}$ moltiplicando per $\sqrt[4]{c} \mp \sqrt[4]{d}$, e poi ciò che proviene, secondo la regola delle radici quadrate.

Ha ancora, nel problema di trovare due radici di radici di numero non quadrato che contengano il dato numero, l'uso delle lettere a significare i numeri, ed ecco come. Sia il numero dato a, ed il suo quadrato $= b$, e $b^2 = g$: onde $a = \sqrt{\sqrt{g}}$ sia un altro numero non quadrato d e sia $\frac{g}{d} = e$ sarà $g = d \times e$; dunque $\sqrt{\sqrt{g}} = \sqrt{\sqrt{d}} \times \sqrt{\sqrt{e}} = a$.

Nella parte seconda dimostra la regola seconda delle da me citate alla pag. 222 dell'Algebra e la regola terza. Di più $\sqrt{\sqrt{a}} \times \sqrt{\sqrt{b}} = \sqrt{\sqrt{ab}}$, parimenti $\sqrt{\sqrt{a}} \times \sqrt{b} = \sqrt{\sqrt{ab^2}}$.

Nella terza parte premette la dimostrazione del teorema 43 di Euclide posto sotto il n.° 1 da me alla pag. 260 della storia dell' Algebra. Indi distingue riguardo all'addizione o sottrazione di radici il caso di radici comunicanti, ed il caso delle non comunicanti, e quanto alle prime dà la regola della pag. 224, e la dà anche riguardo alle seconde, ma dà pure la regola di segnarle con $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$. Dà pure la regola $4 + \sqrt{\sqrt{10}} = \sqrt{16 + \sqrt{10} + 8\sqrt{\sqrt{10}}} = \sqrt{16 + \sqrt{10} + \sqrt{\sqrt{4096}}}$: generalmente $\sqrt{a} \pm \sqrt{\sqrt{b}} = \sqrt{a + \sqrt{b} \pm 2\sqrt{a} \times \sqrt{\sqrt{b}} = a + \sqrt{b} \pm 2\sqrt{\sqrt{a^2 b}}}$. Parimenti $\sqrt{\sqrt{a}} \pm \sqrt{\sqrt{b}} = \sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b} \pm 2\sqrt{\sqrt{ab}}}$; e dimostra che quando i numeri sono mediali, incommensurabili in potenza, allora $\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b} + 2\sqrt{\sqrt{ab}}}$ è una radice di tre nomi: e quando il composto dei due numeri fa un mediale primo proviene un binomio secondo, e quando il composto loro fa il bimediale secondo, allora il loro quadrato è un binomio terzo, e dai recisi provengono quadrati degli stessi nomi.

Nella parte quarta ha le regole 2ª e 3ª della pag. 223 estese ad $n, m = 4$ e le regole $\sqrt{(a + \sqrt{b})} \times \sqrt{(c + \sqrt{d})} = \sqrt{(ac + a\sqrt{d} + c\sqrt{b} + \sqrt{bd})}$, e così $\sqrt{(a - \sqrt{b})} \times \sqrt{(c + \sqrt{d})} = \sqrt{(ac + a\sqrt{d} - c\sqrt{b} - \sqrt{bd})}$, e similmente $\sqrt{(a - \sqrt{b})} \times \sqrt{(c - \sqrt{d})} = \sqrt{(ac - a\sqrt{d} - c\sqrt{b} + \sqrt{bd})}$. Nella stessa guisa la regola $(a - \sqrt{\sqrt{b}}) \times (c - \sqrt{\sqrt{d}}) = ac + \sqrt{\sqrt{bd}} - a\sqrt{\sqrt{d}} - c\sqrt{\sqrt{b}}$, e $(\sqrt{a} - \sqrt{\sqrt{b}}) \times (\sqrt{c} - \sqrt{\sqrt{d}}) = \sqrt{ac} + \sqrt{\sqrt{bd}} - \sqrt{a} \times \sqrt{\sqrt{d}} - \sqrt{c} \times \sqrt{\sqrt{b}}$. Parimenti $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \times \sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$, e $(\sqrt{a} + \sqrt{\sqrt{b}}) \times \sqrt{a} - \sqrt{\sqrt{b}} = a - \sqrt{b}$.

Nella parte quinta $\frac{a + \sqrt{b}}{c} = \frac{a}{c} + \frac{\sqrt{b}}{c} = \frac{a}{c} + \frac{\sqrt{b}}{c^2}$, $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{c} = \frac{\sqrt{a}}{c^2} + \frac{\sqrt{b}}{c^2}$; $\frac{a}{c \pm \sqrt{d}} = \frac{a \times (c \mp \sqrt{d})}{(c \pm \sqrt{d})(c \mp \sqrt{d})}$, intendendo per a anche $\sqrt{a}$, e $\sqrt{\sqrt{a}}$, e per c anche $\sqrt{c}$, $\sqrt{\sqrt{c}}$, per $\sqrt{d}$ anche $\sqrt{\sqrt{d}}$. Similmente

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b} + \sqrt{c} \pm \sqrt{d}} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{b} + \sqrt{c} \mp \sqrt{d})}{(\sqrt{b} + \sqrt{c} \pm \sqrt{d})(\sqrt{b} + \sqrt{c} \mp \sqrt{d})};\ \text{e}\ \frac{\sqrt{\sqrt{a}}}{\sqrt{\sqrt{b}} + \sqrt{c} - \sqrt{d}} = \frac{\sqrt{\sqrt{a}} \times (\sqrt{\sqrt{b}} + \sqrt{c} + \sqrt{d})}{(\sqrt{\sqrt{b}} + \sqrt{c} - \sqrt{d})(\sqrt{\sqrt{b}} + \sqrt{c} + \sqrt{d})}.$$

Ha inoltre l' estrazione della radice del secondo binomio secondo la formola della mia pag. 241, tomo 1° storia dell'Algebra, nell' esempio $\sqrt{448} + 14$; in cui $M = \sqrt{448}$, $m = 14$, $\frac{1}{2} M = \sqrt{112}$, $M^2 - m^2 = 252$, $\frac{1}{2} \sqrt{(M^2 - m^2)} = \frac{\sqrt{M^2 - m^2}}{4} = \sqrt{\frac{252}{4}} = \sqrt{63}$, onde $\frac{1}{2} M + \frac{1}{2} \sqrt{(M^2 - m^2)} = \sqrt{112} + \sqrt{63}$, $\sqrt{(\sqrt{112} + \sqrt{63})} = \sqrt{\sqrt{(\sqrt{112} + \sqrt{63})^2}} = \sqrt{\sqrt{(112 + 63 + 2\sqrt{112 \times 63})}} = \sqrt{\sqrt{(112 + 63 + 2\sqrt{7.16 \times 7.9}}} = \sqrt{\sqrt{(112 + 63 + 14.4.9}} = \sqrt{\sqrt{343}}$, e $\sqrt{(\sqrt{112} - \sqrt{63})} = \sqrt{\sqrt{(\sqrt{112} - \sqrt{63})^2}} = \sqrt{\sqrt{(112 + 63 - 14.\ 4.\ 9}} = \sqrt{\sqrt{(175 - 168)}} = \sqrt{\sqrt{7}}$; dunque $\sqrt{(\sqrt{448} + 14)}\ \sqrt{\sqrt{343}} + \sqrt{\sqrt{7}}$.

Incipit pars quinta de inventione radicum cubicarum et de addictione et multiplicatione et extractione et divisione earundem.

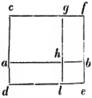
Definisce il cubo *qui surgit ex multiplicatione trium equalium numerorum vel ex aliquo quadrato numero in suam radicem*, quindi passa a definire la radice cuba che dell' 8 è 2, del 27 è 3, etc. La radice cuba *sorda* è quella di un numero che non è cubo. Procede alla bella verità: *cum itaque linea divisa in duas partes fuerit erunt cubi ipsarum portionum cum triplo multiplicationis quadrati uniuscujusque sectionis in aliam equales cubo totius linee*; e dimostrata in numeri tal verità, soggiugne: *et super hanc deffinitionem cum diutius cogitarem inveni hunc modum reperiendi radices.* Di poi, dati i cubi da 1 sino a 10, riflette che la radice cubica di una, due, tre figure è di una figura; di quattro, di cinque, di sei figure la radice cubica è di due figure, di sette, di otto, di nove figure la radice cubica è di tre figure, e così via via, crescendo una, due, tre figure, si accresce di una la radice cubica. Progredisce ad assegnare la differenza tra il cubo di un numero ed il cubo del suo seguente; e sia il numero n il suo cubo, n^3 il cubo di $(n+1) = n^3 + n(n+1)3 + 1$. Quindi si fa a trovar le radici cubiche, e ad esempio primo propone di trovare la radice cubica di 47. Primieramente osserva che il numero cubico più prossimo è 27, la cui radice cubica è 3, e sopravanza 20; osserva in secondo che il cubo di 4 sopravanza il cubo di 3 di $3 \times 4 \times 3 + 1 = 37$, di cui 20 è più che la metà: prende ciò non ostante la sola metà, onde ha $3\frac{1}{2}$; di cui facendo il cubo secondo la regola $3^3 + 3.\ 3^2.\frac{1}{2} + 3.\ 3.\ \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 27 + 13\frac{1}{2} + \frac{9}{4} + \frac{1}{8} = 42\frac{7}{8}$, che manca (si uniscano i cubi e così li trovo) da 47 di $4\frac{1}{8}$, il che è quasi $\frac{1}{10}$ di 42; aggiungi dunque a $3\frac{1}{2}$ l' $\frac{1}{10}$, ed avrai $\left(3 + \frac{3}{5}\right)^3 = 27 + 3.\ 3^2.\frac{3}{5} + 3.\ 3\ \frac{9}{25} + \frac{27}{125} = 27 + \frac{81}{5} + \frac{81}{25} + \frac{27}{125} = 27 + 16\ \frac{1}{5} + 3\ \frac{6}{25} + \frac{27}{125} = 46 + \frac{82}{125}$, e si può proseguire ad accostarsi al 47.

Estraendo la radice da 2345, e da 56789, e da 456789, insegna a dividere le tre figure a destra, e prender la radice cubica delle figure che restano a sinistra, poi ad applicare la formola $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, cominciando dal secondo termine; e lo stesso fa ad estrarre la radice cubica da 9876543, e l'approssimazione sempre pel principio $(n+1) = n^3 + n(n+1)3 + 1$.

Incipit de multiplicatione radicum cubicarum inter se.

$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$; $d \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3b}$; $a\sqrt[3]{c} \times b\sqrt[3]{d} = \sqrt[3]{a^3cb^3d}$. A ritrovare due radici cubiche, le quali moltiplicate insieme facciano cubo; scegli un numero cubo il quale abbia fattori non cubici, e saranno le radici cubiche cercate. In altro modo siano a^2, b^2, e si prendano a^2b, b^2a, e sarà $\sqrt[3]{a^2b} \times \sqrt[3]{b^2a^2} = \sqrt[3]{a^3b^3} = ab$ $\dfrac{a}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\dfrac{a^3}{b}}$ $\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$.

Incipit de divisione radicum cubicarum inter se.



Premette l'addizione ed estrazione sotto la formola $\sqrt[3]{a^3b} \pm \sqrt[3]{c^3b} (a \pm c)\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{(a^3b \pm c^3b \pm 3\sqrt[3]{a^6b^2}\ \sqrt[3]{c^3b} + 3\sqrt[3]{a^3b}\ \sqrt[3]{c^6b^2})}$. Pel caso del segno $-$ dice: *quandam diffinitionem linee divise huic operi necessariam inveni*, ed è *ut cum aliqua linea ut libet divisa in duo, fuerit cubus totius linee, cum numero solido qui fit a quadrato unius fractionis, et a tota linea, equalis duplo numeri solidi qui fit a quadrato totius linee, et ab eadem fractione, et solido qui fit a quadrato relique fractionis, et a tota linea.*

Esempio. $(3+2)^3 + 2^2(3+2) = 2(3+2)^2 . 2 + 3^3(3+2)$; cioè $125 + 4 \times 5 = 2 \times 25 \times 2 + 9 \times 5$; cioè $145 = 145$: ed in geometria se sia la linea intera de, e le sue parti dl, le sarà $de^3 + le^2 \times de = 2de^2 \times le + dl^2 \times de$ il che è evidente. Poichè dividendo tutto per de resta $de^2 + le^2 = 2de \times le + dl^2$; cioè $(dl+le)^2 + le^2 = dl^2 + 2dl \times le + 2le^2 = 2(dl+le)le + dl^2 = 2dl \times le + 2le^2 + dl^2$, più corto in algebra $(a+b)^3 + b^2(a+b) = 2(a+b)^2b + a^2(a+b)$. Onde dividendo per $a+b$ si ha $(a+b)^2 + b^2 = 2(a+b)b + a^2$, e quindi $(a+b)^2 + b^2 - 2(a+b)b = a^2$.

Si tratti per tanto di sottrarre da $\sqrt[3]{c}$ la $\sqrt[3]{d}$; si consideri $\sqrt[3]{c} = a + b$; $\sqrt[3]{d} = b$, e si avrà $\sqrt[3]{c} - \sqrt[3]{d} = a$. Laonde $\sqrt[3]{c^2} + \sqrt[3]{d^2} - 2\sqrt[3]{c} \times \sqrt[3]{d} = a^2$.

Esempio. Sia $\sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{32}$, $\sqrt[3]{d} = \sqrt[3]{4}$ si avrà $\sqrt[3]{c^2} + \sqrt[3]{d^2} - 2\sqrt[3]{c} \times \sqrt[3]{d} = 4\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{16} - 4\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{16} = a^2$: donde $\sqrt[3]{4} = a$, come difatto $\sqrt[3]{32} - \sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{4}$.

Incipit capitulum decimumquintum de regulis geometrie pertinentibus et de questionibus aliebre et almucabale.

Incipit pars 1ª de proportionibus trium aut quatnor quantitatum ad quas multe geometrie pertinentium solutiones rediguntur.

Esempio 1.° Data di tre quantità continuamente proporzionali $a:b::b:c$ la somma delle due prime $a+b$, determinarle. Si ha $a+b:b::b+c:c$; onde $(a+b)c=(b+c)b$, $(a+b)c+\frac{c^2}{4}=(b+c)b+\frac{c^2}{4}=\left(b+\frac{1}{2}c\right)^2$, e quindi $\sqrt{\left((a+b)c+\frac{c^2}{4}\right)}-\frac{1}{2}c=b$.

Esempio 2°. Sia noto $b+c$, sarà $a:(a+b)::b:b+c$, ed $a(b+c)=b(a+b)$, ed $a(b+c)+\frac{a^2}{4}=b(a+b)+\frac{a^2}{4}=\left(b+\frac{1}{2}a\right)^2$, e $\sqrt{\left(a(b+c)+\frac{a^2}{4}\right)}-\frac{1}{2}a\Big)=b$.

Esempio 3°. Sia noto $a+c$, sarà $ac+\left(\frac{a+c}{2}-c\right)^2=\left(\frac{a+c}{2}\right)^2$ e perchè $ac=b^2$ si avrà $b^2+\left(\frac{a+c}{2}-c\right)^2=\left(\frac{a+c}{2}\right)^2$ e quindi $\left(\frac{a+c}{2}-c\right)^2=\left(\frac{a+c}{2}\right)^2-b^2\frac{a+c}{2}-c=\sqrt{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2-b^2}$, ed $\frac{a+c}{2}-\sqrt{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2-b^2}=c$.

Esempio 4°. Sia noto $a+b+c$, e si cerchino i valori separati di a, b, c. Ciò si può fare in infiniti modi, de'quali porrò uno. Si prendano tre numeri continuamente proporzionali 1. 2. 4, che danno per somma 7, per la quale dividi i prodotti di 1, di 2, di 4 in 19.

Esempio 5°. Sieno $a:b:c$ e sia $b-a=2$, $c=9$, starà $c:b::c-b:b-a$; onde $c(b-a)=b(c-b)$, $\frac{c^2}{4}-c(b-a)=20\frac{1}{4}-18=\frac{c^2}{4}-b(c-b)$; onde $2\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}c-b\right)^2$, e $\sqrt{2\frac{1}{4}}=1\frac{1}{2}=\frac{1}{2}c-b$; onde $b=\frac{1}{2}c-1\frac{1}{2}=4\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}=3$.

Alius modus proportionis inter tres numeros.

Esempio: $a:b:c$ sarà $a-b:b-c::a:c$, e concependo $b=x$, sarà $a-x:x-c::a:c$, e così concependo ignoto a, ovvero c. Si avrà nel primo caso $a-b+b-c=a-c$, ed $a-c:b-c::a+c:c$; onde $\frac{(a-c)c}{a+c}=b-c$, ed $\frac{(a-c)c}{a+c}+c=b$.

Modus alius proportionis trium numerorum.

Siano tre numeri disuguali de'quali il secondo ed il terzo siano dati, ed il primo ignoto, x, b, c, e sia $c:x:b-x:c-b$: sarà $c(c-b)$

$= x(b-x)$, $\frac{1}{4}\ b^2 - c(c-b) = \frac{1}{4}\ b^2 - x(b-x) = \frac{1}{4}b^2 - bx + x^2 = \left(\frac{1}{2}b - x\right)^2$

laonde $\sqrt{\left(\frac{1}{4}b^2 - c(c-b)\right)} = \frac{1}{2}b - x$, ed $x = \frac{1}{2}b - \sqrt{\left(\frac{1}{4}b^2 - c(c-b)\right)}$.

Incipit differentia tertia in proportione trium numerorum.

Teorema: se di tre numeri a, b, c sarà $a - b : b - c :: a : b$ saranno continuamente proporzionali; onde se uno di essi sia ignoto, potrai ritrovarlo.

Modus proportionis in tribus numeris.

È data la somma delle due soprabbondanze, ed una di esse — ed è ignoto il secondo numero — ovvero il 1°.

Modus alius proportionis in tribus numeris.

Prova che se sia $a - c : b - c :: a : b$, deve essere $c = 0$; poichè dividendo $a - b : b - c :: a - b : b$.

Modus alius proportionis in tribus numeris.

Se sia $b : c :: a - b : b - c$, e sia ignoto il a ovvero il c, ovvero due dei tre.

Modus alius proportionis trium numerorum.

$b : c :: a - b : b - c$, e sia ignoto uno degli a, b, c.

Modus alius proportionis trium numerorum.

Sia $b : c :: b - c : a - b$, e sia ignoto uno degli a, b, c.

Modus alius proportionis trium numerorum.

Sia $b : c :: a - c : a - b$, e si troverà sempre qualunque sia il numero ignoto che esso è uguale alla soprabbondanza del maggiore degli altri due sopra il minore.

Incipit de proportione quatuor numerorum.

Qui denota i quattro numeri per le quattro lettere a, b, g, d, e supposta ignota la somma di due, insegna a trovarli.

Sia $a : b :: g : d$, e sia nota $a - b$ essendo ignoti a, b; parimenti sia nota $a - g$ essendo ignoti a, g; similmente sia nota $a - d$ essendo ignoti a, d.

Sia nota la somma dei quadrati $a^2 + b^2$ e noti g^2, d^2 ignoti essendo a, b, si avrà $a^2 + b^2 : b^2 :: g^2 + d^2 : d^2$; onde $b^2 = \frac{(g^2 + d^2)d^2}{a^2 + b^2}$. Onde dei quadrati dei numeri proporzionali si verificheranno le cose che si sono dimostrate degli stessi numeri, e parimenti dei loro cubi.

$\left(\frac{x}{12-x}\right)^2+\left(\frac{12-x}{x}\right)^2=4$; sarà $\left(\frac{x}{12-x}\right)^2+\left(\frac{12-x}{x}\right)+2\left(\frac{x}{12-x}\times\frac{12-x}{x}\right)$ $=\left(\frac{x}{12-x}\right)^2+\left(\frac{12-x}{x}\right)^2+2=6$, $\frac{x}{12-x}+\frac{12-x}{x}=\sqrt{6}$. Pel teorema V del II di Euclide che $\left(\frac{1}{2}M+z\right)\left(\frac{1}{2}M-z\right)+z^2=\frac{1}{4}M^2$, d'onde ne viene $z^2=\frac{1}{4}M^2-\left(\frac{1}{2}M+z\right)\left(\frac{1}{2}M-z\right)$, e $z=\sqrt{\left(\frac{1}{4}M^2-\left(\frac{1}{2}M+z\right)\left(\frac{1}{2}M-z\right)\right)}$: dovendo dividere $\sqrt{6}$ in due parti disuguali $\frac{1}{2}M+z=\frac{x}{12-x}$, $\frac{1}{2}M-z=\frac{12-x}{x}$, il cui prodotto sia $=1$, si avrà $z=\sqrt{\left(\frac{6}{4}-1\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}}$; onde $\frac{1}{2}M+z=\sqrt{\frac{6}{4}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{1\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{2}M-z=\sqrt{1\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}$: si ponga ora $\frac{12-x}{x}=\sqrt{1\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}$, $12-x=\left(\sqrt{1\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)x$ etc....

Altra Quistione. Dividere 10 in due parti tali x, $10-x$ tali che $\left(\frac{10-x}{x}\right)^2-\left(\frac{x^2}{10-x}\right)^2=2$: si osservi che $\left(\frac{10-x}{x}\right)^2\times\left(\frac{x}{10-x}\right)^2=1$. Fatto $\left(\frac{x}{10-x}\right)^2=y^2$, $\left(\frac{10-x}{x}\right)=y^2+2$, si avrà $y^2\times(y^2+2)=y^4+zy^2=1$; onde $y^2=-1+\sqrt{2}$, $y^2+z=1+\sqrt{2}=\left(\frac{10-x}{x}\right)^2$; onde $(1+\sqrt{2})x^2=100-20x+x^2$: e quindi $\frac{100}{\sqrt{2}}=x^2+\frac{20}{\sqrt{2}}x$, $x=-\frac{10}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{100}{2}+\frac{100}{\sqrt{2}}}=-\sqrt{\frac{100}{2}}+\sqrt{\left(50+\sqrt{\frac{10000}{2}}\right)}=-\sqrt{50}+\sqrt{\left(50+\sqrt{5000}\right)}$.

Alla maniera nostra dall'equazione $\left(\frac{10-x}{x}\right)^2-\left(\frac{x}{10-x}\right)^2=$(*sic*) (1) ricaveremmo $(10-x)^4-x^4=2x^2(10-x)^2$; e così $10^4-4.10^3x+6.10^2x^2-4.10x^3+x^4-x^4=10^4-4.10^3x+6.10^2.x^2-4.10x^3=2.10.^2x^2-4.10.x^3+2x^4$; onde $10^4-4.10^3x+4-10^2x^2=2x^4$: equazione non derivativa del 2° grado, comprendendo il termine x.

(1) Nell'originale autografo del presente *Estratto del Libro di Leonardo Pisano* nulla trovasi tra «=» (vedi la lin. 17 di questa pagina 60) e « ricaveremmo » (vedi la linea 19 di questa pagina 60). Per indicar ciò è stato posto (*sic*) nella linea decimasettima della presente pagina. Tuttavia è chiaro dovervisi in vece porre 2.

Altra Quistione. Divider 10 in due parti, e la somma quadrata dei procedenti da 10 diviso per ciascheduna delle parti, uguagliarla a 30. Noi facendo (*sic*) [1] $= x + 10 - x$, e quindi $\left(\frac{10}{x} + \frac{10}{10-x}\right)^2 = 30$, avremmo $\frac{10^2}{x^2} + \frac{10^2}{(10-x)^2} + \frac{z10^2}{x(10-x)} = 30$, e $10^2(10^2 - 20x + 2x^2) + 2(10x - x^2) = 30x^2(10-x)^2$, cioè $10^4 = 30(10^2x^2 - 20x^3 + x^4)$; onde l'equazione comprenderebbe l'x^3. Leonardo pone $10 = 5 + x + 5 - x$, e quinci $\left(\frac{10}{5+x} + \frac{10}{5-x}\right)^2 = 30$, e quindi $\frac{10^2}{(5+x)^2} + \frac{10^2}{(5-x)^2} + \frac{2.10^2}{(5+x)(5-x)} = 30$: laonde $10^2\left((50 + 2x^2) + 2(25 - x^2)\right) = 10^4 = 30(25 - x^2)^2 = 30(625 - 50x^2 + x^4)$ sfuggito l' x^3.

Ma si può e la superiore equazione $10^4 = 30x^2(10-x)^2$, e questa $10^4 = 30(25-x^2)^2$ ridurre a dirittura ad equazioni di 2° grado, estraendo la radice; e si avrà $10^2 = x(10-x)\sqrt{30}$; $10^2 = (25-x^2)\sqrt{30}$.

Ha anche nelle quistioni questi tre principii: 1° $\frac{n}{n-x} + \frac{n}{x} = \frac{x}{n-x} + \frac{n-x}{x} + 2$; 2° $\left(\frac{n+m}{n} \times \frac{n+m}{m}\right)nm = (n+m)^2$; 3° $\frac{n}{x} + \frac{n}{n-x} = \frac{n}{x} \times \frac{n}{10-x}$.

[1] Nell'originale autografo del presente *Estratto del Libro di Leonardo Pisano* nulla trovasi tra « facendo » e « = » (linea terza della presente pagina. — *Manoscritti del P. Cossali*, Cartella III, carta 42 *recto*, lin. 13); e però è stato posto di sopra un *sic* nella medesima linea terza. Tuttavia è chiaro dovervisi in vece porre 10.

ELOGIO DI FRA LUCA PACIOLI

Di Luca Paciolo dal Borgo, oggi città di S. Sepolcro in Toscana, frate dell' ordine de'Minori, non fu sì bella in Italia che fuori la sorte: che anzi quanto oltra merito ottenne appresso gli esteri di lode, cruda tanto ed ingiusta soffri da italiano scrittore l'accusa. Celebrato si fu dagli esteri di F. Luca, che per desio di scienza viaggiasse in Oriente, ed in Arabia precipuamente, dove a que'tempi erano le matematiche dottrine in gran fiore, e là di esse arricchitosi, in Italia portasse gli artifici più fini dell'aritmetica, quali son quelli delle false posizioni; ed insieme i principj affatto ignoti dell'arte maggiore, or detta algebra, e per ciò essere di questa stato in Italia il primo maestro e nuovo padre. Montuela stesso (Part. II. liv. 1. art. IX. e Part. III. liv. II. art. VI) gli conserva la gloria di aver lungo tempo per l'Oriente peregrinato, di aver dall'Arabia trasportato le regole delle false posizioni, e di aver dagli arabi stessi immediatamente appresi i lumi tutti che nella sua opera spande, di algebra; sebbene la comune opinione combatta, che il merito gli attribuiva del primo trapiantamento di essa, cui riconosce in anterior epoca, di due secoli però e mezzo al di sotto della vera, avvenuto per opera di Leonardo. Dunque più antica in Italia è la scienza di sciogliere i problemi direttamente per algebraiche equazioni, che indirettamente per le false posizioni? Dunque F. Luca ebbe bisogno di andare ad apparar in Arabia quell' arte maggiore od algebra, che da più antica epoca insegnavasi in Italia? Gli italiani non potevano riguardare F. Luca come benemerito nè del trapiantamento dell'algebra, nè di quello delle regole di falsa posizione, essendo già dalla medesima epoca in possesso dell' una, e delle altre nel libro di Leonardo. Essi italiani studiando con matura attenzione, e con sottil criterio esaminando la Somma di aritmetica e geometria di F. Luca, ne rilevarono i difetti. Cardano nel lib. 2.° dell' aritmetica sua compose il capitolo: *De erroribus F. Lucae quos vel transferendo non diligenter examinavit, vel describendo per incuriam praeteriit, vel inveniendo deceptus est.* Più severo ed acre verso F. Luca, e quasi di proposito accinto a digradare da quella estimazione, alla quale l'opera di lui salita era, mostrossi il Tartaglia nel suo trattato de'numeri e misure. E nella prima pagina di essa scrisse eziandio parlando dell' opera di Leonardo Pisano: *la qual opra giamai è stata data in luce, & dicono, che la causa di questo è processa, perche Frate Luca Patiolo, come che anchora lui medesimo in più luochi testifica, ne accolse tutti fiori, & gli interpose nell'opra sua.* Ma almeno Tartaglia salva l'onestà di F. Luca, asserendo il suo citare in più luoghi l'ameno fondo onde avea colto i fiori. All'incontro recentemente Targioni Tozzetti (Relaz. de'viaggi: Tom. 2.°)

data un'idea dell'opera di Leonardo da lui veduta nella biblioteca Magliabechiana, vuol che *si noti che F. Luca ha avuto in mano quest' opera di Leonardo Pisano, e se n'è fatto bello nella sua vasta Arimmetica senza neppure nominarlo, altro che una volta o due incidentemente.* Ma ecco un'accusa affatto diversa, e buon per F. Luca, che i suoi accusatori discordino fra di loro. Ben altro per tanto che raccoglitor de'fiori di Leonardo il fa il Vasari nel cominciare la vita di Pietro dalla Francesca pittore dal Borgo di S. Sepolcro (tom. 2.° Vite, de'più eccel. pit. ecc.). Scagliandosi contro F. Luca giugne a porlo tra quei prosuntuosi, che cercano di ricoprire la loro pelle di asino con le onorate spoglie del leone. Questo leone è il suo compagno di arte Pietro della Francesca *il quale,* dic' egli, *essendo tenuto maestro raro nelle difficoltà dei corpi regolari, e nell'aritmetica e geometria non potette sopraggiunto nella vecchiezza dalla cecità corporale, e dalla fine della vita mandare in luce le virtuose fatiche sue ed i molti libri scritti da lui, i quali nel Borgo sua patria ancora si conservano; sebbene colui che doveva con tutte le forze ingegnarsi di accrescergli gloria, e nome per aver appreso da lui tutto quello, che sapeva, come empio e maligno cercò di annullare il nome di Piero suo precettore ed usurpar quell'onore che a lui solo si doveva, per se stesso, pubblicando sotto suo nome proprio, cioè di F. Luca dal Borgo, tutte le fatiche di quel buon vecchio, il quale oltre le scienze dette di sopra fu eccellente nella pittura.* E dopo aver descritte e lodate le pitture di Pietro, tornando a parlar della sua scienza, ribatte contro F. Luca l'accusa di avere stampati come suoi i libri di lui: *essendogli quelli pervenuti alle mani dopo la morte del maestro.* Rendesi quindi importante il sapere il tempo della morte di Pietro: rapporto alla quale nota il Vasari al fine della vita, che le pitture di Piero furono *intorno agli anni* 1458; *che di anni* 60 *per un catarro accecò; e così visse sino all'anno* 86 *della sua vita.* Se intorno agli anni 1458 Pietro dipinse, dunque non accecò che alcuni anni dopo il 1458; e se allorchè accecò avea anni 60, e visse sino agli 86, cioè in cecità anni 26, dunque non morì che dopo il 1458 + 26, cioè dopo il 1484 alcuni anni.

Or due passi della Somma di F. Luca smentiranno tutt'insieme e i plagi appostigli, ed i trasporti d'Oriente attribuitigli; ridurranno al giusto il merito di lui, e ne manifesteranno il morale carattere. Il primo passo trovasi nel Sommario della prima parte principale. Confessa egli così: *E queste cose tutte con lesequenti. siranno secondo li antichi. E ancora moderni. mathematici. Maxime del perspicacissimo phylosopho megarense. Euclide E del seuerin Boetio. e de nostri moderni Leonardo pisano. Giordano. Biagio da parma. Giouā sacrobusco. e Prodocimo padoano. da iquali in magior ꝑte cauo elpresente volume.* L'altro importante luogo sta a pag. 67: scrive in tal modo, e il leggitore soffra il barbaro stile. *Per loperare de larte magiore: ditta dal vulgo la regola de la cosa ouer algebra e amucabala seruaremo noi in questo le qui da lato abreuiature ouer caratteri: si commo ancora nelli altri nostri quatro volumi de simili discipline* *per noi cōpilati hauemo vsati: cioe in quello che ali gioueni de peroscia in titulai nel .1476. Nel quale non con tanta copiosita se tratto. E anche in quello che a zara nel .1481. de casi piu sutili e forti componēmo. E anche in quello che nel .1470. derizāmo ali nostri releuati discipuli ser Bart.° e francesco e paulo fratelli derōpiasi da la zudeca: degni mercatanti in vinegia: figliuoli gia de ser Antonio. Sotto la cui ombra paterna e fraterna ī lor propria casa me releuai. E a simili scientie sotto la disciplina de miser Domeneco bragadino li in vinegia da la excelsa signoria lectore de ogni sciētia publico deputato. Qual fo īmediate successore: al perspicacissimo e Rdō doctore: e di san Marco canonico maestro paulo da la pergola suo preceptore. E ora a lui: al presente el Magnifico et eximio doctore miser Antonio cornaro nostro condiscipulo: sotto la doctrina del ditto bragadino. E questo quando erauamo al secolo. Ma da poi che labito indegnamente del seraphyco san francesco ex voto pigliāmo: p diuersi paesi ce conuenuto andare peregrinando. E al presente q̇ ī peroscia per publico e molumento a satisfation cōmuna: a simili faculta ci retrouiamo. E sempre p ordine de li nostri Reuerēdi prelati: maxime del reuerendissimo. p. nostro generale presente maestro Francesco sāsone da brescia* (*): *correndo glianni del nostro segnore Iesu Christo .1487. lanno .4°. del pontificato del sanctissimo in christo. p. innocētio octauo.* È stato necessario trascriver tutto questo rozzo pezzo, avendo ogni articolo l'utilità sua.

Ai due riferiti passi di F. Luca attendendo, chi può dargli la gloria d'essersi in Arabia recato, ed aver di là trasportati in sua patria de'tesori di sconosciute dottrine, se di viaggio in Arabia niun cenno, di cotal trasporto niun vanto nella serie de'luoghi ove fu, ove apprese, ove insegnò? Se le cose tutte dell'opera sua, per dir di lui stesso, secondo gli antichi e i moderni matematici che nomina? Se dai volumi loro la maggior parte cavata del volume suo? E chi poi in un uomo di tanta ingenuità, di candor tanto ravvisar saprebbe l'aria, il carattere assegnar d'un plagiario? Non gli rinfacci Targioni-Tozzetti di essersi fatto bello dell'opera di Leonardo senza neppur nominarlo altro che una volta o due incidentemente. Falso, in più luoghi di proposito il nomina; ma quand' anche ciò non fosse, è egli un nominarlo incidentemente in una generale confessione alla testa del volume? A quante citazioni non equivale una tal dichiarazione?

Peggio della calunnia del Vasari: resta essa smentita, e a suo rossore rivolta per ogni parte. Poichè F. Luca non in Borgo S. Sepolcro, comune patria a lui ed a Pietro della Francesca (**), ma in Venezia: non

(*) Maestro Francesco Nani detto Sansone da Brescia, alunno del convento di Siena e ministro provinciale di Toscana; fu eletto generale in Urbino l'anno 1475 il 14 maggio, governò ottimamente 24 anni 5 mesi e 13 giorni; morì in Firenze li 27 ottobre 1499, e fu sepolto nella Chiesa del suo ordine detta di S.ª Croce, dove dalla nobil famiglia degli Alberti gli fu eretto un sepolcro di bronzo assai magnifico.

(**) A pag. 68, faccia 2.ª dice di Pietro della Francesca: El sublime pictore (a li di nostri anchor vivente) maestro Piero de li franceschi nostro conterraneo del borgo San Sepolchro have in questi di composto un degno libro de ditta prospective nel quale altamente de la pictura parla ponendo sempre el suo dir ancora el modo e la figura del fare. El quale tutto habiamo letto e discorso el quale lui feci vulgare, e poi el famoso Oratore poeta e rhetorico greco e latino (suo assiduo consotio e similmente conterraneo) maestro Matheo lo reccò a lingua latina ornatissimamente de verbo ad verbum con exquisiti vocabuli.

sotto la disciplina di esso Pietro, ma sotto quella di Domenico Bragadino fece gli studi suoi matematici, e ne cita tra condiscepoli Antonio Cornaro, che al comune maestro nella cattedra succedette. Poichè inoltre da un canto sin dall'anno 1470 cominciò F. Luca a dare in luce un volume di aritmetica ed algebra, e proseguì a darne altri gli anni 1476, 1481; e il volume stesso della somma, in cui ampliò, connesse, in un corpo conformò le dottrine in quelli sparse, trovavasi l'anno 1487 sotto la sua penna già tutto disegnato, e in parte eseguito: e per altro canto la morte di Pietro della Francesca, e il pervenimento, molto più, delle opere di lui alle mani di F. Luca, se pur vi pervennero, deducesi dalle narrazioni del Vasari stesso, dover essere stato di alcuni anni posteriore all'anno 1484. Che più ? Non asserisce egli, il Vasari medesimo, che al tempo in cui di Pietro della Francesca scriveva la vita, oltre cioè la metà del secolo XVI, le *virtuose fatiche sue ed i molti scritti di lui nel Borgo sua patria conservavansi* ? Era stato dunque F. Luca sì balordo, che alle sue mani dopo la morte di lui pervenuti, e come suoi propri stampatili, ne avesse a Borgo S. Sepolcro a suo perpetuo scorno ritornati, non arsi, non dal mondo tolti gli originali ? Ma il più bello si è, che nel seguito della vita, e nel fine di essa, dice lo stesso Vasari, che *i libri di Pietro stavano per la maggior parte nella libreria del secondo Federigo Duca d'Urbino.* Qual complesso d'incoerenze, di contraddizioni? Osservo, che nelle note a piè di pagina si rilevano vari sbagli del Vasari in istoria pittorica, che pur era il suo studio, l' impresa sua; così che sembra che dormigliasse in tal genere stesso di erudizione nell'atto di stendere quella vita. Quanto peggio fece a lasciarsi trasportare, per passione verso il suo collega di arte, ad intrigarsi in istoria matematica ? E quanto gli torna a danno la rabbia indecente, onde si avventò contro F. Luca !

Era dover di giustizia purgar F. Luca dall' ignominiosa macchia pel Vasari impressagli; e pura imparzialità voleva, che entro i suoi limiti si circoscrivesse il merito di lui. È una insussistente calunnia il plagio imputatogli degli scritti di Pietro della Francesca. Sfiorò l'opera di Leonardo Pisano; ma avendone a lui, e in generale, e in particolare a tratto a tratto riferito l'onor de'fiori, non vi ha in ciò ragione della menoma accusa. Un sogno è il viaggio di F. Luca in Arabia : e gloria di Leonardo, non di lui, è il trapiantamento dell'indiana aritmetica, e dell'algebra insieme, dalle contrade d'Oriente in Italia; non però egli a se stesso arrogò, ma gli esteri scrittori, più franchi a scrivere che pazienti a leggere l'opera di lui stesso, l'adornarono di questa non sua lode. Pose egli diligente cura a raccogliere gli insegnamenti degli antichi matematici, e di quelli ai tempi suoi più vicini; si adoperò a legarli, ordinarli, estenderli, consolidarli, assoggettarli a canoni. Di ciò, e non d'altro si dà egli vanto nella seconda latina lettera di dedica a Guido Ubaldo duca d'Urbino. *Constitui novum hoc volumen pro ingenii nostri tenuitate componere, in quo varias diversasque Arithmeticae, Geometriae, Proportio-*

nis, et Proportionalitatis partes plurimum necessarias tum in praxi, tum in Theorica collegimus, firmissimisque rationibus, et canonibus subjecimus, et antiquis et recentibus philosophis cujuscumque praxis indubitata fundamenta. Così egli : onde, lungi da arte di imporre e vestirsi delle altrui onorevoli spoglie, apparisce in esso virtù d'ingenuità e modestia.

Determinato al giusto il merito, e posto a limpida luce l'onesto moral carattere di F. Luca, non mi perderò a correggere un errore di Montucla, che in vece di dirlo professore di matematiche in Perugia, lo pone tale in Venezia, ove non può aver dato che delle private lezioni, Antonio Cornaro suo condiscepolo essendo stato quegli, che nella pubblica cattedra succedette a Domenico Bragadino comune loro maestro. Mi affretterò piuttosto a volgermi a ciò che il principale mio oggetto, che è la serie dei progressi dell'aritmetica e dell' algebra, da me esige; di dare cioè una scorsa all'opera di F. Luca per rilevare i passi, che mercè l'industria dei loro coltivatori via via esse fecero dal tempo di Leonardo sino a quello in cui la *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalità* uscì alla luce colle stampe ; e fu la prima di tal genere che delle stampe godesse l'onore, ed il vantaggio l'anno *Mcccclxliiij in Vinegia con spesa e diligentia. E opifitio di Paganino de Paganini da Brescia.* Annibal Caro chiamava l'opera di F. Luca *ceneraccio* per essere tra il miscuglio di parole volgari e latine, le une e le altre soventi corrotte, sepolto l'oro delle dottrine, come fra le ceneri degli orefici sogliono esser nascoste le minuzzaglie dell'oro. Cerchiamo dunque in questi ceneracci; che, sebben minuzie d'oro quelle che vi si nascondono, non lasciano d'essere d'importanza a chi prenda diletto in conoscere la continuità della gradazione, con la quale la scienza del calcolo si è avanzata.

1.° La prima parte che versa sull'aritmetica e l'algebra è in nove distinzioni divisa, e ogni distinzione in trattati. La distinzione prima è un lungo discorso sulla quantità discreta e continua, sul numero in genere e sulle varie sue specie, secondo le Pitagoriche divisioni. Al suo dire, *pochi* erano che denominassero circolari i numeri 5 e 6, che moltiplicati in sè medesimi qualunque numero di volte, rendono sempre un prodotto terminante in essi, e confuta quelli che voleano aggiugnervi il numero 11; perchè i prodotti di lui in sè stesso non terminano in 11 ma in 1. La distinzione seconda comprende una ricca dottrina, qual mai ne'moderni libri può trovarsi, dell'algorismo che in sette parti divide: numerazione, addizione , sottrazione , moltiplica , divisione , progressione, estrazion delle radici. Nel trattato sulla moltiplica mi par degno di qualche considerazione il capitolo che lo chiude: *De viribus numerorum in ordine multiplicandi notabilissimis.* Eccone in breve il contenuto: 1.° Se a esprima un numero qualunque da 1 a 9, sarà $a \times 143 \times 777 = aaaaaa$.

Esempio. Sia $a=3$, sarà $3 \times 143 \times 777 = 333333$.

2.° Parimenti se vogliasi un numero $aaaaaa$, prendasi $2a\,100 + 3a\,10 + a$, e la somma si moltiplichi per 481.

Esempio. Sia $a = 4$, sarà $800 + 120 + 4$, cioè $924 \times 481 = 444444$.

3.° Volendo un numero di due figure ripetute *ab ab ab*, prendasi $2ab\,10 + 2ab$, e si moltiplichi per 481.

Esempio. Sia $a = 7$, $b = 9$, sarà $1580 + 79$, cioè $1659 \times 481 = 797979$.

4.° Se vuoi la stessa figura ripetuta dodici volte, vale a dire un numero *aaaaaaaaaaaa*, moltiplica a con 123321, con 900991, e il prodotto sarà qual desideri.

Esempio: $8 \times 123321 \times 900991 = 888888888888$.

Il trattato della progressione è compreso nell'algorismo per ciò, che risguarda la raccolta o somma de'numeri che la compongono; ciò non ostante non si può negare che, avanti quello delle ragioni e proporzioni, sia contr'ordine. Si propone F. Luca da principio la somma della progressione aritmetica, alla quale dice convenir propriamente il nome di progressione; ma poi si stende alla somma delle serie di continue proporzionalità geometriche, *auenga che impropriamente sieno dette progressioni; conciosia cosa che progressione sia secondo o quale excesso*. Nè a queste, che noi chiamiamo serie o aritmetiche o geometriche di primo grado, si ferma, ma ascende alla somma delle aritmetiche di secondo grado, cioè di quelle dei quadrati de'numeri. Siccome però la teoria di queste fu da me esposta nell'appendice alla Memoria su Leonardo, da un libro singolare dal quale dice F. Luca ingenuamente averla estratta, così non fa bisogno aggiugner qui parola. Ma vi ha di più: sale anche F. Luca in uno de' problemi, coi quali corona il trattato, alla somma dei numeri cubici 1. 8. 27 ... colla regola che brevemente io esprimo per la formola $\left(\frac{n}{2}\right)^2 \times (n+1)^2$, intendendo per n il numero de'termini. Merita anche di esser notata la vista generale che espone poco appresso, che in una progressione crescente *sieno gli eccessi de'termini in qual proporzione si voglia e per quanto si voglia* sempre la somma di tutti gli eccessi è uguale all'eccesso dell'ultimo sopra il primo termine. Nè debbo per altro riguardo ommettere il problema in cui, posto che il circuito della *terrena sfera* sia di 20400 miglia, e che sull'equatore viaggino due, uno da occidente in oriente, aumentando il suo diurno viaggio nella progressione 1. 2. 3 .., l'altro all'incontro da oriente in occidente, accrescendo di giorno in giorno il viaggio suo secondo la serie dei numeri cubici 1.8.27.., cerca dopo quanti giorni s' incontreranno. Chiamato *cosa* il cercato numero de' giorni, che noi dinotiamo per x, essendo il viaggio del primo viaggiatore miglia $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$, e quello del secondo miglia $\left(\frac{x}{2}\right)^2(x+1)^2 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$, monta, sommando all'equazione di quarto grado $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x = 20400$; e levate le frazioni, ed aggiunto in ambi i membri 1, ne forma $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 81601$, d'onde estraendo la radice, ne ricava $x^2 + x + 1$; e quindi citando la regola da spiegarsi poi nel trattato di Algebra, tira $x = \frac{-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{-3}{4} + \sqrt{81601}\right)}$. Ecco un problema di quarto grado sciolto da F. Luca nella seconda distinzione.

II.° Nella distinzione terza che versa sulla depressione e sul calcolo de' rotti, riferisce tre metodi dagli antichi adoperati per trovare lo *schifatore*, che diciam noi massimo divisor comune: uno a tastoni, l'altro per tavole, il terzo da Boezio ancora insegnato per continua sottrazione; e tutti e tre qual come dubbio, qual come limitato, qual come laborioso rigettatili, ne espone uno, cui mette in fronte: *Modus pre ceteris brevior et levior schifandi et scientificus, et per nos usitatus, qui ex* 1.ª 2.ª *et* 39.ª 7.ⁱ *Euclidis elicitur.* Egli è quello che anche da noi si usa di continua divisione sino ad aver un quoziente esatto senza residuo veruno, ed è la 39.ª del 7.° di Euclide la proposizione su cui propriamente si fonda; la prima non vi appartiene se non come indicante il caso, in cui la ricerca del massimo comune divisore riesce inutile, ed è allorchè il quoziente esatto è l'unità, manifestandosi per esso i proposti numeri fra loro primi; e la seconda, che prescrive espressamente il terzo dei rigettati metodi, cioè la continua sottrazione, non vi può appartenere se non in quanto ne è applicabile della dimostrazione il torno, e vuol che da' leggitori si applichi ommettendo egli stesso di farlo. La distinzione quarta è una quantità di problemi intrecciati di rotti per renderne famiiare il calcolo.

III.° Spiega nella distinzione quinta accuratamente la regola del tre, e le pratiche mercantili ed i contratti che essa regge; e fatta così assaporare l'utilità della proporzione, si avanza a trattare ampiamente nella distinzione sesta la materia delle ragioni e proporzioni. Egli però, attenendosi ai vocaboli di Euclide, chiama proporzione ciò che noi ragione, e proporzionalità ciò che noi proporzione diciamo. Esalta l'eccellenza, il vantaggio della cognizion loro, essendo in esse riposta ogni bellezza di natura ed arte. Ne divide come noi il genere in tre specie: geometrica, aritmetica, armonica. Si limita riguardo all'armonica alle diffinizioni non essendo di suo proposito. Suddivide la proporzion geometrica in razionale ed irrazionale, e ne enumera le varie denominazioni di moltiplice semplice, di superparticolare, e superpartiente l'una e l'altra, o semplice e moltiplice, e le inverse, e i ramicelli di ciascuna; e ciò che mi pare una eleganza da non lasciare spregiata, è che di tutte ne dimostra raccolti nella tavola pitagorica gli esempi: della moltiplice semplice nei numeri di ciascuna linea orizzontale, tranne la prima, rapportati a quelli di essa; della sesquialtera, sesquitertia, e di altri ramicelli della superparticolar semplice in quelli della terza linea riferiti a quelli della seconda, in quelli della quarta a quelli della terza ec., dei ramicelli della superpartiente semplice in quelli della quinta linea paragonati a quelli della terza, di quelli della settima a quelli della quarta ec., dei ramicelli della moltiplice superparticolare in quelli della quinta, settima, nona comparati a quelli della seconda, e dei ramicelli della moltiplice superpartiente in quelli della ottava, decima confrontati con quelli della terza. Diffinite poscia le proporzionalità geometrica ed aritmetica coi due modi dell'una e dell'altra, cioè la continuità e la discontinuità, ed alla proporzionalità geometrica opposta la improporzionalità, dispiega le sei maniere Euclidee di argomentare su la proporzionalità. Quindi, procedendo alla serie di più continue proporzionalità, esamina i rapporti dei termini in diversi intervalli, e ne ricava l'idea delle proporzioni composte, ma le cui componenti sono uguali. Queste però gli fanno strada a considerar anche quelle di disuguali composte; e nascendo la composizion dalla moltiplica, prende quindi motivo di applicare alle proporzioni anche le altre parti del calcolo, la somma, la sottrazione, la divisione. Passa a metter sott'occhio come cangia una proporzione, e una proporzionalità aritmetica, accresciuti o diminuiti ugualmente per via geometrica, cioè moltiplicati o divisi per la stessa quantità i termini di essa; e come all'incontro resta salva la proporzione se i due termini si accrescano o diminuiscano ugualmente per via aritmetica, vale a dir aggiungendo o sottraendo la stessa quantità, e salva resti del pari la proporzionalità aritmetica, se dei quattro suoi termini si accrescano o si diminuiscano per via aritmetica ugualmente, o i due maggiori, o i due minori, o si accrescano gli uni, si diminuiscano gli altri. E viceversa come resti salva la proporzione, e proporzionalità geometrica, accrescendone o diminuendone i termini ugualmente per via geometrica; e cresca la geometrica proporzione, diminuendo ugualmente i termini per via aritmetica, e diminuisca accrescendoli. A frutto di tali teoremi soggiugne tre corollari, che spettano le potenze moventi, e i mobili; e sono 1.° che la velocità del mobile b mosso dalla potenza a, essendo $\frac{a}{b}$, e quella del mobile d mosso da c, essendo $\frac{c}{d}$ la velocità dei mobili b d, o di uno a loro uguale, mossi dalle potenze congiunte a c, o da una ad esse equivalente, sarà $\frac{a+c}{b+d}$ media tra le $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$. 2.°, che crescendo la potenza cresce la velocità in proporzione non aritmetica ma geometrica. 3.°, che diminuito il mobile cresce parimenti in proporzione geometrica la velocità. Segue un trattato, i cui primi sette articoli portano l'ampolloso titolo: *De mirabilibus ex proportionibus inter duas - tres - quatuor - quinque - quantitates - etiam binomiales*. In compendio queste maraviglie sono, che se di due, tre, quattro, cinque ed anche più, quante si voglia quantità intere, fratte, razionali, irrazionali, semplici, binomie, in una data proporzione comune e continua fra loro, si pigli la somma, e questa per ciascuna dividasi; e la somma de'quozienti si divida per ciascun quoziente, sarà 1ª la somma de'secondi quozienti uguale alla somma de'primi: 2ª anzi ogni secondo ordinatamente uguale ad ogni primo: 3ª sì tra i primi e sì tra i secondi quozienti in retrogrado verso considerati, vi sarà la proporzion comune che tra le quantità: 4ª il prodotto dei due estremi, o il prodotto di due qualunque equidistanti di quà e di là da essi, o il quadrato del medio, se sono in numero dispari, è uguale alla somma di tutti: 5ª se sieno un numero di quantità più piccole, e un numero uguale di quantità più grandi nella stessa continua proporzione, vale a dire tratti dalla stessa serie di proporzionalità, i quozienti formati dalle prime daranno raccolti la somma medesima, che i quozienti formati dalle seconde : 6ª la somma de' quozienti conterrà sempre de'rotti: 7ª se trattisi di due quantità sole, la somma de'quozienti dell' aggregato loro diviso per ciascuna è uguale al quadrato di esso aggregato diviso pel prodotto di una quantità nell'altra, ed anche 8ª alla somma dei quozienti delle divisioni reciproche dell'una per l'altra, aggiunto costantemente il 2. Ampolloso, il dissi, è per noi il titolo a queste verità da F. Luca dato di *maraviglie*; ma equa cosa è considerarle in quel tempo; e poi non si può negare che alcune almeno non vantino bellezza e sottilità, massime alle quantità binomiali applicate. E siccome per tale applicazione scelse quantità binomiali in continua geometrica proporzione che fossero insieme senza frazioni; e tali, che divisane la somma per ciascuna, l'aggregato dei quozienti risultasse razionale e pretto numero: così giova scoprir l'artificio usato, e da usarsi per averle di tali condizioni, ed è: che posto $A=3B$, si prenda per base il rapporto $\sqrt{A}+\sqrt{B} : \sqrt{A}-\sqrt{B}$, e determinando le continue proporzionali, si formi la serie. Si ottien quella delle quantità maneggiate da F. Luca, facendo $B=2$. Falla egli nel prescrivere l'artificio tralasciando la condizione di $A=3B$ essenzialissima, e senza la quale la prima continua proporzionale *a* trovarsi risulta subito rotta. Nè codeste son cose di sterile curiosità appresso F. Luca, impiegando egli le sue *maraviglie* delle proporzioni nell' articolo che soggiugne col titolo: *Modus dividendi numerum in quotlibet partes continue proportionales.* Non fa però qui che adombrar il modo, cui poscia svolge per casi ne'problemi. E per accumularsi maggiori aiuti allo eseguimento di tal divisione, ed alla risoluzione di altri complicati quesiti compone un articolo *De notabilibus regulis quantitatum continue proportionalium ex* 16ª 6.ⁱ *et* 20ª 7.ⁱ *Euclidis*; dove insegna di tre quantità continuamente proporzionali, date due qualunque, trovare la terza, di quattro, date tre qualunque, trovare la quarta; e date due vicine, trovare le altre due; ed anche, date la prima e la quarta, trovare le due intermedie: denominando la prima di queste *cosa*, deducendone l'espression della quarta, ed al valor dato di esse uguagliandola, onde tirarne con l'estrazione della radice cubica il valor della *cosa*, ossia la prima delle cercate intermedie. Dà anche il modo di determinar le grandezze di ciascuna delle quattro date le somme della prima e quarta, e della seconda e terza. Estende la dottrina alle cinque, e accenna in generale come possa estendersi ad un numero qualunque. Ciò non basta: presenta in altro articolo una schiera di altri quindici teoremi su le proporzionalità che precipuamente destinate all'ufficio di aprir la via allo scioglimento dei problemi che seguono, ed anche all' operare di *algebra* ed *almucabala*, intitola *Chiavi*. Lascerò io quelle tolte da Euclide, quelle che sono troppo manifeste per lor medesime, e quelle pure, che sono di altre trasformazioni o corollari, e mi ristrignerò a sette sole. Se sieno $\div\!\!\div a:ab:ab^2:ab^3$, sarà 1.° $a+ab+ab^2+ab^3 : ab+ab^2 :: a+ab^2 : ab$. 2.° $a+ab : ab^2+ab^3 :: a : ab^2$. 3.° $a+ab^2 : ab+ab^3 :: a : ab$. 4.° $(a+ab+ab^2+ab^3)^2=(a)^2+(ab)^2+(ab)^2+(ab^3)^2+a(ab+ab^2+ab^3)+ab(a+ab^2+ab^3)+ab^2(a+ab+ab^3)+ab^3(a+ab+ab^2)$. 5.° $2(a\,.\,ab^2+ab(a+ab^2))=a(ab+ab^2)+ab(a+ab^2)+ab^2(a+ab)$. 6.° Se pongasi inoltre $\frac{m}{a}+\frac{m}{ab}+\frac{m}{ab^2}=a+ab+ab^2$, sarà $ab=\sqrt{m}$. 7.° Sia $\sqrt{t}\sqrt{u}=x^2+y^2$, e $\sqrt{t}:\sqrt{u}::x:y$, sarà $\sqrt{t}\sqrt{u}=\sqrt{xy}\,(t+u)$. Col destro maneggio di queste e delle altre chiavi, e delle notabili regole cavate da Euclide, e delle *maraviglie*, scioglie una lunga serie di problemi spettanti i più a ritrovare 3, 4, e 5 quantità continuamente proporzionali; o a dividere un dato numero in 3, 4, e 5 parti continuamente proporzionali con le altre assegnate condizioni. Ve ne ha di quelli che ascendono all'equazione pura di terzo grado, di quelli che salgono all'equazione di quarto, e taluno che monta all'equazione di ottavo grado $x^8=ax^4+b$; qual è questo di trovare 3 quantità continuamente proporzionali, e tali che il prodotto della prima nella seconda sia $=10$, e li quadrati loro giunti insieme uguaglino il quadrato della terza. Di queste equazioni esibisce gli scioglimenti, rimettendo a suo luogo la dimostrazion della regola: lo che è certamente contro l'ordine matematico, nè potrebbesi con altro motivo scusare, che della mira d'invogliare allo studio dell' arte algebraica. Termina l'applicazione della seconda ed inesauribil dottrina delle proporzioni con due speciosi problemi: 1.° di assegnar quattro pesi i quali soli bastino a pesare in intere libre da 1 sino a 40, il che prova ottenersi coi pesi di libre ordinatamente 1, 3, 9, 27 purchè si distribuiscano convenientemente su i catini della bilancia, qual o quali sul catino vuoto, e qual o quali sul catino dalla merce occupato di essa in aggiunta: 2.° di determinare i valori di cinque monete, colle quali sole pagar si possa di giorno in giorno pel corso di giorni 30 la mercede di valor 1; e dimostra come ciò può farsi colle monete dei valori 1, 2, 4, 8, 15, dando al mercenario il primo giorno la moneta 1, il secondo giorno la moneta 2 con ritorgli la 1, e così via via. La dottrina di F. Luca sulle proporzioni e proporzionalità è senza dubbio ricca ed estimabile pel suo tempo, e di nuovi teoremi adornata da quello di Euclide. Non lascierò tuttavia, per cautela ancora di chi tentato si sentisse di andare nel suo ceneraccio a leggerla, non lascierò di notare, oltre quello sopra avvertito, due altri sostanziali difetti: tanto più che, nell'esporre il primo, mi si apre l' opportunità di additare in che

F. Luca ad Euclide si attenne, e in che da esso si discostò. Euclide seguì nelle generali definizioni della proporzione e proporzionalità; ma lui abbandonò in definire la proporzione continua e la discontinua, lasciando da parte l'idea degli equimoltiplici, e semplicemente dicendo esser *ꝓporzionalita continua parita ouer equalita de ꝓporzioni ꝑ termine commune ouer termini communi medii copulata ouer congionta: e discontinua parita ouer equalita di ꝓporzioni ꝑ niun termine commune medio copulata.* Non si fosse in altro da Euclide allontanato! Ma vi si allontanò eziandio amplificando il senso dei vocaboli *proporzione* e *proporzionalità*: poichè là dove Euclide per proporzione intese quell'abitudine di quantità a quantità, che per via di divisione si esplora e rileva, F. Luca estende il nome di proporzione a significar anche quell'altra abitudine di grandezza a grandezza, che per via di sottrazione si determina, e nella differenza dell'una dall'altra consiste. Non credo però che F. Luca fosse il primo a ciò fare; ma piuttosto che, fatto trovandolo, il seguisse; e ciò che son per dire verrà ad appoggio della mia opinione. Intanto, attribuiti al vocabolo proporzione e a quello di proporzionalità due sensi, necessari erano per separarli due aggiunti. Scelti furono quelli di geometrica ed aritmetica proporzione e proporzionalità. Egli è su questi aggiunti per lo appunto che F. Luca s'imbarazzò e gli si confusero le idee. A pagine 70 difinisce così: *la proportiōe geometrica. sira quādo se fara cōparatione da vn continuo a laltro. commo da vna linea a vnaltra linea. da vna supficie a vna altra superficie. da vn corpo a vnaltro corpo. da vn tēpo a vn luogo a vnaltro tēpo e vnaltro luogo. Larithmetica sira quādo si fara comparatione da vn numero a vnaltro. o siēno equali oueramente inequali e piu propriamente fra li excessi ouer differentie de li numeri fra loro: circa lequali principalmēte se attende la proportionalita arithmetica.* E di qui, nel seguente articolo sulle quantità commensurabili ed incommensurabili, deduce: *E ꝑ q̄sto se māifesta cħ la ꝓportōe geometrica e de magior abstractōe e cōsideratiōe che nō e quella arithmetica e piu largamēte se ritroua la ꝓportione in le q̃tita continue che in le quantita discrete. Pero chel geometra de la rationale e inrationale indifferentemente considera e lo arithmetico solamente de la proportione rationale che per qualche numero sipossa nominare.* Il fatto però è che dopo aver nella quantità continua riposta e confinata la proporzione e proporzionalità geometrica, alla quantità discreta l'associa egli ognora in numeri, dimostrandone i teoremi, e proponendone i quesiti, non costituendo praticamente in altro l'essenza della proporzione geometrica che nell'esponente della contenenza d'una quantità nell'altra e l'essenza dell'aritmetica nella differenza di una dall'altra. E a pag. 75, art. 13 avverte: *notarai: che non se dici ꝓportione ne āche ꝓportionalita arithmetica (cōmo alcuni rozi pēsano) ꝑ che q̄lla tale ꝓportiōe ouer ꝓportionalita: solamēte se habia a trouare ī le q̃tita discrete ouer in arithmetica: cioe in numeri. E cosi la denoīatiōe de la proportione ouer ꝓpor-*

tionalita : ditta geometrica : non se intēde che solamēte in q̄tita cōtinue ouer ī geometria o voi mesure : q̄lla tal ꝓportiōe ouer ꝓportionalita se habbia a retrouare. Unde sempre ditte denotationi : se debiamo ītendere īdifferētemente ī luna e laltra q̄tità douerse retrouare . . . . . Si che non te īgāni el nome dicendo la sedici arith[ca]. *ꝑ che laptene solo al nūo. E geometrica ꝑ che solo a geometria . . . Ma īdifferenter se tene.* Egli fu da prima di quei rozzi che qui riprende. E se mi si domandi la causa di questo errore di F. Luca, a me pare di ravvisarla nel doppio significato che può darsi a questo aggiunto *Geometrica*, cioè : 1° *spettante alla Geometria* ; 2° giusta la mente e l'uso degli antichi geometri. Similmente l' aggiunto *Aritmetica* può prendersi; 1° in significato di *appartenente all' Aritmetica*; 2° in senso *giusta la istituzione degli Aritmetici*. Questa ambiguità di significati fu cagione delle contraddittorie definizioni di F. Luca. Quegli che il primo estese l'idea di proporzione, e dal rapporto di divisione la dilatò ad abbracciare anche il rapporto di sottrazione; e per evitar poi il disordine di confonder un modo di paragone con l'altro,aggiunse proporzione *Geometrica* - proporzione *Aritmetica*, intese certamente questi aggiunti nei secondi esposti significati. Ma quanti sonovi anche oggidì che di essi aggiunti non hanno chiara nozione; e ignorano, mancando i compositori di elementi, di dirlo perchè e in qual senso l'una dicasi proporzion geometrica, aritmetica l'altra ? Il Wolfio, in vece d'intitolare il cap. VII della sua Aritmetica *De proportionibus arithmeticis*, lo intitola *De quantitatibus aequidifferentibus*; e dopo definite la equidifferenza continua, e la discreta, soggiugne nello scolio: *Dicuntur heae quantitates vulgo Arithmeticae proportionales; et vere proportionales, Geometricae proportionales appellari solent ut ab illis distinguantur: sed minus proprie nec ad mentem veterum.* Non vi ha dubbio, che a sfuggire ogni oscurità d'idee, ogni equivoco sarebbe stato meglio il lasciare al confronto per divisione i semplici nomi di proporzione e proporzionalità, e denominare i confronti per sottrazione *differenza* ed *equidifferenza* ; oppure intitolare i primi *proporzione* e *proporzionalità divisionale*, e i secondi *proporzione* e *proporzionalità differenziale*. Si è anche dal tempo di F. Luca in qua cangiato il nome di *proporzione* in *ragione*, e quello di *proporzionalità* in *proporzione*.

Vediamo brevemente l'altro difetto di F. Luca : sta nello stesso artic. 13.° Dopo avere nell'antecedente spiegato le sei specie, o maniere di arguire sulla proporzionalità geometrica, dette di *conversione*, *permutazion* , *congiungimento* , *disgiungimento* , *eversione* , *ex aequo* , applica ivi alla proporzionalità aritmetica la maniera di argomentare 2ª di permutazione ; indi sommariamente asserisce : *E cosi de tutte laltre spē ditte : ꝑ te stesso alarithmetica porrai aplicare : habiādo sempre respecto ale d̄rē e nō ale ꝓportioni : ꝑ che larithmetica nō e altro se nō eq̄lita de differentie.* Ma o erra F. Luca, o una troppo rimota interpretazione lascia al leggitore da supplire. È facile a dimostrarsi competere alla proporzionalità aritmetica le maniere di argomentare 1.ª, 2.ª, 3.ª Poichè esprimendo la proporzionalità aritmetica delle quattro quantità a, b, c, d coll' equazione $a - b = c - d$, è chiaro che anche convertendo è $b - a = d - c$; e permutando $a - c = b - d$. E se sia la serie delle aritmetiche proporzioni $a : a \pm m : a \pm m \pm n : a \pm m \pm n \pm p \ldots$ ed un'altra serie ordinatamente corrispondente $c : c \pm m : c \pm m \pm n : c \pm m \pm n \pm p \ldots$, sarà in ordinato ugugliamento $a : a \pm m \pm n \pm p \ldots \because c : c \pm m \pm n \pm p \ldots$ com'è evidente. Ed anche, se per seconda serie si abbia in perturbata corrispondenza $c \pm n \pm p : c \pm n : c : c \pm m$, sarà in perturbato ugugliamento $a : a \pm m \pm n \pm p \because c \pm n \pm p : c \pm m$, come si vedrà manifestamente sommando gli estremi ed i medi per risultare l'una e l'altra somma $= a + c \pm m$. Non vi ha dunque dubbio che le tre maniere di arguire 1.ª, 2.ª, 6.ª, convengano per ugual modo alla proporzionalità aritmetica, che alla geometrica. Ma non è così delle altre tre di congiungimento, disgiungimento, eversione: poichè dall'equazione $a - b = c - d$ non si può in alcun conto argomentare $(a \pm b) - b = (c \pm d) - d$, nè $a - (a - b) = c - (c - d)$; anzi la falsità di queste due equazioni e delle aritmetiche proporzioni che esprimer dovrebbero salta agli occhi. Sono bensì legittime conseguenze dell'equazione $a - b = c - d$ le due $(a \pm m) - b = (c \pm m) - d$, $a - (a - m) = c - (c - m)$. Vi ha dunque un modo di applicare alle proporzioni aritmetiche le specie d'arguire 3.ª, 4.ª, 5.ª, congiungendo agli antecedenti a, c, ovvero da essi disgiungendo non già i respettivi lor conseguenti b, d, ma una medesima quantità m. E, a dir vero, tanto è congiungere o disgiungere un' uguale quantità nella proporzionalità aritmetica, quanto il congiungere o disgiungere parti ugualmente aliquote nella proporzionalità geometrica. Laonde i congiungimenti o disgiungimenti fatti per arguire sono diversi, ma corrispondenti alle nature delle due proporzionalità, così che i modi di pervenire alle tre argomentazioni, sebben l'uno dall'altro differentissimi, possono però dirsi analoghi, in quanto che ugualmente adattati alle proporzionalità loro, ciascuno alla sua. Se tanto intese dir F. Luca, intese bene; ma troppo manco fu il suo parlare. Sarà bene raccogliere sotto un' occhiata le sei specie d'arguire alla proporzionalità aritmetica applicata.

Siano in aritmetica proporzionalità $a : b \because c : d$; e per pigliar la quantità m da congiungersi o disgiungersi in relazione a codeste quantità, esprimiamola per $q(a-b)$; o che è lo stesso per $q(c-d)$.

Sarà 1.° Convertendo $b : a \because d : c$. 2.° Permutando $a : c \because b : d$. 3.° Congiungendo $a + q(a-b) : b \because c + q(c-d) : d$. 4.° Disgiungendo $a - q(a-b) : b \because c - q(c-d) : d$. 5.° Evertendo $a + q(a-b) : a \because c + q(c-d) : c$.

E se sieno le due serie di aritmetiche proporzionalità ordinatamente corrispondentisi $a : a \pm m : a \pm m \pm n : a \pm m \pm n \pm p \ldots$ $c : c \pm m : c \pm m \pm n : c \pm m \pm n \pm p$; sarà 6° per ordinato uguagliamento $a : a + m + n + p :: c : c + m + n + p$. Ed essendo le serie perturbatamente corrispondentisi $a : a + m : a + m + n : a + m + n + p \ldots c + n + p : c + n : c : c + m$, sarà per uguagliamento perturbato $a : a + m + n + p :: c + n + p : c + m$.

Non è mio pensiere rilevar tutti di qualunque sorta i difetti di F. Luca, ma quelli soli, l'osservazione de'quali può esser accompagnata dal frutto di qualche lume o dottrinale o storico: tali mi lusingo essere le due osservazioni già fatte: e se passo a notare altri due difetti in F. Luca, egli è solo perchè il parlar di loro mi conduce tutt' insieme a far vedere la industria usata per sfuggire delle laboriose eliminazioni e delle assai alte equazioni. Ho detto che F. Luca nell' art. *De notabilibus regulis quantitatum continue proportionalium ex 16.ª 6.ⁱ et 20.ª 7.ⁱ Euclidis*, date le somme della prima e quarta, e delle seconda e terza di quattro continue proporzionali, determina le grandezze di ciascuna. La regola sua ridotta ad algebraica espressione è che, denominate le quattro continue proporzionali $\because u : x : y : z$, supposta la somma della prima e quarta $u + z = m$, e la somma della seconda e terza $x + y = n$, si ha la seconda $x = \frac{1}{2}n - \sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 - \frac{n^3}{m + 3^n}\right)}$, e la terza $y = \frac{1}{2}n + \sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 - \frac{n^3}{m + 3^n}\right)}$. Avute queste due, ne tira F. Luca in numeri le altre, dividendo il quadrato della seconda per la terza ad aver la prima, ed a rovescio per aver la quarta. Di questa regola non dà egli qui dimostrazione; e invano anche l' ho cercata nel trattato dell' algebra. Retrocedendo però su i suoi passi, si rileva la via che da lui o da chiunque altro trovata l' abbia, fu tenuta per iscoprirla. Sostituendo $\frac{x^2}{y}$ per u, ed $\frac{y^2}{x}$ per z nell'equazione $u + z = m$, ne viene $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = m$; ed in vece di x, ponendo $n - y$ cavato dalla seconda equazione, si ha: $\frac{(n - y)^2}{y} + \frac{y^2}{n - y} = m$; e togliendo le frazioni, elevando $n - y$ al cubo, scancellando i cubi $-y^3, y^3$, trasponendo convenientemente, si trova $y^2 - ny = \frac{-n^3}{m + 3n}$; onde sciogliendo si ottiene y, ed indi x come sopra. E volendosi algebraicamente i valori di u, z, si troverà $u = \frac{(n - y)^2}{y} = \frac{1}{2}m - \sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 - \frac{n^3}{m + 3n}\right)}$; $z = m - u = \frac{1}{2}m + \sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2 - \frac{n^3}{m + 3n}\right)}$.

Or si avverta, che se si esprimessero le quattro continue proporzionali così $\because t : tq : tq^2 : tq^3$: onde $t + tq^3 = m$, $tq + tq^2 = n$, cavando e paragonando i due valori di $t = \frac{m}{1 + q^3} = \frac{n}{q + q^2}$, ne risulterebbe un'equazione di terzo grado $nq^3 - mq^2 - mq + n = 0$. Si otterrebbe bensì un'equazione di secondo grado in t, cioè $t^2 - mt = \frac{-n^3}{m+3n}$ eliminando, o col metodo del Newton, o con quello di Bezout, o con quello di Eulero (Accad. Berl. an. 1764), o con quello di La-Grange (ivi an. 1769) l'esponente della continua proporzione q; ma ciascuno degli accennati metodi importa una fatica di calcolo che si schiva nell'altra mostrata antica via. Qui però non consiste il meglio di quella industria che io lodava; ma nel ridurre ingegnosamente al problema sinora considerato un altro più difficile, qual è: dividere un dato numero A in quattro parti continuamente proporzionali, i quadrati delle quali congiunti insieme formino l'assegnata somma B. È questo il 26° dei problemi che F. Luca si propone e scioglie. Per ridurlo al problema di sopra, s'immagina egli che la somma della seconda e terza delle cercate parti sia *cosa*: seguiremo noi ad esprimerla per n; ed a fare $x + y = n$; e quindi sarà numero dato a dividere A men *cosa*, per noi $A - n = u + z$ somma della prima e quarta. E per la risoluzion superiore le parti cercate saranno tutte espresse per la sola incognita n; così $u = \frac{1}{2}(A - n) - \sqrt{\left(\frac{1}{4}(A-n)^2 - \frac{n^3}{A+2n}\right)}$; $x = \frac{1}{2} n - \sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 - \frac{n^3}{A+2n}\right)}$; $y = \frac{1}{2}n + \sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 - \frac{n^3}{A+2n}\right)}$; $z = \frac{1}{2}(A - n) + \sqrt{\left(\frac{1}{4}(A-n)^2 - \frac{n^3}{A+2n}\right)}$.

È facile ora vedere che la somma $u^2 + z^2 = (A-n)^2 - \frac{2n^3}{A+2n}$, e la somma $x^2 + y^2 = n^2 - \frac{2n^3}{A+2n}$: e per ciò la somma intera $u^2 + x^2 + y^2 + z^2 = n^2 + (A-n)^2 - \frac{4n^3}{A+2n} = B$; onde, fatte le debite operazioni, ne viene $n^2 + \frac{B}{A} n = \frac{1}{2}(A^2 - B)$, equazion di secondo grado, per la quale ottenuto n, si avranno u, x, y, z. F. Luca sbaglia su l'ultimo, dando per finale equazione $2n^2 + A^2 - 2An - n^3 = AB + 2Bn$, di modo che al primo leggere io credei che fosse in sua opera scioglimento di equazione di terzo grado: ma fatto il calcolo, rilevai essere codesto un errore; e soggiugnendo egli *sequi el capitolo*, cioè la regola che poi in algebra insegna per lo scioglimento delle equazioni di secondo grado, chiaro apparisce che fu errore solo di scritto non di mente. Per valutare la felice sagacità di ridur questo al superior problema, si osservi che espresse le quattro continue proporzionali parti richieste così $\div\div\, t : tq : tq^2 : tq^3$; e per le condizioni del problema, posta la somma $t + tq + tq^2 + tq^3 = A$, e la somma de' loro quadrati $t^2 + t^2q^2 + t^2q^4 + t^2q^4 + t^2q^6 = B$; se da queste immediatamente si cavino, e tra loro confrontinsi i due valori $t^2 = \frac{A^2}{(1 + q + q^2 + q^3)^2} = \frac{B}{1 + q^2 + q^4 + q^6}$, s'incorre in una equazione di sesto grado in q; che se poi con più lungo calcolo s'imprenda ad eliminare q per avere un'equazione in sola t, si monta tuttavia: adoperisi pur anche il metodo di Eulero ad un' equazione di quarto grado completa e di coefficienti, ed ultimo termine molto complicati, qual è: $8A^2t^4 - 8A(2A^2 + B)t^3 + 4((A^2 + B)^2 + 2A^4)t^2 - 4A(A^4 + B^2)t + (A^2 - B)^3 = 0$: sciolta la quale, resta a compimento dell' opera di determinar q. Si manifesta dunque al confronto la semplicità , l'eleganza della industriosa riduzione da F. Luca praticata. Tanto è vero che la facilità, o difficoltà d'un problema dipende dalla maniera di considerarlo ; e secondo il torno che gli si dà sale spesso ad uno od altro grado, e che talvolta la indiretta via riesce più piana e comoda che la diretta. La mancanza dei diretti metodi di eliminazione obbligò F. Luca , o chiunque altro siane stato il primo, all'ingegnoso ripiego felice; nè di raro avviene che la mancanza di diretti mezzi, sforzando l'ingegno, fa da esso sortire dei ripieghi migliori. Ma è ora di finirla su la dottrina di F. Luca sulle proporzioni e proporzionalità : o, come noi diciamo , ragioni e proporzioni. La materia però che segue ne è un prezioso frutto.

Le regole *Elcatayn*, cioè delle false posizioni, sono il bel soggetto della distinzione settima. I libri più moderni di aritmetica non pareggiano certamente l'estensione, e la profondità con cui sono quivi trattate. Non solo nella oggidì usata maniera, ma in altra eziandio, e più semplice e madre di essa, insegna trarsi dalla doppia falsa posizione il vero. E ciò che reca maggior piacere, e di soddisfazione riesce ad un animo che prenda diletto in vedere le dottrine nel loro intimo e nella loro nascita, si è l'origine dell'ordine de'suoi insegnamenti dal tenore delle dimostrazioni traluccnte dell'artificio della doppia falsa posizione, come dalla semplice ad essa si fece progresso; qual fu la primaria, e quale la derivata maniera di cavarne il vero. L' artificio della semplice falsa posizione , e quello della doppia sono ugualmente sulle proporzioni fondati, e per esse diretti; e giustamente quindi ne pone F. Luca in immediato seguito di quello delle proporzioni lo spiegamento. È costituito l'artificio della falsa posizone semplice in questa proporzione: *risultato della posizione falsa sta ad essa posizione falsa, come risultato proposto della quantità cercata vera ad essa quantità*. Ma questa proporzione stessa esprime la natura dei problemi da potersi con essa sciogliere, e il limite dell'artificio. Bisogna inventare una proporzione di maggiore sfera. Eccola; aggiungendo ad un' altra seconda falsa posizione : *differenza dei risultati delle due false posizioni alla differenza di esso loro , come la differenza di uno dei risultati falsi dal proposto risultato alla differenza* *della falsa posizione che ha dato esso risultato falso dalla quantità atta ad avverare il proposto risultato.* In questa proporzione è originalmente posto, e tutto contiensi l'artificio della falsa posizione doppia. La proporzione è semplice, e nel tempo stesso generale, abbracciando senza distinzione tutti i casi e combinazioni dei risultati falsi, che ambi eccedino il risultato proposto, o ambi da essi manchino, od uno ecceda, l'altro manchi. Distinguendo ora i casi, riflettasi che nei casi dei risultati similmente falsi per eccesso ambi, od ambi per difetto, la differenza loro è una cosa stessa che la differenza degli errori loro dal risultato proposto; e che nel caso della dissimile falsità, cioè dell'errar un risultato per eccesso, l'altro per difetto, la differenza loro importa la somma dei loro errori dal proposto risultato. Ne verran quindi dalla general proporzione posta le due particolari che seguono: 1.ª *Differenza dal maggiore al minore errore simile (la qual differenza è approssimamento al vero risultato proposto) sta alla differenza delle false posizioni similmente erranti, come uno degli errori (è meglio prendere il minore) alla differenza tra una delle false posizioni (la meno errante) e la vera qualità cercata.* 2.ª *Somma degli errori dissimili alla differenza delle posizioni dissimilmente erranti, come uno degli errori alla differenza tra la posizione che lo ha prodotto e la vera quantità ignota.* Se chiaminsi p, p' le false posizioni; e, e' i rispettivi errori; x la vera quantità ignota, e si distingue per p la posizione che dà il minor error simile, o il solo in difetto nel caso dei dissimili, le due proporzioni si esprimono ristrettamente così: 1.ª $e' - e : \pm p \mp p' :: e : \pm x \mp p$; 2.ª $e' + e : p' - p :: e : x - p$. Dalla prima moltiplicando gli estremi e i medi, uguagliando i prodotti, e liberando x, ne viene $x = \dfrac{e'p - ep'}{e' - e}$. Dalla seconda ne esce $x = \dfrac{e'p + ep'}{e' + e}$. Ecco le regole usitate; ma elleno sono regole figlie delle due particolari proporzioni, e la comune loro origine è la proporzione generale. F. Luca, stabilite le particolari proporzioni, dimostra sinteticamente le regole che ne provengono con un ritorto maneggio della 1ª del 2.° di Euclide. Basti ad esempio la dimostrazione della prima per il caso in cui ambi gli errori sono in difetto. Per l'accennata di Euclide $e'p = (e + (e' - e))\,p = ep + (e' - e)p = e(p' + (p - p')) + (e' - e)\,p = ep' + e(p - p') + (e' - e)\,p$. Ma per la prima proporzione $e(p - p') = (e' - e) \times (x - p)$; dunque $e'p = ep' + (e' - e)(x - p) + (e' - e)p = ep' + x(e' - e)$, e quindi $\dfrac{e'p - ep'}{e' - e} = x$.

Questa raggirata sintetica dimostrazione è certamente mal sostituita alla immediata analitica semplicissima deduzione. Ciò che a ragione F. Luca avverte, a caso per caso ripete e inculca, si è non aver luogo esse regole della doppia falsa posizione, se non abbiano luogo le stabilite proporzioni, dirò così madri, non potersi sciogliere per mezzo delle medesime regole i problemi, la natura de' quali non sia tale, quale le proporzioni madri la esigono. Potrei interrogare, se oggidi si osservi fedelmente questo avvertimento? L'esame di questo punto occuperebbe qui troppo spazio, e per ciò ad altro tempo e luogo riserbo il darlo.

Dopo applicate le regole ad alquanti problemi, stende F. Luca, a guida in genere ed ajuto di chi debbane sciogliere, una schiera di ben sessantasei proposizioni col titolo: *Conclusiones seu evidentie proportionalium et improportionaliu, quantitatum indifferenter posite etvtiliter.* Sono le prime undici quelle del 2.° di Euclide trasportate da linee a quantità in genere, e coll'esempio de'numeri dilucidate. Vi ha la quarta $A^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, ampliata alla divisione di A in quattro parti, e trasportata ad $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. I vari aspetti che ad essa quarta, ed alla quinta $\left(\frac{1}{2}A\right)^2 = \left(\frac{1}{2}A + z\right)\left(\frac{1}{2}A - z\right) + z^2$ dar si possono, forman l'oggetto di alcune altre. Versano molte sull'espressione delle due quantità a, b per la somma $a + b = A$, ed uno dei seguenti dati $ab = m$, $a^2 \pm b^2 = m$, $a^2 + b^2 \pm ab = m$, $ab + a - b = m$, $\sqrt{a}\sqrt{b} = m$, $\sqrt{a} + -\sqrt{b} = m$, $ab = m + \sqrt{m}$, o per uno dei due $a^2 \pm b^2 = m$, combinato con $ab = n$. A queste affine è la proposizione che essendo $a + b = A$, $(b + 2\sqrt{b})^2 = ab$, ed $a > b$, sarà $a - 2\sqrt{a} = b + 2\sqrt{b}$. Lascio il teorema $\frac{a+1}{a} \times a + 1 = \frac{a+1}{a} + a + 1$ con altri più semplici ancora, per passare ad esporre piuttosto le proposizioni di indeterminato modo, che a quelle sinora accennate di modo determinatissimo frammischia. Quali sono: che dovendo essere $A = a + b + c$, e $c^2 = ab$, preso ad arbitrio, e dovranno essere $\frac{1}{2}(A - c) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}(A - c)^2 - c^2\right)}$ le forme ed i valori di a, b: Che per aver $A = a + b + c$, ed insieme $a^2 = b^2 + c^2$, presa arbitrariamente c, conviene assegnare ad a, b li valori espressi per $\frac{1}{2}(A - a) - \sqrt{\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}(A - a)^2\right)}$; che volendo $A = a + b + c$, ed $a^2 + b^2 + ab = c^2$; dato un valore a piacere alla quantità c, quelli di a, b saranno contenuti in $\frac{1}{2}(A - c) + \sqrt{\left(c^2 - \frac{3}{4}(A - c)^2\right)}$. Che se pongasi $A = a + b + c + d$, ed $a^2 + b^2 = 2(c^2 + d^2)$, sarà $d = c - b$; ma qui F. Luca ommette una condizione, senza la quale l'asserto non si avvera, cioè che c sia medio proporzionale aritmetico fra a, b; onde $2c = a + b$. Difatto dalla seconda equazione $2d^2 = a^2 + b^2 - 2c^2 = b^2 - 2c^2 + (A - b - c - d)^2$ che non può ridursi alle tre sole quantità d, c, b se non data una terza condizione. Sia $2c = a + b$, e allora $A = 3c + d$, e quindi $2d^2 = b^2 - 2c^2 + (2c - b)^2$

$= 2b^2 - 4bc + 2c^2$, e conseguentemente $d = c - b$. Chiaro si ravvisa in questa serie di proposizioni il frutto di un'analisi di problemi di secondo grado, nè determinati solo, ma indeterminati eziandio. Non vi ha dubbio che questo frutto sia qui contro regola da sua pianta staccato, ed al conoscimento di essa preposto. Nè altro oggetto veder vi so, se non forse quello, che non restassero senza assaggiarne in qualche modo la fecondità i pratici che non erano in grado di avanzarsi a conoscerla intimamente, seguendo lui nella Distinzione ottava, dove, dopo averne più volte stimolato il desiderio di essa, rimettendo alle dottrine, ascende finalmente a spiegarla.

Salendo F. Luca alla *parte*, com'egli si esprime, *maxime necessaria alla pratica de arithmetica e anche de geometria detta dal vulgo communemente Arte maggiore, over la regola de la cosa over Algebra e Almucabala, secondo noi detta pratica speculatica* incomincia dall' additare l'origine dei termini *più e meno*, e li deriva dalla necessità di *assettare* quantità di specie diversa di grado differente razionali e sorde, linee, superficie e solidi. È da considerarsi attentamente il vocabolo *assettare* per la larga idea che presenta, e che dal seguito del discorso di F. Luca apparisce essere stata da prima affissa ai termini *più*, *meno* segnati da lui colle rispettive iniziali p, m : scorgesi cioè che il primitivo aspetto sotto cui considerati furono, piuttosto che di indicii di vera addizione, e di vera sottrazione, fu quello di meri mezzi per formare un misto, mettendo insieme, e disponendo in una serie quantità disgiunte di specie e grado. Di fatto in un complesso di podestà dissimili quale, degli odierni segni servendomi, $a + bx - cx^2 + dx^3 \ldots$ sino a che i termini si concepiscano veramente dissimili, non si può certamente concepire tra loro un vero legame, ma solo un successivo collocamento : concepir non si può per conto alcuno, che il segno $+$ affisso al bx significhi addizione di esso al primo termine a; nè che il segno $-$ prefisso al termine cx^2 indichi sottrazione di esso lui dai termini che gli precedono, non potendosi in verun modo concepire addizione e sottrazione tra quantità di diverso grado, linee, superficie, solidi : onde altro non resta che concepirvi una successiva considerazione di diverse grandezze. Ma il contemplare i termini d'un moltinomio, come eterogenei, non può aver luogo che in quei moltinomi vaghi, e d'indefinito valore, che ad arbitrio compongonsi per dare esempi di algebraiche operazioni. In quelli determinati moltinomi che dai problemi risultano in forma di equazione $0 = a + bx - cx^2 + dx^3 \ldots$, siccome i termini devono gli uni cogli altri distruggersi; così non si può nei segni $+$, $-$ non concepire un vero significato di addizione, e di sottrazione. Lo che non potendo essere, senza che i termini siano omogenei, convien dire che i termini di una equazione, sebbene in apparenza fra loro eterogenei, in realtà però siano d'uno stesso grado, e in quelli che di minor grado appariscono, un fattore nascondasi che a quelli di più elevato esplicito grado gli assomigli. E qual può essere questo fattore, se non è l'unità alla conveniente podestà innalzata, onde fare il compenso, e mettere in un livello i termini tutti? Per tal via certissimamente inferirono gli analisti, progresso facendo, l'occulta tanto, quanto necessaria omogeneità dei termini di una equazione. Senza il conoscimento di essa, e del come sussista, non poterono i primi algebristi, rapporto alle equazioni ed insieme rapporto al più, al meno, avere che delle idee confuse ed incoerenti, non potendo concepire vere le addizioni, le sottrazioni, le uguaglianze, quantunque volte loro si presentavano fra termini di dissimile aspetto, come sarebbe nella pur semplicissima equazione $x^2 = x + c$. Poichè di quattro termini in continua proporzione, per esempio $\div$ 1: 2 : 4 : 8, è in arbitrio il prendere per primo, o il minimo, e ascendere, o il massimo, cioè l'8, e discendere; e poichè le espressioni algebraiche $t + tq + tq^2 + tq^3 = A$, $t^2 + t^2q^2 + t^2q^4 + t^2q^6 = B$ servono all' uno e all'altro caso; per ciò si vede ben chiaro che la risoluzione non determinata all'uno più che all'altro, deve comprenderli tutti e due, e conseguentemente darci due valori di t, e due corrispondenti di q: ma non si vede perchè i valori di t abbiano ad esser quattro, o la equazione di esso salir debba al quarto grado. Il che mena ad inferire che siavi in essa un fattor di secondo grado inutile. E così è di fatto. Dimostra ciò primieramente l'esempio. Poichè, supposti i quattro numeri in continua proporzione come sopra, si avrà $A=15$, $B=85$, e l'equazione in t, $t^4 - \frac{535}{15}t^3 + \frac{197350}{2-15^2}t^2 - \frac{57850}{2-15}t + \frac{2744000}{8-15^2} = 0$. La quale si verifica tanto per $t=1$, quanto per $t=8$, e per conseguenza è divisibile pel fattore $t^2 - qt + 8 = 0$, e l'altro fattore di secondo grado che dalla divisione risulta, è $t^2 - \frac{26}{3}t + 190\frac{5}{9} = 0$, il quale non dà risoluto che due valori di t immaginari. Si può facilmente costruire il trinomio dei due valori di t veri, prevalendosi della risoluzione insegnata da F. Luca, cioè sommando le espressioni delli due termini primo ed ultimo di u, e di z dei quattro continuamente proporzionali. Essa somma presa con segno negativo sarà il coefficiente del secondo termine del trinomio, ed il prodotto delle medesime espressioni formerà il terzo termine. Ma nella somma che si troverà essere $A - n$, bisogna sostituire il valore di n tirato dalla equazione di esso; ed il prodotto che risulta $= \frac{n^3}{A + 2n}$, è bene risolverlo nella serie $\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{4}An + \frac{1}{8}A^2 - \frac{1}{8}\frac{A^3}{A + 2n}$; e sostituiti i valori di n^2, n togliere dal quarto termine il denominatore irrazionale: si avrà così facendo $t^2 - \frac{2A^2 + B - \sqrt{(A^2 - B)^2 + A^4}}{2A}t + \frac{2A^4 - A^2B + B^2 - (A^2 + B)\sqrt{(A^2 - B)^2 + A^4}}{4A^2} = 0$, che sarà il trinomio utile, ossia che ci darà i due valori di t reali.

E per esso dividendo l'equazione in t di quarto grado per l'eliminazione trovata, si ricaverà l'altro trinomio inutile, ed intruso $t^2 - \frac{2A^2 + B + \sqrt{(A^2 - B)^2 + A^4}}{2A} t + \frac{2A^4 - A^2B + B^2 + (A^2 + B)\sqrt{(A^2 - B)^2 + A^4}}{4A^2} = 0$. La realità de' valori di t nel primo trinomio esige $A^6 + 9A^2B^2 < 6A^4B + 4B^3$, o sia $A^2(A^2 - 3B)^2 < 4B^3$. Ecco una proprietà di rapporto tra la somma A di quattro quantità continuamente proporzionali, e la somma B dei quadrati loro.

Levando dall'equazione di quarto grado in t il secondo termine, risulterebbe facendo $t = w + \frac{2A^2 + B}{4A} w^4 + \frac{B^2 - 4A^2B}{8A^2} w^2 + \frac{B^3 - 2A^2B^2 + 2A^4B - 8A^6}{8A^3} w - \frac{B^4 + 28A^2B^3 + 34A^4B^2 + 88A^6B + 32A^8}{8^2A^4} = 0$; e supponendo questa il prodotto di $(w^2 + ew + f)(w^2 - ew + g)$, si avrebbe (*Paoli* pag. 116, tom. 1°): $e^6 + \frac{B^2 - 4A^2B}{4A^2} e^4 + \frac{2B^4 + 20A^2B^3 + 50A^4B^2 + 88A^6B + 32A^8}{4^2A^4} e^2 - \left(\frac{B^3 - 2A^2B^2 + 2A^4B - 8A^6}{8A^3}\right)^2 = 0$. O facendo $e^2 = m$, $m^3 + \frac{B^2 - 4A^2B}{4A^2} m^2 + \frac{2B^4 + 20A^2B^3 + 50A^4B^2 + 88A^6B + 32A^8}{4^2A^4} m - \left(\frac{B^3 - 2A^2B^2 + 2A^4B - 8A^6}{8A^3}\right)^2 = 0$. Ma un'equazione $m^3 + hm^2 + km - l = 0$, levando il secondo termine con fare $m = \psi - \frac{1}{3} h$, diviene $\psi^3 + \left(k - \frac{1}{3} h^2\right)\left(\psi + \frac{2}{27}\right) h^3 - \frac{1}{3} hk - l = 0$.

Dunque il togliere al più ed al meno frapposti ai termini d'un moltinomio i significati di vera addizione, di vera sottrazione è un considerare i termini privi di un vero legame, e solo tra loro riferiti per successione si approssima al contemplarli isolati al riguardare il più ed il meno, non come relazioni tra termine che precede e termine che segue, ma come affezione del termine cui è prefisso, e come qualificazione sua. Quindi ecco F. Luca concepir solitaria una quantità affetta del meno, e gettar l'idea della quantità negativa, dicendo per esempio che *meno 4 è manco del nulla e per consequenza debito.* A provar però che meno moltiplicato con meno produce più, ricorre a quantità complesse, e va tessendo la dimostrazione a puntino la stessa che anche oggidì è la più usitata, e la più concordemente riconosciuta di tutta e palpabile evidenza, essendosi combattute o stimate più ingegnose che sode e persuasive quelle modernamente tentate in quantità negative solitarie. F. Luca la illustra geometricamente con un rettangolo in quattro diviso nella moltiplica di due quantità irrazionali della forma $a - \sqrt{b}$, $c - \sqrt{d}$ nel trattato terzo della Distinzione, che vo percorrendo; giacchè come una Distinzione qualunque è in più trattati suddivisa, così quella che abbiamo per le mani, sei ne comprende, al primo de'quali appartiene ciò, che sin qui è per me stato trascelto. Nel trattato secondo si ha quanto risguarda la natura e il maneggio dei radicali incomplessi o monomi; e l'esame, se siano fra loro comunicanti per un numerico rapporto in essi involto, e da potersene estrarre; e la riduzione di quelli di grado diverso al grado stesso, ed ogni sorta di calcolo. Nel trattato terzo, offerto dapprima un prospetto delle linee del 10° di Euclide, si occupa di proposito su i sei binomi ed i sei recisi, insegnando non solo a moltiplicarli e dividerli fra di loro, e gli uni cogli altri; ma, ciò che più monta, a cavarne di ciascuno la radice. Generali ne sono le regole, e fondate su i due principii: 1° che nel quadrato $a^2 \pm 2ab + b^2$ di un qualunque binomio o reciso $a \pm b$, la somma de'quadrati $a^2 + b^2$ è maggiore del doppio rettangolo $2ab$: 2.° che il prodotto di essi due quadrati si uguaglia alla quarta parte del quadrato di esso doppio rettangolo, cioè $a^2 \times b^2 = \left(\frac{2ab}{4}\right)^2 = a^2b^2$; il che è evidente. Per tali principii, proposto un binomio o reciso qualunque $P \pm \sqrt{Q}$, del quale si domandi la radice, considerando $P \pm \sqrt{Q}$ come quadrato di altro binomio o residuo $\sqrt{p} \pm \sqrt{q}$, è certo che, confrontati i due termini P, $\sqrt{Q}$, ovvero i quadrati loro P^2, Q, il maggiore o più potente di essi termini contener deve la somma dei quadrati dei due termini della radice, ed il minore il doppio loro rettangolo; ed è altrettanto certo che, diviso lo stesso maggior termine in due parti, il prodotto loro uguagliar si deve alla quarta parte del quadrato del termine minore. Ecco dunque le due regole per estrarre la radice dai binomi e dai recisi, siccome dai medesimi principii derivate così insieme unite. *Si divida il maggior termine in due parti le quali moltiplicate fra loro producano la quarta parte del quadrato del minor termine : la somma delle radici di tali parti sarà la radice del proposto Binomio; e la differenza la radice del Reciso.* A dividere il maggior termine in due parti che abbiano la condizione stabilita, suggerisce e l'arte del *catayn*, e l'arte della *cosa*. È bene mostrare il modo, nel quale di questa fa applicazione con un esempio. Sia da estrarre la radice da $7 + \sqrt{112}$: il termine maggiore, o più potente è $\sqrt{112}$: sia x una delle sue parti, e conseguentemente $\sqrt{112} - x$ l'altra di tal condizione, che $x \times (\sqrt{112} - x) = x\sqrt{112} - x^2$ sia $= \frac{7^2}{4} = 12\frac{1}{4}$. Levando il radicale, si ascenderà all'equazione $x^4 - 87\frac{1}{2}x^2 = -150\frac{1}{16}$; d'onde si cava $x = \sqrt{85\frac{3}{4}}$. Per la qual cosa le due parti saranno $\sqrt{85\frac{3}{4}}$, e $\sqrt{112} - \sqrt{85\frac{3}{4}}$, e la somma delle radici di queste, cioè $\sqrt{\sqrt{85\frac{3}{4}}} + \sqrt{\left(\sqrt{112} - \sqrt{85\frac{3}{4}}\right)}$, sarà la radice del proposto binomio $7 + \sqrt{112}$. Ma F. Luca si rimprovera d'esser ricorso all'arte della *cosa* per dividere $\sqrt{112}$ nelle convenienti parti, avendo in pronto una maniera più semplice somministrata dalla 5ª del 10 di Euclide. Giusta la quale, se una grandezza qualunque M si divida in parti uguali $\frac{1}{2}M$, $\frac{1}{2}M$, ed in parti disuguali $\frac{1}{2}M + z$, $\frac{1}{2}M - z$, si ha il prodotto di queste, più il quadrato della intermedia z eguale al quadrato della metà $\frac{1}{2}M$, cioè $\left(\frac{1}{2}M+z\right)\left(\frac{1}{2}M-z\right)+z^2=\frac{1}{4}M^2$; onde se ne tira tosto $z^2=\frac{1}{4}M^2-\left(\frac{1}{2}M+z\right)\left(\frac{1}{2}M-z\right)$. Dovendosi per tanto dividere $\sqrt{112}$ in due parti, il cui prodotto sia $\left(\frac{1}{2}7\right)^2=12\frac{1}{4}$, si avrà $z^2=\left(\frac{1}{2}\sqrt{112}\right)-12\frac{1}{2}=\left(\sqrt{\frac{112}{4}}\right)^2-12\frac{1}{4}=(\sqrt{28})^2-12\frac{1}{4}=28-12\frac{1}{4}=15\frac{3}{4}$; e $z=\sqrt{15\frac{3}{4}}$. Laonde le due ricercate parti saranno $\sqrt{28}+\sqrt{15\frac{3}{4}}$, $\sqrt{28}-\sqrt{15\frac{3}{4}}$; e la somma delle loro radici $\sqrt{\left(\sqrt{28}+\sqrt{15\frac{3}{4}}\right)}+\sqrt{\left(\sqrt{28}-\sqrt{15\frac{3}{4}}\right)}=\sqrt{(7+\sqrt{112})}$. Sembra questa radice diversa dalla prima ritrovata coll'arte della *cosa*, ma in realtà non è che un diverso aspetto di essa, essendole uguale non solo in totalità, ma anche a parte a parte, come si vedrà riducendo: poichè $\sqrt{85\frac{3}{4}}=\frac{7}{2}\sqrt{7}$, $\sqrt{28}=2\sqrt{7}$, $\sqrt{15\frac{3}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt{7}$, e conseguentemente $\sqrt{28}+\sqrt{15\frac{3}{4}}=\frac{7}{2}\sqrt{7}=\sqrt{85\frac{3}{4}}$. Del pari $\sqrt{28}-\sqrt{15\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{7}=112-\sqrt{85\frac{3}{4}}=4\sqrt{7}-\frac{7}{2}\sqrt{7}$. Per lo che si fa eziandio palese, l'una e l'altra radice ristrignersi a $\sqrt{\frac{7}{2}\sqrt{7}}+\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{7}}=\sqrt{(7+\sqrt{112})}=\sqrt{(7+4\sqrt{7})}$.

Procede F. Luca a dedurre dalla stessa 5ª del 10 di Euclide anche un'altra maniera di determinare la differenza z delle due parti, che dice più breve, e per linee generalmente dimostra. Convertendo a grazia di compendio le linee in algebraici simboli, riflette che chiamato M il maggiore, m il minor termine di un binomio e, posta la differenza delle potenze loro $M^2-m^2=D$, ne segue $M^2=m^2+D$ ed $\frac{1}{4}M^2=\frac{1}{4}m^2+\frac{1}{4}D$: ma per la citata di Euclide $\left(\frac{1}{2}M+z\right)\left(\frac{1}{2}M-z\right)+z^2=\frac{1}{4}M^2$; dunque $=\frac{1}{4}m^2+\frac{1}{4}D$; e giacchè per la condizione del problema $\left(\frac{1}{2}M+z\right)\left(\frac{1}{2}M-z\right)=\frac{1}{4}m^2$, resterà $z^2=\frac{1}{4}D$, e $z=\sqrt{\frac{1}{4}D}$ $=\sqrt{\frac{1}{4}(M^2-m^2)}$. Così nell'esempio addotto del binomio $7+\sqrt{112}z$ $=\sqrt{\frac{1}{4}(112-49)}=\sqrt{\frac{63}{4}}=\sqrt{\frac{9.7}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt{7}$.

Ho poi scelto a bello studio un binomio qual $7+\sqrt{112}$, che avendo il termine minore commensurabile, ed incommensurabile il maggiore, detto viene da F. Luca dietro le distinzioni di Euclide *binomio secondo*, per far vedere quanto dalla legge che F. Luca tenne, si dilunghi l'odierno metodo, e quanto, dalle parti per lui determinate della radice, differiscano sino in natura le parti di essa risultanti dal moderno procedere, che è questo. Si suppone $\sqrt{(P+\sqrt{Q})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$: onde quadrando $P+\sqrt{Q}=x+y+2\sqrt{xy}$, che per ragione di paragonare razionali a razionali, irrazionali ad irrazionali, si spezza nelle due $x+y=P$, $2\sqrt{xy}=\sqrt{Q}$; dalle quali quadrando, ne vengono $x^2+2xy+y^2=P^2$, $4xy=Q$; e sottraendo questa da quella, $x^2-2xy+y^2=P^2-Q$; e quindi estraendo la radice $x-y=\sqrt{(P^2-Q)}$: onde sommando con $x+y=P$; e da essa sottraendo, ne risultano alla fine $x=\frac{P+\sqrt{(P^2-Q)}}{2}$, $y=\frac{P-\sqrt{(P^2-Q)}}{2}$, e per ciò $\sqrt{(P+\sqrt{Q})}=\sqrt{\frac{P+\sqrt{(P^2-Q)}}{2}}+\sqrt{\frac{P-\sqrt{(P^2-Q)}}{2}}$. Vedi Eulero Elem. di Alg. §. 669 e seguenti. Taluni col supposto $\sqrt{(P+\sqrt{Q})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ congiungono come intrinsecamente ad esso connesso il supposto $\sqrt{(P-\sqrt{Q})}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$; e moltiplicando l'una coll' altra queste due equazioni, ne tirano immediatamente $\sqrt{(P^2-Q)}=x-y$, e proseguono poi come sopra. E quelli ancora che a tal compendio della posizione $\sqrt{(P-\sqrt{Q})}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ non valgonsi, la stabiliscono come di sua natura in ogni caso la propria allo scioglimento di $\sqrt{(P-\sqrt{Q})}$, e la corrispondente, anzi di necessità conseguente alla $\sqrt{(P+\sqrt{Q})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$. Entriamo all'esame di questo moderno operare, e pensare. Fatto per tanto $P=7$, $Q=112$, ne provengono $x=\frac{7+\sqrt{(49-112)}}{2}$, $y=\frac{7-\sqrt{(49-112)}}{2}$; e riducendo $x=\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{-7}$, $y=\frac{7}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{-7}$, e per ciò $\sqrt{\left(\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{-7}\right)}+\sqrt{\left(\frac{7}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{-7}\right)}=\sqrt{\left(7+\sqrt{112}\right)}$. Sono qui dunque le parti della radice immaginarie, laddove coi metodi di F. Luca risultarono reali. E d'onde differenza cotanta? Dall'aver F. Luca tenuto ad inviolabile legge di prender per rappresentante della somma dei quadrati dalle due parti della radice cercata il termine del proposto binomio più potente, ancorchè irrazionale, e dal prendersi, con legge affatto contraria nel moderno metodo, per rappresentante di essa somma dei quadrati delle due parti della cercata radice il termine razionale, ancorchè meno potente. E qual di queste due leggi è la giusta, la conforme alla costituzione del quadrato di una radice di due parti composta? La prima senza dubbio. Il fare la somma dei quadrati parziali $x+y=P$, e il doppio rettangolo delle parti $2\sqrt{xy}=\sqrt{Q}$, nel caso che P è minore di $\sqrt{Q}$, ripugna con l'essere reale di $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, e necessariamente le tramuta in immaginarie; onde maraviglia non è che tali risultino. Le vere equazioni, e secondo natura sarebbero in tal caso le inverse $x+y=\sqrt{Q}$, $2\sqrt{xy}=P$; dalle quali quadrando, si ha $x^2+2xy+y^2=Q$; $4xy=P^2$; e sottraendo $x^2-2xy+y^2=Q-P^2$; ed estraendo la radice $x-y=\sqrt{(Q-P^2)}$; e sommando; e sottraendo questa da $x+y=Q$, si ottengono $x=\dfrac{\sqrt{Q}+\sqrt{(Q-P^2)}}{2}$; $y=\dfrac{\sqrt{Q}-\sqrt{(Q-P^2)}}{2}$, e quindi $\sqrt{\left(\sqrt{\frac{1}{4}Q}+\sqrt{\frac{1}{4}(Q-P^2)}\right)}+\sqrt{\left(\sqrt{\frac{1}{4}Q}-\sqrt{\frac{1}{4}(Q-P^2)}\right)}=\sqrt{(P+\sqrt{Q})}$. Nella qual formola, sostituiti i valori $P=7$, $Q=112$, si trova $\sqrt{\left(\sqrt{28}+\sqrt{15\frac{3}{4}}\right)}+\sqrt{\left(\sqrt{28}-\sqrt{15\frac{3}{4}}\right)}=\sqrt{(+7\sqrt{112})}$, risultato e in totalità e nelle parti e nella natura, e nella forma, e nella grandezza di ciascuna affatto lo stesso che quello proveniente dai metodi secondo e terzo di F. Luca, semplicissimamente dedotti dalla 5ª del 2° di Euclide. E che! È dunque vizioso il moderno metodo? Non si può a meno di non riconoscerlo illegittimamente esteso dal suo al non suo caso. Giusto è nel caso di $P>\sqrt{Q}$; ma altrettanto alla naturale maggioranza della somma dei quadrati sopra il doppio rettangolo delle parti ripugnante nel caso di $P<\sqrt{Q}$. Nè vale, per così spezzare la equazione $x+y+2\sqrt{xy}=P+\sqrt{Q}$, la ragione che adducesi, di uguagliar razionali a razionali, irrazionali ad irrazionali. E chi vi dice che $x+y$ sia razionale, se ignota è la qualità, non meno che la quantità di x, di y, e la qualità e quantità loro sono appunto le due cose che si cercano? L'unica cosa che si sa, è che $x+y$ deve essere $>2\sqrt{xy}$; e questa scienza è quella che regger deve lo spezzamento dell'equazione $x+y+2\sqrt{xy}=P+\sqrt{Q}$, spezzandola non sempre in un modo, ma secondo i casi diversi diversamente; uguagliando sempre $x+y$ a quello dei due termini P, $\sqrt{Q}$ che è il più potente, e $2\sqrt{xy}$ al meno potente. Il non distinguere i casi, il rendere generale ciò che è di natura sua particolare, conduce agli immaginari. Ben però è vero che, sebbene immaginarie siano le parti $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, la somma ciò nondimeno loro è reale, distruggendosi per la contrarietà de'segni i membri immaginari che involgono. Il che rendesi manifesto, se per mezzo della Newtoniana formola svolgansi separatamente in serie i due radicali

$\sqrt{\left(\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{-7}\right)}$, $\sqrt{\left(\frac{7}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{-7}\right)}$: indi si sommino insieme le due serie: poichè, elisi dai contrari segni i termini contenenti l'immaginario $\sqrt{-7}$, non resterà che la serie di reali termini (S) $2\left(\left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2-4}\cdot\frac{3^2}{2^{\frac{1}{2}}-7^{\frac{1}{2}}}-\frac{3.5}{2-4.6-8}\cdot\frac{3^4}{2^{\frac{1}{2}}.7^{\frac{3}{2}}}+\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8.10.12}\cdot\frac{3^6}{2^{\frac{1}{2}}-7^{\frac{5}{2}}}\dots\right)$.

Vero è altresì essere in quantità il risultato $\sqrt{\left(\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{-7}\right)}+\sqrt{\left(\frac{7}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{-7}\right)}=\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{7}+\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{7}$, tutto chè le parti dell'uno, siccome in natura, così siano in quantità differenti dalle parti dell'altro, formando i quadrati delle parti del primo la somma 7, e quelli delle parti del secondo $4\sqrt{7}$, ossia $\sqrt{112}$; e reciprocamente il doppio rettangolo delle parti prime $\sqrt{112}$, e il doppio rettangolo delle seconde: dal che apparisce tutt'insieme essere disuguali le parti, e la stessa delle une e delle altre la somma, il quadrato della quale, importando il congiungimento dei quadrati e del doppio rettangolo delle parti, riesce sempre la stessa. Ciò tutto vero; ma comecchè reale in fondo, e giusta in quantità la moderna radice a chi piacer può l'immaginario suo aspetto, la composizion sua d' immaginarie parti, a confronto di quella di F. Luca di parti reali composta, senza bisogno d'essere in infinite serie svolta, dante a dividere la realità sua, quale in fondo, tale in aspetto? Resta a dire sulla connessione che concepir si suole tra la posizione $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{(P+\sqrt{Q})}$, e la posizione $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{(P-\sqrt{Q})}$; così che la seconda sia della prima conseguenza. Per quanto all'intelletto mio si mostra, la connessione è naturale nel caso di $P>\sqrt{Q}$; poichè in tal caso $\sqrt{(P-\sqrt{Q})}$ è non meu reale, che $\sqrt{(P+\sqrt{Q})}$; e rappresentando in ambidue $\sqrt{Q}$ il doppio rettangolo delle parti della radice, il diverso segno ad esso $\sqrt{Q}$ prefisso, non può altro importare che segno corrispondentemente diverso tra le parti della radice: laonde se $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{(P+\sqrt{Q})}$, per giusta, anzi necessaria conseguenza sarà $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{(P-\sqrt{Q})}$; e moltiplicando fra loro queste due equazioni, ne verrà senza dubbio a prodotto $x-y=\sqrt{(P^2-Q)}$, essendo $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ nell'una e nell'altra equazione le stesse. Ma consideriamo il contrario caso di $P<\sqrt{Q}$: resta anche in questo $\sqrt{(P+\sqrt{})Q}$ reale; e posto $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{(P+\sqrt{Q})}$, il concetto che subito la mente si forma di $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ parti della reale $\sqrt{(P+\sqrt{Q})}$ si è, che siano esse pure ciascuna reali, e tali di fatto risultano, adoperato conveniente metodo. All'opposto $\sqrt{(P-\sqrt{Q})}$ è immaginario, e per ciò fatto $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{(P-\sqrt{Q})}$, l'intelletto comprende tosto che $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, in quanto parti dell'immaginario $\sqrt{(P-\sqrt{Q})}$, esser devono immaginarie. Dunque pe' primi concetti che *immediate* nell' animo destano le posizioni $\sqrt{x}$

$+\sqrt{y} = \sqrt{(P + \sqrt{Q})}$; $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{(P - \sqrt{Q})}$ le $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ sono nell'una di esse di natura ben differente che nell'altra tanto quanto dal reale è differente l'immaginario; di natura in somma onninamente contraria. E come dunque, moltiplicando le due equazioni fra loro, tirarne per prodotto $x - y = \sqrt{(P^2 - Q)}$, non altrimenti che se le $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ fossero nelle due equazioni del tutto le stesse? Non è ciò incoerente, ripugnante? Ma andando più a fondo, cerchiamo se le posizioni stesse siano connesse; se alla posizione $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{(P + \sqrt{Q})}$ sia nel caso $P < \sqrt{Q}$ conseguente la posizione $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{(P - \sqrt{Q})}$. L'esempio della conseguenza dalla prima alla seconda posizione nel caso $P > \sqrt{Q}$ non vale ad istruirci pel caso $P < \sqrt{Q}$: poichè nel primo caso, reali essendo del pari $\sqrt{(P + \sqrt{Q})}$, $\sqrt{(P - \sqrt{Q})}$, si sta nella stessa natura di quantità; ma nel caso secondo, essendo $\sqrt{(P + \sqrt{Q})}$ reale, $\sqrt{(P - \sqrt{Q})}$ immaginario, si passa da natura a natura di quantità affatto opposta; e si perde quel rapporto, quella ragion di conseguenza che prima si aveva. Convien ricorrere alla proprietà primaria stessa delle immaginarie quantità, e di là trarre lume. Or proprio è delle immaginarie quantità, che la somma dei quadrati di due di esse, qualunque forma, qualunque grado abbiano, sia minore del doppio rettangolo loro all'opposto di ciò che nelle reali avviene. Si osservi pertanto che se in $P + \sqrt{Q}$ il termine $+\sqrt{Q}$ è il maggiore, a rovescio in $P - \sqrt{Q}$ il termine $-\sqrt{Q}$ è il minore; laonde se $+\sqrt{Q}$ rappresenta la somma dei quadrati delle due reali parti della reale $\sqrt{(P + \sqrt{Q})}$, per l'opposto $-\sqrt{Q}$ rappresenterà la somma dei quadrati delle due immaginarie parti della immaginaria $\sqrt{(P - \sqrt{Q})}$. E poichè non vi ha nelle due somme altra differenza che di segno, essendo grandezza comune $\sqrt{Q}$; dunque non altra che di natura, di quantità non punto, sarà la differenza tra le reali parti $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ della $\sqrt{(P + \sqrt{Q})}$, e le immaginarie della $\sqrt{(P - \sqrt{Q})}$; e saranno in conseguenza queste quelle medesime tramutate in immaginarie, con prender x, y negative: saranno cioè $\sqrt{-x}$, $\sqrt{-y}$. Lo che ottimamente conviene, perchè il loro doppio rettangolo sarà uguale a quello delle $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, e conseguentemente del pari che esso rappresentato per P. Ed essendo poi questo positivo, il segno legante le parti $\sqrt{-x}$, $\sqrt{-y}$ non potrà essere che il $+$; e quindi a conchiudere, la genuina posizione a farsi sarà $\sqrt{-x} + \sqrt{-y} = \sqrt{(P - \sqrt{Q})}$. Rilevasi di qui eziandio potersi con un solo calcolo determinare e le reali $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, e le immaginarie $\sqrt{-x}$, $\sqrt{-y}$ ponendo $\sqrt{\pm x} + \sqrt{\pm y} = \sqrt{(P \pm \sqrt{Q})}$. Quadrando si ha $\pm x \pm y + 2\sqrt{xy} = P \pm \sqrt{Q}$, la quale si spezzi in due così: $\pm x \pm y = \pm \sqrt{Q}$, $2\sqrt{xy} = P$. Quadrando ambedue, ne vengono $x^2 + 2xy + y^2 = Q$, $4xy = P^2$; e sottraendo questa da quella, $x^2 - 2xy + y^2 = Q - P^2$; onde estraendo la radice $x - y = \sqrt{(Q - P^2)}$; e sommando con $x + y = Q$, e da essa sottraendo $x = \frac{\sqrt{Q} + \sqrt{(Q - P^2)}}{z}$, $y = \frac{\sqrt{Q} - \sqrt{(Q - P^2)}}{2}$, e finalmente $\sqrt{\pm(\frac{1}{2}\sqrt{Q} + \frac{1}{2}\sqrt{(Q - P^2)}} + \sqrt{}$

$\pm(\frac{1}{2}\sqrt{Q}-\frac{1}{2}\sqrt{(Q-P^2)}=\sqrt{(P\pm\sqrt{Q})}$. Applicando questa general formola al particolar $7\pm\sqrt{112}$, ne verrà $\sqrt{\pm\frac{7}{2}\sqrt{7}}+\sqrt{\pm\frac{1}{2}\sqrt{7}}=\sqrt{(7\pm\sqrt{112}}$ $=\sqrt{(7\pm4\sqrt{7})}$. Non è dunque la posizione $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{(P-\sqrt{Q})}$, ma sì la $\sqrt{-x}+\sqrt{-y}$ la posizione nel caso $P<\sqrt{Q}$ naturalmente connessa con la posizione $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{(P+\sqrt{Q})}$, come quella che con essa ha comune il termine rappresentante la somma dei quadrati delle due parti della radice comune il termine rappresentante il doppio loro rettangolo, comune il calcolo per determinare esse due parti della radice: e qual connessione maggiore? Nè mi si dica che altrettanto si verifica delle due posizioni $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{(P+\sqrt{Q})}$, $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{(P-\sqrt{Q})}$ nel moderno metodo, nel moderno spezzamento dell'equazione $x+y\pm2\sqrt{xy}=P\pm\sqrt{Q}$ nelle due $x+y=P$, $2\sqrt{xy}=\sqrt{Q}$. Sì: ma in tal metodo, con tale spezzamento nel caso $P<\sqrt{Q}$ si tramuta la natura delle parti della reale $\sqrt{(P+\sqrt{Q})}$, di reali volgendole in immaginarie con isconvolgere le rappresentazioni della somma dei quadrati, e del doppio rettangolo loro, attribuendo la prima rappresentazione al termine cui non può spettare che la seconda, e viceversa. Se dunque si vuol dire che connesse sono le due posizioni $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{(P+\sqrt{Q})}$, $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{(P-\sqrt{Q})}$, si riconosca almeno che la connessione è un arbitrio contro natura, laddove la connessione tra le due $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{(P+\sqrt{Q})}$, $\sqrt{-x}+\sqrt{-y}=\sqrt{(P-\sqrt{Q})}$ è necessario risultato di natura. Della $\sqrt{(P-\sqrt{Q})}$ nel caso $P<\sqrt{Q}$ non tratta F. Luca limitandosi alle sei apotemi, o secondo il dir suo, ai sei recisi di Euclide, nei quali tutti il termine sottratto è minore dell'altro. Non erasi peranche dagli algebristi fino a F. Luca incominciato a tener conto degli immaginari, e studiarne il maneggio riguardandoli solo come provenimenti e indizi d'impossibili problemi. Al presente che ad essi amasi di estendere il calcolo, io non poteva ommettere di trattarne, portatovi dall'esame delle due posizioni che si sogliono connettere. Ed ecco il frutto di questa digressione.

Nel caso $P>\sqrt{Q}$, sono naturalmente connesse le posizioni $\sqrt{x}\pm\sqrt{y}=\sqrt{(P\pm\sqrt{Q})}$. È giusto lo spezzamento di $x+y\pm2\sqrt{xy}=P\pm\sqrt{Q}$ nelle due equazioni $x+y=P$, $2\sqrt{xy}=\sqrt{Q}$. È legittima e congrua la formola di scioglimento $\sqrt{(\frac{1}{2}P+\frac{1}{2}\sqrt{(P^2-Q)}}\pm\sqrt{(\frac{1}{2}P-\frac{1}{2}\sqrt{(P^2-Q)}}=\sqrt{(P\pm\sqrt{Q})}$. Ma nel caso $P<\sqrt{Q}$ le posizioni naturalmente connesse sono $\sqrt{\pm x}+\sqrt{\pm y}=\sqrt{(P\pm\sqrt{Q})}$. Il giusto spezzamento di $\pm x\pm y+2\sqrt{xy}=\sqrt{(P\pm\sqrt{Q})}$ è nelle due $x+y=\sqrt{Q}$, $2\sqrt{xy}=P$; e la formola di scioglimento legittima e congrua $\sqrt{\pm(\frac{1}{2}\sqrt{Q}+\frac{1}{2}\sqrt{(Q-P^2)}}+\sqrt{\pm(\frac{1}{2}\sqrt{Q}-\frac{1}{2}\sqrt{(Q-P^2)}}=\sqrt{(P\pm\sqrt{Q})}$.

Ritorniamo sul volume di F. Luca. Non si arresta egli a quei binomi, e recisi che hanno uno o ambi i termini radicali di primo ordine, ma si avanza a quelli, ne'quali sianvi termini radicali di secondo ordine, o radici di radici: nè qui ancora si ferma, ma innoltrasi ai trinomi composti di termini razionali, e radicali semplici e duplicati, additando i binomi o recisi, dai quali quadrando posson nascere, e qual ne risulti la costituzion loro; ed insegnando per ultimo a dividere una quantità di qualsiasi sorta per una quantità trinomiale, convertendo questa in razionale. Diffuso è questo trattato di F. Luca; ma adduce egli medesimo sul principio la ragione di spiegarne con accuratezza la materia, avvisando esser essa *alla pratica algebratica introduttoria;* e veramente anche l'estrazione della radice dei binomi e dei recisi eseguita col semplice uso della 5ª del 2º di Euclide potevasi all'arte algebratica premettere a spianare il corso, a preparare l'ultimo passo di quei problemi, che o espressamente la contenessero tra le condizioni loro, o nello scioglimento ad essa fossero per condurre. Per apparecchio all'arte medesima richiama F. Luca a memoria nel trattato quarto la scala dei gradi algebratici, stesa in una tavola generale, spiegante i caratteri nell'opera usati all' articolo undecimo del trattato primo della Distinzione quinta. I gradi colà schierati sott'occhio sono a 30; ma avverte potersi la scala continuare a piacere in infinita geometrica progressione; e qui aggiugne una lunga tavola dei gradi prodotti, moltiplicando ciascuno dei 30 là esposti coi suoi superiori. La nota comune de'gradi non è già la lettera iniziale G, ma sì il simbolo ℞, al quale viene appresso in aritmetica progressione il numero conveniente al grado, e dopo il singolare suo nome. Ecco un pezzo della scala: ℞ 1ª *numero.* ℞ 2ª *cosa.* ℞ 3ª *censo.* ℞ 4ª *cubo.* ℞ 5ª *censo de censo.* ℞ 6ª *primo relato.* ℞ 7ª *censo de cubo,* o *cubo de censo.* ℞ 8ª *secondo relato* . . . . ℞ 11ª *censo di primo relato* . . . ℞ 16ª *cubo di primo relato.* . . .

Basta questo pezzo per rilevare il sistema di denominazione nelle dignità della *cosa,* ed è di riguardar come dignità di dignità inferiore tutte le superiori dignità, che posson essere riguardate così, e dalla dignità elevata, e dall'elevamento comporne il loro nome: all'incontro chiamar relati quelle dignità, che non posson essere nate nella stessa guisa, vale a dire tutte le dignità aventi ad esponente un numero primo, eccettuata la terza dignità dalla geometria già donata del proprio nome di *cubo.* Un tal sistema di denominazione è ben differente da quello di Diofanto, il quale è fondato sul considerare qualunque superior dignità come il prodotto di due inferiori, e da queste comporre di quella il nome; laonde da Diofanto fu appellata *quadrato cubo* la dignità quinta, che siccome dalla moltiplica del quadrato e del cubo nata, nella scala di F. Luca è il relato primo, e *cubo-cubo,* siccome nata da cubo moltiplicato con cubo fu da Diofanto chiamata la dignità sesta che F. Luca denomina *censo di cubo,* ovvero *cubo di censo* in quanto proveniente o da cubo elevato a censo, o da censo elevato a cubo. Montucla, Par. III, Lib. III, art. IV, pag. 476, descrivendo la scala dei gradi presso F. Luca, cangia il nome di *relato* in quello di *supersolido.* Intorno all'epoca dei nomi ai gradi apposti avverte F. Luca essere i *gradi quasi modernamente così nominati, havenga che in tutte le cose i nomi sieno a placito* ... all'opposto soggiugne : *e quelle figure denanze poste che comenzano* ℞. 1ª, ℞. 2ª, ℞. 3ª *sino a* 30 *sono denominazioni de la pratica de Algebra secondo li arabi primi inuentori de si facte pratiche operative.*

Il primo grado della scala di F. Luca, che è il numero, non legasi coi seguenti, che dalla *cosa* in suo semplice stato, o sua dignità intrinseca e prima procedono in progression geometrica per le dignità sue più alte. Appresso di noi il grado primo è la unità 1, la quale va a legarsi con le dignità inquanto uguale alla dignità 0 di una quantità qualunque. Si comprenderà però la ragione, per la quale da principio si pose a primo grado della scala il numero, se rimontisi all' oggetto originario della scala, al motivo di formarla, che fu la dottrina dell'arte della *cosa.* Fra i termini delle equazioni da sciogliersi per essa, vi era il numero, che così chiamavasi allora il termine noto, non essendosi peranche inventato di esprimerlo con specie letterale e dovendosi, se per condizione del problema stato fosse quantità incommensurabile, a numero innalzare. Volendo dalle equazioni prendere l'esemplare della scala, onde avesse ad esse relazione, e ne fosse come una generale rappresentazione conveniva inchiuderiv il numero, e per non isturbare al tempo stesso la progressione delle dignità della *cosa* non potevasi collocare che al primo grado. Il nome di *cosa* è indeterminatissimo, e perciò fu scelto a significare la grandezza cercata nel problema sconosciuta per ogni parte, e riguardo alla quantità e riguardo alla qualità. E siccome essa è la radice del *censo,* o di altra dignità qualunque che nell' equazione abbia luogo, così da F. Luca diffinita anche viene radice di *quantità qualsisia.* Io sono già entrato con F. Luca nel trattato quinto, ove dopo l'encomio della Regola della Cosa ossia Arte Maggiore, le etimologiche significazioni di Algebra e di Almucabala, le definizioni di *numero, cosa, censo* prende a mostrare in quanti modi questi termini combinare si possano, e forma e spiega i sei Capitoli, e vale a dire le sei esemplari equazioni distinte e sciolte da Leonardo Pisano. È ben maraviglia che avendo già F. Luca, come sopra si è veduto, l'idea della quantità solitariamente affetta dal segno meno, della quantità, diciam noi, negativa ommetta tuttavia non meno che Leonardo , di considerare l'equazione $qx^2 + px = -n$.

Sembra che poco ci volesse a stendere essa idea a questa combinazione della cosa e del censo con il numero n solitariamente affetto dal segno —, in senso cioè negativo preso, ed a riconoscere il significato dei valori negativi che ne risultano , della *cosa.* Ma non è raro nelle scienze il caso, che da un lume siasi tralasciato di procedere ad altro, a cui pur facile pare fosse il progresso. Nasce ciò, perchè la mente fatto un passo, o per propria voglia di variare oggetto, o per venir contro suo proponimento distratta altrove, non insiste abbastanza sul sentiero, e non esamina sin dove mena. Nulla io qui soggiugnerò dei precetti che da F. Luca si danno su la industria a mettere il problema in equazione, e su gli artificj per ridurla poi alla massima unità, cioè alla forma più semplice della esemplare equazione, e su i distinti offici, in ciò, dell'Algebra e dell'Almucabala ed originarj loro limiti, avendo già di queste cose presentato il manipolo alla Rif. nella Mem. su Leonardo Pisano. Rammenterò piuttosto i problemi, che in più di un luogo qui sopra, veduto abbiamo F. Luca proporsi, problemi ad alte equazioni sin dell' ottavo grado, della forma però tutte $qx^{2m}+px^m=n$, conducenti, e de'quali rimettendo andò al trattato dell'Arte Maggiore la dottrina dello scioglimento. Di tali dunque superiori equazioni dopo le sei di Leonardo si avanza a parlare dicendo, *che li prischi antecessori hanno strette lor forze operative ai 6 capitoli, alli quali poi proportionaliter infiniti altri si possono formare.* Quindi Capitoli Proporzionali chiama le equazioni dell' esposta forma, e ben acconcio me ne pare il nome riducendosi esse ad equazione di secondo grado $qz^2+pz=n$ con fare $x^m=z$, la quale nuova *cosa* è il termine $m+1^{esimo}$ di una continua proporzione $\div\div 1:x:x^2:x^3...x^m$. Hanno anche esse equazioni una certa proporzione intrinseca, poichè quanto il termine px^m si eleva di grado sopra il termine n, altrettanto qx^{2m} si eleva sopra px^m. Questo ugual intervallo di gradi è propriamente la proporzione considerata da F. Luca. E se noi per una parte consideriamo n moltiplicato per x^0, e per altra parte, prescindendo dai coefficienti n, p, q non poniamo mente che all'ordine delle potestà x^0, x^m, x^{2m} ci si offre una vera continua proporzione geometrica. Di tutte però le equazioni complete di un qualunque grado dir si possono simili cose; anzi tanto meglio, quanto la progressione è piena. La proporzione estrinseca delle radici delle suddette equazioni con quelle di una di secondo grado è una proporzione loro propria ed in tal senso non mi dispiacerebbe punto che rinnovato fosse questo titolo di equazioni proporzionali, che più spiegherebbe la loro natura, il rapporto loro, che quello di equazioni riducibili al secondo grado. Scioglie F. Luca anche la equazione di terzo grado pura $qx^3=p$, alla quale abbassa la $qx^4=px$, che con molte altre del quarto grado schiera in una tavola. Fra esse vi si veggono le due $qx^4+px^2=nx$, $qx^4+nx=qx^2$ ma a fianco dell'una e dell' altra vi si legge *impossibile.* Che dir però voglia di una impossibilità relativa alle cognizioni di allora, anzi solo di una attuale impossibilità di dar regola generale, non mica di una impossibilità assoluta, di una impossibilità eziandio di soluzion particolare, chiaro apparisce da questi sentimenti con i quali chiude il trattato. *Ma de' Capitoli de numero cosa e cubo composti over de numero censo e cubo, over de numero, cubo e censo, non se possuto finora troppo bene formare regole generali per le disproporzionalità fra loro, perchè fra loro non sono intervalli eguali onde fra la cosa el numero non* *media alcuna dignità, e natura, e fra la cosa el cubo media el censo siche non ne la debita habitudine fra loro peroche uno è più distante dal suo extremo che l'altro. E così fra el censo el cubo niuna cosa media, e fra el censo el numero media la cosa. E però ancora degli aguagliamenti loro non si po dare regola generale, se non a tastoni in qualche caso particolare. E pero quando li toi aguagliamenti te ritrovi termini de diversi intervalli fra loro disproporzionati dirai che l'arte ancora a tal caso non a dato modo siccomo ancora non è dato modo al quadrare del cerchio.* Che però a pag. 106 dice *per tutti phylosophi maxime a ℞ essere scibile) si che ista stant simul che el caso sia possibile e per anco el modo de absolverlo non sia dato per la improportionalità che è cattiva.*

Altera dunque il dire di F. Luca il Cardano, allorchè a scusa di non aver lui scoperto il modo di sciogliere l' uguagliamento del cubo e delle cose al numero scrive nel Cap. 1 della sua Arte Magna. *Deceptus enim ego verbis Lucae Pacioli, qui ultra sua Capitula generale ullum aliud esse posse negat (quanquam, tot jam antea rebus a me inventis sub manibus esset), desperabam tamen invenire quod quaerere non audebam.* F. Luca non avea asserito una impossibilità tale che toglier dovesse a Cardano il coraggio della ricerca, come tolta non aveala a Scipione Ferreo ed a Tartaglia. Che anzi le risoluzioni particolari a tastoni da lui accennate in luogo di estinguere doveano avvivar la speranza, che moltiplicandole si potesse giugnere a rilevar una comune arte e trarne una regola generale. E se pure F. Luca pronunciato avesse assolutamente impossibile essa regola, dopo che quei due trovandola, smentita aveano l'impossibilità, perchè non tentarlo allora Cardano egli pure, piuttosto che iterare a Tartaglia le preghiere per ottenerlo da lui ? *Nicolaus Tartalea Brixellensis amicus noster mihi ipsum multis precibus exoratus tradidit. Deceptus enim ego ec.* Tartaglia, che era stato prevenuto da Scipione Ferreo, non istimò per questo levatasi la lode di ritrovarlo da se, anzi lo accese, lo spinse, lo avvalorò la brama di non essere ad alcuno inferiore. E non regnava in cuore a Cardano l'emulazione stessa ? Cade dunque per ogni lato la scusa sua sì male architettata, che di lui non è degna.

Montucla Par. III Liv. III Art. IV pag. 477 dice che *l' Algèbre de Lucas de Burgo ne va pas au delà des équations du second degré.* Ciò non è esattamente vero ascendendo l'Algebra di F. Luca dalle equazioni proporzionali a quelle del secondo grado, che sebbene ad esse si abbassino, negar però non puossi che da sè sieno più alte. Ed inoltre è da richiamar a memoria il problema sin dalla Distinzione seconda sciolto dei due viaggianti all'incontro un dell'altro sul cerchio dell'equator terrestre accrescendo l'uno il diurno suo cammino in progressione di numeri naturale, l'altro nella serie di cubi loro, problema perciò ascendente ad equazione di quarto grado completa, ossia di tutti i suoi termini al numero di cinque, di tutte le dignità dell'incognita dalla prima sino alla quarta fornita. Vero è, che per la particolar sua costituzione lo scioglimento è il caso più facile delle equazioni complete di esso grado quarto, ma non lascia di essere un primo passo alla soluzion generale.

Bossut, non contento di limitare con Montucla alla risoluzione delle equazioni di secondo grado gli insegnamenti di F. Luca, aggiugne: *on pretend, que Lucas de Burgo n' a pas été aussi loin que les Arabes, ni même que Léonard de Pise quoiqu'il lui soit posterieur. Pag. XXX, Dis. Prel. Mathem., Enc. Math.* Sarà vero riguardo agli Arabi, ma riguardo a Leonardo non già, essendo la sua dottrina ristretta ai sei capitoli ossia alle sei regole non oltrepassanti le equazioni propriamente di secondo grado, come appunto asserisce dei prischi antecessori indistintamente F. Luca. Io però non estenderò oltre gli Italiani antecessori questo parlar di F. Luca. Ma a Montucla ed a Bossut lui immaginantisi tra gli Arabi applicato alle loro lezioni e sollecito di raccorre, per trasferirli in patria, i loro lumi non doveano suonare più esteso, e gli Arabi pure comprendere le voci di prischi antecessori, e l'asserzione di aver essi alle equazioni di secondo grado strette le loro forze calcolatrici ? E non dovea similmente valer appresso di essi in ampissima negativa gli Arabi stessi, non eccettuante l'aperto scrivere di F. Luca che delle equazioni di terzo grado non era per anco sino a quel tempo stato trovato, nè dato di trovare lo scioglimento generale? Non doveano almeno queste franche proposizioni di F. Luca dar loro qualche fastidio, e renderli dubbi sino al saper precisamente il contenuto del manuscritto nella Biblioteca di Leiden esistente: se la risoluzione delle equazioni cubiche per Omar-ben-Ibraim spetti quelle che oltre il cubo altra podestà inferiore inchiudono; se sia per regola generale, ed in qual tempo quell'arabo abbia scritto, e se cosa tra gli Arabi nota, o non piuttosto cosa sua apparisca da lui esibirsi? Se un giorno si verrà in chiaro di tutto questo e degli Arabi, si trovin false le asserzioni di F. Luca, non sarà alcun intrico per noi che teniamo non esser mai esso stato tra loro, e non ci recherà maraviglia l'essersi da lui ignorato sin dove fosser eglino giunti.

