Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück WS 2019/2020

Bündel, Garben und Kohomologie

Vorlesung 27

Čech-Kohomologie auf dem Polynomring

Es sei R ein kommutativer Ring und

$$A = R[X_1, \ldots, X_n]$$

der Polynomring über R in n Variablen. Man denke insbesondere an den Fall, wo R ein Körper ist. Wir betrachten die offene Menge

$$U = \mathbb{A}_R^n \setminus V(X_1, \ldots, X_n) = D(X_1, \ldots, X_n) = \bigcup_{i=1}^n D(X_i),$$

wobei wir mit der angegebenen affinen Überdeckung mit den $D(X_i) = \operatorname{Spek}(A_{X_i})$ arbeiten werden. Der Čech-Komplex zu einem A-Modul M auf U zu dieser Überdeckung hat somit die Gestalt

$$\prod_{1 \leq i \leq n} M_{X_i} \longrightarrow \prod_{1 \leq i < j \leq n} M_{X_i X_j} \longrightarrow \prod_{1 \leq i < j < k \leq n} M_{X_i X_j X_k} \longrightarrow \cdots$$
$$\longrightarrow M_{X_1 \cdots X_n} \longrightarrow 0.$$

Es ist also

$$\check{C}^p(D(X_i), \widetilde{M}) = \prod_{1 \leq i_0 < i_1 < \cdots i_p \leq n} M_{X_{i_0} \cdots X_{i_p}}$$

und die p-te Čech-Kohomologie ist die Homologie des oben ausgeschriebenen Komplexes. Komponentenweise sind die Abbildungen dabei einfach die kanonischen Abbildungen in die Nenneraufnahmen (es wird jeweils eine zusätzliche Variable als Nenner aufgenommen), allerdings werden diese noch mit einem Vorzeichen versehen, wie das in der Definition des Čech-Komplex festgelegt wurde. Wir beschreiben diese Komplexe für die Strukturgarbe (also) $M = A$ genauer, wobei es hilfreich ist, die Komplexe durch die feine Monomgraduierung, wo mit der Gruppe $\mathbb{Z}^n$ graduiert wird, in einfachere Komplexe aufzuspalten. Wir betrachten zuerst die kleinen Dimensionen.

Beispiel 27.1. Sei $A = R[X, Y]$. Der Čechkomplex zur Strukturgarbe $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_R^2}$ auf $U = D(X) \cup D(Y) \subset \mathbb{A}_R^2$ ist

$$0 \longrightarrow A_X \times A_Y \longrightarrow A_{XY} \longrightarrow 0\,.$$

Dieser Komplex ist mit der feinen Monomgraduierung verträglich. Die Komponente zu $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$ hängt im Wesentlichen davon ab, ob die Exponenten positiv oder negativ sind. Wenn α und β beide nichtnegativ sind, so steht hier insgesamt

$$(A_X \times A_Y)_{(\alpha,\beta)} = R \cdot X^\alpha Y^\beta \oplus R \cdot X^\alpha Y^\beta \longrightarrow R \cdot X^\alpha Y^\beta \longrightarrow 0$$

und der Komplex ist hinten exakt und der Kern vorne ist isomorph zu $R \cdot X^\alpha Y^\beta$. Wenn α negativ und β nichtnegativ ist (entsprechend umgekehrt), so steht hier insgesamt

$$(A_X \times A_Y)_{(\alpha,\beta)} = R \cdot X^\alpha Y^\beta \oplus 0 \longrightarrow R \cdot X^\alpha Y^\beta \longrightarrow 0$$

und der Komplex ist exakt. Wenn α und β beide negativ sind, so steht hier insgesamt

$$(A_X \times A_Y)_{(\alpha,\beta)} = 0 \oplus 0 \longrightarrow R \cdot X^\alpha Y^\beta \longrightarrow 0$$

und die hintere Homologie ist $R \cdot X^\alpha Y^\beta$. Insgesamt ist daher

$$\check{H}^0(D(X), D(Y), \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_R}) \, = \, \bigoplus_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^2} R \cdot X^\alpha Y^\beta \, = \, A$$

und $\check{H}^1(D(X), D(Y), \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_R}) \, = \, \bigoplus_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}^2_-} R \cdot X^\alpha Y^\beta$.

