最新中學教科書

幾何學

立體部

Commercial Press New Text Book Series.

MILNE'S SOLID GEOMETRY

Translated

BY

Zia Hong Lai

Anglo-Chinese College, Shanghai.

SECOND EDITION.

SHANGHAI:

Printed and Published by the COMMERCIAL PRESS, LTD.

1906.

幾何學卷七　立體部

平面與體角

四二七　平面者、其面內任取二點、以直線連之、而此直線處處在面內者也。(見一四節)

平面之四至、原可作爲無限、然於圖象之中、恆以四邊爲其界線。

四二八　學者如取硬紙或紙片、畫所需之線於其上、則更易悟幾何學中所論之平面。亦可以針插於紙面、以象平面上所作之垂線與斜線。

一　以硬紙象平面、以針尖或鉛筆尖象空間之一點、試考平面之過一點可有若干方向。

四二九　二　以硬紙象平面、以分股規之尖象空間之二定點、試考平面過此二點之方向、較之前條過一點之方向或多或寡。

三　設平面過不在一直線內之三定點、則有若干方向。故以若干點可定平面之位置。

四　夫既三點之中、其二點必在一直線內、則除三點之外、更有何事可定平面之位置。

五　夫既過餘一點之直線、可與過前二點之直線相交、則更有何事可定平面之位置。

六　夫既一直線可連二點、而又一直線可過餘一點、而與前直線平行、則更有何事可定平面之位置。

是故定平面之位置、其法總共若干。

四三〇

平面可以其所獨函之點或線而定位置。

定平面之位置、總計四事。

一　不在一直線內之三點。

二　一直線及其線外之一點。

三　相交之二直線。

四　平行之二直線。

四三一 一直線遇平面之點、曰直線之底。

四三二 一直線與一平面內過其底之各直線正交、卽正交此平面、或曰爲此平面之垂線。此平面亦可云正交此直線、或曰爲此直線之垂面。

四三三 一直線非與平面內過其底之各直線正交者、則爲斜遇平面。

四三四 若一直線與一平面任何引長、而終不能相遇、則爲彼此平行。

四三五 二平面任何引長、終不相遇、則爲彼此平行。

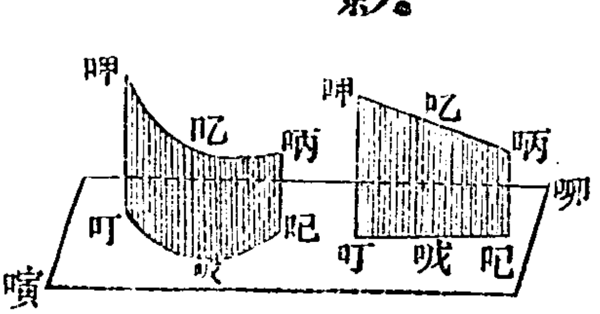
四三六 二平面不相平行、其內公用諸點之合位、爲二平面之交線。

四三七 自一點至一平面所作之垂線之底、曰此點於此平面上之射影。

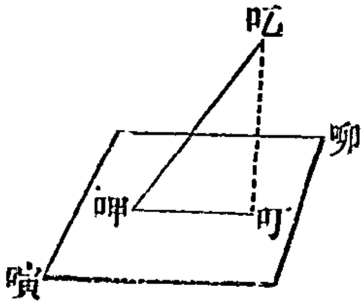
四三八 一直線內諸點、在一平面上射影之合位、曰直線之射影。

如圖、叮點爲呷點於嗊唎平面上之射影、叮哦吧爲呷吃呐線於嗊唎平面上之射影。

四三九 一直線與其在平面上之射影所夾之銳角、卽爲直線與平面所成之角、曰此直線向平面之倚度。



如圖、嗩喞爲平面呷叱直線過之呷可爲其在嗩喞平面上之射影、是則叱呷可角爲呷叱線與嗩喞平面所成之角。



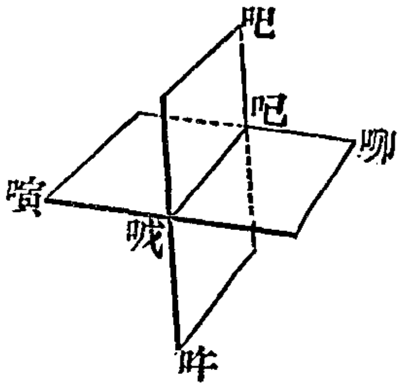
四四〇 凡記一點與一平面之距、卽言其間之垂線距也。

第一題

四四一 設兩平面、令之相交、則其交線爲何種線。

理題 兩平面之交線、必爲直線。

設嗩喞與吧咋爲相交之二平面。



求證 嗩喞與吧咋之交線爲直線。

證 設哦與吧爲嗩喞與吧咋相交之任二點、作哦吧直線。

夫既哦與吧爲嗩喞平面內之二點、準四二七節、連此二點之直線、必在嗩喞平面內。

又此二點亦爲吧咋平面內之二點、故連之之直線、亦必在

吧吽平面內。

是以　　　吱吧爲嚝啣與吧吽之公線。

又準四三〇節、祗有一平面可函一直線與其外一點、故吱吧之外、更無別點可爲嚝啣與吧吽公用之點。

∴　　吱吧爲嚝啣與吧吽之交線。　　四三六節

但原作　　吱吧爲直線、

是以嚝啣與吧吽之交線爲一直線。

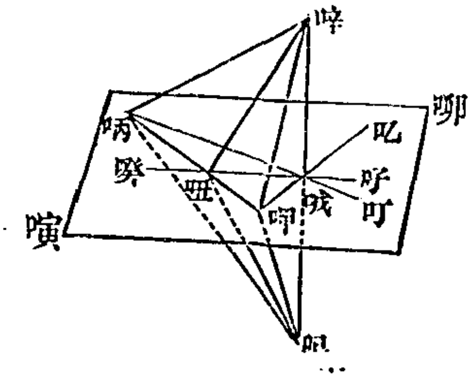
故題言云云。　　合題

第二題

於一平面內作相交二直線、如又一直線、在其交點各與此二線正交、則其向此平面之方位如何。

理題　一直線若於他兩直線之交點、各與其線正交、則必正交此二直線所在之平面。

設呷吃與呐叮二直線、相交於哦、嗔咖爲此二線所在之平面、啐哦線正交呷吃與呐叮於哦。



求證啐哦正交嗔咖平面、

證過嗔咖平面內之哦點、另作唉呼直線、又作呷呐交唉呼於咀。

引長啐哦過嗔咖至吧、使哦吧＝啐哦、復作啐呷、啐咀、啐呐、與吧呷、吧咀、吧呐等線。

於呷呐啐、呷呐吧兩三角形內、有呷呐爲公邊、

啐呷＝吧呷、啐呐＝吧呐、　一〇三節

∴呷呐啐△＝呷呐吧△、　一〇七節

而啐呷呐∠＝吧呷呐∠、

∴呷咀啐△＝呷咀吧△、　一〇〇節

而啐咀＝吧咀、

∴ 呭吰⊥啐吰、 一〇六節

是卽 啐吰⊥嗘吁。

是故啐吰與嗔吻面內過吰點之衆直線一一正交。

是以 啐吰正交嗔吻平面。 四三三節

故題言云云。 合題

四四三 系 一直線正交平面於其任一點、亦必與此平面內過此點之衆直線一一正交。

第三題

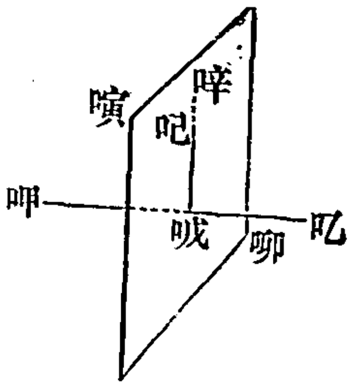
四四四 一●任於某直線上一定點作此直線之兩垂線、過此兩垂線作一平面、則平面向某線之方向如何於此點更可作某線之他垂線而不在此平面之內乎。

二●更可作他平面過此點而正交某線乎。

三●過直線外之一點作平面正交此線務盡其量其數當爲若干。

題 一直線內一點之衆垂線、俱在此點之垂面內。

設 呷叱直線、有嗔吻面正交之於吰、又有吰吧線正交之於吰。



求證 戍吧乃在嗊唽平面內。

證 設呷叱與戍吧之平面、交嗊唽平面於戍哢線。

是則　　呷叱丄戍哢。　　四四三節

夫準五一節、於呷叱與戍吧之平面內、祇可作一垂線正交呷叱於戍點、故戍吧與戍哢符合、而戍吧乃在嗊唽面內。

是故正交呷叱於戍點之諸線、俱在嗊唽面內。　　合題

四四五 **系一** 一直線內之一點、祇可作一垂面過之、更無其他。

四四六 **系二** 過直線外之一點、祇可作此直線之一垂面、而更無其他。

演習七三八● 某直線內某點上衆垂線之合位何在。

第四題

四四七 一● 作平面之一垂線、自其中一點、至平面內距其底等遠之諸點作諸斜線、則此諸斜線之長、相比何如。

二● 又自垂線內同點、至平面內距其底不等遠之諸點、作諸斜線、則此諸斜線之長、相比何如。

三● 自一點至平面作垂線、與斜線、則見何線最短。

理題自平面之垂線內一點、至平面作數斜線、則一若兩斜線遇平面之點、距垂線底等遠、卽彼此等。二若兩斜線遇平面之點、距垂線底不等、則遠者更長。

設呐叮爲嗔咖平面之垂線、呐哎、呐吧、呐咦、爲遇嗔咖面之諸斜線、其叮哎＝叮吧、而叮咦>叮哎。

求證一● 呐哎＝呐吧。

二● 呐咦>呐哎。

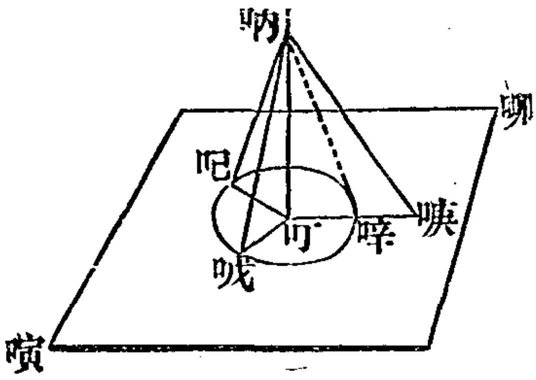
證一● 原設　呐叮⊥嗔咖、

∴　呐叮⊥叮哎、而呐叮⊥叮吧。　何故

於哎叮呐、吧叮呐兩正三角形內、有叮哎＝叮吧、

又有　呐叮爲公邊、

而　哎叮呐∠＝吧叮呐∠、　五二節



∴　𠯫叮㖁△＝𠯆叮㖁△、　一〇〇節

而　㖁𠯫＝㖁𠯆。

二●於叮㖁線上取叮𠯌＝叮𠯫、又作㖁𠯌。

則有　㖁𠯌＝㖁𠯫。　何故

是以　㖁叮∨㖁𠯌、或㖁𠯫。　一三二節

故題言云云。　合題

四四八　系一 自一點至一平面之諸線、以垂線爲最短。

四四九　系二 自垂線內一點至平面、如作等斜線、其遇平面之處距垂線底相等、如作不等斜線、則長者遇平面之處距垂線底較遠。

四五〇　系三 空間一點距圓周衆點等遠、其合位卽爲過圓心而與圓面正交之直線。

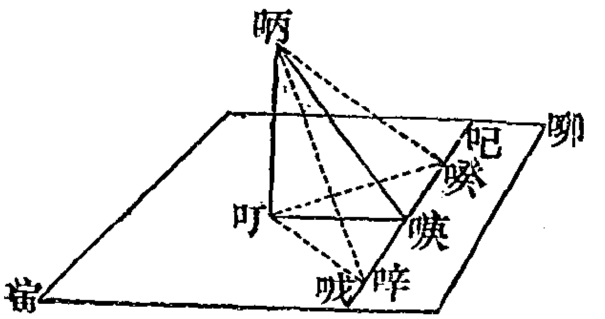
第五題

四五一　作一平面之垂線、自垂線底作直線、與平面內任一他直線成正角、次作線連二直線之交點、及垂線內任一點、則此線向他直線之方位何如。

理題 自平面之垂線底作線、與面內他直線正交、又自交點至面之垂線內任一點作直線、則此線必為面內線之垂線。

設 㕲叮為嗩咿平面之垂線、吱吧為嗩咿平面內之任一直線、叮咦正交吱吧、㕲咦為連㕲叮線內任一點與咦點之線。

求證 㕲咦正交吱吧而為其垂線。



證 自㕲與叮、至吱吧線內距咦等遠之啐唉二點、各作直線、

是則　啐叮＝唉叮、　一〇三節

∴　啐㕲＝唉㕲、　四四七節

是故　㕲咦⊥啐唉、　一〇六節

是即　㕲咦為吱吧之垂線也。

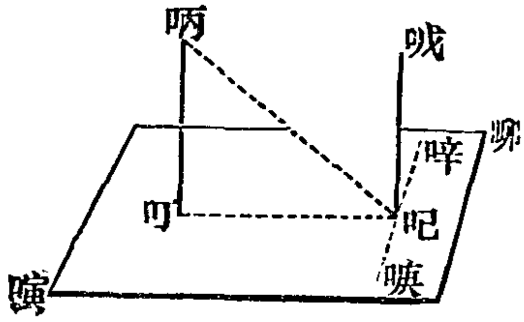
故題言云云。　合題

四五二　**系**　空間一點、距一直線兩端等遠、其合位乃此直線中點之垂面。

第六題

四五三　於平面內任二點作平面之兩垂線、則其互視之方位何如。

理題　兩直線各爲平面之垂線、即彼此平行。



設　啢叮與哦吧兩直線各爲嗊哵平面之垂線。

求證　啢叮與哦吧平行。

證　作啢吧、叮吧二線、次過吧點、作咦啐⊥叮吧。

是則　哦吧⊥咦啐、　四四三節

已作　叮吧⊥咦啐、

又有　啢吧⊥咦啐、　四五一節

∴　哦吧、叮吧、啢吧三線同在一平面內。　四四四節

是故　啢叮與哦吧同在一平面內。

惟 呐叮⊥叮吧、而哦吧⊥叮吧、 四四三節

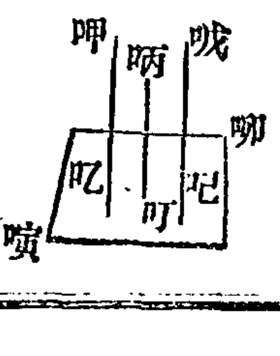
是故 呐叮與哦吧平行。 七一節

故題言云云。 合題

四五四 **系一** 兩平行線之一為一平面之垂線、則又一線亦必為其垂線。

四五五 **系二** 兩直線各與他平面內之第三直線平行、卽彼此平行。

演習七三九● 自某點至一平面之垂線長五寸、斜線長十三寸、則斜線底之合位卽圜徑、當長若干。



第七題

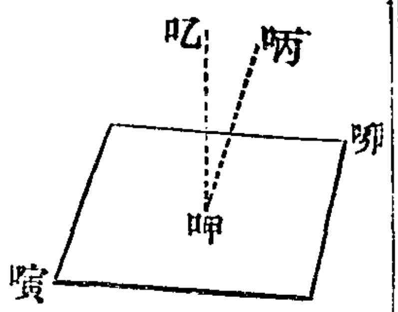
四五六 一● 於平面內一點任作若干垂線、問可作者究為若干。

二● 於平面之上或下擇取一點、自此點至平面任作若干垂線、問可作者究為若干。

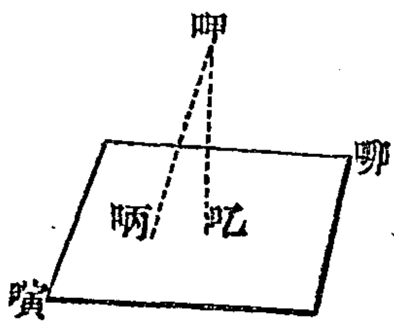
理題 自一點祇可作平面之一垂線。

設 嗔吔為平面、呷為任一點。

求證 自呷祇可作嗔吔之一垂線。



證第一端圖設點在平面之內。
作呷吃⊥嗔唧、自呷另作一線如呷呐。
如呷呐爲嗔唧之垂線、則呷吃與呷呐必與一切正交嗔唧之直線　四五三節
平行、　七〇節
然此爲必無之事。
∴呷呐非爲嗔唧之垂線。
是以自呷點祗可作嗔唧之一垂線。
第二端圖設點在平面之外。



作呷吃⊥嗔唧、自呷點至嗔唧又作別線如呷呐。
如呷呐爲嗔唧之垂線、則呷吃與呷呐乃與一切嗔唧之垂線平　四五三節
行。　七〇節
然此爲必無之事。
∴呷呐非爲嗔唧之垂線。

是以自呷點至嗔咿祗可作一垂線。　合題

第八題

一●設平行兩直線、其一在某平面內、則餘一線與此平面相視之方位何如。

二●設一直線與一平面平行、過此線作他平面、與前平面相交、則其交線與原線相視之方位何如。

三●設二平面相交、而一直線與其交線平行、則此直線各與二平面相視之方位何如。

四●設空間有二直線、過此線作平面、則此平面能否以此線如軸而旋至合宜之方位、與彼線平行。

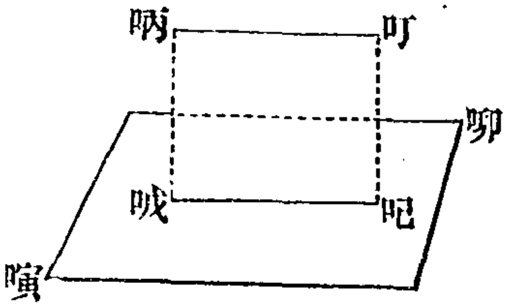
五●設空間二直線、與其外一點、另有一線過此點而與此線平行、又有一線亦過此點而與彼線平行、設後二線之平面相交於此點、則此平面與前二線相與之方位各為何如。

理題平面外一直線、與面內任一直線平行、卽與此平面平行。

設𠯈吧直線在嗔咿平面內、哂叮直線在嗔咿平面外、與𠯈吧平行。

求證哂叮與嗔咿平行。

證作𠯈叮平面、過哂叮與𠯈吧二線。



如呐叮不與嗔啣平行、則必遇嗔啣於吱叮與嗔啣之交線上、卽吱吧是也。

但原設 呐叮不能遇吱吧、

是以 呐叮不能遇嗔啣。

是卽 呐叮與嗔啣平行也。 合題

四五八 **系一** 一直線與一平面平行、其平面與過此直線任一平面之交線、必與原線平行。

四五九 **系二** 一直線與二平面之交線平行、則必與此二平面各爲平行。

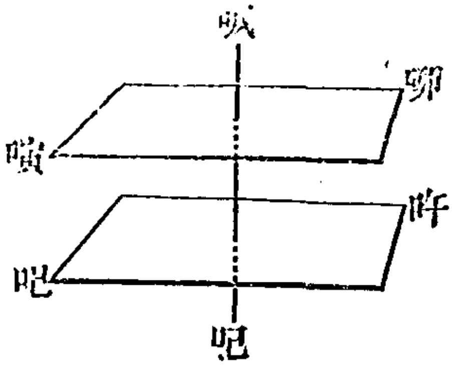
四六〇 **系三** 已知之直線可作一平面過之、而與空間之已知他直線平行、如此二直線不平行、則此等平面不能有二。

四六一 **系四** 已知一點可作一平面過之、與空間已知二直線平行、如此二直線不平行、則此等平面不能有二。

四六二 設二平面各與同一直線正交、則此二平面互視之方位何如。

第九題

理題 二平面同爲一直線之垂面、卽彼此平行。



設 嗔啷與吧咋二平面、各與吙吧正交、而爲其垂面。

求證 嗔啷與吧咋平行。

證 如嗔啷與吧咋不平行、則必相遇、是卽二平面同過一點而同爲吙吧之垂面也。

惟此爲必無之事。　四四六節

是以　嗔啷與吧咋不能相遇、

是卽　嗔啷與吧咋爲平行也。

故題言云云。　合題

演習七四〇　如一直線與一平面、同與他直線正交、卽彼此平行。

演習七四一　若一直線等於其在一平面內之射影、則直線與此平面平行。

演習七四二⑥若一直線與平面內之三直線成等角、則直線與平面正交。

演習七四三⑥若一平面平分一直線成二正角、則平面內任一點距直線之二端等遠。

四六三

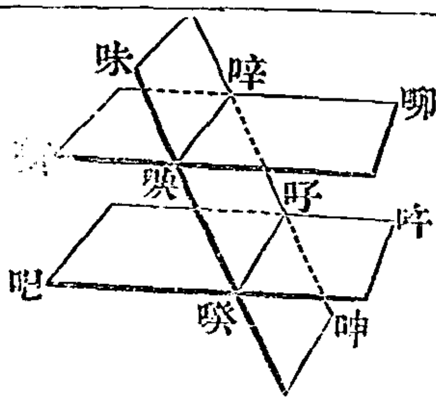
第十題

一⑥設平行二平面、各爲第三平面所割、則二交線引長、其相視之方位何如。

二⑥設二平行直線、限於二平行面之間、則二線之長、相比何如。

理題一 二平行面、各爲他平面所割、其兩交線必平行

設 嗊啣與吧咔兩平行面、各爲第三平面味呻所割、唊啐與唉呼爲其交線。



求證 唊啐與唉呼平行。

證 既設　嗊啣‖吧咔、　四三五節

則　嗊啣與吧咔不能相遇、

∴在嗊啣面內之唊啐、與吧咔面內之唉呼、亦必不能相遇。

惟　唊啐與唉呼同在味呻面內、

是以　唊啐與唉呼平行。

故題言云云。　合題

四六四 **系一** 平行面內所限之平行直線必相等。

四六五 **系二** 二平行面處處等距。

演習七四四 自已知平面外任一點至平面作垂線。

演習七四五 自已知平面內已知點作平面之垂線。

演習七四六 一直線與相交之二平面平行、則與其交線平行。

演習七四七 如二直線平行、任一平面過之、其二交線亦必平行。

演習七四八 如一平面過平行方形之一對角線、則自彼對角線二端至平面所作之二垂線必等。

第十一題

四六六 一 設一直線與二平行面之一正交、則其與又一平面相視之方位何如。

二 任作若干平面過一點而與已知平面平行、則可作者究爲若干。

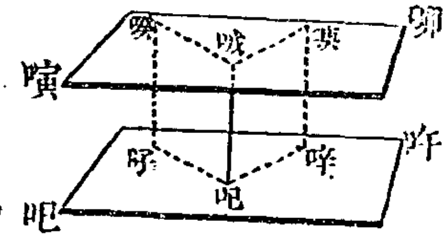
三 設二直線相交、各與已知之平面平行、則此二線之平面與已知平面相視之方位各爲何如。

理題 如一直線正交二平行面之一、則亦必正交其餘

一平面。

設嗔𠰉與吧吘兩平面平行、𠯈吧直線正交嗔𠰉、而爲其垂線。

求證𠯈吧正交吧吘而爲其垂線。



證過𠯈吧作𠯈啐與𠯈呼兩平面、交嗔𠰉面於𠯈哽與𠯈嗘、交吧吘面於吧啐與吧呼。

是則 𠯈哽∥吧啐、而𠯈嗘∥吧呼、 四六三節

且 𠯈吧⊥𠯈哽與𠯈嗘、 四四三節

∴ 𠯈吧⊥吧啐與吧呼。 何故

是故 𠯈吧正交吧吘而爲其垂線。 四四二節

故題言云云。 合題

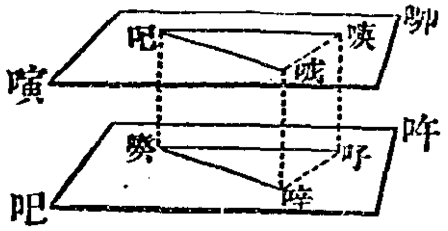
系一 過一點祇可作一平面與已知平面平行。 四六七

系二 如相交二直線各與已知平面平行、則此二線之平面亦與此平面平行。 四六八

第十二題

於平面內作一角、於他平面內又作一角、其二邊與前角之邊平行而同向外展、則二角之大小相比何如。引長此二平面、其相視之方位何如。

理題 不在一平面內之二角、如其邊兩兩平行而同向外展、則二角必等、而所在之二平面必平行。



設 吧與唉二角、在嗔唧與吧咋二平面內、吧角之吧哦、吧咦二邊、與唉角之唉啐、唉吁二邊、一一平行而同向外展。

求證 吧∠＝唉∠、而嗔唧∥吧咋。

證一 ⊛ 取吧哦＝唉啐、又吧咦＝唉吁、且作吧唉、哦啐、咦吁、哦咦、與啐吁諸線。

是則 吧哦啐唉與吧咦吁唉皆為平行方形、 一五〇節

哦啐＝吧唉＝咦吁、而哦啐∥吧唉∥咦吁、 何故

又 哦咦吁啐為平行方形、而哦咦＝啐吁。 何故

∴ 哦吧咦△＝啐唉吁△、 何故

是故

而　叱∠＝㗂∠。

二[illegible]夫　叱吙＝吧咋、而叱咦＝吧咋、

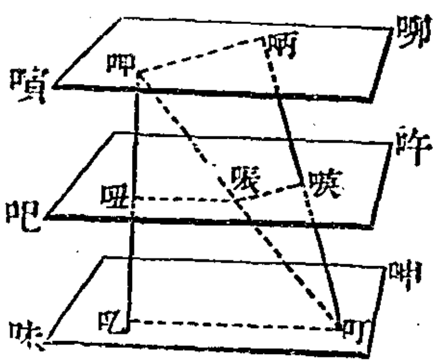
是以　嗩哪＝吧咋。

故題言云云。

四七〇　作二直線爲三平行面所截、如此線截成二段之比例如2：3、則彼線截成二段之比例如何。如此線截成二段任有何等比例、則彼線截成二段之比例、與之相比何如。

第十三題

理題 兩直線爲三平行面所截、其截成相當之諸段爲同理比例。



設 呷叱與㕵叮二線、爲嗩哪、吧咋、味呻三平行面截於呷、啞、叱、及㕵、咦、叮等點。

求證 呷啞：啞叱＝㕵咦：咦叮。

證 作呷叮交吧咋於唇、又作啞唇、唇咦、呷㕵、叱叮等線。

是則　呏唇=吃叮、而唇咦=呷哂、　四三〇、四六三節
∴　呷呏：呏吃=呷唇：唇叮、　二八九節
而　哂咦：咦叮=呷唇：唇叮、
是以　呷呏：呏吃=哂咦：咦叮。
故題言云云、　合題

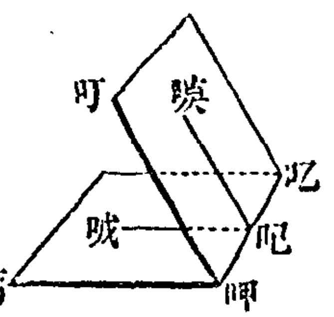
體角

四七一 兩平面相交、其所開之口曰體角。
二平面之交線曰體角之鋒、二平面曰體角之面。

四七二 體角命名之法、乃用四點之元字表之、二元字在其鋒、二元字各在其一面、鋒上二元字書於面上二元字之間。
如鋒上祇有一體角、則卽以鋒上二元字名此體角亦可。
如圖、哂—呷吃—叮爲體角、呷吃爲其鋒、吃哂與吃叮爲其二面。

四七三 體角二面內、至鋒上任一點、作鋒之二垂線、其所成之角、曰體角之平面角。

如圖、戊吅與唊吅二直線在叱啢與叱吖二面內、俱正交呷叱於吅點、成戊吅唊角、爲啢一呷叱一吖體角之平面角。



平面角成於鋒上任一點、其大小無異。（七一、四六九節）

體角之大小、與二面之展廣無涉、惟視二面方向之較而定之。

四七四 二體角適能符合、則爲相等。

四七五 體角亦有倚角、正角、銳角、鈍角、餘角、補角、交角之別、一視其平面角合於平面幾何學所定之界說而定之。

二體角同鋒、而其間有同面、則互爲倚角。體角爲正交二平面所成、則爲正角。此體角之二面、如爲彼體角之二面引長所成、則爲交角。

演習

四七六 一●設一平面遇又一平面、其所成兩倚角、與二正體角相比何如。

二●設相倚兩體角之和、等於兩正體角、則其兩外面之方向何如。

三●作相交二平面、其交體角之大小相比何如。

四●作一平面、與二平行面相交、則其內對體角之大小相比何如。

五●作一平面與二平面相交、如其內對體角等、則二平面相視之方向如何。

六●設二體角之相當面各平行、如其每對相當面自鋒同向外展、則二體角之大小相比何如。若自鋒背向外展、則二體角之大小相比何如。

試察體角能有面平行而仍不相等者否。

七●作二體角、令其相當之面各正交、如二體角同爲銳、或同爲鈍、其大小相比何如。

試察體角能有面正交而仍不相等者否。

第十四題

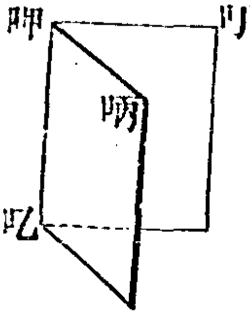
理題 如二體角之平面角相等、則二體角必等。

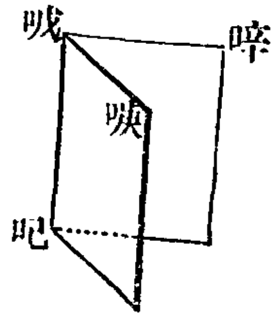
設二體角之平面角爲相等、則二體角之大小相比何如。

設 二體角如呷吃與吺吧、其平面角哂呷叮與咦吺啐相等。

求證 體角呷吃∠＝體角吺吧∠。

證 試以體角呷吃∠置於體角吺吧∠之上、令平面角哂呷叮∠與其相等之平面角咦吺啐∠符合。





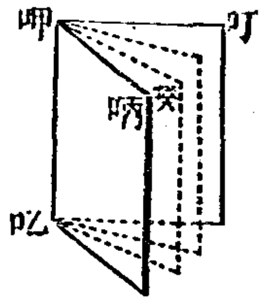
是則　呷點與哦點符合、
而　哂呷叮平面與咦哦啐平面符合、　四三〇節
∴哂呷叮面之垂線呷叱、與咦哦啐面之垂線哦吧符合。四五六節
是則旣有呷叱與哦吧符合、而呷哂與哦咦符合、
故　叱哂平面與吧咦平面符合。　四三〇節
仿此可證　叱叮平面與吧啐平面符合。
是以　呷叱體角＝哦吧體角。　四七四節
故題言云云。　合題

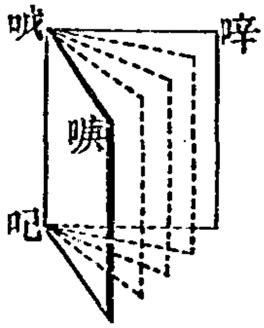
演習七四九●兩平面相交、其交體角必互等。
演習七五〇●二平行面爲一平面所截、其內對體角必等。
演習七五一●呷叱哂直線穿過三平行面於呷、叱、哂三點、又叮哦吧直線穿過此三平行面於叮、哦、吧三點、如呷叱爲六寸、叱哂八寸、叮吧十二寸、則叮哦與哦吧之長若干。

第十五題

設二體角之平面角相比如3：4、或任設一比例亦可、則此二體角之比例如何。

理題 體角相比、如其平面角相比。





設 吶—呷吃—叮與咦—哦吧—啐為兩體角、吶呷叮與咦哦啐各為其平面角。

求證 吶—呷吃—叮：咦—哦吧—啐＝吶呷叮∠：咦哦啐∠。

證 設吶呷叮與咦哦啐兩角同以吶呷喹∠為準箇、吶呷叮函之三次、咦哦啐函之四次。

是則　吶呷叮∠：咦哦啐∠＝3：4。

將吶呷叮與咦哦啐二平面角分為諸分、各等於吶呷喹∠、過其分線、及呷吃與哦吧二鋒、作諸平面。

準四七七節、此諸面分吶—呷吃—叮體角為三等分、咦—哦吧—啐體角為四等分、

∴　吶—呷吃—叮：咦—哦吧—啐＝3：4。

是故　吶—呷吃—叮：咦—哦吧—啐＝吶呷叮∠：咦哦啐∠。

如二體角無有公箇、則可仿二三三節求限之法證之、所得亦同。故題言云云。

合題

四七九 系由此可見平面角可作爲體角之度。

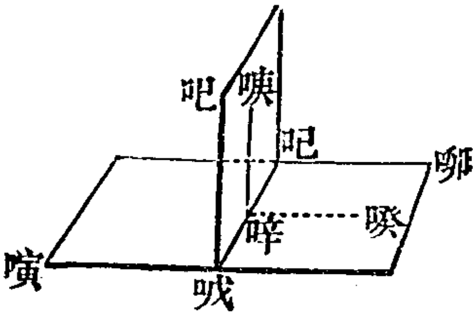
演習七五二●如相倚二體角之和、等於兩正體角、則其兩外面乃同一平面。

第十六題

理題兩平面互相正交、若於此面內作其交線之垂線、亦必爲彼面之垂線。

四八〇 一●設二平面互相正交、於此面上作直線爲交線之垂線、則此線向彼面之方位何如。

二●設二平面互相正交、一直線於交線上任一點與此面正交、則其向彼面之方位何如。



設嗔唧與吧吧兩平面正交而互爲垂面、吷吧爲其交線、咦哼線在吧吧面內正交吷吧交線、而爲其垂線。

求證咦哼正交嗔唧面而爲其垂線。

證於嗔唧面內作哼唉⊥吷吧、

四八一

是則咦啐唊乙、爲吧丨㖂吧丨㘝正體角之平面角、　四七三節

∴　咦啐唊爲正角。　四七五節

原設　咦啐㖂爲正角、

是以　咦啐⊥啐唊與㖂吧於交線上之一點、

而　咦啐乃正交嗊㘝。　四四二節

故題言云云。　合題

系如兩平面互相正交於其交線上任一點作此面之垂線、此垂線必在彼面內。

四八二

演習七五三●試求距二平行面等遠諸點之合位。

演習七五四●平行線穿過同平面與之成等角。

演習七五五●兩平面相交則一平面旁相倚兩體角之和、必等於兩正體角。

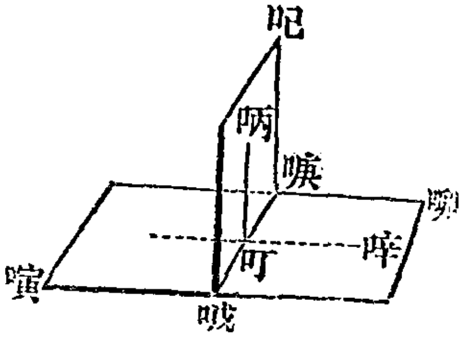
演習七五六●一平面截二平行面、則截面一旁之二內體角互爲補角。

第十七題

一●設一直線與一平面正交、爲其垂線、則凡過此垂線之衆平面、與原平面相視之方位何如。

二㊀設一平面正交一體角之稜、爲其垂面、則此平面與體角二面相視之方位各爲何如。

理題凡直線爲平面之垂線、則過垂線之諸面、俱爲平面之垂面。



設呐叮直線正交嗔咿平面、而爲其垂線、又有哎吧平面過此呐叮垂線。

求證哎吧正交嗔咿面、而爲其垂面。

證於嗔咿面內作叮啐⊥哎哽、即哎吧與嗔咿二面之交線。

則有　呐叮⊥哎哽、　四四三節

故　呐叮啐∠爲吧—哎哽—咿體角之平面角　四七三節

惟　呐叮啐爲正角、　四四三節

是以　吧—哎哽—咿爲正體角、

是即　哎吧正交嗔咿面而爲其垂面也。

故題言云云。

系 凡平面正交體角之鋒則、亦必與其面正交。

演習七五七●試求空間距二已知點等遠諸點之合位。

演習七五八●試求距已知平面有定距諸點之合位。

演習七五九●一直線與其在平面內之射影、可定此平面之一垂面。

演習七六〇●一直線與此平面平行、而爲彼平面之垂線、則彼此二面正交而互爲垂面。

演習七六一●自呷吃呐三角形之呷點、至吃呐邊作呷叱垂線、取此線上任一點叮、作叮吙爲呷吃呐面之垂線、又作哽啐過吙點而與吃呐平行、則呷吙必與哽啐正交。

第十八題

一●設相交二平面、各與第三平面正交、則其交線向第三平面之方位何如。

二●第三平面向餘二平面交線之方位何如。

三●設二平面互相正交、又一平面與此二平面一一正交、則其中任二平面之交線、向餘一平面之方位何如。

任一交線、向餘二交線之方位何如。

理題 相交之二平面、俱正交他平面、則二平面之交線、

亦必正交他平面。

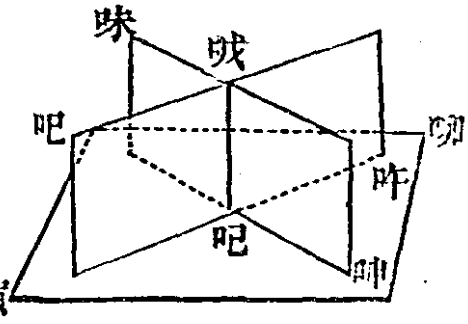
設吧咔與味呻兩平面、相交於戓吧、且俱正交他平面嗔唦。

求證戓吧亦正交嗔唦面而爲其垂線。

證於三平面之公點吧、作嗔唦之一垂線。

準四八一節、此垂線亦在吧咔與味呻二平面內、是以必與其交線戓吧符合。

是卽　戓吧正交嗔唦面而爲其垂線矣。



故題言云云。　合題

四八五　系一 凡與相交二平面正交之平面、亦必正交此二平面之交線。

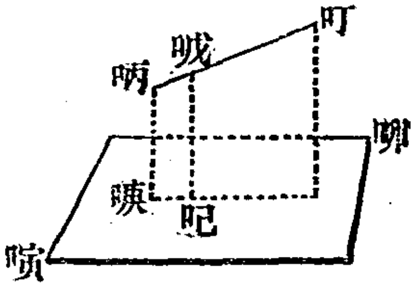
四八六　系二 一平面與正交之二平面俱正交、則其中任二平面之交線、必與餘一平面正交、且三交線之一、各與餘二交線正交。