La Distinzione nona è tutta pratica, doviziosa di ciò che può occorrere nella mercatura, negli affari di campagna, ne' banchi di cambio, nelle zecche, ne' viaggi, ne' giuochi. Io mi ristrignerò a due cose degne di riflessione. Distinguendo il *meritare semplicemente* ed il *meritare a capo d' anno*, dice, che *meritare semplicemente è quando da merito non ne nasce merito; e meritare a capo d'anno, o altro tempo o termine è quando da merito nasce merito.* E poco dopo soggiugne: *Dico che meritare a capo d' anno non vuol dir altro, se non saldare la ragione a ogni fin d'anno.* Ma più chiaro si appalesa su di ciò il suo pensare, proponendo la quistione sul modo di computare in un merito a capo d'anno il merito per una parte d'anno che disegnerò per $\frac{v}{u}$. Era parere, doversi per la parte d'anno computare il merito come semplice, così che, posto il capitale al principio dell'anno c, il merito stabilito a capo d'anno $\frac{m}{100}$ computandosi per la parte d'anno $\frac{v}{u}$ in semplice proporzione, il merito fosse $c.\frac{m}{100}\frac{v}{u}$, e la somma di esso col capitale $c\left(1+\frac{m}{100}.\frac{v}{u}\right)$. Contro tal dottrina pretende F. Luca doversi sul merito semplice $c.\frac{m}{100}\frac{v}{u}$ fare lo sconto proporzionato alla parte rimanente al fine d'anno $1-\frac{v}{u}$; il quale sconto in due maniere può farsi, e direttamente e indirettamente. Il diretto sconto è $c.\frac{m}{100}.\frac{v}{u}.\frac{1}{1+\frac{m}{100}\left(1-\frac{v}{u}\right)}$, e aggiunto il capitale c, la somma di esso

è merito $c+\dfrac{c.\frac{m}{100}.\frac{v}{u}}{1+\frac{m}{100}\left(1-\frac{v}{u}\right)}$. L'indiretto sconto si fa prendendo la

somma a capo d'anno, che sarebbe $c.\left(1+\frac{m}{100}\right)$, e su di essa

scontando per la parte d'anno infruttuosa $1-\frac{v}{u}$, con che risulta

$\dfrac{c.\left(1+\frac{m}{100}\right)}{1+\frac{m}{100}\left(1-\frac{v}{u}\right)}$: che questo risultato con quello coincida, basta in quello moltiplicar c per il denominator della frazione per vederlo. Ecco le ragioni di F. Luca. Sia impiegato un capitale di lire 100 al merito di 20 per 100 a capo d'anno : per la contraria dottrina *sarebbero in capo di sei mesi Lire* 110. *La qual cosa saria vera sel merito s'intendesse semplicemente. Ma per che il patto s' intende al termine de un anno conuen che differentia ve sia in questo modo . . . . Ed è de ragione che se ne faccia lo sconto per mesi* 6 *de le ditte lire* 10 *che uengano scontate lir.* 9 *sold.* 1 *den.* 9 $\frac{9}{11}$. Onde apparisce come F. Luca legava al capo d'anno il merito, volendo in proporzione della distanza da esso ribassate le parti di una divisione uniforme, e lungi per ciò dal concepirlo qual somma di successivi meriti eguali in eguali parti dell'anno, riguardandolo qual frutto sempre immaturo nel decorso dell'anno, anche per ciascuna parte sua, tutto all'estremità dell'anno ricevente maturità. Ma presero poscia ben altro sviluppo le idee di F. Luca nei problemi. Dimostra in essi primieramente, che la somma a cui monta di anno in anno un capitale impiegato a merito di merito, cresce in continua proporzionalità, e forma una geometrica progressione che è $\div\!\div c:\left(1+\frac{m}{100}\right)^{1}.c:\left(1+\frac{m}{100}\right)^{2}.c:\left(1+\frac{m}{100}\right)^{3}c.\ldots\left(1+\frac{m}{100}\right)^{n}.c.$ Passa indi ad applicare nel problema 20 la stessa teoria alle parti dell'anno considerando la somma, a cui sarà montato il capitale a certa parte dell'anno, come un medio proporzionale tra i termini della esposta progressione pegli anni interi. Laonde, se espressa generalmente per $\frac{v}{u}$ una parte di anno, siccome per n un numero d'interi anni, si cerchi la somma al tempo $n+\frac{v}{u}$, insegna che la somma cercata sarà il primo dei medi $u-1$ proporzionali tra la somma $\left(1+\frac{m}{100}\right)^{n}.c$, a cui il capitale sarà effettivamente salito a capo degli interi anni n, e la somma $\left(1+\frac{m}{100}\right)^{n+v}$ alla quale salirebbe a capo di anni $n+v$, e codesto primo medio proporzionale intendesi facilmente essere $\left(1+\frac{m}{100}\right)^{n+\frac{v}{u}}c$. Ecco dunque pervenuto F. Luca a contemplare il merito a capo d'anno come un cumulo continuo di merito da merito prodotto lungo il corso dell'anno, non altrimenti che il merito a capo di una serie di anni è il cumulo di annual merito sopra annual merito. Ella è questa appuntino l'idea oggi adottata del merito composto, rappresentandosi universalmente per $\left(1+\frac{m}{100}\right)^{t}.c$ la somma a cui c monta in tempo t, qualunque sia, o parte d'anno, o numero di anni, o con aggiunta di parte d'anno. La continuità della geometrica progressione vi trasse F. Luca. Non solo poi scioglie egli nella materia dei meriti il problema di trovar, dato il capitale, il tanto per 100, il tempo, la somma, ma altresì i problemi di ricavar il capitale o il tanto per 100, dati i tre altri elementi, ed eziandio i problemi più complicati che nascono aggiungendosi al primario capitale, o da esso sottraendosi annualmente una certa quantità. Riguardo al tempo, ne scioglie il problema pel merito semplice; ma relativamente al composto non leggo che questo singolar quesito, che è il 45°, di ritrovare il capitale insieme e il tempo, ponendo l' uno all' altro uguale, e che al merito $\frac{m}{100}$ siane risultata la somma uguale al quadrato del capitale. L' espressione algebraica del problema è $\left(1 + \frac{m}{100}\right)^x . x = x^2$. Ma F. Luca si scorda qui delle confutazioni fatte dei canoni stabiliti e si contraddice: poichè essendosi, come è a credere, tentando, assicurato essere il capitale e il tempo in quistione tra 1 e 2, e postili per ciò $= 1 +$ *cosa*, (noi diremo $1 + y$), calcola la somma al capo dell'anno, che viene ad essere $\left(1 + \frac{10}{100}\right)(1 + y)$: poi, come porta la legge del merito di merito, la prende per capitale al principio del seguente anno, ma per computare a che valga nella parte di assegnata y di esso anno, in vece di attenersi al progresso del merito composto, si volge alla proporzione del merito semplice, secondo la quale perviene $\left(1 + \frac{10}{100}\right)(1 + y)\left(1 + \frac{10}{100} . y\right)$, cadendo di questa guisa a conformarsi alla pratica disapprovata ed esclusa. Si può dunque dire che il problema di determinare il tempo per ottenere da un capitale a merito composto una data somma, anzichè essere da F. Luca sciolto, fu lo scoglio a cui franse. Ma gli mancava la via di scioglierlo che è quella sola dei logaritmi. Confrontiamo ora il valore della formola $c\left(1 + \frac{m}{100}\right)^n . \left(1 + \frac{m}{100} . \frac{v}{u}\right)$, che rappresenterebbe la somma proveniente da c in numero di anni $n + \frac{v}{u}$, a merito semplice, a tenore della pratica da F. Luca rigettata, ed il valore della formola $\left(1 + \frac{m}{100}\right)^{n + \frac{v}{u}} . c$, esprimente la somma risultante a merito perenne composto, giusta il computo secondo di F. Luca, e odierno. Il valore di quella formola è il valore di questa $:: 1 + \frac{m}{100} \cdot \frac{v}{u} : \left(1 + \frac{m}{100}\right)^{\frac{v}{u}}$

$$= 1 + \frac{v}{u} \cdot \frac{m}{100} - \frac{v}{u} \cdot \frac{1 + \frac{v}{u}}{2} \cdot \left(\frac{m}{100}\right)^2 + \frac{v}{u} \cdot \frac{\left(1 - \frac{v}{u}\right)\left(2 - \frac{v}{u}\right)}{1.\ 2} \cdot \left(\frac{m}{100}\right)^3 -$$

conseguentemente $< 1 + \frac{v}{u} \cdot \frac{m}{100}$, essendo continuamente più ciò che vi si toglie di ciò che a vicenda vi si aggiugne. Dunque la prima formola vale più che la seconda; quella è favorevole al creditore, e questa al debitore. Ma appunto pel favore, che al capitalista produce il computo primo tornò a pretenderlo giusto, ed accusar F. Luca di errore il Tartaglia, opponendo alla ragione di lui, appoggiato al legame del merito a capo d'anno, che la condizione di merito a capo d'anno è aggiunta da chi dà il capitale a beneficio suo, nè debbe tornargli giammai a discapito, che sarebbe contro le sue mire e volontà. Il D. Bassi nella sua *Aritmetica pratica*, opinando con Tartaglia, preclude a dirittura la via a concepire merito di merito tra anno con definire *che il merito a capo di alcun tempo è quando in capo di quel tempo il merito divien capitale*. La controversia è sembrata degna d'aver luogo tra le scelte cose degli articoli dell'enciclopedia dell'Alembert. Eccone la sentenza: *Bien de gens s' imaginent que pour l' intérêt de la demi-année il faut prendre la moitié de l' intérêt de l'année, le tiers de l' intérêt pour le tiers de l'année, et ainsi du reste: mais ils sont dans l'erreur. En effet qu' arrive-t-il dans le cas de l'intérêt composé? C'est que les sommes lues au bout de chaque année sont en progression géométrique. Or pourquoi cette loi n'auroit-elle pas lieu aussi pour les portions d' années comme pour les années entières? J'avoue que je ne vois point quelle en pourroit être la raison .... Dans l'hypothese, que nous combattons, on suppose que l' intérêt est regardé comme composé d'une année à l'autre, mais que dans le cours d'une seule et unique année il est traité comme intérêt simple, supposition bizarre, qui ne peut être admise que dans le cas d'une convention formelle entre le créancier et le débiteur. En effet dans cette supposition le débiteur payeroit plus qu'il ne doit réellement payer* (Articolo *Arrérages*) e torna su la stessa quistione (Articolo *Intérêt*) per dimostrare più chiaro lo svantaggio del debitore. L'Eulero anch'egli calcola colla stessa legge d'interesse composto, e colla formola stessa per la somma lungo il corso dell'anno, che dopo una serie di anni interi, *Élémens d' Algèbre* §. 558. E tutti oramai gli analisti si accordano in questo metodo. Ma agli aritmetici pratici volgari non istrutti nell'artificio dei logaritmi torna più facile l'altro computo, e questa facilità stessa, e l'esser protetta dal giudicio di Tartaglia, e dall'esempio degli antichi, per lui rivendicati dalle condanne di F. Luca, faranno che ne continui l'uso. E in verità poi è egli un errore?

Io l'ho sin qui fatta da storico, narrando le altrui discussioni; ora mi si permetta di ponderarle, di discutere io stesso la materia, ed esporre i miei pensieri. Parmi che sotto due aspetti contemplar si possa il computo in quistione, e rapporto all'ordine matematico, e rapporto all' originaria istituzione del merito composto. In ordine matematico, egli è certo ed incontrastabile essere una bizzarria, che la somma a cui monta il capitale ora sia termine d'una progressione geometrica, ora sia una quantità affatto aliena, ed alla quale non è in essa conceduto luogo: termine della progressione geometrica a capo d' ogni anno, quantità da esse aliena nel corso tutto dell' anno. Questo alterno uscire e rientrar nella geometrica progressione è senza dubbio una stravaganza alla matematica continuità diametralmente opposta. Ma per altra parte rimontiamo all' istituzione del merito di merito. Essa deve essere stato il ritrovato di chi, non avendo al fin dell'anno bisogno del merito semplice, volle che passasse in aumento del fondamental capitale per accumulare maggior denaro. Egli non intese per questo che fosse alterata la natura del merito fra anno. L'umano spirito serba nelle invenzioni sue una gradazione: l' immaginarci che dal merito semplice sia passato al merito di merito per ogni particella del flusso dell'anno, è fargli fare un salto; e se vogliamo esser equi, diremo essere questo un fino e sottil pensamento, al quale non giunse che molto tempo dopo il pensiero, e l' istituzione di ammonticare al capitale il merito semplice al solo fine d' anno: in somma il meritare di anno in anno sullo stesso invariato capitale uniformemente; il meritare in progresso d'anni cumulatamente su d' un capitale di anno in anno accresciuto del merito suo; il considerare l'annual merito qual cumulo continuo di merito sopra merito in quanti fluiscono momenti nell' anno, sono tre idee, tre invenzioni, tra le quali deve essere passato un intervallo, e maggiore d' assai tra la seconda e la terza, che tra la prima e la seconda. Forse, e probabilmente fu al primo sorger dell' idea di applicare all'annual merito nel flusso suo stesso dell'anno il merito di merito, che ad impedire tale complicazione dichiarato fu del merito di merito . . . [1] come titolo, poscia fatto il meritare a capo d' anno, non già nel senso da F. Luca immaginato di legare sì strettamente al capo d'anno il merito ad escluderne il ripartimento in proporzione semplice tra anno, ma nel senso escludente tra anno il merito di merito. La difficoltà di calcolarlo suscitatrice di liti sarà stata la ragione di così prescrivere. La difficoltà stessa confermar ci deve nel pensiere, che il merito composto per le porzioni dell'anno non abbia avuto luogo nella prima istituzione del merito composto. Questa è antica, ed è a credere che stesse tra i negozianti, anzi che passasse sotto le speculazioni degli aritmètici teorici, ed era di cosa da trattarsi fra il comune degli uomini. Per altra parte il calcolo del merito composto continuo per le minime particelle dell' anno suppone una scienza sì esatta della progressione geometrica, che se pur era in quella antichità, non era certo, nè è, nè sarà mai fra il comune dei trafficanti, e l'atto stesso del calcolo porta delle operazioni alla perizia loro, ed a quella dei volgari aritmetici troppo superiori, esigendo, o il maneggio dei logaritmi, o elevazioni ed estrazioni di qualunque grado. Si aggiunga che il problema del tempo, quando oltre un numero di anni perfetti comprenda un anno imperfetto è assolutamente impossibile a sciegliersi senza logaritmi, volendo computare per l'anno imperfetto ugualmente che per i perfetti a merito composto; e si può

[1] In vece de' punti che trovansi nella linea 22 della presente pagine, il manoscritto originale del Cossali tra le parole *merito* e *come* ha la parola [illegible] cancellata in parte, che non saprei come spiegare.

all' incontro sciogliere colla regola del tre, ponendo per l' anno imperfetto semplice il merito. Così lo scioglie il Tartaglia, cercando cioè due anni prossimi, che diano due somme una minore, l' altra maggiore della proposta, trovate le quali, la determinazione della porzione d'anno gli resta facilissima con dire: differenza delle due trovate somme tra loro ad un anno, così eccesso della proposta sopra la minore di esse alla porzion d' anno cercata. Crederemo noi per tanto istituito tra vetusta gente a comune traffico di denaro il merito di merito in un tenore, in una sottilità cotanto sopra la comune intelligenza, il comune conteggio anche oggidì? Tre sorta adunque di merito penso aversi a distinguere: 1.° merito semplice, 2.° merito misto, vale a dire composto per gl' interi anni, e semplice nel decorso dell' anno, 3.° merito puramente composto, simile pel flusso dei mesi, dei giorni, delle più piccole parti dell' anno, che per un flusso d'interi anni. Stimo che il merito di merito, da antico tempo istituito nella popolare società, sia quello tale pei soli interi anni, e che si cangia col semplice per le porzioni di anno, e quindi non so accusar di errore gli antichi aritmetici, che secondo tal mescolanza calcolavano, e credo non errare neppure i presenti aritmetici, computando istessamente a merito misto, poichè questo è quello alla comun portata, quello che gli ordinari capitalisti, e gli ordinari prenditori de'capitali intender possono di stabilire fra loro, e lungi dall'esigersi per tal sorta di misto merito una formale convenzione espressa e particolare, come opina il d' Alembert, giudico che necessaria sarebbe pel merito composto puro. Questo è senza dubbio per la sua purezza, pel suo uniforme continuo progresso, una bellissima cosa in linea matematica, ma la stessa bellezza sua la solleva sopra la moltitudine degli uomini, e più che invenzion del commercio e ad uso dalla universal società manifestasi scoperta di matematico studio e propria per una società matematica.

Abbiamo veduto nella materia che abbiamo discussa un problema di esponenziale equazione: in altre materie pure se ne propone F. Luca, che ad equazioni esponenziali conducono. Il metodo onde se ne sbriga è empre simile; ed un esempio lo porrà in chiaro. Uno fa alquanti viaggi, e quanti viaggi fa, tanti sono gli scudi che nel primo porta, e ad ogni viaggio li raddoppia, ed alla fine dei suoi viaggi si trova avere scudi 30: qual è il numero de'viaggi e degli scudi nel primo portati? Intendesi facilmente l'equazione del problema essere $x2^x = 30$. F. Luca pone $x=1,=2,=3,=4$: posto $x=3$, risulta 24 meno del dovere; posto $x=4$, risulta 64 troppo. Si faccia dunque, prescrive egli, $x=3+y$: si avrà al fine del primo viaggio $6+2y$, al fine del secondo $12+4y$, al fine del terzo $24+8y$, e si avrebbe al fine del quarto $48+16y$; onde l'aumento degli scudi pel quarto viaggio intero sarebbe $24+8y$. Si argomenti proporzionalmente $1 : 24+8y :: y : 24y+8y$, e sarà questo l' aumento per una parte del quarto viaggio y, ed aggiunto questo aumento al numero degli scudi, risultato al fine del terzo viaggio, ne proverrà l'equazione $8y^2 + 32y + 24 = 30$: onde $y = -2 + \sqrt{4\frac{3}{4}}$ ed $x = 1 + \sqrt{4\frac{3}{4}}$. Prescindiamo dalla incongruità di questo irrazionale valore coll'idea di viaggio, e prendendo in astratta la equazione $x2^x = 30$, si esamini se avverisi, posto per x il trovato valore: l'esame si può fare coll'aiuto dei logaritmi, e si scoprirà che $1 + \sqrt{4\frac{3}{4}}$ è difettoso rendendo solo 28, 8 in vece di 30. Ma ad una più facile, e più evidente prova della falsitá del metodo, pigliamo $2\frac{1}{2}.\, 4^{2\frac{1}{2}} = 8^{o}$., e supponendo ignoto l' $\frac{1}{2}$ cerchiamo col detto metodo si avrà $(2 + y).\, 4^2 = 32 + 16y$, $(2 + y)\, 4^3 = 128 + 64y$, e la differenza $= 96 + 48y$, e quindi l'aumento proporzionato per $y = 96y + 48y^2$, e sommando con $32 + 16y$ l'equazione sarà $48y^2 + 112y + 32 = 80$; onde $y = \frac{-7 + \sqrt{85}}{6}$ che di molto manca da $\frac{1}{2}$, poichè ad eguagliarlo il segno radicale in vece di 85, dovrebbe sotto di sè contenere $100 = 10^2$.

Oggidì l' equazione in genere $x.\, m^x = n$ sciogliere si suole colla regola di doppia falsa posizione, applicata reiteratamente con chiamare in sussidio i logaritmi subito che x va a comprender frazione. Potevano anche gli antichi adoperare la regola di doppia falsa posizione, dando ad x due valori interi. Vediamo qual ne sarebbe stato l'esito nell' equazione $x.\, 4^x = 80$. Posto $x = 2$, ne viene $2.\, 4^2 = 32 = 80 - 48$, e posto $x = 3$, si ha $3.\, 4^3 = 192 = 80 + 112$; onde sarebbe $x = \frac{2.\,112 + 3.\,48}{112 + 48} = \frac{368}{160} = 2\frac{1}{3}$ difettoso valore. Io mi riservo ad un particolare opuscolo sulla doppia falsa posizione a render ragione di questo difetto ed esaminare, quanto rimediar vi possano le iterate applicazioni di essa.

A 368 montano i problemi da F. Luca in questa nona distinzione, accumulati ad ogni oggetto e specie di commercio spettanti, ed anche al dilettevole del giuoco, massime sulla giusta distribuzione della posta a giuoco non finito, come se giuocando tre a balestrare colla posta di ducati 10 per chi il primo fa 6 colpi migliori, vengano impediti di continuare, contando uno 4 colpi, l'altro 3, il terzo 2, de' quali colpi la somma essendo 9 e la somma di quelli che potrebbero giugnere tutti e tre insieme a contare al più 16, dice F. Luca che proporzionando $\frac{9}{16} : 10 :: \frac{4}{16} : x, :: \frac{3}{16} : y, :: \frac{2}{16} : z$, saranno x, y, z le tre parti della posta ai tre giuocatori rispettivamente dovute.

I 368 problemi sono seguiti da due trattati sui libri mercantili e sulla tariffa, ricchissimi emporii di cognizioni, rapporto alle misure, pesi, monete, mercantili costumi e generali, e delle particolari piazze a quel tempo. Ma di mio scopo non è farne il transunto, e solo basti averne dato l'avviso; onde vi ricorra chi per intelligenza di vecchie carte, o per istoria sulle monete, o per altro ne avesse bisogno.

Io proposto non m'era di far vedere qual fosse e come trattata la geometria di F. Luca. Ma la connessione, ch' egli vi mette coll' algebra, i difetti e gli sbagli di Montucla e di Bossut dietro lui sugli arricchimenti della geometria, e sull' applicazione dell' algebra ai problemi di essa; ed il rinvenirsi tra i teoremi dimostrati da F. Luca un teorema che il Commandino si credette aver inventato il primo, vari motivi sono di presentarne qui un ristretto quadro.

Distinzione prima, Cap. I. *De quinque circa que principaliter pratica geometria versatur, et ad bonum agrimensorem spectant, et de eorum declaratione cum principiis per se notis:* cioè sul punto, la linea, l'angolo, la superficie, il corpo.

Nel principio del capitolo avverte F. Luca così: *e perchè noi seguitiamo per la maggior parte Leonardo Pisano io intendo di dichiarare, che quando si pone alcuna proposta senza autore quella sia di detto Leonardo:* pur bella dichiarazione, splendido testimonio della onestà di F. Luca, e confusion per coloro che gli apposero il costume di plagiario. Cap. II. *Substantia omnium conclusionum libri primi Euclidis brevissima.* Cap. III. *Declaratio et demonstratio secundi libri Euclidis.* Cap. IV. *Demonstratio omnium conclusionum succincte sexti libri Euclidis.* Cap. V. *Qualiter more Tusco seu Florentino metiantur agri et possessiones.* Cap. VI. *De dimensione figurarum quadratarum.* Cap. VII. *De dimensione omnium triangulorum.* Cap. VIII. *Qualiter inveniantur catheti sive perpendiculares cuiuscumque trianguli.* Al fine del cap. VII trovasi la regola di determinar l'area del triangolo per mezzo dei tre lati senza investigare la perpendicolare, e nel cap. VIII incontrasi la stessa figura, e leggesi la dimostrazione stessa che nella Parte IV, lib. I, pag. 7.ª di Tartaglia. Ed è a notarsi, che non ne nomina autore, per lo che, giusta il generale avvertimento, stimar devesi cavata da Leonardo Pisano. Montucla dunque mostra di non aver veduto la geometria di F. Luca, non che quella manoscritta di Leonardo, scrivendo a lode di Tartaglia, Part. III, Liv. II, Art. III. *Une invention ingénieuse qu' on lui doit est celle de mesurer l' aire d' un triangle par la connoissance des trois côtés sans rechercher la perpendiculaire.* E. Bossut, Disc. Prelim. alla parte Mat. dell' Enc. Met., pag. XXXVII, ediz. Pad. dice: che il *Trattato de' numeri e misure* di Tartaglia è quello *dans lequel on trouve pour la première fois la détermination de l'aire d' un triangle par le moyen de ses trois côtés et sans le secours de la perpendiculaire.* Il che in verità non è farne espressamente inventore Tartaglia, ed è un modificare l' asserzione di Montucla; ma pur è dir falso, trovandosi la regola, la figura, la dimostrazione parola a parola nella geometria stampata di F. Luca, formante la parte seconda del gran volume della Somma. E ben maraviglia, che questa ingegnosa regola non sia stata fedelmente tramandata da quelli, in numero pressochè immenso, che di poi si occuparono a dar nuova forma agli elementi di geometria. Per ciò non sarà inutile nè discaro che io qui la rechi con la sua antica dimostrazione tratta però in compendio.

Regola. Si sommino insieme i tre lati, e si pigli la metà di tal somma, e da essa metà si detragga ciascun lato, e li tre resti si moltiplichino fra loro, poi il prodotto si moltiplichi per quella metà della somma di tre lati: la radice del risultato sarà l' area del triangolo.

Dimostrazione. Poichè sia il triangolo abg, i cui angoli b, g si taglino per metà con le linee bt, gt, e dal punto t si conducano sui tre lati le perpendicolari tc, tz, th, e di più all'angolo a la linea ta: saranno uguali i triangoli tzg, tgh, e similmente i due tbh, tcb, e finalmente per $tz = th = tc$, anche i due tza, tca; onde $zg = hg$, $bh = bc$, $ca = az$; per conseguenza la somma dei lati $= 2hg + 2bc + 2ca$, oppure $= 2az + 2ag + 2bh$; o per terzo $= 2bh + 2hg + 2ac$, e la semisomma $= ba + hg = ag + bb = bg + ac$; e quindi chiamando essa semisomma $\frac{1}{2}s$, sarà $\frac{1}{2}s - ba = hg$, $\frac{1}{2}s - ag = bh$, $\frac{1}{2}s - bg = ac$. Si prolunghi il lato ab in l, di modo che sia $bl = bg$, ed il lato ag in m, sicchè sia $gm = bh$, e formati gli angoli retti alk, amk, e prodotta at in k, per essere $al = am = \frac{1}{2}s$, saranno uguali i triangoli rettangoli alk, amk. Sulla linea inoltre gb si tagli $nb = bl = gh$; onde sarà $bh = gn$; e per ultimo si tirino le linee nk, bk, gk: sarà $bk^2 = lk^2 + lb^2$, $gk^2 = mk^2 + gm^2$; e per ciò $lk^2 = bk^2 - lb^2$, $mk^2 = gk^2 - gm^2$. Ma per l'uguaglianza dei due triangoli alk, amk, $lk^2 = mk^2$; dunque $bk^2 - lb^2 = gk^2 - gm^2$, ossia per $lb = nb$, $gm = bk = gn$, $bk^2 - nb^2 = gk^2 - gn^2$; il che mostra essere kn perpendicolare sopra gb, e posto ciò, ne segue che i due triangoli nkb, bkl sono uguali, ed essa $nk = lk$. E per esser nel trapezio $nklb$ retti i due angoli n, l sarà pure uguale a due retti la somma $nkl + nbl$, e per ciò $= nbc + nbl$, conseguentemente $nkl = nbc$, $\frac{1}{2}nkl = \frac{1}{2}nbc$, cioè $bkl = tbe$: dunque i triangoli rettangoli $bkl = tbe$ sono simili, e perciò $kl : lb :: be : ct$; onde $kl \times et = lb \times eb$. Si ha di più $ac : al :: et : kl :: et^2 : et \times kl :: et^2 : lb \times be$; e quindi $ac \times lb \times be = et^2 \times al$, ed $ae \times lb \times bc \times al = et^2 \times al^2$. E per essere $ac = \frac{1}{2}s - bg$, $lb = hg = \frac{1}{2}s - be$, $bc = bh = \frac{1}{2}s - ag$, $al = ab + bl = \frac{1}{2}s$; finalmente sarà $(\frac{1}{2}s - bg)(\frac{1}{2}s - bc)(\frac{1}{2}s - ag)\frac{1}{2}s = et^2 \times (\frac{1}{2}s)^2$; ma essendo $et = tz = th$, è manifesto, che $et \times \frac{1}{2}s$ è la somma delle tre aree triangolari atb, gtb, gta, che è quanto dire l' area del triangolo intero gab; dunque anche la radice del prodotto esposto, cioè $\sqrt{((\frac{1}{2}s - bg)(\frac{1}{2}s - ba)(\frac{1}{2}s - ag)\frac{1}{2}s)}$ = all'area del triangolo.

Distinzione seconda. *De modo inveniendi quantitatem unius lineae ab uno puncto protractae intra vel extra quemcunque triangulum.* Bello ed ampio problema tirando da uno ad altro dato punto che attraversi un triangolo : determinare i segmenti dei lati, la porzione della linea cadente entro il triangolo, e le porzioni stendentisi all'incontro del terzo lato allungato, e di una sua parallela all' angolo opposto! Eseguito questo nel cap. I, aggiugne nel II un altro problema : *De vi et potentia ypotumisse protracte extrinsice in triangulis orthogonijs.* E intende prolungata di una data quantità l'ipotenusa; e dal punto estremo del prolungamento condotta all'angolo retto una sottesa, determinar di questa la lunghezza. Quindi reca la soluzione fatta da Leonardo Pisano di un problema propostogli da un veronese: « Essendo un al- » bero alto 40 braccia, distante braccia 5 dal margine d'un fiume, » scavezzato esso arbore all'altezza di braccia 10, e rimasta la parte » superiore appoggiata al tronco nel cadere la sommità nel fiume, » assegnar la distanza dal punto nel fiume, ove la sommità giunse, » al piede dell'albero ».

Distinzione terza. Nella introduzione dovendo far uso delle regole dell' Algebra, dice di esse : » le q̃le regole principalmẽte foron » trouate : e fabricate per rispetto dela quantita continua. cioe. geome- » tria. perche in lei sonno ale volte quantita sorde che per forza nume- » rale discretamente nõ si possan dare ma conuiense respondere e ope- » rare per radici e per linee equadrati e cubi... Esonno tutte fondate nel » secondo de Euclide. mediante la forza e virtu del quinto. cioe de le » proportioni e proportionalita. che maxime in loro serecercano ». Sebben dunque l'algebra sia utile all'aritmetica ugualmente che alla geometria, egli è però dal seno di questa, che sortì i natali; e l'esigenza di essa geometria medesima fu che determinolla a procrearla: non fu per ciò l' algebra un istante che alla geometria non servisse, nata essendo per servirle; ed il distinguere come due avvenimenti separati di tempo la nascita dell'algebra, e la sua applicazione alla geometria, è ignorare la vera sua origine : la geometria è una madre che ha partorito nell'algebra una figlia a suo vantaggio : piuttosto si può distinguere la nascita dell' algebra dalla sua applicazione all'aritmetica.

La Distinzione è divisa in sei capi, e sono : Cap. I. *Modus soluendi varios casus figurarum quadrilaterarum. rettangularũ per viam algebre.* Sono problemi vertenti sulle relazioni tra i lati, le diagonali, l'area : le regole algebraiche che or sono maneggiate con espressa forma di caratteri, o piuttosto vocaboli algebraici di quel tempo, ora sotto l' ombra delle linee, così che si può dire aversi ivi coll' analisi algebraica nascente in Italia un intreccio dell' analisi geometrica dell'antica greca scuola Platonica. Lo stesso bel misto segue nel capo che succede. Cap. II. *De dimensione rumborũ seu helmuaym.* Cap. III. *Qualiter metiãtur romboides similes helmuaym.* Cap. IV e V. *De modo metiendi figuras helmuariphas*, cioè i trapezi, che divide in quattro specie: capi tagliati, mezzo capo tagliato, diverso capo tagliato, capo tagliato declinante. Dice essere questi e quelli parimenti di rombo e romboide nomi volgari, e di Euclide i nomi *helmuaym* ed *helmuariphe.* Ma tutto a rovescio: *helmuaym*, *helmuariphe* sono le voci, nelle quali gli Arabi voltato aveano le voci proprie di Euclide *rombo*, *romboide*, *trapezio* di greca lingua; e se volgari erano divenute in Italia, effetto era delle traduzioni fattene. Cap. VI. *Modus inueniendi aream figurarum multilaterarum.*

Distinzione quarta. Cap. I. *Conclusiones libri tertij Euclidis.* Cap. II. *De dimensione circulorum. ejusq; partium. Et tabulis de corda et arcu.* Adotta per ragione del diametro alla circonferenza quella di 7 : 22. Non sarà senza utilità notare che posta la pertica di piedi 6 fa il piede di once 18, e l'oncia di punti 20, e su queste ipotesi, e supposto il diametro di pertiche 42, la circonferenza di 132, stende le tavole accrescendo l'arco di pertica in pertica. Cap. III. *Qualiter metiantur superficies in montibus. vallibusq; existentes.* Suggerisce l' archipendolo alla pertica annesso, onde volgere in orizzontale la declive superficie.

Distinzione quinta. Questa è la più importante e dove spicca più la geometrica industria, avendo per argomento la divisione delle figure. Eccone i capi: Cap. I. *De modo diridendi triangulares formas in partes plures proportionabiliter.* Abbraccia tutti i casi di dividere in qualsiasi numero di parti per linee tirate da qualunque angolo, o da qualsivoglia punto dentro, fuori o sui lati del triangolo. Si apre la strada con due termini; il primo de'quali è, che due *triangoli auenti uno angolo iguale hano proportione infra loro composte delati continenti quel angolo.* Egli è questo il primo pur dei termini che Commandino aggiugne al teorema 17 del VI° di Euclide, e cui egli singolarmente segna qual verità *a nobis elaborata.* La dimostrazione però è differente. Ecco la semplicissima di F. Luca: siano i due triangoli *abg*, *czg*, e si tiri la retta *ae*: starà $abg : acg :: bg : eg$: similmente $acg : czg :: ag : zg$; dunque $abg : czg :: bg \times ag : cg \times zg$. Non essendo appresso F. Luca menzione del luogo, onde trasse questo teorema, dir si deve, giusta il generale avvertimento di lui, averlo tratto dalla *Geometria* di Leonardo Pisano. Commandino vide, al riferir di Montucla pag. 44, essa *Geometria* di Leonardo; e sì la stimò, che voleva darla in luce, e ne apparecchiava l' edizione allorchè fu dalla morte sorpreso. Dovette venirgli alle mani tardi, e dopo la pubblicazione dei suoi comenti sopra Euclide: e gli sarà stato di maraviglia il ritrovarvi il teorema creduto suo; ad onta di che, il bramar esso di produrla a comun vantaggio, gli torna d'onore. Cap. II. *Qualiter figure quadrilatere in partes plures ꝓportionabiliter diuidantur.* Si estende a qualunque specie di trapezio. Cap. III. *Modus diuidendi multi lateras formas: videlicet pentagonas: exagonas etc. in partes proportiōabiliter plures.* Abbraccia anche figure con angolo rientrante. Cap. IV. *De diuisiōne circulorum inpartes adinuicem proportionabiles.*

Distinzione sesta. Cap. I. *De his que ad corporum dimensiones spectant ex 11.° Euclidis.* Cap. II. *Qualiter solida rectangula et cubi mensurentur.* Cap. III. *De corpe seratili eiusq; dimēsioē necnō colūnaru* *cuiuscūq3 generis earūq3 pirramidu9*. Il corpo detto, secondo Euclide, *serratile* è quello che or diciamo *prisma triangolare*. Le colonne e piramidi dividele in due specie, tonde e laterate. Cap. IV. *De modo inueniendi superficiem sphericam. eiusq3 capacitatem. et portionum suarum.*

Distinzione settima. *De instrumentis quibus mediantibus. solo aspectu rerum longitudines latitudines. et altitudines habentur.* Sono: il quadrato diviso in sessanta parti in ciascun lato con la regola o tubo a sottilissimo foro per dirigere la visuale; le verghe connesse ad angolo variabile, e le separate; il quadrante; l'astrolabio; l'ombre del sole; lo specchio.

Distinzione ottava. Contiene cento problemi di varia specie, la maggior parte puramente geometrici, alcuni all'architettura spettanti; uno che è l'82° alla navigazione, altro all'ottica ed astronomia, trattando dell'ombra gettata da una opaca sfera, che ad altra lucida sia di rimpetto, ed è l'84°; quattro (85, 86, 87, 88) alla prospettiva; tre (93, 94, 95) alla statica, insegnando la costruzione della stadera romana. Versano i più dei geometrici in iscrivere figura a figura: in un triangolo un semicerchio che posi su d' un lato, e tocchi gli altri due; un cerchio il quale tocchi tutti e tre i lati; due cerchi uguali e maggiori che sia possibile, i quali toccando comunemente un lato e singolarmente un altro de'due, si avanzino a toccarsi fra loro; tre cerchi uguali che, uscendo dagli angoli, procedano a toccarsi lungo i cruri del triangolo equicrure a base maggiore; reciprocamente nel cerchio iscrivere il triangolo massimo, nel semicerchio il massimo quadrato, in un cerchio maggiore 3, e 4, e 5, e 6, e 7 cerchi minori uguali che, toccando ciascuno il cerchio continente, si tocchino tutti fra loro; nel quadrato iscrivere il massimo triangolo equilatero, e scambievolmente; nel triangolo isoscele il massimo pentagono regolare. Oltre questi e quei che tralascio di figure a figure inscritte, vi ha altri graziosi problemi geometrici. Tale è quello: « Date di tre torri situate in triangolo le distanze » fra loro e le altezze di ciascuna, trovare nella piana area del triangolo » un punto che sia equidistante dalle tre cime ». Io non mi ci fermo: e, taciuti altri, uno ne trascelgo per supplirne la dimostrazione ommessa, non so il perchè, da F. Luca. Egli è: allungare od accorciare il lato di un triangolo, salve le lunghezze degli altri due suoi lati, e senza mutarne l'area, e trovar qual dei tre lati a queste condizioni potrà allungarsi od accorciarsi di più. Sia il triangolo abc, e il lato che allungar od accorciar si vuole bc: dall'angolo opposto a si cali sul punto di mezzo di bc la retta ae; si cangi bc in $2ae$, il nuovo triangolo formato dei lati ba, ca, $2ae$, avrà la stessa area che il triangolo dato abc. Facendo similmente rapporto agli altri due lati, si avranno allo stesso modo due triangoli della medesima area, e la differenza dei lati con quelli, ne'quali rispettivamente furono cangiati, farà vedere qual soffra il maggiore allungamento o accorciamento. Sin qui il compendio della risoluzione esibita da F. Luca. A supplirvi la mancante dimostrazione, chiamati m, n, p ordinatamente i lati ac, ab, bc, e ca-lata dal vertice a la perpendicolare ad, si consideri che per la 13ª del II.° di Euclide $cd = \frac{m^2 - n^2 + p^2}{2p}$, e quindi $ad^2 = m^2 - \left(\frac{m^2 - n^2 + p^2}{2p}\right)^2$; e l'area del triangolo $abc = \frac{1}{2} p \sqrt{\left(m^2 - \left(\frac{m^2 - n^2 + p^2}{2p}\right)^2\right)} = \frac{1}{4} \sqrt{\left(2 (m^2 + n^2) p^2 - p^4\right)}$. Cangiato p in y, dovrà pel problema sussister la stessa area, e per ciò $\frac{1}{4} \sqrt{\left(2(m^2 + n^2) y^2 - y^4\right)} = \frac{1}{4} \sqrt{\left(2(m^2 + n^2) p^2 - p^4\right)}$; onde risolvendo, si ottiene $y = \sqrt{(2m^2 + 2n^2 - p^2)}$. Ora la linea $ae = \sqrt{(ad^2 + de^2)} = \sqrt{\left(m^2 - \left(\frac{m^2 - n^2 + p^2}{2p}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} p - \frac{m^2 - n^2 + p^2}{2p}\right)^2\right)} = \sqrt{\frac{2m^2 + 2n^2 - p^2}{4}}$, e per ciò $2ae = y$. A codesta varia congerie di cento problemi aggiunto vien da F. Luca: *Particularis tractatus circa corpora regularia et ordinaria*, ed è non un trattato scientifico, avendolo già fatto Euclide, ma un trattato per li pratici volgari, cioè un cumulo di casi, de'quali dà lo scioglimento, ma senza dimostrazione.

Si è veduto, che nel titolo del Cap. I della Distinzione terza F. Luca enuncia apertamente la via, per la quale si propone di sciogliere i problemi *per viam algebre*; la stessa via tiene in qualcuno dei problemi del capo II: tra li cento problemi vari della Distinzione ottava se ne contano ben trentaquattro geometrici sciolti con espresso calcolo algebraico, talvolta complicato e lungo. E come mai potè Montucla non accorgersi di questa applicazione dell'algebra alla geometria, o perchè non ne fece motto parlando di F. Luca, e del contenuto della sua opera, nè là dove scrivendo le lodi di Vieta commemora le applicazioni, che dell'algebra alla geometria fecero Regiomontano e Tartaglia ? : *Nous devons faire honneur à Viète de l'application de l'algèbre à la géométrie, invention si utile et dont l'analyse même n'a pas tiré de moindres avantages que la géométrie. On voit à la vérité dès le milieu du XV siècle des traces de cette application dans Regiomontanus, qui se servit de l'algèbre pour resoudre quelques problèmes sur les triangles. On trouve aussi dans Tartalea et d'autres analistes du XVI siècle l'algèbre employée à la solution de divers problèmes de géométrie; mais il faut bien distinguer cette espèce d'application de l'algèbre à la géométrie de celle, que M. Viète a introduite, car tous ces mathématiciens assignoient des valeurs numériques aux lignes données du problème et se contentoient de trouver celle qu'on cherchoit de la même manière. Il ne me paroît pas qu'aucun d'eux ait songé à construire géométriquement cette valeur trouvée* (Par. III, Liv. III, art. VIII). Altro che qualche problema geometrico trattò coll' algebra F. Luca, e se meritò di esser nominato Regiomontano, perchè non egli ? Il si dovea almeno per far vedere che in Italia, primo domicilio dell'algebra venuta d'Oriente non meno, anzi più che nella Franconia, godeva ella del congiungimento suo naturale colla geometria. Vieta, non v'ha dubbio, portò di gran lunga avanti l'utilità dell'applicazione dell' algebra alla geometria, rappresentando per lettere indeterminatamente le quantità numeriche date; ciononostante sembrami duro ed eccedente i sentimenti dello stesso suo duce il parlar di Bossut sulle soluzioni di Regiomontano, Tartaglia e Bombelli: *Elles n'étoient pas fondées sur une méthode régulière et générale d' appliquer l' algèbre à la géométrie. Viète est le premier qui ait donné une telle méthode.* La generalità di risultati va distinta dalla regolarità del procedere.

L'autore dell'elogio di Leonardo Fibonacci, nel primo tomo delle *Memorie istoriche di più illustri uomini Pisani,* nella sua analisi della geometria pratica di Leonardo, non dice mai che faccia in alcun problema uso di algebraico calcolo, ed all'opposto parla sempre di dimostrazioni e risoluzioni per linee, e di metodi laboriosi, e d'instancabile sintetica minutezza. Pare dunque non potersi negare a F. Luca una gloria per tanta applicazione dell'algebra alla geometria, quando anche stimar si voglia, che da alcun altro vissuto tra Leonardo e lui ne ricevesse l'esempio, e dallo stesso suo non darsene vanto, credasi poterne trarre argomento.

Proclus, scrive Montucla, Part. I, liv. IV, art. II, pag. 225, *cite un autre ouvrage d'Euclide qui étoit intitulé* De divisionibus. *On croit avec quelque raison, qu'il concernoit ce que nous nommons aujourd'hui la Géodésie, c'est-à-dire la division des figures. On a sur le même sujet un élégant Traité d'un Géomètre Arabe, nommé Mehemet de Bagdad, que quelques-uns ont soupçonné être celui d'Euclide. Mais je crois que c'est traiter l'écrivain Arabe de plagiaire, sur un trop léger fondement.* Il trattato di Bagdadino fu tradotto e pubblicato nel 1570, come narra lo stesso Montucla, Part. II, liv. I, art. VI. Ma l'arabo geometra visse e scrisse nel secolo decimo (Dechales, tomo I, *op. trac. de prog. math. etc.*, pag. 12). Ed era quello il secolo, nel quale le scienze matematiche erano in massimo fiore appresso gli arabi, e nel quale Bagdad nominatamente era la loro Atene nelle scuole e nelle accademie, della quale, sulle opere dei geometri della greca Atene con ardore e trasporto cercate, raccolte, tradotte, tutto era lo studio per apprenderle, illustrarle, accrescerle. Come si può credere che in faccia ad una patria sì istrutta su Euclide, sì ricca dei suoi libri, o sì avida, osasse Mehemet il plagio appostogli? Più facile è a persuadersi che egli non fosse nè plagiario, nè creatore; ma che fabbricato avesse sul fondo di Euclide, alle cose di lui dato nuova forma, nuovo ordine, e aggiunte delle sue. Correndo il secolo duodecimo, fu tra gli arabi Leonardo di Pisa, e da loro tornato, oltre del libro dell'abbaco, arricchì l'Italia della geometria pratica, riputata da Commandino sì importante, sì utile, che egli stesso, dopo l'edizione di Euclide, disegnato avea darla in luce, come a compimento della geometrica scienza. In essa geometria pratica di Leonardo tutta la quarta distinzione è sulla divisione delle figure. Non abbiamo noi, considerando e il luogo dov' egli apparò, ed il disegno di Commandino di tanto sapore Euclideo dotato, fondamento di riguardare anche questa Distinzione di Leonardo come lavorata sulla dottrina di Euclide, e quale un estratto di essa ? Mi confermo tanto più in questo parere, quanto che nell' analisi sopra accennata della geometria pratica di Leonardo, di codesta parte che spetta la divisione delle figure, l'analizzatore fa distinti encomi, dicendo che difficilissimi problemi vi scioglie con somma eleganza e maestria di sintesi. E ritornando ora alla dottrina che sull'argomento stesso delle divisioni delle figure, espone fra Luca nella distinzione sua quinta, io osservo non esservi problema, del quale citi autore, e conseguentemente, stando all' avvertimento suo generale, doversi la sostanza tutta riputare cavata dalla distinzione quarta di Leonardo, il modo ancora conviene, non facendo ivi uso F. Luca di algebraica analisi, ma di sintesi Euclidea come Leonardo. Per le quali cose parmi che eziandio in questo trattato di F. Luca consolar ci possiamo d'avere il midollo della bella opera di Euclide, pel quale ci resti diminuito il danno della perdita.

ESTRATTO DELLA SOMMA DI F. LUCA.

Nella prima pagina dell'opera di F. Luca, dopo la dedica [1] latina di lui a *Marco Sanuto patrizio veneto*, cui loda per consumatissimo astrologo, eminentissimo aritmetico, geometra eccellentissimo, e, cui *hortante et impellente*, dice uscire il suo volume: dopo, dico, tal dedica seguono in lode di F. Luca e della sua opera un' Epigramma [2] latino di Fa. Pompilio, ed un sonetto di Giorgio Sommariva, il quale però è chiamato Epigramma, e quantunque italiano, ha il titolo latino: *Clarissimi uiri Domini Giorgij Sūmarippa veronēsis patricij Epigramma ad auctorem.*

Seguita nella seconda carta un'epistola italiana « *Alo Illu.mo Prin-» cipe Gui. Baldo. Duca de Urbino* » [3]. Dice di scriver l'opera in *lingua vernacula per renderla più comune.* E provando l'utilità dell'Aritmetica - Proporzioni ... in tutte le altre facoltà loda tra gli astrologi, per *prencipe di astrologia fra mortali, Ottauiano barba* del mecenate a cui scrive, indi il *vescouo forosēproniēse Miꝑ. Paulo de midelborgo* [4].

Tra gli architetti non nomina contemporaneo, ma si vale dell'autorità di Vitruvio e di *Leon Batista de gliamberti* [5] *fiorentino* per la utilità dell'aritmetica e geometria nell'architettura, tra le opere della quale crebbe per *noua luce de ytalia l'admirāda fabrica del degno palazzo* del principe *ꝑ la felicissima sua paterna memoria initiata. e cōsumata.*

Tra gli autori di *perspectiua* loda qual monarca de'pittori a quei tempi maestro *Pietro di frāceschi nr̄o cōterraneo. E assiduo familiare* del duca, e cita *vn compendioso* di lui *trattato de larte pictoria. e de lalineal forza in pspectiua* che si trovava nella biblioteca del duca medesimo. Dipoi commenda altri *famosi e supremi* nella stessa arte di vari luoghi. *Di vinegia. Gentil e Giouan bellini carnal fratelli*; *E*

(1) In questa dedicá chiama la sua opera *vigilias multo studio multoque labore desudatas.*

(2) Epigramma di Pompilio: *Que fuerant medijs carte consumpta latebris — Restituit lucas lector amice tibi.*

(3 Nelle lettere volgari a Guido Ubaldo non di altro si vanta che di aver raccolto dagli antichi e moderni filosofi le cose più utili spettanti alla pratica ed alla teorica, e di averle con ferme ragioni dimostrata o ridotte e canoni perfettissimi.

(4) Nella dedica in latino che segue l'italiana dice: *forisimpronij episcopo Paulo mindeburgensi.*

(5) Pag. 69 dice: Leon Battista degli Alberti Fiorentino

(6) Nel Probl. a. . . . . cita certo maestro Grazia per geometra e scrittore in geometria. In vece de'quattro punti posti in questa nota, l' originale del Cossali ha il seguente segno ↙ che non saprei come spiegare.

in ꝓspectiuo. desegno Hyeronimo Malatini. E in Fiorēza Alexādro boticelli. Phylippio e Domenico grilandaio. E in peroscia Pietro ditto elperusino. E ī Cortona Luca del nr̄o Maestro Pietro degno discipulo. E in Mantua Andrea mantegna. E in Furli Melozzo con suo caro alieuo. Marco palmegiano.

Tra gli scultori: *Andrea aluerochio*, *Antonio delpolaiuolo*, *Giugliano e Benedetto maiani carnal fratelli. E in vinegia el degno de marmi sculptore e architetto. Antonio rizzo. nello excelso ducal palazzo. de tutte sorte figure adorno. ala giornata elrēdan chiaro. Alexandro leopardi la Stupēda enea statua equestre del famoso capitano. Bart.° da bergamo che con sua lima apfection condusse.*

Tra maestri di musica: *frate Martino nr̄o conterraneo e ꝑ habito fratello.*

Tra cosmografi solo nomina *Erathostene. Strabone. Mario. Ptholomeo.*

Tra gli armigeri, in proposito di architettura militare, dice eccellente *Camillo Uitelli de castello*, al quale aggiunge di aver esposto Euclide. E nel tempo che leggeva nel ginnasio di Napoli dice di avere con *Piero victori* (1) « *oratore de lo Illustrissi.° D. Fiorētio alhora* » e cō *Giouan Iacomo trauzzi* (2) scorsi *liantichi volumi* di *Quinto curtio. Frontino. Uegetio.* E termina con dire di aver provato all'Italia l'utilità della geometria nelle armi il duca a cui scrive, il padre, ed il fratello di lui.

Tra i legisti cita *Bartolo d' saxo ferrato* che *in la soa teberina* (3) *sue figure geometriche vsando mostra la Geometria esser necessaria in iure.*

Tra i teologi cita qual esempio del giovamento, che la geometria reca alla teologia, il vescovo d'Urbino *Giouā pero ariuabn̄* (4), e poi il suo sottilissimo *Scoto* (*maxi.°. p.° 2.° 3° e 4° de le sētentie*).

Segue la stessa dedica in latino.

» Summario de la prima parte principale
» e d'tutte sorte progressioni con dignissime regole di nouo indutte.....
» . . . . . E queste cose tutte con lesequenti. siranno secondo li antichi.
» E ancora moderni. mathematici. Maxime del perspicacissimo phylo-
» sopho megarense. Euclide E del seuerin Boetio. e de nostri moderni
» Leonardo pisano. Giordano. Biagio da parma. Giouā sacrobusco. e
» Prodocimo padoano. da iquali in magior ꝑte cauo elpresente vo-
» lume. »

Distinzione prima, pag. 1.ª Unità principio di ciascun numero; ma non numero, e secondo Boezio è ciascun numero in *potentia*. Dice

(1) Nelle latine dice: *Petrus Victori magno vir ingenio tunc reip. Florentinae orator agens.*

(2) *Trautius in omni genere armorum nulli secundus.*

(3) Nella latina: *cuj inscriptio est Tyberiadis*, ma in vece di tutto ciò che segue non dice altro: *id mandatum memoriae reliquerit.*

(4) Nella latina leggesi *Joannes Petrus arivabenus.*

anche Boezio: « *Omne quod est: ideo est: quia vnum numero est* ». Aristotile dice: « *Siquid infinitum est: numerus est* » Specie: Numero *primo*; *composto; contra se primo*, cioè misurato dalle sole unità; numeri *ad invicem primi*; numeri *pariter pari*; *pariter impari*; *impariter pari*.

Pag. 2. Numeri *figurati*, tra quali i *circolari*; vedi *Estratto Rag.* pag. 6; numeri *perfetti, superflui, diminuti*; rispetto a tutti loda Boezio ed a lui manda.

Pag. 3. Sino al 100 non vi sono che due numeri *perfetti* 6, 28. Sino al 1000 non ve ne son che tre 6, 28, 496; il quarto è 8128. I numeri *perfetti* terminano alternativamente in 6 od in 8. S. Agostino parla assai del numero *perfetto* nel libro II.° cap. 30 *De Civitate Dei*, e del numero 7 ancora.

Pag. 4, fac. 2ª. Al fine sono nominati con *Ptolomeo* e *Geber* anche *Albumasar*, *Giovan* (sic) *de Sacrobusco* e *Giovan* (sic) *de Monte Regio*.

Pag. 5, fac. 1.ª Sul principio tre dice le parti della terra: Asia, Africa, Europa.

Pag. 6, fac. 1ª. Chiuso in carcere il conte Ugolino con tre figliuoletti, questi moriron di fame prima del padre, che morì il settimo dì. Nel ventre materno vi sono sette stanze; onde si conclude dai naturali, che la femmina possa portare sette figliuoli, avvegnachè uno, due, tre costumi di partorire.

Pag. 6 .. 8. Invenzione del numero *perfetto* secondo Euclide. Invenzione delle parti *aliquote* di un numero. Dividi per 2 sinchè puoi; poi arrivando ad un quoto indivisibile per 2, dividi il numero proposto per esso, e per tutti gli altri quoti trovati, retrocedendo.

Pag. 8, fac. 2.ª Numero *pariter pari* (1) è quello che si può dividere continuamente per 2 sino all'unità.

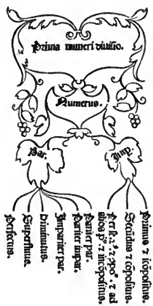
Pag. 9. Modo di trovarli secondo Euclide per la progressione dupla. Proprietà dei numeri *pariter pari*: sono quelle della progressione dupla, e quanto ai rapporti tra loro, e quanto alla somma della progressione. Numero *pariter impar* (2) è quello che non si può che una volta partire per 2. Si generano moltiplicando per 2 la progressione 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13 ...; onde ne viene la progressione 2. 6. 4. 10. 14. 18.... quindi i numeri *pariter impari* (3) crescono dall'uno all'altro di 4. E l'uno dall'altro è distante cinque luoghi dalla naturale progressione, computando gli estremi così: da 10 a 14 sono cinque luoghi 10. 11. 12. 13. 14. Ed essendo la progressione de'numeri *pariter impari* una progressione aritmetica, le convengono le proprietà generali di ogni progressione aritmetica. Numero *impariter paro* è quello che partecipa del *pariter paro* e del *pariter impar*, cioè si può più volte dividere per metà, ma non sino all'unità: 24. 28. 36. 40. Si trovano questi mol-

(1) Euclide nelle definizioni del 7° lo definisce: *quem numerus par metitur per numerum parem.*

(2) Euclide: *pariter impar est per quem numerus par metitur per imparem.*

(3) Euclide nel 7° non ha il numero *impariter pari*, e non l'ammettevano le definizioni di lui. È da F. Luca diviso in tre specie ciò che Euclide divide in due.

tiplicando la serie dei *pariter pari* per ciascuno degli *impari* 3. 5. 7. 9... Desiderando di più ricorri a Severino.



Sono i numeri *pari* altri *superflui*, altri *diminuti*, altri *perfetti*. Numero *primo incomposto*, che non ha numero che lo misuri o gli sia parte *aliquota*, ma è solo misurato dall' 1. Intendesi ciò del numero *primo incomposto assoluto*. Il numero dispari 9 è *composto* rispetto al 3, ma *primo* e *incomposto* riguardo ad ogni altro; e così 25, 49 sono *primi incomposti relativi*. Si distinguono dunque numeri *dispari primi incomposti*, *secondi e composti* che hanno comune misura come 9. 15. 21. 27. 33 .. e per sè *composti*, ma rispetto ad altri *incomposti*; cioè che non hanno comune misura, come 9 e 25, 15 e 21.

De' numeri *superficiali* e *solidi* simili non fa che ripetere i teoremi principali di Euclide. Dei *quadrati* ho già estratto e dilucidato nel volume primo della *Storia dell'algebra* quanto vi ha di buono. E così ancora de' numeri *congrui* e *congruenti*. Si dispensa dal parlare de' numeri *figurati*, *più alti*, *cubi pentagonali* ... e manda a Boezio, non spettando alla pratica la teoria loro [1].

Distinzione seconda. Al dir di s. Agostino 19.° *de Civ.* cap. 4: « *Ordo ē pariū dispariūq3 rerū sua cuiq; loca tribuēs dispositio* ».

Gli antichi, « cōmo Giouā de Sacro busco e Prodocimo d'beldemn» dis da padua dignissimo astronomo » fanno nove le specie della pratica numerale; ma la duplicazione è implicita nella moltiplica e la mediazione nella divisione; onde si riducono a sette: *numerazione*, ovver *representatione; additione; subtractione; moltiplicatione; diuisione; progressione; estrazion delle radici*. I filosofi intendono per *digito* ogni quantità minore di dieci; per *articulo* ogni numero che in dieci uguali parti si può dividere, sì che non vi resti alcuna cosa, come 10, 20, 30...; per *composito* intendono il numero che costa di *digiti* ed *articuli* come 12, 13, 23 ...Secondo « li pratici vulgari » il numero si divide in *numero, dicina, centinaro migliaro.* Dice che l'andare da man destra a sinistra è *more arabum* [2]; sebbene corrompendo siasi detto *Abaco* in vece di *Arabo*: aggiugne però che, secondo altri, *Abaco* è detto da greco vocabolo, che lascia in bianco. La numerazione è quale usasi in Italia oggidì *numero semplici (sic), dicine, cintinara, miliara, dicine de miliara, centinara de miliara, milioni, dicine de milioni, centinara de milioni, miliara de milioni, dicine de miliara de milioni, centinara de miliara de milioni, miliara de miliara de milioni. cioe milion de milion*, che noi chiamiamo *bilione*; e insegna a divider di tre in tre, ossia far sotto ogni quarto andando a sinistra un punto. Prova dell'*addizione*, sommar da su in giù; seconda prova, la *sottrazione*. La prova del 9 usata da Leonardo Pisano, e da molti anticamente; ogni numero si può scegliere a prova: fu scelto il 9 dagli antichi per essere il maggior *digito*; ma i moderni, più addentro perscrutando, hanno addottato il 7, e meglio

(1) I numeri dispari sono da F. Luca chiamati *caff*.
(2) Di simil pratica primi inventori.

che il 9 mostra gli errori e falli. Due maniere di prova pel 9: Prima, di *partire*; seconda, di *accozzare* o d' *infilzare*.

Esempio: 745681 : 74. Gettato il 9 per regola di partire dà 2; 25 partito per 9 dà 7; 76 partito per 9 dà 4; 48 partito per 9 dà 3; 31 partito per 9 dà 4. Accozzando $7+4=11$, gettato il 9, dà 2, $2+5+6=13$, gettato il 9 dà 4, $4+8=12$, gettato il 9 dà 3, $3+1=4$; oppure $7+4+5+6+8+1=31$, partito per 9 dà 4: il 4 diecsi la prova del numero 745681: riesce la stessa pei due modi, essendo proprietà del numero 9 singolarissima, che dividendo un numero di figure qualunque come 74, o prese nel diverso loro valore, o tutte nel valore di unità, il residuo riesce lo stesso: vi è bisogno di dilucidamento generico. La prova del 7 per partire; è simile: 7 partito per 7 resta nulla; 4 non si può partire; 45 partito per 7 resta 3; 36 partito per 7 resta 1; 18 partito per 7 resta 4; 41 partito per 7 resta 6. Ma pel modo di *accozzare* od *infilzare* da 7 gettato 7 resta nulla, da $4+5=9$ gettato 7 resta 2, da $2+6=8$ gettato 7 resta 1, da $1+8=9$ gettato 7 resta 2, $2+1=3$: il risultato è dunque differente, e non è che del 9 il darlo medesimo nei due modi. Ogni prova che vien bene per 9 vien bene per 7, ma non reciprocamente [1].

Il 9 non avvisa delle nulle dimenticate; perchè, per esempio, dà lo stesso residuo pel 4 che pel 40; non così il 7. Il 9 non discerne i numeri rivoltati, dando, esempigrazia, lo stesso residuo per 43 che per 34, lo stesso per 56 e 65, lo stesso per 574 e 547. Dunque la prova del 9 è più fallace che quella del 7. Ma questa ancora è incerta: prendi 124, la prova del quale per 9 è 7, e pel 7 è 5; aggiugni a 124 il prodotto $7\times9=63$ e avrai 181, del quale la prova per 9 è pur 7, e per 7 è 5: il simile accade sottraendo dal 124 il 63. E così sempre ad un numero, che dia pel 9 e pel 7 certe prove, si potrà aggiugnere o sottrarre altro numero, cioè 63; sì che riescan le medesime prove. E se tu moltiplicassi le prove provando pel 4, pel 5, fa il prodotto $9\times7\times5\times4=1260$; aggiugni questo prodotto a 124 e riusciranno nella somma le stesse prove che nel semplice 124. Per dar la prova all'addizione dovendosi dar la prova a ciascuno dei numeri sommandi ed alla somma, e l'aggregato dei residui delle prove in quelli, dovendo uguagliarsi alla prova di questa, siccome può accader fallacia in ciascuna delle prove, quindi le fallacie possono moltiplicarsi.

Addizione di specie diverse: cioè ducati, lire, soldi, denari; ovvero fiorini, lire, soldi, denari; ovvero libre, once, saggi; ovvero canne, braccia, quarte; ovvero anfore, bigonci, quarte, secchie; ovvero marche, once, quarti, carati, grani; ovvero lire, once, denari pesi, carati, grani; ovver corbe, some, mine, quarte. Il Buc. era lire 7; il fiorino

[1] Presso alle parole che formano le linee 15—19 della presente pagina l'originale del Cossali ha sul margine laterale interno le seguenti parole non richiamate nel testo dell'originale medesimo: « Nella » prova pel 7 si deve sempre usare il modo del partire ».

soldi 100 = lire 5, essendo la lira = soldi 20 sempre e per tutto, il soldo per tutto = den. 12, la libra *ubique locorum* = oncie 12, la grossa = oncie 18.

a 5 *c* 18 *b* 27 *d* 6 *g*

Dimostrazione geometrica della prova pel 9. Siano da sommare i due numeri *cb*, *bd*; e siano 1° ambidue esattamente divisibili per 9; la somma anche sarà esattamente divisibile per 9, giusta la penultima *conceptione* del 7° di Euclide. Si aggiunga 2° al numero *bd* il 6 nelle prove de'numeri separate; si avrà 6 per residuo, e così nella prova della somma. Si aggiunga 3° anche al *cb* il numero 5, nelle prove dei due numeri *ab*, *bg*; si avrà per residuo 11—9=2, e così anche nella prova della somma.

Sottrazione o abbattimento di un numero da un altro. Condanna certi modi antichi e lunghissimi, dicendo degli ostinati a sostenerli: *Sordibus ĩbuti nequeunt dimittere sordes* ». Aggiugne essere documento del morale Catone: « *Disce ꝑ a doctis et ĩ doctos ipse doceto* ». Prove: prima colla somma; seconda pel 9; terza pel 7. Qualora il residuo della prova del diminuendo è minore del residuo della prova del sottraendo, si aggiunga a quello il 9, od il 7 per poterne toglier questo. A sottrarre 2782 da 9321 si possono tenere tre strade. Prima, dal 2 andar al 10 vi è 8, 8+1=9. Aggiungendo all'8 la decina, si ha 9 decine; da 9 andare al 10 vi è 1, 1+2=3 ecc. Seconda, prendendo dal 2 ad imprestito una decina, ed aggiungendola ad 1 si ha 11, dal quale sottraendo 2 resta 9. Similmente trasportando dal 3 una decina a fianco dell'1 rimasto in 2 si ha 11, dal quale togliendo 8 si trova 3 ecc. Terza, senza riflettere alle figure antecedenti, cangia 1 in 11 aggiugnendo 10, poi aggiugni per compenso 1 all'8. ecc. Chiama questo il modo di prestare e rendere.

$$\begin{array}{r} 9321 \\ 2782 \\ \hline 39 \end{array}$$

Moltiplica, prodotto, numeri producenti. « *Numerus ꝑ aliũ multiplicari dicitur qui totiẽs sibi coaceruatur quotiẽs in multiplicante est vnitas* ». Euclide nel 7°. Otto modi di moltiplicare: 1° per *scachieri* in Vinegia, o con altro nome per *bericuocolo* in Firenze; 2° per *castelluccio*; 3° per *colonne* o *tavoletta*; 4° per *crocetta* o per *cassella*; 5° per *quadrilatero*; 6° per *gelosia* o *craticola*; 7° per *ripiego*; 8° a *scapezzo* (¹).

Moltiplica a *scachieri* è quella che usasi oggidì. *Via* vuol dir *volte*, e *fia*, *fiade*; il toscano costuma dir *via*, il lombardo *fia*, e così molti altri paesi. Prova della moltiplica pel 9 e pel 7: moltiplica tra loro le prove de'producenti, ed al risultato deve esser uguale la prova del prodotto. La ragione si ha nella 1ª del 2° di Euclide.

Multiplicandus. 9 8 7 6
Producentes.
Multiplicans. 6 7 8 9
8 8 8 8 4
7 9 0 0 8
6 9 1 3 2 Scachieri
5 9 2 5 6 Bericuocole
summa. 6 7 0 4 8 1 6 4.

Moltiplica per *castelluccio*: si manifesta dall'esempio a fianco.

61101000
Castelucio. 5431200
476230
40734
Sũma. 67048164 .1.
Scontro dela prova.

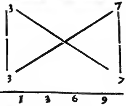
(¹) Per eseguir la moltiplica bisogna aver a mente, come hanno i fiorentini, il *discorso* dei *travagliamenti* di tutti i numeri da 10 in giù. Non nomina Pitagora, nè la tavola Pitagorica.

Moltiplica per *colonna:* si usa quando uno dei producenti è piccolo, di modo che si può a mente moltiplicare per esso ogni figura dell'altra: come essendo 13 e l'altro 4685; si moltiplica 5 in 13 ecc.

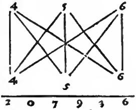
4685
13
60905

Crocetta. o vero casella.

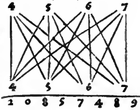
Moltiplica per *crocetta.* Siano 1° i producenti di due figure ed uguali; 37×37. Ecco l'ordine: $7\times7=49$; poni 9, serba 4; $7\times3+3\times7=21+21=42$; $42+4=46$, poni 6, serba 4; $3\times3=9$, $9+4=13$.



Siano 2° i producenti di tre figure ed uguali; cioè 456×456. Si opererà coll'ordine che segue: $6\times6=36$, poni 6 serba 3; $6\times5+5\times6=60$; $60+3=63$, poni 3 serba 6; $6\times4+4\times6+5\times5+3=79$, poni 9 serba 7; $5\times4+4\times5+7=47$, poni 7 serba 4; $4\times4+4=20$, poni 20.



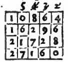
Siano i producenti di quattro figure ed uguali; come 4567×4567: $7\times7=49$, poni 9 serba 4; $7\times6+6\times7+4=88$, poni 8 serba 8; $7\times5+5\times7+6\times6+8=114$, poni 4 serba 11; $7\times4+4\times7+6\times5+5\times6+11=127$, poni 7 serba 12; $6\times4+4\times6+5\times5+12=85$, poni 5 serba 8; $5\times4+4\times5+8=48$, poni 8 serba 4; $4\times4+4=20$, poni 20.



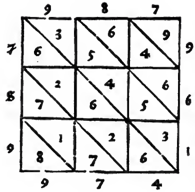
In simil modo si dica dovendo moltiplicare producenti disuguali, come 9876×78.

Moltiplica per *quadrilatero.* Bisogna fare un quadrilatero di una casella più lungo che il numero delle figure del numero più grande, e di tante caselle largo quante son le figure dell'altro numero moltiplicatore; poi moltiplicando come a *scachieri* si dispongono i prodotti del moltiplicando con ciascuna figura del moltiplicatore in linee parallele senza retrocedere come vedi. Ma poi si somma diametralmente così: 4 e si pone 4; $6+6=12$ poni 2, porta 1; $1+8+9+8=26$, poni 6 porta 2; $2+0+2+2+0=6$, poni 6 porta nulla; $1+6+7+6=20$, poni 0, porta 2; $2+1+1+1=5$, poni 5; $2+7=9$, poni 9; 2, poni 2.

Multiplicare per quadrilatero.



29506624 Sūma.



Moltiplica per *gelosia*. Si dicono *gelosie* « quelle graticelle chĕ si co-» stumono mettere ale finestre de le case doue habitano dōne acio nō » sipossino facilmēte vedere o altri religiosi. Diche molto abonda la » excelsa cita de vinegia ». Chiama poi *pratici ragionieri* gli aritmetici pratici. Chiamasi similmente moltiplica *a bericuocolo* per la somiglianza a' *bricuocoli* o *cōfortini* che si vendono alle feste. Il modo della moltiplica per *gelosia* è questo : $7 \times 7 = 49$, poni 9 nel primo quadratello superiore a sinistra sopra il diametro e 4 sotto; $7 \times 8 = 56$, ponilo nel seguente quadratello a destra, ma la figura 6 sopra la figura 5 sotto il diametro ecc. Somma per *ischicio*, cioè diametralmente: 9, poni 9; $6+4+6=16$, poni 6 porta 1; $1+3+5+4+5+3=21$, poni 1 porta 2; $2+6+2+6+2+6=24$, poni 4 porta 2; $2+7+1+7=17$, poni 7 porta 1, $1+8=9$.

Moltiplica per *repiego*. « Repiego de vn numero se intende el pro-» ducto de doi altri numeri che multiplicati vno nel laltro fanno quel » tal numero aponto ». Il *repiego* di 24 è il prodotto 4×6. A moltiplicar 29×24 per *repiego* fa $29 \times 4 = 116$, poi 116×6. Altro numero del *repiego* $= 696$.

Moltiplicare a *scapezzo* è dividere uno dei numeri in parti, e moltiplicarle tutte per l'altro, od anche dividere entrambi i numeri in parti e moltiplicare tutte dell'uno in tutte dell'altro per la 1ª del 2°, e per la 16ª del 9° di Euclide.

De viribus numerorum in ordine multiplicandi notabilissimis. Vedi il compendio generalizzato nell'*Estratto ragionato*, pag. 6.

Divisione. Divisore o *partitore, aduenimēto* o *numerus quotiens*. Se nella divisione restano rotti si chiaman *eximi de integri*. I modi di divider sono quattro : 1.° a *regolo*, ovver *tavoletta*, ovver alla *deritta*; 2° a *repiego*; 3° a *danda*; 4° a *galea*. Per partire è necessario aver a memoria i *libretti*; vuol dire le tavole delle moltipliche. Il rotto si scrive con una riga tra il resto, ed il partitore di sotto.

Divisione a *regolo* (¹). S'incomincia a sinistra, all'opposto del sommare, sottrarre, moltiplicare; e qui nota che, secondo molti antichi, il moltiplicare si cominciava già dall'ultima figura a sinistra, come a partire : *Unde corū versus. Subtrais aut addis adextris aut mediabis. Aleua dupla diuide multiplicaq3. Extrahe radicē duplam sub parte sinistra etc.* La divisione a *regolo* è quale si usa da noi essendo il partitore semplice.

Divisione a *repiego*. Esempio : $\dfrac{9876}{48} = \dfrac{9876}{6 \times 8} = \dfrac{1646}{8} = 205\,\dfrac{6}{8}$.

Divisione a *danda* è quando il partitore è composto: come avendo a dividere 97535376 per 9876, l'operante dice tra se, che *li darò*, cioè al partitore ? *quante uolte dirò che entri* ? *Damoli* 2, 3, 4 ecc. andando

(¹) A *regolo*, perchè il dividendo è lungo e stretto come un *regolo* ; a *tavoletta*, perchè lo scolare riempie la *tavoletta* su cui gli si è data da fare la divisione; a *deritta*, perchè si va a *diritta*.

a tentone, e moltiplicando tutto il partitore successivamente per 1, 2, 3 .. sino a 9.

Divisione a *galea* è quella che noi usiamo essendo il partitore composto; guardando cioè quante volte la prima figura di lui entra nella prima o nelle due prime del dividendo, e se le altre di lui entrano ugualmente nelle altre di questo. La ragione di chiamarla a *galea* è che F. Luca nel far questo esame opera così: 9 entra in 97 volte 9, e $9\times9=81$, $97-81=16$ che pongasi sopra 97 depennato con un tratto a traverso; $8\times9=72$, sottraendo da 165 il 72 del 5 resta 3, che scrivesi sopra il 5 depennato del 16 resta 9, che scrivesi sopra il 6 depennato, e sopra l'1 depennato resta 0; $7\times9=63$ da sottrarsi da 933, 3 da 3 lascia 0 da scriversi sopra 3 depennato, 6 da 93 lascia 87 da scriversi col 7 sopra il 3, e coll'8 sopra il 9 depennando essi 3, 9; $6\times9=54$ da sottrarsi da 8705, 4 da 5 lascia 1 da scriversi sopra il 5 depennato, 5 da 10 lascia 5 da scriversi sopra 0 depennato, e sopra il 7 resta da scriversi 6. Si ha 8651399 da partire per 9, il 9 entra in 86 volte 9, ma è troppo; si prenda 8: ora $8\times9=72$ da sottrarsi da 86 e lascia 14 da scriversi sopra 86 depennato; $8\times8=64$ sottratto da 145 lascia 81 da scriversi coll'1 sopra il 5 depennato coll'8 sopra il 14 depennato; $8\times7=56$ sottratto da 811 lascia 755, da scriversi col 5 sopra l'inferiore 1 depennato col 5 secondo 5 sopra l'1 più alto depennato, e col 7 sopra l'8 depennato; $6\times8=48$ sottratto da 7553, lascia 7505 da scriversi col 5 primo sopra il 3 depennato, col 0 sopra il 5 depennato, restando le figure 75. Si ha ora 750599 da dividere per 9876: non si può computare che 9 stia in 75 che sette volte, e $7\times9=63$ che sottratto da 75 lascia 12 da scriversi col 2 sopra il 3 depennato, e coll'1 sopra il 7 depennato; $7\times8=56$ sottratto da 120 lascia 64 da scriversi col 4 sopra il 0 depennato, e col 6 sopra il 2 depennato unitamente all'1; $7\times7=49$ sottratto da 645 lascia 596 da scriversi col 6 sopra il 5 depennato, col 9 sopra il 4 depennato, col 5 sopra il 6 depennato; $6\times7=42$ sottratto da 5969 lascia 5927 da scriversi col 7 sopra il 9 depennato, col 2 sopra il 6 depennato, rimanendo le figure 59. Si ha ora 59279 da dividere per 9876; 9 entra in 59 6 volte, e $9\times6=54$ sottratto da 59 lascia 5 da scriversi sopra 9 depennando questo ed il 5; $8\times6=48$ sottratto da 52 lascia 4, da scriversi sopra il 2 depennandolo insieme con 5; $7\times6=42$ sottratto da 47 lascia 5 da scriversi sopra il 7 depennando e questo e il 4; $6\times6=36$ sottratto da 59 lascia 23 rotto della divisione. Si ha dunque $\frac{97535399}{9876}=9876+\frac{23}{97535399}$.

			×3				
		7	6	5			
		8	2	9			
		×4	5	4	4		
	8	6	1	0	2	2	
9	9	7	5	5	6	5	
	×6	3	0	1	3	7	3
9	7	5	3	5	3	9	9

Dalla figura per tanto acuta, che prende salendo il tipo delle operazioni, gli si è dato il nome di *galea*, o come dice Tartaglia di *battello*; e ciò, giusta il dir di Tartaglia, è stato in Venezia; e debbo aggiugnere che si soleva scrivere il partitore sotto il dividendo di mano in mano più a destra, in modo che la prima figura del partitore corrispondesse alla più sinistra delle figure del nuovo dividendo col quale si ricominciava il giro delle operazioni.

Per. .9.

Partitore. 6|2 Avanço.
Avenimento. 6|3 Scontro.

Prova della divisione pel 9. La prova dell'avanzo 23 è 5, la prova del partitore 9876 è 3, quella dell'avvenimento è pur 3. Si moltiplichino le prove del partitore e dell' avvenimento, e si aggiunga quella dell'avanzo $3 \times 3 + 5 = 14$, prova 5 è lo scontro colla prova del dividendo 97535399 che deve esser uguale; e di fatto $9+7+5+3+5+3+9+9=50$, gettato il 9, resta 5.

Pel 7 similmente; eccetto che, come sopra si è detto nelle prove, conviene tenere il modo di partire. Da 23 diviso per 7 resta 2, da 9876 resta 6, e vale pel partitore, e pell'avvenimento: $6 \times 6 + 2 = 38$ diviso per 7 resta 3 scontro, e 97535399 diviso per 3 resta pur 3.

Per. .9.

Partitore. 3|5 Avanço.
Avenimento. 3|5 Scontro.

Dalla dimostrazione della prova del 9 riguardo alla moltiplica deduce la dimostrazione della prova stessa riguardo alla divisione; essendo il prodotto dell'avvenimento nel partitore + l'avanzo = al dividendo.

A pagina 36, facciata 2ª, pone la tavola degli atti colle dita delle mani ma non ne spiega l'uso.

Pagina 37. Trattato quinto. *Progressione.* È un aggiungimento de' numeri che comincia da 1, o da 2, o da qualunque numero; e va continuando con numeri, i quali eccedono l'uno l'altro egualmente.

Progressione continua e *discontinua* o *intercisa.* Somma di 1. 2. 3. 4. 5 ... terminando in numero pari $2m$ è $= m \times 2m + 1$. Somma quando termina in dispari $2m+1$ è $= (m+1)(2m+1)$. Somma generale essendo l'ultimo termine $= n$ sarà $(n+1) \cdot \frac{n}{2}$. Data la progressione *intercisa* 2. 4. 6. 8. 10. 12 ... $2+2m$ sarà la somma $= m(m+1)$. Data la progressione *intercisa* 1. 3. 5. 7 — . — . $2m+1$ sarà la somma $= (m+1)^2$. Generalmente sia a il primo termine, n il numero de' termini, u l'ultimo termine, sarà la somma $= (a+u) \cdot \frac{n}{2}$, ovvero $\frac{a+u}{2} \times n$.

Largamente si può chiamar progressione *proporzionale* la serie delle quantità proporzionali. Somma della progressione *dupla* $a.\ 2a.\ 4a.\ 8a.\ 16a \ldots .\ 2^{n-1}a = 2^{n-1}a + (2^{n-1}a - a)$. Somma $a.\ 3a.\ 9a.\ 27a.\ 81a \ldots .\ 3^{n-1}a = 3^{n-1}a + \left(\frac{3^{n-1}a - a}{2}\right)$. Somma $a.\ 4a.\ 16a.\ 64a \ldots\ 4^{n-1}a = 4^{n-1}a + \left(\frac{4^{n-1}a - a}{3}\right)$. Somma $a.\ 5a.\ 25.a + 125a \ldots .\ 5^{n-1}a = 5^{n-1}a + \left(\frac{5^{n-1}a - a}{4}\right)$. Generalmente somma $a + ga + g^2a + g^3a \ldots . + g^{n-1}a = g^{n-1}a + \frac{g^{n-1}a - a}{g-1}$. Somma $a.\frac{3}{2}a.\left(\frac{3}{2}\right)^2 a.\left(\frac{3}{2}\right)^3 a.\left(\frac{3}{2}\right)^4 a \ldots .\ \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} a = 3$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} a - 2a$. Generalmente somma $a \cdot \left(\frac{h}{h-1}\right)^{0} \cdot \left(\frac{h}{h-1}\right)^{1} a \dots \left(\frac{h}{h-1}\right)^{n-1}$ $a = h\left(\frac{h}{h-1}\right)^{n-1} a - (h-1)a$.

Ritorna alla progressione strettamente detta, che noi chiamiamo *aritmetica*. Si dica a il primo termine, u l'ultimo, s la somma, n il numero de'termini, e l'eccesso di un sopra l'altro. Dati a, u, e si troverà $n - 1 = \frac{a - u}{e}$. La somma di $a.\ 2a.\ 3a.\ 4a \dots (n-1)a = \left(\frac{(n-1)a}{a} + 1\right) \frac{(n-1)a}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{(n-1)a}{a} + 1\right)(n - 1)a$.

Seguitano le somme delle serie de'numeri quadrati, delle quali ho già fatto uso nel volume I della mia *Storia algebraica* pag. 39. *Quidam casus per viam progressionum solubiles*. Molti si contengono sotto questo problema generale. Un viaggiatore fa ogni giorno sei miglia, l'altro partito dal medesimo luogo nello stesso istante viaggia progressivamente per a miglia il primo giorno, $a + e$ il secondo, $a + e + e$; il terzo ecc. Si domanda: quando il secondo raggiugnerà il primo? Si ha, chiamando x il numero dei giorni $xb = \left(a + (a + (x - 1)e\right) \times \frac{x}{2}$, e se ne tira $x = \frac{2b - 2a}{e} + 1$. Nel caso, per esempio, di $b = 10$, $a = 3$, $e = 3$, ne viene $x = \frac{20}{3} - \frac{6}{3} + 1 = \frac{20}{3} - 1 = 5\frac{2}{3}$. Ma in giorni $5\frac{2}{3}$, il viaggio del primo è $= 5\frac{2}{3} \times 10 = 50 + \frac{20}{3} = 50 + 6\frac{2}{3}$; ed il viaggio del secondo in giorni 5 è $= 3 + 6 + 9 + 12 + 15 = 45$: e perchè il suo viaggio nel sesto giorno sarebbe di miglia 18, se prendasi proporzionevolmente per $\frac{2}{3}$ di giorno il viaggio di miglia $\frac{2}{3} \times 18 = 12$, il viaggio totale di lui in giorni $5\frac{2}{3}$ verrà ad essere di miglia $45 + 12 = 57$, che non conviene col viaggio di $56\frac{2}{3}$ del primo. Ordina quindi F. Luca di considerare, che facendo il primo nel sesto giorno miglia 10, il secondo 18, questi ne verrebbe a fare 8 di più; ma essendo la differenza dei viaggi nei cinque giorni $= 5$ miglia sole, per raggiugnere il primo non gli è di bisogno di far nel tempo restante di viaggio, che miglia 5 di più: dunque si dica: se la differenza di miglia 8 importa un giorno, la differenza di miglia 5, qual parte di giorno importa? ed è $\frac{5}{8}$. Di tal modo $\frac{5}{8} \times 10$

$= 6\frac{1}{4}$ che, aggiunte a 50, formano $56\frac{1}{4}$; e $\frac{5}{8}\times 18 = 11\frac{1}{4}$ che, aggiunte a 45, danno egualmente $56\frac{1}{4}$. Il simile prescrive F. Luca di fare in altri casi simili. Ma chi ha detto a F. Luca che il viaggio del secondo nei $\frac{2}{3}$ del sesto giorno si debba estimare in proporzione a quello nell'intera giornata, e prendersi per ciò $= \frac{2}{3}\times 18$? Basta sostituire $x = 5\frac{2}{3}$ nella formola $\left(a + (a + (x-1))\,e\right)\times\frac{x}{2}$, e si troverà

$$\left(6 + 4\frac{2}{3}\times 3\right)\times\frac{5\frac{2}{3}}{2} = 20\times\frac{5\frac{2}{3}}{2} = 10\times 5\frac{2}{3},$$ non altrimenti che per la formola $xb = 5\frac{2}{3}\times 10$. Il viaggio deve essere in aritmetica progressione nelle parti del giorno, siccome ne'giorni. Diviso il sesto giorno in tre uguali parti, siano i viaggi in esse con progressiva celerità fatti, z, $z + d$, $z + 2d$: si ha la somma dei primi due $z + z + d$, ossia $2z + d = 10x\ 5\frac{2}{3} - 45 = 56\frac{2}{3} - 45 = 11\frac{2}{3}$, e la somma di tutti e tre $3z + 3d = 18$; da questa si tragga $d = 6 - z$, e trasportando nella prima $2z + 6 - z = 11\frac{2}{3}$, $z = 5\frac{2}{3}$, $d = 6 - 5\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Dati a, d, s trova u, ovvero n, od uno e l'altro.

Uno prende a cavare un pozzo profondo braccia 11 per lire 11. Accade che non ne cava se non braccia 6: quanto aver deve secondo il patto? Raccogli 1. 2. 3. 4.... 11 che forma 66; raccogli sino a 6 ed hai 21: dunque $66 : 21 :: 11 : 3\frac{1}{2}$, e tanto gli si deve. Tartaglia (Parte II, pag. 10) osserva, che questa conclusione suppone che lo scavo del primo braccio porti una fatica; lo scavo del secondo due fatiche; del terzo tre fatiche..., e che ciò in vece di essere matematico è giudiciale ed arbitrario.

Uno va 300 miglia; il primo dì va tante miglia più di 25, quanti furono i dì del viaggio; il secondo dì fece viaggio doppio; il terzo il doppio del secondo, e così via via. Quanti furono i giorni del viaggio? Quale il viaggio del primo dì? Primo dì $25 + x$; secondo $50 + 2x$; terzo $100 + 4x$; quarto $200 + 8x$: supponi $x = 3$, e avrai $28 + 56 + 112 = 196$, troppo poco: poni $x = 4$, ed avrai $29 + 58 + 116 + 232 = 435$, troppo: dunque poni $x = 3 + y$. Sarà il viaggio del primo dì $= 28 + y$; del secondo $= 56 + 2y$; del terzo $= 112 + 4y$; del quarto sarebbe $224 + 8y$: instituisci la proporzione $1 : 224 + 8y :: y : 224y + 8y^2$; raccogli e verrà $8y^2 + 231y + 196 = 300$.

Quattro vanno da Firenze a Roma distante miglia 100; uno cresce i suoi viaggi di giorno in giorno nella progressione 1. 2. 3. 4....; il secondo nella progressione 1. 3. 5. 7. 9... ; il terzo nella progressione 2. 4. 6.... ; il quarto nella progressione 4. 8. 12... Quanti dì debbon partire uno dopo dell' altro per giugnere a Roma insieme ? Dalla general formola $\left(2a + (n-1)d\right)\frac{n}{2} = 5$ tirasi $n = -\frac{2a-d}{2d} + \sqrt{\left(\frac{2ad}{2d}\right)^2 - 2\frac{5}{d}}$. Per la prima progressione $n = -\frac{1}{2} + \sqrt{200\frac{1}{4}}$; per la seconda $n=10$; per la terza $n = -\frac{1}{2} + \sqrt{100\frac{1}{4}}$; per la quarta $n = -\frac{1}{2} + \sqrt{50\frac{1}{4}}$. Tartaglia (Parte II, carte 9), riprova questa soluzione di F. Luca, includente quantità irrazionali, e conducente a tempi irrazionali di partenza de' viaggiatori l'uno dopo l'altro. Risolve egli alla citata carta il problema a tastoni, promettendo di risolverlo per algebra direttamente a suo luogo, e determina per la prima progressione $n = 13\frac{9}{14}$; seconda progressione $n = 10$; terza progressione $n=9\frac{1}{2}$; quarta progressione $n=6\frac{4}{7}$.

Uno fa ogni giorno miglia d di viaggio; l'altro gli va dietro dopo giorni m, accrescendo i suoi viaggi in progressione $a \,.\, a+d \,.\, a+2d \,.\, a+3d \ldots$ In quanti giorni raggiugnerà il primo ? Oppure, dato il numero de' giorni a raggiugnerlo, quanti giorni dopo partì ?

Due formiche sono in un piano lungo braccia 100, l'una da un capo, l'altra dall'altro; l'una va al giorno $\frac{1}{3}$ di braccio, e la notte torna indietro $\frac{1}{4}$ di braccio; l'altra va al giorno $\frac{1}{5}$ di braccio, e torna addietro $\frac{1}{6}$ di braccio: in quanti giorni s'incontreranno? $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$; $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$; $\frac{1}{12} + \frac{1}{30} = \frac{7}{60}$ viaggio delle due formiche insieme in un giorno $\frac{7}{60} : 1 :: 100 : \frac{100 \times 60}{7} = 857\frac{1}{7}$. F. Luca sbaglia nel fine del calcolo facendo $\frac{100 \times 60}{7} = 762\frac{6}{7}$. Tartaglia (Parte II, pag. 10), accusa di erronea la regola, perchè pel giorno in cui s'incontrano non vuole che si computi la notte, ossia il ritorno in essa susseguente, e quindi ordina di operare così: $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$; $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{10}{24}$; $\frac{8}{15} - \frac{10}{24} = \frac{8}{15} -$

$\frac{5}{12}=\frac{7}{60}$. Perchè al giorno in cui s'incontrano non seguita notte, che le faccia tornar addietro; dunque prendasi $100-\frac{5}{12}=99\frac{7}{12}$, e dicasi: $\frac{7}{60}:1::99\frac{7}{12}:99\frac{7}{12}\times\frac{60}{7}=853\frac{4}{7}$: ma non si curi il rotto di giorno $\frac{4}{7}$, e veggasi quanto viaggio importino i giorni 853, cioè viaggio $853\times\frac{7}{60}=99\frac{31}{60}$. Or $100-99\frac{31}{60}=\frac{29}{60}$, e questo dev'essere il viaggio delle due formiche in una parte dell'854° giorno senza computare il ritorno della notte; dunque dicasi $\frac{8}{15}:1::\frac{29}{60}:\frac{29}{60}\times\frac{15}{8}=\frac{29}{32}$.

Un topo sta in cima di un albero alto braccia 60, ed una gatta sta al piede di esso: il topo scende ogni dì $\frac{1}{2}$ di braccio, e la notte torna in su $\frac{1}{3}$ di braccio; la gatta sale in su ogni dì 1 braccio, e la notte scende $\frac{1}{4}$ di braccio, e l'albero cresce ogni giorno fra il topo e la gatta $\frac{1}{4}$ di braccio, e la notte scema $\frac{1}{8}$ di braccio: in quanti giorni la gatta raggiugnerà il topo? Fr. Luca opera così: $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$; $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$; dunque $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{8}=\frac{23}{24}$; dicasi $\frac{23}{24}:1::60:\frac{60\times 24}{23}=62\frac{14}{23}$. Tartaglia fa la stessa censura. Per ciò computa separatamente l'allontanarsi del topo e della gatta pei moti loro e per lo scemamento dell'albero nella notte $=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{7}{24}$, e quindi $60-\frac{7}{24}=59\frac{17}{24}$. Argomenta $\frac{23}{24}:1::59\frac{17}{24}:62\frac{7}{23}$. Non contando il rotto di giorno $\frac{7}{23}$, perchè dice egli in tali quesiti, il rotto è falso, si guardi quanto di approssimamente importino giorni 62, e importano $62\times\frac{23}{24}=59\frac{5}{12}$; dunque resta pel 63° giorno $60-59\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$ di braccio. Ma il viaggio nel giorno $=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{4}=1\frac{1}{4}$; dunque $1\frac{1}{4}:1::\frac{7}{12}:\frac{7}{12}\times\frac{4}{5}=\frac{28}{60}=\frac{7}{15}$; dunque il numero de' giorni cercato $=62\frac{7}{15}$.

Viene a' quesiti di progressione geometrica. Dati nelle progressione 2. 4. 8. 16 ..., ovvero 2. 6. 18 ... il primo termine, l'esponente, e la somma, trovare l'ultimo termine?

Una lepre è avanti il cane passi 60, e per ogni passi 5 che fa il cane, la lepre ne fa 7: in quanti passi il cane giugnerà la lepre? 1.° supposto che li 60 passi di distanza siano passi di lepre; e che tanto tempo metta la lepre a farne sette, il cane i suoi cinque, argomenta $2 = 7 - 5 : 5 :: 60 : 150$, e dopo tanti passi il cane avrà avanzato di 60 il numero de'passi della lepre, e l'avrà raggiunto. Se li 60 sono passi di cane, argomenta prima $5 : 7 :: 60 : 84$; poi $2 :: 5 :: 84 : 210$, e dopo tanti passi il cane raggiugnerà la lepre. Tartaglia (a carte 11, Parte II), a ragione censura tali resoluzioni: se 7 passi della lepre sono tanto quanto 5 del cane, e si fanno nello stesso tempo, è impossibile che il cane raggiunga mai la lepre. Bisogna per ambi i casi stabilir la ragione del passo del cane al passo della lepre, e bisogna che la ragione sia maggiore di quella di $7 = 5$.

Duplicare continuamente il grano sopra i 64 scacchi: 1° *semplicemente*, cioè nella progressione 1. 2. 4. 8. 16 .... sarà la somma $5 = 18446744073709551615$. Per trovarla se sia t la somma di numero $2n$ di case $(t + 1)^2 - 1$ sarà la somma di numero $2(2n)$ di case. 2.° *Compostamente*, cioè ponendo sempre sulla casa seguente il doppio di quanto sta sulle antecedenti tutte. Regola: se t sia la somma di numero n di case t^2, sarà la somma di numero $2n-1$ case: quindi 1. 2. 6. 18. 54 ...... Con questa regola si troverà per 3, scacchi 9; per 5, scacchi 81; per 9, scacchi 6561; per 17, scacchi 43046721; per 33, scacchi 1853020188851841; per 65, scacchi 3, 433683, 820292, 512484, 657849, 089281. Questa è la somma di 3 scacchieri, perchè il 65° scacco raddoppia tutti li 64 antecedenti; dunque il terzo di tal somma sarà la somma desiderata, cioè sarà 1, 144561, 273430, 837494, 885949, 696427.

Dieci persone possono sedere ad una tavola in modi diversi 3628800; ed undici in modi 3628800×11. Lo dimostra cominciando da due nella maniera in cui da noi dimostrasi.

Problema dell'incontro di due viaggiatori sull'equatore (Vedi vol. I, Storia Alg. pag....) (*)

Somma della serie de'numeri cubi e dei quadrati. Principio generale. Nella progressione $a.\ a + d.\ a + 2d.\ a + 3d \ldots a + (n-1)d$, la differenza tra il primo e l'ultimo è la somma di tutte le differenze.

Uno ha messo per ordine retto file 100 di aranci in un piano distanti l'uno dall'altro un passo a tanto che tengono (dice egli) di spazio passi 100 per lunghezza, ed uno vuole raccogliere detti aranci ad uno ad uno, e porli tutti sopra il primo, e farne un monte: in quanti passi li avrà raccolti tutti? $(100)^2 + 100 = 10100$. Ma riflette

(*) La lacuna indicata con quattro punti nella linea trigesimaseconda di questa pagina 125 trovasi nel manoscritto originale dell'*Estratto della Somma* del P. Cossali. Sembra che la citazione contenuta tra parentesi nelle linee trigesimaprima e trigesimaseconda della medesima pagina 125 sia relativa alle pagine 272—277 del volume primo dell'opera intitolata: *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'Algebra. Storia critica di nuove disquisizioni analitiche e metafisiche arricchita di D. Pietro Cossali C. R. Dalla Reale Tipografia Parmense* 1797—1799 (due volumi in quarto).

Tartaglia (Parte II, carte 12), che i detti aranci non comprendono che 99 passi, e conchiude che i passi da farsi a raccoglierli sono 9900; poichè a raccogliere il secondo arancio farà due passi, uno avanti, uno indietro; a raccogliere il terzo passi 4 .. ; quindi 6. 8. 10 .... 198, e la somma = 9900.

De extractione radicum pag. 45.

Qui inserisce questo problema. Una botte di barili $10\frac{1}{2}$ si vuota dando il primo barile in 1 ora, il secondo in 2, il terzo in 3 ... ponendo il vino ad uscire di mano in mano che trovasi men carico: in quante ore si vuoterà? Egli è quanto raccogliere la progressione da 1 sino a $10\frac{1}{2}$; dunque $= (10\frac{1}{2} + 1) \times \frac{1}{2} \,.\, 10\frac{1}{2} = 60\,\frac{3}{8}$ ore. Tartaglia (Parte II, carte 12), accusa di falsa la conclusione per non essere i termini della progressione compiti. Se fossero 10 la somma sarebbe $=55$, l'undecimo termine sarebbe 11 ore nelle quali uscirebbe un barile, $\frac{1}{2}$ barile uscirà in ore $5\frac{1}{2}$; dunque il tempo tutto $=$ore $60\frac{1}{2}$.

Estrazione, puntazione, ed operare come oggidì.

Approssimazione ne' sordi. Esempio: $\sqrt{6} = 2\,\frac{2}{2.2} = 2\,\frac{1}{2}$; ma $\left(2\frac{1}{2}\right)^2 = 6\,\frac{1}{4}$ eccedente di $\frac{1}{4}$; prendi $\frac{\frac{1}{4}}{2 \times 2\frac{1}{2}} = \frac{1}{20}$ sarà $2\,\frac{1}{2} - \frac{1}{20} = 2\,\frac{9}{20}$ radice più prossima; ora $\left(2\,\frac{9}{20}\right) = 6\,\frac{1}{400}$; prendi $\frac{\frac{1}{400}}{2 \times 2\,\frac{9}{20}} = \frac{\frac{1}{400}}{\frac{98}{20}} = \frac{1}{1960}$; sarà $2\,\frac{9}{20} - \frac{1}{1960} = 2\,\frac{9}{20} - \frac{1}{98 \times 20} = 2\,\frac{881}{1960}$ terza radice più prossima ecc.

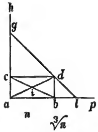
Estrazione nei rotti. Si fa l'estrazione dal denominato, e dal denominatore. E nei sani e rotti si riducono i sani a rotti.

Invenzione della radice per via geometrica.

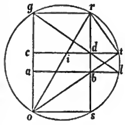
De inventione radicum per viam geometricam. Per l'ordinata al cerchio. Si cerchi $\sqrt{n}$, e sia $n = ab$. Si descriva il cerchio del diametro $a+b$; l'ordinata dal punto ove si congiungono le due rette a, b sarà $=\sqrt{n}$.

Altra maniera fuori di luogo per trovare i numeri congrui, della quale ho già fatto uso (Vol. I, Stor. Alg.).

De extractione radicum cubicarum. La regola è compresa nelle formole $a^3 + 3a(a+b)b + b^3$, cioè trovato a, si cerchi il b, che congiunto ad a, e fatto il prodotto $3a(a+b)b$, ed aggiunto b^3, il tutto stia nelle tre seguenti figure, e sia insieme il massimo aggregato simile, che star vi possa. La puntazione è fatta da F. Luca come da noi.



De inventione radicum cubicarum per istrumenta geometrica. Si cerchi $\sqrt{n}$. Si prenda sulla retta indefinita ap la retta $ab = n$, e sulla ah perpendicolare la $ac = 1$, e nel rettangolo ad si tirino le diagonali, e fermata nel punto i, dove s'incrociano, una punta del compasso si porti l'altra con apertura invariata sulla retta ah in g, e sulla ap in l, sin chè i punti g, l ottengansi tali che la retta lg passi per d, sarà bl la radice cubica di n.



Fra Luca non adduce dimostrazione, ma la supplisce Tartaglia, (Parte II, pag. 23). Descritto col raggio ig, ovvero il un cerchio, prolungata cd in t, bd in r al di sopra, in s al disotto, e ca al disotto in o; tirate le rette or, rt, si osservi che go, rs, per essere ugualmente distanti dal centro, sono uguali, ed uguali sono le quattro gc, rd, ao, bs; e similmente fra loro le due dt, bl; dunque da t tirando una retta in b, essa prodotta concorrerà in o, come la ld batte in g; dunque l'angolo rto è retto, siccome sul diametro or, ed il triangoletto rtb rettangolo; dunque $dt = bl$ media tra db, dr, ossia ac, cg; cioè $ac : bl : cg$. Ma il triangolo $g\,c\,d$ simile al $d\,b\,l$, e per ciò $db : bl :: cg : cd$; dunque $ac : bl : cg : cd$; dunque essendo bl la prima delle due medie proporzionali, ed essendo $ac = 1$, sarà bl la radice cubicá di cd.

De fractionibus vel fractis. Operazioni cinque: *Representazione, moltiplicazione, sommazione, sottrazione, divisione. Rotto* è una, ovvero più parti *de uno integro.* La loro origine è dai partimenti. Dei due numeri uno si dice *denominato*, l' altro *denominatore*; *vel unus dicitur numerator, alius denominator*: si scrive $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$... *Representazione*, cioè *enunciazione, mezzo, terzi, quarti* . . .

De depressione fractorum sive modo schisandi. Schisare, che in francese si chiama *abrevier*, non vuol dir altro che ugualmente partire i due numeri del rotto. Lo schisatore è tanto che partitor comune: *sive major communitas quam numeri ad invicem habeant ultra cujus divisionem minime communiter dividi possunt.* $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ non in quantità estensiva, ma in virtù intensiva.

De diversis modis inveniendi schisatorem. Gli antichi hanno usato diversi e laboriosi modi. 1°, esplorando i componimenti di due numeri cominciando dai minori 2, 3, . . . 2°, formando delle tavole de'componenti semplici e composti de'numeri. 3°, metodo di Boezio: cavar sempre il minore dal maggiore, sinchè vengasi a due numeri uguali, e in questi si avrà lo schisatore. 4°, modo per *nos usitatus* è quello di partire il maggiore pel minore . . Lo fonda sopra le proporzioni 1. 2. 7. 39 del 7.° di Euclide.

Moltiplicazione ne'rotti premessa per esser l' operazione più facile. Moltiplica di rotti con rotti; di sani e rotti con rotti; di rotti con sani; di sani e rotti con sani e rotti; di sani con sani e rotti. Il sano si riduce a rotto. Moltiplica de'numeri e de'nomi. Addizione de'rotti: riducendo alla medesima denominazione come da noi si fa, e la chiama la maniera più maestrevole: propone anche per sommare $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ di prendere di 3×4; prima $\frac{2}{3}$ poi $\frac{3}{4}$ e sommare. Quando vi entra il sano si riduca a rotto.

Sottrazione de'rotti. Similmente.

Divisione de'rotti. Moltiplicare in croce, e dividere il prodotto del numeratore del dividendo nel denominatore del divisore, pel prodotto del numeratore del divisore nel denominatore del dividendo. Prova della sottrazione, la addizione; e della divisione, la moltiplica. Si divide anche riducendo alla medesima denominazione, e poi partendo il numeratore del dividendo pel numeratore del divisore.

Questione. Se la moltiplica de'rotti accresca $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$, l' $\frac{1}{4}$ è minore di $\frac{1}{2}$ *extensive* e *denominative* per essere $\frac{1}{2}$ di $\frac{1}{2}$, ma è maggiore in virtù o sostanza, ossia *virtualiter et intensive*; perchè $\frac{1}{2}$ è linea, $\frac{1}{4}$ è superficie. Si obbietta che non vi ha comparazione nè ragione tra linea, e superficie; e risponde essere così sinchè non si valutano per numeri, ma divenire comparabili espressi per numeri. Taluno pretendea, che siccome un numero sano diviene tanto maggiore quanto più si discosta dall'unità sopra tanto, un rotto diviene maggiore in suo genere quanto si abbassa sotto. Simile questione fu sulla divisione, per esempio, di $\frac{1}{2}$ per $\frac{1}{3}$. Il partire $\frac{1}{2}$ per $\frac{1}{3}$ è propriamente domandare quante volte $\frac{1}{3}$ entra in $\frac{1}{2}$, entra $1\frac{1}{2}$ volte; e per ciò $1\frac{1}{2}$ chiamasi *quoziente*. Questo non può essere maggiore di $1\frac{1}{2}$; dunque $1\frac{1}{2}$ non è maggiore di $\frac{1}{2}$. Bisogna, a me pare, per intendere ciò ricorrere alla distinzione di linea e superficie.

Capere partem. Esempio: prendere $\frac{2}{3}$ di $\frac{4}{5}$, sarà $=\frac{8}{15}$.

Reducere ad partem. Che parte è $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$? è $=\frac{2\times4}{3\times3}=\frac{8}{9}$.

Petizioni sui rotti. Le principali sono: 1ª, aggiungere o sottrarre una frazione data $\frac{a}{b}$ da una di solo denominatore dato $\frac{x}{c}$, in modo che ne risulti la frazione data $\frac{m}{n}$; 2ª, partire $a+\frac{b}{c}$ per x, cosicchè ne venga $\frac{d}{e}$ di $\frac{h}{m}$. Esempio: $7\frac{1}{2}$ per x, sicchè ne venga $\frac{5}{6}$ di $17\frac{1}{2}$; 3ª, partire $\frac{a}{b}$ per $\frac{x}{c}$, onde ne venga $f+\frac{l}{p}$; 4ª, prendere $\frac{a}{b}$ di $\frac{x}{c}$, onde risulti $\frac{m}{n}$; 5ª, cavar la $\frac{a}{b}$ di $\frac{c}{d}$ da x, cosicchè ne risulti la $\frac{n}{L}$ di $\frac{m}{n}$, cioè $\frac{a\times c}{b\times d}+\frac{h\times m}{l\times n}=x$; 6ª, trovare due numeri x, y sicchè $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{f}{g}$.... di x sia $=\frac{h}{i}+\frac{l}{m}+\frac{n}{o}$... di s. Premette qui, che se di due frazioni $\frac{r}{s}$, $\frac{t}{u}$ dopo aver moltiplicato in croce de' prodotti ru, ts si prenderanno $\frac{r}{s}\times rs$, $\frac{t}{u}\times ru$ gli effetti saranno uguali. Dunque così si faccia, ridotte tutte le prime frazioni ad $\frac{r}{s}$, le seconde a $\frac{t}{u}$, si prenda $x=ts$, $y=ru$.

De modo infilzandi fractos. Sia da farsi la divisione $\frac{20\frac{1}{4}}{12}$ si avrà $=1+\frac{8\frac{1}{4}}{12}$; bisogna infilzare le frazioni $\frac{8}{12}\,\frac{1}{4}$, e si ha infilzando $=\frac{33}{12.4}=\frac{33}{48}=\frac{11}{16}$. Infilzar li rotti $\frac{2}{3}\,\frac{1}{4}\,\frac{2}{5}\,\frac{5}{6}$: 1°, infilzando $\frac{2}{3}\,\frac{1}{4}$ si ha $\frac{2\times4+1}{3\times4}=\frac{9}{12}$; 2° infilzando $\frac{9}{12}\,\frac{2}{5}$, si ha $\frac{9\times5+2}{12\times5}=\frac{47}{60}$; 3° infilzando $\frac{47}{60}\,\frac{5}{6}$, si ha $\frac{47\times6+5}{60\times6}=\frac{287}{360}$. Di qui io rilevo che la rappresentazione dell'infilzamento è questa: $\cfrac{2\cfrac{1\cfrac{2\frac{5}{6}}{5}}{4}}{3}$: e, cominciando dall'alto a rovescio di ciò che fa F. Luca, si trova $2\frac{5}{6}=\frac{17}{6}$, $\frac{2\frac{5}{6}}{5}=\frac{17}{30}$, $\cfrac{1\cfrac{2\frac{5}{6}}{5}}{4}=\frac{1\frac{17}{90}}{4}=\frac{47}{120}$, $\frac{2\frac{47}{120}}{3}=\frac{287}{360}$. Dato il rotto $\frac{287}{360}$, e dati i denominatori 3, 4, 5, 6 dei rotti infilzati, trovare i numeratori 2, 1, 2, 5. Si divida 287 per l'ultimo denominatore 6, si ha per quoziente 47, e per residuo 5, ultimo numeratore; $\frac{47}{5\text{ den.}}$ darà per quoziente 9 e per residuo 2, secondo numeratore; retrocedendo, ed il quoziente 9 diviso per 4, darà per quoziente 2, e per residuo 1 numeratore del terzo rotto; e sarà il quoziente 2 il numeratore del rotto quarto.

Si fa strada a trattare della regola del tre, o delle tre cose « con » laiuto della sancta trinita : cioe. Di q̄lluno e do e tre che sempre » vine. E regna sempre in do e tre e vno. Non circunscripto e tutto » circunscriue : commo dixe el catolico poeta vulgare Dantes para. » c°. 14.° »

Regola del tre. Si guardi la cosa mentovata due volte [1], delle quali la prima è partitore, la seconda si moltiplica per la cosa mentovata una volta. Uno staro castellano = 4 toscani. *Unde regula dicta procedat.* Dalla proporzionalità discontinua, nella quale due termini possono essere di un genere, e due di un altro; laddove nella continua tutti e tre sono necessariamente *ejusdem generis.* Prove della regola: moltiplicare il primo col quarto, ed il secondo col terzo: partire il primo pel secondo, ed il terzo pel quarto, o viceversa: tornar addietro, e dire 3° : 4° :: 2° : 1°.

Tra le monete nomina *carlini, stralini, perperi, scudi, doble.* Vedi pag. 59, fac. 2ª, lin. 12, 13.

Si vende a peso, a numero, a misura. In Mantova (e quasi tutti i luoghi circostanti) il peso è di lire 25. La marca in Vinegia è di oncie 8. A numero usano vendere : pelli montonine, becchine, boldroni, crude per scarpe; ovvero pelliccie, pelle da varotari, come ziebellini, armellini, foine, martori, ghiri, albertoni, agnellini bianchi e neri. Le strenghe vanno a dozzina; a migliaio coppi, tegole; e in piazza, mele, pere, fichi, persiche, casci, ova, scarpe, cipolle, agli « etc̄. che sem- » pre a numero susa de vendere el piu. Auenga che a Padoa le ci- » polle susi da spizicaroli uendere a mesura » e molte altre cose; carta a risma, quinterni fogli e a balle : la risma è di tanti quinterni (non dice di quanti).

Si vende a misura lunga, canne, braccia, tavola, passo, piè, spanna ec.; e presuppongono ampiezza e larghezza, perchè dalla lunghezza di detta linea l'uomo non potria vestirsi, nè altra cosa fare; e così della misura del terreno se non s'intendesse larga non si potria seminare. A misura rasa i liquori; a misura colma il grano, semola, noci, castagne, ed ogni sorta di biade.

Pei pesi si usano bilancia e stadera « o mesure che hano el ter- » mino loro a lire. Si commo in Uinegia el mirro (ch̄ e mesura da » oglio) se intende lire tante. E cosi nel fontego de le farie vno staro » e vna quarta quai son mesure : intendano lire tante et cetera ». La lira è grossa o sottile: la grossa di oncie 18, la sottile di 12. Si vende a lira grossa; carne, casci, agli, piombo, ferro, ramo, stagno « va- » lonia che ua a mogio. lume de rocco et cetera »; a lira sottile tutte le specierie di zuchari, cannelle, garofali, cassia, scamonea, sandali, turbetti ec. In molti luoghi d'Italia, come a Perugia, hanno la sola lira

[1] Denomina anche le cose simiglianti *la cosa due volte mentovante.*

sottile. Le oncie ordinarie si dividono in Vinegia in saggi, e quelle della Marca in quarti; il quarto in caratti, il caratto in grani: l'oncia della Marca (per l' argento ed oro) è più greve che la mercantesca. In Perugia e Firenze per argento ed oro si usa la lira corrente, per gli altri divisa nelle medesime once, l'oncia in quarti, il quarto in denari.

Delle monete, *vbique locorum*, la lira è soli 20; il soldo 12 denari. In quasi tutta la Romagna il soldo è detto bolognino. I soldi in differenti paesi sono di diverso valore. Da 60 a 63 varie notizie circa i prezzi delle cose da riscontrarsi colla tariffa.

Qualiter via leui monete ponantur in regula. De lucro et dāno cognoscēdis. Regula inuestiēdi cum limitatione lucri et danni. Ex noto lucro vel dāno capitalia inuenire. De viagijs mercatorijs siue transportationibus. Consiste in valutare col prezzo tutte le spese ragguagliando le monete. Non vi possono essere che notizie relative ai dazi, ed ai pagamenti de'trasporti, e ciò a pag. 66. Da pag. 63 a 66 non vi è nulla di utile. Alcuni notandi dai quali nulla vi è da ricavare. Pag. 67, *De caratteribus praticis* ; sono in margine. *De caratteribus algebraticis*; parimenti in margine. Ivi un prospetto della sua vita trascritto già da me nell'*Estratto rag.* pag ....

Sui gradi di algebra. Ne espone trenta. Avvegnachè in *infinitum* si possa procedere; si dice gradi ascendenti per *viaȝ et modum algebre et almucabala. Hoc est restaurationis et oppositionis.* Aggiungni che sono i gradi *quasi modernamēte cosi noīati hauenga che in tutte le cose li nomi siēo a placito ..... E quelle figure denanze poste che comenzano. ℞ prima. ℞ 2ª. ℞ 3ª . . . sōno denominationi dela pratica de algebra secondo li arabi primi inuentori de si facte pratiche operatiue. Ma del numero ī genere apresso li greci foron secondo ysidoro etymologiarum : e molti altri Pictagora el prīo e da poi lui Nicomaco : dal qual el piu de la sua arithmetica Boe. prese. E a presso lilatini foron prima Apuleo e poi Boe. e de la geometria forono li egyptji ab in vndatione nili vt ipse ibidem inducit.*

Distinctio sexta de proportionibus et proportioualitatibus. Dice falsamente, che *Boetio exponēdo Euclide* fa molto, massime nel quinto, *metione de thebit;* ma egli non nomina che Archita greco, non Thebit arabo. Dice ancora che il *Campano* nel quinto fa menzione di *Ameto* figliuolo di *Joseph*, come scrittore sulle proporzioni. Su di esse scrissero *Giordano, Tomas beduardin, Blasius de parma, Albertutius de saxonia de lordine nostro seraphyco , trattato pticulare cōpose de le pportiōi : el q̃l molto p le scole ala tēpesta nostra se riuolta.* Loda di Archimede l'opere *De quadratura circuli: e de centro grauitatis : et de figura ovali.*

Protesta che suo appoggio e guida sarà Euclide.

De necessitate notitie proportionum. Parlando della proporzione nella medicina nomina la *triaca* (¹). Nelle proporzioni *Pictoresche*

(¹) Nella facciata 2.ª della pag. 77 parlando della necessità di saper le proporzioni composte la denomina *turiacha*.

dice: *El sublime pictore (ali di nostri ancor viuente) maestro Pietro de li franceschi nostro conterraneo del borgo sã sepolchro: hane ĩ questi di cõposto degno libro de ditta prospectiua.* Soggiunge che fu recato dal volgare in latino dal *famoso oratore: poeta: e rhetorico: greco e latino (suo assiduo cõsotio: e similmente cõterraneo) maestro Matteo. Ne la quale opera de le .10. parole le .9. recercano la ꝓportiõe.* Nelle proporzioni architettoniche loda *vitruuio. Dinocrate. Frontino. Plinio,* e poi *Leon baptista de glialberti fiorentino: homo de profũdo ingẽgno. La cui opera nelli di proximi in fiorẽza tutta fo stampata: hauenga fosse senza figure.* Cita per le proporzioni nella lunghezza, larghezza e altezza il *domo de Pisa* e il *tẽpio de san lorenzo in fiorenza patronato de la degna e excelsa casa del magnifico Lorenzo de medici.* Nella marina distingue *naui: barche: nauili: galee: e marziliane.* Nell'arte di milizia *bastiõi: balestre: bõbarde: schiopetti: breccole: mortari: lãce: corazze: barde: selle.*

Q. non solum in numeris et mensuris sed etiã in sonis: locis: corporibus: tẽporibus etc̃. reperitur proportio.

Plato in Thim. prova essere proporzione nelle potenze e ne'pesi.

De diffinitionibus diuersarum proportionum. Parte moltiplicativa (*aliquota*), e aggregativa (*aliquanta*). La proporzione si è chiamata *relazione* dal riferire l'un estremo all'altro: *habitudine* considerando certa convenienza fra l'un estremo e l'altro, *medieta perchè el suo sito sempre convien se trovi fra doi termini almanco.*

Adotta la definizione di Euclide: *Proportio est duarum quantocumque sint ejusdem generis quantitatum certa alterius ad allatam habitudo.*

Nella proporzione aritmetica in luogo di *eccede* adopera la voce talvolta *superchia.*

Riguardo alla proporzione irrazionale dice, che è *habitudine* di due quantità infra loro incommensurabili, ovvero che per niun numero si può denominare *immediate*, ma bensì si può *immediate* denominare da qualche proporzione la quale da qualche numero è denominata, siccome la proporzione tra il diametro e la costa del quadrato è chiamata *mezza doppia,* perchè i quadrati loro sono come $2=1$.

Que sint quantitates comensurabiles et que incõmẽsurabiles. Porta come usata da Aristotile la voce *symetrum* per razionale. La proporzione geometrica *e de magior abstractiõe e cõsideratõe che nõ e quella arithmetica e piu largamẽte se ritroua la ꝓportione in le q̃ntita continue che in le quantita discrete Pero chel geometra de la rationale e inrationale indifferentemente considera e lo arithmetico solamente de la proportione rationale che per qualche numero sipossa nominare.*

De diuisione proportionis ratiõalis. Aristotile divise *relatione di equiparantia* (uguaglianza), *superpositione* (maggiore disuguaglianza) *suppositione* (minore disuguaglianza). La *moltiplice* è quando il maggiore contiene il minore con giusto numero di volte. La *semplice superparticolare* è quando il maggior termine contiene il minore una volta, e ancora qualche parte di esso minore la quale a lui sia *aliquota.*

Semplice superpartiente quando il maggiore contiene il minore non più che una volta, e oltre di questo contiene una parte non *aliquota* del minore, la quale parte non *aliquota* è composta di parti *aliquote* della minore.

Le specie della maggiore inegualità composta sono solamente due, cioè *moltiplice superparticolare*, e *moltiplice superpartiente*. *Moltiplice superparticolare* è quando il maggiore contiene il minore più volte, ed inoltre una parte *aliquota* di esso. *Moltiplice superpartiente* quando il maggiore contiene il minore più volte, ed inoltre una parte di esso non *aliquota*.

Per formare le specie della proporzione di minore inegualità aggiugni *sub: submultiplice, subsuperparticolare, subsuperpartienti, submultiplici superparticolare, submultiplici superpartiente*: esempio *subsexquialtera*, *subsquitertia*.

Nella *moltiplice superpartiente* se il maggiore contiene il minore numero di volte *n*, ed una parte di esso la quale sia *m* delle di lui parti *aliquote* numero *q* si dice n^{sima} *super* m^{sima} *partiens* q^{sima}; così 15: dicesi *tripla supertripartiens quartas*.

Qualiter habeat intelligi figura proportionum. La figura delle proporzioni è quella che diciamo *tavola Pitagorica* ([1]). Vedi l'*Estrat. Rag.*

([1]) Totto ciò che si legge di sopra a pagine 131—133 dalle parole *inventori de sì fatte pratiche operative* (Vedi sopra pag. 131, lin. 26) fino alle parole *adopera la voce* (Vedi sopra pag. 132, lin. 26) forma tutta la parte scritta della carta 140 *verso* della Cartella quinta de' manoscritti del P. Cossali. Tutto ciò che trovasi di sopra dalle parole *talvolta superchia* (Vedi sopra pag. 132, lin. 27) fino alle parole *supertripartiens quartas* (Vedi la linea 18 di questa pagina 133) forma la parte scritta della carta 141, *recto* della medesima Cartella quinta. Fra il rovescio della carta 140 ed il *recto* della carta 141 di questa Cartella trovasi incollato on brano di carta che contiene la figura segueote:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	*Comparatio ubique ad primam*
2										*Dupla ad eandem*
3										*Tripla ad eandem*
4										*Quadrupla*
5										*Quintupla*
6										*Sexcupla*
7										*Septupla ad eandem*
8										*Octupla*
9										*Noncupla*
10									100	*Decupla*
Secus proximum comparatio ad alterum	*Dupla*	*Sesquialtera*	*Sesquitertia*	*Sesquiquarta*	*Sesquiquinta*	*Sesquisexta*	*Sesquiseptima*	*Sesquioctava*	*Sesqui*[illegible]	

pag. 9. Accenna anche F. Luca come si può continuare la tavola, aggiugnendo la linea orizzontale dell'11 si avrebbero nei numeri di essa confrontati con quelli della quarta come nell' 11: 4 le *proporzioni dupla, supertripartiens quartas.*

Dice sul vocabolo *sexqui*; che *quedam syllabica adiectio,* come *del via e del fia* nel moltiplicare.

De proportionalitatibus. Dice *con Euclide in quinto proportionalita in communi ene solo similitudine de piu ꝑportioni e almanco de doi.*

De speciebus proportionalitatum. Proportionalita armonica sie similitudine de proportioni de li extremi fra loro e le proportioni che sonno fra le differentie de detti extremi. Pel resto, vedi *Estr. Rag.* pag. 13.

Quae sint q̃titates proportionales arithmetice et geometrice. Piuttosto prosegue a spiegare che cosa sia *proportionalita continua e discontinua,* e ciò quanto alla geometrica.

Quot termini ad minus exigantur ad ꝑportionē et ꝑportiōalitatē.

Que sint q̃titates ĩproportionales. Et quid sit improportionalitas seu disproportionalitas. La *improporzionalità* è *dissomiglianza* di proporzioni, e vale per la geometrica, e per l'aritmetica che considera gli eccessi.

De sex spēbus siue modis arguendi proportionalitatum. 1ª *ꝑprotiōalita cōuersa, ouer ecōtrario*; 2ª *ꝑmutata*; 3ª *cōgiota*; 4ª *disgiūta*; 5ª *euersa*; 6ª *equa.* Tratta di ciascheduna a parte. La *conversa* è da $a : b :: c : d$ dire $b : a :: d : c$. La *permutata* è da noi detta *alternata.* La *congiunta* $a + b : c :: c + d : d$. *Disgiunta* è da $a + b : b :: c + d : d$ argomentare $a + b - b : b :: c + d - d : d$. La *eversa* è da $a + b : b :: c + d : d$ argomentare $a + b : a :: c + d : c$. La *equa* è così: siano tre quantità $a. b. c$, e tre altre $d.\ e.\ f$, e sia $a : b :: d : e$, $b : c :: e : f$, ovvero $a : b :: e : f$, $b : c :: d : e$; nell'uno e nell'altro caso sarà $a : c :: d : f$, è questo argomento e proporzione *equa.*

Qualiter ditti sex modi sint applicabiles arithmetice. Vedi *Estrat. Rag.* pag. 15. Nota qui che *abusive* dal volgo dicesi *proporzionalità dupla, tripla . . . la parità di due proporzioni duple . . .* sembra che alluda alla distinzione tra *dupla* e *duplicata.*

In tutte queste spiegazioni F. Luca adopera coi numeri anche le lettere piccole a, b, c, d, e, f per generalità.

Qualiter denominatores proportionum reperiantur. Per la divisione. Chiama il lib. 5° di Euclide *lanima vitale detutti glialtri suoi libri.*

Qualiter cognoscatur vna proportio esse maior altera. Dal maggiore denominatore, direm noi *esponente.* Dopo aver parlato della necessità di conoscere le proporzioni composte, dice volerne in due modi parlare: 1° nelle proporzioni *continue,* poi nelle *discontinue.* Rispetto alle prime, esposta la proporzionalità *continua* 1. 2. 4. 8. 16, osserva con Euclide essere $1 : 4$ :: in proporzione *composta* di $1 : 2$ e $2 : 4$; tal proporzione *composta* dirsi da Euclide *duplicata. Doue ꝑ duplicata il cāpano intēde (cōmo e la verita) in se multiplicata.* Lo stesso essere moltiplicare una proporzione in sè, e moltiplicare in sè il denominatore.

Dal primo termine 1 al quarto 8 vi è una proporzione composta di tre simili, e in genere dal primo al termine n^{esimo} qualunque una proporzione composta di numero $n-1$ proporzioni simili.

De proportione in q̄tuor teris constituta. Dalla prima alla quarta di quattro continue proporzionali, vi è una proporzione triplicata, giusta la definizione del 5° di Euclide. Generalmente, per avere la proporzione dalla prima alla n^{esima}, moltiplicherai il denominatore in sè numero $n-2$ volte, e sarà dalla prima alla quinta, quadruplicata; dalla prima alla sesta, quintuplicata. Cita le definizioni di Euclide nel 7°, e come più ample quelle del 5°.

De quantitatibus continue in proportionalibus. Chiama *quantità continue inproporzionali* le *proporzioni discontinue.* Si vale della definizione di Euclide nel 7°: *Cū continuate fuerint eedē vel diuerse ꝓportiones: dicetur ꝓportio primi ad vltimū ex omnibus composita.* Narra che nella biblioteca dei frati di s. Marco in Fiorenza: *de lordine desan domenico ditti della obseruātia. Laq̄l libraria feci e ordino el Magnifico homo cosmo de medici: in laq̄l de ciascuna faculta ī greco e latino, copiosissimamēte feci mettere libri: boni e belli: e maxime ī tutte larti mathematiche asai vine feci porre*, lesse la *Prospettiva* di Vitellione, il quale definisce: *Proportio dicitur cōponi ex duab ꝓportionibus: quādo denoīatio illius ꝓportionis: ꝓducitur exductu denominationū illaꝝ ꝓportionum vnius in alteram.*

F. Luca esemplifica e nelle proporzioni simili e nelle dissimili anche espresse per rotti.

Proposita proportione alias ipsam componentes inuenire. Dice essere *cahos maximum,* perchè può essere composta de mille eguali e numero infinite proporzioni, e così ancora de mille ineguali.

Ex noticia denominatoris et alterius extremi alicuius proportionis seu nullius ambo eius extrema reperire. Nel caso di non sapere niuno degli estremi, ambidue sono in arbitrio: fingine uno e determinasi l'altro.

De additione proportionum ad inuicem. Si fa moltiplicando i denominatori, giusta la via di Vitellione.

De diuisione proportionum inter se. Si fa interponendo fra i termini uno o più termini nuovi, così la proporzione $1:16$ interponendo 6, si divide nelle due $1:6=6:16$, ed interponendo 5, 6, 8, si avrà la proporzione divisa nelle $1:5$, $5:6$, $6:8$, $8:16$.

De subtractione proportionum ab invicem. Si debba sottrarre la proporzione $\frac{c}{d}$ dalla $\frac{a}{b}$, si avrà $\frac{ad}{bc}$. Dice che la proporzione $\frac{a}{b}$, dalla quale deesi l'altra $\frac{c}{d}$ sottrarre, deve essere maggiore, non potendosi sottrarre una quantità maggiore da una minore, *si cōmo sopra nel sotrare denumeri sani dicemmo*: ma la parità non vale. Aggiugne un altro gentilissimo modo. Si costituisca tra a, b una quantità x, la quale sia alla $b :: c : d$, sarà $a : x$ la proporzione residua della sottrazione delle $\frac{c}{d}$ dalle $\frac{a}{b}$. Supponesi $b>a$, $d>c$ essendo $x : b :: c : d$, sarà $x = \frac{bc}{d}$, $a : x :: a : \frac{bc}{d} ::$ $ad : bc$.

De multiplicatione proportionum. È una cosa stessa sommare e moltiplicar di proporzioni. *E questo aduene perche le proportioni propriamente non sonno quantita, ma sōno habitudine ouer respetto fra le quantita. Siche quello interuallo che e fra le quantita solamente e la proportione.* Moltiplicando la proporzione $\frac{a}{b}$ per n, supposto che il denominatore di $\frac{a}{b}$ sia g, si ha $n \times g$, cioè n volte la proporzion g, il che importa la proporzione da 1 al $n+1$ termini nella progressione di denominatore g.

Breve sum̄arium huius presentis distinctionis. Dice la teoria insegnata, e le conclusioni che sta per aggiugnere *de gran piacere a lo ingēgno ꝑspicaci evtilita electe e aplicate secondo la forza e uirtu de esse proportioni. Leq̄li cose son certo in molti luoghi e passi in libri de philosophia (maxime in quello de celo et mundo) se seruiranno. Nelquale AR̄. sempre con forza de proportioni e proportionalita se resse. E anche in lo libro dela sua phisica presertim nel quinto: sexto: eseptimo pertutto doue tratta d'velocitate motuum.* Fa cenno della proporzione *habens medium duoq3 extrema specie separata e discrepante da le assignate in hoc maxime quia alie possunt ad minus in duobus terminis reperiri ista autem nunquam in paucioribus q̄ tribus. Et in hoc similitudinem gerit proportionalitatis,* e la è certamente. Dice trattarne Euclide virtualmente nella 11ª del secondo, e appieno nel lib. decimoterzo e decimoquarto.

Segue l'albero delle proporzioni.

Qualiter ex augumento majoris extremi crescit proportio. Sia $a : b$ la proporzione, sarà $a+h:b$ proporzione accresciuta: e parimenti $a:b-h$.

Qualiter ex augumento amborum extremorum crescat proportio. Sarà $a+(a+d) : b+(b-h)$ proporzione accresciuta.

Qualiter ex interpositōe vnius termini vel pluriū inter extrema minuatur ꝑpor.° Interposta tra a, b una quantità $m < a$, $> b$, sarà evidentemente $a:m$, $m=h$, proporzione e l'una e l'altra minore di $a:b$.

Qualiter quantitatū arithm.° proportionaliū ex augmento maiorū terminorū, arithmetice seruatur eadem proportio arithmetica. Se aritmeticamente $a \,.\, b : c \,.\, d$ sarà ancora $a+h.\ b : c+h.\ d$.

Qualiter etiam ex augumento minorum terminorum seruatur eadem proportio arithmetica. Sarà ancora $a.b + h : c.d + h$.

Qualiter iterū ex decremēto maioris et minoris termini ꝑuatur eadē ꝑpor.° arith°.

Qualiter etiā ex augumēto vel decremēto suorū terminorū cōiūctis vel *diuisim arithmetice seruatur similiter eadem proportio arithmetica.* Sarà generalmente $a \pm h \,.\, b \pm k : c \pm h \,.\, d \pm k$.

Qualiter ex augumēto maioris et mīoris extremi geōetrice ꝑuatur eadē ꝑp.° geōetrica [1]. Essendo $a : b$ una proporzione geometrica, sarà $a + \frac{a}{m} : b + \frac{b}{m}$ la stessa proporzione geometrica.

Qualiter ex augumēto extremorū arithmetice minuatur ꝓportio geometrica. Se alla proporzione geometrica $a : b$ si accrescano gli estremi di h, sarà $a+h : b+h$ minor proporzione geometrica che $a : b$: intendesi $a > b$.

Qualiter ex decremēto extremorū arithmetice crescat ꝓportio geometrica. Sarà $a-h : b-h$ minor proporzione geometrica che $a : b$.

Qualiter ex augumēto extremorū geometrice crescat ꝓpor°. arithm.° Sia $a.b$ la proporzione aritmetica, sarà $a + \frac{a}{m} \,.\, b + \frac{b}{m}$ proporzione aritmetica maggiore.

Qualiter ex decremēto extremoꝝ geometrice minuatur ꝓpor°. arithmetica. Sarà $a - \frac{a}{m} \,.\, b - \frac{b}{m}$ proporzione aritmetica minore.

Qualiter ex augu°. ēt ex dcremēto extremorū eq̄liū arith.° ꝑuetur eadē ꝓpor°. geometrica. Essendo $a = a$, sarà $a \pm h = a \pm h$.

Corollari tre sui mobili ec. Vedi *Estrat. Rag.* pag. 10.

De septem mirabilibus ex proportionibus inter duas quantitates tractatus sextus. 1ª $\dfrac{\frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b}}{\frac{a+b}{a}} + \dfrac{\frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b}}{\frac{a+b}{b}} = \frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b}$; 2ª $\frac{a+b}{a} : \frac{a+b}{b} :: b : a$, ed anche $\dfrac{\frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b}}{\frac{a+b}{a}} : \dfrac{\frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b}}{\frac{a+b}{b}} :: b : a$; 3ª $\frac{a+b}{a} \times \frac{a+b}{b} = \frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b} = \frac{(a+b)^2}{ab}$; 4ª $\dfrac{\frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b}}{\frac{a+b}{a}} = \frac{a+b}{a}$; ed $\dfrac{\frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b}}{\frac{a+b}{b}} = \frac{a+b}{b}$; 5ª $\frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + 2 + \dfrac{1}{\frac{a}{b}}$; 6ª $\frac{a+b}{a}$, $\frac{a+b}{b}$, $\frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b}$, $\frac{a+b}{a} \times \frac{a+b}{b}$ tutti contengono rotto. 7ª Vagliono le sei maraviglie anche se a, b siano frazioni o pure, o miste.

[1] Sin qui ha discorso di proporzionalità, e quind'innanzi discorre di proporzione.

De mirabilibus ex proportionibus inter tres quantitates.

De mirabilibus ꝓportionum inter quatuor q̄titates.

De mirabilib' īter q̄nqȝ q̄titates.

Estende le maraviglie 1ª, 2ª, 3ª, 4ª a tre quantità continue proporzionali *a*4, *a*5, e dice potersi estendere a più. E generalmente se $a:b:c:d$ . . . . saranno esse maraviglie vere.

De mirabilibus ꝓportionū īter q̄ntitates binomiales. Siano $\sqrt{6}-\sqrt{2}$, $\sqrt{6}+\sqrt{2}$, $\sqrt{54}-\sqrt{50}$, sarà $\sqrt{6}-\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{54}-\sqrt{50}=2\sqrt{6}+\sqrt{54}-\sqrt{50}=2\sqrt{6}+3\sqrt{6}-\sqrt{50}=5\sqrt{6}-\sqrt{50}=\sqrt{150}-\sqrt{50}=5\sqrt{6}-5\sqrt{2}$ $\frac{\sqrt{150}-\sqrt{50}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=5$, $\frac{\sqrt{150}-\sqrt{50}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=10-\sqrt{75}$, $\frac{\sqrt{150}-\sqrt{50}}{\sqrt{54}-\sqrt{50}}=10+\sqrt{5}$ questi quozienti sono nella medesima proporzione che le prime quantità $5+10-\sqrt{5}+10+\sqrt{5}=25$; $\frac{25}{5}+\frac{25}{10+\sqrt{75}}+\frac{25}{10+\sqrt{75}}=5+\frac{25(10+\sqrt{75})}{(10-\sqrt{75})(10+\sqrt{75})}+\frac{25(10-\sqrt{75})}{(10+\sqrt{75})(10-\sqrt{75})}$ $=5+10+\sqrt{75}+10-\sqrt{75}$, sarà ancora $(10-\sqrt{75})\times(10+\sqrt{75})$ $=100-75=25=5^2$; onde $10-\sqrt{75}:5:10+\sqrt{75}$. Si è dunque diviso 25 in tre parti continue proporzionali, e si fatte che i quozienti del tutto 25 diviso per ciascuna danno esso tutto.

De mirabilibus proportionum inter quatuor q̄ntitates binomiales. Si prendano $\sqrt{54}-\sqrt{50}$, $\sqrt{6}-\sqrt{2}$, $\sqrt{6}+\sqrt{2}$, $\sqrt{54}+\sqrt{50}$, che si riducono a $3\sqrt{6}-\sqrt{2}$, $\sqrt{6}-\sqrt{2}$, $\sqrt{6}+\sqrt{2}$, $3\sqrt{6}+5\sqrt{2}$, e sono in continua proporzione; la somma è $=8\sqrt{6}$: si avrà $\frac{8\sqrt{6}}{3\sqrt{6}-5\sqrt{2}}=36+\sqrt{1200}$, $\frac{8\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=12-\sqrt{48}$, $\frac{8\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=12+\sqrt{48}$, $\frac{8\sqrt{6}}{3\sqrt{6}+5\sqrt{2}}$ $=36-\sqrt{1200}$; somma degli avvenimenti $=96$: $\frac{96}{36+\sqrt{1200}}+\frac{96}{12-\sqrt{48}}+\frac{96}{12+\sqrt{48}}+\frac{96}{36-\sqrt{1200}}=\frac{96\,(36-1200)}{36^2-1200}\left(=\frac{96(36-\sqrt{1200})}{1296-1200}\right.$ $\left.=36-\sqrt{1200}\right)+12+48+12-48+36-\sqrt{1200}$. Di più $(36-\sqrt{1200})$ $(36+\sqrt{1200})=(12-\sqrt{48})(12+\sqrt{48})=96$. Si è dunque diviso 96 in 4 parti continue proporzionali; e si fatte che, diviso 96 per ciascuna, la somma degli avvenimenti è pure 96.

De mirabilibus inter quinqȝ q̄titates binomiales. Siano $\sqrt{54}-\sqrt{50}$, $\sqrt{6}-\sqrt{2}$, $\sqrt{6}+\sqrt{2}$, $\sqrt{54}+\sqrt{50}$, $\sqrt{726}+\sqrt{722}$ che si riducono a $3\sqrt{6}-5\sqrt{2}$, $\sqrt{6}-\sqrt{2}$, $\sqrt{6}+\sqrt{2}$, $3\sqrt{6}+5\sqrt{2}$, $11\sqrt{6}+19\sqrt{2}$. La somma $=\sqrt{2166}+\sqrt{722}=19\sqrt{6}+19\sqrt{2}$, $\sqrt{17328}=76\sqrt{3}$, $\sqrt{1083}=19\sqrt{3}$, $\frac{19\sqrt{6}+19\sqrt{2}}{3\sqrt{6}-5\sqrt{2}}=133+\sqrt{17328}$, $\frac{19\sqrt{6}+19\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=$

$38 - \sqrt{1083}$, $\frac{19\sqrt{6}+19\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 19$, $\frac{19\sqrt{6}+19\sqrt{2}}{3\sqrt{6}+5\sqrt{2}} = 38 + \sqrt{1083}$, $\frac{19\sqrt{6}+19\sqrt{2}}{11\sqrt{6}+19\sqrt{2}} = 133 - \sqrt{17328}$. Somma 361 : $\frac{361}{133+\sqrt{17328}} + \frac{361}{38-\sqrt{1083}} + \frac{361}{19} + \frac{361}{38+\sqrt{1083}} + \frac{361}{133-\sqrt{17328}} = 361$; sarà di più $(133+\sqrt{17328})(133-\sqrt{17328}) = (38-\sqrt{1083})(38+\sqrt{1083}) = 19^2 = 361$; e così di 361 si son fatte cinque parti continue proporzionali, per ciascuna delle quali esso diviso, la somma degli avvenimenti lo uguaglia. Si può procedere all'infinito.

Modus īueniēdi plures quātitates binomiales sine fractis ī q̃cūqꝫ ꝓportione. Vedi *Estrat. Rag.* pag. 11.

Modus diuidēdi nūm ī quotlibet ꝑtes cōtinue ꝓportiōales libuerit. Sia N il numero dato: se vogliasi diviso in tre parti continue proporzionali, per ciascuna delle quali esso diviso, la somma degli avvenimenti lo uguagli: si prenda $\frac{N}{25}$ di ciascuna delle parti della divisione di 25; se diviso vogliasi in quattro, prendasi $\frac{N}{96}$ di ciascuna della divisione di 96; se vogliasi diviso in cinque, prendasi $\frac{N}{361}$ di ciascuna della divisione di 361.

De notabilibus regulis quantitatum continue proportionalium. 1ª Se $a:b:x$, sarà $x = \frac{b^2}{a}$. 2ª Se $a:x:b$, sarà $x = \sqrt{ab}$. 3ª Se $x:a:b$, sarà $x = \frac{a^2}{b}$. 4ª Se $a:b:c:d$, sarà $d = \frac{bc}{a}$. 5ª $c = \frac{ad}{b}$. 6ª $b = \frac{ad}{c}$. 7ª $a = \frac{bc}{d}$. 8ª $c = \frac{b^2}{a}$; $d = \frac{b.\frac{b^2}{a}}{a} = \frac{b^3}{a^2}$. 9ª $b = \frac{c^2}{d}$; $a = \frac{\frac{c^2}{d}c.}{d} = \frac{c^3}{d^2}$. 10ª Date a, d trovansi b, c facendo $b = x$; onde $c = \frac{x^2}{a}$, e si avrà $x \times \frac{x^2}{a} = ad$, $x^3 = a^2 d$, $x = \sqrt[3]{a^2 d}$. 11ª Vedi *Estrat. Rag.* pag. 17. 12ª $a:b:c:d:e$, sarà $e = \frac{d^2}{c} = \frac{cd}{b}$, e generalmente date quattro si troverà la quinta. 13ª Date a, e per trovare le altre tre si osservi essere $c = \sqrt{ae}$; quindi $b = \sqrt{a\sqrt{ae}} = \sqrt{\sqrt{a^3 e}}$, $d = \sqrt{e\sqrt{ac}} = \sqrt{\sqrt{ac^3}}$; e così si può proseguire.

De clauibus seu euidentijs q̄titatum continue ꝓportionaliū. $a : ab : ab^2 :: ab^3$. 1ª $a + ab + ab^2 + ab^3 : ab + ab^2 :: a + ab^2 : ab$. 2ª $a + ab : ab^2 + ab^3 :: a : ab^2$. 3ª $a + ab^2 : ab + ab^3 :: a : ab$. 4ª $\frac{m}{a} : \frac{m}{ab} : \frac{m}{ab^2} : \frac{m}{ab^3}$.

5ª $a \times ab^3 = ab \times ab^2$. 6ª se $\sqrt{a} : \sqrt{b} :: c : d$; di più $\sqrt{a}\sqrt{b} = c^2 + d^2$, sarà $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{(a+b)cd}$. 7ª $a \times ab \times ab^2 \times ab^3 = a \times ab^3 \times ab \times ab^2$. 8ª $(a + ab + ab^2 + ab^3)^2 = a^2 + (ab)^2 + (ab^2)^2 + (ab^3)^2 + a(ab + ab^2 + ab^3) + ab(a + ab^2 + ab^3) + ab^2(a + ab + ab^3) + ab^3(a + ab + ab^2)$. « Ben che se dica di .4. » q̄tita continue proportionali. El simile aponto hauene in ciascuna » quantita O siēno .3 .0 .2 .0 .5 .0 .6 etc. E cosi o siēno ꝓportionali » continue ouer discontinue. *Idem accidit. Quod est valde vtilissimum* » *notandum* ». 9ª Se $a : ab : ab^2$, sarà $a \times ab \times ab^2 = (ab)^3$. 10ª Se $\frac{m}{a} + \frac{m}{ab} + \frac{m}{ab^2} = a + ab + ab^2$, sarà $ab = \sqrt{m}$. 11ª $\frac{a \times ab \times ab^2}{a} = ab \times ab^2$; $\frac{a \times ab \times ab^2}{ab} = a \times ab^2$ .... 12ª Se la proporzione $a : ab : ab^2$ sia $:: c : d$, sarà $c \times (ab + ab^2) = d(a + ab)$. 13ª $2(a.ab^2 + ab(a + ab^2)) = a(ab + ab^2) + ab(a + ab^2) + ab^2(a + ab)$. 14ª $\frac{a(ab + ab^2) + ab(a + ab^2) + ab^2(a + ab)}{2(a + ab + ab^2)} = ab$. 15ª $(a)^2 : (ab)^2 :: a : ab^2$.

Dimostrazione della chiave sesta. $\sqrt{a}\sqrt{b} = c^2 + d^2 = \frac{ad^2}{b} + d^2 = \frac{a+b}{b}.d^2 = \frac{a+b}{b}.d.d = \frac{a+b}{b}.d.\frac{c\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \frac{(a+b)dc}{\sqrt{a}\sqrt{b}}$; dunque $\sqrt{a}\sqrt{b} \times \sqrt{a}\sqrt{b} = (\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (a+b)dc$, $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{dc(a+b)}$.

De inuentione medij proportionalis inter duas quantitates. Io non giungo ad intendere la mente di F. Luca. Egli prende a dichiararla con questo esempio: « fra .5. e .11. vi metto .2. Dimādo ala mede- » sima ragione: che si douera metter fra .7. e .13. ». Opera egli cosi: 1° Supponendo che si tratti di mezzo aritmetico trova il mezzo aritmetico fra 5 e $11 = \frac{5+11}{2} = 8$; e similmente il mezzo aritmetico fra 7 e $13 = \frac{7+13}{2} = 10$. Poi dice: « Se .8. giusto mezzo fosse .2. ouer dovēta » .2. (ex ypotesi) che serebbe .10. ouer cħ dovētara .10. » Si ha $= \frac{2 \times 10}{8} = 2\frac{1}{2}$. « E ꝑ ꝓuarlo te cōuē trouare tutti li extremi ala ratta » che .8. douenta .2. » $.8 : 2 :: 5 : \frac{10}{8} = 1\frac{1}{4}$; $8 : 2 :: 11 : \frac{22}{8} = 2\frac{3}{4}$, e sarà $1\frac{1}{4} . 2 . 2\frac{3}{4}$ una proporzionalità aritmetica. Similmente $8 : 2 :: 7 : \frac{14}{8} = 1\frac{3}{4}$; $8 : 2 :: 13 : \frac{26}{8} = 3\frac{1}{4}$, e sarà $1\frac{3}{4} . 2\frac{1}{2} . 3\frac{1}{4}$ proporzionalità aritmetica. 2° Trattandosi di mezzo geometrico, sarà il mezzo tra $5, 11 = \sqrt{55}$; tra $7, 13 = \sqrt{91}$. Dicasi se $\sqrt{55}$ diventa 2, che diventerà $\sqrt{91}$? $\sqrt{55} : 2 :: \sqrt{91} : \frac{2\sqrt{91}}{\sqrt{55}} = 2\sqrt{\frac{91}{55}} = \sqrt{6\frac{34}{55}}$. Ora argomentando $\sqrt{55}:2::5:\frac{10}{\sqrt{55}}$; $\sqrt{55}:2::11:\frac{22}{\sqrt{55}}$; $\sqrt{55}:2::7:\frac{14}{\sqrt{55}}$; $\sqrt{55}:2::13:\frac{26}{\sqrt{5}}$ saranno $\frac{10}{\sqrt{55}}:2:\frac{22}{\sqrt{55}}$; $\frac{14}{\sqrt{55}}:\sqrt{6}\,\frac{34}{55}:\frac{26}{\sqrt{55}}$ due proporzionalità geometriche.