Beispiel 27.2. Sei $A = R[X, Y, Z]$. Der Čechkomplex zur Strukturgarbe ist

$$0 \longrightarrow A_X \times A_Y \times A_Z \longrightarrow A_{XY} \times A_{XZ} \times A_{YZ} \longrightarrow A_{XYZ} \longrightarrow 0\,.$$

Dieser Komplex ist mit der feinen Monomgraduierung verträglich. Es ist $\check{H}^0$ gleich A, $\check{H}^1$ ist 0 (siehe Satz 27.3) und $\check{H}^2$ ist der freie R-Modul mit der Basis $X^i Y^j Z^k$, $(i,j,k) \in \mathbb{Z}^3_-$.

Satz 27.3. *Es sei R ein kommutativer Ring und $A = R[X_1, \ldots, X_n]$ der Polynomring über R in $n \geq 2$ Variablen. Dann ist die Čech-Kohomologie zur Strukturgarbe und zur Überdeckung $D(X_i)$, $i = 1, \ldots, n$, der offenen Menge $U = D(X_1, \ldots, X_n)$ gleich*

$$\check{H}^p(D(X_i), \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_R}) \, = \, \begin{cases} A \text{ für } p = 0, \\ 0 \text{ für } 1 \leq p \leq n-2, \\ \bigoplus_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_-} R \cdot X^\alpha \text{ für } p = n-1\,. \end{cases}$$

Beweis. Wir betrachten den Čechkomplex mit der feinen durch die Monome gegebenen $\mathbb{Z}^n$-Graduierung. Zu einem fixierten Tupel

$$\alpha \, = \, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \, \in \, \mathbb{Z}^n$$

sei $N = N_\alpha \subseteq \{1, \ldots, n\}$ die Menge der Indizes mit negativem Eintrag. Zu diesem α ist

$$\begin{aligned} \left(\check{C}^p(D(X_i), \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n})\right)_\alpha \, &= \, \left(\prod_{1\leq i_0 < i_1 < \cdots < i_p \leq n} A_{X_{i_0}X_{i_1}\cdots X_{i_p}} \right)_\alpha \\ &= \prod_{N\subseteq L,\, \#(L)=p+1} R \cdot e_L \end{aligned}$$

$$\cong \prod_{J \subseteq \{1,\ldots,n\} \setminus N,\, \#(J) = p+1-\#(N)} R \cdot e_J .$$

Die Identifikation in der Mitte beruht darauf, dass die Komponente zu $A_{\prod_{i \in L} X_i}$ bei $N \not\subseteq L$ gleich 0 ist und bei $N \subseteq L$ gleich $R \cdot X^\alpha$. Das Monom X^α in dieser Nenneraufnahme entspricht e_L. Bei der Identifikation rechts entspricht e_J dem Basiselement $e_L = e_{N \cup J}$. Der Komplex zum Index α entspricht also einem aufsteigenden Binomialkomplex zur Indexmenge $\{1, \ldots, n\} \setminus N$ zum Ring R (statt $\mathbb{Z}$), allerdings ohne einen freien Summanden links für die leere Menge.

Bei $p = 0$ und zumindest einem negativen Exponenten steht rechts höchstens ein isoliertes $R \cdot X^\alpha$. Dies wird aber ($n \geq 2$) nicht auf 0 abgebildet und somit hat dies keinen Beitrag zu H^0. Wenn hingegen alle Exponenten nichtnegativ sind, so sind die Elemente gleich

$$(c_1 X^\alpha, \ldots, c_n X^\alpha)\,,$$

und dieses wird genau dann auf 0 abgebildet, wenn die Koeffizienten $c_i \in R$ übereinstimmen. Daher ist die nullte Čechkohomologie gleich dem Polynomring

$$A = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} R \cdot X^\alpha .$$

Sei $p \geq 1$. Bei $N \neq \{1, \ldots, n\}$ ist die Situation isomorph zu einem aufsteigenden Binomialkomplex zu einer nichtleeren Indexmenge und daher ist die Homologie trivial nach Lemma Anhang 8.11. Daher ist die Homologie überhaupt trivial für alle p zwischen 1 und $n - 2$. Sei also $p = n - 1$ und $N = \{1, \ldots, n\}$. Dies sind die α mit ausschließlich negativen Exponenten. Der Komplex (entspricht dem leeren aufsteigenden Binomialkomplex) ist

$$0 \longrightarrow R \cdot X^\alpha \longrightarrow 0$$

und daher ist

$$H^{n-1} = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}_-^n} R \cdot X^\alpha .$$