演習七六二 自體角內一點作二面之垂線、其所成之角、等於本體角一面引長所成體角之平面角。

第十九題

設一直線斜向一平面、則有若干平面可過此線、而正交此平面。

理題 過不正交平面之一直線、祇可作一平面與原平面正交。



設 嗔喞爲平面、呐叮爲不正交嗔喞之一直線。

求 過呐叮祇可作一平面與嗔喞正交。

證 自呐叮之任一點哦、作哦叱⊥嗔喞。

過呐叮與哦叱作咦叮平面、與嗔喞相交。

是則　咦叮正交嗔喞。　四八二節

如有他平面正交嗔喞而亦過呐叮、

則　呐叮必正交嗔喞矣。　四八四節

但原設　呐叮不正交嗔喞、

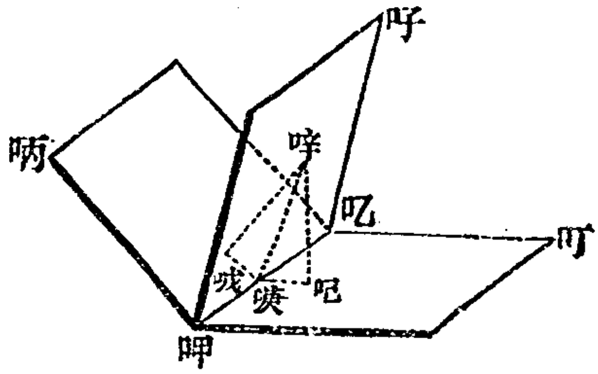
是以過呐叮祇可有一平面正交嗔喞。

故題言云云。　合題

第二十題

四八八 設相交二平面成一體角、又有他平面平分此角、於此平面內任取一點、其距二面之長相比何如。

理題 平面平分一體角、其內各點、距體角之二面等遠。



設 呥—呷叱—叮體角、為呷呼平面所平分、啐為呷呼面內任一點。

求證 啐距呥叱與呷叮二面等遠。

證 自啐作呥叱與呷叮二平面之垂線啐哦與啐吧、過此二線作一平面交呥叱、呷叮、呷呼三平面於哦咦、吧咦、啐咦三線。

是則　哦咦吧啐平面⊥呥叱與呷叮、　四八二節

∴　哦咦吧啐⊥呷叱。　四八五節

是故　哦咦、吧咦、啐咦、皆正交呷叱、　四四三節

原設　呥—呷叱—呼＝叮—呷叱—呼、

是以　哦咦啐∠＝吧咦啐∠。　四七九節

於呅咦啐、叱咦啐兩三角形內、咦啐爲公邊、

而　呅咦啐∠＝叱咦啐∠、

∴　呅咦啐△＝叱咦啐△、　何故

而　啐呅＝啐叱、

是即　啐距哂叱與呷叮二面等遠也。　四四〇節

故題言云云。　合題

四八九

第二十一題

設一直線斜交已知平面、成射影於面上、則線與影所成之銳角、及其線與面內他直線所成者相比何如。

理題 一直線與在平面內之射影所成之銳角、爲其線與平面內諸線所成之最小角。

設 哂叮直線遇嗔咿平面於哂、哂呅爲哂叮線於嗔咿面內之射影、哂叱爲嗔咿面內過哂之一直線。

求證 叮呐哎∠小於叮呐吧∠、

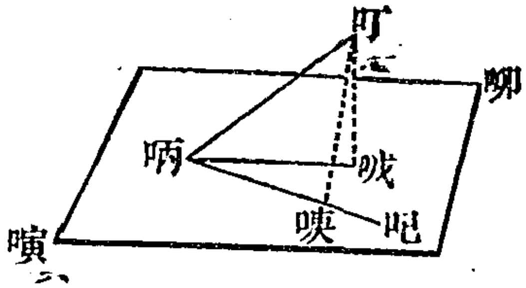
證 取呐咦＝呐哎、作叮咦與叮哎二線。

於呐哎叮與呐咦叮兩三角形內、有呐叮爲公邊、

又有 呐哎＝呐咦、而哎叮<咦叮、

是以 叮呐哎∠小於叮呐吧∠。

何故 一三〇節



故題言云云。 合題

第二十二題

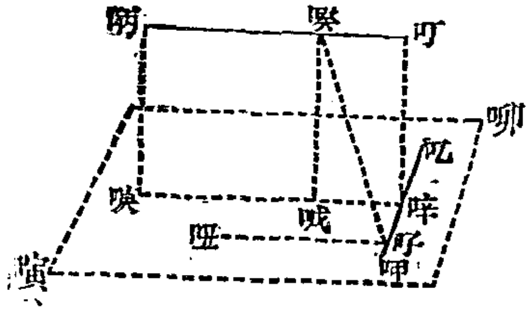
四九〇 設二直線不在一平面內、且作其公垂線、則可作者果爲若干。

理題 不在一平面內之二直線間、祇可作一公垂線。

設 呷吃與呐叮爲不在一平面內之二直線。

求證 呷吃與呐叮之公垂線、可作者祇一條。

證一 ⊗ 過呷吃線中任一點呼、作呾呼∥呐叮、命嗔咿爲呾呼與呷吃之平面、過呐叮



作咦叮平面、與嗊咧正交於咦啐、且交呷吃於啐。

是則　吶叮∥嗊咧、　四五七節

咦啐∥吶叮。　四五八節

於咦叮平面內、作啐叮⊥咦啐。

是則　啐叮⊥吶叮、　何也

而　啐叮⊥嗊咧、　四八〇節

∴　啐叮⊥呷吃。　四四三節

二●今設有別線如嗾呼正交呷吃與吶叮。

於嗊咧面內作呼咂∥吶叮、於咦叮面內作嗾哦⊥咦啐。

是則　嗾呼⊥呼咂、　七二節

是以　嗾呼⊥嗊咧。　四四二節

但　嗾哦⊥嗊咧、　四八〇節

是自嗾至嗊咧面有二垂線矣、於理不合。　四五六節

是以唉呼線非與呷吃、吶叮二線正交、祗有啐叮爲此二線之公垂線。

故題言云云。

合題

演習七六三●二直線不在一平面內、其間最短之距、即其公垂線。

棱角

四九一　多於二之平面、相遇於一點所成之角、曰棱角。

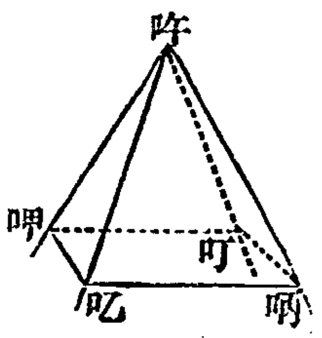
諸面相遇之點曰尖、二面相連之交線曰鋒、鋒間所限之平面曰面、鋒所成之角曰棱角之面角、

如圖、吽—呷吃吶叮爲棱角、吽爲尖、吽呷吃、吽吃吶等爲面、吽呷、吽吃等爲鋒、呷吽吃、吃吽吶等爲面角。

四九二　棱角之諸面展長、原爲無限、今因求便捷、故設一平面、截而限之、此平面曰底。

圖中呷吃吶叮爲吽—呷吃吶叮棱角之底。

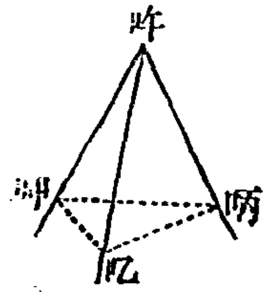
四九三　棱角之底爲有法凸多邊形者、曰凸棱角。

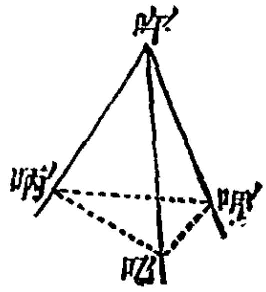


四九四　棱角之面角、體角、一一相等而次序相順者則互相等因可互相符合也。棱角之面角、體角、一一相等而次序相逆者則爲等勢而不必果相等。

如圖、吘—呷𠮙㖼、與吘′—呷′𠮙′㖼′二棱角、其呷吘𠮙、𠮙吘㖼、㖼吘呷諸面角、與呷′吘′𠮙′、𠮙′吘′㖼′、㖼′吘′呷′諸面角、一一相等、又吘呷、吘𠮙、吘㖼諸體角、與吘′呷′、吘′𠮙′、吘′㖼′諸棱角、一一相等、故爲等勢。

等勢之二棱角、大率不能互相符合。





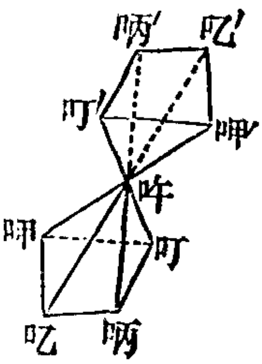
四九五　如二棱角同尖、此棱角之鋒、爲彼棱角之鋒引長過公尖所成、則爲交棱角。

四九六　有三面之棱角曰三棱角、有四面之棱角曰四棱角、餘倣此。

第二十三題

四九七　設有交棱角一對、則此棱角之面角、與彼棱角之面角相比何如。體角相比何如。此二棱角之次序順逆如何。此對棱角當歸何種。

理題 交棱角必爲等勢。



設 吘—呷吃㖪叮與吘—呷'吃'㖪'叮'爲二交棱角。

求證 吘—呷吃㖪叮與吘—呷'吃'㖪'叮'爲等勢。

證 夫　呷吘吃面角＝呷'吘'吃'面角、　五九節

而　吃吘㖪等諸面角與吃'吘'㖪'等諸面角一一相等。

故　吘呷體角＝吘'呷'體角、　四七三、四七七節

而　吘吃等諸體角與吘'吃'等諸體角一一相等。

但吘—呷吃㖪叮之諸面角與體角之次序、與吘—呷'吃'㖪'叮'之相等諸面角與體角相逆。

是以　吘—呷吃㖪叮與吘—呷'吃'㖪'叮'爲等勢。　四九四節

故題言云云。　合題

演習七六四● 一平面祇可正交棱角之一鋒與二面。

演習七六五● 體角內距二面等遠之諸點、均在平分此體角之平面內。

演習七六六● 等腰三角形之二腰、向過其底之平面倚度相等。

四九八 作一三棱角、則其二面角之和、與餘一面角相比何如。

第二十四題

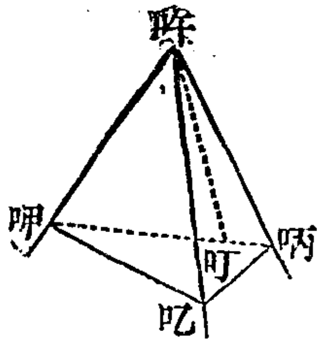
理題 三棱角任二面角之和、大於第三面角。

若第三面角、與餘二面角一一相比而不較大、則本題可不必證、其理已明。

設 吘—呷吃呐為三棱角、呷吘呐為其一面角、較餘二面角之一為大。

求證 呷吘吃∠+吃吘呐∠大於呷吘呐∠。

證 於呷吘呐面內作吘叮、使呷吘叮∠=呷吘吃∠、次過吘叮之任一點叮、在呷吘呐面內作呷叮呐、次取吘吃=吘叮、末過呷呐線與吃點作一平面。



是則　呷吘吃△=呷吘叮△、而呷吃=呷叮。　何故

於呷吃呐△內、　呷吃+吃呐>呷叮+叮呐、　何故

四九九

但　呷叱＝呷叮、　自理五

∴　叱㖶＞叮㖶。

於叱吘㖶及叮吘㖶兩三角形內、　吘叱＝吘叮、

吘㖶爲公邊、而叱㖶＞叮㖶、

∴　叱吘㖶∠大於叮吘㖶∠。　何故

已作　呷吘叱∠＝呷吘叮∠、

∴　呷吘叱∠＋叱吘㖶∠大於呷吘叮∠＋叮吘㖶∠、　自理四

卽　呷吘叱∠＋叱吘㖶∠大於呷吘㖶∠。

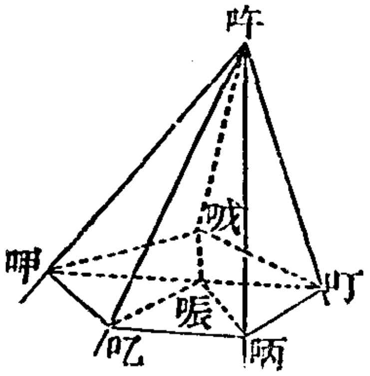
故題言云云。　合題

第二十五題

作一凸棱角、又於平面上取一點、繞其圍遞作諸角、其數等於棱角之面角、則此諸角之和、與四正角相比何如。

理題凡凸棱角諸面角之和、小於四正角。

證吘爲凸棱角。



求證 吘角之諸面角之和小於四正角。

證 作一平面、交吘角之鋒於呷、𠮠、𠰳、叮、哦、諸點。

是則　呷𠮠𠰳叮哦為凸多邊形。

自形內唇點、作唇呷、唇𠮠、唇𠰳、唇叮、唇哦等線。

以吘為公尖之三角形、其數等於以唇為公尖之三角形。

是故以吘為公尖之三角形諸角之和、等於以唇為公尖之三角形諸角之和。

但在呷、𠮠、𠰳、…三棱角內、有

吘𠮠呷∠+吘𠮠𠰳∠大於呷𠮠𠰳∠、即呷𠮠唇∠+𠰳𠮠唇∠、

又　吘𠰳𠮠∠+吘𠰳叮∠大於𠮠𠰳叮∠、即𠮠𠰳唇∠+叮𠰳唇∠。　四九八節

仿此推論諸三角形之其餘諸底角、即可見凡以吘為公尖之諸三角形底角之和、大於以唇為公尖諸三角形底角之和矣。

是以在吘諸面角之和、小於在唇諸角之和。　何故

但在唇諸角之和等於四正角。

是故在吘諸面角之和小於四正角。

故題言云云。 合題

第二十六題

設有兩三棱角、此角之三面角、等於彼角之三面角、則此兩三棱角相比何如。如是之兩三棱角有不相等者乎、並可稱以何名。

理題 兩三棱角之三面角、如一一相等、則此兩三棱角必相等、或等勢。

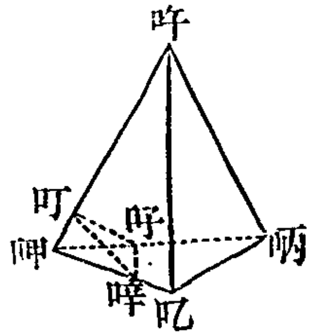
設 吘與吘′爲兩三棱角、其呷吘吃、吃吘吶、呷吘吶諸面角、與呷′吘′吃′、吃′吘′吶′、呷′吘′吶′、一一相等。

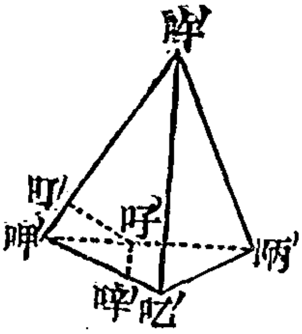
求證 吘與吘′必相等或等勢。

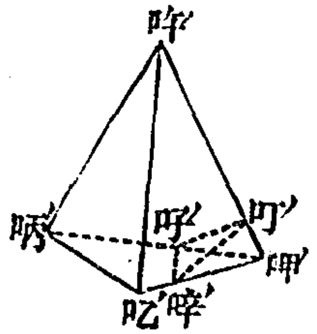
證 於吘及吘′之鋒上、取吘呷、吘吃、吘吶、吘′呷′、吘′吃′、吘′吶′諸等距、

且作呷吃、吃吶、呷吶、呷′吃′、吃′吶′、呷′吶′諸線。

是則吘呷吃、吘吃吶、吘呷吶諸三角形、與吘′呷′吃′、吘′吃′吶′、吘′呷′







呐'諸三角形一一相等。　何故

是以　呷吃呐△=呷'吃'呐'△、而吃呷呐∠=吃'呷'呐'∠。　何故

於吘呷鋒上取呷叮、於吘'呷'鋒上取呷'叮'=呷叮。於叮及叮'、作吘呷及吘'呷'體角之平面角啐叮吇及啐'叮'吇'、則其二邊遇呷吃、呷呐、呷'吃'、呷'呐'於啐、吇、啐'、吇'四點、次作啐吇與啐'吇'、如吘呷吃、吘呷呐等乃銳角、而吘呷吃等爲等腰三角形。

是則既作　呷叮=呷'叮'、

而　叮呷啐∠=叮'呷'啐'∠、　何故

∴呷叮啐正三角形=呷'叮'啐'正三角形、而呷啐=呷'啐'、　何故

仿此可證　呷吇=呷'吇'、

且既　吃呷呐∠=吃'呷'呐'∠、

∴　呷啐吇△=呷'啐'吇'△、而啐吇=啐'吇'、

但　叮啐=叮'啐'、而叮吇=叮'吇'、

∴　啐叮呼△＝啐′叮′呼′△′、而啐叮呼∠＝啐′叮′呼′∠。

是故　吘呷體角＝吘′呷′體角。

倣此可證吘𠮃與吘′𠮃′、吘吶與吘′吶′諸體角一一相等。

四七七節　是以準四九四節、若諸等角之次序相順、如圖中首二形、則此兩三棱角相等、若諸等角之次序相逆、如圖中第一與第三形、則此兩三棱角爲等勢。

故題言云云。

合題　若如此三棱角之三面角與彼三棱角之三面角一一相等、則此棱角之諸體角必與彼棱角之諸體角一一相等。

習題

演習七六七●如一直線與一平面平行、則凡與此直線正交之平面、亦必與此平面正交。

演習七六八●一直線交二平行面、與之成等角。

演習七六九●一直線與二平面平行、則過此直線之他平面、與二平面所成之交線亦必平行。

演習七七〇●平行二直線於任何面上之射影、亦必平行、或相符合。

演習七七一●已知三點不在一直線內、求距之等遠諸點之合位。

演習七七二●自呷丨叱哂丨叮體角內任一點、作戉叱與呷哂面正交、戉咦與叱叮面正交、次作咦哖正交呷哂於哖、試證叱哖正交叱哂。

演習七七三●空間二直線、其間有公垂線、作平面過公垂線之中點、而與此二直線平行、則必平分自此線任一點至彼線任一點之直線。

演習七七四●如諸平面之交線平行、則自任一點至此諸交線之垂線、必在一平面內。

演習七七五●三棱角之兩面角相等、則對此兩面角之體角亦必相等。

演習七七六●三棱角有兩體角相等、則可使之與等勢之三棱角符合。

演習七七七●三棱角內、平分三體角之三平面、必相交於一直線。

演習七七八●如三棱角內、平分三面角之三平面各與面正交、則必相交於一直線。

幾何學卷八　立體部

棱體

五〇二 體以平面爲界者曰棱體。

棱體界平面之交線曰鋒、鋒之交點曰尖、以鋒爲界之平面曰面。

連棱體不同面內二尖之直線曰棱體之對角線。

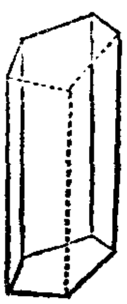
五〇三 棱體有四面者曰四面棱體、其餘六面、八面、十二面、二十面、均仿此定名。

五〇四 如平面割一棱體、其横割面爲有法凸多邊形、則此體曰凸棱體。

本書所論者、祇凸棱體而已。

棱柱體

五〇五 棱體之上下兩面爲平行而相等之多邊形、旁面各爲平行方形、則曰棱柱體。



棱柱體之平行相等二面、爲其二底、餘面曰旁面、旁面旁面之交線曰旁鋒、旁面之和曰凸

面、旁面積之和曰棱柱體之旁面積。

棱柱體之旁鋒平行而相等。

連棱柱體二底之垂線爲其高。

五〇六　棱柱體之底有三角形、正方形、六邊形、各種之不同、故有三角棱柱體、四方棱柱體、六角棱柱體等各種名目。

五〇七　棱柱體之旁鋒與底正交者、曰正棱柱體。

五〇八　棱柱體之旁鋒不與底正交者、曰斜棱柱體。

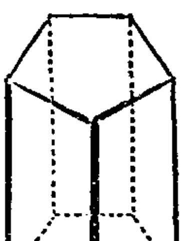
五〇九　正棱柱體之底爲有法多邊形者、曰有法棱柱體。

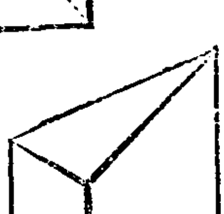
五一〇　平面正交旁鋒而截成棱柱體之面、曰正截面。

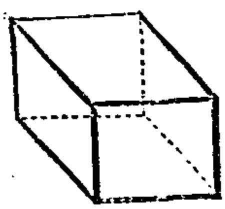
五一一　棱柱體爲斜倚其一底之平面所截、則在此底與截面所夾之一段、曰棱截體。

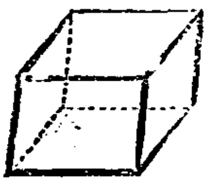
五一二　棱柱體之二底各爲平行方形、曰平行棱體

五一三　平行棱體之旁鋒與底正交者、曰正平行棱體。









五一四　平行稜體之六面俱爲矩形者、曰矩稜體。

五一五　平行稜體之六面俱爲正方者、曰正方體。

五一六　一體之界平面所限之空間曰體積。

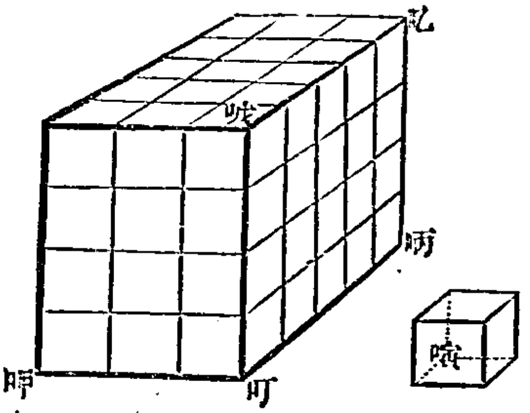
度體之法、乃先定一體爲準箇、然後推求其餘各體容此準箇之倍數。

度體之準箇爲立方寸、立方尺、立方步、立方糎、立方粉等。

設正方體嗔爲度體之準箇、呷吃爲欲度之矩稜體。

以嗔之鋒量呷吃之各鋒、過各分點作諸平面與諸鋒正交、即將呷吃分成若干小正方體、各與準箇嗔相等。

是則易見小正方體之層數、適等於呷吃之高含嗔體鋒之倍數、且每層所有小正方體之行數、適等於呷吃之廣含嗔鋒之倍數、又每行所有之小正方體數、適等於呷吃之長含嗔鋒之倍數、故將呷吃體之長廣高三數相乘、即得其含嗔之倍數。



圖中叮哎含嗔鋒四倍、叮呷含三倍、叮哂含五倍、故每行之中有五小正方體、每層之

中有三行、矩體之中分四層、是即呷叱容嗊5×3×4倍、即六十倍也、亦卽此矩棱體容立方準箇六十倍也。

故如嗊之鋒爲度矩棱體長廣高之公用準箇、則此三數之合、即表本矩棱體所容正方體之倍數、亦即此矩棱體之數量也。

五一七 幾何學中因求簡便、故恆不言一體長廣高三數量之合、而祗言此三者之合、雖所言如不合理、然用以指明矩棱體之體積、誠爲便捷、故按幾何學之理想以爲三線之合、乃以此三線爲鋒之矩棱體也。

如叮哂×叮呷×叮吷、原指三數量之合數、然按幾何學之法視之、則謂其指一以叮哂、叮呷、叮吷三線爲鋒之矩棱體也。

仿此可悟一直線之立方、按幾何學之法視之、乃指以此線爲鋒所成之正方體也。反之、在一直線上所成之正方體、可以直線之立方表之。

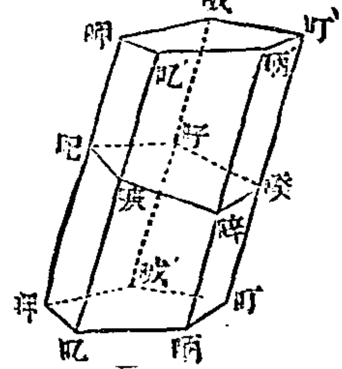
第一題

五一八 體之形狀相同者、曰相似體、體積相同者、曰等積體、形狀與體積均相同者、曰等體。

一●作一棱柱體、（讀論體諸卷時、宜目覩實物、以得正當之概念、用木製或玻璃製之各種體均可、但使學生取軟粘之物、如油灰、粘土等、用利刃削成各種體式尤佳）。夫其各面均為平行方形、則各面與等底等高之矩形相比何如。取旁鋒為各形之底、則其諸高之和與正截面之周界相比何如。夫旁鋒原皆相等、故棱柱體之旁面、與旁鋒偕正截面周界所成之矩形相比何如。

二●正棱柱體之旁面、與何種矩形等積。

理題 棱柱體之旁面、與其旁鋒偕正截面周界所成之矩形等積。



一

設 呷叮′為棱柱體、呷呷′為其旁鋒之一、吧咦啐啖呼為任一正截面。

求證 呷叮′ ≎ 呷呷′（吧咦＋咦啐＋…）矩形。

證 夫呷吃′、吃呐′、呐叮′等皆為平行方形。　五〇五節

原設　吧咦啐啖呼為正截面、

吧咦 ⊥ 呷呷′、咦啐 ⊥ 吃吃′、啐啖 ⊥ 呐呐′、餘仿此。　四四三節

夫　呷叮′之旁面≎呷叱′＋叱呐′＋…、
但　呷叱′≎呷呷′·吧吺矩形、
　　叱呐′≎叱叱′·吺哱矩形、餘仿此。　三三一節
∴　呷叱′＋叱呐′＋…≎呷呷′·吧吺矩形＋叱叱′·吺哱矩形＋…、
即　呷叮′之旁面≎呷呷′·吧吺矩形＋叱叱′·吺哱矩形＋…。
惟　呷呷′＝叱叱′＝呐呐′＝…、　五〇五節
是以　呷叮′之旁面≎呷呷′·(吧吺＋吺哱＋…)矩形。　合題

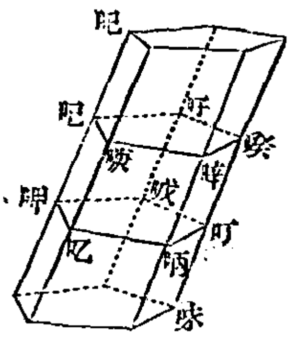
五二〇　證正棱柱體之旁面與其高偕底周界之矩形等積。
數學術語●學者可自編之。　三三九節