Una perla di karato uno in peso vale ducati 200; un'altra di karati due vale ducati 1000, che valerà una terza del peso di karati tre? Si cerchi che varrebbe una di karati quattro. Essendo 1: 2: 4 proporzione geometrica, si faccia $200:1000:x=\frac{1000000}{200}=\frac{10000}{2}=5000$. Essendo ora il 3 medio fra 2 e 4, si trovi il medio geometrico fra 1000 e $5000=\sqrt{1000\times5000}=\sqrt{5000000}$, e sarà questo il prezzo della perla di karati tre. Così dice F. Luca doversi fare nelle « valute de » ciascuna gioia, cõmo Rubini. Diamãti. Safili. Balassi. Smaragdi. » Turchesi. Ametisti. Granate. Corgnole. Ambre e simili. In leq̃li el nu» mero di pezzi *manet idem*: e la finezza *variatur secundum gradus in» tensionis: et quantitas secundum gradus extensionis.*

« EL santto padre innocẽtio .8.° cõmanda al thesaurieri de pero» scia che dispẽsi delentrate de la camera apostolica duc̃. 10000. fra » li cittadini de la ditta citta giustamẽte che niuno sabi alamẽtare. » E q̃sto ĩ remuneratiõe del seruigio riceuuto in la suuentione de la » impresa de la cita de osmo. Dimãdase cõmo douera fare fra loro » tal distributiõe, che giusta sia: e che aniũ si facia ingiuria ». Distinte due specie di giustizia: *commutatiua* e *distributiua*: dice la prima, non poter cadere in Dio; la seconda, non potersi da lui adoperare, che in proporzione geometrica, non aritmetica, perchè altrimenti « tãto daria di gloria a vna minima sancticella: quãto alla glo» riosa madre maria e risguardando la ꝓportiõe arithmetica la dif» erẽtia oner differẽtie secõdo nũero ꝑ vnità signato *eq̃liter* ». Venendo al tema suppone « *xbi gratia*, che la signoria de Guido ba» glioni e ꝓficua ꝑ .100. ꝑsone. E q̃lla de Ridolfo suo fratello ꝑ al» tre .100. Eq̃lla de la Magnificẽtia de Simone d'gliodi ꝑ altre .100. » E q̃lla de Berardino rugieri ꝑ altre .100 ». Ma dice doversi considerare « che parte ene la extimatione de luno: de la extimatione » de laltro, e se Guido e stimato ꝑ lo $.\frac{1}{10}.$ de tutti glialtri: che de» bia hauere el decimo de tutti li duc̃. » Se gli dessero tanti ducati, quanti a ciascuno degli altri si userebbe giustizia per la proporzione aritmetica, ma sarebbe ingiustizia, perchè gli strenui degni e magnifici se lamentariano essere stati messi pari, ed anche simili alli fornari e altre genti basse. Si vede da tutto ciò che per giustizia a proporzione aritmetica intese F. Luca giustizia a numero di persone.

Petitiones circa tres quãtitates continue proportionales.

1. Trovare $x:xy:xy^2$, sicchè $x(xy+xy^2)+xy(x+xy^2)+xy^2$

$(x + xy) + x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 = 361$. Si scioglie per la ottava chiave, che mostra $x + xy + xy^2 = \sqrt{361} = 19$, ed il problema si riduce a dividere 19 in tre parti continuamente proporzionali, rimanendo libera la ragione, la quale se prendasi *sesquialtera*, le parti riescono numeri interi 4, 6, 9.

2. Fare che $x + xy + xy^2 = 13$, ed $x(xy + xy^2) + xy(x + xy^2) + xy^2(x + xy) = 78$. Si scioglie per la 14ª chiave, la quale insegna $x + xy + xy^2 = 13$, $xy = \frac{78}{2-13} = 3$; onde $x + xy^2 = 10$, $x \times xy^2 = 9 = 3^2$.

3. Fare di 19 tre parti $x : xy : xy^2$, sicchè $x \times xy \times xy^2 = 216$. Si scioglie per la chiave 9ª, che insegna essere $x^3y^3 = (xy)^3 = 216$, $xy = 6$, $x + xy^2 = 13$, $x \times xy^2 = 6^2 = 36$.

4. Trovare $x : xy : xy^2$, sicchè $x \times xy \times xy^2 = x + xy + xy^2$; e di più $\frac{36}{x} + \frac{36}{xy} + \frac{36}{xy^2} = x + xy + xy^2$. Si scioglie per le chiavi decima e nona. Poichè per la decima essendo $\frac{36}{x} + \frac{36}{xy} + \frac{36}{xy^2} = x + xy + xy^2$ è $\sqrt{36} = xy = 6$. Si finga $x = t - u$, $xy^2 = t + u$, sarà $t^2 - u^2 = 36$: onde $t^2 = u^2 + 3^6$, e $t^2 - 36 = u^2$, $u = \sqrt{(t^2 - 36)}$, $x = t - \sqrt{(t^2 - 36)}$, $xy^2 = t + \sqrt{(t^2 - 36)}$. Ma per la chiave nona $x \times xy \times xy^2 = (xy)^3 = 6^3 = 21^6$; e per la condizione prima $= x + xy + xy^2$; dunque $x + xy + xy^2 = 2t + 6 = 216$, $t = \frac{210}{2}$. In altra maniera: trovato $xy = 6$, si ponga $x + xy^2 = z$, $x \times xy^2 = 36$. Per la quinta di Euclide $\frac{1}{4}z^2 - 36 = \left(\frac{1}{2}z - x\right)^2 = \left(xy^2 - \frac{1}{2}z\right)^2$; $\frac{1}{2}z - x = \sqrt{\left(\frac{1}{4}z^2 - 36\right)}$; $\frac{1}{2}z - \sqrt{\left(\frac{1}{4}z^2 - 36\right)} = x$; $\frac{1}{2}z + \sqrt{\left(\frac{1}{4}z^2 - 36\right)} = xy^2$, e poi come prima.

5. Fare $x^2 + (xy)^2 + (xy^2)^2 = 133$; e $\frac{72}{x} \times \frac{72}{xy} \times \frac{72}{xy^2} = 1728$. Per la chiave 9ª sarà $\frac{72}{xy} = \sqrt[3]{1728} = 12$; quindi $xy = 6$. Si proseguirà in una delle due maniere di sopra.

6. Fare di 19 tre parti $x : xy : xy^2$ tali, che $2x + 3xy + 4xy^2 = 62$, sarà $x + xy^2 = 19 - xy$. E fatto per semplicità $xy = t$, $19 - t$, sarà una quantità da dividere in due disuguali parti, di modo che il loro prodotto $= t^2$: dunque, chiamando z la differenza delle parti della metà, sarà per la 5ª di Euclide $\frac{1}{4}(19-t)^2 - t^2 = z^2$; le parti $\frac{1}{2}(19-t) - \sqrt{\left(\frac{1}{4}(19-t)^2 - t^2\right)}$; $\frac{1}{2}(19-t) + \sqrt{\left(\frac{1}{4}(19-t)^2 - t^2\right)}$; onde 3(19

$-t)+2\sqrt{\left(\frac{1}{4}(19-t)^2-t^2\right)}+3t=62$, ossia $57+2\sqrt{\left(\frac{1}{4}(19-t)^2-t^2\right)}=62$. Si troveranno $4:6:9$.

7. Fare di 14 $x:xy:xy^2$, sicchè $4x+6xy=4xy^2$. Pongasi $xy=zt$, $x+xy^2=14-zt$. E seguita come sopra.

8. Trovare tre quantità $x:xy:xy^2$, sicchè $x+xy+xy^2=14$, $x^2+x^2y^2+x^2y^4=84$. Pongasi $xy=t$, $x+xy^2=14-t$. Poi seguita colla 5ª di Euclide.

9. Fare di $14x:xy:xy^2$, cosicchè $x\times xy\times xy^2=64$. Si ponga $xy=t$, $x+xy^2=14-t\ldots$. E trovate per la 5ª di Euclide le espressioni di x, xy, si moltiplichino prima il binomio e il reciso di esse espressioni fra loro, e poi con t ne verrà $t^3=64$, $t=4$.

11. Trovare $x:xy:xy^2$, sicchè $\frac{18}{x}+\frac{18}{xy}+\frac{18}{xy^2}=25$. Si farà per la chiave quarta. Si faccia $\frac{18}{xy}=t$, $\frac{18}{x}+\frac{18}{xy^2}=25-t$: si rifletta che essendo in continua proporzione i tre divisori, lo sono i tre quozienti.

12. Fare di 18 $x:xy:xy^2$, sicchè $\frac{18}{x}+\frac{18}{xy}+\frac{18}{xy^2}=25$, soddisferanno le parti già trovate.

13. Fare di 10 $x:xy:xy^2$, sicchè $x^2+(xy)^2=(xy^2)^2$. Si ponga $xy^2=t$, $x+xy=10-t\ldots$ Primieramente per la 4ª del 2° di Euclide sarà $(10-t)^2=100-20t+t^2$. Levando $t^2=$ somma dei quadrati di x, xy, sarà $100-20t$ la loro doppia superficie, e $50-10t$ la superficie delle parti x, xy. Si prosegua per la 5ª di Euclide. Con meno briga dividerai 10 nella proporzione media ed estrema per la 11ª del 2°, e la penultima del 6°.

14. Fare $x:xy:xy^2$, sicchè $x+(xy)^2=(xy^2)^2$. È lo stesso che dividere un numero ad arbitrio in media ed estrema ragione.

15. Trovare $n=x+xy+xy^2$, cosicchè $x^2+(xy)^2=(xy^2)^2$. Si prenda n ad arbitrio, e si faccia come qui sopra.

16. Fare $x+xy+xy^2=10$, e $x\times xy=(xy^2)^2$ è impossibile.

17. Trovare $x:xy:xy^2$, cosicchè $x\times xy=10$, e $x^2+(xy)^2=(xy^2)^2$. Sarà $xy=\frac{10}{x}$: facendo $x:\frac{10}{x}::\frac{10}{x}:\frac{100}{x^3}$, sarà questa la terza; dunque $x^2+\frac{100}{x^2}=\frac{100^2}{x^6}$, $x^8+100x^4=100^2$ — pagina 93.

18. Fare $10=x+xy+xy^2$, sicchè $x\times xy^2=3x\times xy$. Posta $xy=t$, sarà $x+xy^2=10-t$. Si operi per la 5ª del 2°, e poi si verifichi la seconda condizione, e si troverà l'equazione di quarto grado

spuria, ma che si abbassa al primo. Insegna anche a prendere 1. 3. 9, e in genere tre numeri che verifichino la seconda condizione, e dalla loro somma, e dal dato 10 argomentare le simili parti di questo.

19. Giuoca uno le tre feste di Natale; il primo giorno vince 6 ducati, il terzo 13, le vincite sono proporzionali alle somme colle quali si mette a giuocare, ed in continua proporzione tra loro: con qual somma si pose a giuocare? Dicasi x, il secondo giorno, ebbe $x+6$, e guadagnò $\sqrt{6-13}=\sqrt{78}$, e debbe stare $x : 6 :: x+6 : \sqrt{78}$.

20. Trovare $x : xy : xy^2$, sicchè $x \times xy = 8$, ed $x^2 \times (xy)^2 = (xy^2)^2$ come la 17.ª

21. Libre 2 zaffarano + 2 cannella + 2 mastici hanno costato ducati 20, e fu prezzo de'mastici a prezzo cannella, come questo a prezzo zafferano; di più libre 8 zafferano + 12 cannella +108 mastici hanno costato ducati 200: qual fu il prezzo di ciascuna specie? Libra 1 zafferano + 1 canella + 1 mastici costeranno ducati 10; ed essendo i prezzi in proporzione continua, il problema si riduce a dividere 10 in $x : xy : xy^2$, sicchè $8x + 12xy + 108xy^2 = 200$, il che si farà pei problemi superiori.

22. Vi hanno libre 50 di argento di una lega, 60 di altra lega, 70 di altra; le leghe formano proporzione continua: colato l'argento, tutta risulta lega di 10: qual era ciascuna lega dapprima? Poni prima lega $= 4x$; seconda lega $= 5x$. . . .

23. Uno ha tre quantità di argento in proporzione continua: la prima è a lega di oncie 2, la seconda di oncie 5, la terza di oncie 10: mescolate insieme vengono oncie 240 di argento fino legato ad oncie 4 per libra: quali erano le quantità? Poichè $\frac{240}{4}=60$; erano dunque 60 libre di argento da dividersi in tre parti continuamente proporzionali, di modo che $2x + 5xy + 10xy^2 = 240$. Facendo $x=c$, si avrà tosto un'equazione di secondo grado, la quale darà y. Se poi dicasi $c + y + y^2 : 1 : y : y^2 :: 60 : a : b : c$, saranno a, b, c le quantità cercate.

Petitiones quatuor et quinq; q̃titatū pti.ᵉ ꝓportionaliū.

24. Trovare $x : xy : xy^2 : xy^3$, tali che $x + xy = 18$, $x \times xy \times xy^2 \times xy^3 = 1024$. Si scioglie per la chiave terza. Si ha $x \times xy^3 = xy \times xy^2$; dunque $x \times xy^3 = \sqrt{1024}$; onde si dee dividere 18 in due parti, sicchè $x \times xy^3 = \sqrt{1024}$. Per la 5ª del 2º di Euclide.

25. Trovare $x : xy : xy^2 : xy^3$, tali che $x + xy^3 = 17\frac{1}{2}$, $x \times xy \times xy^2 \times xy^3 = 2916$.

26. Fare $15 = x + xy + xy^2 + xy^3$, $85 = x^2 + (xy)^2 + (xy^2)^2 + (xy^3)^2$. Si scioglie per la nona, ovvero decima chiave. Si faccia $xy + xy^2 = t$, $x + xy^3 = 15 - t$.

27. Fare $10 = x + xy + xy^2 + xy^3$, $16 = 8x + 4xy + 3xy^2 + xy^3$. Si faccia lo stesso. Siccome $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$; così se prendansi 4 numeri co-

me 1. 4. 16. 64 in continua proporzione, la cui somma 85, è all'aggregato delle moltiplicazioni $8 + 4.\ 4 + 3.\ 16 + 64 = 136 :: 5 : 8$. Si troveranno per analogia i numeri cercati, la somma de'quali $=10$.

28. Fare $10 = x + xy + xy^2 + xy^3$, e $3x \times xy^2 = xy \times xy^3$. Si può fare per algebra, e per analogia.

29. Fare $10 = x + xy + xy^2 + xy^3$, ed $x \times xy^3 = 3(x \times xy) = 3.\ x \times xy$.

30. Fare $10 = x + xy + xy^2 + xy^3$, ed $x \times xy^3 = 3.\ x \times xy^2$.

31. Fare $55 = x + xy + xy^2 + xy^3$, $x + xy^3 = 30$, $xy + xy^2 = 25$. Si scioglie per la prima chiave, per la quale $xy + xy^2 : x + xy + xy^2 + xy^3 :: xy : x + xy^2$; onde $x + xy^2 = \frac{55}{25} xy$.

32. Fare $50 = x + xy + xy^2 + xy^3$, $x + xy = 20$, $xy^2 + xy^3 = 30$. Si scioglie per la seconda chiave; poichè per essa $x : xy^2 :: x + xy : xy^2 : xy^3 :: 20 : 30$. Onde posto x il primo, sarà $xy^2 = \frac{30}{20} x$; poi $xy = 20 - x$, $xy^3 = 30 - \frac{30}{20} x$. Quindi essendo $x \times \frac{30\,x}{20} = (20 - x)^2$, si ricaverà x.

33. Fare $50 = x + xy + xy^2 + xy^3$, ed $x + xy^2 = 20$, $xy + xy^3 = 30$. Si scioglie per la terza chiave, essendo per essa $x + xy^2 : xy + xy^3 :: x : xy$.

34. Uno con quattro pesi pesa sempre libre sane da 1 a 40: come son fatti i quattro pesi?

35. Uno ha cinque tazze d' *ariento*, e fa fare ad un maestro certo lavoro, che deve essere compito in trenta giorni, e ogni giorno il maestro deve avere un' oncia d'argento per sua mercede di dì in dì, senza fare credenza, e deve essere pagato con queste tazze in modo, che niuna si debba rompere, e neppure le oncie si debbano spezzare. Quante oncie dovranno pesare ciascuna per sè le tazze, acciò finito il lavoro abbia il maestro le dette tazze, che tra tutte debbono pesare oncie 30? Si proceda in questo ed ogni altro caso in ragione dupla 1. 2. 4. 8 . . ; questi saranno i pesi delle prime quattro tazze, che fanno insieme 15, e la quinta sarà del peso 15 uguale alla somma dei pesi delle altre tutte. Ma se continuando la proporzione dupla si venisse ad avere colla somma de' termini il numero de'giorni proposti, non rimarrebbe a far altro: come se il numero de' giorni fosse stato 31, continuando 1. 2. 4. 8. 16, si avrebbero a dirittura le cinque tazze $=$ 31 oncie.

Similmente se uno con 5 pesi pesa integramente da 1 sino a 30, saranno i pesi 1. 2. 4. 8. 15.

Epilogatio in presenti distinctione contentorum.

Qui dice che « Nel .1487. adì primo magio, partendosi del fior » del mondo: cioe de fiorenza arrivò a Peroscia, a prendere il peso

» cotidiano de lo legere insegnare a communa satisfatione e prima » n'era stato condotto nel 1475 per 3 anni. »

Distinctio septima, tractatus primus.

De regulis helcataym que vulgo due false positiones nuncupantur. Scrive anche *Elcataym.* Dice che serve massime nelle quistioni di trafico *doue non se ha communamente a intromettarse radici de alcuna sorte.*

De prima parte helcataym dicta simplex.

Casus exemplares simplicis positionis. Tutti quelli che risolvere si possono per la doppia si possono per la semplice, ma non viceversa.

De secunda parte helcataym. Dicta duplex positio.

La seconda parte del *Cataym* chiamata « la *doppia positione*, » over *le doi false positioni.* Per le quali doi false positioni mediante » la proportionalita delle differentie loro. Con quella de li loro a- » prosimamenti a la verità noi peruenniamo ala notitia della uerità ». Due modi di operare: per via delle differenze, e per via del più e del meno: promette anche di mettere di tale operare l'origine.

De regulis duple positionis.

1ª, più e più sempre si abbatte; 2ª, meno e meno sempre si abbatte; 3ª, più e meno sempre si aggiugne; 4ª, meno e più sempre si aggiugne. Vale a dire nella via delle differenze: differenza di risultati falsi a differenza di posizioni, come differenza di un risultato falso dal desiderato alla differenza della falsa posizione dalla vera; e nel caso degli errori dissimili, la differenza si converte in somma. Nella via del più e del meno, vale a dire: moltiplicata la prima posizione nel secondo errore, e reciprocamente la seconda posizione nel primo errore; se gli errori sono simili si abbatte l'un prodotto dall'altro, ed il residuo si divide pel residuo dell'uno degli errori abbattuto dall' altro; e se gli errori sono dissimili, la somma de' prodotti si divide per la somma degli errori. Vedi l'*Estratto Rag.* pag. 20.

Geometrica demonstratio quare Minus et Minus subtrahatur. Occupa due facciate. Vedi il *Compendio* nell'*Estratto Rag.* loc. cit.

Geometrica demonstratio quare plus et plus subtrahatur. Occupa più d'una facciata.

Demonstratio geometrica quare plus et minus siue minus et plus addātur. Occupa più di due facciate; sono tutte fondate sulla 1ª del 2° di Euclide con grande raggiro.

Petitiones quedam per datas regulas solubiles. Sono 23. Nota nella 8ª, che l'orologio in diversi luoghi era diversamente diviso, e che in Lamagna gli facevano manco ore che in Italia in certe parti: poi pone che tra di e notte suoni 24 ore. La 23ª è a tre incognite. Tre hanno denari x, y, z: $x + \frac{1}{2}(y + z) = 20$; $y + \frac{1}{3}(x + z) = 20$; $z + \frac{1}{4}(x + y) = 20$. Si ponga $x = 4$; dunque $\frac{1}{2}(y + z) = 16$, $y + z = 32$,

$x + y + z = 36$. Per avere y si tratta di dividere 36 in due parti y, u, tali che $y + \frac{1}{3}u = 20$: inseriscasi un altro maneggio di doppia falsa posizione, e si troverà $y = 12$, $\frac{1}{3}u = 8$, $u = 24 = x + z$; dunque $z = 40$, $z + \frac{1}{4}(x + y) = 20 + \frac{1}{4}(12 + 12) = 24$ eccedente di 4. Pongasi ora $x = 8$; dunque $\frac{1}{2}(y + z) = 12$, $y + z = 24$, $x + y + z = 32$: dividasi 32 in due parti y, u, sicchè $y + \frac{1}{3}u = 20$: inserendo un'altra applicazione delle due false posizioni, si trova $y = 14$, $\frac{1}{3}u = 6$, $u = 18 = x + z$; dunque $z = 10$, $z + \frac{1}{4}(x + y) = 10 + \frac{1}{4}(8 + 14) = 10 + \frac{22}{4} = 15\frac{1}{2}$ mancante di $4\frac{1}{2}$. Secondo la regola $x = \frac{4 \times 4\frac{1}{2} + 8 \times 4}{4 + 4\frac{1}{2}} = \frac{50}{8\frac{1}{2}} = \frac{100}{17} = 5\frac{15}{17}$, $y = \frac{12 \times 4\frac{1}{2} + 14 \times 4}{4 + 4\frac{1}{2}} = \frac{110}{8\frac{1}{2}} = \frac{220}{17} = 12\frac{16}{17}$, $z = \frac{20 \times 4\frac{1}{2} + 10 \times 4}{4 + 4\frac{1}{2}} = \frac{130}{8\frac{1}{2}} = \frac{130 \times 2}{17} = \frac{260}{17} = 15\frac{5}{17}$. Di fatti $5\frac{15}{17} + \frac{1}{2}\left(12\frac{16}{17} + 15\frac{5}{17}\right) = 5\frac{15}{17} + \frac{1}{2}\left(28\frac{4}{17}\right) = 19\frac{5}{17} + \frac{2}{17} = 20$, $12\frac{16}{17} + \frac{1}{3}\left(5\frac{15}{17} + 15\frac{5}{17}\right) = 12\frac{16}{17} + \frac{1}{3}\left(24\frac{3}{17}\right) = 12\frac{16}{17} + 8\frac{1}{17} = 20$, $15\frac{5}{17} + \frac{1}{4}\left(5\frac{15}{17} + 12\frac{16}{17}\right) = 15\frac{5}{17} + \frac{1}{4}\left(18\frac{14}{17}\right) = 19\frac{5}{17} + \frac{1}{2} + \frac{7}{2.17} = 19\frac{10}{2.17} + \frac{1}{2} + \frac{7}{2.17} = 19\frac{17}{2.17} + \frac{1}{2} = 20$.

Conclusiones seu euidentie proportionalium et improportionaliuз quantitatum indifferenter posite, pag. 106 dopo le regole *Elcataym*.

1. Se $A = a + b + c \ldots$ sarà $A \times B = (a + b + c \ldots) \times B$. —— 1.ª 2.° Euc.
2. $A^2 = (a + b + c \ldots) \times A$. —— 2.ª 2.°
3. Se $A = a + b$, sarà $Aa = a^2 + ab$. —— 3.ª 2.°
4. Se $A = a + b$, sarà $A^2 = a^2 + 2ab + b^2$. —— 4.ª 2.°
5. Se $A = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A = (\frac{1}{2}A + z) + (\frac{1}{2}A - z)$, sarà $(\frac{1}{2}A)^2 = (\frac{1}{2}A + z)(\frac{1}{2}A - z) + z^2$. —— 5.ª 2.°
6. Se $A = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A$, sarà $(\frac{1}{2}A + y)^2 = (\frac{1}{2}A)^2 + y(A + y)$. —— 6.ª 2.°
7. Se $A = a + b$, sarà $A^2 + a^2 = 2aA + b^2$. —— 7.ª 2.°
8. Se $A = a + b$, sarà $(A + a)^2 = 4aA + b^2$. —— 8.ª 2.°
9. Se $A = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A = (\frac{1}{2}A + z) + (\frac{1}{2}A - z)$, sarà $(\frac{1}{2}A + z)^2 + (\frac{1}{2}A - z)^2 = -(\frac{1}{2}A)^2 + 2z^2$. —— 9.ª 2.°

10. Se $A = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A$, sarà $(A+y)^2+y^2 = 2\left(\left(\frac{1}{2}A\right)^2 + \left(\frac{1}{2}A + y\right)^2\right)$. ———————————————— 10.ª 2.ᵒ

11. Se $A = a + b$, ed $a^2 = bA$ è impossibile che a, b siano *rationate*, o *discrete*, perchè A sarà divisa *secundum proportionem habentem medium et extrema.* ———————— 11.ª 2.ᵒ

12. Se $A = a + b$, ed $a > b$, sarà $\frac{a}{b} = \frac{A}{b} - 1$.

13. Se a, b, sarà $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$.

14. Se $A = a + b$, ed $ab = m$, sarà $m \overset{=}{<} \left(\frac{1}{2}A\right)^2$.

15. Se $A = a + b$, ed $a^2 + b^2 = m^2$, sarà $m^2 < A^2$.

16. Se $A = a + b$, ed $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = m$, ed $m = x + y$, cosicchè $xy = 1$, sarà $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{b}{a}$.

17. Se $A = a + b$, ed $a\,1 > b$, ed $\frac{a}{b} = m$, sarà $m = \frac{1}{\frac{b}{a}}$.

18. Se $A = a + b$, ed $\frac{a^2 + b^2}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}} = m$, ed $A = x + y$, cosicchè $xy = m$, sarà $x = a$, $y = b$.

19. Se $A = a+b$, ed $ab = m$, sarà $a, b = \frac{1}{2}A^2 \pm \sqrt{\left(\left(\frac{1}{2}A\right)^2 - m\right)}$.

20. Se $A = a + b$, ed $a^2 + b^2 = m$, sarà $2ab + m = A^2$.

21 Se $A = a + b$, ed $a^2 + b^2 = m$, sarà $m - 2ab = (a-b)^2$.

22. Se $A = a + b$, ed $a > b$, sarà $\frac{a}{b} \cdot a = \frac{a^2}{b}$.

23. Se $A = a + b$, sarà $\frac{A}{a} + \frac{A}{b} = \frac{A}{a} \times \frac{A}{b}$.

24. Se $A = a + b$, sarà $\frac{A}{a} + \frac{A}{b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2$.

25. Se $A = a+b$, sarà ed $a^2 + b^2 = m$, sarà $a,b = \frac{1}{2}A \pm \sqrt{\left(\left(\frac{1}{2}A\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(A^2 - m)\right)\right)}$.

26. Se $A = a + b$, ed $ab = 4\frac{a}{b}$, sarà $b = \sqrt{4}$, se $ab = 5\frac{a}{b}$, sarà $b = \sqrt{5}$....

27. Se $\frac{a}{b}$, ed $\frac{m}{n}$, ed $an = bm$, sarà $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$.

28. Se $A = a + b$, ed $a^2 + b^2 = m$, $ab = n$, sarà $m + 2n = A^2$ .....

29. Se $a^2 + b^2 = m$, ed $ab = n$, sarà $a, b = \sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2 - (ab)^2\right)}\right)}$.

30. Se $a^2 - b^2 = m$, ed $ab = n$, sarà $a, b = \sqrt{\left(\frac{a^2 - b^2}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2 + (ab)^2\right)}\right)}$.

31. Se $b + g = a$, ed $ab = m$, sarà $a, b = \frac{1}{2} g \pm \sqrt{\left(\left(\frac{1}{2} g\right)^2 + m\right)}$.

32. Se $A = a + b$, ed $a^2 + b^2 = m$, sarà $m - (a - b)^2 = 2ab$.

33. Se $A = a + b$, ed $a^2 + b^2 = m$, sarà $\frac{m - (a - b)^2}{2} = ab$.

34. Se $A = a + b$, ed $a^2 + b^2 = ab + m$, sarà $a, b = \frac{1}{2} A \pm \sqrt{\left(\frac{m - \frac{1}{4} A^2}{3}\right)}$.

35. Se $A = a + b$, ed $a^2 = b^2 + m$, sarà $b = \frac{A^2 - m}{2A}$.

36. Se $A = a + b$, ed $a^2 + b^2 + ab = m$, sarà $ab = A^2 - m$.

37. Se $A = a + b$, ed $\frac{n}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}} = m$, sarà $\frac{n}{m} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

38. Se $A = a + b$, ed $\frac{n}{\frac{a}{b}} + \frac{n}{\frac{b}{a}} = m$, sarà $\frac{m}{n} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

39. Se $A = a + b$, sarà $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) ab = a^2 + b^2$ — impossibile $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) ab = 1 = a^2 + b^2$.

40. Se $A = a + b$, sarà $\frac{A}{a} = \frac{a}{b} + 1$.

41. Se x, $x + 1$, sarà $\frac{x + 1}{x} \times (x + 1) = \frac{x + 1}{x} + x + 1$.

42. Se $A = a + b$, sarà $\left(\frac{1}{2} A\right)^2 + \left(\frac{1}{2} A - a, \text{ ovvero } - b\right)^2 = \frac{1}{2} (a^2 + b^2)$.

43. Se $A = a + b$, ed $ab + a - b = m$, sarà $a, b = \frac{1}{2}(A - 2) \pm \sqrt{\left(\left(\frac{A-2}{2}\right)^2 - (m - A)\right)}$.

44. Se $A = a + b$, ed $a : m :: m : b$, sarà $a, b = \frac{1}{2}A \pm \sqrt{\left(\left(\frac{1}{2}A\right)^2 - m^2\right)}$.

45. Se $A = a + b + c$, ed $abc = m$, sarà $\frac{m}{a} = bc$.

46. Se $A = a + b + c$, e $c^2 = ab$, sarà $a, b = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - c^2\right)}$. Poichè $c^2 = a(A - a - c) = aA - a^2 - ac$, $a^2 + (c - A)a = - c^2$, $a = \frac{A-c}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{A-c}{2}\right)^2 - c^2\right)} = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - c^2\right)}$.

47. Se $A = a + b + c$, ed $a^2 + b^2 + c^2$, sarà $b, c = \frac{b+c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}a^2 - \left(\frac{b+c}{2}\right)^2\right)}$. Poichè $b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - (A - a - b)^2 = a^2 - (A - a)^2 + 2b(A - a) - b^2$, $b^2 - b(A - a) = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}(A - a)^2$, $b = \frac{A-a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}(A - a)^2 - \frac{1}{2}(A - a)^2\right)} = \frac{A-a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}a^2 - \left(\frac{A-a}{2}\right)^2\right)} = \frac{b+c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}a^2 - \left(\frac{b+c}{2}\right)^2\right)}$.

48. Se $A = a + b + c$, ed $a^2 + b^2 + ab = c^2$, sarà $a, b = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left((a + b)^2 - c^2\right)\right)}$. Poichè $a^2 = c^2 - b^2 - ab = c^2 - b(a + b) = c^2(A - c - a)(A - c) = c^2 + a(A - c) - (A - c)^2$, $a^2 - a(A - c) = c^2 - (A - c)^2$, $a = \frac{A-c}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{A-c}{2}\right)^2 + c^2 - (A - c)^2\right)} = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + c^2 - (a + b)^2\right)}$.

49. Se $A = a + b + c + d$, ed $a^2 + b^2 = 2(c^2 + d^2)$, sarà $d = c - b$. Bisogna aggiugnere una condizione ommessa da F. Luca, cioè che c sia medio proporzionale aritmetico fra a, b: onde $2c = a + b$. Di fatto dalla seconda equazione $2d^2 = a^2 + b^2 - 2c^2 = b^2 - x^2 + (A - b - c - d)^2$ che non si può ridurre alle tre sole quantità d, c, b, se non data un' altra condizione. Sia $2c = a + b$, e allora $A = 3c + d$;

onde $2d^2 = b^2 - 2c^2 + (2c - b)^2 = 2b^2 - 4bc + 2c^2$, $d = c - b$.
Esempio : $a = 8$, $b = 6$, $c = 7$, $d = 1$.

50. Se $A = a + b$, sarà $A^2 - 4ab = (a - b)^2$.

51. Se $A = a + b$, e $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = m$, sarà $a, b = \frac{1}{2} A \pm \sqrt{\left(\left(\frac{1}{2} A\right)^2 - m^2\right)}$.

52. Se $A = a + b$, ed $ab = m + \sqrt{m}$, sarà $a, b = \frac{1}{2} A \pm \sqrt{\left(\left(\frac{1}{2} A\right)^2 - (m + \sqrt{m})\right)}$.

53. So $A = a + b$, e $\sqrt{a} - \sqrt{b} = m$, sarà $a - b = m(\sqrt{a} + \sqrt{b})$.
Poichè $a + b - 2\sqrt{ab} = m^2$, $a + b = m^2 + 2\sqrt{ab}$, $a^2 + 2ab + b^2 = m^4 + 4m^2\sqrt{ab} + 4ab$, $a^2 - 2ab + b^2 = m^4 + 4m^2\sqrt{ab}$, $a - b = m \sqrt{\left(m^2 + 4\sqrt{ab}\right)} = m\sqrt{\left(a + b + 2\sqrt{ab}\right)} = m(\sqrt{a} + \sqrt{b})$.

54. Se $A = a + b$, e $\sqrt{a} - \sqrt{b} = m$, sarà $a, b = \frac{1}{2} A \pm \sqrt{\left(\left(\frac{1}{2} A\right)^2 - \left(\frac{A - m^2}{2}\right)^2\right)}$.

55. Se $A = a + b$, e $\sqrt{a} - \sqrt{b} = m$, sarà $a, b = \frac{1}{2} A \pm m \sqrt{\left(\frac{1}{2} A - \left(\frac{1}{2} m\right)^2\right)}$.

56. Se $A = a + b$, ed $a > b$, e $(b + 2\sqrt{b})^2 ab$, sarà $a - 2\sqrt{a} = b + 2\sqrt{b}$. Poichè $b + 2\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, $\sqrt{b} + 2 = \sqrt{a}$, $b + 4\sqrt{b} + 4 = a$, $b + 4\sqrt{b} + 4 - 2(\sqrt{b} + 2) = b + 2\sqrt{b} = a - 2\sqrt{a}$.

57. Se $A = a + b$, e $\sqrt{a} + \sqrt{b} = m$, sarà $a, b = \frac{1}{2} A \pm \sqrt{\left(\left(\frac{1}{2} A\right)^2 - \left(\frac{m^2 - A}{4}\right)^2\right)}$.

58. Se $A = a + b + c$, sarà $2(ac + b(a + c)) = a(b + c) + b(a + c + c(a + b)$.

59. Se $A = a + b + c$, sarà $a^2 + b^2 + c^2 +$ la somma de'rettangoli $= (a + b + c)^2 -$ ommesso *doppi*.

60. Se $x : y :: a : b$, e $ab = x^2 + y^2$, sarà $\sqrt{xy(a^2 + b^2)} = ab$.
Poichè $y = \frac{bx}{a}$, $ab = x^2 + \frac{b^2x^2}{a^2} = (a^2 + b^2)\frac{x^2}{a^2} = (a^2 + b^2) \cdot \frac{xy}{ab}$; onde $(ab)^2 = (a^2 + b^2)xy$, $ab = \sqrt{xy(a^2 + b^2)}$.

61. Se $A = a + b$, e $\dfrac{a^2 + b^2}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}} = m$, e $\frac{g}{a} + \frac{g}{b}$, sarà $A : \frac{g}{a} + \frac{g}{b} :: \dfrac{a^2 + b^2}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}} : g$.

62. Se $A = a + b$, ed $\frac{m}{a} \times \frac{n}{b} = p$, e $\dfrac{p}{\frac{m}{A} \times \frac{n}{A}} = g$, saranno a, b le parti di A; se $\frac{A}{a} + \frac{A}{b} = g$.

63. Se $A = a + b$, sarà $ab = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b^2}$.

64. Se a, b, sarà $\frac{a}{b} \times ab = a^2$.

65. Se $A = a + b$, sarà $\frac{A}{a} + \frac{A}{b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2$. La stessa che la 24.

66. $\frac{Am + An}{mn} = \frac{A}{n} + \frac{A}{m}$.

Fra Luca non mostra queste conclusioni tutte che in numeri; io vi ho aggiunto le dimostrazioni che erano più difficili. Io non so come le chiami *Evidenze*, non competendo a tutte questo titolo. Egli vuol poi che suppliscano in difetto di altre regole sinchè si trovino.

Pag. 84 e seg. Pone sette *Maraviglie* di proporzioni, e comincia dalle due quantità:

I. Se siano a, b due quantità sarà $\dfrac{\frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b}}{\frac{a+b}{a}} + \dfrac{\frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b}}{\frac{a+b}{b}} = \frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b}$, cioè la somma dei primi quozienti divisa per ciascuno dei primi quozienti, darà dei secondi quozienti, la cui somma eguale alla somma dei primi.

II. $\frac{a+b}{a} : \frac{a+b}{b} :: b : a$, ed anche $\dfrac{\frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b}}{\frac{a+b}{a}} : \dfrac{\frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b}}{\frac{a+b}{b}} :: b : a$.

III. $\frac{a+b}{a} \times \frac{a+b}{b} = \frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b} = \frac{(a+b)^2}{ab}$.

IV. $\dfrac{\frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b}}{\frac{a+b}{a}} = \frac{a+b}{a}$, ed $\dfrac{\frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b}}{\frac{a+b}{b}} = \frac{a+b}{b}$.

V. $\frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + 2 + \dfrac{1}{\frac{a}{b}}$.

VI. $\frac{a+b}{a}$, $\frac{a+b}{b}$, $\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}$, $\frac{a+b}{a}\times\frac{a+b}{b}$ tutti contengono rotto.

VII. Vagliono le sei *maraviglie* anche se a, b siano frazioni o *pure*, o *miste*.

Estende le *maraviglie* I, II, III, IV a tre quantità continuamente proporzionali, a quattro, a cinque, e dice potersi estendere a più. E generalmente se $\div\!\div a:b:c$ sarà
$$\frac{\frac{a+b+c..}{a}+\frac{a+b+c..}{b}+\frac{a+b+c...}{c}+...}{\frac{a+b+c...}{a}}+\frac{\frac{a+b+c..}{a}+\frac{a+b+c..}{b}+\frac{a+b+c..}{c}+..}{\frac{a+b+c..}{b}}+\ldots\ldots=\frac{a+b+c}{a}+$$
$\frac{a+b+c}{b}$ . . . . . ed i quozienti tanto secondi che primi nella ragione regnante tra le quantità. E le *maraviglie* hanno luogo ancorchè a, b, c . . siano quantità binomiali.

Pag. 26. Moltiplicare 1° per *scachieri* in Vinegia, per *bericuocolo* in Firenze; 2° per *castelluccio*; 3° per *colonna* o *tavoletta*; 4° per *crocetta* o *casella*; 5° per *quadrilatero*; 6° per *gelosia* o *graticola*; 7° per *ripiego*; 8° per *scapezzo*.

Pag. 30. *De viribus numerorum in ordine multiplicandi notabilissimis*. $143\times777=111111$. Dunque se n esprima un numero da 1 sino a 9, sarà $n\times143\times777=nnnnnn$.

Se si vuole un numero $nnnnnn$ prendasi $2n00+3n0+n$, e moltiplichisi per 481.

Se vuoi un numero $mn\,mn\,mn$, prendi $2mn0+mn$, e moltiplica per 481.

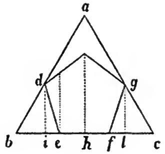
Esempio. Volendo 707070, sarà $2mn0=1400$, e $2mn0+mn=1470$. Ma in tali modi non si possono avere che sei figure.

Se vuoi dodici figure $nnnnnnnnnnnn$, dividi questo numero per 900991, e poi per esso moltiplica il quoziente.

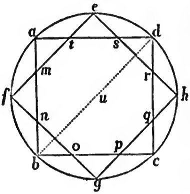
Pag. 32. Dividere 1° per *regolo*; 2° per *ripiego* (cioè pei componenti del divisore); 3° per *danda*, ed è quello da noi usato detto dal dare il divisore alle figure, sulle quali si opera del dividendo, tante volte; 4° per *galea*. Prove pel 7 e pel 9, e dice che per ogni numero si può provare; e finalmente conchiude, che la prova più lunga, ma migliore, è la moltiplica.

Ecco due altri problemi rimarcabili, sciolti dall'autore per algebra.

Problema 60. Inscrivere in un triangolo equicrure abc un pentagono regolare.

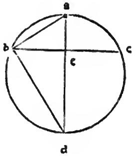


Tirata la perpendicolare $ah=\sqrt{ab^2-\frac{1}{4}bc^2}$, e tirate le perpendicolari di, gl, posto il lato del pentagono, come $ef=x$, si avrà $be=\frac{1}{2}$, $bc-\frac{1}{2}x$, e nel triangolo bde, avendo il lato be, ed il lato $de=x$, per la regola data Cap. 7 della Distinzione prima, si troverà bd espresso per x, e quindi colla somiglianza dei triangoli bdi, bah si troverà l' espressione di, bi, e della perpendicolare di; dalla quale e dall'ipotenusa $de=x$, si troverà l'espressione di, ei: la quale linea essendo pure $=be-bi$, eguagliate le espressioni, si otterrà x.



Problema 89. Cavare dal quadro il maggiore ottagono possibile. Tirata nel quadro dato $abcd$ la diagonale db, e divisala per metà in u, si circoscriva il cerchio, e poi si taglino gli archi sottesi dai lati del quadro $abcd$ per metà nei punti e, f, g, h, i quali si congiungano colle rette ef, fg, gh, he, che tagliano i lati del quadro stesso dato nei punti m, n, o, p, q, r, s, t, sarà $mnopqrst$ l' ottagono cercato. A trovare per algebra il valore del lato dell' ottagono, si chiami x la parte at tagliata dal lato ad del quadro, alla quale è eguale ogni altra parte am, sd ecc: sarà dunque $mt^2=2x^2$, $ts=ab-2x$; e perchè $mt=ts$; dunque $2x^2=(ab-2x)^2=ab^2-4ab\times x+4x^2$: onde $x^2-2ab\times x=\frac{-ab^2}{2}$, e risolvendo $x=ab-\sqrt{\frac{ab^2}{2}}$. L'autore adopera qui il radicale col segno $-$, perchè altrimenti x risulterebbe $>ab$, il che è impossibile.

Un altro problema sciolto per algebra ha l'autore tra i 57, *De corporibus Reg.bus*



Problema 53. In una sfera di noto diametro $ad=d$, tiro una retta bc, che taglia via la porzione $bac=A^2$ della superficie sferica, si cerca quanto resti tagliato del diametro, cioè la grandezza di ac. Secondo Archimede, la superficie bac sarà uguale all'area del cerchio avente per raggio ab. Facciasi $ab=x$, sarà $\frac{11}{14}\cdot 4x^2$, ossia $\frac{22}{7}x^2=A^2$; onde $x=A\sqrt{\frac{7}{22}}$; quindi $bd^2=ad^2-ab^2=d^2-\frac{7A^2}{22}$, $bd=\sqrt{d^2-\frac{7A^2}{22}}$; e facendo $ad:bd::ab:be$, si avrà $be=\frac{bd\times ab}{ad}=$

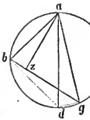
$$\frac{A\sqrt{\frac{7}{22}}\times\sqrt{\left(d^2-\frac{7A^2}{22}\right)}}{d};$$

e finalmente $ae=\sqrt{ab^2-be^2}=$

$$\sqrt{\frac{7A^2}{22}-\frac{\left(d^2-\frac{7A^2}{22}\right)\frac{7A^2}{22}}{d^2}}=\sqrt{\left(\frac{7A^2}{22}-\frac{7d^2A^2}{22d^2}+\frac{7^2A^4}{22^2d^2}\right)}=\sqrt{\frac{7^2A^4}{22^2d^2}}=\frac{7A^2}{22\,d}.$$

Fra Luca tratta anche dei problemi di meccanica e di prospettiva, ed uno di astronomia, quali scioglie geometricamente. Di prospettiva sono li 85, 86, 87, 88 tra i 100 di varia specie; di astronomia l'84; di meccanica li 93, 94, 95.

Aggiungo ancora quest'altro problema geometrico, sciolto da Fra Luca geometricamente.



Problema 60 fra i 100. Trovare il diametro *ad* di un cerchio, in cui sta inscritto il triangolo *abg* di noti lati. Tirata la perpendicolare *az* sono simili i due triangoli *agz*, *adb*, rettangoli ed insistenti sull'arco *ab*; dunque $da : ab :: ga : az$; onde $da = \frac{ab \times ga}{zg}$.

Altri pochi luoghi di Fra Luca.

Nel *trattato delle proporzioni* pone 15 proposizioni che chiama *chiavi*, servendosene utilmente nella soluzione dei problemi. Lasciate quelle tolte da Euclide, ed altre troppo chiare per sè, ecco le più rimarcabili.

Se $a : ab : ab^2 : ab^3$, sarà $a+ab+ab^2+ab^3 : ab+ab^2 :: a+ab^2 : ab$.
$\quad 2 : 4 : 8 : 16 \qquad 30 \qquad 12 \qquad 10 \qquad 4$

2° $a + ab : ab^2 + ab^3 :: a : ab^2$.
$\quad 6 \qquad 24 \qquad 2 \quad 8$

3° $a + ab^2 : ab + ab^3 :: a : ab$.
$\quad 10 \qquad 20 \qquad 2 \quad 4$

4° $\frac{a+ab+ab^2+ab^3}{a} : \frac{a+ab+ab^2+ab^3}{ab} : \frac{a+ab+ab^2+ab^3}{ab^2} : \frac{a+ab+ab^2+ab^3}{ab^3}$, $(a+ab+ab^2+ab^3)^2 = (a)^2 + (ab)^2 + (ab)^2 + (ab^3)^2 + a(ab+ab^2+ab^3) + ab(a+ab^2+ab^3) + ab^2(a+ab+ab^3) + ab^3(a+ab+ab^2)$.

Distinctio octaua. Non mi pare ormai più dover differire la parte massime necessaria alla pratica *de arithmetica*, e anche *de geometria*, detta dal vulgo comunemente *Arte Magiore*, ovver *la regola de la cosa*, ovvero *Algebra e almucabala*, secondo noi detta *pratica speculativa*.

De vi et necessitate istorum terminorum: videlicet : Plus et minus. Trac. 1^{us}. Lo dice *introductorio aloperatione pratica de algebra e almucabala*: previene, che sarà in necessità de usare alcuna volta termini quanto alla vera theorica incongrui, per la scabrosità che in tale operare occorre; allude al *puro manco*. Sonovi dei tratti degni di riflessione. Eccoli qui: « Sonno le quantita di doi specie alemani de loperante » in la pratica de *algebra et almucabala*. Lune *ratiocinate* e *discrete* » laltre *sorde* e *in ratiocinate*. In quelle che sonno *discrete*, e note : » sempre el trauagliare si po sequire per le uie e modi a soi luoghi » (in aritmetica) ... Ma quelle che sonno *sorde* o *in ratiocinate*: havēga

» che le si possino multiplicare e partire sordamente fra loro (commo » a dir. Cosa via. Cosa fa. Censo. E censo via. Cosa fa cubo . . . benchè questi Cubi. Censi. E cose a noi siẽno ĩgnote . . . . Partendo » Censo per Cosa : ne uerra Cosa . . . Censo per numero neven censo . . . Ma el summare e lo sotrare : mai lhano possuto asettare ĩ » la pratica senza laiuto dei termini Piu o meno. Dei quali termini » nei numeri che sonno ratiocinati non fa bisogno, per che sonno li » numeri de medesime vnita in essentia e natura composti : e non » de diuerse. Ma le quantita sorde (maxime in algebra commo se vedera) le vnita son varie e diuerse ale volte ĩ natura e denominatione. Si commo cose : e censi : e numeri : che a vn corpo non si » possano redure. Perche altra e la vnita de la cosa : altra quella » del censo : altra quella del cubo ec̃. Peroche cosa in quel luogo (in » algebra) representa linea : censo superficie : e cubo corpo. Onde » non si po congruamente dire .3. liee e .4. superficie fanno .7. Ouer » .4. cubi e .3. cose fãno .7. Per che questo tal congionto de .7. non » si po vnitamente per intellecto aprendere : se non diuisamente. Per » che son cose varie che nõ possano fare vna vnita denominatione. » Peroche mai si po dire che sienno .7. superficie ouer .7. linee. Ma » bene vn misto de linee e superficie ».

De modo mẽandi plus p̱ plus : ac minus p̱ minus : et plus p̱ minus et contra. Confronta le regole di queste moltipliche con quelle del *Catayno*. Avvisa che qualunque quantità si abbia ad intendere più, se non le sia aggiunto il segno del meno —. Vedi vol. 1. stampato.

Qualiter diuidi habeant inter se plus et minus. Oppositorum eadem est disciplina.

De additione predictorum terminoꝝ. Plus et Minus ĩter se.

De subtractione dictorum terminorum. Vedi il vol. 1 stampato.

Distinzione ottava. Trattato 2°.

Articolo 1.° Definizione delle radici *quadrate, cubiche, relate,proniche.* La radice *pronica* è $\sqrt{a^2 + \sqrt{a}}$. Distinzione delle radici *discrete*, e *sorde*. Radice *discreta rel.* di $32 = 2$, $\sqrt[5]{40}$ è radice *rel. sorda.*

Articolo 2.° Rimanda alla Distinzione seconda, trat. 6°, dove insegna l'estrazione delle radici *quadrata* e *cuba.*

Articolo 3.° Moltiplica di radici. Reg. 1ª $(\sqrt{a})^2 = a$. Reg. 2ª $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$. . . Reg. 3ª $n \times \sqrt{a} = \sqrt{n^2} \times \sqrt{a} = \sqrt{an^2}$. Reg. 4ª $n \times \sqrt[m]{a} = \sqrt{an^m}$.

Articolo 4°. Divisione di radici $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$; 2ª $\frac{n}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{n^2}{b}}$; 3ª $\frac{\sqrt{a}}{n} = \sqrt{\frac{a}{n^2}}$.

Similmente si deve intendere riguardo alle radici superiori.

Articolo 5°. Addizione delle radici. $\sqrt{a} + \sqrt{a} = \sqrt{4a}$. $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

$=\sqrt{(a+b+2\sqrt{ab})}$: per esempio, $\sqrt{10}+\sqrt{40}=\sqrt{\sqrt{50}+2\sqrt{400}}=\sqrt{50+2.\ 20}=\sqrt{90}$. $n+\sqrt{a}=\sqrt{(n^2+a+2\sqrt{an^2})}$. Dimostra la regola $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{(a+b+2\sqrt{ab})}$ geometricamente col quadrato del lato $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, e che riesce composto dei quadrati a, b e di due rettangoli $\sqrt{ab}$.

Articolo 6.° Sottrazione delle radici. Reg.ª 1ª: $\sqrt{a}-\sqrt{a}=0$. $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{(a+b-2\sqrt{ab})}$ si potrà cavare la minore della maggiore, ma non mai la maggiore della minore (¹). « Se nō ale volte abusiue
» parlãdo cōmo del .p̄. e .m̄. fo detto. Dicēndo che restasse q̃lla tal
» mīore, meno q̃lla tal magiore. Cōmo se hauesse a cauare ℞ .5.
» de ℞ .3. che uedi che naturalmēte far nō si po: per cħ ℞ .5. e
» magiore cħ .3. Ma *pratice: et abusiue loquãdo*, dirēmo che restasse.
» ℞ .3. m̄. ℞ .5. E q̃l senso par che nō sia da negare. Cōcio sia che
» giōgnēdo el resto (che e tutto q̃sto reciso) cō la q.ª che si cauo che
» e ℞ .5. sefa la q̃.ª da che fo cauato. La q̃l cosa siãdo: el sotrare
» sta bene facto. E nō si po acōciamēte negare (q̃to ala ꝓua) ma nō
» dimãco che ī q̃sto caso *abusiue*, bēche nelle q̃tita sorde opando ꝑ
» cose cōsi e cubi ī algebra: alcuolte q̃sto ci paia cocedere finche
» ala luce de la equatiōe nō se uenuto. Nō di meno ꝓpriamēte par-
» lãdo nō si po. Si cħ siate amētc. » Reg. 2ª $n-\sqrt{a}=\sqrt{(n^2+a-2\sqrt{an^2})}$.
» Reg. 3ª $\sqrt{a}-n=\sqrt{(a+n^2-2\sqrt{an^2})}$ ». Dimostra anche queste regole geometricamente col quadrato di un lato $=\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

Articolo 7.° Moltiplica delle radici quadrate colle cube. $\sqrt{a}\times\sqrt[3]{b}=\sqrt[6]{a^3b^2}$.

Articolo 8.° Divisione $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[6]{\dfrac{a^3}{b^2}}$. $\dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt[6]{\dfrac{b^2}{a^3}}$.

Articolo 9.° Addizione, sottrazione, moltiplica, divisione delle radici di radici: 1ª Reg. $\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}$ (supposto $a>b$) $=\left(\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}+1\right)\times\sqrt[4]{b}$. 2ª Reg. $n+\sqrt[4]{b}=\left(\sqrt[4]{\dfrac{n^4}{b}}+1\right)\times\sqrt[4]{b}$. 3ª Reg. $\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}=\left(\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}-1\right)\times\sqrt[4]{b}$.

Articolo 10°. Addizione delle radici cube. 1ª Reg. $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{8b}$. $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\left(\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}+1\right)\times\sqrt[3]{b}$. 2ª Reg. $n+\sqrt[3]{b}=\left(\sqrt[3]{\dfrac{n^3}{b}}+1\right)\sqrt[3]{b}$. Nella sottrazione, in luogo di $+1$, si adoprerà -1.

(¹) Tartaglia carte 82 del lib. 3°, Part. 2 condanna a ragione il rappresentare la somma, o sottrazione per una denominazione più lunga, come fa qui F. Luca seguito poi dal Cardano.

Articolo 11°. In simili maniere si può effettuare l'addizione, e la sottrazione delle radici quadrate.

Articolo 12°. Addizione delle radici quadrate e cube. $\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}=\sqrt[6]{a^3}+\sqrt[6]{b^2}=\left(\sqrt[6]{\frac{a^3}{b^2}}+1\right)\times\sqrt[6]{b^2}$. Sottrazione. $\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}=\left(\sqrt[6]{\frac{a^3}{b^2}}-1\right)\sqrt[6]{b^2}$.

Trattato terzo.

Articolo 1°. Delle 15 linee di Euclide. « Quello che qui de bi-
» nomi, e recisi se dirà, darà gran lume a la materia del ditto de-
» cimo libro ».

Vedi le formole delle 15 linee, anzi 24, negli estratti di Cardano, Cap. IV, *De Regula Aliza.* Qui da F. Luca caverò gli esempj numeri.

Linea 1ª. Numero qualunque.

Linea 2ª. Qualunque radice sorda, e queste sono le doi sole da Euclide chiamate *rationate*, hauenga che solo l'una in potentia, e l'altra in potentia e longitudine.

Linea 3ª. Media: ne parla Euclide nella 19ª.

Linea 4ª.

Linea 5ª.

Linea 6ª. Bimediale 1^{um} $\sqrt{\sqrt{432}}+\sqrt{\sqrt{48}}=\sqrt{12}\sqrt{3}+\sqrt{4}\sqrt{3}$... $\sqrt{12}\sqrt{3}\times\sqrt{4}\sqrt{3}=6.2$.

Linea 7ª. Bimediale 2^{um} $\sqrt{\sqrt{200}}+\sqrt{\sqrt{18}}=\sqrt{10}\sqrt{2}+\sqrt{3}\sqrt{2}$.

Linea 8ª. *Linea major* $\sqrt{\left(6+\sqrt{22\frac{1}{2}}\right)}+\sqrt{\left(6-\sqrt{22\frac{1}{2}}\right)}$.

Linea 9ª. *Linea potens rationale et mediale* $\sqrt{\left(\sqrt{45}+\sqrt{24\frac{3}{4}}\right)}+\sqrt{\left(\sqrt{45}-\sqrt{24\frac{3}{4}}\right)}$.

Linea 10ª. *Linea potens in duo medialia* $\sqrt{(\sqrt{80}+\sqrt{48})}+\sqrt{(\sqrt{80}-\sqrt{48})}$.

Linea 11ª. Resid. Med. 1.^{um}

Linea 12ª. Resid. Med. 2.^{um}

Linea 13ª. *Linea minor.*

Linea 14ª. *Linea que juncta cum rationali componit totum mediale.*

Linea 15ª. *Linea que juncta cum mediali facit totum mediale.* Gli esempi ordinatamente gli stessi col segno — tra le parti.

Binomio primo $4+\sqrt{7}$; secondo $7+\sqrt{112}$; terzo $\sqrt{112}+\sqrt{84}$. quarto $4+\sqrt{10}$; quinto $3+\sqrt{20}$; sesto $\sqrt{20}+\sqrt{8}$.

Articolo 2°. Ognuno de' sei binomi quadrato dà binomio primo. Per esempio: $(7+\sqrt{112})^2=161+\sqrt{21952}$, dove $161^2-21952=3969=63^2$. Dunque la radice del binomio primo sarà uno dei sei binomi.

La radice del binomio secondo è una linea composta di due mediali. Per esempio: $\sqrt{(6+\sqrt{48})}=\sqrt{\sqrt{27}}+\sqrt{\sqrt{3}}$ due mediali.

La radice del binomio terzo è *Bimediale seconda.* Per esempio: $\sqrt{(\sqrt{27}+\sqrt{24})}=\sqrt{\sqrt{12}}+\sqrt{\sqrt{3}}$.

La radice del binomio quarto è *linea maggiore.* Per esempio: $\sqrt{(8+\sqrt{40})}=\sqrt{(4+\sqrt{6})}+\sqrt{(4-\sqrt{6})}$ insegna qui a fare il quadrato di queste due radici legate.

La radice del binomio quinto è *linea potens rationale et mediale.* Esempio: $\sqrt{(10+\sqrt{160})}=\sqrt{(\sqrt{40}+\sqrt{15})}+\sqrt{(\sqrt{40}-\sqrt{15})}$. Altro $\sqrt{(4+\sqrt{160})}=\sqrt{(6+\sqrt{40})}+\sqrt{(\sqrt{40}-6)}$.

La radice del binomio sesto è *linea potens in duo medialia.* Esempio: $\sqrt{(\sqrt{96}+\sqrt{68})}=\sqrt{(\sqrt{24}+\sqrt{7})}+\sqrt{(\sqrt{24}-\sqrt{7})}$ $\sqrt{c+\sqrt{d}}+\sqrt{c-\sqrt{d}}=\sqrt{(2c+2\sqrt{c^2-d})}$. Esempio: $\sqrt{(4+\sqrt{7})}+\sqrt{(4-\sqrt{7})}=\sqrt{14}$. La dimostra geometricamente al solito col quadrato, il cui lato $=\sqrt{(a+\sqrt{d})}+\sqrt{(c-\sqrt{d})}$, e vale pel binomio secondo, e pel terzo e loro recisi.

Dell' invenzione della radice del binomio in natura, qualità, e quantità. Prima applica la regola ai binomi primo, secondo, terzo; poi alli quarto, quinto, sesto.

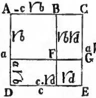
Articolo 3.° Dei recisi, loro specie, e differenze.

Articolo 4.° La radice del primo reciso è uno de'sei recisi; del reciso secondo, è il reciso della bimediale prima; del terzo, il reciso della bimediale seconda; del quarto, è il reciso della linea maggiore; del quinto, il reciso della *potente rationale et medium*; del sesto, il reciso della linea potente *super duo medialia.* Si osservi che, posto per binomio secondo $6+\sqrt{48}$, il reciso secondo è $\sqrt{48}-6\ldots$

Dell'invenzione delle radici di qualunque reciso. Come pei binomi.

Articolo 5.° Dai quattro atti pratici Addizione, Sottrazione, Moltiplicazione, Divisione dei binomi, e recisi $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ lo spiega con linee.

Articolo 6°. Di sei altri *premittendi.* Primo e secondo $\sqrt{a^2c}\times\sqrt{b^2c}=abc$, ed è $\sqrt{a^2c}:\sqrt{abc}:\sqrt{b^2c}$, ossia $a^2c:abc:b^2c$. Le radici $\sqrt{a^2c}$, $\sqrt{b^2c}$ sono simili; poichè $\frac{\sqrt{a^2c}}{\sqrt{b^2c}}=\sqrt{\frac{a^2c}{b^2c}}=\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}=\frac{a}{b}$. Terzo, volge sulla regola della moltiplica, rapporto al prodotto di — con — mostrandola in due recisi $(a-\sqrt{b})\times(c-\sqrt{d})$ con descrivere un rettangolo di un lato a, dal quale taglia $\sqrt{b}$, e di altro lato c, dal quale taglia $\sqrt{d}$. Moltiplicando $a\times c$, si ha il rettangolo intero $-c\sqrt{b}-a\sqrt{d}$ tolgono due volte il rettangolo BG, che non deve essere tolto che una volta; dunque bisogna restituirlo con aggiugnerlo (Bisogna migliorare questo transunto di dimostrazione). Quarto; $n\times\sqrt{a}=n\sqrt{a}$. Quinto $\sqrt[4]{a}\times\sqrt[4]{b}=$ o a numero o a $\sqrt{}$, od a $\sqrt{\sqrt{}}$. Quindi si può



proporre di trovare $\sqrt[4]{x} \times \sqrt[4]{y} = n$. Si prenda $y = a$, $x = \frac{n^4}{a}$. Se domandisi che $\sqrt[4]{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{n}$, si pigli $y = a$, $x = \frac{n^2}{a}$, sarà $\sqrt[4]{\frac{n^2}{a}} \times \sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{n^2} = \sqrt{n}$. Sesto, $a + \sqrt{b}$ è necessariamente un binomio, e similmente $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, qualora tra a, b non siavi una ragione di numeri quadrati a numeri quadrati. Passa a dimostrare che ognuno dei sei binomi può essere radice del primo binomio. Lo dimostra provando che ognuno dei binomi quadrati dà binomio primo. La dimostrazione è lunghissima; e presto si fa colle formole generali, ed anche colla sola $a + \sqrt{b}$, supponendo che rappresenti qualunque binomio. Il quadrato sarà $a^2 + b + 2a\sqrt{b}$; ed essendo $a^2 + b > 2a\sqrt{b}$; anzi $(a^2 + b)^2 - (2a\sqrt{b})^2 = (a^2 - b)^2$, ed $a^2 + b : \sqrt{(a^2 - b)^2} :: a^2 + b : a^2 - b$ commensurabili in lunghezza, sarà $a^2 + b + 2a\sqrt{b}$ binomio primo. Vuol che dicasi la più piccola quantità aggiunta alla più grande e non a rovescio $- a - \sqrt{b}$ è necessariamente reciso; e così $\sqrt{a} - \sqrt{b}$: suppone $\sqrt{b} < a$, ovvero $\sqrt{a}$. In generale $(a - \sqrt{b})^2$ è reciso primo. Nella pratica algebratica s'incappa spesso nelle $\sqrt{\;}\sqrt{\;}$, e pochi sottili casi si possono senza loro espedire $4 + \sqrt{\sqrt{10}} = \sqrt{(4 + \sqrt{\sqrt{10}})^2} = \sqrt{(16 + \sqrt{10} + \sqrt{\sqrt{8^4 10}})}$, e dice questa espressione più gentile e bella, e troppo volgare la prima $4 + \sqrt{\sqrt{10}}$. Settimo, *premittendo* $\sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{b}$ produce numero o superficie razionale se $a : b ::$ numero quadrato : numero quadrato, e siano comunicanti in potenza come $\sqrt{\sqrt{8}}$, $\sqrt{\sqrt{2}}$ sono comunicanti in potenza, essendo $\sqrt{\sqrt{8}} = \sqrt{2}\sqrt{2}$, e sta $8 : 2 :: 4 : 1$; onde $\sqrt{\sqrt{8}} + \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{16}} = 2$. Ma $\sqrt{\sqrt{32}}$, $\sqrt{\sqrt{18}}$ sono comunicanti in potenza, essendo $\sqrt{\sqrt{32}} = \sqrt{16}\sqrt{2}$, $\sqrt{\sqrt{18}} = \sqrt{3}\sqrt{2}$; ma non essendo $32 : 18 ::$ numero quadrato : numero quadrato; per ciò $\sqrt{\sqrt{32}} \times \sqrt{\sqrt{18}}$ non produce numero. Sono dunque di due sorta le $\sqrt{\;}\sqrt{\;}$ comunicanti in potenza, ed inoltre vi sono le non comunicanti. Di tre sorti saranno dunque i congiungimenti: il congiungimento di due $\sqrt{\;}\sqrt{\;}$ producenti con loro moltiplica numero, si ridurrà a $\sqrt{\;}$ di un binomio secondo, ed il congiungimento di due $\sqrt{\;}\sqrt{\;}$ comunicanti in potenza, ma non producenti numero, si ridurrà a $\sqrt{\;}$ di binomio terzo. Si dica similmente delle sottrazioni. Dovendo congiungere più $\sqrt{\;}\sqrt{\;}$, prima si congiungono due, e poi ad essa un'altra ecc.

Articolo 7.° Moltiplica e divisione de'binomi e recisi. Primo caso, $(4 + \sqrt{7})(5 + \sqrt{20}) = 20 + \sqrt{320} + \sqrt{175} + \sqrt{140}$. Secondo caso $(6 + \sqrt{32})(5 + \sqrt{8}) = 30 + \sqrt{80} + \sqrt{288} + \sqrt{256}$. Caso terzo, $(9 + \sqrt{\sqrt{27}})(8 + \sqrt{\sqrt{3}}) = 75 + \sqrt{\sqrt{19683}} + \sqrt{\sqrt{110592}} + \sqrt{\sqrt{81}}$. Caso quarto, $(8 + \sqrt{\sqrt{12}})(7 + \sqrt{\sqrt{10}}) = 56 + \sqrt{\sqrt{28812}} + \sqrt{\sqrt{40960}} + \sqrt{\sqrt{120}}$. Caso quinto, $(6 + \sqrt{\sqrt{12}})(5 + \sqrt{\sqrt{10}}) = 30 + \sqrt{\sqrt{360}} + \sqrt{\sqrt{30}} + \sqrt{\sqrt{120}}$. Caso sesto, $(5 - \sqrt{\sqrt{8}})(4 - \sqrt{\sqrt{2}}) = 22 - \sqrt{\sqrt{1250}} - \sqrt{\sqrt{2048}}$. Caso settimo, $(\sqrt{8} - \sqrt{\sqrt{2}})(\sqrt{8} - \sqrt{\sqrt{18}}) = 16 - \sqrt{\sqrt{819}} - \sqrt{\sqrt{648}}$.

Delle moltipliche dei binomi e recisi fra loro. Generalmente $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-b$. In algebra accade moltiplicare 2, 3, 4, 5 ecc. di diversi nomi.

Delle moltipliche dei multinomi di diverse denominazioni.

Della divisione dei numeri e radici per radici di radici, ed all' incontro: $\frac{n}{\sqrt{\sqrt{a}}}=\sqrt{\sqrt{\frac{n^4}{a}}}$; $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\sqrt{a}}}=\sqrt{\sqrt{\frac{n^2}{a}}}$; $\frac{\sqrt{\sqrt{n}}}{\sqrt{\sqrt{a}}}=\sqrt{\sqrt{\frac{n}{a}}}$.

Delle divisioni dei binomi e recisi per numeri e per quantità irrazionali, o reciprocamente: $\frac{a+\sqrt{b}\pm\sqrt{c}+\sqrt{\sqrt{d}}}{\sqrt{f}}=\frac{a}{\sqrt{f}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{f}}\pm\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{f}}+\frac{\sqrt{\sqrt{d}}}{\sqrt{f}}$.

Delle divisioni dei numeri o $\sqrt{\ }$, o $\sqrt{\sqrt{\ }}$ per binomi e recisi: $\frac{n}{a+\sqrt{b}}=\frac{n(a-\sqrt{b})}{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})}=\frac{n(a-\sqrt{b})}{a^2-b}$, e $\frac{n}{a-\sqrt{b}}=\frac{n(a+\sqrt{b})}{(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b})}=\frac{n(a+\sqrt{b})}{a^2-b}$.

Articolo 8°. $\frac{n}{a+\sqrt{\sqrt{b}}}=\frac{n(a-\sqrt{\sqrt{b}})}{(a+\sqrt{\sqrt{b}})(a-\sqrt{\sqrt{b}})}=\frac{n(a-\sqrt{\sqrt{b}})}{a^2+\sqrt{b}}$ s'intende cosa proverrà se $a=\sqrt{c}$, ovvero $=\sqrt{\sqrt{c}}$.

Articolo 9.° $\frac{n}{a+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{n(a+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(a+\sqrt{b}+\sqrt{c})(a-\sqrt{b}-\sqrt{c})}=\frac{n(a+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(a-\sqrt{b})^2-c^2}$ $\frac{n}{a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}=\frac{n(a+\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d})}{(a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})(a+\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d})}$. La regola è generale: di quattro termini il denominatore si ridurrà a tre, di tre a due, di due a uno. Della somma e sottrazione dei binomi e recisi tra loro non accade far parola, bastando tenere a mente le regole del $+$ e $-$ per la sottrazione.

Distinctio octaua Tractatus quartus. Comincia dal libretto (tavola) della moltiplica dei trenta gradi o dignità tra loro; e osserva che si può la scala estendere all'infinito, e quindi anche il libretto. Prende ad esempio il 2 non l' 1, perchè in sè moltiplicata non muta *extensiue*, ma *bē virtualiter*.

Dice esser giunto « ala madre de tutti li casi detta dal vulgo » la regola de la cosa ouer. Arte magiore: cioe pratica speculatiua: » altramente chiamata. Algebra et almucabala in lingua arabica: ouer » caldea secōdo alcuni che in la nostra sona quanto che adire *restau-* » *rationis et opposititiōis. Algebra id est. Restauratio. Almucabala id est.* » *Oppositio. vel cōtēptio: et Solidatio* ». Aggiugne essere « quella parte » che in tutte cose ci amaestra: si de geometria cōmo de arithmetica. » Senza el cui suffragio e aiuto: lor infinite q̄stioni nō si potrebono » soluer. »

Quid pro co. in algebra intelligatur. « Questa nō intender tu cħ
» lei sia aliena dal n.° anzi conseco sempre le sue vnita : e lo suo
» proprio n.° alogia. E cosi ancora dico de la terza detta. Censo elqual
» (cōmo de la cosa e detto) semp̄ a seco suo determinato e certo nu-
» mero. Ma la cagione de questi doi : diuersi nomi: non e per altro
» che per cognoscer le quantita che occurrano in le operatiōi : per nō
» equocare vna da laltra ».

Quid per censum in algebratica operatione intelligatur. Dopo aver distinti nel numero tre rispetti, come Leonardo, dice essere in algebra numero, cosa, censo come in geometria punto, linea, superficie; ed anche il numero in algebra, come *instans in tēpore et causa in rebus.*

De equationibus predictorum inter se .ſ. numeri rei et census. Come Leonardo; ma ecco il termine *equatio.* Dice che il vulgo li chiama *capitoli.*

De tribus capitulis simplicibus.

Regole composte in verso.

Primi canonis versus.

Si res et cēsus nūero coequant a rebus
Dimidio sumpto cēsum pducere debes
Addereq; nūero : cuius a radice totiens
Tolle semis re9 census latusq; redibit.

Secundi canonis versus.

Et si cū re9 dragme q̄drato pares sint
Adde sicut pmō nume9 pducto q̄drato
Ex rebus medijs: eiusq; radice recepta
Si rebus medijs addes census patefiet.

Tertij canonis versus.

At si cū numero cēsus radices equabit
Dragmas a q̄drato d'me re9 medieta9
Cuiusq; superit radicem adde traheue
A rebus medijs sic cēsus costa notescet.

De tribus regulis. seu capitulis algebraticis compositis.

De obseruantia in regulariū capitulorum. Cerchinsi due numeri x, y, che $x:y::2:3$; e $6x=4y$, ne verrà $3x=2y$, $x=\frac{2y}{3}$, $6x\frac{2y}{3}=4y$, $12y=12y$, capitolo irregolare e di niun valore. Se stando la proporzione $x:y::2:3$, si volesse $5x=4y$, ne verrebbe $5\times\frac{2y}{3}=4y$, $10y=12y$, capitolo irregolare ed impossibile. E generalmente saranno irregolari i capitoli di cose = cose, o censi = censi.

De exemplis trium simpliciū capitulorum.

De exēplis triū capitulorū cōpositorum.

Demonstratio geometrica eq̃tionis primi capituli cōpositi.

Unde ꝑueniat r.ª quādo ℞. et nūs equantur quadrato.

Unde ꝑueniat r.ª quādo cēsus et nūs equantur radicibus. Le dimostrazioni sono quelle di Leonardo; e riguardo al terzo capitolo dice com' egli, che l'una delle due radici certamente soddisfa, ed alle volte.

Primum. essentiale notandum. Secondum. Tertium. Quartum. Verte il primo sul porre la quistione in equazioni; il secondo sul ristaurare i diminuti, e levare i superflui : *Algebra vol dire restauratione. Almucabala vol dire oppositione... Unde per potere venire al capitolo bisogna recare tuta la eq̃tione a la magiore sua vnita.* Fondansi il restaurare, e l'opporre sulle due comuni *conceptioni di animo. Si equalibus equalia etc. Si ab equalibus equalia etc.* Confronta le regole del trasporto colle regole del *Catayno.* Verte il terzo sul levare dei radicali dalle equazioni; il quarto riguarda i problemi a due incognite, la seconda delle quali dice, che era chiamata dai *pratichi ātichi cosa secōda. Mali moderni la nominano q.ª simpliciter.*

De .6. alijs capitulis ꝓportiōalib̄ p̄dictis. Dico che « li prischi ante-» cessori ... tutte lor forze opative hāno strette ī li ditti .6. ca.ⁱ ase-» gnati. Aliq̃li poi (*ꝓportionabiliter*) īfiniti altri si possano formare. » 1° $ax^4 = b$, 2° $ax^4 = bx$, 3° $ax^4 = bx^2$, 4° $ax^4 + bx^2 = cx$ impossibile, 5° $ax^4 + bx = cx^2$ impossibile, 6° $ax^4 + b = cx^2$, 7° $ax^4 + bx^2 = c$, 8° $ax^4 = b + cx^2$. Insegna a sciogliere le tre equazioni, sesta, settima e ottava; e poi soggiugne : « E q̃llo ch̄ habiamo dedutto dl » cēso dcenso se habi a ītēdere d'q̃lūca altra dignita ouer q̃ª » *ꝓportiōabiliter.* E cosi ꝑ nō habundare ī troppo scriptura ꝑ tuo īge-» gno: a moltissimi aguagliūti te regierai ».

De mō formādi plura capitula secūdū exigētiam casuum. Versa sull'abbassare le equazioni da un grado spurio come $x^3 = x^4 + x^5$, che abbassasi a $1 = x + x^2$. Conclude che i capitoli di n, x, x^3; n, x^2, x^3; n, x^3, x^4 *nō se possuto finora troppo bene formare regole generali ꝑ la disproportiōalita fra loro. Perche fra loro nō sōno īteruatti eq̃li.* Vedi tutto il tratto *Estratto Rag.* pag. 36.

Distinctio nona. De sotietatibus. Tractatus primus.

De casibus sotietatis.

1°. Di due soci, uno mette a, l'altro b; il guadagno è g : quanto tocca a ciascuno ? Modo solito.

2°. Due soci guadagnano g; l'uno deve avere $\frac{1}{2}$ del guadagno ; l'altro $\frac{1}{3}$, che avrà ciascuno? $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} : g :: \frac{1}{2} : \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{6}{5}$, e $\frac{5}{6} : g :: \frac{1}{3}$:

$\frac{1}{3} \cdot g \cdot \frac{6}{5}$ (¹). Di fatti $\frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{6}{5} + \frac{1}{3} \cdot g \cdot \frac{6}{5} = g \cdot \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = g \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{6} = g$.

3°. Due guadagnano g; il primo $\frac{1}{2} + a$, il secondo $\frac{1}{3} + b$: che tocca per ciascuno ? $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} : g - a - b :: \frac{1}{2}$ e $:: \frac{1}{3}$ al quarto termine. « Sappi che alcuni si litiga molto ĩ simili, mapuale ꝑ *viā proportionum et q̇escent*. Se $g = 100$, $a = 5$, $b = 4$, toccherà al primo $59 \frac{3}{5}$; al secondo $44 \frac{2}{5}$.

4°. Due debbono partire g, dando al primo $\frac{1}{2} g + a$, al secondo $\frac{1}{3} g - b$: per secondo termine delle proporzioni si avrà $g - a + b$. Se $g = 100$, $a = 3$, $b = 5$, tocca al primo $64 \frac{1}{5}$; al secondo $35 \frac{4}{5}$.

5°. Suppongasi anche a negativo, cioè $-a$, e si avrà $g + a + b$ per secondo termine delle proporzioni.

6°. Un socio mise $\frac{1}{2} x + 2$; l'altro $\frac{1}{3} x + 3$; il guadagno fu g: che tocca a ciascuno? Misero $\frac{5}{6} x + 5$, il quale aggregato $= x$; dunque $5 = \frac{1}{6} x$, $30 = x$; dunque il primo mise $15 + 2 = 17$; il secondo $10 + 3 = 13$ ecc.; in generale, posto a in luogo di 2, b in luogo di 3, si avrà $\frac{5}{6} x + a + b = x$, $a + b = \frac{1}{6} x$, $6(a + b) = x$ ecc.

7°. Supponesi nel quarto $-a$ in luogo di a, b in luogo di b.

8°. Simile al quinto, ma esteso a tre soci, il primo de' quali aver deve di $g \frac{1}{2} g - a$; il secondo $\frac{1}{3} g - b$; il terzo $\frac{1}{4} g - c$.

9°. Un socio mise lire 100; l'altro fiorini 90; il guadagno fu di lire 500; e toccarono al primo lire 80 : che valse il fiorino ? Lire 5, soldi 16, denari 10.

10°. Simile.

11.° Uno mette lire 3000; l'altro libre 3500 lana; il guadagno è 500; al primo toccarono lire 270 : che valse la lana ? Lire 73 soldi.

12°. Il guadagno fu $g = 200$; il primo mise $a = 85$; al secondo toccarono lire 110 : che mise egli ? Lire 103, soldi 17, denari $9 \frac{1}{3}$.

(¹) Tartaglia, cart. 208, osserva che la questione non è risoluta, nè si può risolvere secondo la domanda, e per ciò essere la conclusione di F. Luca falsa. Aggiugne però che, supponendo abbia il proponente rrato per ignoranza, provisi usar la regola di F. Luca per emendare l' errore proporzionevolmente.

13°. Il guadagno fu $g = 120$; il primo mise 30 più che il secondo; al primo toccò 70 : che mise il primo, e che il secondo? Avendo il primo guadagnato 70; il secondo guadagnò $120 - 70 = 50$, 20 meno che il primo. Argomenta 30 : 20 :: 70 ec.

14°. Due hanno formata la somma $m = 324$; il guadagno fu $g = 120$; al primo toccò fra capitale e guadagno $p = 120$; al secondo fra capitale e guadagno $g = 324$: che mise ciascuno?

15°. Un socio mise x, il secondo $2x + a$; il guadagno fu g, del quale toccò al primo p: che mise ciascuno?

16.° Un socio mise $a = 1640$; il secondo $b = 1920$; e presero un fattore a condizione di dargli 15 per 100 di guadagno; e questo fu $= 1100$: che tocca a ciascuno? Al fattore 165; al primo socio $430 \frac{65}{89}$; al secondo $504 \frac{24}{89}$.

17°. Un socio mette $a = 960$, e stette mesi 12, e deve tirare 8 per 100 del guadagno; il secondo mise 1120, e stette mesi 8, e deve tirare 12 per 100 del guadagno : infine del tempo guadagnarono 800: che tocca a ciascuno? $960 \times 8 \times 12 = 92160$, $1120 \times 12 \times 8 = 107520$. Somma $= 199680$: tocca al primo $369 \frac{46080}{199680}$; al secondo $430 \frac{153600}{199680}$.

18°. Problema di tre soci a vario merito.

19°. Di tre soci a vario merito e tempo.

20°. Di tre soci, uno de'quali ha posto denari; l'altro panno; il terzo grano. Si cerca il valore del panno, ed il valore del grano, noti i guadagni.

21.° Simile al 20, cangiato il grano in zafarano.

22.° Di tre soci, di due de'quali sono noti i capitali, del terzo il guadagno, oltre al sapersi il guadagno totale.

23.° Tra il primo e secondo socio misero 30; tra il primo e terzo 50; tra il secondo e terzo 40; il guadagno fu 100: che tocca a ciascuno? Bisogna trovare i capitali: cita la soluzione data nella del *Catayno*, ed è questa: $\frac{30 + 50 + 40}{3 - 1} = \frac{120}{2} = 60$, $60 - 30$ capitale del terzo; $60 - 50$ capitale del secondo; $60 - 40$ capitale del primo. Insegna anche a trovarli così: capitale del primo $= x$; del secondo $30 - x$; del terzo (per essere $30 - x + y = 40$) sarà $10 + x$. Ma $1° + 3° = 50 = 10 + 2x$; dunque $40 = 2x$, $20 = x$.

24°. Il guadagno è 1800; tre sono i soci, uno de'quali deve avere il 12 per 100; il secondo il 18; il terzo il 30: che tocca a ciascuno? $12 + 18 + 30 = 60 : 300 :: 1800 : \frac{1800 \times 300}{60} = 9000$, $\frac{9000}{3} = 3000$; tanto mise ciascuno. Per trovare ora la parte di guadagno, argomenta 100:

12 :: 3000 : 360 ; 100 : 18 : 3000 : 540 ; 100 : 30 :: 3000 : 900. Di fatti 360 + 540 + 900 = 1800.

25°. Il guadagno fu $g = 100$; il primo mise x; il secondo $2x+2$; il terzo $x(2x+2)$: al primo toccò di guadagno 10 : che mise ciascuno? Il primo 2, il secondo 6, il terzo 12.

26.° Il primo mise x; il secondo $2x$; il terzo $2x^2 = x \times 2x$; il quarto tanto che la somma di tutti riesca $= 2x \times 2x^2 = 4x^3$: il guadagno totale fu 400; quello del primo 25 : che toccò a ciascuno degli altri, e che ciascuno mise? $4x^3 : 400 :: x : 25$, $400x = 100x^3$, $4 = x^2$, $2 = x$, $2x = 4$, $2x^2 = 8$, $4x^3 = 32$, $32-2-4-8 = 18$; guadagno del secondo $= 50$, del terzo $= 100$, del quarto $= 225$ *facta pulchra et bona.*

27°. Il primo mise x; il secondo $x+30$, il $x+30+20$, il guadagno intero $= 100$; il guadagno del primo $= 12$: che mise e che toccò a ciascuno?

28°. Un socio mise ducati 20 per mesi 12; il secondo ducati 20 per x mesi; il terzo per mesi 10 il prezzo di una gioia : il guadagno totale $= 60$: al primo toccò 20; al secondo 10; al terzo $60-20-10$: che valse la gioia; e quanto tempo stette il secondo nella compagnia? $20 \times 12 = 240$; $20 : 240 :: 10 : 120$, $\frac{120}{20} = 6$ tempo del secondo; $20 : 240 :: 30 : 3600$; $\frac{3600}{10} = 360$ prezzo della gioia.

29°. Di tre soci con diverso capitale, e diverso tempo.

30°. Il primo socio mette 65; il secondo 53; il terzo 38 per anni cinque, a condizione che al fine degli anni cinque partir si debba per terzo capitale e guadagno, così che ognuno abbia la terza parte del monte. Accade che la compagnia non dura che tre anni, e il guadagno è di 123 : che tocca a ciascuno del monte? Se la compagnia durasse anni cinque senza perdita e senza guadagno, toccherebbe a ciascuno pel patto $\frac{65+53+38}{3} = \frac{156}{3} = 52$; e perderebbe il primo $65-52=13$; il secondo $53-52=1$; e guadagnerebbe il terzo $52-38 = 14$. Argomenta 5 anni : 13 di perdita :: $3 : 7\frac{4}{5}$; $5 : 1 :: 3 : \frac{3}{5}$; $5 : 14 :: 3 : 8\frac{2}{5}$: dunque capitale del primo $65-7\frac{4}{5}=57\frac{1}{5}$, del secondo $53-\frac{3}{5} = 52\frac{2}{5}$, e del terzo $38+8\frac{2}{5} = 46\frac{2}{5}$; $57\frac{1}{5}+52\frac{2}{5}+46\frac{2}{5} = 156$; $156 = 156+123 :: 57\frac{1}{5} : 102 — :: 52\frac{2}{5} : 93 — :: 46\frac{2}{5} : 80$.

31°. Un socio mise al primo di anno ducati 100; il secondo al primo di giugno tanto, che gli toccò di guadagno lo stesso che al primo; il terzo al primo di novembre tanto che gli toccò lo stesso che al primo od al secondo: quanto misero il secondo e terzo?

32.° Simile.

33.° In parte simile, cioè al secondo toccò di guadagno $\frac{1}{3}$; al terzo $\frac{1}{4}$ di quello che toccò al primo.

34°. Di tre soci a diverso tempo e capitale in ducati; altra moneta e gioia, e noti i guadagni; si cerca il valore dell'altra moneta, ed il valore della gioia.

35.° Del guadagno g tocca ad uno $\frac{1}{2}$; al secondo $\frac{1}{3}$; al terzo $\frac{1}{4}$ simile al secondo $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}:g::6:x::4:y::3:z$.

36.° Quattro soci comprano un porco per lire 60: il primo deve avere l'$\frac{1}{3}$; il secondo $\frac{1}{4}$; il terzo $\frac{1}{5}$; il quarto $\frac{1}{6}$: che deve pagare ciascuno? $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{57}{60}:60::20:x::15:y::12:z::10:t$. Lo dice problema di Leonardo Pisano, e asserisce che $\frac{1}{20}$ del porco non fu pagato.

37.° Un socio al primo gennaio mise ducati 100; il secondo al primo marzo 60; il terzo al primo luglio ducati 150: ma il primo al primo aprile trasse per suo bisogno dalla compagnia ducati 20; il secondo al primo agosto aggiunse ducati 100; il terzo al primo ottobre trasse ducati 50: il guadagno intero in fin dell'anno fu 160: che tocca a ciascuno? Fra Luca non dà la soluzione dicendo essere facile, computati i tempi che i denari fruttarono.

38.° Un socio al primo di gennaio mise 100, e gli tocca del guadagno totale $\frac{1}{2}$; il secondo al primo marzo mise ducati tanti, che li toccò $\frac{1}{3}$ di $\frac{1}{2}$; e il terzo mise ducati 60 a tal tempo che gli tocca $\frac{1}{4}$ di $\frac{1}{2}$; e stando la compagnia un anno dalla prima messa quanto il secondo, e per quanto tempo il terzo? Mise il secondo 40, e stette il terzo mesi cinque.

39.° Simile supponendo che al secondo tocchi $\frac{1}{3}g$; al terzo $\frac{1}{4}g$; al primo $\frac{1}{2}g$: tempo e ducati del primo $=12\times100=1200$: numero che ha $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ è 12; $\frac{1}{2}$ di 12 è 6; $\frac{1}{3}$ di 12 è 4; $\frac{1}{4}$ di 12 è 3. Si argomenti $6:1200::4:800$, $\frac{800}{10 \text{ mesi}}=80$ ducati che ha posto il secondo; $6:3::1200:600$; $\frac{600}{60}=10$ mesi che stette il terzo.

40.° Un socio mette 4 pani, soldi 3 di carne; il secondo 2 pani e soldi 5 di vino; il terzo 2 pani e soldi 4 di carne. Sopraggiunge un quarto; e dopo aver con loro mangiato e bevuto paga loro soldi 10. Quanto ne tocca a ciascuno dei tre? Si dee supporre lo *scotto* di ciascuno 10, in tutti 40, sottraendo soldi 3 di carne, 5 di vino e 4 di carne, resta $40-3-5-4=28$, valore di pani 8; dunque 14 dei 4 del primo; 7 dei 2 del secondo; 7 dei 2 del terzo; dunque il primo ha posto $14+3=17$; il secondo $7+5=12$; il terzo $7+4=11$; dunque dei 10 del quarto tocca al primo $17-10=7$; al secondo $12-10=2$; al terzo $11-10=1$.

41.° Uno voterebbe un pozzo in 4 dì; il secondo in 3; il terzo in 2: in quanti dì lo voteranno tutti e tre insieme? Prendi un numero qual 12, che ha $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$: il primo in 12 dì lo voterebbe 3 volte; il secondo 4; il terzo 6; dunque lo voterebbero insieme 13 volte. Argomenta $13:12::1:\frac{12}{13}$ di giorno. Vale per la fabbrica di una casa a tre muratori; per una botte a tre cannelle; per una fontana a tre cannoni, ed infiniti casi simili.

42.° Tre fanno una torre lavorando uno a grossi 3 al dì; l'altro a grossi 4; il terzo a grossi 6; e la fecero in dì 20, e tanti grossi ebbe ciascuno. Quanti dì lavorò ciascuno? È lo stesso che dividere 20 in tre parti x, y, z, sì che $3x=4y=6z$, $x=8\frac{8}{9}$, $y=6\frac{6}{9}$, $z=4\frac{4}{9}$.

43.° Un socio ha una botte di malvasia di 30 barili; il secondo una di vin greco di barili 40; il terzo una di romenia di barili 20. Accade che si sfasciano, e tutti si mescolano; racconciate le botti si riempiono di quel miscuglio. Quanto sarà in ciascuna botte di ciascuna sorte? $30+40+20=90$: tiene 30 di malvasia: quanti ne terranno 30, 40, 25 ecc.?

44.° Simile al 34.° Il primo socio al primo gennaro mise ducati 100; il secondo al primo marzo ducati 300 *de piccoli*; il terzo al primo luglio mise canne 20 di panno: il primo tirò $\frac{4}{9}$ del guadagno; il secondo $\frac{1}{3}$; il terzo $\frac{2}{9}$: che valse il ducato *de piccoli*, e quanto la canna di panno? $12\times100=1200$, $\frac{1}{3}=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{9}$; dunque $\frac{3}{4}\times 1200=$

900, e la ragione composta del capitale e tempo del secondo; dunque $\frac{300}{10} = 90$, il capitale $\frac{300}{90} = 3\frac{1}{3}$ valore del ducato.

45.° Un socio mise lire 50; il secondo ducati 20; il guadagno fu 10 ducati, e lire 80. Al primo toccò ducati 4, lire 38; al secondo ducati 6, lire 42: che valse il ducato? Poni valesse x lire: capitale intero $= 20x + 50$: guadagno $10x + 80$; dunque $20x + 50 : 10x + 80 :: 50 : \frac{500x + 4000}{20x + 50} = 4x + 38$ $x = 3$.

46.° Un socio mise x; il secondo $2x$; il guadagno fu $x + 2x = 3x$ per 100: alla fine si trovarono fra capitale e guadagno 1000: che mise ciascuno? $100 : 100 + 3x :: 3x : \frac{300x + 9x^2}{100} = 3x + \frac{9}{100}x^2 = 1000$; $x^2 + 33\frac{1}{3}x = 11111\frac{1}{9}$; $x = -16\frac{2}{3} + \sqrt{1138\frac{8}{9}}$.

47.° Quattro mercadanti di compagnia noleggiano una nave per caricare formenti, e tanto formento caricar dee l' uno che l' altro. Il primo patteggia per nolo $\frac{1}{3}$ del frumento che caricherà; il secondo $\frac{1}{4}$ del frumento alla rata del primo più fiorini 20; il terzo il $\frac{1}{5}$ del frumento più fiorini   alla rata degli altri due; il quarto il $\frac{1}{6}$ del frumento più fiorini   sino al compito pagamento alla rata degli altri tre; fra tutti pagarono stara 1000. Quanto grano caricò ciascuno? Quanto ciascuno pagò di nolo? Quanto montò lo staro del grano? $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60}$; $57 : 60 :: 1000 : 1052\frac{12}{19}$ carico di ciascheduno, $4 \times 1052\frac{12}{19} = 4210\frac{10}{19}$ carico della nave: $\frac{1}{3} \times 1052\frac{12}{19} = 350\frac{50}{57}$, $1052\frac{12}{19} - 350\frac{50}{57} = 701\frac{43}{57}$; $\frac{1}{4} \times 1052\frac{12}{19} = 263\frac{3}{19}$, $1052\frac{12}{19} - 263\frac{3}{14} = 789\frac{25}{57}$. Argomenta: il primo per stara $701\frac{43}{57}$ paga $350\frac{50}{57}$; quanto per stara $789\frac{25}{57}$ pagherà il secondo? Troverai $394\frac{93479}{129960}$; ma pagò $263\frac{3}{19}$, gli resta da pagare $394\frac{93479}{129960} - 263\frac{3}{19} = 131\frac{17}{24}$ stara che devono equivalere a fiorini 20; dunque il prezzo dello staro = soldi 15, e piccoli $2\frac{698}{9161}$. Pel terzo $\frac{1}{5} \times 1052\frac{12}{19} = 210\frac{10}{19}$, $1052\frac{12}{19} - 210\frac{10}{19} =$

$842\frac{2}{19}$. Argomenta $701\frac{43}{57} : 350\frac{50}{57} :: 842\frac{2}{19} : 422\frac{92109}{760000}$, ma pagò $210\frac{10}{19}$; dunque gli resta a pagare $211\frac{15}{38}$, pei quali deve contanti; $131\frac{17}{24}$ stara : fiorini $20 :: 211\frac{15}{38} : 31$ fiorini, 83 soldi, 10 piccoli. Pel quarto $\frac{1}{6}\times 1052\frac{12}{19} = 175\frac{25}{57}$, $1052\frac{12}{19} - 175\frac{25}{57} = 877\frac{11}{57}$, $701\frac{43}{57} : 350\frac{50}{57} :: 877\frac{11}{57} : 438\frac{24159}{40000}$, ma pagò $175\frac{25}{57}$; dunque gli resta a pagare stara $262\frac{18}{19}$; $131\frac{17}{24} : 20 :: 262\frac{18}{19}$: fiorini 39, soldi 78, piccoli $5\frac{2699}{3161}$.

48.° Per guarnire una nave si spende 1200; il primo socio s'impegna per 2 caratti; il secondo per 3; il terzo per 5; il quarto per 6; il quinto per 8: che tocca a ciascuno di spesa? $2 + 3 + 5 + 6 + 8 = 24 : 1200 ::$—

49.° Tre noleggiano una barca per 3 ducati; il padrone leva un quarto uomo, e quei tre pretendono $\frac{1}{2}$ di ciò che pagherà: il padrone dice al quarto che pagherà a rata con quelli: che dovrà questi pagare? Chiama x, ognuno degli altri pagherà ducati $1 - \frac{1}{8}x$, e sarà $= x$, $1 = x + \frac{1}{8}x = \frac{9}{8}x$, $x = \frac{8}{9}$ di ducati.

50.° Due noleggiano una barca per grossi 20, patteggiando col padrone, che levando altri vogliono $\frac{1}{2}$ del loro pagamento: leva egli altri tre per grossi 30, e questi vogliono a rata proporzionale coi primi: come debbonsi dividere i 30 grossi, e quanto pagherà ciascuno? Le rate dei due primi sopra i 30 grossi saranno 2; del padrone solo 2; degli altri viaggiatori 3; fra tutte 7. Argomenta $7 : 30 :: 2 : \frac{60}{7} = 8\frac{4}{7}$; $7 : 30 :: 3 : \frac{90}{7} = 12\frac{6}{7}$; dunque toccherà di pagamento a ciascuno dei primi $10 - 4\frac{2}{7} = 5\frac{5}{7}$; a ciascuno degli altri tre $10 - 4\frac{2}{7} = 5\frac{5}{7}$.

51.° Due noleggiano una barca; il primo carica *sacca* di lana 25, e paga di nolo 1 sacco, e soldi 23; il secondo carica sacca 31, e paga sacca 2; ma il barcaiuolo gli rende soldi 50: quanto valse il sacco di lana, e quanto si pagò per sacco? Prezzo del sacco x di soldi. Si pagò di nolo per sacco $\frac{25}{x+23} = \frac{31}{x-50}$.

52.° Un socio mette 2000 con patto di tirare $\frac{4}{7}$ del guadagno; l'altro metta 800 e la persona, e tiri $\frac{3}{7}$: accadde che il primo sopramise 500: che parte dovrà tirare ciascuno del guadagno? F. Luca calcola così: $\frac{3}{7}$ è $\frac{3}{4}$ di $\frac{4}{7}$; dunque il capitale del secondo dovrebbe essere $\frac{3}{4}\times 2000 = 1500$, ma non è che 800; dunque 700 è contata la persona; sopraggiugnendo il primo 500, il suo capitale diviene 2500; il capitale del secondo, valutata la persona, resta 1500: dunque il guadagno si ripartirà in ragione di 2500 : 1500. Ma dice giustamente Tartaglia (carte 205, prob. 80), che si dee computare pel secondo la cura del traffico delle 500 lire di più; e osserva cadere nello stesso errore Giovanni Sfortunati. Calcola dunque il Tartaglia così: $2000+800=2800$, $2800\times\frac{3}{7}=1200$, $1200-800=400$, $\frac{400}{2000}=\frac{1}{5}$; il secondo dunque, oltre il guadagno del suo capitale 800, dovrà avere $\frac{1}{5}$ del guadagno che perverrà al primo, metta quanti denari voglia. Soprapponendo dunque il primo lire 500, il suo capitale diventando 2500, sarà $\frac{2500}{5}=500$, $800+500=1300$ si dovrà computare il capitale del secondo: la somma tutta sarà $2000+800+500=3300$, $\frac{1300}{3300}=\frac{13}{33}$, e tale sarà la parte del guadagno che toccherà al secondo.

53.° Un socio mette lire 3000; il secondo 800, e la persona con patto che il primo tiri li $\frac{5}{8}$ del guadagno; il secondo $\frac{3}{5}$; ma il primo sopramise fiorini 400, e trasse $\frac{2}{3}$ del guadagno; il secondo $\frac{1}{3}$: quanto valse il fiorino? F. Luca col suo modo ricava la persona stimata 1000, e deduce il fiorino del valore di lire 1, soldi 10. Il Tartaglia lo condanna e computa così: $3000+800=3800$; $\frac{3}{5}\times 3800$ $=1425$, $1425-800=625$ valore della persona, $\frac{625}{3000}=\frac{5}{24}$ parte proporzionale toccante alla persona del guadagno toccante al primo sopra il suo capitale, sia quanto si voglia. Tartaglia dà il compimento della soluzione, ma riserbando all'algebra la dimostrazione. Si faccia per tanto $=x$ lire il valore del fiorino, sarà tutto il capitale secondo $3800+400x$, siccome tutto il primo era 3800; il capitale della persona industre nel primo caso era $800+\frac{5}{24}\cdot 2000=1425$; onde restava il capitale del primo socio $= 2375$; il capitale di essa persona industre nel secondo caso sarà $800 + \frac{5}{24}(2000 + 400x) = 1425 + \frac{5}{24} . 400x$, e per conseguenza il capitale del primo socio resta $2375 + \frac{19}{24} . 400x$. Or deve essere $\frac{2375}{3800} : \frac{2375 + \frac{19}{24} . 400x}{3800 + 400x} :: \frac{5}{8} : \frac{2}{3} :: 15 : 16$; onde si trova $2375 . 16 . 38000 + 2375 . 16 . 400 . x = 2375 . 15 . 3800 + 19 . 5 . 50 . 3800x$. Ma $19 . 5 . 50 = 2 . 2375$; dunque $3800 = (2 . 3800 - 16 . 400)x = (7600 - 6400)x = 1200x$, e per ciò $x = 3\frac{1}{6}$.

54.° Un socio mette $\sqrt{9}$; l'altro $\sqrt{4}$, e guadagnano $\sqrt{225}$: che tocca a ciascuno? F. Luca riguarda 13 come $\sqrt{13 + \sqrt{144}}$.

55.° Un socio mise 3000; il secondo 600, e la persona. Il patto era che il primo tirasse $\frac{5}{9}$ del guadagno; il secondo $\frac{4}{9}$, ma quegli sopramise tanto che tirò $\frac{7}{9}$: quanto sopramise?

56.° Un socio mette 3000; il secondo 1000, e la persona, con patto che il primo tiri $\frac{5}{8}$; il secondo $\frac{3}{8}$ del guadagno. Sopravviene un terzo, e mette 2000: che parte dovrà trarre? F. Luca falla sempre in non computare l'aggiunta di cura per la persona industre.

57.° Sopravviene anche un quarto, esibendo di mettere tanto per cui gli tocchi il $\frac{1}{3}$ del guadagno: quanto deve mettere, e qual parte toccherà a ciascuno?

58.° Un socio mette 80; il secondo 20, con patto che quegli tiri $\frac{2}{3}$; il secondo $\frac{1}{3}$ del guadagno [1]. Viene un terzo, e mette ducati 120, dichiarando di voler stare alla rata loro nel riparto del guadagno: questo è di 500: che ne tocca a ciascuno? F. Luca computa così: $80 : \frac{2}{3} :: 20 : \frac{1}{6}$; $20 : \frac{1}{3} :: 80 : \frac{4}{3}$, $\frac{1}{6} + \frac{4}{3} = \frac{3}{2}$, $80 + 20 = 100$; $100 : \frac{3}{2} :: 120 : \frac{9}{5}$, $\frac{1}{6} + \frac{4}{3} + \frac{9}{5} = \frac{15}{90} + \frac{120}{90} + \frac{162}{90} = \frac{297}{90}$. Si argomenti: $\frac{297}{90} : 500 :: \frac{15}{90} : x :: \frac{120}{90}$:

[1] Tartaglia supplisce (*sic*) che il secondo tiri oltre alla proporzione del suo capitale per essere più esperto nel negoziare.

$y :: \frac{162}{90} : z$; quindi ricava $x = 25\frac{75}{297}$ $y = 202\frac{6}{297}$, $z = 272\frac{216}{297}$; ma naturalmente e senza patto al secondo sarebbe toccato $x = 45\frac{5}{11}$; al primo $15 = 182\frac{9}{11}$; al terzo $272\frac{8}{11}$; e pel patto deve al secondo toccare di più, agli altri due di meno; dunque è falsa la soluzione di F. Luca, colla quale concorda quella di Pietro Borgi da Venezia. Tartaglia riferisce anche quella di Giovanni Sfortunati da Siena *approvata da tutti i matematici ma pur falsissima*, ed era che quello del cap. 80, tirando 2; quello del cap. 120 tirasse 3; onde riducendo il guadagno in sei parti, il primo ne avesse $\frac{2}{6}$; il secondo $\frac{1}{6}$; il terzo $\frac{3}{6}$. Prova Tartaglia la falsità di tal soluzione, perchè non si pone mente al quanto ha posto il secondo; di modo che avesse egli posto più o meno di 20, gli si destinerebbe sempre $\frac{1}{6}$ del guadagno. Tartaglia opera come negli altri problemi, ne'quali al secondo è assegnato, oltre la proporzione del suo capitale per la industria personale. Dunque $80 + 20 = 100$, $100 \times \frac{1}{3} = 33\frac{1}{3}$, $33\frac{1}{3} - 20 = 13\frac{1}{3}$, $\frac{13\frac{1}{3}}{80} = \frac{1}{6}$, parte che il primo cede del suo guadagno al secondo per la sua maggior perizia nel negoziare, ed altrettanto deve cedergli il terzo, entrando nel patto stabilito tra il primo e secondo: dunque mettendo il terzo 120, $\frac{1}{6} . 120 = 20$, debbonsi contare del secondo che verrà ad avere di capitale $20 + \frac{1}{6} . 80 + \frac{1}{6} . 120 = 20 + 13\frac{1}{3} + 20 = 53\frac{1}{3}$. Dunque i tre capitali saranno $80 - 13\frac{1}{3} = 66\frac{2}{3}$, $53\frac{1}{3}$, $120 - 20 = 100$, ed in proporzione, dividendo il guadagno 500, toccherà al primo $151\frac{17}{33}$; al secondo $121\frac{7}{33}$; al terzo $227\frac{9}{33}$.

59.° Un socio mette 400; il secondo 300, con patto che il primo tiri $\frac{2}{3}$ del guadagno; il secondo $\frac{1}{3}$, e questi vuol soprammettere tanto, onde tirare del guadagno $\frac{1}{2}$: quanto dee soprammettere? Simile agli altri di sopra. Si denominerà x ciò che il secondo dee soprammettere. F. Luca a suo modo trova $x = 420$.

60. Un socio mette 1600 e la persona; ed il secondo 2000 con

patto che il primo tiri $\frac{4}{7}$ del guadagno; il secondo $\frac{3}{7}$: quanto è stimata la persona, e quanto dee il secondo soprammettere onde tirar lui $\frac{4}{7}$ del guadagno, ed il primo $\frac{3}{7}$? Dee, giusta F. Luca, soprammettere $1555\frac{1}{9}$.

61.° Uno per patto dovria mettere 7; l'altro 5, e partire per $\frac{1}{2}$; in vece il primo mise 5; il secondo 3: chi svantaggia e quanto? Il primo tirava $\frac{6}{12}$ in vece di $\frac{7}{12}$; il secondo $\frac{6}{12}$ in vece di $\frac{5}{12}$. Nel secondo caso il primo tira $\frac{4}{8}$ in vece di $\frac{5}{8}$; ed il secondo $\frac{4}{8}$ in vece di $\frac{3}{8}$: dunque nel primo caso il primo cede al secondo $\frac{1}{12}$; nel secondo caso $\frac{1}{8}$ che è molto più.

62.° Il primo mise x; il secondo $x+20$; il terzo $5\sqrt{x+x+20}+30$, ossia $30+5\sqrt{2x+20}$; il guadagno totale fu 270, del quale toccò al primo 60: che toccò a ciascuno degli altri, e che mise ciascuno? F. Luca pone che il primo e secondo mettessero fra tutti e due y^2, cioè pone $2x+20=y^2$; onde tutto il capitale $y^2+5y+30$, ed il capitale parziale del primo $=\frac{1}{2}y^2-10$; del secondo $\frac{1}{2}y^2+10$; dunque $y^2+5y+30:270::\frac{1}{2}y^2-10:60$ — $y=2+\sqrt{42\frac{2}{3}}$, $y^2=44\frac{2}{3}+4\sqrt{42\frac{2}{3}}$.

Altro. Il primo socio mise x al primo di gennaio; il secondo in capo di due mesi mise $2x-50$; il terzo in capo di quattro mesi mise $60+4\sqrt{x+2x-50}$: in capo dell'anno il guadagno fu 190, del quale toccò al primo 60: che mise ciascuno, e che toccò agli altri due? Fa $x+2x-50=y^2$, $3x=y^2+50$, $x=\frac{1}{3}y+16\frac{2}{3}$. Fatto il caso $y^2 4-y+60$.

63.° Il primo socio mise x al principio d'anno; il secondo in capo di quattro mesi $5\sqrt{x}$; il terzo in capo di otto mesi $\frac{1}{4}x\times\frac{1}{5}.5\sqrt{x}$: in capo di mesi diciotto il guadagno totale fu 500, del quale toccò al primo 180: che toccò agli altri due, e che mise ciascuno? Poni $x=y^2$.

64.° Uno mise una gioia, l'altro ducati 10; il guadagno 20: al primo toccò fra capitale e guadagno 12; al secondo otto: che valse la gioia?

65.° Uno mise 700, l'altro 500 per un anno con patto di partire capitale e guadagno per $\frac{1}{2}$: in capo di mesi dieci ruppesi la compagnia, e trovossi il guadagno di 200: che toccherà a ciascuno? Al fine dell'anno, cioè mesi dodici, il primo avrebbe ceduti al secondo fiorini 100 del suo capitale. Argomenta $12 : 100 :: 10 : \frac{1000}{12} = 83\frac{1}{3}$, capitale dunque del primo $= 700 - 83\frac{1}{3} = 616\frac{2}{3}$; del secondo $500 + 83\frac{1}{3} = 583\frac{1}{3}$; in proporzione dei capitali dividi il guadagno: al primo tocca $102\frac{7}{9}$; al secondo $97\frac{2}{9}$.

66.° Un socio mette fiorini 100, e deve avere $+ 8$; l'altro mette 150, e dee avere 4 di meno, ossia $- 4$; il guadagno è 50: che tocca a ciascuno? $250 : 50 - 8 + 4 = 46 :: 100 : x :: 150 : y$.

67.° Il primo socio mise x ducati; il secondo mise y lire, $\frac{2}{3}x = \frac{1}{4}y - 5$, $\frac{2}{3}x \times \left(\frac{1}{4}y - 5\right) = x + y + 2870$; il guadagno totale fu 53, del quale toccò al primo 36: quanti furono i ducati messi dal primo; quante le lire poste dal secondo; quale il valore del fiorino? $y = 2\frac{2}{3}x + 20$, $2\frac{2}{3}x^2 + 20x = 3\frac{2}{3}x + 2890$.

68.° Un socio mise x lire; il secondo fiorini 29; il terzo lire 87; il guadagno totale $=$ lire 100, delle quali toccarono al secondo 40: che mise il primo; qual fu in lire il valore del fiorino, che toccò a ciascuno?

69.° Due mettono x; l'uno ne piglia una parte, e andato a Bologna traffica cinque anni e settanta dì, guadagnando ogni anno $\frac{1}{5}$ di suo capitale, e ogni anno spendendo 25; l' altro andato a trafficare a Vinegia guadagnò ogni anno $\frac{1}{7}$ di suo capitale, spendendo ogni anno 37: ma a questo in capo di anni cinque, di settanta non restò nulla: al primo avanzò tanto *quanto che furono quelli del monte che avanzò a quello da Vinegia*, è male scritto, e vuol dire quanti furono quelli che dal monte x prese l' andato a Venezia. Osserva F. Luca ridursi il quesito a trovare un numero y, al quale aggiunto $\frac{1}{7}y$, e tolto 37, poi al residuo aggiunto $\frac{1}{7}$ di esso, e tolto 37, e così via via per anni cinque $\frac{7}{36}$ = cinque anni, settanta dì, rimanga in fine zero; ed in secondo luogo a trovare un numero z, tale che $z +$

$\frac{1}{5}z - 25 + \left(z + \frac{1}{5}z - 25 - \frac{1}{5}\left(z + \frac{1}{5}z - 25\right) - 25\right) + \ldots$ divenga $= y$. Dice F. Luca di operare per le regole *de Viaggiis*.

70.° Uno farebbe una casa in x giorni; il secondo in $x + 6$; il terzo in $x + 2$; lavorando tutti, la fanno in giorni due: in quanti dì la farebbe ciascuno? F. Luca pone $x + 2 = y$, conseguentemente $x = y - 2$, $x + 6 = y + 4$; poi argomenta: $y - 2 : 1 :: 2 : \frac{2}{y-2}$ lavoro del primo nei due giorni.

71.° Un socio mise 1249; il secondo, terzo e quarto misero x, y, z; ma quando il secondo guadagnò 5, il terzo guadagnò 9; quando il terzo guadagnò 7, il quarto guadagnò 11; e quando il quarto guadagnò 9, il primo guadagnò 13; il guadagno totale fu 1000: quanto tocca a ciascuno?

72.° Uno al primo di anno mise x; il secondo in capo di due mesi $x + 50$; il terzo in capo a quattro mesi $2(x + x + 50) - 50$; il quarto in capo di cinque mesi $120 + 5\sqrt{\left(x + x + 50 + 2(x + x + 50) - 50\right)}$; il guadagno totale 500, del quale toccò al primo 60: che mise ciascuno; che toccò a ciascuno? F. Luca pone la somma dei capitali dei tre primi $= y^2$: onde il quarto $5y + 120$; e poichè $x + x + 50 + 2(x + x + 50) - 50 = y^2$, $6x + 100 = y^2$, $x = \frac{y^2 - 100}{6} = \frac{1}{6}y - 16\frac{2}{3}$.

73.° Uno mette $x + 2000$; l'altro 3000 con patto di partire in modo incognito; e mettendo più o meno si accresca o diminuisca ciò che gli deve toccare alla rata; e trova il secondo che aggiugnendo 1000 trarrebbe $\frac{1}{15}$ più che prima di tutto il capitale: che fu stimata la parte del primo? Capitale nel primo caso $x + 5000$, sarà $\frac{x + 2000}{x + 5000}$ la parte del guadagno dovuta al primo; $\frac{3000}{x + 5000}$ la parte del guadagno dovuta al secondo. Nel secondo caso $x + 6000$ capitale intero; $\frac{x + 2000}{x + 6000}$ parte del guadagno dovuta al primo; $\frac{4000}{x + 6000}$ la dovuta al secondo. Per la condizione del problema $\frac{4000}{x + 6000} - \frac{3000}{x + 5000} = \frac{1}{15}$. Operando viene $\frac{1000x + 2000000}{x^2 + 11000x + 30000000} = \frac{1}{15}$, $1000x + 2000000 = \frac{1}{15}x^2 + \frac{1}{15} . 11000x + 2000000$; onde $1000 = \frac{1}{15}x + \frac{1}{15}$

$x + \frac{1}{15} \cdot 11000$, $15000 = x + 11000$, $4000 = x$. Di fatti $\frac{4000}{4000 + 6000} - \frac{3000}{4000 + 5000} = \frac{4}{10} - \frac{3}{9} = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$.

74.° Quattro debbono partire 100 fiorini in parti x, y, z, t, sì che $x = \frac{1}{2}(y + z + t)$, $y = \frac{1}{3}(x + y + t)$, $z = \frac{1}{4}(x + y + t)$, $t = 100 - x - y - z$. F. Luca dalle condizioni inferisce tosto mentalmente dover essere $x = \frac{100}{3}$, $y = \frac{100}{4}$, $z = \frac{100}{5}$. Di fatti, sostituendo in $x = \frac{1}{2}(y + z + t)$ il valore $100 - x - y - z$, in luogo di t, viene $x = \frac{1}{2}(100 - x)$; onde $x = \frac{1}{3} \cdot 100$. Ma $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{20}{60} + \frac{15}{60} + \frac{12}{60} = \frac{47}{60} = \frac{60}{60} - \frac{13}{60}$; dunque dicasi $60 : 100 :: 20 : x :: 15 : y :: 12 : z :: 13 : t$.

75.° Quattro hanno a partire ducati 3; ciascuno ne vuole uno, e ciò non potendo essere, il caso fu rimesso al più vecchio. *Dedit eos ad lucrū et ex trib̄ effecti sūt 4.or e tūc cōcordauit eos.*

76.° Tre devono partire fra loro ducati 100 ugualmente; ciascuno pigliò di questi chi più chi meno meglio che potè; dipoi s'accordano che il primo deponga di ciò che rubò il $\frac{1}{3}$; il secondo $\frac{1}{4}$; il terzo $\frac{1}{2}$; indi, partendo tutto il deposto ugualmente in tre, ciascuno viene ad avere il giusto, cioè $33\frac{1}{3} = \frac{100}{3}$: quanto rubò ciascuno? Prendi 12 che ha $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$: suppongasi che ognuno ritenesse 12; dunque nel primo, essendo 12 $\frac{2}{3}$ del rubato, il rubato fu 18; nel secondo, essendo 12 $\frac{3}{4}$ del rubato, il rubato fu 16; nel terzo, essendo 12 $\frac{1}{2}$ del rubato, il rubato fu 24: ma $18 + 16 + 24 = 58$ non 100; dunque argomenta $58 : 100 :: 18 : x :: 16 : y :: 24 : z$; e troverai $x = 31\frac{1}{29}$, $y = 27\frac{17}{29}$, $z = 41\frac{11}{29}$. Ma più speditamente e direttamente $x - \frac{1}{3}x = 33\frac{1}{3}$ cioè $\frac{2}{3}x = 33\frac{1}{3}$.

77.° Tre doveano partire ducati 12: il primo doveva averne $\frac{1}{2}$; il secondo $\frac{1}{3}$; il terzo $\frac{1}{6}$: nel partire si *conzaro* (sconciarono), e ciascuno brancò quanto potè: in fine convennero che il primo de-ponesse $\frac{1}{2}$ di ciò che *brãco*; il secondo $\frac{1}{3}$; il terzo $\frac{1}{6}$; e tutto il deposto fu ripartito ugualmente, ed ognuno ebbe la parte sua. Chiamisi tutto il deposto x, di che toccherà ad ognuno $\frac{1}{3}x$; dunque il primo, deposto $\frac{1}{2}$ del rubato, deve essere rimasto con $6 - \frac{1}{3}x$; il secondo, deposto $\frac{1}{3}$ del rubato, deve essere rimasto con $4 - \frac{1}{3}x$; ed il terzo, deposto $\frac{1}{6}$ del rubato, deve essere rimasto con $2 - \frac{1}{3}x$: ma il primo restò con $\frac{1}{2}$ del rubato; dunque rubò $2\left(6 - \frac{1}{3}x\right)$; il secondo restò con $\frac{2}{3}$ del rubato; dunque rubò $\frac{3}{2}\left(4 - \frac{1}{3}x\right)$; il terzo restò con $\frac{5}{6}$ del rubato; dunque rubò $\frac{6}{5}\left(2 - \frac{1}{3}x\right)$. Ora $2\left(6 - \frac{1}{3}x\right) + \frac{3}{2}\left(4 - \frac{1}{3}x\right) + \frac{5}{6}\left(2 - \frac{1}{3}x\right) = 20\frac{2}{5} - 1\frac{17}{30}x$ che deve essere $= 12$: dunque $8\frac{2}{5} = 1\frac{17}{30}x$ $\frac{42}{5} = \frac{47}{30}x$, $42 = \frac{47}{6}x$, $252 = 47x$, $x = \frac{252}{47} = 5\frac{17}{47}$.

78.° Tre hanno a partire x di ducati: il primo deve averne $\frac{1}{2}$; il secondo $\frac{1}{3}$; il terzo $\frac{1}{4}$. Venuti a contesa, ognuno prende quanto può; poi accorda il loro amico, così che il primo gli dia $\frac{1}{4}$ del rubato, il secondo $\frac{1}{6}$, il terzo $\frac{1}{5}$, e di tutto il datogli, fece l'amico 20 parti, delle quali 9 diede al primo, 7 al secondo, 4 al terzo; e ciò fatto, ciascuno ebbe il suo: qual fu x? quanto brancò ciascuno? quanto a ciascuno toccava? Prendi 12, $\frac{12}{2} = 6$, $\frac{12}{3} = 4$, $\frac{12}{4} = 3$, $6 + 4 + 3 = 13 > 12$. E di fatti $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$, ed il problema è impossibile rigorosamente; ma « cidouẽ reggere *ꝑportiõaliter* cõmo ĩ la .32ª. » cõp.ª » (*) Argomentisi: $13 : 12 :: 6 : t :: 4 : u :: 3 : v$, ed avrai $t = 5\frac{7}{13}$, $u = 3\frac{9}{13}$, $v = 2\frac{10}{13}$. Pongasi ora che tutto il messo in mano dell'amico sia stato y. Perchè dando l'amico al primo $\frac{9}{20}y$, egli ebbe

(*) Riflette dunque qui F. Luca non altrimenti che Tartaglia a carte 200; e non vedo come lo accusi.

tutto il suo, cioè $5\,\frac{7}{13}$; dunque al restituire $\frac{1}{4}$ del tolto, egli restò con $5\,\frac{7}{13}-\frac{9}{20}\,y=\frac{3}{4}$ di tutto il da lui tolto. Dunque tutto il da lui tolto fu $\frac{4}{3}\left(5\,\frac{7}{13}-\frac{9}{20}\,y\right)$: similmente $13\,\frac{9}{13}-\frac{7}{20}\,y$ fu $\frac{5}{6}$ del tolto dal secondo; e per ciò $\frac{6}{5}\left(3\,\frac{9}{13}-\frac{7}{20}\,y\right)$ tutto il da lui tolto; ed in simil modo $2\,\frac{10}{13}-\frac{4}{20}\,y$ fu $\frac{4}{5}$ del tolto dal terzo; e $\frac{5}{4}\left(2\,\frac{10}{13}-\frac{4}{20}\,y\right)$ tutto il da lui tolto. Ora $\frac{4}{3}\left(5\,\frac{7}{13}-\frac{9}{20}\,y\right)+\frac{6}{5}\left(3\,\frac{9}{13}-\frac{7}{20}\,y\right)+\frac{5}{4}\left(2\,\frac{10}{13}-\frac{4}{20}\,y\right)=12$, ossia $\frac{4}{3}\left(\frac{72}{13}-\frac{9}{20}\,y\right)+\frac{6}{5}\left(\frac{48}{13}-\frac{7}{20}\,y\right)+\frac{5}{4}\left(\frac{36}{13}-\frac{4}{20}y\right)$ $=12\;\frac{4.24}{13}-\frac{12}{20}y+\frac{6.48}{5.13}-\frac{42}{5.20}y+\frac{5.9}{13}-\frac{5}{20}y=12$, $10\,\frac{11}{13}+4\,\frac{28}{5.13}-\left(\frac{17}{20}+\frac{42}{5.20}\right)y=12$, $15\,\frac{18}{5.13}-1\,\frac{27}{100}\,y=12$; $3\,\frac{18}{5.13}$ $=1\,\frac{27}{100}\,y=\frac{127}{100}y$; $\frac{213}{65}=\frac{127}{100}\,y$, $y=\frac{21300}{65.127}=\frac{21300}{8255}=2\frac{4790}{8255}$ $=2\,\frac{958}{1651}$.

79.° Manca: (cioè l'autore ha fallato nella numerata)

80.° Uno lasciando in morire la moglie gravida vuole che della sua eredità A, nascendo una figlia, abbia la madre 2, la figlia 1; e nascendo un figlio, abbia questi 2, la madre 1: nascono figlio e figlia; come si deve partire l'eredità? La figlia avrà come 1, la madre come 2, il figlio come 4; cioè la figlia $\frac{1}{7}$ A, la madre $\frac{2}{7}$ A, il figlio $\frac{4}{7}$ A. Dice F. Luca, che tal problema gli fu dato da « Nofrio dini. » dafirenza. degno mercadāte ī pisa nel fōtego de Giugliano saluiati. » 1486. adi .16. dicembre. » Propone un'altra proporzione cioè che la madre e la figlia abbiano ugualmente; ma nascendo il figlio abbia la madre come 3, il figlio come 5; ossia come 1, e come $1\,\frac{2}{3}$; onde avrà la figlia $\frac{1}{3\,\frac{2}{3}}$ A, ed ugualmente la madre e il figlio

$$\frac{1\,\frac{2}{3}}{3\,\frac{2}{3}}\,\text{A}.$$

Generalmente sia $a : b$ la ragione delle parti della figlia e della madre, e $n : m$ la ragione delle parti della madre e del figlio: dicasi $n : m :: b : \frac{mb}{n}$, e saranno a, b, $\frac{mb}{n}$, ossia na, nb, mb le parti della figlia, della madre, del figlio. Ovvero dicasi $b : a :: n : \frac{na}{b}$, e saranno $\frac{na}{b}$, n, m ossia $na + nb + mb$ come prima.

81.° Simile al 49.°; e lo scioglie per doppia falsa posizione e per algebra.

Qui pone un problema senza numero che supplirà al 79.° saltato, ed è: Uno vende una vacca pregna per ducati 24 se faccia maschio; per 20 se faccia femmina: fa l' uno e l'altra; e la vacca vale due vitelli maschi; il vitello maschio per due vitelle femmine: che deve il compratore al venditore? Dicasi x il prezzo della vacca; sarà $\frac{1}{2} x$ quello del vitello; ma $x + \frac{1}{2} x = 24$; dunque $x = 16$, $\frac{1}{2} x = 8$ prezzo del vitello; 4 prezzo della vitella; dunque $16 + 8 + 4 = 28$ tutto il pagamento.

82.° Propone di trovare un numero di ducati da partire colle condizioni del 77.° (sbaglia la stampa in mettere 78.°), sicchè tutto riesca in numeri sani. Basta moltiplicare tutto per 47.

83.° Avendo due a partire ducati 30 ugualmente, ciascuno tolse quanto potè; poi restituito dal primo $\frac{1}{3}$ del tolto, dal secondo $\frac{1}{4}$; e fatte di tutto il restituito parti uguali, ciascuno ebbe 15: che tolse ciascuno? Abbia il primo tolto x; dunque il secondo $30-x$; il primo restituì $\frac{1}{3} x$, e restò con $\frac{2}{3} x$; il secondo restituì $\frac{1}{4}(30-x)$; dunque tutto il restituito fu $\frac{1}{3} x + \frac{1}{4}(30 - x) = 7\ \frac{1}{2} + \frac{1}{12} x$; e fu $\frac{2}{3} x + \frac{1}{2}\left(7 \frac{1}{2} + \frac{1}{12} x\right) = 15$.

84.° Uno mettendo per 20 deve tirare per 30, cioè come se mettesse 30; il secondo mettendo per 40 deve tirare per 70; il terzo mettendo 50 deve tirare per 60; il quarto mettendo 100 deve tirare per 150. Che parte del guadagno è a ciascuno dovuta? Non si devono contare le messe reali, ma le supposte: dunque essendo $30 + 70 + 60 + 150 = 310$, il primo avrà del guadagno $\frac{30}{310} = \frac{3}{31}$; il secondo $\frac{7}{31}$; il terzo $\frac{6}{31}$; il quarto $\frac{15}{31}$.

De soccidis. Et domorum apensionibus.

Le società di bestiami si facevano a partire per $\frac{1}{2}$ in capo a tre anni in alcuni luoghi; in altri in capo a 4; in altri in capo a 5

« chiamādole. dare abastōe. E chi acollatico. ēc. » Dice che i casi ne sono molto pericolosi, e che molto su di essi scrissero i sacri dottori « ī le loro sum̄e de penitētia. Doue breuiter tutte tale usāze e » costumi de soccide le rimettano nel iudicio sacro. del uescouo de » tal diocise. q̄le ſo elbō costume d'la prīa. La a ꝑmettere. e. ꝓhi- » bire . ſo che meglio li ꝑera. E cō tal cōseglio salutifero raro se » erra. »

Propone nove questioni, le più delle quali si riducono a questo problema generale. Un signore consegna ad un pastore animali A, ed il pastore ne mette a, e deve tenerle anni t; e dopo devono partire per $\frac{1}{2}$; e quando fu in capo di tempo $<$ o $>$ di anni t (per accidenti di anticipazione e di ritardo) si fece la divisione, ed il totale degli animali era M: che ne toccava al signore, che al pastore? Somma degli animali posti in società $A+a$; toccherebbe al pastore in ragione di suo capitale $\frac{a}{A+a}.M$, e per ragione di sua cura nel fine del tempo t, se fosse stato M l'ammontare degli animali $\frac{1}{2}M-\frac{a}{A+a}.M$: dicasi dunque $t:t'::\frac{1}{2}M-\frac{a}{A+a}.M:\frac{t'}{t}\left(\frac{1}{2}M-\frac{a}{A+a}.M\right)$. Onde in fine del tempo, t' gli tocca $\frac{a}{A+a}.M+\frac{t'}{t}\left(\frac{1}{2}M-\frac{a}{A+a}.M\right)$. Se a sia $=0$, la formola diventa $\frac{t'}{t}.\frac{1}{2}M$. Così scioglie tali problemi F. Luca nel caso $t'<t$, e similmente Tartaglia; ma il Bassi, citando per sè lo Zucchetta, pretende che gli antichi abbiano errato ed in ogni caso che il pastore abbia poste pecore a, o niuna; vogliono che l'aumento sia comune, e si divida sempre per metà, o facciasi la divisione al fine del tempo t, o di altro minore t', e che il patto del $\frac{1}{2}$ non sia legato al fine del tempo t, che rispetto ai capitali: onde distinguendo in M il capitale primo $A+a$, ed il numero dell'aumento N, dicono competere al pastore $\frac{1}{2}N+\frac{t'}{t}.\frac{A}{2}+a-\frac{t'}{t}\frac{a}{2}$; ed al signore $\frac{1}{2}N+\frac{t'}{t}.\frac{a}{2}+A-\frac{t'}{t}.\frac{A}{2}$. Così se $A=72$, $a=18$, $M=240$; per conseguenza $N=M-(A+a)=240-90=150$, sarà la parte del pastore $\left(\text{se } t=5,\ t'=3 \text{ anni, 4 mesi} = 3\frac{1}{3}\right)$ sarà $=75+\frac{3\frac{1}{3}}{5}.36+18-\frac{3\frac{1}{3}}{5}.y=75+\frac{2}{3}.36+18-\frac{2}{3}.9=75+24+18-6=111$;

la parte del signore $= 75 + \frac{2}{3} . 9 + 72 - \frac{2}{3} . 36 = 75 + 6 + 72 -$ $24 = 129$: e ciò perchè nè il pastore acquista il diritto di $\frac{1}{2}$ sopra gli animali di capitale del signore, che in fine del tempo t; e similmente il signore sopra $\frac{1}{2}$ del capitale del pastore. Il Bassi suppone anch'egli $t < t$.

Problema 2.° Proponendo il caso di $t' > t$ in ipotesi di $a = 0$, vuole F. Luca, e concordemente vogliono il Tartaglia ed anche il Bassi, che pel tempo t, toccando al pastore $\frac{1}{4}$ M, pel tempo poi di più $t' - t$, si argomenti $t : t' - t :: \frac{1}{2} . \frac{1}{2}$ M : $\frac{t' - t}{t} . \frac{1}{4}$ M, e che in tutto diasi al pastore $\frac{1}{2}$ M $+ \frac{t' - t}{t} . \frac{1}{2} . \frac{1}{2}$ M. Ma suppone che gli animali siano cresciuti ad M in fine del t'; e come dunque supporsi M anche in fine del tempo minore t; si che toccasse al signore $\frac{1}{2}$ M, e quindi per la cura del pastore pel tempo $t' - t$, la ricompensa $\frac{t' - t}{t} . \frac{1}{2} . \frac{1}{2}$ M ?

F. Luca sul problema che io chiamo 2.° dà la regola nuda; ma Tartaglia ragiona così: « Egli è cosa manifesta che se in capo dei tre » anni e mezzo si havesse il pastore trovato con sè dette pecore 320 » = M (suppone $A = 100$, $t = 3 \frac{1}{2}$, $t' = 5$, $320 = M$), e che havessino diviso il sozzido, al sozzidale gli ne saria toccate pecore 160, » e altrettante al padron principale, e se per caso il padron principale immediatamente ritornasse a dare al medesimo sozzidale le » medesime pecore 160 (a lui toccate) in sozzido secondo l'ordine » delle prime (di tre anni e mezzo), e se per sorte costui gli havesse » tenute li detti anni 3 e $\frac{1}{2}$, et che non fussino agumentate tai pecore nulla senza dubbio al sozzidale gli toccaria pecore 80 (di » quelle 160) e tanto haveria avanzato il detto sozzidale nelli detti » anni 3 e $\frac{1}{2}$; ma per non haverle tenute salvo che un anno e mezzo » devi per la regola del 3. Se anni 3 e $\frac{1}{2}$ mi danno di utile pecore » 80, che mi darà anni 1 e $\frac{1}{2}$, opera che ti daranno pecore $34 \frac{2}{7}$, » e tanto di quelle 160 pecore ne toccarà al sozzidale il resto alli » eredi del principale (la cui morte suppone cagione della protrazione) che saranno $125 \frac{5}{7}$, e il sozzidale ne venira a tirar in tutto » pecore $194 \frac{2}{7}$ ». Similmente ragiona il Bassi.

Problema 3.° Un altro problema è questo: Avendo un signore dato ad un pastore numero A di animali pel tempo t, con patto di partire in fine di esso tempo per $\frac{1}{2}$, dopo il corso di un certo tempo $t' < t$, lo stesso signore al medesimo pastore dà altro numero di animali B>A collo stesso patto; e cercasi dopo quanto tempo x si potrà fare la divisione, sicchè riesca a tenore del patto, e non abbia nè l'uno, nè l'altro discapito. F. Luca insegna a prendere $x = \frac{A(t - t') + Bt}{A + B}$, dicendo aversi ad operare come nelle alligazioni de'metalli; ed a considerare $A(t - t')Bt$ come fonditure degli animali A, B nei tempi $t - t'$, t, ossia $A(t - t')$ come un metallo composto non più della lega t, ma della lega $t - t'$. Essendo x il tempo dalla seconda consegna, sarà $t' + x$ il tempo intero, ossia dalla consegna prima. Tartaglia segue F. Luca, ed il Bassi, accennando esservi altri modi di operare, preferisce l'esposto. Non esprime veruno di essi autori la condizione che sia $B > A$, ma è indispensabile. Io considero che $t' + x$ deve essere $> t$, e $< t' + t$; e che supposto M l'ammontare degli animali A in fine del tempo $t' + x$, e P l'ammontare degli animali B nel tempo x, deve, giusta il calcolo di F. Luca, $\frac{t'+x}{t} \cdot \frac{1}{2} M + \frac{x}{t} \cdot \frac{1}{2} P$ essere $= \frac{1}{2}(M + P)$; onde percependo il pastore in fine del tempo $t' + x \frac{1}{2}(M + P)$, non abbia nè indebito guadagno, nè discapito. L'ammontare degli animali pare che dovrebbe essere computato come l'ammontare di un capitale ad interesse composto: in tale ipotesi, posto che gli animali crescessero d' anno in anno da p a g, l'ammontare M di A sarebbe $= \left(\frac{g}{p}\right)^{t'+x}.A$, e l'ammontare N di B sarebbe $= \left(\frac{g}{p}\right)^{x}.B$: dunque l'equazione diverrebbe $\frac{t'+x}{t} \cdot \frac{1}{2} A\left(\frac{g}{p}\right)^{t'+x} + \frac{x}{t} \cdot \frac{1}{2} B.\left(\frac{g}{p}\right)^{x} = \left(A \left(\frac{g}{p}\right)^{t'+x} + B\left(\frac{g}{p}\right)^{x}\right)$, che si riduce a $\left(\frac{t'+x}{t} - 1\right).A.\left(\frac{g}{p}\right)^{t'}.\left(\frac{g}{p}\right)^{x} = \left(1 - \frac{x}{t}\right).B\left(\frac{g}{p}\right)^{x}$; e dividendo tutto per $\left(\frac{g}{p}\right)^{x}$, e tutto moltiplicando per $t(t' + x - t).A\left(\frac{g}{p}\right)^{t'} = (t - x).B$, e quindi si cava $x = \frac{tB + (t - t').A\left(\frac{g}{p}\right)^{t'}}{B + A\left(\frac{g}{p}\right)^{t'}}$. Il termine $A\left(\frac{g}{p}\right)^{t'}$ mostra ciò che è divenuto il capitale di animali A nel tempo t'; per far coincidere la formula mia con quella di F. Luca, bisognerebbe supporre $\left(\frac{g}{p}\right)^{t'} = 1$, e ciò dimostra il difetto di quella formula. Essa si ricava supponendo che l'accrescimento spetti, giusta il dire del Bassi, ugualmente al padrone ed al pastore; ma che la parte del capitale a questo dovuta, sia in proporzione del tempo per cui ne ha avuta cura: così qualunque sia il tempo $t' + x$, il pastore dell'accrescimento avrà sempre $\frac{1}{2}$ ugualmente che il padrone, onde la considerazione dell'accrescimento non entrerà nella determinazione di x, ma solamente la considerazione dei capitali A, B, e dei tempi $t' + x$, x, pei quali il pastore ne ha avuta cura; e l'equazione di scioglimento sarà $\frac{t'+x}{t}$. $\frac{1}{2}\mathrm{A} + \frac{x}{t} \cdot \frac{1}{2}\mathrm{B} = \frac{1}{2}(\mathrm{A} + \mathrm{B})$; onde cavasi $(t' + x)\mathrm{A} + x\mathrm{B} = t(\mathrm{A} + \mathrm{B})$, $x(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = t\mathrm{B} + (t - t')\mathrm{A}$: conseguentemente $x = \frac{t\mathrm{B} + (t - t')\mathrm{A}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$. Tale è il supposto del Bassi e dello Zucchetta; dunque essi sono coerenti, senza però che abbiano eglino riflettuto a tale coerenza; ma non F. Luca ed il Tartaglia.

Riguardo al problema primo, che avendo il padrone consegnato il capitale A pel tempo t con patto di ripartire in fine di esso per $\frac{1}{2}$, il riparto poi si faccia in vece dopo il tempo t', mi pare che dovrebbesi computare così: $\mathrm{A}\left(\frac{g}{p}\right)^{t'}$ sia l'ammontare di A dopo il tempo t', sarà l'ammontare di esso A dopo il tempo $t = \mathrm{A}\left(\frac{g}{p}\right)^{t}$; e computando il premio della cura del pastore in ragione composta della quantità degli animali e del tempo, si dovrà dire: se la cura di $\mathrm{A}\left(\frac{g}{p}\right)^{t}$ nel tempo t porta pel pastore la divisione per $\frac{1}{2}$, che porterà $\mathrm{A}\left(\frac{g}{p}\right)^{t'}$ nel tempo t', cioè $t\mathrm{A}\left(\frac{g}{p}\right)^{t} : \frac{1}{2} :: t'\mathrm{A}\left(\frac{g}{p}\right)^{t'} : \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{t\left(\frac{g}{p}\right)^{t-t'}} = \frac{t}{2t'} \cdot \left(\frac{p}{g}\right)^{t-t'} = \frac{t'}{2t}\left(\frac{g}{p}\right)^{-t+t'}$; onde di $\mathrm{A}\left(\frac{g}{p}\right)^{t'}$ gli toccherebbe $\frac{t'}{2t}\mathrm{A}\left(\frac{g}{p}\right)^{2t'-t}$.

