矢算初步

張永立編

商務印書館發行

矢算初步

張永立編

商務印書館發行

目　錄

下編 力學要義

矢算初步

上編 基本運算

第一章 緒論

§1. 無向量與向量

量可大別爲二，曰無向量，曰向量.

量之不需有方向之含義，而能完全由大小決定之者，曰無向量.如資本二百萬元；人口四萬萬；地球半徑之平均長爲 6366 公里；以至動能 50 焦耳，熱量 2000 卡之類皆是也.

自然界中，有若干種之量，不能僅由大小完全決定，如軍艦每小時進行 1500 海里，重力加速度 g 爲 980 每秒每秒厘米皆是也.每小時進行 1500 海里，向南歟抑向東歟？980 每秒每秒厘米之加速度平行於地軸歟，通過地心歟？

僅有一數量之大小，所給與吾人之觀念，至爲模糊．若加以方向之含義曰：軍艦向正南每小時進行 1500 海里，重力加速度爲 980 每秒每秒厘米，依鉛直方位，自上而下，則此二量之決定，可無疑意．如此之量，稱爲向量．

§2. 向量之決定

決定向量之要素有三：曰度量，曰方位，曰方向．

就前節之例觀之：980 每秒每秒厘米示吾人以 g 之大小，爲重力加速度之度量．於地上一點，作一三度座標，則鉛直方位，示吾人以此量與各座標軸間之角的關係．然僅有方位，尚不能完全決定此向量．蓋地心所施於物體之力，係引力而非推力，若不將 g 加以方向之限制（"向下""自上而下"等）則純就理論方面言之，吾人儘可想像桌上之書籍，時鐘等，均能自動向空飛昇而去，而不爲不合理之事實．

§3. 向量之表示法——矢

向量之決定，既含有三要素，則表示向量之工具，自當備有度量，方位，方向三要素，始爲合格．能具備此三要素

之最簡單之幾何元素，為一有方位，有方向之線段．

試於空間，任作一無限直線，平行於所欲表示之向量．於此直線上取一點 O．假定有一幾何點，沿此直線進行，依

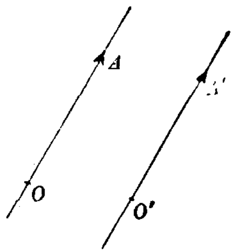


圖 1

向量之方向，自 O 出發，以至於某一點 A，令 OA 之長度與向量有一定之比的關係．則此有方位有方向（自 O 至 A）之線段，可以將一向量之三要素完全表出．

此有方位，有方向之線段 OA 稱為矢，於線段之 A 點，加一箭頭，此示自 O 至 A 之方向，記法，則 OA 之上，加一箭頭如 $\overrightarrow{OA}$，以示區別於普通線段．為簡便起見，亦可記如 $\vec{a}$．O 點稱為矢之原點，A 稱為矢之終點，載 $\overrightarrow{OA}$ 之無限直線，稱為矢之座．

試作合於上述條件之另一矢，因平行於一向量之無限

直線，有無限條；而此無限直線上之點，可以作矢之原點者亦無窮，故此另一矢之作法為可能．設此另一矢為 $\overrightarrow{O'A'}$．$\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{O'A'}$ 均屬表同一向量之矢，此二矢長度相同，方位方向亦同，稱為同質之二矢，記之如：

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{O'A'} \tag{1101}$$ *

并由初等幾何之性質，知二矢為同質之條件，在二矢可由一平行移動而完全重合．

§4. 單位矢　矢長　倒矢

不同方位之二矢，為不同類，不能互相比較，若二矢 $\overrightarrow{OA}$,

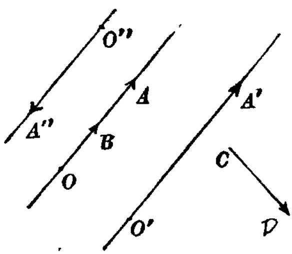


圖 2

$\overrightarrow{OB}$ 之方位與方向相同，A 點與 B 點不能重合，則 OA, OB

* (abcd) 表示第 a 編第 b 章第 cd 公式．

二線段之長之比爲一正實數 m. 因二矢方位方向均同, 可認 $\overrightarrow{OA}$ 爲 $\overrightarrow{OB}$ 之 m 倍 換言之, 以 m 乘 $\overrightarrow{OB}$, 可將 $\overrightarrow{OB}$ 伸長至 m 倍, 而使其與 $\overrightarrow{OA}$ 相等, 書如

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a}=m\overrightarrow{OB} \qquad (1102)$$

同方位方向而不同座, 或同座而不同原點之矢, 亦可作同樣比較而得

$$\overrightarrow{O'A'}=\vec{a}'=n\overrightarrow{OB}$$

若以 OB 線段之長爲單位, 則 $\overrightarrow{OB}$ 爲此方位之單位矢, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}$, $\vec{a}'$ 諸矢之長度, 稱爲此諸矢之矢長(或值) 以 $\overline{OB}$, $\overline{OA}$, a' 記之, * 得

$$\overline{OB}=1, \qquad \overline{OA}=a=m, \qquad \overline{O'A'}=a'=n$$

通常一矢 $\overrightarrow{OA}$ 或 $\vec{a}$ 之單位矢, 記如 $\quad (\overrightarrow{OA})_1 \quad \vec{a}_1$

而 $\qquad (\overline{OA})_1=1 \qquad a_1=1$

由(2)知一矢可認爲其單位矢與其矢長之乘積, 因得

$$\overrightarrow{OA}=\overline{OA}\cdot(\overrightarrow{OA})_1, \qquad \vec{a}=a\cdot\vec{a}_1. \qquad (1103)$$

$\vec{a}$ 之倒矢爲一矢, 其單位矢與 $\vec{a}$ 相共 而其值則爲 a 之倒數 $\frac{1}{a}$, 記之如 $\vec{a}^{-1}$, 得

---

*有時爲便利起見, 亦記如 $|\vec{a}|$

$$\vec{a}^{-1}=\frac{1}{a}\vec{a}_1=a^{-1}\cdot\vec{a}_1=a^{-2}\ (a\cdot\vec{a}_1)=a^{-2}\vec{a}=\frac{\vec{a}}{a^2} \qquad (1104)$$

§5. 同方位而不同方向之矢 反矢

將一無限直線，認爲一點自一端至他端之軌跡，此點進行之方向有二：或由此端至彼端，或由彼端至此端，今若取一種進行方向爲正，則他種進行方向爲負，已定有正負向之直線，謂之軸.

以一軸爲矢座，則座上之矢之方向，亦隨軸而決定，矢之方向與軸之正向相合者爲正，與之相反者爲負，故對於同一矢，可得：

$$\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{OA} \qquad (1105)$$

如此，方向相反，度量與方位均同之二矢，謂之相反或反向. $\overrightarrow{AO}$ 稱爲 $\overrightarrow{OA}$ 之反矢.

由 (5) 可知：以 -1 乘一矢，其結果在將此矢變爲其反矢. 以負數 $-m$ 乘一矢，其結果在將此矢伸長至 m 倍，同時轉變其方向.

軸之正向，不特爲軸上之矢之正向，亦爲平行於此軸之矢之正向. 故平行之若干無限直線，僅能有一共通之正向，

亦猶一無限直線之不能有兩個正向也. 故圖 2 中, $\overrightarrow{O''A''}$ 之方向, 亦可由 $\overrightarrow{OB}$ 決定, 但 $\overrightarrow{CD}$ 則不能.

不同方位之無限直線, 不能以其一之正向, 強作其他之正向, 有若干方位不同之直線, 卽需定若干正向.

由前節單位矢之性質 知方位相同之矢, 可有一共同之單位矢. 然有若干個不同方位之矢, 卽當有若干個單位矢.

§6　自由矢　滑動矢　固定矢　極矢　軸矢

(a) 因矢之原點之活動性可以將矢大別爲三類:

1 矢之原點, 可以由平行移動, 佔據空間之任一點者, 稱爲自由矢. 自由矢可認爲全等於其同質之矢.

矢之共有一原點者, 稱爲共原, 若干自由矢, 均可由平行移動使其共原.

2. 原點可在矢座上滑動, 而不變其性質之矢, 稱爲滑動矢. 滑動矢其座外同質之矢, 不能全等.

3. 矢之原點, 固定於一處而不能移動者, 稱爲固定矢

力學中, 關於力之合成分解等, 與作用點之位置無關, 此時之力, 可以自由矢代表之. 研究力對於一定點或固定軸所生之力距時, 因此力可作平行於本身之滑動運動, 而力

矩不變，故此時之力，可以滑動矢表之．至若研究地磁作用於一磁極之力，則因磁場強度之隨地有變化，其代表之矢，原點決不能任意移動，此矢爲一固定矢．

(b 因所代之向量之性質，矢可大別爲二：

1. 通常所見之向量，如力，速度等，其向量之性質，顯而易見，其代表之矢之方位方向，與之相似，此等之矢曰極矢．

2 車輪之轉動有遲速，其轉動軸有一定之方位，其轉動之方向，可與時針運行之方向相同，或與之相反，故轉動亦爲向量．矢之表含有轉動之向量者，稱爲軸矢（表示之法，後將論之）．

軸矢之記法，與普通之矢同．但有表明一矢爲軸矢之必要時，可將箭頭變彎，而記如 $\breve{n}$, $\overset{\frown}{m}$.

§7. 矢算

研究矢之算學關係（包含數量，方向，方位而言）而直接由矢之本身出發之學，曰矢算．

矢爲幾何元素之一，故解析幾何中研究之．然解析幾何研究矢之方式，與矢算迥異．解析幾何中，將矢射影於一

三元座標上，由其三射影之數量關係，進而推知矢之本身之性質．矢算則不然，其目的在研究矢之本身．其計算卽直接施諸矢之本身，幷不經過射影之一階段．故矢算於計算上，運用上，均較解析幾何爲便．特因過於簡便，於極短練之公式中，含有多量之意義，故不如解析幾何之易於領悟．

矢既爲向量之代表物，研究矢算，卽不啻抽象的研究一切向量．故幾何學，運動學，力學，物理學中，均爲其活動之區域．而近世相對論之數學基礎，矢算尤佔重要位置，爲治斯學者所不可不知．特本書未入矢量解析之領域，故於矢算之運用，亦僅能於幾何學及初步之力學中見之．

第二章　矢之加法

§8. 二矢之和

茲有一矢 $\vec{b}$ 於此,於空間任一點 O 作其同質之矢 $\overrightarrow{OB}$;

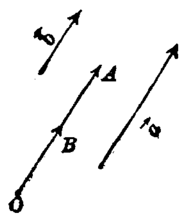


圖 3

又以 B 爲原點,作 $\overrightarrow{BA}$ 令與 $\vec{b}$ 同質,可得一矢 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ 此矢 $\vec{a}$ 之方位與方向,均與 $\vec{b}$ 同,其矢長 a 則爲 b 之二倍,由 §4,得

$$\vec{a}=2\vec{b}.$$

將二個 $\vec{b}$ 矢,首尾連接而得一矢等於 $2\vec{b}$,此種手續,相當於加法. $\vec{a}$ 爲二個 $\vec{b}$ 之和,書如

$$\vec{a}=\vec{b}+\vec{b}.$$

以類似之法,可得任意二個同方位之矢之和. 設欲求二同

方位矢 $\vec{c}$ 與 $\vec{d}$ 之和，只須以 $\vec{c}$ 之終點爲原點 作 $\vec{d}$ 之同質矢而以 $\vec{c}$ 之原點爲和之原點，以 $\vec{d}$ 之同質矢之終點爲和之終點.

仿此，推而廣之 今有不同方位之二矢 $\vec{a}, \vec{b}$，欲求其和 $\vec{a}+\vec{b}$.可於空間任一點 O，作一與 $\vec{a}$ 同質之矢 $\overrightarrow{OA}$ 然後以 A 爲原點，作一與 $\vec{b}$ 同質之矢 $\overrightarrow{AC}$，則與同方位二矢之和相類，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ 當爲 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 之和（圖 4）.