第二題

五二一　一●作一棱柱體、以平行面截之、則所成之諸截面爲何形、相比何如。
二●棱柱體與底平行之截面、與底相比何如。
三●同一棱柱體內、諸正截面相比何如。

五二二、五二三

理題 平行面截棱柱體、所成之諸截面、乃相等之多邊形。



設 吧味棱柱體、爲呷叮與吧㗋二平行面所截、成呷吃呐叮哦與吧咦啐㗋吁二截面。

求證 呷吃呐叮哦＝吧咦啐㗋吁。

證 夫 呷吃∥吧咦、吃呐∥咦啐、餘倣此。 四六三節

∴ 呷吃呐∠＝吧咦啐∠、吃呐叮∠＝咦啐㗋∠、餘倣此。 四六九節

又 呷吃＝吧咦、吃呐＝咦啐、餘倣此。 一五一節

是則呷吃呐叮哦、與吧咦啐㗋吁二形、等角而又等邊、以此加諸彼、必能適相符合。

是以準三六節、 呷吃呐叮哦＝吧咦啐㗋吁。 合題

系一 凡棱柱體內與底平行之截面必與底等。

系二 一棱柱體內之諸正截面俱相等。

第三題

五三四

一●作二棱柱體、使此體內含一三棱角之三面、與彼體內含一三棱角相當之三面相等、其於棱柱體內之位置亦相同、則二棱柱體相比何如。

二●作二棱截體、使此體內含一三棱角之三面、與彼體內含一三棱角相當之三面相等、其於棱截體內之位置亦相同、則此二棱截體相比何如。

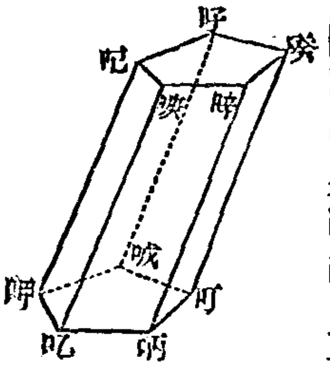
三●作等底等高之正棱柱體二、則其相比何如。

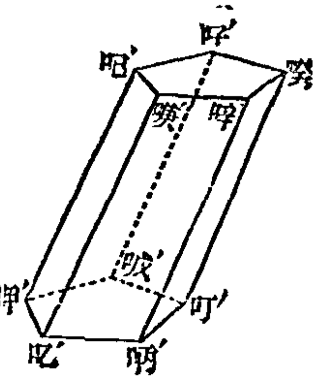
理題 二棱柱體、若成相當三棱角之三面、兩兩相等而同方、則二棱柱體必等。

設 呷嗘與呷'嗘'二棱柱體、其呷唊、呷叮、呷呼三面、與呷'唊'、呷'叮'、呷'呼'三面、兩兩相等而同方。

求證 呷嗘＝呷'嗘'。

證 原設吃呷吷、吃呷吧、吷呷吧三面角、與吃'呷'吷'、吃'呷'吧'、吷'呷'吧'三面角、兩兩相等。





∴　呷一吃吺吧三棱角＝呷'一吃'吺'吧'三棱角。　五〇〇節

以棱柱體呷'吺'加諸呷吺上、則三棱角呷'∠之諸面、必與其相等三棱角呷∠之諸面符合。

是則呐'、叮'二點、正落於呐叮二點之上、而呐'哰'、叮'吺'二線、與呐哰、叮吺二線同向、　五〇五節

既吧'、吷'、吁'三點、各與吧、吷、吁三點符合、則上底之二平面必相符合。　四三〇節

是則　哰'與哰、吺'與吺、俱相符合。

是以呷吺與呷'吺'二棱柱體處處符合、

即　呷吺＝呷'吺'。

合題

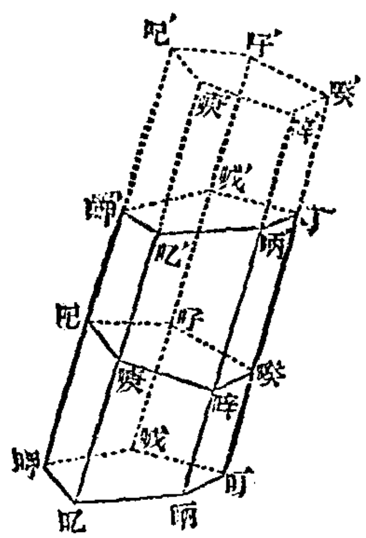
五二五　系一　二棱截體若成相當三棱角之三面兩相等而同方則必相等。

五二六　系二　二正棱柱體等底等高則必相等。

第四題

五二七　作一斜棱柱體、取其正截面爲底、作一正棱柱體、高與斜棱柱體之旁鋒等、則此二體之積相比如何。

理題以斜棱柱體之正截面爲底、旁鋒爲高、另作正棱柱體、則正斜二體等積。



設呷′叮爲斜棱柱體、吧咦啐㗌呼爲其正截面、呷呷′爲其旁鋒。

求證呷叮′與以吧咦啐㗌呼爲底、呷呷′爲高之正棱柱體等積。

證引長呷呷′至吧′、令吧吧′=呷呷′、過吧′作一平面、與吧吧′正交、割呷叮′引長之諸面、而成吧′咦′啐′㗌′呼′正截面、與吧咦啐㗌呼平行。

是則　吧′咦′啐′㗌′呼′截面=吧咦啐㗌呼截面、　五二一節

而吧㗌′爲正棱柱體、以吧咦啐㗌呼爲底、呷呷′爲高。

於呷㗌及呷′㗌′二棱截體內、

呷叮底與呷′叮′底相等。　五〇五節

原作　呷呷'=吧吧'=吃吃'=呹呹'、　自理三

∴　呷吧=呷'吧'、吃呹=吃'呹'。

呷吃與呷'吃'、吧呹與吧'呹'兩兩相等而平行、又呷呹面之吧呷吃、呷吃呹等角、與呷'呹'面之吧'呷'吃'、呷'吃'呹'等角兩兩相等。　何故

∴　呷呹與呷'呹'互爲等角等邊、以此加彼、必處處符合。　三六節

是以　呷呹=呷'呹'。

仿此可證　呷呼=呷'呼'。

是以　呷唊稜柱=呷'唊'稜柱。　五二五節

於二端各加一吧叮'稜柱、則得

呷叮'⊕吧唊'。　合題

第五題

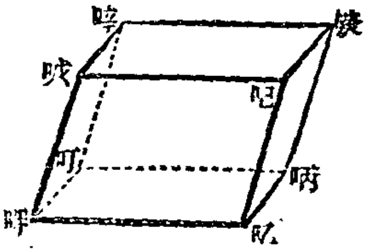
五二八

理題　平行稜體之對面、必平行而相等。

作一平行稜體、則其對面相比如何。其外展之方向相視何如。

設呷𠰺爲平行棱體、呷𠯆與叮𠰺爲其二對面。

求證呷𠯆與叮𠰺平行而相等。



證夫　呷𠮙∥叮𠰳、𠮙𠯆∥𠰳𠰺、　何故

∴　呷𠮙𠯆∠＝叮𠰳𠰺∠。　四六九節

又　呷𠮙＝叮𠰳、𠮙𠯆＝𠰳𠰺、　何故

∴　呷𠯆＝叮𠰺、　何故

準四六九節、　呷𠯆∥叮𠰺。　合題

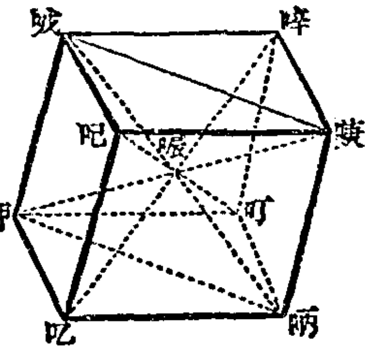
第六題

作一平行棱體、次作平面過其對角鋒三對、則此諸鋒、與平面交棱體面之線、成何等平面形。此諸平行方形之對角線、與棱體之對角線如何相當。各對角線所截成二段之長相比如何。

理題平行棱體之諸對角線、必彼此截半。

設呷𠰺爲平行棱體、呷𠰺、𠮙啐、𠰳𠯫、叮𠯆爲其對角線。

求證呷𠰺、𠮙啐、𠰳𠯫、叮𠯆、必彼此截半。



證過呷𠯈與𠰳𠷈二對鋒作平面。

夫　呷𠯈與𠰳𠷈平行而相等、　五〇五節

∴　呷𠰳𠷈𠯈為平行方形、　何故

而　呷𠷈與𠰳𠯈二對角線、於㖘點彼此截半。　一五四節

仿此　呷𠷈與𠮙𠯿、呷𠷈與叮𠯆皆截半於㖘。

是以　呷𠷈、𠮙𠯿、𠰳𠯈、叮𠯆、皆彼此截半也。　合題

五三〇　系　矩稜體之對角線必相等。

第七題

五三一　一●作二矩稜體、其底相等、其高相比如2：3、(或任用他比例亦可)則其體積之比例、與高之比例、相比何如。

二●二矩稜體長廣高三度中之二相等、則其積之比例、與餘一度之比例、相比如何。

理題　等底之矩稜體相比、如其高相比。

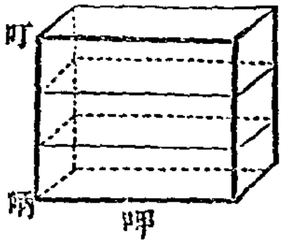
設呷與𠮙二矩稜體、其底相等、其高為𠰳叮與𠯈𠯆。

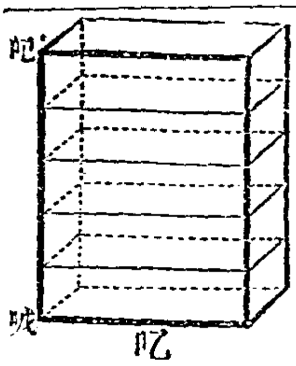
求證 呷：吃＝呐叮：哦吧。

證 設呐叮與哦吧有一公量、呐叮容之三倍、哦吧容之五倍。

是則　呐叮：哦吧＝3：5。

以公量分呐叮爲三等分、哦吧爲五等分、過此諸分點作平面、與二線正交。





則此諸平面互相平行、又與呷吃之二底平行。　四六二節

∴呷爲諸平面分成相等之三矩稜體、吃爲諸平面分成相等之五矩稜體。　五二三、五二六節

∴　呷：吃＝3：5。

呷：吃＝呐叮：哦吧。

是故

用三二七節推限之法、則雖高爲無公箇者、亦可證得同理。

故題言云云。

合題

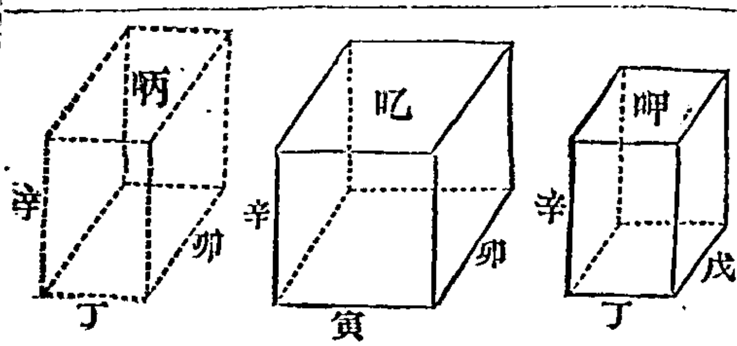
五三二

系 矩稜體、長廣高三度之二相等者、則其體相比、如餘一度相比。

第八題

一 問 作二矩棱體、其高相等、其底面相比、如2：3、（或用他比例亦可）則二體積之比例、與底之比例、相比何如。

二 問 二矩棱體長廣高三度之中有一度相等、則二體積之比例、與餘二度合之比例、相比何如。



理題 等高之矩棱體相比、如其底相比。

設呷與吃爲二矩棱體、同以辛爲高、其底之長廣二度、爲丁與戊、及寅與卯。

求證 呷：吃＝丁×戊：寅×卯。

證 另作一矩棱體哂、其高爲辛、其底之長廣爲丁與卯。

是則 呷：哂＝戊：卯、 五三二節

又 哂：吃＝丁：寅、

是以 呷：吃＝丁×戊：寅×卯。 二八七節 合題

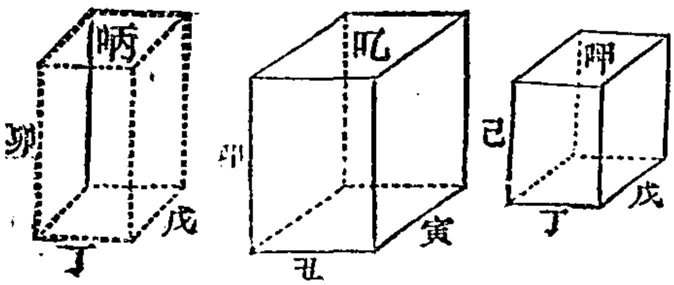
故題言云云。

五三四 **系** 矩稜體長廣高三度之一相等者、其體相比、如餘二度之合相比。

五三五 先作二矩稜體、次另作一矩稜體、其底等於首體之底、其高等於次體之高、乃以首二體各與第三體相比、考其體積之比例、與其長廣高合數之比例相比如何。

第九題

理題 矩稜體相比、如其長廣高三度之合相比。



設 呷與吃二矩稜體、其長廣高三度爲丁、戊、己、與丑、寅、卯。

求證 呷：吃＝丁×戊×己：丑×寅×卯。

證 另作一矩稜體哂、其長廣高三度爲丁、戊、卯。

是則　呷：哂＝己：卯、　五三三節

而　哂：吃＝丁×戊：丑×寅、　五三四節

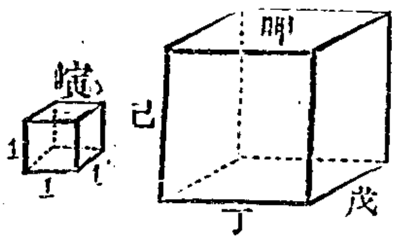
是以　呷：吃＝丁×戊×己：丑×寅×卯。　二八七節

故題言云云。　合題

第十題

五三六 作矩棱體一、又作一正方體、其邊爲度長之準箇、故全體爲度體積之準箇。夫此二體之比例、既如其長廣高合數之比例、則可推矩棱體之積、與其長廣高有何關係。

理題 矩棱體之積、等於其長廣高三度之合。



設 呷爲矩棱體、其長廣高三度爲丁、戊、己。

求證 呷之體積＝丁×戊×己。

證 設體積之準箇爲正方體嗊、其邊爲度長之準箇。

是則 呷：嗊＝丁×戊×己：1×1×1、　五三五節

即 $\frac{呷}{嗊}=\frac{丁\times戊\times己}{1\times1\times1}=丁\times戊\times己$。

但呷之體積、視其含準箇嗊之倍數而定之、　五一六節

∴ $\frac{呷}{嗊}$＝呷之體積。

既　　　呷嗔＝丁×戊×己。

是以　　呷之體積＝丁×戊×己。

故題言云云。　　　　　　　　　　　　合題

五三七　系　矩棱體之積、等於底乘高之合。

第十一題

五三八　一　問　作一斜平行棱體、則其體積與等底等高之棱矩體相比何如。

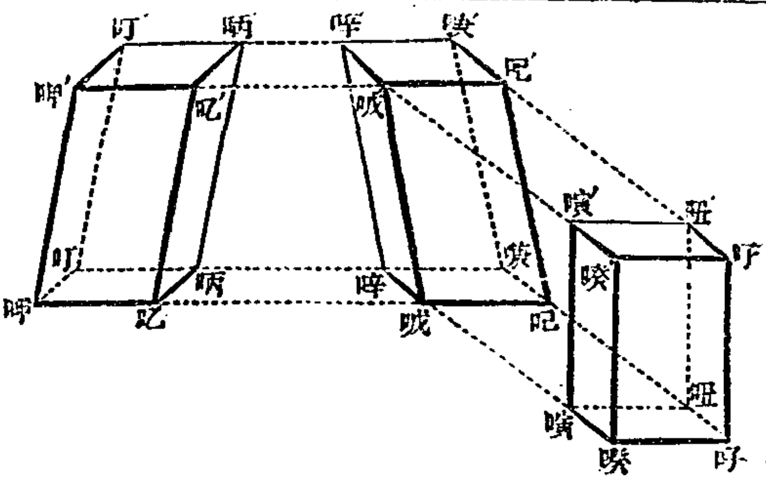
二　問　故凡平行棱體之積、與其底高有何關係。

理題　平行棱體與等高等底之矩棱體等積。

設呷㖠'為平行棱體、呷叱㖠叮為其

求證　呷㖠'之積、與等高而其底與呷叱㖠叮等積之矩棱體相等。

證　先於呷叱之引長線上、取吙吧等於呷叱、次過吙與吧作吙啐與吧咦二平面正交吙吧、次引長呷㖠、呷'㖠'、呷'叱'、叮'㖠'四平面、交吙啐與吧咦二平面、成吙咦'正平行棱體。



是則　呷呐′≎哎咦′。　五二七節

又於啐哎之引長線上、取嗔㗭等於啐哎、次過嗔與㗭、作嗔吜′與㗭吇′二平面正交嗔㗭、次引長哎咦、哎′咦′、哎′啐′、吧′咦′四面、交嗔′吜′與㗭′吇′二平面、成㗭吜′正平行棱體。

是則　哎′咦′≎㗭′吜′、　五二七節

∴　呷′呐′≎㗭吜′、

已作　哎吧＝呷吃、而呷吧‖叮咦、

∴　哎吧咦啐≎呷吃呐叮。　三三三節

又既作　嗔㗭＝啐哎、而啐㗭‖咦吇、

∴　㗭吇吜嗔≎哎吧咦啐≎呷吃呐叮。　何故

已作呷′咦′㗭′平面‖呷咦㗭平面、是以三體之高相等。

已作　哎啐′與吧咦′二面正交呷咦㗭、　四八二節

是以　㗭嗔′與吇吜′二面正交呷咦㗭。

又既作　嗔吜′與唉吇′二面正交呷咦唉、　四八二節

∴　唉吜′之諸面皆爲矩形、

是故　唉吜′爲矩棱體。　五一四節

但　呷呐′≑唉吜′、而唉吇吜嗔≑呷吃呐叮。

是卽呷呐′之積、與等高而其底與呷吃呐叮等積之矩棱體相等也。

故題言云云。　合題

五三九　系　凡平行棱體之積、等於底乘高。

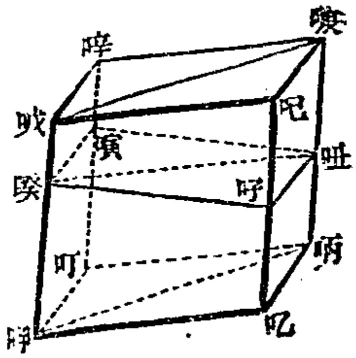
第十二題

五四〇　一●作平行棱體、以平面過其二對角鋒、分之爲兩三角棱柱體、則二體之積相比何如。是則三角棱柱體積、與其底及高之相關何如。

二●作棱柱體一、以平面過其旁鋒之一、分之爲數三角棱柱體、則各三角棱柱體之積爲何。是則凡棱柱體之積爲何。

理題　平面過平行棱體之兩對鋒、分之爲等積之三角

棱柱體二。



設呷咦爲平行棱體、呷哂咦吠平面、過其呷吠與哂咦兩對鋒。

求證呷吃哂｜叱棱柱體⇔呷叮哂｜啐棱柱體。

證作平面過呷咦平行棱體、成嗘呼吔嚝正截面、交呷哂咦吠於嗘吔。

夫　呷叱‖叮咦、　呷啐‖吃咦、　五二八節

嗘呼‖嚝吔、　嗘嚝‖呼吔、　四六三節

是則　嗘呼吔嚝爲平行方形、而嗘吔爲其對角線。

∴是故　嗘呼吔△＝嗘嚝吔△。　何故

夫呷吃哂｜叱棱柱體、與以嗘呼吔爲底、呷吠爲高之正棱柱體等積。　五二七節

又呷叮哂｜啐棱柱體、與以嗘嚝吔爲底、呷吠爲高之正棱柱體等積。

惟此二正棱柱體相等、　五二六節

是以　呷吃哂｜叱⇔呷叮哂｜啐。

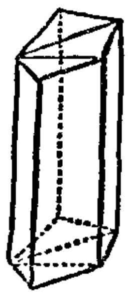
故題言云云。

五四一 **系一** 三角棱柱體積、與同高而底加倍大之平行棱體積之半等積。

五四二 **系二** 三角棱柱體積、等於高乘底之合。

五四三 **系三** 凡棱柱體之積、等於高乘底之合。

五四四 **系四** 棱柱體相比、如其底與高之合相比。故等底之棱柱體相比、如其高相比。等高之棱柱體相比、如其底相比。又凡棱柱體之底等積、而高相等者、其積必等。



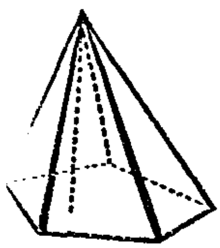
棱錐體

五四五 棱體之底爲多邊形、其旁面爲同尖之三角形、曰棱錐體。

棱錐體諸旁面之公尖、爲棱錐體之尖、諸旁面之交線曰旁鋒、諸旁面積之和、曰棱錐體之旁面積。

自尖至底面之垂線、爲棱錐體之高。

五四六 棱錐體之底、有三角四邊形等各種之別、故有三角棱錐體、四角棱錐體等各種之名。



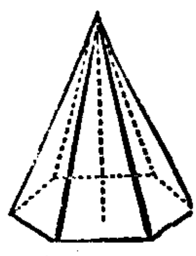
五四七 棱錐體以有法多邊形爲底、其尖在底中心之垂線內、曰正棱錐體。

合題

夫有法多邊形可容於圓內、故按四五〇節、可知正棱錐體之尖、距其底有法多邊形之各尖等遠、是以正棱錐體之旁鋒乃相等、而其諸旁面乃相等之等腰三角形。

五四八 自棱錐體尖至任一旁面底之垂線距、曰棱錐體之斜高。

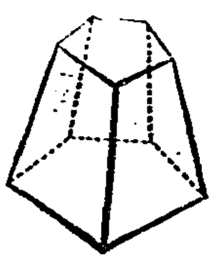
故棱錐體之斜高、卽爲其諸旁面等腰三角形之高。



五四九 割衆旁鋒之平面所截棱錐體之下段、曰棱錐截體

五五〇 棱錐截體之二底平行者、曰棱錐平截體

棱錐平截體二底間之垂線距、爲其體之高。



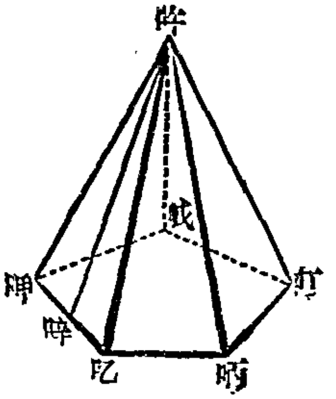
正棱錐體之平截體、其諸旁面爲相等之等腰梯形、且此諸梯形之高、卽截體之斜高。

第十三題

五五一 一●作正棱錐體一、夫其各旁面俱爲三角形、則與等底等高之矩形相比何如。各形之高、與棱錐體之斜高相比何如。諸旁面底之和、與棱錐體底周界相比何如。是則棱錐體之旁面與其底周界偕斜高之矩形、相比何如。

二●作正棱錐體之平截體、其各面爲何種平面形。是則各與何者等積。諸面之上底和、與截體之上底周界相比何如。諸面之下底和、與截體之下底周界相比何如。是則正棱錐平截體之旁面、與其斜高偕二底周界和之矩形、相比何如。

理題正棱錐體之旁面、與其斜高偕底界所成矩形之半等積。



設吘－呷吃哂叮哎爲正棱錐體、吘啐爲其斜高。

求證吘－呷吃哂叮哎之旁面⊜$\frac{1}{2}$(呷吃＋吃哂＋⋯)・吘啐矩形。

證按五四五節、知

吘－呷吃哂叮哎旁面⊜吘呷吃△＋吘吃哂△＋⋯、

既此諸三角形之高各＝吘啐、　　　　五四八節

則有

吘呷吃△⊜$\frac{1}{2}$呷吃・吘啐矩形、

吘吃哂△⊜$\frac{1}{2}$吃哂・吘啐矩形、餘倣此、　　　何故

∴　吘呷吃△＋吘吃哂△＋……＝$\frac{1}{2}$呷吃·吘啐矩形＋$\frac{1}{2}$吃哂·吘啐矩形＋……、

卽　吘︱呷吃哂叮戊之旁面＝$\frac{1}{2}$(呷吃＋吃哂＋……)·吘啐矩形。

合題

故題言云云。

五五二　系　正棱錐平截體之旁面與其斜高偕二底周界和所成矩形之半等積。

數學術語●學者可自編之。

演習七七九●正棱錐體之底周界14尺、斜高6尺、求其旁面若干。

第十四題

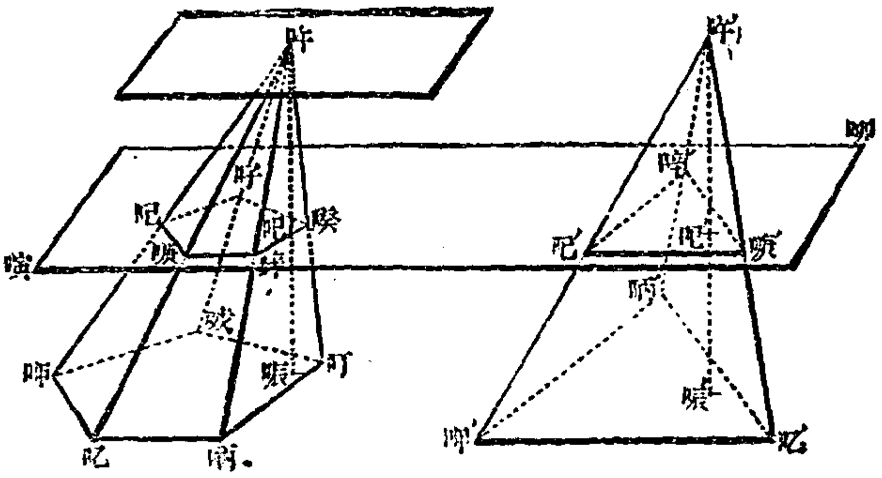
五五三　一●作棱錐體一、以與底平行之平面割之、則旁鋒二段之比例、與高二段之比例、相比何如。

二●所成之截面與底相等乎、抑等積乎、抑相似乎。

理題　如棱錐體爲底之平行面所割、則一旁鋒與高必俱割成同理比例線。二截面必爲與底相似之多邊形。

設　吘︱呷吃哂叮戊爲棱錐體、吘喉爲高、嚝唧平面與其底平行、在高之吧點處割棱錐體成吧唊啐啖吁截面。

角形兩兩相似。



求證一●吘吧：吘呷＝吘咦：吘叱＝吘吧：吘嗫＝：：。

二●吧咦啐㗊吁與呷叱哂叮𠯗相似。

證一●過吘作平面與呷叱哂叮𠯗平行。

是則諸旁鋒與高、爲三平行面所截、

∴準四七〇節、

吘吧：吘呷＝吘咦：吘叱＝吘吧：吘嗫＝：：。

二●按四六三節、

吧咦‖呷叱、咦啐‖叱哂、啐㗊‖哂叮、餘仿此。

∴準四六九節、

吧咦啐∠＝呷叱哂∠、咦啐㗊∠＝叱哂叮∠、餘仿此。

又吘吧咦、吘咦啐等諸三角形、與吘呷叱、吘叱哂等諸三

三〇六節

∴　𠯆咦：呷叱＝吘咦：吘叱、而咦啐：叱吶＝吘咦：吘叱、

是故　𠯆咦：呷叱＝咦啐：叱吶。

倣此證得　咦啐：叱吶＝啐㗒：吶叮、…。

是故𠯆咦啐㗒吘、與呷叱吶叮哎二形、等角而相當邊有比例、

∴　𠯆咦啐㗒吘爲與呷叱吶叮哎相似之多邊形。

故題言云云。　二九九節　合題

五五四

系一　稜錐體之平行截面相比、如其各與尖之距成方相比。

因　𠯆咦啐㗒吘：呷叱吶叮哎＝$\overline{𠯆咦}^2$：$\overline{呷叱}^2$、　三四四節

但　𠯆咦：呷叱＝吘吧：吘唇、　五五三節

是以　𠯆咦啐㗒吘：呷叱吶叮哎＝$\overline{吘吧}^2$：$\overline{吘唇}^2$。

五五五

系二　如二稜錐體等高、則與底平行而距尖等遠之二截面相比、如其底相比。

因　𠯆咦啐㗒吘：呷叱吶叮哎＝$\overline{吘吧}^2$：$\overline{吘唇}^2$、　五五四節

而　𠯆′咦′啐′：呷′叱′吶′＝$\overline{吘′吧′}^2$：$\overline{吘′唇′}^2$。

但　吘吧＝吘′吧′、而吘唇＝吘′唇′、

∴　吧嘆啐嗘吁：呷吃吶叮吱＝吧′嘆′啐′：呷′吃′吶′、

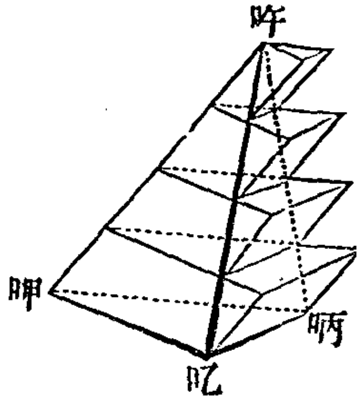
即　吧嘆啐嗘吁：吧′嘆′啐′＝呷吃吶叮吱：呷′吃′吶′。　何故

五五六 系題　二棱錐體等高又等底、則與底平行而距尖等遠之截面、必等積。

第十五題

五五七 作三角棱錐體二、等高而底等積、則其體積相比何如。

理題　等高而底等面之三角棱錐體、即必等積。

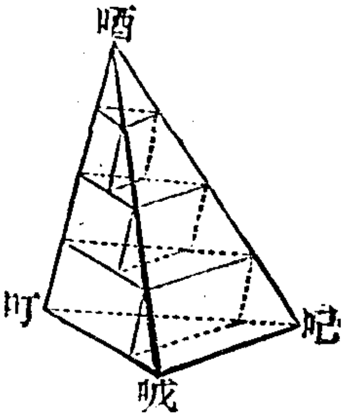


設　吘－呷吃吶與吧－叮吱吧兩三角棱錐體、其底呷吃吶與叮吱吧等面、其高相等。

求證　吘－呷吃吶＝吧－叮吱吧。

證　將二等高分成等分、各長卯準箇、過諸分點作平面、各與呷吃吶與叮吱吧平行。

此諸平面於二棱錐體內所成之相當截面、俱兩兩等積。　五五六節



於吽|呷吃㖠之底、又以諸截面爲下底、各作棱柱體、其旁鋒與呷吽平行、其高等於卯。

以哂|叮唙吧之諸截面爲上底、各作棱柱體、其旁鋒與叮哂平行、其高等於卯。

是則按五四四節、哂|叮唙吧內之各棱柱體、與吽|呷吃㖠內適在其上之各棱柱體等積。故此二副棱柱體之較、卽第一副內最下一棱柱體也。

夫卯如漸損爲無窮小、則最下之棱柱體亦損至無窮小、而二副棱柱之較可小於任若干小能名之體積。

但第一副棱柱之和、尙大於吽|呷吃㖠、第二副棱柱之和、尙小於哂|叮唙吧、是以吽|呷吃㖠與哂|叮唙吧之較、必小於此二副棱柱之較、自必更小於任若干小可名之體積矣。

是以

吽|呷吃㖠 = 哂|叮唙吧。

故題言云云。　合題

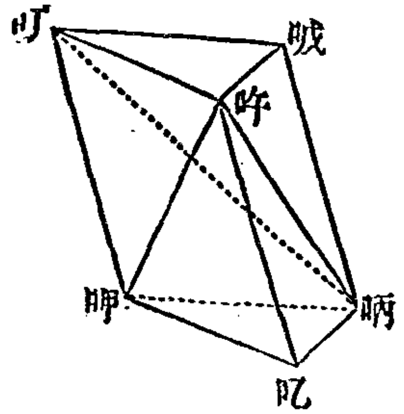
五五八

一●作三角稜柱體一、分之爲稜錐體三、則此三稜錐體、彼此相比何如。是則與稜柱體等底等高之稜錐體、其積爲稜柱體之何分。

二●作稜錐體一、以平面過其一旁鋒、分之爲數三角稜錐體、則各三角稜錐體積、相比何如。是則凡稜錐體之積爲何。

第十六題

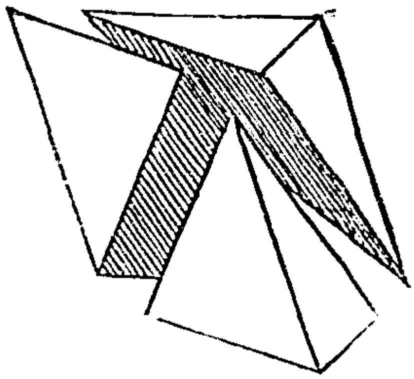
題凡三角稜錐體、爲等底等高之三角稜柱體三分之一。



設吽—呷吃呐爲三角稜錐體、吁吽呧—呷吃呐爲其等底等高之三角稜柱體。

求證　吽—呷吃呐 ＝ $\frac{1}{3}$ 吁吽呧—呷吃呐。

證過吽呐與吽吁作平面、交呷呐呧吁平行方形於呐吁。是則吁吽呧—呷吃呐分爲三箇三角稜錐體、卽吽—呷吃呐、吽—呷呐吁、吽—呐吁呧是也。



呷呐叮△=呐叮哦△、　何故

是卽吘—呷呐叮、與吘—呐叮哦、等底而等高。

∴　吘—呷呐叮⊖吘—呐叮哦。　五五七節

以呐爲尖、叮吘哦爲吘—呐叮哦之底、則吘—呷𠮙呐與呐—叮吘哦等底等高、　五〇五節

∴　吘—呷𠮙呐⊖呐—叮吘哦即吘—呐叮哦、　五五七節

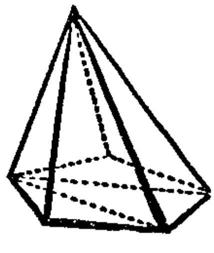
故　吘—呷𠮙呐⊖吘—呷呐叮⊖吘—呐叮哦。

是以　吘—呷𠮙呐⊖$\frac{1}{3}$叮吘哦—呷𠮙呐。　合題

五五九 **系論** 三角棱錐體積等於底乘高三分之一。

五六〇 **系論** 凡錐棱體之積、等於底乘高三分之一。

五六一 **系論** 棱錐體相比、如其底與高之合相比、故底等面之棱錐體相比、如其高相比、等高之棱錐體相比、如其底相比、且等高而底等面之棱錐體、其積亦等。

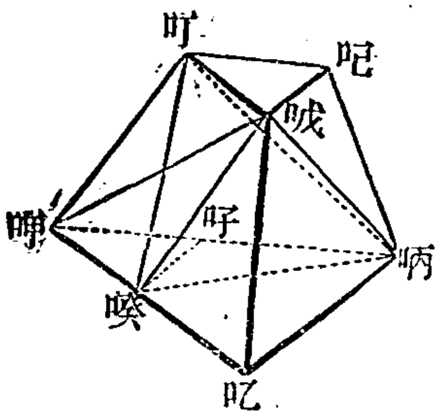


第十七題

五六二　作三角棱錐平截體、分之爲三箇三角棱錐體、其一以平截體之下底爲底、其一以上底爲底、二者均以截體之高爲高、由此可見第三棱錐體之積、必等於以截體之高爲高、截體二底之中率爲底之棱錐體。

是則三角棱錐平截體之積、爲何等三角棱錐體之和。

題　三角棱錐平截體、等於三箇棱錐體、各與原體等高、其一與二以原體之兩底爲底、其三以兩底之中率爲底。

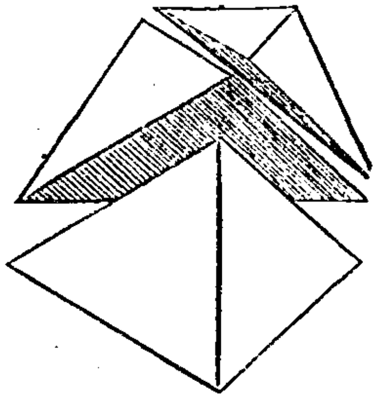


設　呷吃呐—叮哎吧爲三角棱錐平截體、呷吃呐與叮哎吧爲其兩底、命其高爲啐。

求證　呷吃呐—叮哎吧等於三箇棱錐體之和、此三體同以啐爲高、以呷吃呐、叮哎吧、及此二者之中率爲底。

證　過呷、哎、呐、與叮、哎、呐諸點作平面、分平截體爲哎—呷吃呐、呐—叮哎吧、與哎—呷叮呐三箇棱錐體。

是則哎—呷吃呐與呐—叮哎吧、以呷吃呐與叮哎吧爲底、而同以啐爲高。



此外祗須證實戓|呷叮哂之積、等於以啐爲高、以呷吃哂及叮戓吧之中率爲底之棱錐體。

於叮吃面內、作戓喍‖叮呷、過之作戓喍哂平面、又作喍叮線。

夫 戓喍‖呷哂吧叮平面、 四五七節

是以 戓與喍距呷哂吧叮等遠、

戓|呷叮哂≎喍|呷叮哂。 何故

∴ 以叮爲喍|呷叮哂之尖、呷喍哂爲其底。

則戓|呷叮哂與以啐爲高之叮|呷喍哂等積。

作喍吁‖戓吧、

則 呷喍吁∠=叮戓吧∠、喍呷吁∠=戓叮吧∠、 四六九節

而 呷喍=叮戓、 一五一節

∴ 呷喍吁△=叮戓吧△、 何故

而 呷吁=叮吧。 何故

夫呷𠮙呐與呷唊呐兩三角形、在呷𠮙線上之高相等、又呷唊呐與呷唊吇兩三角形、
在呷呐線上之高亦相等。

∴　呷𠮙呐△：呷唊呐△＝呷𠮙：呷唊＝呷𠮙：叮哦、　三三六節

而　呷唊呐△：呷唊吇△＝呷呐：呷吇＝呷呐：叮吧。

惟　呷𠮙呐與叮哦吧兩三角形相似、　五五三節

是以　呷𠮙：叮哦＝呷呐：叮吧、　何故

∴　呷𠮙呐△：呷唊呐△＝呷唊呐△：呷唊吇△。

但　呷唊吇△＝叮哦吧△、

∴　呷𠮙呐△：呷唊呐△＝呷唊呐△：叮哦吧△、

是即　呷唊呐△爲呷𠮙呐與叮哦吧二三角形之中率也。

是以呷𠮙呐—叮哦吧等於三箇稜錐體之和、此三體同以啐爲高、以呷𠮙呐、叮哦吧及此二者之中率爲底。

故題言云云。　合題

五六三 系 凡棱錐平截體、等於三箇棱錐體、同與原體等高、各以原體之兩底及其中率爲底。

五六四 系 棱錐平截體之積、等於高乘二底與其中率之和三分之一。

第十八題

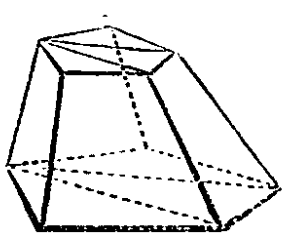
五六五 作一三角棱截體以平面過其上尖之一、分之爲三箇三角棱錐體、既棱錐體之各面俱可作爲底、試推究此三棱錐體、與同以棱錐體底爲底、各以斜截面三尖之一爲尖之三棱錐體是否一一等積。

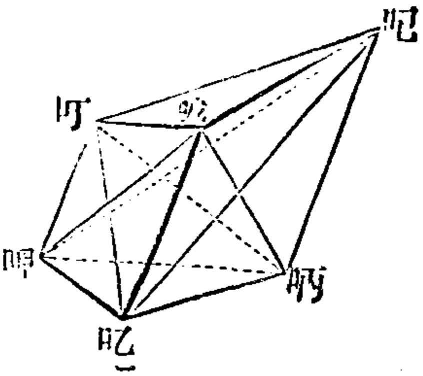
理題 三角棱截體、等於同以原體之底爲底、以斜截面之三尖爲尖之三箇棱錐體。

設 呷吃呐—叮哎吧爲三角棱截體、哎—呷吃呐、叮—呷吃呐、吧—呷吃呐爲三箇棱錐體。

求證 呷吃呐—叮哎吧 ≎ 哎—呷吃呐 + 叮—呷吃呐 + 吧—呷吃呐。

證 過哎、呷、呐、與哎、叮、呐、各作平面、分棱截體爲哎—呷吃呐、哎—呷呐叮、哎—叮呐吧





三棱錐體。

以呷呐叮爲叮—呷吃呐之底、吃爲其尖。

夫　呷叮‖吃哎‖呐吧、　五〇五節

是以、　吃哎‖呷呐叮平面、　四五七節

∴　吃—呷呐叮與哎—呷呐叮等高、

是故　叮—呷吃呐≎吃—呷呐叮≎哎—呷呐叮、　五五七節

又以呷呐吧爲吧—呷吃呐之底、吃爲其尖、

但　呷呐吧△≎叮呐吧△、　而吃哎‖叮呐吧平面、　何故

是以　吧—呷吃呐≎吃—呷呐吧≎哎—叮呐吧、　何故

∴　哎—呷吃呐+叮—呷吃呐+吧—呷吃呐≎哎—呷吃呐+哎—呷呐叮+哎—叮呐吧。

但　呷吃呐—叮哎吧≎哎—呷吃呐+哎—呷呐叮+哎—叮呐吧、

是以　呷吃呐—叮哎吧≎哎—呷吃呐+叮—呷吃呐+吧—呷吃呐。

五六六

故題言云云。

系一 正三角棱截體之積、等於底乘旁鋒和三分之一。

一 旁鋒呷叮、吃哦、哂吧與呷吃哂底相視之方向何如。

二 是則呷叮、吃哦、哂吧三旁鋒與呷吃哂一叮哦吧等積之三棱錐體之高相比何如。

三 此三棱錐體之積、與何者相等。

四 是則呷吃哂一叮哦吧之積、與何者相等。

五六七

系二 凡三角棱截體之積、等於其正截面乘旁鋒和三分之一。

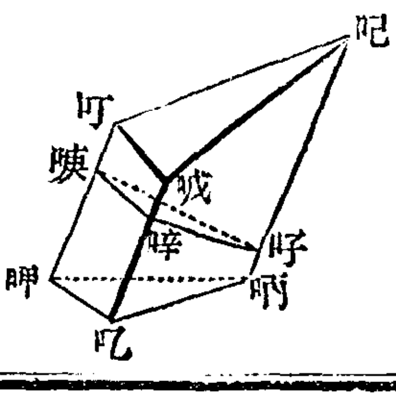
一 如咦啐呼爲正截面、則咦啐呼一叮哦吧之積、與何者相等。

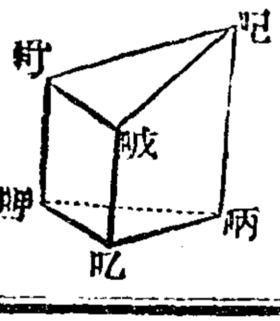
二 咦啐呼一呷吃哂之積、與何者相等。

三 是則呷吃哂一叮哦吧之積、與何者相等。

演習七八〇● 正棱柱體高12寸、底周20寸、其旁面積若干。

演習七八一● 二矩棱體之高同爲7、底邊一爲3粎、4粎、一爲7粎、9粎、求此二體之比例。





合題

演習七八二●此矩棱體之長廣高三度爲2寸、4寸、3寸、彼矩棱體之三度爲6寸、7寸、8寸、求二體之比例。

演習七八三●矩棱體之鋒爲20.5粎、12.75粎8.6粎求其體積。

演習七八四●六角有法棱柱體、高12尺、底之各邊長10尺、求其積。

演習七八五●棱錐體高18寸、底爲矩形、長10寸、廣6寸、求其積。

演習七八六●正三角棱截體之底各邊3尺、鋒長3尺、4尺、6尺、求其積。

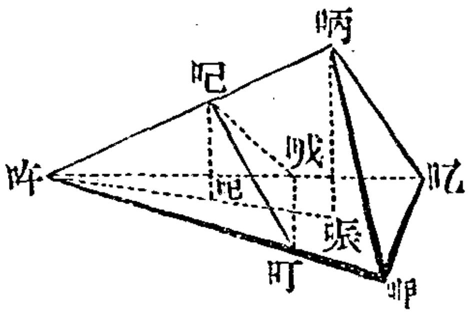
演習七八七●方棱錐平截體、斜高13粎、下底各邊3.5粎、上底各邊2粎、求其旁面積。

