Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2024/2025**

Lineare Algebra

Arbeitsblatt 43

Übungsaufgaben

Aufgabe 43.1. Multipliziere in $\mathbb{Z}/(5)[x,y]$ die beiden Polynome
$$x^4 + 2x^2y^2 - xy^3 + 2y^3 \text{ und } x^4y + 4x^2y + 3xy^2 - x^2y^2 + 2y^2 \,.$$

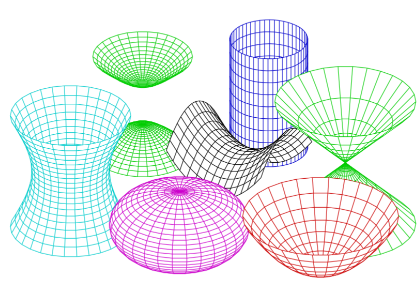
Aufgabe 43.2. Multipliziere in $\mathbb{Q}[x,y,z]$ die beiden Polynome
$$x^5 + 3x^2y^2 - xyz^3 \text{ und } 2x^3yz + z^2 + 5xy^2z - x^2y \,.$$

Aufgabe 43.3.*

Zeige, dass im Polynomring $K[X,Y]$ über einem Körper K das Ideal (X,Y) kein Hauptideal ist.

Aufgabe 43.4. Skizziere im $\mathbb{R}^2$ die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen.

(1) $x^2 - y^2 - 1 = 0$,
(2) $x^2 + xy + y^2 = 0$,
(3) $x^2 + y^2 + 1 = 0$,
(4) $x^2 + y^2 = 0$,
(5) $x^2 + y^3 = 0$,
(6) $x^3 - y^5 = 0$,
(7) $x^2 - x^3 = 0$,
(8) $x^3 + y^3 = 1$,
(9) $x^4 + y^4 = 1$,
(10) $-5 + 3x + 4x^2 + x^3 - y^2 = 1$.



Aufgabe 43.5.

Welche der rechts skizzierten Quadriken kann man (in welchem Sinne) mit weniger als drei Variablen beschreiben?

Aufgabe 43.6. Bestimme, welche Quadriken aus Beispiel 43.9 sich als Graph und welche sich als Rotationsfläche beschreiben lassen.

In den folgenden Aufgaben ist Standardform im Sinne von Satz 43.10 zu verstehen.

Aufgabe 43.7. Bringe das reelle rein-quadratische Polynom

$$3X^2 - 5Y^2 + 8XY$$

auf eine Standardgestalt.

Aufgabe 43.8. Bringe das reelle rein-quadratische Polynom

$$2X^2 - Y^2 + 3Z^2 + 4YZ$$

auf eine Standardgestalt.

In den folgenden Aufgaben ist Standardform im Sinne von Satz 43.13 zu verstehen. Es muss die neue Basis, die Variablentransformation (Koordinatentransformation) und das vereinfachte quadratische Polynom angegeben werden.

Aufgabe 43.9.*

Wir betrachten das reelle quadratische Polynom

$$F = X^2 - 4Y^2 + 6XY - 3X + Y + 2$$

mit dem rein-quadratischen Anteil

$$G = X^2 - 4Y^2 + 6XY.$$

a) Bestimme eine Standardgestalt für G.

b) Bestimme eine Orthonormalbasis, bezüglich der G Standardgestalt besitzt. Wie drückt man die Variablen X, Y mit den neuen Variablen aus?

c) Drücke F in den Variablen zur neuen Orthonormalbasis aus.

d) Bestimme eine Standardgestalt von F.

Aufgabe 43.10. Bringe das reelle quadratische Polynom

$$5X^2 - 2Y^2 - 6XY - 5X - 3Y - 7$$

auf eine Standardgestalt.

In der folgenden Aufgabe geht es um zwei Definitionen für eine Ellipse.

Aufgabe 43.11.*

Es seien $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^2$ zwei Punkte, $c > 0$ und es sei

$$E = \left\{ P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, Q_1) + d(P, Q_2) = c \right\}.$$

Zeige, dass E die Nullstellenmenge eines quadratischen Polynoms in zwei Variablen ist. Wie sieht die Standardgestalt aus? Was sind die Hauptachsen?

Tipp: Führe die beschriebene Situation auf den Fall zurück, wo $Q_1 = (e, 0)$ und $Q_2 = (-e, 0)$.

Unter normierter Standardgestalt verstehen wir eine quadratische Form, bei der die Koeffizienten nur den Wert $0, 1, -1$ haben dürfen. Dies kann man durch Verzerrungen stets erreichen (wobei aber die Orthogonalität verloren geht).