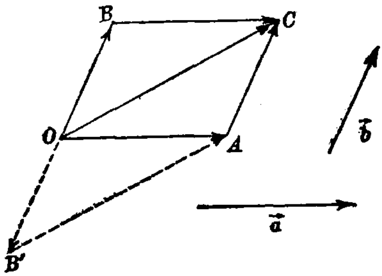


圖　4

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}.$$

以 O, A, C，爲平行四邊形之三頂點，以 OC 爲對角線，補足此平行四邊形 $OACB$. 由平行四邊形之性質，知 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}$.

但同時　　$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\vec{b}+\vec{a}.$

故　　$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}. \tag{1201}$$

表明矢之加法，服從交換律.

依差之定義：$\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之和既為 $\vec{c}$,則 $\vec{c}$ 與 $\vec{a}$ 之差當為 $\vec{b}$；$\vec{c}$ 與 $\vec{b}$ 之差當為 $\vec{a}$,記如

$$\vec{c}-\vec{a}=\vec{b}, \qquad \vec{c}-\vec{b}=\vec{a}.$$

由圖 4, 得求二矢之差之法，求二矢 $\overrightarrow{OC}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 之差，只須連接此二矢之終點，所得之矢，即為二矢之差. 如係由 $\vec{c}$ 減去 $\vec{b}$,則差之矢向，係自 B 至 C.

如是，可得 $\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$.

故由圖 4, 知："若以二矢為邊作平行四邊形，則其二對角線各為此二矢之和及差".

今作 $\overrightarrow{OB}$ 之反矢 $\overrightarrow{OB'}$, 由平行四邊形 $OB'AC$, 知 $\overrightarrow{OA}$ 為 $\overrightarrow{OB'}$ 與 $\overrightarrow{OC}$ 之和：

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB'}.$$

同時由平行四邊形 $OBCA$, 知 $\overrightarrow{OA}$ 為 $\overrightarrow{OC}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 之差：

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}.$$

故知由一矢減去他矢，其結果與於此矢上加他矢之反矢同.

同方位二矢之差，可認為任意二矢之差之特例，茲不贅述.

以二反矢$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AO}$ 相加, 所得之和, 原點與終點相重, 由 (1105), 得

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AO}=0.$$

此種原點與終點重合之矢, 謂之零矢

§9. 多數矢之加法

前節所言二矢之加法, 可推廣至於三矢或三矢以上之加法, 例如欲求 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ 三矢之和, 當於 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 之和 $\vec{c}$ 之終點 C, 作 $\vec{d}$ 之同質矢, $\overrightarrow{CD'}$, 而以$\overrightarrow{OD'}$爲此三矢之和 (圖 5).

以 OA, OB, OD 爲邊, 作一平行六面體, 則易看出 $\overrightarrow{OD'}$ 爲此平行六面體之一對角線, 得

$$\overrightarrow{OD'}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD'}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{OD}.$$

同時

$$\overrightarrow{OD'}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{ED'}=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})+\overrightarrow{OA},$$

$$\overrightarrow{OD'}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FD'}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})+\overrightarrow{OB}.$$

比較上三式, 得

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{d}=(\vec{b}+\vec{d})+\vec{a}=(\vec{a}+\vec{d})+\vec{b}. \quad (1202)$$

故知矢之加法, 亦服從組合律.

以此擴張至於 n 矢欲求 n 矢之和, 可取任一矢$\overrightarrow{OA}$之原點爲原點, 於其終點上, 聯以另一矢之原點. 如是繼續行之,

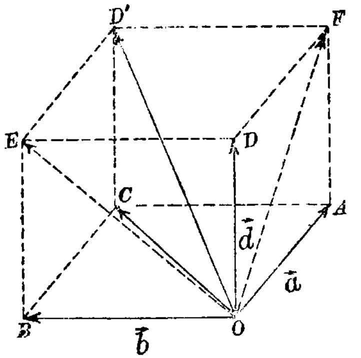


圖　5

至於第 n 矢$\overrightarrow{FG}$,乃以 $\overrightarrow{OG}$ 爲此諸矢之和.

$$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\cdots\cdots\cdots+\overrightarrow{FG}.$$

此時若尚有一矢$\overrightarrow{GH}$,適爲 $\overrightarrow{OG}$之反矢,則行加法之結果,H 重合於 O, 此諸矢圍成一閉合圖形, 而其和爲零, 由

$$\overrightarrow{GH}=-\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{GO}.$$

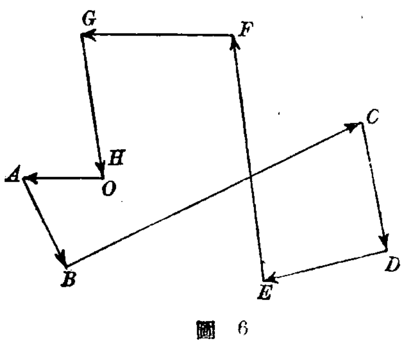


圖　6

得 $$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\cdots\cdots+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GO}=0. \tag{1203}$$

歸納言之:有若干個矢於此(包括二矢而言),欲求其和:只須順次以各矢爲邊,作一折線,若此折線成一閉合圖形,則此諸矢之和爲零.若折線之兩端並未重合,則聯起始一端至終結一端,將折線變爲閉合圖形之矢,爲此諸矢之和.

設有若干矢於此,並非單純的欲求其和,而爲加減法相混時,可將相應於作減法之諸矢,換爲其反矢,然後仍依加法行之.

注意:　$\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}+\cdots\cdots+\vec{l}$ 含有方向之意義,不能只就線段之長而言.通常

$$a<b+c+\cdots\cdots\cdots+l.$$

必需 $\vec{a}, \vec{b},\cdots\cdots$ 諸矢,均爲同方位,同方向之矢,然後可得

$$a=b+c+\cdots\cdots+l.$$

§10.　分配律

矢加法服從交換律與組合律,前二節中已言之矣.分配律是否亦適用於矢之加法,則爲本節討論之中心.

$$(m+n+\cdots\cdots\cdots+p)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}+\cdots\cdots+p\vec{a}. \tag{1204}$$

之眞確性,不待證明,蓋 $m\vec{a}$, $n\vec{a}$, $\cdots\cdots\cdots$ 以及 $(m+n+\cdots\cdots$

$+p\vec{a}$ 均為同方位矢，其加法相當於普通線段之加法也.

欲證明

$$m(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\cdots+\vec{n})=m\vec{a}+m\vec{b}+m\vec{c}+\cdots\cdots+m\vec{n}. \tag{1205}$$

請僅取三矢證之.

設 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}$,

$\overrightarrow{OA'}=m\vec{a}$, $\overrightarrow{A'B'}=m\vec{b}$, $\overrightarrow{B'C'}=m\vec{c}$;

得 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{OC}$, $m\vec{a}+m\vec{b}+m\vec{c}=\overrightarrow{OC'}$.

但 ABC 與 $A'B'C'$ 為位似圖形，而以 O 為位似心(圖 7)，

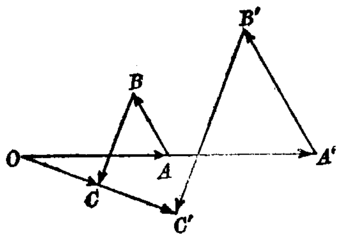


圖 7

其位似比為 m. 故知 O, C, C' 三點在一直線上，且

$$m\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC'}$$

即 $$m(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=m\vec{a}+m\vec{b}+m\vec{c}.$$

用相同之方法，可以證明(1205)對 n 矢亦為眞確，不過矢

數較多,則較爲麻煩而已.

由(1204),(1205)二式相併,可得

$$(m+n+\cdots\cdots+p)(\vec{a}+\vec{b}+\cdots+\vec{n})=m\vec{a}+n\vec{a}+\cdots\cdots$$
$$+p\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{b}+\cdots+p\vec{b}+\cdots+m\vec{n}+n\vec{n}+\cdots+p\vec{n}. \quad (1206)$$

由是知矢之加法,亦遵守分配律.

§11. 二矢之和與零矢

(a) 同方位之矢,可以比較,而其比爲一實數,已爲§4中言之.設 $\vec{a},\vec{b}$ 二矢同方位,其比爲 x,則有無限組之 m 與 n 之值,使 $x=-\frac{n}{m}$,此時

$$m\vec{a}+n\vec{b}=0. \quad (1207)$$

表明同方位之二矢,常能受某種相當變化,而使其於受變化後之和爲一零矢.

(b) 若 $\vec{a}=\vec{b}$,同時 $m\vec{a}+n\vec{b}=0$,則由 $m\vec{a}+n\vec{b}=(m+n)\vec{a}=0$.

可得 $$m+n=0.$$

反之,若 $$\begin{cases} m\vec{a}+n\vec{b}=0, \\ m+n=0. \end{cases} \quad (1208)$$

同時成立,則由 $m=-n$, 可得 $-n\vec{a}+n\vec{b}=0$

而得 $$\vec{a}=\vec{b}.$$

故(1208)爲二矢全等之必需且充分之條件.

(c) 若 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 二矢不同方位,則 $m\vec{a}+n\vec{b}$ 不能爲零. 蓋以平行於 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 之任意四直線所圍成之平行四邊形 $OA'B'C$, 令(圖 8)

$$\overrightarrow{OA'}=m\vec{a}, \qquad \overrightarrow{OB'}=n\vec{b}.$$

無論將 A' 與 B' 移至何處(卽"不論將 m 與 n 如何變化"),其二對角線之一, 常爲 $m\vec{a}+n\vec{b}$.

此對角線既不能絕對無長度,則 $m\vec{a}+n\vec{b}$ 終不能爲一零矢.

若必欲 $m\vec{a}+n\vec{b}=0$, 而 $\vec{a}$ $\vec{b}$ 又不同方位, 必須

$$m=n=0.$$

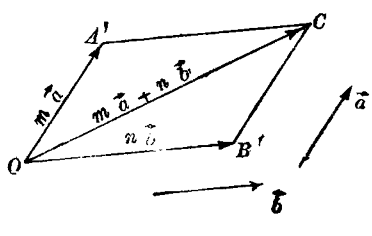


圖 8

(d) 若 $m\vec{a}+n\vec{b}=m'\vec{a}+n'\vec{b}$.

$\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 不同方位,且均不爲零矢時,則因

$$(m-m')\vec{a}+(n-n')\vec{b}=0.$$

依本節(c)所云,必須　$m=m',\qquad n=n'.$

注意：通常表示二矢方位相同，捨(1207)而用(1102)，取其較爲簡便也.

§ 12. 應用雜例

1. 平行四邊形之兩對角線互爲等分.

如圖 9, O 爲兩對角線之交點,得

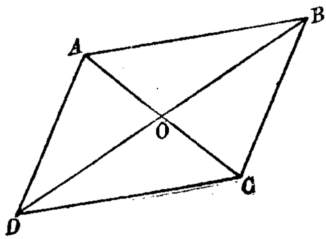


圖 9

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB},$$

$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}.$$

$\overrightarrow{AO}$ 與 $\overrightarrow{OC}$ 同方位. $\overrightarrow{DO}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 亦然,由(1102),得

$$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{AO},\qquad \overrightarrow{DO}=n\overrightarrow{OB}.$$

但 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, 故　　$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=m\overrightarrow{AO}+n\overrightarrow{OB}$.

依據 §11 (d), 得　　　$m=1, n=1$.

明示 O 點平分 DB, AC.

注意：$\overrightarrow{DO}$ 爲三角形 DAC 之一中線，以矢記之，得

$$\overrightarrow{DO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}).$$

此式表 O 點爲 CA 之中點，用途極廣，此後當常見之.

2. 三角形之三中線會於一點 此點爲三中線之一三等分點.