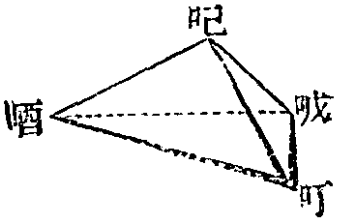
第十九題

五六八

作四面棱體二、此體之一體角、等於彼體之一體角、以此二等體角之相當面爲四面棱體之底、則二體積之比例、與其高乘底之比例相比如何。(五六一節)夾二等體角之底面角之二鋒合數之比例、與二體底之比例相比如何(三四〇節)二體高之比例、與等體角第三鋒之比例相比何如。(二九九節)由以前諸等比例、試推究二體積之比例、與其等體角三鋒合數之比例、相比何如。

理題四面棱體之一體角相等、則體積相比、如等體角之三鋒合數相比。





設 吘—呷吃吶、與哂—叮哎吧、爲兩四面棱體、有體角吘與哂相等。

求證 吘—呷吃吶：哂—叮哎吧＝吘呷×吘吃×吘吶：哂叮×哂哎×哂吧。

證 以哂—叮哎吧加諸吘—呷吃吶之上、使哂吘二等體角相符合。

作吶唇、吧𠯆與吘呷吃平面正交。

是則其平面交吘呷吃於吘𠯆唇。

夫吶唇與吧𠯆、各爲三角棱錐體吶—吘呷吃、吧—吘叮哎之高、

∴準五六一節、

吶—吘呷吃：吧—吘叮哎＝吘呷吃×吶唇：吘叮哎×吧𠯆。(1)

但　吘呷吃：吘叮哎＝吘呷×吘吃：吘叮×吘哎。　三四〇節

代於(1)中、得

吶—吘呷吃：吧—吘叮哎＝吘呷×吘吃×吶唇：吘叮×吘哎×吧𠯆。(2)

夫

吘唇吶與吘𠯆吧兩正三角形相似、　何故

∴　吶哌：叱吧＝吘吶：吘叱。　二九九節

代入(2)中、得

吶—吘呷叱：叱—吘叮哦＝吘呷×吘叱×吘吶：吘叮×吘哦×吘叱、

是卽　吘—呷叱吶：哂—叮哦叱＝吘呷×吘叱×吘吶：哂叮×哂哦×哂叱。

故題言云云。　合題

相似有法棱體

五六九 棱體相當之棱角各等、面數相同、且相似而同方、曰相似棱體。

相似棱體內同方之面、鋒、角等、曰相當面相當鋒相當角、餘準此。

五七〇 夫既相似形之相當邊有比例、則相似棱體之相當鋒亦有比例。

五七一 夫既相似多邊形相比、如其任一相當線之方相比、故相似棱體之相當面相比、如其任一相當鋒之方相比。

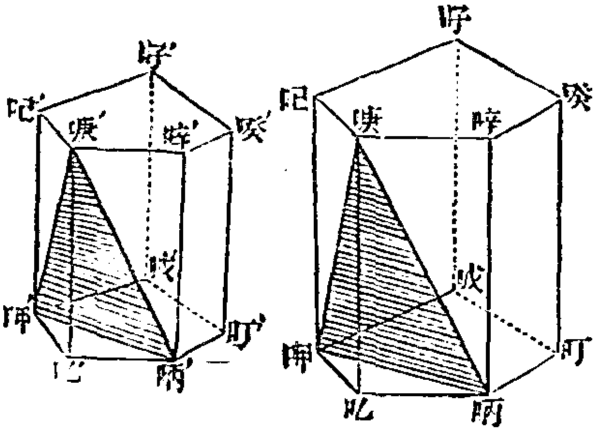
五七二 由前節之理、易知相似棱體之全面相比、如其任一相當鋒之方相比。

一●作二相似棱體、如能之、則分成等數之四面棱體、兩兩相似。

二●則二相似棱體內任二相當線之比例、與其任二相當鋒之比例、相比何如。

第二十題

理題 相似之棱體、可分爲等數之四面棱體、兩兩相似而同方。



設 呷唉與呷'唉'爲二相似之棱體。

求證 呷唉與呷'唉'可分爲等數之四面棱體、兩兩相似而同方。

證 取呷唉之任一體角吃、過其三鋒之端呷、咦、呐作平面。又過其相當點呷'、咦'、呐'作一平面。是則在吃—呷咦呐、與吃'—呷'咦'呐'兩四面棱體內、吃呷呐、吃呷咦、吃咦呐諸面、與吃'呷'呐'、吃'呷'咦'、吃'咦'呐'諸面、兩兩相

似。　三一〇節

是以　呷咦：呷′咦′＝𠮙咦：𠮙′咦′＝呐咦：呐′咦′、

而　呷咦：呷′咦′＝呷𠮙：呷′𠮙′＝呷呐：呷′呐′、

∴　呷咦：呷′咦′＝呐咦：呐′咦′＝呷呐：呷′呐′。

是故　呷呐咦面與呷′呐′咦′面相似。　何故

∴　諸四面棱體之相當面爲相似。

又諸四面棱體之相當體角乃相等、　五〇〇節

是以𠮙—呷咦呐與𠮙′—呷′咦′呐′兩四面棱體爲相似。　五六九節

今設自相似棱體、取去此相似之四面棱體、則所餘者仍爲相似、因原棱體之面與棱角同式改變也。

遞次取去相似之四面棱體、則原棱體、至末可祗剩相似之四面棱體、是原棱體已分爲等數之四面棱體、兩兩相似而同方也。

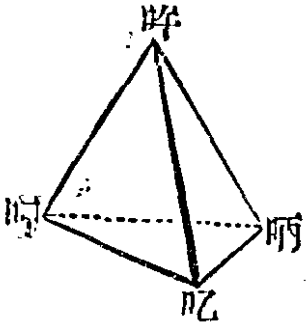
故題言云云。　合題

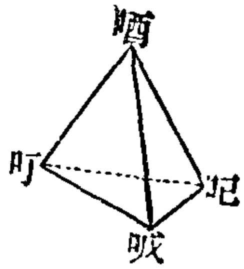
系 相似棱體之相當線相比、如其相當鋒相比。

第二十一題

五七五 作二相似四面棱體、則在尖之體角相比何如。是則四面棱體之比例、與其相當體角上相當鋒之比例、相比如何。(五六八節)諸鋒之比例、互相比則何如。是則四面棱體之比例、與任二相當鋒立方之比例、相比何如。

理題 相似之四面棱體相比、如其相當鋒之立方相比。





設 吘—呷吃啢與哂—叮哎吧為二相似四面棱體。

求證 吘—呷吃啢：哂—叮哎吧＝$\overline{吘呷}^3$：$\overline{哂叮}^3$。

證 夫 吘體∠＝哂體∠、 五六九節

∴ 吘—呷吃啢：哂—叮哎吧＝吘呷×吘吃×吘啢：哂叮×哂哎×哂吧、 五六八節

即 $\frac{吘—呷吃啢}{哂—叮哎吧}=\frac{吘呷\times吘吃\times吘啢}{哂叮\times哂哎\times哂吧}=\frac{吘呷}{哂叮}\times\frac{吘吃}{哂哎}\times\frac{吘啢}{哂吧}$。

但 吘呷：哂叮＝吘吃：哂哎＝吘啢：哂吧、

卽 $\frac{\text{吘呷}}{\text{哂叮}}=\frac{\text{吘吃}}{\text{哂吷}}=\frac{\text{吘吶}}{\text{哂吧}}$。

是故 $\frac{\text{吘—呷吃吶}}{\text{哂—叮吷吧}}=\frac{\text{吘呷}}{\text{哂叮}}\times\frac{\text{吘呷}}{\text{哂叮}}\times\frac{\text{吘呷}}{\text{哂叮}}=\frac{\overline{\text{吘呷}}^3}{\overline{\text{哂叮}}^3}$、

是卽 吘—呷吃吶：哂—叮吷吧 $=\overline{\text{吘呷}}^3:\overline{\text{哂叮}}^3$。

倣此可證任何二相當錐、亦與此同理。

故題言云云。 合題

五七六 **系** 相似棱體相比、如其相當錐之立方相比。

一 二相似之棱體可分爲何體。 五七三節

二 分成諸體之比例、與其相當錐立方之比例、相比何如。 五七五節

三 分成諸體之比例、與原棱體任二相當錐立方之比例相比何如。 五七四節

四 是則分成諸體和之比例、與原棱體任二相當錐立方之比例、相比何如。

五七七 棱體諸面、爲有法多邊形而各相等、諸棱角亦各相等、曰有法棱體。

五七八 一 凸棱角之面可少至若干。其諸面角之和、與３６０相比何如。夫既等邊三角形之各角爲６０°、則凸棱角可以三箇等邊三角形成之乎。可以四箇、五箇、六箇等

邊三角形各成之平、其故何也。是則以等邊三角形爲面、可成幾種有法凸棱角。

二　正方之角爲若干度、以三正方可合成一凸棱角乎。以四正方可合成之乎。其故何也。是則以正方爲面、可成幾種有法凸棱角。

三　有法五邊形之各角既爲１０８、則以三箇有法五邊形、可合成一凸棱角乎。以四箇有法五邊形可合成之乎。其故何也。是則以有法五邊形爲面、可成幾種有法凸棱角。

四　有法六邊形之各角既爲１２０、則以三箇有法六邊形、可合成一凸棱角乎。其故何也。以三箇有法七邊形、可合成之乎。其故何也。故合成凸棱角、亦卽合成凸棱體之有法多邊形、其邊數以何爲限。

是則可作之有法凸棱體、計祇若干。

有法凸棱體祇五種、按其面數而定名、卽四面棱體、六面棱體、八面棱體、十二面棱體、二十面棱體是也。

有法之四面棱體、八面棱體、與二十面棱體、以等邊三角形爲界、六面棱體以正方形

爲界、十二面棱體以五邊形爲界。

五八〇 有法棱體內距各面等遠之點、曰棱體之中心。

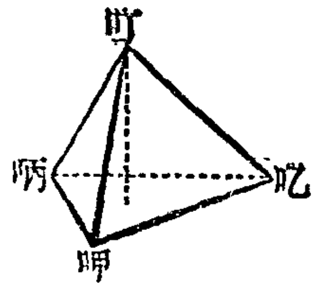
中心距棱體之各棱角尖亦等遠。

故凡有法棱體可以球切其內外。

五八一

第二十二題

作題 於已知鋒上、求作有法棱體。



設 呷吃爲一鋒。

求 於呷吃上作有法棱體。

解 一 [illegible] 有法四面棱體。

於呷吃線上作等邊三角形、如呷吃呩。

於呷吃呩△之中心豎立一垂線、於其上取叮點、使叮呷＝呷吃。自叮作線至呷吃呩△之諸尖。

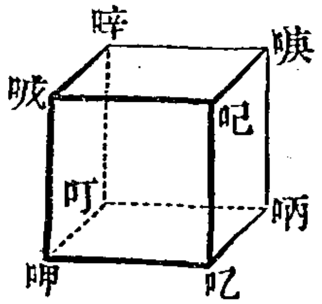
是則叮—呷吃哂卽爲有法四面棱體。

論學者按四五〇、五〇〇節自證之。

二●有法六面棱體。

於呷吃上作呷吃哂叮正方、於其邊上作呷吧、吃咦、哂哱、叮哌諸正方、各與呷吃哂叮正交。

是則呷咦棱體、卽爲所求之有法六面棱體。



論學者按五〇〇節自證之。

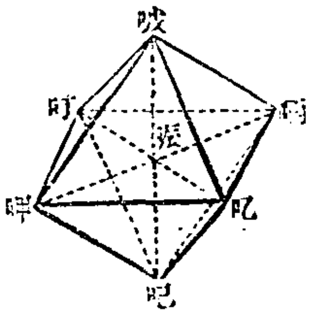
三●有法八面棱體。

於呷吃線上、作呷吃哂叮正方、過其中心唇作垂線穿之。

於此垂線上取哌吧二點、使呷哌與呷吧各等於呷吃。

自哌與吧、至呷吃哂叮諸尖作直線。

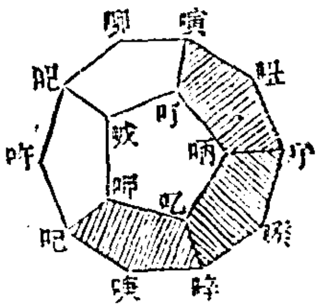
則哌—呷吃哂叮—吧、卽爲有法八面棱體。

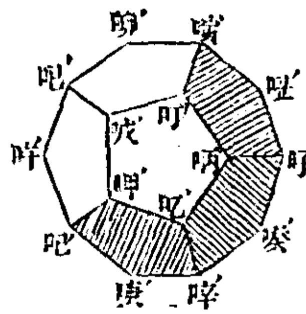


論學者按四五〇節自證之。

四◎有法十二面棱體。

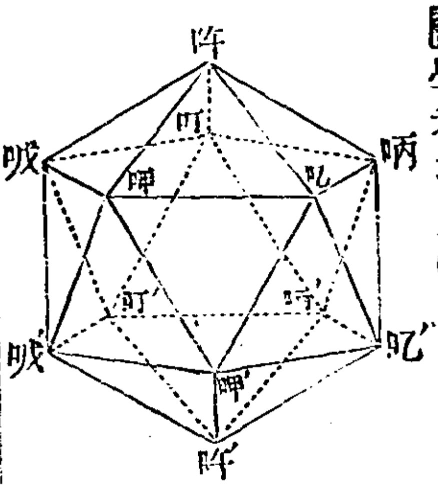
於呷吃線上作呷吃哂叮哦有法五邊形、於其各邊作相等之有法五邊形、斜倚於呷吃哂叮哦平面成呷、吃、哂、叮、哦諸體角、是則六有法五邊形合成吧啐呼嗊吧凸面矣。





又作吧′啐′呼′嗊′吧′凸面、與吧啐呼嗊吧相等、而幷合成一凸面、則所成者、卽有法十二面棱體也。

讀學者按五○○節自證之。



五●有法二十面棱體。

於呷吃上作呷吃哂叮哦有法五邊形、在其中心竪立一垂線、取垂線上吽點、使吽呷＝呷吃。自吽作線至五邊形之各尖、成吽－呷吃哂叮哦有法五邊棱錐體。

於呷、吃、哂、叮、哦五點、各作三箇等邊三角形、俱與吽呷吃

五八二

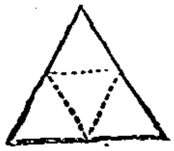
相等、使之各成一五棱角。

作吘′ㄧ呷′吃′哂′叮′吷′有法五邊錐棱體、與吘ㄧ呷吃哂叮吷相等、且使之與已有之凸面相聯、成一凸面、如是所成者、卽爲有法二十面棱體也。

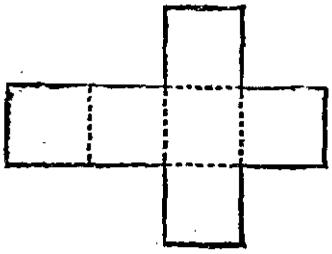
證學者按四五〇節自證之。

案以上五種棱體、學者可以硬紙、按左列五圖、剪成各體展開之平面形、次依虛線摺疊成鋒、且以紙條粘封口、卽成其體形。

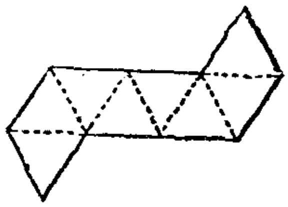
第一種



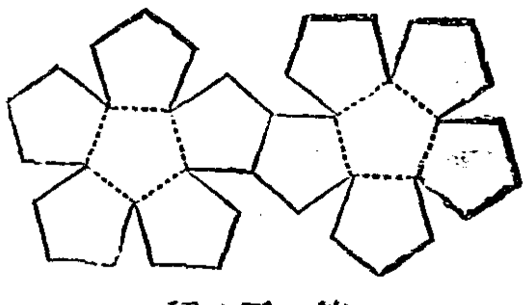
第二種



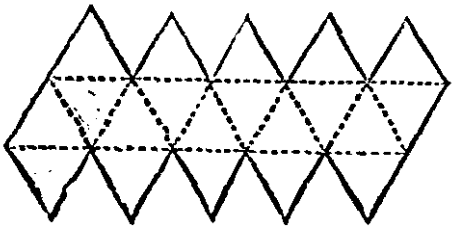
第三種



第四種



第五種



五八三

公式

公式中之符號

叱＝底　　啞＝斜高

乙＝上底　　吠＝旁鋒

吧＝底之周界

吧′＝上底之周界

吧″＝正截面之周界

丁、戊、己＝平行棱體之長廣高三度

啐＝高　　呷＝旁面積

咳＝體積

棱柱體

呷＝吠×吧″　　五一九節

呷＝啐×吧（正棱柱體）　　五二〇節

咳＝吃×啐　五四二、五四三節

矩棱體

咳＝丁×戊×己　五三六節

咳＝吃×啐（凡平行棱體皆然）　五三七、五三九節

棱錐體

呷＝$\frac{1}{2}$吧×啞（正棱錐體）　五五一節

咳＝$\frac{1}{3}$吃×啐　五五九、五六〇節

棱錐平截體

呷＝$\frac{1}{2}$啞（吧＋吧′）（正棱錐體）　五五二節

咳＝$\frac{1}{3}$啐（吃＋乙＋$\sqrt{吃×乙}$）　五六四節

習題

演習七八八●正方體之鋒爲$5\frac{1}{2}$寸、求其體積與全面積。

演習七八九●正稜柱體高4.5尺、底爲等邊三角形、每邊13寸、求其體積與全面積。

演習七九〇●三角正稜錐體、斜高15寸、底之每邊9寸、求其全面積。

演習七九一●三角稜錐體、高11尺、底之三邊爲3尺、4尺、5尺、求其體積。

演習七九二●矩稜體之鋒爲9寸、12寸、16寸、今有正方體與之等體積、則其鋒當長若干。

演習七九三●稜柱體高6寸、底面2.5方寸、又一稜柱體與之等體積、底面爲3.75方寸、則其高當若干。

演習七九四●二相似四面稜體之二鋒相比如4:5、則其面積之比例爲何、體積之比例爲何。

演習七九五●稜錐體積爲36立方粎、其底乃三角形、邊爲6粎、5粎、4粎、則其高當若干。

演習七九六●稜錐平截體上底面積48方尺、下底面積72方尺、高60尺、則其體積若干。

演習七九七●六角正稜錐平截體積16立方粎、二底每邊爲1.5粎與2.5粎、求其高若干。

演習七九八●稜錐體之高20尺、底面100方尺、與底平行之截面爲55方尺、則其距底若干。

演習七九九●三角斜稜截體之鋒爲5粎、7粎、9粎、其正截面積16方粎、求體積若干。

演習八〇〇●正方體全面積1方粎、求其鋒長若干。

演習八〇一●稜錐體底面121方尺、有截面與底平行、距尖3尺、其面積爲49方尺、求體之高。

演習八〇二●六角正稜錐體之高8尺、其底容於徑15尺之圜內、求其旁面與體積。

演習八〇三●凡正稜柱體之旁鋒等於其高。

演習八〇四●矩棱體對角線方、等於其三鋒之正方和。

演習八〇五●四面棱體之鋒、如俱相等、則在任一隅之諸角和、等於二正角。

演習八〇六●截三角棱錐體之平面與二對鋒平行、截成之面、必爲平行方形。

演習八〇七●正棱柱體之旁面、皆爲矩形。

演習八〇八●截棱柱體之平面與一旁鋒平行、截成之面、必爲平行方形。

演習八〇九●正方體之對角線、等於其鋒乘$\sqrt{3}$。

演習八一〇●有法棱柱體積、等於其旁面積乘底之小輻之半。

演習八一一●過平行棱體中心而爲二面所限之直線、必平分於中心。（平行棱體之中心、卽其對角線交點之所在。）

演習八一二●棱柱體內不平行之二對角平面、俱與底正交、則體爲正棱柱體。

演習八一三●棱柱體之底爲１６方尺、高爲７尺、則與底平行而距尖２尺６寸之截面積當若干。

演習八一四●矩棱體之鋒爲３寸、４寸、６寸、則其對角線之長、對角平面之積、各爲若干。

演習八一五●鐵路旁之堤一段、長３８０尺、上廣１８尺、下廣４０尺、高１２尺、則其含土若干立方尺。

演習八一六●如四邊棱柱體之四對角線同過一點、則體爲平行棱柱。

演習八一七●與底平行之平面、截去棱錐體之上截、與原形相似。

演習八一八●正棱柱體之旁面、小於任一等底等高斜棱柱體之旁面。

演習八一九●與底平行之平面截棱錐體、適平分其高、則截面爲底面四分之一、截去之小棱錐體爲原體八分之一。

演習八二〇●三角正棱柱體積、等於任一旁面乘其與對鋒之半距。

演習八二一●已知距棱體三不等面之對角線、試推其諸鋒之長。

演習八二二●正棱錐體斜高10尺、底爲五邊形容於徑6尺之圜內、求體積與旁面積。

演習八二三●矩棱體之積336立方尺、全面積320方尺、高4尺、其底之長廣各若干。

演習八二四●棱錐體重30斤、高12寸、有平面與底平行、割去一平截體、重15斤、則此截體之高若干。

演習八二五●三角正棱錐體高8寸、底每邊3寸、求其旁鋒長若干、旁面積若干。

演習八二六●有法四面棱體之積、等於其鋒之立方乘$\frac{1}{12}\sqrt{2}$。

演習八二七●有法八面棱體之積、等於其鋒之立方乘$\frac{1}{3}\sqrt{2}$。

演習八二八●凡過平行棱體中心之平面、分體爲二等分。

演習八二九●正棱錐體之旁面大於其底。

演習八三〇●三角正棱錐平截體之旁鋒長$4\frac{1}{2}$尺、一底之邊5尺、又一底之邊4尺、求其體積。

演習八三一●有法四面棱體內任一點、至四面之垂線和、等於體之高。

演習八三二●有法四面棱體之高、三倍於自其底至任一面之垂線。

幾何學卷九　立體部

圓柱體

五八四 一直線移動、恆與原位平行、且恆切一已知曲線、其所成之面、曰圓柱面。

此直線曰母線、其所切之曲線曰準線。

母線任在何位、恆稱曰面之原素。

五八五 體以圓柱面、及截其衆原素之二平行面爲界者、曰圓柱體。

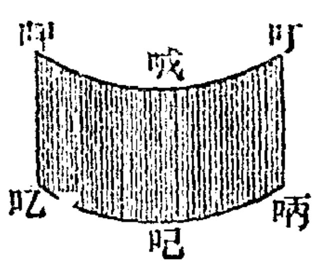
二平面爲圓柱體之二底、圓柱面爲圓柱體之旁面、或曰凸面。

凡圓柱體之原素皆相等。

二底之垂線距爲圓柱體之高。

五八六 與原素正交之平面、割圓柱體所成之截面、曰正截面。

五八七 圓柱體之衆原素、俱與其底正交者、曰正圓柱體。



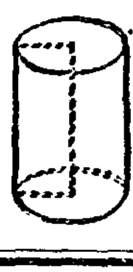
四六四節

五八八 圓柱體之衆原素不與其底正交者、曰斜圓柱體。

五八九 圓柱體之底爲平圓者、曰平圓柱體。

連平圓柱體二底中心之直線、曰圓柱體之軸。

五九〇 正平圓柱體、一稱旋成之圓柱體、因以矩形之一邊爲軸而自旋一周、即成此體也。



相似之矩形、各以相當邊爲軸而旋成之圓柱體、亦必相似。

五九一 平面含圓柱體之一原素而不割其面者、曰圓柱體之切面。

此原素即名曰切原素。

五九二 切面內任一直線與切原素相交者、爲圓柱體之切線。

五九三 棱柱體之二底、適容於圓柱二底之內、且其旁鋒即爲圓柱體之原素、則謂此棱柱體容於圓柱體內。

五九四 棱柱體之二底、切於圓柱體二底之外、且其旁鋒與圓柱體之原素平行、則謂此棱柱

體切於圓柱體外。

五九五

一● 作一圓柱體、且以任一平面過其面之一原素而割之、(五一九節註語)則割成之截面為何種平面形。

二● 若為正圓柱體、則割成之截面為何種平面形。

第一題

理題 凡平面過圓柱體之一原素所成截面、必為平行方形。

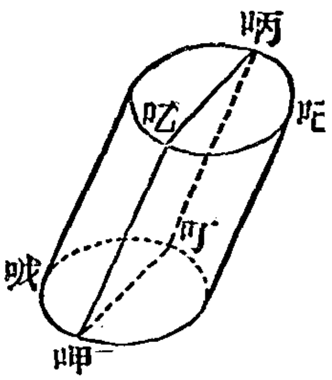
設 呷吃呐叮截面、為一平面過哦叽圓柱體之呷吃原素所截成。

求證 呷吃呐叮為平行方形。

證 過呷吃原素之平面、遇底周於又一點叮、作叮呐‖呷吃。　六三節

是則　叮呐必在吃呷叮平面內。

叮呐為圓柱體之一原素。　準五八四節、



是以叮㖫爲平面與圓柱旁面公用之線、卽爲其交線。　四六三節

又因　呷叮‖吃㖫、　一四〇節

是以　呷吃㖫叮爲平行方形。　合題

故題言云云。

五九六 系 凡平面過正圓柱體之一原素所成截面必爲矩形。

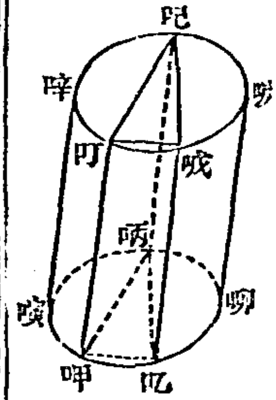
第二題

五九七 一● 作一圓柱體其二底相比如何。

二● 平行面與其衆原素相交者、剖圓柱體所成之截面、相比何如。

三● 與底平行之面剖圓柱體所成截面與底相比何如。

理題 圓柱體之二底相等。



設 嗔咦爲圓柱體、啐咦與嗔唎爲其二底。

求證 啐咦＝嗔唎。

證 任取上底周界內叮、哦、叱三點、作面之原素叮呷、哦吃、叱㖫。

又作呷𠮙、𠮙㖠、呷㖠、叮𠰌、𠰌𠯀、與叮𠯀等線。

夫　呷叮與𠮙𠰌及㖠𠯀皆等而平行。　五八五、五八四節

∴　呷𠰌與呷𠯀及𠮙𠯀各爲平行方形、　一五〇節

而　呷𠮙＝叮𠰌、呷㖠＝叮𠯀、𠮙㖠＝𠰌𠯀、　何故

是以　呷𠮙㖠△＝叮𠰌𠯀△。　何故

以上底疊於下底之上、使叮𠰌正合呷𠮙。

是則　𠯀乃正合於㖠。

惟𠯀爲上底周界內任一點、故上底周界內諸點、必落於下底周界之內。

是以　啐唊＝嗔𠰗。　三六節

故題言云云。　合題

五九八 **系一** 平行面交衆原素而割圓柱體、所成截面必相等。

五九九 **系二** 平圓柱體之軸、必過凡與底平行截面之中心。

第三題

凡稜柱體之旁面與何者等積。(五一九節)如其旁面之面數遞增無限、則稜柱體漸近何體、而以之爲限。是則凡圓柱體之旁面、與其一原素及正截面周界所成矩形相比何如。

題 圓柱體之旁面、與其面之一原素偕正截面周界所成之矩形等積。

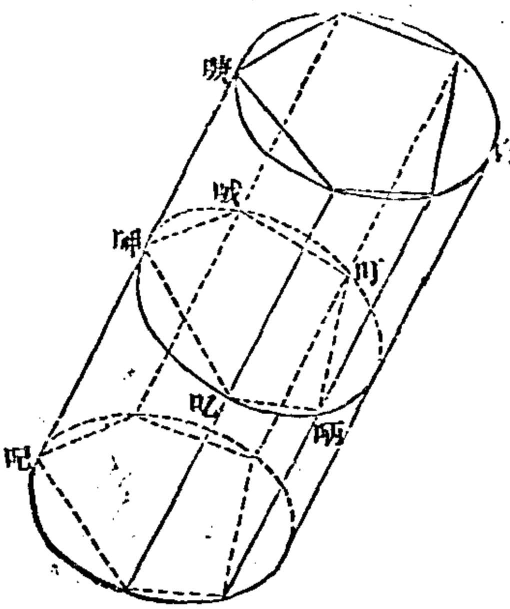
設 吧呼爲圓柱體、呷吃㖠叮哦爲其任一正截面、吧咦爲其面之任一原素。

命吧呼之旁面爲呷、正截面之周界爲吧。

求證 呷＝吧咦・吧矩形。

證 於此圓柱體內容一稜柱體、命其旁面爲呷'、其正截面之周界爲吧'。

是則各旁鋒爲圓柱體之一原素、　五九三節



而衆原素皆相等。　五八五節

∴ 呻′≑吧′咦·吧′矩形。 五一九節

若內容棱柱體旁面之面數遞增至無限、則 吧′漸近吧而以之爲限、 三九三節

∴ 呻′漸近呻而以之爲限。

惟面數任若干大、 呻′≑吧′咦·吧′矩形。

是以 呻≑吧咦·吧矩形。 三三六節

故題言云云。 合題

六〇一 圓旋成圓柱體之旁面與其高偕底周之矩形等積。

數學術語 學者可自編之。

六〇二 公式 設呷爲旋成圓柱體之旁面積、哂爲全面積、哰爲高、味爲底半徑。

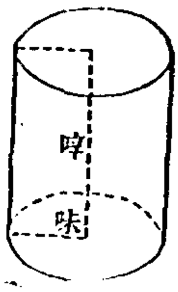
是則 呷＝2冂味×哰、 三九五節

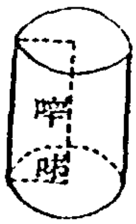
又 哂＝2冂味×哰＋2冂味^2＝2冂味(哰＋味)。 三九八節

第四題

六〇三 設有相似之二旋成圓柱體、一高4、半徑2、一高2、半徑1、試各推其面積、則其旁面積或全面積之比例、與其高方之比例、或半徑方之比例、相比何如。

理題 相似旋成圓柱體之旁面積、或全面積相比、如其高方、或半徑方相比。





設 相似之旋成圓柱體二、此體之高為哼、半徑為咊、彼體之高為哼′、半徑為咊′。
命其旁面積為呷與呷′、全面積為哂與哂′。

求證 一 $\text{呷}:\text{呷}'=\text{哼}^2:\text{哼}'^2=\text{咊}^2:\text{咊}'^2$。

二 $\text{哂}:\text{哂}'=\text{哼}^2:\text{哼}'^2=\text{咊}^2:\text{咊}'^2$。

證 一 夫成此二體之矩形既相似、故有

$$\frac{\text{咊}}{\text{咊}'}=\frac{\text{哼}}{\text{哼}'}=\frac{\text{咊}+\text{哼}}{\text{咊}'+\text{哼}'}、$$

二九九、二七九節

六〇二節

∴ $\frac{呷}{呷'}=\frac{2冂味哷}{2冂味'哷'}=\frac{味}{味'}\times\frac{哷}{哷'}=\frac{哷^2}{哷'^2}=\frac{味^2}{味'^2}$、

即 $呷:呷'=哷^2:哷'^2=味^2:味'^2$。

二●夫 $\frac{哂}{哂'}=\frac{2冂味(味+哷)}{2冂味'(味'+哷')}=\frac{味(味+哷)}{味'(味'+哷')}=\frac{味^2}{味'^2}=\frac{哷^2}{哷'^2}$、

即 $哂:哂'=哷^2:哷'^2=味^2:味'^2$。

故題言云云。 合題

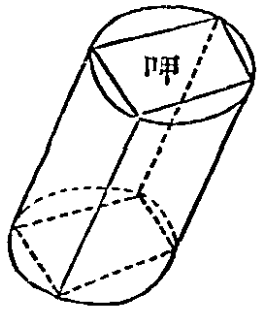
六〇四 **系** 相似旋成圓柱體之旁面積或全面積相比如其任一相當度之平方相比。

第五題

六〇五 凡棱柱體之積等於何者。（五四三節）如棱柱體旁面之數增至無窮、則漸近何體、且以之為限。是則圓柱體之積等於何者。

理題 凡圓柱體之積、等於底乘高。

設呷為圓柱體、吃為其底、哷為其高。



命其體積爲咳。

求證　咳＝吃×啐。

證　於此圓柱體內作一內切棱柱體、命其體積爲咳′、底爲吃′。

是則此棱柱體之高仍爲啐、而咳′＝吃′×啐。　五四三節

如內切棱柱體旁面之數增至無窮、則

吃′漸近吃、以之爲限。　三九三節

咳′漸近咳、以之爲限。

∴

但旁面之數任多至若干、

咳′＝吃′×啐。

是以　咳＝吃×啐。　二二三節

故題言云云。　合題

公式　設味爲旋成圓柱體之底半徑、則

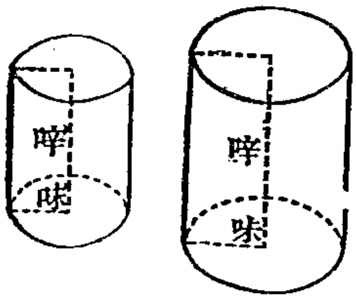
吃＝冂味²、　三九八節

∴咳＝冂味^2×哻。

第六題

相似之旋成圓柱體二、此體高4、半徑2、彼體高2、半徑1、各推其體積、此二體積之比例、與其高之立方、或半徑立方之比例、相比何如。

理題 相似之旋成圓柱體相比、如其高之立方、或半徑之立方相比。



設 任有相似之旋成圓柱體二、此體之高為哻、半徑為味、彼體之高為哻′、半徑為味′。

命此二體之積為咳與咳′。

求證 咳:咳′＝哻^3:哻′^{3}＝味^3:味′^{3}。

證 夫既成此二體之矩形為相似、則

$\frac{味}{味'}=\frac{哻}{哻'}$、

二九九節

合題

$\therefore\ \dfrac{\text{咳}}{\text{咳}'}=\dfrac{\text{冂}\text{味}^2\text{啐}}{\text{冂}\text{味}'^2\text{啐}'}=\dfrac{\text{味}^2}{\text{味}'^2}\times\dfrac{\text{啐}}{\text{啐}'}=\dfrac{\text{啐}^3}{\text{啐}'^3}=\dfrac{\text{味}^3}{\text{味}'^3}$、

即　$\text{咳}:\text{咳}'=\text{啐}^3:\text{啐}'^3=\text{味}^3:\text{味}'^3$。

故題言云云。

六〇八　系相似之旋成圓柱體相比如其任一相當度之立方相比。

圓錐體

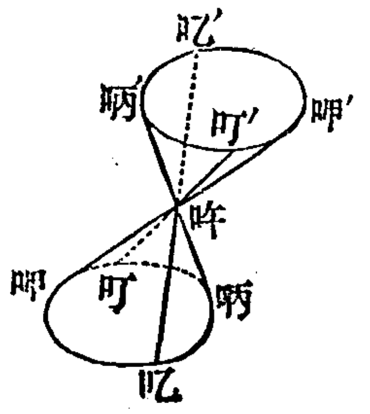
六〇九　一直線過定點、恆切一已知曲線而旋轉、其所成之面曰圓錐面。

旋轉之直線曰母線、定點曰尖、已知之曲線曰準線、

母線任在何方位、恆稱之曰面之原素。

苟母線在尖之兩旁、則全面分爲上下兩錐面。

如圖、呷呷′爲母線、吘爲尖、呷吃呐叮爲準線、轉成吘一呷吃呐叮與吘一呷′吃′呐′叮′上下兩圓錐面、呷呷′、吃吃′、呐呐′、叮叮′等各爲一原素。



六一〇　體以圓錐面、及割其衆原素之平面爲界者、曰圓錐體。

六一一 平面爲圓錐體之底、圓錐面爲其旁面、一稱凸面亦曰斜面。

自尖至底面之垂線距爲圓錐體之高。

圓錐體以平圓爲底者、曰平圓錐體。

六一二 連圓錐體尖與底中心之直線、曰圓錐體之軸。

軸與底正交之圓錐體、曰正圓錐體。

六一三 軸不與底正交之圓錐體、曰斜圓錐體。

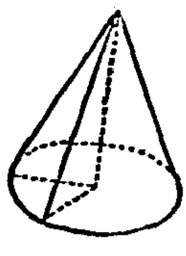
六一四 正平圓錐體、一稱旋成之圓錐體、蓋以正三角形正交二邊之一爲軸而旋轉、即可成之也。