Più accuratamente, o nell'unità prima di tempo, nel primo anno od altro tratto di tempo la cura del pastore, essendo $\mathrm{A}.\frac{g}{p}$, nella seconda unità di tempo la cura sarà $\mathrm{A}\left(\frac{g}{p}\right)^{2}$, nella terza sarà $\mathrm{A}\left(\frac{g}{p}\right)^{3}$, nella n^{sima} unità di tempo sarà $\mathrm{A}\left(\frac{g}{p}\right)^{n}$; e così se $n = t$ sarà la somma delle cure del pastore $= \mathrm{A}.\frac{g}{p} + a\left(\frac{g}{p}\right)^{2} + \mathrm{A}\left(\frac{g}{p}\right)^{3} \ldots + \mathrm{A}\left(\frac{g}{p}\right)^{t} =$

$\frac{A - \left(\frac{g}{p}\right)^{t'} - A\frac{g}{p}}{\frac{g}{p} - 1}$, e nel tempo t' sarà la somma delle cure del pastore $= \frac{A\left(\frac{g}{p}\right)^{t'+1} - A\frac{g}{p}}{\frac{g}{p} - 1}$. Quindi concedendogli la parte dell'ammontar tutto in ragione delle cure, si argomenterà fatto per più comodo $\frac{g}{p} = 1 + h \frac{(1+h)^{t+1}A - (1+h)A}{h} : \frac{1}{2} :: \frac{(1+h)^{t'+1}A - (1+h)A}{h} : \frac{1}{2}$. $\frac{(1+h)^{t'+1} - (1+h)}{(1+h)^{t+1} - (1+h)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+h)^{t'} - 1}{(1+h)t - 1}$. Egli è però da riflettere che, supposto nel primo anno l'accrescimento da A ad $A(1+h)$, siccome l'aggiunta hA non si fa tutta in un istante sul principiare dell'anno, ma a poco a poco, parte avanti la metà dell'anno, parte dopo; così la cura del pastore non si può rigorosamente valutare $(1+h)A$; ma ragguagliando la cura per gli animali nati avanti la metà dell'anno, e di quelli nati dopo, sarà ragionevole valutar essa cura $A + \frac{1}{2}hA = (1 + \frac{1}{2}h)A$; ed essendo al principio del secondo anno gli animali $(1+h)A$; e montandone nel corso del secondo anno il numero a $(1+h)^2A$, e per ciò essendo l'aumento $(1+h)^2A - (1+h)A = (1+h)A = (1+h)A(1+h-1) = h(1+h)A$, e la cura del pastore ragguagliata del pastore riguardo a tale aumento $\frac{1}{2}h(1+h)A$, la quale aggiunta alla cura di animali $(1+h)A$ esistenti al principio del secondo anno, darà per cura intera del secondo anno $(1+h)A + \frac{1}{2}h(1+h)A = (1 + \frac{1}{2}h)A(1+h)$. E similmente essendo al principio del terzo anno il numero degli animali $(1+h)^2A$, e dovendo nel fine trovarsi montato a $(1+h)^3A$, ed essendo per ciò l'aumento $(1+h)^3A - (1+h)A = (1+h)^2A.(1+h-1) = h(1+h)^2A$, e conseguentemente la cura ragguagliata ad esso relativa $\frac{1}{2}h(1+h)^2A$, sarà la cura intera dell'anno terzo $(1+h)^2A + \frac{1}{2}h(1+h)^2A = (1 + \frac{1}{2}h)A(1+h)^2$. Ed in genere vedesi che essendo al principio dell'anno t^{imo} il numero degli animali $(1+h)^{t-1}A$, e dovendo nel fine trovarsi salito ad $(1+h)^tA$, ed essendo quindi l'aumento $(1+h)^tA - (1+h)^{t-1}A = (1+h)^{t-1}A(1+h-1) = h(1+h)^{t-1}A$, e la rispettiva ragguagliata cura $\frac{1}{2}h(1+h)^{t-1}A$, verrà ad essere l'intera cura nell'anno $t^{\text{imo}} = (1+h)^{t-1}A + \frac{1}{2}h(1+h)^{t-1}A = (1 + \frac{1}{2}h)A(1+h)^{t-1}$; e di questo modo essendo nel fine degli anni i numeri degli animali: al fine del primo anno $(1+h)A$; del secondo $(1+h)^2A$; del terzo $(1+h)^3A$; del quarto $(1+h)^4A$ .... ; del t^{imo} $(1+h)^tA$: saranno le cure nel corso del primo $(1 + \frac{1}{2}h)A$; del secondo $(1 + \frac{1}{2}h)A(1+h)$; del terzo

$(1 + \frac{1}{2} h)A(1 + h)^2$; del quarto $(1 + \frac{1}{2} h)A(1 + h)^3 \ldots$; del t^{esimo} $(1 + \frac{1}{2} h)A(1 + h)^{t-1}$: e la somma delle cure sarà eguale alla somma di questa progressione $= (1 + \frac{1}{2} h)A\left(1 + (1 + h) + (1+h)^2 + (1+h)^3 + (1 + h)^4 \ldots + (1 + h)^{t-1}\right) = (1 + \frac{1}{2} h)A.\frac{(1 + h)^t - 1}{h}$. E per un altro numero di anni t' sarà la somma delle cure $=(1+\frac{1}{2} h)A.\ \frac{(1+h)^{t'}-1}{h}$:

e quindi argomentando $(1+\frac{1}{2} h)A.\frac{(1 + h)^t - 1}{h} : \frac{1}{2} :: (1+\frac{1}{2}h)A\frac{(1+h)^{t'}-1}{h} : \frac{(1 + h)^{t'} - 1}{(1 + h)^t - 1} \cdot \frac{1}{2}$. (Vale ciò anche pel problema 2.° posto cioè $t'>t$) . L'esito è lo stesso; ma questo è più ragionato. Usando dei medesimi principii nel terzo problema, l'equazione di esso sarà $\frac{1}{2} \cdot \frac{(1 + h)^{t'+x}}{(1+h)^t-1} \cdot A$

$(1 + h)^{t'+x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 + h)^x - 1}{(1 + h)^t - 1} \cdot B(1 + h)^x = \frac{1}{2} \cdot \left(A (1 + h)^{t'+x} + B (1 + h)^x\right)\left(\frac{(1 + h)^{t'+x} - 1}{(1 + h)^t - 1} - 1\right) A(1 + h)^{t'} = \left(1 - \frac{(1 - h)^x - 1}{(1 - h)^t - 1}\right)B \left((1 + h)^{t'+x} - (1 + h)^t\right) A (1 + h)^{t'} = \left((1 + h)^t - (1 + h)^x\right) B(1+h)^{xt'} (1+h)^x$

$A-(1 + h)^{t+t'} A=(1+h)^t B-(1+ h)^x B\ (1 + h)^x = \frac{(1+h) B+(1+h)^{t+t'}A}{(1 + h)^{-t'} A + B}$

$= \frac{(1+h)^t(B+(1+h)^{t'}A)}{B + (1 + h)^{-t'} A}$

$x = \frac{t\text{Log.}(1+h) + \text{Log.}(B+(1+h)^{t'}A) - \text{Log.}(B + (1+h)^{-t'} A)}{\text{Log.}(1 + h)}$. Di fatti posto $t'=0$ ne verrà $x = \frac{t\text{Log.}(1 +h)}{\text{Log.}(1+h)} = t$. Per applicare agli animali il calcolo dell'interesse composto, bisogna supporre nei primi animali A, animali di ogni età anche di freschissima nascita; altrimenti al principio dell'anno susseguente, e così degli altri successivamente, la condizione sarebbe diversa, e non reggerebbe la proporzione che, se nel corso del primo anno A diventa $(1 + h)A$, nel corso del secondo $(1 + h)A$ diventi $(1 + h)^2A$, e così via via.

F. Luca si propone anche i due problemi seguenti :

Tre hanno preso un pascolo pel loro bestiame che è loro costato al tempo delle erbe fiorini 460 ; e il primo vi tenne pecore 4800, giorni 40; il secondo pecore 6000, giorni 25 ; il terzo pecore 7640, giorni 28. Fra tutti segano il detto pascolo, ed hanno di spesa fiorini 100 : che tocca a ciascuno per lo *ammontar* di esso ? e quanto a ciascuno di spesa ? Somma di tutte le pecore 18440 : 460 :: 4800: 119 $\frac{13640}{18440}$ :: 6000 : 199 $\frac{12440}{18440}$ :: 7640 : 190 $\frac{10800}{18440}$, e ciò pel riparto delli fiorini 460. Pel riparto poi della spesa di fiorini 100, si dica $4800 \times 40 + 6000 \times 25 + 7640 \times 28 = 555920 :: 100 :: 192000 : 34 \frac{29872}{55592} :: 150000 : 26 \frac{54608}{55592} :: 213920 : 38 \frac{26704}{55592}$. Io non capisco perchè nel riparto dei fiorini 460 non si debba computare il tempo del pascolo, ma solamente nel riparto della spesa 100.

« Uno dette in socido .100. pecore in .3. anni alle tenutte .10.
» mesi. E anco gliene dette altre tante a q̃llo termine alle tenute .8.
» mesi. E anco glie nede .100. a q̃llo termine e dalle tenute .7. mesi.
» Or uoglio guastare tutte q̃ste .3. e farne .1ª. Adimãdo q̃ti. m̃. deue
» tenere q̃ste .300. pecore cõciosia cosa ciascuna duri per .3. anni »; o sia mesi 36 ? $36 - 10 = 26$, $36 - 8 = 28$, $36 - 7 = 29$; $26 + 28 + 29 = 83$, $\frac{83}{3} = 27 \frac{2}{3} = x$. Tartaglia aggiugne quest'altro problema.

Uno dà in *socido* pecore 18 con patto che il pastore gli ne metta 6, e in capo di 4 anni debbano partir per $\frac{1}{2}$: ritornando il pastore a casa, trova che il lupo gli ha mangiato due delle sei pecore, così che non mette che 4 pecore: in capo di 3 anni si trovano pecore 66, e d'accordo vogliono dividere: come far devesi la divisione? Mettendo il cittadino 18, il pastore 6, con patto di partire al fine di anni 4 per $\frac{1}{2}$, supposto non vi fosse accrescimento, toccherebbero al pastore pecore $12 = 6 + 6$, cioè oltre le sue 6 pecore gliene toccherebbero 6 del cittadino $= \frac{18}{3}$; dunque il cittadino gli cederebbe $\frac{1}{3}$ delle sue pecore per la cura, e così deve essere in ogni caso al fin de' 4 anni; in minor numero di anni gli cederà a ratta, e però in fine di anni $3 \frac{3}{4} . 6 = 4 \frac{1}{2}$; dunque avrà il pastore in fine di anni 3, $4 + 4 \frac{1}{2} = 8 \frac{1}{2}$; e il cittadino $22 - 8 \frac{1}{2} = 13 \frac{1}{2}$. Ma ciò supponendo le pecore rimaste al primo numero 22 senza alcun aumento. Essendo cresciute a 66 dicasi $22 : 66 :: 8 \frac{1}{2} : 25 \frac{1}{2}$ parte dovuta al pastore; e $:: 13 \frac{1}{2} : 40 \frac{1}{2}$ parte dovuta al cittadino. Accusa Tartaglia Giovanni Sfortunati da Siena. che *per una certa sua regola fuora di ragione* attribuisce al villano pecore $22 \frac{1}{2}$, al cittadino $43 \frac{1}{2}$; ed aggiugne Tartaglia essere questo problema simile a quello da lui posto sotto il numero 87 delle compagnie. Io ragiono così: Sia M il totale delle pecore dopo anni 4. Se il pastore avesse posto 6, ponendo il cittadino 18, le parti loro spettanti di M sarebbero del cittadino $\frac{3}{4}$M, del pastore $\frac{1}{4}$M: ma pel patto il cittadino concede al pastore $\frac{1}{2}$M; dunque gli concede per la cura $\frac{1}{4}$M dei suoi $\frac{3}{4}$M, cioè $\frac{1}{3}$ di sua parte. Ponendo il pastore non più 6 ma 4, in vece di toccargli per sua posta $\frac{6}{18 + 6} =$

$\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$ gli toccherà $\frac{4}{18+4}=\frac{4}{22}=\frac{2}{11}$; ed al cittadino per sua posta $\frac{18}{22}=\frac{9}{11}$; ma $\frac{1}{3}$ di ciò vale a dire $\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{11}=\frac{3}{11}$ sarà da lui per la cura dovuta al pastore; e così al pastore sarà dovuto $\frac{2}{11}+\frac{3}{11}=\frac{5}{11}$; ciò però in fine dei 4 anni. Ristrignendosi il tempo dai 4 ai 3 anni, starà salda la porzione $\frac{2}{11}$ per ragione della posta; ma ristrignerassi la porzione $\frac{3}{11}$ per la cura. Supponiamo che la cura di 4 anni, alla cura di 3 anni sia :: 4 : 3, ristrignerassi la porzione $\frac{3}{11}$ a $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{11}=\frac{9}{44}=\frac{9}{4\,.\,11}$, e così sarà tutto il dovuto al pastore $\frac{2}{11}+\frac{9}{4\,.\,11}=\frac{17}{44}$: onde essendo $M=66$, toccherà al pastore $\frac{17}{4\,.\,11}\cdot 66=\frac{17}{4}\cdot 6=\frac{17}{2}\cdot 3=\frac{51}{2}=25\,\frac{1}{2}$. Ma volendo più giustamente computare le cure, la porzione $\frac{3}{11}$ si restrignerà a $\frac{3}{11}\cdot\frac{(1+h)^3-1}{(1+h)^4-1}$.

Esaminiamo il problema secondo, quando cioè $t'>t$. Essendo in fine del tempo t' il numero degli animali $(1+h)^{t'}$A sarà stato il numero in fine degli anni $t(1+h)^t$A, e le metà toccanti al padrone ed al pastore $\frac{1}{2}(1+h)^t$ A, $\frac{1}{2}(1+h)^t$ A; l'aumento dal tempo t al tempo t', cioè nel tempo $t'-t$ risulta $(1+h)^{t'}$A—$(1-h)^t$ A, del quale aumento per ragione di ugual parte di capitale, tocca al padrone ed al pastore ugual parte, cioè la metà a ciascuno; dunque avrà il pastore $\frac{1}{2}(1+h)^t$ A $+\frac{1}{2}$ ($(1+h)^{t'}$ A $-$ $(1+h)^t$ A)$=\frac{1}{2}(1+h)^{t'}$A, ed altrettanto il padrone; ma questi dovrebbe cedere al pastore per la cura, se $t'-t=t$, $\frac{1}{2}$ del suo, cioè $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(1+h)^{t'}$ A; dunque gli cederà $\frac{(1+h)^{t'-t}-1}{(1+h)^t-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(1+h)^{t'}$ A; e per ciò avrà il pastore $\frac{1}{2}(1+h)^{t'}$ A $\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+h)^{t'-t}-1}{(1+h)^t-1}\right)$.

Questa soluzione ricaderebbe in quella di F. Luca, Tartaglia, Bassi ecc., computando le cure in proporzione di tempi, cioè nel tempo $t'-t$, calcolandola $\frac{t'-t}{t}-\frac{1}{2}$. Sebbene dunque la soluzione paia tanto spropositata, non la è realmente quanto pare. Fallano però Tartaglia ed il Bassi nel ragionare.

De apensionibus domorum.

Uno prende una casa a pensione per lire 20 l'anno, e dà al padrone anticipatamente lire 48, contando l'interesse di denari 2 per lira al mese: quanto tempo starà costui in casa? Denari 2 d'interesse per lira al mese importano all'anno $24 =$ soldi $2 = \frac{1}{10}$ di lira; dunque l'interesse delle lire 48 sarà in fin dell'anno $\frac{48}{10} = 4\,\frac{4}{5}$; dunque $48 + 4\,\frac{4}{5} - 20 = 32\,\frac{4}{5}$ sarà il residuo di credito del pigionale in fin del primo anno. L'interesse di $32\,\frac{4}{5}$ nel secondo anno sarà $\frac{32\,\frac{4}{5}}{10} = 3\,\frac{7}{25}$; e per ciò $32\,\frac{4}{5} + 3\,\frac{7}{25} - 20 = 16\,\frac{2}{25}$ sarà il residuo del pigionale nel fine del secondo anno. F. Luca prosegue così: l'interesse di $16\,\frac{2}{25}$ in un anno è $\frac{16\,\frac{2}{25}}{20} = 1\,\frac{152}{250} = 1\,\frac{76}{125}$ che con $16\,\frac{2}{25}$ formano $17\,\frac{86}{125}$: si argomenti $20 : 12$ mesi $:: 17\,\frac{80}{125} : \frac{6}{10}\,.\,17\,\frac{86}{125} =$ mesi $10\,\frac{766}{1250} =$ mesi 10, giorni $\frac{3\times766}{125} =$ mesi 10, giorni $\frac{2298}{125} =$ mesi 10, giorni $18\,\frac{48}{125}$. F. Luca instituendo questo calcolo pone giorni $29\,\frac{141}{150}$, ma falla. Ma è anche fallato il metodo del calcolo: e perchè si dee computare a favore del pigionale tutto l'interesse annuo di $16\,\frac{2}{25}$? Si chiami per tanto x il numero di mesi del terzo anno, e sarà la pigione dovuta $\frac{x}{12}.\,20$, e l'interesse di $16\,\frac{2}{25} = \frac{x}{12}\,.\,\frac{1}{10}\,.\,16\,\frac{2}{25} = \frac{x}{12}\,.\,1\,\frac{76}{125}$, e dovrà essere $16\,\frac{2}{25} + \frac{x}{12}\,.\,1\,\frac{76}{125} = \frac{x}{12}\,.\,20$; onde $16\,\frac{2}{25} = \frac{x}{12}\left(20 - 1\,\frac{76}{125}\right) = \frac{x}{12} : 18\,\frac{49}{125}$, e quindi $192\,\frac{24}{25} = x.\,18\,\frac{49}{125}$; $192 \times 125 + 24 \times 5 = x.(18 \times 125 + 49)\,x = \frac{24120}{2299} = 10\,\frac{1130}{2299}$ mesi $= 10$ mesi e giorni $\frac{33900}{2299}$, cioè $14\,\frac{1714}{2299}$. Erra F. Luca similmente in altro problema simile.

Uno dà una casa a pigione per lire 10 l'anno, e la pigiona per anni 5; ma chiede che gli sia contato subito il danaro, contando l'interesse di denari 2 per lira al mese: qual somma il pigionale gli deve? L'interesse di denari 2 per lira al mese importa l'annuo di denari 24 = soldi 2 = $\frac{1}{10}$ di lira, e in anni 5 $\frac{5}{10}$ = $\frac{1}{2}$ di lira, così che la lira viene ad ascendere a 1 $\frac{1}{2}$; dunque 1 $\frac{1}{2}$: 1 :: 50 : 33 $\frac{1}{3}$.

Uno dando a pigione una casa per lire 24 l'anno, vuole due affitti anticipati, scontando l'interesse a ragione del 20 per 100 all'anno *a far capo d'anno*: qual sarà la somma di essi due anticipati affitti? L'interesse del 20 per 100 porta l'accrescimento da 100 a 120, vale a dire da 5 a 6; dunque dicasi 6 : 5 :: 24 : 20, e questo sarà l' importo dell'affitto anticipato del primo anno. Pel secondo dicasi 6:5:: 20 : $\frac{100}{6}$ = 16 $\frac{2}{3}$; dunque 20 + 16 $\frac{2}{3}$ = 36 $\frac{2}{3}$ sarà la somma dei due affitti anticipati.

Dando uno a pigione una casa, esige subito ducati A a ragione di tanto per 100 l'anno a capo d'anno: il pigionale non paga l'affitto, ed il padrone si accontenta che vada ad aumento allo stesso tanto per 100 all'anno a capo di anno: dopo 5 anni li conti del padrone e del pigionale si trovano ragguagliati: qual fu l' affitto della casa? Esprima in genere h il tanto per 100; per esempio se sia il 12 per 100, esprima h il $\frac{12}{100}$, sarà il montante della somma A in fine del primo anno $A(1+h)$, e sottratto l'affitto x, sarà il credito del pigionale in fine del primo anno $A(1+h)-x$; in fine del secondo $A(1+h)^2-(1+h)x-x$; in fine del terzo $A(1+h)^3-(1+h)^2x-(1+h)x-x$; in fine del quarto $A(1+h)^4-(1+h)^3x-(1+h)^2x-(1+h)x-x$; in fine del quinto $A(1+h)^5-(1+h)^4x-(1+h)^3x-(1+h)^2x-(1+h)x-x$; e deve questo credito essere $=0$; dunque $A(1+h)^5=x\left(1+1+h+(1+h)^2+(1+h)^3+(1+h)^4\right)$ $=x.\frac{(1+h)^5-1}{h}$ $x=\frac{hA(1+h)^5}{(1+h)^5-1}$. F. Luca tratta il caso di $h=\frac{12}{100}$; e supponendo A = 300 ducati, e trova eseguendo mano mano le operazioni de' numeri $x=83\ \frac{278777}{2481581}$ per logaritmi, trovasi $x=83\frac{95}{635}$.

De barattis siue cōmutationibus.

Tre specie: *semplice*; *composto*, quando parte si fa in contanti; *a tempo*, quando il pagamento non si fa di presente. Correva il proverbio di chiamare *imbratti* li baratti, perchè spesso una delle parti resta dall'altra più astuta imbrattata. Quando il sensaro mostrava saggio di alcuna merce, meno che buona, se gli domandava se le dotava e quanto? Alludendo ai matrimoni che « al piu de le volte e » male p̧ auaritia oggi si faño: e si cōmo le belle e virtuose doñe » cōmēdote si leuano di casa paterna e ale brutte e disoneste susa » p̧ acōpagnarle magior dote darli: che altramēte con fatiga si le- » uano di casa ... ne p̧ bo ne p̧ vacca nō toglier donna matta. »

Porrò io qui dei 48 quesiti di F. Luca i principali in linguaggio letterale colle critiche di Tartaglia.

Problema primo ([1]) La merce M vale a contanti P, ma in baratto ne vuole il mercante $P+A$. La merce m vale in contanti p: a qual prezzo deve il secondo mercante porla in baratto per non aver discapito? ([2]) e per quantità Q della merce M, qual deve essere la quantità g della seconda m? $P:P+A::p:\frac{p}{P}(P+A)$, che porrò $=p+a$. $Q(P+A)=g\ (p+a)$; onde $g=\frac{Q(P+A)}{p+a}$. Dalla proporzione $P+A:P::p+a:p$, ne viene $P+A-P:P::p+a-p:p$, cioè $A:P::a:p$; onde noti P, $P+A$, a si ricaverà p, che è il secondo quesito di F. Luca, ed anche il terzo.

Uno in baratto ([3]) alzi la merce M da P a $P+A$; l'altro sua merce m da p ad h: si cerca chi ebbe vantaggio, e quanto per 100? Vedi se $h>$ ovvero $<\frac{p}{P}(P+A)$ se $>$ ebbe vantaggio il mercante della merce m, se $<$ lo ebbe il primo mercante della merce M. Per esempio se $P=7$, $P+A=8$, $p=20$, $h=24$ si trova $\frac{20}{7}.8=\frac{160}{7}=22\frac{6}{7}$; onde $h=24>22\frac{6}{7}$, ed il vantaggio è pel secondo mercante; la quantità del vantaggio è $24-22\ \frac{6}{7}=1\ \frac{1}{7}$ sopra $22\ \frac{6}{7}$. Per sapere di quanto venga ad essere al 100, argomenta $22\frac{6}{7}:1\frac{1}{7}::100:5$. F. Luca erra in trovare $1\ \frac{1}{3}$ in luogo di 5, e questa è la prima accusa di Tartaglia. La seconda è perchè F. Luca distingue se voglia sapersi il quanto di vantaggio per 100 del baratto, come si è fatto, oppure del capitale; nel qual caso la proporzione si deve instituire così: $20:1\frac{1}{7}::100:5\frac{5}{7}$. Dice F. Luca essersi su di ciò trovato in grandi controversie *ma pur finaliter si cōclude p̧ li saputi che ditto guada.° sintēde d'l capit.^e* Tartaglia asserisce che *bisogna fondo*, cioè rispetto al baratto. Osserva che volendo calcolare il guada*darse sul baratto, e che la soluzione non può esser salvo che a un mo-*

([1]) Ques. di F. Luca 1°; di Tartaglia 3°, 4°, 5°.

([2]) Tutto ciò che si legge nella presente pagina (lin. 11—13) dalle parole « e per quantità » fino alle parole « che porrò $=p+a$ » forma le due linee decimottava e decimanona della carta 168, *recto*, della cartella quinta dei manoscritti del Padre Cossali (Vedi sopra, pag. 133, lin. 21—27). Presso queste due linee della medesima carta 168, *recto*, sul margine laterale interno si legge « (in luogo di A si porrà X) ».

([3]) Ques. di F. Luca 4°; di Tartaglia 1°.

gno, rapporto al capitale si dee fare così : $8 : 7 :: 24 : 21$: dunque guadagno $21 - 20 = 1$ sopra il 20, e per ciò $20 : 1 :: 100 : 5$; e torna riguardo al capitale il tanto di guadagno per 100 che si è trovato sopra il baratto.

Esempio. Sia M canna di panno, m cento libre di lana : essendo il prezzo di cento libbre lana = lire 24, importeranno 10 centinaia libbre lana 240 lire, ed altrettanto canne 30 panno a lire 8 per canna. Ora in contanti 10 centinaia libbre lana importano $10 \times 20 = 200$, e le 30 canne di panno a lire 7 importano $7 \times 30 = 210$; dunque il mercante della lana riceve 210 per 200; dunque 10 di guadagno sopra 200, 5 sopra 100.

Osserva ancora Tartaglia non potersi dal guadagnare che fa (1) quel della lana il 5 per 100, dedurre che quello del panno perde 5 per 100: quello della lana di 100 fa 105, quello del panno di 105 fa 100: onde bisogna dire, se di 105 fa 100, di 100 che fa ? oppure 105 ha perdita 5, 100 che perdita ha? Ha $\frac{500}{105} = 4\frac{16}{21}$.

Problema secondo (2) Il mercante della merce M vuole la parte $\frac{e}{n}$ del prezzo $P + A$ in contanti, o il secondo mercante gliela esibisce: qual deve essere il prezzo $p + x$ della merce m, onde il mercante di essa non abbia nel baratto detrimento ? Si faccia $P - \frac{e}{n}(P + A)$ $: P + A - \frac{e}{n}(P + A) :: p : p + x = \frac{p\left(P + A - \frac{e}{n}(P + A)\right)}{P - \frac{e}{n}(P + A)} = p$ $\frac{P - \frac{e}{n}(P + A)}{P - \frac{e}{n}(P + A)} + \frac{pA}{P - \frac{e}{n}(P + A)} = p + \frac{pA}{P - \frac{e}{n}(P + A)}$. (3) F. Luca non dà queste riduzioni, nè la ragione della proporzione, e Tartaglia nemmeno. Ma non è difficile a dimostrarsi (4). Generalmente nei baratti dalle stesse quantità da una parte e dall'altra vi deve essere uguaglianza di baratto e di realtà. Per questo generale principio dimostro primieramente la soluzione del Problema primo.

(1) Tutto ciò che si legge nella presente pagina (lin. 9—12) dalle parole « dunque il mercante » fino alle parole « guadagnare che fa » forma le tre linee sesta, settima, ed ottava della carta 168, *verso*, della cartella quinta dei manoscritti del P. Cossali. Presso queste tre linee, sul margine laterale interno della medesima carta 168, *verso*, si legge: « Si aggiungano le formole di guadagno e perdita ».

(2) Ques. di F. Luca 5ª, 10, e 39, di Tartaglia 9.ª— 10ª.

(3) L'espressione $p + \frac{pA}{P - \frac{e}{n}(P + A)}$ (Vedi la linea ventesimaseconda di questa pagina 192) trovasi nella linea decimottava della carta 168, *verso*, della sopraccitata cartella quinta (Vedi le linee 29—32 della presente pagina 192). Presso a questa linea decimottava sul margine laterale interno del medesimo rovescio si legge: « in luogo di A si ponga X ».

(4) Tutto ciò che si legge nella presente pagina (lin. 23—27) dalle parole « nè la ragione » fino alla terza lettera della parola « primieramente » forma le quattro linee decimanona, ventesima, ventesimaprima e ventesimaseconda della sopraccitata carta 168, *verso*. Presso queste quattro linee sul margine laterale interno si legge: « Si vegga quad. V la quest. 14ª di Tartaglia e la 15ª e la 16ª. »

Dimostrazione del primo problema. La equazione di realtà o di contanti è $QP = gp$: la equazione di baratto $Q(P + A) = g\ (p + a)$: dalla prima equazione ne viene $Q : g :: p : P$; dalla seconda $Q : g :: p + a : P + A$; dunque $p : P :: p + a : P + A$, o invertendo $P : p :: P + A : p + a$.

Dimostrazione del secondo problema. Facciasi $a = x$ per rappresentare a ignoto: chiamisi inoltre y la quantità che dar deve il secondo mercante di sua merce m: sarà l'equazione di contanti $\frac{e}{n}(P + A)Q + yp = PQ$, e l'equazione di baratto $\frac{e}{n}(P + A)Q + y(p + x) = Q(P + A)$: sottraendo da questa la equazione prima, resta $yx = QA$; onde $y = \frac{QA}{x}$: sostituendo il qual valore nella prima, ne viene $\frac{e}{n}(P + A)Q + \frac{QA}{x}p = PQ$, e dividendo per Q, e moltiplicando per x, e poi liberando esso x, risulta $x = \frac{pA}{P - \frac{e}{n}(P + A)}$, e quindi $p + x$ sia $p + x = p + \frac{PA}{P - \frac{e}{n}(P + A)}$. È poi semplice l'espressione $y = \frac{QA}{x}$.

Esempio di F. Luca. M è panno, che a contanti vale lire 5 alla canna, ed a baratto b; m è lana, che a contanti vale 17 al cento: il mercante del panno vuole $\frac{1}{3}$ in contanti: a qual prezzo il mercante della lana deve alzarne il prezzo ? $6 - 5 = A = 1$, $p = 17 \frac{e}{n} = \frac{1}{3}$; onde $x = \frac{17.\ 1}{5 - \frac{1}{3}.\ 6}. = \frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}\ p + x = 17 + 5\ \frac{2}{3} = 22\ \frac{2}{3}$. Si prenda qualunque quantità di panno, esempigrazia canne 68, sarà il numero di centinaia di libre y da prendersi di lana $y = \frac{68.\ 1}{5\frac{2}{3}} = \frac{68}{5\frac{2}{3}} = 12$, cioè libbre di lana $= 1200$. Di fatti il prezzo di canne 68 di panno a lire 5 la canna $= 68 \times 6 = 408$, $\frac{1}{3}.\ 408 = 136$, 12 centinaia di lana a lire 17 il centinaio $= 12 \times 17 = 204$, $136 + 204 = 340 = 68 \times 5$, giusta la prima equazione; $136 + 12 \times 22\frac{2}{3} = 136 + 272 = 408 = 68 \times 6$, giusta l'equazione seconda.

Secondo F. Luca e Tartaglia, la quantità y verrebbe espressa per $\dfrac{Q(P + A) - \frac{e}{n} Q(P+A)}{p + a}$, e sostituito il valore di $p+a$ si avrebbe $y = \dfrac{\left(Q(P + A) - \frac{e}{n} Q\,(P + A)\right)\left(P - \frac{e}{n}(P+A)\right)}{p\left(P + A - \frac{e}{n}\,(P + A)\right)} = \dfrac{Q\left(P - \frac{e}{n}(P+A)\right)}{p}$

espressione molto più composta della mia. La coincidenza però apparisce, se osservisi essere $x = \dfrac{pA}{P - \frac{e}{n}\,(P + A)}$, conseguentemente $P - \frac{e}{n}(P+A) = \frac{pA}{x}$; e perciò $Q\,\dfrac{\left(P - \frac{e}{n}\,(P + A)\right)}{p} = \dfrac{Q - pA}{p.x} = \dfrac{QA}{x}$.
Se sia dato [1] e si cerchi p dalla proposizione $P + A - \frac{e}{n}\,(P + A) : P - \frac{e}{n}\,(P + A) :: p + A) :: p + a : p$ si ricaverà $P + A - \frac{e}{n}(P + A) - \left(P - \frac{e}{n}\,(P + A)\right) : P - \frac{e}{n}\,(P + A) :: p + a - p : A : P - \frac{e}{n}(P+A) :: a : p$; si può similmente cercar P.

Se il secondo mercante [2] alzò la merce sua m da p ad h cercasi se lo fece con vantaggio o discapito, e del quanto per 100? Qui ancora, come sul quesito quarto, Tartaglia accusa F. Luca. Trovato pel problema 2.° $p + a$, F. Luca a trovare il quanto di vantaggio, o danno per 100 di capitale, argomenta $p : \mp h \mp (p + a) :: 100 : \frac{100}{p}\left(\mp h \mp (p + a)\right)$; ed a trovare il quanto di vantaggio, o danno per 100 di baratto: argomenta $p + a : \mp h \mp (p + a) :: 100 : \frac{100}{p+a}\left(\mp h \mp (p + a)\right)$. Quindi posto $P = 5$, $P + A = b$, $p = 20$ $\frac{e}{n} = \frac{1}{3}$, ne viene $p + a$, $p + a = 26\frac{2}{3}$; alzato invece p a $30 = h$, si ha $30 - 26\frac{2}{3} = 3\frac{1}{3}$; onde il primo calcolo porge $\frac{100}{20}\,3\frac{1}{3} = 16\frac{2}{3}$; ed il secondo $\dfrac{100}{26\frac{2}{2}} . 3 . \frac{1}{3} = 12\frac{1}{2}$. Tartaglia argomenta primieramente così: $6 - \frac{1}{3}$

(1) Ques. di F. Luca 6° et 8° di Tartaglia 11°.
(2) Ques. di F. Luca 9° e 27°, del quale vedi Quad. V° pag. 1—2 del Tartaglia 18°, 26°, 27°, 28°.

$-6\ (=4) = 5 - \frac{1}{3} - 6 (=3) :: 30 : \frac{90}{4} = 22\frac{1}{2}$, riflette indi che $22\frac{1}{2} - 20 = 2\frac{1}{2}$ è il guadagno reale che il secondo mercante fa non sopra il 20 di realtà o il 30 di baratto soltanto, ma sopra questo 20, ed unitamente la somma di contanti che insieme per ogni 20 di baratto sborsa. Ora se il primo gli dia merce pel valore di baratto 45 sborserà egli appunto $15 = \frac{1}{3} - 45$, con dargli di sua merce in prezzo di baratto 30; dunque il $2\frac{1}{2}$ sarà il guadagno reale sopra il capitale reale $15 + 20 = 35$: argomentisi dunque $35 : 2\frac{1}{2} :: 100 : \frac{100}{35} - 2\frac{1}{2} = \frac{20}{7} . 2\frac{1}{2} = \frac{50}{7} = 7\frac{1}{7}$ valore ben diverso da quei di F. Luca. Tartaglia, a far vedere la bontà della sua soluzione, suppone M panno, e ne prende 75 canne; m lana fatta valere in baratto lire 30 al cento, in luogo di 20 a contanti. Or $75 \times 6 = 450$, $\frac{1}{3} . 450 = 150$, $450 - 150 = 300 = 30 \times 10$, cioè prezzo di 10 centinaia di libbre di lana. Si computi a contanti il dato, ed il ricevuto dal secondo mercante, $75 \times 5 = 375$ è ciò che il secondo mercante ha ricevuto; $150 + 20 \times 10 = 350$ è il da lui dato; $375 - 350 = 25$ il guadagno in lire 350: dunque $350 : 25 : 100 : \frac{2500}{350} = \frac{250}{35} = \frac{50}{7} = 7\frac{1}{7}$.

Riduciamo al generale la regola del Tartaglia, rappresentando 5 per P, 6 per P + A, 20 per p, 30 per $p + xh$, $\frac{1}{3}$ per $\frac{e}{n}$: si dovrà primieramente argomentare: $P + A - \frac{e}{n}(P + A) : P - \frac{e}{n}(P + A) :: h : \dfrac{h\left(P - \frac{e}{n}(P + A)\right)}{P + A - \frac{e}{n}(P + A)}$, e sottraendo p si avrà $\dfrac{h\left(P - \frac{e}{n}(P + A)\right)}{P + A - \frac{e}{n}(P + A)} - p$.
Indi suppongasi $h + \frac{e}{n}(P + A)z = (P + A)z$, cioè sia z una quantità tale della merce M, che pel prezzo di baratto $(P + A)z$, debba il secondo mercante della merce m dare al primo $\frac{e}{n}(P + A)\,z$ in contanti, ed una misura della merce m valente in baratto h, ma in contanti p; dunque sarà come il mercante secondo contato avesse $p + \frac{e}{n}(P + A)z$, e su questo denaro avrà il guadagno $\dfrac{h\left(P - \frac{e}{n}(P + A)\right)}{P + A - \frac{e}{n}(P + A)} - p$, e per ciò la proporzione richiesta sarà $p + \frac{e}{n}$

$(P+A)z : \dfrac{h\left(P-\frac{e}{n}(P+A)\right.}{P+A-\frac{e}{n}(P+A)} - p$ :: 100 al quarto termine che sarà il guadagno per 100. Ma donde tal regola, e come può dimostrarsi? Dalle due equazioni fondamentali da me di sopra poste . $\frac{e}{n}(P+A)Q + yp = PQ'$, $\frac{e}{n}(P+A)Q + y(p+x) = (P+A)Q$. essendovi pel secondo mercante reale guadagno si verificherà la seconda equazione di baratto, ma non la prima di contanti, ed in vece sarà ciò che dà in contanti, vale a dire $\frac{e}{n}(P+A)Q + yp < PQ$, che è ciò che in contanti riceve l'eccesso del ricevuto sopra il dato $PQ - \left(\frac{e}{n}(P+A)Q + yp\right)$ sarà il guadagno che dinoterò per g; onde $PQ - \left(\frac{e}{n}(P+A)Q + yp\right) = g$; ossia $\frac{e}{n}(P+A)Q + yp = PQ - g$. É evidente che rispetto al baratto con guadagno nelle due equazioni $\frac{e}{n}(P+A)Q + yp = PQ - g$, $\frac{e}{n}(P+A) + y(p+x) = (P+A)Q$ [1]. Siccome il $p+x$, così l'y è differente che nelle due equazioni di baratto giusto. Si è già rappresentato il $p+x$ relativo alle due equazioni di baratto con guadagno per h, si rappresenti l'y ad esse relativo per y', e saranno le due equazioni di baratto con guadagno: 1.ª, $\frac{e}{n}(P+A)Q + y'p = PQ - g$; 2.ª $\frac{e}{n}(P+A)Q + y'h = (P+A)Q$: sottraendo la prima dalla seconda, si ha $y' = \frac{QA+g}{h-p}$: si sostituisca poi a g il suo valore, e sostituendo questo valore nella prima, si trova $g = \dfrac{(h-p)\left(PQ - \frac{e}{n}(P+A)Q\right) - QAp}{h} = PQ - \frac{e}{n}(P+A)Q - \frac{p}{h}\left(P + A - \frac{e}{n}(P+A)\right)Q$, e sarà questo il guadagno propriamente sopra $\frac{e}{n}(P-A)Q + y'p$, ma questo aggregato $= PQ - g = \frac{e}{n}(P+A)Q + \frac{p}{h}\left(P+A-\frac{e}{n}(P+A)\right)Q$; onde capitale a guadagno :: $\frac{e}{n}$(P

(1) Tutto ciò che si legge nella presente pagina (lin. 12ª—16ª) dalle parole « Siccome il $p+x$ » fino alle parole « di baratto con guadagno » forma le linee 19ª—23ª della carta 170, *recto*, della quinta cartella dei manoscritti del P. Cossali. Presso queste linee della medesima carta 170, *recto*, sul margine laterale interno si legge: « basterà questa osservazione, e si riterrà y ed anche $p+x$, non h, anzi in luogo di y si riterrà q. »

$+A)Q+\frac{p}{h}\Big(P+A-\frac{e}{n}(P+A)\Big)Q : PQ-\frac{e}{n}(P+A)Q-\frac{p}{h}\Big(P+A-\frac{e}{n}$ $(P+A)\Big)Q :: h.\frac{e}{n}(P+A)+p\Big((P+A-\frac{e}{n}(P+A)\Big) : h\Big(P-\frac{e}{n}(P+$ $A)\Big)-p\Big(P+A-\frac{e}{n}(P+A)\Big)$, e giusta questa ragione 100: al guadagno per 100.

A vedere la identità di questa proporzione con quella della regola del Tartaglia, osservisi che per la equazione nel costruimento di essa supposta $h+\frac{e}{n}(P+A)z=(P+A)z$ si ha $z=\dfrac{h}{P+A-\frac{e}{n}(P+A)}$;

onde la quantità $p+\frac{e}{n}(P+A)z$ convertesi in $p+\dfrac{\frac{e}{n}(P+A)h}{P+A-\frac{e}{n}(P+A)}$

e la ragione $p+\frac{e}{n}(P+A)z : \dfrac{h\Big(P-\frac{e}{n}(P+A)\Big)}{P+A-\frac{e}{n}(P+A)}-p$ nella

$p+\dfrac{\frac{e}{n}(P+A)h}{P+A-\frac{e}{n}(P+A)} : \dfrac{h\Big(P-\frac{e}{n}(P+A)\Big)}{P+A-\frac{e}{n}(P+A)}-p$, e moltiplicando per

$P+A-\frac{e}{n}(P+A)$ nella $\frac{e}{n}(P+A)h+p\Big(P+A-\frac{e}{n}(P+A)\Big)$ $: h\Big(P-\frac{e}{n}(P+A)\Big)-p\Big(P+A-\frac{e}{n}(P+A)\Big)$, la quale ulteriormente si riduce ad $1 : \dfrac{hP}{\Big(p+(h-p)\frac{e}{n}\Big)(P+A)}-1$; laonde facendola $:: 100 : G$ intendendo G il tanto di guadagno per 100 si avrà $G=\Bigg(\dfrac{hP}{\Big(p+(h-p)\frac{e}{n}\Big)(P+A)}-1\Bigg)100$. Di fatti nell'esempio di Tartaglia $G=\Bigg(\dfrac{30.5}{\Big(20+10.\frac{1}{3}\Big)6}-1\Bigg)100=\Bigg(\dfrac{5}{4+2.\frac{1}{3}}-1\Bigg)100=\Bigg(\dfrac{5}{4\frac{2}{3}}-1\Bigg)$

$$= 100 = \frac{\frac{1}{3}}{4\frac{2}{3}} \cdot 100 = \frac{1}{14} \cdot 100 = \frac{50}{7} = 7\,\frac{1}{7}.$$

Se il mercante (1) della merce M invece di esigere in contanti la parte $\frac{e}{n}$ del prezzo $Q(P + A)$, esibisce di darla, non si avrà che a cangiare il $-$ prefisso alla frazione $\frac{e}{n}$ in $+$.

Se il mercante della merce m in luogo di guadagnare, discapiti, basta cangiare g in $-g$, e per maggior distinzione far $-g = d$; onde (*) sarà $d = -g = \dfrac{(p-h)\left(PQ - \frac{e}{n}(P + A)Q\right) + QAp}{h}$ $= \frac{p}{h}\left(P + A - \frac{e}{n}(P + A)\right)Q - PQ + \frac{e}{n}(P + A)Q$; quindi $PQ + d$ $= \frac{p}{h}\left(P + A - \frac{e}{n}(P + A)\right)Q + \frac{e}{n}(P + A)Q$; e perciò la ragione di capitale e discapito $h \cdot \frac{e}{n}(P + A) + p\left(P + A - \frac{e}{n}(P + A)\right) : p\Big(P$ $+ A - \frac{e}{n}(P + A)\Big) - h\left(P - \frac{e}{n}(P + A)\right)$; ossia $1 : 1 - \dfrac{hP}{\left(-p(p-h)\frac{e}{n}\right)(P + A)}$ e conseguentemente intendendo per D il discapito per ogni 100 di capitale $D = \left(1 - \dfrac{hP}{\left(p + (h-p)\,\frac{e}{n}\right)(P + A)}\right)100$.

Il guadagno del secondo mercante è discapito del primo, e viceversa; ma vi ha questa differenza, che laddove il guadagno g o discapito d del secondo, va riportato alla somma di contanti $\frac{e}{n}(P + A)$ $Q + y'p = PQ - g$, ovvero $PQ + d$; all'incontro il discapito che segnerò $d' = g$, od il guadagno che segnerò $g' = d$ del primo, va riportato alla somma di contanti PQ: onde sarà la ragione del capitale al discapito d' $PQ : PQ - \frac{e}{n}(P + A)Q - \frac{p}{h}\left((P + A) - \frac{e}{n}(P + A)\right)$ Q, ossia $hP : hP - \left(p + (h-p)\,\frac{e}{n}\right)(P + A)$, che riducesi ad $1 : 1$

(1) Ques. di F. Luca 12ª. Veggasi il Quad. V. pag. 11, 12.

(*) Tutto ciò che si legge nella presente pagina (lin. 7—8) dalla parola « sarà » fino alla parola « quindi » forma le due linee decimottava e decimanona della carta 170, *verso*, della cartella quinta dei manoscritti del P. Cossali. Presso queste due linee della medesima carta 170, *verso*, sul margine laterale interno si legge. « scrivi $h - p$ e così in seguito ovunque trovi $p - h$ prefiggendo segno contrario.»

$\dfrac{\left(p + (h - p)\frac{e}{n}\right)(P + A)}{hP}$, e perciò chiamando D' il suo discapito per ogni 100 di capitale $D' = \left(1 - \dfrac{\left(p + (h - p)\right)\frac{e}{n}(P + A)}{hP}\right)100.$ Difatti nell'esempio di Tartaglia, il dato del primo mercante è $75 \times 5 = 375$, ed il ricevuto 350, il discapito $375 - 350 = 25$ sopra 375, conseguentemente $375 : 25 :: 100 : \dfrac{2500}{375} = \dfrac{500}{75} = \dfrac{20}{3} = 6\dfrac{2}{3}$. E ponendo nella formola $30 = h$, $5 = P$, $b = P + A$, $p = 20\dfrac{1}{3} = \dfrac{e}{n}$, $D' = \left(1 - \dfrac{\left(20 + 10 \cdot \frac{1}{3}\right)6}{30 \cdot 5}\right)100 = \left(1 - \dfrac{4\frac{2}{3}}{5}\right) \cdot 100 = \dfrac{\frac{1}{3}}{5} \cdot 100 = \dfrac{100}{15} = 6\dfrac{10}{15} = 6\dfrac{2}{3}$. All'incontro sarà $G' = \left(\dfrac{\left((p + h - p)\frac{e}{n}\right)(P + A)}{hP} - 1\right)100$.

Se in questa formola (1) si supponga noto G' ed ignoto h, si troverà $h = \dfrac{p\left(P + A - \frac{e}{n}(P + A)\right)}{\frac{PG'}{100} + P - \frac{e}{n}(P - A)}$. Supposto $P = 8$, $P + A = 9$, $p = 30$, $\dfrac{e}{n} = \dfrac{1}{3}G = 5$, si ha $h = \dfrac{30 \cdot \left(9 - \frac{1}{3} \cdot 9\right)}{8 \cdot \frac{5}{100} + 8 - \frac{1}{3} \cdot 9} = \dfrac{30 \cdot 6}{\frac{4}{10} + 5} = \dfrac{30 \cdot 6 \cdot 5}{27} = \dfrac{10 \cdot 2 \cdot 5}{3} = \dfrac{100}{3} = 33\dfrac{1}{3}$. F. Luca trova $34\frac{1}{2}$, ma Tartaglia ques. 19, come io.

Similmente (2) supponendo noto D' si troverà $h = \dfrac{p\left(P + A - \frac{e}{n}(P + A)\right)}{P - \frac{e}{n}(P + A) - P\frac{D'}{100}}$ supposto $P = 7$, $P + A = 8$, $p = 30$, $\dfrac{e}{n} = \dfrac{1}{3}$ $D = 5$, risulta h

(1) Ques. di F. Luca 13°; di Tartaglia 19°, simile è il 15°, di Tartaglia 21°, ed il 17°, di Tartaglia 23°.
(2) Ques. di F. Luca 14,° di Tartaglia 20.°

$$=\frac{30\left(8-\frac{1}{3}\cdot 8\right)}{7-\frac{1}{3}\cdot 8-\frac{7\,.\,5}{100}}=\frac{30\,.\,\frac{16}{3}}{4-\frac{1}{3.\,20}}=\frac{160}{\frac{239}{3.\,20}}=\frac{160.\,60}{239}=40\;\frac{40}{239}.$$ Così trova anche Tartaglia ques. 20, ma F. Luca $38\;\frac{11}{26}$. Caviamo ora h dal valor di G, sarà $h=\frac{\left(\frac{G}{100}+1\right).\,p\left(P+A-\frac{e}{n}(P+A)\right)}{P-\left(\frac{G}{100}+1\right)\frac{e}{n}(P+A)}$, e dal valore di D si ricava [1] $h=\frac{\left(1-\frac{D}{100}\right)p\left(P+A-\frac{e}{n}(P+A)\right)}{P-\frac{e}{n}\left(1-\frac{D}{100}\right)(P+A)}$, supposto $P=8$, $P+A=9$, $p=30$, $\frac{e}{n}=\frac{1}{3}$, $D=10$,

$$h=\frac{\left(1-\frac{1}{10}\right).\,30\left(9-\frac{1}{3}\cdot 9\right)}{8-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{10}\right)\cdot 9}=\frac{\frac{9}{10}\cdot 30\cdot 6}{8-\frac{3}{10}\cdot 9}=\frac{27.\,6}{5\,\frac{3}{10}}=\frac{27.\,6.\,10}{53}=\frac{1620}{53}$$

$=30\,\frac{30}{53}$, e concorda meco Tartaglia nel ques. 22 contro F. Luca che trova 33.

Dai valori di G, D, G', D' si ricavano i seguenti quattro valori di p:

$$p=\frac{h\left(P-\left(\frac{G}{100}+1\right)\frac{e}{n}(P+A)\right)}{\left(\frac{G}{100}+1\right)\left(P+A-\frac{e}{n}(P+A)\right)},$$

$$p=\frac{h\left(P-\frac{e}{n}\left(1-\frac{D}{100}\right)(P+A)\right)}{\left(1-\frac{D}{100}\right)\left(P+A-\frac{e}{n}(P+A)\right)},$$

$$p=\frac{h\left(P\frac{G'}{100}+P-\frac{e}{n}(P+A)\right)}{P+A-\frac{e}{n}(P+A)},$$

$$p=\frac{h\left(P-\frac{e}{n}(P+A)-P\frac{D}{100}\right)}{P+A-\frac{e}{n}(P+A)}.$$

(1) Ques. di F. Luca 16°, di Tartaglia 22.°

Dagli stessi valori (*) di G, D, G′, D′ si possono cavare quattro lori di P, e di P + A, che per abbreviare chiameremo H

$$\mathrm{H} = \frac{h\mathrm{P}}{\left(\frac{\mathrm{G}}{100}+1\right)\left(p+(h-p)\frac{e}{n}\right)},\ \mathrm{H} = \frac{h\mathrm{P}}{\left(1-\frac{\mathrm{D}}{100}\right)\left(p+(h-p)\frac{e}{n}\right)},$$

$$\mathrm{H} = \frac{\left(\frac{\mathrm{G}'}{100}+1\right)h\mathrm{P}}{p+(h-p)\frac{e}{n}},\ \mathrm{H} = \frac{\left(1-\frac{\mathrm{D}'}{100}\right)h\mathrm{P}}{p+(h-p)\frac{e}{n}}$$ (1); posto $p = 30$, $h = 36$,

$\mathrm{P} = 7$, $\frac{e}{n} = \frac{1}{3}$, $\mathrm{D}' = 10$, $\mathrm{H} = 7\frac{5}{50}$, come Tartaglia Ques. 24.; e da questi è facile trarre i quattro di P

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{H}\left(\frac{\mathrm{G}}{100}+1\right)\left(p+(h-p)\frac{e}{n}\right)}{h}$$ (2) $\mathrm{G}=0$, $\mathrm{P}=x^2$, $\mathrm{H}=x^2+2x$, $p=18$, $h=20$, $\frac{e}{n}=\frac{1}{2}$ si ha $18x^2=(x^2+2x).19$, $x=38$, $\mathrm{P}=x^2=1444$

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{H}\left(1-\frac{\mathrm{D}}{100}\right)\left(p+(h-p)\frac{e}{n}\right)}{h}$$ (3), $$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{H}\left(p+(h-p)\frac{e}{n}\right)}{\left(\frac{\mathrm{G}'}{100}+1\right)h},$$

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{H}\left(p+(h-p)\frac{e}{n}\right)}{\left(1-\frac{\mathrm{D}'}{100}\right)h}.$$ Si possono anche ricavare da questi agevolmente i quattro valori della frazione $\frac{e}{n}$

$$\frac{e}{n} = \frac{h\mathrm{P}-\mathrm{H}p\left(\frac{\mathrm{G}}{100}+1\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{\mathrm{G}}{100}+1\right)(h-p)},\ \frac{e}{n} = \frac{-\mathrm{H}p\left(1-\frac{\mathrm{D}}{100}\right)+h\mathrm{P}}{\mathrm{H}\left(1-\frac{\mathrm{D}}{100}\right)(p-h)},$$

$$\frac{e}{n} = \frac{-\mathrm{H}p+h\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{G}'}{100}+1\right)}{\mathrm{H}(h-p)},\ \frac{e}{n} = \frac{h\mathrm{P}\left(1-\frac{\mathrm{D}'}{100}\right)-\mathrm{H}p}{\mathrm{H}(h-p)};$$ e se cer-

(*) Tutto ciò che si legge nella presente pagina (lin. 1—2) dalle parole « Dagli stessi valori » fino alle parole « chiameremo H » forma le linee decimaquarta e decimaquinta della carta 171, *verso*, della cartella quinta dei manoscritti del P. Cossali. Presso queste due linee della medesima carta 171, *verso*, sul margine laterale interno si legge: « Sarà meglio ritener P + A ».

(1) F. Luca erra e stravolge il quesito (Ques. di F. Luca 18°, di Tartaglia 24.°)

(2) Ques. di F. Luca 20° e 31.°

(3) Ques. di F. Luca 33.°

chisi la frazione $\frac{e}{n}$, sicchè $G = 0$, $D = 0$, $G' = 0$, $D' = 0$, si avrà dalla 1ª e 9ª essendo ad un tempo $G = 0$, $D' = 0$, $\frac{e}{n} = \frac{hP - Hp}{H(h-p)}$; e dalla 2ª e 3ª corrispondendosi $D = 0$, $G' = 0$, $\frac{e}{n} = \frac{-Hp + hP}{H(h-p)}$. Appartengono qui i Quesiti di F. Luca 27°, 29°; ed al problema 29 dà per l'appunto la regola espressa per la mia formola $\frac{e}{n} = \frac{hP - Hp}{H(h-p)}$; e la stessa regola prescrive Tartaglia nei suoi Quesiti 26, 27, 28. Nel 27° di F. Luca posti $P = 4$, $P + X = 5$, $p = 10$, $p + x = 13$: domandasi chi meglio barattò, e che parte in contanti aver deve chi ha peggio barattato, onde il baratto riesca uguale. F. Luca ecc. Vedi Quad. V pag. 1.

Problema terzo. Stando tutto come nel problema secondo, si aggiunga che il secondo mercante voglia anch'egli una parte $< \frac{e}{n}$ in contanti: qual sarà il prezzo $p + Q$ a cui dovrà alzare il prezzo p? Le due equazioni in questo caso saranno. Di contanti $\frac{e}{n}(P + A)$ $Q + yp = QP + \frac{r}{t}y(p + u)$. Di baratto $\frac{e}{n}(P + A)Q + y(p + u) = Q$ $(P + A) + \frac{r}{t}y(p + u)$, sottraendo da questa la prima, resta $yu = QA$, $y = \frac{QA}{u}$, e sostituendo nella prima si ricava $u = \frac{\left(1 - \frac{r}{t}\right)Ap}{P - \frac{e}{n}(P + A) + \frac{r}{t}A}$ $= \frac{\left(1 - \frac{r}{t}\right)Ap}{\left(1 - \frac{e}{n}\right)P - \left(\frac{e}{n} - \frac{r}{t}\right)A}$; trasportando dai numeri alle lettere ciò che F. Luca prescrive nello scioglimento del suo quesito undecimo si dovrebbe dire $P - \left(\frac{e}{n} - \frac{r}{t}\right)(P + A) : P + A - \left(\frac{e}{n} - \frac{r}{t}\right)(P + A) ::$ $p : p + u$, il che non può aver luogo che dando il secondo mercante al primo $\frac{e}{n}(P + A)$ in contanti, e ricevendo in contanti $\frac{r}{t}$ $(P + A)$: ma il quesito viene ad inchiudere un patto ridicolo. Da essa proporzione ne seguirebbe $u = \frac{pA}{P - \left(\frac{e}{n} - \frac{r}{t}\right)(P + A)}$ differente dal mio.

Problema quarto. Uno baratta la merce M, che vale P colle merci di un altro m, che vale p; m' che vale p'; m'', che vale p'' ...

ed il primo dà per la somma QP, e vuole di ogni merce dell'altro ugual quantità: qual sarà questa? supponi la qualunque y, ed avrai la somma $yp + yp' + yp'' \ldots$ ma la vuoi $=$QP; dunque argomenta $yp + yp' + yp'' \ldots : QP :: yp : k$; indi $yp : k :: y : g$: così F. Luca, ma più speditamente in una sola proporzione $:: y : g$, e sarà g la quantità cercata.

Problema quinto. Uno ha la merce M, il cui prezzo in contanti P in baratto $P + X$, e l'altro ha le merci m, m', i prezzi delle quali in contanti p, p', in baratto $p + x$, $p' + x'$; ed il primo vuole la parte $\frac{e}{n}$ di $P + X$ in contanti, e delle merci m, m' quantità tali y, y', che sia $k.y(p + x) = y'(p' + x')$: si domanda l'equazione tra P, $P + A$ $p, p + x$, p', $p' + x'$, $\frac{e}{n}$, k? Sarà, prima equazione in contanti $\frac{e}{n}(P + X)Q + yp + y'p' = PQ$: seconda equazione di baratto $\frac{e}{n}(P + X)Q + y(p + x) + y'(p' + x') = Q(P + X)$. Equazione di condizione $ky(p + x) = y'(p' + x')$; indi sottraendo dalla seconda la prima, si ha: $yx + y'x' = QX$, onde $y' = \frac{QX - yx}{x'}$, e quindi $\frac{QX - yx}{x'}(p' + x') = ky(p + x)$, dal che si cava $y = \frac{QX(p' + x')}{x(p' + x') + kx'(p + x)}$, $y' = \frac{QXk(p + x)}{x(p' + x') + kx'(p + x)}$, sostituiti i quali valori nella prima equazione ne uscirà $\frac{X(p(p' + x') + kp'(p + x))}{x(p' + x') + kx'(p + x)} = P - \frac{e}{n}(P + X) = \left(1 - \frac{e}{n}\right)P - \frac{e}{n}X$. Facendo $k = 0$ si hanno le equazioni del problema secondo (*). Se si supponesse $y = y'$ avrebbersi le equazioni: prima, $\frac{e}{n}(P + X)Q + y(p + p') = PQ$; seconda, $\frac{e}{n}(P + X)Q + y(p + x + p' + x) = Q(P + X)$, e sottraendo la prima dalla seconda $y(x + x') = QX$, $y = \frac{QX}{X + X'}$, e sostituendo nella prima $\frac{(p + p')X}{x + x'} = P - \frac{e}{n}(P + X)$.

Tartaglia nel quesito 32 supponendo di fatti $y = y'$, e cercando $p' + x'$, prescrive di fare $P - \frac{e}{n}(P + X) : P + X - \frac{e}{n}(P + X) :: p + p' : \frac{(p + p')\left(P + X - \frac{e}{n}(P + X)\right)}{P - \frac{e}{n}(P + X)}$, e di prendere

(*) Tutto ciò che si legge nella presente pagina (lin. 21—23) dalle parole « Se si supponesse » fino alle parole « e sottraendo » forma le tre linee, quarta, quinta, e sesta della carta 173, *recto*, della cartella quinta dei manoscritti del P. Cossali. Presso queste tre linee della medesima carta 173, *recto*, sul margine laterale interno si legge: « Vedi le formole del caso di guadagno o discapito in questo supposto nel problema sesto. »

$$\frac{(p+p')\left(\mathrm{P}+\mathrm{X}-\frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{X})\right)}{\mathrm{P}-\frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{X})}-(p+x)=p'+x',$$ che risolvesi in

$$p+p'+\frac{(p+p')\mathrm{X}}{\mathrm{P}-\frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{X})}-p-x=p'+x',$$ o sia $$\frac{(p+p'\mathrm{X}}{\mathrm{P}-\frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{X})}=x+x',\quad \frac{(p+p')\mathrm{X}}{x+x'}=\mathrm{P}-\frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{X}).$$

F. Luca (¹) in luogo di $p+p'$ pone a terzo termine della proporzione $p+x+p'$, ed erra perciò nel suo Quesito 23 seguitando nel resto come Tartaglia. Nel quesito 22 non si sa che cosa F. Luca si voglia, non essendo coerente nei numeri.

Dalla mia formola si cava (*):

$$x'=\frac{xp'\left(1-\frac{e}{n}\right)\mathrm{P}-\left(\left(k+\frac{e}{n}\right)p'x+(k+1)pp'\right)\mathrm{X}}{\mathrm{X}\left((k+1)\frac{e}{n}x+\left(1-k\frac{e}{n}\right)p\right)-\left(k(p+x)+x\right)\left(1-\frac{e}{n}\right)\mathrm{P}},$$

$$\mathrm{X}=\frac{xp'\left(1-\frac{e}{n}\right)\mathrm{P}+x'\left(k(p+x)+x\right)\left(1-\frac{e}{n}\right)\mathrm{P}}{x'\left((1+k)\frac{e}{n}x+\left(1+k\frac{e}{n}\right)p\right)+\left(k+\frac{e}{n}\right)p'x+(k+1)pp'}.$$

Se nella mia formola si supporrà $p:p+x::p':p'+x$ sostituendo a $p'+x'$ il suo valore $\frac{p'}{p}(p+x)$ si trasformerà essa in $\frac{\mathrm{X}(1+k)pp'}{xp'+kx'p}=\left(1-\frac{e}{n}\right)\mathrm{P}-\frac{e}{n}\mathrm{X}$; e volendo anche eliminare x' col mezzo dell'equazione $p'+x'=\frac{p'}{p}(p+x)$, la quale porgo $x'=\frac{p'}{p}x$, si avrà $\frac{\mathrm{X}p'}{x}=\left(1-\frac{e}{n}\right)\mathrm{P}-\frac{e}{n}\mathrm{X}$; il che dimostra che sarà il prezzo p alzato, come se la merce m' non vi fosse, ed in questo caso $y=\frac{\mathrm{QX}p'}{p'x+kpx'}$; $y'=\frac{\mathrm{Q}k\mathrm{X}p}{p'x+kpx'}$. Sono queste formole più ragionevoli di quelle di Tartaglia nel quesito 32; e perché si ha a prendere $y'=y$ a costo di dover senza proporzione alzare il prezzo p'? In esso di lui problema $\mathrm{P}=24$, $\mathrm{P}+\mathrm{X}=30$, $p-7$, $p+x=8$, $p'=12$ $\frac{e}{n}=\frac{1}{5}$; onde dall'equazione $\frac{(p+p')\mathrm{X}}{x+x'}=\left(1-\frac{e}{n}\right)\mathrm{P}-\frac{e}{n}\mathrm{X}$,

(¹) Ques. di F. Luca 23.

(*) Tutto ciò che si legge nella presente pagina (lin. 8—11) dalle parole « si cava » fino alle parole « Se nella mia formola » forma le quattro linee 18ª—21ª della carta 173, *recto*, della cartella quinta dei manoscritti del P. Cossali. Presso queste quattro linee della medesima carta 173, *recto*, sul margine laterale interno si legga: « Si può risparmiar di cavar queste due formole tornando più conto cavarle nei casi particolari in numeri. »

cavandosi $x' = \dfrac{\left(p + p' + \frac{e}{n}\,x\right)X - \left(1 - \frac{e}{n}\right)Px}{\left(1 - \frac{e}{n}\right)P - \frac{e}{n}X}$ si avrà

$$x' = \frac{\left(7 + 12 + \frac{1}{5}\right)6 - \frac{4}{5}.24.1}{\frac{4}{5}.4 - \frac{1}{5}.6} = \frac{19\frac{1}{5}.6 - \frac{96}{5}}{\frac{96}{5} - \frac{6}{5}} = \frac{96.6 - 96}{90} = \frac{5.96}{90}$$

$= \frac{5.16}{15} = \frac{80}{15} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$; dunque il prezzo 12 si dovrà alzare di $5\frac{1}{3}$, cioè fino a $17\frac{1}{3}$ quando il 7 non si alza che ad 8, ed il 24 a 30? La mia formola porterà $x = \dfrac{pX}{\left(1 - \frac{e}{n}\right)P - \frac{e}{n}X} = \dfrac{7.6}{\frac{4}{5}.24 - \frac{1}{5}.6}$ $= \frac{42.5}{90} = \frac{42}{18} = 2\frac{1}{3}$, $x' = \frac{p'}{p}\,x = \frac{12}{7}.2\frac{1}{3} = \frac{12}{7}.\frac{7}{3} = \frac{12}{13} = 4$,

$$y = \frac{Q.6.12}{12.2\frac{1}{3} + K.7.4} = \frac{Q.6.12.3}{12.7 + K.7.12} = \frac{18Q}{7(1+K)},\ y' = \frac{QK.7.6}{12.\frac{7}{3} + K.7.4}$$

$= \frac{Q.K.7.6.3}{12.7 + K.7.12} = \frac{18QK}{12(1+K)}$, e fatto $K = 1$, come suppone Tartaglia, $y = \frac{9Q}{7}$, $y' = \frac{3Q}{4}$; onde se $Q = 1$, $y = 1\frac{2}{7}$, $y' = \frac{3}{4}$, e la prima equazione $\frac{1}{5}.30 + \frac{9}{7}.7 + \frac{3}{4}.12 = 24$; la seconda $\frac{1}{5}.30 + \frac{9}{7}.\left(7 + 2\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{4}(12 + 4) = 30$, cioè $6 + \frac{9}{7}.\frac{28}{3} + \frac{3}{4}.16 = 6 + 12 + 12 = 30$. Ma essendo dato $p + x = 8$, bisognerà valersi della formola mia generale che dà (per esser $x = 1$); se facciasi $K = 1$,

$$x' = \frac{1.12.\frac{4}{5}.24. - \left(\left(1 + \frac{1}{5}\right)12.1 + 2.7.12\right)6}{6\left(2.\frac{1}{5}.1 + \left(1 + \frac{1}{5}\right).7\right)(8+1)\left(1 - \frac{1}{5}\right).24.}$$

$$= \frac{\frac{12.96}{5} - \left(\frac{72}{5} + 168\right)6}{6.\left(\frac{2}{5} + \frac{42}{5}\right) - \frac{36.24}{5}} = \frac{12.96 - (72 + 5.168)6}{6.44 - 36.24} = \frac{96 - (36 + 5.84)}{22 - 3.24}$$

$= \frac{48 - (18 + 5.42)}{12 - 3.12} = \frac{180}{25} = 7\frac{1}{5}$. Si trova più speditamente dalla formola fondamentale $\frac{X(p(p' + x') + p'k(p + x))}{x(p' + x') + kx'(p + x)} = P - \frac{e}{n}(P + X)$, che nel caso nostro diviene $\frac{6.(7(12 + x') + 12.8)}{1.(12 + x') + x'.8} = \frac{42.12. + 42x' + 12.48}{12 + 9x'}$ $= 18$; $42.12 + 42x' + 12.48 = 12.18 + 9.18x'$, $12.72 = (9.18 - 42)x'$, $x' = \frac{12.72}{9.18 - 42} = \frac{2.72}{9.3 - 7} = 1\frac{144}{20} = 7\frac{1}{5}$. Questo valore di x' eccede quello di Tartaglia, ma è ragionato; ed apparisce che la sua sproporzionata grandezza proviene dalla troppa piccolezza di x; il prendere $y' = y$, come fa Tartaglia, è del tutto arbitrario: per le mie formole proviene $y = \frac{Q.6.\left(12 + 7\frac{1}{5}\right)}{1.\left(12 + 7\frac{1}{5}\right) + 7\frac{1}{3}.8} = \frac{Q.6.19\frac{1}{5}}{12 + 9.7\frac{1}{5}} = \frac{Q.6.96}{60 + 9.36}$ $= \frac{Q.96}{10 + 9.6} = \frac{Q.48}{5 + 9.3} = \frac{Q.48}{32} = \frac{3}{2}Q$, $y' = \frac{Q.6.8}{1\left(12 + 7\frac{1}{5}\right) + 7\frac{1}{5}.8}$ $= \frac{Q.6.8.5}{60 + 9.36} = \frac{Q.8.5}{10 + 9.6} = \frac{Q.4.5}{5 + 9.3} = \frac{20\,Q}{32} = \frac{5}{8}Q$. Di fatti: prima equazione $\frac{1}{5}.30\,Q + \frac{3}{2}Q.7 + \frac{5}{8}Q.12 = 24Q$, cioè $6 + 10\frac{1}{2} + 7\frac{1}{2}$ $= 24$; seconda equazione $6Q + \frac{3}{2}Q.8 + \frac{5}{8}Q.19\frac{1}{5} = 30Q$, cioè $6Q$ $+ 12Q + 12Q = 30Q$.

Problema sesto. Se il mercante secondo voglia il guadagno g, saranno le equazioni: prima, di contanti $\frac{e}{n}(P + X) + yp + y'p'$ $= PQ - g$; seconda, di baratto $\frac{e}{n}(P + X) + y(p + x) + y'(p' + x')$ $= Q(P + X)$. Dalle due equazioni si trova $\frac{(QX + g)(p(p' + x') + kp'(p + x))}{x(p' + x') + kx'(p + x)}$ $= PQ - \frac{e}{n}(P + X)Q - g$; onde

$$g = \frac{\left(PQ - \frac{e}{n}(P + X)Q\right)(x(p' + x') + kx'(p + x)) - QX(p(p' + x') + kp'(p + x))}{(1 + k)(p + x)(p' + x')}$$

guadagno sopra $PQ - g$

$$= \frac{(P + X)Q\,(p(p' + x') + kp'(p + x)) + \frac{e}{n}(P + X)Q\,(x(p' + x') + kx'(p + x))}{(1 + k)(p + x)\,p' + x')}$$

e per ciò il guadagno G sopra 100

$$\frac{G}{100}=\frac{\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right)(x(p'+x')+kx'(p+x))-X(p(p'+x')+kp'(p+x))}{(P+X)(p(p'+x)+kp'(p+x))+\frac{e}{n}(P+X)(x(p'+x')+kx'(p+x))}$$

Di fatti posto $k=0$, si ha $\frac{G}{100}=\frac{\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right)x-Xp}{\left(p+x.\frac{e}{n}\right)(P+X)}$

$$=\frac{P(p+x)-\left(p+\frac{e}{n}.x\right)(P+X)}{\left(p+\frac{e}{n}.x\right)(P+X)}=\frac{P(p+x)}{p+\frac{e}{n}x(P+X)}-1,$$ come

si è trovato nel problema di due merci.

$$\frac{D}{100}=\frac{X(p(p'+x')+kp'(p+x))-\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right)(x(p'+x')+kx'(p+x))}{(P+X)(p(p'+x')+kp'(p+x))+\frac{e}{n}(P+X)(x(p'+x')+kx'(p+x))}$$

il corrispondente discapito D', o guadagno G' del primo mercante riportandosi a PQ

$$\frac{D'}{100}=\frac{\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right)(x(p'+x')+kx'(p+x))-X(p(p'+x')+kp'(p+x))}{P(1-k)(p+x)(p'+x')},$$

$$\frac{G'}{100}=\frac{X(p(p'+x')+kp'(p+x))-\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right)(x(p'+x')+kx'(p+x))}{P(1+k)(p+x)(p'+x')}.$$

Se suppongasi $p:p+x::p'p'+x'$, conseguentemente $p:x::p':x'$; sostituendo $\frac{p'}{p}(p+x)$ in luogo di $p+x$, e $\frac{p'}{p}x$ in luogo di x', si ha

$$g=\frac{\left(PQ-\frac{e}{n}(P+X)Q\right)p'x-QXpp'}{p'(p+x)},$$

$$PQ-g=\frac{(PQ+XQ)pp'+\frac{e}{n}(P+X)Qp'x}{p'(p+x)},$$ e quindi

$$\frac{G}{100}=\frac{\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right)p'x-Xpp'}{\left(p+\frac{e}{n}x\right)p'(P+X)}=\frac{\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right)x-Xp}{\left(p+\frac{e}{n}x\right)(P+X)}$$

$=\dfrac{P(p+x)}{\left(p+\frac{e}{n}\,x\right)(P+X)}-1$, come allor quando $k=0$, e di due sole merci si tratta; e di fatti svanisce k dal calcolo, come se si distruggesse: dicasi lo stesso di $\frac{D}{100}$, $\frac{D'}{100}$, $\frac{G'}{100}$ — se sia $\frac{e}{n}=0$ si avrà

$$\frac{G}{100}=\frac{P\,(x\,(p'+x')+kx'\,(p+x))-X\,(p\,(p'+x')+kp'\,(p+x)}{(P+X)\,(p\,(p'+x')+kp'(p+x))},$$

$$\frac{D}{100}=\frac{X(p\,(p'+x')+kp'\,(p+x)\,)-P\,(x(p'+x')+kx'\,(p+x))}{(P+X)\,(p(p'+x')+k(p(p+x))},$$

$$\frac{G'}{100}=\frac{X(p\,(p'+x')+kp'\,(p+x))-P(x\,(p'+x')+kx'\,(p+x))}{P(1+h)(p+x)(p'+x')},$$

$$\frac{D'}{100}=\frac{P(x\,(p'+x')+kx'\,(p+x))-X\,(p\,(p'+x')+kp'\,(p+x))}{P(1+k)(p+x)(p'+x')},$$

Sia M lana [1] $P=10$, m pepe $p=30$, $p+x=35$, m' giengero, o come dice Tartaglia, zenzero, $p'=27$, $p'+x'=33$, $\frac{e}{n}=0$; $G'=10$: qual deve essere $P+X$? Ponendo $k=1$ si avrá

$$\frac{10}{100}=\frac{X(30.33.+27.35.)-10(5.33.+6.35)}{10.\ 2.\ 35.\ 33}=\frac{X(6.33.+27.7)\text{-}10(33+6.7)}{10.\ 2.\ 7.\ 33}$$

$=\dfrac{X(6.11.+9.7)-10\,(11+2.7)}{10.\ 2.\ 7.\ 11}$; onde $2.\ 7.\ 11=X(6.\ 11.+9.\ 7.)-10$ $(11+20.\ 7)\ 2.\ 7.\ 11+10(11+14)=X(6.\ 11.+9.\ 7)$, $404=129X$, $X=\frac{404}{129}=3\,\frac{17}{129}$; onde $P+X=13\,\frac{17}{129}$. Così trova Tartaglia nel quesito 33, primo modo che è di supporre di prender tanto di pepe, e tanto di zenzero che importino la stessa quantità di denaro, cioè $y(p+x)=y'\,(p'+x)$, vale a dire $k=1$, e fa così: $p'+x':p'::p+x:d'\frac{p+x}{p'+x'}$: poi argomenta $p'\,\frac{p+x}{p'+x'}+p:2\,(p+x)::\frac{(100+G')P}{100}:P+X$; il termine $p'\,\frac{p+x}{p'+x'}$ significa il valore in contanti della quantità di zenzero che vaglia in baratto 35 quanto il pepe; $p'\frac{p+x}{p'+x'}-p$ esprime la somma in contanti di essa quantità di zenzero e del pepe; $2(p+x)$ esprime la somma dei prezzi loro in baratto; $\frac{100+G}{100}P$ esprime l'aumento di P, a ragione di G' per 100. La proporzione riducesi a $p'(p+x)+p(p+x'):2(p+x)(p'+x')::P+\frac{G}{100}P:P+X$;

[1] Ques. di F. Luca 24.°

onde $\frac{G}{100}P.2(p+x)p'+x') = X(p'(p+x)+p(p'+x')+P(p'(p+x)+p(p'+x')-2(p+x)(p'+x'))$, dove $2(p+x)(p'+x') = (p'+x')(p+x)+(p+x)(p'+x') = p'(p+x)+x'(p+x)+p(p'+x')+x(p'+x')$; dunque $\frac{G}{100}P.2(p+x)(p'+x') = X(p'(p+x)+p(p'+x'))-P(x(p'+x')+x'(p+x))$ conforme alla mia formola.

Tartaglia scioglie inoltre il problema in un secondo modo, supponendo $y' = y$, cioè la quantità del zenzero = alla quantità del pepe, ed argomenta così: $p+p' : p+x+p'+x' : P+\frac{G'}{100}P : P+X$; onde si cava $\frac{G'}{100} = \frac{X(p+p')-P(x+x')}{P(p+x+p'+x')}$. Risulta quindi $X = 3\frac{7}{57}$. A vedere l'origine di questa formola, ripigliamo le equazioni trattate al Problema quinto di $y' = y'$, con aggiugnere il caso del guadagno g, ed avremo: prima equazione, $\frac{e}{n}(P+X)Q+y(p+p') = PQ-g$; seconda equazione $\frac{e}{n}(P+X)Q+y(p+x+p'+x') = (P+X)Q$. Sottraendo quella da questa, ne viene $y(x+x') = QX+g$, $y = \frac{QX+g}{x+x'}$, $\frac{e}{n}(P+X)Q+\frac{(QX+g)(p+p')}{x+x'} = PQ-g$,

$$g = \frac{\left(PQ-\frac{e}{n}(P+X)Q\right)(x+x')-QX(p+p')}{p+x+p'+x'}$$ guadagno sopra

$PQ-g = Q(P+X)(p+p')+\frac{e}{n}(P+X)Q(x+x')$; onde

$$\frac{G}{100} = \frac{\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right)(x+x')-X(p+p')}{(P+X)(p+p')+\frac{e}{n}(P+X)(x+x')},$$

$$\frac{D}{100} = \frac{X(p+p')-\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right)(x+x')}{(P+X)(p+p')+\frac{e}{n}(P+X)(x+x')};$$ il guadagno $\frac{G'}{100}$ o discapito $\frac{D'}{100}$, riportandosi a PQ,

$$\frac{G'}{100} = \frac{X(p+p')-\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right)(x+x')}{P(p+x+p'+x')}$$: questa, fatto $\frac{e}{n}$

$= 0$, coincide con quella cavata dal modo secondo di Tartaglia.

$$\frac{D'}{100} = \frac{\left(P - \frac{e}{n}(P + X)\right)(x + x') - X(p + p')}{P(p + x + p' + x')}.$$

F. Luca scioglie il problema concordemente a Tartaglia rispetto al secondo modo, supposto cioè $y = y'$, eccetto che a prima ragione della proporzione prende $\frac{1}{2}\,(p + p') : \frac{1}{2}\,(p + x + p' + x')$; ma rispetto al primo modo, opera così: $p : p + x :: \frac{1}{2}\left(P + \frac{G'}{100}\,P\right) : \frac{p + x}{p}.\ \frac{1}{2}\left(P + \frac{G}{100}P\right)$; $p' : p' + x' :: \frac{1}{2}\left(P + \frac{G'}{100}\,P\right) : \frac{p' + x'}{p'}.\ \frac{1}{2}\left(P + \frac{G'}{100}P\right)$, e prende $P + X = \frac{p + x}{p}.\ \frac{1}{2}\left(P + \frac{G'}{100}\,P\right) + \frac{p' + x'}{p'}.\ \frac{1}{2}\left(P + \frac{G'}{100}\,P\right)$, che produce $\frac{G}{100} = \frac{2(P + X)pp' - P(p\,(p + x) + p(p' + x'))}{P(p'(p + x) + p(p' + x'))}$, formola affatto diversa dalla mia, e che nell'esempio particolare porge

$$\frac{10}{100} = \frac{2(P + X).\,30.\,27 - 10(27.\,35 + 30.\,33)}{10(27.\,35 + 30.\,33)} = \frac{2(P + X)30.\,27}{10(27.\,35 + 30.\,33)} - 1 + \frac{1}{10} = \frac{2(P + X).\,30.27}{10(27.\,35 + 30.\,33} = \frac{2(P + X).3.\,27}{27.35 + 30.\,33} = \frac{2(P + X).9}{3.\,35 + 10.\,11},$$

$$\frac{11}{10}(3.\,35 + 10.\,11) = 18(P + X),\ P + X = \frac{11.(3.\,35 + 10.\,11)}{180} = \frac{2365}{180} = 13\,\frac{5}{36}.$$

F. Luca ricava $13\,\frac{23}{108}$, e così, oltre ad errar nel metodo, erra anche nel calcolo.

Problema settimo. Si aggiunga per parte del secondo mercante la merce m'', il cui prezzo in contanti p'', in baratto $p'' + x''$ si cerca l'equazione tra i prezzi, considerando anche il caso di guadagno: prima equazione in contanti $\frac{e}{n}(P + X)Q + yp + y'p' + y''p'' = PQ - g$; seconda equazione di baratto $\frac{e}{n}(P + X)Q + y(p + x) + y'(p' + x') + y''(p'' + x'') = (P + X)Q$. Equazioni di condizione $ky(p + x) = y'(p' + x')$; $Hy(p + x) = y''(p'' + x'')$. Sottraendo la prima dalla seconda $yx + y'x' + y''x'' = QX + g$, e per le equazioni di condizione $yx + \frac{ky(p + x)}{p' + x'}x' + \frac{Hy(p + x)}{p'' + x''}x'' = QX + g$, $y(x\,(p' + x')(p'' + x'') + k^{x'}(p + x)(p'' + x'') + H^{x''}(p + x)(p' + x')\,) = (QX + g)(p' + x')(p'' + x'')$,

$$y = \frac{(QX + g)(p' + x')(p'' + x'')}{x(p' + x')(p'' + x'') + kx'(p + x)(p'' + x'') + Hx''(p + x)\,(p' + x')},$$

$$y' = \frac{ky(p+x)}{p'+x'} = \frac{(\mathrm{QX}+g).k(p+x)(p''+x'')}{x(p'+x')(p''+x'')+kx'(p+x)(p''+x'')+\mathrm{H}x''(p+x)(p''+x'')},$$

$$y'' = \frac{\mathrm{H}y(p+x)}{p''+x''} = \frac{(\mathrm{QX}+g).\mathrm{H}(p+x)(p'+x')}{x(p'+x')(p''+x'')+kx'(p+x)(p''+x'')+\mathrm{H}x''(p+x)p''+x'')}$$

sostituendo questi valori nella prima

$$\frac{(\mathrm{QX}+g)\,(p(p'+x')(p''+x'')+kp'(p+x)(p''+x'')+\mathrm{H}p''(p+x)(p'+x')}{x(p'+x')(p''+x'')+kx'(p+x)(p''+x'')+\mathrm{H}x''(p+x)(p''+x'')}$$

$$= \mathrm{PQ} - \frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{X})\mathrm{Q} - g\text{; onde } g = \text{(*)}$$

$$\frac{\left(\mathrm{PQ}-\frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{X})\mathrm{Q}\right)x\,(p'+x')(p''+x'')+kx'(p+x)(p''+x'')+\mathrm{H}x''(p+x)(p''+x'')-\mathrm{QX}(p(p'+x')(p''+x'')+kp'(p+x)(p''+x'')+\mathrm{H}p''(p+x)(p'+x'))}{x(p'+x')(p''+x'')+kx'(p+x)(p''+x'')+\mathrm{H}x''(p+x)(p''+x'')+p(p'+x')(p''+x'')+kp'(p+x)(p''+x'')+\mathrm{H}p''(p+x)(p'+x'')}$$

Questo denominatore si riduce a $(1+k+\mathrm{H})(p+x)(p'+x')(p''+x'')$, il guadagno g riportasi a $\mathrm{PQ}-g=$

$$\frac{(\mathrm{P}+\mathrm{X})\mathrm{Q}(p(p'+x')(p''+x'')+kp'(p+x)(p''+x'')+\mathrm{H}p''\,(p+x)\,(p'+x'))+\frac{e}{n}(\mathrm{P}+\mathrm{X})\mathrm{Q}(x(p'+x')(p''+x'')+kx'(p+x)(p''+x'')+\mathrm{H}x''\,(p+x)(p''+x''))}{(1+k+\mathrm{H})(p+x)(p'+x')(p''+x'')}.$$

Denominiamo R la prima parte del numeratore di g, ed S la seconda, 7 la prima del numeratore di $\mathrm{PQ}-g$, ed U la seconda, intendendo tutte esse quattro parti divise per Q, si avrà $\frac{\mathrm{G}}{100}=\frac{\mathrm{R}-\mathrm{S}}{7+\mathrm{U}}$, $\frac{\mathrm{D}}{100}=\frac{\mathrm{S}-\mathrm{R}}{7+\mathrm{U}}$, ma per $\frac{\mathrm{G}'}{100}$, $\frac{\mathrm{D}'}{100}$, avremo

$$\frac{\mathrm{G}'}{100} = \frac{\mathrm{S}-\mathrm{R}}{\mathrm{P}(1+k+\mathrm{H})(p+x)(p'+x')(p''+x'')};$$

$$\frac{\mathrm{D}'}{100} = \frac{\mathrm{R}-\mathrm{S}}{\mathrm{P}(1+k+\mathrm{H})(p+x)(p'+x')(p''+x'')};$$

se suppongasi $p : p+x :: p' : p'+x' :: p'' : p''+x''$ la equazione $yx + \frac{ky(p+x)x'}{p'+x'} + \frac{\mathrm{H}y(p+x)}{p''+x''}\,x'' = \mathrm{QX}+g$, si ridurrà subito a $yx+ky$.

$\frac{p}{p'}x'\mathrm{H}y\frac{p}{p''}\,x'' = \mathrm{QX}+g$, e per essere attese le stesse proporzioni, $p+x-p(=x) : p :: p'+x'-p'(=x') : p'$; e perciò $\frac{p}{p'}\,x'=x$; e così $\frac{p}{p''}\,x''=x$, sarà ancora $yx + kyx + \mathrm{H}yx = \mathrm{QX}+g$; onde

(*) L'equazione che trovasi nelle linee quarta e quinta di questa pagina 211 forma la linea decimottava della carta 176, *recto*, della sopraccitata cartella quinta dei manoscritti del P. Cossali. Presso a questa linea decimottava trovasi scritto nel margine laterale interno del medesimo *recto* « Si veda a pag: » senza il numero di questa pagina.

$$y = \frac{QX + g}{(1 + k + H)x}\ ,\ y' = \frac{k(QX + g)p}{p'(1 + k + H)x}\ ;\ y'' = \frac{H(QX + g)p}{p''(1 + k + H)x}\ ,$$

conseguentemente l' equazione prima $PQ - \frac{e}{n}(P + X)Q - g$
$= \frac{(QX + g)p}{(1 + k + H)x} + \frac{k(QX + g)p}{(1 + k + H)x} + \frac{H(QX + g)p}{(1 + k + H)x} = \frac{QX + g}{x}$, la formola stessa, che quando il mercante secondo non baratta che la merce m, onde anche tutte le formole derivate saranno le medesime. Se vogliasi $y'' = y' = y$ le due equazioni $\frac{e}{n}(P + X)Q + y(p + p' + p'')$ $= PQ - g$, $\frac{e}{n}(P + X)Q + y(p + x + p' + x' + p'' + x'') = (P + X)Q$, essendo inutili le equazioni di condizione, daranno $y(x + x' + x'') = QX + g$, $y = \frac{QX + g}{x + x' + x''}$, onde $\frac{(QX + g)(p + p' + p'')}{x + x' + x''} = PQ - \frac{e}{n}$ $(P + X)Q - g$; e quindi

$$g = \frac{\left(PQ - \frac{e}{n}(P + X)\,Q\right)(x + x' + x'') - QX(p + p' + p'')}{p + x + x' + p'' + x''}$$ guadagno

di $PQ - g = (P + X)\,Q(p + p' + p'') + \frac{e}{n}(P + X)Q(x + x' + x'')$, e

per ciò $$\frac{G}{100} = \frac{\left(P - \frac{e}{n}(P + X)\right)(x + x' + x'') - X(p + p' + p'')}{(P + X)(p + p' + p'') + \frac{e}{n}(P + X)(x + x' + x'')},$$

$$\frac{D}{100} = \frac{X(p + p' + p'') - \left(P - \frac{e}{n}(P + X)\right)(P + X)(x + x' + x'')}{(P + X)(p + p' + p'') + \frac{e}{n}(P + X)(x + x' + x'')},$$

$$\frac{G'}{100} = \frac{X(p + p' + p'') - \left(P - \frac{e}{n}(P + X)\right)(x + x' + x'')}{P(p + x + p' + x' + p'' + x'')},$$

$$\frac{D'}{100} = \frac{\left(P - \frac{e}{n}(P + X)\right)(x + x' + x'') - X(p + p' + p'')}{P(p + x + p' + x' + p'' + x'')}.$$

M è lana di $P = 12$; m pepe di $p = 24$, $p + x = 28$, m' cannella di p' 45 , $p' + x'$ 53; m'' garofani di p'' 34 , $p'' + x''$ 40 : vuole il mercante della lana $\frac{1}{2}$ in pepe, $\frac{1}{3}$ in cannella, $\frac{1}{4}$ in garofani: che deve essere $P+X$, onde il baratto sia uguale ? (¹) Sarà primieramente $\frac{e}{n}=0$, e dovendo stare $y'(p'+x):y(p+x)::\frac{1}{3}:\frac{1}{2}::\frac{2}{3}:1$, sarà $y'(p'+x')=\frac{2}{3}y(p+x)$, cioè $k=\frac{2}{3}$, e per dover essere $y''(p''+x''):y(p+x)::\frac{1}{4}:\frac{1}{2}::\frac{1}{2}:1$; e per ciò $y''(p''+x'')=\frac{1}{2}y(p+x)$, sarà $H=\frac{1}{2}$.

Dunque ne verrà fatto $g=0\,\frac{X\left(24.53.40+\frac{2}{3}.45.28.40+\frac{1}{2}.34.28.53\right)}{4.53.40+\frac{2}{3}.8.28.40+\frac{1}{2}.6.28.53}$

$=12=\frac{X(24.53.40+2.15.28.40+17.28.53)3}{4.53.40.3+2.8.28.40+3.3.28.53}$

$=\frac{X(6.53.40+2.15.7.40+17.7.53)3}{53.40.3+2.2.28.40+3.3.7.53}$, $X=\frac{12.14179}{3.27427}=\frac{4.14179}{27427}$

$=\frac{56716}{27427}=2+\frac{1862}{27427}$; e così trova Tartaglia nel Quesito 35 degli suoi, prendendo in luogo di $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ le frazioni $\frac{6}{13},\frac{4}{13},\frac{3}{13}$, che sono proporzionali. Piglia il prezzo di sei quantità di pepe in contanti $=6.24.=144$, in baratto 168; l'importo della quantità di cannella deve essere nel baratto $\frac{2}{3}$ di quello della quantità del pepe; dunque $=\frac{2}{3}.168=112$, e l'importo della quantità de' garofani $=\frac{1}{2}.168=84$; dunque somma $168+112+84=364$. Si cerchino i corrispondenti valori in contanti: $28:24::168:144$; $53:45::112:95\frac{5}{53}$; $40:34::84:71\frac{2}{5}$ somma $310\frac{131}{265}$. Ora argomentisi $310\frac{131}{265}:364::12:14\frac{1862}{27427}$. F. Luca prende $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ di $P=12$, che sono 6, 4, 3; ma $6+4+3=13$; dunque dicasi $13:6::12:5\frac{7}{13}$; $13:4::12:3\frac{9}{13}$; $13:3.12:2\frac{10}{13}$. Argomentisi ora $24:28::5\frac{7}{13}:\frac{28}{24}::5\frac{7}{13}$; $45:53::3\frac{9}{13}:\frac{53}{45}.3\frac{9}{13}$; $34:40::2\frac{10}{13}:\frac{40}{34}.2\frac{10}{13}$, sarà $P+X=\frac{28}{24}.5\frac{7}{13}+\frac{53}{45}.3\frac{9}{13}+\frac{40}{34}.2\frac{10}{13}=\frac{7}{6}.5\frac{7}{13}+\frac{53}{45}.3\frac{9}{13}+\frac{20}{17}\,2\frac{10}{13}=\frac{7}{6}.\frac{72}{13}+\frac{53}{45}.\frac{48}{13}+\frac{20}{17}.\frac{36}{13}=7.\frac{12}{13}+\frac{53}{15}.\frac{16}{13}+\frac{20}{17}\,\frac{36}{13}$

(¹) Ques. di F. Luca 25°.

$= 6\frac{6}{13} + 4\frac{68}{15.13} + 3\frac{57}{17.13} = 13 + \frac{6}{13} + \frac{68}{15.13} + \frac{57}{17.13} = 13 + \frac{158}{15.13}$ $+ \frac{57}{17.13} = 13 + \frac{3541}{3315} = 14\ \frac{226}{3315}$. F. Luca trova $14\ \frac{}{14095}$.

Lo spirito del metodo di Tartaglia è questo. Dovendo le tre somme di baratto, che dar deve il secondo mercante essere tra loro in proporzione delle frazioni $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$, saranno parimenti nella proporzione di $1, \frac{a}{b}, \frac{a}{c}$. Dia in merce m, la somma $g(p + x)$ saranno le somme proporzionali dovute nelle merci m', m'', $\frac{a}{b} \cdot g(p + x)$, $\frac{a}{c}$ $g.(p+x)$, e l'aggregato di tutte e tre $g(p+x) + \frac{a}{b} \cdot g(p+x) + \frac{a}{c} \cdot g(p+x)$ $= \left(1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c}\right) g(p+x)$. Il valore in contanti corrispondente al valore di baratto $\frac{a}{b} \cdot g(p + x)$ della merce m' si troverà, dicendo $p' + x' : p' :: \frac{a}{b} \cdot g(p + x) : \frac{a}{b} \cdot \frac{g(p + x)p'}{p' + x'}$, e similmente con fare $p'' + x'' : p'' :: \frac{a}{c} \cdot g$ $(p + x) : \frac{a}{c} \cdot \frac{g(p + x)p''}{p'' + x''}$, sarà questo il valore in contanti della merce m'' corrispondente al valore di baratto $\frac{a}{c} \cdot g(p + x)$; onde l'aggregato dei valori in contanti $gp + \frac{a}{b} \cdot \frac{g(p + x)p'}{p' + x'} + \frac{a}{c} \cdot \frac{g(p + x)p''}{p'' + x''}$. Si faccia $gp + \frac{a}{b} \cdot \frac{g(p + x)p'}{p' + x'} + \frac{a}{c} \cdot \frac{g(p + x)p''}{p'' + x''} : g(p + x)\left(1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c}\right) :: \mathrm{P} :$

$$\frac{\left(1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c}\right)(p + x)\,\mathrm{P}}{p + \frac{a}{b} \cdot \frac{(p + x)p'}{p' + x'} + \frac{a}{c} \cdot \frac{(p + x)p''}{p'' + x''}} = \mathrm{P} + \mathrm{X}$$

: la quale calcolando, si troverà coincidere colla mia. Se si volesse considerare il caso del guadagno pel primo mercante di $\frac{\mathrm{G}'}{100}$ in luogo di P nella proporzione, si porrebbe $\mathrm{P} + \frac{\mathrm{G}'}{100}\,\mathrm{P}$.

Lo spirito del metodo di F. Luca è il seguente. Prendasi $\frac{\mathrm{P}}{a}$ $+ \frac{\mathrm{P}}{b} + \frac{\mathrm{P}}{c}$; e facciasi $\frac{\mathrm{P}}{a} + \frac{\mathrm{P}}{b} + \frac{\mathrm{P}}{c} : \mathrm{P} :: \frac{\mathrm{P}}{a} : \frac{\mathrm{P}}{\frac{\mathrm{P}}{a} + \frac{\mathrm{P}}{b} + \frac{\mathrm{P}}{c}} \cdot \frac{\mathrm{P}}{a}$; $\frac{\mathrm{P}}{a}$

$+\frac{P}{b}+\frac{P}{c}:P::\frac{P}{b}:\frac{P}{\frac{P}{a}+\frac{P}{b}+\frac{P}{c}}\cdot\frac{P}{b}$; $\frac{P}{a}+\frac{P}{b}+\frac{P}{c}:P::\frac{P}{c}:$ $\frac{P}{\frac{P}{a}+\frac{P}{b}+\frac{P}{c}}\cdot\frac{P}{c}$; indi si argomenti $p:p+x::\frac{P}{\frac{P}{a}+\frac{P}{b}+\frac{P}{c}}\cdot$ $\frac{P}{a}:\frac{P}{\frac{P}{a}+\frac{P}{b}+\frac{P}{c}}\cdot\frac{P}{a}\cdot\frac{p+x}{p}p':p'+x'::\frac{P}{\frac{P}{a}+\frac{P}{b}+\frac{P}{c}}\cdot\frac{P}{b}:$ $\frac{P}{\frac{P}{a}+\frac{P}{b}+\frac{P}{c}}\cdot\frac{P}{b}\cdot\frac{p'+x'}{p'}p'':p''+x''::\frac{P}{\frac{P}{a}+\frac{P}{b}+\frac{P}{c}}\cdot\frac{P}{c}:$ $\frac{P}{\frac{P}{a}+\frac{P}{b}+\frac{P}{c}}\cdot\frac{P}{c}\cdot\frac{p''+x''}{p''}$, sarà $P+X=\frac{p+x}{p}\frac{P}{\frac{P}{a}+\frac{P}{b}+\frac{P}{c}}\cdot\frac{P}{a}$ $+\frac{p'+x'}{p'}\cdot\frac{P}{\frac{P}{a}+\frac{P}{b}+\frac{P}{c}}\cdot\frac{P}{b}+\frac{p''+x''}{p''}\cdot\frac{P}{\frac{P}{a}+\frac{P}{b}+\frac{P}{c}}\cdot\frac{P}{c}$. Si può semplificare questa formola, essendo $\frac{P}{\frac{P}{a}+\frac{P}{b}+\frac{P}{c}}=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$ onde $P+X=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\left(\frac{p+x}{p}\cdot\frac{P}{a}+\frac{p'+x'}{p'}\cdot\frac{P}{b}+\frac{p''+x''}{p''}\cdot\frac{P}{c}\right)$.

Nel caso di considerare il guadagno $\frac{G'}{100}$ pel primo mercante, in luogo di P, adopera F. Luca nella proporzione $P+\frac{G}{100}P$; e per ciò basterà surrogarlo nel secondo membro dell'equazione. Non si vede la ragione, perchè sia falso questo metodo, anzi par ragionevole; ma l'applicazione smentisce l'apparenza: a scoprire il difetto, paragoniamo la espressione cui conduce di $P+X$ con quella che proviene dal metodo di Tartaglia. Sia dunque $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\left(\frac{p+x}{p}\frac{P}{a}+\frac{p'+x'}{p'}\cdot\frac{P}{b}\right.$ $\left.+\frac{p''+x''}{p''}\cdot\frac{P}{c}\right)=\frac{\left(1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\right)(p+x)P}{p+\frac{a}{b}\cdot\frac{(p+x)}{p'+x'}+\frac{a}{c}\,\frac{(p+x)p''}{p''+x''}}$, ossia $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$

$$\left(\frac{p+x}{p}\cdot\frac{1}{a}+\frac{p'+x'}{p'}\cdot\frac{1}{b}+\frac{p''+x''}{p''}\cdot\frac{1}{c}\right)=\frac{\left(1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\right)(p+x)}{p+\frac{a}{b}\cdot\frac{(p+x)p'}{p'+x'}+\frac{a}{c}\cdot\frac{(p+x)p''}{p''+x''}}$$

$$=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{p}{p+x}\cdot\frac{1}{a}+\frac{p'}{p'+x'}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{p''}{p''+x''}\cdot\frac{1}{c}}\text{; onde }\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\left(\frac{p+x}{p}\cdot\frac{1}{a}\right.$$

$$\left.+\frac{p'+x'}{p'}\cdot\frac{1}{b}+\frac{p''+x''}{p''}\cdot\frac{1}{c}\right)\left(\frac{p}{p+x}\cdot\frac{1}{a}+\frac{p'}{p'+x'}\cdot\frac{1}{b}+\frac{p''}{p''+x''}\cdot\frac{1}{c}\right)$$

$$=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\left(\frac{p(p'+x')}{p'(p+x)}+\frac{p(p+x)}{p(p'+x')}\right)\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}+\left(\frac{p(p''+x'')}{p''(p+x)}+\frac{p''(p+x)}{p(p''+x'')}\right)$$

$\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{c}+\left(\frac{p'(p''+x'')}{p''(p'+x')}+\frac{p''(p'+x')}{p'(p''+x'')}\right)\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}$: dalla quale equazione ne viene $\frac{p(p'+x')}{p'(p+x)}+\frac{p'(p+x)}{p(p'+x')}=2$; $\frac{p(p''+x'')}{p''(p+x)}+\frac{p''(p+x)}{p(p''+x'')}=2$; $\frac{p'(p''+x'')}{p''(p'+x')}+\frac{p''(p'+x')}{p'(p''+x'')}=2$: ognuna delle quali equazioni è della forma $\frac{f}{g}+\frac{g}{f}=2$, che importa $f^2+g^2=2fg$, $f^2-2fg+g^2=0$, $f-g=0$, $f=g$. Dunque $p(p'+x')=p'(p+x)$, $p(p''+x'')=p''(p+x)$, $p'(p''+x'')=p''(p'+x')$; donde ne segue $p'+x'=\frac{p'(p+x)}{p}$, $p''+x''=\frac{p''(p+x)}{p}$, $p''+x''=\frac{p''(p'+p')}{p}$, cioè la condizione dei prezzi di baratto in proporzione di quelli in contanti: il metodo dunque di F. Luca è giusto in questa condizione, ed è per ciò appunto, per aver cioè qualche verità, che non si manifesta subito falso. Ma F. Luca lo applica fuori del caso di tal condizione, ed in ciò erra, errore nato, senza dubbio, dall'averlo trovato giusto in qualche caso compreso nella condizione, e dal non aver avvertito la differenza di casi.

X fu $=1$, $p=10$, $p+x=12$, $G'=\frac{3}{2}P$: qual fu P? (¹) Per la formola $G'=\left(\frac{p(P+X)}{(p+x)P}-1\right)100$, si trova $P^2+\frac{50}{9}P=\frac{500}{9}$, $P=\frac{-50}{9}+\sqrt{\left(\left(\frac{50}{9}\right)^2+\frac{500}{9}\right)}=\frac{-50}{9}+\frac{83,6}{9}$ prossimamente $=\frac{33,6}{9}$ $=3\frac{66}{90}$. F. Luca usa la regola di doppia falsa posizione, e dice sor-

(¹) Ques. di F. Luca 26.°

tirne $3\frac{23}{34}$; ma realmente ne sorte $3\,\frac{13}{18}$, che non manca da $3\frac{66}{90}$, che di $\frac{1}{90}$.

P fu $= 4$, $P + X = 5$, $p = 10$, $p + x = 13$: chi ha guadagnato? E qual deve essere il ristoro all'altro che ha discapitato? (1) Guadagnò il secondo, ed il quoziente di $\frac{13}{13-10}$ diviso per $\frac{5}{5-4}$, e generalmente $\frac{p+x}{x} : \frac{P+X}{X} = \frac{(p+x)X}{x(P+X)}$, sarà la parte che il secondo dovrà al primo in merce m, ed $1 - \frac{(p+x)X}{x(P+X)}$, ciò che gli dovrà in contanti a ristoro, cioè a rendere il baratto uguale. Ciò rendesi manifesto dalla mia equazione fondamentale seconda del problema secondo $\frac{e}{n}\,(P+X)Q + y(p+x) = Q(P+X)$. Poichè sostituendo il valore ivi trovato di $y = \frac{QX}{x}$, e poi dividendo tutta l'equazione per $(P+X)Q$, si ha $\frac{e}{n} + \frac{(p+x)X}{x(P+X)} = 1$.

Insegna F. Luca che, formati i quozienti $\frac{p+x}{x}$, $\frac{P+X}{X}$, quella parte cui spetta il maggior quoziente, deve essere ristorata.

$P = 8$, $P + X = 11$, $p = 14$, $p + x = 16$, $\frac{e}{n} = \frac{1}{3}$: che parte deve il primo mercante al secondo in merce M, quali in contanti? (2) $\frac{1}{3}\,11 = 3\frac{2}{3}$, $11 - \frac{1}{3}.\,11, = 7\frac{1}{3}$, $8 - 3\frac{2}{3} = 4\frac{1}{3}$. Dicasi $14 - z : 16 - z :: 4\frac{1}{3} : \frac{4\frac{1}{3}.(16-z)}{14-z} = 7\frac{1}{3}$, quindi $z = \frac{100}{9}$, e sarà $\frac{z}{16} = \frac{100}{9.\,16} = \frac{25}{36}$ la parte del primo mercante dovuta al secondo in contanti, ed $1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$ la parte dovutagli in merce M. Trasportando il particolare al generale sarà $p - z : p + x - z :: P - \frac{e}{n}\,(P+X) :$

$$\frac{(p+x-z)\left(P - \frac{e}{n}\,(P+X)\right)}{p-z} = P + X - \frac{e}{n}(P+X);$$ donde tirasi

(1) Ques. di F. Luca 27°.
(2) Ques. di F. Luca 28°.

$$z = \frac{pX - x\left(P - \frac{e}{n}(P+X)\right)}{X}\text{; e quindi } \frac{z}{p+x} = \frac{pX - x\left(P - \frac{e}{n}(P+X)\right)}{X(p+x)}.$$

A dimostrare l'origine di questa regola, servirà il problema seguente.

Problema ottavo. Il mercante della merce M ne alza il prezzo da P a $P+x$, e ne vuole la parte $\frac{e}{n}$ in contanti; il mercante della merce m ne alza il prezzo da p a $p+x$, e ne vuole a far baratto uguale in contanti la parte $\frac{r}{t}$: cercare l' equazione tra questi valori. Prima equazione a contanti, $\frac{e}{n}(P+X)Q + yp = PQ + \frac{r}{t}(p+x)y$; seconda equazione di baratto, $\frac{e}{n}(P+X)Q + y(p+x) = (P+X)Q + \frac{r}{t}(p+x)y$. Sottraendo la prima dalla seconda, ne viene $y = \frac{QX}{x}$, e questo valore nella prima sostituito, porge $\frac{e}{n}(P+X)Q + \frac{QX}{x}p = PQ + \frac{r}{t}(p+x)$. $\frac{QX}{x}pX - x\left(P - \frac{e}{n}(P+X)\right) = \frac{r}{t}(p+x)X$; onde tosto $\frac{r}{t} = \frac{pX - x\left(P - \frac{e}{n}(P+X)\right)}{X(p+x)}$ formola della regola di F. Luca.

Tartaglia non tocca tal problema.

Vedi i quesiti di F. Luca 27,° 29°, a pag. 13, quad. 4°. [1].

Quivi prende inoltre F. Luca a dimostrare, lo stesso essere il dire, che il mercante primo vuole la parte $\frac{e}{n}$ in contanti; e il dire, che il mercante secondo esibisce di dargliela, il che è evidente.

Problema nono. Includere nel problema superiore la condizione del guadagno. Sarà la prima equazione a contanti, $\frac{e}{n}(P+X)Q + py = PQ + \frac{r}{t}(p+x)y - g$; seconda equazione di baratto, $\frac{e}{n}(P+X)Q + y(p+x) = (P+X)Q + \frac{r}{t}(p+x)y$: Sottratta la prima dalla seconda, ricavasi $y = \frac{QX+g}{x}$, e rimettendo questo valore nella prima, si deduce: $g = \frac{x\left(PQ - \frac{e}{n}(P+X)Q\right) - QX\left(p - \frac{r}{t}(p+x)\right)}{\left(1 - \frac{r}{t}\right)(p+x)}$ guadagno

[1] Ques. di F. Luca 27°, e 29°.

rispetto ad $\frac{e}{n}(P+X)Q+\frac{QX+g}{x}$.

$$p=\frac{p(P+X)Q+\frac{e}{n}(P+X)Q\left(x-\frac{r}{t}(p+x)\right)}{\left(1-\frac{r}{t}\right)(p+x)}\text{; onde}$$

$$\frac{G}{100}=\frac{x\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right)-X\left(p-\frac{r}{t}(p+x)\right)}{\left(p+x.\frac{e}{n}\right)(P+X)-\frac{e}{n}(P+X).\frac{r}{t}(p+x)},$$

$$\frac{D}{100}=\frac{-x\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right)+X\left(p-\frac{r}{t}(p+x)\right)}{\left(p+x.\frac{e}{n}\right)(P+X)-\frac{e}{n}(P+X).\frac{r}{t}(p+x)};$$

il corrispondente $\frac{D'}{100}$, o $\frac{G'}{100}$ del primo mercante, riportandosi a $PQ+\frac{r}{t}(p+x).\frac{QX+g}{x}=\frac{e}{n}(P+X)Q+\frac{QX+g}{x}.p+g$

$$=\frac{Q\left(P+X.\frac{r}{t}\right)(p+x)-\frac{e}{n}(P+X)Q.\frac{r}{t}(p+x)}{\left(1-\frac{r}{t}\right)(p+x)}\text{; conseguente-}$$

mente $$\frac{D'}{100}=\frac{x\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right)-X\left(p-\frac{r}{t}(p+x)\right)}{\left(P+X.\frac{r}{t}\right)(p+x)-\frac{e}{n}(P+X).\frac{r}{t}(p+x)},$$

$$\frac{G'}{100}=\frac{X\left(p-\frac{r}{t}(p+x)\right)-x\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right)}{\left(P+X.\frac{r}{t}\right)(p+x)-\frac{e}{n}(P+X).\frac{r}{t}(p+x)}.$$ Di qui si cava in

supposto di $\frac{G'}{100}=0$, $\frac{r}{t}=\frac{-x\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right)+pX}{X(p+x)}$, e general-

mente $$\frac{r'}{t}=\frac{pX-x\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right)-\frac{G}{100}P(p+x)}{\left(\frac{G}{100}\left(X-\frac{e}{n}(P+X)\right)+X\right)(p+x)}.$$

Questo quesito di F. Luca non s'intende bene[1]. Pone egli la merce M panno, la cui canna a contanti vaglia lire $5=P$; a baratto $8=P+X$; la merce m lana, il cui prezzo a contanti $p=13$ al centinaio; a baratto $p+x=15$; pone che il primo mercante voglia $\frac{e}{n}=\frac{1}{4}$ in contanti, e che il secondo guadagni il 5 per 100, e domanda qual parte lo stesso secondo mercante della lana dee chiedere in denaro a quello del panno, onde il baratto sia uguale. Il suo modo di operare è questo. Prende la ragione $P-\frac{e}{n}(P+X):\left(P+X-\frac{e}{n}\right)(P+X)$, che riduce ad $1:\dfrac{P+X-\frac{e}{n}(P+X)}{P-\frac{e}{n}(P+X)}$, e moltiplicando per 100 a 100: $\dfrac{\left(P+X-\frac{e}{n}(P+X)\right)100}{P-\frac{e}{n}(P+X)}$; ed aggiugnendo il guadagno 5 per 100 che io dinoto per G, $100:\dfrac{\left(P+X-\frac{e}{n}(P+X)\right)100}{P-\frac{e}{n}(P+X)}+G$: finalmente istituisce la equazione $\left(\dfrac{\left(P+X-\frac{e}{n}(P+X)\right)100}{P-\frac{e}{n}(P+X)}+G\right)(p-z)$ $=(p+x-z)\,100$, onde ricavasi

$$z=\frac{100Xp+(Gp-100\,x)\left(P-\frac{e}{n}(P-X)\right)}{100X+G\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right)},$$

e dividendo per $p+x$, dice essere

$$\frac{z}{p+x}=\frac{100Xp+(Gp-100x)\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right)}{(100X+G)\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right)(p+x)}$$

la parte cercata che il mercante della lana deve chiedere in contanti a quello del panno, a rendere il baratto uguale. Ma guadagnando esso mercante della lana il 5 per 100, come deve egli chiedere parte in contanti all'altro, a rendere il baratto uguale? Essendo $\frac{15}{15-13}>\frac{8}{8-5}$, deve, giusta il principio di F. Luca, il mercante della lana essere ri-

[1] Ques. di F. Luca 30ª.

storato, e molto più che è obbligato a dare in contanti al primo la parte $\frac{e}{n}=\frac{1}{4}$ di $(P+X)Q$. Ma anche correggendo l'esposizione, e riferendo il guadagno al primo mercante, la formola risultante dal metodo di F. Luca, non concorda colla mia. Nasce la differenza dalla relazione che F. Luca dà al guadagno del 5 per 100. La equazione da lui istituita, risolvesi nella proporzione

$$p-z:p+x-z::100:\frac{\left(P+X-\frac{e}{n}(P+X)\right)100}{P-\frac{e}{n}(P+X)}+G::100:100$$

$+\frac{100X}{P-\frac{e}{n}(P+X)}+G$. Se fingiamo le equazioni prima $\frac{e}{n}(P+X)Q+yp=PQ+zy$; seconda $\frac{e}{n}(P+X)Q+y(p+x)=(P+X)Q+\frac{G}{100}\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right)Q$ ne verrà $y(p-z)=\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right)Q$; $y(p+x-z)=\left(P+X-\frac{e}{n}(P-X)\right)Q+\frac{G}{100}\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right)Q$; e quindi $y(p-z):y(p+x-z)$; ossia $p-z:p+x-z::P-\frac{e}{n}(P+X):P+X-\frac{e}{n}(P+X)+\frac{G}{100}\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right)::1:\frac{P+X-\frac{e}{n}(P+X)}{P-\frac{e}{n}(P+X)}+\frac{G}{100}::$ $100:\frac{\left(P+X-\frac{e}{n}(P+X)\right)100}{P-\frac{e}{n}(P+X)}+G$. Le due equazioni finte spiegano i supposti di F. Luca $X=\sqrt{P}$, si cerca P essendo $p=15$, $p+x=24$, $\frac{e}{n}=\frac{1}{3}$; ed essendo stato il baratto uguale (1). Dalla formola $P=\frac{(P+X)\left(p+x.\frac{e}{n}\right)}{p+x}$, si cava $\left(1-\frac{e}{n}\right)xP=\left(p+\frac{e}{n}x\right)X$, nel nostro caso $=\left(p+\frac{e}{n}.x\right)\sqrt{P}$, e sostituendo i valori dati $\frac{2}{3}xP=18\sqrt{P}$, $P=3\sqrt{P}$, $P^2=9P$, $P=9$. F. Luca opera così. Posto $P=z^2$; dunque $P+X=z^2+z$,

(1) Ques. di F. Luca 31.ª

$z^2 - \frac{1}{3}(z^2 + z) : z^2 + z - \frac{1}{3}(z^2 + z) :: 15 : 24$, ossia $\frac{2}{3}z^2 - \frac{1}{3}z : \frac{2}{3}z^2 + \frac{2}{3}z :: 15 : 24$, cioè $2z^2 - z : 2z^2 + 2z :: 15 : 24 :: 5 : 8$; e per ciò $16z^2 - 82 = 10z^2 + 10z$, $6z^2 = 18z$, $z = 3$.

$P + X$ fu $= 4\sqrt{P}$, $\frac{e}{n} = \frac{1}{3}p = 18$, $p + x = 24$, ed il mercante primo si trovò guadagnare 20 per 100 de'suoi denari: che fu P? [1] Si supponga z^2; dunque $P + X = 4z$, $P - \frac{e}{n}(P + X) = z^2 - \frac{4}{3}z$, $P + X - \frac{e}{n}(P + X) = 4z - \frac{4}{3}z = 2\frac{2}{3}z$. Guadagnando il 20 per 100, guadagna $\frac{1}{5}$ del capitale; dunque prendi $\frac{1}{5}\left(z^2 - \frac{4}{3}z\right)$, che sarà il guadagno sopra $z^2 - \frac{4}{3}z$, l'aggregato sarà $z^2 - \frac{4}{3}z + \frac{1}{5}z^2 - \frac{4}{15}z = 1\frac{1}{5}z^2 - 1\frac{3}{5}z$. Argomenta $1\frac{1}{5}z^2 - 1\frac{3}{5}z : 2\frac{2}{3}z :: 18 : \frac{2\frac{2}{3}z.18}{1\frac{1}{5}z^2 - 1\frac{3}{5}z} = 24$, $2\frac{2}{3}.z.3 = 4\left(1\frac{1}{5}z^2 - 1\frac{3}{5}z\right)$, $2 = 1\frac{1}{5}z - 1\frac{3}{5}$, $18 = 6z$, $z = 3$. Così F. Luca, onde $P = 9$, $P + X = 12$. F. Luca dunque qui intende il guadagno del 20 per 100 sopra $P - \frac{e}{n}(P + X)$: supposta questa relazione si faccia $\frac{5}{100}\left(P - \frac{e}{n}(P + X)\right)Q = fQ = d$, e sostituendo nelle due mie equazioni fondamentali $py = \left(P - \frac{e}{n}(P + X)\right)Q + d$; $(p - x)y = \left(P + X - \frac{e}{n}(P + X)\right)Q$, si avrà $P - \frac{e}{n}(P + X) + \frac{5}{100}\left(P - \frac{e}{n}(P + X)\right) : P + X - \frac{e}{n}\left((P + X) : p : p + x\right)$.

$X = 1$, $p = 20$, $p + x = 21$, $D = 10$: qual fu P? [2] Facciasi $= z$, $P + X = z + 1$. Perdendo il secondo mercante 10 per 100, argomenta: $100 : 100 - D :: p : \frac{p(100 - D)}{100}$; indi argomenta $\frac{p(100 - G)}{100} : p + x :: z : \frac{z(p + x)100}{p(100 - D)} = z + 1$; onde $z(p + x)100 = (z + 1)(100 - D)p$; e quindi $z = \frac{p(100 - D)}{100x - pD)}$. Concorda colla mia formola a pagina 13:

[1] Ques. di F. Luca 32.°
[2] Ques. di F. Luca 33.°

$$P = \frac{(P + X)\left(1 - \frac{D}{100}\right)p}{p + x}.$$

P fu $= 25$, $P + X = 30$, $\frac{e}{n} = \frac{1}{4}$, $p = 4$, $\frac{r}{t} = \frac{1}{10}$: che fu $p + x$ essendo il baratto uguale? [1] Supponi $p + x = z$, ed argomenta $P - \frac{e}{n}(P + X) : P + X - \frac{e}{n}(P + X) :: p - \frac{r}{t} \cdot z : z - \frac{r}{t} . z$. La ragione di questa proporzione, apparisce dalle due equazioni $\frac{e}{n}(P + X)$ $Q + yp = PQ + \frac{r}{t}(p + x)y$; $\frac{e}{n}(P + X)Q + y(p + x) = (P + X)Q + \frac{r}{t}(p + x)y$.

$P = 5$, $P + X = 8$, $p = 50$, ed il mercante secondo dalla lana si trovi $36\frac{2}{3}$ per 100 più di quello dal panno, cioè $\frac{G}{100} + \frac{D'}{100} = \frac{36\frac{2}{3}}{100}$: qual fu $p + x$? [2] Osserva prima F. Luca che generalmente se uno guadagna $\frac{1}{z}$, l'altro perde $\frac{1}{z + 1}$; poichè, esempigrazia, se io ti do 100, e tu mi dai 110, tu discapiti $\frac{1}{11}$, ed io guadagno $\frac{1}{10}$: quindi ponendo $\frac{G}{100} = \frac{1}{z}$, $\frac{D'}{100} = \frac{1}{z + 1}$, e riflettendo che $\frac{36\frac{2}{3}}{100} = \frac{110}{300} = \frac{11}{30}$, si avrà $\frac{11}{30} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z + 1} = \frac{2z + 1}{z^2 + z}$, $11(z^2 + z) = 30(2z + 1)$, $z^2 - \frac{49}{11}z = 30$, $z = 5$, $\frac{G}{100} = \frac{1}{5}$, $\frac{D'}{100} = \frac{1}{6}$, ossia $\frac{G}{100} = \frac{20}{100}$, $\frac{D'}{100} = \frac{16\frac{2}{3}}{100}$, $\frac{G}{100} + \frac{D'}{100} = \frac{36\frac{2}{3}}{100}$. Si faccia ora $P : P + X :: p + \frac{1}{5}p : p + x = \frac{\left(p + \frac{1}{5}p\right)(P + X)}{P} = \frac{\left(50 + \frac{1}{5} \cdot 50\right) . 8}{5} = \frac{60 . 8}{5} = 12 . 8 = 96$. Di fatti posto il centinaio di libbre di lana in baratto a lire 96, il primo mercante del panno, dovrà al secondo dare canne di panno 12; poichè $12 . 8 = 96$; ma in realtà od a contanti, il secondo avrà dato 50, ed avrà ricevuto $5 . 12 = 60$; dunque avrà di guadagno 10 sopra 50,

(1) Ques. di F. Luca 34.°
(2) Ques. di F. Luca 35.°

che importa il 20 per 100, ed il primo avrà di perdita 10 per 60 $= \frac{1}{6}$, che importa $16\frac{2}{3}$ per 100.

Nelle due equazioni $\frac{e}{n}(P + X)Q + py = PQ - g$; $\frac{e}{n}(P + X) + (p + x)y = (P + X)Q$, si faccia $\frac{e}{n} = 0$, e $g = \frac{1}{5}py$, e si avrà $\left(p + \frac{1}{5}p\right)y = PQ$; $(p + x)y = (P + X)Q$, e quindi $P : P + X :: p + \frac{1}{5}p : p + x$. $P = 30$, $P + X = 36$, $\frac{e}{n} = \frac{1}{3}$, $p = 5$ $\frac{G'}{100} + \frac{D}{100} = \frac{10}{100}$: qual fu $p + x$? Fatto $\frac{G'}{100} = \frac{1}{z}$, $\frac{D}{100} = \frac{1}{z+1}$, sarà $\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} = \frac{1}{10}$, cioè $\frac{2z + 1}{z^2 + z} = \frac{1}{10}$, $20z + 10 = z^2 + z$, $z^2 - 192 = 10$, $z = 9\frac{1}{2} + \sqrt{100\frac{1}{4}}$, onde $\frac{G'}{100} = \frac{1}{9\frac{1}{2} + \sqrt{100\frac{1}{4}}}$, $\frac{D}{100} = \frac{1}{10\frac{1}{2} + \sqrt{100\frac{1}{4}}}$. In luogo di P si dovrà computare $P + \frac{P}{9\frac{1}{2} + \sqrt{100\frac{1}{4}}}$, ossia

$$P + \frac{P\left(9\frac{1}{2} - \sqrt{100\frac{1}{4}}\right)}{\left(9\frac{1}{2} + \sqrt{100\frac{1}{4}}\right)\left(9\frac{1}{2} - \sqrt{100\frac{1}{4}}\right)} = P + \frac{P\left(9\frac{1}{2} - \sqrt{100\frac{1}{4}}\right)}{-10} = P$$

$- P\left(\frac{19}{20} - \frac{1}{10}\sqrt{100\frac{1}{4}}\right) = \left(1 - \frac{19}{20}\right)P + \frac{1}{10}\sqrt{100\frac{1}{4}}\,P = \frac{1}{20}P + \frac{1}{10}\sqrt{100\frac{1}{4}}.P$. Ora volendo il primo mercante $\frac{e}{n}$ in contanti, fa la proporzione $\frac{1}{20}P + \frac{1}{10}\sqrt{100\frac{1}{4}}.P - \frac{e}{n}(P + X) : P + X - \frac{e}{n}(P + X) :: p : p + x$. Nel caso particolare $\frac{30}{20} + \frac{30}{10}\sqrt{100\frac{1}{4}} - \frac{1}{3}.36 : 36 - \frac{1}{3}.36 :: 5 : p + x$, ossia $\frac{3}{2} + 3\sqrt{100\frac{1}{4}} - 12 : 24 :: 5 : p + x = \frac{120}{3\sqrt{100\frac{1}{4}} - 10\frac{1}{2}}$

$$= \frac{120\left(3\sqrt{100\frac{1}{4}} + 10\frac{1}{2}\right)}{792} = \frac{360\left(\sqrt{100\frac{1}{4}} + 1260\right)}{792} = \frac{10\sqrt{100\frac{1}{4}}}{22} + \frac{10.10\frac{1}{2}}{66}$$

$$=\frac{5\sqrt{100\frac{1}{4}}}{11}+\frac{5.\,10\frac{1}{2}}{33}=\sqrt{\frac{2506\frac{1}{4}}{121}}+\frac{105}{66}=\sqrt{20\frac{86\frac{1}{4}}{121}}+1\ \frac{39}{66}$$

$$=\sqrt{20\frac{86\frac{1}{4}}{121}}+1\,\frac{13}{22}=\sqrt{20\,\frac{345}{484}}+1\,\frac{13}{22}.$$

Problema decimo. Un mercante di merce M, il cui prezzo a contanti P ne vuole, concedendo mesi T, il prezzo $P+X$, volendo di più $\frac{e}{n}(P+X)$ tosto in contanti, il mercante della merce m, il cui prezzo p, concedendo reciprocamente mesi t, vuole il prezzo $p+p$; e tosto in contanti $\frac{r}{t}(p+x)$: quali sono le condizioni di baratto uguale? (¹) F. Luca osserva, che $P-\frac{e}{n}(P+X)$ è il contante che pel tempo concesso T si accresce a $P+X-\frac{e}{n}(P+X)$, e l'accrescimento in tal tempo è $P+X-\frac{e}{n}(P+X)-\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right)=X$; dunque dicendo $T:X::t:\frac{t}{T}X$, sarebbe questo l'accrescimento del contante $P-\frac{e}{n}$ $(P+X)$ nel tempo t, onde nel fine di tal tempo $P-\frac{e}{n}(P+X)$ sarebbe $P-\frac{e}{n}(P+X)+\frac{t}{T}$. Si faccia la proporzione $P-\frac{e}{n}(P+X)$: $P+\frac{t}{T}.X-\frac{e}{n}(P+X)::p-\frac{r}{t}(p+x):p+x-\frac{r}{t}(p+x)$, e questa proporzione sarà la condizione del baratto uguale. (²)

Se $\frac{e}{n}=0$, $\frac{r}{t}=0$, la proporzione si riduce a $P:P+\frac{t}{T}X::p:$ $p+x$; onde $\frac{t}{T}X:P::x:p$; $X:\frac{T}{t}P::x:p$; $X:x::TP:tp$; quindi $t=\frac{TP}{X}.\frac{x}{p}$. F. Luca nel quesito 37 usa tre modi: primo, si faccia $P:P+X:p:\frac{(P+X)}{p}$, si prenda $\frac{(P+X)p}{P}-p=\frac{pX}{P}$, poi si argomenti : $\frac{pX}{P}:T::x:T.\frac{P}{p}.\frac{x}{X}=t$. Secondo, poichè in mesi T il contante P cresce X, sarà $\frac{X}{P}$ il crescimento dell'unità in esso tempo T,

(¹) Ques. di F. Luca 46°.

(²) Ques. di F. Luca 37°; di Tartaglia 37° e 38°. $P=6$, $P+X=7$, $T=4$, $p=8$, $p+x=9$, $t=\frac{T.6}{1.}.\frac{1}{8}=3$: appresso F. Luca p, x sono soldi, laddove P, X sono lire, ma siccome nella formola x è diviso per p, P per X, così non importa di riflettere alla specie della moneta.

e $\frac{X}{PT}$ il crescimento dell'unità del contante nell'unità del tempo, cioè in un mese, ed $\frac{X}{PT}$ è il crescimento dell'unità del contante in un numero di mesi t; e finalmente $\frac{X}{PT}\cdot t\cdot p$ il crescimento del contante p nel tempo t; il qual crescimento deve essere $=x$; dunque $\frac{X}{PT}\cdot t\cdot p = x$, $t = T\cdot\frac{P}{X}\cdot\frac{x}{p}$. Terzo, dopo aver dedotto che $\frac{X}{PT}$ è il crescimento dell'unità del contante P in un mese, deduci essere similmente $\frac{x}{pt}$ il crescimento dell'unità del contante p in un mese; dunque per uguaglianza di condizione dovrà essere $\frac{X}{PT}=\frac{x}{pt}$. Tartaglia dice su questo, quesito 37° di Tartaglia, che egli *conclude per una via assai oscura:* io non vi trovo questa oscurità.

La prima idea che si presenta nel problema, supponendo $\frac{e}{n}=0$, $\frac{r}{t}=0$, si è appunto la proporzione $X : PT :: x : pt$, e questa deve abbracciarsi per la più semplice e diretta soluzione.

E per similitudine nel caso di $\frac{e}{n}$, $\frac{r}{t}$ veri rotti, si avrà $X : T\left(P-\frac{e}{n}(P+X)\right) :: x : t\left(p-\frac{r}{t}(p+x)\right)$.

Per esempio posto $P=6$, $P+X=10$, $T=7$, $p=2$, $t=10\frac{1}{2}$, $\frac{e}{n}=\frac{1}{5}$, $\frac{r}{t}=\frac{1}{3}$: se cerchisi $p+x$, come cerca F. Luca nel quesito 46°, [1] si avrà $4 : 7\left(6-\frac{1}{5}\cdot 10\right) :: x : 10\frac{1}{2}\left(12-\frac{1}{3}(p+2)\right)$, ossia $4:28$, cioè $1:7 :: x : 126-\frac{7}{2}(p+x)$, onde $7x = 126-\frac{7}{2}(p+x) = 126-\frac{7}{2}p-\frac{7}{2}x = 126-\frac{7}{2}\cdot 12-3\frac{1}{2}x = 126-42-3\frac{1}{2}x = 84-3\frac{1}{2}x$; quindi $10\frac{1}{2}x = 84$, $21x = 2.84$, $x = \frac{2.84}{21} = 2.4 = 8$.

Il quesito di F. Luca 38° è affatto simile al 37°. [2]

Nel quesito 39° cerca F. Luca $p+x$ nel caso semplice di $\frac{e}{n}=\frac{r}{t}=0$ [3].

[1] Ques. di F. Luca 46.°
[2] Ques. di F. Luca 38.°
[3] Ques. di F. Luca 39.°

Nel quesito 40° cerca p nello stesso caso semplice (1). Si sostituisca nella proporzione $X : TP :: x : pt$ in luogo di $x, p+x-p$, supponendosi noto $p+x$, e si avrà $X : TP :: p+x-p : pt$; onde $Xpt = TP(p+x) - TPp$, $p = \frac{TP(p+x)}{Xt+TP}$.

Esempio. $P = 4\frac{1}{2}$, $P+X = 6$, $T = 8$, $p+x = 15$, $t = 10$, sarà $p = \frac{8.\,4\frac{1}{2}.\,15}{10.\,1\frac{1}{2}+8.\,4\frac{1}{2}} = \frac{36.\,15}{15+36} = \frac{36.\,5}{5+12} = \frac{180}{17} = 10\,\frac{10}{17}$.

Il quesito di F. Luca 41° è simile al precedente (2).

E parimenti il 42° (3).

Nel quesito 45°, cerca F. Luca $\frac{r}{t}$ per P, $P+X$, $\frac{e}{n}$, $p, p+x$, T, t. (4). Ora dalla proporzione $X : T\left(P - \frac{e}{n}(P+X)\right) :: x : t\left(P - \frac{r}{t}(p+x)\right)$, si cava $\frac{r}{t} = \frac{Xtp - xT\left(P - \frac{e}{n}(P+X)\right)}{Xt(p+x)}$.

Esempio. $P = 5$, $P+X = 8$, $T = 10$, $\frac{e}{n} = \frac{1}{4}$, $p = 11$, $p+x = 13$, $t = 12$ $\frac{r}{t} = \frac{3.\,12.\,11 - 2.\,10\left(5 - \frac{1}{4}.\,8\right)}{3.\,12.\,13} = \frac{12.\,11 - 2.10}{12.\,13} = \frac{3.\,11 - 5}{3.\,13} = \frac{28}{39}$.

Il quesito 47° è simile al 37° (5). Noti P, $P+X$, $\frac{e}{n}$, p, $p+x$, T ritrovare quanta è computata la rendita dell'unità, di una lira, di un ducato, secondo che P è lire o ducati, al mese? (6) $\frac{e}{n}(P+X)Q$ è la parte in contante dal primo mercante voluta, però concedendo il numero di mesi T, $\left(P + X - \frac{e}{n}(P+X)\right)Q$ è la parte da lui data tosto in baratto, ed uguagliata da $(p+x)y$; onde $y = \frac{\left(P+X-\frac{e}{n}(P+X)\right)Q}{p+x}$.

Il contante della quantità Q della merce M è QP, ciò che il mercante di essa riceve dall'altro in merce m, vale contanti yp, ciò che, per

(1) Ques. di F. Luca 40°; di Tartaglia 39°, 40.°
(2) Ques. di F. Luca 41.°
(3) Ques. di F. Luca 42.°
(4) Ques. di F. Luca 45°; di Tartaglia 42.°
(5) Ques. di F. Luca 47.°
(6) Ques. di F. Luca 43.° è differente dagli altri: il solo mercante primo fa al secondo il tempo T, e solo sulla parte voluta in contante.

l'uguaglianza, dovrebbe di più ricevere in contante è $PQ - yp$; ma al tempo di mesi T riceve in vece $\frac{e}{n}(P \times X)Q$; dunque in mesi $TPQ - yp$ diventa $\frac{e}{n}(P + X)Q$; dunque 1 in mesi T diventa

$\frac{\frac{e}{n}(P + X)Q}{PQ - yp}$, si chè la rendita $= 1 - \frac{\frac{e}{n}(P + X)Q}{(PQ - yp)}$; onde la rendita in un mese $\frac{1}{T}\left(1 - \frac{\frac{e}{n}(P + X)Q}{(PQ - yp)}\right)$.

Esempio. $P = 20$, $P + X = 30$, $\frac{e}{n} = \frac{1}{2}$, $T = 16$, $p = 8$, $p + x = 10$, si avrà $y = \frac{(30 - \frac{1}{2}\,30)Q}{10} = \frac{15}{10}Q = \frac{3}{2}Q$, e quindi la rendita di una lira in mesi $16 = 1 - \frac{\frac{1}{2}.\,30Q}{\left(20Q - \frac{3}{2}\,8Q\right)} = 1 - \frac{15}{(20 - 12)} = 1 - \frac{15}{8} = \frac{T}{8}$ è la rendita in un mese $= \frac{T}{8.\,16} = \frac{T}{128}$.

$P = 4$, $P + X = 5$, $p = 10$, $p + x$; il secondo mercante domanda il tempo T, esibendo di dare al primo tanto in contante, che egli venga a guadagnare il 10 per 100 si dei denari, che della merce m, che gli darà: qual sarà la parte in contante, e quale nella merce m? (¹). Dinotando il 10 per G', si faccia $100 : 100 + G' :: P : P + \frac{G'}{100}P$, tanto si farà conto che vaglia la merce M a contanti, ed il quesito sarà ridotto al 27°, onde formati i quozienti $\frac{P + X}{P + X - \left(P + \frac{G'}{100}P\right)}$, $\frac{p + x}{x}$, dividi il secondo che deve essere il minore pel primo, e sarà

$\frac{(P + X)x}{\left(P + X - \left(P + \frac{G'}{100}P\right)\right)(p + x)}$ la parte che il secondo mercante darà al primo in merce, ed $1 - \frac{(P + X)x}{\left(P - X - \left(P + \frac{G'}{100}P\right)\right)(p + x)}$ la parte che gli dovrà in contante.

(¹) Ques. di F. Luca 44°; di Tartaglia 41.°

$P + X = 4\sqrt{P}$, $\frac{e}{n} = \frac{1}{3}$, $T = 12$, $p = 24$, $p + x = 29$, $t = 9$, ed il primo mercante guadagnò 20 per 100 de' suoi denari: qual fu P ? [1] Supponilo z^2, onde $P + X = 4z$, $P - \frac{e}{n}(P+X) = z^2 - \frac{e}{n}4z$, $P + X - \frac{e}{n}(P + X) = 4z - \frac{e}{n}.4z$, $P + X) - \frac{e}{n}(P + X) - \left(P - \frac{e}{n}(P+X)\right) = X = 4z - \frac{e}{n}.4z - \left(z^2 - \frac{e}{n}.4z\right) = 4z - z^2$, accrescimento di $z^2 - \frac{e}{n}.4z$ pel tempo T; dunque $\frac{t}{T}(4z - z^2)$ accrescimento pel tempo t. Ma il primo mercante guadagna G' per 100 sul suo capitale $z^2 - \frac{e}{n}.4z$; dunque questo diverrà $z^2 - \frac{e}{n}.4z + \frac{G'}{100}\left(z^2 - \frac{e}{n}.4z\right)$ e tanto fa conto, che vaglia la merce M a contanti, cioè $\left(1 + \frac{G'}{100}\right)z^2 - \left(1 + \frac{G'}{100}\right)\frac{e}{n}4z$. Prendi poscia $\frac{t}{T}(4z - z^2) - \frac{G'}{100}\left(z^2 - \frac{e}{n}.4z\right) = \left(\frac{t}{T} + \frac{e}{n}.\frac{G}{100}\right)4z^2 - \left(\frac{t}{T} + \frac{G'}{100}\right)z^2$: finalmente istituisci la proporzione $\left(1 + \frac{G'}{100}\right)z^2 - \left(1 + \frac{G'}{100}\right)\frac{e}{n}4z : \left(\frac{t}{T} + \frac{e}{n}.\frac{G'}{100}\right)4z - \left(\frac{t}{T} + \frac{G'}{100}\right)z^2 :: p : x$. Nel caso particolare $1\frac{1}{5}z^2 - 1\frac{3}{5}z : 3\frac{4}{15}z - \frac{19}{20}z^2 :: 24 : 5$. $6z - 8 : \frac{49}{3} - \frac{19}{4}z :: 24 : 5$; onde $z = \frac{54}{18} = 3$; $= P = 9$, $P + X = 12$.

Tartaglia riferendo il quesito 37° osserva, che tali quesiti con dilazione per una parte, e per l'altra, non possono intendersi per veri baratti, perchè attualmente non si darebbe nè dall'una, nè dall'altra parte cosa veruna. E volendo conservare l'idea di baratto, ciò che al più potrebbe intendersi, sarebbe, ad esempio, nel quesito 37° che, considerata la differenza dei tempi $4-3=1$, il mercante primo debba subito consegnare la sua merce M, e non ricevere che un mese dopo dal secondo mercante la merce m. Ma la cosa, così intesa la soluzione, tornerebbe discorde alla intenzione dello stesso primo mercante. Poichè soppongasi 9 misura della merce M (9 centinaia di libbre di ferro), il prezzo $Q(P + X)$ sarà lire 70 = soldi 14000, e dividendo per $p + x = 9$ soldi prezzo di ciascuna unità della merce m, cioè di ciascuna pelle, ne verrà il numero delle pelli, o dei *curami* $= 155\frac{5}{4}$. Ora a danari contanti $QP = 10.6 = 60$, $155\frac{1}{4}.8 =$ lire $62\frac{2}{9}$; dun-

[1] Ques. di F. Luca 48° ed ultimo.

que sarebbe guadagno di 60 in un mese $=2\frac{2}{9}$, e di una lira $\frac{20}{9.\,60}$ $=\frac{1}{27}$: ma la prima intenzione del mercante primo è di guadagnare 1 con 6 in 4 mesi, che importa il guadagno di $\frac{1}{24}$ con una lira in un mese. Dunque il calcolo non regge all'idea esposta. Per ottenere una soluzione ad essa coerente, si dica $8 : 9 :: 6 : \frac{54}{8} = 6\frac{3}{4}$; tanto dunque e non più, dovrebbe il primo mercante chiedere in baratto della merce M; ma egli ne vuole 7; dunque dell' $\frac{1}{4}$ che ne vuole di più, deve fare tanto *aspetto*, che il suo capitale guadagni $\frac{1}{4}$, giusta la sua intenzione di guadagnare $\frac{1}{24}$ con uno in un mese: con $6\frac{3}{4}$, sarà dunque il guadagno in un mese $\frac{6\frac{3}{4}}{24} = \frac{27}{24.\,4} = \frac{9}{8.\,4}$; e se dicasi z il tempo che è necessario a rendere $\frac{9}{8.\,4}$ eguale ad $\frac{1}{4}$; sarà $\frac{9}{8.\,4}z$ $=\frac{1}{4}$, $z=\frac{8}{9}$ di mese. Tartaglia argomenta $1 : 6\times 4 :: \frac{1}{4} : \frac{1}{4}6\times4 = 6$, e $\frac{6}{6\frac{3}{4}} = \frac{8}{9}$. Si può anche tenere quest' altra strada inversa $9 : 8 ::$ $7 : \frac{56}{9} = 6\frac{2}{9}$: dunque il primo mercante verrà con 6 a guadagnare $\frac{2}{9}$; per guadagnarlo, secondo la sua intenzione, che 6 guadagni 1 in 4 mesi: dicasi $1 : 4$ mesi $:: \frac{2}{9} : \frac{8}{9}$ di mese. Dopo tutte queste osservazioni, giudica meglio il Tartaglia, lo sciogliere l'esposto baratto a tempo per una e l'altra parte in due vendite separate a contanti accresciuti per la dilazione in questo modo: il mercante della merce M si contenterebbe a contanti pronti del prezzo $P = 6$; ma concedendo dilazione di mesi 4 vuole $P + X = T$, fatto l' accordo e consegnata la merce M, accade che lo stesso mercante desidera dall' altro con cui ha fatto contratto, la merce m, che vale in contanti $p = 8$; ma questi vuole cavarne $p+x = 9$: si cerca qual tempo debba fare a quello, onde farlo in proporzione a quello che egli ha fatto a lui. Lo stesso dicasi degli altri problemi a tempo per l'una e per l'altra parte: in luogo del nome di baratti si dovrebbero, giusta la idea del Tartaglia, intitolare problemi di vendite, ossia di vendita, e controvendita simili.

Quesiti di Tartaglia sui Baratti.

Quesito 1.° La merce M vale P, la m vale p per quantità Q della M; quanta se ne dovrà dare della m dal secondo al primo mercante?
Quesito 2.° simile.
Quesiti 3.° 4.° 5.° simili al 1.° di F. Luca.
Quesito 6.° Data X con p, $p + x$ trovare P.
Quesito 7.° il 4.° di F. Luca.
Quesito 8.° Dati $P = 27$, $P + X = 30$, $p = 36$, $G = 10$, trovare $p + x$; $P : P + X :: p : \frac{p(P+X)}{P}$, $\frac{p(P+X)}{P} + \frac{G}{100} \cdot \frac{p(P+X)}{P}$, come segue dalla mia formola, pag. 12, Quaderno 4°, fatto $\frac{e}{n} = 0$. Nel caso particolare $\frac{3630}{27} + \frac{1}{10} \cdot \frac{36.30}{27} = 40 + \frac{1}{10} \cdot 40 = 44$.
Quesito 9.° simile al 5.° 10.° 39.° di F. Luca.
Quesito 10.° simile all' antecedente.
Quesito 11.° simile al 6.° 8.° di F. Luca.

Quesito 12.° Posto P = lire 7, P + X = lire 8, $\frac{e}{n} = \frac{1}{4}$ p = lire 36, $p + x$ = fiorini 12, si cerca il valore del fiorino. Simile al 7.° di F. Luca.

Quesito 13.° P = 5 ducati, $P + X = 5\frac{2}{3}$, ed il mercante in 30 pezze di zambellotti, ciascuna delle quali fa in baratto valere $P+X$, vuole 50 in contante, $p = 60$ ed è il prezzo di pepe al *largo* peso di libbre 400: quale debbe essere $p + x$? Si ponga in generale n in luogo di 50, Q in luogo di 30, e si faccia la proporzione $PQ - n : (P + X) Q - n :: p : p+x$. Nel caso particolare $150 - 50 : 170 - 50 :: 36 : p + x = \frac{120.50}{100} = 60$, e poi si troverà 9.

Quesito 14.° Confronto col 12.° di F. Luca. È fina, ma altrettanto bisognevole di spiegazione e dimostrazione, la regola che Tartaglia qui prescrive. Sia il prezzo d contanti della merce M = P, in baratto $P + X$, il prezzo della merce m a contanti p, ed il cercato prezzo in baratto $p + x$, ed esibisca il mercante della merce M a quello della merce m la parte $\frac{r}{t}$ in contante, intendesi la parte $\frac{r}{t}(p+x)y$, essendo y la quantità della merce m data dal secondo mercante nel baratto. Insegna Tartaglia a formare la frazione $\frac{r}{t-r}$, indi istituire la proporzione $P + \frac{r}{t-r}(P + X) : P + X + \frac{r}{t-r}(P+X) :: p : p+x$.