設 $\triangle OAB$ 之二中線 AE, BF 相交於 G, 令 $\overrightarrow{OA}=2\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=2\vec{b}$.

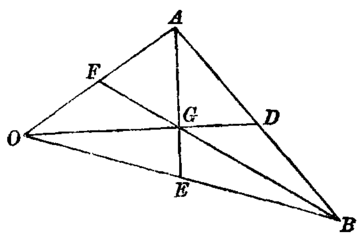


圖　10

則　　$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OB}=\vec{a}-2\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{b}-2\vec{a}$,

$$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{OB}+x\overrightarrow{BF}=2\vec{b}+x(\vec{a}-2\vec{b}).$$

同時　$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}=2\vec{a}+y(\vec{b}-2\vec{a})$.

因得　$2\vec{b}+x(\vec{a}-2\vec{b})=2\vec{a}+y(\vec{b}-2\vec{a}).$

依據 § 11 (*d*), 比較兩邊 $\vec{a}, \vec{b}$ 之係數關係, 得

$$\begin{cases} x=2-2y, \\ 2-2x=y. \end{cases}$$

解此聯立方程式得　$x=y=\frac{2}{3}$.　　$\overrightarrow{OG}=\frac{2}{3}\{\vec{a}+\vec{b}\}$

表明 G 爲 AE, BF 之一三等分點.

今聯 OG, 延長之, 使交 AB 於 D, 則

$$\overrightarrow{OD}=u\overrightarrow{OG}=\frac{2u}{3}\{\vec{b}+\vec{a}\}.$$

同時　$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=2\vec{a}+v(2\vec{b}-2\vec{a}).$

故　$$\frac{2}{3}u(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}+v(2\vec{b}-2\vec{a})$$

比較 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之係數, 得　$u=\frac{3}{2}$.

故　$$\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}+\vec{b}.$$

此式表明 D 爲 AB 之中點, 故三中線 OD, AE, BF 交於同一點 G (重心)

3. 平行, 且相等於三角形之中線之三線段, 可以圍成一三角形.

如前例(圖10),得　$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$,

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}),$$

$$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{BA}).$$

將上三式兩邊相加,得 $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}=0.$

依據 §9 知此三矢首尾相接,可合成一閉合圖形(三角形).

4. 自三角形任一邊上,引平行於他邊之直線與第三邊相截,求其間之線段關係.

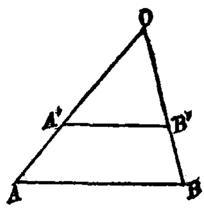


圖 11

如圖 11 設 $A'B'//AB$ 令 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$,

$$\overrightarrow{A'B'}=\lambda\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{OA'}=x\vec{a},\quad \overrightarrow{OB'}=y\vec{b};$$

得 $$\overrightarrow{A'B'}=\lambda(\vec{b}-\vec{a})=y\vec{b}-x\vec{a}.$$

比較 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 在上式兩邊之係數,得 $x=y=\lambda.$

即 $$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}.$$

5. 聯梯形不平行邊之中點之線段，與聯二對角線之中點之線段，其長各爲二底邊之半和及半差.

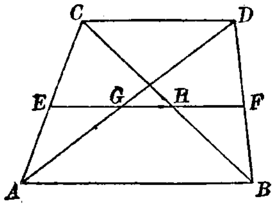


圖 12

(a) 如圖 12, $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}.$

同時 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}.$

將上二式相加，得 $2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CD}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 同方位，其加法相當於線段之加法，故

$$\overline{EF}=\frac{1}{2}(\overline{CD}+\overline{AB}).$$

(b) 同樣 $\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CH},$

$$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}.$$

上二式相加，得 $2\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}.$

同上得 $\overline{GH}=\frac{1}{2}(\overline{AB}-\overline{CD}).$

6. 任何四邊形內（無論其四邊是否在一平面上），兩對邊之中線相交於其二等分點

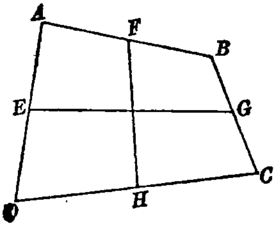


圖 13

如圖 13, 設 $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=\vec{c}.$

設 FH 之中點爲 P, EG 之中點爲 P'.

則
$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OF})=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\right\}$$
$$=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}),$$

$$\overrightarrow{OP'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OE})=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})+\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP'}$ 表明二中線之中點重合.

7　自 ABC, ABD 二三角形之公共底邊 AB 上任一點 E, 引 AC 與 AD 之平行線, 各交 BC, BD 於 F,G. FG 必平行於 CD.

如圖 14, 令　$\overrightarrow{AB}=\vec{b},\ \overrightarrow{AE}=m\vec{b},$

$$\overrightarrow{AC}=\vec{c}\quad AD=\vec{d};$$

得　$$\overrightarrow{CD}=\vec{d}-\vec{c},$$

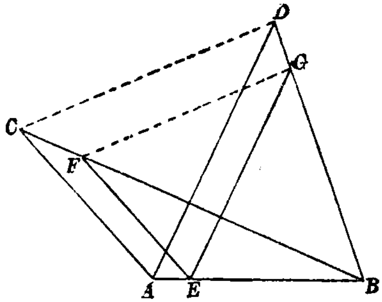


圖 14

$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EG}=m\vec{b}+x\vec{d}.$$

又　$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\vec{b}+y(\vec{d}-\vec{b}).$$

故　$$m\vec{b}+x\vec{d}=\vec{b}+y(\vec{d}-\vec{b}).$$

比較兩邊 $\vec{b}$ 與 $\vec{d}$ 之係數,得　$x=y=1-m$

故　$$\overrightarrow{AG}=m\vec{b}+(1-m)\vec{d}$$

同樣,得　$$\overrightarrow{AF}=m\vec{b}+(1-m)\vec{c}.$$

故　$$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AF}=(1-m)(\vec{d}-\vec{c})=(1-m)\cdot\overrightarrow{CD}$$

表明 FG 與 CD 平行. (1102)

8. $ABCD$ 爲一平行四邊形, PQ 爲平行於 CD 之任意線段, 作 AQ, BP 交於 M; CP, DQ 交於 N, MN 必平行於 AD.

如圖 15，令 $\overrightarrow{AM}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BM}=\vec{b}$,

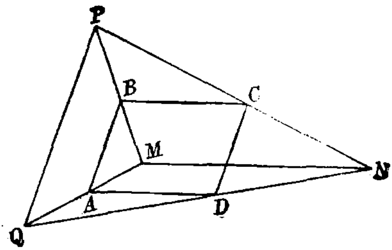


圖 15

$$\overrightarrow{AQ}=m\vec{a},\quad \overrightarrow{AD}=n\vec{a}+p\vec{b}.$$

則
$$\overrightarrow{QD}=\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AD}=-m\vec{a}+n\vec{a}+p\vec{b},$$
$$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}=-m\vec{b}+n\vec{a}+p\vec{b}.$$

令
$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PN}.$$

此中
$$\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AQ}=(m-1)\vec{a},$$
$$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BP}=(m-1)\vec{b}.$$

由 PQ 與 CD 平行，令 $\dfrac{\overline{QN}}{\overline{QD}}=\dfrac{\overline{PN}}{\overline{PC}}=x$, 得

$$\overrightarrow{QN}=x\overrightarrow{QD}=x(-m\vec{a}+n\vec{a}+p\vec{b}),$$
$$\overrightarrow{PN}=x\overrightarrow{PC}=x(-m\vec{b}+n\vec{a}+p\vec{b}).$$

將此諸值代入 (a) 比較兩邊之 $\vec{a}$ 或 $\vec{b}$ 之係數，均得：

$$x=\frac{m-1}{m}.$$

將 x 之值代入　$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{QN}$

得
$$\overrightarrow{MN}=(m-1)\vec{a}+\frac{m-1}{m}(-m\vec{a}+n\vec{a}+p\vec{b}),$$
$$\overrightarrow{MN}=\frac{m-1}{m}(n\vec{a}+p\vec{b})=\frac{m-1}{m}\overrightarrow{AD}.$$

故知 MN 平行於 AD.

9. 完全四邊形之三對角線之中點, 在一直線上.

如圖 16, P, Q, R 爲完全四邊形 $OACB$ 之三對角線之三中點, 令　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$,　$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$,

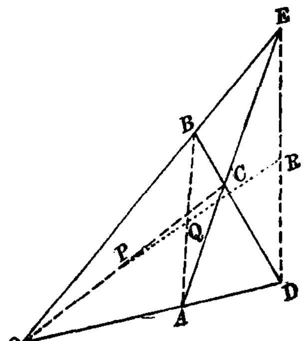


圖 16

$$\overrightarrow{OD}=m\vec{a},\qquad \overrightarrow{OE}=n\vec{b}.$$

則
$$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}),\qquad OR=\frac{1}{2}(m\vec{a}+n\vec{b}),$$
$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}.$$

但 $$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{BD}$$

得 $$\vec{a}+x(n\vec{b}-\vec{a})=\vec{b}+y(m\vec{a}-\vec{b}).$$

比較兩方 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 之係數，得 $$\begin{cases}1-x=my,\\ nx=1-y.\end{cases}$$

解之得 $$y=\frac{1-n}{1-mn}.\qquad x=\frac{1-m}{1-mn}$$

將~~y~~x之值代入 $\overrightarrow{OC}$ 中，得

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\left\{\vec{a}+\frac{1-n}{1-mn}(n\vec{b}-\vec{a})\right\},$$

或 $$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\left\{\frac{m(1-n)\vec{a}+n(1-m)\vec{b}}{1-mn}\right\}.$$

因得 $$\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2(1-mn)}\left\{(1-m)\vec{a}+(1-n)\vec{b}\right\},$$

$$\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=\frac{mn}{2(1-mn)}\left\{(1-m)\vec{a}+(1-n)\vec{b}\right\}.$$

$\overrightarrow{PR}=mn\overrightarrow{PQ}$ 表明 P, Q, R 三點共線.

10. 過平行四邊形內任一點，作邊之平行線，另得四個平行四邊形，其不相鄰之二平行四邊形之兩對角線，相交於原有平行四邊形之對角線上.

如圖 17, GD 與 EF 相交於 H, 令 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OD}=m\vec{a}$, $\overrightarrow{OF}=n\vec{b}$.

則 $$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}=n\vec{b}-(m\vec{a}+\vec{b}),$$

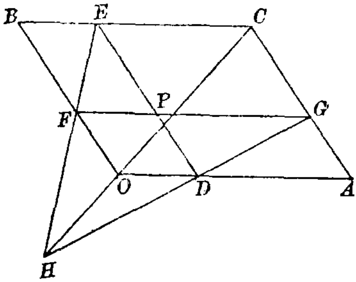


圖 17

$$\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OG}=m\vec{a}-(n\vec{b}+\vec{a}),$$

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{OF}+x\overrightarrow{EF},$$

又 $$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{OD}+y\overrightarrow{GD}.$$

故 $\overrightarrow{OH}=n\vec{b}+x\left\{(n-1)\vec{b}-m\vec{a}\right\}=m\vec{a}+y\left\{(m-1)\vec{a}-n\vec{b}\right\}.$

比較兩邊 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之係數, 得 $$\begin{cases}-mx=m+y(m-1),\\ n+x(n-1)=-ny.\end{cases}$$

消去 y, 得 $$x=\frac{n}{1-m-n}.$$

將 x 之值代入, 得

$$\overrightarrow{OH}=n\vec{b}+\frac{n}{1-m-n}\left\{(n-1)\vec{b}-m\vec{a}\right\}=\frac{-mn}{1-m-n}\left(\vec{a}+\vec{b}\right).$$

故知 $\overrightarrow{OH}$ 與對角線 $\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}$ 同座, 而 H 在 OC 上.

11　以三角形之三邊爲對角線, 作三個平行四邊形, 令其邊各平行於二已知方位, 則其他三對角線必會於一點.