旋成圓錐體之衆原素均相等、任取其一、俱爲圓錐體之斜高。

相似正三角形、以相當邊爲軸而旋轉、所成之圓錐體亦相似。

六一五 平面函圓錐體之一原素而不割其面者、爲圓錐體之切面。

此原素曰切原素。



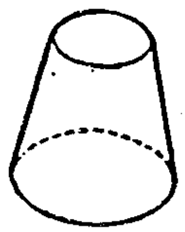
六一六　切面內任一直線與切原素相交者、爲圓錐體之切線。

六一七　與底平行之截面、與底所夾圓錐體一段、曰圓錐截體。

原圓錐體之底、爲截體之下底、平行截面爲其上底。

二底之垂線距爲截體之高。

旋成圓錐體之一原素、爲截體二平行底所限之一段、即截體之斜高。



六一八　如棱錐體之底、適容於圓錐體底內、且其諸鋒卽爲圓錐體之原素、則謂此棱錐體內切圓錐體。

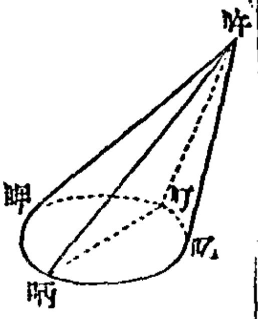
六一九　如棱錐體之底、切於圓錐體底之外、且二尖適相符合、則謂此棱錐體外切圓錐體。

第七題

六二〇　作一圓錐體、次過其尖任作一平面、則所成之截面爲何等平面形。

理題　平面過圓錐體之尖割體、所成之截面爲三角形。

設　吽ー呷叱叮爲圓錐體、有平面過其吽尖、割之成呐吽叮截面、



求證 呐吘叮爲三角形。

證 作吘呐、吘叮二直線。

是則吘呐、吘叮、各爲圓錐體之原素。　六〇九節

旣吘呐與吘叮各有二點與呐吘叮平面公用、則必同在此平面内。　四二七節

∴ 吘呐與吘叮爲割面與旁面之交線。

又 呐叮爲直線。　四四一節

是以 呐吘叮爲三角形。　八五節

故題言云云。　合題

演習八三三●旋成圓柱體、高15尺、底徑6尺、求其旁面若干。

演習八三四●旋成圓柱體高7尺、底周5尺、求其體積若干。

演習八三五●圓柱體之長14尺、徑2.5尺、問有若干立方尺。

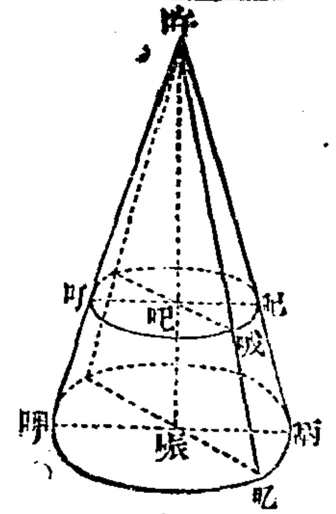
演習八三六●旋成圓柱體高一尺六寸、底徑一尺一寸、問其全面積若干、體積若干。

第八題

六二二　一●作平圓錐體一次、以與底平行之平面割之、則所成之截面爲何種平面形。

二●圓錐體軸、穿一切與其底平行之截面於何點。

理題凡與平圓錐體底平行之平面割體、所成之截面、必爲平圓。



設吘丨呷吃㖞爲平圓錐體、有平面與其底平行、割成叮哦吧截面。

求證叮哦吧爲平圓。

證作圓錐體之軸吘㖊、穿叮哦吧於吧。

過吘㖊、及吘呷、吘吃等原素作諸平面、遇底於㖊呷、㖊吃、等諸半徑上、交平行截面於吧叮、吧哦等線上。

原設　叮哦吧與呷吃㖞兩平面平行、

∴　吧叮∥㖊呷、而吧哦∥㖊吃。　四六三節

是故吘吧叮與吘㖊呷兩三角形、吘吧哦與吘㖊吃兩三角形、俱相似。

是以　吧叮：㖘呷＝吘吧：吘㖘、　二九九節

而　吧㖈：㖘𠯈＝吘吧：吘㖘、

∴　吧叮：㖘呷＝吧㖈：㖘𠯈。

惟　㖘呷＝㖘𠯈、　何故

∴　吧叮＝吧㖈、　二七二節

是卽凡從吧點至叮㖈吧周之諸直線均相等也。

是以　叮㖈吧爲平圓。　一七三節

故題言云云。　合題

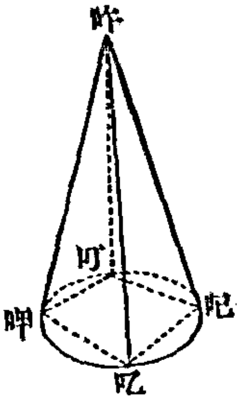
六二二　系平圓錐體之軸必過凡與其底平行之截面中心。

演習八三七●旋成圓錐體之全面積659方寸、高15寸、求其底徑若干。

第九題

六二三　凡正棱錐體之旁面與何者等積。如其旁面之數遞增至無窮、則棱錐體漸近何體、而以之爲限。是則旋成圓錐體之旁面、與其底周及斜高所成矩形相比何如。

理題　旋成圓錐體之旁面、與其底周偕斜高所成矩形之半等積。



設　吘—呷吃吧叮為任一旋成圓錐體、其斜高為啞、底周為哂。
命其旁面為呻。

求證　呻≑$\frac{1}{2}$哂·啞矩形。

證　於此圓錐體內作一內切正稜錐體、其邊數可任為若干、命　六一八節

此體之旁面為呻'、斜高為啞'、底之周界為吧'。

是則稜錐體之諸鋒、各為圓錐體之一原素、　五五一節

而　呻'≑$\frac{1}{2}$吧'·啞'矩形。

若內切稜錐體之面數遞增至無窮、則　三九二節

吧'漸近哂以之為限、

啞'漸近啞以之為限、

∴

而　呻′漸近呻以之爲限。

惟其面數任多至若干、

呻′≑$\frac{1}{2}$吧·咄′矩形。

是以

呻≑$\frac{1}{2}$哂·咄矩形。

故題言云云。　三二一六節 合題

六二四

數學術語●學者可按理題自編之。

公式●命旋成圓錐體之底半徑爲味、其旁面積爲呷、全面積爲哂。

則有

呷＝$\frac{1}{2}$(2丌味×咄)＝丌味咄、　三九五節

而

哂＝丌味咄＋丌味^2＝丌味(咄＋味)。　三九八節

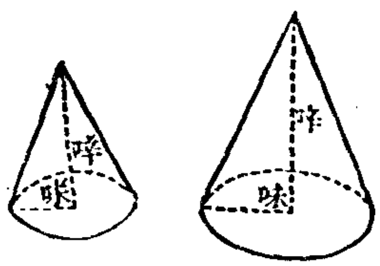
第十題

理題 相似之旋成圓錐體、其旁面或全面相比、如其高面之比例、與其高方、或底半徑方之比例、相比何如。

六二五

有相似之旋成圓錐體二、此體高8、斜高10、底半徑6、彼體高4、斜高5、底半徑3、試推其面積、其旁面或全面之比例、與其高方、或底半徑方之比例、相比何如。

方、或底半徑之方相比。



設有相似之旋成圓錐體二、其高爲啐與啐′、斜高爲吡與吡′、底半徑爲味與味′。

命此二體之旁面積爲呷與呷′、其全面積爲哂與哂′。

求證一　$呷:呷'=啐^2:啐'^2=味^2:味'^2$。

二　$哂:哂'=啐^2:啐'^2=味^2:味'^2$。

證一●夫既成此二圓錐體之母三角形相似、故

$\frac{啐}{啐'}=\frac{吡}{吡'}=\frac{味}{味'}=\frac{吡+味}{吡'+味'}$、　二九九、二七九節

∴　$\frac{呷}{呷'}=\frac{冂味吡}{冂味'吡'}=\frac{味}{味'}\times\frac{吡}{吡'}=\frac{味^2}{味'^2}=\frac{啐^2}{啐'^2}$、　六二四節

即　$呷:呷'=啐^2:啐'^2=味^2:味'^2$。

二●夫　$\frac{哂}{哂'}=\frac{冂味(吡+味)}{冂味'(吡'+味')}=\frac{味(吡+味)}{味'(吡'+味')}=\frac{味^2}{味'^2}=\frac{啐^2}{啐'^2}$、　六二四節

卽 $哂:哂'=啐^2:啐'^2=味^2:味'^2$。

故題言云云。 合題

六二六

系 相似之旋成圓錐體其旁面或全面相比、如其任一相當之度平方相比。

演習八三八●旋成圓錐體之斜高13尺、底徑5尺、求其旁面積若干。

演習八三九●正平圓柱體與正平圓錐體等底等高如其高爲底半徑之五倍、則二體旁面相比何如。

第十一題

六二七

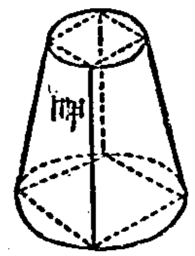
一●凡正稜錐平截體之旁面與何者等積。如其旁面之數遞增至無窮、則其體漸近何體而以之爲限。是則凡旋成圓錐截體之旁面、與斜高偕二底周和所成矩形相比何如。

二●距二底相等之截面周與二底周和之半相比何如。

理題 旋成圓錐截體之旁面、與其斜高偕二底周和所成矩形之半等積。

設呷爲旋成之圓錐截體、其斜高爲咄、上下二底之周爲吶與吶′。

命截體之旁面爲呻。



求證 呻 ⊖ $\frac{1}{2}$ 呭・(哂＋哂′)矩形。

證 於此圓錐截體內切一正棱錐截體、命其旁面為呻′、斜高為呭′、上下二底之周為吧與吧′。

是則 呻′ ⊖ $\frac{1}{2}$ 呭′・(吧＋吧′)矩形。 五五二節

若內切截體旁面之數遞增至無窮、則

∴ 吧與吧′漸近哂與哂′、各以之為限、

呭′漸近呭以之為限、

而 呻′漸近呻以之為限。 三九二節

惟旁面之數任多至若干、

呻′ ⊖ $\frac{1}{2}$ 呭′・(吧＋吧′)矩形。

是以 呻 ⊖ $\frac{1}{2}$ 呭・(哂＋哂′)矩形。 三二六節

故題言云云。 合題

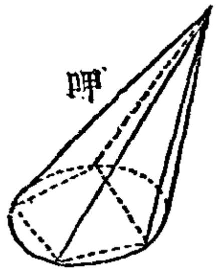
系 旋成圓錐之截體、其旁面與其斜高偕距二底等遠截面之矩形等積。

數學術語●學者按題理自編之。

凡稜錐體之積與何者相等。如其旁面之數遞增至無窮、則漸近何體、且以之為限。是則凡圓錐體之積與何者相等。

第十二題

理題 凡圓錐體之積、等於其底乘高三分之一。



設 呷為任一圓錐體、吃為其底、哮為其高。

命其體積為咳。

求證 咳 = ⅓ 吃 × 哮。

證 於此圓錐體作一內切稜錐體、命其積為咳′、底為吃′。

是則稜錐體之高亦為哮、即有　　　　五六〇節

咳′ = ⅓ 吃′ × 哮。

若內切稜錐體旁面之數遞增至無窮、則

吃′漸近吃以之為限、　　　　三九三節

∴　咳′漸近咳以之爲限。

惟旁面之數任多至若干、咳′＝3|1叱′×啐。

是以　咳＝3|1叱×啐。　二二二節

故題言云云。　合題

公式●命味爲旋成圓錐體之半徑、則

叱＝刀味²、　三九八節

∴　咳＝3|1刀味²×啐。

六三〇

演習八四〇●正平圓錐體、斜高21尺、高15尺、求其全面積若干。

演習八四一●正平圓錐體斜高6粎、底半徑5粎、求其旁面與體積各若干。

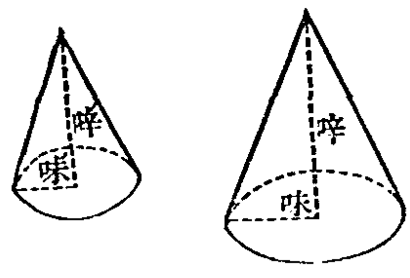
第十三題

六三一

相似之旋成圓錐體二、此體之高8、底半徑6、彼體之高4、底半徑3、試各推其體積之比例、與其高立方、或底半徑立方之比例、相比何如。

二九九節

理題 相似之旋成圓錐體相比、如其高之立方、或底半徑之立方相比。



設有相似之旋成圓錐體二、此體之高爲啐、底半徑爲味、彼體之高爲啐′、底半徑爲味′。

命此二體之積爲咳與咳′。

求證 $咳：咳′=啐^3：啐′^3=味^3：味′^3$。

證 夫成此二體之母三角形既相似、故

$$\frac{啐}{啐′}=\frac{味}{味′}、$$

$$\frac{咳}{咳′}=\frac{\frac{1}{3}冂味^2啐}{\frac{1}{3}冂味′^2啐′}=\frac{味^2}{味′^2}\times\frac{啐}{啐′}=\frac{味^3}{味′^3}=\frac{啐^3}{啐′^3}$$

$$\therefore\ 咳：咳′=啐^3：啐′^3=味^3：味′^3。$$

即故題言云云。

六三〇節

系 相似之旋成圓錐體相比、如其任一相當度之立方相比。

合題

演習八四二● 圓錐體高13尺、底周9尺、求其積若干。

演習八四三● 旋成圓錐之截體斜高17寸、二底半徑爲5寸與3寸、求其全面積若干。

演習八四四● 旋成之圓錐體高15寸、以與底平行之平面距底若干割之、方使所成截體爲原體之半。

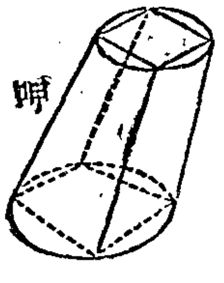
演習八四五● 與旋成圓錐體之底平行之平面必各距尖若干、方能割之爲三平分。

演習八四六● 與底平行之平面割旋成圓錐體之高於距尖$\frac{2}{3}$之處、則所割去之小圓錐體、與原體相比何如。

第十四題

凡棱錐截體之積等於何者。如其面數遞增至無窮、則漸近何體、而以之爲限。是則圓錐截體之積等於何者。

理題 凡圓錐截體之積、等於其二底與二底之中率三者之和、乘高三分之一。



呷

設 呷爲圓錐截體、哱爲其高、吃與乙爲其上下二底。

命其體積爲咳。

求證 咳 $= \frac{1}{3}$ 哱$($吃$+$乙$+\sqrt{吃\times乙})$。

證 於此圓錐截體內、作一內切棱錐截體、命其體積爲咳′、上下二底爲

吃′與乙′。

是則此稜錐截體之高亦爲晬、

而　$咳' = \frac{1}{3}晬(吃' + 乙' + \sqrt{吃' \times 乙'})$。　五六四節

夫若內切截體旁面之數遞增至無窮、則

吃′與乙′漸近吃與乙、而以之爲限。　三九三節

咳′漸近咳而以之爲限。

∴　惟旁面之數任多至若干、

$咳' = \frac{1}{3}晬(吃' + 乙' + \sqrt{吃' \times 乙'})$。

是以　$咳 = \frac{1}{3}晬(吃 + 乙 + \sqrt{吃 \times 乙})$。　二二三節

故題言云云。　合題

公式●命味與味′爲旋成圓錐截體之二底半徑、則有

$吃 = 冂味^2$、　$乙 = 冂味'^2$。　三九八節

而　$\sqrt{吃 \times 乙} = 冂味味'$、

∴　咳＝$\frac{1}{3}$冂啐(味^2＋味$'^2$＋味味$'$)。

演習八四七◎圓錐截體高21尺、二底周爲17尺與13尺、求其體積若干。

公式

公式中之符號

吃＝底	乙＝上底	呐＝底周
呐$'$＝上底周	呐$''$＝中截面周	味＝底半徑
味$'$＝上底半徑	啐＝高	呭＝斜高
呷＝旁面積	哂＝全面積	咳＝體積

旋成圓柱體

呷＝呐×啐。

呷＝2冂味啐。

哂＝2冂味(啐＋味)。

咳＝吃×啐。　(任何圓柱體俱同此)

咳＝丌味^{2}啐。

旋成圓錐體

呷＝$\frac{1}{2}$呐×吔。

呷＝丌味吔。

哂＝丌味(吔＋味)。

咳＝$\frac{1}{3}$吃×啐。（任何圓錐體俱同此）

咳＝$\frac{1}{3}$丌味^{2}啐。

旋成圓錐之截體

呷＝$\frac{1}{2}$吔(呐＋呐$'$)。

呷＝吔×呐$''$。

咳＝$\frac{1}{3}$啐(吃＋乙＋$\sqrt{吃×乙}$)。（任何截體俱同此）

咳＝$\frac{1}{3}$丌啐(味^2＋味$'^2$＋味味$'$)。

習題

演習八四八●旋成圓柱體之徑8寸、高12寸、求其旁面積、全面積、體積、各若干。

演習八四九●旋成圓錐體之底徑10糎、高12糎、求其旁面積、全面積、體積、各若干。

演習八五〇●旋成圓錐之截體一、底半徑爲6寸與4寸、高9寸、求其旁面積、全面積、體積、各若干。

演習八五一●於圓柱面上、祇可作一直線過已知之點。

演習八五二●切圓柱體之二平面之交線、必與其一原素平行。

演習八五三●製圓錐形帳幕一、高18尺、底徑10尺、需布若干。

演習八五四●圓木一段、長40尺、二端之徑爲3尺與1尺、求其體積若干立方尺。

演習八五五●圓柱形器長40粉、徑20粉、可貯水若干瓩。

演習八五六●有鉛一方、置入徑24糎之圓柱形水筩內、水即上升8糎、如鉛之重率爲11.4則此鉛重若干瓩。

演習八五七●圓柱形水筩深6.4粎、徑5.2粎、如每小時流入2竡、則若干時可流滿此筩。

演習八五八●有平面過平圓柱體底之一切線、如作原素至此切點、必爲體之切線。

演習八五九●有平面過平圓錐體底之一切線、如作原素至此切點、必爲體之切線。

演習八六〇●二相似之旋成圓柱體相比、如27:64、若首體之徑爲3尺、則次體之徑若干。

演習八六一●圓柱形器貯水1728瓩、如器徑爲高之三分之一、則徑高各爲若干。

演習八六二●試證凡外切平圓錐體之棱錐體、其旁面俱爲圓錐體之切面。

演習八六三●有旋成圓錐體、底徑5·6寸、高6·4寸、另有圓柱體與之等積、只知徑4·8寸、其高若干。

演習八六四●圓柱形器徑12糎、高20糎、水銀之重率爲13·6、則此器可貯水銀若干。

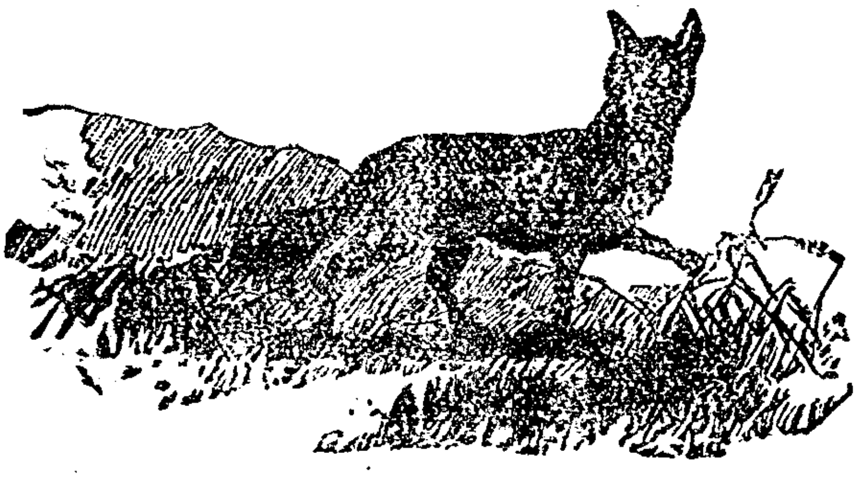
演習八六五●兩相似之旋成圓錐體相比、如512:729、則其旁面之比例何如。

演習八六六●圓柱體瓶之徑8糎、高24糎、能容重率爲·79之酒精若干瓩。

演習八六七●雲石之重率爲2·8、如以之製一圓錐體、底半徑20糎、高50糎、則其重若干瓩。

演習八六八●旋成圓錐體之斜高3粎、欲以與底平行之平面分旁面爲三等分、則其割原素之處當距尖若干。

演習八六九●如旋成圓柱體之高等於其底徑、則其體積等於全面乘底半徑三分之一。



幾何學卷十　立體部

球

六三六 體之界面內各點距體內一點等遠者曰球。

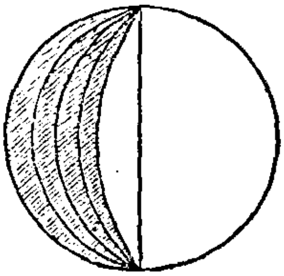
授球體幾何學時、宜備球體黑版一具、以便學者就其上繪圖、各學生亦宜各備小黑球或石球一、以便自習之時隨意作圖研究題理、用半周曲尺正合球面者、可作球面之大圜。

此點爲球之心。

半圜以其徑爲軸、旋轉一周、即成球體。

六三七 自球心至球面任一點之直線、曰半徑。

過球心至球面爲界之直線曰球徑。



六三八 線或平面祇有一點遇球面者、爲球之切線或切面。

如是則球亦反切其線或面。

六三九 二球之面祇有一點公用、則爲互相切。

六四〇 棱體之衆面盡切球面、則謂此球內切於棱體。

六四一 棱體之衆尖、盡在球面之內、則謂此球外切於棱體。

六四二 自理十八同球或等球之半徑必等。

十九 同球或等球之徑必等。

二十 二球之半徑或徑相等、則二球亦等。

第一題

六四三 一 作一球體、且以平面割之、(五一九節註語)則所成截面爲何種平面形。

二 作直線連球心與球內一圓之心、則其與此圓平面相視之方向何如。

三 以距球心等遠之二平面割球、則所成二截面相比何如。

四 如二截面距心不等遠、則何圓更大。

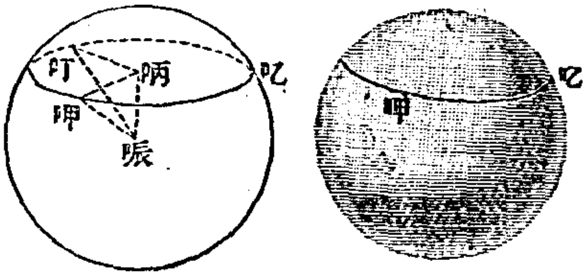
理題 凡平面割球、所成之截面必爲圓。

設 有球以㖘爲心、呷吃叮爲其任一截面。

求證 呷吃叮爲圓。

證 作㖘𠰌與呷吃叮平面正交、至截面周上任二點作㖘呷、㖘叮二半徑、又作𠰌呷、𠰌

叮二直線。
夫呢旣在呢呐垂線內。
且　　呢呷＝呢叮、　　　　　自理十八
故　　呐呷＝呐叮。　　　　　四四九節
但呷與叮爲呷吃叮截面周內任二點、
是以　　呷吃叮爲圜、呐爲其心。　　　　一七三節
故題言云云。　　　　　　　　　合題



六四四 **系一**　連球心與球內一圜心之直線、爲此圜平面之垂線。

六四五 **系二**　距心等遠之平面割球、必成等圜。

六四六 **系三**　距心不等遠之二平面割球、所成二圜距心近者更大。

六四七 過球心之平面割球、所成截面、曰球之大圜。

六四八 不過球心之平面割球、所成截面、曰球之小圜。

六四九 球徑與圓之平面正交者、曰此圓之軸。

六五〇 圓軸之二端、曰圓之二極。

六五一

一 作球一、且以任一平面割之、使成球之一圓、則其軸過圓之何點。

二 作球一、且以二平行面割之、使成二平行圓、則此二圓之軸、互相視之方位何如。是則此圓二極、與彼圓二極、互相視之方位何如。

三 過同球或等球作二平面、割成二大圓、則其相比何如。

四 作一球、且以大圓分之爲二分、其相比何如。

五 作二平面割一球成二大圓、旣二圓之交線過球心而爲二圓之徑、則此二大圓如何相割分。

六 作正交二平面割一球、成二大圓、則此二圓按其二極互相過之方位何如。若二大圓彼此互過二極、則其平面互相視之方位何如。

七 作一球、且以平面過其心與球面上任二點、則所成截面爲何等圓。是則過球面任二點可作何等弧。

八　作一球、且以平面過球面上任三點、則所成截面爲何等平面形。有若干平面可過此三點、是則過球面任何三點可作若干大圜。

六五二　圜之軸必過圜之中心。

六五三　平行圜之軸同、二極亦同。

六五四　同球或等球之大圜必等。

六五五　凡球之大圜平分球爲二等分。

六五六　同球之二大圜互相平分。

六五七　二大圜之平面正交則必互過他圜之二極、反之亦然。

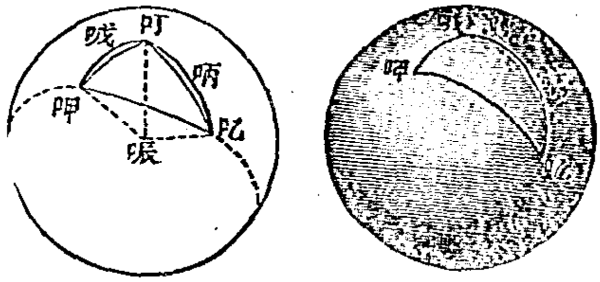
六五八　過球面二定點、祗可作大圜之一弧。

六五九　過球面三定點祗可作一圜。

第二題

六六〇　作一球、於其面選取二點、作平面過此二點及球心、則所成截面爲何等圜。是則連此二點者爲何等弧。如於球面另作線連此二點、則二點間何者爲最短之線。

理題 球面二點間在球面最短之距、為連此二點大圓之弧、然不可大於半周。



設 呷與吃為球面任二點、呷吃為連此二點之大圓弧、不大於半周、呷戊呐吃為球面上連呷吃二點之他線。

求證 呷吃小於呷戊呐吃。

證 取呷戊呐吃內任一點叮、作二大圓弧、一過呷與叮、一過吃與叮、自球心哌作哌呷、哌吃、哌叮。

是則呷哌吃、呷哌叮、吃哌叮諸角、俱為尖在哌之三稜角之面角。

∴ 呷哌叮∠＋吃哌叮∠乃大於呷哌吃∠。 四九八節

但呷哌叮、吃哌叮、呷哌吃三角、各以呷叮、吃叮、呷吃弧為度、 二二四節

∴ 呷叮弧＋吃叮弧＞呷吃弧。

仿此以大圜弧連呷𠯫叮內任一點與呷及叮、又連叮吶吃內任一點與叮及吃、此諸弧之和、俱大於呷叮弧＋吃叮弧、故大於呷吃弧。

仿此迭爲之、則自呷至吃之大圜弧距、可漸增而恆大於呷吃。

是以此諸大圜弧之和之限呷𠯫吶吃、乃大於呷吃。

故　呷吃小於呷𠯫吶吃。　合題

六六一　凡言球面二點之距、恆指其最短距、卽連此二點之大圜弧也。

六六二　自圜周任一點、至較近極之距、曰圜之極距。

第三題

六六三　一● 作一球、以任一平面割之、又作平面過此所成圜之軸、及其周上任一點、是則連圜之極及周上之點者爲何等弧、此諸弧相比何如。是則自球之圜極至其周上衆點之距、相比何如。

二● 如圜爲大圜、則其極距爲周之何分。

三● 過同球或等球作平面成二等圜、其極距相比何如。

四● 已知球上二點、另取一點距前二點各爲一象限、則此點與過前二點大圜之極、相視之方位何如。

理題　球之一圜周上諸點距圜之一極必等遠。

設　呷吃啢爲球之一圜、吧與吧'爲其二極。

求證　呷吃啢周上諸點距吧與吧'俱等遠。

證　自吧至呷吃啢周上任何點呷、吃、啢等、作大圜弧、則

吧吧'⊥呷吃啢於其心、　六四九、六五二節

∴　吧呷、吧吃、吧啢三弦均相等。　四五〇節

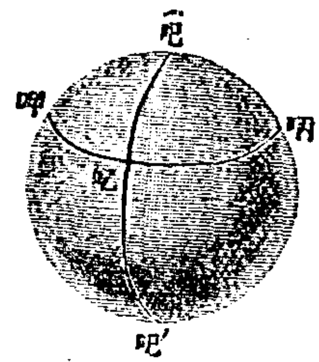
是故　吧呷、吧吃、吧啢三弧均相等。　一九六節

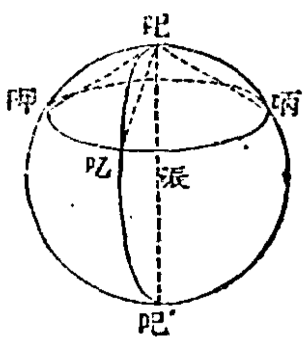
仿此亦可證吧'呷、吧'吃、吧'啢三弧各相等。

但呷、吃、啢、爲呷吃啢周上任三點、

是以凡在呷吃啢周上諸點距吧或吧'俱等。　六六一節

合題





故題言云云。

六六四　**系題**　大圜之極距爲一象限。

六六五　**系題**　同球或等球上之等圜之極距必等。

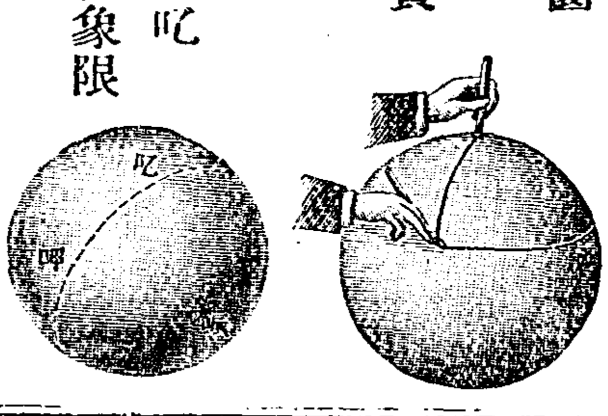
六六六 **系論** 距球面二點各爲一象限之點、即爲過此二點大圓之極。

六六七 **系論** 用六六三六六四兩節所證實之理、可於實球面上繪小圓大圓之周。

作小圓法、是取一線、其長等於圓之極距、一端定於極點、一端貫鉛筆繪圓周於球上。

作大圓法與前同、惟線之長必等於一象限耳。

六六八 **系論** 準六六六節之理、可作大圓周過實球面上任二點如呷與吃法各以已知之點爲極、以象限爲度、作弧相交於哌。自此交點以象限爲度作圓周、必爲過此二點之大圓周。



第四題

六六九 一● 如平面正交球半徑於其外端、則球與平面有若干點相遇。如此之平面稱以何名。

二● 如直線正交球半徑於其外端、則球與直線有若干點相遇。如此之直線稱以何名。

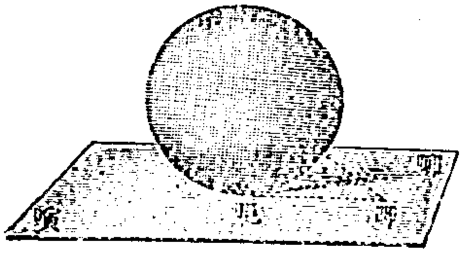
三● 球之切面或切線、與自心至切點半徑相視之方位何如。

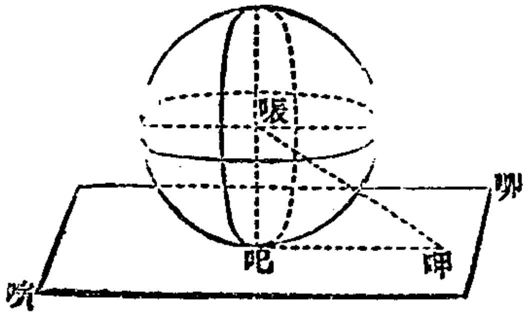
四●如直線切球之一圜、則其與切球於此切點之平面、相視方位何如。

五●如平面切一球、則此平面內過切點之諸線、與球相視方位何如。

六●二直線同切球於一點、則此二線之平面、與球相視之方位何如。

理題平面正交球半徑於其外端、卽爲球之切面。





設有嗔咿面正交球半徑哌吧於其外端吧。

求證嗔咿與球相切。

證取嗔咿面內吧外之點呷、作哌呷線。

是則　哌吧＜哌呷、　四四八節

∴　呷點在球外。

但呷爲嗔咿面內吧外之任一點、

∴　嗔咿面內除吧以外諸點、盡在球外。

是以　嗔咿與球相切於吧。　六三八節

故題言云云。　合題

六七〇 系一凡正交球半徑於其外端之直線、卽爲球之切線。

六七一 系二凡球之切面或切線、皆與切點之半徑正交。

六七二 系三切球上一圜之直線、必在其切點上切球之平面內。

六七三 系四切面內過切點任作之直線、必切球於是點。

六七四 系五同切球面任一點之二直線、卽定此點之切面。

第五題

六七五 取不在一平面之四點、各以之爲尖、成一四面棱體、於其任二面外各作一切圜、在二圜心竪立垂線、則自垂線內任一點至立垂線之本面諸尖之距相比何如。若二垂線相交、則自交點至四原點之距相比何如。此外更有他點距四原點等遠者乎。是則何面可過此四點、且有若干面可過之。

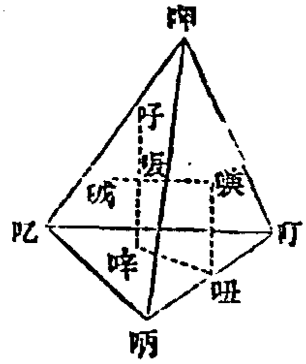
理題過不在一平面內之四點、祇可作一球面。

設呷、吃、哂、叮四點不在一平面內。

求證過呷、吃、哂、叮四點祇可作一球面、更無其他。

證設吃哂叮與呷哂叮兩三角形之外切圜心爲哼與咦。

作啐呼⊥𠮙㖙叮平面、咦𠯫⊥呷㖙叮平面。
則啐呼內各點距𠮙㖙叮三點、又咦𠯫內各點距呷㖙叮三點、俱爲相等。　四五〇節



自啐與咦作線至㖙叮之中點吜。
是則　啐吜⊥㖙叮、　咦吜⊥㖙叮、　一〇六節
∴　過啐吜與咦吜之平面與㖙叮正交、　四四四節
且此平面亦與𠮙㖙叮及呷㖙叮二平面正交。　四八三節
原作　咦𠯫⊥呷㖙叮平面於咦、
∴　咦𠯫在啐吜咦平面內。　四八一節
仿此可證啐呼在啐吜咦平面內。
是以啐呼與咦𠯫二垂線在同平面內、且爲不平行平面之垂線、故必相交、設其交於㖂點。
夫既㖂點在啐呼與咦𠯫二垂線內、則其距𠮙㖙叮三點、與呷㖙叮三點俱等遠。