Ma qual ragione di tal proporzione, poichè il primo mercante esibisce non la parte $\frac{r}{t-r}$, ma la $\frac{r}{t}$; e non di $P + X$, ma di $p + x$? A sciogliere questo nodo riflettasi che per equazione a baratto, si avrà $y(p+x) = Q(P+X) + \frac{r}{t}(p+x)y$; onde $\left(1-\frac{r}{t}\right)(p+x)y = Q(P+X)$. E facendo $\left(1-\frac{r}{t}\right)(p+x)y : Q(P+X) :: \frac{r}{t}(p+x)y : \frac{r}{t-r}Q(P+X)$; onde $y(p+x) = Q(P+X) + \frac{r}{t-r}Q(P+X)$: e l'equazione in contanti sarà $yp = PQ + \frac{r}{t}(p+x)y = PQ + \frac{r}{t-r}.Q(P+X)$; e quindi $P + \frac{r}{t-r}(P+X) : P + X + \frac{r}{t-r}(P+X) :: p : p+x$.

Esempio di Tartaglia. $P = 16$, $P + X = 18$, $\frac{r}{t} = \frac{1}{2}$, $p = 22$, $16 + \frac{1}{1}.18 : 18 + \frac{1}{1}.18$, ossia $34 : 36 :: 22 : p + x = \frac{22.36}{34} = \frac{22.18}{17} = 23\frac{5}{17}$.

F. Luca istituisce la proporzione così: $P + \frac{r}{t}(P+X) : P + X + \frac{r}{t}(P+X) :: p : p+x$; laonde posto $P = 9$, $P + X = 12$, $\frac{r}{t} = \frac{1}{2}$, $p = 15$, trova $9 + \frac{1}{2}.6 : 12 + \frac{1}{2}.6$, ossia $15 : 18 :: 15 : p+x = 18$. Supponiamo $y = 1$; dunque il mercante secondo dà al primo 18, e sarà $\frac{18}{12} = Q$ corrispondente quantità della merce M, che il primo mercante dovrebbe dare al secondo, cioè $\frac{3}{2}$; ma gli dà $\frac{1}{2}$ del prezzo, cioè 9, in contanti; dunque di merce M, non gli darà che $\frac{3}{4}$, il cui prezzo $= 9$. Veniamo alla equazione de'contanti. Sarà $1.\,15 = \frac{3}{4}.\,9 + 9 = 6\frac{3}{4} + 9$, ciò che è falso. Supponiamo ancora, che il primo mercante dia al secondo 12, 6 in contante, e 6 in merce M, la cui quantità Q sarà $\frac{1}{2}$; il secondo mercante darà $\frac{12}{18}$ quantità di merce m, cioè $\frac{2}{3}$. Venendo a contanti, si avrà $6 + \frac{1}{2}.\,9 = \frac{2}{3}.\,15 = 10$, ciò che è impossibile. Di fatti, la proporzione di F. Luca viene dalle due equazioni $yp = QP + \frac{r}{t}(P+X)Q$; $y(p+x) = (P+X)Q + \frac{r}{t}(P+X)Q$, la seconda delle quali mostra, che il mercante della merce M non deve già dare in contanti la parte $\frac{r}{t}$ (P + X)Q di (P + X)Q, ma oltre (P + X)Q; onde male si esprime F. Luca, dicendo nel quesito 12°, che alzando nel baratto il prezzo da 9 a 12, *uol dare ½ in denari contanti*. Cangiando il quesito con l'*oltre*, la soluzione va bene, poichè $12 + 6 = 18$, $\frac{18}{18} = y = 1$, ed in contanti $1.9 + 6 = 1.15$.

In luogo della regola di Tartaglia, la proporzione immediatamente fluente dalle equazioni $yp = PQ + \frac{r}{t}(p + x)y$; $y(p + x) = Q(P + X) + \frac{r}{t}(p + x)y$, si è $P : P + X :: p - \frac{r}{t}(p + x) : p + x - \frac{r}{t}(p + x)$.

Quesito 15.° simile al 14°. coll'osservazione, che lo stesso è che il mercante primo voglia dare al secondo la parte $\frac{r}{t}$ in contanti, quanto che questi la esiga.

Quesito 16.° simile ai 14.° e 15.°

Quesito 17.° contrario al 13.°, volendo il primo mercante dare n; onde per la soluzione, non si farà che cangiare $-n$ in $+n$.

Esempio. $P = 7$, $P + X = 9$, $n = 30$, $p = 28$, $Q =$ libbre 8. $3 - 8 + 30 : 9 . 8 + 30 :: 28 : p + x = \frac{28.102}{86} = \frac{14.102}{43} = 33\frac{9}{43}$; e sarà $\frac{9.8+30}{33\frac{9}{43}} = \frac{102}{33\frac{9}{43}} = \frac{102.43}{1428} = \frac{4386}{1428}$, se s'intendessero P, p della stessa moneta; ma Tartaglia suppone P ducati, p grani, 24 de' quali formano un ducato; onde si avrà $\frac{4386.24}{1428} = \frac{4386.2}{119} = \frac{8772}{119} = 73\frac{85}{119}$ libbre.

Quesito 18.° Lo stesso che il 9.° di F. Luca. Vedi Quaderno IV, pag. 8.

Quesito 19.° Lo stesso che il 13.° di F. Luca. Vedi Quaderno IV, pag. 11.

Quesito 20.° Quello 14.° di F. Luca. Vedi ibidem.

Quesito 21.° Il 15.° di F. Luca. Ibidem.

Quesito 22.° Il 16.° di F. Luca. Quaderno IV, pag. 12.

Quesito 23.° Il 17.° di F. Luca. Quaderno IV, pag. 11.

Quesito 24.° Il 18.° di F. Luca. pag. 12.

Quesito 25.° Il 19.° di F. Luca. $P =$ lire 8, $P + X =$ fiorini $2\frac{1}{2}$, $p =$ lire 20, $p + x =$ lire 25; il primo mercante volle $\frac{1}{9}$ in contanti, ed il secondo guadagnò il 10 per 100: che valse il fiorino? Tartaglia opera così. Poichè il secondo guadagna il 10 per 100; dunque il primo di 110 fa 100, ovvero di 11 fa 10; dicasi dunque 11 : 10 ::

$7:\frac{70}{11}=6\,\frac{4}{11}$. Poi perchè il primo vuole $\frac{1}{3}$; dunque il secondo gli dà $\frac{1}{3}$; e perciò, giusta il Quesito 14°, si formi la frazione $\frac{1}{3-1}=\frac{1}{2}$, e si faccia la proporzione $20+\frac{1}{2}.\,25:25+\frac{1}{2}.\,25::6\,\frac{4}{11}:\frac{6\,\frac{4}{11}.\,37\,\frac{1}{2}}{32\,\frac{1}{2}}$ $=$ fiorini $2\,\frac{1}{2}$; onde $\frac{\frac{70}{11}.\frac{75}{2}}{\frac{65}{2}}=\frac{70.\,75}{11.\,65}=\frac{70.\,15}{11.\,13}=$ fiorini $\frac{5}{2},\frac{70.\,3}{11.\,13}=$ fiorini $\frac{1}{2},\frac{70.\,6}{11.\,13}=\frac{420}{143}=2\,\frac{134}{143}=$ fiorini 1. Tartaglia adopera 7 per P, non so perchè, ponendo nel problema P=8, (¹) siccome anche F. Luca. La soluzione di questo, accusata di molti errori da Tartaglia, è veramente così sconcia ed incoerente, che nulla rilevasi.

Quesiti 26.° 27.° 28.° simili ai 27.° 29.° di F. Luca.

Quesito 29.° $P=32$, $P+X=36$, ed il mercante primo vuole $\frac{1}{3}$ in contanti $p=40$; ed il mercante secondo vuole $\frac{3}{4}$ in contante: quale deve essere $p+x$? *Questi sono*, dice Tartaglia, *certi sorti di baratti per acuir l' ingegno che per altro.* Si prenda $\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$, e si dirà che il secondo mercante vuole $\frac{5}{12}$ in contante. Similmente prescrive F. Luca nel quesito 11°, sebbene dalla enunciazione dica, che il secondo mercante vuol dare, non, che gli sia dato.

Quesito 30.° ricade nel 17.°, volendo il secondo mercante, e dovendo perciò il primo dargli n in contante.

Quesito 31.° Il primo mercante ha libbre 7530 di garofoli che vagliono grani 8 la libbra; il secondo ha zuccari che vagliono ducati 14 il cento; cassia in canna che vale ducati 9 il cento; sal gemma che vale ducati 5 il cento; ed il primo vuole la medesima quantità di tutte e tre queste merci per le sue libbre 7530 di garofani: quante libbre avrà di ciascuna merce? Libbre 7530×8 grani $=$ ducati 2510. Aggregato de' prezzi delle tre merci $=14+9+5=28$. $28:100::2510:\frac{251000}{28}=\frac{125500}{14}=8964\,\frac{2}{7}$, e tante libbre avrà di ognuna delle tre merci.

Quesito 32.° Vedi Quaderno IV, pag. 15. Tartaglia suppone, che il secondo mercante voglia dare tanto di una, quanto dell'altra delle sue due merci.

(¹) Nella esposizione del Quesito, vi è anche in Tartaglia l'errore di dire, la lana a contadi val ℒ (lire) 8 in vece di dire la canna (di panno).

Quesito 33.° Vedi quaderno IV, pag. 19—20.

Quesito 34.° « Il primo mercante ha braccia 60 di veludo cremesino, che vale a contadi ducati $4=P$, a baratto mettelo $5=P+X$, et ha anchora libbre 50 di zaffran de l'aquila che a contadi val ducati 2 la libra et a baratto mette ducati $3=P+X'$ e vuol anchora dar de contadi ducati 100; il secondo ha panni scarlatini che a contadi valeno ducati $60=p$ la pezza, e mocajari che valeno a contadi ducati $6^{=p'}$ la pezza, e raso cremesino che a danari val ducati $2^{=p''}$ il braccio: e quello che da il veludo e il zaffrano vuol tanto panno scarlattino che monti ducati 160 e tanti mocajari che monti 250, et il restante per fin alla summa vuol tanto raso cremesino: quanto si deve metter a baratto il panno scarlattino eli mocajari eloraso, e quanti panni scarlattini, mocajari, e raso si darà per il detto veludo, zaffrano, e ducati 100 de contadi? $60\times 4=240$, $50\times 2=100$, $240+100=340$; $60+5=300$, $50\times 3=150$, $300+150=450$; $340+100=440$, $450\times 100=550$. » Ora istituisci le proporzioni: $440:550::60:p+x::6:p'+x'::2:p''+x''$, e troverai $p+x=75$, $p'+x'=7\frac{1}{2}$, $p''+x''=2\frac{1}{2}$. Generalmente, denominando Q la quantità della merce M del primo mercante, e Q' la quantità della merce M' di esso, n ciò che vuol dare in contante: $PQ+P'Q'+n:(P+X)Q+(P'+X')Q+n::p:p+x::p':p'+x'::p'':p''+x''$. Determinati $p+x$, $p'+x'$, $p''+x''$, si determineranno le quantità. Nel caso esposto $\frac{160}{75}=2\frac{2}{15}$, $\frac{250}{7\frac{1}{2}}=33\frac{1}{3}$, $\frac{550-160-250}{2\frac{1}{2}}=\frac{140}{2\frac{1}{2}}=56$.

Quesito 35.° Vedi Quaderno IV, pag. 23.

Quesito 35.° Il 37.° di F. Luca. Vedi questo Quaderno, pag. 10.

Quesito 37.° simile, e l'esposizione è la seguente. Uno vende ad un suo amico una quantità di pezze di carisce, le quali a danari contadi vagliono ducati 8 la pezza, ma ve li mette ducati 9 a termine di mesi 10: accade che da poi alquanti mesi venne gran quantità di lana spagnuola, e colui, che già comprò i carisci, della qual lana colui che vendette le dette carise, ne comprò una quantità a ragione di ducati 32 il cento, e nondimeno a danari contadi non valeva salvo che ducati 30 il cento. Si domanda quanto tempo gli dovea fare, a voler osservare quel medesimo ordine, che gli ha fatto a lui con li carisci dati? Mesi $5\frac{1}{3}$.

Quesito 38.° simile al 39.° di F. Luca, cangiata l'idea di baratto, in quella di vendita e controvendita, o vendite simili. (¹) Il caso di Tartaglia: M panni feltrini, $P=10$, $P+X=11$, $7=12$; m canella, $p=36$, $t=8$: qual deve essere $p+x$? $10\times 12:X::36\times 8:x$ $=\frac{36.8}{10.12}=\frac{18.2}{5.3}=\frac{36}{15}=2\frac{2}{5}$; onde $p+x=38\frac{2}{5}$.

(¹) Caso di F. Luca. M panno, $P=10$, $P+X=11$, $7=12$, m lana $p=36$, $t=8$: qual deve essere $p+x$? $=36+2\frac{2}{5}$.

Quesito 39.° simile al 40.° di F. Luca. Il caso di Tartaglia: M panno scarlatto, $P = 4\frac{1}{2}$, $P + X = 6$, $7 = 8$, m zenzero $p + x = 15$, $t = 10$: qual'era p? $p = 10\frac{10}{17}$. Non solo simile, ma lo stesso stessissimo quesito di F. Luca.

Quesito 40.° simile all' antecedente.

Quesito 41.° simile al 44.° di F. Luca, ritenuta l'idea di baratto, non vi essendo la dilazione che da una parte.

Quesito 42.° simile al 45.° di F. Luca, ma sotto l'idea di vendite simili; e Tartaglia intende in questo ed altri analoghi esempi, ne'quali non è altrimenti espresso, che il contante sia pagato subito, di presente, e riduce questo e l' antecedente problema ai suoi 26°, 27°, 28°, dopo una preparazione simile a quella di F. Luca nel suo 46.°

Quesito 43.° M garofoli, $P = 6$, $P + X = 10$, $T = 7$, $\frac{e}{n} = \frac{1}{5}$; m soda, $p = 24$, $t = 10\frac{1}{2}$, $\frac{r}{t} = \frac{1}{3}$: si cerca $p + x$? Tartaglia fa la proporzione $P - \frac{e}{n}(P + X) + \frac{r}{t-r}\left(P + \frac{t}{T}X - \frac{e}{n}(P + X)\right) : P + \frac{t}{T} X - \frac{e}{n}(P + X) + \frac{r}{t-r}\left(P + \frac{t}{T}X - \frac{e}{n}(P + X)\right) :: p : p + x$. Nel caso particolare $6 - \frac{1}{5}.\ 10 + \frac{1}{2}\left(6 + \frac{10\frac{1}{2}}{7}.\ 4 - \frac{1}{5}.\ 10\right) : \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(6 + \frac{10\frac{1}{2}}{7}.\ 4 - \frac{1}{5}.\ 10\right) :: 24 : p + x : 4 + \frac{1}{2}\left(6 + \frac{3}{2}.\ 4 - 2\right) : \frac{3}{2}\left(6 + \frac{3}{2}.\ 4 - 2\right) :: 24 : p + x$, $9 : 15 :: 14 : p + x$, $3 : 5 :: 24 : p + x$, $1 : 5 :: 8 : p + x = 40$.

Mercanzie nominate ne' baratti da F. Luca.

Panno e lana a vari prezzi. Ferro, fiorini 28 a contante per libbre 1000. Piombo, fiorini 21 per libbre 1000 a contante. Zuccaro, ducati 9 al 100 a contante. Bambagio, ducati 5½ al 100 (intendi sempre i prezzi a coutante). Lana a gottone ducati 9 al 100. Giengero, ducati 15 al 100; in altro luogo fiorini 18, altrove lire 27. Verzino (credo zucchero), lire 1444 al 100. Stame, lire 30 al 100. Pepe, lire 40 al 100, altrove lire 30, altrove 24. Canella 45 (non dice di che) al 100. Garofoli, 34 al 100. Curame, soldi 8 per pelle.

Mercanzie nominate ne' baratti da Tartaglia.

Cera, ducati 8½ al 100. Lana, ducati 39 al 100. Carisci, ducati 9, grossi 15 (24 grossi formano un ducato) in baratto per pezza. Zenzero, ducati 23½ al 100 in baratto. Raso, lire 12 in contante al braccio. Uva passa, lire 40 allo staro. Reubarbaro, ducati 3 la libbra. Canella, ducati 42 al 100. Pevere, ducati 46 al cargo. Seda, grossi 20 la libbra. Filadi cipriotti, lire 20 al 100. Lino, grossi 27 il peso, ossia libbre 25. Formazzo, grossi 56 il peso. Panno, grossi 20 il braccio. Uva di Candia, ducati 8 il migliajo. Cera bianca, ducati 11 al 100. Panno, lire 9 il braccio. Lana resina, 48 lire al 100. Formento, lire 7 lo staro. Zuccaro grosso, lire 36 il 100. Zambelotti, ducati 5 la pezza. Pevere, ducati il cargo = libbre 400. Zenzero merdusso, ducati 16 lo staro. Savone, ducati 22 il mearo. Zuccaro di Palermo, ducati 12 il 100. Filadi cipriotti, ducati 15 il 100. Draganti, ducati 8 il 100. Garofoli cernidi, grossi 12 la libbra. Reubarbaro turchesco, ducati 7 la libbra. Seda visentina, grossi 28 la libbra. * (*) Panno, lire 5 la canna. Lana, lire 20 al 100. Panno, lire 8 la canna. Lana, lire 30 il 100. Panno, lire 7 la canna. Lana lire 30 il 100. Panno, lire 7 la canna. Lana, fiorini 20 il 100. Panno, lire 8 la canna. Lana, lire 30 il 100. Panno, lire 8 la canna. Lana, lire 36 il 100. Panno, lire 7 la canna. Lana, lire 30 il 100. Panno, lire 8 la canna. Lana, lire 20 il 100. * Zenzeri mechini, ducati 20 il 100. Cottoni suriani, ducati 7 il 100. Zuccari, ducati 14 il 100. Garofoli, grani 10 la libbra. Zuccari, ducati 15 il 100. Garofoli, grossi 11 la libbra. Scamonea, grossi 32 la libbra. Canella, ducati 40 il 100. Botte di malvasia, ducati 18. Aloe epatico, ducati 24 il 100. Garofoli, grani 8 la libbra. Cassia, ducati 9 il 100. Salgema, ducati 5 il 100. Lana, ducati 24 il 100. Cottone, ducati 7 il 100. Cassia in canna, ducati 12 il 100. Lana, ducati 10 il 100. Pevere, ducati 30 il 100. Zenzero, ducati 27 il 100. Veludo cremesino, ducati 4 il braccio. Zaffran da l'aquila, ducati 2 la libbra. Panno scarlattino, ducati 60 la pezza. Raso cremesino, ducati 2 il braccio. Panno mocajari, ducati 6 la pezza. Pevere, 24 il 100. Canella, 45. Garofoli, 34. Ferro, lire 6 il 100. Curame, soldi 8 la pelle. Pezze di carisce, ducati 8 la pezza. Lana spagnuola, ducati 32 il 100. Panni feltrini, ducati 11 la pezza. Canella, ducati 36 il 100. Panno scarlatto, ducati 6 il braccio. Zenzero, ducati 15 il 100. Zambelotti, ducati 6 la pezza. Canella, ducati 30 il 100. Cinamomo, ducati 4 il 100. Reubarbaro, ducati 10 la libbra. Malvasia di Candia, ducati 20 la botte. Aloe epatico, ducati 11 il 100. Garofoli cernidi, grani 6 la libbra. Seda, grani 24 la libbra.

Quesiti di Tartaglia sui baratti nel libro primo sull' Algebra.

Noti P, P + X, p, $p + x$, e trovato, facendo la proporzione $P : P + X :: p : \frac{p(P+X)}{P}$, che $\frac{p(P+X)}{P} > p + x$, trovare che parte deve il secondo mercante avere in denari? Dicasi z tal parte, ed istituiscasi la proporzione $p - z : p + x - z :: P : \frac{P(p+x-z)}{p-z} = P + X$.

(*) Da * a * sono i Ques. 18°, 19°, 20°, 21°, 22°, 23°, 24°, 25°, gli stessi che li 9°, 19°, 14°, 15°, 16°, 17°, 18°, 19°, di F. Luca.

Noti P, $P+X$, p si cerca $p+x$ tale, che il secondo mercante guadagni G per 100? Si supponga $p+x=z$, sarà, dice Tartaglia, $p(P+X)$ il capitale del secondo mercante, Pz quello del primo; e dovendo il secondo mercante guadagnare, *egli è ancor necessario che in somme eguali di baratto il suo capital sia meno di quello del 1.° altramente non guadagnerebbe.* Dunque $Pz-p(P-X)$ sarà il guadagno di $p(P+X)$; dunque dicasi $p(P+X):Pz-p(P+X)::100:\dfrac{100(Pz-p(P+X))}{p\,(P+X)}=G$. Spiega Tartaglia, perchè $p(P+X)$ si computi pel capitale del secondo mercante, e reciprocamente Pz per quello del primo; e la ragione si è, perchè se immaginiamo che il secondo mercante dia al primo un numero $P+X$ di misure della sua merce m, il cui prezzo per ciascuna misura è p, e che reciprocamente il primo dia al secondo tante misure di sua merce M, il cui prezzo per ogni misura è P, quante unità contiene z, tanto viene sempre precisamente a montare ciò che baratta l'uno, quanto ciò che baratta l'altro. M gottoni filladi, P ducati 12 il 100, $P+X=14\frac{1}{8}$, m oglio, p $48\frac{1}{4}$ il mearo $\dfrac{100\left(12z-48\frac{1}{4}.14\frac{1}{8}\right)}{48\frac{1}{4}.14\frac{1}{8}}=5$, ossia $\dfrac{100\,.\,12z}{48\frac{1}{4}.14\frac{1}{8}}$ $-100=5\dfrac{1200z}{681\frac{17}{32}}=105$, $1200z=105.\,681\frac{17}{32}=71560\frac{25}{32}$ $z=59\frac{1623}{2560}$.

M cera, P = ducati 8, $P+X=9\frac{1}{4}$; m pezze di carisca, $p=10\frac{1}{2}$ il mercante di M vuole in contanti per ogni centinaio di libbre della sua cera $\frac{1}{4}$ di ciò che si mette la pezza di carisca a baratto: si cerca qual debba essere questo prezzo $p+x$? Suppongasi $p+x=z$; e dirai $P:P+X::p:z$; ma per volere il mercante di M $\frac{1}{4}z$ in contanti dirai $P-\frac{1}{4}z:P+X-\frac{1}{4}z::p:z$, onde nel caso particolare $8-\frac{1}{4}z:9\frac{1}{4}-\frac{1}{4}z::10\frac{1}{2}:z$; quindi $8z-\frac{1}{4}z^2=9\frac{1}{4}.10\frac{1}{2}-\frac{1}{4}.10\frac{1}{2}.z$, $64z-2z^2=37.\,21-21z$, $2z^2=85z-777$, $z=\frac{85}{4}-\sqrt{\left(\frac{85}{4}\right)-\left(\frac{777}{2}\right)}=21\frac{1}{4}-\sqrt{63\frac{1}{16}}$.

M garofoli, P = grani $11\frac{1}{2}$ la libbra, $P+X=12\frac{1}{4}$; m raso,

p grani $28\frac{1}{3}$ il braccio; ed il mercante primo per ogni libbra de'suoi garofoli, vuol dare al secondo la $\frac{1}{2}$ di ciò che mette questi in baratto il braccio del raso, cioè $\frac{1}{2}(p+x)$; qual deve essere $p+x$? Posto $p+x=z$, istituisci la proporzione $P+\frac{1}{2}z : P+X+\frac{1}{2}z :: p : z =$

$$\frac{p\left(P+X+\frac{1}{2}z\right)}{P+\frac{1}{2}z} = (\text{nel caso particolare}) \frac{28\frac{1}{3}\cdot 12\frac{1}{4}+28\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}z}{11\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z};$$

onde $11\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}z^2 = 28\frac{1}{3}\cdot 12\frac{1}{4}+28\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}z = 347\frac{1}{12}+14\frac{1}{6}z$, $\frac{1}{2}z^2 = 347\frac{1}{12}+2\frac{2}{3}z$, $z^2 = 694\frac{1}{6}+5\frac{1}{3}z$, $z=\frac{16}{6}+\sqrt{\left(\frac{16}{6}\right)^2+694\left(\frac{1}{6}\right)} = \frac{8}{3}+\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2+694\left(\frac{1}{6}\right)} = 2\frac{2}{3}+\sqrt{\left(7\frac{1}{9}+694\frac{1}{6}\right)} = 2\frac{2}{3}+\sqrt{701\frac{5}{18}}$.

De Cambiis seu combinationibus.

« Dicano molti excelso Duca biasimãdo vna parte fra laltre es» sentiale del corpo traficante ditta cambio. E per consequẽte mor» morãdo a torto: chiamano q̃lli che lo exercitano vsurari e peggio » che giudei che certamẽte cõcento mani sõno da benedire pche » tolto el cambio seria destructo el fõdamẽto tutto de lo hedificio » mercantesco senza el quale non e possibile le repubriche mante» nerse: nela vita hũana substẽtarse. » Concede però commettersi molti abusi, onde imprenda a chiarire i modi de' cambi fra i mercatanti usitati, e aprire quali *sienno liciti e commendati*, e quali *inliciti e reprobati*.

Cambio vuol dire *togli da me questo e dame tu questaltro*. *Quatro* ne sono le specie: *cambio menuto o ver commune; cambio reale; cambio secco; cãbio fittitio*. Cambio *minuto*, solito usarsi nelle fiere o sui mercati, è dare una moneta per l'altra; un oro per l'altro; un oro per moneta; ed è converso, tenendosi il banchiere, per comun uso, qualche cosa *de la valuta* di tal oro, come per esempio, se l'oro vaglia lire 6, soldi 4, non dando che lire 6, soldi 3; o esigendo della sua moneta qualche cosa più di quel che vale, come del fiorino, quattrino, lire 6, soldi 5; valendo lire 6, soldi 4. Cita le somme di *hostiense, Monaldo, Raimondo hastano de hast*, *L' arciuesco fiorentino*, *Tomasso daquino*, nelle quali concludono essere tale cambio a banchieri lecito per loro fatica e spesa a pubblico servigio. Cambio *reale* è *laqua de la naue mercãtescha*. Intendesi che la lettera vada dove si indirizza, e che il pagamento segua secondo suo tenore e termine che è di 8, 10, 15, 16 giorni, o di qualche mese, ovvero per la tal fiera, ovvero in città marittime per la *muta* o partita di tal galea o nave. *E ꝑo ꝓuerbialmēte se dici. Le stato spacciato ꝑ lr̄a de cābio*, volendo significare *poche ꝑolle e gram substantia.*

Forma de la lettera de cābio.

» 1494 adi 9 agosto ī v.ª

» Pagate per questa prima nostra a Lodouico de francesco da » fabriano e compagni once cento doro napolitane insu la proxima » fiera de fuligni per la valuta daltretanti receuuti qui dal Magnifico » homo miser Donato da legge quondā miser Priamo. E ponete ꝑ » noi. Idio da mal ve guardi.

» vostro Paganino de paganini da Brescia ff. »

« E nella soprascripta de fore se dici in questo modo. Domino Al- » phano de Alphanis e cōpagni in peroscia.

» E facta la soprascripta subito de fore apie de la lettera porrai » el tuo segno. »

Si usa nel cambio *reale* ricevere il 2, o 3 per cento, secondo che più *e māco* il corso, vale da un luogo all'altro, variando il cambio per la carestia o abbondanza di danaro nei luoghi, ed il bisogno del medesimo, come allo spacciare di galee o navi più si ricerca il danaro, e i buoni mercanti stanno attenti a cavarlo dove abbonda, e rimetterlo dove è carestia. È lecito ricevere *d'fermo* una provisione costumata, come di 2, o 3 per cento, a ragione di tre pericoli: « De » q̄li lun e q̄llo achi lui (il banchiere) fida e crede li soi denari. Lal- » tro e a chi lui remette li soi denari: cioe lamico a chi scriue che » donde si ꝑtano li facci retornare. El .3.° e colui a chi tal d'nari lamico » suo da ī q̄l paise ꝑ farli tornar̄ dōde uscierono. vnde aleuolte ac- » cade ch̄ laīco nō ha receu⁹ d'la la executi.ⁿᵉ d'la lr̄a forse ꝑ morte » rapiᵉ īcēdij. e altri casi ec. ī mō che quando el datore aspectaua » li denari lamico suo li manda el protesto auctentico con la notitia » de la valuta corrente de la a qui. Per la qual cosa el cambiatore » e constretto tornare contra del principale qui. E nascano lite brighe » e trauagli. » Pezzo trascritto a parola a parola per meditarlo, non ben ora intendendolo.

« Per cābio secco se ītende ch̄ le lr̄e restīo doue le se dāno » ī le mani del datore tāto tēpo quāto elle penassero andare ne le » mani de lamico del datore nel paese doue se derizzano cō q̄l tē- » po piu che lusāza de tal paese doue se mandano costuma dare. » Cōmo gratia exēpli da fiorēza a londra se fa .3. mesi a la fatta » o vero data che tāto vale. Ma la chiesa vsa dir data .... E gion- » to el ditto tempo el dattore domanda al prenditor li suoi denari » a quel pregio cōmo sel ꝓtesto fosse tornato per mā del sopradetto » suo amico. .... » Il pregio dei cambi *nel dato luogo*, *nel dato* *tempo* si sa da chi attende ai cambi reali. Alcuna volta il datore manda al suo amico la lettera di cambio fattagli dal pigliatore, sicuro che l'amico gli rimetterà protesto, non avendo il pigliatore che fare in quel paese, dove è mandata la lettera, e questa cautela è dal datore usata, perchè il pigliatore non gli manchi..... Quest'ordine di cambi secchi si fa, perchè il cambio reale pare troppo pericoloso, ed il cambio secco schifa due pericoli. « Quello de lamico dfore a chi remettarebbe e » quello a chi lamieo suo darebbe li denari p lui a farli tornare don» de si particro. E solo in corre el pericolo de colui a chi lui li da » in ql luogo doue si stãno ãbedoi: cioe datore e prenditore. » I sacri Dottori citati « *cõcedunt remota fraude et spe lucri vltra sortem* » *licite posse fieri.* Per che hauẽdo io bisogno qui in vinegia de du» cati .100 io li prendo da te banchieri ĩ questo di p pregio e co» sto che di qua a mesi .6. o altro termine che p lõdra o brugia » corrisse: del ql corso ne tu ne io nõ ha certezza alcũa: e po cosi » dãnificare el datore cõmo el pnditore. et ecõuerso. » « Cambio fit» titio se ĩtende. verbi gra. cõmo se vno hauesse hauere date p al» cuna cagione o de robbe vẽdute o de denari prestati etc̃. cõ con» ditioni e patti che li uole potere torli a cambio per che parte li » piaci o per londra o per bruggia etc̃. quãdo al tempo fra voi fatto » tu non lo pagasse. E a lora quel tal finge intendendose con qual» che amico che li fa terzo de hauerli li dati a cambio. e per sua » maxima necessita suuenutolo. E questo tal terzo sugiongnera che » con grandissimo suo senestro la seruito etc̃. E a le volte con ve» rita quel tale scriuera a lione o bruggia a lamico suo in questo » modo dicendoli. Tramme ducati .1000. p qui secondo vsanza. com» mo se tu li hauesse hauere da me de tratte che io te hauesse fatte. » Pero che io o hauere qui da vno e si ne o necessita a fine cħ piu » presto e piu volentieri me paghi. E lamico lo serue de parolle che » piu non li costa e faralli vna de cambio piu calda che fuoco ..... » lui con questa lettera . . . . . . te fara el diauol nero . . . . . . la » forma de la lettera de la tratta che gliauera fatto sira qsta. Ca» rissimo etc̃. auisote cõmo ĩ qsto di etc. io ho tratto q p te dũc. » 1000. cħ p te mi mãcaua. e olli tolti q da marti° gualti¹. El ql. uol » cħ siẽ pagati costi al Magnifico homo e doctore miser Marco sã» nuto e fratelli cõdam meser francesco commo vederai p la decã» bio si che pagaretili al giorno e tẽpo e ponetili p uoi o auostro » cõto etc̃. E dira p voi o auostro cõto » per non intrigare con altri conti o faccende di altro genere che l'amico avesse con lui « . . . in » tutte le lettere de cãbio sempre da canto se ne fa vna de auiso e » .2. e .3. vna dopo laltra: acio lamico habia notitia di ql che glia » afarè. E p questo alcuolte tanto vale quella de aviso quãto la de» cãbio. Maxime quando a chi io trago habia del mio ĩ mão etc̃. » . . . . . . la p.ª volta se chiama la tratta. e la secõda se chiama la » retratta. E sempre sira retratta finche non e pagata tutta la lr̃a.

» . . . . mai po essere vna tratta che nō vada ī siemi cō la remessa.... » la thimologia sona bene: se martino vol remettere alione mar- » chi .4. doro » che vengono rimessi nella borsa dell'amico di Martino. « questo vso de tal cābio fittitio male agevilmēte si po cōmēdarlo » d'honesta p molte e diuerse fraude e mēdatij che dal canto del » dator ci po interuenire. »

Ai problemi premette alcune notizie sulle monete, distinguendo ducato, fiorino a oro, fiorino a fiorino, fiorino a papali, fiorino a piccoli. Ducato, non specificando altro, intendesi sempre veneziano, *sopra quello se governa al piu el trafico.* Il fiorino a oro vale soldi 20. Fiorino a fiorino, soldi 29. Fiorino a papa, soldi 90, e *sonno quelli che vsa la camera de peroscia.* Fiorino a piccoli, soldi 100, ovvero lire 5. In Vinegia il ducato a oro vale grossi 24, il grosso piccoli 32 a oro. Lira 1 a oro vale ducati 10. Il fiorino a oro grossi 12. A piccoli il ducato vale lire 6, soldi 4; onde tanto è dire soldi 20 a oro, quanto soldi 29 a fiorini, quanto soldi 90 a papa, quanto soldi 100 a piccoli. Ed in Vinegia tanto è dire lire 6, soldi 4 di piccoli, quanto soldi 2 a oro, quanto grossi 24 a oro, ec.

Quesito 1.° « El bologni° ī fiorenza val. p̄. 26. e ī peroscia val. » p̄. 30. vno me die dare in fiorēza $ 300 quante mene douera » dare ī peroscia » ? 26 piccoli $= \frac{26}{12.20} = \frac{13}{120}$ di lira, 30 piccoli $= \frac{30}{12.20} = \frac{1}{8}$ di lira. Si argomenti $\frac{13}{120}$ di lira fiorentina $\frac{1}{8}$ di lira *peroscina*

$$:: 300 : \frac{300 \times \frac{1}{8}}{\frac{13}{120}} = \frac{300.\ 120}{8.\ 13} = \frac{300.\ 15}{13} = \frac{4500}{13} = 346 \text{ lire, soldi 3, pic-}$$

coli $\frac{12}{13}$.

Quesito 2.° Se da *Peroscia* a *Fiorenza* fiorini 100 crescono a 104; quanti diverranno 45 da *Fiorenza* a *Peroscia*? $104 : 100 :: 45 : 43\frac{7}{26}$.

Quesito 3.° simile, e così il 4°, il 5°, il 6°.

Quesito 7.° « Vno de vinegia rimette a peroscia .fio. 300. veni- » tiani e li d. v^a. son pegio .8. p c.° de peroscini: quanti nara in pe- » roscia p li. 300 » ? Dicasi $108 : 100 :: 300 : \frac{30000}{108} = 277\ \frac{84}{108}$. « Guar- » da (avverte) che tu nō abagli cōmo fāno alcuni grosolani che di- » rieno li .300. di v.^{a} esser pegio 24. a .8. per c.° »

Quesito 8.° inverso del 7.°

Quesito 9.° « Vno die dar a vnaltro in peroscia. $. 300. moneta

» fiorētina e a el mō de darli doi sorte monete : cioe bolognini e
» grossoni. El blo.° a la fiorētina val. p̄. 26. e a la poscina val. p̄.
» .30. El grossō a la fiorētia val ℔. $5\frac{1}{2}$ e a la poscina val. ℔. $6\frac{1}{4}$.
» dimandasse q̄li li mette meglio pagare al debitore o blo.° o grossi »?
Dicasi $26 : 30 :: 300 : \frac{30.\ 300}{26} = 346$ soldi, 3 piccoli $\frac{12}{13}$; $5\frac{1}{2} : 6\frac{1}{4} ::$
$300 : 340$ soldi 18, piccoli $2\frac{2}{11}$; onde torna conto pagare a grossi.

Quesito 10.° simile al 7.°

Quesito 11.° Uno ha dato ad un banchiere in Venezia ducati 800 per avere una lettera di cambio per Roma, ed il banchiere vuole il 5 per 100: quanto gli farà dare in Roma? $105 : 100 :: 800 : \frac{800.\ 100}{105}$.

Quesito 12.° « Vno a .324. fio. che sōno meglio di miei $.3\frac{2}{3}$.
» p̲ c.° o uoi dire che recano de cambio da imei a isuoi $.3\frac{2}{3}$. di-
» mando li ditti .324. che recaranno » ? $100 : 103\frac{2}{3} :: 324 : \frac{324.\ 103\frac{2}{3}}{100}$;
con altro simile.

Quesito 13.° « La libbra di Pisa torna in Fiorenza once 11, e la libbra di Fiorenza torna in Peroscia once 13: quanto torna la libbra di Peroscia in Pisa » ? Primo modo, 11 once Fiorentine: 12 Pisane :: 12 Fiorentine $:\frac{12.\ 12}{11}$ Pisane $= \frac{144}{11} = 13\frac{1}{11}$, ma 12 Fiorentine$=$13 *Peroscine*; dunque 13 *Peroscine* $= 13\frac{1}{11}$ Pisane; e perciò $13 : 13\frac{1}{11} :: 12 : \frac{12.\ 13\frac{1}{11}}{13}$ $= 12\frac{12}{143}$, e tante once Pisane farà la libbra di *Peroscia*. Secondo modo. Essendo tre le libre di paragone, prendi $12.12.12 = 1728$, e dividi per 11. 13, sarà $\frac{1728}{11.\ 13} = 12\frac{12}{143}$.

Quesito 14.° Il 100 di *Peroscia* torna in Siena 90; il 100 di Siena in Pisa 120; il 100 di Pisa in Fiorenza 95; il 100 di Fiorenza in Bologna 96; il 100 di Bologna quanto tornera in Peroscia ?
$$\frac{100.\ 100.\ 100.\ 100.\ 100}{90.\ 120.\ 95.\ 96} = 101\frac{811}{1539}.$$

Quesito 15.° Cercando quanto tornerebbe in Bologna il 100 di Pisa, converrebbe prendere a rovescio $\frac{90.\ 120.\ 95.\ 96}{100.\ 100.\ 100.\ 100.\ 100}$.

Quesito 16.° 5 pisani vaglion 7 tornesi; 9 tornesi, 11 volterrani; 13 volterrani, 17 lucchesi: quanto varranno 100 pisani a lucchesi? Opera nell'uno e nell'altro modo insegnato nel Quesito 13.°, e troverai 100 pisani far $223\frac{89}{117}$ lucchesi $= \frac{7.\ 11.\ 17.\ 100}{5.\ 9.\ 13.}$.

Quesito 17.° simile.

Quesito 18.° « Lo staro del grā val. ϐ. 22. e ϐ. 17. vagliā stara » .2. de panico e .9. stara di panico vagliā .5. stara de noci: e .11. » stara di noci vagliā .74. ϐ e .74. ϐ voglianno vno fio. dimādo p » c.° stara di grano quāti fio. se hauera »? $13\frac{4477}{62271}$.

Quesito 19.° « Li .2. genouini e .$\frac{2}{3}$ vagliano .3 $\frac{3}{4}$ rauignā e .4$\frac{1}{2}$. » raueguani uagliā .6 $\frac{2}{3}$ tornesi. dimando per ϐ .40. di tornesi q̄ti ge- » nouini hauero »? Ad operare in modo diverso che ne'precedenti fa così: Poichè ravignani 4 $\frac{1}{2}$ fanno 6 $\frac{2}{3}$ tornesi; per tornesi 40 avrai ravignani 27. Poi dì: se ravignani $3\frac{3}{4}$ vagliono genouini $2\frac{2}{3}$, quanti varranno 27? Troverai 19 soldi, e piccoli $9\frac{3}{5}$ de genouini.

Quesito 20.° Uno si trova un fior. = bolog. 40, = āgōtani 20, = grossi 16, e vuole due volte tanti āgōtani che bolognini, e due volte tanti grossi che āgōtani: quanti ne avrà di ciascuna sorte? Poni ad arbitrio, che abbia 1 bolog., 2 āgōtani in conseguenza, e 4 gros: computa la somma di queste monete in bolog., o āgōtani, o grossi, come più piace, in bolognini per esempio. 2 āgōtani $= 2.\frac{40}{20} = 4$, 4 gros. $= 4.\frac{40}{16} = 10$, somma $= 1 + 4 + 10 = 15$. Argomenta $15 : 1 :: 40 : \frac{40}{15}$ bolog. $15 : 2 :: 40 : \frac{2.\ 40}{15}$ āgōtani, $15 : 4 :: 40 . \frac{4.\ 40}{15}$ grossi.

Quesito 21.° Uno si trova 100 fiorini, ciascuno = 10 tornesi, e ne ha cambiato un numero x a tornesi, sì che il quadrato di x in tornesi fu $= 100 - x$: quante lire cambiò? quante ne rimasero? $(10x)^2 = 100x^2 = 100 - x$, $x^2 = 1 - \frac{x}{100}$, $x = -\frac{1}{200} + \sqrt{\left(\frac{1}{40000} + 1\right)}$.

Quesito 22.° Il bolognino vecchio vale x sestini, quello da Camerino vale $\frac{4}{5}x$, e quel da Rimino vale $\sqrt{\left(x+\frac{4}{5}x\right)}$: tengo e cambio un bolognino di ciascuna sorte, cioè un vecchio, un camerinese, ed un riminese a sestini, e di tutti e tre n'ebbi 12 sestini: qual fu x? quanti sestini valse ciascun bolognino? $x+\frac{4}{5}x+\sqrt{\left(x+\frac{4}{5}x\right)} = 12$, $\sqrt{\left(1+\frac{4}{5}\right)x} = 12-\left(1+\frac{4}{5}\right)x$, $\frac{9}{5}x=\left(12-\frac{9}{5}x\right)^2 = 12^2 - \frac{12.9.2}{5}x+\frac{9^2}{5^2}x^2$, $\frac{1}{5}x = 4^2-\frac{12.2}{5}x+\frac{9}{5^2}x^2$, $9x^2-125x+4^2.5^2 = 0$, $x=\frac{5^3}{9.2}-\sqrt{\left(\frac{5^6}{9^2.4}-\frac{4^2.5^2}{9}\right)}=\frac{5^3}{9.2}-\frac{5}{9.2}\sqrt{\left(5^4-4^3.9\right)}=\frac{5^3}{9.2}-\frac{5.7}{9.2}=\frac{125-35}{9.2}=\frac{90}{9.2}=5.$

Quesito 23.° Il papalino vale a tornesi 32, ed a senesi vale $32-\sqrt{x}$, intendendo per x ciò che vale a senesi: qual'è x? $x=32-\sqrt{x}$, $\sqrt{x}=32-x$, $x=32^2-2.32x+x^2$.

Quesito 24.° Il fiorino d'oro vale a piccoli lire x, ed a fiorini $x-$ soldi 10: uno cambiò fiorini 20 d'oro, e n'ebbe lire 40 di piccoli, e lire 40 a fiorini: qual fu x? $\frac{40}{x}+\frac{40}{x-\frac{1}{2}}=20$ $\frac{80x-20}{x^2-\frac{1}{2}x}=20$, $80x-20=20x^2-10x$, $90x-20=20x^2$, $2x^2=9x-2$, $x^2=\frac{9}{2}x-1$, $x=\frac{9}{4}+\sqrt{\frac{9^2}{4^2}-1}=\frac{9}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{9^2-4^2}=\frac{9}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{65}$.

Quesito 25.° Uno cambiò fiorini 40 d'oro a tornesi, e n'ebbe x; dipoi prese 60 di questi tornesi, e ricomprò de'fiorini, e gli costarono un tornese più che non aveali egli cambiati; e la somma di tornesi, che gli restarono colla somma di fiorini che n'ebbe, fu $=50$: quanto valse il fiorino a tornesi la prima volta? quanto la seconda? Poni, valesse la prima volta x; dunque nel primo cambio, ebbe $40x$ tornesi, togliendone 60 restò $40x-60$; pagando nel secondo cambio il fiorino $x+1$ tornesi, ebbe fiorini $\frac{60}{x+1}$, e dovrà essere $40x-60+\frac{60}{x+1}=50$, $40x^2-20x-60+60=70x+50$, $40x^2=70x+50$, $4x^2=7x+5$, $x=\frac{7}{8}+\sqrt{\left(\frac{49}{8^2}+\frac{5}{4}\right)}=\frac{7}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{49+80}=\frac{7}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{129}=\frac{7}{8}+\sqrt{2\frac{1}{64}}$.

Quesito 26.° Il fiorino vale 12 tornesi ed 8 aquilani, e val pure 8 tornesi, e 20 aquilani: lo cambio ad un banco e ne ho 4 tornesi, 4 aquilani e soldi 20 di piccoli: quanto valse a piccoli? Poichè 12 tornesi $+$ 8 aquilani $=$ 8 tornesi $+$ 20 aquilani; dunque 4 tornesi $=$ 12 aquilani; 1 tornesi, 3 aquilani, il fiorino $=$ 36 aquilani $+$ 8 aquilani $=$ 44 aquilani $= \frac{44}{3}$, tornesi $= 14\frac{2}{3}$ tornesi. Quindi $\frac{4}{44} + \frac{4}{14\frac{2}{3}} = \frac{1}{11} + \frac{3}{11} = \frac{4}{11}$, fu la parte di fiorino che ebbe dei 4 aquilani e 4 tornesi insieme; dunque $\frac{7}{11}$ fu il valore de'soldi 20; dunque dicendo $7 : 20 :: 11 : \frac{20.\ 11}{7} = \frac{220}{7}\ 31\frac{3}{7}$, sarà questa la valuta dell'intero fiorino. F. Luca sbaglia nello scrivere $31\frac{3}{11}$.

Quesito 27.° Il fiorino $=$ 10 tornesi $+ x$ papalini $=$ 15 papalini $+ \frac{1}{2}x$ tornesi; lo cambio ad un banco e ne ho 8 tornesi ed 8 papalini: quanto vale a tornesi? quanto a papalini? Poni, fiorini $=10t + zt$; dunque $2t+zt=8p$. Dicasi $2t + zt : 8p :: xt : \frac{8p\ .\ xt}{2t+zt} = \frac{8x}{2+z}p$. Poi argomenta, $8 : 2 + z :: 15 : \frac{30+15z}{8} = 3\frac{3}{4} + 1\frac{7}{8}z$; ed essendo il fiorino $= 10 + z = 15 + \frac{1}{2}z$, fatte le sostituzioni di 15, e di $\frac{1}{2}x$, si avrà $10 + z = 3\frac{3}{4} + 1\frac{7}{8}z + \frac{4x}{2+z} = \frac{7\frac{1}{2}+11\frac{1}{2}z+1\frac{7}{8}z^2}{2+z}$, $(10+z)(2+z)=7\frac{1}{2} + 11\frac{1}{2}z + 1\frac{7}{8}z^2$. Così F. Luca. Ma più semplicemente dall'equazione $10t + xp = 8t + 8p$ tirasi l'equazione $2t+xp=8p$: equazione $2t+xp=8p$, $t = \frac{(8-x)p}{2}$, e sostituendo in $10t+xp=15p + \frac{1}{2}xt$, si ha $5(8-x)p + xp = 15p + \frac{x(8-x)p}{4}$, $20(8-x) + 4x = 60 + (8-x)$, $x\ 20.\ 8 - 16x = 60 + 8x - x^2$, $100 = + 24x - x^2$, $x^2 = 24x - 100$, $x=12-\sqrt{(144-100)}=12-\sqrt{44}$, $t=\frac{8-12+\sqrt{144}}{2}$ $p = \frac{-4+\sqrt{44}}{2}p = -2p + \frac{p}{2}\sqrt{44} = -2p + p\sqrt{11}$. Di fatti sostituendo questo valore di t, o quello di $x = 12 - 2\sqrt{11}$ nell' equazione $2t + xp = 8p$, si ha $-4p + 2p\sqrt{11} + 12p - 2p\sqrt{11} = 8p$; e parimenti si verifica $-20p + 10p\sqrt{11} + 12p - 2p\sqrt{11} = 15p + (6 - \sqrt{11})(-2p + p\sqrt{11}) = 15p - 12p + 2p\sqrt{11} + 6p\sqrt{11} - 11p$, o riducendo $-8p + 8p\sqrt{11} = -8p + 8p\sqrt{11}$. Dalla equazione di F. Luca viene $z = \frac{2}{7} + \frac{1}{7}\sqrt{704} = \frac{2}{7} + \sqrt{14\frac{18}{49}}$, come egli trova; donde conchiude che il fiorino valesse $10\frac{2}{7} + \sqrt{14\frac{18}{49}}$ tornesi, e conseguentemente cavandone 8, $2\frac{2}{7} + \sqrt{14\frac{18}{49}}$ tornesi, valessero 8 papalini. Onde un tornese varrebbe $\frac{8}{2\frac{2}{7} + \frac{1}{7}\sqrt{704}}$ papalini,

$$\text{cioè } t = \frac{8p}{2\frac{2}{7} + \frac{1}{7}\sqrt{704}} = \frac{8p\left(2\frac{2}{7} - \frac{1}{7}\sqrt{704}\right)}{\left(2\frac{2}{7} + \frac{1}{7}\sqrt{704}\right)\left(2\frac{2}{7} - \frac{1}{7}\sqrt{704}\right)}$$

$$= \frac{8p\left(2\frac{2}{7} - \frac{1}{7}\sqrt{704}\right)}{\frac{16^2 - 704}{72}} = \frac{8p\left(2\frac{2}{7} - \frac{1}{7}\sqrt{704}\right)}{\frac{-448}{72}} = \frac{7.\,8p\,(-16 + \sqrt{704})}{448}$$

$$= \frac{-8.16p}{64} + \frac{7.\,8p}{448}\sqrt{704} = -2p + \frac{7p}{56}\sqrt{704} = -2p + \frac{p}{8}\sqrt{704} =$$

$-2p + \frac{p}{8}\sqrt{64.\,11} = -2p + p\sqrt{11}$, come io ho trovato.

Quesito 28.° Fiorini $= 10t + xp = 15p - \frac{1}{2}xt$, ed in cambio ne ebbi $8t$, $8p$: quanto vale in t, quanto in p? Si opera similmente che sopra.

Quesito 29.° Fior. $=16$ grossi $= 22$ agontani $= 44$ bolognini; il voglio cambiare in queste tre monete, volendo tanto dell'una, quanto dell'altra: quanto avrò di ciascuna? Poni x: poi argomenta $22 : 16 :: x : \frac{16x}{22} = \frac{8}{11}x$; $44 : 16 :: x : \frac{16}{44}x = \frac{4}{11}x$; dunque $x + \frac{8}{11}x + \frac{4}{11}x = 2\frac{1}{11}x = 16$, $x = \frac{16.\,11}{23} = \frac{176}{23} = 7\frac{15}{23}$.

Quesito 30.° Uno ha 4 bolognini, l'altro 6 pisani; quello cambia i 4 bolognini in pisani, questo i 6 pisani in bolognini, e dopo il cambio, questo ha tanti bolognini, quanta è la radice dei pisani che ha l'altro: e che valse il bolognino a pisani? Poni x, cioè $b = xp$;

dunque $4b = 4xp$; poi se $xp = b$; dunque $6p = \frac{6b}{x}$, e per il problema $\frac{6b}{x} = \sqrt{4xp}$, onde $\frac{36b^2}{x^2} = 4xp$, $x^3 = \frac{36b^2}{4p} = 9\frac{b^2}{p}$ $x = \sqrt[3]{9}\,\frac{b^2}{p} = \sqrt[3]{9}$ non esprimendo b, p quantità, ma essendo iniziali de' nomi delle monete.

Quesito 31.° 12 fiorini = lire 15, *e a quella rason* 13 fiorini = 16 lire: domando che val l'uno a lire? « Poni che .1. uaglia .1. co.
» donca .12. uarā .12. co. e .13. uarrā .13. co. or uedi che parte
» son .ß .15. de .12. co. che son .15. esimi de .12. co. e cosi ve-
» di che pte. sō .16. ß. de .13. co. che sōno li .6. esimi de .13. co.
» dico queste parti essere incqual ꝑportiōe luna alaltra. donca mul-
» tiplica questi rotti luno cōtra laltro. fa .240. esimi de .156. ce. parti
» .240. ꝑ .156. neuē .1. $\frac{7}{13}$. e. ℞. 1. $\frac{7}{13}$. val la cosa e tante .ß. ualse
» el fio. a ß. etc. » Io non capisco che F. Luca dir si voglia in questo problema, nè cosa $12\sqrt{1\frac{7}{13}}$ possa essere $=15$, o $13\sqrt{1\frac{7}{13}} = 16$.

Quesito 32.° Fiorini = 9 tornesi + 1 ravegnano = 1 tornese + 13 ravegnani; cambiando, ne ho tanti degli uni, come degli altri: che valse a ciascuna moneta, e quanti n'ebbi di ciascuna? Poichè $9t + 1r = 1t + 13r$; dunque $8t = 12r$, $r = \frac{8r}{12} = \frac{2}{3}$; t dunque fiorini $= 9t + \frac{2}{3}t = 9\frac{2}{3}t = 14\frac{1}{2}r$. Si prosegua come nel 29.°

Quesito 33.° Tornese = 9 genuini = 14 provigini = x bologuini; lo cambio, e ne ho 4 genuini + 4 provigini + 4 bolognini :: qual' è x? 4 genuini + 4 provigini $= \left(\frac{4}{9} + \frac{4}{14}\right)$ tornesi $= \frac{4}{9} + \frac{2}{7} = \frac{46}{63}$ tornesi; dunque $\frac{17}{63}$ tornesi = 4 bolognini; $17 : 4 :: 63 : x = \frac{4.63}{17} = \frac{252}{17} = 14\frac{14}{17}$.

Quesito 34.° Fiorino $= x$ tornesi $= (2x + 2)$ angontani $= (3x + 3)$ aquilani; lo cambio e ne ho $5t$ + 5 angontani + 5 aquilani: che vale a ciascuna sorte? $\frac{5}{x} + \frac{5}{2x+2} + \frac{5}{3x+3} = 1$. Levate le frazioni, si trova $6x^3 = 43x^2 + 79x + 30$. Fra Luca per isbaglio scrive $60x$. Egli soggiugne (¹). « El ca.° uole quādo li cubi sono equali a cēsi: cose: e
» numero che si gionga el nu.° a le cose e faciasse numero e alora

(¹) Questo tratto di F. Luca mostra, che vi era qualche regola per le equazioni di terzo grado, ma è inintelliggibile, e, come sta, non può sussistere: vedi al fine del Quesito 35.°

» harai .1. cubo equale a .7 $\frac{1}{6}$ ce. piu .18 $\frac{1}{6}$. quando fia recato a .1.
» cu. smeza li cēsi multiplicali in se giongnici el numero fara .31
» $\frac{1}{134}$. e ℞. di questo. piu .3 $\frac{7}{12}$. per lo dimezamento di censi ual
» la cosa e tanto valse a tornesi lialitri troua per te ».

Quesito 35.° Fior. $= x$ tornesi $= 2x + 3$ veneziani $= 3x + 3$ bolognini; ed in cambiarlo n'ebbi $10t + 10v + 10b$: che valse a ciascuna sorte? $\frac{10}{x}+\frac{10}{2x+2}+\frac{10}{3x+3}=1$. Ma $\frac{10}{2x+2}+\frac{10}{3x+3}=\frac{10}{2x+2}$
$+\frac{10(2x+2)}{(2x+2)(3x+3)}=\frac{10}{2x+2}+\frac{\frac{10(2x+2)}{3x+3}}{2x+2}=\frac{10}{2x+2}+\frac{10\,.\,\frac{2}{3}}{2x+2}=\frac{16\frac{2}{3}}{2x+2}$;

dunque $\frac{10}{x}+\frac{10}{2x+2}+\frac{10}{3x+3}=\frac{10}{x}+\frac{16\frac{2}{3}}{2x+2}$, e generalmente sarà

(avverte F. Luca in un notando) $\frac{a}{x}+\frac{a}{2x+2}+\frac{a}{3x+3}=\frac{a}{x}+\frac{1\frac{2}{3}a}{2x+2}$; onde da

$\frac{a}{x}+\frac{1\frac{2}{3}a}{2x+2}=$ (si tirerà) $a(2x+2)+1\frac{2}{3}ax=2x+2$; e quindi $x^2=\frac{11a-6}{6}$
$x+a$, e conseguentemente $x=\frac{11a-6}{12}\pm\sqrt{\left(\left(\frac{11a-6}{12}\right)^2+a\right)}$ (¹). Nel caso $a=10$, ne viene $x=8\frac{2}{3}+\sqrt{85\frac{1}{3}}$. Nel caso $a=5$, si trova $x=4\frac{1}{12}$
$+\sqrt{21\frac{97}{144}}$. Avverte F. Luca stesso, potersi col metodo di questo, sciogliere anche il precedente quesito, e pianta la regola che
$\frac{a}{b}+\frac{a}{b+c}=\frac{\left(1+\frac{b}{b+c}\right)^a}{b}$. Del resto, anche prescindendo da queste regola, si vede che $\frac{a}{x}+\frac{a}{2x+2}+\frac{a}{3x+3}=\frac{a}{x}+\frac{a}{2(x+1)}+\frac{a}{3(x+1)}=\frac{a}{x}$
$+\frac{3a+2a}{6(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{\frac{5}{3}a}{2(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{1\frac{2}{3}a}{2(x+1)}=$ ecc. Intendesi anche facilmente, che nel problema superiore, l'equazione $6x^3=43x^2+79x+30$

(¹) Vale anche se le frazioni in luogo dello stesso numeratore [illegible] diverso.

dedotta dalla grossolana operazione $5(2x+2)(3x+3)+5x(3x+3)+5x(2x+2)=x(2x+2)(3x+3)$, è divisibile per $x+1$; e di fatti

$$\frac{6x^3-43x^2-79x-30=0}{x+1}=\frac{x^3-7\frac{1}{6}x^2-13\frac{1}{6}x-5=0}{x+1}=x^2-8\frac{1}{6}x$$

$-5=0$; onde come sopra $x=4\frac{1}{12}+\sqrt{21\frac{97}{144}}$. Se si moltiplichi x^2+fx+g per $x+1$, si ha $x^3+(f+1)x^2+(f+g)x+g=0$; onde il coefficiente di x $f+g-g$ termine noto, dà il coefficiente f di x nel quoziente x^2+fx+g dell'equazione di terzo grado divisa per $x+1$: questo è, forse, ciò che di sopra ha voluto dire F. Luca, nè vi è altro modo d'interpretarlo, ed in luogo di $x^3=7\frac{1}{6}x^2+18\frac{1}{6}$, credo doversi leggere $x^2==8\frac{1}{6}x-5$, considerando $8\frac{1}{6}=\frac{79}{6}-\frac{30}{6}=13\frac{1}{6}-5$.

Quesito 36.° Fior. $=x$ grossoni $=(2x+2)$ grossi vecchi $=(3x+3)$ grossetti: cambiandolo ne ho avuto 4 grossoni, 3 grossi, 9 grossetti: quanti grossoni valse? $\frac{4}{x}+\frac{3}{2x+2}+\frac{9}{3x+3}=1$. Primieramente

$$\frac{3}{2x+2}+\frac{9}{3x+3}=\frac{3}{2x+2}+\frac{\frac{9(2x+2)}{3x+3}}{2x+2}=\frac{3}{2x+2}+\frac{9.\frac{2}{3}}{2x+2}$$

ecc. Dice F. Luca, che quando non vi sia luogo a questo artificio, il problema « non si potrebe fare ne absoluere impero che .3. partiri a quel mo» do e impossibile a ragiōgnere. »

Quesito 37.° Fior. $=x$ tornesi $=(2x+2)$ angontani $=3x+3$ veneziani $=(4x+4)$ ravegnani $=(5x+5)$ bolognini: cambiandolo ne ebbi 2 tornesi + 3 angontani + 9 veneziani + 5 ravegnani + 5 bolognini: che valse a tornesi? $\frac{2}{x}+\frac{3}{2x+2}+\frac{9}{3x+3}+\frac{5}{4x+4}+\frac{5}{5x+5}=1$.

Primieramente $\frac{5}{4x+4}+\frac{5}{5x+5}=\frac{5}{4x+4}+\frac{\frac{5(4x+4)}{5x+5}}{4x+4}=\frac{5+5.\frac{4}{5}}{4x+4}=\frac{9}{4x+4}$ e così via via.

Quesito 38.° simile al 37.°, e replica citando il notando del 36.° « che non potendo procedere el caso a questo modo non si troua» rebe regola che la soluesse ».

Quesito 39.° [1] Uno avea 20 fiorini, e cambiolli in tornesi; un altro aveva 70 tornesi, e cambiolli in fiorini alla medesima ragione; e le radici del numero di tornesi, che ebbe il primo, e del numero di fiorini, che ebbe il secondo furono tali, a non poter congiunte in-

[1] Quesito di minimo da F. Luca trattato.

sieme far minor numero: quanti tornesi valse il fiorino? Poni 20 fiorini $= x^2$ tornesi; dunque tornesi $= \frac{20 \text{ fiorini}}{x^2}$, 70 tornesi $= \frac{20.\,70 \text{ fiorini}}{x^2}$ $= \frac{1400 \text{ fiorini}}{x^2}$; e perciò $x + \sqrt{\frac{1400}{x^2}}$ tale, a non poter fare minor numero. Poni, dice F. Luca, $x + \sqrt{\frac{1400}{x^2}} = d$ (ecco espressione speciosa da lui adoperata nella lettera d) ed avverte che d *po essere numero infinito e a termine minimo.* Moltiplica per x, verrà $x^2 + \sqrt{1400} = dx$; dunque $x = \frac{1}{2}d \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}d^2 - \sqrt{1400}\right)}$. Di qui si vede, che il minimo valore che aver può d, è l'essere $\frac{1}{4}\,d^2 = \sqrt{1400}$, $\frac{1}{2}d = \sqrt{\sqrt{1400}}$, $d = \sqrt{\sqrt{22400}}$; d' onde $x = \frac{1}{2}d$; e così si trova col calcolo differenziale; poichè $d\left(x + \frac{\sqrt{1400}}{x}\right)$ dà $dx - \frac{dx\sqrt{1400}}{x^2} = 0$, $x^2 = \sqrt{1400}$, $x = \sqrt{\sqrt{1400}}$, $x + \frac{\sqrt{1400}}{x} = \sqrt{\sqrt{1400}} + \frac{\sqrt{1400}}{\sqrt{\sqrt{1400}}} = \sqrt{\sqrt{1400}} + \sqrt{\sqrt{1400}} = = \sqrt{\sqrt{1400}}$. E che sia un minimo, si prova, supponendo $x = \sqrt{\sqrt{1400}} + a$; poichè avrassi $\sqrt{\sqrt{1400}} + a + \frac{\sqrt{1400}}{\sqrt{\sqrt{1400}} + a} = \sqrt{\sqrt{1400}} + a + \sqrt{\sqrt{1400}} - a + \frac{a^2}{\sqrt{\sqrt{1400}} + a}$.

Quesito 40.° Uno ha un ducato, e vale tanti carlini, quanti se ne guadagnerebbero per 100 cambiandolo per 11 carlini: quanti carlini vale? Poni x; poi argomenta $100 + x : 100 :: 11 : \frac{1100}{100 + x}$ che deve essere $= x$; onde $1100 = 100x + x^2$, $x = -50 + \sqrt{(2500 + 1100)} = -50 + \sqrt{3600} = -50 + 60 = 10$.

Quesito 41.° Fior. $= 5$ carlini $= 2.\,5 + 2(12)$ grossi $= 3.\,12 + 3\,(39)$ angontani: avendolo cambiato alle tre dette sorte, n'ebbi ugual numero di ciascuna: quanti di ciascuna? Opera come nel 29.°

Quesito 42.° Fior. $= 26$ veneziani $+ 26$ piccoli, e tanti piccoli vale il veneziano, quanti veneziani il fiorino: che valse il fiorino a veneziani, che a piccoli? Poni fiorino $= x$ veneziani; dunque veneziani $= x$ piccoli, 26 veneziani $= 26x$ piccoli; e perciò fiorino $= (26x + 26)$ piccoli; di più x veneziani $= x^2$ piccoli; dunque x^2 piccoli $= (26x + 26)$ piccoli, $x^2 = 26x + 26$, $x = 13 + \sqrt{(13^2 + 26)} = 13 + \sqrt{195}$.

Quesito 43.° Uno ha fiorini 100 fra nuovi e vecchi, e li cambia a soldi 38, piccoli 4 per ogni nuovo, soldi 37, piccoli 0, per ogni vecchio, e n'ebbe in tutto lire 189: quanti furono i vecchi, quanti i nuovi? Primo modo, $100 + 37 =$ soldi $3700 =$ lire $185 = 189 - 4$; 538

$+$ piccoli $4 - 5.37 = 51\frac{1}{3}\ \frac{4 \text{ lire}}{51\frac{1}{3}} = \frac{80}{1\frac{1}{3}} = 60$ numero di fiorini nuovi; dunque 40 quello di vecchi. Secondo modo. Poni x il numero de'nuovi, $100-x$ il numero de'vecchi $x.\ 38\frac{1}{3} + (100-x)37 = 189.20$ ec.

Quesito 44.° Un banchiere ha due sorte di fiorini; 100 fiorini della prima, vale lire 500, 100 della seconda, vale lire 300; cambio con lui lire 450, e mi dà fiorini 100 fra l'una e l'altra sorte: quanti me ne dà dell'una quanti dell'altra? Operisi siccome sopra. 75 de'primi, 25 de'secondi.

Quesito 45.° Uno ha fiorini 20, l'altro genuini 30; il primo cambiò in genuini, il secondo in fiorini ad un banco, alla ragione medesima, e dopo il cambio, il secondo si trovò con 10 fiorini più che genuini il primo: che valse il fiorino a genuini? Poni fiorini $= x$ genuini; dunque 20 fiorini $= 20x$ genuini, genuini $= \frac{\text{fiorini}}{x}$, 30 genuini $= \frac{30 \text{ fiorini}}{x}$; $\frac{30}{x} = 10 + 20x$, $30 = 10x + 20x^2$, $3 = x + 2x^2$, $x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}$, $x = -\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{2}} = -\frac{1}{4} + \sqrt{1\frac{9}{16}}$.

Quesito 46.° Uno ha fiorini 20 d'oro, un altro 100 tornesi; il primo cambia in tornesi; il secondo in fiorini ad una ragione medesima; e dopo il cambio si trovò per numero tanto uno, quanto l'altro: che valse il fiorino a tornesi? Poni fiorini $= x$ tornesi; dunque 20 fiorini $= 20x$ tornesi; tornesi $= \frac{\text{fiorini}}{x}$, 100 tornesi $= \frac{100 \text{ fiorini}}{x}$; $\frac{100}{x} = 20x$, $100 = 20x^2$, $x = \sqrt{5}$.

« *De meriti Resti Saldi Sconti e modo de recare a vndi. c° p°.* »

Meritar semplicemente, è quando del merito non ne nasce merito.

Sapere a ragione di f per 100 l'anno, ciò che guadagna la lira al mese. Sarà $\frac{f}{5}$. Poichè $100 \times 12 : f :: 1 : \frac{f.\,1}{1200}$, e risolvendo la lira in denari 240, $\frac{f.240}{1200} = \frac{f}{5}$. Per esempio, se $f = 15$, si avrà $\frac{f}{5} = 3$, cioè la lira guadagnerà 3 denari al mese.

Sapere lire a in quanto tempo guadagneranno lire b, a ragione di 2 denari la lira al mese.

Sapere lire a in tempo t, quanto guadagneranno alla stessa ragione. Questo problema deve precedere, e precede in F. Luca.

Sapere qual somma di lire a guadagna b in tempo t alla detta ragione.

Sapere qual è la ragione del tanto per 100, a cui la somma a guadagna b in tempo t.

Sia g ciò che guadagna la lira al mese, e il tempo t si computi a mesi; dunque gt è il guadagno della lira in numero di mesi t, ed agt è il guadagno di lire a in tempo t; dunque $agt=b$ è la formola che scioglie i quattro problemi.

« *De lo sconto semplicimente.* »

Sconto è atto contrario al merito, perchè quando si merita, il capitale cresce, e quando si sconta, il capitale scema.

Voglio scontare lire a per tempo t a ragione del 20 per 100 l'anno. Facciasi $20=f$; sarà $\frac{f}{5}$ il merito della lira al mese, il quale pongasi $=g$; sarà gt il merito della lira nel tempo t; dunque di 1 si fa $1+gt$ meritando, ed al contrario di $1+gt$ si fa 1 scontando; dunque di a si farà $\frac{a}{1+gt}$, e sarà lo scontato $=a-\frac{a}{1+gt}=\frac{agt}{1+gt}$. Per esempio $a=100$, $f=20$, sarà $\frac{f}{5}=g=4$ denari. Sia $t=30$ mesi, sarà $gt=120$ denari $=$ soldi $10=\frac{1}{2}$ lira; e perciò $\frac{a}{1+gt}=\frac{a}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2a}{3}$ $=\frac{200}{3}=66\frac{2}{3}$, $a-\frac{a}{1+gt}=100-66\frac{2}{3}=33\frac{1}{3}$. Noi oggi chiamiamo anche *diffalco*, ciò che gli antichi chiamavano *sconto*. E nell'esempio vuol dire, che se un tale doveami dopo anni $2\frac{1}{2}$ lire 100, ed io pei miei bisogni gliele chiedo subito collo sconto di 20 per 100 l'anno, non dovrà egli darmi subito, che lire $66\frac{2}{3}$.

È da avvertirsi che gt è in denari, e volendolo in frazione di lira, bisognerà dividerlo per $12\times 20=240$.

Si supponga $\frac{gt}{240}=m$, sicchè $\frac{a}{1+\frac{gt}{240}}=\frac{a}{1+m}$. Svolgendo in serie $\frac{a}{1+m}$, trovasi $\frac{a}{1+m}=a-am+am^2-am^3+am^4-am^5+\ldots\ldots$ dove am è il guadagno nel tempo t del capitale a, am^2 è il guadagno del primo guadagno am, am^3 è il guadagno del secondo guadagno, am^4 è il guadagno del terzo guadagno ... ec. Si arrivi sino ad am^n che sia $<$ di un denaro, e poi si facciano le sottrazioni nella serie espresse. Tale è la dimostrazione da F. Luca non addotta di una regola che egli soggiugne pel caso che m sia un rotto tale, che $1+m$ riesca un partitore difficile da maneggiare, come se f fosse 8, $t=$mesi 19, e giorni 7, $a=150$. Trovasi pel primo modo il 150 ridursi a 132 lire, 18 soldi, 6 denari. Pel secondo modo F. Luca, senza porre le operazioni, dice risultare 132 lire, soldi 14, denari 5. Ora $m=\frac{gt}{240}=\frac{\frac{8}{5}\cdot 19\frac{7}{30}}{240}=\frac{8.577}{5.30.240}=\frac{577}{4500}$.

« *Del meritare a capo danno o altro termine.* »

Meritare a capo d'anno o altro tempo, è quando del merito nasce merito.

Vedi *Estratto Ragionato* pag. 39.

Se il meritare, invece di essere a capo d'anno, sia a capo di mesi 6, si opera similmente.

« *Del modo a sapere componere le tauole del merito.* »

Dice il 5 per 100, donde incomincia le tavole *assai basso merito che comunamente possi essere*, e sale sino a 20 per 100 *che sia*, dice, *conveneuolmente assai alto merito*. Intende di tavole di merito a capo d'anno: insegna a farle, ed a servirsene: cita, come fatta in margine, quella del 15 per 100 estesa ad anni 20, ma non vi si trova. Denomina anche il merito a capo d' anno *merito doppio*. Trattandosi di parte di anno sopra un numero n di anni, insegna a trovare nelle tavole il montante di anni $n+1$, e poi fare lo sconto semplice per la parte di anno la quale manca.

« *De lo sconto a capo danno.* »

Quando si tratti di anno spezzato, devesi meritare pel rimanente al termine dell'anno, e poi scontare ad anno ad anno. Esempio: si debbano scontare lire 100 per tempo di 2 anni, mesi 6, a ragione del 20 per 100 l'anno a capo d'anno: computa il merito per mesi 6, e le lire 100 diverranno 110. Ora sconta per 3 anni col ribasso da 6 a 5: pel primo anno verrà $\frac{5}{6}.110$; pel secondo $\frac{5}{6}.\frac{5}{6}.110$; pel terzo $\frac{5}{6}.\frac{5}{6}.\frac{5}{6}.110$.

Insegna a farlo anche per le tavole del merito, prendendo il montante di 100, od altra quantità nel dato tempo, e poi dal montante alla quantità presa, argomentando dal capitale dato, alla quantità scontata corrispondente.

« *Commo se saldano le ragioni semplicimente* — *ca.° 2.°* »

Saldano i mercanti le ragioni tra loro, computando partita per partita dell'avere o del dare il merito, a proporzione di capitale e di tempo, e confrontando la somma delle partite di una sorte, accresciute del loro merito, colla somma delle partite dell' altra sorte del merito loro pure accresciute.

Saldare la ragione, non è altro che computare quanto abbia meritato una somma da un dato tempo al tempo, disputato pel saldo delle ragioni. Qui F. Luca parla dell'anno, della sua quantità vera $=$ giorni $365\frac{1}{4}$ poco meno; del numero dei mesi, in cui fu diviso;

in 12 dai Romani, e per Agostino, *De civ. Dei*, in 15; in 3 dagli Arcadi; in 4 dagli Egizi; in 13 dai Latini; in 6 dagli Acaruani, proseguendo a dire *nondimeno tutti li latini con li romani a 12 si tennero*; dal principio, principiando Chiesa santa *a nativitate*, in Venezia al 1° di Marzo, a Fiorenza per l'Annunziata 25 Marzo. In uso mercantesco si computa di giorni 360, divisi in 12 mesi di giorni 30 l'uno.

« *Del modo de recare a un termine piu pagamenti e de la distintion del resto. c.° 3.°* »

Uno deve avere da un altro:

Primo.	250. 8. 4	a dì 25 Maggio	1370.	0. 0. 0;
Secondo.	368. 5. 6	16 Luglio	1371.	42. 0. 11;
Terzo.	451. 6. 8	30 Settembre	1372.	106. 1. 3.

Il merito del secondo capitale da 25 Maggio 1370 a 16 Luglio 1371, è a 10 per 100, 42 0. 11; il merito del terzo nel tempo tra 25 Maggio 1370 a 30 Settembre 1372, è lire 106, soldi 1, denari 3, la somma dei meriti = 148. 2. 2; la somma dei capitali 1°+2°+3° è = 1070. 0. 6. Se si cerchi, in che tempo tutto questo capitale può acquistare il merito 148. 2. 2; si trova che in 1 anno, 4 mesi, 18 giorni: il qual tempo, aggiunto a quello di 25 Maggio 1370, nel quale *si fondò* a meritare, porta ai 13 Ottobre 1371, nel qual giorno si dovranno pagare unitamente le partite.

Riduce anche F. Luca il problema alla alligazione, per lui *lega di metalli e consolamento delle monete*. Uno debba avere lire 10 a termine mesi 9, lire 12 termine a mesi 10, lire 15 termine mesi 5: il termine mesi comune, sarà $= \frac{10.\ 9+12.\ 10+15.5}{10+12+15} = \frac{90+120+75}{37} = \frac{285}{37} =$ mesi 7, giorni 26. [1]

Distinzion del resto. Si deve distinguere il caso in cui trattasi di due sole partite, ed il caso in cui trattasi di più. Trattisi primieramente di due sole partite. Uno deve avere [2] al 20 Settembre 1372 lire 1650: ha avuto ai 28 Maggio 1373 lire 429: voglio sapere in che dì debba avere il resto? Dai 20 Agosto 1372, ai 28 Maggio 1373 sonovi mesi 8, dì 5; le lire 429 in questo tempo al 10 per 100 l'anno, guadagnano lire 29, soldi 11, denari 1. Si sottragga 429 da 1650, restano lire 1221. Queste meritano 29. 11. 1 in mesi 2, dì 27; si retroceda di tanto dal 20 Agosto, ed avrassi il giorno 23 Giugno, a cui si dovrà riportare il resto 1221. La ragione è, che il debitore doveva pagare ai 20 Settembre 1372, non ai 28 Maggio 1373 le lire 429, avendole possedute mesi 8, dì 5; doveva anche pagare il merito corrispondente in lire 29, soldi 11, denari 1; se pagato lo avesse, non resterebbe debitore che di lire 1221 dallo stesso termine 20 Settembre: per supplire, senza alterare la somma dovuta di lire 1221, si

[1] Questa regola è da Tartaglia chiamata *Magistrale*.
[2] Il *deve avere* significa *è creditore con obbligo di merito nel debitore differendo.*

indietro il termine del tempo, computando quanto tempo *ponerebbe* essa somma a meritare lire 29, soldi 11, denari 1. Così all'incirca, spiega Tartaglia, pag. 186, che chiama l'operazione *tirare* o *riportare in resto*. Trattandosi di molte partite *dee avere*, e di molte *ha avuto*, si riducano ad un termine, o sia ad un dì le partite del *dee avere*, o quelle dell' *ha avuto* quelle che sono più agevoli, poni le partite *dee avere*; poi di ciascuna delle altre *ha avuto*, computa il merito dal proprio dì, al dì di riduzione delle prime; si sommino i meriti delle partite anteriori al dì di riduzione, ed i meriti di quelle posteriori; si prenda la differenza delle somme, e si sottragga la somma delle partite *ha avuto* dalla somma delle partite *dee avere*; si computi in qual tempo il resto meriterebbe la detta differenza delle somme dei meriti, e di tanto tempo si farà retrocedere, od avanzare il dì di riduzione, secondo che sarà stata maggiore la somma de' meriti delle partite *ha avuto* ad esso posteriori, a quella delle partite anteriori. Prendiamo l'esempio da Tartaglia, essendo più chiaro, quantunque egli in esso rechi ad un dì le partite del *Die* (Dee) dare corrispondente all' *ha avuto* di F. Luca. Supponesi il merito del 12 per 100 l'anno.

« *Die dare* »

Ducati 100	a dì 1° Febraro	1553	il *die dar* recato a un dì, Ducati 700 a dì 26 Novembre 1554, trascurando $\frac{4}{7}$ di dì.
Ducati 200	1° Aprile	1554	
Ducati 100	1° Luio	1554	
Ducati 300	30° Settembrio	1555	
Somma 700			

« *Die haver* »

Ducati 100	a dì 15 Marzo 1554	— il merito di mesi 8, dì 11,	ducati	8.	gr. 8	pic. 25
Ducati 100	1° Aprile 1554	di mesi 7, dì 15,		7.	20	
Ducati 100	1° Giugno 1554	di mesi 5, dì 25,		5.	20	
Ducati 200	30 Ottobre 1555	mesi 11, dì 4	Somma	22.	0.	25
Somma 500				22.	6.	12
		Differenza		—	5.	29

Differenza del *dee dare* e del *dee avere* = 700 — 500 = 200.

In qual tempo ducati 200 meritano grossi 5, piccoli 29? In giorni $3\frac{9144}{18432}$, o, trascurando il rotto, in giorni 3; i quali 3 giorni, essendo il merito della partita quarta, ossia della posteriore, maggiore della somma dei meriti delle anteriori, si dovranno sottrarre dal giorno 26 Novembre (*dal termine principale*, dice Tartaglia) e si avrà il giorno 23 Novembre 1554 pel termine, a cui si dovrà riportare il resto 200, cioè notare il *dee dare* 200.

Si potrebbe anche recare a un dì, le partite del *dee havere*, e si troverebbe il giorno 27 Novembre 1554, e sarebbe l'affare ridotto a due partite, dicendo uno *dee dare* ducati 700 a dì 26 Novembre 1554, e *dee haver* ducati 500 a dì 27, e procedendo, come nel caso delle due partite, si troverebbe per termine di riporto del resto 200, il giorno 24 Novembre 1554, in luogo di 23, trovato nel primo modo; e questa differenza accade per causa (dice Tartaglia) « delli rotti, che nel » recar tai partite a un dì si va lasciando, e pero piu giustamente riu- » scisse la ragione a non recare a un dì salvo che le partite del dare » o ueramente quelle del havere. » F. Luca similmente condanna il secondo modo per la ragione stessa.

« *Sequitur de meritis.* »

Quesito 1.° In quanti anni lire 25 diverranno doppie all'8 per 100 di frutto all'anno? $8:1::100:\frac{100}{8}=12\frac{1}{2}$, perchè le 100 si hanno a duplicare a quella medesima ragione, che le 100.

Quesito 2.° Quanto meriteranno lire 295 in anni 3, a merito di piccoli 2 la lira al mese a fare capo d'anno? Lire 392, soldi $12\frac{9}{10}$, sarà la somma di capitale e merito. Il merito della lira, viene ad essere in un anno soldi $2=\frac{1}{10}$ di lira; dunque la lira nel primo anno, diviene soldi 22; nel secondo, $22+\frac{1}{10}.22=24\frac{1}{5}$; nel terzo, $24\frac{1}{5}+\frac{1}{10}24\frac{1}{5}=26\frac{21}{50}$. Ora, se una lira torna soldi $26\frac{21}{50}$, che torneranno 295?

Quesito 3.° simile.

Quesito 4.° Uno presta lire 60, termine mesi 8. Poi dice il creditore al debitore nel medesimo dì, per un bisogno sopravvenutogli, se me le rendi subito, te le voglio scontare a denari 2 la lira al mese *simpliciter*: quante lire dovrà dare, quante resteranno scontate? Il merito della lira in 8 mesi, è soldi $1\frac{1}{3}$, cioè 20 divengono $21\frac{1}{3}$; dunque si dica $21\frac{1}{3}:20::60:\frac{20.60}{21\frac{1}{3}}=56\frac{1}{4}$.

Quesito 5.° Uno presta x lire per mesi 10, e in capo del termine deve ricevere 70, il debitore gli dà di presente 65, e son contenti e pagati: a che merito fu prestata la lira al mese? $\frac{70-65}{65.10}$.

Quesito 6.° Lire 150 a denari 2 il mese, resero fra capitale e merito lire 195 a merito semplice: chiedesi in quanto tempo? anni 3.

Quesito 7.° Lire 50 in mesi 15 a merito semplice, denari 2 la lira al mese, divennero fiorini 15: quanto valse l'uno?

Quesito 8.° Uno deve avere lire 100 da qui ad anni $2\frac{1}{3}$, scontando a denari 2 la lira il mese, a merito capo d'anno: quante dovrà il debitore dargliene, soddisfacendolo di presente? La lira torna $25\frac{1}{150}$; dunque dicasi $25\frac{1}{150} : 20 :: 100 : 79$ soldi 19, piccoli $6\frac{3306}{3751}$.

Quesito 9.° Uno presta denaro a questo modo, che il primo dì aver deve di merito soldi 1, il secondo 2, il terzo 3 .... e così in progresso aritmetico: in capo del tempo, riceve di merito soldi 18: per quanti giorni ricevette? Sciogliesi per le progressioni: il primo termine $= 1$ somma $= 58$, si troverà $-\frac{1}{2} + \sqrt{116\frac{1}{4}}$.

Quesito 10.° Lire 87 per anni 3: da poi si accorda col debitore, che gli dia di presente lire 58, scontando a capo d'anno: a che ragione fu scontata la lira al mese? Poni, fosse scontata denari 2; in capo a 3 anni, la lira monterebbe a soldi $26\frac{31}{50}$, il merito sarebbe $6\frac{31}{50}$. Le lire 58 hanno meritato $87-58=29$; una lira ha meritato $\frac{29}{58} = \frac{1}{2}$ $=$ soldi 10: dicasi $6\frac{31}{50} : 2 :: 10 : \frac{2.\,10}{6\frac{31}{50}} = \frac{1000}{331} = 3\frac{7}{331}$.

Quesito 11.° Uno deve avere, da mo a 3 anni, lire 150: il debitore gli diede di presente fiorini 10, e fu scontato a ragione di denari 2 la lira al mese: che valse il fiorino? $11\frac{7}{13}$.

Quesito 12.° Uno presta, a termine anni 3, denari x; ma poi il debitore, nello stesso dì, gli dà lire $115\frac{5}{13}$, scontando la lira denari 2 al mese: qual fu x? Merita una lira, a merito semplice, soldi 6: argomenta dunque: $20 : 26 :: 115\frac{5}{13} : \frac{115\frac{5}{13}\times 26}{20} = 150$.

Quesito 13.° Uno deve avere da un altro, da mo non so che tempo, lire 150: il debitore pagò di presente, scontando a ragione di denari 2 la lira al mese semplicemente, e sì gli diede lire $115\frac{5}{13}$: a che tempo colui doveva avere le lire 150? La lira merita al mese $\frac{1}{6}$ soldi; lire $115\frac{5}{13}$ meritano soldi $19\frac{3}{13} = \frac{25}{26}$ di lira; dunque meriteranno lire $150 - 115\frac{5}{13} = 34\frac{8}{13}$ in mesi 36.

Quesito 14.° Uno deve avere, da mo anni 3, x lire: il debitore gli dà di presente 361, scontando a denari 2 la lira al mese a far capo d' anno: qual era x? La lira diverrà soldi $26\frac{31}{50}$: argomenta: $20 : 26\frac{31}{50} :: 361 : x = 480$ lire, 9 soldi, piccoli $9\frac{21}{25}$.

Quesito 15.° Uno presta lire 361 per anni 3 a far capo d' anno: in fine del tempo, il debitore gli rende lire 480, soldi 9, piccoli $9\frac{21}{25}$: a che ragione fu prestata la lira al mese? Come nel 10.° operando, troverai denari 2.

Quesito 16.° Uno presta lire 120 a far capo di mesi 7, a denari 2 la lira al mese, volendo guadagnare lo stesso, ma far capo di mesi 6: a quanto per lira al mese dovrà essere il guadagno? Computa il merito di 120, o di altra quantità si voglia, a denari 2 la lira al mese; il 120 monterà a 127. Poni x denari, il nuovo guadagno della lira al mese che cerchi: in 6 mesi sarà $6x$ denari $= \frac{1}{40}x$ lira, ed il merito di lire 120, sarà $3x$ di lira. Computa il merito per altri 6 mesi, ed avrai $(120 + 3x) \times \frac{1}{40}x = 3x + \frac{3}{40}x^2$, che aggiunto a $120 + 3x$ fa $120 + 6x + \frac{3}{40}x^2$, e questo è fra capitale e merito in 12 mesi. Si dovea computare per soli 7; bisogna scontare per 5. La lira in 5 mesi merita $5x$ denari $= \frac{1}{48}x$ lira, e diventa $1 + \frac{1}{48}x$; argomenta: $1 + \frac{1}{48}x : 1 :: 120 + 6x + \frac{3}{40}x^2 : \dfrac{120+6x+\frac{3}{40}x^2}{1+\frac{1}{48}x}$; e questo deve essere $= 127$; ne verrà $93\frac{1}{3} = x^2 + 44\frac{13}{18}x$, e risulterà $x = -22\frac{13}{36} + \sqrt{593\frac{457}{1296}}$.

Quesito 17.° Uno presta lire 100 per un anno a ragione di 10 per 100 l'anno: per mesi 6 che meriteranno? Poni x; dunque in 6 mesi lire 100 monteranno a $100 + x$. Argomenta per gli altri 6 mesi: $100 : 100 + x :: 100 + x : \frac{(100+x)^2}{100}$, e deve essere $= 110$; troverai $x = -100 + \sqrt{110000}$.

Quesito 18.° Uno deve avere, da mo a 6 mesi, lire 100: le vuole al presente, a far sconto a 10 per 100 l'anno: quante dovrà averne? Argomenta: $110 : 100 :: 100 : \frac{100.\,100}{110} = 90\frac{10}{11}$, ed è ciò, a che si riduce 100 per lo sconto di 10 per 100 l'anno. Poni lo sconto per 6 mesi x; dunque 100 si abbasserà a $100-x$, e per lo sconto degli altri sei mesi arguisci: $100 : 100 - x :: 100 - x : \frac{(100-x)^2}{100}$ che deve essere $= 90\frac{10}{11}$, e troverai $x = 100 - \sqrt{9090\frac{10}{11}}$.

Quesito 19.° Uno presta ad un altro fiorini 1000, per errore in F. Luca vi è 10000, a far capo d'anno, e in capo di 5 anni colui gli rese fiorini 2500: a quanto fu prestata la lira al mese, ovvero il fiorino? « Molti » grossolani e inexperti in larte. anno ditto simili domande non si potere » soluere e non dicean bene. e sonno heretici in larte commo qui in questa. e in lasequente se dimostrera. Conciosia cosa chel merito a capo » danno. procede sempre inla continua proportionalita. dico adonca. che » in questa rechiesta se ricercano .6. numeri ꝓportiōali diquali. el primo e el capitale prestato. Cioe. 1000. El secondo e capitale e merito del prīo. anno. El sexto e vltimo capitale e merito. cioe. 2500. » de li altri non euro. perche me basta q̄sti termini al mio procedere » perche ponendo .6. quantita che la prima sia vnita. continuando in » continua proportion. sempre sira la ꝭa quantita. ℞. relata dela .6.ª » qūalita donca la 6.ª fia .2 ½. e perche habiamo partito in .1000. multiplicarai .1000. via ℞. relata. de .2 ½. reca prīa .1000. a ℞. r.ª fara » ditta multiplicatione. ℞. relata de .2500000000000000. E tanti sōno » el p.° āno vnde ꝑsape a cħ fo ī ꝑstata la .ß. elmese. farai d'la ℞. » relata de .2500000000000000. d'. e partirai in .1000. e poi in .12. » uiene tratone .20. d'. che fo prestata la ß. el mese. ala ℞. relata » de .8000000. m̄. 20. d'. et sic soluitur ꝓpositū. nilminus alias īferius. anectā predictis etc. » (*)

Quesito 20.° « Stu meriti .100. fiorin per tempo de .9. mesi. a » rason de .20. per c.° alanno a far capo danno. Similmente q̄sto » caso asai ignoranti anno ditto. nō si podere soluere. Epero qui lasoluo a lor confusion .... ingegnate meritare li .100. fiorin ꝑ tāti » āni che li .9. mesi neuēga a essere vna certa parte. Or piglia .3. » anni. di quali .9. mesi sōno. el $\frac{1}{4}$. doue meritati fiorin .100. per » .3. anni sōno .172. ß .16. ß. cioè ß. 172 $\frac{4}{5}$. ... Ora tu vedi che .9. » mesi entrano in .3. āni .4. uolte. E pero qui se recercano .5. numeri proportiōali di quali el primo e ß. 100. cioe el primo capi-

(*) Ciò che si legge in questa pagina 260, lin. 16—23 dalle parole « sempre sira la ꝭa » fino alle parole « iferius. anecta » forma le linee 28ª—36ª della carta 194, *verso*, della Cartella quinta dei manoscritti del P. Cossali. Presso a queste linee sul margine laterale interno del medesimo rovescio, si legge « $\frac{2500}{1000}$ » $= \frac{25}{10} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ supposto m il merito annuo $1000(1+m)^5 = 2500$, $1+m = \sqrt[5]{2\frac{1}{2}} = \frac{1000}{1000}$ » $\sqrt[5]{2\frac{1}{2}} = \frac{1}{1000} \times \sqrt[5]{2,50000,00000,00000}$. »

» tale. El ƀo e capitale e merito de .100. ₰. in capo de .9. mesi. el
» 3.° e capitale e merito de .18. mesi. El 4.° e capitale merito de
» .27. el .5.° e capitale e merito de .36. mesi. cioe ₰. 172 $\frac{4}{5}$. E per-
» che nel tratato dele ꝓportiōi. in questo dicēmo quādo el p.° nu-
» mero fosse vnita. El ƀo sempre sira. ℞. ℞. del 5.° Onde partirai
» .100 ₰. e. 172 $\frac{4}{5}$. per .100. harai 1.° E 1.° $\frac{91}{125}$. E diremo quādo
» se meritasse vno solo fiorino. o ver ₰. 1. in .9. mesi seria in tutto.
» ℞. ℞. 1 $\frac{91}{125}$. Dōca li .100. fiorin. over le .100. ₰ sirāno .100.
» cotāti ... recādo .100. a. ℞ ℞. fara. ℞ ℞. 17290000. e tanto di-
» remo che tornino ₰. 100. in mesi 9. afar capo alanno e arason
» de .20. per c.° alanno ».

Quesito 21.° Uno presta x denari a ragione y la lira al mese; il primo anno il debitore gli rese, fra capitale e merito, lire 80, e colui gli disse che le tenesse un altro anno alla ragione del precedente, e in capo del secondo anno, il merito del secondo anno fu $= \frac{1}{8}x$: qual fu x? Alla fine del secondo anno fu tra capitale e merito $\left(1 + \frac{1}{8}\right)x$. Argomenta ora: $x : 80 :: 80 : \frac{6400}{x}$, che deve essere $= \left(1 + \frac{1}{8}\right)x$, e ne verrà $x = \sqrt{5668 \frac{8}{9}}$.

Quesito 22.° Uno presta fiorini 20 d'oro, e ne ha di merito lire 10; se si prestano lire 30 alla medesima ragione, e ne ha di merito fiorini 2, che valse il fiorino? Poni x lire; dunque 20 fiorini $= 20x$, 2 fiorini $= 2x$. Argomenta: $30 : 2x :: 20x : 1\frac{1}{3}x^2 = 10$ lire; dunque $x = \sqrt{7\frac{1}{2}}$.

Quesito 23.° Uno presta lire 50 e fiorini 32: in capo d'anno il debitore gli rende di merito per le lire 50, fiorini 5; e per li fiorini 32: lire 20: che fu contato il fiorino? a che ragione fu messa la lira al mese? Scrivi $\begin{matrix}50 & 32\\ 5 & 20\end{matrix}$ moltiplica in croce, avrai $5.32 = 168$ fiorini, $50.20 = 1000$ lire; hai dunque, *secondo la regola de baratti che to data*, che fiorini 160 vagliono lire 1000, e però 1 fiorino $= \frac{1000}{160} = \frac{100}{16} = 6\frac{1}{4}$. Per sapere a che ragione fosse posta la lira, fingi fosse posta x denari; in un anno sarà $12x$ denari $= \frac{1}{20}x$ lire; $\frac{1}{20}x$ di 50 lire $= 2\frac{1}{2}x$; $\frac{1}{20}x$ di 32 fiorini $= 1\frac{3}{5}x$; $2\frac{1}{2}x \times 1\frac{3}{5}x = 4x^2 =$ a quello che il debitore rende delle lire, e dei fiorini, in tutto $=$ lire 20 $+$ fiorini $5 = 100$. Dunque $x = \sqrt{\frac{100}{4}} = 5$.

Quesito 24.° Uno presta fiorini 60, e lire 100 di piccoli per un anno, e dei 60 fiorini, trae di merito 3 fiorini e 10 lire, e delle 100 lire, trae fiorini 5, lire 6: che valse il fiorino a piccoli? Poni x lire; dunque 60 fiorini $= 60x$, 3 fiorini $= 3x$, 5 fiorini $= 5x$. Argomenta: $60x : 3x + 10 :: 100 : \frac{100(3x+10)}{60x} = 5x + 6$, $x = -\frac{1}{10} + \sqrt{3\frac{103}{300}}$.

Quesito 25.° Lire 20, guadagnano all'anno fiorini $3-1$ lira, e 30 fiorini, guadagnano alla stessa rata lire $10-1$ fiorino: quanto vale il fiorino? Poni x, 30 fiorini $= 30x$, $20 : 32 - 1 :: 30x : \frac{30x(3x-1)}{20} = 10 - x$, $x = \frac{5}{18} + \sqrt{2\frac{97}{324}}$.

Quesito 26.° Uno presta x lire a ragione y denari la lira il mese. In capo del primo anno ebbe, fra capitale e merito, lire 100; ma lasciandole in mano del debitore, alla medesima ragione, alla fine del secondo anno ebbe di ogni 3 quattro: qual fu x, quale la ragione y? Poni il merito nel primo anno $= x$; dunque $100-x$ il capitale, $100 - x : 100 :: 100 : \frac{100.\,100}{100-x}$ merito e capitale in fine del secondo anno $= \frac{4}{3}(100-x)$, $x = 100 - \sqrt{7500}$; dunque il capitale $= \sqrt{7500}$. Per trovare y di $\sqrt{7500} : 100 - \sqrt{7500} :: 1 : \frac{100-\sqrt{7500}}{\sqrt{7500}} = \sqrt{1\frac{1}{3}} - 1$ merito di una lira l'anno, e sarà $20\left(\sqrt{1\frac{1}{3}} - 1\right)$ il merito in denari della lira al mese; poichè si dovrebbero moltiplicare i soldi 20 per 12, e dividere poi per 12 mesi.

Quesito 27.° Uno presta x lire: al fine del primo anno, divengono 160, alla fine del secondo, montano a $\frac{25\frac{3}{5}}{10}x$: qual fu x, e a qual ragione si prestò la lira al mese? Simile all'antecedente $x=100$, e la lira sarà stata prestata, a 10 denari al mese. Più speditamente. Poni la lira prestata a y l'anno; dunque prima torna $1+y$, argomenta: $1 : 1+y :: 160 : 160(1+y)$; $1+y : 1 :: 160 : \frac{160}{1+y}$ capitale primo, $\frac{25\frac{3}{5}}{10} \cdot \frac{160}{1+y} = 160(1+y)$.

Quesito 28.° Uno presta lire 20 per due anni a y la lira al mese: in fine del primo anno aggiugne di presto lire 10 alla ragione medesima, ed al fine del secondo anno ritrae, fra capitale e merito, lire 60 : qual fu il merito y ? 20 meritano $20y$ al mese, $240y$ all' anno in piccoli, ossia denari, $\frac{240y}{20.12} = y$ lire ; dunque in fine del primo anno, saranno $(20 + y)$ lire, aggiunte 10, diverranno $30 + y$. Argomenta: $20 : 20 + y :: 30 + y = \frac{(20+y)(30+y)}{20}$ che deve essere $=60$, e sarà $y = -25 + \sqrt{1225} = 10$.

Quesito 29.° Uno presta lire 100 per anni tre a far capo d'anno a denari 2 la lira al mese, volendo che il debitore gli dia tanto alla fine di ciascuno, che alla fine del terzo anno, resti estinto ogni debito: quante lire darà il debitore ciascun anno? A denari 2 al mese, la lira meriterà in capo d'anno $\frac{1}{10}$ di lira; le lire 100 monteranno a 110; dia il debitore x lire, resteranno $110 - x$ per capitale del secondo anno, e monterà a $110 - x + \frac{1}{10}(110 - x) = 121 - 1\frac{1}{10}x$, e $121 - 1\frac{1}{10}x - x = 121 - 2\frac{1}{10}x$ sarà il capitale pel terzo anno, che monterà a $121 - 2\frac{1}{10}x + \frac{1}{10}\left(121 - 2\frac{1}{10}x\right) = 133\frac{1}{10} - 2\frac{31}{100}x$, e cavando x, dovrà essere $133\frac{1}{10} - 3\frac{31}{100}x = 0$, $x = 40\frac{70}{331}$.

Quesito 30.° Uno presta x lire a x denari la lira il mese, ed in capo di due anni x lire, montò a $3x$: qual fu x ? La lira meritò all' anno $12x$ denari $= \frac{1}{20}x$ lire, x lire meritarono nel primo anno $\frac{1}{20}x^2$, e montarono a $x + \frac{1}{20}x^2$; pel secondo anno argomenta: $1 : 1 + \frac{1}{20}x :: x + \frac{1}{20}x^2 : x + \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{400}x^3$, che deve essere $= 3x$, $x = -20 + \sqrt{1200}$.

Quesito 31.° Uno presta x lire a $x - 1$ denari la lira il mese, e alla fine dell'anno, colui gli rese in tutto lire 30 : qual fu x ? La lira torna in un anno $\frac{1}{20}x + \frac{19}{20}$. Argomenta: $1 : \frac{1}{20}x + \frac{19}{20} :: x : \frac{1}{20}x^2 + \frac{19}{20}x$, che deve essere $= 30$, $x = -10\frac{1}{2} + \sqrt{}$.

Quesito 32.° Uno presta x lire a x denari la lira il mese, e in capo di mesi 6, il debitore gli rende, fra merito e capitale, lire 80: qual fu x ? Merita la lira in 6 mesi $6x$ denari $= \frac{1}{40}x$ di lira; dunque 1 monta ad $1 + \frac{1}{40}x$; argomenta: $1 : 1 + \frac{1}{40}x :: x : x + \frac{1}{40}x^2 = 80$, $x = -20 + \sqrt{3600}$.

Quesito 33.° Uno presta lire x a denari 8 la lira il mese per tre anni, e in fine del primo anno, il debitore gli dà 12; in fine del secondo, 17; in fine del terzo, 28; e gli resta debitore di 7: qual fu x? La lira guadagna all'anno 96 denari $=\frac{2}{5}$ lire, x lire guadagnano $\frac{2}{5}x$, e montano ad $x+\frac{2}{5}x$; il capitale dunque del secondo anno sarà $=1\frac{2}{5}x-12$, e monterà ad $1\frac{2}{5}x-12+\frac{2}{5}\left(1\frac{2}{5}x-12\right)=1\frac{24}{25}x-16\frac{4}{5}$, e sarà il capitale pel terzo anno $=1\frac{24}{25}x-33\frac{4}{5}$, e monterà ad $1\frac{24}{25}x-33\frac{4}{5}+\frac{2}{5}\left(1\frac{24}{25}x-33\frac{4}{5}\right)$, che dovrà essere $=28+7$, $x=30$.

Quesito 34.° Uno presta lire 100 a ragione di denari y la lira il mese a far capo d'anno per due anni; la superficie della radice del merito e capitale in fine del primo anno, nella radice del merito e capitale del secondo anno fa 500: qual fu y? « nōte aponere ala ȣ. » el mese. perche uirresti inconfusione di censi e cubi »: cioè non cercar y; ma poni che le lire 100 in fine del primo anno montino ad x^2; pel secondo argomenta: $100:x^2::x^2:\frac{x^4}{100}$, e dovrà essere $\sqrt{x^2}$. $\sqrt{\frac{x^4}{100}}=x.\frac{x^3}{10}=500$, $x^3=5000$, $x=\sqrt[3]{5000}$, $x^2=\sqrt[3]{25000000}$, e guadagno del primo anno$=\sqrt[3]{(25000000)}-100$, $\sqrt[3]{\frac{(25000000)-100}{100.\ 12}}$ merito di una lira al mese in frazione di lira, ed in denari o piccoli sarà tal merito $=20\frac{(\sqrt[3]{(25000000)}-100)}{100}=\sqrt[3]{200000}-20$. Non è però vero, che cercando direttamente y, si cada in censi e cubi. Essendo y denari, il merito della lira al mese, sarà il merito all'anno $12y$ denari $=y$ soldi $=\frac{1}{20}y$ lire, onde la lira monterà nel primo anno ad $1+\frac{1}{20}y$, 100 lire monteranno a $100\left(1+\frac{1}{20}y\right)$, ed il secondo anno a $100\left(1+\frac{1}{20}y\right)^2$, e dovrà essere $\sqrt{100\left(1+\frac{1}{20}y\right)}\times\sqrt{100\left(1+\frac{1}{20}y\right)^2}=10\sqrt{\left(1+\frac{1}{20}y\right)}\times10\left(1+\frac{1}{20}y\right)=500$, $\left(1+\frac{1}{20}y\right)\sqrt{\left(1+\frac{1}{20}y\right)}=5$, $\left(1+\frac{1}{20}y\right)^3=5^2=25$, $\frac{1}{20}y=\sqrt[3]{25}-1$ $y=20\sqrt[3]{25}-20$. Nascerebbero i censi e cubi, effettuando $\left(1+\frac{1}{20}y\right)^3$.

Quesito 35.° Uno presta x lire a ragione y denari la lira il mese, nel primo anno, onde montò a lire 100, ed a ragione $y+1$ nel secondo anno, infine del quale x è montato a $2x$: qual fu x, qual y? $x : 100 :: 110 : \frac{10000}{x}$, e tanta sarebbe la somma in fine del secondo anno, contando la ragione y, anche nel secondo anno; ma fu $y+1$. Ora il merito di 100 lire a 1 denaro la lira il mese $= 100 . \frac{1}{20} = 5$; dunque tutta la somma $= \frac{10000}{x} + 5$, e deve essere $= 2x$, $x = 1\frac{1}{4} + \sqrt{5001\frac{9}{16}}$, $100 - 1\frac{1}{4} - \sqrt{5001\frac{9}{16}} = 98\frac{3}{4} - \sqrt{5001\frac{9}{16}}$ merito di x nel primo anno, $20\left(98\frac{3}{4} - \sqrt{5001\frac{9}{16}}\right) = y$.

Quesito 37.° Il secondo anno prestò ad altro le 100, alle quali montò le x nel primo, ma alla ragione $y-2$ denari la lira il mese, e montarono ad $x + \sqrt{x}$. Opera similmente che sopra, ma *apponti con diligentia pche virra alta.*

Quesito 38.° Nel secondo anno la ragione fu $y + 2$, ed in capo di esso « trouo che partendo el guadagno del secondo anno per lo gua-» dagno del primo anno neuen .2. p. che non fa partendo quello del » primo. per quello del secondo: dimando quanto li presto. e a che » rason la ℔ elmese. *Fac vt supra.* »

Quesito 39.° Uno presta x lire per x anni, a ragione 2 denari la lira il mese, ed x montò ad n^2: qual fu x? Merito della lira in un anno $\frac{1}{10}$ lira, di x lire in un anno $\frac{1}{10}x$, in anni x $\frac{1}{10}x^2$, somma $x + \frac{1}{10}x^2 = n^2$ numero quadrato qualunque. *Fecimus simpliciter. et thema vult a capo danno. ideo refac.*

Quesito 40.° Lo stesso che l'antecedente, posto $n = x$, e nel senso di merito semplice.

Quesito 41.° Uno presta x lire per x mesi, a ragione x denari la lira il mese, e fu in fine il merito soldi 18: qual fu x? Merito della lira in x mesi fu x^2 denari; di x lire, fu x^3 denari, e fu $=$ soldi $18 = 216$ denari, $x = \sqrt[3]{216}$.

Quesito 42.° Come sopra, eccetto che il prestito fu per anni, ed in fine la somma di capitale e merito $= 4x$. Intendendo a merito semplice, sarà $x + \frac{1}{20}x^3 = 4x$, $x = \sqrt{60}$.

Quesito 43.° Uno presta x lire, a ragione y denari la lira il mese per anni 2, ed il guadagno del secondo anno, moltiplicato in 6, (così la stampa, ma doveva dire *in sè*) fece soldi 14 più che il capitale: qual fu x, qual y? Il merito della lira al mese *non te lega e poi meritarla a tuo modo.*

Poni *per men briga de frattioni* il merito di denari 20, sarà all'anno il merito di x lire $= 240x$ denari $= x$ lire; pel secondo anno, argomenta: $x : x :: 2x : 2x$, $(2x)^2 = 4x^2 = x + 14$ soldi $= x + \frac{7}{10}$, $x = \frac{1}{8} + \sqrt{488}$.

Regola. Se m sia il merito per 100 all'anno, ed n il numero di anni, in cui il capitale c sarà raddoppiato, si troverà sempre $n = \frac{72}{m}$.

Quesito 44.° Uno presta x lire, a ragione y denari la lira il mese per anni 2 a merito sopra merito: in fine del primo anno, la somma fu $= 100$, ed in fine del secondo anno, la somma fu $= x^2$: qual fu x, qual y? Il merito nel primo anno fu $= 100 - x$; pel secondo anno, argomenta: $x : 100 :: 100 : \frac{10000}{x} = x^2$, $x = \sqrt[3]{10000}$, $100 - x = 100 - \sqrt[3]{10000}$, $\frac{100\sqrt[3]{10000}}{\sqrt[3]{10000}} = \sqrt[3]{100} - 1$, merito di una lira in un anno e $20(\sqrt{100} - 1) = y$.

Quesito 45.° Uno presta x lire per x anni a ragione denari 2 la lira il mese a far capo d'anno; ed in fine la somma fu $= x^2$: qual fu x? Dice F. Luca, che invece di x, bisogna porre $y + 1$, *perche te bisogna acompagnar la cosa per uenire ala equatione.* $y+1$ lire in fine del primo anno, saranno $y + 1 + \frac{1}{10}(y + 1) = 1\frac{1}{10}y + 1\frac{1}{10}$; 1 lira in y anni merita $\frac{1}{10}y$, $1\frac{1}{10}y + 1\frac{1}{10}$ meriterà $\frac{1}{10}y\left(1\frac{1}{10}y + 1\frac{1}{10}\right) = \frac{11}{100}y^2 + \frac{11}{100}y$; onde sommando, si avrà $1\frac{1}{10}y + 1\frac{1}{10} + \frac{11}{100}y^2 + \frac{11}{100}y = (y + 1)^2$, $y = \frac{10}{89}$, $y + 1 = 1\frac{10}{89}$, e tanti anni, tante lire il debitore tenne a denari 2 la lira *el mese a capo danno fanne proua. e satisfarai el tema ad l̄ram.* Così F. Luca, ma falso, perchè il computo è a merito semplice.

Quesito 46.° Uno presta lire 6, e in capo a due anni ne ha lire 20: a che ragione stette la lira il mese? Poni x denari: sarà merito di lire 6 nel primo anno $\frac{1}{20} \cdot 6x$; pel secondo, argomenta: $6 : 6 + \frac{3}{10}x :: 6 + \frac{3}{10}x : \frac{1}{6}\left(6 + \frac{3}{10}x\right)^2 = 20$, $x = -20 + \sqrt{1333\frac{1}{3}}$.

Quesito 47.° Uno presta x lire a denari 3 la lira il mese a capo d'anno, ed alla fine del tempo, il debitore deve dare di puro merito lire $10\frac{7}{12}$. *Accadde che mutaron patti per bon rispetto*, e convennero che il debitore gli desse ogni anno uno staio di grano. E l'usuraio ogni anno, avuto il grano, lo rivende a lire 3 lo staio sempre, e pone il denaro in mano di un altro a tal merito la lira il mese, che alla fine di 3 anni, quanti promise d'aspettare appunto, *omnibus computatis*, viene ad avere di guadagno lire $10\frac{7}{12}$, come prima aveva patteggiato: quante furono le lire prestate? a che ragione stette la lira il mese al debitore nel secondo patto? a che ragione a colui, che riceveva il grano? Bisogna dividere il problema in tre partite: Prima: trovare le lire prestate; Seconda: quanto stava la lira il mese; Terza: il merito del grano. Prima: A tre denari al mese, merita la lira l'anno $\frac{3}{20}$ di sè, e monta a $1\frac{3}{20}$; nel secondo anno monta a $1\frac{3}{20} + \frac{3}{20} . 1\frac{3}{20} = 1\frac{129}{400}$; il terzo anno monta $1\frac{129}{400} + \frac{3}{20} . 1\frac{129}{400} = 1\frac{4167}{8000}$, togliendo 1 resta $\frac{4167}{8000}$ di merito. Argomenta: (¹) $1 : \frac{4167}{8000} :: 10\frac{7}{12} : 10\frac{7}{12} \times \frac{4167}{8000} = 20\frac{3980}{12501}$ = alle lire prestate. Seconda: Argomenta: se lire $10\frac{7}{12}$ veniano da denari 3 la lira al mese, da che veniano lire $9 = 3 + 3 + 3$ lire in grano in tre anni; troverai denari $2\frac{70}{129}$; ma il calcolo non mi pare giusto, perchè le lire 9 non erano date in fine degli anni 3, ma 3 di anno in anno. Terza: poni x denari, il merito della lira il mese appresso colui che riceveva il grano; lire 3 pel primo staio meritarono nel secondo anno 36 x denari $= \frac{3}{20}x$ di lire, e montarono a $3 + \frac{3}{20}x$; il capitale pel terzo anno è $6 + \frac{3}{20}x$, e monta a $6 + \frac{3}{20}x + \frac{1}{20}x\left(6 + \frac{3}{20}x\right) = 6 + \frac{9}{20}x + \frac{3}{400}x^2$; il capitale pel quarto anno sarà $9 + \frac{9}{20}x + \frac{3}{400}$, che deve essere $= 10\frac{7}{12}$, $x = -30 + \sqrt{1111\frac{1}{9}}$.

Quesito 48.° Uno presta lire 25 per 5 anni, a far capo d'anno a y denari la lira il mese, e le lire 25 montano a 100: qual fu y? La lira in un anno diventa $1 + \frac{1}{20}y$, le 25 monteranno a $25 + \frac{25}{20}y$,

(¹) Ciò che si legge in questa pagina 267 (lin. 11—12) dalle parole « $= 1\frac{4167}{8000}$ » fino alla parola « Argomenta » forma la linea ventesimaquarta della carta 197, *recto*, della Cartella quinta dei manoscritti del P. Cossali. Presso a questa linea sul margine laterale interno del medesimo *recto*, si legge: « Si esaminino questi numeri ».

nel secondo anno monteranno a $25 + \frac{25}{20}y + \frac{1}{20}y\left(25+\frac{25}{20}y\right) =$ ecc. *ma verresti in trauagli e briga de capitoli in gnoti.*

Quindi consiglia F. Fuca a far uso della continua proporzionalità notata nei Quesiti 19° e 20°, e dice che $y = \sqrt[5]{20^5 . \frac{100}{25}} - 20$. Di fatti, in generale, chiamato e il capitale, n il numero d'anni, v il valsente, in fine di essi si ha $c\left(1 + \frac{1}{20}y\right)^n = v$, $1 + \frac{1}{20} . y = \sqrt[n]{\frac{v}{c}}$, $y = 20 \sqrt[n]{\frac{v}{c}} - 20 = \sqrt[n]{20^n . \frac{v}{c}} - 20$. E, giusta questa formola, F. Luca esemplifica sino ad $n = 10$.

« *Regule generales meritorum.* »

Sono principi pel computo di meriti. Se 1 lira merita n piccoli, o denari al mese, lire 100 meritano $3\frac{1}{3}n$ al dì, e moltissimi simili. Il più importante è, se il merito della lira al mese è n denari, sarà all'anno $\frac{n}{20}$ di lira.

« *Del modo a legare e consolare lemonete.* »

Modi di legare, ovvero consolare monete, tre. Primo: fare monete di più monete, senza aggiugnere alcuna cosa. Secondo: con aggiungimento di rame o di argento fino per *alegar* argento, ovvero di rame e di oro fino per *consolar* oro. Terzo: con aggiungimento d'argento di diversa lega, o di oro di diversi *karati.*

In Firenze la libbra è composta di 12 oncie, l'oncia di 24 denari, peso, il denaro di 24 grani: il grano, comunemente, è appellato *granello di grano.*

La più alta lega del comune di Firenze in argento, anticamente, era di oncie $11\frac{1}{2}$, ed era chiamato *argento populino*, e ne faceano due sorte di monete, come nei libri loro antichi [1] si manifesta; l'una delle quali era chiamata *grosso*, e valeva in corso soldi 5 di piccoli.... Battea monete d'argento di varia lega. Una moneta di oncie n di lega, dicesi quando in una libbra contiene once n di puro.... Il *karato* ha doppio senso, cioè di un peso $=4$ grani, e di una parte del tutto, nel qual senso si dice *carattar navi* ec.

All'oro fino è posto il numero di 24 caratti; se dicasi oro di 18 caratti, s'intende che alla $\frac{3}{4}$ di oro fino ecc., onde il caratto si considera in quanto numero denotante certo grado di finezza.

(1) Ciò che si legge in questa pagina (lin. 23—25) dalle parole « La più alta lega » fino alle parole « nei libri loro antichi » forma le linee nona, e decima della carta 198, *recto*, della Cartella quinta dei manoscritti del P. Cossali. Presso a queste linee, sul margine laterale interno del medesimo *recto*, si legge: « *populino* è scritto in F. Luca. »

Mescolando più sorte d' argento, e sapere che lega ne uscirà, somma tutte le oncie d'argento che contengono, e dividi pel numero delle libbre. Esempio: Mescolando libbre 7 a lega di once 10; libbre 9, once 4 a lega di once 6; libbre 2 a lega di once 11; il bolzone risulterà di lega $= \dfrac{70+56+22}{18\frac{1}{3}}$.

Essendosi dato argento a lega 10, a lega 11, a lega 7, a far lega di once $8\frac{1}{2}$, disponi ordinatamente 7. 10. 11. Se la lega a farsi, fosse o minore, o maggiore delle date tutte, il quesito sarebbe impossibile. Devi farla di $8\frac{1}{2}$, che sta tra 7 e 10. L'8 $1\frac{1}{2}$ supera 7 di $1\frac{1}{2}$, poni $1\frac{1}{2}$ sotto 10 ed 11, e tanto [1] prenderai di ciascuno di essi argenti. 10 supera $8\frac{1}{2}$ di $1\frac{1}{2}$, ed 11 lo supera di $2\frac{1}{2}$, somma viene 4; ponilo sotto 7, e tanto devi prendere di tale argento. Reca a mezzi, e prenderai dell'argento a lega 7, libbre 8; di quello a lega 10, libbre 3; ed altrettante di quello a lega 11; onde avrai un bolzone di libbre 14, a lega $8\frac{1}{2}$.

Avendo a far moneta di più sorte di monete, con aggiungimento di rame od argento fino, opererai come nel seguente esempio. Si ha libbre 10 d' argento a lega 7; libbre 20 a lega 5; libbre 30 a lega 3; e vuolsi un bolzone a lega 2: fondi tutto e somma; fa once 260; dividi pel numero delle libbre 60; ne viene $4\frac{1}{3}$; e di tanta lega sarebbe il bolzone, senza aggiunta: volendolo a lega 2, dividi 260 per 2; ne viene 130; e tanto dovrà pesare il bolzone: ma pesa 60; dunque dovrà aggiugner in rame libbre $130 - 60 = 70$.

Volendo che l'aggiungimento sia in argento, poni ad esempio, di avere libbre 20 d' argento a lega 5; libbre 15 a lega 3; libbre 25 a lega 1; e voler bolzone a lega 10. Vedi quante once d' argento fino sono in tutte queste sorte, *fondendole contro le loro finezze*, cioè moltiplicando i numeri delle libbre coi numeri della lega, ne viene $5 \times 20 + 3 - 15 + 1 \times 25 = 170$, e sono once d'argento fino contenute in libbre $20 + 15 + 25 = 60 =$ once 720 di rame ed argento. Dunque $720 - 170 = 550$ è la quantità del rame. Ora perchè vuoi lega 10, perciò con once 2 di rame staranno 10 d'argento fino: vedi dunque quante volte entra 2 in 550, entra 275; e tante libbre peserà il pan tutto a lega di 10, e $275 - 60 = 215$ sarà la quantità di libbre d'argento da aggiugnersi.

Prendi dunque questo modo del consolare, pel più generale che sia, e voglio a questa materia sia ordinariamente bastante. Ho libbre 40 di argento di lega 5, libbre 25 di 7, libbre 80 di 11; e voglio aggiugner sopra questo argento tanto di un altro di lega $\frac{1}{2}$, da far

[1] Ciò che si legge in questa pagina 269 (lin. 9—10) dalle parole « tra 7 e 10 » fino alle parole « e tanto » forma la linea ventesimasettima della carta 198, *recto*, della Cartella quinta dei manoscritti del P. Cossali. Presso a questa linea sul margine laterale interno del medesimo *recto*, si legge: « $\begin{matrix} 7 & 10 & 11 \\ 4 & 1\frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} \end{matrix}$ ».

quattrini a lega 2. Prima vedi a che lega tornerebbe da se solo. Fondilo contro le sue finezze: $5\times40+7\times25+11\times80=1255$; partendo per la somma delle libbre $\frac{1255}{145}=8\frac{19}{29}$, ed a tal lega tornerebbero i detti argenti mescolati insieme. Si deve combinare questa lega colla lega $\frac{1}{2}$, ed ottenere la lega 2. Si farà come sopra. 2 supera $\frac{1}{2}$ di $1\frac{1}{2}$, $8\frac{19}{29}$ supera 2 di $6\frac{19}{29}$: poni $1\frac{1}{2}$ sotto $8\frac{19}{29}$, e $6\frac{19}{29}$ sotto (1) $\frac{1}{2}$. Per libbre $1\frac{1}{2}$ di quello a lega $8\frac{19}{29}$, bisogna prendere libbre $6\frac{19}{29}$ di quello a lega $\frac{1}{2}$; e tu desideri sapere quanto ne devi prendere per libbre 145, però argomenta: se $1\frac{1}{2}$ vuole $6\frac{19}{29}$, che vorranno 145? Vogliono $643\frac{1}{3}$, e tante libbre dovrai prendere di quello a lega $\frac{1}{2}$; onde il bolzone tutto, sarà di libbre $145+643\frac{1}{3}=788\frac{1}{3}$.

Quesito 1.° Once 10 d'oro di k 18, quanto rame contiene in tutto? $10(24-18)$.

Quesito 2.° Once 20 d'oro, non so a che finezza, messo al fuoco, torna once 16 di k 19: di qual finezza era prima? $\frac{16\times19}{20}=\frac{304}{20}=15\frac{1}{5}$ di tanti k era prima.

Quesito 3.° Once 20 d'oro di k 15, posto al fuoco, dà once 13: qual è la finezza? $=\frac{20\times15}{13}=23\frac{1}{13}$.

Quesito 4.° Once 10 d'oro di k 16, messo al fuoco, torna di k 20: quale n'è il peso? $=\frac{10\times16}{20}=8$ once.

Quesito 5.° Oro di k 16 posto al fuoco, torna di k 20, e pesa once 8: quanto pesava prima? $=\frac{20\times8}{16}=10$ oncie.

Quesito 6.° Once 10 d'oro di k 16, voglio farlo di 20, senza farlo calare al fuoco: quanto oro vi aggiungerò?

Quesito 7.° Avendo oro di 14, 15, 17, 18, 20, 23, 24, voglio far libbre, od once 30 di k 19: quanto torrò di ciascuna sorta?

Finezze inferiori	14, 15, 17, 18	superiori 20, 23, 24
Differenze	-5, 4, 2, 1	$+1$, 4, 5.

(1) Ciò che si legge in questa pagina 270 (lin. 4—7) dalle parole « argenti mescolati insieme » fino alle parole « e $6\frac{19}{29}$ sotto » forma le linee 16ª—18ª della carta 198, verso, della Cartella quinta dei manoscritti del P. Cossali. Presso a queste linee sul margine laterale interno del medesimo rovescio, si legge:

« $\frac{1}{2}$ $8\frac{19}{29}$ »

« $6\frac{19}{29}$ $1\frac{1}{2}$ »

La somma delle differenze in meno è $= 12$, e la somma delle differenze in più $= 10$. Devi prendere libbre od once 10 di ciascuno degli oro di finezza inferiore, e saranno in tutto libbre od once 40, e devi prendere libbre od once 12 di ciascun oro di finezza superiore, e saranno fra tutti e tre, libbre od once 36; somma intera $=$ 76: vuoi 30 solamente; argomenta: $76 : 30 :: 10 : x :: 12 : 9 x = 3\frac{18}{19}$, $y = 4\frac{14}{19}$.

Quesito 8.° Zuccaro vale ducati 24 al cento, canella 30, zenzero 16, garofoli 36: quanto devesi torre di ciascuna specie, a fare una lega di 20 al cento? Come sopra.

Quesito 9.° Avendo oro di k 15, voglio fare once 60 di k 12: quanto rame vi metterò, e quante sono le once che ho di oro di k 15? Potendo fare once 60 di k 12; dunque vi saranno once 30 d'oro di k 24, e pel Quesito 5.° si avrà $\frac{30.24}{15} = 48$ once d'oro di k 15. Per la composizione dell'oro di k 12, si operi come nel Quesito 7°, computando il rame come lega di zero.

Quesito 10.° Avendo libbre 30 argento di 4, voglio farlo di 10, mettendovi argento fino: quanto ne consolarò? Quesito 7.°

Quesito 11.° Avendo libbre 10 d'argento di 6, 14 di 8, 16 di 9, 18 di 11; e volendo formar lega di 5, si porrà senza aggiunta? e non potendosi, dovrà l'aggiunta essere d'argento fino, ovvero di rame? È necessaria l'aggiunta di rame; ed opera come nel 7.°

Quesito 12.° Avendo libbre 60 argento di 11, 50 di 10, 30 di 8; voglio fare argento di 7, con aggiugnervi argento di 9 e di 5: come farò, e quanto peserà il bolzone? $\frac{60 \times 11 + 50 \times 10 + 30 \times 8}{7} = \frac{660 + 500 + 240}{7} = \frac{1400}{7} = 200$, ma $60 + 50 + 3 = 140$; dunque $200 - 140 = 60$, e vi metterai 60 libbre di rame, e così avrai 200 libbre argento da 7. Lega, argento da 9 e da 5 in lega da 7, con prender parti uguali, e poi mescola tutto insieme. Si può anche fare senza mescolanza di rame, pel Quesito 7.° troverai, che libbre 2 da 11 vorrà libbre 4 da 5 per farlo da 7, e libbre 2 da 10 ne vorrà 3 da 5; libbre 2 da 8 ne vuole 1, libbre 2 da 9 ne vuole 2; onde troverai, quante ne vogliono libbre 60, 50, 30; il bolzone sarà grande secondo che ne metterai da 9.

Quesito 13.° Di oncie 20 d'oro a k 16, ne voglio cavare once 8 di fino, cioè di k 24: di che finezza rimarrà il resto? $20 \times 16 - 8 \times 24 = 320 - 192 = 128, \frac{128}{20-8} = \frac{128}{12} = 10\frac{2}{3}$: di tanti k è il resto.

Quesito 14.° A once 20 d'oro di k 16, vi aggiungo once 15 di rame: a che finezza sarà la lega? $\frac{20\times16}{20+15}=\frac{320}{35}=9\frac{1}{7}$.

Quesito 15.° Ad once 20 d'oro, non so di che finezza, aggiugnendo once 15 di k 18, ho oro di k $14\frac{4}{7}$: qual era prima? $(20+15)$ $14\frac{4}{7}=510$, $15\times18=270$, $\frac{510-270}{20}=\frac{240}{20}=12$ finezza primiera.

Quesito 16.° Ad argento di lega 11, aggiunte once 4 di rame, si è fatto bolzone di lega 8: quante once era prima l'argento? Poni x; dunque $11x$ sarà tutto l'argento; il rame contasi di lega $=0$, 0×0 $=0$; perciò $11x+0\times0=11x$, $\frac{11x}{x+4}=8$, $x=10\frac{2}{3}$.

Quesito 17.° Ad once 12 d'oro di k 12, aggiungo once x d'oro di k x, ed ottengo oro di k 16: qual è x? $12\times12=144$, $x\times x$ $=x^2$, $\frac{144+x^2}{12+x}=16x=8+\sqrt{112}$.

Quesito 18.° Di argento di leghe 11, 10, 9, 6, voglio far bolzone di lega 8, che sia di libbre 100, nelle quali voglio che sienvi libbre 20 dell'argento di lega 10: quanto debbo prendere di ciascuno degli altri? Bisogna fare in due volte, come nella 12.ª Lega prima le sorte di 11, 9, 6, ed avrai, che libbre 2 da 11, 2 da 9, 4 da 6, faranno un bolzone di libbre 8 da lega 8. Poi lega la sorte di 10, colla sorte di 6, e troverai che 2 di 10, e 2 di 6, formano un bolzone di libbre 4 da lega 8; ma vuoi libbre 20 di 10; dunque vorrai pure 20 di 6, 40 fra i due; e per andare alle libbre 100, ti converrà prendere libbre 60 delle altre tre sorti. Pel che dirai: se bolzone di 8 vuole 4 di 6, 2 di 11 e di 9, che vorrà bolzone di libbre 60? E troverai 30, 15, e 15.

Quesito 19.° Di once 100 di argento di lega 7, piglione una quantità e l'affino così, che torna di lega 11, e questa quantità affinata aggiungo alla lasciata: fondo, e risulta argento di lega 9: quanto ne tolsi, e di che peso sarà il bolzone nuovo di lega 9? Poni la quantità presa $=x$; la lasciata perciò $=100-x$, sarà $7x$ la quantità d'argento in x, $\frac{7x}{11}$ il peso, dopo l'affinamento, $100-x+\frac{7x}{11}$ la somma del peso della quantità lasciata, e del peso della affinata $(100-x)$ $\times7+\frac{7x}{11}\times11$ la quantità d'argento del nuovo bolzone, $\frac{(100-x)7+7x}{100-x+\frac{7x}{11}}$ la sua lega $=9$; onde $x=61\frac{1}{9}$, $38\frac{8}{9}$ dopo l'affinamento, e $38\frac{8}{9}$ la parte pur lasciata; onde $77\frac{7}{9}$ il peso del nuovo bolzone.

Quesito 20.° Un orefice di once 100 d'argento di lega 7, presa una quantità x, ed affinata a lega 11, la dà ad un suo lavorante, dicendogli di giugnerla alla parte lasciata $100 - x$, sapendo doverne risultare lega 9; il lavorante rubò dell'argento, sicchè risultarono once 100, ma di lega 6 : quanto fu il furto ? Pel quesito superiore, l'orefice dà $38\frac{8}{9}$ di lega 11, e $38\frac{8}{9}$ di 7; onde risulterebbero $77\frac{7}{9}$ di 9. Si cerchi a formare da lega di 9, 100 di lega, quanto rame debbesi aggiugnere, e si troverà che ogni 6 di 9, vuole 3 di rame; onde dicendo $9 : 100 :: 6 \frac{6.100}{9}, :: 3 : \frac{3.100}{3}$, sarà $\frac{6.100}{9} = \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3}$ l'argento di 9 impiegato, $\frac{3.100}{9} = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$ il rame aggiunto, $77\frac{7}{9} - 66\frac{2}{3} = 11\frac{1}{9}$ l'argento di 9 rubato.

Quesito 21.° Ho zuccaro da soldi 32 la libbra, garofani da soldi 30, sandali rossi da soldi 26, macio da 24, noci moscate da 20, cannella da 16, pepe da 12, gengero da 11; e vorrei fare libbre 50 di spezie peste, mettendovi di ciascuna in modo, che il valore fosse di soldi 22 : quanto si prenderà di ciascuna ? Facciasi come nelle leghe.

« *De uiagiis sequitur.* »

Quesito 1.° Uno fa due viaggi; al primo, guadagna ducati 8; al secondo, perde alla ragione medesima che guadagnò al primo; ed alla fine, si trova denari 100 : con quanti si partì ? x, dopo il primo $x + 8$, $x : 8 :: x + 8 : \frac{8x + 64}{x}$ perdita nel secondo viaggio, $x + 8 - \frac{8x + 64}{x} = 100$, $x = 50\sqrt{2564}$.

Quesito 2.° Uno fa tre viaggi ; al primo guadagna ducati 6 ; al secondo, alla rata del primo, ed è ducati 2 meno del guadagno del terzo : con quanti partì ? x, dopo il primo $x + 6$, $x : x + 6 :: x + 6 : \frac{(x+6)^2}{x} = 13$, $x^2 + 12x + 36 = 13x$. F. Luca falla, in trarre dalla proporzione così : $\frac{6x^2 + 60x + 216}{x^2} = 13$.

Quesito 3.° Uno fa tre viaggi; al primo, guadagna 6; al secondo, alla rata del primo; al terzo, 13: con quanti ducati partì? Alla fine del secondo viaggio, avrà $\left(\frac{x+6}{x}\right)^2$: si dica: $x : 6 :: \frac{(x+6)^2}{x} : \frac{6(x+6)^2}{x^2} = 13$, $x = 5\frac{1}{7} + \sqrt{57\frac{15}{49}}$. *Aliter et pulchrius.* Essendo i guadagni in rata, sono proporzionati; dunque $\sqrt{6.\ 13} = \sqrt{78}$ = guadagno secondo. Di più $x : 6 :: x + 6 : \sqrt{78}$; onde $x\sqrt{78} = 6x + 36$. F. Luca inferisce

$\sqrt{78x^2} = 6x + 36$, e levando il radicale, sale ad una equazione di secondo grado, ma trovasi a dirittura $x = \frac{36}{-6 + \sqrt{78}}$.

Quesito 4.° Uno fa due viaggi; al primo, guadagna 12; al secondo, alla stessa rata; ed in fine, trovasi ducati 70: quale fu il suo primo capitale? $x = 23 + \sqrt{385}$.

Quesito 5.° Uno fa due viaggi; al primo, guadagna la radice del suo capitale; al secondo, alla stessa rata, ed in fine, trovasi con ducati 40: quale fu il capitale suo primo? x, $x + \sqrt{x}$, $x : x + \sqrt{x} :: x + \sqrt{x}$: $\frac{(x + \sqrt{x})^2}{x} = 40$. F. Luca in luogo di x, suppone y^2; onde $\frac{(y^2 + y)^2}{y^2} = 40$, $y^2 = 41 - \sqrt{160}$.

Quesito 6.° Uno, avente x ducati, fa due viaggi; al primo, guadagna $5\sqrt{x}$, al secondo, $3\sqrt{(x + 5\sqrt{x})}$; al fine, si trovò ducati 38: qual fu x? F. Luca in luogo di x, suppone y: dunque al fine del primo viaggio, $y^2 + 5y$; al fine del secondo, $y^2 + 5y + 3\sqrt{(y^2 + 5y)} = 38$, $y^2 = 16$.

Quesito 7.° Uno fa due viaggi; al primo si trovò, fra capitale e guadagno, ducati 12; al secondo, guadagnò alla stessa rata, e i quadrati dei due guadagni insieme giunti, fanno 52: quale fu il primo suo capitale? Poni i due guadagni insieme giunti $= x$, il quesito si riduce a fare di x due parti, i quadrati de'quali insieme giunti, siano $= 52$, ciò che si eseguisce per la 4.ª e 5.ª del 2.° di Euclide: $x^2 - 52 = 2$ volte la superficie di una parte in altra; dunque $\frac{x^2 - 52}{2} =$ alla superficie, $\frac{1}{4}x^2 - \frac{x^2 - 52}{2} = 26 - \frac{1}{4}x^2 =$ al quadrato della differenza delle parti; dunque $\frac{1}{2}x + \sqrt{\left(26 - \frac{1}{4}x^2\right)}$ sono le parti, cioè $\frac{1}{2}x - \sqrt{\left(26 - \frac{1}{4}x^2\right)}$ guadagno del primo viaggio, $\frac{1}{2}x + \sqrt{\left(26 - \frac{1}{4}x^2\right)}$ guadagno del secondo, $12 - \left(\frac{x}{2} - \sqrt{\left(26 - \frac{1}{4}x^2\right)}\right)$ capitale primo, il 12 è il secondo, e $12 + \frac{1}{2}x + \sqrt{\left(26 - \frac{1}{4}x^2\right)}$ sarebbe il capitale di un terzo viaggio. Questi capitali debbono essere in continua proporzione; dunque il guadagno del secondo = primo × terzo. Si trova $x = 10$, primo capitale = 8. primo guadagno = 4; il secondo guadagno = 6: *quod est optimum quesitum*.

Quesito 8.° Uno fa alquanti viaggi, e quanti fa viaggi, tanti ducati porta, e ad ogni viaggio, sempre raddoppia i suoi ducati; alla fine, si trova ducati 30: quanti viaggi fece, e quanti ducati portò? Vedi Vol. 1° della mia Opera, pag. 277.

Quesito 9.° Uno fa alquanti viaggi, e quanti viaggi fa, tanti ducati porta, e ad ogni viaggio guadagna 25 per 100, ed alla fine, trova aver guadagnato $\frac{2}{5}$ del suo capitale: con quanti scudi parti, e quanti viaggi fece? Come (¹) sopra, colla sola differenza, di guadaguare $\frac{1}{4}$, invece di raddoppiare.

Quesito 10.° simile, colla diversità di guadagnare 20 per 100, e trovarsi in fine col guadagno del capitale. Come sopra, $x = 1\frac{5}{19}$.

Quesito 11.° simile, col guadagno di 40 per 100, e l'avere in fine fatto 5 di 1 : $x = 3\frac{24733}{63308} + \sqrt{\frac{1643489177}{4007902864}}$.

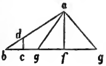
Quesito 12.° Uno fa viaggi $2x + 2$, e porta ducati x; ad ogni viaggio guadagna 40 per 100, ed in fine, si trova $30x$: qual'è x? Similmente che sopra: $x = 3\frac{379}{2187}$.

Quesito 13.° Uno ha 13 ducati, e fa alquanti viaggi, ed ogni viaggio raddoppia, e spende 14; alla fine, si trova con nulla: quanti sono i viaggi? $3\frac{3}{4}$.

PARTE SECONDA. GEOMETRIA.

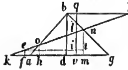
Distinzione prima. Capo 1.° Sul principio di questo primo capitolo, facendosi Fra Luca a dare le definizioni geometriche, avverte così: « E ꝑ cħ noi seguitiamo ꝑ la magior ꝑte. L. pisano Io ĩtẽdo dechia» rire cħ q̃do si porra alcũa ꝓposta sẽza autore q̃lla fia di detto. L. »

Cap. 7. *De dimensione omnium triangulorum.* Oltre il metodo di trovarne l'area col mezzo della perpendicolare, si trova sul fine del capitolo, la regola di determinarla coi tre lati, ed al Capo 8.° ne dà la dimostrazione colle parole, e colla figura stessa, che si trovano in Tartaglia, il quale, è evidente, aver di qui copiato. Nel medesimo Capo 8°, aggiugne il modo semplicissimo di trovare l'area, e il terzo lato, dati due: per esempio dati ab, bg, e consiste in tirare a piacere la perpendicolare dc, poi arguire $bd : ba :: bc : bf$, la quale risultando maggiore di bg, indicherà l'angolo g essere ottuso; in caso contrario acuto: per mezzo di bf, ab, si avrà af, e quindi ag è l'area. Questo modo però è assai imperfetto.



Distinzione seconda, è intitolata: *De modo inueniendi quantitatem vnius linee ab vnopuncto protracte intra vel extra. quēcūque triangulum.*

(¹) Ciò che si legge in questa pagina 275 (lin. 3—4) dalle parole « $\frac{2}{5}$ del suo capitale » fino alle parole « viaggi fece? Come » forma la linea trentesimaterza della carta 200, *recto*, della Cartella quinta dei manoscritti del P. Cossali. Presso a questa linea, sul margine laterale interno del medesimo *recto*, si legge: « $x = 1\frac{12}{25}$ ».



Sia il triangolo *abg*, di cui suppongonsi noti i tre lati, la perpendicolare *bd*, ed i segmenti della base *ad*, *dg*. Sia *e* il punto, da cui si deve tirare la linea, *l* un altro punto, per cui passa, *n* il punto in cui taglia il lato *bg*, o in cui taglia *ba*, *k* in cui taglia *agp*, in cui incontra *bp* parallela alla base *kg*. Pongasi, dato *n*, i triangoli simili *bdg*, *nmg* danno *nm*, *mg* conseguentemente *nt*, *dm*, *te*, *en*; i due *ent*, *knm* danno *nk*, *mk*, conseguentemente *ek*, *ka*, *kg*; i due *kng*, *bnp* danno *bp*, *np*, e i due *koa*, *bop* danno la ragione dei segmenti *ao*, *ob*, conseguentemente le loro quantità, i due *aoh*, *abd* danno *oh*, e finalmente i due *kef*, *koh* danno *ko* conseguentemente *eo*, *on*, *ep*, *op*. L'autore non tratta che il caso in cui *e* cade in o; ma il suo metodo era facile da generalizzare; e sebbene anche la descritta figura rappresenti una sola posizione di *e*, agevole sarà a chiunque il comprendere le diversità accidentali dei casi particolari. Più generalmente tratta l'autore l'altro problema inverso, di determinare la ragione dei segmenti *bn*, *ng*, dati i punti *e l*, della linea segante. I due triangoli simili *lei*, *lkv* danno *kv*, conseguentemente *kg*, e i due *lei*, *glp* danno *gp*, conseguentemente *bp*, e i due *nkg*, *bnp* la ragione cercata di *bn*, *ng*. Poteva aggiugnere, che da *kv* avendovi parimenti *ka*, per mezzo dei due *koa*, *bop*, si avrà la ragione pure di *ao*, *ob*.