如(圖 18),ABC 爲一三角形. $OADB$, $AECF$, $BGCH$ 爲合於題意之平行四邊形. 設 HG 與 EF 會於 P 點,

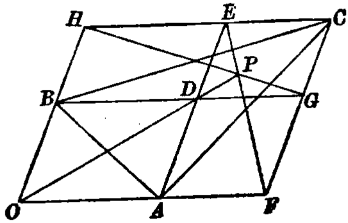


圖 18

令 $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \overrightarrow{OF}=m\vec{a},\ \overrightarrow{OH}=n\vec{b}.$

得 $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OF}=n\vec{b}+\vec{a}-m\vec{a},$

$$\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OH}=m\vec{a}+\vec{b}-n\vec{b},$$

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OF}+x\overrightarrow{FE}=m\vec{a}+x\left\{(1-m)\vec{a}+n\vec{b}\right\},$$

又 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OH}+y\overrightarrow{HG}=n\vec{b}+y\left\{(1-n)\vec{b}+m\vec{a}\right\}.$

比較上二等式右邊 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之係數,得

$$\begin{cases} m+x(1-m)=my, \\ nx=n+(1-n)y. \end{cases}$$

消去 y,得 $x=\dfrac{m}{m+n-1}.$

將 x 代入 $\overrightarrow{OP}$ 中,得

$$\overrightarrow{OP}=m\vec{a}+\frac{m}{m+n-1}\left\{(1-m)\vec{a}+n\vec{b}\right\}=\frac{mn}{m+n-1}\left\{\vec{a}+\vec{b}\right\}.$$

此式顯示出 P 點係在 $\overrightarrow{OD}=\vec{a}+\vec{b}$ 上. 故知 OD 通過 EF 與 HG 之交點.

12. 過三角形 OAB 中之一點 P, 作三邊之平行線 CD, EF, GH, 則 (圖 19)

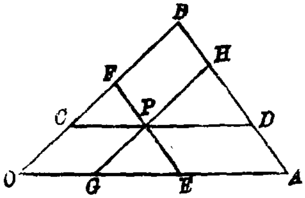


圖 19

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{OA}}+\frac{\overline{GH}}{\overline{OB}}+\frac{\overline{EF}}{\overline{AB}}=2.$$

令 $\quad \dfrac{\overline{CD}}{\overline{OA}}=m,\ \dfrac{\overline{GH}}{\overline{OB}}=n,\ \dfrac{\overline{EF}}{\overline{AB}}=p,$

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\qquad \overrightarrow{OB}=\vec{b},\qquad \overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}.$$

令 $$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GP}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EP}. \qquad (a)$$

由線段間之比例關係

$$\frac{\overline{GA}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{GH}}{\overline{OB}}=n \quad 得\quad \overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{GA}=(1-n)\vec{a},$$

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{OA}}=m \qquad \overrightarrow{GP}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{CB}=(1-m)\vec{b}$$

$$\frac{\overline{OE}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{EF}}{\overline{AB}}=p \qquad \overrightarrow{OE}=p\vec{a},$$

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{OA}}=m \qquad \overrightarrow{EP}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DB}$$

$$=(1-m)(\vec{b}-\vec{a}).$$

將此諸值代入(a)中，得 $(1-n)\vec{a}+(1-m)\vec{b}=p\vec{a}$

$$+(1-m)(\vec{b}-\vec{a}).$$

簡約之，得 $(2-m-n-p)\vec{a}=0.$

此式成立之必需條件爲 $m+n+p=2.$

卽所欲證明之式.

§13. 共面矢

於 §11 中已知若 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 爲不同方位之二矢, m, n 爲不等

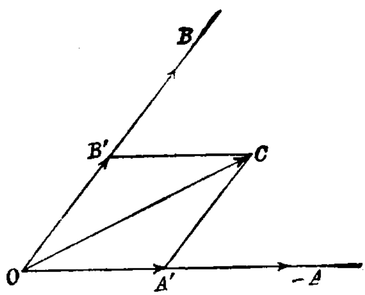


圖 20

於零之二實數. 則$m\vec{a}$與$n\vec{b}$之和, 不能為零. 設此和矢為$-p\vec{c}$, p亦為一代數實數, $\vec{c}$為一終點在C之矢(圖20)則

$$m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=0 \tag{1209}$$

表一平面, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$均在其上.

蓋若令 $\vec{a}'=\overrightarrow{OA'}=-\frac{m}{p}\vec{a}, \qquad \vec{b}'=\overrightarrow{OB'}=-\frac{n}{p}\vec{b}.$ (a)

則A'與B'必各在OA, OB上.令$\vec{c}$為此二矢之和, 得

$$\vec{c}=\vec{a}'+\vec{b}'=\frac{-m}{p}\vec{a}+\frac{-n}{p}\vec{b}$$

表明O, A', B', C為一平行四邊形之四頂點, 故此四點在一平面上. 因而A, B亦在此平面上. 但此式並無異於(1209),故(1209)表示$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$三矢在一平面上.

如此之三矢, 稱為共面矢, 共面之三矢, 常可以(1209)表之. 例如$\vec{c}$為$\vec{a}, \vec{b}$所定之平面上之矢,必可自C點作直線CA'與CB'平行於OB與OA, 令其間之線段關係為

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}=-\frac{m}{p}, \qquad \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}=-\frac{n}{p}.$$

則由
$$\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OC}$$

可得
$$m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=0.$$

§14. 同原三矢終點共線之條件

仍用前節記法. 今欲 A, B, C 三點共線, 第一步, 必須 O, A, B, C 同面. 故其第一條件為

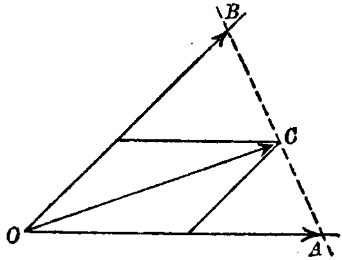


圖 21

$$m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=0.$$

A, B, C 既共線, 則 $\overrightarrow{CA}$ 與 $\overrightarrow{CB}$ 為同座之矢, 由(1102)得

$$\overrightarrow{CA}=t\overrightarrow{CB}.$$

但 $\overrightarrow{CA}=\vec{a}-\vec{c}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}-\vec{c}$, 代入上式, 移項, 得

$$\vec{a}-t\vec{b}+(t-1)\vec{c}=0.$$

此式與(14)比較, 得其係數間關係為 $m+n+p=0.$

故
$$\begin{cases} m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=0 \\ m+n+p=0 \end{cases} \qquad (1210)$$

為三同原矢之終點共線之條件

§ 15. 分一線段使成定比

於 (1210) 中, 消去 p, 可得 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BC}$ 之比. 以 $p = -(m+n)$ 代入(1210)之第一式, 得

$$m\vec{a}+n\vec{b}-(m+n)\vec{c}=0. \qquad (a)$$

$$\therefore \quad \vec{c}=\frac{m\vec{a}+n\vec{b}}{m+n}. \qquad (1211)$$

(a) 又可書如 $\quad n(\vec{b}-\vec{c})-m(\vec{c}-\vec{a})=0,$

或 $\quad n\overrightarrow{CB}-m\overrightarrow{AC}=0$

$\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{CB}$ 同座, 得 $\quad \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=\dfrac{n}{m}.$

故(1211)表示 $\vec{c}$ 之終點在 $\vec{a}, \vec{b}$ 之終點之直線上, 且將 AB 分作二線段, 其比為 $\frac{n}{m}$

在特種情形之下, 若 $\frac{n}{m}=1$, 則 $AC=CB$, C 點為 AB 之平分線, $\vec{c}$ 為三角形 OAB 之一中線, 得

$$\vec{c}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}).$$

設以 OA, OB 為一組座標軸(不必為直座標)令

$$\overline{OA}=a, \quad \overline{OB}=b, \quad \overline{OA'}=x, \quad \overline{OB'}=y.$$

則 C 點之座標為 x, y. 由 § 13 中 (a) 式, 得

$$-\frac{m}{p}=\frac{x}{a}, \qquad -\frac{n}{p}=\frac{y}{b}.$$

由(1210)之第二式, 得　　$-\frac{m}{p}+\frac{-n}{p}=1.$

即　　$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

爲截於座標軸$(a, 0)$與$(0, b)$二點之直線之方程式.

§16. 同原四矢終點共面之條件

今設$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$爲不在一平面上之三同原矢, 於$m\vec{a}+n\vec{b}$之終點$P$作$\vec{c}$之平行線$\Delta$, 則$\Delta$上之任一點$D'$, 適合於

$\overrightarrow{OD}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}.$

此時無論將m, n, p加以何種變化(即"不論將圖22中

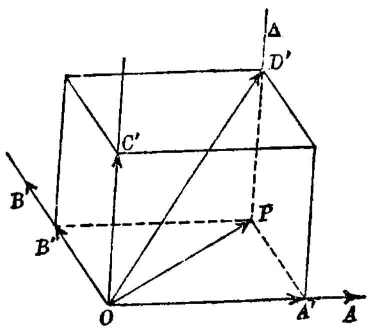


圖　22

之A', B'如何移動, PD'如何伸縮"), D'決不能回至O

點*故不同面之三矢, 決不能有(1209)所表之關係(§13).

m, n, p 之變化, 可使 D' 點佔據空間之任何位置. 故無論 D' 任何處, 令 $\overrightarrow{OD'}=-r\vec{d}$, 可得

$$m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}+r\vec{d}=0.$$

茲有 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ 四矢, 其關係爲

$$m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}+r\vec{d}=0. \qquad (a)$$

今欲 A, B, C, D 同在一平面上, 必須 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ 爲同面之三矢. 即必須有三數 s, t, u 可使 (1209)

$$s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}+u\overrightarrow{AD}=0,$$

或
$$s(\vec{b}-\vec{a})+t(\vec{c}-\vec{a})+u(\vec{d}-\vec{a})=0;$$

$$-(s+t+u)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+u\vec{d}=0.$$

此式與 (a) 比較,得其係數間之關係: $m+n+p+r=0.$

故
$$\begin{cases} m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}+r\vec{d}=0 \\ m+n+\ +p+r=0 \end{cases} \qquad (1212)$$

爲四矢之終點共面之條件

$\vec{d}$ 矢可視爲三矢

$$\overrightarrow{OA}=-\frac{m}{r}\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=-\frac{n}{r}\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=-\frac{p}{r}\vec{c}$$

* 當 $m=n=p=0$ 時, O 與 D' 重合, 但當此時, 已不復有三矢矣.

之和.設以 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 之矢座爲空間座標軸,$\vec{d}$ 之終點之座標爲 x, y, z. 則

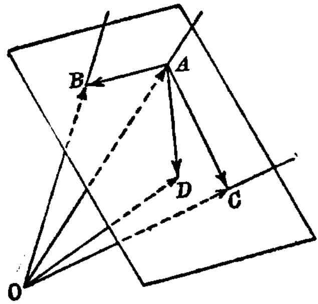


圖 23

$$\overline{OA}=x, \quad OB=y, \quad \overline{OC}=z.$$

由(1212)之第二式, 可得 $\frac{-m}{r}+\frac{-n}{r}+\frac{-p}{r}=1,$

或 $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

爲截座標軸於 $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$ 三點之平面之方程式.

§ 17 應用雜例

1. 平行四邊形之兩相對角頂與他一對角線之中點共線.

如圖 24, C 爲 OD 之中點, $\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OC}$.

因 $$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}.$$

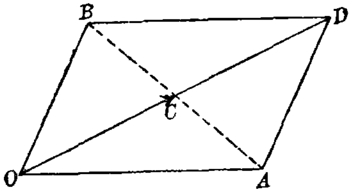


圖 24

故
$$2\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=0.$$

又
$$2-1-1=0.$$

故 A,B,C 共線, 如題所云 (§ 14).

2. 相應之兩三角形, 連其相應之頂點之直線若會於一點, 則將相應邊延長, 使其兩兩相交時, 其三交點必共線 (Desargues 定理).