是以哌點距呷叱哂叮四點等遠、以哌爲心、以哌叱爲半徑之球面、必過呷叱哂叮四點。

夫凡過呷叱哂叮四點之球面、其心必在哼吁與嗼哎二垂線內。 四五〇節

是以哼吁與嗼哎二垂線之交點哌、必爲面過呷叱哂叮四點獨一球之心矣。

故題言云云。 合題

六七六 系一 球可外切於任何四面棱體。

六七七 系二 四面棱體內四面中心之垂線、必相遇於一點。

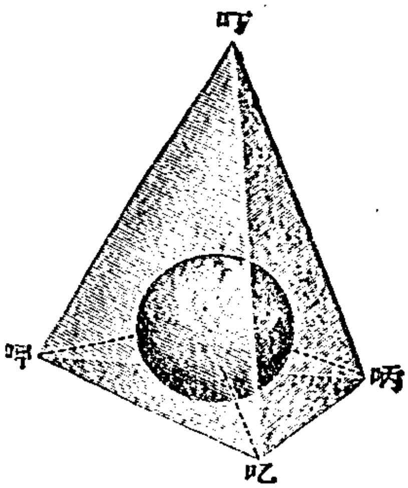
第六題

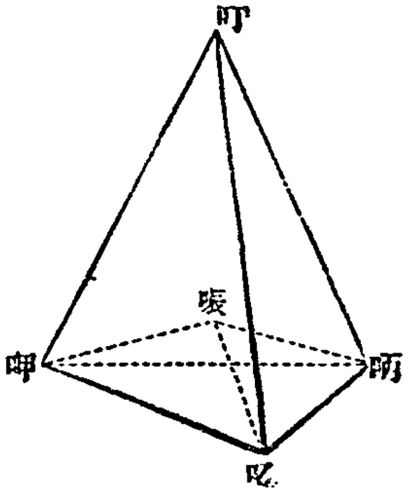
六七八 任作一四面棱體、以平面平分其公用一面之三體角、此三平面交點、與棱體諸面之距、相比何如。是則四面棱體之內可切何體。

理題 球可內切於任何四面棱體。

設 叮—呷叱哂爲任一四面棱體。

求證 球可內切於叮—呷叱哂之內。





證以哌呷吃、哌吃哂、哌呷哂三平面平分公用一面之呷吃、吃哂、呷哂三體角。

夫哌呷吃平面內各點、距呷吃哂與呷吃叮面俱等遠。 四八八節

又哌吃哂平面內各點、距呷吃哂與吃哂叮面俱等遠、哌呷哂平面內各點、距呷吃哂與呷哂叮面俱等遠。

故此三面之交點哌、必距棱體之四面等遠。

是故以哌爲心、以哌與任一面之距爲半徑作球、必切各面、 六三八節

而此球即爲四面棱體之內切球也。 六四〇節

故題言云云。 合題

第七題

系平分四面棱體六體角之六平面、必相遇於一點。

作題 求實質球體之半徑。

設 呷吧′爲任一球。

求 呷吧吧′之半徑。

解 以任一點吧爲極、於球面作一圜周。 六六七節

自此圜周中之任三點呷、吃、昞、度取其弦距呷吃、吃昞、呷昞。

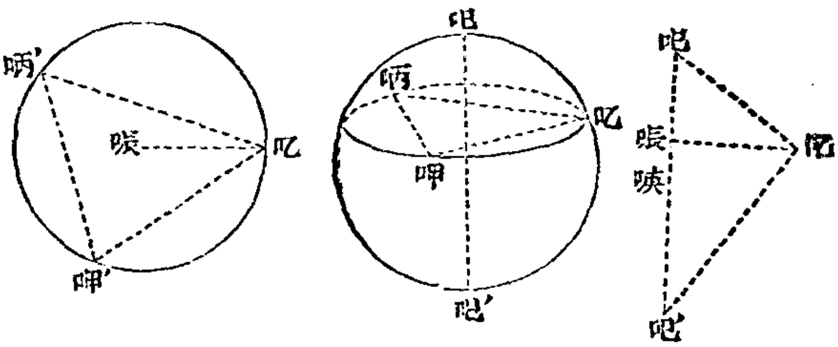
作呷′吃′昞′△、其邊等於呷吃、吃昞、呷昞、又作其外切圜。

以半徑㖘吃′爲一邊、以適等於吧吃二點間通弦之吧吃′爲弦、作吧′吃′㖘正三角形。

自吃′作吃′吧′之垂線、引長之遇吧㖘之引長線於吧′。

是則所已定之吧吧′、卽等於球之全徑、其半吧咉卽爲所求之半徑。

證 學者自證之。



演習八七〇● 等直線之末端、俱在球面者、其距球心必等。

演習八七一●正交平分四面棱體六鋒之六平面、俱相遇於一點。

弧角與弧多邊形

六八一 相交二曲線間之角、卽爲二曲線交點切線所函之角。

六八二 二大圓弧間之角、曰弧角。

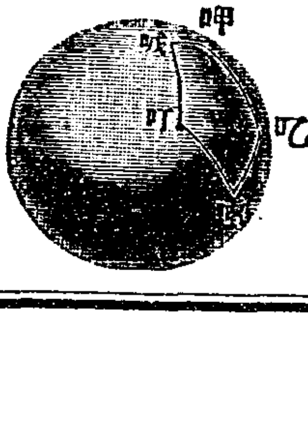
六八三 球面一分以多於二大圓弧爲界者、曰弧多邊形。界弧卽爲多邊形之邊、邊所成之角、卽爲多邊形之角、邊之交點、卽爲多邊形之角尖。

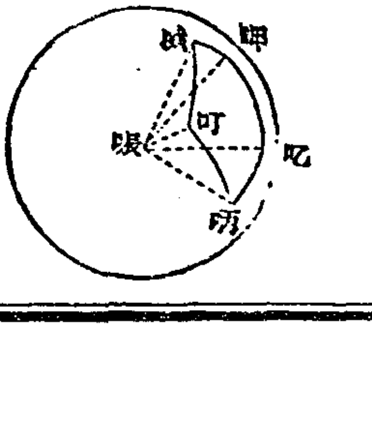
大圓弧連弧多邊形不相倚之二角尖、爲其對角弧。

六八四 弧多邊形諸邊之平面成一棱角、以球心爲尖、其面角以弧多邊形之諸邊爲度。

如圖、㖈—呷吃吶叮哎爲一棱角、其尖㖈卽球心、其面角哎㖈叮、叮㖈吶等、以呷吃吶叮哎弧多邊形之諸邊哎叮、叮吶等爲度。

六八五 弧多邊形相當之棱角爲凸、則曰凸弧多邊形。





六八六 凡論弧多邊形、如非特別聲明、則恆指凸者。
三邊之弧多邊形曰弧三角形。
弧三角形有正斜、等邊、等腰種種分別、與平三角形無異。

六八七 弧多邊形之邊既均爲弧、故恆以度分秒度量之。

六八八 球面任二點、可以一大圜之二弧連之、一常大於半周、一常小於半周、尋常所用者、恆爲小弧、否則必特爲聲明。

第八題

六八九 一●作一球於其面上作一弧角、(六六七節)又作平面過弧角二邊與球心、於所割成一段之面上、以角尖爲其一極作大圜弧、末自弧之二端作球半徑、二半徑所函之角、與弧角二邊在交點之二切線所函之角、相比何如、二半徑間之角、以何弧度之。是則原弧角以何弧爲度。

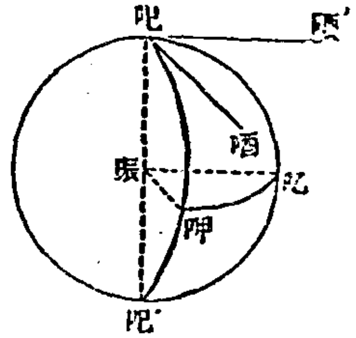
二●弧角與其二邊之平面所成體角、相比何如。

理題 弧角之度、乃以角尖爲極之大圜、被角旁兩弧所截之弧。

設呷吧吃爲一弧角、呷吃乃以角尖吧爲極之大圜弧、限於呷吧、吃吧二弧之間。

求證呷吧吃∠以呷吃弧爲度。

證在吧點作呷吧之切線吧哂、吃吧之切線吧哂′、又作哌呷、哌吃二半徑、與吧吧′全徑。



已作 吧哂正交吧呷吧′平面內之吧吧′、 二〇五節

原設吧呷爲一象限、故哌呷正交吧呷吧′平面內之吧吧′、 何故

∴ 吧哂∥哌呷、 七一節

仿此 吧哂′∥哌吃、

∴ 哂吧哂′∠＝呷哌吃∠。 四六九節

但 呷哌吃∠以呷吃弧爲度、 二二四節

∴ 哂吧哂′∠以呷吃弧爲度、

是即 呷吧吃∠以呷吃弧爲度。 六八一節

故題言云云。

六九〇 系一 弧角與其二邊之平面所成體角同度。

六九一 系二 如弧三角形之二邊爲象限、則第三邊爲其對角之度。

六九二 系三 如弧三角形之三邊俱爲象限、則其各角俱爲正角。

六九三 系四 二大圜弧相交、其交角必等。

六九四 系五 弧多邊形之角、等於其邊之平面間所函之體角。

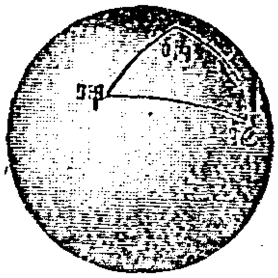
六九五 系六 按六八四、六九四兩節、弧多邊形之邊與角、與其所配棱角之面角體角同度、故自棱角之性質、可推得弧多邊形之相似性質、反之亦然。

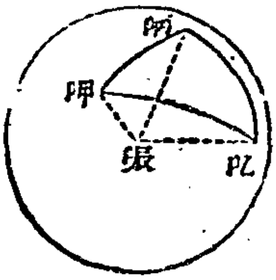
第九題

六九六 一● 作一球、於其面上作弧三角形、過形之三邊及球心、作三平面、剖成相配之三棱角、此三棱角之二面角和、與第三面角相比何如。是則凡弧三角形任二邊之和與餘一邊相比何如。

二● 任一邊與餘二邊之較、相比何如。

理題 弧三角形、任二邊之和、大於餘一邊。





設呷吃呐弧三角形、乃在以哌爲心之球面上。

求證其任二邊之和、如呷呐＋吃呐、大於餘一邊呷吃。

證於其相配之三棱角哌、呷吃呐內、有

呷哌呐∠＋吃哌呐∠大於呷哌吃∠、　四九八節

呷呐＋吃呐大於呷吃。　六九五節

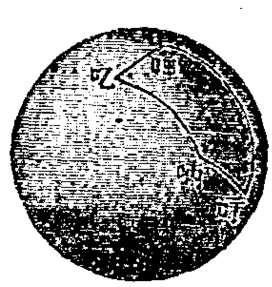
∴故題言云云。　合題

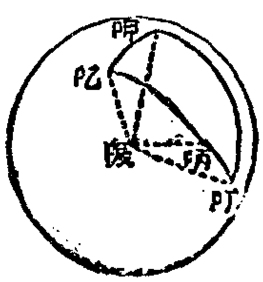
六九七 **系**弧三角形之任一邊、大於餘二邊之較。

第十題

六九八 作一球、於其面上作一弧多邊形、過形之各邊與球心作諸平面、割成相配之棱角。此棱角諸面角之和、與四正角相比何如。是則弧多邊形之諸邊和、與大圜周相比何如。

理題凡弧多邊形諸邊之和、小於大圜之周。





設呷叱哂叮弧多邊形、在以哌爲心之球面上。

求證呷叱＋叱哂＋哂叮＋叮呷＜大圜之周。

證於相配之哌—呷叱哂叮體角內、有

呷哌叱∠＋叱哌哂∠＋哂哌叮∠＋叮哌呷∠＜四正角、　四九九節

∴　呷叱＋叱哂＋哂叮＋叮呷＜大圜之周。　六九五節

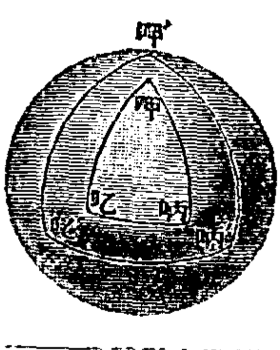
故題言云云。　合題

六九九

如以弧三角形之三角尖各爲極作大圜弧、則此三弧相交、又成一三角形、稱曰前形之極三角形。

如圖呷、叱、哂、三點各爲叱'哂'、呷'哂'、呷'叱'三大圜弧之極、則呷'叱'哂'爲呷叱哂之極三角形。

若以呷、叱、哂各爲極、而作三大全圜、則分全球面爲八箇弧三角形。



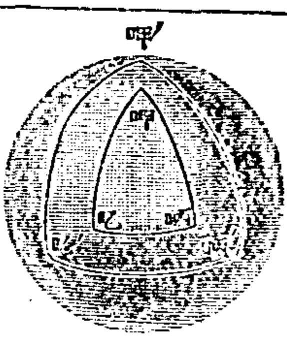
此八形之中、其一爲呷′乙′丙′之極形、其尖呷′與呷相當、同在乙丙之一旁、餘各尖亦可如是定之。

七〇〇

第十一題

於球面作一弧三角形、又作其極弧三角形、試觀首形亦可反爲次形之極三角形否。

題兩弧三角形、若此形爲彼形之極三角形、則彼形亦必爲此形之極三角形。



設呷乙丙爲弧三角形、呷′乙′丙′爲其極三角形。

求證呷乙丙亦爲呷′乙′丙′之極三角形。

證夫呷爲乙′丙′弧之極、　六九九節

∴　乙′距呷一象限。　六六四節

又　丙爲呷′乙′之極、

∴　乙′距丙一象限。

七〇一

是故 吃′為呷′呐′弧之極。 六六六節

仿此可見 呷′為吃呐弧之極、呐′為呷吃弧之極。 六九九節

是以呷′吃′呐′為呷吃呐之極三角形。

故題言云云。 合題

第十二題

於球面作弧三角形及其極三角形、選此形之任一角、引長其二邊、使遇彼形內之對邊、則各遇點至對邊遠端之距、為大圜周之何分。是則此邊為已知角二邊所函之弧、與二象限卽180°減全邊之數、相比何如。是則已知角之度、與極三角形對邊之補弧相比何如。

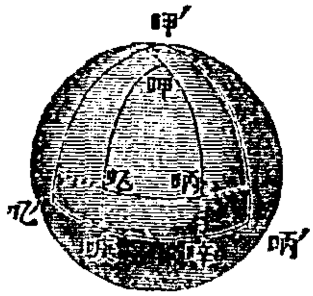
理題 兩極三角形、此形之各角、必以彼形相對邊之補弧為度。

證 呷吃呐與呷′吃′呐′互為極三角形、呷為其一形之一角。

求證 呷∠以180°−吃′呐′為度。

證 引長呷吃與呷呐二弧、使其遇吃′呐′於咉於哰。

六八九節



既設　呷爲唊啐弧之極、

故　呷∠以唊啐爲度。

既設𠮙′爲呷啐之極、𠰌′爲呷唊之極、則

𠮙′啐與𠰌′唊二弧爲象限。

是以　𠮙′啐＋𠰌′唊＝半周、

卽　𠮙′𠰌′＋唊啐＝半周＝180°、

∴　唊啐＝180°－𠮙′𠰌′。

但　呷∠以唊啐爲度。

是以　呷∠以180°－𠮙′𠰌′爲度。

故題言云云。

二極三角形亦稱補三角形。

因如各角度數以呷等字代之、相對邊之弧度以甲等字代之、則有

呷∠＝180°－甲′、𠮙∠＝180°－乙′、𠰌∠＝180°－丙′、

七〇二

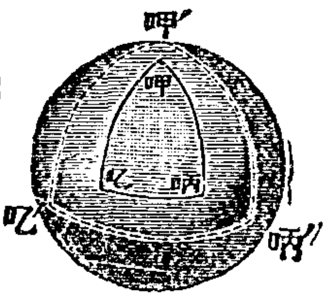
合題

呷′∠$=180^\circ-$甲′、吃′∠$=180^\circ-$乙′、呐′∠$=180^\circ-$丙′。

第十三題

於球面作弧三角形、又作其極三角形、則前形各角之度爲何。是則其三角和之度爲何。既其極三角形諸邊弧之和必大於0°度之弧。(六九八節)小於360之弧、則前形或任一弧三角形三角和、最大最小之度數各爲若干。此容語試以正角之數核之。

定題 凡弧三角形三角之和、大於二正角、小於六正角。



設 呷吃呐爲弧三角形、呷、吃、呐、爲其三角。

求證 一 ● 呷∠+吃∠+呐∠>2正角。

二 ● 呷∠+吃∠+呐∠<6正角。

證 一 ● 作呷吃呐之極三角形呷′吃′呐′、命其吃′呐′、呷′呐′、呷′吃′之度數爲甲′乙′丙′、

是則 呷∠$=180^\circ-$甲′、吃∠$=180^\circ-$乙′、呐∠$=180^\circ-$丙′、 七〇一節

∴ 呷∠+吃∠+呐∠$=540^\circ-$(甲′+乙′+丙′)。 自理二

但　吃′呐′+呷′呐′+呷′吃′<大圓之周、　六九八節

是即　甲′+乙′+丙′<360°、

∴　呷∠+吃∠+呐∠>180°、卽二正角。

二⊛因　甲′+乙′+丙′>0°、

是以　呷∠+吃∠+呐∠<540°、卽六正角。

故題言云云。　合題

七〇四 系弧三角形可有二正角或三正角、亦可有二鈍角或三鈍角。

演習八七二⊛弧三角形之邊爲65°、86°、98°、其極三角形之角各若干。

演習八七三⊛弧三角形之角爲53°、77°、92°、其極三角形之邊各若干。

演習八七四⊛弧三角形之角爲65°、80°、110°、其極三角形之邊各若干。

七〇五 弧三角形有二正角者、曰兩正角形、有三正角者、曰三正角形。

七〇六 弧三角形三角和大於兩正角之數、曰三角形之弧餘。

七〇七 弧多邊形諸角和、大於其邊數減二乘兩正角之數、曰多邊形之弧餘。

如弧多邊形有卯邊、則其弧餘等於卯一2箇弧三角形之弧餘和、此卯一2箇弧三角形、卽爲多邊形自任一角尖作對角弧所分成者也。

此弧三角形之角與邊、與彼弧三角形之角與邊兩兩相等、而次序相反、則此二形曰等勢弧三角形。

此弧三角形之角尖、正在自彼弧三角形角尖所作球徑之末端、則二形等勢。

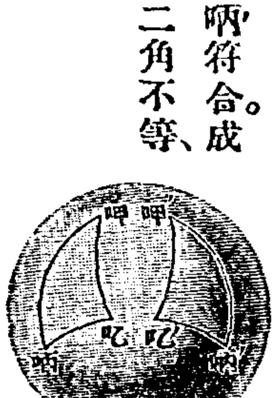
如圖呷吃呐、與呷'吃'呐'兩弧三角形爲等勢。

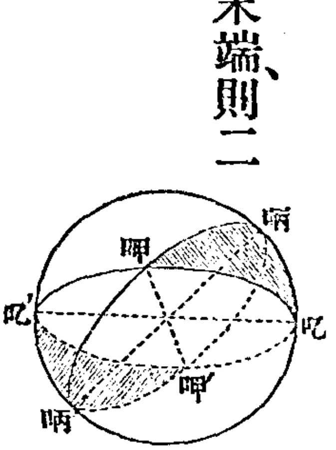
等勢弧三角形、互相等邊、等角、然不必符合。

欲使呷吃呐與呷'吃'呐'兩等勢弧三角形符合、則必使任一弧吃呐與其等弧吃'呐'符合。成之祇有二法、卽使吃'落於吃、或呐也。設吃'落於呐、如兩三角形非等腰、則吃與呐二角不等、而二形不能符合、設吃'落於吃、則呷與呷'落於吃呐之對邊、二形又不符合。

等勢弧三角形、如俱爲等腰、則可符合。

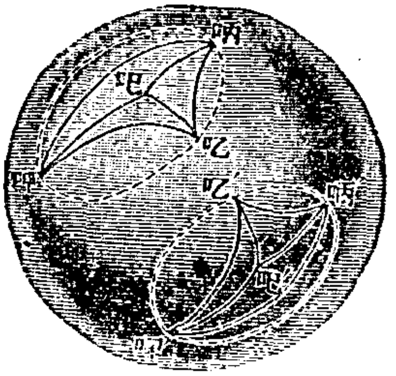
第十四題





七〇九　於球面作二等勢三角形、其面積相比何如此二形相等乎、抑等積乎。

理題　兩等勢弧三角形必等積。



設呷吃咘與呷′吃′咘′爲兩等勢弧三角形。

求證　呷吃咘△≎呷′吃′咘′△。

證第一端●如三角形爲等腰。

若二形爲等腰、則可使之符合、

∴　呷吃咘面積＝呷′吃′咘′面積。

第二端●如三角形非爲等腰。

設吧爲過呷、吃、咘三點小圜之極、吧′爲過呷′、吃′、咘′三點小圜之極。

原設呷吃、呷咘、吃咘三弧、與呷′吃′、呷′咘′、吃′咘′三弧、兩兩相等、

∴呷吃、呷咘、吃咘三弧之弦、與呷′吃′、呷′咘′、吃′咘′三弧之弦、亦兩兩相等。一九六節

是以其所成之兩平面三角形、亦必相等。一〇七節

∴　過呷、吃、咘、與過呷′、吃′、咘′之二小圜相等。二〇八節

作吧呷、吧𠮙、吧𠰳、吧'呷'、吧'𠮙'、吧'𠰳'諸大圜弧。

是則　此諸弧必相等。　六六五節

準六九五、五〇一節、

吧呷𠮙△之諸角、各等於吧'呷'𠮙'△之諸角、且兩三角形之等件、方向相反、

∴　吧呷𠮙與吧'呷'𠮙'兩三角形、乃等勢而等腰、　七〇八六八六節

按第一端　吧呷𠮙面積＝吧'呷'𠮙'面積。

仿此證吧𠮙𠰳面積＝吧'𠮙'𠰳'面積、又吧呷𠰳面積＝吧'呷'𠰳'面積、

∴　吧呷𠮙＋吧𠮙𠰳＋吧呷𠰳面積＝吧'呷'𠮙'＋吧'𠮙'𠰳'＋吧'呷'𠰳'面積、

即　呷𠮙𠰳面積＝呷'𠮙'𠰳'面積、亦即呷𠮙𠰳△≎呷'𠮙'𠰳'△。

若吧極在呷𠮙𠰳之外、則吧'極在呷'𠮙'𠰳'之外、而兩三角形各等於兩等腰三角形和減第三等腰三角形、其所得正與前同。

故題言云云。　合題

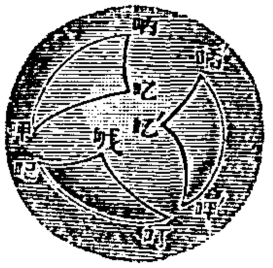
第十五題

七一〇

一●於同球或等球上作二弧三角形、此形之二邊及其間角、等於彼形相當二邊及其間角、次序相順、則此二形可相符合乎、故其相比何如。

二●如前作二弧三角形、惟相等之件次序相逆、另作一弧三角形、與前二形之一等勢、則其與餘一形相比何如。是則前二形相等乎、抑等積乎。

理題 同球或等球上之兩弧三角形、若有二邊及其間之角各等、則二形必相等、或等積。



設 呷吃呐與叮哦吧兩弧三角形、有呷吃＝叮哦、呷呐＝叮吧、呷角＝叮角。

第一端●兩三角形已有之等件次序相順。

求證 呷吃呐△＝叮哦吧△。

證 以呷吃呐△加諸叮哦吧△之上、則與平三角形之理無異、而適能符合。

是以 呷吃呐△＝叮哦吧△。 三六節

第二端●兩三角形已有之等件次序相逆、如呷吃呐與呷′吃′呐′兩三角形內、呷吃＝

呷′吃″呷丙＝呷′丙′呷″∠＝呷′∠。

求證 呷吃丙△≅呷′吃′丙′。

證 設叮哦吧△向呷′吃′丙′△而爲等勢。

是則叮哦吧△之角與邊、各等於呷′吃′丙′△之角與邊、

∴在呷吃丙與叮哦吧兩三角形內、呷∠＝叮∠、呷吃＝叮哦、呷丙＝叮吧、且等件之次序相順。 七〇八節

∴按第一端 呷吃丙△＝叮哦吧△。

但 呷′吃′丙′△≅叮哦吧△。 七〇九節

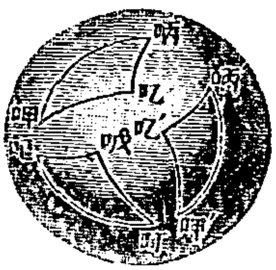
是以 呷吃丙△≅呷′吃′丙′△。

故題言云云。 合題

第十六題

七二一 ●於同球或等球之上、作兩弧三角形、此形之一邊、及其端之二角、等於彼形之一邊、及其端之二角、且次序相順、則此二形能相符合乎、其相比何如。

二◎如前作二弧三角形、惟其等件之次序相逆、另作一弧三角形與前二形之一等勢、則其與餘一形相比何如。如是則前二形爲相等乎、抑等積乎。



理題 同球或等球上之兩弧三角形、若有一邊及其端之兩角各等、則二形必相等、或等積。

證 其一三角形必可加諸餘一形或其等勢三角形之上、與類此之平三角形同理。

故題言云云。 合題

第十七題

同球或等球上作兩弧三角形、相當之邊各等、則此二形之角相比何如。若等件之次序相順、則二形相比何如。若等件之次序相逆、則二形爲相等乎、抑等積乎。

理題 同球或等球上之兩弧三角形之邊各等、則其角亦各等、且二形必相等、或等積。

證因兩三角形之角必互等。　六九五、五〇一節

∴　兩形必相等或等勢。　何故

如二形等勢、即必等積。　七〇九節

是以二形必相等或等積也。

故題言云云。　合題

第十八題

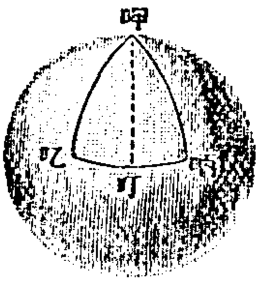
一●於球面作等腰弧三角形、自其頂尖至對邊之中點作大圜弧、若此所成之兩三角形、其諸邊相比何如。是則其諸角相比何如。原三角形內對等邊之二角相比何如。

二●自等腰弧三角形頂尖至對弧中點之大圜弧、如何分頂角、其與底相視之方向何如。其分原形為何等三角形。

理題凡等腰弧三角形、對等邊之角必等。

設呷吃呐弧三角形內、呷吃＝呷呐。

求證　吃∠＝呐∠。



證自頂尖呷作呷叮大圜弧、平分吃啢邊。

是則於呷吃叮及呷啢叮兩弧三角形內、呷叮為公邊、

呷吃＝呷啢、叮吃＝叮啢、 何故

是卽兩三角形之邊互等也、

∴ 呷吃叮與呷啢叮兩三角形之角亦互等。 七一二節

是故 吃∠＝啢∠。

故題言云云。 合題

七一四 系自等腰弧三角形之頂尖至底之中點作大圜弧、必平分頂角、且與底正交、而分原形為兩等勢三角形。

演習八七五● 弧三角形之邊為50°、75°、110°、則其極三角形之角若干。

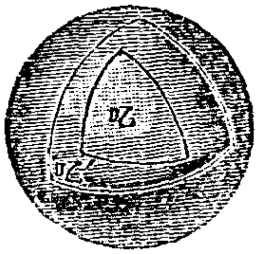
演習八七六● 弧三角形之邊為54°、89°、103°、則其極三角形之弧餘若干。

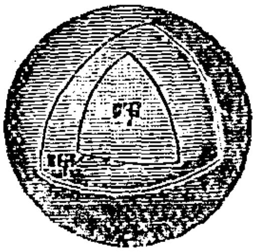
第十九題

七一五 於球面作兩三角形、其角互等、又各作其極形、則極形之邊兩兩相比何如。是則極形之角兩兩相比何如。原三

角形之邊兩兩相比何如。若原三角形之等件次序相順、則二形相比何如。若相逆、則二形相比何如。

理題 同球或等球上兩弧三角形之角互等、則其邊亦互等、而二形必相等、或等積。





設 呷與吃兩弧三角形、其角互等。

求證 呷與吃之邊亦互等、且二形相等、或等積。

證 設呷'△爲呷△之極形、吃'△爲吃△之極形。

原設 呷△與吃△之角互等、 七〇一節

∴ 其極形呷'△與吃'△之邊互等、 七一二節

是故 呷'△與吃'△之角互等、 七〇一節

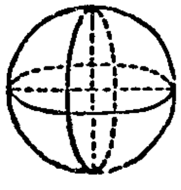
∴ 呷△與吃△之邊互等。 七一二節

是故 呷△與吃△必相等或等積。 合題

故題言云云。

七一六 **系四** 弧三角形之兩角相等、則其對邊亦相等、而爲等腰弧三角形。

七一七 **系五** 三平面俱過球心、其一各與餘二面正交、則分球面爲八箇三正角三角形。

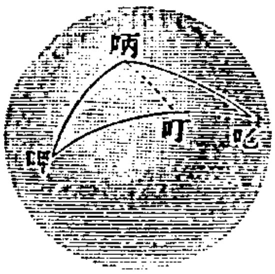


第二十題

七一八 一● 於球面作弧三角形、有二角不等、則其對邊相比何如、何者較大。

二● 作一弧三角形、有二邊不等、則其對角相比何如、何者較大。

理題 弧三角形之二角不等、則其對邊亦不等、而大邊必對大角、反之、如二邊不等、則其對角亦不等、而大角必對大邊。



設 呷𠮙㖛弧三角形之呷㖛𠮙角大於呷𠮙㖛角。

求證 呷𠮙 $>$ 呷㖛。

證 作㖛叮大圓弧、使𠮙㖛叮∠＝𠮙∠、

是則　叮吃＝哂叮。　七一六節
夫　呷叮＋哂叮＞呷哂、　六九六節
∴　呷叮＋叮吃＞呷哂、
卽　呷吃＞呷哂。
反之設呷吃哂弧三角形之呷吃邊大於呷哂邊。
求證　呷哂吃∠大於吃∠。
證若　呷哂吃∠＝吃∠、
則　呷吃＝呷哂、　七一六節
此與原設不合。
若　呷哂吃∠小於吃∠、
則　吃∠大於呷哂吃∠、
而　呷哂＞呷吃、
又與原設不合。

是則呷呐吃ㄥ既不能等於吃ㄥ、又不能小於吃ㄥ、則必大於吃ㄥ矣。

故題言云云。

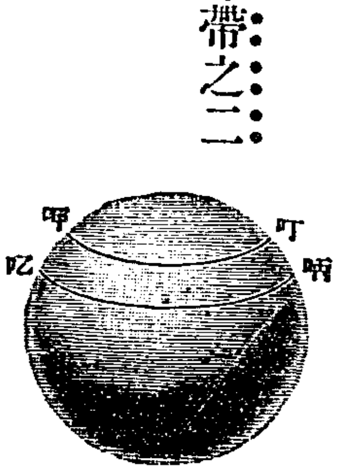
合題

球體度量

七一九　球爲二平行面所割、其間之球面曰球帶、二面間之垂距爲球帶之高、二平行面割成之截面周、爲球帶之二底。

如二平行面之一爲球之切面、則球帶祇有一底。

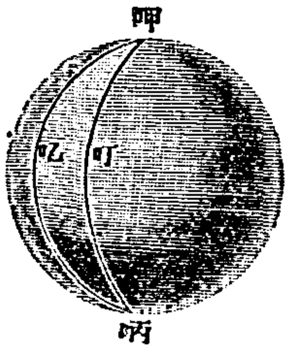
如圖呷吃、呐叮爲球帶。



七二〇　二大圜半周所夾球面之一段、曰月形。

月形界弧間之角、曰月形角。

如圖呷吃呐叮爲月形、吃呷叮爲其角。



七二一　同球或等球上之等角月形、可相符合、故爲相等。

七二二　量球面合用之準箇爲球度、卽等於半球面三百六十分之一。

七二三

球度一如弧度、大小無定、觀其所繪球之小大而變。

球度可作爲一兩正角之弧三角形、其餘一角爲一度。

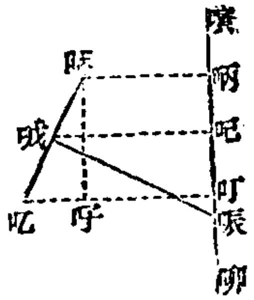
度之用法有三、學者幸勿誤會、一曰角度、卽二線方向之較、卽平面內一點四周全角度三百六十分之一、(三五節)二曰弧度、爲一線、卽圜周三百六十分之一、(二二四節)三曰球度、爲一段面、卽半球面三百六十分之一、亦卽全球面七百二十分之一。

第二十一題

作一軸、次作一線斜向之、而不相遇、次自此線之二端及中點各作垂線至軸、又自線近軸之端作直線與軸平行、末作原線中點之垂線至軸而止。如是將原線旋轉繞軸一周、所成者爲何等面、此面與何面等積。(六二八節) 按相似正三角形諸線之比例、試將其面之同數、以原線在軸上之射影、及原線中點之垂線爲半徑之圜周二者表之、又若此直線過軸、或與軸平行、則所得仍眞確不變否。

理題 直線繞其平面內一軸、所成之面、與其線在軸上之射影、借某圜周所成矩形等積、此圜周以直線中點

之垂線至軸而止者爲半徑。



設呷吃直線繞嗊咖軸而旋轉、啢吖爲直線於軸上之射影、哦哌爲呷吃中點之垂線、至軸而止者。

求證呷吃面⊕啢吖·2冂哦哌矩形。

證作哦吧⊥嗊咖、又作呷呼∥嗊咖。

如呷吃不遇嗊咖、亦不與之平行、則所旋成者爲圓錐截體之面、以呷吃爲斜高、啢吖爲軸。

∴　呷吃面⊕呷吃·2冂哦吧矩形。　六二八節

夫　呷吃呼與哦哌吧兩三角形相似、　三〇七節

而　呷吃：呷呼＝哦哌：哦吧、

∴　呷吃·哦吧矩形⊕呷呼·哦哌矩形。

但　呷呼＝啢吖、　一五一節

是以　呷吃·哦吧矩形⊕啢吖·哦哌矩形、∴

而　呷吃．2冂哦吧矩形⊖呐叮．2冂哦哌矩形。

是卽　呷吃面⊖呐叮．2冂哦哌矩形也。

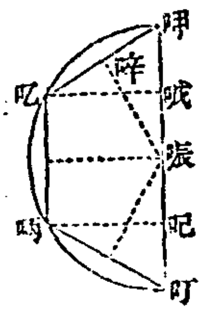
如呷吃遇嗊哪軸、則成圓錐面、如與之平行、則成圓柱面、而此理仍確合無異。

故題言云云。　合題

第二十二題

作一半周、內切有法半多邊形一、則半多邊形諸邊於徑上之射影和、與徑相比何如。多邊形諸邊中點之垂線、至徑而止者、相比何如。若此形以徑為軸而旋轉、則半多邊形周界所成之面、與何者等積。若半多邊形之邊數漸增至無窮、則其限與半周相比何如。當時半多邊形諸邊中點垂線之限為何。是則球面與其徑偕大圓周之矩形相比何如。

理題 球面與其徑偕大圓周之矩形等積。



設 呷吃呐叮半圓繞呷叮軸而旋成一球、其心為哌。命球之面為呻、半徑為味。

求證　呻⊖呷叮．2冂味矩形。

設於半周內作偶邊之有法半多邊切形呷叱呐叮、命其邊旋成之面爲呻′。
作叱吷與呐吧、各正交呷叮、又自㖘至呷叱、叱呐、呐叮諸弦作垂線。
則此諸垂線必互等而平分諸弦。　二〇三、二〇〇節
是則　呷叱面＝呷吷·2冂㖘啐矩形、　七二三節
叱呐面＝吷吧·2冂㖘啐矩形、
呐叮面＝吧叮·2冂㖘啐矩形。
但呷吷、吷吧、吧叮諸射影之和、等於呷叮徑、
∴　呻′＝呷叮·2冂㖘啐矩形。
若內切半多邊形之邊數遞增至無窮、則漸近其限半圓周、　三九二節
∴　㖘啐漸近其限㖘味、
而　呻′漸近其限呻。
但半多邊形之邊數任大至若干、
呻′＝呷叮·2冂㖘啐矩形。