Distinzione terza. Nella introduzione, facendo la divisione dei capitoli, dice: « Nel p° mostrarẽo lasolutiõe dalcuna q̃stiõe ꝓposta sopra » lefigure di .4. facie che hano gli angoli retti. laq̃le ꝑ le .6. regole » de algebra si troua. leq̃le regole principalmẽte foron trouate: e fa- » bricate per rispetto dela quantita continua. cioe. geometria. perche » in lei sonno ale volte quantita sorde che per forza numerale di- » scretamente nõ si possan dare ma conuiense respondere e operare » per radici e per linee e quadrati e cubi.... E sonno tutte fondate » nel secondo de Euclide. mediante la forza e uirtu del quinto. cioe » dele proportioni e proportionalità. che maxime in loro se recercano. »

Capo 1.° *Modus soluendi varios casus figurarum quadrilaterarum rettangularũ. per viam algebre.* Comprende dodici problemi sui quadrati, e venticinque sui rettangoli, e vertono sulle relazioni tra i lati, le diagonali, e l'area. Sono problemi di secondo grado, ma l'autore non esprime per cosa, nè forma equazioni che in alcuni dei secondi; negli altri il metodo suo, è una nascosta computazione *algebraica* applicata alla figura, ed eseguita per linee.

Capo 2.° *De dimensione rumborũ.* Comprende nove problemi sui lati, i diametri, e l'area, sciolti colle regole d'Algebra, parte implicitamente, parte esplicitamente.

Capo. 3.° *Qualiter metiãtur Romboides.* Non vi si ha, che il metodo di scomporlo in due triangoli.

Capo 4.° *De modo metiendi figuras helmuariphas* (trapezia quadrilatera). Tratta qui della prima specie.

Capo 5.° Segue su altre specie.

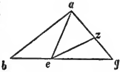
Capo 6.° *Modus inueniendi aream figurarum multilaterarum.*

Distinzione quarta. Capo 1.° *Conclusiones libri tertij Euclidis.*

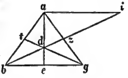
Capo 2.° *De dimensione circulorum. eiusq; partium. Et tabulis de corda et arcu.* Si ha qui una tavola, nella quale, supposto il diametro del cerchio di pertiche 42, e la circonferenza di 132, si trovano ordinati gli archi di 1, 2, 3. . . . pertiche, fino a 66 coi loro rispettivi supplementi al cerchio, e dirimpetto, il valore delle corde di ambedue in pertiche, piedi, once, ponti. Nota l'autore, che la pertica è di piedi 6, il piede di once 18, dico diciotto, il piede di ponti 20.

Capo 3.° *Qualiter metiantur superficies in montibus. vallibusq; existentes.*

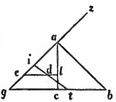
Distinzione quinta. Capo 1.° *De modo diuidendi triangulares formas in partes plures proportionabiliter.* L'Autore vi dimostra sul principio il seguente teorema. I triangoli aventi un' angolo eguale, hanno proporzione in fra loro composte dei lati continenti quell'angolo eguale. Questo è il primo dei teoremi, che Commandino al teorema 17 del 6.° di Euclide aggiunge, dicendo *a nobis elaborata.* La dimostrazione però è differente. Ecco quella di F. Luca. Siano i due triangoli abg, ezg, e si tiri la retta linea ae: starà $abg : aeg :: bg : eg$; e $aeg : ezg :: ag : zg$; dunque $abg : ezg :: bg \times ag : eg \times zg$. Quindi per dividere il triangolo abg in due parti eguali dal punto, la formola sarà $\frac{bg \times ag}{2eg} = zg$.



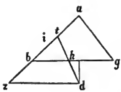
Teorema secondo. Se da due angoli d' un triangolo, si menino sul punto di mezzo dei lati opposti due linee, segandosi queste fra loro, i segmenti saranno proporzionali, come sarà $ad : de :: bd : dz$. Poichè tirando ai parallela alla base bg, i due triangoli simili azi, bzg danno $ai = bg$, $iz = bz$, e i due adi, bde danno $ai = bg : be :: ad : de :: id : bd$; dunque come per supposto $bg = 2be$, così $ad = 2de$, $id = iz + zd + bz + zd = bd + 2zd = 2bd$; onde ne viene $bd = 2zd$. Se dal terzo angolo g, si tiri la linea gdt, si proverà che taglia il lato ab per mezzo. Dunque, dato il punto d, per ciascuna delle linee ade, gdt, dbz, resterà il triangolo diviso in due parti eguali.



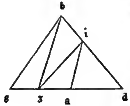
Problema. Dato nel triangolo agb un qualunque punto d, dividerlo in due parti eguali per mezzo di una linea tirata per esso. Tirata de parallela al lato gb, e condotta e determinata la perpendicolare ac per mezzo dei triangoli simili abe, acg, si determini be, e quindi de; poi si prolunghi ga in z in modo, che sia $gz = \frac{ag \times gb}{2de}$. In seguito, si faccia $gz = x + y$; ed $xy = ge \times (gz)$: si determini x che sia $= gi$, e si tiri la linea idt, il triangolo igt sarà la metà di agb. Poichè essendo $xy = gc \times (gz)$ sarà $gz + y :: x : ge$; quindi $+ gz : gz - y :: x : x - ge$, ossia $gz : x :: x : ie$: (per la somiglianza dei triangoli icd, igt) $g : t : ed$. Dunque $x \times gt = gz \times de = \frac{ag \times gb}{2}$; dunque pel teorema primo, etc. Il valore di x si trova $= \frac{g^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{gz}{2}\right)^2} = ge \times (gz)$; onde ac-

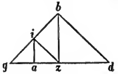


conciamente riflette l'autore non essere la soluzione possibile, se$\left(\frac{gz}{2}\right)^2$ non sia maggiore di $ge\times(gz)$.

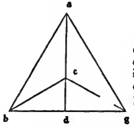


PROBLEMA. Dato un punto d, fuori del triangolo abg, tirare da esso una linea, che divida il triangolo in due parti eguali. Determinare per mezzo della perpendicolare, e dei triangoli simili, da essa formati, le rette dz, zb: si faccia $bi=\frac{ab+bg}{2zd}$; poi si aggiunga a bi una retta x tale, che $x(x+ib)=bz\times ib$, e sia essa it; dal punto t, si tiri td, sarà la linea cercata. Poichè da $x(x+ib)=zb\times ib$, ne viene $ib:x::x+ib:zb$, $ib+x:ib::x+ib+zb:ib+x::zd:bh$; dunque $(ib+x)\times bh=ib\times zd=\frac{ab\times bg}{2}$. Il valore di x, sarà $=\frac{-ib}{2}+\sqrt{\frac{ib^2}{4}+zb\times ib}$. Questa soluzione, è simile all'antecedente.

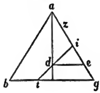




PROBLEMA. Dato il punto z nel lato gd del triangolo bgd, tirare una linea, che tolga dal triangolo una sua terza parte. Se $gz<\frac{1}{3}gd$, prendi $ga=\frac{1}{3}gd$, e tira ai parallela alla zb; indi zi sarà il trapezio $bgzi=\frac{1}{3}bgd$. Poichè $ad=\frac{2}{3}gd:zd::id:bd$; dunque $id\times zd=\frac{2}{3}gd\times bd$, per conseguenza etc. Se $gz>\frac{1}{3}gd$, $<\frac{2}{3}gd$, si prenda dalla parte di g la linea $ga=\frac{1}{3}gd$, e tirata ai parallela alla zb; indi zi sarà il triangolo $zgi=\frac{1}{3}bgd$ per simile dimostrazione.

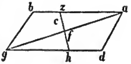


PROBLEMA. Dividere un triangolo abg in tre parti eguali, dalle quali ciascuna abbia un angolo ed un lato. Si divida la base bg in due parti eguali nel punto d, dal quale si tiri da, e preso di questa il terzo dc, dal punto c, si tirino cb, cg, sarà fatto; poichè abc doppio di bdc, essendo ac doppia di cd, e similmente acg doppio di cdg, e per altra parte $cgd=cbd$; dunque etc.

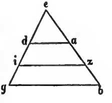


PROBLEMA. Dato nel triangolo abg, un qualunque punto d, togliere da esso una qualunque parte $\frac{1}{m}$ per mezzo d'una retta, tirata pel punto d. È simile alla soluzione del Problema primo, fuori che in vece di fare $gz=\frac{ag\times gb}{2dc}$, si farà generalmente $gz=\frac{ag\times gb}{mde}$. Si faccia in seguito $x(gz-x)=ge\times gz$, e sia $x=\frac{1}{2}gz+\sqrt{\frac{1}{4}gz^2-ge\times gz}=gi$: per di, tirando idt, sarà itg la parte $\frac{1}{m}$ di abg.

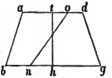
Capo 2.° *Qualiter figure quadrilatere in partes plures pportionabiliter diuidantur.*



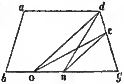
Problema. Da un punto qualunque dato c, tirare una linea, che divida il parallelogrammo $abgd$ in due parti eguali. Si tiri il diametro ag, e dal suo punto di mezzo f, si tiri pel punto dato c, in qualunque luogo esso si sia, la linea zh, sarà fatto. Poichè $zfa=gfh$, ed essendo $bga=gad$, anche i residui $bgzf$, $afhd$ eguali; dunque $bzgh=zhda$. Se debbasi un parallelogrammo dividere in tre parti eguali, se ne tagli prima con una parallela ad uno dei lati, una terza parte, ed il restante si tagli in due, come qui.



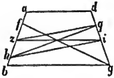
Problema. Dividere il quadrilatero $abgd$, in cui due lati ad, gb sono paralleli, in due parti eguali per una linea ad essi parallela: si prolunghino gli altri due lati sino in e, così che si abbia il triangolo compito gbe, si faccia $ze^2=\frac{1}{2}(eb^2+ea^2)$, sarà il punto z quello, da cui tirando zi parallela al lato gb, dividerà il quadrilatero in due parti eguali. Poichè essendo le figure simili, in ragione quadrata dei lati omologhi ze^2, eb^2, ea^2, rappresentano le aree dei triangoli ezi, egb, ead; ed essendo ezi = triangolo ead + quadrilatero $adzi$, sarà per l'equazione $2ead+2adzi=egb+ead$; onde $2adzi=egb-ead=adgb$; dunque $adzi=\frac{1}{2}adgb$.

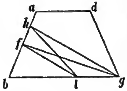


Problema. Dividere il quadrilatero $adgb$ in due parti eguali, con una linea tirata da un punto qualunque o dato, nel capo minore ad. Dai punti di mezzo di ambedue i capi, si tiri la linea th, e sul capo maggiore bg, si prenda $nh=to$; ma una a destra, l'altra a sinistra di th, poi si tiri oh, sarà fatto; poichè tmo, nmh simili ed eguali; onde eguali essendo anche i quadrilateri $athb$, $thgd$, saranno per conseguenza eguali $odng$, $oabn$. Se o cadrà nell'angolo d, sarà $nh=td=\frac{1}{2}ad$, ed $ng=\frac{1}{2}bg+\frac{1}{2}ad$. Sarà la stessa la soluzione, se sia dato il punto n nel capo maggiore bg, purchè nh non superi td.

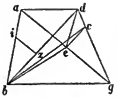


Problema. Dato sul capo maggiore un qualunque punto o, da esso dividere il quadrilatero in due parti eguali. Si tiri dn, che divida il quadrilatero in due parti eguali, prendendo $ng=\frac{1}{2}bg+\frac{1}{2}ad$; si tiri od, e ad essa la parallela nc, indi oc; questa farà l'effetto desiderato. Poichè i due triangoli dnc, ocn fra parallele, e sulla stessa base nc sono eguali, onde aggiunto ad ambedue ncg, sarà $ocg=dng=\frac{1}{2}adbg$.

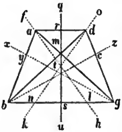




Problema. Dividere il quadrilatero in due parti eguali, da un punto dato in uno dei lati. Si tirino le linee zi, gf che dividono ambedue il quadrilatero in due parti eguali, una parallelamente ai capi, l' altra dall'angolo g; e sia il punto dato sul lato ab: se fosse in a, ovvero in b, ne abbiamo le soluzioni di sopra. Sia dunque il punto dato h, si tiri hi, indi ad essa la parallela zg, e finalmente hg, che dividerà il quadrilatero in due, come si vuole, perchè i triangoli zhg, zgi sono eguali; onde $had = zadi = \frac{1}{2}\, adgb$. Vale la medesima soluzione, se h sia sopra z, purchè non sia sopra f. Per questo ultimo caso, si tiri la linea hg, e ad essa la parallela fl, poi la hl; sarà questa la dividente il quadrilatero in due parti eguali per la eguaglianza dei due due triangoli flg, hfl.



Problema. Tirare in altro modo dagli angoli g, b, una linea dividente l'equilatero $adgb$ in due parti eguali. Si divida per metà il diametro ag, nel punto e, e si tiri ec parallela all'altro diametro bd, e poi si tiri bc: questa dividerà il quadrilatero in due parti eguali. Poichè per essere eguali le basi ae, eg, i due triangoli aed, egd sono eguali, e per la stessa ragione eguali i due abc, ebg; dunque $deg + bcg = \frac{1}{2}\, adbg$, ed essendo $dec = bec$ siccome posti fra parallele, e sulla stessa base ec, sarà cbg parimenti $= \frac{1}{2}\, adbg$.



Problema. Dividere un quadrilatero $abdg$ in due parti eguali, con una linea tirata da un punto qualunque dato fuori di esso. Si tirino i diametri bd, ag, e dai quattro angoli le quattro rette bz, df, ah, dk, che dividono il quadrilatero in due parti eguali, e tutte e quattro si prolunghino al di fuori, come si vede fatto. È per sè chiara la soluzione del problema, ogni qualvolta il punto dato, cada sul prolungamento di una di queste linee. Sia dunque dato il punto q al di sopra del capo ad, e fra i prolungamenti af, do delle due linee la, nd. Si tiri da q per t, dove esse la, nd si tagliano la linea qrt su questa dividerà il quadrilatero $adbg$ in due parti eguali. Poichè per la somiglianza dei triangoli atd, ntl e l'uguaglianza di ad, nl sono eguali at, tl, e nei due triangoli atr, tsl sono eguali gli angoli art, tsl, siccome i due tar, tls; dunque i due triangoli atr, tsl sono eguali, e per conseguenza $art + atsb = atsb + tsl$, ossia $arsb = = alb$, ma $alb = \frac{1}{2}\, adgb$; dunque etc.

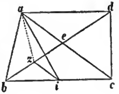
Problema. Dividere il quadrilatero *adgb* in tre parti eguali con due linee, *mo*, *np* parallele ai capi. Terminato il triangolo *egb*, e calcolato il valore di *ea*, e quindi di *eb*, si facciano le tre seguenti proporzioni:

$$eb^2 : ae^2 :: 3f + p : p$$
$$eb^2 : em^2 :: 3f + p : p + f$$
$$eb^2 : en^2 :: 3f + p : p + 2f,$$

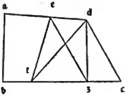
prendendo conseguentemente $em = eb\sqrt{\frac{p+f}{3f+p}}$, $en = eb\sqrt{\frac{p+2f}{p+3f}}$, si tirino dai punti *m*, *n* le linee *mo*, *np*, e si avrà l'intento. Poichè sostituendo ai quadrati eb^2, ac^2, em^2, en^2 le aree proporzionali *egb*, *ead*, *emo*, *enp*, si avranno dalle tre poste convertendo, le tre seguenti proporzioni:

$$egb - ead = adgb : egb :: 3f : 3f + p$$
$$egb - emo = mogb : egb :: 2f : 3f + p$$
$$egb - enp = npgb : egb :: f : 3f + p.$$

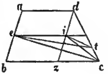
Dalle quali subito apparisce, che *npgb* è un terzo, e *mogb* due terzi di *adgb*, e per conseguenza *npgb* = *monp* = *admo*.



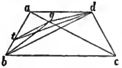
Problema. Dividere un quadrilatero diversilatero *adbc* in due parti eguali con una linea uscente da un angolo, per esempio, *a*. Si tiri il diametro *bd*, opposto all'angolo dato *a*, e poi si seghi coll'altro *ca* nel punto *e*. Se *e* sarà il punto di mezzo del diametro *bd*, sarà il diametro *ac* la linea cercata. Altrimenti si tagli *bd* per metà in *z*, e si tiri *zi* parallela alla *ac*, e si congiungano i punti *ai*; sarà questa la linea dividente il quadrilatero in due egualmente. Poichè per essere eguali le basi *bz*, *dz*, saranno eguali si i due *abz*, *azd*, come i due *bzc*, *zdc*; onde $azbc = \frac{1}{2}\, adbc$; ma sono anche eguali i due *azi*, *izc* tra parallele, e sulla comune base *zi*; dunque togliendo *izc*, ed aggiungendo *azc*, sarà $azbc - izc + azc = abi = \frac{1}{2}\, adbc$.



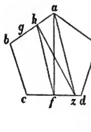
Problema. Dividere un quadrilatero diversilatero *adbc* in due parti eguali da un punto *e*. Si tiri dall'angolo *d* la linea *dt*, che divida il quadrilatero in due eguali parti: poi da *t*, si conduca al dato punto *e* la linea *te*, ed a questa, dall'angolo *d*, si tiri parallela *dz*, e finalmente si meni la *ez*, la quale dividerà il quadrilatero in due parti eguali. Poichè $edz = tdz$; dunque $edz + dzc = tdz + dzc = \frac{1}{2}\, adbc$. Se invece di essere dato il punto *e* nel lato *ad*, fosse dato il punto *z* nel lato *bc*, la soluzione sarebbe la stessa. Bisogna sempre scegliere un angolo, da cui tirando la linea dividente, il quadrilatero in parti eguali cada sul lato, su cui sta il punto dato, o sul lato opposto.



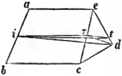
Problema. Dividere un quadrilatero diversilatero in due parti eguali da un punto *e* dato, nel mezzo del lato *ab*. Si tiri *dz* parallela al lato *ab*, e divisala per metà in *i*, si tiri *ei*, e tirata *ec*, si faccia ad essa parallela *it*, e finalmente si tiri *et*, la quale dividerà il quadrilatero in due parti eguali. Poichè $eibz = \frac{1}{2}\, adbz$; $izc = idt = \frac{1}{2}\, dzc$; dunque $ebic = \frac{1}{2}\, adbc$, ed essendo ancora $eic = ect$, sarà $ebic - eic + ect = ebtc = \frac{1}{2} adbc$.



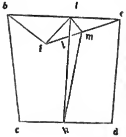
Problema. Tagliare da un quadrilatero *adbc* una terza parte, con una linea tirata da un angolo qual sia *d*. Si tiri il diametro, sul quale si prenda $ag = \frac{1}{3} ac$, e si conduca *gt* parallela all'altro diametro *bd*; poi congiungendo i punti *t*, *d*, dico che la linea *td*, taglierà nel quadrilatero la terza parte *atd*. Poichè essendo $ag = \frac{1}{3} ac$, sarà $gc = \frac{2}{3} ac$, per conseguenza $dgc = 2agd$, $bgc = 2bag$, $dgc + bgc = dcbg = 2dabg$; dunque $dabg = \frac{1}{3} adbc$; ma $tbg = tgd$; dunque $dabg - tbg + tgd = atd = \frac{1}{3} adbc$. Nello stesso modo, prendendo $ag = \frac{1}{m} ac$, si taglierà dal quadrilatero una parte $\frac{1}{m}$.



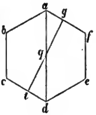
Problema. Dividere un pentagono regolare in due parti eguali da un punto dato, sopra uno dei lati. Se il punto dato, cadesse sull'angolo, per esempio *a*, è chiaro che menando *af* sul punto di mezzo del lato opposto *cd*, si avrebbe tosto l'intento; e lo stesso dicasi, se il punto dato fosse *f*, nel mezzo del lato *cd*. Sia pertanto il punto dato *h* di là dalla metà del lato *ab* verso *a*, e da questo angolo più vicino, si tiri *af*, dividente *cd* per metà in *f*, e da *f* si tiri *fh*, alla quale dall'angolo *a*, si conduca parallela *az*, e finalmente si tiri *hz*, e sarà questa la linea, che partendo dal punto dato *h*, divide il pentagono in due parti eguali. Poichè $hfz = hfa$, e per conseguenza $hbcf + fzh = hbcz = hbcf + hfa = abcf = \frac{1}{2} abcde$.



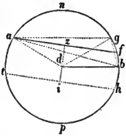
Problema. Dividere in due parti eguali un pentagono irregolare *abcde*. Si tiri la linea *ec*, e preso su di essa il punto di mezzo *z*, si divida colla linea *zi* in due parti eguali, il quadrilatero *eabc*; parimenti si divida per metà il triangolo *edc*, tirando la linea *zd*, si conduca *id*, ed a questa parallela si meni la *zt*, e finalmente la *it*, la quale soddisferà al problema. Poichè $izd = itd$; dunque $ibcd + itd = ibcdt = ibcd + izd = ibcdz = \frac{1}{2} abcde$.



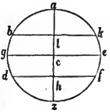
Problema. Dividere in due parti eguali il pentagono *bcdef*, fatto a forma di mitra. Si tiri *be*, e dividasi per mezzo nel punto *i*, dal quale poi tirisi *ik*, dividente il quadrilatero *bcde* in due parti eguali. Facciasi in seguito $kl : li :: fl : ml$, e tirisi *mk*; questa dividerà il pentagono in due parti eguali: poichè i triangoli *ilf*, *mlk*, aventi gli angoli *all* eguali, essendo in ragione composta dei lati intorno gli stessi angoli, saranno eguali, essendo per la proporzione $kl \times ml = li \times fl$, e per essere $bi = ie$, sono eguali *bfi*, *ife*; dunque $bcfkm = bcki - bfi - ifl + lmk = bcki - bfi$, ed $medk = ikde - ile - lkm = ikde - ile - ifl = ikde - ife = ikde - bfi$; dunque $bcfkm = medk$. Se *l* cadesse in *f*, diverrebbe zero la *lm*, e la *mk*, *ik*, *if* si confonderebbero insieme.



Problema. Dividere in due parti eguali un esagono regolare *abcdef*, è chiaro che resterà diviso per metà da qualunque diametro, come *ad*. Se sia dato il punto *g*, si tiri da esso una linea pel punto *q*, metà di *ad*, e centro dell'esagono.

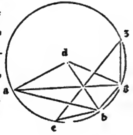


Problema. Dividere in tre parti il cerchio con linee parallele. Si tiri *ag*, lato del triangolo equilatero iscritto al cerchio, o sia corda di gradi 120, e alla *ag*, si tiri parallela dal centro *ladb*, e si conducano ad, dg, ab, bg, sarà $abg = adg$; dunque essendo $adgn = \frac{1}{3}\,anp$, sarà anche $abgn = \frac{1}{3}\,anp$; onde *abfgn* crescerà dell'area *gbf* sopra $\frac{1}{3}$ anp, cioè $abfgn = \frac{1}{3}\,anp + gbf$; e perciò $abfgn - gbf = \frac{1}{3}\,anp$. Si faccia il doppio dell'area *gbf*, cioè $2gbf = ab \times x$; onde $x = \frac{2gbf}{ab} = x$, e suppongasi $bf = x$, condotta *af*, sarà $afgn = \frac{1}{3}\,anp$. Sulla *af*, si conduca il perpendicolo *dz*, e prolungatolo egualmente in *i*, si meni *tik* parallela alla *af*, il circolo resterà diviso in tre parti eguali *afn*, *aftk*, *apk*. Poichè facendo sulla porzione di cerchio *apf* una simile operazione sopra una corda di gradi 120 parallela alla *ag*, e determinando una linea simile alla *af*, essa dovrebbe riuscire parallela ad essa *af*, ed egualmente distante dal centro *d*, conseguentemente verrebbe a coincidere colla *tk*; dunque etc.



Problema. Dividere un cerchio in quattro parti eguali con linee parallele. Tirato il diametro *az*, si pigli dal centro *c*, la *ch* alla *cz* :: 611 : 15122, e fatta $cl = ch$, tirando le linee *bk*, *ge*, *df*, sarà ottenuto l'intento.

Problema. Porre tra due linee parallele un terzo del cerchio dato. Tirata *ab*, corda di gradi 120, si divida l'arco *ab* per metà in *e*, poi tirata *ad*, si meni ad essa parallela *ez*; finalmente si tirino le linee *eb*, *bg*, *gz*, sarà il quadrilatero mistilineo $ebgz = \frac{1}{3}$ del cerchio. Poichè triangolo adb = triangolo agb, e somma triangolo $adb +$ segmento acb = triangolo $agb +$ segmento acb, per conseguenza $= \frac{1}{3}$ dell'area circolare *aep*, com' è la prima somma. Ma per essere *ez*, *bg* parallele, arco zg = arco $be = ae$; quindi $zg + be = be + ae = acb$, conseguentemente $zg + gb + be = zgae, aebg$; dunque area $zgbe$ = area

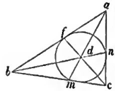


aebg, onde area *azgbe* — area *gb*, cioè l'area compresa tra le parallele *ze*, *gb*, e gli archi *zg*, *be* = area *aebg* — area *bg* = area triangolare agb + segmento $aeb = \frac{1}{3}$ dell'area circolare.

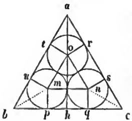
Distinzione sesta. Della misura dei corpi, secondo Euclide.

Distinzione settima. Degli stromenti, per mezzo de' quali, col solo aspetto, si misurano *lunghezze*, *larghezze*, *altezze*.

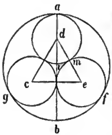
Distinzione ottava. Problemi cento di varie specie, tra quali trentaquattro geometrici, trattati con algebraiche equazioni espresse. Trascelgo i seguenti.



Problema 50. Inscrivere in un triangolo un cerchio. Si trovi del triangolo l'area; per mezzo della perpendicolare poi, chiamato il raggio del cerchio x, si moltiplichi x per la metà di ciascun lato, onde avere le aree triangolari *abd*, *bdc*, *cda*, e la somma si eguagli all'area intera *abc*. Quindi si ricaverà il valore di x.

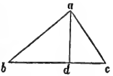


Problema 52. In un triangolo isoscele *abc*, porre tre cerchi eguali e maggiori che sia possibile. Chiamato x il raggio di questi circoli, si trovi l'area dei rettangoli *mpqn*, *nsor*, *otum*, ciascuno dei quali ha per base $2x$ per altezza x, e le aree dei triangoli *nqc*, *ncs*, *ora*, *oat*, *mub*, *mbp*, osservando che la base $qc = hc - x$, e che $cs = qc$, $ar = ca - cs - 2x$, $ax = ar$, $ub = bp = bh - x$; la somma di tutte queste aree, aggiunte all'area del triangolo equilatero *emn*, che ha ciascun lato $= x$, ed eguagliata all'area *abc*, determinata per la perpendicolare *ah*, darà il valore di x. Se due circoli soli si volesse inscrivere, il punto *o*, andrebbe a cadere in A, e nascerebbero i tre triangoli *anc*, *amb*, *amn*.

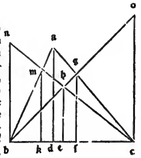


Problema 53. Inscrivere in un circolo tre circoli eguali e maggiori che sia possibile. Facciasi $dc = 2x$, onde si troverà il valore della perpendicolare *df* espressa per x. È poi chiaro, che essendo *r* il centro del cerchio grande, sarà pure centro del cerchio circoscritto al triangolo equilatero *dce*, essendo $fc = em$, e per conseguenza $rf = rm$, come s'intenderà concependo, tirata la linea *re*, e formati due triangoli *rmc*, *rfc*. Ma il raggio del cerchio circoscritto ad un triangolo equilatero è $\frac{2}{3}$ della perpendicolare di esso triangolo; dunque $dr = \frac{2}{3}\,df$, che sarà espressa per x; onde essendo $da = x$, si avrà $ra = \frac{1}{2}\,ab$ dato = ad una espressione di x, dalla quale si troverà x. La perpendicolare $df = x\sqrt{3}$; dunque $ar = x + \frac{2}{3}\,df = x + \frac{2}{3}\,x\sqrt{3}$. Se quattro saranno i cerchi, che si vorrà inscrivere, si troverà $ar = x + x\sqrt{2}$, essendo questo secondo termine, la metà della diagonale di un quadrato, che ha per lato $2x$. Se i cerchi da inscrivere siano cinque, sarà $ar = x +$ il raggio del cerchio circoscritto ad un pentagono, che ha per

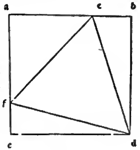
lato $2x$. Se sei fossero i cerchi da inscriversi, sarebbe $ar=x+2x$, essendo $2x$ il raggio del cerchio circoscritto all'esagono, avente per lato $2x$: in questo caso, vi resterà un cerchio di più nel mezzo, eguale agli altri, e così vadasi discorrendo.



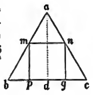
Problema. Nel triangolo abc, l'area è $=A^2$, il lato $bc=x$, $ac=x-1$, $ab=x+1$: si cercano questi lati. Essendo $ab^2=ac^2+bc^2-2bc\times dc$, sarà $\frac{ab^2-ac^2}{bc}=cb-2dc$, ed $\frac{ab^2-ac^2}{bc}+bc=2(bc-dc)=2bd$, che si troverà espresso per x; quindi si troverà ad, e poi l'area abd, onde eguagliando ad A^2, si ricaverà il valore di x.



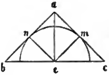
Problema 68. Nel triangolo abc, si conduce bgo, che taglia il lato ac in data distanza da a, e cmn, che taglia il lato ab in data distanza da a, e tali rette si segano nel punto h: si cerca la lunghezza della retta he, e la distanza del punto e dagli angoli b, c. Pei lati del triangolo abc, trovisi primieramente la perpendicolare ad. Trovata questa, i due triangoli simili acd, gcf, danno gf, fc, e i due abd, mbk, danno mk, bk. Da $bf=bc-fc$, ed fg si avrà bg; e similmente da $kc=bc-bk$, ed mk, si avrà mc: si chiami $dc=x$ dai due triangoli mkc, hce (essendo $ce=dc-x$), si avrà hc espresso per x, ed un'altra espressione di esso he, si avrà pei due triangoli di gbf, bhe, essendo $be=bd+x$. Dunque, eguagliate queste due espressioni di he, si troverà x etc.



Problema 70. Inscrivere in un quadrato il maggior triangolo equilatero. Un angolo di questo, deve stare in un angolo del quadrato, essendo il lato di quello, maggiore del lato di questo. Si faccia $eb=fc=x$, sarà $ae=af=ab-x$; onde $fe^2=2(ab-x)^2$, e $cd^2=x^2+bd^2$, ed essendo $fc=bd$, sarà $2(ab^2-x)^2=x^2+ab^2$.

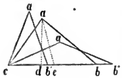


Problema 71. Inscrivere in un triangolo equilatero il maggior quadrato. Alzandosi questo sopra la base bc dai punti p, g, il suo lato superiore mn parallelo alla base bc, taglierà dal triangolo intero abc un triangolo simile, e per conseguenza equilatero amn; onde $an=pg$; si faccia $pg=x$, sarà $gc=dc-\frac{1}{2}x$, $nc^2=x^2+(dc-\frac{1}{2}x)^2=(ac-an)^2=(ac-x)^2$.

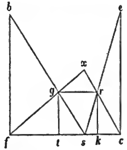


Problema 75. Inscrivere il maggior semicerchio possibile in un triangolo. Essendo *e* il centro del semicerchio, ed *m*, *n*, i punti di contatto, saranno *em*, *en* perpendicolari ai lati *ab*, *ac*, e tirata *ae*, e chiamato il raggio $em = en = x$, saranno le aree dei due triangoli *abc*, *aec*, cioè $\frac{1}{2}\, ab \times x + \frac{1}{2}\, ac \times x =$ all'area *abc*.

Aggiungo un problema, che l'Autore non tratta con algebra, e solo scioglie, non dimostra.



Problema 74. Allungare, od accorciare il più che si può un lato d'un triangolo, senza mutarne l'area, salve le lunghezze degli altri due lati, e trovare qual dei tre lati, a queste condizioni, si può allungare, od accorciare di più. Sia il triangolo *acb*, e prima si voglia alle dette condizioni allungare il lato *cb* in b'', od accorciarlo in b'. Si tiri la perpendicolare *ed*, e l'altra retta *ae* al punto *e*, metà di *cb*: sarà $de = \frac{1}{2}\, cb - cd$, ed $ae = (\frac{1}{2}\, cb - cd)^2 + ad^2$. Sarà cb'', ovvero $cb' = 2ae = 2\sqrt{((\frac{1}{2}\, cb - cd)^2 + ad^2)}$. Cioè il triangolo formato dalle rette *ab*, *ac*, *cb*, e quello formato dalle tre *ab*, *ae*, 2*ae*, saranno in area eguali. Ciò che si è fatto, rapporto al lato *cb*, facendosi rapporto ai lati *ac*, *ab*, si rileverà qual si possa allungare, od accorciare di più.



$sc : ce :: sk : kr$
$sf : fb :: st : tg$
$sc + sf : fb :: s$
$ce : cs$
$sc : ce :: sk : kr$
$SF : Fb :: Se : Sg$
$SC + SF : CE :: SK + ST : TG$
$SC + SF : CE + Fb : SK + ST : KR + TG.$

Se sia $\sqrt{p} : \sqrt{g} :: a : b$, ed inoltre $\sqrt{p}\,\sqrt{g} = a^2 + b^2$,
$\sqrt{10} : \sqrt{20} :: 2 : 4$ $\quad 20 = 4 + 16$

sarà $\sqrt{p}\sqrt{g} = \sqrt{ab} \times (p + g)$.
$20 = \sqrt{8} \times 50 = \sqrt{400}.$

Se $a : ab : ab^2$ sarà $a \times ab \times ab^2 = (ab)^3$.

Se $a : ab : ab^2$, ed inoltre $\frac{m}{a} + \frac{m}{ab} + \frac{m}{ab^2} = a + ab + ab^2$, sarà $ab = \sqrt{m}$; onde poi $\frac{m}{a} = \frac{a^2b^2}{a} = ab^2$.

Se $a : ab : ab^2$, ed inoltre $a : ab :: f : g$, essendo fcg
$2 : 4 : 8$ $\quad$ $2 : 4 :: 6 : 12$
sarà $f(ab + ab^2) = g(a + ab)$
$6(4 + 8) = 12(2 + 4)$.

Se $a : ab : ab^2$, sarà $2(a \times ab^2) + ab(a + ab^2) = a(ab + ab^2) + ab(a + ab^2) + ab^2(a + ab)$.

Se $a : ab : ab^2$, sarà $ab = \frac{a(ab + ab^2) + ab(a + ab^2) + ab^2(a + ab}{2(a + ab + ab^2)} = \frac{2a^2b + 2a^2b^2 + 2a^2b^3}{2(a + ab + ab^2)}$.

Luogo rimarcabile di F. Luca.

Pagina 112. « *De officio istorum terminorum. Plus. et minus.* Sono le quantita di doi specie alemani de loperante in la pratica de algebra et almucabala. Lune ratiocinate e discrete laltre sorde e in ratiocinate. In quelle che sonno discrete e note : si d' rotti commo de sani : sempre el trauagliare si po sequire per le uie e modi dināze in questo a soi luoghi date (in Aritmetica). Cioe d' multiplicarle: sumarle: sotrarle: e partirle. Ma quelle che sonno sorde e in ratiocinate : hauēga che le si possino multiplicare e partire sordamente fra loro ... cōmo adir. Cosa via. Cosa fa. Censo. E censo via. Cosa fa Cubo ... benche questi Cubi. Cēsi. E. Cose anoi sieno ignote... e partir Censo per cosa ne ven Cosa Censo per numero ne ven censo.... Ma el summare e lo sotrare : mai lhano possuto asettare ī la pratica ... senza laiuto dei termini. Più e meno. Dei quali termini nelli numeri che sonno ratiocinati non fa bisogno. Per che sonno li numeri de medesime vnita in essentia e natura composti : e non de diuerse. Ma le quantita sorde (maxime in algebra commo se vedera) le vnita son varie e diuerse ale volte ī natura e denominatione. Si commo cose : e censi : e numeri : che a vn corpo non si possano redure. Perche altra e la vnita de la cosa : altra quella del censo : altra quella del cubo etc. Peroche cosa in quel luogo (in Algebra) representa linea: e censo superficie: e cubo corpo. Onde... nō possano fare vna vnita denominatione. »

NOTA

La regola del Problema 74, fu probabilmente da Fra Luca trovata in questa maniera. Facendo nel triangolo cab il lato $ca = m$, il lato $ab = n$, e il lato $cb = p$, si trova il segmento fatto dalla perpendicolare su cb verso $c = \frac{m^2 - n^2 + p^2}{2p}$, ed il quadrato della perpendicolare ad, risulta $ad^2 = m^2 - \left(\frac{m^2 - n^2 + p^2}{2p}\right)^2$, ed il quadrato dell'area del triangolo $= \frac{p^2}{4} \times \left(m^2 - \left(\frac{m^2 - n^2 + p^2}{2p}\right)^2\right) = \frac{1}{16}\left(4m^2p^2 - (m^2 - n^2 + p^2)^2\right)$. Facciasi ora $cb' = y$, e dovendo, per condizione del problema, l'area $cb'a$ restar eguale all'area cba, sarà $\frac{1}{16}\left(4m^2p^2 - (m^2 - n^2 + p^2)^2\right) = \frac{1}{16}\left(4m^2y^2 - (m^2 - n^2 + y^2)^2\right)$, ossia $4m^2p^2 - (m^2 - n^2 + p^2)^2 = 4m^2y^2 - (m^2 - n^2 + y^2)^2$, e sviluppando $4m^2p^2 - (m^2 - n^2)^2 - 2(m^2 - n^2)p^2 - p^4 = 4m^2y^2 - (m^2 - n^2)^2 - 2(m^2 - n^2)y^2 - y^4$; e quindi $2(m^2 + n^2)p^2 - p^4 = 2(m^2 + n^2)y^2 - y^4$; ed ordinando $y^4 - 2(m^2 + n^2)y^2 + 2(m^2 + n^2)p^2 - p^4 = 0$; onde risolvendo $y^2 = m^2 + n^2 + \sqrt{(m^2 + n^2)^2 - 2(m^2 + n^2)p^2 + p^4} = m^2 + n^2 + = (l^2 + h^2) = p^2 (m^2 + n^2 - p^2) = 2m^2 + 2n^2 - p^2$, $y = \sqrt{2m^2 + 2n^2 - p^2}$. Ora la linea $ae = \sqrt{ad^2 + de^2} = \sqrt{\left(m^2 - \left(\frac{m^2 - n^2 + p^2}{2p}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}p - \frac{m^2 - n^2 + p^2}{2p}\right)^2\right)} = \sqrt{m^2 - \left(\frac{m^2 - n^2 + p^2}{2p}\right)^2 + \frac{1}{4}p^2 - \frac{m^2 - n^2 + p^2}{2} + \left(\frac{m^2 - n^2 + p^2}{2p}\right)^2} = \sqrt{m^2 + \frac{1}{4}p^2 - \frac{m^2 - n^2 + p^2}{2}} = \sqrt{\frac{2m^2 + 2n^2 - p^2}{4}}$, e perciò $2ae = \sqrt{2m^2 + 2n^2 - p^2} = y$.

Note sul trattato generale di numeri e misure di Nicolò Tartaglia stampato in Venezia anno 1556.

Parte prima. Lib. 16°, pagina 1. Regola della doppia falsa posizione, intendendo per x', x'' le due false posizioni, per $(\mp e)$, $(\mp E)$ i due rispettivi errori.

Primo caso : $(\mp E) - (\mp e) : x'' - x :: (\mp E) : \frac{(\mp E) \times (x'' - x)}{(\mp E) - (\mp e)}$, $x = x'' - \frac{\mp E \times (x'' - x)}{(\mp E) - (\mp e)}$. Secondo caso: $(\mp E) + (\mp e) : x'' - x :: (\mp E) : \frac{(\mp E) \times (x'' - x)}{(\mp E) + (\mp e)}$, $x = x'' - \frac{\mp E \times (x'' - x)}{(\mp E) + (\mp e)}$.

Parte seconda. Lib. 1°, pagina 2. Si dispensa dal trattare dei numeri figurati « per non esser, dice, materia al nostro proposito per» chè questi numeri triangolari pentaghonali essagonali settangonali » etc. non rispondono a tai figure geometriche, e tengo che per que» sta causa Euclide non fece menzion salvo che di quelli che corri» spondono a tai figure geometriche cioè li numeri quadrati. »

Pagina 7. Dà la regola di sommare tutti i numeri quadrati, dall'unità, sino a qual numero quadrato si voglia. Si riduce a questa: Sia n il numero dei numeri quadrati : si trovi la somma di n termini della progressione naturale, che è $\frac{n^2+n}{2}$, e questa si moltiplichi per $\frac{2n+1}{3}$, con che verrà $\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$, ossia $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$. L'Autore la dà non in generale, ma in numeri.

Pagina 24, Lib. 2.° Insegna come le radici quadre sì dei numeri non quadrati, come quadrati si possono per via geometrica trovare e dare precisamente per linea, e lo fa coll' ordinata nel semicerchio, il cui diametro è composto di due parti, cioè di due fattori qualunque, del numero dato.

Pagina 30, Lib. stesso. Proposizione speculativamente trovata dal presente Autore.

Se sarà una linea divisa in due parti, come si voglia, il cubo fatto da tutta la detta linea, sempre sarà eguale a questi otto prodotti, ovvero solidi, cioè ai due cubi fatti da quelle due parti insieme con quei sei solidi, dei quali tre sono contenuti da tre superficie quadrate dell' uno di cubi, e dall'altra parte della linea divisa, e tre sono contenuti da tre superficie quadrate dell'altro cubo, e dall'altra parte della linea divisa.

Sia la linea ab divisa in due parti in punto c, dico che il cubo fatto dalla parte *cb*, ed il cubo della parte *ac*, insieme coi tre solidi fatti del quadrato della *cb*, e della parte *ac*, e degli altri tre solidi fatti del quadrato della *ac*, e della parte *cb*, saranno eguali al cubo di tutta la linea *ab*, e per dimostrare questo, sia fatto il quadrato della linea *ab*, qual sia il quadrato *abde*, e sia tirato il diametro *bd*, e dal punto *c* sia tirata la linea *cf* equidistante al lato *ad*, e dal punto *g* sia tirata la *hi*, equidistante alla *de*, e fatto questo, sarà diviso il detto quadrato *abdc* nei due quadrati *cgib*, *ghdf*, che sono intorno al diametro, e nei due supplementi *acgh*, *gifc* (come dalla prima figura appare): fatto questo, sopra il detto quadrato *abde*, sia costituito un cubo, e sia elevato sopra le tre linee *bd*, *cf*, *hi* tre superficie (segante il detto cubo) perpendicolare sopra la superficie del quadrato *abde*, come nella seconda figura si vede. Fatto questo, dalle due linee *ak*, *bl*, ne siano segate le due parti *am*, *bn* eguale alla parte *bc*, e sia tirata la linea *mn*, e dalla detta linea *mn*, sia protratta una superficie equidistante alla base del cubo, cioè al quadrato *abde*, da quello composto, e fatto questo, si troverà il gran cubo *abdeklpo* essere diviso in otto corpi solidi, dei quali due sono cubi, cioè il corpo *cblqnr*, ed il corpo che sottogiace al quadrato *pstu*; e degli altri sei, tre sono contenuti sopra i tre quadrati occulti del cubo *bcgnrl*, e l'uno è il solido *gnzltgr*; il secondo è quello, che dietro dal detto cubo, ha la apparente superficie *riex*; il terzo poi è quello, che è sotto l'apparente superficie *mgac*, e sono detti *solidi maggiori*, e questi tre sono contenuti (come di sopra è stato detto) dai tre quadrati del detto cubo della parte maggiore *bc*, e dall'altra parte *ac*. E gli altri tre solidi sono contenuti da tre superficie quadrate del cubo sottogiacente al quadrato *puts*, e dalla linea *bc*, cioè eguale alla detta *cb*, il primo de' quali è il solido *tuyorx*; il secondo solido *stkzmg*; il terzo poi, si riposa sotto al detto cubo sottogiacente al detto quadrato *stup*, e questi tre sono detti *solidi minori*. E perchè questi due cubi e sei solidi, empissero totalmente e perfettamente il detto gran cubo *abklpoe*, e però sono a lui eguali, che è il proposito, quelli sei solidi, si potriano chiamare *supplementi*. E nota bene, che per essere stata ignorata questa soprascritta proposizione dai nostri antichi e moderni matematici non hanno potuto, nè saputo dare regola a molte sottili particolarità in Geometria e in Algebra, come che nel nostro processo si farà manifesto:

Figura 1.ª

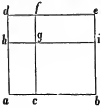
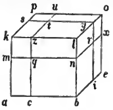


Figura 2.ª



Pagina 32, Lib. stesso. Insegna *come le radici cube si delli numeri non cubi come delli cubi si può per via geometrica trovare e dare precisamente per linea*, notando che *questo problema non è stato dato nè insegnato da Euclide ancorche di tal cosa ne fusse ricercato da alcuni a lui indirizzati da Platone per duplicar il cubo over l'altare ad Apolline per far cessar la peste, e che i metodi escogitati poi da Platone e da altri antichi* non erano da *Matematico ma da naturale*, perchè in ciascuno di essi si procedeva a tastone, e che Orontio *moderno Matematico in quel di quadratura circuli presumendo d'aver trovato di esseguir tal problema dimostrativamente non poco s'inganna*. Ma a dir vero anche il metodo del Sig. Tartaglia procede per tastone. Perchè però in pratica può essere comodo, eccolo in breve.

Si debba estrarre la radice cuba di 10: si tiri la linea indefinita de, figura 1ª, sulla quale si prenda $df = 10$ piedi, od altro, e si eriga $fh = 1$, e compito il rettangolo $dfhg$, e colle due diagonali, trovato il centro i, piantata in questo centro una punta del compasso, si allarghi l'altra per segnare sulla df, e sulla dg prolungata, due punti equidistanti da i, sino a trovarli tali, che tirando dall' uno p all'altro q, una linea, questa passi per h, sarà fq la radice cuba di df. La dimostrazione si ha dalla figura 2.ª Poichè la somiglianza dei due triangoli fth, hts, dà $hf : ht$, ossia $fq :: fq : hs$, ossia pg; e la somiglianza dei due triangoli hfq, pgh, dà $hf : fq :: pg : gh$, ossia df; dunque hf, fq, pg, df, saranno continuamente proporzionali, ed fg sarà radice cubica di df.

Figura 1.ª

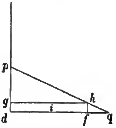
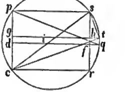


Figura 2.ª

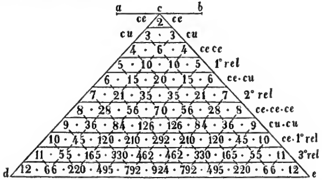


Parte seconda. Lib. 2.ª Capo XXI. Regola generale dal presente Autore ritrovata, *da sapere in tale estrattioni di radici infinito più oltra procedere*.

Dopo di avere partitamente insegnato le parti, delle quali sono composte la seconda, terza etc. sino alla 12.ª potenza d'un binomio, ossia d'una linea ab divisa in due parti ac, cb, dà la regola generale per formare qualunque altra potenza di essa linea divisa in due parti, e quanto ai termini fa riflettere, pagina 71, che quei nomi descritti, ovvero notati di fuori via, dal sinistro lato cd, sono i nomi delle dignità che si vanno causando, ovvero che si possono causare, di mano in mano, dalla prima parte *ac*, e quelli che sono descritti, ovvero notati di fuori via dal destro lato *ce*, sono i nomi delle dignità, che si vanno causando, ovvero che si possono causare, di mano in mano, dalla seconda parte *cb*, e tali nomi, ovvero dignità, se ben ti ricordi di quello che fu detto nella terza del primo capo, sono stabiliti, e continuati in progressione geometrica, denominata tal progressione da quella quantità della quale è causata, cioè la detta progressione geometrica di quei nomi, che sono dalla banda sinistra, cioè fuori della linea *cd*, è denominata dalla quantità della parte *ac*, e quella di quelli che sono da banda destra, cioè di fuori via dal lato del lato *ce*, è denominata della quantità *cb*, e tai due progressioni geometriche possono procedere in infinito, e quelli altri nomi, ovvero dignità che più oltre andranno causando, l'uno sarà sempre il primo, cioè quello che sarà causato dalla banda sinistra, e l'altro l'ultimo di tutti quei prodotti, che incorreranno ad agguagliarsi a quella medesima dignità di tutta la detta quantità *ab*.

È da notare che nella terza del capo primo, pag. 24, mette a primo termine delle dette progressioni l'unità, la quale, per conseguenza, deve qui sotto intendersi sopra la sommità del triangolo, come comune principio delle due progressioni, delle quali poi il secondo termine è per l'una *ac*, per l'altra *cb* . . . .

Anche in altri luoghi, dove espone le dette progressioni, vi pone sempre a primo termine l'unità



Quanto poi ai coefficienti, ecco come soggiugne:

« Ancora è manifesto per le cose dette sopra che tutti quelli numeri che dalla sommità del triangolo (cioè dal numero 2) vengono discendendo a canto al lato *ed* di dentro via per sino in 12 sono tutti stabiliti e continuati in progressione naturale arithmetica e ciascuno di questi tali numeri concorre alla formazione del secondo prodotto in quella specie di dignità che vi è posta a canto di fuora via della detta linea over lato *cd*, e quelli poi che dal medesimo 2 vengono discendendo a canto al lato *ec* pur di dentro via nella medesima progressione naturale arithmetica per fin al detto 12 sono quelli che ciascun di loro concorre alla formazione del penultimo prodotto in quella specie di dignità che vi è posta a canto di fuora via della linea over lato *ce*. E però secondo che quelli duoi ordini di nomi over dignità ponno in tal sua progressione geometrica procedere in infinito quel medesimo seguita in quelli altri duoi ordini di numeri in tal sua progressione naturale arithmetica cioè che ponno procedere anchora loro in tal progressione in infinito. Ciascun di quelli altri numeri poi che sono fra li detti duoi ordini di numeri continuati in quella progression naturale si forma da quelli duoi numeri a lui sopraposti nel precedente spazio insieme congionti. »

Lo scopo primario dell'Autore in tutto il libro 2.° è l'estrazione della radice, e questo lo ha portato a considerare la formazione delle potenze.

Parte seconda, Lib. 7.° Tratta a lungo delle *medie proporzionali*, ed insegna, come data la prima, e la duodecima delle continue proporzionali, si possa trovare la seconda, e da questa dottrina, cava la soluzione di quistioni sopra *li meriti e sconti a capo d' anno*: merito a capo d'anno è l'interesse sopra interesse, ossia interesse composto: fatte le quistioni da lui trattate, si riducono a due. Prima: dato un capitale, e imprestato per anni n, e la somma s, dopo anni n del capitale, e del merito a capo d'anno, trovare l'annuo interesse. Seconda: dato il debito a, da pagarsi da un tale ad un altro in anni n, e data la somma, con cui il debitore sconta subito il suo debito, computato il merito dell'anticipazione, trovare tal merito. L'Autore riduce le quistioni, a trovare il secondo termine di una progressione di numero n termini, primo de'quali è la somma minore, ultimo la maggiore, e dove fa bisogno, adopera la sua nuova teoria delle estrazioni di radice.

Parte quarta, Lib. 1°, pagina 7. Mostra come, senza investigare la perpendicolare, i triangoli si possono misurare.

Regola. Si sommino insieme i tre lati, e si pigli la metà di tal somma, e da tal metà si detragga ciascun lato, e i tre resti, si moltiplichino fra loro, e tal prodotto si moltiplichi per quella metà della somma, e la radice di questo prodotto sarà l'area del triangolo.

Ecco in compendio la dimostrazione dell'Autore. Sia il triangolo abg, i cui angoli b, g si taglino per metà colle linee bt, gt e dal punto t si conducano su i tre lati le perpendicolari te, tz, th, e di più all' angolo a, la linea ta, saranno eguali i triangoli tzg, tgh; e similmente i due tbh, teb; e finalmente per $tz = th = tc$ anche i due tza, tea; onde $zg = hg$, $bh = bc$, $ea = az$, per conseguenza la somma dei lati $= 2hg + 2be + 2ea$, oppure $= 2az + 2ag + 2bh$, o per terzo $= 2bh$

$+ 2hg + 2ae$, e la semisomma $= ba + hg = ag + bh = bg + ae$, e quindi, chiamando essa semisomma $\frac{1}{2} s$, sarà $\frac{1}{2} s - ba = hg$ $\frac{1}{2} s - ag = bh$, $\frac{1}{2} s - bg = ae$. Si prolunghi il lato ab in l, di modo, che sia $bl = hg$, e il lato ag in m, sicchè sia $gm = bh$, e formati gli angoli retti alk, amk, e prodotta at in k per essere $al = am = s$, saranno eguali i triangoli rettangoli alk, amk: sulla linea inoltre gb, si tagli $nb = bl = gh$, onde sarà $bh = gn$; e per ultimo, si tirino le linee nk, bk, gk. Sarà $bk^2 = lk^2 + lb^2$, $gk^2 + mk^2 + gm^2$; e perciò $lk^2 = bk^2 - lb^2$, $mk^2 = gk^2 - gm^2$; ma per l'eguaglianza dei due triangoli alk, amk, $lk^2 = mk^2$; dunque $bk^2 - lb^2 = gk^2 - gm^2$, ossia per $lb = nb$, $gm = bh = gn$, $bk^2 - bn^2 = gk^2 - gn^2$, il che mostra essere kn perpendicolare sopra gb; e posto ciò, ne segue, che i due triangoli nkb, bkl sono eguali, ed essa $nk = lk$; e per essere nel trapezio $nklb$ retti i due angoli n, l, sarà pure eguale a due retti la somma $nkl + nbl$, e perciò $= nbe + nbl$, conseguentemente $nkl = nbe$, $\frac{1}{2} nkl = \frac{1}{2} nbe$, cioè $bkl = tbe$; dunque i triangoli rettangoli bkl, tbe sono simili, e perciò $kl : lb :: be : et$, onde $kl \times et = lb \times eb$. Si ha di più $ae : al :: et : kl :: et^2 : et \times kl :: et^2 : lb \times be$; e quindi $ae \times lb \times be = et^2 \times al$, ed $ae \times lb \times be \times al = et^2 \times al^2$, e per essere $ae = \frac{1}{2} s - bg$, $lb = hg = \frac{1}{2} s - ba$, $be = bh = \frac{1}{2} s - ag$, $al = \dfrac{ba + bg + ge}{2} = \frac{1}{2} s$; finalmente sarà $(\frac{1}{2} s - bg)(\frac{1}{2} s - ba)(\frac{1}{2} s - ag)\,\frac{1}{2} s = et^2 \times (\frac{1}{2} s)^2$; ma essendo $et = tz = th$ è manifesto che $et \times (\frac{1}{2} s)$ è la somma delle tre aree triangolari atb, gtb, gta, ossia l'area totale del triangolo gab; dunque anche la radice del prodotto $(\frac{1}{2} s - bg)(\frac{1}{2} s - ba)(\frac{1}{2} s - ag)\,\frac{1}{2} s$ è eguale all'area di esso triangolo.

Parte seconda, Lib. 1°, pagina 17. Insegna a trovare in quanti modi può variare il getto, di che quantità di dati si voglia, nel tirare quelli. Lorenzo Spirto, avanti di lui, aveva coll'esperienza trovato, che il getto di tre dati, potea variare in 56 maniere: al Tartaglia si deve la regola generale, sebbene non ne renda ragione. Ecco la sua tavola:

Per 1 dato	1	1	1	1	1	1
Per 2 dati	1	2	3	4	5	6
Per 3 dati	1	3	6	10	15	21
Per 4 dati	1	4	10	20	35	56
Per 5 dati	1	5	15	35	70	126
Per 6 dati	1	6	21	56	126	252
Per 7 dati	1	7	28	84	210	462
Per 8 dati	1	8	36	120	330	792

Bisogna, per ogni numero di dati, sommare la rispettiva progressione. L'ordine, onde una è formata dall'altra si è, che i termini dell'inferiore, sono le somme dei termini della superiore, e così l'ultimo termine della susseguente: per esempio il 56 della quarta è la somma di tutta l'antecedente, cioè della terza, e perciò il numero delle maniere, onde può variare il getto di tre dati.

Parte terza, Lib. 4°, pagina 38. Nota il Tartaglia, che un piede cubico di formento, si computa in Verona contenere un minale e $\frac{1}{2}$ quartaruolo.

Pagina 40. Nota, che in Verona venti inchiestare, fanno una secchia, quattro secchie, un brento, e dodici brenti, una botte; e che, per esperienze fatte, un piede cubico, si computa secchie $2\frac{1}{2}$.

Pagina 42. Dà per dimensioni di una botte veronese: diametri dei capi, piedi 3, once 2; diametro dell' altezza al cocone piedi 3, once 6; lunghezza del vacuo da fondo a fondo, piedi 5, once 8, e dice essersi trovato, che tal botte contiene secchie 123, inchiestare 13.

Pagina 45. Nota per lunghezza del mattone once 8, larghezza 4, grossezza 2.

Pagina 50. Nota, che per un passo di cavamento, intendesi un quadro di terra lungo e largo un passo, profondo un piede, ossia $\frac{1}{5}$ di passo.

Altri estratti del Tartaglia.

Parte seconda, Lib. 1.° pagina 7. Per trovare la somma di tutti i quadrati, che nascono da tutti i numeri dispari 1. 3. 5. 7. 9. 11 .... sino, per esempio all' 11, si aggiunga ad 11 il seguente 13, onde avere 24; poi moltiplica $11 \times 13 \times 24 = 3432$, poi dividi per $2 = 13 - 11$, con che verrà $\frac{3432}{2} = 1716$, e di nuovo dividi per 6, onde finalmente risulterà $\frac{1716}{6} = 286$ per la somma ricercata. Per trovare la somma dei quadrati dei numeri pari 2. 4. 6. 8. 10. 12 . . . . . fa in simil modo, e troverai detta somma $= \frac{12 \times 14 \times \overline{12+14}}{(14-12) \times 6}$.

Volendo ancora, con regola, investigare la somma di tutti i numeri quadrati, fatti da numeri che ordinatamente ascendono per binario, ternario, quaternario . . . . sino al quadrato di alcuni numeri ordinariamente ascendenti, come a dire, cominciando dal quaternario, sino al quadrato di 24 così dicendo: 4. 8. 12. 16. 20. 24. I quadrati de'quali sono 16. 64. 144. 256. 400. 576 . . . . fa così: sempre piglia il numero seguente, come 28, che aggiunto a 24 dà 52; poi moltiplica $24 \times 28 \times 52 = 34944$; poi dividi per $4 = 28 - 24$, e di nuovo per 6 sarà la somma cercata $= \frac{24 \times 28 \times 52}{4 \times 6} = 28 \times 52 = 1456$.

In simil modo deve farsi in qualunque altra progressione, variando solo il numero 4, prendendo cioè sempre la differenza costante dei termini.

Parte Prima. Lib. 11,° pagina 191. Trattando del merito a capo d'anno, espone il parere di Fra Luca, il quale insistendo sull'obbligo del merito solo a capo d'anno, pretende, che volendo chi ricevette il capitale a a 20 per cento, restituirlo dopo sei mesi, non sia obbligato a pagare di merito 10, ma col ribasso proporzionato al merito, che questi 10 avrebbe prodotto nei sei mesi di anticipazione. Il Tartaglia considerando, che la condizione di merito a capo d'anno è aggiunta, da chi dà il capitale per suo beneficio, pretende, che nel caso, si debba pagare il merito 10, e così se la restituzione del capitale fosse fatta dopo anni, e mesi e giorni, pretende, che per gli anni, il computo si debba fare con merito a capo d'anno, e pei mesi e giorni, a merito semplice.

Parte seconda. Lib. 1°, pagina 13. *Di una particolar proprietà della progressione doppia geometrica.*

Un gentil'uomo accorda un certo artefice a farvi un certo lavorerio per 60 giorni e riman dacordo un mocenigo al giorno e perche il gentil' uomo non si fidava troppo di costui cioè a darvi danari avanti tratto il detto gentil'uomo fece stampar in cecca 6 monete d' argento che fra tutte 6 valevano 60 mocenighi ma così ben ordinate di valore che ogni sera gli ne dava una talmente che con tai sei monete paghete quel artefice di giorno in giorno ogni sera per quel giorno solo che andava lavorando di mane in mane e così con quelle sei monete in fine di 60 giorni lo compite di pagare a ponto si adimanda l'ordine e la qualità del valore di dette 6 monete. La progressione doppia cominciante dall' unità serve per sua particolar proprietà in questo negozio ed altri simili, perchè facendo fare sei monete in progressione 1. 2. 4. 8. 16. 32:

e dando	la prima sera	1	. . facendosi restituire	0
	la seconda	2	. . . .	1
	la terza	1	. . . .	
	la quarta	4	. . . .	1. 2
	la quinta	1	. . . .	
	la sesta	2	. . . .	1
	la settima	1	. . . .	
	la ottava	8	. . . .	1. 2. 4
	la nona	1	. . . .	
	la decima	2	. . . .	1
	la undecima	1	. . . .	
	la duodecima	4	. . . .	1. 2
e così fino alla quintadecima				
	sedicesima	16	. . . .	1. 2. 4. 8
e colle quattro 1. 2. 4. 8 lo andrà pagando sino alla sera 31				
	trentesima seconda	32	. . . .	1. 2. 4.8.16

e colle cinque 1. 2. 4. 8. 16 lo anderia pagando sino alla sera 63, perchè però i giorni non sono 63, ma 60, basterà che l'ultima moneta invece di 32, sia di 29 mocenighi, e così la somma $1+2+4+8+16+29=60$.

Serve questa progressione doppia pei campioni, perchè se si avranno sei campioni in detta progressione, si potranno con essi pesare 63, e tutti i numeri da 1, sino a 63.

Pagina 14. *Una particolar proprietà della progression treppia principiante dall'unità.*

Uno con quattro campioni da lui con tal ordine fabricati che con quelli pesa quante lire integre gli occorre alle mani da 1 *per sino a* 40. *Si adimanda in qual ordine eran formati tali campioni.*

I quattro campioni devono essere in progessione 1. 3. 9. 27, che adoperati con ingegno, ponendo or di qua, or di là della bilancia, uno, due, o tre campioni, soddisferanno ad ogni caso da 1, sino a 40.

Parte seconda, Lib. 7°, pagina 109. Dà Tartaglia *il modo di saper trovare quanti numeri semplici si voglia in continua proporzionalità secondo una data proporzione.*

Supposta la data proporzione ridotta ai minimi termini, e questi segnati colle lettere a, b, fa il quadrato di a, che dinota per c, e il quadrato di b, che dinota per e, e il rettangolo ab, che dinota per d: così $c.\ d.\ e$, ossia $a^2.\ ab.\ b^2$, o (se $a=3$, $b=2$) 9. 6. 4 sono tre in continua proporzione di $3:2$. Per trovarne quattro, si moltiplichi $a\times a^2$, $a\times ab$, $a\times b^2$, $b\times b^2$, e saranno continuamente proporzionali $a^3.\ a^2b.\ ab^2.\ b^3$; con questi se ne possono trovare cinque, e da cinque sei.... e in ogni ordine i più bassi, saranno rispettivamente minimi. Il Tartaglia però, per esprimere le potenze, in vece di esponenti, usa diverse lettere, e nota qui l'Autore, che tai termini andranno procedendo, secondo l'ordine di quei numeri narrati nella terza del primo capo del secondo libro, ovvero nel fine di esso.

È ancora da osservarsi, il dinotare che fa l'Autore con lettere i numeri.

Parte seconda, Lib. 9°, pagina 141. *Alcune altre regole generali dal presente autor ritrovate per risolver con somma brevità varie questioni che occorrer possano sopra di numeri quadrati.*

Ogni due numeri situati nella proporzione *sesquitertia*, ovvero *subsesquitertia*, cioè come da $4:3$, ovvero da $3:4$; la somma de'loro quadrati sempre sarà (largo modo) numero quadrato, e non solamente nei numeri semplici, ma ancora nei rotti, e sani rotti.

Il medesimo seguirà in ogni due collocati in queste altre specie di proporzione $12:5$, $84:13$, $15:8$ . . .

Ogni due numeri quadrati (largo modo) costituiti nella proporzione, come da $16:9$, giunti insieme, sempre saranno numero quadrato, non solo nei semplici, ma nei rotti, e sani rotti.

Il medesimo nei numeri quadrati, che stanno nelle proporzioni $144:25$, $7056:169$, $225:64$. Il largo modo, allude ai rotti, e sani rotti.

Parte seconda, Lib. 10.° Dà alcune regole generali, da lui ritrovate, di saper trovare a qual si voglia specie di binomio, ovvero residuo, una quantità, che con esso moltiplicata, dia quantità razionale, insieme colla regola di saper partire realmente una quantità, per qualsivoglia specie di binomio, o residuo,

Ecco la regola in generale. Se il binomio sia $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$, e il residuo $\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}$, si trovino numero n continue proporzionali nella ragione $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}$, e nel caso del binomio, si uniscano alternativamente col segno $+$, e $-$; nel caso del residuo, tutte con segno $+$. Vale lo stesso per levare il denominatore irrazionale di binomio, o di residuo. Sia per esempio $n=3$, $a=b$, $b=4$, sarà $\sqrt[n]{a}=\sqrt[3]{6}\,\sqrt[n]{b}=\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[n]{b}=\sqrt[3]{b}\pm\sqrt[3]{4}$, le tre continue proporzionali $(\sqrt[3]{6})^2$, $\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{4}$, $(\sqrt[3]{4})^2$, cioè $\sqrt[3]{36}$, $\sqrt[3]{24}$, $\sqrt[3]{16}$, e la quantità cercata $\sqrt[3]{36}\pm\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{16}$.

Parte terza, Lib. 1°, pagina 1. Dà la lunghezza delle misure Venete, ed altre, fra le quali vi sono le Veronesi.

Oncia Veronese

Pagina 7. Nota che in Veronese, una pertica quadra, dicesi *tavola*, 30 tavole fanno una vanezza, e 24 vanezze, ossia tavole 720, fanno un campo. Nota ancora che la pertica lineare è piedi sei; il piede, once 12; l'oncia, ponti 12; il ponto, atomi 12; l'atomo, menicoli 12.

Parte quarta, Lib. 1°, pagina 16. Espone i vari tentativi per misurare il cerchio, e confuta le pretese del Cardinale di Cusa, di Oronzio.

Pagina 21. Confuta la pretensione di Michele Stifelio, circa la duplicazione del cubo.

Parte quinta, Lib. 1°, pagina 21. Insegna a risolvere *con il compasso e la riga geometricamente vari problemi non posti da Euclide.*

E prima circa le linee.

A qualunque proposta linea, trovare due altre da quella continue proporzionali, in tale specie di proporzione, che il quadrato della prima proposta, sia eguale ai quadrati delle altre due.

Sia data a, e si divida, con media ed estrema ragione, nelle parti x, $a-x$, sicchè $x^2=a^2-ax$, ed $a^2=ax+x^2$, si faccia $a:y:x$, sicchè $y^2=ax$, sarà $a^2=y^2+x^2$.

Segare una linea in tre parti continue proporzionali, sicchè il quadrato della prima, sia eguale ai quadrati delle altre due. Sia data b, e si divida similmente che la linea composta $a+y+x$, posta ad angolo con b.

Segare una linea in modo, di formare delle tre parti un triangolo ortogonio.

Date due rette, la maggiore delle quali sia più che doppia della minore, dividere essa maggiore in due parti, fra le quali, la minore sia media proporzionale.

Con qualsivoglia apertura di compasso proposta, dividere una data linea in quante parti eguali ne pare.

2.° Circa la divisione di un triangolo.

Dividerlo in due parti eguali, con una linea equidistante alla base.

In tre parti eguali, con due linee equidistanti alla base.

In due parti eguali, da un punto dato in uno dei lati.

Da un punto dato, in uno dei lati, tagliare la terza parte del triangolo.

Da un punto dato, nel lato appresso a uno degli angoli meno della terza parte di esso lato, dividere il triangolo in tre parti eguali, ed anche posto, che il punto sia lontano dagli estremi del lato, più del terzo del lato.

Generalmente dato un punto dove si voglia nel lato, dividere il triangolo in quante parti eguali ne pare.

Dividere un triangolo in parti, da un punto dato di dentro di tal triangolo.

Saper conoscere i lati d'un triangolo non atti a darne un punto, da poter dividere il detto triangolo in due parti eguali, con una linea passante per quel punto, di dentro di tal triangolo.

Pigliare una parte d'un triangolo da un punto dato di fuori.

3.° Circa la divisione delle figure parallelogramme.

Dividere un parallelogrammo in due o più parti eguali.

Tagliare una parte da un parallelogrammo da un punto dato, in uno de'lati, e talora dividerlo in parti eguali.

Tagliare da un parallelogrammo una parte da un punto dato fuori, e talora dividerlo in parti eguali.

4.° Circa la divisione dei capi, tagliati, o doppi capi tagliati.

Dividere un capo tagliato, o doppio capo tagliato in due parti eguali ed anche in più.

Dividerli in due parti eguali da un punto dato nel minor lato, o da un angolo nell'estremità di questo.

Da un punto dato nel capo minore, tagliarne la terza parte, e dividerlo in tre parti eguali.

Dividere in due parti eguali da uno degli angoli terminanti il capo maggiore.

Da un punto dato nel capo maggiore.

Da qualsivoglia angolo.

Dividere in tre parti eguali da un punto nel capo maggiore.

Dividere in due o tre parti eguali con linee equidistanti all'uno e l'altro dei lati paralleli.

Dividere in due parti eguali da un punto dato in uno dei due lati non equidistanti.

Ed anche in tre parti.

5.° Circa la divisione del quadrilatero, in cui non vi sia alcun paio di lati fra loro equidistanti.

Dividere in due parti eguali da un angolo.

Da un punto in uno dei lati.

Dividerlo in tre parti eguali da un angolo.

6.° Circa la divisione delle figure di cinque lati.

Dividere il pentagono equilatero,ed equiangolo in due parti eguali da un angolo, o da un punto in uno de'lati.

Dividere il pentagono irregolare in due parti eguali, da un angolo, o da un punto in uno de'lati.

Dividere in tre parti eguali l'uno e l'altro nei due modi.

7.° Circa la divisione delle figure di sei lati.

Dividere ogni esagono regolare in due parti eguali da un angolo, o da un punto in uno dei lati.

Dividere nei due modi l'irregolare.

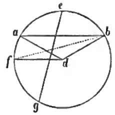
8.° Circa la divisione degli eptagoni.

Dividere l'eptagono regolare, o irregolare da un punto, in uno dei lati, o da un angolo in due parti eguali.

9.° Circa la divisione del cerchio.

Dividere un cerchio in quante parti eguali si vuole, da un punto nella circonferenza dentro o fuori.

Dividere il cerchio naturalmente, ossia prossimamente in tre, quattro parti eguali, con linee equidistanti.



Assegnare fra linee equidistanti, qualsivoglia parte di cerchio, purchè minore della metà. Se, per esempio, sia la terza parte, prendi la terza parte della circonferenza, e tirane la corda, poi dal centro tira ad essa una equidistanza, che andrà a segnare sulla circonferenza un altro punto, e da questo all'estremità vicina della terza parte segnata della circonferenza tira la corda, poi a questa una equidistante dal punto medio di essa, segnata terza parte di circonferenza, e l'area tra queste due equidistanti sarà la terza parte del cerchio. Posto che *ab* sia la terza parte della circonferenza, *ae* la sesta, *fd* equidistante, *ed*, *ab*, *eg* equidistante ad *af* sarà l'area tra *af*, *eg* gli archi, *ae*, *fg* un terzo dell'area circolare. La linea *fb* a puntini serve per la dimostrazione.

Parte quinta, Lib. 3°, pagina 63, e seg. Espone un suo ritrovato assai ingegnoso di designare, con qualunque apertura di compasso dato, qualunque superficie piana, eccetto il cerchio.

Parte quinta, Lib. 3°, pagina 86. Dimostra che il circolo è fra gli isoperimetri di massima capacità.

Parte sesta. Della regola d'Algebra. Lib. 1°. Trattando della dignità, così scrive: Pagina 2: « Se ben te aricordi di sopra ti ho detto qualmente il numero considerato secondo se non è dignità ma solamente capo e principio di dette dignità siccome che anchora la unità considerata secondo se non è numero ma solamente principio del numero adunque non essendo di nulla dignità il numero gli daremo per suo segno *o*, e perchè la cosa è la prima dignità gli daremo per suo segno 1 e perchè il censo è la seconda dignità gli daremo

» per suo segno 2 . . . . . e così anderemo procedendo, li quali segni saranno situati nella continua progressione naturale arithmetica » e le dignità sono situate nella proporzionalità geometrica. E se ben » ti aricordi che nel 8 libro della 2ª parte a carte 131 nella seconda » fazata fu dichiarito nel primo corollario della 8ª che al moltiplicare » delle geometriche proporzionalità corrisponde il summare nelle arit- » metiche. E pertanto al multiplicare una dignità fia un' altra (che » sono nella proporzionalità geometrica) corrisponde il sommar di lor » segni (che sono nella proporzionalità arithmetica) la summa sarà il » segno del prodotto »: ed in seguito alla pagina 3, soggiugne: « che » sottraendo dalla dignità che si ha da partire il segno del partitore » il restante sarà il segno del advenimento di tal partire .. se la di- » gnità del partitore è maggiore della dignità che haverai da partire » bisogna rispondere in forma di rotto. »

Quelli che l'Autore chiama *segni*, non sono i nostri esponenti? È vero, che l'Autore non conobbe i segni negativi. Il principio della corrispondenza tra la somma e la sottrazione nella proporzionalità aritmetica colla moltiplica e divisione nella geometria, non è il seme dei logaritmi?

L'Autore alla terza del Lib. 2°, e nel decorso tutto di esso libro Parte seconda, mette a primo termine della progressione delle dignità l'unità, qui mette il numero valutato per zero in linea di dignità. Ciò non pare involgere l'odierno teorema, che qualunque numero elevato a potenza *o*, vale tanto, quanto l'unità?

Pagina 5 e seg. Insegna a sciogliere i capitoli o equazioni, che noi esponiamo così: $ax=b$, $ax^2=b$, $ax^2=bx$, $ax^2+bx=c$, $ax^2=bx+c$, $ax^2+c=ax$; e mostra in tutti, come si levino le quantità che moltiplicano, o dividono la dignità maggiore di x, e come poi se ne trova il valore. Il metodo per le equazioni di secondo grado, è quello dell'aggiunta del quadrato della metà del coefficiente di x.

Pagina 10. Insegna a sciogliere le equazioni $ax^4=b$, $ax^4+bx^2=c$, $ax^4=bx^2+c$, $ax^4+c=bx$, col modo stesso, che per le equazioni di 2.° grado.

Pagina 11. Insegna a levare i superflui, e ristaurare i diminuti, che noi diremmo sottrarre le quantità aggiunte, ed aggiugnere le sottratte, per liberare l'incognita.

Pagina 12. Insegna pure a levare le radici degli estremi delle equazioni: per *estremi* intende *membri*. I suoi precetti non si estendono che a due radicali di 2.° grado, e la massima fondamentale è di discompagnare i radicali da tutte le altre quantità; poi quadrare i membri, come facciamo noi pure.

Pagina 13. Tratta dell'investigare, se degli estremi, ossia membri delle equazioni si possono pigliare le loro radici. Per primo esempio adduce l'equazione $9x^4+12x^3+4x^2=240$, ed estraendo la radice, la riduce a $3x^2+2x=\sqrt{240}$, che poi scioglie colle regole date. A secondo esempio propone l'equazione $x^4+2x^3+3x^2+2x=440$. Egli riflette in prima, che la radice del primo membro non può essere un binomio. Secondo: che per essere un trinomio, bisognerebbe, che esso membro avesse un termine di più, cioè cinque, invece di quattro. Terzo: che il termine mancante, è un numero quadrato. Quarto: prende la radice del primo termine x^4, che è x^2, e poi divide il secondo termine $+2x^3$ per $2x^2$, dal che viene x, e così piglia $x^2 + x$ pei due primi termini del trinomio. Quinto: a ritrovare il terzo, riflette, che il doppio di esso moltiplicato col secondo, che è x, deve dare il penultimo, ossia quarto termine del quinquinomio, cioè $2x$; onde ricava, che esso terzo termine, non può essere che 1, e così forma il trinomio x^2+x+1. Sesto: Prova se x^2+x+1 quadrato dia realmente $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$, e trovato darlo effettivamente, aggiunge 1 ai due membri dell'equazione proposta, con che diviene $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 441$, ed estraendo la radice, la ribassa al secondo grado $x^2 + x + 1 = \sqrt{441} = 21$; onde $x^2 + x = 20$. Non è questo il seme della regola di Lodovico Ferrari, detto sempre dal Tartaglia *creato di Cardano*, che certo doveva leggere, e far leggere attentamente al suo creato stesso, le opere del Tartaglia loro rivale? E notisi, che in quest'opera Tartaglia non fa menzione della risoluzione delle equazioni di 3.° grado, segno che fu stampata avanti lo scioglimento di esse, e per conseguenza avanti la risoluzione di quelle di 4.° grado. Anzi il metodo di Tartaglia, non pare egli il seme dell'idea generale del Newton, di completare i termini contenenti l'incognita sino ad una perfetta potenza?

Pagina 14. Insegna a *levar li rotti delle equazioni*. Gli esempi sono: $\frac{244}{4^2} = 12 + 6x$, $\frac{16}{2x} = \frac{40}{4^2 + x}$, $12x + \frac{15}{x^2} = 212x + 8$, $2x + \frac{10x}{3x^2} = 10 + \frac{15}{4x}$. Leva tali rotti colla moltiplica, all'uso odierno.

Pagina 15. Tratta del degradare, ovvero schifare delle equazioni, ed intende di quel caso, che l'incognita sta in tutti i termini, quali insegna a dividere tutti per la minima dignità dell'incognita medesima.

Pagina 16. Fa delle avvertenze sui capitoli irregolari, su quelli cioè che sono o insignificanti, come $12x = 12x$, proveniente dal problema di trovare due numeri, in ragione di $2:3$, e che il primo moltiplicato per 6 faccia tanto, quanto il secondo moltiplicato per 4; o impossibili, come $10x = 12x$, proveniente dal problema di due numeri nella stessa ragione di $2:3$, ma colla condizione, che il primo moltiplicato per 5, desse tanto, quanto il secondo per 4.

Dalla pagina 16 fino al fine, dà lo scioglimento di cinquantasei quesiti.

Nel secondo, si ha una regola generale per la somma dei numeri cubi 1. 8. 27. 64. 125 . . . . . sia n il numero de'termini, sarà la somma

$(n + 1)^2 \times \left(\frac{n}{2}\right)^2$. Così se $n = 4$, sarà la somma $=(5)^2 \times (2)^2 = 25 \times 4 = 100$.

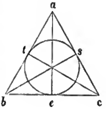
I quattro primi vertono sulla somma di varie progressioni aritmetiche, con varie differenze.

I quesiti quinto, fino al decimo quinto inclusive, sono sopra meriti e sconti, tra quali merita attenzione il decimo quarto, nel quale si cerca il tempo. Eccolo: « Uno piglia una casa a fitto per duc. 60 » all'anno con patto di dare al patron duc. 200 avanti che l'entri » dentro li quali duc. 200 si abbino poi a scontare nel fitto con utile » però de 5 per 100 all'anno e promette detto patrone lasciarlo stare » in casa sino che detti denari saranno del tutto scontati: si domanda » quanto tempo dovrà star lì dentro. »

Merita ducati 200, per un anno ducati 10, che aggiunti a 200 fanno 210, tra merito e capitale in fine del primo anno, dei quali abbattendone ducati 60, restano 150: e di nuovo a questi aggiugnendo la loro ventesima parte, per la ragione del 5 per 100, la quale è $7\frac{1}{2}$, farà in tutto $157\frac{1}{2}$, tra merito e capitale in fine del secondo anno, dei quali abbattendo 60, resterà $97\frac{1}{2}$, ed ancora a questi aggiugnendo la loro ventesima parte $4\frac{7}{8}$, farà in tutto $102\frac{3}{8}$ tra merito e capitale in fine del terzo anno, dai quali abbattendo 60 resta $42\frac{3}{8}$. Ora perchè si vede che più non può stare anno intero, poniamo che vi abbia a stare una parte x d'anno, nella quale il pagamento dovuto sarà $60x$, ed il merito di ducati $42\frac{3}{8}$ in essa, sarà $42\frac{3}{8} \times \frac{1}{20} \times x = 2\frac{19}{160}x$, e per la condizione del quesito, dovrà essere $42\frac{3}{8} + 2\frac{19}{160}x = 60x$, equazione di primo grado, e si troverà $x =$ giorni 267, ore $5\frac{669}{3087}$.

I problemi decimo sesto, sino al vigesimo primo, sono di compagnia. Il vigesimo secondo, sino al vigesimo quinto, sono di baratti, ed il vigesimo sesto, di compra e rivendita.

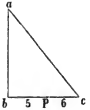
Gli altri trenta problemi sono geometrici assai eleganti, e con molta destrezza algebraicamente risolti, e le risoluzioni contengono delle belle equazioni tra i lati di una figura, e la sua area, tra i lati di una figura e i lati di altra ad essa iscritta o circoscritta, e tra i lati di due figure di specie diversa, eguali in superficie.



27. *Egli è un triangolo abc, che la base sua è 14, sopra la quale si posa uno cerchio a sesto, che il suo diametro è 8, e il punto del contatto è discosto dal b6: dimandasi la quantità degli altri due lati ab, ac*, $as = at = x$, $x^2 + 7x = 98$, $x = 7$, $bt = be$, $ba = bt + x = 6 + 7 = 13$, $ac = sc + as = ec + as = 8 + t = 15$.

28. *Ancor egli è il triangolo abc et in questo egli è iscritto un circolo che il suo diametro è* $\sqrt{30\frac{6}{11}}$ *dal centro del qual cerchio il qual è il ponto o, sono dedutte le tre linee os, ot, oe, perpendicolare agli tre lati di esso triangolo le qual cadono negli ponti nei quali il detto circolo tocca gli detti lati e il ponto del contatto e è discosto dal b2 si ricerca la quantità de gli altri duoi lati ab, ac,* $x^2 = 112 + 6x$.

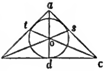
29. Il diametro del cerchio è 10, $be = 5$, $bc = 20$, il triangolo sarà rettangolo in b, $425 + x^2 + 10x = 225 + x^2 + 20x$, $200 = 20x$. *Da questo quesito ne può conseguire molti utilissimi documenti dei quali tre soli te ne voglio ponere per non esser prolixo il primo de'quali sarà che sempre a tuo beneplacito potrai trouare quanti triangoli ortogonii tu vorrai che haveranno tutti gli lati razionali in lunghezza senza che altramente siano tolti proporzionali a quello che uno di suoi lati è 3, l'altro 4, l'altro 5 il secondo sarà che sempre tu potrai trovar dui numeri che gli lor quadrati gionti insieme faranno numero quadrato, il tertio sarà che sempre tu potrai trovar dui numeri differenti l'uno dall'altro per quante unità ti piacerà che sottraendo il quadrato dell'uno fuor del quadrato dell' altro resterà ancor numero quadrato le qual cose sono molto necessarie in quest'arte.*



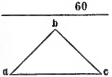
Esempio abbreviato. Si voglia trovare due numeri differenti l'uno dell'altro per la sola unità, e che sottraendo il quadrato del minore del quadrato del maggiore, resti quadrato: prendi bc = numero dispari, come 11, e dividi in 5, e 6, e sopra bc, costruisci il triangolo rettangolo bac, di cui i lati ab, ac sono ignoti. Pel quesito superiore poni $ab = 5 + x$, e il lato $ac = 6 + x$, sarà $146 + x^2 + 10x = 36 + x^2 + 12x$, $110 = 2x$, $55 = x$.

30. *Ancor egli è il triangolo ortogonio ABC del qual tutti i lati AB, AC, BC, gionti insieme fanno 60, e moltiplicando i duoi lati AB, AC, quali contengono l'angolo A retto di quello l'uno per l' altro et il prodotto di detta moltiplicazione ancora moltiplicato per la perpendicolare Ad dutta da esso angolo A retto al lato opposito fa tanto quanto il quadrato della summa de tutti gli lati di esso triangolo si dimanda la notizia de cadauno di essi lati separatamente e ancor quella della perpendicolare et etiam quella della superficie.* $BC = x$, $900 + x^2 = 61x$, $25 = x$, *perchè in questo loco aggiongendola essa radice sopra la detta meta del numero delle cose non fa lo effetto del nostro quesito .. imperocchè aggiongendola farebbe 36 per valuta della cosa, e tanto sarebbe il lato bc .. il che non può stare che un sol lato di esso triangolo sia 36 cioè più de gli altri dui restanti lati.*

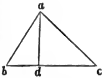
31. *item egli è il triangolo ortogonio abc, che la summa de tutti i suoi lati è 60 la perpendicolare del quale dutta dall' angolo a retto di quello al lato bc opposito moltiplicata nel diametro del cerchio inscrittibile a esso triangolo fa 60 si dimanda la notizia de'cadauno di essi lati*



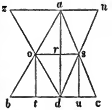
$bc = x$, $900 + x^2 = 60\frac{1}{2}x$, $x = 30\frac{1}{4} - \sqrt{15\frac{1}{16}}$. I due lati superano l'ipotenusa di tanto, quanto è il diametro del circolo inscrittibile, e ciò generalmente.



32. *Proposta una linea retta longa piedi 60 co la quale ci fa bisogno de scrivere un triangolo ortogonio di maggior superficie che possibil fia si domanda la notizia de cadauno de suoi lati* $ac=x$, $ab=bc$, $3600 = x^2 + 120x$, $x = -60 + \sqrt{7200}$ *prova l'Autore che per la massima area dev'esser* $ab=bc$ *sul principio che ogni volta che una linea retta sia divisa in due parti eguali e in due ineguali sempre i quadrati delle inequali gionti insieme sono maggiori di quelli delle due equali. E tanto più come essa linea sarà divisa in parti più inequali over più lontane dalla medietà tanto più sarà maggiore lo eccesso de ditti quadrati di esse parti inequali gionti insieme sopra quelli delle parti equali pur gionti insieme. Ma è ben vero che la superficie de l'una in l'altra delle parti inequali è sempre minore de quella che è contenuta sotto le parti equali le qual cose Euclide ci fa chiare e manifeste per gli antecedenti della* 41ª *del* 10° e 5ª *del* 2.°

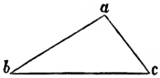


33. *Egli è il triangolo diversilatero abc che la sua base bc è* 20 *e la sua perpendicolare ad è* 12 *e gli dui restanti lati ab, ac insieme sono* 36 *si dimanda quanto sarà il lato del quadro che è equale a quella differentia nella quale il quadrato del maggior de detti dui restanti lati ab, ac eccede over sopravancia quello del minore. Sia questo ab e si faccia* $= x$, $228\frac{2}{7} + x^2 = 36x$.



34. *Ancor egli è il triangolo diversilatero abc del quale il lato ab è* 13, *il bc* 14, *e lo ac* 15 *si domanda quanto sarà il lato del maggior quadro che in quello si può collocare. os lato del quadro* $= x$. *Proporzione* $bc(14) : x :: ad(12) : ar(ad-x)$. *La perpendicolare ad si trova colla* 13 *del* 2° *di Euclide*, $x = 6\frac{6}{13}$. *L'autore dimostra la verità della soluzione anche geometricamente coi triangoli simili adc, suc, cd, adb, bto.* Il triangolo *dzn* è aggiunto, per descrivere geometricamente il quadro. *zn* è perpendicolare alla *da*, e si mostra ad essa eguale; di più sta tutta essa linea *zn* alla sua minor parte, come la base *bc* alla sua minore, e la minor parte di *zn*, si prende dalla stessa banda, ove è la minore della base; poi dai punti *z*, *n*, si tirano al *d* le rette *zd*, *nd*, che daranno il lato del quadro *os*. Adatta ancora l'Autore la soluzione, e la descrizione al triangolo equilatero. Ad esperimentare poi che il quadro *ostu*, descritto sulla base *bc*, sia il massimo, trova le equazioni del lato del quadro, prendendo per base *ad*, poi *ab*, e trova per tali supposti, le perpendicolari $11\frac{1}{5}$, $12\frac{12}{13}$ e il lato del quadro ri-

spettivamente $6\,\frac{54}{131}$, $6\,\frac{162}{337}$, onde esso, quest'ultimo, maggiore degli altri due: conclude doversi prendere per base il minor lato.

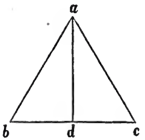


35. *Ancor egli è il triangolo abc che ha tutti i suoi lati proporzionali in la continua proporzionalità sesquialtera e la sua area è 175 si dimanda quanto è cadaun di predetti suoi lati.*

Il minor lato $= 8x$, il medio $= 12x$, il maggiore $= 18x$, e secondo il nuovo teorema dell'Autore, sull'area trovata pei lati $x^2 = 20\,\frac{195}{209}$, $x = \sqrt{20\,\frac{195}{209}}$.

36. *Ancor egli è il triangolo abc che la sua base bc è 20 e il lato ac è 30 e la sua area è 200 si domanda la notizia del lato ab. Posto ab=x per la 12ª del 2° di Euclide si trovi la perpendicolare per i lati, ed essendo essa pure* $= \frac{200}{10}$ *si ha l' equaz.* $890000 + x^4 = 2600x^2$,

$$x = \sqrt{650 + \sqrt{222500}} - \sqrt{650 - \sqrt{222500}}.$$



37. *Preterea egli è il triangolo equilatero abc che la sua superficie è uguale alla quantità con la quale vien nominato uno de' suoi lati si domanda la notizia di essa superficie.* Sia il lato $= x$, $bd = \frac{1}{2}x$

$$\sqrt{\frac{3}{4}x^2} = ad,\ \sqrt{\frac{3}{16}x^4} = x,\ \frac{3}{16}x^4 = x^2,\ \frac{3}{16}x^2 = 1,\ x = \sqrt{\frac{16}{3}}\sqrt{5\,\frac{1}{3}}.$$

38. *Ancor egli è il triangolo equilatero abc che la sua superficie è eguale alla sua perpendicolare si dimanda la quantità di essa superficie* $\sqrt{\frac{3}{16}x^4} = \sqrt{\frac{3}{4}x^2}$.

39. *Ancor egli è il triangolo equilatero abc che la sua superficie è eguale alla summa dei suoi lati si dimanda la quantità di essa superficie e de ciascuno de'predetti lati* $\sqrt{\frac{3}{16}x^4} = 3x$.

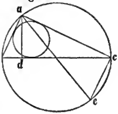
40. *Ancor egli è il triangolo equilatero abc che la sua superficie è eguale al quadrato de' suoi lati meno 4 si dimanda la quantità di essa superficie* $\sqrt{\frac{3}{16}x^4} = x^2 - 4$.

41. *Ancor egli è il triangolo equilatero abc che la sua superficie multiplicata per 12 è eguale alla summa di quadrati di tutti tre i suoi lati più 10 si dimanda la quantità di essa superficie e di ciascuno di essi lati* $\sqrt{\frac{3}{16}x^4} \times 12 = 3x^2 + 10$.

42. *Egli è il triangolo abc al quale gli è inscritto dentro un cerchio e un altro gli ne è circoscritto di fuori, il diametro dello iscritto è*

8 *e quello del circoscritto è* 25 *e il prodotto del dutto del lato ab nel lato ac è* 300 *si dimanda la notizia de ciascun lato di esso triangolo ed ancor dell'area sua.* ae diametro del cerchio grande, ad perpendicolare su bc. $bc = x$ proporzione $\frac{1}{2}$ diametro del circolo iscritto $=4$: $\frac{1}{2} ad = 6 :: bc = x$: alla metà di tutti i lati $= \frac{3}{2} x$, $ab + ac = 2x - x = 2x$, $ab \times ac = 300$.

Figura 1ª.



Proporzione prima. Per essere nella prima figurazione equiangoli, e simili i triangoli abd, aec; nella seconda adc, abe; e nella terza $ab = ad$, $ac = ae : ab : ae : ad : ac$; onde $ab \times ac = ae \times ad$.

Proporzione seconda. $\frac{1}{2}$ diametro del cerchio iscritto $= 4 \times \frac{1}{2}$ somma dei lati del triangolo $=$ sua superficie, e parimenti $\frac{1}{2}$ perpendicolare $= \frac{1}{2} ad \times$base $(=x)$ $=$ sua superficie; onde $4 : \frac{1}{2} ad\ (=8) :: x\ (= bc)$: metà dei lati $= \frac{3}{2} x$, $ab + ac = 3x - x = 2x$, $ab \times ac = 300$:

Figura 2.ª

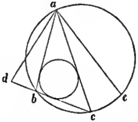
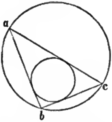
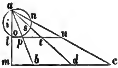


Figura 3.ª

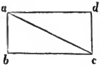


43. *Egli è il triangolo abc del quale il lato ab* = 30 co, *ac* = 40 *e la base bc* = 20 *e dal ponto ae condotta alla detta base bc la linea ad la quale divide essa base in due parti eguali in ponto d, e faccio un cerchio di tal qualità che il lato del pentagono a esso medesimo cerchio iscritto è* 20 *o la circonferenzia di esso cerchio transisse per il dato ponto a segando le tre linee ab, ac, ad talmente che quello che è contenuto sotto tutta la ab e quella sua parte ao che rinchiude dentro di se il detto cerchio e ancor quello che è contenuto sotto tutta la ac e quella sua parte an che rinchiude pur dentro di se il medesimo cerchio ambi dui questi prodotti aggionti insieme sono doppi a quello che è prodotto da tutta la ad in quella sua parte as che ancor rinchiude dentro di se il medesimo cerchio si dimanda quanto cade lontano il centro di detto cerchio a cadauno degli tre ponti b, d, c, et etiam quanto saranno*



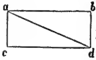
cadauna delle parti ao, as, an *di esse tre linee* ab, ad, ac. *Le qual parti rinchiude over taglia dentro di se il cerchio.*

Il centro del cerchio deve essere nella perpendicolare, come in i, e in qualunque punto sia sempre $ab \times ao + ac \times an = 2ad \times as$. Poichè $al^2 + lp^2 = ap^2 = ap \times ao + ap \times op = ap \times ao + lp^2$; onde $al^2 = ap \times ao$, $ap : al : ao$; di più $bp : ap :: ml : al$, $bp : ml :: ap : al$, $ab : am :: ap : al :: al : ao$, $ab \times ao = al \times am$. Similmente $ad \times as = al \times am$, $ac \times an = al \times am$; dunque $ab \times ao + ac \times an = 2ad \times as$. Ma il diametro del cerchio è determinato dall'altra condizione, che il lato del pentagono iscritto, gli sia 10. Sia dunque esso diametro $al = x$, e per la 12ª del 12° di Euclide, sarà $\frac{5}{8}x - \sqrt{\frac{5}{8}x \times \frac{1}{8}x} = \frac{5}{8}x - \sqrt{\frac{5}{54}x^2}$ = alla saetta del pentagono, e per la penultima del 1°, 3ª del 2°, e 35ª del 3°, $\frac{5}{8}x^2 - x\sqrt{\frac{5}{64}x^2}$ = quadrato del lato del pentagono $= 100$ per la 12ª del 2°, si trovino am, ad, e si avranno anche le quantità ao, as, an; e per fine trovata im per mezzo delle mb, md, mc, si troveranno le distanze ib, id, ic. . . . .

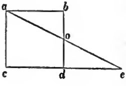


44. *Egli è un quadrilatero rettangolo pae longiore abc che la summa de tutti quatro e suoi lati et etiam dil suo diametro fanno* $164\frac{1}{2}$, *e la sua superficie è* 735 *si dimanda la notizia di ciascun lato et ancor del diametro* $ab + bc = x$, $ac = 164\frac{1}{2} - 2x\,(164\frac{1}{2} - 2x)^2 + 2ab \times bc = (ab + bc)^2$, cioè $(164\frac{1}{2} - 2x)^2 + 1470 = x^2$: trovato $x = ab + bc$, coll'altra equazione $ab \times bc = 735$, si troveranno i valori di ab, bc .....

45. *Ancor egli è un altro parallelogrammo rettangolo parte altera longiore abc dil quale tutti e suoi lati aggionti insieme con il suo diametro sono* 150, *e l' area sua è* 600 *si dimanda quanto è cadauno di essi lati separatamente ed ancor quanto è il diametro.* Come sopra.

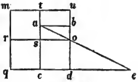


46. *Item egli è un quadrangolo rettangolo abcd del quale la longhezza ab è* 8 *più che la larghezza ac e la sua aerea con il diametro ad è* 120 *addimandasi quanta è la longhezza e larghezza sua. Chi ponesse larghezza* $= x$, *necessariamente la longhezza sarebbe* $x+8$ *e procedendo per questa via si verrebbe a capitolo tanto alto che per le cose dette e dichiarite sinora non si saprebbe porre in luce . . . ponendo la ditta larghezza* $= x - 4$ *sarà larghezza* $x + 4$, *e superficie* $= x^2 - 16$ $(x - 4)^2 + (x + 4)^2 = ad^2$, $x^2 - 16 + \sqrt{(x - 4)^2 + (x + 4)^2} = 120$, $18464 + x^4 = 274x^2$.



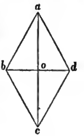
47. *Ancor egli è un quadro abcd che è* 20 *per ciascun suo lato e l'angolo bacd di quello è diviso in due tal parti dalla linea ao (protratta in continuo e diretto e seguente il lato bd di esso quadro sin che concorra con il lato cd dil medesimo quadro etiam lui allungato dalla medesima parte) che costituisce il triangolo ode di fuori di detto quadro eguale a esso quadro, si addimanda notizia della linea ac ed ancor di*

cadaun di lati del triangolo ode. $do = x$, $50 = 20 - x$, $20 - x : x :: 20 : \frac{20x}{20-x} = de$, $oe = \sqrt{x^2 + \left(\frac{20x}{20-x}\right)^2} \, x \times \frac{20x}{20-x} = 800$ doppio del quadro. Alla risoluzione algebraica, aggiugne l'Autore la costruzione geometrica contenuta nella figura seguente, dove du è potenzialmente tripla di ab, $uo = ab$, $de = du + bd$.



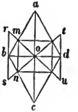
48. *Egli è una superficie de' quattro lati eguali equidistanti abcd la qual non è rettangola anzi ha gli angoli contrapposti a, c acuti e gli altri dui b, d ottusi la qual superficie è detta helmuayn over rombo ed è per ciascun suo lato 20 e il diametro ac di quella più longo dell'altro bd 4: si dimanda la quantità dell'area superficiale.* $b0 = x$, $ao = x + 2$, $2x^2 + 4x =$ area superficiale, $x^2 + (x + 2)^2 = ab^2 = 400$.

49. *Ancor egli è un altra superficie rombica abcd che per ciascuna faccia è 12 e l'area sua superficiale è 96 si dimanda la quantità de suoi diam. ac, bd* $b0 = x$, $ao = \sqrt{12^2 - x^2}$, $2x\sqrt{12^2 - x^2} = 96$.

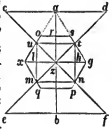


50. *Ancor egli è una superficie rombica abcd che tutti e suoi lati e diametri acbd in summa fanno 140 e la sua superficie è 220 si dimanda la notizia de cadaun lato ed ancor de cadaun diametro separatamente.* $ab = x$, *tutti i lati* $= 4x$, *i due diametri* $ac + bd = 140 - 4x$, $\frac{1}{2}(ac + bd) = 70 - 2x$, $x^2 + 20, b0 \times ac = x^2 + 220 = (70 - 2x)^2$.

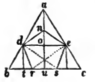
51. *Ancor egli è un altra figura rombica abcd che tutti e suoi quatro lati et etiam gli due diametri insieme aggionti fanno 68, e la sua superficie è 96 dentro della qual gli è collocato un quadro perfetto: si dimanda quanto è ciascun suo lato di esso quadro perfetto.* I lati e diametri si trovano come sopra; il lato del quadro perfetto, si trova dall'Autore col metodo del problema 34, considerando il mezzo quadrato, che sta iscritto nel triangolo *abc*. La sola differenza sarà, che per avere la porzione dell' altezza *br* tra il lato del quadrato, e la sommità *r*, invece di sottrarre dall' altezza tutto il lato del quadrato, come là si faceva, si sottrarrà solo la metà. Si potrebbe anche trovare la metà del lato del quadrato nel triangolo *abo*, colle formole precise del problema 34. Per la costruzione geometrica, si alzino sulle estremità di uno dei due diametri, come *bd*, quattro perpendicolari *dt, du, bs, br* eguali tra loro, ed alla metà di esso diametro, e le estremità di tali perpendicolari, si uniscano in croce colle rette *ru, ts*, dette dall'Autore *hyppotumisse*, e queste incontrando i lati del rombo, segneranno i vertici del quadrato.



52. *Egli è lo esagono oxq, pgs equilatero exquiangolo nel quale gli è collocato il quadro umnt si dimanda quanto è cadaun lato di esso quadro essendo de quelli del detto esagono* 8. Si considerino prolungati i lati dell'esagono *xo, gs*, in *a*, resterà il mezzo quadrato *ulht* inscritto nel triangolo *xag* per la 15ª del 4° di Euclide, sarà $xg = 2es$, $xz = or$: questo basta per trovare *xa, az* etc. come problema 51, 34.

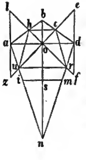


53. *Egli è il triangolo equilatero abc nel quale è collocato il pen-*



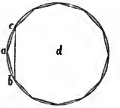
tagono equilatero ed equiangolo ndrse talmente che uno de'suoi lati sta e giace nella base bc dil detto triangolo e dui de suoi angoli dil detto pentagono tocca gli altri dui lati ab, ac dil medesimo triangolo et esso pentagono è 10 per cadauna sua faccia si dimanda quanto è cadaun lato di predetto triangolo. Intendendo al pentagono circoscritto un cerchio, e tirate due linee *ds*, *er*, gli angoli da esse formate alla circonferenza risultando eguali, dimostreranno *de* parallela alla *bc*, e perciò il triangolo *ade* simile *abc*, ed ancora esso equilatero. Per la 4ª, ed 11ª del 13° di Euclide, si ha $de = dn +$ la maggior parte di dn divisa in media ed estrema ragione, cioè ponendo essa maggior parte $= xsurdle = ln + x = dn + \left(\frac{-1}{2}dn + \sqrt{\frac{5}{4}}\right)dr = \frac{1}{2}dn + \sqrt{\frac{5}{4}dn^2}$. Le perpendicolari *tre*, *ao* cadendo ambedue per la natura del pentagono regolare, e del triangolo equilatero, sul mezzo di *de* coincidono, e considerando dal punto *n* condotto un diametro del cerchio circoscritto al pentagono, questo taglierebbe per mezzo *de* in *o*, *rs* in *u*; dunque ancora esso confondesi con *anou*, e non solo *bc* è divisa per metà in *u*, ma anche *rs*; onde condotta la perpendicolare *dt*, essendo $do = \frac{1}{2}de = tu$, sarà $tr = \frac{1}{2}de - ru = \frac{1}{2}de - \frac{1}{2}rs$; dal qual valore e da *dr*, si troverà *dt*, e però *ou*. Ma per essere *ade* equilatero $da^2 : ao^2 :: 4 : 3$, $ao = \sqrt{\frac{3}{4}da^2} = \sqrt{\frac{3}{4}de^2}$; dunque $ao + ou = au$ sarà nota; e quindi $ab = \sqrt{\frac{4}{3}du^2}$, oppure nota *au*, facendo $ao : au :: da : ab$.

54. *Egli è il triangolo equilatero abc nel qual è collocato il pentagono equilatero ndtae talmente che uno di suoi lati sta e giace su la base bc e dui de' suoi angoli toccano gli altri dui lati ab, ac si dimanda quanto è ciascun lato del detto pentagono essendo cadauno de quelli del triangolo 20. Chi volesse per via retta pervenire in cognizione de'lati del pentagono cioè procedendo per la regola dell' Algebra o vogliam dire della cosa si condurrebbe a capitolo tanto alto che poi non si potrebbe per le cose sin ora dette trarlo in luce, e però per non incorrere in tal inconveniente ci fa bisogno che per via di proporzioni veniamo a conseguire il nostro desiderio.* L' artificio indiretto è questo. Lato del triangolo equilatero, sopra trovato al lato 10 del suo pentagono iscritto, come lato del triangolo qui dato 20, al lato del suo pentagono, che si troverà tra 7 ed 8.



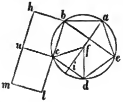
55. *Egli è il pentagono equilatero ed equiangolo aimdb nel quale gli è collocato il quadro hurc si dimanda quanto è cadaun lato di esso quadro essendo cadaun di quelli del pentagono* $\sqrt{(500)} - 10$. Primo: Si faccia $ad = x$, e per la 11ª del 13° di Euclide, sarà $-\frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{5}{4}x^2} = \sqrt{(500)} - 10$, $x = 20$. Secondo: Si prolunghi *bo* in *n*, tagliando

per metà *imins*, e le *ai*, *dm* concorreranno pure in *n*. Terzo: Per la 32ª del 1° di Euclide, l'angolo *b* del pentagono $= \frac{6}{5}$ del retto $= \frac{6}{5}$ 90; onde $dab = adb = \frac{2}{5} 90$, $nad = nda = \frac{4}{5} 90$, $na = nd$, $in = mn$, $n = \frac{2}{5} 90$; dunque fatto centro in *n*, e descritto un cerchio per *i*, *m*, sarà *im* lato d'un decagono ad esso cerchio iscritto, il qual lato sarà per la 3ª del 14° di Euclide. La maggior parte del raggio *ni* diviso in media ed estrema ragione, ma anche rispetto alla *ad*, conviene all' *im*, siccome lato del pentagono, la stessa proprietà; dunque $in = nm = ad = 20$, ed $an = nd = 10 + \sqrt{500}$. Da queste cose si troverà *no*, *ob*, *nb*; e per fine nei due triangoli *abn*, *bdn*, il lato del quadro pei problemi 34, 51, e si troverà poco più di 13, dico tredici. Per la costruzione geometrica, si tirino *lz*, *ef*, perpendicolari, ed eguali alla *ad*, e divise in modo, che $lz : az :: bn : on$, $fe : dz :: bn : on$ tra due punti *lz*, *fe*, si tirino al punto *o* quattro rette, che segneranno *k*, *u*, *r*, *t*.



56. *Egli è una superficie de 12 lati eguali alla quale egli è circoscritto il cerchio abc il cui diametro è 16 e il suo centro è il ponto d: et io vorrei fare un pentagono equilatero ed equiangolo che la sua superficie fosse eguale a quella della detta figura di 12 lati.* Per la 8ª del 14° di Euclide, essendo la superficie d'ogni figura equilatera ed equiangola uguale al prodotto della corda dell'angolo di essa figura in tanti ottavi del diametro circoscritto, quanti sono i di lei lati, ed essendo nel caso nostro bc = lato di esagono $= \frac{1}{2}$ diametro $= 8$, sarà la superficie della detta figura di 12 lati $= 8 \times \frac{12}{8}$ di $16 = 8 \times 24 = 192$. Si faccia un altro cerchio di 16 di diametro, dentro il quale sia iscritto il pentagono regolare *abcde*, un lato del quale è tagliato per metà in *i* dal diametro *ag*, che pure taglia per metà in *o*, la sottesa *bc*. Sarà $ao = \frac{5}{8} ag - \sqrt{\frac{5}{8} ag \times \frac{1}{8} ag} = \frac{5}{8} ag - \sqrt{\frac{5}{64} ag^2}$; e per la 35ª del 3°, e 3ª del 2°: $ao \times ag = ae^2$, ed $ae = \sqrt{ao \times ag}$. Di più $fi = \sqrt{(fd^2 - id^2)} = \sqrt{\left(\frac{1}{4} ag^2 - \frac{1}{4} ae^2\right)} = \sqrt{\left(64 - \frac{1}{4} ae^2\right)}$, e la superficie del pentagono $= ae \times 2\frac{1}{2} fi = \sqrt{ao \times ag} \times 2\frac{1}{2} \sqrt{\left(64 - \frac{1}{4} ae^2\right)}$. Si tiri *bh* perpendicolare alla $bc = ae$, di modo che $bh = 2\frac{1}{2} fi$, e formato il rettangolo *bhcu*, sarà questo eguale alla superficie pentagonica. Sulla stessa *cu*, sia costituito il rettangolo *culm* = superficie della figura di 12 lati = 192. Si prenda per fine una media proporzionale tra le due *bc*, *cl*, la quale sia *x*, sarà questa il lato del pentagono; poichè $bc^2 : x^2 :: bc : l$ :: rettangolo *bhuc* : rettangolo *cuml*, come pentagono *abcde* : figura di 12 lati. Ma come $bc^2 : x^2$; così il pentagono sopra *hc* al pentagono

sopra x; dunque come pentagono sopra bc, a pentagono sopra x; così pentagono $abcde$: figura di 12 lati; onde essendo pentagono sopra bc, il pentagono appunto $abcde$, sarà il pentagono sopra x, equivalente alla figura data di 12 lati.



Parte seconda, Lib. 7°, pagina 109.

Per trovare quanti numeri semplici si voglia in continua proporzionabtà in qualsivoglia data proporzione e li minimi per numeri semplici si deble intendere secondo la consideration matematica delli quali le loro unità dono indivisibili sia prima trovato li duoi termini minimi in quella data prosiorzione per il modo dato nella precedente li quali pongo che sieno questi due 3 a 2 la qual proporzione come vedi è sesqui altera e per abbreviar parole chiameremo over signaremo il primo per a, ed il secondo per b come vedi (*) *in margine fatto questo moltiplicaremo il primo cioè e in se medesimo farà 9 qual signaremo per c poi moltiplicaremo a in b cioè 3 fia 2 farà 6 qual signaremo per d consequentemente dietro al c come in margine vedi da poi moltiplicaremo 2 in se medesimo farà 4 e questo lo poneremo consequentemente dietro al d, e lo signaremo per e come vedi, e così fina hora abbiamo trovato tre numeri continui proporzionali i quali sono c, d, e nella detta proporzione del a alb cioè da 3 a 2 che è sesquialtera, e se ne vorremo mo ritrovar quatro pur continui proporzionali nella detta proporzione del a al b sia anchor dutto o vuoi dir moltiplicato a, cioè il 3 contro ciascuno di tre c, d, e, e sia li tre prodotti f, g, h e fatto questo sia multiplicato b fia c, e ne pervenga d cioè 8 e così haveremo li quatro numeri f, g, h, k continui proporzionali li quali in questo caso saranno 27, 18, 12, 8, e così con questi quatro termini tu ne potresti trovar 5 e per li 5 tu ne potresti trovar 6, e così procedendo in infinito moltiplicando sempre a fia tutti li trovati e il b nell'ultimo delli*

(*) Ciò che si legge nella presente pagina 312 (lin. 13—20) dalle parole *in margine fatto* fino alle parole *nella detta proporzione*, forma le linee 9ª—16ª della carta 212, *verso*, della Cartella terza dei manoscritti del P. Cossali. Uno spazio interamente bianco trovasi presso a queste otto linee nella suddetta Cartella terza, precisamente come nelle linee 13ª—20ª della presente pagina. Questo spazio sembra destinato a contenere la figura indicata colle parole *come vedi in margine* (Vedi le linee duodecima e decimaterza della presente pagina 312), e *come in margine vedi* (Vedi la linea decimasesta della presente pagina 312).

trovati, e così sempre tu andarai crescendo un termine di più delli primi trovati e bisogna notar che se li duoi primi cioè a, e b saranno li minimi in tal proporzione anchora tutti quelli che si troveranno saranno li minimi in quel numero di termini che si trovaranno cioè li tre termini cioè c, d, e saranno li minimi di tutti gli altri tre termini continui proporzionali in tal specie di proporzione, e così li 4 di tutti li 4, e li 5 di tutti li 5 etc. e tutto questo dimostra speculativamente Euclide nella 2ª del 8° perchè li loro estremi di tai numeri continui proporzionali si trovaranno sempre esser contra se primi ed ogni volta che gli estremi di quanti voglia numeri continui proporzionali saranno contra se primi quelli saranno sempre li minimi di tal numero di termini continui proporzionali in tale specie di proporzioni, e tutto questo dimostra specolativamente Euclide nella 1ª del 8°.

Anchora bisogna notare che ogni tre numeri continui proporzionali minimi secondo tal continua proporzionatità sempre gli estremi saranno numeri quadrati ed in ogni specie di proporzioni come che anchora puoi vedere nelli sopra scritti c, d, e di sopra trovati che c è 9 ed e 4 li quali 9, e 4 sono numeri quadrati. E così di ogni quatro numeri di continua proporzionalità (che siano li minimi) gli estremi convien esser numeri cubi e tutto questo si manifesta per la operazione che si usa in trovarli. E così di ogni 5 termini di continua proporzionalità (minimi) di duoi estremi è necessario esser quadrati di quadrati detti anchora censi di censi. E così di ogni 6 termini gli estremi è necessario esser primi relati. E così di ogni 7 gli estremi saranno numeri quadricubi over cubiquadri (che è quel medesimo, e così andaranno procedendo secondo l'ordine di quelli numeri narrati nella 3ª del primo capo del secondo libro over nel fine del detto secondo libro. Nel fine del 2° vi è il triangolo.

Parte seconda, Lib. 1°. pagina 3 e seg. Le regole circa le progressioni Aritmetica, e Geometrica sono:

R. G. Sommare tutte le specie di Progressioni Aritmetiche, principianti dall'unità.

R. G. Sommare tutte quelle, non principianti dall'unità.

R. G. Trovare il numero de'termini, dato il numero ascendente, il primo, ed ultimo termine.

R. G. Trovare il numero ascendente, dato il numero determinante il primo, ed ultimo.

R. G. Trovare l'ultimo termine di una Progressione Aritmetica, ascendente pel numero in che principia, dato il numero de'termini, e reciprocamente.

Progressione Geometrica.

R. G. Sommare qualunque progressione Geometrica, dato il primo, ed ultimo termine, e il denominatore.

Di alcune Progressioni straordinarie.

Vedi sopra a suo luogo.

Di certi casi che sono solubili per le regole delle Progressioni.

Due si partono da un medesimo luogo, per un medesimo verso: il primo fa continuamente miglia m al giorno, cioè in ore 24; il secondo lo seguita, secondo l'ordine di una qualunque progressione aritmetica a, $a + d \ldots a + \overline{n - 1}d$: si dimanda, in quanti giorni il secondo avrà raggiunto il primo. Questo è il compendio degli 8 problemi primi.

L'Autore pianta le soluzioni su questo principio, che i termini della progressione del viaggio del secondo, devono essere tanti, che la somma del primo ed ultimo termine sia $2m$, cioè il doppio del viaggio del primo. Difatti, posto il cercato numero di giorni $= x$, e l'ultimo termine della progressione $a + \overline{x-1}d = z$, dovendo essere al momento del raggiugnimento eguale il viaggio dei due, sarà $m \times x = \overline{a+x} \times \frac{x}{2} = \frac{a+z}{2} \times x$; onde $m = \frac{a+z}{2}$, $2m = a + z$; e quindi $2m - a = z = a + \overline{x - 1}d$, $2m - 2a = \overline{x-1}d \; \frac{2m-2a}{d} = x - 1, (2m-2a)$: $d + 1 = x$. Posto però ad esempio $m = 17$, $a = 4$, $d = 3$; da che risulta $x = (34 - 8) : 3 + 1 = 9\frac{2}{3}$, egregiamente riflette, non essere vero questo risultato, perchè in giorni $9\frac{2}{3}$, il viaggio del primo sarebbe $9\frac{2}{3} \times 17 = 164\frac{1}{3}$, e quello del secondo in giorni $9 = 144$ in $\frac{2}{3}$ del giorno decimo $= \frac{2}{3}$ di $31 = 20\frac{2}{3}$, in tutto $164\frac{2}{3}$; e similmente avverrà ogni qual volta x proviene rotto; onde, a rimedio, prescrive che si faccia conto del viaggio dei due uomini in 9 giorni, che sarebbe 193 pel primo, 144 pel secondo, onde quello resterebbe avanti miglia 9, e computando i viaggi del decimo giorno, essendo quello del primo 17, e quello del secondo trovandosi 31, il secondo nel decimo giorno, verrebbe a fare 14 miglia più del primo, ma per pareggiarsi, basta che ne faccia 9 di più; dunque dicendo 14: 1 :: 9 : $\frac{9}{14}$, sarà $9\frac{9}{14}$ il giusto valore di x: e di fatti in $9\frac{9}{14}$ giorni, il viaggio d'ambedue si troverà di miglia $163\frac{13}{14}$.

Se s è la somma di numero n termini della progressione 1. 2. 4. 8 . . ., sarà $(s + 1)^2 - 1$ la somma di numero $2n$.

Duplicare un granello di formento tante volte, quanti sono gli scacchi, cioè 64. Somma 18446744073709551615.

Accrescere i grani sugli scacchi, ponendo sempre sul seguente la doppia somma degli antecedenti tutti.

Insegna l'Autore, che, se s è la somma di n scacchi, s^2 sarà la somma di $2n - 1$ scacchi. Così la somma di 2 scacchi è 3, e 9 è la somma di 3, ed essendo 9 somma di 3, 81 è somma di 5, cioè di 1. 2. 6. 18. 54, e così di seguito; onde pei 64 scacchi s = 1,144561,273430,837494,885949,696427. Nota che trovando ordinatamente le s, si caderebbe sul 65 scacco, nel quale raddoppiandosi la somma dei 64, sarebbe per conseguenza la s dei 65 scacchi tripla della s di 64.

Il modo, onde calcola, in quanti modi 10 persone si possono sedere ad una tavola, è affatto simile al nostro.

Segue il calcolo dei getti dei dati: del quale vedi sopra.

Fra Luca, Trattato Geometrico, Distinzione prima, Cap. 7°, §. ultimo, ha il teorema attribuito a Tartaglia, e al Cap. 8°, § .... (*) ha la stessa dimostrazione, e la stessa figura colle lettere stesse, e tutto fu copiato a parola per parola da Tartaglia.

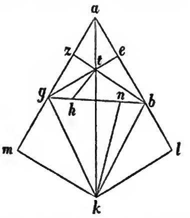


Figura pel teorema sulle aree del triangolo, noti i soli lati. Parte quarta, Lib. 1°, pagina 7.

(*) Il numero del (§) indicato con punti nella linea 13 di questa pagina 315, non trovasi nel manoscritto originale del P. Cossali

LEZIONI SULL'ARITMETICA

Quel piacere, che, raccomandato a fertil terreno eletto seme, prova industre agricoltore in osservando lo spuntare del germoglio, il sorgere ed ingrossar della pianta, l'uscire ed estendersi de' rami, il comparire, l'aprirsi, il fecondarsi de'fiori, il formarsi e maturar delle frutta, avviene, che senta del pari un amatore di qualunque scienza nel rimontar alla sua origine, nel contemplarne nella prima invenzione i principj, nell' ordinatamente discendere per la serie de' valent' uomini, che la coltivarono, e nel seguirne nelle opere loro gli sviluppi, i rischiaramenti, i progressi. Al diletto, una moltiplice utilità si accoppia. Giova primieramente risalire alla prima instituzione di certe regole, per giustamente intenderne i limiti, oltra dovere talvolta protesi, od all'opposto troppo ristretti nel succeder de' tempi, e per a fondo penetrarne quella intrinseca ragione metafisica, dalla quale gl' inventori sogliono essere guidati, e che spesso tra gli sforzati vincoli dei compilatori si oscura, o si cangia in altra, se pure squisita ed ingegnosa più, meno però persuasiva, posciacchè meno immediata. Giova in secondo luogo il vedere l' ordine, onde da una verità ne andò successivamente, e grado grado un'altra pullulando, per chiaramente comprendere la naturale loro dipendenza, e concatenazione, e per rilevare più in generale l' indole dell'umano spirito, ed il tenore, col quale nelle sue cognizioni si avanza. E giova per terzo il distinguere il merito di ciaschedun autore, e di ciascheduna nazione nelle diverse scienze, sì per quell'utile stimolo, che la patria gloria imprime, e sì pel più ampio oggetto di misurare l'influenza del clima, del governo, e di altre fisiche, e morali cause sull'acume, e sull' esercizio dell' ingegno. Tanto piacere e giovamento cotanto, i motivi, ed i sostegni furono del paziente studio, che al coltivamento delle matematiche teorie, io ho sempre aggiunto sulla storia loro. E tal piacere, tal giovamento io vengo, Giovani valorosi, quest' oggi a partecipare a Voi, coll' intraprendere un corso di lezioni storiche-metafisiche sulle Matematiche, e primieramente sull' Aritmetica.

Lezione I.

Della natura dell'Aritmetica in generale, e di quella oggidì praticata in particolare.

La natura con gl' intervalli, e colla varietà distingue, e fa molte le cose, ed a noi le presenta numerabili. L'arte arbitrariamente istituisce il modo di enumerare. Noi siamo accostumati ad enumerare di questa guisa: uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove, dieci, undici: dove ripigliamo dall'unità, aggiugnendola al dieci, e così via via proseguiamo, aggiugnendo ad esso dieci, il due, il tre, ecc. sino alle due decine, le quali unite sotto il nome di 20, di nuovo ritorniamo all' unità, ed al corso per due volte già fatto, ed in simil modo procediamo all'infinito, decina sopra decina, con perpetuo periodo accumulando. Questo decinale periodo è ciò, per cui la comune maniera di enumerare, l'usata aritmetica, *Decadica* si appella. Tale periodo è un arbitrio, ed in natura nulla vi ha, che necessariamente lo voglia. Si potrebbe ugualmente, che il dieci, prendere per periodo qualunque numero di esso minore, il due benanche, dicendo quindi un-due il tre, due-due il quattro, tre-due il cinque ecc., e prendere parimenti si potrebbe un numero del dieci maggiore, per esempio l'undici, dando a questo un nuovo nome, quale, a torglierlo da greca dinotazione, sarebbe *Lamda*, donde conseguentemente il dodici direbbesi *un-lamda*, il tredici *due-lamda*, il quattordici *tre-lamda* ecc. Tutte però le nazioni convenute sono nello scegliere a base della enumerazione il periodo del dieci; dal che appalesasi, che, se in natura nulla vi ha, che necessariamente lo addimandi, a tutte però le nazioni, si è in natura presentata una ragione ovvia, suggerente la scelta. E quale fu essa? Altra non se ne saprebbe assegnare, che quella delle dieci dita, delle quali l' uomo è nelle sue mani fornito, e sulle quali i primi uomini, come i nostri idioti, avranno incominciato a conteggiare. Le diverse specie moltissime degli abitatori de' pianeti, e forse ancora dei soli, avranno altrettanti diversi periodi di enumerazione, altrettante aritmetiche diverse. Ma per stare tra noi, il Leibniz prese amore per l'aritmetica Binaria o Diadica, cioè avente a periodo il due: ad essa volse il moltiplice suo ingegno per dimostrarla in singolar modo acconcia ad investigare le proprietà de'numeri; ed il Dangicourt, una lunga Memoria ne lavorò, inserita nel Tomo primo delle Miscellanee di Berlino. La troppa ristrettezza però del periodo, importerebbe troppo moltiplicata replica di esso, e perciò incomodo troppo grande nella espressione de'grandi numeri. Lo stesso, a proporzione, dire si deve dell'Aritmetica *Tetratica*, o del periodo di quattro numeri formata, sulla quale Erardo Weigel compose un trattato. Il periodo decadico, universalmente praticato, è in tali limiti di non essere nè troppo breve, nè troppo lungo. Il difetto, di cui accusare si può, quello è di non avere, che due divisori perfetti, il due, ed il cinque. Il periodo di dodici, poco più lungo, ne avrebbe quattro, il due, il tre, il quattro, il sei. Per questa maggior copia di perfetti divisori, il periodo del dodici, è stato nel commercio eletto alla gradazione delle misure, e de'pesi. Ma tale periodo, siccome non si confà col periodo decinale di enumerazione in ogni luogo, ed in ogni tempo usato, così molto meno si confà coll'indole del sistema aritmetico, che presentemente è in uso, vale a dire, col suo modo di esprimere qualunque gran numero, e colle regole, che ne conseguono del conteggio. E quindi è, che i matematici da gran tempo consigliavano, di ridurre a decadica la gradazione delle misure, de'pesi, e delle monete; ed il potente, infine, Governo francese abbracciò, e mise ad effetto il loro consiglio: su di che altra volta, a maggiore spiegamento ritornerò.

Siccome la lunghezza del periodo, o sia la quantità delle unità prese a formarlo, così arbitrarie sono le figure, scelte a dinotare la unità stessa, e gli aggregati di due unità, di tre, di quattro ecc. sino a quello prossimo al periodo; i quali aggregati, detti, in confronto de'più composti, numeri semplici, od elementari, il diritto pur hanno di essere chiamati *numeri periodici*, siccome continuamente nella composizione de'maggiori ricorrenti.

Ed arbitraria del pari, è la maniera di segnare il numero costituente l'intero periodo, e gli altri numeri di esso maggiori: o valendosi delle figure stesse dei numeri elementari, con certa legge ordinate, od introducendo mano mano altre figure novelle. In somma, tutto è nel modo di enumerare arbitrario, e la lunghezza del periodo, e le figure dei numeri elementari, e la espressione del periodo, e degli altri numeri qualunque maggiori.

Le varietà infinite di queste tre cose, compongono in genere dei sistemi di enumerare le varietà. Ma avendo le nazioni tutte di dieci unità formato il periodo, le varietà aritmetiche, presso le diverse nazioni, si restringono effettivamente alle figure de'numeri elementari, ed alla espressione del periodo, e de'numeri maggiori. Servivansi pure i Romani a segnare i numeri, di alcune loro lettere in majuscola figura. Colle due sole majuscole I, V, componevano la rappresentazione di tutti i numeri elementari, cioè da uno a nove; la majuscola X era propriamente la destinata ad esprimere il dieci, la majuscola L il cinquanta, la majuscola C il cento, la majuscola D il cinquecento, la majuscola M il mille. Ma vi aveva de'numeri in doppia maniera figurati, poichè alla majuscola I, denotante uno, posta a sinistra della majuscola X, denotante dieci, dato era l'ufficio di detrargli uno, e fare nove, non altrimenti, che V con quattro volte I; e similmente la X a sinistra della L, o della C, aveva la forza di detrarre loro dieci, e di abbassarle dai valori di cinquanta, e cento, ai valori di quaranta, e novanta. Il cinquecento, oltre a segnarsi colla semplice majuscola D, segnavasi colla majuscola I seguita a destra dalla majuscola C rovescia, cioè col ventre volto a sinistra; ed il mille semplicemente segnato colla sua iniziale M, segnavasi eziandio colla majuscola I, chiusa tra la majuscola C rovescia a destra, ed essa majuscola C diritta a sinistra; e duplicando, triplicando, quadruplicando, e così via via queste cinte della C rovescia a destra, e diritta a sinistra intorno alla I, salivasi al significato di dieci mille, di cento mila, del milione ecc. sempre in ragione decupla più alto. Con sette sole majuscole lettere pertanto, componevasi dai Romani la espressione di qualunque numero. Ma chi non vede la lunghezza della espressione, essendo il numero molto grande, ed ascendente ai bilioni, ai trilioni ecc. ?

Le figure numerali, che noi oggi adoperiamo, nulla hanno, che fare colle lettere dell'alfabeto latino, che da noi pure si usa, ci sono elleno estranie, e da lontano popolo ebbero l'arbitrario significato col quale noi le pratichiamo. I nove diversi numeri elementari hanno ciascuno la sua particolare figura. Alle nove figure loro, una se ne aggiugne, che sola nulla significa, ma serve al più semplice, ed altrettanto elegante artificio numerale, che siasi giammai escogitato, od escogitare si possa. Dirò, a distinzione, tale figura *nota* o *segno del nulla*, e volendola insieme colle figure dei numeri elementari in un nome comprendere, dirò *caratteri aritmetici*. Posta la nota del nulla a destra della figura dell'uno, collo spignere questa a secondo luogo da destra a sinistra, la solleva a significare una decina, e similmente a significare due, tre, quattro ecc. decine le figure del due, del tre, del quattro, se loro venga a destra posta. Che se la replichi all'impressa, altra a destra aggiugnendone, la figura dell'uno, del tre, o qualunque altra nel terzo luogo a sinistra spinta, è alzata a significare un centinajo, due, tre, ecc. centinaja; e se ti piace, che la stessa figura salga a significare migliaja, altro non hai a fare, che a spignerla con altra nota del nulla a quarto luogo a sinistra; e generalmente di passo in passo, che la numeral figura, pel moltiplicarsi della nota del nulla a destra, viene spinta più e più a sinistra, il suo significato con legge costante a valore dieci volte maggiore si eleva. Lo stesso ufficio, lo stesso effetto, che il seguito a destra della nullar nota, presta su qualunque delle nove numerali figure, il seguito di altre di esse. Per la qual cosa, ecco con nove numerali figure, con una universal legge di località, con una nota, da sè insignificantissima, a variare il luogo, e col luogo il valore anch'essa tradotta, costrutto in tutta vastezza il sistema numerale. E sia pur grande il numero da esprimersi, e salga ai bilioni, ai trilioni, ai settilioni, come quello dei granelli di arena richiesti ad empiere, giusta Archimede, la sfera del mondo, ai centilioni, e più in là, sin dove l'immaginazione può fingere, e la lingua enunciare: colloca, secondo la legge, i gradi dei numeri, in continuo corso da destra a sinistra, avrai dal primo al sesto, le semplici unità, decine, centinaja, migliaja, decine di migliaja, centinaja di migliaja; dal settimo al duodecimo, i simili gradi del milione; dal terzo decimo al decimottavo quelli del bilione, e così via via di sei in sei luoghi, ed il numero, quanto volessi grande, sarà nel più possibile corto spazio espresso, e colla massima facilità rilevabile.

Che più pertanto di semplice di codesta legge di località? Che più di esteso, e di comodo tutt'insieme del sistema numerale sopra di essa elevato? Che più di elegante, di facile, di luminoso, che l'Aritmetica da essa dedotta? Tieni tal legge presente, quale facella, nel cammino delle aritmetiche operazioni, e vedi chiaro, perchè nel sommare portar devi le decine ad un luogo risultate, in qualità di unità, nel prossimo a sinistra; perchè all'opposto nel sottrarre, occorrendo ad un luogo, che la figura del numero *Diminuendo*, sia di minor valore, che quella del numero *Sottraendo*, convienti in aggiunta al valore di quella, richiamare dalla figura ad essa prossima a sinistra, o da più lontana per successivi trasporti, una unità in qualità di decina; perchè nel moltiplicare, il prodotto del *Moltiplicando* per la seconda figura da destra a sinistra del *Moltiplicatore*, devesi cominciare a stendere un posto addietro, sotto il prodotto per la prima, e due posti il prodotto per la terza, e così mano mano; perchè al contrario nel dividere, si deve principiare a sinistra, e procedere a destra, portando sempre i residui delle figure divise ad addossarsi alla seguente per la divisione novella. Tutto, in somma, una sola legge spiega, di tutto rende ragione, la legge di località. E può non riuscire spedito, e piacevole un sì piano, sì splendido cammino? Oh aurea Aritmetica! Non è maraviglia, che appena in Italia comparsa, sia stata largamente abbracciata, che la Spagna, la Francia, l'Inghilterra, la Germania, l'Europa tutta, adottata l'abbia, che ogni gente, la latina, la greca, l'ebraica abbiala alla propria antica aritmetica preferita, che dai poeti ottenuti abbia e carmi di lode, e poemi di spiegamento. Ma, e dove ebbe ella la sua origine? Quali furono i suoi passi? Chi, e quando, a nostra gran sorte, in Italia la trasportò? Tre quistioni, che in tenebre ed in errori involte, addomandano seria discussione.

Lezione II.

Della origine della odierna Aritmetica.

Arabe comunemente si dicono, e non dal volgo in parlare soltanto, ma dagli scrittori di Aritmetica eziandio, le oggidì da noi praticate numerali figure, ed araba pure in uno si estima la bella legge di località, onde ogni grande numero si esprime, e l'arte tutta sopra della medesima eretta. Ma tutto, e le figure degli elementari numeri, e la nota del nulla, e la legge amplissima di località, e l'aritmetica odierna intera, indiana ha l'origine. Ciò consta dai codici, che in Firenze nelle principali Biblioteche tutte, nella Laurenziana, nella Magliabechiana, nella Riccardiana, nella Marucelliana, ed in Milano nella Ambrosiana conservansi, e da me furono con diletto visti di Leonardo Fibonacci da Pisa, del cui trattato, a spiegazione di tale aritmetica, non si ha tra quelle d'Italia certamente, se non tra quelle di Europa tutta, il più antico. Nella prefazione del suo Abbaco, che così chiama Leonardo la sua Opera, espressamente dice, che le nove numerali figure, delle quali è per servirsi, sono degli Indi: *novem Yndorum figuras*, e che degli Indi istessamente si è il modo, l'arte, che egli d'insegnare si propone di conteggiare: *Yndorum modum... Yndorum artem*, soggiugnendo, ad esaltamento di tale modo, di arte tale, che in confronto, meschinità stimava, e quasi errore, *quasi errorem*, mitemente interpretando un vagare incerto, l'Algorismo di Pitagora, ed in generale confronto poi, nella dedica del suo rinnovellato lavoro a Michele Scoto asserendo, che nella scienza de'numeri, sopra ogni modo egli è prestante quello degli Indi. Dopo di che, sul principio del primo Capitolo dell'Opera, distesa in una linea da destra a sinistra, giusta l'orientale uso di scrivere, non come noi faremmo da sinistra a destra, la serie delle Romane figure de'numeri da uno a nove, scrive sotto: *Novem figurae Yndorum hae sunt*; e figura sotto figura le schiera così, che la superiore romana, spieghi della sottoposta indiana il valore: indi conchiude: *cum his itaque figuris, et cum hoc signo* 0, *quod arabice zephirum appellatur, scribitur quilibet numerus*: il che è appunto la sostanza, l'eccellenza dell' aritmetica, che noi possediamo, ed esercitiamo.

Nè dal nome arabo, che Leonardo latinamente reca del segno del nulla, coglier devesi argomento, che araba sia la sua instituzione, arabo pensamento l'ufficio assegnatogli, araba l'arte quindi composta, troppo apertamente a ciò ostando le costanti espressioni di Leonardo. Laonde non altro dedur vuolsi, se non, che l'indiana aritmetica fu recata prima in Arabia, ed ivi d'arabi nomi vestita, e che Leonardo sulle vicine coste dell'Affrica imparandola, l'arabo nome del nulla, l'indiano ignorando, amò di latinizzare. Viene in sussidio l' autorità del greco Planude, dicendo egli, che gli indiani, oltre ai nove numerali caratteri, ne avevano un decimo denotante nulla, cui egli non altrimenti, che Lenardo, segna con voto tondo 0, e chiama pure con arabo vocabolo alterato *Tziphra*. L' arabo vocabolo è propriamente *Ziphron*, o *Sifron* dalla radice *Safara*: su di che il Golio nel suo Lessico Arabico: *Sifron - prorsus vacuum - nota arithmetica similis literae* O *(pro ea arabes etiam punctum scribunt) sola nihil notans, at augens notas praecedentes, quae vulgo Cifra dicitur*. Appalesasi quindi insieme di questa voce *Cifra* l'origine: è figlia dell'araba *Sifron*, e fu presso di noi introdotta coll'aritmetica. Ma usasi fuori del nativo suo significato, in applicarla alle numerali figure, laddove, da principio, ristretta era a segnare il solo nulla; e molto maggiore è il suo trasporto, nella frase *favellare in cifra*, cioè misteriosamente, e nel valersene a disegnare quelle abbreviature di nomi, onde elegantemente si distinguono i sigilli. E, che che dica il Wallis, meglio, se attender debbasi l'origine, come pare, scrivesi *zifra*, o *sifra*, che *cifra*. Al nulla si conserva ristretto il vocabolo zero, che nacque, mi credo, da abbreviatura di *zephiro*, in che italicamente convertito venne lo *zephirum* dall'arabo *ziphron* latinamente tratto per Leonardo.

Che l'India sia la regione madre della prestante aritmetica, che noi pratichiamo, e che per la legge, sulla quale è costrutta, distinguere si può col titolo di *Locale*; che l'Arabia per l'opposto, non altrimenti, che l'Italia quale straniera pianta coltivata l'abbia, si conferma dalla confessione degli arabi aritmetici stessi. Ciò confessa Alsephadi nel suo commento al Poema Lamiat' o l'Ajam di Tograi, e ciò que' molti arabi confessano, i libri de' quali, senza lo sperato frutto sinora, perchè senza traduzione, conservati nella Biblioteca di Leiden, portano il titolo di Arte di calcolare secondo gli Indiani. Che si ricerca di più, se queglino stessi, che della bell'arte si predicano inventori, non si danno essi medesimi altro vanto, che di esplicatori? Pure migliore essendo abbondanza, che difetto di prove, soggiugnerò, che indiana dichiarala lo spagnuolo Cristicola, che dagli arabi appresa l'aveva, indiana la canta nel suo didascalico poema su di essa l'inglese Giovanni di Sacrobosco, e indiana la celebrano il greco Massimo Planude, e l'inglese Rogero Bacone: così che, reca stupore, come invalsa sia l'opinione, e la voce dell'araba origine.

Avverte il Golio nel testo addotto, che alcuni degli arabi, in vece del tondo vano simile alla lettera o, adoperano a segno del nulla un punto. Un grosso punto di fatto trovasi nel libro di Alsephadi, il quale considerare si può, come un piccolo tondo pieno. Potrebbe essere che l'una, e l'altra nota fosse presso gli indiani, ma potrebbe eziandio essere, e più probabilmente, che una sola ve ne avesse, e l'altra sia di quella un'alterazione, in Arabia nata. Non è pretendibile, che nel trasporto dall' Iudia nell'Arabia, e così nella propagazione per gli africani lidi, e nel traspiantamento in Europa, e nel tramandamento sino all'età nostra, gli aritmetici caratteri siano rimasti gli stessi stessissimi, senza alterazione veruna. Il francese storico delle Matematiche Montucla, di ciò trattando nella Parte II, Lib. I°, Articolo VIII, esibisce in una tavola raccolti, ed in altrettante linee schierati i caratteri, che si trovano nei codici delle opere di Boezio, di Planude, di Alsephadi, di Sacrobosco, di Rogero Bacone, e quelli che verso la metà del secolo decimo settimo, dall'India portò il viaggiatore Tavernier. Io aggiungo ad essa tavola due schiere tratte da un antico codice di Beda, nella Biblioteca Ambrosiana esistente, ed a tutte metto in capo la schiera dei caratteri presentati dai codici di Leonardo, non per essere egli nostro solamente, ma sì ancora perchè (eccettuando Boezio e Beda, nelle cui opere, nativi non essendo certamente, ma sì di poi ai nativi, surrogati quei caratteri, non entrano nel confronto). Leonardo è a tutti o di molto, o di qualche poco anteriore di tempo; conciosiachè il Sacrobosco morì nel 1256, Rogero Bacone nel 1292, il monaco Massimo Planude, dandogli anche col Kirchero cent'anni più di antichità, di quella diagli il Vossio, fiorì oltre la metà del secolo decimo terzo, sotto l'impero di Michele Paleologo, ed Alsephadi, dice il Casiro nella Biblioteca Arabicò-Hispanica-Escuriale alla pagina 79 del Tomo I°, essere tradizione, che finisse i suoi giorni l'anno 764 dell'Egira, che corrisponde all'anno dell'era nostra 1362, laddove Leonardo Fibonacci aveva già composto il suo Abbaco l'anno 1202. Considerando, e paragonando schiera a schiera, vi si scorgono, non vi ha luogo a negarlo, delle sensibili differenze, quantunque ciascuna dal suo scrittore indiana si dica. Il Montucla, pagina 361, favellando di quei trattati arabi d'indiana aritmetica, che giacciono nella Leidense Biblioteca, e che io, non ha guari citai, nota uno esservene, i cui numerici segni, sono molto ai nostri, ed a quelli di Planude somiglianti: *dont les signes numériques sont fort ressemblans aux nôtres*, & *à ceux de Planude*: (*) con che viene certamente a dire, che molto sono tra loro somiglianti i nostri, e quelli di Planude. E pure, verso il fine della pagina, ragionando di proposito di Planude, osserva, che i suoi caratteri, sebbene molto dai nostri differenti, sono presso che gli stessi di quelli di Alsephadi: *ses caracteres, quoique assez différens des nôtres, sont presque les mêmes que ceux d'Alsephadi*. Come dei caratteri nostri, e di quelli di Planude accordare molta somiglianza, e molta differenza? Ma noi non abbisogniamo per vedere degli occhi di Montucla, e la verità si è, che dei dieci caratteri di Planude, ve ne sono sette ai nostri similissimi nella forma, con diversità però in quattro di posizione, e tre ve ne hanno nella forma ben anche differenti. La serie delle forme nostre, differisce dalle serie di quelle di Alsephadi in quattro, in altrettante dalla seconda, ed in due dalla prima delle forme del codice di Beda, e da quella delle forme dei codici di Boezio, ed in due pure differiscono le serie di Planude e di Alsephadi tra loro. Maggiore somiglianza si scorge tra le schiere di Leonardo Fibonacci, di Giovanni Sacrobosco, di Rogero Bacone, e tra esse, e quella delle oggidì da noi usate. Componendo tutti insieme i confronti, lasciando da parte le posizioni cangiate dal comodo, considerando le sole forme, ed in esse, più che agli accidenti variabili sotto le varie penne, attenzione ponendo alla sostanza, bilanciando giustamente, certo è, che la somma delle differenze vale meno assai, che la somma delle rassomiglianze, e non si può chiamare in dubbio, che comune traspiri l'origine. Ma ciò che più è a contare si è, che in tutte le schiere, sta costante quello, che è più essenziale, che del numerare costituisce, e distingue il modo, in che del sistema dei valori locali, l'artificio consiste: il comporre colla figura dell'uno preceduta a destra da nota, solitariamente presa di niun valore, il dieci. Questa concordia delle diverse schiere lega insieme, ed accumula in uno le testimonianze degli scrittori loro, che d'indiana origine le asseriscono. Quale più ostacolo a francamente

(*) Tutte le citazioni di passi dell'*Istoire des mathématiques* ec. del Montucla, contenute in queste lezioni sull'Aritmetica, sono relative alla prima edizione di questa Storia, cioè a quella in due volumi in 4.° intitolata « Histoire des Mathématiques, dans laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leur » origine jusqu'à nos jours; où l'on expose le tableau & le développement des principales découvertes, » les contestations qu'elles on fait naître, & les principaux traits de la vie des Mathématiciens les plus » célèbres. Par M. Montucla, de l'Académie Royale des Sciences & Belles—Lettres de Prusse. A Paris, » Chez Ch. Ant. Iombert, Imprimeur—Libraire du Roi pour l'Artillerie & le Genie, rue Dauphine, à » l'Image Notre—Dame. M. DCC. LVIII. Avec Approbation & Privilege du Roi. »

conchiudere, che indiana in fondo, è la serie degli aritmetici caratteri che noi adoperiamo, che per la maggior parte l'indiana forma, almeno sostanzialmente, essi conservano, che soprattutto irrefragabilmente indiano è l'ingegnoso istituto di comporre con dieci caratteri i numeri tutti, mediante la semplice legge di decuplare ad ogni passo, da destra a sinistra di qualunque numeral figura il valore?

