Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück sS 2017**

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 33

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 33.1. Drücke in $\mathbb{Q}^2$ den Vektor

$$(2,-7)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(5,-3) \text{ und } (-11,4)$$

aus.

Übungsaufgaben

Aufgabe 33.2. Zeige, dass der Zahlenraum K^n zu einem Körper K mit der komponentenweisen Addition und der Skalarmultiplikation die Eigenschaften

(1) $r(su) = (rs)u$,
(2) $r(u+v) = ru + rv$,
(3) $(r+s)u = ru + su$,
(4) $1u = u$,

erfüllt.

Aufgabe 33.3. Es sei K ein Körper und K^n der n-dimensionale Zahlenraum. Es sei v_i, $i \in I$, eine Familie von Vektoren im K^n und $w \in K^n$ ein weiterer Vektor. Es sei vorausgesetzt, dass die Familie

$$w, v_i, i \in I\,,$$

ein Erzeugendensystem von K^n ist und dass sich w als Linearkombination der v_i, $i \in I$, darstellen lässt. Zeige, dass dann schon v_i, $i \in I$, ein Erzeugendensystem von K^n ist.

Aufgabe 33.4. Finde für die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{Q}^2$ eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors.

Aufgabe 33.5. Finde für die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{Q}^3$ eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors.

Aufgabe 33.6. Zeige, dass im $\mathbb{R}^3$ die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

Aufgabe 33.7. Bestimme, ob im $\mathbb{R}^3$ die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

Aufgabe 33.8. Es sei K ein Körper und seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass der Matrizenraum $\operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ in natürlicher Weise ein Vektorraum ist.

Aufgabe 33.9.*

Berechne das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -3 & 7 \\ 8 & 3 & 1 & 0 & -5 \\ 6 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 6 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 33.10. Berechne das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} Z & E & I & L & E \\ R & E & I & H & E \\ H & O & R & I & Z \\ O & N & T & A & L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S & E & I \\ P & V & K \\ A & E & A \\ L & R & A \\ T & T & L \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 33.11.*

Zeige, dass die Matrizenmultiplikation von quadratischen Matrizen im Allgemeinen nicht kommutativ ist.

Aufgabe 33.12. Bestimme das Matrizenprodukt

$$e_i \circ e_j \, ,$$

wobei links der i-te Standardvektor (der Länge n) als Zeilenvektor und rechts der j-te Standardvektor (ebenfalls der Länge n) als Spaltenvektor aufgefasst wird.

Aufgabe 33.13. Es sei M eine $m \times n$-Matrix. Zeige, dass das Matrizenprodukt Me_j mit dem j-ten Standardvektor (als Spaltenvektor aufgefasst) die j-te Spalte von M ergibt. Was ist e_iM, wobei e_i der i-te Standardvektor (als Zeilenvektor aufgefasst) ist?

Zu einer quadratischen Matrix M bezeichnet man mit M^n die n-fache Verknüpfung (Matrizenmultiplikation) mit sich selbst. Man spricht dann auch von n-ten *Potenzen* der Matrix.

Aufgabe 33.14. Berechne zur Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

die Potenzen

$$M^i, \, i = 1, \ldots, 4.$$

Aufgabe 33.15. Es sei

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1\, n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix und M eine $n \times n$-Matrix. Beschreibe DM und MD.

AUFGABE 33.16. Es sei

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1\,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix und $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ ein n-Tupel über einem Körper K, und es sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ein Variablentupel. Welche Besonderheiten erfüllt das lineare Gleichungssystem

$$Dx = c,$$

und wie löst man es?

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 33.17. (2 Punkte)
Drücke in $\mathbb{Q}^2$ den Vektor

$$(5, -8)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(6, -4) \text{ und } (-3, 7)$$

aus.

AUFGABE 33.18. (3 Punkte)
Finde für die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{Q}^3$ eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors.

Aufgabe 33.19. (4 Punkte)

Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

über einem Körper K. Zeige, dass die vierte Potenz von M gleich 0 ist, also

$$M^4 = MMMM = 0\,.$$

Für die folgende Aussage wird sich bald ein einfacher Beweis über die Beziehung zwischen Matrizen und linearen Abbildungen ergeben.

Aufgabe 33.20. (4 Punkte)

Zeige, dass die Matrizenmultiplikation assoziativ ist.

Genauer: Es sei K ein Körper und es sei A eine $m \times n$-Matrix, B eine $n \times p$-Matrix und C eine $p \times r$-Matrix über K. Zeige, dass $(AB)C = A(BC)$ ist.

Aufgabe 33.21. (4 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Finde und beweise eine Formel für die n-te Potenz der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$