如圖 25, ABC 與 $A'B'C'$ 爲相應之二三角形, AA', BB', CC' 會於 O 點, AB, $A'B'$ 交於 R, AC, $A'C'$ 交於 Q, BC, $B'C'$ 交於 P. 則 P,Q,R 在一直線上.

證: 令 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\quad\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\quad\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, $\quad\overrightarrow{OA'}=m\vec{a}$,

$\overrightarrow{OB'}=n\vec{b}$, $\quad\overrightarrow{OC'}=p\vec{c}$.

則 $\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$, $\quad\overrightarrow{BR}=x(\vec{a}-\vec{b})$, $\quad\overrightarrow{B'A'}=m\vec{a}-n\vec{b}$,

$\overrightarrow{B'R}=y(m\vec{a}-n\vec{b})$

由 $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BR}-\overrightarrow{B'R}$, 可得

$$(n-1)\vec{b}=x(\vec{a}-\vec{b})-y(m\vec{a}-n\vec{b}).$$

比較兩方 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 之係數，得 $\begin{cases} n-1=-x+ny, \\ 0=x-my. \end{cases}$

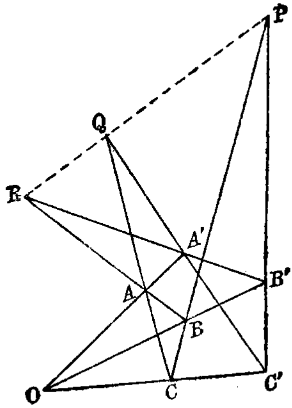


圖 25

消去 y，得 $$x=-\frac{m(n-1)}{m-n}.$$

故 $$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BR}=\vec{b}-\frac{m(n-1)}{m-n}(\vec{a}-\vec{b})$$

$$=\frac{n(m-1)\vec{b}-m(n-1)\vec{a}}{m-n}. \qquad (a)$$

由文字之輪換，可得

$$\overrightarrow{OP}=\frac{p(n-1)\vec{c}-n(p-1)\vec{b}}{n-p}, \qquad (b)$$

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{m(p-1)\vec{a}-p(m-1)\vec{c}}{p-m}. \tag{c}$$

今於(a),(b),(c)三式去分母後,各以 $(p-1)$,$(m-1)$及$(n-1)$乘之,則三式之右方 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 之係數之和為零,因得

$$(m-n)(p-1)\overrightarrow{OR}+(n-p)(m-1)\overrightarrow{OP}$$
$$+(p-m)(n-1)\overrightarrow{OQ}=0.$$

同時　$(m-n)(p-1)+(n-p)(m-1)+(p-m)(n-1)=0.$

故 P, Q, R 三點共線 (§ 14)

§ 18. 幾何網* 蛇蛙定理　墨勒拿定理

1. 於 § 13, 14 中,得知:若有 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 三矢,使

$$m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=0.$$

而 $m+n+p\neq 0$ 時,此三矢為共面矢,而三終點A,B,C 不在一直線上;可認為一三角形之頂點.

將 AO 延長,交 BC 於 A';BO 交 AC 於 B';CO 交 AB 於 C',則得三矢

$$\vec{a}'=\overrightarrow{OA'},\quad \vec{b}'=\overrightarrow{OB'},\quad \vec{c}'=\overrightarrow{OC'}.$$

$\vec{a}'$ 與 $\vec{a}$ 同座;$\vec{b}'$ 與 $\vec{b}$;$\vec{c}'$ 與 $\vec{c}$ 亦同座,故

* § 18,19 均是上面各式之應用.

$$\vec{a'} = x\vec{a}, \quad \vec{b'} = y\vec{b}, \quad \vec{c'} = z\vec{c}.$$

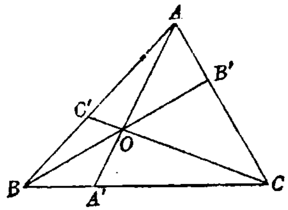


圖 26

x, y 與 z 之值，不能由此三式決定，蓋 $\vec{a'}$ 與 $\vec{a}$ 等之數值關係尚屬未知也. 將

$$\vec{a} = \frac{\vec{a'}}{x}, \quad \vec{b} = \frac{\vec{b'}}{y}, \quad \vec{c} = \frac{\vec{c'}}{z}.$$

分別代入 $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = 0$ 中，得

$$\frac{m\vec{a'}}{x} + n\vec{b} + p\vec{c} = 0,$$

$$m\vec{a} + \frac{n}{y}\vec{b'} + p\vec{c} = 0,$$

$$m\vec{a} + n\vec{b} + \frac{p}{z}\vec{c'} = 0.$$

A' 與 B, C；B' 與 C, A；C' 與 A, B 同在一直線上，故

$$\frac{m}{x} + n + p = 0, \quad m + \frac{n}{y} + p = 0, \quad m + n + \frac{p}{z} = 0.$$

因得 $x = \dfrac{-m}{n+p}, \quad y = \dfrac{-n}{p+m}, \quad z = \dfrac{-p}{m+n}.$

故 $$\vec{a}'=\frac{-m}{n+p}\vec{a},\quad \vec{b}'=\frac{-n}{p+m}\vec{b},\quad \vec{c}'=\frac{-p}{m+n}\vec{c};\qquad (a)$$

或 $$\vec{a}'=\frac{n\vec{b}+p\vec{c}}{n+p},\quad \vec{b}'=\frac{p\vec{c}+m\vec{a}}{p+m},\quad \vec{c}'=\frac{m\vec{a}+n\vec{b}}{m+n}.\qquad (b)$$

(a) 表 $\vec{a}'$ 與 $\vec{a}$ 同座 ($\vec{b}'$ 與 $\vec{b}$;$\vec{c}'$ 與 $\vec{c}$ 亦然).(b) 表示 A' 與 B,C 同在一直線上 (B' 與 C,A;C' 與 A,B 亦然). 故 $\vec{a}',\vec{b}',\vec{c}'$ 之矢式爲 (a) 或 (b) 毫無疑義

2. (b) 式不特表明 A',B',C' 在 BC,CA,AB 上, 且將其間線段的長度關係表出(§ 15)

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}}=\frac{p}{n};\qquad \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}}=\frac{m}{p};\qquad \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}}=\frac{n}{m}.$$

以此三式左右相乘, 得

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}}\cdot\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}}=1.$$

是爲蛇蛙定理. 亦作 $$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\cdot\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=-1.$$

當自三角形之三頂點, 所作直線會於一點時, 其所分成對邊之線段 必適合於蛇蛙定理, 其逆亦眞.

3. 更聯 $A'B'$ 交 AB 於 C'';$B'C'$ 交 BC 於 A'';$C'A'$ 交 CA 於 B''. 令

$$\vec{a}'' = \overrightarrow{OA''}, \quad \vec{b}'' = \overrightarrow{OB''}, \quad \vec{c}'' = \overrightarrow{OC''}.$$

自 (a), 得
$$(p+m)\vec{b}' + n\vec{b} = 0,$$
$$(m+n)\vec{c}' + p\vec{c} = 0$$

將上二式合併, 可得
$$(n\vec{b} - p\vec{c}) = (m+n)\vec{c}' - (p+m)\vec{b}'.$$

因 $(m+n)-(p+m)=n-p$, 故上式可書為
$$\frac{n\vec{b} - p\vec{c}}{n-p} = \frac{(m+n)\vec{c}' - (p+m)\vec{b}'}{(m+n)-(p+m)}.$$

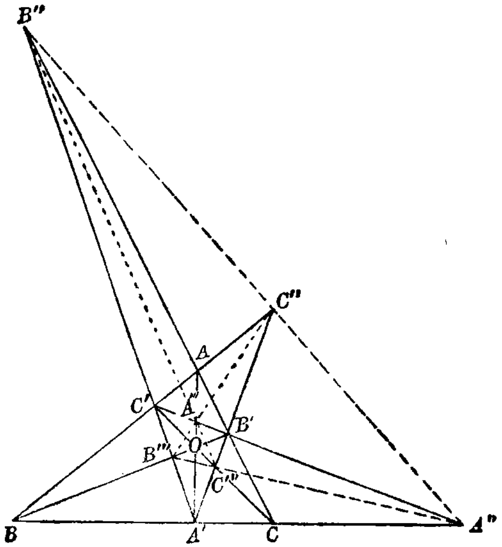


圖 27

此式之左邊表一矢，其終點在 BC 直線上(§ 15) 右邊表一矢，其終點在 $B'C'$ 直線上．此矢必 $\vec{a}''$ 無疑．

同樣可得 $\vec{b}''$，$\vec{c}''$．

$$\vec{a}''=\frac{n\vec{b}-p\vec{c}}{n-p},\qquad \vec{b}''=\frac{p\vec{c}-m\vec{a}}{p-m},\qquad \vec{c}''=\frac{m\vec{a}-n\vec{b}}{m-n}. \tag{c}$$

將上三式去分母後，相加，得

$$(n-p)\vec{a}''+(p-m)\vec{b}''+(m-n)\vec{c}''=0.$$

同時 $$(n-p)+(p-m)+(m-n)=0.$$

故 $\vec{a}''$，$\vec{b}''$，$\vec{c}''$，之終點，A''，B''，C'' 不惟與 O 同在一平面上，且三點共線(§ 14)．

4. $A''B'C'$ 爲三角形 ABC 之一橫截線．由 (c) 之第一式與 (b) 之第二第三式，得

$$\frac{\overline{BA''}}{\overline{A''C}}=-\frac{p}{n},\qquad \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}}=\frac{m}{p},\qquad \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}}=\frac{n}{m}.$$

三式兩邊相乘，得

$$\frac{\overline{BA''}}{\overline{A''C}}\cdot\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}}=-1.$$

是爲墨勒拿定理，亦作

$$\frac{\overline{A''B}}{\overline{A''C}}\cdot\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=1.$$

同樣 $C''B'A'$ 與 $B''C'A'$ 亦爲三角形 ABC 之橫截線, 可得

$$\frac{\overline{AC''}}{\overline{C''B}} \cdot \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = -1,$$

$$\frac{\overline{CB''}}{\overline{B''A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = -1,$$

或
$$\frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}} \cdot \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = 1,$$

$$\frac{\overline{B''C}}{\overline{B''A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = 1.$$

總之, 當三角形被一橫截線所截時, 其被截所成之線段, 常能適合於墨勒拿定理, 其逆亦眞.

5. 令 OA 與 $B'C'$ 之交點爲 A'''; OB 與 $C'A'$ 之交點爲 B'''; OC 與 $A'B'$ 之交點爲 C''', 且

$$\vec{a}''' = \overrightarrow{OA'''} \qquad \vec{b}''' = \overrightarrow{OB'''} \qquad \vec{c}''' = \overrightarrow{OC'''}.$$

今試用 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 表出 $\vec{a}''', \vec{b}'''$ 與 $\vec{c}'''$ 三矢.

以 (a) 之後二式, 去分母而後相加, 得

$$(p+m)\vec{b}' + (m+n)\vec{c}' = -(n\vec{b} + p\vec{c}).$$

因 $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = 0$, 故上式可書爲

$$-m\vec{a} + (p+m)\vec{b}' + (m+n)\vec{c}' = 0.$$

設令　$\vec{a}''' = x'\vec{a}$, 代入上式, 得

$$\frac{-m}{x'}\vec{a}''' + (p+m)\vec{b}' + (m+n)\vec{c}' = 0.$$

A''',B',C' 共線, 故　$-\frac{m}{x'} + (p+m) + (m+n) = 0.$

因得　$$x' = \frac{m}{(p+m)+(m+n)} = \frac{m}{2m+n+p}.$$

故　$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}''' = \dfrac{m\vec{a}}{2m+n+p}. \\ \text{同樣}\quad \vec{b}''' = \dfrac{n\vec{b}}{m+2n+p},\quad \vec{c}''' = \dfrac{p\vec{c}}{m+n+2p}. \end{array}\right\} \qquad (d)$$

因 $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=0$, 故以 $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$ 加於上三式右邊之分子上, 其值不變, (d) 遂變爲

$$\vec{a}''' = \frac{2m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}}{2m+n+p},\quad \vec{b}''' = \frac{m\vec{a}+2n\vec{b}+p\vec{c}}{m+2n+p},$$

$$\vec{c}''' = \frac{m\vec{a}+n\vec{b}+2p\vec{c}}{m+n+2p}. \qquad (e)$$

由 (d) 之後二式與 (c) 之第一式, 可得

$$(n-p)\vec{a}'' - (m+2n+p)\vec{c}'' + (m+n+2p)\vec{c}''' = 0.$$

同時　$(n-p)-(m+2n+p)+(m+n+2p)=0.$

故 A'',B''',C''' 共線. 同樣 B'', C''', A'''; C'', A''', B''' 亦共線.