是故　　呷≑呷叮・2冂味矩形。　　三二六節合題

七二五　故題言云云。

系一　球面積等於其徑乘大圜周。

七二六　系二　球面積＝呷叮×2冂味＝2味×2冂味＝4冂味^2、　　七二五節

是卽球面積等於四大圜之面積。

七二七　系三　命味與味′爲二球之半徑、叮與叮′爲其徑、呷與呷′爲其面積。

則　　呷＝4冂味^2、　呷′＝4冂味′^{2}、　　七二六節

∴　呷：呷′＝4冂味^2：4冂味′^{2}＝味^2：味′^{2}＝叮^2：叮′^{2}、

是卽二球之面積相比、如其半徑方相比、亦如其徑方相比。

七二八　系四　吃呐球帶之面積＝吱吧×2冂味、

是卽球帶之面積等於其高乘大圜周。

七二九　系五　同球或等球上之球帶相比、如其高相比。

七三〇　系六　一底球帶之面積呷吃＝呷吱×2冂味＝冂呷吱×呷叮。　　七二八節

作叱叮線、則有　呷哦×呷叮＝呷叱²、

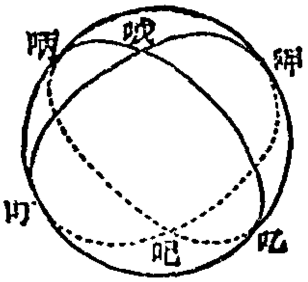
∴　呷叱球帶之面積＝冂呷叱²、

是即一底球帶之面積、等於以母弧之弦爲半徑之圜面積。

第二十三題

作大圜分球面爲二半球、於此半球上作相交兩大圜弧成兩交角三角形、次將二大圜弧各足成大圜、取此兩交角三角形之此形、與彼半球上適與彼形足成月形之三角形相比何如。試觀兩原三角形之和、與以二原弧交角爲角之月形相比何如。

理題兩大圜弧相交於半球之面上、所成兩交角三角形之和、必與以交角爲角之月形等積。



設呷哦叮與叱哦呐二大圜弧、於哦—呷叱叮呐半球上相交成呷哦叱與叮哦呐兩交角三角形。

求證呷哦叱△＋叮哦呐△＝呷哦叱吧月形。

證引長呷哦叮、叱哦呐二弧、繞球相交於吧。

夫　　叮𠯊弧＝呷𠯆弧（二者同爲呷𠯊之補弧）、
　　　𠰌𠯊弧＝𠮙𠯆弧（二者同爲𠮙𠯊之補弧）、
且　　叮𠯊𠰌∠＝呷𠯊𠮙∠＝呷𠯆𠮙∠、
∴　　　叮𠯊𠰌△⊜呷𠯆𠮙△。
此等積方程之兩端各加一呷𠯊𠮙△、則有
　　呷𠯊𠮙△＋叮𠯊𠰌△⊜呷𠯊𠮙△＋呷𠯆𠮙△。
是以　呷𠯊𠮙△＋叮𠯊𠰌△⊜呷𠯊𠮙𠯆月形。
故題言云云。

六五六節
六九三節
七一〇節
合題

第二十四題

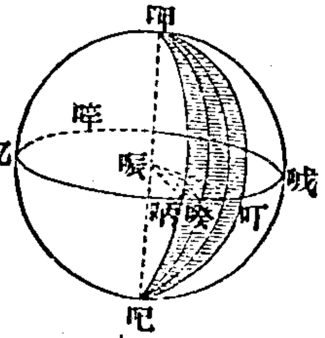
於球面作一月形、其角比四正角如3：12、以其角尖爲極作大圜周、則月形兩邊間之弧與全周相比何如。分周爲十二等分、過其分點及極作諸大圜弧、則球面分爲若干等月形。原月形分爲若干月形。是則原月形與全球面之比例、與月形角與四正角之比例相比何如。

理題月形比球面、如月形角比四正角。

設以㖘爲心之球面上、有呷㕭吧叮月形、其角爲㕭呷叮。

命月形面爲吔、球面爲呻。

求證　吔：呻＝㕭呷叮∠：四正角。



證以呷爲極、作𠮃㕭哦啐大圜周。

是則㕭叮弧度㕭呷叮角、𠮃㕭哦啐全周度四正角。　六八九節

設㕭叮弧與𠮃㕭哦啐周、有公箇㕭暌、㕭叮容之寅次、𠮃㕭哦啐容之卯次。

則有

㕭叮：𠮃㕭哦啐＝寅：卯、

即

㕭呷叮∠：四正角＝寅：卯。

自㕭點分𠮃㕭哦啐爲等分、各等於公箇㕭暌、過其諸分點及呷吧二極作諸大圜。

準六八九、七二一節、此諸大圜分全球面爲卯箇等月形、而原月形含此等月形寅箇。

是則

吔：呻＝寅：卯。

是以

吔：呻＝㕭呷叮∠：四正角。

按二二三節求限之法、則㕭叮與𠮃㕭哦啐雖無公箇、亦可證之與此同理。

故題言云云。

七三三 系題 命月形角之度數爲呷、則呭：吽＝呷：360°。

旣吽含720球度、

故 呭：720＝呷：360、

由之得 呭＝2呷、

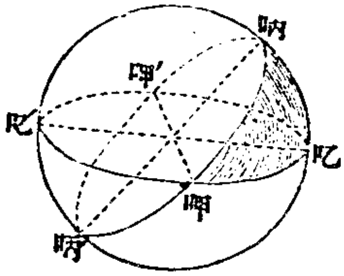
是即月形之球度數爲其角度數之二倍。

七三四 系題 同球或等球之月形相比、如其角相比。

第二十五題

七三五 於球面作弧三角形、引長其三邊足成大圜、則半球面內有若干三角形與原形公用角尖。夫旣原形加餘諸形之一、即與以原一角爲角之月形等積、亦與此角度數二倍之球度等積、則以原形三倍加其餘三箇三角形、與原形諸角度數二倍之球度相比何如。在半球上之四弧三角形、含有球度若干。是則原三角形之球度數、與其諸角度數和減180°相比、是即與其弧餘相比也。

理題 凡弧三角形之球度數、等於其弧餘之角度數。



設呷𠮙㖼弧三角形之弧餘爲戌度。

求證呷𠮙㖼△⊜戌球度。

證將呷𠮙㖼△之邊足成大圜。

此諸大圜分球面爲八弧三角形、其中四形公用一角尖呷、合成半球面、卽360球度也。

夫　呷𠮙㖼△+呷𠮙′㖼′△⊜角爲呷之月形。　七三一節

∴　呷𠮙㖼△+呷𠮙′㖼′△⊜2呷球度。　(1)　七三三節

倣此　呷𠮙㖼△+呷𠮙′㖼△⊜2𠮙球度、　(2)

呷𠮙㖼△+呷𠮙㖼′△⊜2㖼球度。　(3)

以(1)(2)(3)相并、得

3呷𠮙㖼△+呷𠮙′㖼′△+呷𠮙′㖼△+呷𠮙㖼′△⊜2(呷+𠮙+㖼)球度。

但　呷𠮙㖼△+呷𠮙′㖼′△+呷𠮙′㖼△+呷𠮙㖼′△=360球度、

∴　2呷𠮙㖼△+360球度⊜2(呷+𠮙+㖼)球度、

是故　呷吃㖞△≑(呷＋吃＋㖞－180)球度、　七〇六節

是卽　呷吃㖞△≑戝球度也。　合題

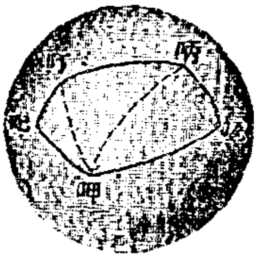
故題言云云。

七三六

第二十六題

作弧多邊形一、自其一角尖作對角綫、分之爲若干弧三角形、則諸三角形等於若干球度。諸三角形和之球度數、與其弧餘和之角度數相比何如。是則凡弧多邊形等於若干球度。

理題凡弧多邊形之球度數、等於其弧餘之角度數。



設呷吃㖞叮吧爲弧多邊形、其弧餘爲戝度。

求證呷吃㖞叮吧≑戝球度。

證自弧多邊形之角尖呷、作諸對角弧、分原形爲弧三角形。

夫各三角形之球度數、等於其弧餘之角度數。　七三五節

是以多邊形之球度數、等於諸三角形弧餘和之角度數、

亦卽等於多邊形之弧餘角度數也。　七〇七節

是故　　　呷吃呐叮呢⊹呅球度。

故題言云云。

七三七 系弧多邊形面積比球面積、如其弧餘之數比720。

演習八七七●月形之角40°、其面爲球之何分。

演習八七八●弧三角形之三角爲85°、120°、110°、如球徑爲10粉、則三角形面積若干。

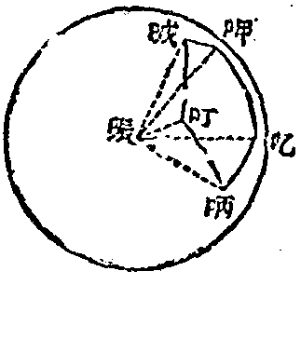
演習八七九●球面160方寸、其面上弧三角形之三角爲93°、117°、132°、則面積若干。

演習八八〇●同球或等球上兩弧三角形、如其二極三角形之周界等、則二形等積。

七三八 體以弧多邊形、及其邊之平面爲界者、曰弧棱錐體。

球心爲棱錐之頂尖、弧多邊形爲其底。

如圖唇—呷吃呐叮呢爲弧棱錐體、唇爲角尖、呷吃呐叮呢爲其底。



七三九 兩平行面所夾球體之一段、曰球分。

兩平行面所成截面爲球分之二底、二底間之垂線距爲球分之高。

如兩平行面之一爲球之切面、則所成者爲一底球分。

七四〇 月形與其邊之平面所夾球體一段、曰弧劈。

合題

七四一 圜心角形、以圜徑爲軸、繞成球體之一段、曰球心角體。

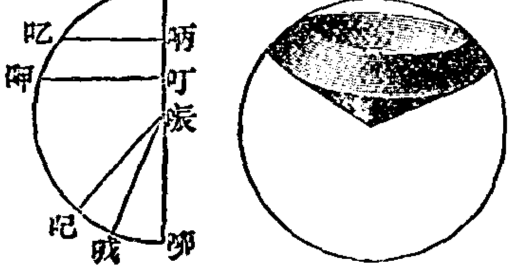
圜心角弧旋成之球帶爲球心角體之底。

七四二 嗊唦吔吧呷吃爲半圜、呷叮與吃哂爲自半周至嗊唦徑之垂線、嗁吔與嗁吧爲半徑、則若半圜以嗊唦徑爲軸而繞轉一匝、卽成球體。呷吃弧旋成之球帶、叮哂爲其高、呷與吃二點所成之圜周爲其二底。

呷吃哂叮形旋成之球分、叮哂爲其高、呷叮與吃哂二線旋成之圜爲其二底。

吃嗊弧旋成一底之球帶、吃哂嗊形旋成一底之球分。

嗁吔吧圜心角形旋成一球心角體、以吔吧弧旋成之球帶、嗁吔與嗁吧二半徑旋成之圓錐面、俱爲其界面、卽其底也。

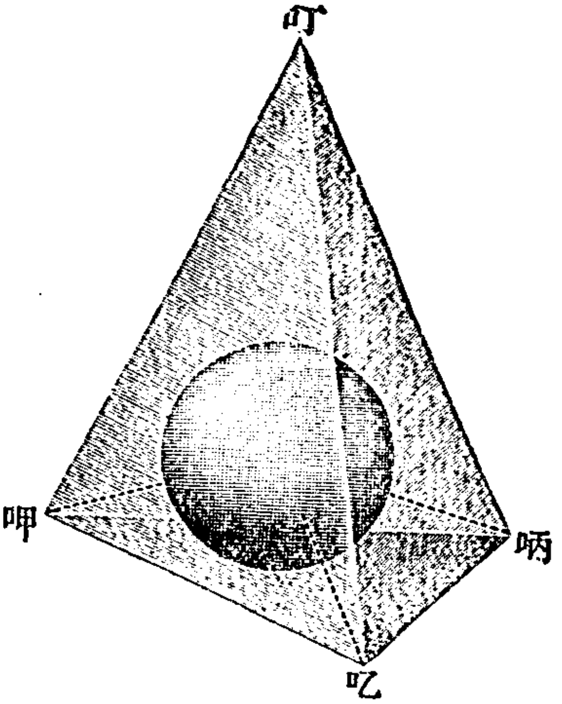


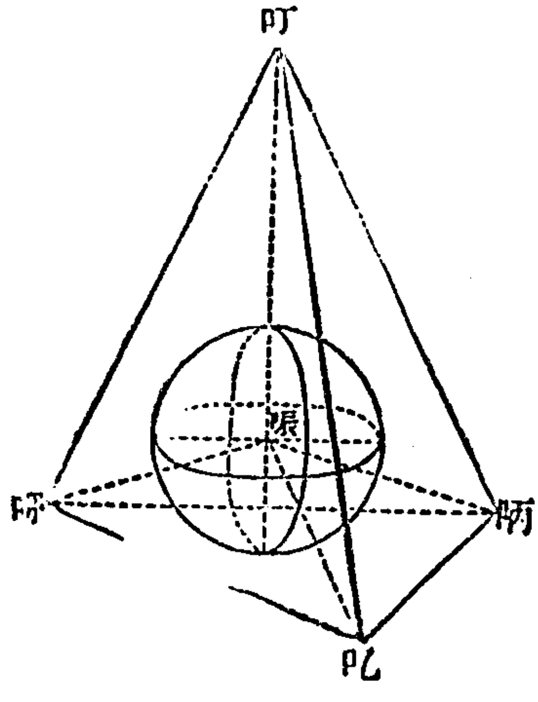
第二十七題

七四三 球外切一棱體、如以棱體各面爲底、球心爲公尖、作諸棱錐體、則諸體之高相比何如。與球半徑相比何如。各棱

錐體之體積爲何。諸棱錐體積之和爲何。如棱體之面數遞增至無窮、則其積與球積相比何如。是則球之體積、與何者相等。

理題 球體之積、等於面乘半徑三分之一。





設 有一球、其心爲哌、面積爲呷、半徑爲味。命其體積爲咳。

求證 咳＝呷×$\frac{1}{3}$味。

題於球外切一叮丨呷吒哂棱體、命其面爲呷'體積爲咳'。

作哌丨呷吒哂等諸棱錐體、各以棱體之面爲底、球心爲公尖。

則此諸棱錐體之高俱等於味、

且各棱錐體積 $=$ 其底 $\times\frac{1}{3}$ 味。　五六〇節

$\therefore$　咳' $=$ 呷' $\times\frac{1}{3}$ 味。

如遞於諸棱錐體之鋒割球面之諸點、作球之切面、則棱錐體之數可遞增至無窮、而

　呷'漸近其限呷、　$\therefore$ 咳'漸近其限咳。

但棱錐體之數任大至若干、咳' $=$ 呷' $\times\frac{1}{3}$ 味。

是以　咳 $=$ 呷 $\times\frac{1}{3}$ 味。　二二二節

故題言云云。　合題

七四四 公式●咳 $=$ 呷 $\times\frac{1}{3}$ 味 $=\frac{4}{3}$ 冂味^3 $=\frac{1}{6}$ 冂叮^3。

七四五 系命味與味'爲二球半徑、叮與叮'爲其二徑、咳與咳'爲其二體積、則有

　咳 $=\frac{4}{3}$ 冂味^3、　咳' $=\frac{4}{3}$ 冂味'^{3}、　七四四節

∴ 咳：咳′＝$\frac{4}{3}$冂味³：$\frac{4}{3}$冂味′³＝味³：味′³＝叮³：叮′³、

是即二球體積相比、如其半徑立方相比、亦如其徑立方相比。

七四六 系圖弧稜錐體積、等於其底乘球半徑三分之一。

七四七 系圖球心角體積、等於其爲底之球帶乘球半徑三分之一。

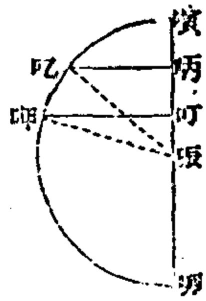
七四八 公式 ◉ 設味爲球半徑、呐爲大圜周、咳爲球心角體積、啐爲球心角底球帶之高、人爲球帶之面積。

則既 呐＝2冂味、而人＝2冂味啐、 ∴咳＝$\frac{2}{3}$冂味²啐。

第二十八題

七四九 作半圜一、至半周上任一段弧之末端作諸半徑、自半徑之外端至徑作垂線、若此形以徑爲軸而旋轉、則繞成者垂線與弧之間爲何等體、諸半徑與弧之間爲何等體、半徑與自其端之垂線間爲何等體。試以球心角體與二圓錐體表球分之體積。

理題 球分之體積、等於兩底和之半乘高、又加一以球分之高爲徑之球。



設呷吃㕦叮繞嗔㖊軸而成球分。

命球分之體積爲咳、其高㕦叮爲啐、底半徑呷叮與吃㕦爲未與未'、

半圓之半徑爲味。

求證 咳 $=\frac{1}{2}$啐$($冂未$^2+$冂未$'^2)+\frac{1}{6}$冂啐^3。

證 作唇呷與唇吃二半徑。

則呷吃㕦叮旋成之球分積、等於唇呷吃旋成之球心角體積加唇吃㕦旋成之圓錐體積減唇呷叮旋成之圓錐體積、

∴ 咳 $=\frac{2}{3}$冂味^{2}啐 $+\frac{1}{3}$冂未$'^2$唇㕦 $-\frac{1}{3}$冂未^{2}唇叮。 七四八六二九節

但 啐 $=$ 唇㕦 $-$ 唇叮、味$^2-$未$'^2=\overline{唇㕦}^2$、味$^2-$未$^2=\overline{唇叮}^2$。

是則 咳 $=\frac{1}{3}$冂$[2$味$^2($唇㕦$-$唇叮$)+($味$^2-\overline{唇㕦}^2)$唇㕦$-($味$^2-\overline{唇叮}^2)$唇叮$]$

$=\frac{1}{3}$冂$[2$味$^2($唇㕦$-$唇叮$)+$味$^2($唇㕦$-$唇叮$)-(\overline{唇㕦}^3-\overline{唇叮}^3)]$

$=\frac{1}{3}$冂啐$[3$味$^2-(\overline{唇㕦}^2+$唇㕦$\times$唇叮$+\overline{唇叮}^2)]$。

但 $(\overline{唇㕦-唇叮})^2=\overline{唇㕦}^2-2$唇㕦$\times$唇叮$+\overline{唇叮}^2=$啐^2、 三四八節

∴ $唇㖁^2 + 唇㖁 \times 唇叮 + 唇叮^2 = \frac{3}{2}(唇㖁^2 + 唇叮^2) - \frac{啐^2}{2}$

$= 3味^2 - \frac{3}{2}(末^2 + 末'^2) - \frac{啐^2}{2}$。

是以

$咳 = \frac{1}{3}刀啐\left[\frac{3}{2}(末^2 + 末'^2) + \frac{啐^2}{2}\right]$

$= \frac{1}{2}啐(刀末^2 + 刀末'^2) + \frac{1}{6}刀啐^3$。

故題言云云。　合題

七五〇　系　若球分爲㖕𠮙呷叮所旋成、而祇有一底、則$末' = 0$、

而 $咳 = \frac{1}{2}刀末^2啐 + \frac{1}{6}刀啐^3$、

是卽一底球分之體積、等於以球分高爲徑之球、加與球分等底等高圓柱體之半也。

七五一　公式

公式中之符號

$𠮙$ = 底　　$啐$ = 高　　$叮$ = 球徑

$呻$ = 面　　$味$ = 球半徑　　$呷$ = 面積

$咳$ = 體積　　$末$ = 下底半徑　　$末'$ = 上底半徑

球

呷＝4冂味^2　七二六節

咳＝呷×$\frac{1}{3}$味　七四三節

咳＝$\frac{4}{3}$冂味^3　七四四節

咳＝$\frac{1}{6}$冂叮^3　七四四節

球帶

呷＝2冂味晬　七二八節

弧棱錐體

咳＝叱×$\frac{1}{3}$味　七四六節

球心角體

咳＝叱×$\frac{1}{3}$味　七四七節

咳＝$\frac{2}{3}$冂味^{2}晬　七四八節

球分

咳$=\frac{1}{2}$啐(刀末^2+刀末$'^2$)+$\frac{1}{6}$刀啐^3

七四九節

習題

演習八八一●球半徑九寸、體積若干。

演習八八二●球之大圜周三十六尺、球面積若干。

演習八八三●球徑十三粉、其積爲若干立方粉。

演習八八四●球體積1870立方粎、其半徑若干。

演習八八五●球面積六十九方尺、其徑若干。

演習八八六●立方體之鋒長十六粎、其外切球體積若干。

演習八八七●弧三角形之三邊爲75°、93°、110°、其極三角形之弧餘若干。

演習八八八●弧三角形之三角爲98°、110°、160°、如球半徑十二粎、同球上之等勢三角形面積若干。

演習八八九●三角弧棱錐體底角爲58°、116°、145°、球徑爲20寸、其體積若干。

演習八九〇●球半徑六寸、月形之角六十度、則其面積若干。

演習八九一●球半徑八寸、球帶高三寸、其面積若干。

演習八九二●球半徑11粍、球心角體高3.5粍、其體積若干。

演習八九三●球積1728立方寸、弧弩角72°、其體積若干。

演習八九四●旋成一底球帶之弧之通弦長十三寸、球帶面積若干。

演習八九五●球徑20粉、球帶面積150方粉、其高若干。

演習八九六●三角弧棱錐體之底角爲90°、121°、135°、如球體積爲194立方寸、棱錐體之積若干。

演習八九七●弧多邊形相比、如其弧餘相比。

演習八九八●若弧棱錐體之底爲三正角三角形、則其積爲球積之何分。

演習八九九●球面與外切圓柱體之旁面等積。

演習九〇〇●球半徑十寸、弧三角形面積261.8方寸、其弧餘若干。

演習九〇一●同球上之月形比三正角弧三角形、如月形角比45°。

演習九〇二●等球上之三正角三角形必等。

演習九〇三●二球之徑爲12寸與14寸、則其面積體積之比例、各爲何如。

演習九〇四●二球面積相比、如144比24、則其徑之比例若干。其體積之比例若干。

演習九〇五●日徑與地徑之比例如109:1、其體積之比例如何。

演習九〇六●半球式瓶之內徑十二寸、能容水若干。

演習九〇七●自球面一點至徑之二端作線、必互相正交。

演習九〇八●球徑九寸、小圜距心三寸、其周若干。

演習九〇九●弧稜錐體之體角爲40°、80°、120°、鋒長9尺、其體積若干。

演習九一〇●球半徑8粎如三稜角以球心爲尖、其體角爲75°、90°、130°、則其面所限球一段之體積若干。

演習九一一●二球之半徑爲四寸、七寸、與此二球積和等積之球半徑若干。

演習九一二●球徑12寸、一底球分高4寸、其體積若干。

演習九一三●球徑20尺、球分二底在心之一旁、一距心3尺、一距心5尺、其體積若干。

演習九一四●正立方體之面積726方尺、其內切球面積若干。

演習九一五●同球上之三正角三角形比月形如14:9、則月形角若干、其面佔球面之何分。

演習九一六●球積1000立方尺、弧四邊形之角爲120°、130°、140°、150°、則其面積若干。

演習九一七●旋成圓錐體之底爲球之大圜、其高爲球半徑、則球面與圓錐體旁面之比例如何。

演習九一八●圓錐體底等於球之大圜、高等於球徑、二體之積相比何如。

演習九一九●球半徑八寸、球帶面積等於球之大圜、其高若干。

演習九二〇●徑爲半尺之鉛球、可鑄出半寸徑之鉛丸若干。

演習九二一●置礮彈於二尺徑之圓柱水桶內、水升二寸、問彈徑若干。

演習九二二●與半球底平行之截面適平分半球之高、則所成二球分體積、相比何如。

演習九二三●球積比外切立方體積、如冂比6。

演習九二四●球積比內切立方體積、如冂比之3|2。

演習九二五●球面比外切圓柱體之全面、如2比3。

演習九二六●球積比外切圓柱體積、如2比3。

演習九二七●五平行面同割一球、相距二寸、三寸、四寸、五寸、則其間四球帶面積相比如何。

演習九二八●兩正角弧三角形內、對等角之邊爲象限。

演習九二九●旋成圓錐體之斜高、等於其底徑、則其全面積與內切球面積相比何如。

演習九三〇●過球內一點最小之圜、其平面必正交過此點之球半徑。

演習九三一●二球面之交線爲一圜周、其平面與連二球心之線正交、其心即在此線上。

演習九三二●二球相交、其半徑爲五寸與八寸、二心相距十寸、則交圜之面積若干。

演習九三三●鐵之重率7.5、有一鐵球面積爲2方尺、其重若干。

演習九三四●球殼之外徑12寸、欲內容696.9立方寸、其殼當厚若干。

演習九三五●鐵之重率7.5、有一空鐵球、殼厚二寸、能容水3 1 4|1磅、球重若干。

演習九三六●等邊三角形以高爲軸而旋轉、所成之體積、與形內外切圜旋成體積相比各何如。
演習九三七●球面六十九方尺、割出一底球分、高三尺、則其凸面積若干。
演習九三八●有法四面棱體之全面積16方尺、其內切球之半徑若干。
演習九三九●有法四面棱體之鋒6寸、其內切球之面積若干。
演習九四〇●人高出地面如地之全徑、則目所見之地面若干。
演習九四一●人目欲見地面五分之一、則必升高距地面若干。
演習九四二●凡過大圜極點之大圜弧、與原大圜周正交。
演習九四三●在球面任一點正交之三弦、其平方之和、等於球徑之平方。
演習九四四●如一底球帶面、爲餘球分面及全面之中率、則其底距心若干。
演習九四五●空間任若干直線相遇於一點、自又一點至此諸線之垂線底必在一球面內。

作題

演習九四六●求將大圜弧平分二分。
演習九四七●求將弧角平分二分。
演習九四八●求於大圜之已知弧內已知一點、作弧角等於已知弧角。
演習九四九●已知弧三角形各邊之極、求作其形。

演習九五〇●已知弧三角形二邊、及其夾角、求作其形。
演習九五一●已知弧三角形一邊、及其二倚角、求作其形。
演習九五二●已知弧三角形之三邊、求作其形。
演習九五三●已知弧三角形之三角、求作其形。
演習九五四●自已知球弧外一點、求作大圜弧與之正交。
演習九五五●求於已知球弧內一點、作大圜弧與之正交。
演習九五六●求作平面切球面已知一點。
演習九五七●求作平面、過球外已知直線而切球面。
演習九五八●求作平面過已知直線而割已知之球、使其截面適有已知半徑。
演習九五九●求過球上已知之點作大圜、以切已知小圜。
演習九六〇●求過球上已知之點作大圜以切面爲平行之二相等小圜。
演習九六一●求作圜過球面已知三點。
演習九六二●求作弧三角形之外切圜。