$\square$

Kohomologie auf projektiven Schemata

Satz 27.4. *Es sei R ein kommutativer Ring und $A = R[X_0, X_1, \ldots, X_d]$ der Polynomring über R in $d + 1 \geq 2$ Variablen und*

$$\mathbb{P}_R^d = \operatorname{Proj}(A)$$

der zugehörige projektive Raum. Dann ist die Kohomologie der getwisteten Strukturgarben $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_R}(n)$ gleich

$$\check{H}^p(\mathbb{P}^d_R, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_R}(n)) \;=\; \begin{cases} A_n \text{ für } p = 0, \\ 0 \text{ für } 1 \leq p \leq d-1, \\ \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}_-^{d+1},\, \sum_{j=1}^{d+1} \alpha_j = n} R \cdot X^\alpha \text{ für } p = d\,. \end{cases}$$

Beweis. Dies folgt aus Satz 27.3. □

Speziell ist für die kanonische Garbe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_R}(-d-1)$ (vergleiche Korollar 19.10)

$$H^d\Big(\mathbb{P}^d_R, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_R}(-d-1)\Big) \;=\; RX_0^{-1}X_1^{-1} \cdots X_n^{-1} \;\cong\; R$$

und

$$H^d\Big(\mathbb{P}^d_R, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_R}(n)\Big) \;=\; 0$$

für $n \,>\, -d-1$.

Satz 27.5. *Es sei $\mathbb{P}^n_R$ der projektive Raum über einem noetherschen Ring R und sei $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf $\mathbb{P}^n_R$. Dann sind die $H^i(\mathbb{P}^n_R, \mathcal{F})$ endlich erzeugte R-Moduln.*

Beweis. Für die getwisteten Strukturgarben $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(\ell)$ ergibt sich die Aussage aus Satz 27.4. Damit gilt sie auch für endliche direkte Summen von solchen Garben. Den allgemeinen Fall beweisen wir durch absteigende Induktion über den kohomologischen Index i. Wenn dieser oberhalb von n liegt, so gibt es nach Satz 26.10 nur triviale Kohomologie (wenn R endliche Dimension besitzt, so kann man auch mit Satz 25.12 argumentieren), was den Induktionsanfang sichert. Es sei also die Aussage für ein i und jede kohärente Garbe bewiesen. Es sei $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe. Dann gibt es nach Satz 15.13 eine endliche direkte Summe $\bigoplus_{j \in J} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(\ell_j)$ und einen surjektiven $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_R}$-Modulhomomorphismus

$$\bigoplus_{j \in J} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(\ell_j) \longrightarrow \mathcal{F}.$$

Es sei $\mathcal{G}$ der Kern dieser Abbildung, der nach Aufgabe 14.20 ebenfalls kohärent ist. Die zugehörige lange exakte Kohomologiesequenz zur Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \bigoplus_{j \in J} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(\ell_j) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

ist

$$\ldots \longrightarrow H^{i-1}(\mathbb{P}^n_R, \bigoplus_{j \in J} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(\ell_j)) \stackrel{\epsilon}{\longrightarrow} H^{i-1}(\mathbb{P}^n_R, \mathcal{F}) \stackrel{\delta}{\longrightarrow} H^i(\mathbb{P}^n_R, \mathcal{G}) \longrightarrow \ldots .$$

Dazu gehört die kurze exakte Sequenz von R-Moduln

$$0 \longrightarrow \operatorname{bild} \epsilon = \operatorname{kern} \delta \longrightarrow H^{i-1}(\mathbb{P}^n_R, \mathcal{F}) \longrightarrow \operatorname{bild} \delta \longrightarrow 0\,.$$