6. 從貿皮于(Möbius)之名稱：一平面上四點(O,A,B,C)兩兩相聯，得六線及新生點三(A',B',C')是爲初次作圖(圖26). 再由三新生點，每二點相聯，得三直線，及新生點六$(A'',B'',C'',A''',B''',C''')$是爲二次作圖 (圖 27). 聯此六點得十二線，及新生點八十四. 是爲三次作圖. 如是繼續進行不已，可得四次五次以至無窮次作圖. 如是之圖形，稱爲幾何網(有平面與立體之別)，以網上一點爲終點之矢$\overrightarrow{OP}$，其矢式爲

$$\overrightarrow{OP}=\frac{xm\vec{a}+yn\vec{b}+zp\vec{c}}{xm+yn+zp}\ (x,y,z\text{均爲整數}).$$

網上交點之共線，與直線之成調和線束者頗多，調和比之性質，請於下節述之.

§ 19. 調和比 調和線束

由 § 15，知
$$\vec{c}=\frac{x\vec{a}+y\vec{b}}{x+y}$$

表一矢，其終點 C 在 AB 直線上之某一處，位置隨 x 與 y 之比而定，卽
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=\frac{y}{x}\quad\text{或}\quad\frac{CA}{CB}=-\frac{y}{x}.$$

若更有一矢 $\vec{c}'=\dfrac{x'\vec{a}+y'\vec{b}}{x'+y'}$ 定一點 C' 於 AB 上，使

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=-\frac{y'}{x'}.$$

此二比之比，稱爲 A,B,C,C' 四點之橫錯比，或不調和比．依 Cremona 之符號，記之如

$$(ABCC')=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}:\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=\frac{yx'}{y'x}.$$

$\frac{yx'}{y'x}$稱爲橫錯比$(ABCC')$之值．

在特種情形之下，若橫錯比之值爲 -1，卽二矢有如

$$\vec{c}=\frac{m\vec{a}+n\vec{b}}{m+n},\qquad \vec{c}'=\frac{m\vec{a}-n\vec{b}}{m-n}$$

之形時，此橫錯比稱爲調和比．CC' 與 AB 互爲調和．C,C' 爲 AB 之共軛調和點對．$\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{c}'$四矢之座，組成一以$O$爲頂點之調和線束．書如　$(O\cdot ABCD)=-1.$

幾何網中　$\vec{a}'=\dfrac{m\vec{a}+n\vec{b}}{m+n},\quad \vec{a}''=\dfrac{m\vec{b}-n\vec{c}}{m-n}.$

故 $A'A''$ 爲 B,C 之共軛調和點對．B',B'' 之於 C,A；與 C',C'' 之於 A,B 亦然，卽

$$(BCA'A'')=(CABB'')=(ABC'C'')=-1.$$

又　$$\vec{a}'''=\frac{(m+n)\vec{c}'+(m+p)\vec{b}'}{(m+n)+(m+p)},$$

$$\vec{a}'' = \frac{(m+n)\vec{c}' - (m+p)\vec{b}'}{(m+n) - (m+p)}.$$

故 A'', A''' 為 B', C' 之共軛調和點對. $B'' B'''$ 之於 C', A' 與 C'', C''' 之於 A', B' 亦然, 故

$$(B'C'A''A''') = (C'A'B''B''') = (A'B'C''C''') = -1.$$

圖 27 中之諸直線, 成調和線束者甚多, 例如

$(O \cdot BCA'A'')$, $(A \cdot BCA'A'')$, $(C'' \cdot BCA'A'')$, $(B'' \cdot BCA'A'')$, $(O \cdot BAC'C'')$, $(C \cdot BAC'C'')$, $(A'' \cdot BAC'C'')$, ………………

等均為調和線束.

§ 20. 矢之分解

將若干矢相加可得一矢, 此種運算, 已於 § 9 中言之. 反之, 則一矢可認為若干矢之和. 將一矢化分為若干矢, 使此若干矢之和等於原矢之法, 稱為矢之分解.

將一矢分解為 n 矢, 所得並不確定. 蓋只須尋得 n 矢, 令其首尾相接, 而能將原矢表出, 即已滿足所需之條件. 例如圖 28 中, 欲將 OA 分解為四矢, 則 $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$ 四矢之和固為 $\overrightarrow{OA}$, 同時 $\overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{C'D'}, \overrightarrow{D'A}$ 之和, 亦未嘗非 $\overrightarrow{OA}$ 也. 但此種隨意之分解法, 於運用上殊無價值, 通常

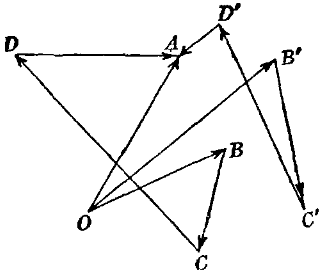


圖 28

關於矢之分解，均加以相當條件，以爲限制．例如將一矢分解爲 n 矢，可令其各平行於給與之 n 個方位，或令其各矢長間，有一定之關係．

將一矢分解爲三個以上之矢，令其各平行於給與之方位，不惟實用上並不重要；且所得結果，仍不確定．故今只言分解一矢爲二矢及三矢之法．

(a) 將一矢分解爲二矢，令其各平行於給與之方位．

例如，$\overrightarrow{OA}$ 爲一矢，欲分解之爲二矢，令其各平行於 $\vec{u}, \vec{v}$.

由二矢之和之性質可知：若以所求之二矢爲邊，作一平行四邊形，其一對角線必爲 $\overrightarrow{OA}$. 故於 O, A 二點，各引 $\vec{u}, \vec{v}$ 之平行線，交於 B' 及 B. 則

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{B'A}=OA.$$

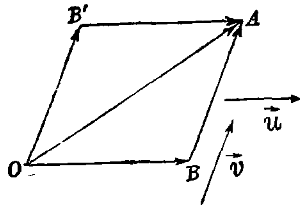


圖 29

且 $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{B'A}$ 均平行於 $\vec{u}$; $\overrightarrow{BA}$ 與 $\overrightarrow{OB'}$ 均平行於 $\vec{v}$,故 $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{BA}$ 與 $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{B'A}$ 爲適合於所求之二組矢.

但 $$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{B'A}, \qquad \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OB'}.$$

故結果仍只有一種分解法. 此二矢稱爲 $\overrightarrow{OA}$ 對於 $\vec{u}$, $\vec{v}$ 二方位之分矢.

若 $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 方位相同,則 $\overrightarrow{OA}$ 之分解法, 可無限制.

(b) 將一矢 $\overrightarrow{OA}$ 分解爲三矢, 使各平行於 $\vec{r}$, $\vec{s}$, $\vec{t}$.

由三矢之和之性質, 可知: 若以所求三矢爲邊, 作一平行六面體,則 $\overrightarrow{OA}$ 爲此平行六面體之一對角線,故得下之作法.

自 O 點引 $\vec{r}$ 與 $\vec{s}$ 之平行線. 此二線決定一平面. 自 A 引 $\vec{t}$ 之平行線,交此平面於 B,則 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}$.

將 $\overrightarrow{OB}$ 分解爲二矢,令各平行於 $\vec{r}$ 與 $\vec{s}$, 得 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$.

故 $$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{BA}.$$

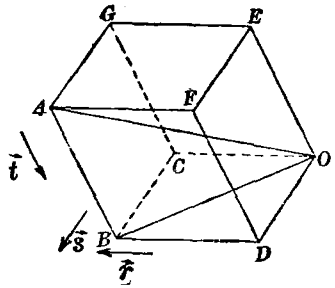


圖 30

此中 $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{BA}$ 各平行於$\vec{r}$, $\vec{s}$, $\vec{t}$,故爲所求之矢,稱爲$\overrightarrow{OA}$對於 $\vec{r}$, $\vec{s}$, $\vec{t}$ 三方之分矢.

分解之時,若不依上述次序,以 $\vec{s}$, $\vec{t}$ 之方位決定通過 O 之平面,自 A 作 $\vec{r}$ 之平行線…………所得亦同 蓋如此所得之矢,均爲平行六面體 $OCBDFEGA$ 之邊也 此平行六面體之十二邊中,僅有三種不同之方位,而方位相同之邊 又均相等故也.

若 $\vec{r}$, $\vec{s}$, $\vec{t}$ 可同在一平面上,則 $\overrightarrow{OA}$ 之分解法無窮.

§21. 空間座標系 右系座標之規定

給與二個或三個不同之方位, 可將一矢分化爲與此方位相同之二矢或三矢,前已言之.所給與之方位,若互爲垂

直時，則此種特別情形，相當於解析幾何中之平面或空間座標系，於矢算之運用上，有極大關係，惟平面座標系僅屬空間座標系之特例，故今僅論空間座標系.

空間之垂直座標系，因各軸正向佈置之不同，可分為左右二系：

設有一觀測者，橫臥於 oz 上，面對 oy 之正向．其自踵至頂之方向，與 oz 之正向相合．將 ox 軸在 xy 平面上，繞 O

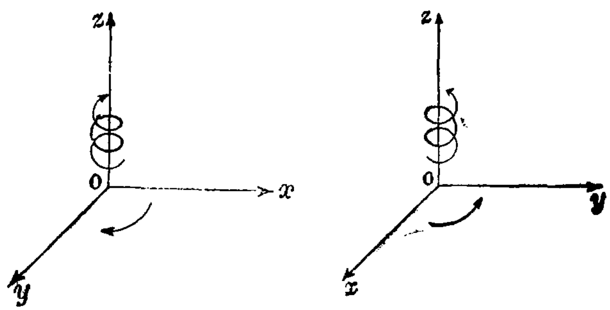


圖 31

點作 90° 之迴轉，使其正向與 oy 之正向相合，此時可有二種情形發生：

(1) 如圖 31，左方之座標系，觀測者將見 x 軸作自左向右之轉動.

(2) 如圖 31，右方之座標系，則見 x 軸自右向左而轉.

同樣,設 oy 向 oz 轉動時,在 ox 上之觀測者眼中,就左方之座標軸言,則轉動方向爲自左向右.就右方之座標軸言,則轉動方向爲自右向左.oz 向 ox 之轉動,自 oy 上之觀測者所見,結果亦同.

總之,依 $xyzxy$ 之次序,第一軸向第二軸之轉動,在第三軸上之人觀之,就一種座標系而言,轉動方向常爲一定.若此方向爲自左至右 (圖 31 之左方) 則此座標系爲左系座標;反之(圖 31 之右方)則爲右系座標.

英,美,法諸國算學家,大抵沿用左系座標.天文學家,物理學家,大多用右系座標.至於德國,則純爲右系所統治,右系座標較左系座標便於應用.行星之運行,電學中諸定律,均與右系相符.故矢算採用右系座標.

有一組座標軸於此,已定第一第二軸之正向決定第三軸之正向使成右系座標之法,爲習矢算者所不可不知:

(*A*) 前面所述觀測者之正向.