總習題

演習一●三角形一邊中點之垂線、必過餘二邊之長者。

演習二●三角形二不等角之平分線、引長相遇、則小角之平分線較長。

演習三●連四邊形對邊中點之兩直線、必互相平分。

演習四●若自梯形一底之中點作直線、過對角線之交點、則必平分餘一底。

演習五●若將五邊形之諸對邊引長相遇、則所成諸三角形頂角之和、等於二正角。

演習六●自四邊形四角尖至對角線交點外之任一點作四直線、其和必大於對角線之和。

演習七●若三角形此底角之內平分線、與彼底角之外平分線引長相遇、所成之角、必為原三角形頂角之半。

演習八●凡三角形兩外角之平分線相遇所成之角、等於兩相倚內角和之半。

演習九●若四邊形之兩角為正角、則餘二角之平分線、必互相平行或正交。

演習一〇●若呷吃哂三角形之哂吃邊大於哂呷邊、引長哂呷至叮、哂吃至呅、使呷叮與吃呅相等、則呷呅必大於叮吃。

演習一一●於呷吃哂三角形內、作呷叮線與吃角之平分線吃叮正交、試證過叮點而與吃哂平行之直線、必平分呷哂。

演習一二●若三角形之一邊大於餘一邊、則自其夾角尖至底之任一直線、俱較長邊為短。

演習一三●自平行方形之一角尖至二對邊之中點作直線、則將一對角線平分三分。

演習一四●凡自三角形之兩角尖作二直線、以兩對邊為界、決不能互相平分。

演習一五●二腰不等之三角形、平分其頂角之線、分底爲兩截、試證其大截必倚大腰。

演習一六●如三角形兩外角之平分線相交、自交點至第三角尖作直線、必平分此角。

演習一七●呷叱呐三角形內、叮爲叱呐之中點、哎爲呷叮之中點、引長叱哎遇呷呐於吧、試證呷呐於吧點所分之一段爲原線之三分之一。

演習一八●呷叱呐三角形之呷叱邊、三平分於叮哎二點、叱呐邊三平分於吧咦二點、呐呷邊三平分於啐呼二點、試證哎吧、咦啐、呼叮三線引長所成之三角形、與呷叱呐相等。

演習一九●等腰三角形之一腰、向底之下引長若干、於其餘一腰在底之上、割取等長一段、則連此二點之直線、必爲底所平分。

演習二〇●呷叱呐爲三角形、作叱哎與呐吧正交過呷點之呷咦線、叮爲叱呐之中點、試證吧叮與哎叮相等。

演習二一●凡三角形二底角之平分線相遇成角、等於原形頂角加二底角和之半。

演習二二●等邊三角形內二角之平分線相交、自交點作二直線與任二邊平行、試證此二直線將第三邊三平分之。

演習二三●有法六邊形之對邊必平行。

演習二四●若四邊形之二對角線相等、二邊平行、則餘二邊必等。

演習二五●若自等腰三角形底上任一點至二腰作垂線、則此二垂線和、等於底之一端至對邊之垂線。

演習二六●自等邊三角形內任一點至各邊作垂線、其和等於原形之高。

演習二七●若自三角形頂角尖作二直線其一平分頂角其一爲底之垂線、則此二直線間之角等於原形二底角較之半。

演習二八●凡頂角旁二邊不等之三角形、自頂角所作之中線、必在平分頂角之線與長邊之間。

演習二九●凡頂角旁二邊不等之三角形、則頂角之平分線在自頂角至底之中線與垂線之間。

演習三〇●作直線過等腰三角形底之兩端、在頂角尖之反面與底成角、爲原形底角三分之一、且過二邊之引長線、試證所成三三角形俱爲等腰。

演習三一●若二圜周內相切、大圜之半徑適爲小圜之徑、則凡自切點作大圜之弦、必爲小圜周所平分。

演習三二●引長弦二端之垂線與圜徑相交、則二交點距圜心必等遠。

演習三三●若自圜徑之二端、至任一割線作垂線、則其底距割線交周之點必等遠。

演習三四●已知圜周之一弧與其所配之弦及其一端之切線試證自弧之中點至切線與弦之二垂線相等。

演習三五●圜內切四邊形對邊引長、所成二角之平分線、必相交成正角。

演習三六●若內切四邊形之二對邊相等、則餘二對邊必平行。

演習三七●已知正方內求作等邊三角形、使其頂角尖在正方一邊之中央。

演習三八●試於三角形之一邊上求得一點自此點作二線與餘二邊平行、且以之爲界而相等。

演習三九●已知三角形之底與一底角、及餘二邊之和、求作其形。

演習四〇●已知三角形之底與一底角、及餘二邊之較、求作其形。

演習四一●已知三角形自頂角尖至底之垂線、及各邊與其底之相倚段之較、求作其形。

演習四二●若二圜各切二平行線及其交線、則連心線等於交線爲二平行線所限之一段。

演習四三●二圜外相切、過其切點作直線、以二圜周爲止點、則其二端之切線必互相平行。

演習四四●若二圜外相切、作二平行徑、則連二徑相對二端之直線、必過切點。

演習四五●已知一三角形、求作三圜各切其一邊、及餘二邊之引長線。

演習四六●已知等腰正三角形之弦與一邊之和、求作其形。

演習四七●已知正三角形之弦、與二邊之和、求作其形。

演習四八●已知正三角形之弦、與二邊之較求作其形。

演習四九●呷與𠮙爲圜周上之定點、𠰳叮爲圜徑、則𠰳呷與叮𠮙交點之合位何也。

演習五〇●已知三角形之中線、與其分一角所成之二角、求作其形。

演習五一●已知三角形之底、與二邊之較、及二底角之較、求作其形。

演習五二●已知等腰三角形之周界、及高、求作其形。

演習五三●以三角形之二邊爲徑、所作二平圜、必相交於第三邊或其引長線上。

演習五四●呷叱呐三角形之呷呐等於叱呐、叮爲呷叱內任一點、試證呷叮呐與叮叱呐兩三角形之外切圓相等。

演習五五●已知三角形之二邊、與至第三邊之中線、求作其形。

演習五六●已知三角形之周界、且知其諸角各等於已知他三角形之諸角、求作其形。

演習五七●已知三角形之一邊、與至餘二邊之中線、求作其形。

演習五八●求以已知之半徑作圓、切已知之圓與直線、若是之圓可作者若干。

演習五九●求以已知之半徑作圓、切已知之二圓、此問可有若干解法。

演習六〇●圓內切等邊三角形、若自圓周任一點至三角尖作直線、其最長者必等於餘二者之和。

演習六一●若二圓互相交、有二平行線過二交點而同以外弧爲止點、則此二線必相等。

演習六二●等腰三角形之頂角、等於等邊三角形之一外角、試證外切圓半徑、等於此等腰三角形之一腰。

演習六三●若圓之一弦、增長與半徑相等之一段、自其端過圓心作割線、則所函之大弧、其長適爲小弧之三倍。

演習六四●求作徑等而互切之三圓。

演習六五●求以已知之二半徑作相切二圓、且同切在一旁之直線。

演習六六●已知三角形之底與頂角、及底爲頂角平分線所割之點、求作其形。

演習六七●求作一圜切已知之他圜、又切已知直線於已知一點。

演習六八●求作一圜切已知直線、又切已知圜於已知一點。

演習六九●求作一圜心在已知直線上且過線上已知之點、而切已知之又一圜。

演習七〇●如甲：乙＝丙：丁、試證

$$甲^2+甲乙+乙^2:甲^2-甲乙+乙^2=丙^2+丙丁+丁^2:丙^2-丙丁+丁^2。$$

演習七一●已知甲、乙、丙三線、求作$天=\frac{乙丙}{甲}$。

演習七二●已知$\frac{天}{4}=\frac{9}{天}$、求作天。

演習七三●梯形之對角線、互相截成諸段、有同理比例。

演習七四●如勾股形之股倍於勾、則自正角尖至弦之垂線、必分弦二段如1與4之比例。

演習七五●呷吃呩叮為內切四邊形、呷吃與叮呩二邊引長相遇於戊、試證呷呩戊與吃叮戊兩三角形相似。

演習七六●如呷吃為圜之一弦、呩叮為自呷吃弧中點呩所作之又一弦、交呷吃於戊、試證呷呩弦為呩戊與呩叮之中率。

演習七七●如自三角形之二角尖各至對邊作垂線、則連此二垂線底之直線、所割去原形一段、必與原形相似。

演習七八●呷吃呩勾股形之弦爲呷吃、至其上呷與吃二點作垂線、遇吃呩之引長線於哎、呷呩之引長線於叮、則呷呩哎與吃呩叮兩三角形相似。

演習七九●如兩圜相交於呷於吃、過吃作割線交圜周於呩於叮、則呷呩與呷叮二直線之比例、與二圜徑之比例相同。

演習八〇●已知等腰正三角形中求作內切正方。

演習八一●自三角形之鈍角作線至底、令此線爲其分底二外段之中率。

演習八二●過已知之點作直線、使其在此點與自已知他二點至直線所作垂線之間二段、有定比例。

演習八三●梯形之二底彼倍於此者、則形之對角線互交於三平分點。

演習八四●圜周上呷點之切線、交叮哎二點之平行切線於吃於呩、吃哎與呩叮相交於吧、試證呷吧線與切線吃叮及呩哎平行。

演習八五●平分呷吃呩三角形呩角之呩叮線交呷吃底於叮、呡爲呷吃之中點、試證呡叮與呡呷之比例、如二邊之較與其和之比例。

演習八六●今有圜以呡爲心、呷與吃爲其周上二點、在呷與吃之切線相遇於哎、自呷作呷叮線正交呡吃、試證吃哎：吃呡＝吃叮：呷叮。

演習八七●呷吃爲圜徑、有呩叮弦與之正交、哎爲呩叮上任一點、作呷哎與吃哎二線、引長交圜周於吧於咦、

試證呐吧叮咦上任二倚邊之比例、如餘二邊之比例。

演習八八●今有二圓相交於呷、其心爲唇與吧、各圓任呷點之切線、交他圓之周於呐於叱、試證呷叱：呷呐＝唇呷：吧呷。

演習八九●呷叱呐三角形之內切圓心爲唇、呷唇線遇叱呐於叮、試證呷唇：叮唇＝呷叱＋呷呐：叱呐。

演習九〇●呷叱呐爲等腰三角形、呷呐線上呐點之垂線遇呷叱底或其引長線於哦、叮爲呷哦之中點、試證呷呐爲呷叱與呷叮之中率。

演習九一●呷叱與呐叮爲平行二直線、哦爲呐叮之中點、呷呐與叱哦相遇於吧、呷哦與叱叮相遇於咦、試證吧咦與呷叱平行。

演習九二●二圓內相切或外相切、過切點任作二直線、爲二圓周所割必有同理比例。

演習九三●二圓相交、自其一交點作二圓之徑、試證(1)連此二徑二端之線必過又一交點、(2)此線必與連心線平行。

演習九四●自正三角形正角尖至弦作垂線、成兩三角形、則此兩形內所作二切圓之徑、與原形正角之二邊有同理比例。

演習九五●圓心與八寸長之弦相距四寸、則其距五寸長之弦若干。

演習九六●若十八寸長之弦爲二十二寸長之弦所平分、則次弦二截各長若干。

演習九七●圜內二弦相交、分截圜周四段之比例爲1、1、2、5、則此二弦互成何角。

演習九八●等腰正三角形之弦方、與原形之四倍等積。

演習九九●如三角形田之三邊爲11粨、9粨、8粨、則田之面積爲若干方粨。

演習一○○●三角形之三邊爲39寸、42寸、45寸、其內切圜半徑若干●

演習一○一●三角形之三邊爲5尺、5尺、6尺、其外切圜徑若干。

演習一○二●三角形田之三邊爲16步、24步、36步、則自最長邊中點至對角尖之線當長若干。田之面積若干。

演習一○三●若弦長10糎、距圜心5糎、則圜半徑若干。自弦之一端至與弦正交之半徑之一端相距若干。

演習一○四●呷吃㕹叮四邊形、呷吃＝6粎、吃㕹＝11粎、㕹叮＝4粎、呷叮＝13粎、對角線呷㕹＝15粎、則形之面積爲若干方粎。

演習一○五●若二等積之三角形有同底而在其兩旁、則其底或底之引長線、必平分連二形頂角尖之線。

演習一○六●呷吃㕹爲已知三角形、求作一等積之三角形、其頂角尖在吃㕹線內之已知一點、其底在呷吃同直線內。

演習一○七●過呷吃㕹叮平行方形之呷角尖作線、遇㕹吃之引長線於吧、遇㕹叮之引長線於𠰌、試證二邊引長線所成矩形、與二邊之矩形等積。

演習一〇八●呷𠮙呐正三角形、正角在𠮙、於呷於呐作呷呐之垂線、遇呐𠮙與呷𠮙之引長線於咸於𠯆、作咸𠯆線、試證𠮙咸𠯆與呷𠮙呐兩三角形等積。

演習一〇九●等邊三角形、其高之正方、與其半邊方之三倍等積。

演習一一〇●自呷𠮙呐三角形呷𠮙底上可點、作直線與呷呐及𠮙呐二邊平行、遇𠮙呐於𠯆、呷呐於咸、則咸𠯆呐三角形爲呷可咸與可𠮙𠯆兩三角形之中率。

演習一一一●三角形之二腰爲70粎與65粎、自對角尖至第三邊作垂線、分之爲二截、其較9粎、問第三邊之長若干。

演習一一二●三角形二邊之和爲128尺、自對角尖至第三邊作垂線、分之爲二截、長60尺與28尺、問前二邊各爲若干。

演習一一三●三角形之二邊相比如6比5、自對角尖至餘一邊作垂線、分之爲二截、近大邊者36尺、近小邊者14尺、問前二邊各爲若干。

演習一一四●斜三角形之鈍角在底、二邊之較爲9粎、自頂角尖至底之引長線作垂線、分底之二截爲30粎與9粎、則二邊各若干。

演習一一五●旗竿長140尺、立於三十尺高之丘、爲風所折、其頂及平地之處距竿底、正等於竿末倒之一段、則折下一段若干。

演習一一六●自三角形底之兩端作線平分餘二邊、此二線相交於形內、與底成又一三角形、其積爲原形三分之一。

演習一一七●於勾股形各邊上作相似之多邊形、其邊數無定、試證弦上之多邊形、等於勾股上多邊形之和。

演習一一八●呷𠮙哂叮爲矩形、𠮙叮爲其對角線、叮𠮙哂三角形內作一切圜、其心爲㖘、作㖃㖘及𠯌㖘與呷叮及呷𠮙正交、是則呷𠯌㖘㖃矩形與呷𠮙哂叮矩形之半等積。

演習一一九●如於勾股形之三邊上各作正方、取其任二正方相倚二邊之末連之、所成之三角形、必與原形等積。

演習一二〇●求於已知斜方形內作一切圜。

演習一二一●今有圜半徑15尺、取一圜分配弧六十度、則其面若干。

演習一二二●若多邊形諸角之平分線相遇於一點、則形內可作一切圜。

演習一二三●今有圜面積154方积、弧長5.5积、其所配之圜心角爲若干度。

演習一二四●試證圜內切等角多邊形之邊數、如爲奇數、則其形爲有法形。

演習一二五●圜內有二平行弦、一爲內切有法六邊形之邊、一爲內切有法十二邊形之邊、如圜半徑爲十一寸、則二弦相距若干。

演習一二六●今有圜、其弦長三十寸者、所配之弧高五寸、則與此圜等積之正方邊若干。

演習一二七若四寸徑之管能於二小時三十分內注水滿池、則二寸徑之管注滿之需時若干。

演習一二八如等邊之三角形、與有法十邊形之周界均爲六寸、則其面積之較若干。

演習一二九如圜內切等邊三角形、以線連其任二邊所配弧之中點、則此線必爲二邊所三平分。

演習一三〇三等圜互相切、其間隙面積爲四十方尺、則圜半徑若干。

演習一三一求作一圜等於已知圜四分之三。

演習一三二若圜切於正三角形之外、以正角旁之二邊爲徑、向三角形外各作半圜、則所成二月形面積之和等於正三角形之面積。

演習一三三內切有法八邊形之面積、等於內切正方邊偕外切正方邊所成之矩形面積。

演習一三四若圜半徑爲末、試證內切有法八邊形之面積爲2末$^{2}\sqrt{2}$。

演習一三五圜面積爲二相似多邊形之中率、其一切圜之外、其一與圜等周。（此爲意大利名人嘎利利渥之題）

演習一三六試證自有法多邊形內一點、至諸邊所作垂線之和、等於多邊形之小幅乘邊數。

演習一三七若於有法六邊形之各邊上向外作正方、則此諸正方外角尖之處、即爲有法十二邊形之諸角尖。

演習一三八設有馬繫於圜田竹籬內邊之鈎上、其繩之長適可使馬達田之中心、是則其馬所能噬之草地

面積爲$3\frac{9}{8}$(4月−3之3)方步、求馬繩之長及圍田之周。(此爲美國哈佛德大學之試題)

演習一三九●如自已知點至已知平面作二等直線、則其與平面成角必等。

演習一四○●二平面各爲他平面之垂面、如其與他面之二交線平行、則此二平面互相平行。

演習一四一●二等線同在一旁、爲一平面之垂線、則連二線外端之線、必與平面平行。

演習一四二●求過已知平面內之已知直線作平面與已知平面成定角。

演習一四三●求過與已知平面平行之已知線作平面與已知平面成已知角。

演習一四四●求過已知體角之鋒作平面平分其角。

演習一四五●求空間距二平行線等遠諸點之合位。

演習一四六●如一直線正交一平面、則其在任一他平面之射影、與此二平面之交線正交。

演習一四七●如二平面正交、自此平面內任一點至彼平面作垂線、則必在本平面內。

演習一四八●直線在平面上之射影、必爲直線。

演習一四九●試求空間距已知三平面等遠之諸點之合位。

演習一五○●試求空間距相交二直線等遠之諸點之合位。

演習一五一●兩三棱角之二面角及其間之體角兩兩相等、則二棱角必相等或等勢。

演習一五二●試求空間距同平面內已知三直線等遠諸點之合位。

演習一五三●試於已知平面內求離面外已知二點等遠諸點之合位。

演習一五四●呷唇𠮙與呷唇㖞二角相等而不在一平面內、試證平分其平面間體角之平面、乃與𠮙唇㖞平面正交。

演習一五五●過一點有諸直線、任過其二對兩平面之交線、亦必過此點。

演習一五六●於已知平面內求得一點、與面外已知三點等遠。

演習一五七●過空間已知一點、求作直線割不同平面之已知二直線。

演習一五八●試求空間距已知二平面等遠、亦距已知二點等遠諸點之合位。

演習一五九●二平面正交非同平面之二不平行線、試證其交線乃與兩線平行之平面正交。

演習一六〇●自三棱角之尖作角內一直線、試證此線與諸鋒所成諸角之和、必小於諸面角之和、然必大於其半。

演習一六一●兩三棱角之二體角與其間之面角兩兩相等、則必相等或等勢。

演習一六二●平面與空間四邊形(空間之四邊形謂其各邊不俱在同平面內者也)之二邊平行、則其分餘二邊有同理比例。

演習一六三●凡三棱角內、過三鋒而正交對面之三平面、必相交於一直線。

演習一六四●凡三棱角內過三鋒與平分其對面角線之三平面、必相交於一直線。

演習一六五●今有立方形器容水半噸、則邊長若干。

演習一六六●命有法四邊棱錐體之底邊爲戊、其高爲辛、全面爲酉、試按底邊之同數以辛與酉表之。

演習一六七●今有棱錐平截體與棱柱體同高12寸、截體之二底爲正方、一邊10寸、一邊8寸、棱柱之底爲截體之中截面與二底平行者、則此二體積之較若干。

演習一六八●有法四面棱體之鋒長10寸、體積若干。

演習一六九●有法六邊棱錐體之高13寸、其斜高16寸、求其旁鋒若干。

演習一七〇●有法四邊棱錐體之旁面爲等邊三角形、其高九糎、則其底面積若干。

演習一七一●有法四邊棱錐平截體之高爲十糎、其底邊爲十六糎與六糎、則體之旁面積若干。

演習一七二●如棱錐體之高爲辛、有平面與其底平行、分原體爲二分、使其比例如3：4、問此平面距頂尖當若干。

演習一七三●如棱錐體之旁鋒爲寅、有二平面與底平行、分原體爲三等分、則其割旁鋒處距頂尖各若干。

演習一七四●如有法方棱錐體之底邊爲寅、全面積爲酉、則其體積若干。

演習一七五●如有法四角棱錐體之底周爲巳、過相對二鋒之截面積爲呷、則體之旁面若干。

演習一七六●如兩有法四面棱體之一三棱角旁諸面兩兩相等、且位次相同、則此二體相似。

演習一七七●如兩有法四面棱體之一體角相等、合等體角之諸面兩兩相似、且位次相同、則此二體相似。

演習一七八●自矩棱體之對角線中點、作垂線至一旁鋒、必平分此鋒、且等於其對角線在底上之射影之半。

演習一七九●凡棱體之鋒數加二、卽等於角尖數加面數。(此題爲名人尤拉所撰)

演習一八〇●凡棱體之面角和、等於其角尖數減二乘四正角。

演習一八一●如平面切平圓錐體、則其與底平面之交線、爲底之切線。

演習一八二●如平面切平圓柱體、則其與底平面之交線、爲底之切線。

演習一八三●圓柱之高爲底徑之半、如體積爲1075.21立方寸、則其高與底徑各若干。

演習一八四●有直管高四十尺、徑一尺、能容水重若干、管底每方寸受壓力若干。

演習一八五●矩形相倚二邊爲寅與卯、如遞以之爲軸而旋成二圓柱體、則其體積相比何如。

演習一八六●勾股形之勾與股爲寅與卯、如各以爲軸而旋成二圓錐體、其體積相比如何。

演習一八七●今有旋成之圓柱體與一矩棱體等積、已知矩棱體之長爲丑、廣爲寅、高爲卯、如圓柱體之半徑爲未、則其高若干。

演習一八八●今有旋成之圓錐體與一矩棱體等積、已知矩棱體之長爲丑、廣爲寅、高爲卯、如圓錐體之半徑爲未、則其高若干。

演習一八九●今有等積之旋成圓柱體二、其高之比例爲甲：乙、如一體之半徑爲未、則又一體之半徑若干。

演習一九〇●今有有法四角棱柱體、與一旋成圓柱體等積、已知圓柱體之高爲辛、半徑爲未、如棱柱體之底

邊爲寅、則其高若干。

演習一九一●旋成圓柱體之長廣高必增若干、而後可成一相似之圓柱體、其全面爲原體之卯倍。

演習一九二●旋成圓柱體之長廣高必增若干、而後可成一相似之圓柱體、其體積爲原體之卯倍。

演習一九三●平圓錐體之高爲辛、其最短與最長之原素爲丑與丑'、則其底半徑若干。

演習一九四●旋成圓錐平截體之旁面爲呻、其二底爲叱與乙、則其斜高若干。

演習一九五●旋成圓錐體之半徑爲未、其高爲辛、有與底平行之平面均分之爲二等分、則所成平截體之全面若干。

演習一九六●旋成圓柱體之積、等於其毋矩形之面積、乘毋矩形二對角線交點所旋成之圓周。

演習一九七●旋成圓錐平截體之二底上各作一圓錐體、俱以彼底中心爲頂尖、如二底之半徑爲未與未'、則此二圓錐體相交所成之圓半徑若干。

演習一九八●有一石橋廣二十尺、洞廣在水面一百四十尺、橋之頂距水面 $140\left(1-\sqrt[2]{\frac{1}{3}}\right)$ 尺、則洞向水之面共計若干方尺。(此爲哈佛德大學試題)

演習一九九●今有弧三角形、其三角爲5°75′7、7°52′7、1°003′6、問此形爲球面之何分。

演習二〇〇●球半徑十尺、內容正圓錐體高十五尺、問其體積若干。

演習二〇一●平面過半球、均分之爲二等面球帶、則其距底當若干。

演習二〇二●一底球分之積爲亥、其高爲辛、求球半徑若干。

演習二〇三●球半徑爲未、問其內切立方之體積若干。

演習二〇四●二等圜相交於一徑上、如作平面過之、與此徑正交、試證平面交二圜周之四點、乃在一圜周內。

演習二〇五●球徑上之正方、比其內切立方體邊上之正方、如三比一。

演習二〇六●球半徑爲未、如球帶之面積等於球之大圜之面積、則球帶之高若干。

演習二〇七●球積爲亥、球帶之面積爲呷、則其高若干。

演習二〇八●設以大氣之高爲一百五十里、地半徑約爲一萬二千里、則大氣之體積若干。

演習二〇九●地半徑約爲一萬二千里、今有燈塔高八十尺、則可照海面若干遠。

演習二一〇●設有游泳者、目齊水面、正可見三里外浮筒之頂、如此浮筒出水八寸、則地之半徑若干。

演習二一一●人必高出地面若干、方可見地面$\frac{1}{\text{卯}}$。

演習二一二●球半徑爲未寸、距球面辛寸有一小燭、問其所照之球帶面積若干。

演習二一三●邊爲一尺之立方體、內容圓柱體一、圓錐體一、球一、方棱錐體一、問各體之體積若干。

演習二一四●圓柱體蒸釜之二底爲半球、共長十二尺、周十尺、則全面若干、可貯水若干斤。

演習二一五●有法方棱錐體之底四寸見方、高八寸、則其外切球半徑若干。

演習二一六●球徑八寸、穿其中心作一徑爲三寸之孔、則所餘體積若干。

演習二一七●球內切之旋成圓柱體之高爲辛、半徑爲未、則圓柱體外所餘球積若干。

演習二一八●已知弧三角形內求作切圜。

演習二一九●過已知直線之諸平面、割已知球成諸截面、求其中心之合位。

演習二二〇●過已知球外已知一點之諸平面、割已知球成諸截面、求其中心之合位。

演習二二一●求以已知半徑作球面過已知三點。

演習二二二●求以已知半徑作球面過已知二點、而切已知平面或已知之球。

演習二二三●求以已知半徑作球面、過已知一點而切已知二平面。

演習二二四●求以已知半徑作球面、切已知三平面。

邁當度數表

度長之數

十密里邁當(粍)	＝	一生的邁當(糎)
十生的邁當	＝	一得西邁當(粉)
十得西邁當	＝	一　邁當(粎)
十　邁當	＝	一得加邁當(籵)

十得加邁當 ＝ 一愛達邁當（粨）

十愛達邁當 ＝ 一基羅邁當（粁）

度面之數

一百方密里邁當（方粍）＝ 一方生的邁當（方糎）

一百方生的邁當 ＝ 一方得西邁當（方粉）

一百方得西邁當 ＝ 一方　邁當（方粎）

一百方　邁當 ＝ 一方得加邁當（方籵）

一百方得加邁當 ＝ 一方愛達邁當（方粨）

一百方愛達邁當 ＝ 一方基羅邁當（方粁）

度體之數

一千立方密里邁當（立方粍）＝ 一立方生的邁當（立方糎）

一千立方生的邁當 ＝ 一立方得西邁當（立方粉）

一千立方得西邁當 ＝ 一立方　邁當（立方粎）

量數

十密里利脫耳（竓）＝一生的利脫耳（竰）
十生的利脫耳＝一得西利脫耳（竕）
十得西利脫耳＝一　利脫耳（竔）
十　利脫耳＝一得加利脫耳（竍）
十得加利脫耳＝一愛達利脫耳（竡）
十愛達利脫耳＝一基羅利脫耳（竏）

利脫耳者、邊爲一得西邁當之立方體積也。

衡數

十密里克蘭姆（瓱）＝一生的克蘭姆（甅）
十生的克蘭姆＝一得西克蘭姆（瓰）
十得西克蘭姆＝一　克蘭姆（瓦）
十　克蘭姆＝一得加克蘭姆（瓧）

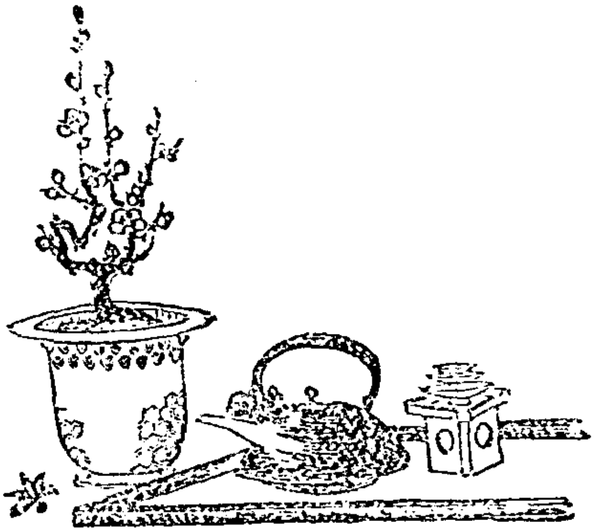
十得加克蘭姆＝一愛達克蘭姆(瓸)
十愛達克蘭姆＝一基羅克蘭姆(瓩)

克蘭姆者、蒸水當百度表四度時一立方糎之重也。

中法度量衡比較表

一邁當	＝3.2342128尺
一基羅邁當	＝1里286步4.2128尺
一方愛達邁當	＝17畝4分2方丈零1.3244方尺
一利脫耳	＝1.3532升
一克蘭姆	＝2分6釐4毫5絲3忽
一基羅克蘭姆	＝1.6533125斤

按物質之重率、即其物之重與等積蒸水最密時之重二者相與之比例也。夫既蒸水當最密時每立方糎重一瓦、故已知物之重率與體積、則其重易求。水每立方呎重62 2|1磅。



Spherical Triangle	弧三角形
,, Wedge or Ungula	弧劈
Square	正方形，平方
,, Centimeter	方糎
,, Decimeter	方粉
,, Dekameter	方籵
,, Foot	方尺
,, Hektometer	方粨
,, Inch	方寸
,, Kilometer	方粁
,, Meter	方米
,, Millimeter	方粍
Straight Angle	直角
,, Line	直線
Suggestions for Demonstration	證法舉隅
Summary	提綱
Supplement	補角，補弧
Supplemental Triangles	補三角形
Supplementary Angles	補角
Surface	面
,, of a Ball or Sphere	球面

T

Tangent	切線
,, of the Circle	圜之切線
Terms of the Ratio	比例之項
Tetragon or Quadrilateral	四邊形，四角形
Tetrahedral Angle	四棱角
Tetrahedron	四面棱體
Theorem	理題
Theory of Limits	求限之理
Therefore, or hence	故，所以
Thickness	高，厚
To Prove	求證
Transversal	交線
Trapezium	無法四邊形
Trapezoid	梯形
Triangle	三角形
Triangular Prism	三角棱柱體
Trigon	三角形，三邊形
Trihedral Angle	三棱角
Truncated Prism	棱截體
,, Pyramid	棱錐截體
,, Triangular Prism	三角棱截體

U

Unit	準箇
,, of Measure	量之準箇
Upper Base	上底

V

Variable	變度，變數
Vertex	尖，角頂
,, of the Triangle	三角形之尖
Vertical Angles	交角，頂角
,, Polyhedral Angles	交棱角
Volume	體積，容積

Z

Zone	球帶

Pentagon	五邊形，五角形
Perfect Sphere	正球
Perimeter	周界
Perpendicular	垂線，垂面
Physical Solid or Body	物體
Plane	面(指平面)
,, Angle	平面角
,, ,, of the Dihedral Angle	體角之平面角
Plane Figure	平面形
,, Geometry	平面幾何學
, Surface	平面
,, Triangle	平面三角形
Plus, or increased by	加
Point	點
,, of Tangency, or Point of Contact	切點
Polar Distance	極距
,, Triangle	極三角形
Poles	二極
Polygon	多邊形
Polyhedral Angle, or Polyhedral	稜角
Polyhedron	稜體
Position	地位
Postulate	可作
Preliminary Definitions	界說
Prism	稜柱體
Problem	作題
Product	合，合數
Projection	射影
Proof	證
Proportion	同理比例
Proportional Lines	比例線
Proposition	題
Pyramid	稜錐體

Q

Quadrant	象限
Quadrilateral	四邊形，四角形

R

Radius	半徑
,, of the Circle	圜半徑
Ratio	比例
Rectangle	矩形
Rectangular Parallelopiped	矩稜體
Rectilinear Figure	直線形
Re-entrant Angle	蝕角
Reflex Angle	凹角
Regular Polygon	有法多邊形
,, Polyhedron	有法稜體
,, Prism	有法稜柱體
,, Pyramid	正稜錐體
Required	求
Rhomboid	長斜方形
Rhombus	斜方形
Right Angle	正角
,, Cone	正圜錐體
,, Cylinder	正圜柱體
,, Parallelopiped	正平行稜體
,, Prism	正稜柱體
,, Section	正截面
,, Triangle	正三角形，句股形

S

Scalene Triangle	不等邊三角形
Scholium	案
Secant	割線
,, of the Circle	圜之割線
Second	秒
Sector	圜心角形
Segment	圜分
Semicircle	半圜
Semicircumference	半周
Side	邊
Similar	相似
,, Figures	相似形
,, Polygons	相似多邊形
,, Polyhedrons	相似稜體
Slant Height	斜高
Solid	體，立體
,, Geometry	立體幾何學
Solution	解
Sphere	球
Spherical Angle	弧角
,, Degree	球度
,, Polygon	弧多邊形
,, Pyramid	弧稜錐體
,, Sector	球心角體
,, Segment	球分

I

Icosahedron	二十面稜體
Inclination	倚度
Included Angle	夾角, 間角
Incommensurable Magnitudes	無公商之度
Incommensurable Ratio	無公箇之比例
Increasing variable	增變度
Inference	推論
Inscribed Angle	函角, 圜分角
Integer	整數
Interior Angle	內角
,, ,, of the Triangle	三角形之內角
Inversion	反理
Is equivalent to	等積
Is greater than	大於
Is less than	小於
Isoperimetric	等周的
,, Polygons	等周多邊形
Isosceles Trapezoid	等腰梯形
,, Triangle	等腰三角形

K

Kilogram	基羅克蘭姆(瓩)
Kiloliter	基羅利脫耳(竏)
Kilometer	基羅邁當(粁)

L

Lateral Area	旁面積
,, Edges	旁鋒
,, Faces	旁面
,, or Convex Surface	凸面
Length	長
Limit	限
Line	線(指直線)
Lines and Surfaces	線與面
,, ,, Rectilinear Figures	線與直線形
Line of Centers	連心線
Liter	利脫耳(竔)
Locus	合位
Lower Base	下底
Lune	月形

M

Magnitude	度
Maximum	極大度
Mean Proportional	連比例之中率
Means	中率
Measurement	量
,, of Angles	度角
Median, or Median Line	中線
Median Line of the Triangle	三角形之中線
Meter	邁當(米)
Method of Superposition	重累之法
Metric Tables	邁當度數表
Milligram	密里克蘭姆(瓱)
Milliliter	密里利脫耳(竓)
Millimeter	密里邁當(粍)
Minimum	極小度
Minus, or diminished by	減
Minute	分
Mixed Line	雜線
,, Number	雜數

N

Numerical Measure	數量

O

Oblique Angles	斜角
,, Cone	斜圓錐體
Oblique Cylinder	斜圓柱體
,, Line	斜線
,, Prism	斜稜柱體
,, Triangles	斜三角形
Obtuse Angle	鈍角
,, Triangle	鈍三角形
Octagon	八邊形, 八角形
Octahedron.	八面稜體
Opposite Interior Angles	對內角

P

Parallel Lines	平行線
Parallelogram	平行方形
Parallelopiped	平行稜體
Pentadecagon	十五邊形, 十五角形

Corresponding Angles 配角
Couplet 耦
Cube 正方體，正立方體，立方，立方體
Cubic Centimeter 立方糎
,, Decimeter 立方粉
,, Foot 立方尺
,, Inch 立方寸
,, Meter 立方粎
,, Millimeter 立方粍
Curved Line 曲線
,, Surface 曲面

D

Data 設
Decagon 十邊形，十角形
Decigram 得西克蘭姆(兝)
Deciliter 得西利脫耳(竕)
Decimal 小數
Decimeter 得西邁當(粉)
Decreasing Variable 損變度
Degree 度
Dekagram 得加克蘭姆(兙)
Dekaliter 得加利脫耳(竍)
Dekameter 得加邁當(籵)
Demonstration, or Proof 證
Descending Series 降級數
Diagonal 對角線
,, of the Polygon 多邊形之對角線
Diameter 徑
,, of the Circle 圜徑
Dihedral Angle, or Dihedral 體角
Directrix 準線
Distance 距度，直距
Divided by 被除
,, externally 外分
,, internally 內分
Division 分理
Dodecagon 十二邊形，十二角形
Dodecahedron 十二面稜體

E

Edge 鋒
Equality of Geometrical Magnitudes 度之相等
Equals or is equal to 等於
Equation 方程
Equiangular 等角
,, Triangle 等角三角形
Equilateral 等邊三角形
Equivalence 等積
Equivalent 等積的
,, Figures 等積形
Exercises 演習
Exterior Angle 外角
,, ,, of the Triangle 三角形之外角
Extremes 外率，外項

F

Face Angle 面角
Figure 形，圖，像
Foot of the Line 直線之底
Formula 公式
Fraction 分數，命分
Frustum 平截體
,, of a Pyramid 棱錐平截體
,, of a Cone 圓錐截體

G

General Suggestions 舉要
Generatrix 母線
Geometry 幾何學
Geometrical Concept 幾何學之思想
,, Figure 幾何學之形
,, Magnitude 幾何學之度
,, Solid 幾何學之體
Gram 克蘭姆(瓦)

H

Hektogram 愛達克蘭姆(兡)
Hektoliter 愛達利脫耳(竡)
Hektometer 愛達邁當(粨)
Hemisphere 半球
Heptagon 七角形，七邊形
Hexagon 六邊形，六角形
Hexahedron 六面稜體
Homologous parts 等件
Hypotenuse 弦(正三角形之最長邊)

幾何學中西名目表

A

Acute	銳
,, Angle	銳角
,, Triangle	銳三角形
Adjacent Angles	倚角
Algebraic Solution	代數解法
Alternate Exterior Angles	外對角
Alternate Interior Angles	內對角
Alternation	屬理
Altitude	高
,, of the Triangle	三角形之高
Angle	角(指平面角)
Angular degree	角度
Antecedent	前率
Antecedents of the Proportion	同理比例之前率
Apex	頂尖
Apothem	小幅
Arc	弧
,, degree	弧度
Area	面積
,, and Equivalence	面積與等積
Arithmetical Rule	數學法術
Axiom	自理
Axis of Symmetry	等勢之軸

B

Ball	球
Base	底, 底線, 底面
,, of the Triangle	三角形之底
Bisector	平分者
Breadth	廣, 寬
Broken Line	斷線

C

Center	圜心, 心
,, of Symmetry	等勢之中心
Centigram	生的克蘭姆(甅)
Centiliter	生的利脫耳(竰)
Centimeter	生的邁當(糎)
Central Angle	圜心角
Chord	弦
,, of the Circle	圜之弦
Circle	圜
Circular Cone	平圓錐體
,, Cylinder	平圓柱體
,, Sector	圜心角形
Circumference	周, 圜周
Commensurable Magnitudes	有公測之度
Common Exterior Tangent	外公切
Common Interior Tangent	內公切
Common Side	公邊
,, Tangent	公切線
,, Vertex	同尖, 公尖
Compasses	規
Complement	餘角, 餘弧
Complementary Angles	餘角
Composition	合理
Concave Polygon	凹多邊形
Concentric Circles	同心圜
Conclusion	斷語
Cone	圓錐體
Conical Surface	圓錐面
Consequent	後率
Consequents of the Proportion	同理比例之後率
Constant	常度, 常數
Converse	反論, 反論題
Convex Polygon	凸多邊形
,, Polyhedral Angle	凸稜角
Convex Spherical Polygon	凸弧多邊形
Corollary	系

上海商務印書館新出各種教科書廣告

初等小學堂用

修身教科書一至十册 每本洋一角
修身教科書教授法一至十册 每本洋一角
修身教科書第一册掛圖二十幅 甲已出 每分洋六元
乙未出 每分洋五元
國文教科書第一册 每本洋一角五分
國文教科書二至十册 每本洋二角
國文教科書教授法第一册 每本洋四角
國文教科書教授法二至五册 每本洋三角
女子國文讀本 每本洋一角五分
文學初階一二三四册 每本洋一角
文學初階五六册 每本洋一角五分
總理學務大臣審定普通珠算課本 每本洋一角
珠算入門二册 每部洋四角五分
珠算教科書卷上甲乙二册 每部洋三角
珠算教科書卷下甲乙二册 每部洋三角
珠算教科書教授法卷上 每本洋五角
珠算教科書教授法卷下 每本洋五角
筆算教科書第一二册 每本洋一角五分
筆算教科書第三四五册 每本洋二角
筆算教科書第一二册掛圖十六幅 每分洋二元五角
筆算教科書教授法第一二册 每本洋二角五分
筆算教科書教授法第三四册 每本洋三角五分
筆算教科書教授法第五册 每本洋四角
中國歷史教科書二册 每部洋三角
中外國地理教科書四册 每部洋五角
習字帖第一册 每本洋一角
習字帖第二三四册 每本洋八分
習畫帖教員用一册 每本洋二角
習畫帖學生用八册 每部洋五角六分
普通新歷史 每本洋一角二分
小學唱歌教科書 每本洋

高等小學堂用

總理學務大臣審定中國歷史教科書二册 每部洋一元
總理學務大臣審定西洋歷史教科書二册 每部洋五角
總理學務大臣審定亞美利加洲通史二册 每部洋七角五分
中國歷史教科書四册 每部洋七角

東洋歷史教科書二冊	每部洋三角
西洋歷史教科書	每本洋
中外國地理教科書四冊附萬國輿圖一冊	每部洋八角五分
小學萬國地理新編	每本洋二角
理科教科書四冊	每部洋八角
初等物理學教科書	每本洋二角
理化示教	每本洋二角五分
博物學大意二冊	每部洋四角
理化學大意二冊	每部洋三角
筆算教科書四冊	每本洋二角
筆算教科書教授法第一冊	每本洋二角五分
筆算教科書教授法第二冊	每本洋三角
筆算教科書教授法第三四冊	每本洋二角五分
數學教科書二冊	每部洋三角
筆算教本二冊	每部洋四角
毛筆習畫帖八冊	每部洋一元四角
鉛筆習畫帖八冊	每部洋八角
伊索寓言	每本洋三角

中學堂用

中國歷史教科書第一冊	每本洋七角
中國歷史教科書第二冊	每本洋五角
中國歷史教科書第三冊	每本洋五角
西洋歷史教科書二冊	每部洋一元五角
重訂改正東洋史要三冊	每部洋一元
萬國史綱	每本洋一元
總理學務大臣審定瀛寰全志附圖一冊	每部洋二元
中國地理學教科書	每部洋一元五角
代數學二冊	每部洋二元四角
平面幾何學	每本洋一元三角
立體幾何學	每本洋一元
習畫帖六冊	每部洋一元二角
用器畫教科書二冊	每部洋五角五分
總理學務大臣審定化學教科書	每本洋一元
化學新教科書	每本洋一元二角
總理學務大臣審定格致教科書	每本洋五角
計學教科書	每本洋一元
物理學	每本洋二元
熱學	每本洋七角
力學	每本洋一元
水學	每本洋六角
氣學	每本洋六角
磁學	每本洋四角
聲學	每本洋四角

靜電學　每本洋六角
動電學　每本洋一元
總理學務大臣審定 生理學教科書　每本洋二角五分
生理學　每本洋一元
地文學　每本洋九角
地質學　每本洋一元二角
普通礦物學教科書三册　每部洋六角
植物學教科書　每本洋一元
動物學教科書　每本洋八角
總理學務大臣審定 馬氏文通二册　每部洋一元五角
漢文典　每本洋
總理學務大臣審定 理財學精義　每本洋四角
帝國英文讀本卷首　每本洋一角
帝國英文讀本卷一　每本洋二角五分
帝國英文讀本卷二　每本洋四角
帝國英文讀本卷三　每本洋五角五分
帝國英文讀本卷四　每本洋一元
英華文通　每本洋一元

高等學堂用

微積學　每本洋一元六角
京師大學堂講義初編四册　每部洋八角
京師大學堂講義二編四册　每部洋八角

簡易課本

簡易修身課本　每本洋一角
簡易國文課本二册　每部洋二角五分
簡易歷史課本　每本洋一角
簡易地理課本　每本洋一角
簡易數學課本二册　每部洋三角
簡易格致課本　每本洋一角

師範學堂用

總理學務大臣審定 論理學綱要　每本洋四角五分
總理學務大臣審定 教育心理學　每本洋三角五分
學校管理法　每本洋二角
教授法原理　每本洋二角
教育史　每本洋二角五分
教育學　每本洋二角
論理學　每本洋一角五分
各科教授法　每本洋二角
中國歷史卷上　每本洋二角五分
中國地理　每本洋一角五分
中國文典　每本洋
物理學　每本洋
心理學　每本洋
近世算術　每本洋
速成師範講義叢錄二册　每部洋一元二角

（立體幾何學）

（定價每本大洋一元）

光緒三十二年歲次丙午正月首版

光緒三十二年歲次丙午六月二版

編譯者　山陰謝洪賚

校勘者　嘐城周承恩

發行者　商務印書館

印刷所　上海北福建路第二號　商務印書館

總發行所　上海棋盤街中市　商務印書館