Ostacolo appunto ci affaccia la schiera di Tavernier, schiera, al suo dire (Tom. 3 de'suoi viaggi, pagina 22) in tutto l'impero del Gran Mogol, ed altri luoghi delle Indie di linguaggio differenti in uso, schiera da tutte le testè considerate, come a prima vista si scorge, ben diversa, nell'essenza ancora, essendo persino con una sola figura segnato il dieci, e troppo poco a confronto di differenza cotanta, che cangia il midollo del sistema aritmetico, essendo la conformità di due figure, in valore poi numerico assai diverso. Montucla, dopo avere alla pagina 362 conchiuso per le asserzioni di Planude, di Alsephadi, e di Sacrobosco, essere bene provato, che gli arabi presero dagli indiani i loro caratteri aritmetici, ed il loro sistema di enumerazione, alla pagina 365 per ragione della serie di Tavernier, si rende dubbioso, cadendo a dire, ch'egli è ben difficile a decidere, se i caratteri di Planude, e di Alsephadi sono quelli, de'quali gl'Indiani anticamente servironsi, e, che se ciò è, eglino hanno molto cangiato dipoi: *Il est difficile de décider si les caractères de Planude & d'Alsephadi sont ceux dont se servoient anciennement les Indiens. Si cela est, ils ont beaucoup changé depuis.* Ma egli stesso, tramezzo pagina 364, nota, che gl'Indiani sono de'loro usi tenaci: *attachés à leurs usages.* Che dunque fare? Che pensare? Contro la confessione degli arabi stessi, attribuire ai nostri numerici caratteri, al nostro aritmetico modo, araba, non indiana origine? Crederli contro l'attestato del greco Planude di origine greca? Riputarli contro l'asseveranza di Leonardo, che per l'Egitto, per la Siria, e per altre contrade d'oriente viaggiando, i modi loro varj tutti quanti apparò, e dall'indiano distinseli, di egizia, di sira, di altra origine qualunque fuorchè d'indiana? Sarebbe un troppo violento opporsi, e far fronte a legione di vittoriose autorità. Che dunque? Negare a Tavernier fede, come ai più dei viaggiatori detta prudenza, che si faccia? La brama di conciliare con un rispetto a lui, il peso delle concordi testimonianze dei citati scrittori, mi avea fatto, meditando, nascere in mente un nuovo pensiero. Danville nel Tomo terzo della Geografia antica c'insegna coll'analisi di certi passi di Eliano, di Erodoto, di Virgilio, di Procopio eziandio, e di altri ecclesiastici autori, che davasi il nome d'India all'Etiopia, e due distinguevansi le Indie, le indiane nazioni, l'una più ad oriente nell'Asia, l'altra occidentale nell'Africa, e che gli indiani occidentali su d'una antica tradizione vantavano, che i loro Neri, od Etiopi erano stati quelli, che dalla patria emigrando, formata avevano la nazione etiope nella più interna parte dell'Affrica, discacciandone i dominanti

Egizi. Questo è ciò, di che Terca, filosofo indiano, assicura Apollonio in Filostrato; ed Eusebio, dietro ad antichi storici, pone questa emigrazione sotto il regno di Amenofi, padre del famoso Sesostri, verso gli eroici tempi della Grecia. Bailly nella storia dell' Astronomia antica al §. 2° del libro 6°, ed al §. 10° del libro 9°, oltre al confermare per ragione d' istituzioni, e dottrine astronomiche loro comuni, la comune origine degli indiani asiatici, e degli etiopi od indiani affricani, ci dimostra, che questi prima degli Egizj, di filosofiche cognizioni fiorirono; motivo per cui da Luciano nel trattato dell'Astrologia, s'introdusse la Filosofia a dire, d'essersi portata presso gl'indiani, ed averli fatti dai loro elefanti smontare per seco lei conversare; di là essersi presso gli etiopi trasferita, e poscia essere in Egitto discesa, ad istruire i Preti, e Profeti delle divine cose. Presenti questi storici lumi, non si potrebbe dire, volgeva per mente, che gli indiani, dai quali gli arabi ricevettero le figure, e le regole aritmetiche, anzichè gli indiani dell'Asia, furono gli indiani dell'Affrica, distintamente appellati gli Etiopi ? Che questi ne furono, soggiornante tra loro la filosofia, gli inventori ? Così tra me discorrendo andava. Ma non doveva io ommettere, di chiamare al confronto delle nostre numeriche figure colle etiopiche, lo specioso mio pensamento? Ora anzi che rassomigliarsi, somma è la differenza; e somma ugualmente è la differenza della serie delle etiopiche, dalla serie delle recate dall'India Asiatica per Tavernier. Eccoci dunque di nuovo alla necessità, o d'immaginare col Montucla , che gli indiani inventori delle numeriche figure, oggidì da noi usate, e del bello artificio di comporre col decuplo valore di luogo in luogo qualunque alto numero, cangiato abbiano figure, ed abbandonato un artificio di tanta semplicità ed eleganza : ciò che troppo è difficile a credere, e niuno che avverta, quanto in cose di volgar pratica il comodo piaccia, e prevalga , si persuaderà certamente ; o di ritogliere al nostro Leonardo, ai due inglesi Sacrobosco e Rogero Bacone, allo spagnuolo Cristicola, al greco Planude, ad Alsephadi, ed a tanti altri arabi la sì dovuta credenza: e quale equità, quale criterio lo acconsentirebbe? o cercare a rimovere, per qualche verso, l'opposizione del racconto di Tavernier. E senza apporgli falsità, non potrebbe essere, che due fossero appresso gli indiani del gran Mogol, e di tali altri luoghi dell' Asia le serie delle numeriche figure, due i sistemi di numerare, siccome noi, oltre le figure, ed il sistema in comun uso, abbiamo le figure romane, il romano sistema ? Non potrebbe essere, che il modo di rappresentare i numeri, comunicato a Tavernier nell'India, sia quello dell'indiano volgo, e quello da noi oggidì praticato, ed indiano dichiaratoci da tanti scrittori di ogni nazione, sia il modo proprio degli indiani Bracmani, tenuto da essi, per barbaro vanto di distinta scienza, al popolo nascosto ? Non potrebbe essere pur anche, che l'eccellente aritmetico modo, presentemente fra noi volgare, fosse del pari il modo volgare in alcune parti dell'India, ove Tavernier non si avanzò? Non potrebbe in fine essere, che inventato nell'India da qualche saggio, e da un filosofico stuolo seguito, dopo il rumore della novità, cadesse vinto ed oppresso da quell'attaccamento per lo appunto sì grande, che Montucla dice, gli indiani avere agli antichi loro costumi, e fuori ottenesse poi la sorte, nel luogo dei suoi natali negatagli? Non è ciò raro ad accadere, ed io trarrò in seguito al lume le preziose invenzioni dai nostri aritmetici, algebristi, geometri, architetti, quali gemme tra il lezzo di barbaro stile sparse nei loro libri, che in essi giacquero agli italiani sconosciute, o non apprezzate, e che poi furono glorie, forse novellamente sudate, e forse usurpate di altre nazioni. La giusta critica vuole, che in alcuno di codesti, od altri, se può immaginarsene, modi, si tolga l'ostacolo dell'autorità di Tavernier, anzi che ributtarsi all'accumulata autorità di tanti scrittori tanto più antichi, in maggior dovere, a miglior portata, di più sollecito zelo di sapere, e non commettere errore, nell'assegnare la origine della scienza da loro professata, di nazione diversi, e per sino arabi, sommamente in ciò lodevoli di essere stati più fedeli alla verità, che ambiziosi di fregiarsi di una istituzione non loro, e del merito contenti di averla trasmessa.

Rimossa l'opposizione di Tavernier, io non mi arresterò a confutare gli sforzi di Dasypodio, per dimostrare dalle greche lettere derivate le numeriche nostre figure, standogli a fronte il greco Planude, e la oculare lontananza delle une dalle altre.

Lezione III.

Del tempo, in cui gli Arabi ricevettero l'Aritmetica Indiana.

Scrive il Mabillon nel libro II°, cap. XXVIII. § X, essere stata opinione di Atanasio Kircher con altri, che gli Arabi ricevuta abbiano dagli Indiani l'aritmetica nel corso del secolo decimo. Io mi lusingo di dimostrare, che la possedettero, un'secolo almeno, prima. A rendere la dimostrazione più soda, luminosa, e dilettevole, mi sia permesso montare al sorgimento delle scienze tra gli Arabi, e dipingere in un quadro il fiore, al quale prestamente si alzarono. Abu Giafar detto Al-Mansor (il Vittorioso) il XXI nella successione dei Califfi, salito a tal dignità l'anno 754, prestante nella dottrina delle leggi, fu quegli, che nei tranquilli ozi, frutti dei suoi trionfi, dedicandosi egli stesso alla filosofia, e precipuamente all' astronomia, diede loro fra gli arabi, moto, e vita, di modo, che gli eruditissimi monaci autori della grand'opera intitolata: *Art de vérifier les dates*, non dubitano di scrivere, che la filosofia, e l'astronomia fiorirono tra gli Arabi sotto il suo regno; *la philosophie et l'astronomie fleurirent chez les arabes sous son regne.* Questo fiore però non fu, che un principio di quello a cui le lettere, le arti, le scienze crebbero sotto gli auspicj di Haroun

Al-Raschid montato a Califfo XXIV, l'anno 786. Di lui, dicono gli stessi monaci, che protettore delle lettere, arricchì gli arabi di tutte le dovizie letterarie de'greci, facendo tradurre le opere loro migliori: *Protecteur des lettres il fit passer chez les arabes toutes les richesses littéraires des grecs par les traductions qu' il fit faire de leurs meilleurs ouvrages.* Ma la sua gloria pel favore agli studi, soverchiata poi venne da quella di Al-Mamone Califfo XXVI, il cui regno cominciò l'anno 813. Al-Mamone, quanto di Al-Mansor, e di Haroun più ornato di filosofici lumi, tanto fu più fervoroso a promovere tra la gente sua, e per le vaste sue provincie, il bello felice giorno delle scienze. Bailly nel tomo I°. dell'Astronomia moderna libro VI, §. VIII, pone tra lui, ed il padre Haroun questa differenza, che egli amò, e coltivò le scienze, le quali Haroun contentato erasi di proteggere: *il aima et cultiva les sciences qu'Haroun s'étoit contenté de proteger.* Ma non così l'Herbelot, il quale all'articolo *Haroun* dice, che questo Califfo amò assai la gente di lettere, e coltivò egli medesimo le scienze, *Le Calife aimoit fort les gens de lettres, et cultivoit lui méme les sciences.* Dell'amore, e della liberalità di esso, verso la gente di lettere, uno splendido atto mette in campo Herbelot, nella compra della sapiente schiava Taovadod Khatoun, pel prezzo di zecchini ventimila. A questo generoso atto, contrapporre si può la somma di monete di argento ben cinquanta mila da Al-Mamon regalata al grammatico Nadr, solamente per averlo con destra ingenuità corretto dell'errore in pronunciare *Sadad* invece di *Sedad*, spiegandogliene le diverse significazioni. La differenza poi, che diligentemente considerando, e raccogliendo i racconti degli Arabi storici, si ricava tra Haroun ed Al-Mamone si è, che Haroun amò, e protesse le umane lettere, le arti, le scienze morali, la medicina più, che le matematiche, e le altre scienze specolative. Al-Mamone a queste più particolarmente intese il suo elevato ingegno, il cuor suo, il suo zelo. Prova di questo zelo di singolare memoria, degna si è la filosofica condizione, senza esempio nelle storie, che, accordando pace, imponeva ai greci Re, di spedirgli, invece di un tesoro di fulgido metallo, gli scritti che avevano migliori de' greci filosofi, nella Grecia, già in un colle scienze, scaduti di pregio. A non errare però nell' ordine de'tempi, è mestieri allontanarsi da Montucla, e Bailly, che dicono all' imperador Michele III imposta la condizione, atteso che Al-Mamone morto l'anno 833, non potè avere che fare con Michele III, salito all'impero di Costantinopoli l'anno 842. Siccome gli scritti de'greci filosofi trapassati, così fu Al-Mamone sollecito di acquistare i filosofi più riputati, che rimanevano nelle greche provincie; e la durezza dell'imperadore Teofilo contro i suoi desideri, spiccar ne fece l'ardore, e la costanza. Voleva a se Leone, arcivescovo poi di Tessalonica, il matematico, dice Condillac, più grande, che fossevi a quel tempo in Costantinopoli, ma che pure travavasi, narran gli Autori dell'*Arte di veri-*

ficare le Date, nel misero stato di vivere, dando lezioni agli schiavi. Inviare a Teofilo, con cui Al-Mamone aveva guerra, ambasciadori con presenti sceltissimi, offerirgli assai ricche somme, se a Leone permetteva di trasferirsi a Bagdad, scusarsi del non andare in persona a chiedergli questo filosofo: a tanto giunse un Califfo pel desiderio di un Matematico. Ricusò ostiuatamente Teofilo di accondiscendere, non per condegna stima che facesse di Leone, ma per non appagare le brame dell' inimico Califfo: del che irrirato Al-Mamone, invadendo con tutta la forza delle sue armi le terre di Teofilo, gli fece pagar caro il villano rifiuto. Fu verso il fine del suo regno, l'anno 830, che Al-Mamone soffrì questo amaro scontento da Teofilo, non montato al trono di Costantinopoli, che l' anno 829. Felice già nei primi anni del regno, aveva a sè tratti e raccolti periti interpreti delle greche opere: è bello il vederlo farsi di loro, e delle versioni loro commesse, un singolar affare, tenere con essi la più frequente conversazione, presiedere alle adunanze loro, udirne con diletto le dissertazioni, interessarsi delle dispute, proporre, come uno di loro, i suoi lumi. Dopo che le versioni furono fatte, quante maniere per incitare i Maomettani a leggere quei libri, per ispirare loro il genio delle alte scienze che contenevano ! E collegi, e università, e accademie, e premi, e il suo esempio. *Almamon scientiam suis locis quaerere aggressus cum graecorum regibus intercedens petiit ab illis, ut qui apud ipsos essent, libros philosophicos ad ipsum mitterent, qui cum ad ipsum, quos habebant, misissent, conquisitis ille interpretibus peritis, eos ipsis accurate vertendos imposuit, cumque, qua fieri potuit diligentia, versi essent, homines ad eos legendos incitavit, eorumque perdiscendorum ingenium ingessit; ipseque doctis vacare, et eorum disputationibus interesse solitus, et eorum delectationibus delectari.* Così Abulfaragio nella traduzione del Pocok. Per le quali cose, giustamente gli assennati autori dell'*Arte di verificare le Date* pareggiano Al-Mamone ad Augusto, a Leone X, a Luigi XIV. Il Bailly dice, che il primo de' greci libri a tradursi, sotto gli auspicii di Al-Mamone, fu l'*Almagesto* di Tolommeo. L' Astronomia colla Geografia che ne dipende fu lo studio precipuo di Al-Mamone, la sua passione, il centro delle filosofiche di lui cure. Non è qui luogo di celebrare i grandi stromenti da lui fatti lavorare, le osservazioni da lui medesimo istituite intorno alla obbliquità dell'Ecclittica, la magnifica intrapresa di esaminare il computo greco della grandezza della terra, commettendo a due drappelli di valenti astronomi, di misurare nella vasta pianura di Singar due gradi, la raccolta, il congiungimento, la tessitura in un corpo delle astronomiche cognizioni da diverse fonti ricavate, o per nuove osservazioni conseguite, nel volume recante in fronte: *Astronomia elaborata a compluribus D. D. iussu regis Maimon.* Operazioni sì grandiose e solenni non potevano non incantare, non iscuotere, non ispignere l'araba nazione: hanno de'regnanti gl'ingegni, il potere di determinare colà, ov' essi si affisano, gli ingegni de' popoli. Ho detto che l'astronomia, elaborata per comando del re Al-Mamone, comprendeva insieme unite ed ordinate cognizioni astronomiche, da diverse fonti ricavate. È comune sapere, e dire che gli arabi tirarono dalla Grecia e dottrine, e dotti; ma è egli credibile, che non fossero ugualmente solleciti delle dottrine, e dei dotti degli altri colti paesi che li circondavano, e dai quali meno differivano in linguaggio? Non seppe persuadersene il Wallis, il quale per ciò scrisse: *cum tam sollicite curarent saraceni authores graecos praestantissimos plerosque omnes in arabicam linguam traducendos, quo eorum doctrinae forent participes, non dubitandum est quin persarum, indorum, aliorumque orientalium doctrinam pariter ambiverint, quorum item linguae ab illa arabum minus differebant.* Non sarebbesi il Wallis limitato a conghietturare, se avesse spinto la ricerca nelle storie arabiche. In quella di Abulfaragio, io scorgo tra compagni di Al-Mansore *ex comitibus Almansoris*, l'esimio persiano astronomo Nabacth; ed alla corte di Haroun io veggo il medico indiano Saleho ben Nahula, col quale altro indiano me ne addita Herbelot di nome Manghe, ed ai fianchi del figlio Al-Mamone, mi si mostra a maestro suo il persiano Kessai. Aperte già tra l'Arabia, e la Persia, e l'India tali comunicazioni, chi può immaginare, che proseguito non abbia a valersene alle accese sue brame Al-Mamone? Poteva anzi un regnante si sapiente, e premuroso di elevare in grandezza di scienza, quanto elevato già era in grandezza di potenza il regno suo, non essere fervente ad aprire con qualunque regione, ove fiore fosse di sapere, commercio, e con ricche somme e generosi inviti trarne ammaestramenti, e maestri? Tale appunto ce lo dipinge l'Herbelot. *Mamoun fut amateur des lettres qu' il possédoit à un très-haut degré. Il s' étoit appliqué particulièrement aux sciences spéculatives, et il fit des dépenses extraordinaires pour assembler de tout côté des gens savans, et pour rechercher des livres les plus curieux écrits en hebreu, en Syriaque, et en grec qu' il fit traduire en langue arabique . . . . il favorisa indifféremment les personnes doctes de quelque religion qu'ils fussent, lesquelles réciproquement contribuoient beaucoup à la gloire de ce monarque par les présens, qu'ils lui faisoient de leurs ouvrages, recueillis de tout ce qu'il y avoit de plus rare chez les indiens, les mages, les juifs, et les chrétiens orientaux de toutes les sectes.*

Astronomo a niuno secondo nel regno di Al-Mamone, si fu un certo Moamad ben Musa Al-Chuarezmita o Al-Khuarezmita, vale a dire di Chovarem, o Khovarezem, più anticamente Chorasmia, regione dell' Asia all' oriente del mar Caspio. A guadagnarsi più distinta del regnante la grazia, compendiò egli, ad uso di esso, il libro *Sindo Indo maggiore*, uno dei tre, spiega l' anonimo egiziano autore della *Biblioteca arabica de' filosofi*, uno dei tre sistemi astronomici indiani, e l' unico, di cui tra gli arabi diffusa siasi chiara notizia, non essendo degli altri due a loro penetrati, che i nomi di Argebakro ed Arkando. Fece più il Chuaresmita: sulle norme di detto *Sindo Indo maggiore*, costrusse le sue tavole astronomiche, appresso i maomettani celebratissime, riprendendo insieme, come poco accurate, per ciò che spetta il moto medio, le tavole degli indiani; onde da loro dipartendosi, massimamente rispetto alla equazione del moto, ed alla declinazione, si volse a calcolare la prima, giusta il sistema de'Persi, e la seconda conforme alla mente di Tolommeo, con aggiugnere alcune invenzioni sue proprie, certamente non ispregevoli. Questa opera egregia, piacque in quella stagione agli astronomi indiani stessi e, lungi dallo scemare col tempo di grido, lo accrebbe, scrive l' anonimo egiziano nel 1198, di età in età, sino a questo giorno. Dopo il sin qui detto, a maggiore solidità e lume del proposito, veniamo a ciò che espressamente lo tocca, e ne forma la dimostrazione. Il medesimo anonimo egiziano, nella sua *Biblioteca arabica de' filosofi*, al nome Katka, il più antico ed il principe degli astronomi indiani, tra le opere preclare di lui che passarono nelle mani degli arabi, conta un libro di arte logistica, o di aritmetica da Moamad ben Musa Al-Chuarezmita esornato, che tutti gli altri supera in brevità e facilità di metodo, e degli indiani manifesta in pleclarissimi ritrovati l'ingegno e l'acume: parlo in nostrale linguaggio, voltando la traduzione del dottissimo Casiri dall'originale. *Liber artis logisticae a Mohamado ben Musa Al-Chuarezmita exornatus, qui caeteros omnes brevitate methodi ac facilitate praestat, indorumque in praeclarissimis inventis ingenium, et acumen ostendit.* Così il Casiri, che nel tomo I.° della sua *Biblioteca arabico-hispanica*, pagina 370, dà all'anonimo egiziano la lode di accuratissimo. Ecco per tanto ad un tratto due importantissimi lumi. In Katka indiano di remotissima antichità: *indus longe vetustissimus*: sono parole del Casiri, traducendo il testo dell' anonimo egiziano: ecco uno scrittore antichissimo sulla indiana aritmetica, che ce la segna nell' India di lontanissima vetustà, e tanto maggiore, se egli non ne fu l' inventore, ma un rischiaratore, o promotore soltanto, su di che niente ci traspira. In Moamad ben Musa Chuarezmita, ecco tra i cari di Al-Mamone un matematico prestante di provincia all' India vicina, di Chorasmia nativo, ed illustratore del libro di aritmetica indiana di Katka, facile, ingegnoso, eccellente: e crederemo che questo aureo libro, che ci si dice nell'Arabia diffuso, avrà tardato a penetrarvi, o salirvi in auge? Più: lo stesso Chuarezmita compendia, ad uso di Al-Mamone, il *Sindo Indo maggiore*, e sulla norma di esso costruisce le proprie tavole astronomiche, che dagli arabi, e dagli indiani ugualmente adottate vengono ed applaudite: a tutto ciò, chi non si persuaderà, che i numeri, i computi in questo compendio, in queste tavole fossero all' indiana? Dunque, se così fu, il grande Al-Mamone, e con lui quegli arabi che di astronomia si occupavano, atti erano ad intendere l'indiana aritmetica; e forse gli arabi tutti universalmente, se, come oggidì si fa, dalle astronomiche tavole tracvansi allora, e lo zelo del regnante pel comune illuminamento il rende probabile, gli almanacchi annuali. E non ebbi io dunque ragione di asserire, che gli Arabi non ricevettero nel correr solo del decimo secolo, giusta l'opinione del Kirchero, l' indiana aritmetica, ma la possedettero almeno un secolo avanti? L' unione di fatti, delle cose sotto il fausto regno di Al-Mamone che finì l' anno 830, indica piuttosto che n' erano in possesso, non che n' entrassero all' acquisto. A conferma, in niun luogo io trovo al Khuarezmita attribuito il merito di avere il primo agli arabi insegnata l'aritmetica indiana, trovando all' opposto, che Zaccaria ben Moamad ben Mahmud di Cazuin, o Casbin, città lungo tempo capitale dell'impero de' Persi, denominato il Cazuineo, gli dà, al riferir del Casiri, la gloria di essere stato di tutti il primo ad instruire i maomettani nell'arte dell' algebra: *Omnium princeps, teste Cazuineo algebrae artem mahometanis tradidit Mohamad ben Musa Khuarezmita.* Cresce assai l'argomento, se si consideri che l' algebra nei libri degli arabi non è come oggi ne'nostri, in lettere, ma in numeri, numeri indiani, e non è che la parte più alta dell'aritmetica. Se Moamad ben Musa Khuarezmita dicesi primo maestro agli arabi della più alta aritmetica in numeri e computi indiani, senza trovarlo detto maestro della bassa, non si ha ragione di supporre gli arabi già prima in questa istrutti? Per altra parte ho sopra dimostrato che già da molti anni, sotto il regno di Karoun, asceso al trono arabo l' anno 786, era aperta tra l' India e l' Arabia la comunicazione, e due medici erano di là venuti alla corte dell'arabo Califfo. Era dunque anche agli indiani aritmetici dischiuso il varco per recare nell'Arabia la eccellente loro arte. Io mi credo in somma ben fondato a tener per certo, che l'aritmetica indiana fu in Arabia nei primi lustri del secolo nono, e per verisimile, che vi fu avanti.

Non senza ragione l'anonimo egiziano, il Cazuineo, l'Abulfaragio, per distinguere quel Moamad, di cui tanto sin qui ho parlato, oltre al segnarlo colla figliazione ben Musa, figlio di Musa, vi aggiunsero l'appellazione locale Khuarezmita. Ciò fecero, onde non venisse confuso questo Moamad ben Musa con un altro, cui con doppia successiva figliazione dissero Moamad ben Musa ben Schaker: Moamad figlio di Musa, figlio di Schaker. Era tanto più necessaria la diversità degli aggiunti, quanto era più da temersi che si errasse, prendendo uno dei due celebri uomini per l'altro. Ambidue denominati eziandio Abu Giafar, ambidue astronomi, ambidue nel regno di Al-Mamone vissuti; qual cosa più facile che cambiare questo in quello, ed attribuire all'uno gli onori all' altro dovuti? Casiri li distingue nell' indice della sua *Biblioteca arabico-hispanica* sì al titolo Moamad ben Musa, sì a quello di Abu Giafar, notando alcune delle cose, ed opere loro diverse. Caddero a confonderli insieme due illustri eruditi dell' età nostra, Bailly ed Andres. Il primo, nel tomo primo dell'*Astronomia moderna*, libro V° degli *Eclaircissemens* § VII fa uno stesso il Moamad ben Musa autore delle famose tavole astronomiche sul sistema del *Sindo Indo maggiore*, che fu il

Khuarezmita, ed il Moamad ben Musa, che coi due insigni fratelli Ahmed, ed Hasen nella casa loro, sul ponte di Bagdad, osservando le altezze meridiane del sole nel solstizio d'inverno, ed in quello di estate, dedusse di gradi 23, minuti 35 l'obbliquità dell'Ecclitica; e questi tre valenti fratelli furono i figli di Schaker. L'abate Andres nel tomo IV°, cap. III, subito dopo aver detto, che Moamad ben Musa fu, secondo il testimonio del Cazuineo citato dal Casiri, il primo che insegnasse ai maomettani l'algebra, soggiugne che discepolo di Moamad fu Thebit ben Corrah: e così ecco anche per uno scrittore sì versato nell'araba letteratura, quale l'Abate Andres, il Moamad ben Musa Khuarezmita, il vero maestro primo dell'algebra ai Maomettani, identificato con Moamad ben Musa ben Schaker, cui spetta il vanto di aver avuto a scolaro Thebit ben Corrah preclarissimo e matematico, e medico tra gli arabi. Questi due equivoci a due sì chiari moderni storici sfuggiti, siccome nacquero dall'abuso, in successo di tempo introdottosi, di ommettere, nominando i due Moamad ben Musa, i loro distintivi aggiunti, così l'importanza manifestano di ristabilire le intere denominazioni dagli arabi storici usate: Moamad ben Musa Khuarezmita-Moamad ben Musa ben Schaker.

Lo stesso Sig. Abate Andres, dopo avere nel Tomo I°, pag. 224 confutato l'Uezio, opinante che i nostri numerici caratteri dai Greci vengano, e non siano che le lettere del greco alfabeto alterate e malconcie via via da'scritturali, nel Tomo IV°, pag. 81 (*) asserisce che gli Arabi presero dai Greci l'aritmetica, ed unitamente alla geometria, all'astronomia, e tutte le altre parti della matematica, ne fa base per dedurre, che dai Greci presero pure gli Arabi l'algebra. *Gli Arabi*, così egli, *preser da Greci l'aritmetica, la geometria, l'astronomia, e tutte le parti delle matematiche*; *e solo avranno lasciata l'algebra, e si saranno presa la fatica di cercarla da loro stessi mentre l'avevano ne' libri greci*? Dalle cose sopra esposte apparisce, quale modificazione la premessa del Sig. Ab. Andres ricerchi rispetto all'astronomia, e quanto falsa sia la illazione riguardo all'algebra. Per ciò che spetta l'aritmetica, a conciliare il Sig. Ab. con lui stesso e colla verità, bisognerebbe poter dire, che essa aritmetica fu dapprima trasfusa in Grecia, indi si propagò in Arabia. E questo viaggio vestirebbe qualche colore specioso, se a Moamad ben Musa Khuarezmita, seguendo il Sig. Abate, identificare si potesse Moamad ben Musa ben Schaker; e siccome egli fece questo, primo maestro agli arabi dell'algebra, così fosse lecito farlo l'illustratore del libro d'indiana logistica dell'indiano Katka, sapendosi di Moamad ben Musa ben Schaker, che dal misero stato di sua nascita elevato si era a ricchezza, che fece di grandi spese per tirare dalla Grecia scritti, e che fu in persona colà.

Ho detto che discepolo di Moamad ben Musa ben Schaker fu Thebit

(*) Le citazioni dell'Andres che trovansi in questa pagina 333, lin. 20, 23 si riferiscono alla edizione seguente: *Dell'origine, progressi e stato attuale di ogni Letteratura dell'abate D. Giovanni Andres Socio della R. Accademia di Scienze e Belle lettere di Mantova. Parma, Dalla Stamperia Reale* 1795—1799. *Con approvazione*, 7 tomi, in 4°.

ben Corrah. Egli nacque in Carrhe della Mesopotamia l'anno 835. Fu uno dei più grandi dotti che l' Arabia vanti, un dotto per molte sfere gloriosamente spaziante, acuto filosofo, destro aritmetico ed algebrista, sottil geometra, perspicace astronomo, solido medico. Nel lungo catalogo delle sue opere,tessuto dall'anonimo egiziano, abbiamo rispetto all' aritmetica le tre seguenti:

Nicomachi de Arithmetica Epitome.
De numeris infinite multiplicandis sive de numeris Pythagoricis.
De numeris Polygonis.

Nel secolo decimo si presenta un certo Moamad ben Moamad ben Tahia ben Ismail ben Alabras Abulvapha,che ristrettamente è anche detto Moamad Al-Buzgiani,o Al-Buziani dal Castello di Buzgian nel distretto della Città di Nischabourg nel Korasan, l'antico regno de'Parti. Non mi è venuto sott'occhio l'anno preciso, nel quale in tale castello uscì alla luce, ma trovo che l'anno 959 da esso castello passò egli nella Irac babilonese ad apprendere prima, ed insegnare poscia le matematiche discipline.

Tra i libri da lui composti, ed annoverati dall'anonimo egiziano, uno ve n'ha col titolo : *De universa arte logistica libri III.*

Lezione IV.

Dell' epoca della Indiana Aritmetica in Grecia.

Il trattato d' indiana aritmetica del greco monaco Massimo Planude attesta, che l' indiana aritmetica fu in quel tempo conosciuta nella Grecia. Ma quel monaco, se diasi ascolto al Vossio, non visse che oltre la metà del secolo XIV, ed oltre la metà del XIII, se più piaccia seguire il Kirchero. E tanto tardo fu presso de'greci il conoscimento di sì eccellente aritmetica ? Pitagora si prestante, sì ammirato nella dottrina de' numeri non la conobbe ? non l' apprese nei suoi viaggi ? non la recò nella Magna Grecia ? non la inventò anzi egli, ed agli indiani stessi, non che ai greci ne fu maestro ? Ecco le quistioni mosse dagli appassionati ammiratori dei greci sapienti, e di Pitagora segnatamente. Il Montucla entra in queste quistioni alla pagina 119, ed alla 364 del tomo I°, prendendo distintamente ad esaminare: se le figure numeriche di Pitagora fossero alle indiane simili ? se il fondo almeno della sua aritmetica fosse il medesimo, che quello della indiana? se essendolo, egli dai Bracmani, o Ginnosofisti dell'India, o non piuttosto questi da lui appresa l'avessero? Il perno, su cui si aggira la discussione tutta, è un pezzo al fine delle opere di Boezio nella stessa forma che nelle stampe, in certi codici ancora, come nel bello appartenente a Mead, di cui parla nelle Trans. filos. an. 1735 il Ward. Al chiudere del libro I.° *de Geometria*, aggiugne Boezio qualche cosa sulla tavola che i Pitagorici usavano per la moltiplica, e la divisione ; e dice che, per costruirla, avevano degli apici, o caratteri diversamente formati: *habebant diverse formatos apices, vel characteres*; poichè laddove alcuni dipingevano i numeri da uno a nove con lettere dell'alfabeto, altri disegnate si avevano altre note, che nel codice, per fede di Montucla, tali si veggono, quali nel prospetto dei caratteri numerici dai codici di diversi scrittori raccolti nella Lezione seconda, a confronto loro, e co' nostri, ho esibito. E di tali note non letterali, ed alle nostre in parte simili, è piena la Pitagorica tavoletta, e la spiegazione, alla quale Boezio procede del modo, onde i Pitagorici se ne valevano per la moltiplica, e per la divisione. È dibattuta l'età del codice. L'Uezio mostra di non sapersi persuadere dell'antichità attribuitagli, spargendo queste dubitative parentesi: (*cujus antiquitas erit probanda*) . . . (*si nempe manuscriptum istam aetatem refert*). Montucla, pagina 120, afferma non avere tal codice, ed altri simili, che tre a quattro secoli, con che non salirebbero al più, che al secolo XIV. A pagina però 363, riferendo il giudizio di quelli che gli stimano non essere: *peut-être pas antérieurs au douzieme ou au treizieme siecle*, si accontenta di dire, essere tale estimazione: *assez vraisemblable*, nè saper trovare, che Weidler, malgrado i suoi sforzi, riuscito sia a ben solidamente provare, che godano di una antichità maggiore. Intanto siccome: *vers ce temps*, soggiunge egli, *commença à s' introduire dans ces contrées nos chiffres*; *ainsi il a pu arriver que des Copistes ayent substitué ces caracteres à ceux qu' ils voyoient dans les manuscrits de Boece qu' ils transcrivoient.* E ciò, che qui possibile, molto probabile si era fatto a Montucla sentire alla pagina 120: *il est assez probable que ces caracteres sont l'ouvrage du copiste.* Riconoscendo però assai probabilmente cangiate nel luogo di Boezio, le originali numeriche figure, salva tuttavia vuol egli, e senza alteramento la esposizione, che vi si legge del modo, con cui i Pitagorici adoperavano quei loro apici, ed asserisce che: *à travers l'obscurité de son explication, on ne peut y méconnoître nôtre Arithmétique moderne*, a segno che *il faudroit, pour détruire l' induction que fournit ce passage de Boece*, *supposer qu' il a été ajouté dans les douzieme, & treizieme siecles; car en le reconnoissant pour l' ouvrage de Boece même, on est forcé de convenir que le principe de notre Arithmétique moderne étoit connu de son tems. Mais qui pourra se persuader que tous les manuscrits de cet Auteur, sans en excepter aucun, aient été altérés de cette maniere ? quelle preuve ne détruiroit-on pas si l' on pouvoit ainsi rejetter à son gré des morceaux considérables d' un ancien Ecrivain* ? Sin qui, rispetto ai due primi punti, e stimando, rapporto al primo Montucla assai probabile, che le numeriche figure, alle nostre in parte simili, esistenti nei codici di Boezio, siano arbitrarie sostituzioni de' copisti, alle native nei secoli duodecimo, e decimoterzo; e sentenziando a dispetto della tenebria del luogo, che vi si intravvede il principio, il fondo della nostra aritmetica. Ascoltiamolo rispetto al terzo, combattuto, tra la persuasione di dovere pel testo di Boezio, riconoscere nella scuola di Pitagora: *dans l'école de Pythagore* la nostra aritmetica, ed il convincimento per le numerose testimonianze degli Arabi stessi dell'indiana sua origine : *j' aimerai*, scrive alla pagina 120, *mieux conjecturer que cette arithmetique fut une de ces inventions que Pythagore puisa chez les Indiens , que de penser que eeux-ci la tirerent des Grecs. J'avoue que si cette Arithmétique eût été ordinaire chez ces derniers , ce seroit une grande présomption en leur faveur. Mais une méthode usitée seulement par un petit nombre d' hommes mysterieux , ne me paroit point propre à avoir pénétré jusqu' aux Indes.* Ma alla pag. 364 pensa, che essa aritmetica nell'India nata: *delà elle aura pu passer de proche en proche aux Arabes & aux autres peuples de l'Orient avec qui les Grecs eurent un grand commerce dans les premiers siecles après la fondation de Costantinople. Ce fut peut-être alors que ces derniers la connurent: mais comme les Sciences commençoient à décliner beaucoup chez eux, ce ne fut qu'une connoissance stérile, & dont ils ne tirerent point les avantages que leurs ancêtres en auroint tirés. Boece qui écrivoit au commencement du sixieme siecle, & qui avoit puisé chez les Grecs tout son sçavoir, la reçut d'eux, & l'inséra dans sa Géométrie, en l'attribuant à Pythagore, soit que ceux, de qui il la tenoit, le lui eussent dit ainsi, soit qu'il ait lui-même hazardé ce trait. Cette conjecture me paroit avoir l'avantage de concilier toutes les difficultés.* È manifesto il travaglio, l'imbarazzo, l'ondeggiamento, che il passo di Boezio cagionò al francese storico delle matematiche. Ma ecco in fine Pitagora cacciato di mezzo, privo non che della gloria di aver egli inventata, ed agli Indi comunicata la nostra aritmetica, ma sì ancora del merito di averla nell'India appresa, e di là nella Grecia trasferita, e della sorte pur privo di averla in qualunque modo conosciuta; nè più necessario di riconoscerne nella scuola di Pitagora l'addottrinamento; e non più essa un metodo al greco volgo nella felice età del fiore delle scienze non familiare, bene però dal piccolo drappello dei misteriosi Pitagorici usitato. Ciò che resta per Montucla si è, che il luogo di Boezio, contiene il fondo della odierna aritmetica, ch'egli l'apparò dai Greci, e questi dagli Arabi la ricevettero ne'primi secoli della nostra era, dopo la fondazione di Costantinopoli. Ma Boezio, dopo una lunga luminosa carriera, cadde vittima della sospettosa barbarie l'anno 525. Posto vero, che egli da'Greci, e questi dagli Arabi appresa avessero l'indiana aritmetica, ne conseguirebbe di doversi spignere la conoscenza dell'indiana aritmetica tra gli arabi, sino, e più in là del secolo quinto. Io, contro le opinioni di Mabillon, di Papebrochio, di Kirchero, la ho spinta sino al secolo ottavo, sotto il regno di Karoun. Non mi sento di spignerla più oltre, e a due, tre, e più secoli prima che l'Arabia fosse per Al-Mansor levata dalla notte dell'ignoranza. E non so poi , come il volere per certa cosa , che Boezio sia stato della indiana aritmetica istrutto, ed in qual luogo ne abbia usati i principii, si accordi colla molta probabilità , che native ivi non siano, ma dai copisti nel secolo duodecimo, o terzodecimo intruse le numerali figure alle indiane, che noi adoperiamo in parte somiglianti. Se Boezio tolse dagli arabi, e di esporre intese l'arte dell' indiana aritmetica, perchè non tolse insieme, e non impresse in quella sua esposizione, le indiane numerali figure?

Ma prendiamo ad esaminare in sè stesso il pezzo di Boezio, e studiamoci, tra l'oscurità, di penetrarne lo spirito, e rilevarne la sostanza. Distinto il costume diverso tra Pitagorici nel dipignere la tavoletta loro, quali di caratteri singolari servendosi, e quali di caratteri letterali, così procede Boezio, a descrivere il modo, onde distribuivano l'una, o l'altra sorte di caratteri, od apici ad uso nella moltiplica, e nella divisione: *hos apices ita varie ceu pulverem dispergere in multiplicando, et in dividendo consueverunt, ut si sub unitate naturalis numeri ordinem jam dictos characteres adjungendo locarent, non alii quam digiti nascerentur. Primum autem binarium (unitas enim, ut in Arithmeticis est dictum, numerus non est, sed fons et origo numerorum* 10) *inscripta ponentes* 20, *et ternarium* 30, *et quaternarium* 40, *caeterosque in ordine se se sequentes, proprias secundum denominationes assignare consueverunt. Sub linea vero, centeno insignita numero, eosdem apices apponentes, binarium* 200, *ternarium* 300, *quaternarium* 400, *caeterosque, certis denominationibus respondere decreverunt. In sequentibus vero paginularum lineis, idem facientes nullo erroris nubilo, obtenebrantur. Scire autem oportet et diligenti examinatione discutere in multiplicando, et partiendo oportet cui paginulae digiti, et cui articuli sint adjungendi. Nam singularis multiplicator decem: digitos in decenis, articulos in centenis. Idem vero singularis multiplicator centum, digitos in centenis, articulos in millenis, et multiplicator milleni, digitos in millenis, et articulos in decenis millenis habebunt* .... Ma basta, similmente precettando, sino alla moltiplica del 100000 per 100000. Dopo di che segue *De divisionis rubrica*, ed il tenore è lo stesso, e sì fatto, che l'autore stesso il confessa oscuro, e non più che un ombreggiamento di regole da meditarsi dallo studioso con grande attenzione, onde schiarirsene i sensi. Coraggiosamente però, io mi spingo entro codeste tenebre, sebbene mi sembri di ritornare a quel momento, in cui curioso di penetrare nella caverna al sinistro fianco dell'ampio mirando ponte, tra colle e colle per opera di natura a Veja disteso, gettatomi boccone, entrai nell' angusto foro, e per alterne contrazioni, e distensioni, mi spinsi a modo di serpe avanti, sino a poter alzare il capo, e poco a poco, tutto ritto sulle piante il corpo; ma non sapendo, in mezzo alla folta notte, ove volgermi, dovetti retrogradendo uscirne, e preso miglior consiglio, rientrarvi da bituminoso acceso torcio preceduto, e nella destra tenendo, e via via svolgendo un gomitolo di funicella, colla sua estremità ad un grosso sasso al di fuori raccomandata, la quale, estinguendosi per mala sorte il lume, fosse guida al ritorno, e stando il lume, misurasse della caverna la lunghezza. Ma quale è qui la face? quale il filo? Face sarà l'aurea legge semplicissima, dell'indiana aritmetica distinto pregio, del valor decuplo di passo in passo in lineare cammino da sinistra a destra; e filo, sarà il filo del testo intero di Boezio, dal complesso, e dall' oggetto di esso, misurando il senso suo, e con questo, i sensi dei membri tronchi ed imperfetti. Al lume pertanto di codesta face, e colla condotta di codesto filo, io in primo luogo rilevo nell' esposto testo di Boezio, niuna menzione farsi di una decima nota, da unirsi al carattere dell' unità, per comporre il dieci. Non essersi, per secondo, insiememente per la dinotazione del dieci, un apice semplice singolare, e la enumerazione dei distinti apici da dipignersi nella tavoletta, non proseguire, che sino a nove. Per terzo, ai decadici numeri di qualunque ordine si siano, decine, centinaja, migliaja, ecc. applicarsi i nomi di binario, di ternario, quadernario ec. ed intruse per conseguenza essere quelle figurazioni all'indiana 20, 30, 40 ... 200, 300, 400 .... Per quinto, dalla diversa fila orizzontale delle ajuole, o caselle, nella quale trovasi collocato, acquistare un apice stesso il valore o semplice, o decadico, la denominazione di *digito*, o di *articolo*, e di articolo d'ordine meno, o più alto. Per sesto, la tavola invece di terminare, come ora appresso noi, colla linea delle decine, avanzarsi a quella delle centinaja, ed estendersi oltre. La dottrina, per settimo, della moltiplica, ristrignersi alla moltiplica dei numeri, ivi detti *singolari*, da noi *semplici*, coi *decadici*, e di questi fra loro. Nell'ottavo, i prodotti esprimersi con nuove composizioni degli apici, le quali pongono sotto dell'occhio il valor loro; ma si valutarsi in generale per *digiti*, ed *articoli*, dandosi sempre il titolo di *digiti* al numero di inferior ordine, tra i due nel prodotto compresi, e quello di *articolo* all'altro di ordine più alto, e distinguendo l' ordine colla linea, ed il quantitativo colla casella. Così, se moltiplichisi il singolare numero nove col decadico ottanta, non si fa già, per esprimere il prodotto settecento venti, una novella particolare composizione di numerali apici, ma se ne assegna il valore per due digiti, nella linea delle decine, e per sette articoli, nella linea delle centinaja. Ed ecco chiaro in esempio, il senso del precetto: *singularis multiplicator decem, digitos in decenis, articulos in centenis habebit*, la cui versione letterale si è: fatto il numero singolare moltiplicatore del decadico, produrrà digiti nelle decine, ed articoli nelle centinaja. E di qui, si apre la strada a comprendere i sensi degli altri precetti. Or dove in tutto ciò, principio, traccia, ombra d'indiana aritmetica, se all' incontro è palese mancarvi l'essenza? Se non vi è il decimo carattere, che di niun valore solitariamente posto, apposto però ai numerali caratteri, dia ad essi un valore decuplo tanto più elevato, quante più volte a destra apposto, o ripetuto? Se non havvi l'addossamento in linea dei numerici caratteri semplici, per esprimere i numeri composti? Se invece di unirli in retta linea, e dal luogo di ciascheduno in essa estimarne il valore, distribuiti, e dispersi come polve, dalla fila delle caselle, e dalla casella il valore in ordine, ed in quantità se ne estima? Io non so dunque scorgere, nel passo di Boezio, fondo veruno d'indiana aritmetica.

Che se stato vi fosse, l'ammirazione dei talenti di Pitagora, la parzialità, il trasporto per le cose tutte ornate del nome di lui, il credito stesso di Boezio, il pregio, e l'uso delle sue opere presso i Latini, come permesso avrebbero, che tra essi, larga non si spandesse di tale prezioso fondo la notizia? Che dati eglino non si fossero a svolgerlo, a coltivarlo, a renderlo fruttuoso? Voi già vedete, dopo l'intrinseco esame, un argomento estrinseco ma forte; e vo a rinvigorirlo con una autorità di grandissimo momento. Leonardo, al principio del suo Abbaco, presenta, come già nella seconda Lezione vi dissi, quali novelle, le indiane numerali figure, così che, a farne rilevare i significati, le mette di confronto colle romane. E come sariano state novelle, se state fossero nel libro di Boezio, girante per le mani di tutti i dotti? Più: a motivo d'imprendere a spiegare l'indiana scienza di conteggiare, adduce, che la latina gente, da indi in poi, siccome sino a quel tempo, non ne rimanesse senza: *ut gens latina de caetero, sicut actenus, absque illa minime inveniatur*. E come ciò, se indiana arte di aritmetica comprendeva il testo di Boezio? Se leggasi la prefazione di Leonardo, apparisce il suo ardore, in viaggiando per l'Egitto, per la Siria, per la Grecia, per la Sicilia, ed altre regioni, di istruirsi, ed arricchirsi di quanto, presso i diversi popoli studiavasi di aritmetica: e con tanta sollecitudine, e curiosità negli esteri paesi, avrà in Italia ignorata l'opera di Boezio? o non avrà nel pezzo, di cui si tratta, ravvisati gli indiani caratteri, nè inteso il fondo della a lui sì cara, e familiare indiana aritmetica? o bene avvisandosi di tutto ciò, avrà avuto l'impudente ardire, di proclamare alla latina gente, che sino allora ne era stata priva, ed egli si assumeva di esserne a lei maestro? L'esame pertanto intrinseco del luogo di Boezio, e l' autorità di Leonardo, concorrono a renderci certi, che Boezio nulla scrisse di indiano, che le numerali figure, in parte alle nostre simili, sono posteriori sostituzioni de'copisti, come stimò probabile anche Montucla, e che contro la ferma sentenza di lui, il fondo dell'oscuro testo, nulla è di aritmetica indiana. Gli storpi sensi poi, le grammaticali sconcordanze, l'equivoca sintassi, i termini soprabbondanti, i modi barbari, i solecismi, additano una imperita mano, che ebbe la temerità, se non di aggiugnere dopo la Geometria di Boezio, tutto quel pezzo fuori di sito, almeno di alterare, spargere di sconciature, di tenebre coprire ciò, che Boezio vi aveva scritto. Cade così per ogni verso il congetturale edifizio di Montucla, che Boezio apprendesse dai Greci negli ultimi lustri del secolo quinto, o nei primi del sesto, l'indiana aritmetica, ed i Greci dagli Arabi già ricevuta l'avessero nel quarto, frutto del gran commercio apertosi, colla fondazione di Costantinopoli. Che se non mentì Boezio, e Pitagorica cosa veramente, in quel luogo prese ad esporre, per questo appunto si deve dedurre, che nulla d'indiana aritmetica quel luogo originalmente contenne. Poichè Leonardo, tra le arti aritmetiche diverse, presso diverse nazioni, pel suo inquieto genio apparate, distingue la Pitagorica, ma ad essa pure, come a tutte le altre, contrappone la indiana, e pronuncia, che di questa a confronto, riputava quella, quasi errore: *quasi errorem.* Ed abbiasi pure per appassionata, dura, ed ingiusta la frase, ciò non fa, bastando, che sull'autorità di Leonardo, il quale l'una aritmetica, e l'altra ben conobbe, si accordi la diversità loro. Forse poi Leonardo, con quelle parole, *quasi errorem*, altra accusa alla Pittagorica aritmetica dar non volle, che di vagare quasi all'incerta. Che se, ancora così mitigata, iniqua sembrasse a taluno l'accusa, avanti di prendersela con Leonardo, ascolti Montucla, e se la prenda poi, o con ambedue, o con niuno. Quantunque pertanto nella Parte I, Lib. III°, Articolo IX, egli dia a Pitagora, ed a' suoi discepoli la gloria di avere nella Grecia elevata dalla condizione di semplici arti, al grado di scienze l'Aritmetica, e la Musica, prosegue però soggiugnendo: *l'Arithmétique fut toujours chez les anciens fort différente de ce qu'elle est aujourd'hui. On n'y trouve presque aucune trace des opérations dont les modernes composent la plus grand partie de la leur; & il y a apparence que ces opérations se faisoient presque à force de tête; du moins nous avons perdu tous les livres où elles étoient expliquées. Tels étoient, à ce que nous conjecturons, un traité de Nicomaque, & les deux premiers livres de collections Mathematiques de Pappus, dont il nous reste un petit fragment, où l' on etrevoit* (notisi bene) *le procedé embarrassant par lequel on diminuoit un peu la difficulté de multiplier de grands nombres.*

Lezione V.

Dell'epoca della Indiana Aritmetica in Italia, in Ispagna, in Inghilterra.

Il motivo, che Leonardo Pisano adduce, di prendere a spiegare alla latina gente l'indiana aritmetica, ch'ella cioè non rimanesse più a lungo, come sino allora, di sì bell'arte senza: *ut gens latina de cetero, ut actenus, absque illa minime inveniatur*, chiaramente dimostra, ch'egli ad essa ne fu il maestro primo. Ma quando ciò avvenne? Il Vossio scrive, che Leonardo visse circa il 1400, od anche più presto: *aut etiam citius.* Il Montucla non gli lascia godere questo più presto, e lo pone nel corso del XV secolo. Ma il fatto sta, che in fronte ai codici dell'Abbaco di Leonardo esistente nella Biblioteca Magliabechiana leggesi: *Incipit liber Abbaci compositus a Leonardo filio Bonacci Pisano in anno* 1202; ed in altro della medesima Biblioteca, ed in quelli della Riccardiana, e della Ambrosiana sta in testa scritto: *Incipit liber Abbaci compositus a Leonardo filiorum Bonacci Pisano in anno* 1203, *et correctus ab eodem* 1228. Nulla dunque meno, che di due secoli, è nella storia delle Matematiche sì celebre di Montucla, il ritardamento del tempo, in cui Leonardo fiori. e la nostra Italia, ebbe per lui la sorte, di essere della prestante indiana aritmetica arricchita. Nel Codice della Riccardiana, dopo la prefazione a tutti i codici comune, si trova una Lettera Dedicatoria a Michele Scotto, che Leonardo comincia con dirgli, che aderire volendo alla sua inchiesta del libro, che da grande tempo, *dudum*, aveva composto, ma stimando insieme dovere di renderlo più degno di un sommo filosofo, qual egli era, ed a tutti più, che anzi utile, lo aveva più sottilmente indagando, e perscrutando, corretto. Questo Michele Scotto, che Leonardo del titolo di *sommo filosofo* onora, è senza dubbio quegli, del quale nelle Cronache loro parlano Ricobaldo, e Francesco Pipino, e che fu familiare di Federico II Imperadore, rinomatissimo a que'tempi per l'opera *Dei segreti della natura*, per un trattato *sopra la sfera* di Giovanni di Sacrobosco, e per Giudicaria Astrologia. Muratori, *Antich. Ital.*. Tomo I°, Diss. 26ª. E Dante nel *Canto* 20 *dell'Inferno* a versi 115, di esso Michele disse:

» Quell'altro, che ne'fianchi è così poco
» Michele Scotto fu, che veramente
» Delle magiche frodi seppe il giuoco. »

Più che il Vossio, più che il Montucla, bisogna confessare, che errò circa la età, in cui visse Leonardo, il Cardano, allorchè nel libro 2.° *De consolatione*, essendo già verso la sua metà il secolo XVI, scrisse: *paucis ante annis Leonardus Pisanus*, Tomo I°, Op. pag. 598. Ma corresse Cardano, o temperò almeno il suo errore nel Tomo X° al Capo 2°, dei Paralipomeni, dove parlando degli inventori, e scrittori di aritmetica, narra di aver veduto nella Biblioteca del Beato Antonio in Venezia un codice, *eraso* però *titulo*, dell'opera di Leonardo, già da gran tempo avanti Frate Luca, *jamdiu ante fratem Lucam*, composta. Con precisione, segnato avrebbe a Cardano il tempo del componimento, il titolo. E sarebbe egli mai accaduto, che Cardano, dapprima ingannato si fosse, prendendo in troppo stretto senso il titolo *moderno*, che a Leonardo dà Fra Luca, in confessare di aver cavato dagli antichi matematici Euclide e Boezio, e dai moderni Leonardo Pisano, Giordano, Biagio da Parma, Giovanni Sacrobosco, e Prosdocimo Padovano la maggior parte del suo volume, posto in luce l'anno 1494? Ma non era Leonardo, sebbene tra il secolo XII, ed il XIII vissuto, moderno, rispetto ad Euclide, ed a Boezio ancora? Si osservi inoltre, che F. Luca mette Leonardo alla testa de'moderni, e tra questi nomina di seguito Giovanni Sacrobosco, che pur morì nel 1256: *aetate*, dice il connazionale Wallis, *satis matura*.

Il contrario di quello, che fece Cardano, circa il tempo di Leonardo, errando nel citato passo del libro *De Consolatione*, ed emendando, o mitigando l'errore in quello de'Paralipomeni, o delle cose lasciate, fece rispetto alla patria, dicendo giustamente nel primo: *Leonardus Pisanus*, e malamente nel secondo: *Leonardus Pisauriensis*, quasi fosse stato Leonardo di Pesaro: dove però, non so, se abbia Cardano errato di cognizione storica, e non piuttosto di dicitura latina. L'errore, pose in qualche esitazione Wallis, il quale al capo XIII, pagina 67, di Cardano riferisce: *memoratque Leonardum Pisauriensem (eundem credo cum Leonardo Pisano)*.

Viene detto Leonardo, in testa ai codici del suo Abbaco figlio, o de'figli di Bonacci: da questa filiazione, ne fu tratto il denominarlo Fibonacci. La Biblioteca Ambrosiana, oltre al codice dell'Abbaco di Leonardo, un altro ne possiede, che contiene i di lui opuscoli, ed il gentilizio nome ne manifesta. Era Bigolli. Questo restò ignoto allo Zaccaria nelle sue *Scorse letterarie per l'Italia*, pagine 231 e segg.; al Tiraboschi nella sua *Storia della letteratura d'Italia*, edizione di Modena 1781, Tomo IX, pagina 45; al Targioni ne'suoi *Viaggi in Toscana*, Tomo II, pagina 58; al Bandini nella *Biblioteca Leopoldina Laurenziana*, Tomo II, col. 39, e segg.; agli autori del *Nuovo Dizionario Istorico impresso in Bassano l'anno* 1796, Tomo VI, pagina 120, e Tomo IX, pagina 334. Fu soltanto noto al Mazzucchelli, il quale nella sua opera *Gli Scrittori d'Italia*, per ordine di alfabeto, al cognome *Bigolli*, segna per nome Leonardo, e manda al titolo *Pisa*, ove nota (*Leonardo da*) essendo la più ordinaria denominazione *Leonardo da Pisa*.

Curiosità sin da principio, debb'essere nata di sapere, come Leonardo apparò egli stesso l'indiana aritmetica. Montucla dice, che portato dalla brama d'instruirsi nelle matematiche, fece de' grandi viaggi in Arabia, ed in altre contrade d'oriente: *porté du desir de s'instruire dans les Mathématiques fit de longs voyages en Arabie, et dans les autres contrées orientales*. Meglio ci descrive la cosa Leonardo stesso, nella prefazione al suo Abbaco. Ci fa sapere, che Pisa sua patria, teneva in quel tempo, sulle coste dell'Africa un florido commercio, che per cagione del grande afflusso de'mercadanti suoi compatriotti, stava in *Bugea* (città sul lido di Barberia dagli abitanti detta *Bugeja*, o *Bugei*) una Dogana, alla quale suo padre, in ufficio di Pubblico scriba presiedeva; che colà in sua puerizia il padre, a fine di procurargli stato, chiamollo, e subito nella enumerazione, e nelle operazioni della mirabile arte degli indiani il fece introdurre; del che tanto fu il diletto, che tosto ne prese, che intensamente si applicò a studiarla; che spinto di poi per cause di negoziazione a viaggiare per l'Egitto, per la Siria, per la Grecia, per la Sicilia, per la Provenza, si aveva fatta sollecitudine, senza risparmio di fatica, di quanto in ogni luogo insegnavasi, e praticavasi di conteggio, ma che, appresi e confrontati tutti i modi, il frutto era stato di comprendere vieppiù dell'indiano l'eccellenza, e di strignervisi più interamente. L'uomo, che in sè ci presenta Leonardo stesso, è ben diverso da quello, che in lui ci presenta

Montuela. È maggior lode per Leonardo, se dalla natura dotato di genio per le scienze, ma non ugualmente dalla sorte di ozi fornito, e di ricchezza per coltivarlo, e col domestico studio, e col viaggiare a bello studio, seppe porre a profitto l'ubbidiente allontanamento dalla patria, ed il necessario commerciale tragitto dei mari, tra le cure, le contese, le varietà della fortuna, intendendo sempre a raccoglicre lumi, e costantemente vivo nell'animo serbando quel divin fuoco, che propizio destino acceso vi aveva, senza lasciarlo mai, nè da disastrosa avventura spegnere, nè da prospera soverchiare. Ah egli è pur vero, che siccome ne'marciosi fondi de'stagni, si annida un'aria di fuoco pregna, la quale da scalzo piè premuta, monta per la impura acqua in largo bollore, e tocca solo da facella, arde in rossa ed azzurra fiamma, delizioso notturno spettacolo; non altrimenti nella umile volgar condizione, si nascondono anime di celeste fuoco informate, cui tenue impulso basta a fare avvampare, a grande lor gloria, ed universale beneficio! E così, stabilito venisse un sistema di pubblica educatrice Providenza, idoneo a scuotere, e fare scintillare nella cittadinesca plebe, e nella rusticana gente cotali anime, con institutori valenti a discernere l'indole, e la vivacità delle scintille, vo dire la specie, ed il grado dell'ingegno, e con un Magistrato, che ne prendesse cura, sostentamento, incoraggimento, sino ad essersi elleno ornate della copia di lumi, conveniente agli importanti impieghi dello Stato! Qual utile alla società, il sistema dell'uso de'talenti! Dopo, non si sa, quanti anni, ritornò Leonardo alla patria, non pieno la bocca di favolose maraviglie, non mostruosamente carico la persona di straniere usanze, non disdegnoso il cuore dei patrii costumi, ma ricco lo spirito di scienza, di novella scienza, dell'indiana aritmetica, ed a bene della patria, a bene di tutta la latina gente, ne aprì scuola. Più di quello, che Leonardo di sè racconta, il fece viaggiare Cardano in quel suo passo del libro 2°, *De Consolatione,* Tomo I, Op. pagina 598: *Quamobrem illorum vanitatem satis demiror, qui homines tantum temperatorum regionum rationales esse existimavit, ut in extremis terrae plagis feris persimiles Solinique monstrificas formas comminiscuntur. At equidem longo judicio aberrant, paucis enim ante annis, Leonardus Pisanus, dum in Indiam, et Aethiopiam penetrasset, ex India Arithmeticam, qua nunc utimur, ex Aethiopia algebrae artem supputandi (argumenta clarissimorum ingeniorum) detulit.* Leonardo tra i luoghi, ai quali per affari di negoziazione viaggiò, non nomina nè l'India, nè l'Etiopia. Quello, che qui di vero dice Cardano, si è, che Leonardo al suo ritorno in Italia, portò seco e l'indiana aritmetica, e l'arte dell'algebra insieme: al contrario di Montuela, che del trasporto dell' algebra sola, fa l'Italia, e l'Europa tutta a Leonardo debitrice.

Ed eccomi già, a dover dare una giusta idea del libro di Leonardo. No, non è un libro di sola algebra, ossia della più alta parte dell'aritmetica di quei tempi, che tale era, numerale essendo, l' algebra allora. Non è, tutto all'opposto, un libro dei più semplici elementi di aritmetica solamente. È un libro, che da un estremo all'altro si estende, e se non contiene a tutto rigore la piena scienza de'numeri, che Leonardo in sua prefazione promette, si dilata al certo per essa molto ampiamente. Ivi la maniera di segnare all'indiana un qualunque numero, con bella esposizione della semplicissima legge del valore di dieci in dieci, passo passo alzato da destra a sinistra, e le consequenti regole nel sommare, nel sottrarre, nel moltiplicare, nel dividere in interi, ed in rotti. Ed ivi di poi le dottrine delle ragioni, delle proporzioni, e delle progressioni, l'aurea regola *del tre* diritta, inversa, composta, la regola di società, la regola di alligazione de'metalli per le zecche, quelle de'cambj, de' baratti, delle usure, quelle delle misure, e comparazioni delle botti, ed altri vasi, e della estimazione delle fabbriche. Ivi sottili speculamenti, e quesiti sui numeri, la distinzione di varie serie, la somma loro. Ivi ancora l' arte della falsa posizione, e semplice e doppia, a moltissimi curiosi problemi applicata. Più: ivi le estrazioni della radice quadrata, e della cubica, ed ampia teoria delle radici irrazionali, e semplici, e composte, in un colla industria di assoggettarle alle operazioni, e coll'artificio ad estrarre dai *Binomj* e dai *Recisi* la radice, di quello oggidì usato, bisogna confessarlo, più naturale, e di più bello effetto. Ancora più: ivi la esposizione delle equazioni di primo, e di secondo grado, e gli scioglimenti loro, col corredo, ove è bisogno, di geometriche dimostrazioni, e con utili applicazioni a geometriche ricerche. Che ve ne pare, Egregi Giovani? Qual libro di aritmetica moderno, che sia più ricco? Che ne sia tanto? Quanti di loro, che portano il bel titolo di *Periti*, ed il più fastoso d'*Ingegneri*, che più, anzi tanto ne sappiano?

Nel dirsi, libro d'indiana aritmetica, il libro di Leonardo, non si vuol già intendere, che tutto d'indiana origine sia ciò, che esso comprende, ma si, che tutto vi è trattato all'indiano modo di comporre, e segnare i numeri, e di fare le aritmetiche operazioni. Del resto, vi si vede ciò, che sulla natura, e sullo diverse specie de'numeri si speculò da Pitagorici, ciò che Euclide, od espressamente sotto natural forma, o sotto lineare travestimento ne insegnò; e ciò, che ai numeri ed alle geometriche grandezze comune, Euclide stesso dimostrò, rispetto alle seconde; nè basta: alle segnabili, ma inassegnabili radici de'numeri non quadrati, agli aggregati, o sottrazioni tra loro, e con veri numeri, alle radici effettuabili, e no di tali composti trasportati vi si trovano tutti gli sforzi di acume sulle incommensurabili dalla geometrica continuità nate, sulle diverse specie, sui gradi loro, che tanto rendere sogliono aspro il decimo libro di Euclide. E Leonardo poi stesso, nella prefazione dichiara, che quanto di buono in aritmetico genere aveva potuto nell'Egitto, nella Grecia, nella Sicilia, ed in qualunque altra regione, ove dal commercio era stato portato, raccogliere, tutto aveva all'indiana forma ridotto, e che alcune cose aggiugneva del suo, *quaedam ex proprio sensu addens.* Laonde, ecco nel libro di Leonardo, un tesoro delle aritmetiche invenzioni di tutte le nazioni sino allora formato, e di più ancora. E qual monumento di gratitudine non si deve a lui, che ce ne arricchì ? Le tele saranno dalle tignuole corrose, i marmi dalle punte degli acidi acriformi fatti in polve, i metalli dalle stesse irruginiti, e a poco a poco disciolti.

Leonardo nel beneficio all'Italia recato della indiana aritmetica, di quanto altro potè di qua, di là raccorre, o da sè inventare locupletata, ha a sè medesimo alzato il più glorioso monumento. Ogni aritmetico illuminato, giusto pregiatore della eccellenza dell'usato indiano sistema, sapendo il suo nome, gli tributerà lode, e riconoscenza. E vaglia questo mio scritto, a renderlo universalmente noto.

Ma come è egli avvenuto, che un nome sì benemerito cadesse, per il comune almeno degli aritmetici, in oblio ? Che di un sì prezioso libro, non si facesse il dovuto conto, nè mai emesso siasi alla pubblica luce ? Noi Veronesi, stupire non dobbiamo di ciò, cui sepolti giacciono i nomi dell'esimio architetto, che disegnò il magnifico mirabile arco, che orna il nostro Adige, e di chi nel grandioso anfiteatro emula volle a Roma la città nostra. Quante volte gli uomini benefici, e degni d'immortalità, andarono immersi in quelle onde, nelle quali precipitare dovevano gli uomini infesti, e di essere nati indegni ! Pure, rispetto a Leonardo, ed al suo libro, una buona ragione adduce Tartaglia nella pagina 1ª, ove, dopo avere di Leonardo, e della sua opera esposto ciò, non che da sè aveva veduto, ma da più persone gli era stato riferito, soggiugne, che la causa, per cui a lor dire non era giammai stata data in luce la degna opera, procedeva dall'averne frate Luca (com'esso pure testifica) raccolti tutti i fiori, e nella voluminosa sua *Somma di aritmetica* interposti. Frate Luca fioriva ed era in auge quando novella diffondendo si andava l'arte cotanto utile della stampa, e stampò la detta sua *Somma* in Venezia l'anno 1494. Avventurosa combinazione per frate Luca, avversa per Leonardo!

Leonardo chiamò latina gente quella di Pisa sua patria, e generalmente quella d'Italia; e sollecito, che non rimanesse più a lungo dell'indiana aritmetica priva, compose nel 1202 in latina lingua il suo libro, e nella stessa lingua, il rifece l'anno 1228. Ma perchè scriversi da Leonardo latinamente ? Era egli questo modo di scrivere al suo intento acconcio ? al diffondimento della novella dottrina opportuno? Senza immergermi troppo in caliginose quistioni, osservo concordar tutti quelli, che sulla origine della italiana lingua indagarono, che molto prima si cominciò ad usarla parlando, che scrivendo, e prima scrivendo versi, che scrivendo prose; nè prosa italiana veruna additare si sa, anteriore all'anno 1264. Così fra gli altri Muratori, nella sua bella Dissertazione su questo soggetto, la trentesima seconda di quelle sulle *Antichità italiane*. E ben comprendesi la ragione della gradazione, concependo, giusta l'opinare del grande maestro in antichità, la toscana odierna lingua quale avanzo dell'antica, che non lasciandosi spegnere sotto il giogo della latina, nè poi nell'involgimento in altre barbare, corrompendo ed essendo corrotta, dalle composte forme in un sistema conciliate vestita, ricuperò a poco a poco il dominio, ma prima nel parlare, perchè più libero; poscia nello scrivere, a legge più soggetto, e negli scritti poetici, siccome di diletto, prima, che nei prosaici più gravi. Ecco dunque la ragione, per cui in latina lingua nel 1202, e nel 1228 scrisse Leonardo il suo Abbaco, e latina gente la italiana appellò egli. Perciò stesso confermerebbesi, se più uopo ve ne fosse, di due in tre secoli maggiore, che Montucla non la fece, l'antichità di Leonardo, e del suo Abbaco.

Trovasi, l'ho detto sparsamente, ed è bene qui raccogliere, trovasi quest'Abbaco manoscritto in Firenze nelle quattro grandi Biblioteche Laurenziana, Marucelliana, Riccardiana, Magliabechiana, anzi in questa, ne esistono due codici, e trovasi in Milano nella Ambrosiana. Non tutti questi codici sono perfetti: uno dei Magliabechiani è difettoso verso il fine, quello della Biblioteca Ambrosiana nel mezzo. Perfetto è il Riccardiano, ed è il lavoro nel 1228 rifatto, nel quale perciò alla Prefazione con gli altri comune, sussegue la Dedica a Michele Scotto. Cardano dice di averne veduto un codice nella Biblioteca del Beato Antonio in Venezia, del quale era abraso il titolo.

L'Abbaco non fu la sola opera di Leonardo. La Biblioteca Ambrosiana possiede inoltre un volumetto di opuscoli da lui composti, tra quali il sottilissimo su i numeri quadrati, che Frate Luca cita, e malamente compendia. Comprendevasi questo, al riferire di Targion Tozzetti, eziandio in un grossissimo trattato d'Abbaco anonimo in foglio, nella Biblioteca del Regio spedale di Santa Maria-Nuova in Firenze; ma avendone io commessa copia al dottissimo, ed egualmente gentilissimo amico Ab. Francesco Fontani bibliotecario della Riccardiana, ebbi in risposta, che essendo alcuni anni prima gita in disperdimento quella libreria, non aveva potuto della sorte di quel codice risaper novella.

Scrisse Leonardo anche di Geometria Pratica, e l'opera parve al Commandino sì buona, e della pubblica luce meritevole, che apparecchiata ne aveva una edizione, ma fu dalla morte sopraggiunto, e con esso lui cadde il bel progetto. Frate Luca però, un secolo avanti, prevenuto aveva essenzialmente il danno col versare nel trattato suo la sostanza tutta di quello di Leonardo, e col somministrare il modo di distinguere i di lui insegnamenti, dichiarando essere sue quelle proposizioni tutte, che non portano il nome di altro autore, che sono quasi tutte. Dietro a questo avviso, darò altra volta a vedere l'ampiezza della Geometria Pratica di Leonardo, ed i bei teoremi, de' quali altri hanno poi avuta la lode, o si sono eglino medesimi vantati, e sono il meglio, se non il tutto, che nel lungo corso di tanti secoli aggiunto siasi alla geometria di Euclide.

Ho creduto di dovere il raccogliere, e porre in chiaro prospetto, o citare almeno, tutto ciò che mi è venuto fatto di rinvenire appartenente ad un uomo, cui noi dobbiamo un acquisto ad ogni ordine di persone sì prezioso, quale della eccellente indiana aritmetica.

Sì, a Leonardo figlio di Bonaccio Bigolli di Pisa, dal torno del cadere del duodecimo, e del cominciare del terzodecimo secolo, l'Italia n'è debitrice: egli immediatamente dalle coste dell'Affrica, e dell'Asia, valicando il mare Egeo, l'Arcipelago, il Tirreno, ce la portò, non altri, per moltiplicati passi, d'Arabia in Ispagna, di Spagna in Francia, di Francia nelle nostre belle contrade. Io l'ho irrefragabilmente dimostrato, e tengo per certo, che il Gua-de-Malves non oserebbe più di tacciare ciò, quale pretesa figlia solamente di gelosa gloria nazionale, e sulla autorità massimamente di Tartaglia, fondata. Non è di fregio alla sua storico-analitica Memoria nel volume dell'Accademia dell'anno 174 (*sic*) inserita, un sì insolente rimprovero. Ritorcere piuttosto si potrebbe il rimprovero contro il suo connazionale. Montucla il quale nella Parte III, Libro I°, Artic. III, a lode di Gerberto, nato in Aurillac, e che fu poi Pontefice, sotto il nome di Silvestro II, non dubita di asserire, che i Cristiani d'Occidente debbono, soprattutto a Gerberto, di aver loro trasmessa l'Aritmetica, di cui noi facciamo oggidì uso. *Les Chrétiens Occidentaux doivent surtout à Gerbert de leur avoir transmis l'Arithmétique dont nous faisons usage aujourd'hui.* Noi non entriamo tra i Cristiani Occidentali, se ciò è vero. Ma si chiami Montucla a confronto di lui stesso. Pare a lui in questo luogo, che l'epoca della introduzione dell'Aritmetica odierna presso i latini, debba essere fissata verso l'anno 960, ovvero 970. D'altro canto, abbiamo veduto, come nella Parte I, Lib. III°, Art. IX, e nella Parte II, Libro, I°, Art. VIII, trattando dei numerici caratteri, in parte ai nostri somiglianti, che veggonsi in certi codici di Boezio, conchiude, essere molto probabile, che tali numerici caratteri, siano l'opera dei copisti nel secolo duodecimo, o decimo terzo, essendo al più, di quella età, i codici, ed essendosi verso quel tempo incominciato ad introdurre in queste contrade le nostre cifre, e la nostra aritmetica. E come dunque può reggere la epoca del 960, ovvero 970? Messa però da parte la incoerenza di Montucla, consideriamo la cosa in sè stessa, altri essendovi stati, che similmente opinarono, aver Gerberto l'odierna aritmetica introdotta. Ma dove, chiedo io, la introdusse egli? In Italia no certamente, poichè altrimenti non sarebbe stata ignota, e novella nel principio del secolo decimoterzo, all'uscire dalla penna di Leonardo il suo libro. In Francia dunque? In Aurillac sua patria? In Reims, dove sostenne pubblica scuola, e poi salì alla sede Arcivescovile? Ma se ebbe lo zelo di colà introdurla, come non si fece gloria d'introdurla in Bobbio Abbate, in Ravenna Arcivescovo, in Roma, ed in tutto il suo dominio Pontefice ? Vi ha di più : Leonardo tra le regioni, alle quali dalla Barbaria tragittò, delle quali apprender volle, ed all'indiano tutti insieme pospone i vari modi di conteggiare, nomina espressamente la Provenza. Or come in due secoli, non sarebbesi dall'Avergna, (*sic*) dalla Sciampagna nella Provenza propagato un sì facile, sì comodo, sì elegante modo? Ma a piena disamina della opinione, procediamo a considerarne il fondamento. Viene essa appoggiata su di alcune lettere di Gerberto medesimo, e precisamente sulla 160ª all'Imperadore Costantino diretta, e che nella Massima Biblioteca degli Antichi Padri, stampata in Lione presso gli Anissonj l'anno MDCLXXVII leggesi quale segue: *Vis amicitiae pene impossibilia redigit ad possibilia. Nam quomodo rationes numerorum abbaci explicare contenderemus, nisi te adhortante, o mi dulcissime solamen laborum, Constantine? Itaque cum aliquot lustra jam transierint, ex quo nec librum, nec exercitium harum rerum habuerimus, quaedam repetit memoria, eisdem verbis preferimus, quaedam eisdem sententiis. Nec putet Philosophus sine literis haec alicui arti, vel sibi esse contraria. Quid enim dicet, esse digitos, articulos, minuta qui auditor majorum esse dedignatur? Vult tamen videri solus scire quod mecum ignorat : ut ait Flaccus : quicum idem numerus modo simplex, modo compositus, nunc digitus, nunc constituatur ut articulus? Habes ergo (talium diligens investigator) viam rationis brevem quidem verbis, sed prolixam sententiis....* Sotto la lettera sta: *Praecedens epistola praeficitur libello suo de numerorum divisione, cujus initium : De simplici - Si multiplicaveris singularem numerum per singularem dabis unicuique digito singularem, et omni articulo decem, diserte scilicet et conversim etc.* Con che termina il piccolissimo frammento. Chi è, cui molesta non si faccia sentire la oscurità sua? Ben disse, al riferire del Wallis, Guglielmo Malmesburi, uno dei favoreggiatori tuttavia di Gerberto, che avendo egli il primo a Saraceni rapito l'Abbaco, diede delle regole, che dagli Abbacisti, per sudare che facciano, appena vengono intese: *Abacum certe primus Gerbertus a Saracenis rapiens regulas dedit, quae a sudantibus Abacistis vix intelliguntur.* Se non che, è da negarsi onninamente, che per istento, che vi si adoperi, vi si intenda, ed intravveda regola di saracena, o piuttosto indiana aritmetica, e l'onore primo a Gerberto di averla a Saraceni rapita. Chi sono difatti codesti maggiori, de'quali chi sdegna la scuola, non può dire, che cosa sia *digito, articolo, minuto*? Quale apparenza qui di aritmetica per Gerberto primamente introdotta, ed insegnata ? E che vuole poi dire quel rinfacciare all'illetterato filosofo d'ignorar seco, come il medesimo numero ora sia semplice, ora composto, ora come digito costituiscasi, ed ora come articolo ? È egli nell'indiana aritmetica un mistero, come il numero stesso varii di rappresentazione, di valore, secondo il vario luogo, secondo il numero di zeri, o di altre numerali figure a destra ? Si nota, che la lettera stava in fronte al libretto di Gerberto, sulla divisione de'numeri. Ma qui varie osservazioni si presentano. Primieramente sempre si è fatta la divisione dei numeri, ma in diversi luoghi e tempi, in modi diversi, e l'avere Gerberto composto un libretto, sulla divisione de'numeri non prova, che insegnato abbia a farla nell'indiano modo; chè anzi un singolare libro su tal soggetto, induce piuttosto a supporre un modo difficile, ed intralciato, e differente da quello, che dal semplice indiano sistema deriva. Io trovo secondamente, che Gerberto nella 17ª delle sue epistole, raccomanda a Geraldo Abbate del Monastero di Aurillac, di avere in comune il libretto sopra la moltiplica, e la divisione elucubrato dallo spagnuolo Giuseppe, ed a quel Monistero lasciato dall'Ab. Guarniero: *De multiplicatione et divisione libellum a Iosepho Hispano editum Ab. Guarnerius vobis reliquit; ejus exemplar in comune rogamus.* E nella sua epistola 25ª a Bonfilio Vescovo di Girona, scrive che per di lui cura, desiderava Adelberone suo Abbate Vescovo di Reims, una copia delle sentenze, che sulla moltiplica, e divisione de'numeri date aveva il sapiente Giuseppe: *De multiplicatione, et divisione numerorum Iosephus sapiens sententias quasdam edidit, eas pater meus Adelbero Remorum Episcopus, vestro studio habere cupit.* Io non so se l'autore di un libro di novello metodo sulla divisione avrebbe tanto raccomandato il libro di altro autore, in parte sullo stesso soggetto. Non è di costume presso gli autori tale zelo. Almeno si deve dedurre, che i libri di Gerberto, e dello spagnuolo Giuseppe concordassero, e fossero secondo il medesimo sistema aritmetico. Ora il Sig. Abate Andres, amante, si certo, della sua nazione, e delle glorie di lei, alla pagina 229 del Tomo I°, dichiara di non trovare bastevole fondamento, di attribuire all'uso degli odierni numerici caratteri in Ispagna, una antichità, quale sarebbe quella, sino alla metà del secolo decimo; e a pag. 231 sulla autorità dello scrittore della Paleografia Spagnuola, ritrae esso uso al secolo duodecimo, essendo il più antico manoscritto di spagnuolo scrittore, in cui riscontrisi una traduzione di certa opera di Tolommeo dall'arabo in latino l'anno 1136, nell'archivio di Toledo conservata; alla quale viene dopo, una simile versione di libro astronomico pel famoso Giovanni di Siviglia l'anno 1171, esistente nella Magliabechiana Biblioteca. E so bene vantarsi dell'Ambrosiana nn codice anonimo intitolato: *Liber Ysagogarum alchoarismi ad totum quadrivium*, che si stima in Ispagna composto da Cristicola l'anno 1115, e contiene le numeriche figure, o regole dell'indiano algorismo, ma quando anche non si erri nella estimazione, e dal 1136, si debba al 1115 retrospignere l'epoca della introduzione della indiana aritmetica nella Spagna pei Saraceni, tuttavia di un secolo quasi e mezzo, si resta al di quà del tempo, in cui quel Giuseppe spagnuolo, composto aveva il suo libro, sulla moltiplica, e sulla divisione de'numeri. Giusta dunque le indagini più diligenti, che si hanno, quel libro di Giuseppe non si può credere, secondo l'indiano modo, e per conseguenza neppure d'indiana aritmetica introduttore, zelatore, e nel proprio suo libro sulla divisione de'numeri maestro Gerberto, che di quello stesso di Giuseppe tanto pensiere si prendeva. È in terzo luogo a riflettersi, ed è ciò il colpo capitale, che la riferita lettera la 160ª tra le Gerberziane, trovasi interamente la stessa, in fronte al libro: *De Divisione numerorum ad Constantinum*, in un volume delle opere di Beda.

E di chi pertanto sono quelle lettere, quel libro? Di Beda? O di Gerberto? Quale autorità dunque, qual valore contro le chiare, e franche espressioni di Leonardo, concedere ad una lettera di oscurissimo stile? dal cui intrinseco, nulla di odierna aritmetica traspira? che per estrinseci raziocinj, risulta nulla poterne contenere? che a due autori ugualmente, viene attribuita? Dissipata è già la nebbia, che contro alla dimostrata verità si spandeva, e splendidamente rendesi manifesto, che a Leonardo Fibonacci Bigolli di Pisa immediatamente, noi dobbiamo dall'alba del secolo decimoterzo l'inalterabile tesoro dell'indiano sistema di conteggiare, di cui egli facendo al suo genio servire sulle coste dell'Affrica, dell'Asia, dell'Europa, nelle isole il travaglioso giro del commercio, seppe arricchirsi di tutti i lumi aritmetici qua e là sparsi, e de'suoi escogitati accrescere, ed alla patria, all'Italia, per sincero impulso di amore del pubblico bene, fu al suo ritorno sollecito di far largo dono.

MEMORIE STORICO-SCIENTIFICHE

SULLA ORIGINE DELL'ODIERNA ARITMETICA, E DELL'ALGEBRA, LORO TRASPORTO DALL'ORIENTE IN ITALIA, E PRIMI PROGRESSI NELLE CONTRADE DI QUESTA.

DI
D. PIETRO COSSALI C. R.

Quel piacere, che gusta industre agricoltore, raccomandato a fertile terreno eletto seme, in osservando lo spuntare del germoglio, l'alzarsi della pianta, l'uscire de'rami, l'aprirsi de'fiori, il maturar delle frutta, avviene che gusti del pari un amatore di qualunque scienza, nel rimontare alla origine di essa, nel contemplarne nella prima invenzione i principj, nell' ordinatamente discendere per la serie dei più valent' uomini, che la coltivarono, e nel seguirne nelle opere loro gli sviluppi, i progressi. Al diletto si accoppia una moltiplice utilità. Giova primieramente risalire alla prima instituzione di certe regole, per esatto intenderne i limiti, oltra dovere talvolta ampliati, o per l'opposto ristretti nel succeder de'tempi, e per penetrarne a fondo quella intrinseca metafisica ragione, che gl'inventori guida, ed accompagna, e che spesso tra le mani dei compilatori si oscura, o si cangia ben anche in altra, se pure squisita ed ingegnosa più, meno però persuasiva, posciachè meno immediata. Giova in secondo luogo il vedere l'ordine, onde una verità ne andò successivamente un'altra germogliando, per comprender chiaro la naturale loro dipendenza, e concatenamento, e per rilevar più in generale l'indole dell' umano spirito, ed il tenore, col quale si avanza nelle sue cognizioni. Giova per terzo il distinguere il merito di ciascheduno autore, e di ciascheduna nazione nelle diverse scienze, sì per la dovuta stimolatrice retribuzione di gloria, si per un più ampio oggetto di misurare l'influenza del clima, del governo, e di altre fisiche, e morali cause sull'acume, e sull' esercizio dell'ingegno. Giova per ultimo la notizia di tutto ciò, che intorno ad un argomento dagli antichi fu detto, e del punto al quale inoltrarono le loro ricerche e scoperte, dei problemi che sciolsero, dei teoremi che dimostrarono, per sapere, onde si debba partire per dar nuovi passi, e non perdere il tempo in superflui lavori, rifacendo il già fatto. Questo, a parer mio, avrebbe dovuto essere lo scopo, ed il piano dell' Alembert nel tessere gli articoli di Matematica nell' Enciclopedia: su di ciascun essere matematico cioè, presentare con ordine, quanto possibile era, dello scoprimento, e con certi tocchi maestri di concatenata dimostrazione le verità tutte relativamente ad esso raggiunte, e li tentati problemi, non altrimenti, che negli articoli di Storia Naturale di ogni essere fisico, di un animale per esempio, si è avuta cura di dipingere tutti i delineamenti della esterior forma, gli organi dell'interna struttura, le passioni, i costumi, i luoghi del soggiorno. E perchè raccogliendosi per qualunque fisico essere tutte le osservazioni, non dovevansi raccogliere intorno ad ogni essere matematico tutti i teoremi, e tutti gli sforzi dell' umano intelletto, anzichè ristringersi ad esporre alcune proprie idee e meditazioni, o a dilucidare una qualche difficoltà ? Quale obbligazione dei Matematici tutti all' Alembert, se loro avesse lavorati quadri di codesta fatta! Poichè, e qual è quel Matematico esercitatosi a sciogliere problemi, accintosi a tentativi, cui dopo una tortura di cervello, nel mentre che gioiva del felice riuscimento, mentre ridondava di compiacenza pel possesso e per la gloria di nuova cosa, accaduto non sia di sentirsi rintuzzato l'animo, e pel pentimento del tempo speso, venendo a sapere, trovarsi già in raro libro l' antico autore, od in volume d'immensa serie Accademica la sua scoperta ? Si sarebbe da recenti Analisti investigata nella natura del metodo, detto Cardanico, la metafisica ragione dell'aspetto immaginario delle tre reali radici nel famoso caso irreducibile, e si sarebbe, combinando in tutti i possibili modi, e termini razionali e irrazionali di secondo e di terzo grado, cercato, se alcuna combinazione dalla Cardanica diversa, poteva soddisfare, se nell'Enciclopedia all'articolo, *cas irreductible* avesse Alembert, tessendo succinta storia dei tentativi intorno ad esso fatti, accennato, che Cardano medesimo e dimostrato aveva quella metafisica ragione, e provate codeste varie combinazioni ? Tocco già due de'frutti della lettura, che piacquemi fare delle opere dei primi maestri dell'odierno Aritmetico, ed Algebrico calcolo nella nostra Italia, dalla quale propagata alle altre parti di Europa la luce ha essa sopra loro glorioso vanto, e diritto di riconoscenza. Molti ne ho colti: ho nei quasi dimenticati loro libri ritrovato importanti lumi per la storia dell'Aritmetica, e dell'Algebra, e della Geometria pur anche, od ommessi dal celebre storico delle Matematiche Montucla, od alle origini ed epoche per esso stabilite contrari. E con dolce sorpresa vi ho incontrato insigni regole di calcolo da essi inventate, e delle quali o concordemente si è conceduta a tale Analista molto posteriore la lode, o rivali nazioni contrastano per un loro cittadino il vanto. Dirò più distintamente. Vi ho veduto a miglior lume l'indiana origine sì delle numeriche figure, che del sistema di numerare, che noi adoperiamo; con sicurezza appreso la diversità, ed eccellenza sua sopra l'arte di Pitagora; rilevato l'etimologia comune delle voci *zero* e *cifra*; raggiunto l'epoca in cui la dottrina dell'aureo modo di conteggiare fu trasportata in Italia, e non in seme no, ma in adulta pianta, fornita di tutti i rami suoi, adorna di tutte le sue ricchezze, per sino dell'artificio delle false Posizioni; riconosciuto l'uomo benemerito di sì utile trapianto, benemerito tutt'insieme del trapianto dell' *Arte Maggiore* di sciogliere le equazioni di primo e secondo grado per Algebra, ed Almucabala; apparato di queste due parti dell'arte i nativi distinti uffici; compreso non da Diofanto estratta, ma da sè per Arabo, se non Indiano ingegno, prodotta la teoria di essa; ravvisato più antico di quello, che dicasi, se non originario, il suo vincolo colla Geometria, e il mutuo loro beneficio con servire questa a quella di face, e quella a questa di ancella; osservato le tracce della gradazione alla speciosa Analisi, che di Vieta si appella. Tacere più in singolare non debbo l'avervi trovato un modo di moltiplicare all'artificio delle lamine di Nepero assai affine, e l'essere insieme stato scortato a discoprire, assai impropriamente Pitagorica riputarsi, e dirsi la costruzione della tavola per ajuto della moltiplicazione, che porta tal nome. Che se destino maraviglia tali cose; quanto non ne recherà maggiore, se, trapassate per brevità sotto silenzio molte altre, io salga a dire di avervi incontrato un problema, che direttamente importando due equazioni, una di terzo, l'altra di sesto grado, le quali coi migliori metodi di eliminazione di Bezout, Eulero, La-Grange non si ottiene di ridurre che ad una del quarto grado, con destro ripiego tuttavia, e semplice viene ivi sciolto con una equazione di grado secondo? E quale stupore, se aggiunga essermisi pure presentato un metodo di estrarre dai Binomi la radice in parti reali, come natura vuole, allorchè col metodo oggidì usitato, risulta in parti d'immaginario implicate? E ciò è molto, ma non è tutto. Ecco pararsi davanti la regola generale per elevare a qualunqe podestà un binomio, colle cognizioni delle geometriche progressioni, onde si succedono le potenze di ciascuna delle parti, e della legge, onde si formano i coefficienti; ecco l'osservazione dell'affinità tra l'Aritmetica e la Geometrica Progressione, del nodo tra i termini di quella, ed i gradi dei termini di questa, e quindi il comodissimo cangiamento della moltiplica in somma, della divisione in sottrazione; ecco le fondamentali operazioni dell'artificio bellissimo detto poi de'Logaritmi. Più; e felici lampi sulla composizione delle equazioni, e sui rapporti de'coefficienti de'termini, e dell'ultimo termine massimamente alle radici; e industriose trasformazioni; e fini particolari scioglimenti di equazioni conducenti col general metodo alla immaginaria forma del caso irreducibile; e sottili tentativi per l'universale riduzione di essa; e ingegnosa regola per approssimarsi a desiderio al valore delle irrazionali radici. È questo in abbozzo il quadro dei lumi storici sparsi per gli scritti di Leonardo da Pisa, di F. Luca dal Borgo S. Sepolcro, di Tartaglia, di Cardano, dei travagli dei ritrovamenti dei meriti loro. Lo distenderò, comproverollo, il colorirò con fedele pennello in queste Memorie Storico-Scientifiche. Sono esse un tributo alla storica verità ed alla gloria Italiana. E quale miglior luogo pertanto trovar potrebbero, che nei primi Tomi, co'quali un illustre Accademia d'Italia imprende a dare in luce i suoi atti? Egli è per questo, che ad essa le offro.

MEMORIA PRIMA

LAVORATA SUL LIBRO DELL'ABBACO DI LEONARDO PISANO E CONTENENTE L'ELOGIO DI LUI.

Se la scienza del più facile, e spedito modo di conteggiare somministrando agevoli regole pel commercio è un grande bene alla società; se l'Algebra e la Geometria, essendo quelle ali, su cui l'ingegno sale a calcolare le più sublimi e grandiose opere della natura, formano la soddisfazione, e la gloria sua più bella; e la società, e la repubblica in particolare dei Matematici, e in Italia, e in Europa tutta insigne monumento di viva eterna riconoscenza debbono a Leonardo da Pisa. Ma sebbene grande il merito suo, sebbene luminoso in Italia nell'età sua, e nelle vicine; d'oscurità però quivi stesso lo coprì a poco a poco la più viva luce, che pure dagli albori per lui portati traeva origine; e non essendosi mai stampate le opere sue, rimase sempre in fosco, e vago concetto appresso gli esteri. Lo storico stesso delle Matematiche Montucla ne parla in modo sì scarso, manco, e dalla verità lontano, che chiaro appalesa di non essersene procurato una giusta notizia. Ecco tutto ciò che egli ne scrive *Histoire des Mathématiques durant le quinzieme siecle. Art. I, pagina* 441, *Tom.* I.

» L'Algebre, qui avoit pris naissance chez les Arabes, fut transplantée au commencement de ce siecle en Occident. L' Europe a cette obligation à *Léonard de Pise*, qui porté du desir de s'instruire dans les Mathématiques, fit de longs voyages en Arabie & dans les autres contrées Orientales. A son retour il fit connoitre l'Algebre à ses compatriotes, & nous trouvons même qu'elle fit d'assez rapides progrès. Nous remarquons en effet dès le milieu du XV[e] siecle, que les regles de l' Algebre, pour la résolution du second degré, étoient vulgairement connues : l'ouvrage de *Regiomontanus sur les triangles*, nous en fournit la preuve; car se proposant un problème qu' il analyse algébriquement, & qui le conduit à une équation du second degré, il renvoie aux regles de l'art, qu'il dit connues, *fiat* dit-il *secundum cognita artis praecepta.* On s'est trompé lorsq' on a regardé *Lucas de Burgo*, comme celui qui avoit fait connoitre l'Algebre aux Européens. L'époque en est plus ancienne, & cette connaissance est dûe à *Léonard* de Pise.

» Ce Mathématicien écrivit divers ouvrages, qui ont resté manuscrits : un d'eux regardoit la Géométrie, & parut assez bon à *Commandin*, pour mériter de voir le jour à la fin du XVI[e] siecle. Il en préparoit une édition, lorsqu'il mourut, ce qui en fit échouer le projet.

Ed. Art. IV, pag. 476. « Il n'en fût pas de l'Algebre comme » de l'Arithmétique des Arabes : cette derniere pénétra assez tôt » parmi nous, ainsi qu'on l'a vu; mais la connoissance de l'Algebre » fut une nouveauté du commencement du XV^e siecle. On s'accorde » généralement à croire que ce fut *Léonard de Pise*, qui la trans- » planta d'Arabie dans ces climats. »

Recatomi per sollevamento, e per erudizione a Firenze, fui curioso di vedere singolarmente il libro dell'Abbaco di Leonardo, e due Codici ne vidi, uno nella Magliabechiana Biblioteca scritto ad estimazione dei periti al sorgere del secolo XIV; l'altro di quello stesso torno di tempo nella Riccardiana. Oltre la prefazione, ha il primo al margine una lettera dedicatoria, la quale nel Riccardiano sta in pagina stesa; e perciò rapporterò a quello la prefazione, a questo la dedicatoria lettera. Coglieremo dall'una, e dall'altra non poco frutto, dalla prefazione massimamente; ma il delicato Latino palato non si disgusti, e non ricusi di sofferire il barbaro stile (*).

CODICE MAGLIABECHIANO.

Incipit liber Abbaci compositus a Leonardo filio Bonacci Pisano in anno 1202.

Prefazione.

Cum genitor meus a patria publicus scriba in Duana Bugeae pro Pisanis mercatoribus ad eum confluentibus constitutus pracesset, me in pueritia mea ad se venire faciens inspecta utilitate, et commoditate futura, ibi me studio Abbaci per aliquot dies ita esse voluit et doceri. Ubi ex mirabili magisterio in arte per novem figuras Yndorum introductus scientia in tantum mihi prae caeteris placuit, et intellexi ad illam; quod quicquid studebatur ex ea apud Aegyptum, Syriam, Graeciam, Siciliam, et Provinciam cum suis variis modis, ad quae loca negotiationis causa per ea peragravi, per multum studium et disputationis didici conflictum; sed hoc totum, et algorismum atque artem (supplisco dal Riccardiano questa parola mancante nel Magliabechiano) *Pictagorae quasi errorem computavi respectu modi Yndorum. Quare amplectens strictius ipsum modum Yndorum, et attentius studens in eo, ex proprio sensu quaedam addens, et quaedam ex subtilitatibus Euclidis Geometriae artis apponens summam hujus libri, quam intelligibilius potui, in quindecim capitulis distinctam componere laboravi, fere omnia quae inserui certa probatione ostendens, ut ex ea perfecta praeceptione omnes hanc scientiam appetentes instruantur, et gens Latina de coetero hic actenus absque illa minime inveniatur. Si quid forte minus, aut plus justo vel necessario intromisi, mihi deprecor indulgeatur, cum nemo sit, qui vitio careat, et in omnibus undique sit circumspectus.*

(*) I passi del *Liber Abbaci* di Leonardo Pisano che trovansi in questa pagina 355 (lin. 18—19, 21—41), e nelle seguenti pagine 356 (lin. 2—3, 5—18), 358 (lin. 15—40), 339 (lin. 2—5), sono riportati in queste pagine precisamente come si leggono nelle carte 104, *recto*, e *verso*, 105, *verso*, 106, *recto*, 109, *recto* ec. della cartella quinta dei manoscritti del P. Cossali.

CODICE RICCARDIANO.

Incipit liber Abbaci compositus a Leonardo filiorum Bonacci Pisano in anno 1203, *et correctus ab eodem* 1228.

Lettera dedicatoria.

Scripsisti mihi Domine mi, et Magister Michael Scotte summe Philosophe, ut librum quem dudum composui vobis transcriberem, unde vestrae obsecundans postulationi ipsum subtiliori perscrutans indagine ad vestrum honorem, et aliorum utilitatem correxi. In cujus correctione quaedam necessaria addidi, et quaedam superflua resecavi, in quo plenam numerorum doctrinam edidi juxta modum Yndorum, quem modum in ipsa scientia praestantiorem elegi. Et quia Arithmetica, et Geometriae scientia sunt connexae et suffragatoriae sibi ad invicem non potest de numero plena tradi doctrina, nisi inserantur geometrica quaedam, vel ad geometriam spectantia, quae hic tamen juxta modum nostrum operantur, qui modus est sumptus ex multis probationibus et demonstrationibus quae figuris geometricis fiunt. Verum in alio libro quem de Practica Geometriae composui, ea quae ad Geometriam pertinent copiosius explicavi singula figuris et probationibus geometricis demonstrando. — Il rimanente a nulla serve, essendo una esortazione a chi studierà il libro di rendersi ben familiari le regole, e gradatamente procedere. Veniamo alle riflessioni.

Riflessione I. Montucla pone nel secolo XV Leonardo, che già l'anno terzo del secolo XIII composto aveva il suo libro dell'Abbaco: la differenza è di nulla meno che di due secoli. Il Michele Scotto, che Leonardo onora del titolo di *sommo Filosofo*, ed a cui dedica nell'anno 1228, corretto ed accresciuto il suo abbaco stesso, *dudum*, cioè da 25 anni addietro composto, è senza dubbio quegli, del quale nelle Cronache loro parlano Ricobaldo, e Francesco Pipino, e fu famigliare di Federico II Imperatore, celebre a que'tempi per l' opera *dei Segreti della natura* per un trattato *sopra la Sfera* di Giovanni da Sacrobosco, e per *Giudicaria Astrologia*. Muratori, *Antich. Ital.* Tomo I°, Dissert. 26. E Dante nel Canto 20 dell'Inferno, a versi 115, di esso Michele disse :

» Quell'altro che ne'fianchi è così poco
» Michele Scotto fu, che veramente
» Delle magiche frodi seppe il giuoco. »

Riflessione II. Leonardo, che in puerizia è portato a Bugia nel regno di Algeri, volendolo seco il padre Pubblico Scrivano in quella Dogana pei Pisani mercatanti, e che adulto poscia viaggia per affari di negozio in Egitto, nella Siria, nella Grecia, nella Sicilia, nella Provenza, è un uomo di condizione ben diverso da quello, che il racconto di Montucla presenta, il quale per brama d'istruirsi nelle Matematiche intraprenda de'lunghi viaggi nell'Arabia, ed in altre contrade d'Oriente. Maggior lode per Leonardo, se per intrichi di mercatura girando qua e là sapeva tuttavia per ardore verso la scienza dei numeri esaminare in ogni parte il modo usato di conteggiare per scegliere qual ape industriosa, ed alla sua patria riportare il migliore. Prese poi abbaglio anche il Cardano in quel suo passo del Libro 2.° *De Consolatione*, Tomo I°, Oper. pagina 598: *Quamobrem illorum vanitatem satis demiror qui homines tantum temperatarum regionum rationales esse existimant, ut in extremis terrae plagis feris persimiles solinique monstrificas formas comminiscuntur. At equidem longo judicio aberrant, paucis enim ante annis Leonardus Pisanus, dum in Indiam, et Aethiopiam penetrasset, ex India Arithmeticam qua nunc utimur, ex Aethiopia Algebrae artem supputandi* (*argumenta clarissimorum ingeniorum*) *detulit.* Leonardo tra i luoghi ai quali peregrinando recossi, non nomina nè l'India, nè l'Etiopia. Nè di lui poteva dire Cardano scrivente verso la metà del secolo XVI, *paucis ante annis.* Egli non aveva sicuramente veduto il libro di Leonardo, e forse s'ingannò prendendo in troppo stretto senso il titolo *moderno* che gli dà F. Luca in confessare d'aver cavato dagli antichi Matematici Euclide e Boezio, e da moderni Leonardo Pisano, Giordano, Biagio da Parma, Giovanni Sacrobosco, e Prosdocimo Padovano la maggior parte del suo volume posto in luce l'anno 1494. Ma non era Leonardo, sebbene del secolo XIII, moderno matematico, rispetto ad Euclide ed a Boezio ? Si osservi inoltre, che F. Luca mette Leonardo alla testa de'moderni, e tra questi nomina di seguito Giovanni di Sacrobosco, che pure morì nel 1256, *aetate*, dice il Wallis, *satis matura*.

Riflessione III. Interessante è il confronto che Leonardo fa di tutto ciò che in arte di conteggiare si studiava nell'Egitto, nella Siria, nella Grecia, nella Sicilia, nella Provenza, di tutti i varii modi in quelle regioni usati, e da lui non senza molta applicazione, e grande conflitto di dispute appresi, e dell'algorismo, e dell'arte di Pitagora coll'indiano modo, pronunciando poi franco: *sed hoc totum et Algorismum atque artem Pictagorae quasi errorem computavi respectu modi Yndorum.* Noi dunque felici, che mercè di Leonardo, possediamo il modo più eccellente; e nemmeno del tanto ammirato e celebrato Pitagora, abbiamo a desiderare la smarrita arte.

Riflessione IV. Ma cosa più essenziale ad osservarsi si è, che Leonardo in dare idea del suo libro, tutta la ripone nell'Indiano Modo di computare: esso ne è tutto il fondo, il tesoro tutto. Nella scienza di esso fu introdotto subito giunto in Bugia, con esso ebbe cura di paragonare i varii modi di tutti i paesi, pei quali gli avvenne di viaggiare; esso, conosciuta in confronto la imperfezione di loro tutti, più strettamente abbracciò, e più profondamente studiandovi, aggiungendovi del suo qualche cosa, e le geometriche verità applicandovi di Euclide, compose la somma del libro suo; giusta esso, più in breve, prescelto quale il più eccellente, diede in luce la dottrina piena di numeri. Non si può bene considerando questa serie di espressioni di Leonardo ristrignere l'idea di *Modo Indiano* alle figure de'numeri, al sistema dei locali loro valori, alle prime regole del conteggio: è giuoco forza comprendervi delle regole più alte, che da Leonardo già bene in esso versato, e negli altri modi ancora, richiesero più attento studio, dopo di essersi ad esso interamente dedicato.

Indice dei capitoli.

Sarà questo un prospetto dell'Aritmetica, che Leonardo portò in Italia, e gioverà per conoscere in un' occhiata se con verità io dicessi essere stata la nobile pianta adulta già, di tutti i rami suoi fornita, e di mature frutta ricca nell'Italo terreno trapiantata.

1. *De Cognitione novem figurarum Yndorum, et qualiter cum eis omnis numerus scribatur, et quantum et qualiter retineri debeat in manibus et de introductionibus Abbaci.*
2. *De multiplicatione integrorum.*
3. *De additione ipsorum ad invicem.*
4. *De extractione numerorum minorum ex majoribus.*
5. *De divisione integrorum numerorum per integros.*
6. *De multiplicatione numerorum integrorum per ruptos, atque ruptorum sine sanis.*
7. *De additione, et extractione, et divisione integrorum cum ruptis, atque partium minorum in singulis partibus reductione.*
8. *De emptione, et venditione rerum venalium, et similium.*
9. *De baractis rerum venalium, et de emptione bolsonaliae, et quibusdam regulis similibus.*
10. *De societatibus factis inter consocios.*
11. *De consolamine monetarum, atque earum regulis quantum ad consolamen pertinet.*
12. *De solutionibus multarum quaestionum, quas Erraticas appellamus.*
13. *De regula Chataym, qualiter per ipsam fere omnes erraticae quaestiones solvantur.*
14. *De reperiendis radicibus quadratis et cubicis, et de multiplicatione, et divisione, seu extractione earum in se, et de tractatu binomiorum et recisorum, et eorum radicum.*
15. *De regulis, et proportionibus geometriae pertinentibus, de quaestionibus Algebrae et Almucabalae.*

Ecco il quadro di ciò, che Leonardo portò dall'Affrica in Italia. Per trarne un pieno frutto, per purgare la storia è uopo fissare su alcune parti più attenta la considerazione; e per altre, basti l'avervi dato uno sguardo fuggitivo.

PRINCIPIO DEL PRIMO CAPITOLO.

Novem figurae Yndorum hae sunt. (Vedasi la tavola).

Cum his itaque figuris, et cum hoc signo o *quod Arabice Zephirum appellatur, scribitur quilibet numerus.*

Riflessione. V. Siamo noi soliti chiamar Arabe le figure de'numeri appresso di noi in uso. Leonardo dice *Indiane* quelle per lui portate dalle vicinanze dell'Arabia alle nostre somigliantissime, anzi loro esemplari. Vero è che confrontando vi si osserva qualche differenza, ma non sostanziale. Il nostro due è quello di Leonardo ingentilito con ampliarne l'arco di sopra, e renderne acuta l'inflessione di sotto; il nostro tre è il di lui girato in giù a volgere a sinistra, non altrimenti che il due l'un suo, così esso i due suoi ventri, ad occupare nel largo della pagina minore spazio fatto di mezzo supino verticale, e mutilato per semplicità della sottile appendice in acutissimo angolo attaccata al ventre maggiore; il cinque nostro è quello di Leonardo ristretto superiormente, e ripiegato inferiormente. Si giri in fianco, si capovolga la pagina, il due, il tre, il cinque di Leonardo appariranno pochissimo dalle figure nostre diverse: la diversità è di posizione, anzi che di forma. Riguardo io quali di Leonardo le figure numeriche, che stanno nel Codice Magliabechiano, e veggo bene che in un secolo di tempo tra Leonardo e l'età del Codice, possono aver sofferto sotto la penna de'copisti qualche cangiamento, ma non credo di sostanza. Indiane pertanto non Arabe dobbiamo noi dire con Leonardo le numeriche figure che adoperiamo. Montucla trattando, Parte II, Libro I,° Art. VIII della origine delle nostre numeriche figure presenta raccolte in una tavola le figure dei Codici di Boezio, di Planude, di Alsephadi, di Sacrobosco, di Rogero Bacone, e quelle che verso la metà dello scorso secolo dall'India portò Tavernier. Trattone Boezio, del quale se possano credersi, o no quei numerali caratteri il vedrem poi, gli altri tutti sono a Leonardo o molto, o alcun poco posteriori. Poichè il Sacrobosco morì nel 1256; Rogero Bacone nel 1292; il Monaco Massimo Planude, dandogli anche col Kirchero cent'anni più di antichità, di quella diagli il Vossio, fiorì oltre la metà del secolo XIII sotto l'impero di Michele Paleologo; e Alsephadi, dice il Casiri nella *Bibl. Arabico-Hispan. Escur.* alla pagina 79 del Tomo I°, essere tradizione che morisse l'anno 764 dell'Egira, che corrisponde all'anno dell'Era nostra 1362. Meritava dunque che io ponessi a capo delle serie per Montucla schierate la serie di Leonardo, il più antico testimonio dell'Indiana origine delle nostre numerali figure. Se non che tale Indiana origine sembra, riguardo almeno al alcune, rendersi dubbiosa per le differenze da quelle delle altre serie, ognuna delle quali è dallo scrittore suo Indiana predicata; anzi interamente combattuta apparisce dalla serie di Tavernier. Laonde condotto mi veggo primieramente ad un diligente confronto delle serie di Leonardo, di Sacrobosco, di Bacone, di Planude, di Alsephadi per mostrare il giusto valore delle differenze, e spiegare onde poterono provenire; secondamente ad una intricata discussione sulla essenziale e piena diversità della serie di Tavernier. Giovanni di Sacrobosco nella sua Aritmetica in versi cantò l'Indiana origine delle sue numerali figure dicendo:

Talibus Yndorum fruimur bis quinque figuris.

Sono esse, e quelle di Rogero Bacone le meno dissimili dalle figure di Leonardo. Il due di Sacrobosco è precisamente il nostro rovesciato da giù in su, e da sinistra a destra; e quello di Bacone è più che ad altro simile, come vedesi, alla lettera Z col tratto inferiore assai breve, sottile e quasi invisibilmente terminato: presentano perciò alcuna differenza dal due di Leonardo; ma la figura del due si scrive con qualche varietà anche tra noi. In null' altro tra loro discordano le serie di Sacrobosco, e di Bacone, ma rispetto a quella di Leonardo hanno delle altre differenze. Il loro tre in luogo di convenire con quello di Leonardo è perfettamente e nella forma, e nella posizione lo stesso, che il nostro più semplice, e più comodo; e verosimilmente questi pregi la cagione furono siccome in Italia, così in Francia, e in Inghilterra del cangiamento. Ma il loro sette è ugualmente da quello di Leonardo, e dal nostro diverso in posizione volgendo non a sinistra, ma allo in giù l'apertura: la quale però è piccola diversità. La maggiore diversità è nella figura del quattro. Il nostro è un triangolo appresso alcuni tronco, più comunemente intero, la base del quale si allunga un tantino a destra in direzione, o orizzontale, od un po ripiegata allo in su, ed il destro lato scende assai in giù verticalmente, od un po obbliquamente a sinistra. Quello di Leonardo porta al di dietro alzata sulla estremità dell' orizzontale allungamento una sottile linea, che per semplicità sarà stata in progresso tolta; il quattro di Sacrobosco, e di Bacone mostrasi in sembianza di un nodo ovale di una funicella le cui estremità si allargano scendendo ugualmente in giù in direzioni obblique, l' una a destra, a sinistra l'altra; fu probabilmente preferito al triangolo l' ovale per vantaggio di schifare gli angoli, e formare la figura con un continuo cammino di penna. Non si può intanto negare che grave sia, e diciamo pure essenziale la differenza; ma se ne penetra la cagione, ed è sola. Cresce un po più la difficoltà confrontando le serie sin qui esaminate di Leonardo, del Sacrobosco, di Rogero Bacone con quelle del greco Planude, e dell'Arabo Alsephadi, non già rapporto alle loro figure del due, del tre, e del quattro che agevolmente rilevasi essere il nostro due, il tre di Leonardo, ed il quattro aperto, quale da alcuni de' nostri si scrive, colla sola differenza di essere posti supini invece di porli retti; nè quanto alla loro figura del sette, che scorgesi essere il nostro, o di Leonardo rivolto coll'angolo allo in su, rivolto al contrario che appresso Sacrobosco e Bacone: ma quanto alle figure del cinque, del sei, dell'otto. Se però nella figura del cinque differiscono da Leonardo, da Sacrobosco, da Bacone, non differiscono meno tra di loro, e non si può che contare ciascuno separatamente contro tre d'accordo. La figura a Planude, ed Alsephadi comune del sei è un nove aperto alla cima, e il loro otto e il loro sette rovescio, è il sette di Sacrobosco e di Bacone. Le serie di questi due, e di Leonardo godono il vantaggio d'una maggiore diversità fra le note del sei e nove, e del sette e otto: diversità che sembra dover essere stata in mira agli istitutori, a fuga del pericolo di confusione. Leonardo, e Sacrobosco hanno anche sopra Planude, ed Alsephadi diritto di antichità, e sopra Alsephadi lo ha Bacone pure. Alsephadi stesso a tutti posteriore differisce da tutti nell'adoprare per segno del nulla, invece di un tondo voto, un grosso punto, ossia un piccolo tondo pieno. Wallis poi, pagina 10 *Trac. Hist. et Pract. de Algeb.* ci esibisce le figure numeriche, che usavano gli Arabi al suo tempo circa il fine del passato secolo, le quali coincidono con quelle di Alsephadi, eccetto che nel cinque, alla dinotazione del quale numero era già trasferito il voto tondo segno del niente. Montucla pag. 361 narra che fra i trattati Aritmetici di Arabi autori intitolati: *Arte di calcolare secondo gli Indiani*, uno se ne trova nella Biblioteca di Leiden: « dont les signes numériques sont fort ressemblans aux nôtres, & à » ceux de *Planude* ». Ammettiamo, se piace, la molta rassomiglianza dei caratteri numerici di quell'Arabo Codice con quelli di Planude; ma quanto alla grande rassomiglianza qui implicitamente asserita tra i nostri, e quelli di Planude stesso, ecco ciò che verso il fine della pagina medesima egli dice di proposito, parlando di Planude: « Ses » caracteres, quoique assez differens des nôtres, sont presque des mê» mes que ceux d' *Alsephaldi*. » Come dei caratteri indistintamente conciliare il *fort ressemblans*, e l' *assez differens*? La verità si è che dei dieci caratteri di Planude ve ne sono sette similissimi ai nostri nella forma, con diversità però in quattro di posizione, ed hannovene tre nella forma ben anche assai differenti. La serie delle forme nostre differisce dalla serie di quelle di Alsephadi in quattro, e in altrettante da quelle della seconda, ed in due da quelle delle prime di Beda, e in due differiscono le serie di Planude e di Alsephadi tra loro. Ciononostante componendo tutti insieme i confronti, e bilanciando le posizioni cangiate dal comodo; considerando le sole forme, e in esse più che agli accidenti variabili sotto le varie penne, l'attenzione fissando alla sostanza; certo è che la somma delle differenze vale meno assai, che la somma delle rassomiglianze, e non si può contendere, che comune traspiri la loro origine. Tanto poi più, che in tutte ci si presenta costante ciò, che è più essenziale, ciò che del numerare costituisce e distingue il modo, ciò in che del sistema dei valori locali l'artificio consiste, il comporre colla figura dell' uno preceduta a destra da un'altra figura per sè di niun valore il dieci. Questa concordia delle serie lega in singolar maniera insieme, ed accumula

46

in uno le testimonianze dei cinque autori che d'Indiana origine le asseriscono. Conchiudiamo dunque che d' Indiana origine è in fondo la serie delle numerali figure della volgare odierna Aritmetica; che la maggior parte di esse l'Indiana forma, almeno sostanzialmente, conservano; che soprattutto irrefragabilmente Indiano è l'ingegnoso istituto di comporre con dieci figure i numeri tutti decuplicando di esse da destra a sinistra, passo, passo portate il valore. Ecco però a tali conclusioni opporsi l'autorità di Tavernier, il quale avendo circa la metà del passato secolo viaggiato per la Turchia, per la Persia, per le Indie, nel Tomo III° della descrizione de'suoi viaggi, pagina 22, ci affaccia la serie dei caratteri numerici usati, dic'egli, in tutto l'impero del gran Mogol, ed altri luoghi delle Indie non ostante la differenza dei linguaggi; e la serie, come a primo paragone si scorge, è bene da tutte le sin qui contemplate essenzialmente diversa, essendo per sino con una sola figura espresso il dieci, e troppo poco a confronto di differenza cotanta, che cangia il sistema aritmetico tutto, essendo la conformità di due figure in significato numerico assai diverso. Montucla dopo avere alla pagina 362 conchiuso per le asserzioni di Planude, di Alsephadi, e di Sacrobosco: « Il est assez prouvé, que les Ara» bes emprunterent des Indiens leurs caracteres Arithmétiques & leur » système de numération » alla pag. 365, in vista della serie di Tavernier si rende dubbioso : « Il est difficile de décider si les caracteres de *Pla» nude* & d' *Alsephadi* sont ceux dont se servoient anciennement les » Indiens. Si cela est, ils ont beaucoup changé depuis. » Ma egli stesso tramezzo pag. 364, nota che gli Indiani sono de'loro usi tenaci: « At» tachés à leurs usages ». Che dunque fare ? Contro la confessione degli Arabi stessi attribuire a'nostri numerici caratteri Araba, non Indiana, origine ? Crederli contro l'attestato del Greco Planude d'origine Greca ? Riputarli contro l' asserzione di Leonardo, che per l' Egitto per la Siria, e per altre contrade di Oriente viaggiando i modi loro varii tutti quanti apparò e dall' Indiano distinseli, di Egizia, di Sira, di altra origine qualunque fuori che Indiana? Sarebbe un troppo violento resistere e far fronte a troppo accumulate autorità. Che dunque ? Negare a Tavernier fede ? La brama di conciliare con un rispetto a lui il peso delle concordi testimonianze dei nominati scrittori mi avea fatto meditando nascere in mente un nuovo pensiere. Danville, *Geog. Ancien*, Tomo III°, c'insegna coll'analisi di certi passi di Eliano, di Erodoto, di Virgilio, di Procopio eziandio, e di altri Ecclesiastici autori che davasi il nome d' India all'Etiopia, e due distinguevansi le Indie, le Indiane nazioni, l'una più ad Oriente nell'Asia, l'altra Occidentale nell'Africa, e che gli Indiani Orientali vantavano su d'una antica tradizione, che i loro Neri, od Etiopi erano stati quelli, che dalla Patria emigrando, formata avevano la nazione Etiope nella più interna parte dell'Affrica discacciandone i dominanti Egizi. Questo è ciò, di che Tarca Filosofo Indiano assicura Apollonio in Filostrato; ed Eusebio dietro ad antichi storici pone questa emigrazione sotto il regno di Amenofi padre del famoso Sesostri verso i primi eroici tempi dalla Grecia. Baylli, *Hist. de l'Astr. Anc.* lib. 6° § 2° e lib. 9° § 10. oltre a confermare per ragione di istituzioni e dottrine di Astronomia loro comuni, la comune origine degli Asiatici Indiani, e degli Etiopi od Indiani Affricani ci dimostra, che essi Etiopi prima degli Egizi di filosofiche cognizioni fiorirono, ragion per cui da Luciano nel trattato dell'Astrologia s'introdusse la Filosofia a dire, d'essersi portata presso gli Indiani, ed averli fatti dai loro elefanti smontare per conversare con lei; di là essersi trasferita presso gli Etiopi; e poscia essere in Egitto discesa ad istruire i preti, e profeti delle divine cose. Presenti questi storici lumi, non si potrebbe dire, volgeva per la mente, che gli Indiani dai quali gli Arabi ricevettero le figure e le regole Aritmetiche, anzi che gli Indiani dell'Asia, furono gli Indiani dell'Affrica gli Etiopi? Che questi ne furono soggiornante tra loro la Filosofia gli inventori? Così tra me discorrendo andava. Ma non doveva io ommettere di chiamare al confronto delle nostre numeriche figure colle Etiopiche lo specioso mio pensamento? Ora anzichè rassomigliarsi, somma è la differenza tra la serie delle nostre, e la serie delle Etiopiche numerali figure; e somma ugualmente è la differenza di questa stessa dalla serie recata dall'India Asiatica per Tavernier. Eccoci dunque di nuovo alla necessità o d'immaginare che gli Indiani inventori, sia in Asia, sia in Affrica, delle numeriche figure a noi portate da Leonardo Pisano, e del bell' artificio di comporre col decuplo valor locale un qualunque numero, abbiano cangiato figure, ed abbandonato un artificio di tanta semplicità ed eleganza; ciò che è troppo difficile a persuadersi e niuno che rifletta, quanto in cose di volgar pratica il comodo piaccia e prevalga, si persuaderà certamente; o di ritogliere la credenza al nostro Leonardo, ai due Inglesi Sacrobosco, e Rogero Bacone, al Greco Planude, all'Arabo Alsephadi, e a tutti inoltre quegli altri Arabi, che di Aritmetica di proposito trattando, Indiane dissero le numeriche figure, Indiano il sistema di numerare e computare per loro spiegato, e appresso di noi in uso: e quale equità, qual criterio l'acconsentirebbe? o cercare a rimovere per qualche modo l' opposizione di Tavernier. E senza apporgli falsità non potrebbe essere, che due fossero appresso gli Indiani del gran Mogol, e di tali altri luoghi dell'Asia le serie delle numeriche figure, due i sistemi di numerare, siccome noi oltre le figure, e il sistema, che ci ha donato Leonardo, abbiamo le figure Romane, il Romano sistema? Non potrebbe essere, che il modo di rappresentare i numeri comunicato a Tavernier nell'India sia quello dell' Indiano volgo, e quello datoci per Indiano da Leonardo sia il modo proprio degli Indiani Bracmani tenuto da essi, per mistero di scienza, al popolo nascosto? Non potrebbe essere pur anche, che tal modo fosse il modo volgare in qualche parte dell'India ove Tavernier non penetrò? Non potrebbe in fine essere, che inventato nell' India da qualche saggio, e seguito da un filosofico stuolo, dopo il rumore della novità cadesse vinto ed oppresso dall'attaccamento ivi sì fenace agli antichi costumi, e fuori ottenesse la sorte nel luogo de' suoi natali negatagli? La giusta critica vuole, che in alcuno di questi, od altri, se può immaginarsene, modi si tolga l'ostacolo dell'autorità di Tavernier anzi che riluttare all'accumulata autorità di tanti scrittori più antichi, solleciti sicuramente dell' origine dell'amata loro scienza, di nazione diversi, e per sino Arabi, sommamente lodevoli, siccome più fedeli alla verità, che ambiziosi di fregiarsi di una istituzione non loro, e del merito contenti di averla trasmessa.

Riflessione. VI. Dalla voce *Zephirum*, colla quale reca Leonardo a latino modo il nome, che davano gli Arabi al segno del nulla, apprendesi la comune sorgente della toscana voce *zero*, e di quella a parecchi linguaggi fatta comune di *cifra*. E meglio questo secondo vocabolo consuona coll'Arabo *Zifron*, o *Sifron* dalla radice *Safara*: su di che il Golio nel suo Les. Arab. così: « *Sifron-prorsus vacuum-nota Arithmetica similis literae O* (*pro ea Arabes etiam punctum scribunt*) *sola nihil notans, at augens notas praecedentes, quae vulgo hinc Cifra dicitur.* Il perchè è un abuso contro l' etimologia il chiamare generalmente *cifre* le numerali figure, essendo singolar nome della figura o del segno del nulla. Planude dopo avere esposti i nove caratteri numerici, ed aver detto essere essi Indiani, segue a dire avervi un decimo carattere appellato *Tziphra*, che secondo gli Indiani denota nulla. Questo decimo carattere è appresso Planude il voto tondo O; laonde per autorità di lui anche tale nota del niente, non men che le nove numeriche figure è d'Indiana istituzione, e così resta a Leonardo supplito, e tolto ogni dubbio, che da esso trarre si volesse, per dirsi da lui espressamente Indiane le nove figure de'numeri, e non esprimersi lo stesso riguardo al segno O.

Riflessione. VII. Si sarà non senza meraviglia avvertita la direzione da Leonardo tenuta nello scrivere la serie delle numeriche figure cominciando a sinistra dal 9, e discendendo a destra; laddove noi a rovescio la scriviamo ascendendo: quella è più analoga alla legge del valor locale delle figure ne' numeri di molte composti diminuente grado grado da sinistra a destra; e forse tale analogia n'è la ragione. Apparisce intanto l' orientale uso, e probabilmente d' Indiana instituzione.

Riflessione. VIII. Più che l'andamento, con cui dispose la serie delle nove Indiane figure, è importante a notarsi la cura da Leonardo avuta di soprapporvi i numeri Romani per insegnarne il valore. E non è questa una più chiara prova, che novella cosa erano essi in Italia? Oltre a che espressamente Leonardo, ragion rendendo della fatica intrapresa di spiegare nel suo libro, giusta l'Indiano Modo la scienza de'numeri, questa ne assegna: *Ne Gens Latina de caetero hic actenus* *absque illa minime inveniatur.* Leonardo dunque fu quegli, che sull'entrare del XIII secolo ritornando d'Oriente portò alla Latina Gente, od all' Italiana che la lingua peranche del Lazio parlava, l' Indiano modo di conteggiare, le Indiane figure, le Indiane regole, delle quali sino allora era stata priva. Montucla, Parte III, Libro I°, Art. III, avanza a lode del suo Francese Gerberto che « Les Chrétiens Occidentaux doivent surtout à *Gerbert*, de leur avoir trasmis l' Arit» métique, dont nous faisons usage aujourd'hui » Noi Italiani non la dobbiamo al Francese Gerbert, no certamente; ma al nostro Leonardo. Osservo di più, che annoverando Leonardo tra i paesi per i quali viaggiò, e de'quali distingue, ed all'Indiano contrappone i modi di conteggiare, la Provenza, si appalesa, che se pure Gerberto verso l'anno (come pare a Montucla doversi fissare) 960, ovvero 970 introdotto aveva in qualche parte della Francia l'Indiana Aritmetica, non erasi questa nello spazio di due secoli neppure stesa per la Francia tutta, non che osato avesse di salire le Alpi, e trapassare in Italia. Ma su qual fondamento appoggia Montucla l'asserzione sua? Sulla lettera massimamente 160ª di Gerberto a Costantino diretta « qui paroit, dice » Montucla, avoir été à la suite d'un petit Traité sur ce sujet. Il y re» marque que le même nombre devient tantôt *articulus*, tantôt *di*» *gitus, minutum*, c'est-à-dire centaine, dixaines, unités ; ce qui con» vient tout-à-fait à cette Arithmétique dont nous parlons ». Ecco il pezzo della lettera quale leggesi, pagina ultima, Tomo XVII. *Max. Bib. Vet. Pat. Lugd. apud Anissonios MDCLXXVII. Nec putet philosophus sine literis haec alicui arti, vel sibi esse contraria. Quid enim dicet esse digitos, articulos, minuta qui auditor majorum esse dedignatur? Vult tamen videri solus scire quod mecum ignorat: ut ait Flaccus: quicum idem numerus modo simplex, modo compositus, nunc digitus, nunc constituatur ut articulus? Habes ergo (talium diligens investigator) viam rationis, brevem quidem verbis, sed prolixam sententiis* . . . . Sotto la lettera si dice: *Praecedens epistola praeficitur libello suo de numerorum divisione cujus initium: De simplici - Si multiplicaveris singularem numerum per singularem, dabis unicuique digito singularem, et omni articulo decem, diserte scilicet et conversim etc.*, con che termina il piccolissimo frammento. Or chi sono questi Maggiori, de'quali chi sdegna la scuola, non può dire che cosa sia *digito, articolo, minuto?* Quale apparenza vi ha qui di Aritmetica per Gerberto introdotta, e della quale in Francia stato sia egli il primo maestro? Più: che vuol dire quel rinfacciare all'illetterato filosofo d'ignorar seco, *quicum* (come) *idem numerus modo simplex, modo compositus, nunc digitus nunc constituatur ut articulus?* È egli nell'Indiana Aritmetica un mistero, come lo stesso numero varii di rappresentazione, di valore secondo il vario luogo, secondo il numero de'zeri, o di altre numerali figure a destra? Ma si volga anche uno sguardo al principio della lettera che tale è: *Vis amicitiae paene impossibilia redigit ad possibilia. Nam quomodo ratio-*

nes numerorum abbaci explicare contenderemus, nisi te adhortante, o *mi dulcissime solamen laborum Constantine? Itaque cum aliquot lustra jam transierint, ex quo nec librum, nec exercitium harum rerum habuerimus quaedam repetita memoria eisdem verbis proferimus , quaedam eisdem sententiis. Nec patet etc.* Nelle cose tutte da Gerberto qui di sè dette havvene una, che si accordi coll' idea di un introduttore di sconosciuta aritmetica, e della per lui gloriosa dottrina di essa sollecito? Che anzi non ripugnivi? E quale è il libro, che da alquanti lustri non aveva avuto tra le mani, e di cui accignesi a produrre, giusta che gli risovverrà alla memoria, ora le parole, ora le sentenze? Nelle lettere a Geraldo Ab. di Aurillac, ed a Bonfilio Vescovo di Girona io leggo commendarsi da lui un libretto. *De multiplicatione et divisione numerorum*, da certo spagnuolo Giuseppe composto, e che nel monistero del primo lasciato aveva altro Ab. Guarnerio, e di cui alle diligenze del secondo commette una copia per brama di Alderone Arcivescovo di Reims. Ora lo stesso Chiarissimo Ab. Andres zelante, sì certo, delle glorie della sua nazione, ma filosofo insieme, confessa con ingenuo candore alla pag. 229 del Tomo I.° di non trovare bastevole fondamento di attribuire all'uso degli odierni numerici caratteri in Ispagna una antichità, quale sarebbe quella sino dalla metà del decimo secolo; e pag. 231 sull'autorità dello scrittore della *Paleografia Spagnuola*, ritrae esso uso al secolo duodecimo, essendo il più antico manoscritto, in cui riscontrisi una traduzione di certa opera di Tolommeo dall'Arabo in latino l'anno 1136 nell'archivio di Toledo conservata, alla quale vien dopo una simile versione di libro Astronomico pel famoso Giovanni di Siviglia l' anno 1171 esistente nella Magliabechiana Biblioteca. Giusta ciò non poteva Indiane figure, Indiane regole contenere il libretto dello Spagnuolo Giuseppe, e non contenendole, e lo studio di esso raccomandando Gerberto, e probabilmente quello essendo, di cui a Costantino imprende a ridire o le parole, o le sentenze, come si può immaginare egli d' Indiana Aritmetica in Francia introducitore, e propagatore? Nè si dicesse che decadica, qual è l'Indiana, apparisce l'Aritmetica da Gerberto ombreggiata. I popoli della terra, tranne, se piace, il Cinese, ed altro della Tracia da Aristotile accennato, per una comune ragione d'aver cominciato a conteggiare sulle dita delle mani si accordarono tutti a ripigliar da capo dopo i dieci, e numerar quindi le decine, e i composti di loro e delle unità, e così via via passando alla decina di decine o al centinajo, alla decina di centinajo od al milliajo, a far procedere in decupla progressione l'Aritmetica. Eppure diversi popoli, diverse Aritmetiche: dove mera digitale, dove in altri meccanismi conversa; là renduta pressochè mentale, qua scritta. E tra le scritte, diverse le figure dei numeri semplici, diverso il modo di esprimere le decine: in quale con forme diverse da quelle dei numeri semplici, in quale colle stesse distinte con un aggiunto di accento, o sottoposto punto od altro, in quale colle figure medesime variate solo di luogo, e così nell' Indiana e già nostrale Aritmetica. Nè val tampoco che da Gerberto considerisi il numero stesso ora semplice, ed ora composto: in qualunque Aritmetica i numeri semplici uno, due, tre... prendono in idea ed in linguaggio composizione, subito che si concepisce o si dice una decina, due decine, un centinajo, due centinaja, e così va discorrendo. L'essenza di ciascuna Aritmetica in particolare sta nel suo modo di distinguere il numero quale semplice, e quale composto. Infiniti possono immaginarsi i modi. E forse che nel parlare di Gerberto scorgesi l'Indiano modo di distinguere per luogo? E non costituisce anzi apertamente la distinzione per digiti ed articoli? Osservo finalmente che le due linee che restanci della dottrina della moltiplica si rassomigliano moltissimo, e nella denominazione di *singolare* data al numero semplice, e nella espressione tutta del precetto al dire di Boezio, là dove adombra le regole risguardanti la moltiplica e la divisione che i Pitagorici eseguivano colla tavoletta loro. Boezio termina col confessare che la distinzione dei digiti ed articoli richiede meditazione e studio, e abbiamo veduto similmente Gerberto, in rimproverando l'illetterato filosofo, esaltarne la difficoltà della scienza. Non sarebbe per tali cose fondato il sospetto che l'Aritmetica di Gerberto altra non fosse che la Pitagorica da Boezio abozzata? Che la fatica dello Spagnuolo Giuseppe consistesse in una esposizione più distesa, ed alla pratica più comoda, di essa? Che il libro da Gerberto accennato nella sua lettera a Costantino, se non era quello di Giuseppe, fosse quello di Boezio stesso? Ma qualunque valore dar piaccia a tali sospetti, due cose conchiudiamo francamente. Falso in primo luogo, che noi al Francese Gerberto dobbiamo l'acquisto della più eccellente di tutte, dell' Indiana Aritmetica dal nostro Leonardo sul sorgere del secolo XIII recataci d'Oriente. Senza prova, per secondo, anzi contro i monumenti della Storia, contro il parlare stesso di Gerberto, che sino dalla metà del decimo secolo introducesse egli l'Indiana Aritmetica nella Francia. Alla Spagna non possiamo noi negare l'anzianità nell'uso delle figure; ma può essa produrre un libro di piena dottrina de' numeri giusta l'Indiano modo, quale il nostro Leonardo promette il suo, quale già nell' indice de'Capitoli ha cominciato a mostrarsi, e quale sempre più chiaro si manifesterà di mano in mano che dispiegato sarà per me sotto degli occhi il contenuto dei principali di essi?