(*B*) 螺旋定則:設有一螺旋,其軸與第三軸相合(例如 oy).當此螺旋隨第一軸(例如 oz)向第二軸(ox)轉動時,其本身進行之方向,爲第三軸之正向.

(*C*) 右手定則:(*a*) 伸開右手之拇指,食指,中指,使其互

垂直.則此三指所指之方向,適爲三軸之正向,而三指之次序"拇食中拇食"與軸之次序 $xyzxy$ 相合(例如食指爲 oz,中指爲 ox,則拇指爲 oy).

(b) 拇指直立,指掌彎成弧形,以手掌至指尖之方向,表第一軸至第二軸之轉動方向,則拇指所指爲第三軸之正向.

§ 29. 矢算與解析幾何之關聯 單位矢 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

將一矢 $\overrightarrow{\omega R}$ 分解爲三矢,令其各平行於座標軸(圖 32)得

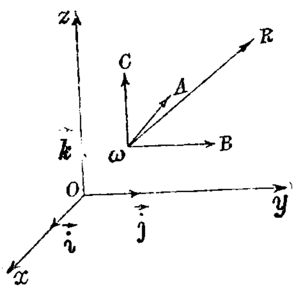


圖 32

三矢 $\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega B}, \overrightarrow{\omega C}$.

$$\overrightarrow{\omega R}=\overrightarrow{\omega A}+\overrightarrow{\omega B}+\overrightarrow{\omega C}.$$

僅就線段之長言之,$\overline{\omega A}, \overline{\omega B}, \overline{\omega C}$ 各爲 $\overrightarrow{\omega R}$ 在 ox, oy, oz 三

軸上之正射影 X, Y, Z.

設於三軸上各定一單位矢 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, 則得

$$\overrightarrow{\omega A}=X\vec{i},\quad \overrightarrow{\omega B}=Y\vec{j},\quad \overrightarrow{\omega C}=Z\vec{k}.$$

因之:
$$\overrightarrow{\omega R}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}. \tag{1213}$$

此式將矢之本身，與其在空間座標軸上之射影之關係表出．爲解析幾何與矢算之關聯,爲矢算中最重要公式之一

§23. 點之定位　矢之定位　原點變換　射影式

(*A*) 空間任一點 R 之位置，可以一點 O 爲原點之矢 $\vec{r}=\overrightarrow{OR}$ 決定之, 此矢稱爲 R 點之徑矢, 爲矢算上定點之位置之工具. 過 O 點作一座標系, R 點在其上之座標爲 (x,y,z). 因 O 點爲原點, 故 $\vec{r}$ 之射影亦爲 x, y, z. 此三數爲解析幾何定點之位置之工具. 以公式連接二者之關係, 得

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$$

設 $\overrightarrow{OR}$ 與三軸所成之角各爲α,β,γ,則其三射影各爲$r\cos\alpha$, $r\cos\beta$, $r\cos\gamma$. 故得

$$\left.\begin{aligned}\vec{r}&=r\,(\cos\alpha\cdot\vec{i}+\cos\beta\cdot\vec{j}+\cos\gamma\cdot\vec{k})\\ \text{其單位矢爲}\quad \vec{r}_1&=\cos\alpha\cdot\vec{i}+\cos\beta\cdot\vec{j}+\cos\gamma\cdot\vec{k}\end{aligned}\right\} \tag{1214}$$

設 R 在極座標上之位置爲(r, θ, ψ), 則因

$$x=r\sin\psi\cos\theta \quad y=r\sin\psi\sin\theta, \quad z=r\cos\psi$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{得}\quad \vec{r}=r(\sin\psi\cos\theta\vec{i}+\sin\psi\sin\theta\vec{j}+\cos\psi\vec{k}\\
&\text{其單位矢爲}\\
&\vec{r}_1=\sin\psi\cos\theta\cdot\vec{i}+\sin\psi\sin\theta\cdot\vec{j}+\cos\theta\cdot\vec{k}
\end{aligned}\right\}\quad(1215)$$

(*B*) 今有一矢 $\overrightarrow{O'R}$ 在空間，欲定其位置，可注意

$$\overrightarrow{O'R}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OO'}.$$

故一任意矢，可以其終點與原點之徑矢之差表之，是爲矢

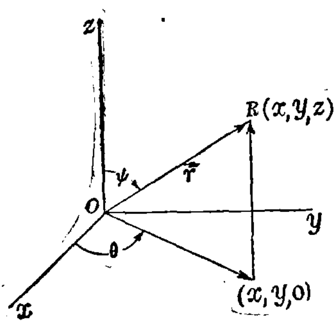


圖 33

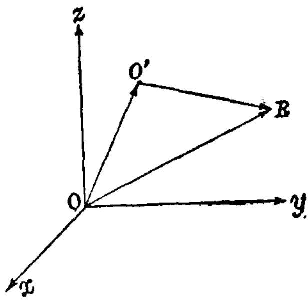


圖 34

算上矢之定位法．設 R 點之座標爲 x, y, z. O' 點之座標爲 x_1, y_1, z_1, 因

$$\overrightarrow{OR}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k},$$

$$\overrightarrow{OO'}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}.$$

故 $$\overrightarrow{O'R}=(x-x_1)\vec{i}+(y-y_1)\vec{j}+(z-z_1)\vec{k}. \qquad (1216)$$

此中 $x-x_1=X,\ y-y_1=Y,\ z-z_1=Z$ 各為 $\overrightarrow{O'R}$ 在三軸上之正射影. 故(1216)式與(1213)式, 並無歧異.

(C) 設有一點R,其徑矢$\overrightarrow{OR}$之原點為 O, 今將原點遷移至 O' 點, 而 R 之位置不變. 欲求 R 點之新徑矢 $\overrightarrow{O'R}$ 可注意

$$\overrightarrow{O'R}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OO'}. \tag{1217}$$

$\overrightarrow{O'R}$ 可由已知二矢之差表出.

在解析幾何中, 亦有同樣之問題. $oxyz$ 座標系上, 原有一點 R, 其座標為(x,y,z). 今將座標軸作平行移動, 原點遷至 O' 點. O' 在原座標系上之位置為(x_1,y_1,z_1). 欲求 R 點在新座標系上之位置(x',y',z') 可將(1217)式分解如下形:

$$x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}=(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})-(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}).$$

上式成立之條件為　$x'=x-x_1,\quad y'=y-y_1,\quad z'=z-z_1$

為解析幾何中習見之式, 稱為(1217)之射影式.

(D) 任一矢式, 均可有三射影式. 欲得一矢式之射影式, 只須將矢式兩邊在同軸上之射影寫出, 令其相等.

例如: $\vec{a},\vec{b},\cdots\cdots\vec{n}$ 諸矢之射影, 各為 $A_x, A_y, A_z,\cdots\cdots N_x, N_y, N_z$. 此諸矢之和為$\vec{r}$, 其射影為 R_x, R_y, R_z, 則矢式

$$\vec{r}=\vec{a}+\vec{b}+\cdots\cdots+\vec{n} \tag{a}$$

之射影式爲
$$\begin{cases} R_x = A_x + B_x + \cdots\cdots + N_x, & (b) \\ R_y = A_y + B_y + \cdots\cdots + N_y, & (c) \\ R_z = A_z + B_z + \cdots\cdots + N_z. & (d) \end{cases}$$

此爲解析幾何中，折線之射影公式.

將(b),(c),(d)三式,以 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 分乘之，而後相加，得

$$(R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k}) = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}) + (B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k})$$
$$+ \cdots\cdots + (N_x\vec{i} + N_y\vec{j} + N_z\vec{k}).$$

此式與(a)式幷無歧異.故知一矢式固可分爲三個射影式.而三個解析幾何式，亦可認爲一矢式之三射影式，而推出矢式.

又如(1205)式

$$m(\vec{a} + \vec{b} + \cdots + \vec{n}) = m\vec{a} + m\vec{b} + \cdots + m\vec{n}$$

之射影式爲

$$\begin{cases} m(A_x + B_x + \cdots + N_x) = mA_x + mB_x + \cdots + mN_x, \\ m(A_y + B_y + \cdots + N_y) = mA_y + mB_y + \cdots + mN_y, \\ m(A_z + B_z + \cdots + N_z) = mA_z + mB_z + \cdots + mN_z. \end{cases}$$

可爲 1205)式之另一證法.

再如欲求
$$\vec{c} = \frac{m\vec{a} + n\vec{b}}{m+n}. \qquad (1211)$$

之射影式.令 $\vec{a}$ 之終點 A 之座標爲 x_1, y_1, z_1; B 之座標爲 x_2, y_2, z_2; C 之座標爲 x, y, z. 得

$$x=\frac{mx_1+nx_2}{m+n},\qquad y=\frac{my_1+ny_2}{m+n},\qquad z=\frac{mz_1+nz_2}{m+n}.$$

此三式爲解析幾何中重要公式之一. 表示 C 點分 AB 爲二線段, 令其比爲 $\frac{n}{m}$ (見 § 15).

§ 24. 重心

若干質點 $M_1, M_2, M_3, \cdots\cdots M_i, \cdots M_n$ 佈列於空間, 各其點之質量各爲 $m_1, m_2, m_3 \cdots m_i \cdots m_n$. 設有一點 G 於空間, 自此點至各質點之徑矢 $\overrightarrow{GM_i}=\vec{r}_i'$ 能使

$$m_1\vec{r}_1'+m_2\vec{r}_2'+m_3\vec{r}_3'+\cdots+m_i\vec{r}_i'+\cdots\cdots+m_n\vec{r}_n'=0^*$$

或
$$\Sigma_1^n m_i\vec{r}_i'=0. \tag{1218}$$

依定義: G 稱爲此諸質點之重心.

設 M_i 等諸點之位置, 均以一點 O 爲標準, 其徑矢爲 $\vec{r}_i$, 欲求 G 之位置, 只須尋出 $\overrightarrow{OG}=\vec{r}$ 卽可.

由
$$\overrightarrow{GM_i}=\overrightarrow{OM_i}-\overrightarrow{OG}\quad 卽\quad \vec{r}_i'=\vec{r}_i-\vec{r}.$$

$\Sigma_1^n m_i\vec{r}_i'=0$ 可書爲

---

* 此處之 $\vec{r}_1'$ 並非單位矢.

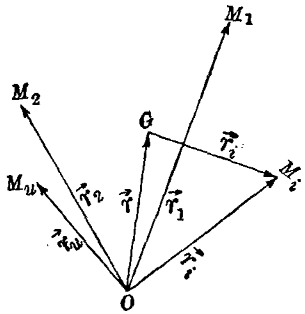


圖 35

$$\Sigma_1^n m_i(\vec{r}_i-\vec{r})=\Sigma_1^n m_i\vec{r}_i-\Sigma_1^n m_i\vec{r}=0\,.$$

$\Sigma_1^n m_i\vec{r}$ 可因(9)式之關係,變爲 $\vec{r}\,\Sigma_1^n m_i$ 故得

$$-\vec{r}\,\Sigma_1^n m_i+\Sigma_1^n m_i\vec{r}_i=0\,.$$

故
$$\vec{r}=\frac{\Sigma_1^n m_i\vec{r}_i}{\Sigma_1^n m_i} \tag{1219}$$

設 O 爲一空間座標系之原點, G 之座標爲 (ξ,ζ,η), M_i 之座標爲 (x_i,y_i,z_i), 則上式之射影式爲:

$$\xi=\frac{\Sigma_1 m_i x_i}{\Sigma_1^n m_i},\qquad \zeta=\frac{\Sigma_1^n m_i y_i}{\Sigma_1^n m},\qquad \eta=\frac{\Sigma_1^n m_i z_i}{\Sigma_1^n m_i}$$

爲求重心之解析式.