Aufgabe 43.12. Bestimme die normierte Standardgestalt der reellen Quadrik

$$7x^2 - 11y^2 + 15xy\,.$$

Aufgabe 43.13.*

Bestimme die normierte Standardgestalt der reellen Quadrik

$$3x^2 + 2y^2 + 2xy - 2yz\,.$$

Aufgabe 43.14. Bestimme die normierte Standardgestalt der reellen Quadrik

$$x^2 + y^2 - 2z^2 - 4xy + 6xy - 2yz\,.$$

Aufgabe 43.15. Es sei V ein Minkowski-Raum der Dimension n. Wir betrachten die Menge

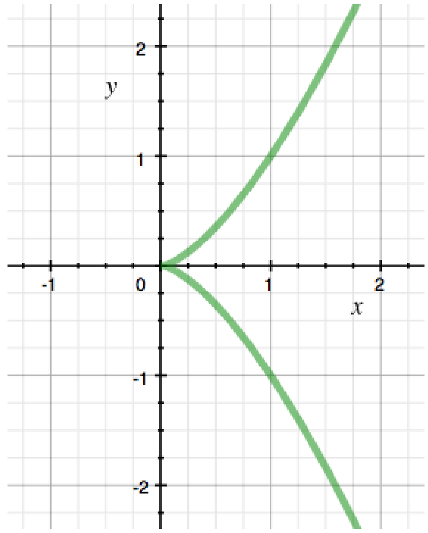
$$T = \{v \in V \mid \langle v, v \rangle = 1\}.$$

Für welche n ist T wegzusammenhängend, für welche zerfällt es in verschiedene Komponenten?

Aufgabe 43.16. Es sei V ein Minkowski-Raum der Dimension n. Wir betrachten die Menge

$$T = \{v \in V \mid \langle v, v \rangle = 1\}.$$

Es sei w der Beobachtervektor eines Beobachters B und es sei V_B seine Raumkomponente. Welche Gestalt besitzt $T \cap V_B$?



Aufgabe 43.17. Es sei K ein Körper. Das Bild der durch

$$K \longrightarrow K^2,\ t \longmapsto \left(t^2,\ t^3\right),$$

definierten Kurve heißt *Neilsche Parabel*. Zeige, dass ein Punkt $(x, y) \in K^2$ genau dann zu diesem Bild gehört, wenn er die Gleichung $x^3 = y^2$ erfüllt.

Aufgabe 43.18. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto \left(t^2,\ t^3\right).$$

Bestimme die Punkte $t_0 \in \mathbb{R}$, für die der Abstand der zugehörigen Kurvenpunkte $f(t) = (t^2,\ t^3)$ zum Punkt $(1, 0)$ minimal wird.

Aufgabe 43.19. Wir betrachten die Kurve

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t^2 - 1, t^3 - t).$$

a) Zeige, dass die Bildpunkte (x, y) der Kurve die Gleichung

$$y^2 = x^2 + x^3$$

erfüllen.

b) Zeige, dass jeder Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y^2 = x^2 + x^3$ zum Bild der Kurve gehört.

c) Zeige, dass es genau zwei Punkte t_1 und t_2 mit identischem Bildpunkt gibt, und dass ansonsten die Abbildung injektiv ist.

Aufgabe 43.20. Es sei $C \subseteq \mathbb{R}^2$ das Bild unter der polynomialen Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto \left(t^3 - 1,\ t^2 - 1\right).$$

Bestimme ein Polynom $F \neq 0$ in zwei Variablen derart, dass C auf dem Nullstellengebilde zu F liegt.

Aufgabe 43.21. Es sei T der Graph der Standardparabel

$$y = x^2$$

und $M \subseteq \mathbb{R}^3$ die Rotationsfläche zu T um die x-Achse.

a) Zeige, dass M durch keine Quadrik beschrieben wird.

b) Zeige, dass M die Nullstellenmenge eines Polynoms in drei Variablen ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 43.22. (3 Punkte)

Wie viele Monome vom Grad d gibt es im Polynomring in einer, in zwei und in drei Variablen?

Aufgabe 43.23. (4 Punkte)

Bestimme alle Lösungen der Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = 1$$

für die Körper $K = \mathbb{Z}/(2)$, $\mathbb{Z}/(3)$, $\mathbb{Z}/(5)$ und $\mathbb{Z}/(7)$.

Aufgabe 43.24. (8 (2+2+2+2) Punkte)

Wir betrachten das reelle quadratische Polynom

$$F = 3X^2 - 5Y^2 + 7XY + 4X - 2Y + 5$$

mit dem rein-quadratischen Anteil

$$G = 3X^2 - 5Y^2 + 7XY.$$

a) Bestimme eine Standardgestalt für G.

b) Bestimme eine Orthonormalbasis, bezüglich der G Standardgestalt besitzt. Wie drückt man die Variablen X, Y mit den neuen Variablen aus?

c) Drücke F in den Variablen zur neuen Orthonormalbasis aus.

d) Bestimme eine Standardgestalt von F.

Aufgabe 43.25. (10 (4+6) Punkte)

Wir betrachten den Kegel

$$K = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = z^2\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

und es sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ eine affine Ebene. Der Durchschnitt $K \cap E$ heißt *Kegelschnitt*.

a) Zeige, dass jeder Kegelschnitt

$$K \cap E \subseteq E \cong \mathbb{R}^2$$

in geeigneten Koordinaten u, v des $\mathbb{R}^2$ als Nullstellenmenge eines quadratischen Polynoms in u, v beschrieben werden kann.

b) Bestimme, welche der Quadriken aus Beispiel 43.8 sich als Kegelschnitte realisieren lassen.

Aufgabe 43.26. (4 Punkte)

Bestimme die normierte Standardgestalt der reellen Quadrik

$$5x^2 - 4y^2 + z^2 - xy + 3xz\,.$$

Abbildungsverzeichnis