Riflessione IX. Montucla pag. 119 e 364, discute, se le figure numeriche di Pitagora fossero alle Indiane simili? Se il fondo almeno della sua Aritmetica fosse il medesimo, che quello dell'Indiana? Se essendolo, gli Indiani da Greci, o non piuttosto Pitagora dai Bracmani, o Gimnosofisti dell'India appreso lo avesse? Difficoltà ed imbarazzo non lieve gli arrecano certi manoscritti delle opere di Boezio, tra quali il bello appartenente a Mead, di cui parla nelle *Trans. Fil.* anno 1735 il Vard. Al fine del Lib. I°, *De Geometria*, aggiungendo

Boezio qualche cosa sulla tavola, che i Pitagorici usavano per la moltiplica e la divisione, dice che per costruirla: *habebant diverse formatos apices, vel characteres. Quidam enim hujusmodi apicum notas sibi conscripserant, ut haec notula responderet unitati* 1; *ista binario* .... Montucla esibisce nella prima serie le note sino al nove che nel manoscritto di Mead si succedono. *Quidam vero in hujus formae depictione ecce literas alphabeti assumebant sibi hoc pacto, ut litera quae esset prima unitati* .... Passa quindi Boezio ad additare il modo, onde i Pitagorici valevansi di essa tavoletta per la moltiplica, e per la divisione. È dibattuta l'età di quei codici. Uezio stesso, cui a sostenere la falsa opinione sua della greca origine dei nostri numerali caratteri sarebbe tornato a conto crederli antichissimi, parlando di quello del Mead, mostra di non sapersi persuadere dell' antichità attribuitagli, spargendo queste dubitative parentesi (*cujus antiquitas erit probanda*) ... (*si nempe manuscriptum istam aetatem refert*). Montucla, pag. 120, afferma, non avere tali Codici, che tre a quattro secoli, e perciò non salire al più, che al secolo XIV, a pagina però 363 riferendo il giudizio di quelli che li stimano non essere « peut-être pas antérieurs au dou» zieme ou au treizieme siecle » si accontenta di dire tale estimazione *assez vraisemblable*, e non ben solide le prove di una maggiore antichità, che Weidler si è sforzato di loro dare. Intanto siccome: « vers ce temps, soggiugne egli, commença à s'introduire dans ces » contrées nos chiffres; ainsi il a pu arriver que des Copistes ayent » substitué ces caracteres à ceux qu'il voyoient dans les manuscrits » de *Boece* qu'ils transcrivoient. » E come mai (si dee permettere di passaggio questo riflesso) come mai l'incominciamento qui assegnato alla introduzione delle nostre cifre in queste contrade (intendasi ampiamente le Europee, ma come eccettuarne le Francesi, dove Montucla parlava?) si accorda egli colla pretesa introduzione alla metà del secolo X in Francia per Gerberto? Con minore dubbietà sui numerici caratteri dei codici di Boezio aveva Montucla alla pagina 120 detto: « il est assez probable que ces caracteres sont l' ouvrage du copi» ste. » Riconoscendo però assai probabilmente cangiate nel luogo di Boezio le originali numeriche figure, vuole egli salvo, e senza alterazione il dire, con che il latino scrittore spiega il modo, nel quale i Pitagorici adoperavano quei loro apici, ed asserisce che « à travers » l'obscurité de son explication, on ne peut y méconnoître nôtre Arit» métique moderne » a segno che « il faudroit pour détruire l' in» duction que fournit ce passage de *Boece*, supposer qu'il a été ajouté » dans les douzieme & treizieme siecles; car en le reconnoissant pour » l'ouvrage de *Boece* même, on est forcé de convenir que le principe » de notre Arithmétique moderne étoit connu de son tems. Mais qui » pourra se persuader que tous les manuscrits de cet Auteur, sans en » excepter aucun, aient été altérés de cette maniere? quelle preuve ne » détruiroit-on pas, si l'on pouvoit ainsi rejetter à son gré des mor-

» ceaux considérables d'un ancien Ecrivain ? » Ciò stabilito, passando alla terza quistione, pagina 120, scrive : « j'amerai mieux conjecturer » que ce fut (la Pitagorica Aritmetica pretesa alla nostra simile) une » de ces inventions que Pythagore puisa chez les Indiens, que de pen- » ser que ceux-ci la tirerent des Grecs. » Ma alla pagina 364 pensa, che la nostra Aritmetica nell' India nata « delà elle aura pu passer » de proche en proche aux Arabes & aux autres peuples de l' O- » rient avec qui les Grecs curent un grand commerce dans les pre- » miers siecles après la fondation de Constantinople. Ce fut peut- » être alors que ces derniers la connurent: mais comme les Scien- » ces commençoient à décliner beaucoup chez eux, ce ne fut qu'une » connoissance stérile, & dont ils ne tirerent point les avantages que » leurs ancêtres en auroient tirés. *Boece* qui écrivoit au commence- » ment du sixieme siecle, & qui avoit puisé chez les Grecs tout son » sçavoir, la reçut d'eux, & l'inséra dans sa Géométrie, en l'attribuant » à *Pythagore*, soit que ceux de qui il la tenoit, le lui eussent dit » ainsi, soit qu'il ait lui-même hazardé ce trait. » È manifesto il travaglio, l'agitazione, l' incostanza che a Montucla cagionò il passo di Boezio. Bell'argomento però, e lume intorno alla terza quistione trarre poteva da Planude: nuovi lumi sulla prima, e sulla seconda somministra a noi Leonardo, e di essi approfittando, e con altri riflessi componendoli, spero, che tutti e tre verranno tolte dalla oscurità che le avvolge. Comincierò dall'osservare che Boezio non già di Pitagora, ma di alcuni Pitagorici parla; e quando pure e figure e regole Indiane conosciuto essi avessero, e i codici di Boezio all'originale fossero interamente corrispondenti, sarebbe essa legittima conseguenza che quei Pitagorici da Pitagora ricevute le avessero ? La particolarità anzi non indurrebbe a credere, che piuttosto, che dottrina dell'antico comune maestro, dottrina fosse a quella posteriormente innestata? Lo che ammesso, superfluo diverrebbe il cercare, se Pitagora dall' India la recasse. Ma secondo, deducendosi dalle maniere che Leonardo ritornato d'Oriente in iscrivere nel libro suo le Indiane figure tenne, che alla Latina Gente riuscire dovessero nove; si fiancheggiano quindi gli altri argomenti, che nei codici di Boezio al secolo XIII anteriori, molto meno nell'originale di lui, non fosservi, sotto nome di *apici* ad alcuni Pitagorici particolari, numerali note alle Indiane simili. Espressamente, per terzo, asserendo Leonardo che la Latina Gente era stata sino a quel tempo della scienza dei numeri, giusta l' Indiano Modo priva, forza è inferire che quel luogo di Boezio originalmente, e nei codici al secolo XIII anteriori, siccome non conteneva le numerali Indiane figure, così neppure fondo d'Indiana Aritmetica fosse riputato contenere. E se pure nei codici posteriori e nelle stampe da essi tratte col vedervisi numerici caratteri d' Indiana forma, trapelasse nella oscurità un Indiano uso di essi, si avrebbe diritto di riguardare il luogo cangiato in quanto ai caratteri intrusi, alterato insieme corrispondentemente nella dottrina. Ma ho voluto esaminare io stesso quel passo di Boezio, e studiarmi di penetrarne lo spirito, e rilevarne la sostanza. Ecco come, distinto il costume diverso tra Pitagorici nel dipignere la tavoletta, quali di caratteri singolari servendosi, e quali di caratteri letterali, procede Boezio a descrivere il modo, onde distribuivano l'una, o l'altra sorte di caratteri od apici: *Hos apices ita varie ceu pulverem dispergere in multiplicando, et in dividendo consueverunt, ut si sub unitate naturalis numeri ordinem jam dictos characteres adjungendo locarent, non alii quam digiti nascerentur. Primum autem binarium (unitas enim, ut in Arithmeticis est dictum numerus non est, sed fons et origo numerorum* 10) *inscripta ponentes* 20, *et ternarium* 30, *et quaternarium* 40, *caeterosque in ordine se se sequentes, proprias secundum denominationes assignare consueverunt. Sub linea vero centeno insignita numero eosdem apices apponentes binarium* 200, *ternarium* 300, *quaternarium* 400, *caeterosque certis denominationibus respondere decreverunt. In sequentibus vero paginularum lineis idem facientes nullo erroris nubilo obtenebrantur. Scire autem oportet et diligenti examinatione discutere in multiplicando et partiendo cui paginulae digiti et cui articuli sint adjungendi. Nam singularis multiplicator decem, digitos in decenis, articulos in centenis. Idem vero singularis multiplicator centum digitos in centenis, articulos in millenis; et multiplicator milleni digitos in millenis, et articulos in decenis millenis habebunt* . . . e similmente sino alla moltiplica di 100000 per 100000. Dopo di che segue: *De divisionis rubrica* sullo stesso tenore, che dall'autore medesimo si confessa oscuro, e non più che un ombreggiamento di regole da meditarsi dallo studioso con grande cura per ischiarirne a sè stesso le idee. Pazientemente ricercando fra queste tenebre rilevo: che in tutto il passo, per primo, niuna menzione si fa di una decima nota da unirsi al carattere dell'unità per comporre il dieci; che secondo, insiememente non vi è pel dieci un apice semplice singolare, e la enumerazione dei distinti apici da scriversi nella tavoletta non prosegue, che sino al nove: ragione per cui la serie stessa delle figure agli originali apici sostituite, che esibisce Montucla estratta dal Manoscritto di Mead a differenza delle altre serie tutte termina al nove; che terzo, ai decadici numeri, di qualunque ordine siano, si applicano i nomi di *binario, di ternario* ecc.; che quarto, intruse per conseguenza evidentemente sono quelle spiegazioni all'Indiana 20, 30, 40 . . . 200, 300, 400; che quinto, dalla linea orizzontale, e dalla casella di essa, in cui trovasi collocato, acquista l'apice stesso il valore o semplice, o decadico, la denominazione di digito, o articolo, di meno o più alto ordine; che sesto, la tavola, invece di terminare, come ora appresso noi, colla linea delle decine, contiene quella delle centinaja, ed oltre si estende; che la dottrina della moltiplica, per settimo, ristrignesi alla moltiplica dei numeri semplici (detti qui, come da Gerberto, *singolari*) coi decadici, e di questi fra loro; che ottavo, i prodotti non si esprimono già con nuove composizioni di apici, le quali pongano sott'occhio il valore loro, ma si valutano in generale per digiti, ed articoli di differente ordine, e per diverso luogo distinti, dandosi sempre il nome di *digiti* al numero di minor grado tra i due, che il prodotto comprenda: così se moltiplichisi il singolare, o semplice numero nove col decadico ottanta, non si fa già per esprimere il prodotto settecento venti una nuova propria composizione di numerali apici, ma se ne assegna il valore per due digiti nella linea delle decine, e sette articoli nella linea delle centinaja. Ed ecco chiaro in esempio il senso del precetto: *singularis multiplicator decem, digitos in decenis, articulos in centenis habebit*, la cui versione letterale è: fatto il numero singolare moltiplicatore del decadico, produrrà digiti nelle decine, ed articoli nelle centinaja. E di qui, si rendono facili a comprendersi i simili sensi degli altri precetti. Ora dove in tutto ciò orma, e principio d'Indiana Aritmetica, se all'incontro è palese mancarvi l'essenza? Se non vi è il decimo carattere, che di niun significato solitariamente posto, apposto però ai numerali caratteri, dia ad essi un valore decuplo, di ordine tanto più elevato, quante più volte a destra apposto o ripetuto? Se non havvi l'accoppiamento dei numerici caratteri semplici per esprimere i numeri composti? Se invece di unirli, e dal luogo di ciascuno nell'unione estimarne il valore, distribuiti e dispersi come polve, dalla linea e dalla casella il valore se ne estima? Io non so dunque scorgere nel passo di Boezio fondo veruno d'Indiana Aritmetica. Che se stato vi fosse, l'ammirazione dei talenti di Pitagora, la parzialità, il trasporto per le cose tutte ornate del nome di lui, il credito stesso di Boezio, il pregio, e l'uso delle sue opere appresso i Latini come permesso avrebbero, che tra essi largo non si spandesse di tal prezioso fondo la notizia? Che dati eglino non si fossero a svolgerlo, coltivarlo, renderlo fruttuoso? O come almeno Leonardo tanto sollecito di quanto in materia di conteggio studiavasi, e praticavasi dalle estere nazioni, ignorato avrebbe poi ciò, che nell'opera trovavasi del suo connazionale Boezio? O come non essendone ignaro avanzato avrebbe, che la Latina Gente era stata sino al momento dell' offrirle il libro suo dell'Indiano Modo di conteggiare priva? L'esame pertanto intrinseco del luogo di Boezio, e l'asserzione di Leonardo a dimostrare concorrono, che la Pitagorica Aritmetica, di cui parla Boezio, non ha che fare colla Indiana, e che questa nè tampoco di una parte de'seguaci di Pitagora divenuta era distinta scienza, e pratica alle Pitagoriche dottrine innestata. Che se di Pitagora più immediatamente, e singolarmente si parli; e non distingue espressamente Leonardo dall'Indiano Modo l'arte di lui, riputandola a confronto *quasi errorem*, un errare o vagare incerto? *Sed hoc totum . . . atque artem Pictagorae quasi errorem computavi respectu Modi Yndorum.* Che più dunque? Non è giuoco forza conchiudere, che sì le numerali figure, e sì le Aritmetiche regole di Pitagora dalle Indiane differivano lungamente? E se forse per amore all'Indiano Modo si lasciò Leonardo trasportare ad esprimerne la eccellenza sopra l'arte di Pitagora con una frase un po troppo gagliarda, non si accuserà però di grave ingiustizia da chi non voglia accusare insieme Montucla stesso. Questi sebbene Parte I, Lib. III°, Art. IX, dia a Pitagora, e suoi discepoli la gloria di avere nella Grecia elevato dalla condizione di semplici arti al grado di scienze, l'Aritmetica, e la Musica, soggiugne però, che « l'Arithmétique fut tou- » jours chez les anciens fort différente de ce qu'elle est aujourd'hui. » On n'y trouve presque aucune trace des opérations dont les mo- » dernes composent la plus grande partie de la leur; & il y a ap- » parence que ces opérations se faisoient presque à force de tête; » du moins nous avons perdu tous les livres où elles étoient expli- » quées. Tels étoient, à ce que nous conjecturons, un traité de *Nicomaque*, » & les deux premiers livres de collections Mathématiques de *Pappus*, » dont il nous reste un petit fragment, où l'on entrevoit (notisi bene) » le procedé embarrassent par lequel on diminuoit un peu la diffi- » culté de multiplier de grands nombres. » Decise già le due prime quistioni cade la terza, per lo scioglimento della quale poteva a Montucla bastare l'autorità di Planude. Poichè se i Greci diritto alcuno avuto avessero sugli Indiani numerici caratteri, sull' Indiana arte di calcolare, come taciuto avrebbelo il Greco Planude? Come Indiani caratteri, Indiana arte avrebbe egli stesso detto, e posto in fronte al trattato suo di Aritmetica?

Riflessione X. Per le cose nelle Riflessioni V, VI, IX dimostrate, abbattuta rimane l'opinione di Uezio (*Demons. Evang.* Prop. IV) che i nostri numerici caratteri dai Greci vengano, e non siano che le lettere del Greco Alfabeto alterate, e malconce via via da scritturali. Sono pure fortissime le dirette confutazioni del celebre Ab. Andres, Tomo I, pagina 224. Io mi fo pregio trascriverle, e gioverà avere tutto unito sott'occhio. « Per quanto, dice egli, abbia procurato esa- » minare ne'libri, che trattano di Paleografia, e di Storia dell' Arit- » metica infinita varietà di caratteri Greci, e di figure de'numeri Ara- » bici (in quanto per gli Arabi trasmessi) non ho mai potuto ravvi- » sarvi il menomo vestigio della pretesa derivazione. Le forme tutte » α, per esempio, e del β sono tanto diverse da quello de'numeri » arabici 1, e 2, che in veruna guisa non se ne scorge la somiglian- » za; nè so concepire in quale maniera le une dalle altre dovessero » nascere. Maggiore ancora si trova la differenza nel numero dei ca- » ratteri numerali dei Greci e degli Arabi. Nove soltanto sono i nu- » meri Arabici, formandosi poi tutti gli altri dalla combinazione di al- » cuni di questi, o dalle aggiunte di zeri; mentre i Greci sino a ven- » tisette contano le figure numerali: e perchè il loro alfabeto non » conosce tanti caratteri, aggiungono tre altri segni da loro chiamati » *βαῦ κοππα, τζαδδι*. Noi coll'aggiunta di un zero formiamo le decine, » e queste coll'aggiungerne un altro ascendono a centinari. Ma i

» Greci con differenti lettere esprimono le unità, le decine, ed i centinari, e formano, per esempio, il 4 da un δ, ed il 40 da un μ, » ed il 400 da un υ, nè segno alcuno conoscono, che possa equivalere al nostro zero. Ora se gli Arabi presero dai Greci le figure » delle unità, perchè non abbracciare ugualmente quelle delle decine, » e de' centinari? Come formarsi quello zero non conosciuto da Greci, » e che a noi riesce di tanto comodo? Questa differenza mi sembra » talmente decisiva, che non vedo, che luogo possa lasciare a tergiversazione. Ma un'altra ce ne porge inoltre l'uso delle figure numeriche. Noi colle medesime cifre collocate in luoghi diversi rappresentiamo diversi numeri: il numero delle cifre, che seguono determina il valore delle precedenti; il 3, a cagione di esempio, in » 39 ha il valore di 30, e in 394 di trecento. Ma i Greci non serbano costantemente una ragione nel dare il valore ai loro caratteri: » λ è segno di trenta, ϑ di nove, e δ di quattro, e Tolomeo fa servire il λ di trecento, il ϑ di novanta, e per esprimere il numero » 394 segna λϑδ. Tutte queste sono in verità differenze tanto notabili, » che se l'Uezio le avesse osservate con qualche attenzione, punto » non dubito che abbandonata avrebbe la sua opinione. » Sin qui eruditamente l'Abate Andres. È molto più da maravigliarsi di Targion Tozzetti, il quale a fronte della testimonianza di Leonardo dubita pure, che i nostri numerali caratteri siano lettere minuscole Greche un poco storpiate, e che forse gli Arabi, dai quali a noi si propagarono abbiano presa la maniera di conteggiare in questa comodissima guisa dai Greci dei Bassi secoli, e l'abbiano poi migliorata ed ampliata.

Riflessione XI. Quella che appellasi *Tavola Pitagorica* è essa Pitagorica veracemente? Ecco una nuova quistione, che decise già, siccome lusingomi, quelle da gran tempo per altri proposte, ed agitate, io condotto sono a proporre. E strana sembrerà, ardita contro l'autorità dell'universale lungo detto la proposizione; ma dimostrata dalla nostra diversa la Pitagorica Aritmetica, necessaria conseguenza, lungi che temeraria quistione si fa la diversa struttura della loro, e della tavola, che noi usiamo. Vero è, che al fine del I° libro di Geometria di Boezio, dove egli tratta della tavola, che i Pitagorici adoperavano nella moltiplica, e divisione dei numeri, si vede una tavola, la stessa affatto che la nostra; nè altro fondamento so io trovare, che questo dell'invalso costume di chiamare *Pitagorica* la tavola appresso di noi in uso. Ma che valutare la esistenza di essa in quel luogo di Boezio, se alla descrizione, che ivi Boezio fa della tavola de' Pitagorici per nulla non corrisponde? Ho già recato di sopra nella Riflessione IX la descrizione di Boezio: si confronti colla tavola nel foglio del volume di Boezio esposta, e scorgerassi l'aperta verità di ciò, che io dico. E dove in quella tavola, identica alla nostra, dove la linea *centeno insignita numero?* Dove sotto di essa con ordine i centenari numeri? Dove le seguenti linee per le migliaja ecc.? E quel costante linguaggio di unità, di binario, ternario, quadernario, accennare volendo una, due, tre, quattro decine, uno, due, tre, quattro centinaja; quell'apporre lungo le diverse loro linee gli apici stessi: *eosdem apices apponentes;* quello in somma rendere a numeri di sì differenti ordini comuni nomi, ed apici, non altra distinzione assegnando, che delle linee, quanto non è dal sistema della tavola ivi esposta lontano? E come con esso accordare si potrebbe? Le regole per l'uso della tavola descritta nella moltiplica cominciano dal moltiplicare i numeri singolari, ossia dei dieci minori, colle decine, ommessa affatto la moltiplicazione dei numeri singolari fra loro, che costituisce, o riempie de'suoi prodotti la tavola esposta sino alle estreme linee formate dei prodotti dei numeri singolari, e del dieci ancora divenuti moltiplicatori di una decina: e così apparisce che la esposta tavola finisce in ciò, con che la descritta dei Pitagorici incominciava. Discordanze sì grandi traggono a riguardare la tavola in quel luogo di Boezio presentata quale intrusa in cambio della Pitagorica all'epoca stessa, in cui nel testo ai Pitagorici apici furono gli Indiani numeri sostituiti; ma l'intrusione fu fatta senza consiglio, e senza l'avvedutezza di modificare, e rendere corrispondente alla forma sottoposta alla vista la verbale descrizione. Io non mi arrischierò a delineare la vera tavola Pitagorica, nè a determinare il modo loro di usarne nella moltiplica, e nella divisione: e che gioverebbe quand' anche s' indovinasse giusto? Quello, che a me trapela si è, che essa non fosse, che un supplemento dell'Aritmetica Digitale. E ciò, che per autorità di Leonardo certo tenere si deve, si è, che rinnovandola, niente si avrebbe degno di stare a confronto dell'Indiano Modo di conteggiare, anzi da esso non lontano tanto, quanto dal luminoso, fermo, spedito procedere, l'oscuro, vario, disagevole: non potendosi da quella sua sentenza *Algorismum atque Artem Pictagorae quasi errorem computavi respectu Modi Yndorum,* eccettuare l'artificio della tavola per la moltiplica e la divisione; se pure non ebbelo egli singolarmente di mira. Pitagorica non essendo, si chiederà di quale origine sia la tavola, che noi usiamo: in quale epoca, in quale luogo, da chi inventata? Ecco ciò, che rispondere io posso. Che la ritrovo bensì nel volume di F. Luca; non però nel capo della moltiplica, nè per uso di essa, riguardo alla quale distende egli in vece una assai lunga tavola di tutto altro ordine; ma nel capo delle Proporzioni, riscontrandosi da lui elegantemente le varie specie di Ragioni nelle orizzontali file dei numeri della tavola le une colle altre confrontate; nè ivi Pitagora si legge, sebbene il nominarlo stato sarebbe per F. Luca, lui potendo riguardare della tavola inventore, un dovere tanto più grande, quanto che annoverato non avevalo tra gli autori, che a confessione sua, i fonti furono al suo volume. In verun luogo non trovo essa tavola nell'opera di Tartaglia, il quale a somiglianza di F. Luca empie quattro grandi facciate di moltipliche, altre necessarie, altre, al dir suo, molto utili a *mettersi a mente vincendo la fatica che* *si patirà a impararle.* Mancano in Cardano simili tavole alla memoria gravi; ma manca ugualmente la tavoletta oggidì usitata. Osservo per altra parte, che nel luogo di Boezio a destra della ivi esposta tavoletta sta di fianco di ogni orizzontale fila notata la ragione sua, ossia de'suoi numeri a quelli della suprema fila, e sotto ogni fila verticale è scritta la sua ragione alla fila prossima che l'attende a sinistra. Le ragioni prime sono della specie di *Molteplice semplice*; e le seconde della specie di *Superparticolar semplice.* Si vede dunque nella tavoletta offerta in Boezio, l'uso di rappresentare, come in F. Luca, le diverse specie delle ragioni. Vero è, che il modo è diverso: poichè F. Luca non confronta che fila orizzontali, nulla valendosi delle verticali; eppure in vece di due sole, tutte vi dimostra, variamente esse orizzontali fila combinando, le varie specie di ragioni. Ma in sostanza l'uso è lo stesso, e potè appresso gli Aritmetici di quei tempi esserne vario il metodo secondo il particolare amor loro per l'uniformità, o per una distinzione maggiore, e secondo l'oggetto di una rappresentazione delle varie specie di ragioni, o più estesa, o più ristretta. Quello che importa notare si è, che tale uso della tavoletta è estraneo nel luogo di Boezio, che di ragioni e rappresentazioni loro non muove parola; per lo che confermasi essere ivi essa intrusa. E tutto insieme raccogliendo sembra potersi fondatamente argomentare, che l'ufficio di rappresentare le varie specie di ragioni sia stato della nostra tavoletta l'ufficio primario, e di origine, al quale in succedere di tempo aggiunto siasi quello di servire alla moltiplica. E la cosa pare avvenuta così. Avvertendosi per un canto, che i Pitagorici avevano una tavola per la moltiplica; riflettendosi d'altro canto, che la tavoletta rappresentante le varie specie di ragioni conteneva in bello e comodo ordine disposti i prodotti tutti dei numeri dall'unità sino al dieci moltiplicati l'uno per gli altri, e che tanto bastava per una moltiplica qualunque in iscritto, secondo le Indiane regole, naturale conseguenza fu, che si pensasse ad accoppiare nella tavoletta all'ufficio di rappresentare le varie specie di ragioni il nuovo ufficio di aiutare i giovani nella moltiplica. Ed eccola tale inserita nel luogo di Boezio in cambio della Pitagorica, che originariamente vi era, e da Boezio si descrisse; eccola, comecchè in nulla alla descrizione corrispondente, chiamata Pitagorica. Io non saprei assegnare l'epoca di tali avvenimenti, e forse il falso nome ebbe epoca posteriore alla intrusione, e fu di essa effetto. La tavoletta che oggidì nella Geometria di Boezio ci si mostra coincide con quella nel capo delle Proporzioni da F. Luca offerta per sino nella estensione comprendendo il dieci, che pure è inutile nell'uso per la moltiplica Indianamente scritta. Fu lasciato di poi e la tavoletta così diminuita di una fila di caselle orizzontale, e di una verticale. Si avvertì in progresso, che immaginando una diagonale dall'angolo superiore a sinistra all'angolo inferiore a destra, ossia dalla casella dell'1 alla casella dell'81, tutti i prodotti contenuti nel triangolo al di sotto di tal diagonale non erano, che una replica dei prodotti esistenti nel triangolo al di sopra, e che perciò la tavoletta quadrata ristrignere potevasi alla sua triangolare metà superiore lasciandovi di aggiunta la trasversale fila di caselle dal 2 al 72, e in esse, in vece dei prodotti 6, 12...72, dalla verticale colonna a sinistra trasportando, e obbliquamente disponendo i moltiplicatori 3, 4...9. Fu questa triangolar forma appellata tavoletta contratta. Wallis nella sua Aritmetica col titolo *Opus Arithmeticum Philologice, et Mathematice Traditum* al capo della moltiplica presenta la tavoletta sotto ambedue le forme, e sotto l'intera quadrata, e sotto la contratta triangolare; ma nulla egli di Pitagora, cui il suo Filologico assunto permesso non gli avrebbe di non rendere onore, se lavoro di lui creduta l'avesse; nulla del tutto intorno all'origine, alla storia di essa, dicendo solo *tabellam quandam solent compingere.*

Riflessione. XII. Senza punto intertenermi sui capitoli 2...7 dirò che i capitoli 8...11 comprendono un trattato pratico utilissimo al commercio insegnandovisi le regole, che devono governarlo, e diriggerlo nelle vendite e compere, ne'cambj di qualsiasi sorte, ne'meriti e sconti semplici, o composti, nelle società, nell'alligazione de' metalli per formare le monete. Quel vocabolo *Bolsonalia* significa moneta comperata a valore intrinseco d'argento per fonderla, ed altre formarne. I più dei trattati odierni di Pratica Aritmetica non sono nè così pieni, nè così giudiziosi come quello di Leonardo.

Riflessione. XIII. Il capitolo 12°. è un cumulo di quistioni di vario genere, e per ciò dette *Erratiche.* Qui delle nature diverse, delle differenze, delle ragioni, e proporzioni, dei quadrati, dei cubi de'numeri; qui le somme delle progressioni, che diconsi Aritmetiche, e il derivamento delle serie dei numeri figurati; qui similmente quello delle progressioni Geometriche col doppio problema della scacchiera, cioè di assegnare la quantità di granelli che richiederebbesi pei 64 scacchi, sì raddoppiando sul seguente scacco continuamente il numero de' granelli posti sul prossimo antecedente solo, e sì raddoppiandovi la somma dei posti sugli antecedenti tutti congiuntamente; qui pure la raccolta dei numeri quadrati con molti quesiti di essa, e di quella dei numeri semplici intessuti; qui eziandio le dottrine sulle combinazioni, e sulle permutazioni. Quanti bei rami di Aritmetica Teorica! Non poche, e non poco sottili, ed importanti sono le applicazioni a punti di Aritmetica Pratica, a casi di traffico singolari, a giri di monete più composti, a società più complicate.

La sua conveniente parte vi ha la Geometria riguardo a quelli elementi che le sono coll' Aritmetica comuni, e dal numerico computo ricevono più vivo lume, e più sensibile dimostrazione. Nè vi è ommesso tampoco il conteggio giocoso, l'indovinamento del numero da alcuno immaginato, il ritrovamento dell'anello, e simili altri giocondi Aritmetici esercizi. Io in quattro classi ho ripartito le quistioni da Leonardo qui trattate; ma l'autore in dieci le distribuisce, che formano altrettante parti del capitolo. Chiama egli, non meno che le quistioni, Erratiche le regole impiegate a scoglierle, in quanto varie fra loro, nè le une colle altre legate, od in un corpo per comuni principi congiunte.

Riflessione. XIV. Eccoci nel cap. 13.° alla dottrina della bella regola delle False Posizioni, chiamata con Arabico nome El-chatayn. Udiamo sulla origine di essa, e sul trasporto della medesima in Italia il Montucla. « Il n'est pas douteux, que les Arabes n'aient reçu » les regles principales de leur Arithmétique avec ces caracteres; & » il est aussi fort probable que leurs Mathématiciens y en ajouterent » d'autres. Parmi les artifices, que nous leur devons dans ce genre, je » mets les regles de fausse position, simple & double. *Lucas de Burgo* les avoit apportées d'Orient, & il leur donne le nom de re» gles d'*Elcatain* » *Parte II*, *Libro I*, *Art. VIII*, *pagina* 366. Lo storico erra di gran lunga e nell'epoca, e nella persona benemerita del trasporto. Non Frate Luca, ma Leonardo tre secoli quasi prima, al sorgere del secolo XIII portò d'Oriente in Italia la regola delle False Posizioni tanto ingegnosa, tanto utile, alla quale anche oggidì, dopo sì grandi progressi dell'Analisi ricorresi in astrusi problemi di Astronomia, e di altre parti della Matematica, e Fisica scienza. Quale riconoscenza non dobbiamo noi dunque a Leonardo? Ma è almeno vero che l'artificio delle False Posizioni a stimar abbiasi assai probabilmente invenzione degli Arabi Matematici, come opina Montucla? Leonardo non ne accenna autore, bensì nella prefazione, e nella dedicatoria lettera d'Indiano Modo egli dice la piena scienza de'numeri che accignesi a spiegare; e qui rileggasi la Riflessione IV. Ad oggetto poi di far risaltare la eccellenza di esso artificio di Falsa Posizione imprende Leonardo a sciogliere col mezzo suo pressochè tutte le molte, e varie erratiche quistioni antecedentemente sciolte per le varie erratiche regole. E quale in fatti più bella, più cospicua prova della fecondità sua, della sua estensione, del poter suo, che l'equivalere da se solo a tanti altri artifici, anzi superarli facendo in una maniera semplice, franca, svelta, ciò che essi per vie intralciate, vaghe, lunghe? Se grande però, se ampia è l'utilità dell'artificio delle False Posizioni, non è tuttavia men vero, che ha esso pure i limiti suoi, e che esige nell'applicarlo temperanza, e metodo. Per difetto di giusta applicazione è succeduto talvolta, che apparisse fallace, che si accusasse come malsicuro, o quale paradosso ad ammirar si desse il non uscirne il desiderato vero. Ma può essere soggetta ad errore una regola di Aritmetica, se non si porti fuori della sua sfera, se in debito modo si conduca l'applicazione sua? Può esservi in tutta la scienza del calcolo paradosso? Nell'evidente luce, tenebre? Spero di far vedere un giorno la vera fonte degli spacciati tanto, e tanto all'Analisi oltraggiosi paradossi. Intanto su di un paradosso prodottosi riguardo all'artificio delle False Posizioni, e sul dubbio quindi sparso sulla sua sicurezza si vegga ciò, che ho io scritto in un opuscolo inserito nella periodica raccolta *degli Scelti* in Milano, *Vol.* VIII. Fra le applicazioni stesse comunemente insegnate, e praticate ve ne ha, che la estensione in rigore eccedono, e la naturale legge trasgrediscono di esso artificio, e che ammettere solamente si possono, in quanto la trasgressione non è poi tale, onde per varie spire, dirò così, non ci accostino elleno alla verità, cui è pur bene seguire anche un poco da lungi, quando non si possa meglio: non lascia però di essere un difetto di teoria condannevole il non distinguere di tali applicazioni la inesatta condizione, il non circoscriverne il prezzo, e darle sotto un'aria stessa, che quelle nei confini, e a tenore preciso della regola. È manifesto pertanto che il non conoscere appieno i fondamenti dell'artificio, o il non badare ad attenervisi fedelmente state sono le cagioni dell'uso illegittimo, che se n'è fatto. L'analisi a cui accinto mi trovo del libro di Leonardo mi aprirebbe l'occasione di mostrare, come in origine gli Aritmetici condotti furono alla Falsa Posizione Semplice, e quindi alla Doppia; su quali principi fondarono l'artificio; i limiti che per tali principi stessi vengono ad esso imposti; quale fu il primitivo modo di compierlo, ossia di cavare dal Falso il Vero, e come si procedette al secondo, che sebbene derivato di quello, e meno semplice è venuto più in uso, per non dire divenuto il solo. Ma perchè da un canto troppe altre cose in questa Memoria ho io a svolgere, e d'altro canto i lumi pel capitolo di Leonardo sparsi trovansi più rischiarati nell'opera di F. Luca, che alla seconda Memoria sarà materia, e così migliore là, non che pari mi ritornerà l'occasione; perciò mi si conceda di colà differire a soddisfare il desiderio, che forse si sarà destato.

E per simili ragioni nella stessa Memoria 2ª riserbomi ad esporre, e colla odierna confrontare la primiera regola per estrarre la radice dai Binomi, e recisi $\pm P \pm \sqrt{Q}$, che l'argomento precipuo si è del capitolo 14°, ed un soggetto di bella gloria (nel generale quadro già l'enunciai) per gli antichi, i quali procedendo più retto, e più giusta natura, che noi ricavarono in parti reali la radice in quei casi stessi, ne'quali a noi riesce in parti immaginarie spezzata.

Riflessione XV. Era da aspettarsi, che quegli, il quale celebrato aveva dell'Aritmetica, e della Geometria il vincolo, ed il reciproco suffragio: *Arithmetica et Geometriae scientia sunt connexae, et suffragatoriae sibi ad invicem*: lo andasse opportunamente dimostrando col fatto. Perciò, dopo avere Leonardo nel capitolo 12°. tra le Erratiche inserite, e co' numeri dilucidate varie Geometriche quistioni adatte a quel luogo, eccolo nel capitolo XV entrare più di proposito alla applicazione delle Arimetiche dottrine, e di quella delle proporzioni precipuamente alla Geometria, dividendo come segue esso capitolo: *Partes hujus capituli sunt tres, quarum prima erit de proportionibus*, *trium, et quatuor quantitatum, ad quas multarum quaestionum Geometriae pertinentium, solutiones rediguntur. Secunda erit de solutione quarundam quaestionum Geometricalium. Tertia erit super modum Alzebrae et Almucabalae*: Io non mi fermerò punto sulle due prime per tosto passare alla parte terza.

Riflessione XVI. Non di una, ma di più riflessioni coglierò da essa terza parte del capitolo 15° materia, od occasione. Incomincio dal suo incominciamento. *Incipit*, scrive Leonardo, *pars tertia de solutione quarundam quaestionum secundum modum Algebrae, et Almucabalae scilicet Oppositionis et Restaurationis.* Li solleciti di Ortografia osservino che Leonardo scrisse del pari Alzebra ed Algebra, se pure non vogliasi piuttosto del copista errore il primo modo. Io avvertirò, che a prendere ordinatamente i nomi, e le interpretazioni, *Oppositionis* sarebbe il significato di *Algebrae*, e *Restaurationis* quello di *Almucabalae*. Eppure Frate Luca, che tanto confessa d' aver cavato da Leonardo alla pagina 144: *Gionti*, dice, *con laiuto de dio al luogo molto desiderato: cioe ala madre de tutti li casi detta dal vulgo la regola de la cosa ouer. Arte magiore: cioe pratica speculatiua: altramente chiamata. Algebra et almucabala in lingua arabica: ouer caldea secōdo alcuni che in la nostra sona quanto che adire restaurationis et oppositiōis. Algebra id est. Restauratio. Almucabala idest. Oppositio: vel cōtēptio: et Solidatio.* Ho voluto per accertarmi della vera origine dei nomi, e della giusta corrispondenza delle interpetrazioni consultare il prestante mio collega, ed amico il sig. Ab. De-Rossi celebre ugualmente e per l'incomparabile tesoro di codici, massime Biblici, che possiede, e per quello della vasta dottrina nelle Orientali lingue. Ecco le etimologie da lui favoritemi.

Giabera, vel Giavera - Radice Araba, che significa *Religavit-Consolidavit - Integritati reddidit fractum* - Golio, e Castelli *Lexicon Eptagl. Giaveron - Apud Mathematicos Reductio partium ad totum, seu fractionum ad integritatem, et hinc Algebra nomen habet.* Gli stessi.

Mokbal, *vel Mukbal.* Radice Araba significante: *E regione situs.*

Mokabalad vel Mukabalath. Oppositio - Avicenna. *Item Comparatio. Collatio.* Golio e Castelli.

Akbala Chaldaice Contrarietas. Oppositio. Lex. Cald. Buxtorbii.

Si derivi dunque da Araba, o da Caldea radice Almucabala è indubitato, che *Oppositio* è la significazione sua; e *Restauratio* o *Solidatio*, è quella che appartiene ad Algebra, nome unicamente Arabico. L' abbreviatura *cōtēptio*, che trovasi nel testo di F. Luca non può rilevarsi, che in *contemptio* ma questa voce non è renduta dalle radici nè di Almucabala nè di Algebra, e sicuramente si stampò *cōtēptio* in cambio di *compātio* in cui F. Luca abbreviato aveva *comparatio.* Nè deve fare difficoltà, che usato prima quest'ordine: *Algebra-Restauratio*; *Almucabala- Oppositio* con contrario ordine disponga F. Luca i nuovi significati: *vel Comparatio et Solidatio*: ha voluto col l' *Oppositio* attaccare il sostituito *Comparatio*, e quasi, dirò così, per circolo tornare col *Solidatio* al più distante *Restauratio*. Facciamo noi così alle volte, dopo nominate due cose, soggiugnendo: e questa, e quella. E probabilmente per simile tenore Leonardo congiunse la prima parte dell'interpretazione *Oppositionis* con *Almucabalae* ultimamente nominata, e la seconda parte *Restaurationis* retrocedendo ad *Algebrae* rapportò nominata in prima. Non ommetterò di notare che invece di *Oppositionis*, che leggesi nel Codice Magliabechiano da me visitato, ed in uno imperfetto posseduto dal dotto, e cospicuo Cav. Nelli, un altro esistente nella Magliabechiana Biblioteca ha, come scrivemi il chiarissimo P. Canovai, *Proportionis*, e quello della Riccardiana, mi fa sapere l'eruditissimo Bibliotecario Ab. Fontani, presenta *scilicet ad Proportionem, et Restaurationem.* La diversità di questo ultimo modo di dire non può stimarsi errore del copista, ma espressa di lui licenza, se non fu cangiamento dell'Autore stesso in rifare il suo libro. Se poi si badi, che gli antichi dietro Euclide usavano il vocabolo *Proporzione* nel senso, che noi quello di *Ragione*, si vede com'esso si tocchi col termine *Comparazione*, ed anche come ravvicinare si possa a quello di *Opposizione*. Montucla, Parte II, Lib. I°, Art. IX, pag. 367 dice: « *Lucas de Burgo* qui ayant puisé » ses lumieres chez les Arabes est fort croyable à cet égard, nous donne » la vraie origine du mot *Algebre*. Il vient, dit-il, des mots *Aljabar* » v' *Almucabala*, ce qui en Langue Arabe signifie *opposition* & *re-* » *stitution*, des deux racines *Gébera* (*opposuit*,) & *Cabala* (*restituit*). » Sembra questo un luogo, nel quale gli scambi, i travolgimenti, le incoerenze venute siano ad addensarsi. Primo: è manifesto lo scambio delle interpretazioni *Opposuit-Restituit*. Secondo: corretto anche questo, quanto mai non rimane travolta la esposizione del dire di F. Luca? E dove mai deriva egli la voce Algebra confusamente dalle due *Aljabar v' Almucabala*, se all'incontro distingue in apertissimo modo Algebra da Almucabala, e loro attribuisce diverso significato, e non solamente nel luogo addotto, ma e alla pag. 67, ed alla 148, e dappertutto costantemente scrivendo *Algebrae et Almucabalae, hoc est Restaurationis et Oppositionis?* Terzo: si è veduto che F. Luca lungi dal decidere che Algebra, ed Almucabala siano d'origine Araba, lascia in dubbio, se d'Araba piuttosto siano, ovvero Caldea. Quarto: falso, che F. Luca avesse presso agli Arabi acquistato i suoi lumi, o come più espressamente Montucla replica a pag. 368, da essi apparato tutto ciò, che sapeva in Algebra, e per ciò gli si debba fede singolare. Leonardo non aveva egli, per narrare dello stesso Montucla, trapiantato già dall'Oriente in Italia l'Algebra? Non è a lui dunque che cogli altri Italiani, cogli Europei tutti estimare dovrebbesi F. Luca obbligato dei lumi in Algebra, quand'anche non lo desse a divedere il parlare suo stesso, nulla per una parte accennando del suo ammaestramento dagli Arabi; e volgare già in Italia per altra parte mostrando l'Arte Maggiore notandola dal volgo detta la Regola della Cosa? E con altre apertissime prove evidente renderò questa verità a suo luogo.

Riflessione XVII. Il D'Alembert nell'Encicl. riferendo che Menagio deriva Algebra dall'Arabo *Algiabarat: qui signifie le rétablissement d'une chose rompue*, lo condanna soggiugnendo: *supposant faussement, que la principale partie de l'Algebre consiste dans la consideration des nombres rompus;* e segue a dire, che *ne vaut guere mieux* l'etimologia da altri assegnata formando Algebra del congiungimento della particella *al*, e della voce *geber purement arabe, qui signifie proprement reduction des nombres rompus en nombres entiers.* Ma primieramente non conviene giudicare del senso etimologico d'un nome dal senso, che attualmente gode in una scienza salita a mirabile grandezza: bisogna retrocedere all'infanzia di essa. In secondo luogo Alembert mostra di considerare la riduzione de' rotti ad interi isolatamente; ma è ben altro considerarla rapporto ad una equazione. Il raccogliere le parti della cosa cercata, o della nota quantità di paragone disgiunte nei due membri della equazione, senza rendere un membro all'altro disuguale è una operazione ben diversa, e che diversa regola richiede dalla mera somma dei rotti. Per terzo si può in maggiore ampiezza prendere l'idea di cosa rotta, ed anche di numero rotto. Mi spiego: sia l'equazione immediatamente nata dalle condizioni del problema $4x+6x^2-4=2x+3x^2+12$, la quale si riduce alla più semplice $3x^2+2x=16$. Abbiamo pertanto nell'immediata equazione tre nature di quantità: il numero di confronto, la radice cercata, il quadrato di essa, rotte ciascuna in due termini in vece di essere comprese cadauna in uno, come nell'equazione ridotta. Non sembri più sottile, che vera questa considerazione; chè ella è anzi conforme ai concetti dei primi Analisti. F. Luca pag. 148, dopo avere esposto i sei *Capitoli*, cioè le sei esemplari forme di equazioni (una espressamente di primo grado, altra mendacemente di secondo in realtà di primo, e quattro veracemente di secondo, una pura, tre complesse) e prescritto le regole per iscioglierle, soggiugne quattro Essenziali Notandi, il primo de' quali versa sul porre il quesito in equazione, ossia sul formare la equazione immediata; nel secondo a lungo dichiara l'operare su di essa per Algebra, cioè *Ristaurazione*, e per Almucabala cioè *Opposizione*. Il comune oggetto dell'operare loro è recare la *equazione alla sua maggiore unità* ristrignendo ad un solo termine ciascuna natura di quantità rotta in più. Gli uffici loro per questo comune intento sono contrari: quello dell'Algebra è di *ristorare li extremi dei diminuti*; e quello di Almucabala di *levare da li extremi i superflui.* Intende per *extremi* i membri della equazione, e bisogna sapere, che nelle esemplari forme i termini sono tutti positivi. Ciò notato richiamiamo l'equazione $3x^2+2x=16$. Di tre termini, che ella è, trovasi in sei rotta nella equazione $4x+6x^2-4=2x+$

$3x^2+12$. Il numero 16 è rotto in due colla sottrazione di 4 da ambi i membri, per la quale ed esso numero, ed i membri soffrono diminuimento: bisogna ristorarneli, e condurre all'unità i due termini di numero: questo è ciò, che prestar deve l'Algebra. Il termine dell'incognita, e quello del quadrato suo sono, l'uno e l'altro dispersi in due per le quantità analoghe superfluamente apposte $2x$, $3x^2$, che rendono i membri ridondanti: è uopo togliere qnesta ridondanza, opporre quantità uguali alle apposte; e ciò è che adempie l'Almucabala. È dunque Algebra *Ristaurazione* del diminuimento dalle sottrazioni cagionato aggiugnendo tanto, quanto è il sottratto; ed è Almucabala *Opposizione* di quantità uguali alle quantità superflue per distruggerle. Mostra F. Luca i fondamenti dell'Algebra, e dell'Almucabala, e le dice fondate su quelle verità di comune scienza: *si aequalibus ecc., si ab aequalibus ecc.* Questi fondamenti dell' Algebra, e dell'Almucabala ne segnano chiaro i limiti. Se non che il primo assioma essendo sorgente di questi altri due: che moltiplicando per una quantità medesima due uguali quantità, i prodotti riescono uguali, che elevando allo stesso grado due uguali quantità le potenze sono uguali: il primo dei quali serve per togliere dai membri della equazione le frazioni, il secondo i radicali: si potrebbero queste due operazioni riguardare come ad esso assioma rimotamente soggette, ed all'Algebra appartenenti; ma F. Luca le tratta separatamente nel terzo suo Essenziale Notando. Montucla nel luogo recato dopo quelle invertite interpretazioni: *Gebera* (*opposuit*) *Cabala* (*restituit*) soggiugne: « On » oppose, on compare en effet dans l' Algebre deux grandeurs, en » faisant ce que nous nommons une équation, & après cette analyse » qui démembre en quelque sorte la question, on la rétablié en en» tier, ce qui est la preuve de la justesse de la solution. » Egregiamente: ma questi sensi di Opposizione, e di Ristabilimento sono bene diversi da quelli da F. Luca per lui citato esposti, oltre ad essere qui nella sola Algebra concentrati, e da lui ad essa ed all'Almucabala ripartiti. E più chiaro se ne discostano i significati, che aggiugne: « Ces mots (*opposition et restitution*) peuvent encore signifer » par cette raison *Analyse* & *Synthese*, ce qui convient fort bien à l'Al» gebre. » F. Luca confronta oltre tutto ciò le regole di Ristaurazione, od Algebra, e di Opposizione od Almucabala colle regole delle False Posizioni, ed avverte che quelle di Algebra sono le stesse, che queste nel caso di contrari errori; e le stesse che queste nel caso di errori simili quelle dell'Almucabala; e che la differenza consiste in versare le regole delle False Posizioni su errori pei quali indirettamente si giugne alla verità; e quelle di Algebra ed Almucabala su equazioni, che rettamente si conducono. Da tale confronto si confermano i genuini antichi sensi, le originali funzioni di Algebra, ed Almucabala. A raccogliere: tre erano allora le parti dell' Arte Maggiore, o dell' Arte della Cosa, nome che davasi alla quantità cercata. Prima: porre il quesito in equazione. Seconda: recare questa ad uno dei 6 Capitoli, ad una cioè delle 6 generali forme. Terza: sciogliere secondo la regola propria del Capitolo l' equazione ad esso recata. L' Agebra, e l'Almucabala erano articoli della seconda parte, due operazioni per recare al Capitolo l'equazione dal quesito direttamente offerta limitate all'immediato, e più semplice significato dei due assiomi: *si aequalibus ecc., si ab aequalibus ecc.* Vero è trovarsi in F. Luca pag. 67, che l'Arte Maggiore dicevasi dal volgo l'arte di Algebra ed Almucabala; ma egli stesso spiega pag. 168, per quale ragione, ed in qual senso, scrivendo: *E perciò sia ditta la pratica de cose e censi arte de Algebra ed Almucabala hoc est restaurationis et oppositionis, perchè sempre in lei bisogna ora restaurare, ora levare superflui da li extremi.* Denominavasi, a corto dire, il tutto da parti, che di precipua importanza stimavansi. E perchè tra le due all' Algebra maggior pregio, e beneficio attribuivansi, così da lei eziandio Algebratici dicevansi, solendo un solo vocabolo usare, li gradi, e segni, sui quali, non meno che per Algebra, per Almucabala, ed in altre maniere l' Arte Maggiore operava. Ma l'ufficio proprio originale dell'Algebra non si estendeva al di là dell'aggiugnere ai membri dell'equazione uguali quantità per restituire le uguali tolte. Quant'era mai ristretto a fronte dell'odierno quell'ufficio dell' Algebra! Per noi è l'immenso calcolo tutto quanto di qualunque sorta di grandezze determinate, e variabili, dal nascere loro all' infinito loro crescimento; è l' arte intera di sciogliere i problemi, la perspicacia stessa di porli in equazione, non che il destro procedere nelle riduzioni, e lo sviluppo delle equazioni. Enorme è la distanza tra questa e quella originale idea; ma tale e tanta distanza non è buona ragione a dubitare di quei primitivi limiti, e riprovare siccome sceme le etimologiche definizioni, che all'ufficio dai prischi maestri attribuitole concordi si trovano, se più, che a primo suono non si desta, ampia si prenda l' idea di Cosa rotta, di rotto numero. Che se mi si domandi, come da sì limitato ministero salì l'Algebra a sì eccelso e vasto diritto, non mi sembra difficile lo spiegarlo. L'idea di Ristaurazione è illimitatamente applicabile al liberare la cercata cosa da qualunque alterazione in essa indotta per le condizioni del problema, elevandola a potenza, od al contrario estraendone radice, o mescolandola colle quantità note per via di moltiplica, divisione, addizione, sottrazione. Estendendosi così l' idea di Ristaurazione tanto, quanto quella, che noi diciamo Liberazione dell'incognita abbracciò tutto l'operare dopo posto il problema in equazione, dopo alterata nelle varie maniere richieste dalle condizioni di esso la cercata cosa. E questa alterazione involgendosi qual presupposto nella Ristaurazione; ed anzi che a quella guardandosi a questa, per cui l' intento ultimo si ottiene: quindi l'arte tutta di sciogliere i problemi nel nome di Algebra si concentrò. Vi furono però di quelli, i quali riflettendo, che tutto nell' arte di sciogliere i problemi, e il porne in equazione le condizioni, e il liberare l'incognita sino a determinarne il valore, tutto si fa per via di paragone, trasporto, opposizione; ampliando perciò il limitato senso di opposizione nativo dell' Almucabala, di questa parte, anzi che dell' Algebra stimarono diritto l'estendersi a significare l'Arte Maggiore. Ma l'idea dell'effetto prevalse all' idea di ciò, con che si ottiene, e il nome di Algebra vinse a segno di rendere quasi ignoto quello della sorella e poi emula. Falla pertanto il Clavio Cap. I, *de Algebrae Inventione ac Nomine* dicendo, che l'Arte Maggiore fu da alcuni chiamata Algebra, da altri Almucabala; ma che *postremum factum est ut geminatis nominibus Algebram et Almucabalam aliqui vocaverint, quod scilicet tum per restaurationem, tum per oppositionem questiones omnes expediat.* A rovescio: prima e in origine congiunte furono, poi disgiunte, incaricate dagli inventori di distinto limitato ufficio, arricchite dai posteri reciprocamente delle proprietà l'una dell'altra, e finalmente all'Algebra donato il regno. Cardano invece di Arte Maggiore usò il titolo di Arte Magna; ma più che il nome cangiossene l' estensione; poichè laddove appresso Leonardo e F. Luca comincia dalle equazioni di primo grado e termina con quelle di secondo, appresso di lui con queste comincia, e sale sino a quelle di quarto.

Riflessione XVIII. Rigettate le due esposte etimologie riferisce Alembert due altre opinioni, che non confutando sembra gli siano meno spiaciute. L'una è di quelli, che contro Herbelot pensano, che l' Algebra preso abbia il suo nome da Geber Filosofo, Chimico, e Matematico celebre (appellato dagli Arabi Giabert) esso lui inventore credendo di questa scienza. L'altra di coloro, i quali pretendono che il nome di Algebra venga da *gefr* specie di libro fatto di pelle di camello, sul quale Alì, e Giafur Sedek scrissero in caretteri mistici il destino del Maomettismo, e i grandi avvenimenti sino al finire del mondo. Così Alembert. Senza perdere tempo in dimostrare a lungo l' insussistenza di tali opinioni, basti l' autorità di Leonardo il quale avendo d'Oriente portato il nome di Algebra non gli dà, che il significato di una operazione di calcolo, e similmente F. Luca, e gli altri di quei tempi.

Ma ascoltiamo oramai da Leonardo la teoria dell' analisi delle equazioni, almeno qualche principale tratto.

Ad computationem item Algebrae et Almucabalae tres proprietates quidem sunt in quolibet numero considerandae, quae sunt radix, quadratus, et numerus simplex. Cum itaque aliquis numerus multiplicatur in se, et provenit aliquid, tunc factus ex multiplicatione quadratus est multiplicati, et multiplicatus sui quadrati est radix ... et cum numerus non habet respectum ad quadratum vel radicem, tunc simpliciter numerus appellatur. Haec autem in solutionibus quaestionum inter se aequantur sex modis ex quibus tres sunt simplices, et tres compositi. Primus quidem modus est quando quadratus qui videlicet Census dicitur aequatur *radicibus* . . . . . Ma esponiamoli in breve al nostro odierno modo. Primo: $x^2=nx$. Secondo: $x^2=n$. Terzo: $px=n$. Quarto: $x^2+px=n$. Quinto: $px+n=x^2$. Sesto: $x^2+n=px$. Lasciamo le risoluzioni dei modi semplici, e di un salto rechiamoci a quelle dei composti per vedere le geometriche dimostrazioni, e le avvertenze colle quali le accompagna. Anzi ci basti ad esempio fra i tre composti modi la risoluzione del terzo. *Cum occurrerit quod census, et numerus aequentur radicibus scias hoc fieri non posse nisi numerus fiat aequalis, vel minor quadrato medietatis radicum, qui si aequalis fuerit, habebitur pro radice census numerus medietatis radicum; et si numerus qui cum censu aequatur radicibus fuerit minor quadrato medietatis radicum, extrahe ipsum numerum ex ipso quadrato, et ejus quod remanserit, radicem extrahe ex numero medietatis radicum, et si id quod remanserit non erit radix quaesiti census, tunc addes id quod extraxisti super numerum de quo extraxisti, et habebis radicem quaesiti census. Verbi gratia census et 40 aequantur 14 radicibus: dimidiatis siquidem radicibus veniunt 7, de quarum quadrato, scilicet 49, extrahe 40 remanent 9, radicem quorum, quae est 3 extrahe de medietate radicum, scilicet de 7, remanebunt 4 pro radice quaesiti census. Sed census est 16, quibus additis cum 40 faciunt 56, quae sunt radices 14 eiusdem census, cum ex ducta radice de 16 in 14 veniant 56. Vel radicem de 9 adde super 7 erunt 10, pro radice quaesiti census, et sic census erit 100, quo addito cum 40 faciunt 140. Et sic cum non solvetur quaestio cum diminutione, solvetur sine dubio cum additione. Et si unde haec regula procedit nosse vis adjaceat* ab *quaesit 14 et dividam eam in duo aequalia super* g, *et in duo inaequalia super* d, *et constituam super unam ex inaequalibus portionibus tetragonum; constituam primum super minorem portionem quae est* db *tetragonum* df, *et protrahatur* fe *in directo in punctum* i, *et sit recta* fi *aequalis rectae* ab, *et copuletur recta* ia, *et quia recta* fb *est radix census* df, *et recta* ab *est 14, erit tota superficies* af *radices 14 ex censu* df, *et quia census et 40 aequantur radicibus 14, erit superficies* ae *40, quod provenit ex* bd *in* de, *hoc est ex* bd *in* de, *quibus 40 si addatur quadratum sectionis* gd *habebuntur* (*ex th.* 5.° *lib.* 2° *Eucl.*) *49, scilicet lineae* gb *quadratum: quare quadratum lineae* gd *est 9, quorum radix scilicet 3 est linea* gd, *cui si addatur linea* ga, *erit 10 tota linea* ad, *et si auferatur* gd *ex* gb *remanebunt 4 pro linea* db, *quae est radix census* dg. *Et si super lineam* ad *constituatur census, ut in hac alia figura, remanebit superficies* lb *40, quae provenit ex* ld *in* db, *hoc est ex* ad *in* db, *quae 40 si extrahantur ex quadrato lineae* ag *remanebunt 9, quorum radix, scilicet 3 est linea* gd; *quare* ad *est 10, ergo radix census* al *est 10, et census est 100, ut praediximus. Cum his autem sex regulis possunt solutiones infinitarum quaestionum reperiri. Sed oportet eos qui per earum modum procedere volunt, scire ea, quae diximus de multiplicatione et divisione et extractione seu additione radicum et binomiorum et recisorum.*

Riflessione XIX. Montucla nel luogo sul principio di questa Memoria trascritto per dimostrare i rapidi progressi fatti dall'Algebra trapiantata in Italia, e quindi per l'Europa diffusa osserva, che alla metà del secolo XV erano volgarmente note le regole per lo scioglimento delle equazioni di secondo grado, e va a cercarne una prova nell'opera di Regiomontano. Ma l' Italia non tardò sino al secolo XV ad essere ricca di questo tesoro: sino dal cominciare del secolo XIII lo possedette; nè fu già progresso in essa fatto, ma il ramo migliore, e più prezioso della dottrina nelle contrade sue dall'Oriente trapiantata per Leonardo. Cardano nella introduzione all'Arte Magna dice, che Leonardo *reliquit capitula quatuor cum suis demonstrationibus*. Sei propriamente, non quattro, sono i Capitoli (equazioni) da Leonardo lasciati, come veduto abbiamo; ma Cardano principiando la sua Arte Magna dalle vere equazioni di secondo grado, non ha contato, nè la terza di Leonardo espressamente di primo, nè la prima solo apparentemente di secondo, e che tosto senza nuova arte, e con una semplice divisione di ambi i membri per la cercata quantità loro comune si abbassa al primo. Noi trattiamo le equazioni di secondo grado compendiosamente sotto la generale forma $x^2 \pm p x \pm n = o$, la quale ammettendo quattro combinazioni dei segni presenta quattro casi, e per ciò oltre ai tre da Leonardo distinti un quarto ne comprende da lui ommesso, qual è $x^2 + p x + n = o$. Ma questa equazione non può concepirsi vera, se non intendendo x quantità negativa, ed ha maggior uso nella Geometria e nella Fisica, che nell'Aritmetica; se pure in questa dire si può che ne abbia veruno, non potendo avervelo, che concepito il numero negativo, il quale concetto non essendo assoluto, ma relativo, per ciò appunto non è proprio dell' Aritmetica contemplante per naturale instituzione nel numero non altro, che il numerico valore astrattamente da estrinseche affezioni. Stando pertanto Leonardo in purissima Aritmetica, intento e precisamente limitato all' originario suo oggetto senza innoltrarsi ad affiggere al numero le relazioni di positivo, o negativo, ne avvenne quindi, che ommettesse la equazione $x^2 + px + n = o$, la quale all'intendimento suo non poteva avere, che sembianza di stranezza e falsità; e per la stessa ragione nelle equazioni $x^2 = n$; $x^2 + px = n$; $px + n = x^2$ non riconoscendo la radice negativa, non contò, che quella, che noi diciamo positiva, e potè da lui essere considerata in astratto. Ma nella equazione $x^2 + n = px$ rilevò il doppio modo, onde si può verificare, ossia la doppia sua radice essendo l'una e l'altra positive, o piuttosto senza relazioni ed astratte. Laonde non è esattamente vero, ciò, che Montucla asserisce *Parte* III, *Lib.* III, *Art.* V, pag. 482. « Cardan est le premier qui aite aperçu la multiplicité des valeurs de l'inconnue dans les équations, & » leur distinction en positives & négatives. » Vera la seconda parte, ma non la prima; poichè Leonardo avvisato s'era delle due radici, a nostro dire positive della equazione $x^2 + n = px$. Si rifletta anzi, che siccome i due valori dell' incognita in questa equazione nascono dal sommare primamente con $\frac{1}{2}p$, e da esso secondamente sottrarre $\sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2 - n\right)}$; così ne segue il prendere tale radice doppiamente, e in positivo, ed in negativo senso: ciò che conduce e porta a riconoscere due radici, una positiva, l'altra negativa nella equazione $x^2 = n$, che si risolve in $x = \sqrt{n}$. Se Leonardo giunto per indiretto, e forse accidentale esperimento a scoprire le due radici della equazione $x^2 + n = px$ non fece ulterior passo, lo aveva disposto.

Riflessione XX. Leonardo, che insegnando in generale lo scioglimento delle equazioni di primo, e secondo grado attribuisce all'incognita il nome di radice, nei problemi particolari, che poi si propone, la chiama latinamente *Rem*; onde ne venne in Italia il titolo di Arte della *Cosa*. Il quadrato si è veduto, che appellasi da Leonardo *Censo*: sul valore del qual nome latino di origine, e sulla propagazione dell'uso di esso in senso di quadrato per l'Europa si ascolti Bacheto. Così egli nel suo comento alla Def. 2.ª di Diofanto. *Itali, Hispanique quadratum vocant Censum quasi dicas redditum proventumque, quod a latere, seu radice, tanquam a feraci solo quadratus oriatur. Inde factum est, ut Gallorum nonnulli, et Germanorum corrupto vocabulo Zenzum appellarint.* La comunanza di questa appellazione del quadrato appresso le nazioni varie di Europa è una conferma del comune fonte, da cui ad esse tutte si diffuse l'analisi delle equazioni di secondo grado, e fu il benefico fonte Leonardo.

Riflessione XXI. Nello sciogliere i problemi, quelli massimamente, che richieggono un po più lungo giro di calcolo rappresenta Leonardo la cosa cercata, *ut ad oculum clarius videatur,* per una linea segnata con una piccola lettera; e similmente per linee rappresenta il numero dato, e gli effetti delle condizioni del problema, e su tali rappresentazioni ragionando, e calcolando riduce alla regola di scioglimento l'equazione. Si può dire a mio avviso il metodo di Leonardo una sorta di Analisi Speciosa in linee; e se resta nei pregi, e nei vantaggi inferiore alla Speciosa Analisi Letterale odierna, riesce certamente superiore ad una semplice Analisi numerica prestando aiuto alla fantasia, spargendo sul computo lume, e dandogli una certa generalità. Le rappresentazioni delle note, ed ignote quantità per linee sono simboli indeterminati, il calcolo su di essi guidato partecipa alla estensione loro, se di mano in mano si applica ai numeri proposti, ai quali le linee furono sostituite, s'intende, che ugualmente si applicherebbe ad altri numeri dati qualunque, o si continuerebbe indeterminatamente sulle linee senza numerica applicazione; e così se non è generale il processo, ne è generale lo spirito, se si particolarizza l'atto, non lascia d'esserne generale la virtù, l'esempio. Targion Tozzetti dando nel Tomo 2.° de'suoi Viaggi un succinto ragguaglio dell'uno da lui veduto dei due Magliabechiani codici dell'Abbaco di Leonardo, afferma che vi si trovano le quantità espresse per le piccole lettere dell'Alfabeto. Se ciò fosse si avrebbe nel libro di Leonardo il principio della vera Speciosa Analisi Letterale; ma a dire ingenuo, le lettere non sono ivi solitarie, ed in senso astratto, ma riferite ed annesse alle linee. Non mancano però avanti Vieta espressioni di quantità per lettere solitarie, semi, esempi veri di Speciosa Letterale Aritmetica; e coglierò, giacchè sì opportuna, e spontanea mi si presenta, l'occasione di esporre i gradi, pei quali ad essa si giunse. Ma prima ascoltisi Montucla, che se è difettoso, e non esatto in tale storia, è assai eloquente in esaltare i pregi della Speciosa Letterale Analisi, in guisa di far conoscere, quanto ella meriti di ciò, che la preparò, del nascere suo, del suo crescere una storia più diligente. Così pertanto egli nella *Parte III*, *Lib. III*, *Art. VI*, pag. 488. « On doit à M. *Viete* d'avoir établi l'usage « des lettres pour désigner non seulement les quantités inconnues, « mais même celles qui sont connues. A l'égard de la coutume de « se servir de lettres pour les premieres, au lieu des signes usités « par les Italiens, les Allemands & les Hollandois, je remarque que « *Buteon* en est le premier Auteur. *Viete* y ajouta l'invention de se « servir de lettres pour les quantités connues; ce qui fit donner à « son Algebre le nom de *Spécieuse*, nom qu'elle a gardé long- « temps, à cause, que tout y est représenté par des symboles. Ce « changement, que *Viete* fit à la méthode ordinaire, paroîtra peut- « être assez indifférent à ceux qui connoissent peu l'Algebre: mais « ceux qui sont versés dans l'analyse, en porteront un autre juge- « ment. En effet cette méthode est d'abord utile en ce qu'elle four- « nit dans tous les cas des solutions générales, où l'ancienne n'en « donnoit, que des particulieres. Lorsqu'on n'employoit que des nom- « bres pour désigner les quantités connues, ces nombres se confon- » dant ensemble, il ne restoit plus aucune trace des progrès de l'o- « pération. Dans la nouvelle méthode de *Viete*, au contraire, la quan- « tité inconnue étant degagée & égalée aux quantités connues, on a « comme dans un tableau, toutes les opérations qu'il faut faire sur « les donnés de la question pour parvenir à sa solution. Un autre « avantage plus estimable encore, est la facilité qu'elle procure de « pénétrer dans la nature & la composition des équations; c'est, » nous l'osons dire, à ce changement que l'Algebre est redevable « d'une grande partie de ses progrès ». Bell'elogio giustissimo dell'Aritmetica Letterale! Ma quale sia stato precisamente il merito di Buteone, e di Vieta apparirà dalla storia, che vado a tessere; e non dispiacerà, che a renderla più compita la prenda da lontano. Euclide nei libri 7°, 8°, 9° a dimostrare i più generali teoremi intorno ai numeri, appunto perchè generale ne apparisse la verità, e per aiutare insieme coll'occhio la mente, rappresentò i numeri per linee indicate con una sola lettera, quando risguardano numero, che nel giro della dimostrazione, non ha a soffrire partimento. Non si potrebbe dire l'Aritmetica nei libri 7°, 8°, 9° di Euclide contenuta un' Aritmetica Speciosa Lineare? E quanto almeno a quei teoremi, nei quali i numeri tutti sono maneggiati sempre interi, non convertirebbesi essa senza alterazione del dire in Aritmetica Speciosa Letterale tolte d'occhio le linee, spogliate le lettere della lineare relazione, lasciate nella dimostrazione sole immediate note degli indeterminati numeri? Ma oltre a questa rimota preparazione, e indiretto suggerimento di Speciosa Aritmetica Letterale non havvene nell'antichità un esemplare immediato espresso? In Diofanto cioè? Nella Definizione sua II^a. io leggo giusta la traduzione di Bacheto. *Appellatur Quadratus Dynamis et est illius nota* δ *superscriptum habens* $\bar{\upsilon}$ *sic* $\delta^{\bar{\upsilon}}$. *Qui autem fit ex quadrato in suum latus cubus est, cuius nota est* $\bar{\kappa}$ *superscriptum habens* $\bar{\upsilon}$ *hoc pacto* $\kappa^{\bar{\upsilon}}$. *Qui autem fit ex quadrato in seipsum multiplicato, quadrato-quadratus est, cuius nota est geminum* $\bar{\delta}$ *habens superscriptum* $\bar{\upsilon}$ *hac ratione* $\delta\delta^{\bar{\upsilon}}$. *Qui fit quadrato in cubum, qui ab eodem latere profectus est, ducto, quadrato-cubus nominatur, nota eius* $\delta\kappa$. *supercriptum habens* $\bar{\upsilon}$ *sic* $\delta\kappa^{\bar{\upsilon}}$. *Qui ex cubo in se ducto nascitur cubo-cubus vocatur, et est eius nota geminum* $\bar{\kappa}$ *superscriptum habens* $\bar{\upsilon}$ *hoc pacto* $\kappa\kappa^{\bar{\upsilon}}$. *Cui vero nulla harum proprietatum obtigit, sed constat multitudine unitatum rationis experte, numerus vocatur, nota eius* ς'. *Est et aliud signum immutabile definitorum unitas, cujus nota* $\bar{\mu}$ *superscriptum habens* $\bar{o}$ *sic* $\mu^{\bar{o}}$. Sulle quali ultime notazioni così commentando Bacheto: *Per multitudinem unitatum rationis expertem, intelligo numerum indefinitum, et indeterminatum, seu potius ignotum quemque statim opponit* ὡρισμένω *seu unitatibus certis et determinatis*. E nella Definizione IX^a di Diofanto dopo le regole: che difetto moltiplicato per difetto (*meno per meno*) produce abbondanza (*più*); ma che difetto moltiplicato per abbondanza produce difetto, trovo: *Et defectus nota est litera* ↓ *decurtata et deorsum vergens sic* ↑. E Bacheto avverte: *Diophantus ut significet Plus nulla utitur nota, sed coniunctione tantum copulativa*. Si ha dunque in Diofanto: Primo: La dinotazione delle potenze primarie, del quadrato, e del cubo per le iniziali lettere loro; ed era ben naturale, che così incominciasse la letterale indicazione. Secondo: Il significamento delle potenze superiori di codeste composte per le note di esse l'una all'altra addossate, e questo addossamento non pare l'origine dell'accozzamento col quale oggidì universalmente la moltiplica esprimesi di due quantità diverse? Terzo: Alle lettere in quanto significanti potenze è posto in testa alla diritta un segno, che da mere lettere le distingua: non sembra egli questo un qualche modello del collocamento degli esponenti, che Descartes introdusse? Quarto: Ma ciò che più è a tenore dell'odierna Speciosa Aritmetica Letterale si è l'assegnare che fa Diofanto a giudizio di Bacheto un segno letterale all'ignoto numero della quistione ed un altro al numero dato. Quinto: E vedrassi, che merita anche riflessione il segno Diofanteo del meno. Intanto si osservi, che Vieta medesimo riconobbe, che Diofanto servito erasi di Specie, sebbene abbia amato meglio esibire la sua Zetetice in numeri: *Zeteticen autem subtilissime omnium exercuit Diophantus in iis libris, qui de re Arithmetica conscripti sunt. Eam vero tanquam per numeros, non etiam per species (quibus tamen usus est) institutam exhibuit, quo sua esset magis admirationi subtilitas, et solertia: quando quae Logistae numeroso subtiliora apparent, et abstrusiora, ea utique specioso familiaria sunt et statim obvia.* Vieta in *Art. Anal. Isag. Cap. V.* L'ambizione di maraviglioso non è un onore per Diofanto. E se negli avanzi delle sue opere vi ha tanto da riconoscere l'uso per lui fatto di una Logistica Speciosa, non l'avranno dovuto rilevare gl' intelligenti coetanei nell' intero delle opere ? Ma da Diofanto veniamo al tempo in cui fu portata in Italia, e quindi per l'Europa si propagò colle altre arti dell'Aritmetica l'Arte Maggiore. Nel libro di Leonardo Pisano, che il trapiantatore ne fu, è seguita l'Aritmetica Speciosa Lineare di Euclide. Ma si può avvertire: Primo: che laddove scelta dall'antico Geometra alla dimostrazione delle più generali verità spettanti i numeri riceveva da esse l'estensione; nell'opera di Leonardo applicata a problemi di particolari dati e condizioni, essa loro dona ampiezza accoppiando alla numerica risoluzione del numerico proposto problema un lume di generale risoluzione di tutti i problemi simili. Secondo: che trovasi nel libro di Leonardo elevata di grado essendo coll'Arte Maggiore congiunta. Ognuno poi vede, che ben presto avvenire doveva, che si separassero dalle linee le lettere in quei problemi, nei quali il motivo di rischiarare per l'occhio l'intelletto era meno forte; ed avvenire doveva del pari che alle estese parole di *plus, minus* e simili da Leonardo usate, si sostituissero dei compendi. Io trovo di fatto in F. Luca, le voci di *più* e *meno* accorciate alle iniziali loro; e colà dove si propone il problema di ritrovare due numeri, i quadrati de' quali facciano 20, e moltiplicati insieme diano 8, leggo che dice: *più anticamente chiamato il numero primo Cosa chiamarasi il secondo Cosa Seconda ma da moderni questa chiamasi semplicemente quantità e dinotasi q.ª* Ma ciò, che assai più monta, nel luogo in cui prende a trattare dei rapporti tra le potenze moventi, i mobili, e le velocità impresse, veggo, che con lettere non mica a linee congiunte, ma astratte esprime le potenze, i mobili, le velocità: pag. 83, 84. Procedendo a Tartaglia, nella parte 2ª, del suo Generale Tratt. di Num. e Mis. lib. 7, pag. 109 io scorgo, che insegnare volendo *a trovare quanti numeri semplici si voglia in continua proporzionalità in qualsivoglia data proporzione*, rappresenta per *a. b*, i due numeri della data proporzione, e successivamente per *c. d. e. f. g. h. k...* i numeri della continua progressione senza aggiugnere a queste lettere veruna linea, ma ad esse medesime l' immediato ufficio assegnando di rappresentare in modo astratto i numeri. Prendiamo ora in mano il volume delle opere di Vieta per cavarne tutto ciò che fa a proposito dopo avere già veduto da un passo recato che egli riconobbe essersi Diofanto di Speciosa Logistica servito. Nella prima operetta *Isag. in Art. Anal. Cap. IV.* sotto il *Precet.* I, risguardante l'addizione così Vieta: *Solent autem Analistae symbolo + adfectionem adjunctionis indicare.* E sotto il *Precet.* II, in cui tratta della sottrazione così: *solent autem Analistae symbolo-adfectionem mulctae indicare et haec* λειψις *est Diophanto, ut adfectio adjunctionis* υπαρξις. Apparisce da questi avvertimenti di Vieta, che i segni +, —, come già di consuetudine, allorchè egli scriveva, dovevano essere stati introdotti qualche tempo avanti. Non vedendosi però essi, nè nell'Arte Magna di Cardano impressa l'anno 1545, nè nella Parte 6ª, che l'Algebra spetta, del Trattato di Tartaglia uscito in luce l'anno 1556, se non abbiasi a separare dall'Università degli Analisti, de'quali parla Vieta, gli Italiani, converrà inferire che l'uso di tali segni sia cominciato dopo il 1556, ma non molto dopo per rendersi comune ai giorni, nei quali Vieta, nato l'anno 1540, ed anni 63 vissuto compose la sua *Isag. sull'Arte Analitica.* Ma lasciando di più cercare sull'epoca, a me pare d'intravedere di essi segni l'origine, cioè d'onde, e come siano nati. Dilatandosi per l'Europa lo studio dell'Analisi, ed accendendosi di sì bella scienza gli ingegni si sarà preso in mano Diofanto, ed osservando che il meno era da lui notato col segno ↑, cui egli stesso dice essere la lettera ψ rovesciata, e mutilata, niente di più naturale, che per contrarietà stimato siasi di notare per la lettera ψ intera e diritta il più; poi sarà piaciuto meglio cangiare in retta linea orizzontale la curva, che taglia la retta verticale, e così trasformare ψ in +; e similmente cangiando in retta orizzontale il cappello, dirò così, del Diofanteo segno del meno, ed in appresso, a maggiore differenza dal segno + del più, a sicurezza di non fallare nello scrivere, togliendo il vertical tronco, si sarà fatta nota del meno la solitaria orizzontale linea —. Da questo segno del meno determinato distingue Vieta un altro segno del meno indeterminato. *Cum autem non proponitur utra magnitudo sit major, vel minor, et tamen subductio est facienda, nota differentiae est =, id est minus incertum:* probabilmente si volle che la doppia orizzontale linea tra due quantità significasse la doppia indeterminata e variabile sottrazione. Oggidì = significa uguaglianza, per la quale Vieta non destina segno, ma continua, siccome Leonardo, F. Luca, Cardano, Tartaglia ad enunciarla a disteso col vocabolo suo. Non saprei indovinare, nè il quando, nè il perchè siasi il = trasferito dalla indeterminata sottrazione a dinotare l'uguaglianza, privando la Speciosa Aritmetica di una nota per quella. Era duopo ristorarnela, occorrendo di frequente il dovere indicare la differenza positiva fra due quantità variabili in modo tale, che ora questa, ora quella divenga dell'altra maggiore. Il cel. sig. Cagnoli nella sua bella Trigonometria usa a tale oggetto il segno . Nel Precet. III spiega Vieta la moltiplica giusta la genesi della superficie, e del solido nella Geometria di Euclide, onde concependo la moltiplica di A, per B, quale il conducimento di A lungo B, dice che: *designabitur commode vocabulo in vel sub: veluti A in B .... vel ut alii, factum sub A, et B.* Non qui alcuno dei due segni × ovvero . che noi usiamo per indicare la moltiplica, e non quell' accozzamento con cui noi rappresentiamo il prodotto bello , e formato; e altrove soltanto quell' accozzamento delle iniziali di Quadrato, e Cubo che si è veduto in Diofanto, ma senza un simile aggiunto che da mere lettere le distingua. Conformemente al Geometrico concetto del pari tratta Vieta della divisione nel Precet. IV, così esponendo di questo il tema: *Magnitudinem magnitudini adplicare.* Non dispiacerà di vedere la ragione del modo da noi pure adoperato di significare la divisione di B per A scrivendo $\frac{B}{A}$ *Quoniam magnitudo magnitudini adplicanda est . . . Altiores autem depressioribus adplicantur comode intercedet virgula inter B altiorem (planum) et A degressiorem (lineam) cui fit adplicatio.* Noi diamo alla divisione, ed all'esposto modo d'indicarla una estensione assai maggiore segnando, e concependo la divisione di una grandezza per altra di uguale grado, ed anche inferiore. Esso modo di notare la divisione è in origine la forma delle frazioni, che non si dovette tardare ad applicare alle ragioni di minore disuguaglianza, e poscia applicossi alla divisione attesa la grandissima affinità tra fazione, ragione, divisione. Su di che non saranno discare poche parole di Tartaglia. Nel suo *Euclide Rassettato* alla Defin. 13, del libro 7°, recato di essa un esempio, soggiugne : *E perchè la metade se dipinge da pratici in questo modo* $\frac{1}{2}$, *Bouetio Seuerino chiama tal specie di proporzione subdupla per esser il numero sotto la virgula duplo a quello di sopra.* Ma abbastaaza , e troppo fors'anche dei segni della Speciosa Analisi , e chiaro risulta non avervi Vieta nullo di suo. Passiamo della sua Isag. al Cap. V, intitolato *De Legibus Zeteticis*, e vuol dire delle leggi dell'arte di formare, e ordinare l'equazione del problema. Ecco la legge quinta, che è quella, la quale importa. *Quod Zeteseos opus ut arte aliqua juvetur symbolo constanti, et perpetuo ac bene conspicuo datae magnitudinis ab incertis quaesititiis distinguantur, ut pote magnitudines quaesititias elemento A aliave litera vocali E, I, O, U, V, datas elementis B, C, D aliisve consonis designando.* Qui veramente è dove Vieta parla in tuono d'istitutore: ma la instituzione era poi senza esempio? Il Leggitore ricordevole degli squarci , che mano a mano sono venuto schierandogli sott'occhio lo giudichi. Nè a Vieta negherò io lode per avere saputo riconoscere , e di più ampia, e regolare forma donare l'arte di Diofanto, per avere dagli arbitrari astratti segni +, — ecc. tra nuovi Analisti di già introdotti a rappresentare le operazioni del calcolo , e da alcuni casi presso taluno di arbitraria astratta rappresentazione delle quantità da calcolare fatto progresso ad un generale sistema di tanto vantaggiosa rappresentazione, per averlo tosto felicemente applicato ad utili sottili ricerche. Wallis nota, che Harrioto sostituì alle grandi lettere per Vieta impiegate le piccole: così voleva il comodo, e tali erano state prima adoperate da F. Luca , e da Tartaglia. Finirò coll' avvertire , che si suol confondere l' Aritmetica Speciosa odierna coll' Algebra, che di secoli la precedette; e si distingue l'Algebra dall'Analisi, di cui in origine era parte, e parte stimata sì precipua, che al tutto, all'intera Arte Maggiore, all'Analisi d'allora il nome suo si tradusse.

Riflessione XXII. Cardano nel passo da me nella Riflessione II. trascritto a dimostrare non essere delle temperate regioni sol proprio l'acume della mente adduce, che Leonardo Pisano recò dall' India l'Aritmetica, e dall'Etiopia l'arte di computare per Algebra: due arti argomenti di chiarissimi ingegni. Il perchè siccome d'Indiano ingegno è veracemente parto l' Aritmetica, che noi usiamo; così pel discorso di Cardano inferire si dovrebbe, che di Etiopico ingegno invenzione sia l' Algebra. Ma lo stesso Cardano nel tomo III° delle sue opere pag. 607, scrive: *Mahometus Mosis filius Arabs Algebraticae* (*ut ita dicam*) *artis inventor.* E nel principiare la sua Arte Magna: *Haec ars olim a Mahomete Mosis Arabis filio initium sumpsit. Etenim hujus relocuples testis Leonardus Pisanus.* Ma il fatto sta, che Leonardo lungo dall' essere *locuples testis* non n' è punto, non nominando per modo alcuno nè Maometo, nè altro inventore dell'arte di sciogliere i problemi per Algebra ed Almucabala. Solamente nel Codice Riccardiano, di fianco alle prime linee, nelle quali entra a trattarne, si trova in margine *Maumeht.* Ed è sì veramente dello stesso carattere, che il testo; ma non si può pensare, che lo scrittore abbia voluto riparare ad una ommissione fatta nel trascrivere esso testo, non leggendovisi verbo, che a sè chiami, e seco leghi codesto nome; e nel Codice Magliabechiano tal nome manca affatto e nel testo, e in margine. Oltre a che l'infingersi nel testo il nome *Maumeht* semplice, senza l'aggiunto di chi figlio, è immaginare ivi contro l' Arabico costume un nomo ben troppo isolato e indeterminato; e non basta certamente a fare che Leonardo sia *locuples testis* a favore del Muhamed figlio di Mose onorato da Cardano. Andando un mezzo secolo più addietro, da Cardano cioè retrocedendo a F. Luca, che con giornaliera mano, e con notturna versò l'opera di Leonardo, e tanto pel suo volume ne prese, io non so rinvenire in tutta l' ampiezza di esso volume individuato nè Muhamed figlio di Mose, nè altro inventore dell' Algebra, o vogliamo dire dell'Analisi delle equazioni di primo, e secondo grado. Ed è egli credibile, che se Leonardo nominato lo avesse, e fatto se ne fosse abbondevole testimonio, taciuto avesselo F. Luca ? Ogni ragione trae a conchiudere, che Cardano non ebbe sotto degli occhi suoi il libro di Leonardo; come di non averlo avuto chiaramente accenna nel principio del suo Trattato de Numeri e Misure il Tartaglia a Cardano contemporaneo: ma questi della invenzione dell'Algebra non disse parola, laddove Cardano ad apparire su di essa erudito si lasciò trasportare da varie voci prive di fondamento, per modo che ora attribuì a Leonardo un viaggio in Etiopia, che non fece, ora lo citò abbondante testimonio di ciò, che non scrisse, e cadde di tal guisa a contraddirsi dando là all'Algebra per padre un Etiope, e qua un Arabo ingegno. Montucla *Parte II*, *Lib. I*, *Art. IX* scrive : « *Mohammed-ben-Musa* » est donné par *Cardan* pour l'inventeur de la résolution des équa- » tions du second degré: j'ignore sur quel fondement ». Rilevasi da queste ultime parole manifestamente, che lo Storico delle Matematiche non ebbe notizia, che del secondo dei tre passi di Cardano da me addotti, e non vide le prime linee dell'Arte Magna di lui. Aggiunge Montucla: « La découverte n' est pas assez difficile pour lui » (*a Mohammed-ben-Musa*) faire beaucoup d'honneur ». Ma per essere equo verso l'inventore, chiunque ci sia, dell' Analisi delle equazioni di secondo grado è dovere attenersi imparzialmente al riflesso, che Montucla medesimo già fece celebrando, ed estollendo *Parte I*, *Lib. V*, *Art. VI*, Diofanto. « Il seroit injuste d' attendre que l' Algebre an- » cienne se fût élevée au même point que la nôtre. Mais l'ouvrage » de Diophante nous apprend qu' elle s' éleva du moins jusqu' aux » équations du second degré. Car quoique l'Arithméticien Grec n'en » résolve aucune de cette espèce, il promet d'enseigner à le faire dans » un autre écrit, & d' ailleurs les limitations qu' il met quelquefois » à certains problèmes, montrent clairement qu'il connoissoit la formule » de ces équations ». E da Diofanto appunto vi è stato parere, che preso abbiano gli Arabi l' Analisi ; e Montucla stesso vi si mostra, *Parte II*, *Lib. I*, *Art. IX*, *pag.* 366, inchinevole, così discorrendo : » L'Algebre n'est guere moins ancienne chez les Arabes, que les au- » tres parties des Mathématiques , qu' ils tenoient des Grecs. Cela » pourroit donner lieu de penser qu'ils n'en sont pas les inventeurs, » mais qu' ils la doivent aussi à ces derniers ». Nè lo persuade in contrario la ragione cavata da Wallis dalla diversa scala delle dignità presso Diofanto, e presso gli Arabi; scala, non dirò con Wallis unico , ma certamente essenziale, e primo fondamento dell' Algebra o Analisi. Ecco le due scale di confronto

Scala di Diofanto - Dignità prima: Numero Ignoto. Seconda: Quadrato. Terza: Cubo. Quarta: Quadrato moltiplicato in Quadrato. Quinta: Quadrato in Cubo. Sesta : Cubo in Cubo. . .

Scala degli Arabi - Dignità prima: Numero Ignoto. Seconda: Quadrato. Terza: Cubo. Quarta: Quadrato di Quadrato. Quinta: Soprasolido , o Relato Primo. Sesta: Quadrato di Cubo, o Cubo di Quadrato. Settima: Soprasolido, o Relato Secondo.

È evidente la diversa formazione di queste due scale. Quella di Diofanto è formata per moltiplicazione; e quella degli Arabi per elevazione a quadrato, o a cubo, ov'è possibile, e quelle dignità, che non ammettono tale generazione sono dette Soprasolidi, o Relati. Quindi la dignità quinta, che secondo Diofanto deve considerarsi come nata dalla moltiplica del quadrato nel cubo, ha secondo gli Arabi il nome di Soprasolido, o Relato Primo, non potendosi concepire come elevazione di alcuna inferiore dignità a quadrato, o cubo. E perchè la sesta dignità può nascere da cubo moltiplicato con cubo, ossia da cubo elevato a quadrato, e può eziandio nascere da quadrato elevato a cubo, per ciò essa nella scala di Diofanto ha una sola denominazione, e ne ha due nella scala Araba. Tale diversità di sistema nel formare, e denominare la scala delle dignità dell'ignoto numero non poteva non fare sentire la sua forza a Montuela; il perchè eccolo confessare: « Cette différence semble effectivement désigner une Science » puisée dans une autre source ». Pure resistendo soggiugne: « Je » n'ose cependant point trop insister sur la validité de cette raison». Ma quale ragione fitta era mai nell'animo di Montucla, che si equilibrasse con questa? Altra non se ne trova, che quella già premessa, di non essere l'Algebra appresso gli Arabi guari meno antica, che le altre parti della Matematica tirate dai Greci. Una piccola differenza di antichità, vuol dire Montucla, pare non essere stato agli Arabi un tempo bastante per inventare l'Algebra; sembra dunque che pur essa ai Greci debbano. Ma, primo, non è egli probabile, che quando gli Arabi alla ricerca ed allo studio si diedero delle opere dei Greci Geometri ed Astronomi fossero già ben colti, di esercitato ingegno, e dell'Indiana Aritmetica franchi e destri maneggiatori, giacchè nulla preso del Greco computo, il Greco sapere tutto valsero a travestire d'Indiano calcolo? E posto ciò, qual maraviglia, che in breve spazio di tempo condotti dal bisogno, e approfittando della quarta del 2.° di Euclide avanzati si fossero dalla regola delle False Posizioni all'invenzione dell'Analisi delle equazioni di secondo grado? Non potrebbe per secondo, stare insieme, che gli Arabi nè da sè creata avessero, nè da Diofanto presa tale Analisi, ma altronde, siccome l'Aritmetica, ricevuta? Su quali fondamenti per terzo, in apparenza di estendere l'antichità dell'Algebra presso gli Arabi, la ristrigne Montucla, per poco che sia, al di qua dell'epoca in cui delle dottrine dei Greci Matematici divennero avidi, invece di estenderla, fosse per poco, al di là? S'intende bene: tale estendimento, per minimo che fosse, toglieva il luogo all' opinione. Wallis non si contenta di un piccolo estendimento, l'accresce a secoli, lo porta sin oltre alla età di Diofanto, reputa anzi questo Greco Algebrista un Algebrista tardi nato a paragone degli Algebristi Arabi, nè teme asserire non improbabile cosa, che dagli Arabi siano stati ammaestrati i Greci delle più profonde specolazioni sui numeri. (Wallis, tomo II°, cap. II.) Sia eccessivo, quanto si vuole, lo estendimento di Wallis; ma quale prova, onde arbitrario non credasi, del ristrignimento di Montucla? L' epoca dell' Algebra presso gli Arabi è involta in tenebre: non è dunque per essa, ma unicamente pel confronto delle forme dell'Araba, e della Greca Algebra, che lume sperar conviene, e al giudicio procedere. Ora le scale delle dignità basi dell' una e dell' altra hanno costruzioni abbastanza differenti per fondatamente negare, che l'una dall'altra, o dalla Greca l'Araba, o dall'Araba la Greca siasi derivata. Wallis a sostenere che gli Arabi non tolsero dai Greci l'Algebra pone eziandio mente all'averla essi denominata con vocabolo puramente Arabo, e niuna affinità avente col Greco linguaggio; la quale affinità però: *affectare videbantur in iis, quae a Graecis acceperunt, ut liquet in vocibus Almagesti, Algorismus aliisque quae a* μεγιστη, et αριθμος, *descendisse non dubitem.* A me tuttavia piace più insistere sul confronto dell'Algebra Diofantea, e dell'Araba, e domando: perchè, se gli Arabi avessero avuto l'opera di Diofanto per modello, non lo avrebbero imitato nell'assegnare un astratto simbolo letterale al numero indeterminato ignoto, ed un altro al determinato e noto, e nello stabilire un segno della sottrazione, perchè anzi su di tale esempio instituiti non avrebbero dei segni per le altre operazioni? E che tali astratti simboli letterali, tali segni non si usassero dagli Arabi, abbiamo ragione di crederlo, non vedendoli usati da Leonardo, che l'Algebra Araba trasportò in Italia, e sarebbe una immaginazione affatto arbitraria l'idearsi l'opposto. Attese pertanto tutte codeste dissomiglianze chi potrà persuadersi essere l'Araba Algebra della Greca propagine? Ma ecco che Montucla stesso, cui a distogliere da tale pensiero non valse la prima ragione di Wallis, se ne rimove, non si sa per quale altra, da sè scrivendo *Parte III, Lib. II, Articolo I,* pagina 441 « L'algebre, qui avoit pris » naissance chez les Arabes » ... Qual tuono più assoluto? F. Luca alla pagina. 67 esposta la serie dei gradi Algebraici con prefiggere ad essi ordinariamente ℞ 1ª. ℞ 2ª. . . dice essere queste *figure de la pratica de algebra secondo li arabi primi inuentori de si facte pratiche operatiue.* Montucla non vide questo luogo di F. Luca (e quale maraviglia, se come altrove farò palese, non ne vide, o non ne scorse il volume?); ed esso deciderebbe in un punto irrefragabilmente la discussione intorno agli inventori dell'Algebra, se vero fosse ciò, che con tanta franchezza asserisce, e replica Montucla medesimo, che F. Luca viaggiato aveva in Arabia, era stato alle scuole degli Arabi maestri, ed « avoit appris d'eux tout ce qu'il sçavoit d'Alge» bre. » *Parte, II, Lib. I, Articolo IX*, o se almeno si potesse F. Luca in materia di erudizione avere in conto di scrittore ben fondato, e severo. Ma io trovo alla pagina 106 del suo volume, che parlando dei lavori di Boezio, e di Campano su Euclide scrive egli: *e q̃l cK se dici cKl cãpano cõmẽto, ecosi Boetio tẽgo ꝑ quãto* o *lecto che solo ne fossero tradutori de greco: al nostro latin sermõe.* E così poi tenendo, nella Geometria fa di Euclide le Arabe voci *helmuaym, helmuariphe* conservate dal Campano nella sua traduzione dall' Arabo in luogo delle originali Greche *rombo* e *trapezio.* Tanto basta a dimostrare tutto in un colpo, e che F. Luca non fu in Arabia poichè non distingueva dalle Greche le Arabe voci, e che affidavasi buonamente a qualunque lettura, so pure aveva letto, che Campano non meno che Boezio tradotto aveva dal Greco. Nel luogo stesso sopra recato in cui F. Luca dice gli Arabi primi inventori dell' Algebra salta agli occhi un errore, se non si vuole piuttosto dir due, affermando essere Arabe quelle figure ℞ 1ª. ℞ 2ª. . . . nelle quali la lettera è certamente Latina con Gotica alterazione, e il numero è Indiano. Laonde io non saprei sulla sua parola acchetarmi, e tenere per certo essere stati gli Arabi dell'Algebra per essi usata primi inventori. Ciò, che avvicinando, e considerando tutti insieme i monimenti, e la marginale postilla *Maumeht*, che si trova in uno dei due codici Magliabechiani, aggiunta, per quanto sembra, dallo scrittore stesso del codice al principio del secolo XIV, e l'asserzione di F. Luca, e i due più espressi dei tre recati testi di Cardano si raccoglie, si è, che il riguardare gli Arabi quali inventori dell'Algebra da essi a noi propagata fu l'opinione più comune e costante di quei tempi, dai primi anni del secolo XIV sino verso la metà del XVI. Ma se fosse una mera conseguenza dedotta dall'essere l'Algebra a noi venuta da contrade, ove gli Arabi n'erano stati maestri, o se fondata fosse su autentica testimonianza d'invenzione per gli Arabi vera; questo è ciò che non apparisce. Tale fondamento, tale autentica testimonianza non si vede certamente nell'Abbaco di Leonardo, che portò, ed insegnò il primo l'Algebra in Italia. Che anzi il silenzio suo in questo particolare, dopo il detto in generale nella Prefazione, e nella Dedicatoria, indurrebbe a stimare l'Analisi numerica delle equazioni di primo, e secondo grado non altro, che una parte dell'Indiana Aritmetica giusta l'argomento in universale premesso nella Riflessione IV; tanto poi più che lungi dal dare Leonardo ad essa Analisi l'aria di una cosa di singolare origine, ed all'Indiana Aritmetica estranea, non ne fa che un membro del capitolo decimoquinto. Wallis, che pur non aveva letto il libro di Leonardo fu di parere essere cognate l'Aritmetica e l'Algebra numerale: *Haud improbabile est Arabes, qui ab Indis figuras numericas acceperunt* (*Graecis ignotas*), *simul inde didicisse tum earum usum, tum profundas de illis speculationes . . . . et ab Indis etiam iisdem accepisse Algebram suam. Operum tomo IIº, capitolo* II.º Nè cred'io, avrà mancato Wallis di por mente agli Arabi nomi Algebra, Almucabala; ma stimato avrà, che, senza essere originalmente Arabe le cose, Arabi nomi appresso gli Arabi aver potessero per avere essi in linguaggio loro tradotti i nomi nativi. Del resto i libri, nei quali avrebbesi a sperare di trovare con certezza assegnata l'origine dell'Algebra, che tra gli Arabi si ebbe in tanto pregio, sarebbero i trattati degli Arabi Algebristi stessi, e forse meglio ancora, i poemi sulle maraviglie dell'Algebra degli Arabi vati; e ben vorrebbe il senno, che invece di una vana pompa delle Biblioteche si rendessero con tradurli, od estrarne il fiore, utili capitali della storia, della scienza, e fors'anche della poesia. Intanto la copia stessa di tali Arabi poemi a magnificamento dell'Algebra pare la significhi, anzi che no, d'invenzione Araba, appalesando un ardore in celebrarla più naturale per cosa propria, che per altrui.

APPENDICE

INTORNO A QUATTRO LETTERE DIRETTE AL P. COSSALI

NOTA

DI BALDASSARRE BONCOMPAGNI

Quattro lettere dirette al Padre Don Pietro Cossali trovansi stampate nelle pagine 408-411 del presente volume. Un esemplare manoscritto di ciascuna di queste lettere fa parte della raccolta di manoscritti e di carte stampate, che di sopra si è detto essere possednta dalle nobili signore contesse Teodora Cossali moglie del nobile signor conte Pandolfo di Serego Allighieri, e Teresa Cossali (1). La prima di queste lettere trovasi nella carta 9 *recto* e *verso* della cartella III di qnesta raccolta; la seconda nel *recto* della carta 10 di questa cartella III; la terza nelle carte 11 *recto* e *verso*, e 12 *recto* della cartella medesima, e la quarta nel *recto* della carta 164 della cartella XXX della raccolta suddetta. La prima di tali lettere è firmata: « Um.° ed Obbl.° Ser.° || Stanislao Canovai d.° S. Pie » (2). La seconda delle lettere medesime è firmata: « Dev.^mo ed Obbl.° Serv.° ed Am.° || Sta- » nislao Canovai d.° Sc.^e Pie » (3). Tali firme dimostrano che queste due lettere furono scritte dal Padre Stanislao Canovai delle Scuole Pie, nato in Firenze ai 27 di marzo del 1740 (4), e morto nella medesima città ai 17 di novembre del 1811 (5). La terza delle quattro lettere soprammentovate, essendo firmata : « Devot.^mo Oblig.^mo Serv.° ed Amico || » Fran̄co Fontani » (6), fu certamente scritta dall'abate Francesco Fontani, illustre erudito fiorentino, che nel 1783 divenne Bibliotecario dell'I. e R. Biblioteca Riccardiana di Firenze (7), e tenne poscia quest'nfficio fino alla sua morte, avvennta ai 4 di dicembre del 1818 (8). La quarta delle lettere medesime, essendo firmata (9) : « Um.^mo Dev.^mo Oss.^mo Servitore || Angelo Zendrini » fu scritta dal sig. Professore Abate Angelo Zendrini, nato in Venezia ai 2 di aprile del 1763 (10), e morto nella medesima città ai 6 di maggio del 1849 (11). La prima delle quattro lettere suddette ha la data seguente (12) : « Fir^e. 9 Febh.° 93 » cioè « Firenze 9 di febbraio del 1793 » ; la seconda ha la data seguente (13): « Fir^e. 23. Marzo 1793. » cioè « Firenze 23 di marzo del 1793 »; la terza ha la

(1) Vedi sopra, pag. I, lin. 2—6.
(2) Cartella III, carta 9 *verso*, lin. 13—14. — Vedi più oltre, pag. 408, lin. 28—29.
(3) Cartella III, carta 10 *recto*, lin. 18—19. — Vedi più oltre, pag. 409, lin. 7—8.
(4) *Panegirici di Stanislao Canovai delle Scuole Pie. Firenze* 1817. *Nella Stamperia di S. Giuseppe Calasanzio. Con Imperiale e Real Privilegio*, due tomi in 8°, tomo I, pag. XIII, lin. 25—27.
(5) *Canovai* (*P. Stanislao*), *Panegirici*, tomo I, pag. XXXIX, lin. 26 — pag. XL, lin. 7; pag. 41^a non numerata, lin. 1—13.
(6) Cartella III, carta 12 *recto*, lin. 27—28. — Vedi più oltre, pag. 410, lin. 24—25.
(7) *Della vita e delle opere di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo. Notizie raccolte da Baldassarre Boncompagni. Dagli Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei Anno V. Sessioni I, II e III* (1851—1852). *Roma Tipografia delle Belle Arti* 1852, in 4.°; pag. 114, lin. 19, 31—43; pag. 115, lin. 1, 25—28. — *Atti dell'Accademin Pontificia de' Nuovi Lincei pubblicati conforme alla Decisione Accademica del* 22 *dicembre* 1850, *e compilati dal Segretario. Roma* 1851—1852, 1855—1858, *Tipografia delle Belle Arti, Piazza Poli, n.* 91; sette tomi, in 4°, cioè tomi I, IV—VII, X, XI; *Tomo V.— Anno V.* (1851—52), pag. 231, lin. 19, 31—43; pag. 232, lin. 1, 25—28.
(8) *Boncompagni, Della vita e delle opere di Leonardo Pisano*, pag. 115, lin. 1—2, 29—30. — *Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei, Tomo V, Anno V* (1851—52), pag. 232, lin. 1—2, 29—30.
(9) Cartella XXX, carta 164 *recto*, lin. 28—29. — Vedi più oltre, pag. 411, lin. 8—9.
(10) Vedi sopra, pag. VIII, lin. 10—11, 22—27.
(11) Vedi sopra, pag. VIII, lin. 10—11, 29—01.
(12) Cartella III, carta 9 *verso*, lin. 13. — Vedi più oltre, pag. 408, lin. 27.
(13) Cartella III, carta 10 *recto*, lin. 18. — Vedi più oltre, pag. 409. lin. 6.

» data seguente (1): « Firenze 11. Giugno 1793. »; la quarta ha la data seguente (2): « Venezia .3. 9bre .1811. », cioè « Venezia ai 3 di novembre del 1811 ».

Nel presente volume (pag. 351, lin. 7-37; pag. 352-354; pag. 355, lin. 1-41; pag. 356-397) trovasi stampato interamente uno scritto intitolato (3): « Memorie Storico-Scientifi- » che ‖ Su l'Origine dell'odierna Aritmetica, e dell'Algebra ‖ Loro trasporto dall'Oriente » in Italia ‖ E primi progressi nelle contrade di questa ‖ Di ‖ D. Pietro Cossali C. R. ». Questo scritto è composto: 1.° Di una introduzione che incomincia (4): « Quel piacere, « che gusta industre agricoltore », e finisce (5): « Egli è per questo, che ad essa le » offro »: 2.° Di una memoria intitolata (6): « Memoria 1ª ‖ Lavorata sul libro dell'Ab- » baco di Leonardo Pisano | contenente l'elogio di lui ». In questa « Memoria 1ª » si legge (7): « Non ommetterò di notare che in vece di *Oppositionis*, che leggesi nel » Codice Magliabecchiano da me visitato, ed in uno imperfetto posseduto dal dotto, e » cospicuo Cav. Nelli, un altro esistente nella Magliabecchiana Biblioteca ha, come » scrivemi il chiarissimo P. Canovai, *Proportionis*, e quello della Riccardiana, mi fa sa- » pere l'eruditissimo Bibliotecario Ab. Fontani, presenta *scilicet ad Proportionem, et* « *Restaurationem.* »

Nel volume primo d'un' opera del suddetto Padre D. Pietro Cossali, intitolata: » Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' algebra », si legge (8): « Non » ommetterò di notare, che in vece di *oppositionis*, che leggesi nel codice Maglia- » becchiano da me visitato, ed in uno imperfetto posseduto dall'erudito e cospicuo » cavaliere Nelli, un altro esistente nella Magliabecchiana biblioteca, ha, come scri- » vemi il chiar. P. Canovai, *proportionis*, e quello della Riccardiana mi fa sapere il » dottissimo bibliotecario abate Fontani avere *scilicet ad proportionem et restauratio-* » *nem* ». Questo passo del precitato volume primo è identico col passo della suddetta *Memoria* 1ª (9), riportato nelle linee 11-16 delle presente pagina 402, salvo le seguenti varietà:

notare, che (10)	notare che (11)
oppositionis (12)	*Oppositionis* (13)
erudito e (14)	dotto, e (15)
cavaliere (16)	Cav. (17)

---

(1) Cartella III, carta 12 *recto*, lin. 26. — Vedi più oltre, pag. 410, lin. 23.
(2) Cartella XXX, carta 164 *recto*, lin. 27. — Vedi più oltre, pag. 411, lin. 7.
(3) Cartella V, carta 120 *recto*, lin. 1—6. — Vedi sopra, pag. 351, lin. 1—6.
(4) Cartella V, carta. 120 *recto*, lin. 7. — Vedi sopra, pag. 351, lin. 7.
(5) Cartella V, carta 121 *verso*, lin. 7. — Vedi sopra, pag. 354, lin. 3—4.
(6) Cartella V, carta 121 *verso*, lin. 8—10. — Vedi sopra, pag. 354, lin. 5—7.
(7) Cartella V, carta 136 *recto*, lin. 15—20. — Vedi sopra, pag. 380, lin. 7—13.
(8) *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' algebra. Storia critica di nuove disquisizioni analitiche e metafisiche arricchita di D. Pietro Cossali C. R. Dalla Reale Tipografia Parmense* *cIↃ. IↃcc. xcvII. — cIↃ. IↃcc. xcix*, due volumi in 4.°; vol. I, pag. 27, lin. 9—16. CAPO II, §. I.
(9) Vedi le linee 9—10 di questa pagina 402.
(10) Vedi la linea 19 di questa pagina 402.
(11) Vedi la linea 11 di questa pagina 402.
(12) Vedi la linea 19 di questa pagina 402.
(13) Vedi la linea 11 di questa pagina 402.
(14) Vedi la linea 20 di questa pagina 402.
(15) Vedi la linea 12 di questa pagina 402.
(16) Vedi la linea 21 di questa pagina 402.
(17) Vedi la linea 13 di questa pagina 402.

biblioteca, ha (1)	Biblioteca ha (2)
chiar. (3)	chiarissimo (4)
proportionis (5)	*Proportionis* (6)
Riccardiana mi (7)	Riccardiana, mi (8)
il dottissimo bibliotecario abate Fontani avere (9)	l'eruditissimo Bibliotecario Ab. Fontani, presenta (10)
proportionem et restaurationem (11)	*Proportionem, et Restaurationem* (12)

Nella *Memoria* 1.ª sopraccitata si legge (13) : « Ma il fatto sta, che Leonardo lungi » dall'essere *locuples testis* non n'è punto, non nominando per modo alcuno nè Mao» meto (*sic*) , nè altro inventor dell'arte di sciogliere i problemi per Algebra ed Al» mucabala. Solamente nel Codice Riccardiano di fianco alle prime linee, nelle quali » entra a trattarne, si trova in margine *Maumeht*. Ed è sì veramente dello stesso ca» rattere, che il testo ». È da credere (14) che questo *Codice Riccardiano* sia il medesimo codice chiamato « quello della Riccardiana » (15) nell'altro passo della stessa *Memoria* 1.ª riportato di sopra nelle linee 11-16 della pagina 402.

Nella lettera suddetta dell'abate Francesco Fontani (16) si legge (17): « Eccole la vera » causa del mio silenzio, ed eccomi ora a darle le notizie richiestemi relativamente » al Codice del Fibonacci, le quali vorrei che Le giungessero in tempo, o che almeno » Le possano servire per fare un'appendice alla di Lei memoria, quando questa sia » già pubblicata.

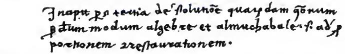
» 1. L'Età del Codice Riccardiano si può certamente fissare nel principio del se» colo XIV., siccome chiaro apparisce dal Carattere e dalle sigle. »

Più oltre nella lettera medesima si legge (18): « 7. Nel Capitolo 15.° pure non nomina nè » autore dell'Algebra, nè luogo ove essa sia nata, se non chè nella Rubrica che di» stingue la terza parte in che è distinto il detto capitolo, e che dice = *Incipit pars » tertia de solutione quarumda῀ questionu῀ per dictum modu῀ algebre et almu» chabale, scilicet ad proportionem et restaurationem*, nel margine la medesima mano » dell'antico scrittore vi appose non so perchè la voce *maumeht*. »

L'I. e R. Biblioteca Riccardiana di Firenze possiede un codice manoscritto in foglio contrassegnato « n°. 783 ». Questo codice è composto di 352 carte, tutte cartacee, e numerate nel *recto* coi numeri I—III, 1—340. (19).

(1) Vedi sopra, pag. 402, lin. 21.
(2) Vedi sopra, pag. 402, lin. 13.
(3) Vedi sopra, pag. 402, lin. 22.
(4) Vedi sopra, pag. 402, lin. 14.
(5) Vedi sopra, pag. 402, lin. 22.
(6) Vedi sopra, pag. 402, lin. 14.
(7) Vedi sopra, pag. 402, lin. 22.
(8) Vedi sopra, pag. 402, lin. 14.
(9) Vedi sopra, pag. 402, lin. 22—23.
(10) Vedi sopra, pag. 402, lin. 15.
(11) Vedi sopra, pag. 402, lin. 23—24.
(12) Vedi sopra, pag. 402, lin. 15—16.
(13) Cartella V, carta 142, *verso*, lin. 9—14. — Vedi sopra, pag. 393, lin. 16—22.
(14) Vedi più oltre, pag. 405, lin. 19—21.
(15) Cartella V, carta 136, *recto*, lin. 18—19. — Vedi sopra, pag. 402, lin. 14.
(16) Vedi sopra, pag. 401, lin. 16—21.
(17) Cartella III, carta 11, *recto*, lin. 9—18. — Vedi più oltre, pag. 400, lin. 16—22.
(18) Cartella III, carta 11, *verso*, lin. 22—27; carta 12, *recto*, lin. 1—3.— Vedi più oltre, pag. 410, lin. 3—8.
(19) Intorno al suddetto codice Riccardiano n.° 783 varie notizie trovansi nel sopraccitato scritto (Vedi sopra, pag. 401, lin. 35—37) intitolato: « Della vita e delle opere di Leonardo Pisano ec. » (pag. 44, lin. 30—33: pag. 45, lin. 1—6, 16—21, 24—27, 33—35; pag. 46—49; pag. 50, lin. 1—2; pag. 69, lin. 28—29, 36; pag. 73, lin. 22—23; pag. 74, lin. 1. 6—7, 31; pag. 76, lin. 22—23; pag. 77, lin. 19—30, 36; pag. 78, lin. 17—31, 36; pag. 79, lin. 1—6; 33—34; pag. 80, lin. 11—16; pag. 83, lin. 1—3, 18—22, 26—27; pag. 84, lin. 9—16; pag. 115, lin. 6—11, 34).(*Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei, Tomo V, Anno V* (1851—52), pag. 44, lin. 30—33:

Nelle carte numerate 1-316 di questo codice trovasi un esemplare d'un'opera di Leonardo Pisano intitolata: *Liber Abbaci*, e divisa in quindici capitoli, l'ultimo de'quali è diviso in tre parti. La terza parte del decimoquinto ed ultimo di questi capitoli, nel suddetto codice Riccardiano N.° 783 (carta 303 *verso*, lin. 26-28), è intitolata così (1):



cioè « Incipit pars tertia de solutione quarumdam quaestionum secundum modum al- » gebre et almuchabale, scilicet ad proportionem et restaurationem ». Presso questo titolo, nel margine laterale esterno della suddetta carta 303 *verso*, trovasi scritto  (2).

In niun manoscritto ora posseduto dall' I. e R. Biblioteca Riccardiana di Firenze e diverso dal suddetto Codice n.° 783 di questa Biblioteca trovasi interamente o in parte il testo latino dell' ultimo capitolo del *Liber Abbaci* di Leonardo Pisano.

Sembra per tanto doversi credere 1.° Che il detto Codice n.° 783 dell'I. e R. Biblioteca Riccardiana di Firenze sia il manoscritto indicato colle parole « quello della Riccar- » diana » tanto nel passo della suddetta *Memoria* 1.° riportato di sopra nelle linee 11-16 della pagina 402 (3), quanto nel passo dell'opera del P. Cossali intitolata: *Origine*, ec. riportato di sopra nelle linee 18-24 della medesima pagina 402 (4). 2.° Che il medesimo Codice Riccardiano n.° 783 sia il *Codice Riccardiano* menzionato nel passo della suddetta *Memoria* 1.° riportato di sopra nelle linee 7-12 della pagina 403 (5). 3.° Che il detto Codice Riccardiano n.° 783 sia il manoscritto chiamato « Codice del Fibonacci » (6) e « Codice Riccardiano » (7) nel primo dei due passi dell'anzidetta lettera dell'abate Francesco Fontani riportati di sopra. 4.° Che l'abbreviatura  (8) equivalente

pag. 45, lin. 1—6, 24—27, 33—35; pag. 46—49; pag. 50, lin. 1—2; pag. 59, lin. 23—29, 36; pag. 73, lin. 22—23; pag. 74, lin. 1, 5—7, 31; pag. 77, lin. 19—30, 36; pag. 78, lin. 17—31, 36; pag. 79, lin. 1—6, 33—34; pag. 80, lin. 11—18; pag. 83, lin. 1—3, 18—22, 28—27; pag. 84, lin. 9—18; pag. 232, lin. 6—11, 34); ed in un altro scritto intitolato: « INTORNO ‖ AD ALCUNE OPERE ‖ DI ‖ LEONARDO PISANO ‖ MATEMATICO DEL SECOLO DECIMOTERZO ‖ NO- » TIZIE RACCOLTE ‖ DA BALDASSARRE BONCOMPAGNI ‖ SOCIO ORDINARIO DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA ‖ DE'NUOVI » LINCEI ‖ ROMA ‖ TIPOGRAFIA DELLE BELLE ARTI ‖ 1854 » (Un vol. in 8°, di 410 pagine, pag. 25, lin. 33—39; pag. 26, lin. 28—27; pag. 89, lin. 11—13, 34—37; pag. 90, lin. 45—46; pag. 130, lin. 8—10; pag. 231, lin. 33—39; pag. 233, lin. 24—42; pag. 234, lin. 5—14. 26—29; pag. 250, lin. 7—27, 35; pag. 251, lin. 24—34; pag. 252, lin. 21—24, 31; pag. 253, lin. 1—8; pag. 259, lin. 8—18, 27—28; pag. 260, lin. 1—9; pag. 264, lin. 1—8, 26—27). — *Giornale Arcadico di scienze, lettere ed arti. Roma* 1819—1857 (152 tomi in 8°, *volume CXXXI Aprile, Maggio e Giugno* 1853, pag. 89, lin. 8—10, 14—15; pag. 90, lin. 30—33; pag. 94, lin. 13—17, 30—31; *volume CXXXII Luglio, Agosto e Settembre* 1853, pag. 4, lin. 8—10; pag. 102, lin. 30—34; pag. 104, lin. 31—37; pag. 105, lin. 2—22, 35—38; pag. 124, lin. 4—24, 32; pag. 125, lin. 24—34; pag. 128, lin. 21—24, 31; pag. 127, lin. 1—6; pag. 133, lin. 8—15, 28—27; pag. 134, lin. 1—9; pag. 138, lin. 1—8, 26—27.

(1) Vedi più oltre, pag. 413, lin. 28—30.

(2) Vedi più oltre, pag. 413, lin. 28—30. ed il margine laterale interno della medesima pagina 413.

(3) Cartella V, carta 136 *recto*, lin. 18—10. — Vedi sopra, pag. 380, lin. 11—12, e pag. 402, lin. 14.

(4) *Cossali, Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' algebra*, vol. I, pag. 27, lin. 14—15; CAPO II. §. I. — Vedi sopra, pag. 402, lin. 22.

(5) Cartella V, carta 142 *verso*, lin. 12. — Vedi sopra, pag. 393, lin. 19; pag. 403, lin. 10.

(6) Cartella III, carta 11 *recto*, lin. 11—12.—Vedi sopra, pag. 403, lin. 17, e più oltre, pag. 409, lin. 18.

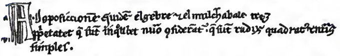
(7) Cartella III, carta 11 *recto*, lin. 16. — Vedi sopra, pag. 403, lin. 20, e più oltre, pag. 409, lin. 21.

(8) Codice n.° 783 dell'I. e R. Biblioteca Riccardiana di Firenze, carta 303 *verso*, lin. 27. — Vedi la linea 6 di questa pagina 404, e più oltre, pag. 413, lin. 29.

alla parola *secundum* (1) trovasi erroneamente sciolta in « per dictum » (2) nel secondo di questi passi.

In un catalogo intitolato : « INVENTARIO ‖ E ‖ STIMA ‖ DELLA ‖ LIBRERIA RICCARDI ‖ MA- » NOSCRITTI E EDIZIONI ‖ DEL ‖ SECOLO XV. ‖ IN FIRENZE ‖ 1810. » (pag. 19, col. 2, lin. 62-63, *Codices Latini*) si legge: « 783 Fibonacci, Liber Abaci. Cod. chartac. in fol. ‖ Saec. XV. » (3). Secondo questo passo del suddetto INVENTARIO, il codice Riccardiano n.° 783 dovrebbe credersi del secolo decimoquinto. Tuttavia nella precitata lettera dell'abate Fontani si legge (4): « L'Età del Codice Riccardiano si può certamente fissare nel principio del secolo » XIV., siccome chiaro apparisce dal Carattere e dalle sigle ». Puossi adunque asserire che, secondo il detto abate Fontani, questo codice è del secolo decimoquarto.

Un manoscritto ora posseduto dall'I. e R. Biblioteca Magliabechiana di Firenze, contrassegnato: « Scaffale C, Palchetto I, n.° 2616 (Conventi soppressi, Badia Fiorentina n.° 73), » contiene un altro esemplare dell'opera di Leonardo Pisano menzionata di sopra nelle linee 1-3 della pagina 404. Questo codice è composto di 214 carte membranacee, numerate tutte nel mezzo del *recto* coi numeri 1-214, ivi scritti con inchiostro rosso. Nella carta 187 *verso* (lin. 14-16) di questo codice, la terza parte soprammentovata (5) incomincia così (6):



Presso queste linee, nel margine laterale esterno del medesimo *verso* si legge (7):

(1) Vedi sopra, pag. 404, lin. 8.

(2) Cartella III, carta 11 *verso*, lin. 26—27. — Vedi sopra, pag. 403, lin. 25, e più oltre, pag. 410, lin. 6.

(3) Il catalogo menzionato nelle linee 3—4 della presente pagina 405 è un volume in 4°. stampato, di 252 pagine, numerate tutte, salvo le pagine 1ª—6ª, 228ª—230ª, 240ª, 245ª—247ª, 249ª—252ª, coi numeri 0—225, I—IX, XI—XIV, XVI, XVIII. Nella prima di queste 252 pagine trovasi il titolo riportato nelle linee terza e quarta di questa pagina 405.

(4) Cartella III, carta 11 *recto*, lin. 16—18. — Vedi sopra, pag. 403, lin. 20—21, e più oltre, pag. 409, lin. 21—22.

(5) Vedi sopra, pag. 404, lin. 1—3.

(6) Vedi più oltre, pag. 415, lin. 10—18.

(7) Vedi più oltre, pag. 415, margine laterale interno. — Intorno al codice Magliabechiano contrassegnato: *Conventi Soppressi, Scaffale C, Palchetto I*, n.° 2616, *Badia Fiorentina*, n.° 73, e menzionato nelle linee 11—13 della presente pagina 405, varie notizie trovansi nel suddetto mio scritto intitolato: « Della vita e delle opere di Leonardo Pisano » (pag. 32, lin. 3—6, 23—32; pag. 33; pag. 34, lin. 1—20; pag. 35, lin. 10—13; pag. 44, lin. 30—33; pag. 45, lin. 1—6, 24—25, 32—33; pag. 69, lin. 23—25, 34; pag. 76, lin. 0—10, 30—31; pag. 79, lin. 24—30; pag. 83, lin. 1—6, 18—23, 25—20, 29—31; pag. 84, lin. 1—8; pag. 100, lin. 1—12, 16—17; pag. 101—103; pag. 104, lin. 1—10, 22—25, 29—35; pag. 105 lin. 9—29; pag. 106, lin. 1—11, 25—27; pag. 112, lin. 29—33; pag. 124, lin. 18—21, 35). — (*Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei, Tomo V, Anno V* (1851—52), pag. 32, lin. 4—6, 25—32; pag. 33; pag. 34, lin. 1—20; pag. 35, lin. 10—13; pag. 44, lin. 30—33; pag. 45, lin. 1—6, 24—25, 32—33; pag. 69, lin. 23—25, 34; pag. 76, lin. 8—10, 30—31; pag. 79, lin. 24—30; pag. 83, lin. 1—6, 18—23; 25—20, 29—31; pag. 94, lin. 1—8; pag. 217, lin. 1—12, 16—17; pag. 218—220; pag. 221, lin. 1—19, 22—25, 29—35; pag. 222, lin. 9—29; pag. 223, lin. 1—11, 25—27; pag. 229, lin. 29—33), e nell'altro suddetto scritto (Vedi sopra, pag. 401, lin. 27—30) intitolato: « Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano ec. » (pag. 25, lin. 33—39; pag. 26, lin. 23—24; pag. 89, lin. 11—13, 34—37; pag. 90, lin. 32—30, 42—43; pag. 94, lin. 28—43, pag. 95, lin. 3—32, 46—52; pag. 130, lin. 3—6; pag. 217, lin. 4—31, 33—39; pag. 218, lin. 1—23, 33—34; pag. 220, lin. 9—18; pag. 231, lin. 13—10, 21—28, 35—36, 45—47; pag. 232, lin. 4—10, 35—44; pag. 233, lin. 27—42; pag. 234, lin. 1—6; pag. 242, lin. 10—19, 29—31; pag. 248, lin. 19—22; pag. 250, lin. 7—27, 30—32; pag. 251, lin. 32—34; pag. 252, lin. 21—24, 28—29; pag. 253, lin. 1—6; pag. 254, lin. 19—20, 29—31; pag. 255, lin. 1—13; pag. 256, lin. 21—26; 29—31; pag. 257; pag. 258, lin. 1—7; pag. 259, lin. 8—10, 23—26; pag. 260, lin. 1—9; pag. 262, lin. 6—15, 27—32; pag. 266, lin. 11—20, 23—25, 27—29, 31—35; pag. 267, lin. 1—19, 27—30; pag. 274, lin. 3—11, 23—25, 20—30; pag. 326, lin. 10—16, 22—23, 28—32; pag. 327, lin. 1—4; pag. 328, lin. 1—3, 26—28, 33—35; pag. 329, lin. 14—18, 30—32; pag. 330, lin. 12—15, 28—31; pag. 331, lin. 7—10, 29—31; pag. 332, lin. 13—17, 29—30; pag. 333, lin. 9—12, 29—30). — (*Giornale Arca-*

Nella lettera sopraccitata dell'abate Francesco Fontani si legge (1): « Quanto poi » a ciò che il Targioni dice di F. Luca Paciuoli (*sic*), e dell'Anonimo plagiario ho fatte » varie ricerche per vedere il nominato Codice, una volta esistente nella Libreria » di S. M.ª Nuova, e con il confronto di esso esaminare se il Trattato se il Trat- » tato (*sic*) di Leonardo sui Numeri Quadrati sia il medesimo che parte (*sic*) dell'o- » pera dell'Abbaco, od opera distinta, ma siccome non ho potuto sapere cosa alcuna » dell'esistenza del d.° codice dell' Anonimo, essendoche più anni sono quella Libreria » fù dispersa, così non Le posso dare su ciò notizia precisa ».

Nel sopraccitato *volume primo* (2) (pag. 165, lin. 26 — pag. 166, lin. 6, CAPO V) della suddetta opera del Padre Cossali intitolata: « Origine, trasporto in Italia, primi progressi » in essa dell'algebra », si legge: « Riferisce Targion Tozzetti nel tomo II de'suoi Viaggi, » che tra i manoscritti della biblioteca del regio Spedale di santa Maria-Nuova di » Firenze conservavasi in un grossissimo volume in-foglio un trattato di abaco com- » pilato da un anonimo, il quale, a libro 16.° della compilazione avea posto il lavoro » di Leonardo sopra i numeri quadrati. Desiderando io di questo copia, ne scrissi al » dottissimo amico abate Francesco Fontani bibliotecario della Riccardiana; ma ebbi » risposta, che essendosi alcuni anni addietro dispersa quella librería, non avea po- » tuto della sorte di quel codice sapere cosa alcuna ».

Nel presente volume (pag. 317, lin. 2 - pag. 323, pag. 324, lin. 1-40; pag. 325-332; pag. 333, lin. 1-43; pag. 334-350) trovasi stampato uno scritto del suddetto Padre P. D. Pietro Cossali intitolato: « Lezioni sull'Aritmetica » (3). Questo scritto è composto di cinque lezioni, la quinta delle quali è intitolata: « Lezione V || Dell'Epoca dell'Indiana Aritmetica || in Italia » in Spagna in Inghilterra » (4). In questa *Lezione V* si legge: « L' Abbaco non fu » la sola opera di Leonardo. La Biblioteca Ambrosiana possede inoltre un volumetto » di Opuscoli da lui composti, tra quali il sottilissimo su i numeri quadrati, che Frate » Luca cita, e malamente compendia. Comprendevasi questo, al riferire di Targion » Tozzetti, eziandio in un grossissimo trattato d'Abbaco anonimo in foglio nella Bi- » blioteca del regio Spedale di Santa Maria-Nuova in Firenze; ma avendone io com- » messa copia al dottissimo, ed ugualmente gentilissimo amico Ab. Francesco Fontani » bibliotecario della Riccardiana, ebbi in risposta, che essendo alcuni anni prima gita » in disperdimento quella libreria, non aveva potuto della sorte di quel codice risaper » novella » (5). Ciò che il P. Cossali in questo passo della suddetta *Lezione V*, e nel

---

dico di scienze, lettere ed arti, volume CXXXI Aprile, Maggio e Giugno 1853, pag. 89, lin. 6—10, 14—15; pag. 90, lin. 30—33; pag. 94, lin. 11—16, 28—29; *volume CXXXII Luglio, Agosto e Settembre* 1853, pag. 4, lin. 3—6; pag. 67, lin. 5—26, 29—33; pag. 88; pag. 90, lin. 18—26; pag. 102, lin. 12—15, 18—24; pag. 103, lin. 5—12, 33—39; pag. 104, lin. 2—7; 32—37; pag. 105, lin. 2—15; pag. 110, lin. 10—19, 29—31; pag. 124, lin. 4—24, 27—29; pag. 125, lin. 32—34; pag. 126, lin. 21—24, 28—29; pag. 127, lin. 1—6; pag. 128, lin. 16—26, 29—31: pag. 129, lin. 1—13; pag. 130, lin. 16—26, 29—31; pag. 131; pag. 132, lin. 1—7; pag. 133, lin. 8—15, 22—24; pag. 134, lin. 1—9; pag. 136, lin. 6—15, 27—32; pag. 140, lin. 11—20, 23—25, 27—29, 31—35; pag. 141, lin. 1—19, 27—30; pag. 148, lin. 9—17; 19—21, 24—20; *volume CXXXIII Ottobre, Novembre e Dicembre* 1853, pag. 27, lin. 10—16, 22—32; pag. 28, lin. 1—4; pag. 29, lin. 1—3, 21—24, 26—28, 33—35; pag. 30, lin. 14—18, 30—32; pag. 31, lin. 12—15, 28—31; pag. 32, lin. 7—10, 29—31; pag. 33, lin. 13—17, 29—30; pag. 34, lin. 9—12, 28—29).

(1) Cartella III, carta 12 *recto*, lin. 4—14. — Vedi più oltre, pag. 410, lin. 9—15.

(2) Vedi sopra, pag. 402, lin. 17—18, 31—33.

(3) Cartella V, carta 77 *recto*, lin. 1. — Vedi sopra, pag. 317, lin. 1.

(4) Cartella V, carta 103 *recto*, col. 1, lin. 1—3. — Vedi sopra, pag. 340, lin. 26—28.

(5) Cartella V, carta 107 *verso*, col. 1, lin. 20—38. — Vedi sopra, pag. 346, lin. 24—34. — Il *volumetto* menzionato nel passo della suddetta *Lezione V* riportato di sopra nelle linee 23—32 della presente pagina 406 (Vedi le linee 23—25 della presente pagina 400) è certamente il codice *E.* 75, *Parte Superiore* della Biblio-

secondo dei due passi del precitato *volume primo*, riportati di sopra (1), dice *aver avuto in risposta* (2), trovasi nell'ultimo dei tre passi soprarrecati dell'anzidetta lettera dell' abate Francesco Fontani, dalle parole « ma siccome » fino al fine del passo medesimo (3).

Nella sopraccitata *Lezione V* si legge (4): « Cardano dice di averne veduto un » codice nella Biblioteca del Beato Antonio in Venezia dal quale era abraso il ti- » tolo. » Il codice menzionato in questo passo delle suddetta *Lezione V*, è quello medesimo, di cui parla il Sig. professore abate Angelo Zendrini nella sua lettera sopraccitata (5), dicendo (6):

« Il Codice Mss.° contenente l'Aritmetica di Leonardo Fibonacci Pisano, veduto dal » Cardano in Venezia nella Libreria dei Canonici Regolari di S. Salvatore nel Mo- » nastero di S. Antonio di Castello, perì coll'incendio di tutta quella doviziosissima » Libreria nell'anno 1686 » (7).

---

teca Ambrosiana di Milano, che contiene gli scritti di Leonardo Pisano, stampati nell'edizione intitolata: « OPUSCOLI || DI || LEONARDO PISANO || PUBBLICATI || DA BALDASSARRE BONCOMPAGNI || SECONDO LA LEZIONE || DI UN » CODICE DELLA BIBLIOTECA AMBROSIANA DI MILANO. || SECONDA EDIZIONE. || FIRENZE TIPOGRAFIA GALILEIANA || » di M. Cellini e C. 1856 ». Nell'anzidetta *Lezione V* si legge anche (Cartella V, carta 104 *recto*, col. 1, lin. 9—13. — Vedi sopra, pag. 342, lin. 19—12): « La Biblioteca Ambrosiana, oltre al Codice dell' Abbaco di Leonardo » un altro ne possiede, che contiene i di lui opuscoli, ed il gentilizio nome ne manifesta. Era Bigolli ». Il secondo de' due codici menzionati in questo passo della precitata *Lezione V* è certamente il suddetto codice Ambrosiano *E.* 75, *Parte Superiore*, giacchè (Vedi sopra, pag. 406, lin. 21—23) nella carta 2 *recto* (lin. 1—2) del medesimo codice *E.* 75, *Parte Superiore* si legge: « *Incipit flos Leonardi bigolli pisani super solutionibus* » *quarumdam questionum ad numerum et ad geometriam uel ad utrumque* (sic) *pertinentium* ». (*Opuscoli di Leonardo Pisano, seconda edizione*, pag. 29ª non numerata, lin. 1—3). L'edizione citata di sopra nelle linee 12—15 di questa pagina 407 è un volume in 8°, di 158 pagine, numerate tutte, salvo le pagine 1ª—5ª, 28ª—29ª, 83ª, 156ª—158ª, coi numeri VI—XXVII, 2—54, 56—127.

(1) Vedi sopra, pag. 406, lin. 9—18,

(2) Vedi sopra, pag. 406, lin. 16—17, 30.

(3) Cartella III, carta 12 *recto*, lin. 19—14. — Vedi sopra, pag. 406, lin. 6—8, e più oltre, pag. 410, lin. 13—15.

(4) Cartella V, carta 107 *verso*, col. 1, lin. 16—19. — Vedi sopra, pag. 346, lin. 22—23.

(5) Vedi sopra, pag. 401, lin. 24—27.

(6) Cartella XXX, carta 164 *recto*, lin. 2—14. — Vedi più oltre, pag. 410, lin. 29—32.

(7) Intorno al codice menzionato nel passo della suddetta lettera del Sig. professore abate Angelo Zendrini riportato nelle linee 9—12 della presente pagina 407, varie notizie trovansi nel precitato scritto intitolato: « Della vita e delle opere di Leonardo Pisano » (pag. 86—90; pag. 91, lin. 1—14, 17—33). (*Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei, Tomo V.* — *Anno V* (1851-52), pag. 86—91).

QUATTRO LETTERE

DIRETTE AL PADRE DON PIETRO COSSALI

LETTERA I.

DEL P. STANISLAO CANOVAI DELLE SCUOLE PIE.

Rev.^{mo} P̃re Sig. Sig. Proñ Colm̃o

Eccole quanto ho trovato intorno alle difficoltà che mi propone, nei due Codici di Leonardo da Pisa che sono nella Magliabechiana:

1.° In un MS.° tra *Algorismum* . . . e *Pictagore* si legge *atque*. Nell'altro la Prefaz.° è Italiana e questo luogo si traduce = *ma tutto questo et ò altre cose simili cavate dall'arte di Pittagora* =.

2.° La parola *Bolsonalie* si definisce così = *illae siquidem monetae Bolsonalie appellantur quae non emuntur nisi quantum valet argentum quod est in ipsis*, *ut dissolutis ipsis in vase super ignem reformentur, quare nos qualiter inueniri debeat precium illarum ad modum baracte sive sit ad pondus libre sive ad numerum ostendemus*.

3.° Al cap. 12 non si rammenta alcun errore di Pitagora.

4.° La regola che Ella scrive *Cataym* qui è scritta *Elchataym* forse col solito articolo Arabo *El* o *Al*, e ciò in ambedue i Codici. L'inventore di essa non è nominato.

5.° Nell'un MS.° si legge *Oppositionis et Restaurationis*, nell'altro *Proportionis et restaurationis*.

6.° L'inventor dell'Algebra non si vede additato in tutto questo tratto; onde Cardano probabilmente si disdisse a ragione.

Conserverò la Sua Lettera se mai altro Le occorresse, e quando voglia, visiterò anche il Codice della Riccardiana, dal che mi astengo per ora. Sono intanto col solito ossequio

Di V. P. Rev.^{ma}
Fir.^{a} 9 Febb.° 93 (*sic*).

Um.° ed Obbl.° Ser.°
Stanislao Canovai d.° S. Pie.

LETTERA II.

DEL MEDESIMO.

Rev.^{ma} P̃re Sig. Sig.° e Proñ. Colm̃o.

Nè nell'Aritmetica nè nella Pratica di Geometria del Fibonacci si incontra mai alcun uso di Lettere alfabetice (*sic*) fuorchè per indicar le figure: neppur vi sono problemi geometrici misti con gli aritmetici. Egli nomina i numeri diversi con le frasi stesse che si leggono anche in Tartaglia sì posteriore: ho copiato un esempio per Sua regola = *pone pro majori parte radicem quam appellabis rem; remanebunt pro minori parte* 10 *minus re, qua multiplicata in se, venient* 10 *res minus censu, et ex multiplicata re proveniet census.* =

lo mandai i Libri a Businari, come Ella mi ordinò, e non saprei in verità per qual'altra via indirizzarli, se Ella non si compiace di indicarmela. Attenderò dunque le Sue volontà e pienamente mi uniformerò ad esse, confermandomi intanto con pieno ossequio

Di V. P. Rev.^{ma}

Fir.^{e} 23. Marzo 1793.

Dev.^{mo} ed Obbl.^{o} Serv^{e}. ed Am.^{o}
Stanislao Canovai d.^{e} Sc. Pie.

LETTERA III.

DELL' ABATE FRANCESCO FONTANI.

Rm̃o Padre Sig.^{re} Sig.^{re} Proñe Colm̃o.

Il lungo mio indugio in rispondere al Venerato Foglio di V. P.^{à} Rm̃a segnato nei 19. Feb.^{o} 1793., Le avrà forse dato sospetto di mia non curanza in servirla, dalla qual taccia la prego a purgarmi in cuor suo, mentre sinceramente Le accuso la mia impotenza prodotta dall'essere io stato incomodato di salute alquanto nel passato inverno, e dall'aver doppo (*sic*) dovuto fare un viaggetto per ristabilirmi pienamente. Eccole la vera causa del mio silenzio, ed eccomi ora a darle le notizie richiestemi relativamente al Codice del Fibonacci, le quali vorrei che Le giungessero in tempo, o che almeno Le possano servire per fare un'appendice alla di Lei memoria, quando questa sia già pubblicata.

1. L'Età del Codice Riccardiano si può certamente fissare nel principio del Secolo XIV., siccome chiaro apparisce dal Carattere e dalle sigle.

2. Nel ricercato luogo della prefazione non vi son virgole, ed il Testo dice così: = *totum etiã Algorismũ atque artem Pictagore quasi errorem computavi respectu modi Indorum ꝫ*=.

3. Nel principio del Capitolo 1.^{o} le nove figure de'Numeri sono espresse nel modo che segue:

VIIIJ	VIIJ	VIJ	VJ	V	IIIJ	IIJ	IJ	I
9	8	7	6	5	4	ʒ	2	1

4. La definizione della Voce *Bolsonalie* così si dà da Leonardo stesso nel principio della 2.^{a} parte del Capitolo IX.: = *De emptione bolsonalium secundũ modũ baracti, ille siquidem monete bolsonalie appellantur que non emuntur nisi quantum valet argentum quod est in ipsis, ut dissolutis ipsis in vase super ignẽ alie monete inde formentur, quarum nos qualiter inveniri debeat pretium illarum ad pretium baracti sive sit ad pondus libre, sive ad numerum ostendimus* =.

5. Nella parte 1.^{a} del Capitolo XII, in cui tratta — *de Collectionibus numerorum*, — e nella 2.^{a} dove parla — *de proportionibus numerorum* — parla chiaramente dei numeri quadrati cubici, e dei figurati, siccome nella parte 9.^{a} in cui discorre = *de duplicatione schacherij et quarumdã aliarũ regularũ* = lungamente si estende sulle combinazioni, e permutazioni dei numeri e delle cose con varj dati ed esempli.

6. Nel Capitolo 13.^{o} non nomina autore della regola dell'*Elchataym*, ma dà la sola

definizione così: = *Elchataieym quidem arabice, latine duaru͞ falsaru͞ positionu͞ regula interpretatur per quas fere omnium questionum solutio invenitur* $\not\!g$ =

7. Nel Capitolo 15.° pure non nomina nè autore dell'Algebra, nè luogo ove essa sia nata, se non chè nella Rubrica che distingue la terza parte in che è distinto il detto capitolo, e che dice = *Incipit pars tertia de solutione quarumda͞ questionu͞ per dictum modu͞ algebre et almuchabale, scilicet ad proportionem et restaurationem,* nel margine la medesima mano dell'antico scrittore vi appose non so perchè la voce *maumeht*.

Quanto poi a ciò che il Targioni dice di F. Luca Pacinoli, e dell'Anonimo plagiario ho fatto varie ricerche per vedere il nominato Codice, una volta esistente nella Libreria di S. M.ª Nuova, e con il confronto di esso esaminare se il Trattato se il Tr attato (*sic*) di Leonardo sui Numeri Quadrati sia il medesimo che parte (*sic*) dell'opera dell'Abbaco, od opera distinta, ma siccome non ho potuto sapere cosa alcuna dell'esistenza del d.° codice dell'Anonimo, essendoche (*sic*) più anni sono quella Librerìa fù dispersa, così non Le posso dare su ciò notizia precisa. Se si dee stare però a quel pezzo che ne riporta Targioni parrebbe che si dovesse supporre opera distinta dal sudd.° libro dell'Abbaco; ma se potrò rinvenirle qualche ulteriore notizia in tal proposito, mi darò il piacere di significargliela.

Dalla mia tardanza involontaria non argomenti di grazia il mio desiderio sincero di contestarLe la ben dovutaLe stima. Mi onori perciò de'suoi spessi comandi in attenzione dei quali mi confermo con sincerità di quore (*sic*)

di V.ª P.ᵗᵃ Rm̃a

Firenze 11. Giugno 1793.

Devot.^mo Obblig.^mo Serv^e. ed Amico
Fran̄co Fontani.

LETTERA IV.

DI ANGELO ZENDRINI.

Chiaris.^mo Sig.^r Prof.^e mio Pn̄e Oss.^mo

Il Codice Mss.° contenente l'Aritmetica di Leonardo Fibonacci Pisano, veduto dal Cardano in Venezia nella Libreria dei Canonici Regolari di S. Salvatore nel Monastero di S. Antonio di Castello, perì coll' incendio di tutta quella doviziosissima Libreria nell'anno 1686.

Il Mabillon, che nell'anno 1685 l'aveva visitata, due anni dopo pubblicando il suo *Iter Italicum*, nella Prefazione scrisse ch'ella aveva sofferto l' incendio dopo la sua partenza da Venezia. È già noto, per quel che ne scrisse anche Tiraboschi, altro Codice di quell'Opera esistente nella Bibl.ª Magliabecchiana di Fiorenza.

Queste sono le notizie, che ho ritratte dal Sig.^e Cav. Morelli in risposta alle di Lei ricerche.

La persona medesima che le recherà questa mia lettera, le farà tener altresì il Vol. della Rac.ª Calogerà, che contiene la da Lei ricercata Dissert.^e del Ginnani (*sic*) *De Numeralium notarum* etc.

Ho letto i nuovi severi Regolamenti delle Università. Quanto ai Licei non è pervenuto altro nuovo comando che quello del *Costume*.

Se mi trova atto a servirla in qualche cosa, mi comandi sempre liberamente, niente potendomi esser grato più, che di mostrarmi quale con ammirazione e divoto rispetto ho l'onore di essere

Di Lei Sig. Prof.^e

Venezia. 3. 9bre 1811.

Um.^mo Dev.^mo Oss.^mo Servitore
Angelo Zendrini.

FAC-SIMILE della carta 503 VERSO del Codice N° 783,

della Biblioteca Riccardiana di Firenze

talez de $\frac{5}{9}$ 1 et de $\frac{1}{2}$ 3 et de $\frac{33}{48}$ 5 sunt ad invicem in quesitis propor
tionibus. scilicet sicut 2 sunt ad 3. ita radix de $\frac{5}{9}$ 1 sunt ad radicem
de $\frac{1}{2}$ 3 et sicut 4 sunt ad 5 ita radix de $\frac{1}{2}$ 3 sunt ad radicem de
$\frac{33}{48}$ 5 Multiplicabis ergo $\frac{5}{9}$ 1 et $\frac{1}{2}$ 3 per 18 in quibus reperiuntur $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{2}$
et habebis 28 et 63 et quoniam 28 sunt ad 63 sicut tetragonum binarij
ad tetragonum binarij ternarij hoc est sicut 4 ad 9. cognoscitur quod
radix de $\frac{5}{9}$ 1 est ad radicem de $\frac{1}{2}$ 3 sicut 2 ad 3. Similiter inve
nies radicem de $\frac{1}{2}$ 3 esse ad radicem de $\frac{33}{48}$ 5 sicut 4 sunt ad 5.
cum $\frac{1}{2}$ 3 sunt ad $\frac{33}{48}$ 5 sicut tetragonus quaternarij ad tetragonum
quinarij Item si vis cognoscere utrum coniunctio radicum trium invento
rum tetragonorum surgat in ascensione additionum ipsorum scilicet $\frac{5}{9}$ 1
et $\frac{1}{2}$ 3 quam coniunctionem coniunge cum $\frac{33}{48}$ 5 erunt $\frac{376}{489}$ 29 cuius numeri ra
dix est summa coniunctionis radicum trium tetragonorum dictorum Item
ut habeas coniunctionem ipsarum iunge tres numeros inventos superius in quesitis
proportionibus. scilicet 8 et 12 et 15 erunt 35 et accipe tetragonum primi
numeri scilicet 64 et tetragonum de 35 scilicet 1225 quia equa proportione est
tetragonus primi positi numeri ad tetragonum coniunctionis trium positorum
numerorum ita primus inventus tetragonus est ad tetragonum coniunctionis
radicum inventorum tetragonorum hoc est sicut 64 sunt ad 1225 ita
$\frac{5}{9}$ 1 est ad tetragonum summe coniunctionis trium radicum superscrip
tarum quare multiplicanda sunt 1225 per $\frac{5}{9}$ 1 et dividenda multiplicatio eorum per 64
et invenies summam $\frac{376}{489}$ 29 pro tetragono coniunctionis trium predictarum
radicum possumus multas varias questiones de similibus cum tribus numeris
ut compluribus proponere quarum in duorum numerorum questionibus superius fecimus
quarum omnium solutiones per ea que dicta sunt satis aperte reperire possunt.

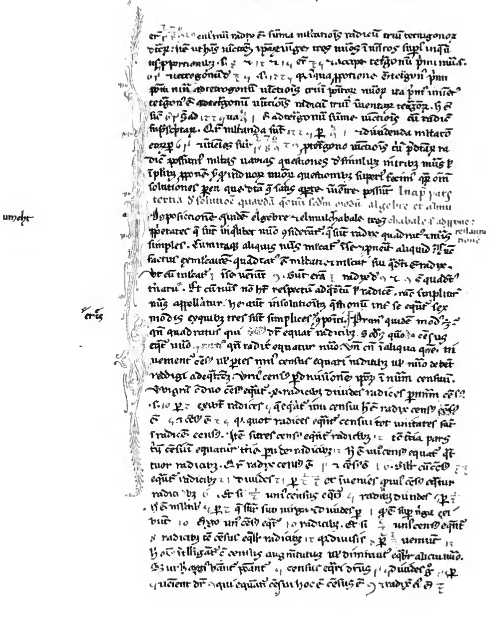
maumeht

Incipit pars tertia de solutione quarumdam questionum
secundum modum algebre et almuchabale scilicet ad proportionem et restaurationem.

D e compositionum qui de algebre et almuchabale tres pro
prietates que sunt in quolibet numero considerantur que sunt radix
quadratus et numerus simplex Cum itaque aliquis numerus multiplicatur in se et
provenit aliquid tunc factus ex multiplicatione quadratus est multiplicati et
multiplicatus sui quadrati est radix ut cum multiplicatur 3 est veniunt 9.

FACSIMILE della carta 187 VERSO del Codice Maglhabechiano.

contrassegnato SCAFFALE C, Palchetto 1, n° 2616, BADIA FIORENTINA n° 73.



3

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL PRESENTE VOLUME.

IMPRIMATUR
Fr. Th. M. Larco Ord. Praed. S. P. A. Mag. Soc.
IMPRIMATUR
Fr. A. Ligi—Bussi Min. Conv. Archiep. Icon. Vicesg.