Nach der Vorüberlegung bzw. der Induktionsvoraussetzung sind $H^{i-1}(\mathbb{P}^n_R, \bigoplus_{j \in J} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(\ell_j))$ und $H^i(\mathbb{P}^n_R, \mathcal{G})$ endlich erzeugte R-Moduln und daher sind auch $\operatorname{bild} \epsilon$ und nach Satz 10.4 (Algebraische Kurven (Osnabrück 2017-2018)) auch $\operatorname{kern} \delta$ endlich erzeugt. Nach Lemma 20.8 (Kommutative Algebra) ist auch $H^{i-1}(\mathbb{P}^n_R, \mathcal{F})$ endlich erzeugt. □

Satz 27.6. *Es sei X ein projektives Schema über einem noetherschen Ring R mit einer abgeschlossenen Einbettung $X \subseteq \mathbb{P}^n_R$ in einen projektiven Raum. Es sei $\mathcal{G}$ eine quasikohärente Garbe auf X und $j_* \mathcal{G}$ die vorgeschobene Garbe. Dann ist*

$$H^i(X, \mathcal{G}) \,=\, H^i(\mathbb{P}^n_R, j_* \mathcal{G})$$

für alle i.

Beweis. Die vorgeschobene Garbe ist wieder quasikohärent. Nach Satz 26.10 kann man beide Seiten mit Čech-Kohomologie bezüglich der affinen Standardüberdeckung $D_+(X_s)$ des projektiven Raumes bzw. der Überdeckung $X \cap D_+(X_s)$ von X berechnen. Dabei stimmt der gesamte Čech-Komplex überein und insbesondere die Čech-Kohomologie. □

Satz 27.7. *Es sei X ein projektives Schema über einem noetherschen Ring R und sei $\mathcal{G}$ eine kohärente Garbe auf X. Dann sind die $H^i(X, \mathcal{G})$ endlich erzeugte R-Moduln.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 27.6 und Satz 27.5. □

Man beachte, dass es um R-Moduln geht, nicht um Moduln über dem Koordinatening von X. Im wichtigsten Fall, wenn $R = K$ ein Körper ist, handelt es sich also bei den Kohomologiegruppen um endlichdimensionale Vektorräume über K. Deren Dimensionen sind natürliche Zahlen, die den kohärente Garben auf X zugeordnet werden und für diese in gewisser Weise charakteristisch sind. Wenn man die Strukturgarbe oder die Tangentialgarbe auf X nimmt, so erhält man Zahlen (Invarianten), die für X selbst charakteristisch sind. In diesem Zusammenhang setzt man abkürzend

$$h^i(\mathcal{F}) \,=\, \dim_K \big(H^i(X, \mathcal{F})\big).$$

Beispielsweise ist für eine glatte projektive Kurve X über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K die Vektorraumdimension von $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ das sogenannte *Geschlecht* der Kurve. Dies ist die wichtigste Invariante, wobei im komplexen Fall ein unmittelbarer Zusammenhang mit der topologischen Gestalt der Kurve (als komplex eindimensionale, reell zweidimensionale Mannigfaltigkeit) besteht.

Die Euler-Charakteristik

DEFINITION 27.8. Es sei X ein projektives Schema über einem Körper K. Zu einer kohärenten Garbe $\mathcal{G}$ nennt man

$$\chi(\mathcal{G}) := \sum_{i=0}^{\dim(X)} (-1)^i h^i(X, \mathcal{G})$$

die *Euler-Charakteristik* von $\mathcal{G}$.

Wegen Satz 27.7 ist dieser Ausdruck eine wohldefinierte ganze Zahl. Da oberhalb der Dimension die Kohomologie gleich 0 ist, könnte man die alternierende Summe auch gegen unendlich laufen lassen.

LEMMA 27.9. *Es sei X ein projektives Schema über einem Körper K. Dann ist die Euler-Charakteristik von kohärenten Garben auf X additiv für kurze exakte Sequenzen. D.h. für eine kurze exakte Sequenz von kohärenten Garben*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

ist

$$\chi(\mathcal{G}) = \chi(\mathcal{F}) + \chi(\mathcal{H}).$$

Beweis. Dies ergibt sich aus der zugehörigen langen exakten Kohomologiesequenz und Satz 25.12

mit der Dimensionsformel. $\square$

Abbildungsverzeichnis