定理: 將一組質點 $M_1\cdots M_i\cdots M_n$ 中之 p 點, 易以一質

點 M'，令其位於此 p 點之重心，且其質量 m' 爲 p 點之質量之總和，全組質點之重心不變．

證：設所易 p 點爲 $M_1\cdots M_p$；M' 之徑矢爲 $\vec{r}'$．經過變易之後，全組質點之重心之徑矢爲

$$\vec{r}=\frac{m'\vec{r}'+\Sigma_{p+1}^{n}m_i\vec{r}_i}{m'+\Sigma_{p+1}^{n}m_i}.$$

依假設　$m'=\Sigma_1^p m_i$．　依重心之定義

$$\vec{r}'=\frac{\Sigma_1^p m_i\vec{r}_i}{m'}.$$

故 $\vec{r}=\dfrac{m'\vec{r}'+\Sigma_{p+1}^{n}m_i\vec{r}_i}{m'+\Sigma_{p+1}^{n}m_i}=\dfrac{\Sigma_1^p m_i\vec{r}_i+\Sigma_{p+1}^{n}m_i\vec{r}_i}{\Sigma_1^p m_i+\Sigma_{p+1}^{n}m_i}=\dfrac{\Sigma_1^n m_i\vec{r}_i}{\Sigma_i^n m_i}$

此式表明質點之配置，經過上述變易之後，其重心不變．依此定理，則尋 n 質點之重心時，可先求出若干點之重心，然後逐次變化，歸併，以得最終之結果．

§ 25. 雜例

1. 二質點 A,B 之質量各爲 m,n．尋其重心．

以任一點 O 爲原點，依(1219)得

$$\overrightarrow{OG}=\frac{m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}}{m+n}.$$

此式與(1211)比較,知 G 在 AB 直線上,將 AB 分爲二線段,使

$$\frac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{GB}}=\frac{n}{m}.$$

當 $m=n$ 時,A,B 二點之重心爲 AB 之中點

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}.$$

2. 以等質三點,置於三角形之三頂點,此三質點之重心與三角形之重心重合.

設三角形 OAB 中,$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. 三質點之重心:

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}.$$

三角形之重心 G 爲三中線之交點,此點至 O 之距離爲 OD 之三分之二(圖 36). 故

$$\overrightarrow{OG'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}\left\{\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})\right\}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}).$$

$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OG'}$ 表明 G 與 G' 實爲一點.

3. 聯四等質質點 $OABC$ 得一四邊形(四邊可不必在一平面上).

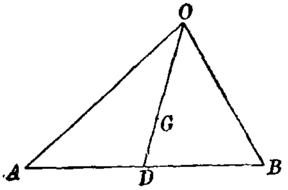


圖 36

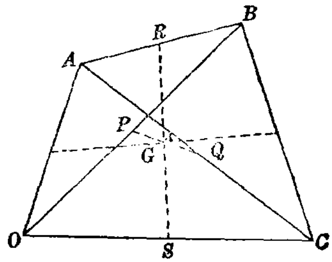


圖 37

(a) 聯其二對角線之中點 P,Q；求 PQ 之中點 G.

(b) 求任二對邊之中線之中點 G'.

(c) 證明 G 與 G' 重合，且為四質點之重心.

證：設 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ (圖 37).

(a) 則 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{OQ}=\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$.

故 $$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}}{2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\vec{b}}{2}+\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}\right\}=\frac{1}{4}\left\{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right\}.$$

(b) R,S 各為 AB,OC 之中點.

$$\overrightarrow{OR}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\quad \overrightarrow{OS}=\frac{\vec{c}}{2}.$$

故 $$\overrightarrow{OG'}=\frac{\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OS}}{2}=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).$$

(c) $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OG'}$ 表明 G 與 G' 合為一點，且 $\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ 適為 $OABC$ 四等質質點之重心之徑矢.

4. (*a*) 以四個等質質點置於四面體 $OABC$ 之頂點. 其重心與四面體之重心重合. (*b*) 以 AB, BC, CA 之中點及 O 為頂點之四面體 其重心與原有四面體之重心相合.

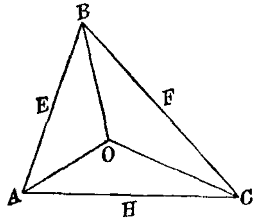


圖 38

令 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \quad \overrightarrow{OB}=\vec{b}, \quad \overrightarrow{OC}=\vec{c}.$

(*a*)四面體之重心, 為其各面之重心之重心(假擬於各面重心之處, 置有等質之點).

面 OAB 之重心之徑矢為(§ 12.2) $\quad \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$

面 OBC 之重心之徑矢為 $\quad \frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c})$

面 OCA 之重心之徑矢為 $\quad \frac{1}{3}(\vec{c}+\vec{a})$

面 ABC 之重心之徑矢為

$$a+\frac{1}{3}\left\{(\vec{b}-\vec{a})+(\vec{c}-\vec{a})\right\}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).$$

此四重心之重心之徑矢為

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})+\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c})+\frac{1}{3}(\vec{c}+\vec{a})+\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\right\}$$

$$=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}). \qquad (a)$$

而此矢適爲 O,A,B,C 四質點之重心之徑矢.

(b) 以四等質質點置於 O,E,F,H (如圖 38),此四點之重心之徑矢爲

$$\overrightarrow{OG'}=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})+\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})+\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a})\right\}=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).$$

G' 表 O,E,F,H 四等質質點之重心.同時亦爲四面體 $OEFH$ 之重心.$\overrightarrow{OG'}=\overrightarrow{OG}$. 故 $OABC$ 與 $OEFH$ 二四面體之重心相合

5. 通過一組等質質點之重心, 任作一直線. 自各質點至此直線之距離 (方位與方向均須計及) 之和爲零 (此例運用於最小二乘法).

設各質點乘 M_i, 其質量均爲 1. 其重心爲 G. Δ 爲過 G 點之任意直線. 依定義, 得 $\Sigma\overrightarrow{GM_i}=0$.

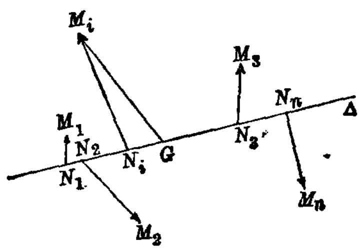


圖 39

設 Δ 至 M_i 之距離爲$\overrightarrow{N_iM_i}$, 得

$$\overrightarrow{GM_i}=\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{NM_i}.$$

故 $$\Sigma\overrightarrow{GM_i}=\Sigma\overrightarrow{GN_i}+\Sigma\overrightarrow{N_iM_i}=0.$$

$\overrightarrow{GN_i}$ 爲 $\overrightarrow{GM_i}$ 在 Δ 上之正射影, $\Sigma\overrightarrow{GM_i}$ 既等於零.依射影之性質,知$\Sigma\overrightarrow{GN_i}=0$. 故得

$$\Sigma\overrightarrow{N_iM_i}=0. \qquad c.q.f.d.$$

若各質點之質量不等, 則得 $\Sigma m_i\overline{N_iM_i}=0$. 每一質點 M_i 當視爲由 m_i 個單位質量之質點重合而成

第三章 二矢之乘法

§26. 矢之乘法之意義 角爲向量

於§7中,曾言矢算之運用,較幾何及解析幾何便捷實甚.然第二章所舉之運用雜例中,其較爲簡捷者固有之,大多數則未嘗見有顯著之便利.是殆因角之關係,尙未滲入而僅斤斤於線段之組合與分解,其不能遠離普通幾何之範圍也明甚.自二矢之角的關係滲入矢之計算以後,矢算遂因之而大簡.今請於此章中,以實例證之.

二矢間之夾角亦爲向量.角之有大小,可以比較,固不待言.角亦有方位與方向,則必須加以解釋二矢 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 定一平面 P,其夾角 θ 即在此平面上.今令 $\vec{a}$ 矢固定,$\vec{b}$ 矢離開平面 P,繞 $\vec{a}$ 而轉,以至於 $\vec{b}'$.此時若僅就角之大小而言,$\vec{a}$ 與 $\vec{b}'$ 之夾角 θ' 固與 θ 相等.但 θ' 所在之平面,P' 則顯然與 P 不同.P 與 P' 有方位之差異,故 θ 與 θ' 亦有方位之差異.

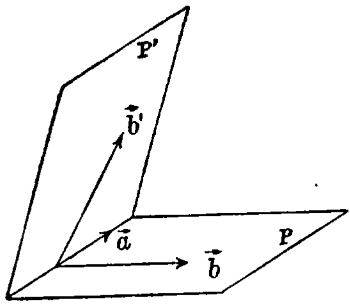


圖 40

二矢間之夾角有二種迴旋方向，一如二點間之線段，有二種進行方向．設 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ 爲同原於 O 之二矢．以 O 爲心，將二矢之一在二矢之平面上加以旋轉，使與他矢之方位重合．此種變換，可得不同之二種迴旋方向．或令

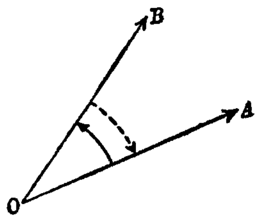


圖 41

$\vec{a}$ 向 $\vec{b}$ 轉(如實線箭頭所示之方向)．或令 $\vec{b}$ 向 $\vec{a}$ 迴旋（如虛線箭頭所示之方向)．故二定矢間，有方位大小均等，方向不同之角二個．用表示線段方向之法表之，令其中一角

爲正，則他一角爲負.記角時，$\widehat{AOB}$，或 $\widehat{a, b}$ 表示 $\vec{a}$ 向 $\vec{b}$ 之旋轉，$\widehat{BOA}$ 或 $\widehat{b, a}$ 則表示 $\overrightarrow{OB}$ 向 $\overrightarrow{OA}$ 之旋轉. 故得：

$$\widehat{BOA} = -\widehat{AOB} \quad 或 \quad \widehat{a, b} = -\widehat{b, a}.$$

綜上所云，角亦有大小，有方位，有方向，故爲一向量在矢算上，此種性質不可忽略。

依乘法之定義嚴格言之，二矢之乘法實無意義可言. 蓋二矢之不可相乘，實與書籍五本及鉛筆三枝之不可相乘有同理. 故云二矢之乘法者，不過謂有二矢於此，加以某種演算手續於其本身，及其間之夾角，使其變化. 而此種演算手續具有與普通乘法相似之性質，能令吾人見之，而自然聯想及乘法耳.

二矢及其間之夾角受相當變化後，其結果不外二種：卽數與矢是. 此經過變化後之結果，謂之二矢之積. 積爲一數時，則演算手續稱爲數乘法. 積爲一矢時，則演算手續稱爲矢乘法，玆分述之.

§27. 二矢之數乘法

玆有同原二矢 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$，$\vec{b} = \overrightarrow{OB}$，其間之夾角爲 $\theta = \widehat{AOB}$. 依定義：二矢之數乘積爲一數，等於二矢矢值及其夾角之

餘弦之乘積. 其記法, 則將 $\vec{a}, \vec{b}$ 二矢, 連接寫出, 外加圓括以圍之. 卽

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = ab\cos\widehat{a,\ b} = ab\cos\theta\ . \tag{1301}$$

此中有必須注意之點, 卽角之方向是也. 依 $(\vec{a}\cdot\vec{b})$ 之記法, $\vec{a}$ 在前而 $\vec{b}$ 在後, 夾角之迴轉方向爲自 $\vec{a}$ 至 $\vec{b}$ 之方向. 若將二者倒置而作 $(\vec{b}\cdot\vec{a})$, 則其夾角當爲 $\widehat{BOA} = -\theta$.

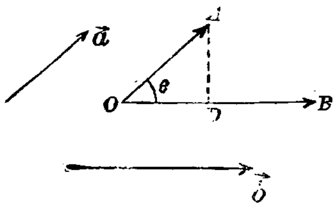


圖 42

而 $$(\vec{b}\cdot\vec{a}) = ba\cos\widehat{b,\ a} = ab\cos(-\theta).$$

但因 $\cos\theta = \cos(-\theta)$. 故 $$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{b}\cdot\vec{a}). \tag{1302}$$

此式表明二矢之數乘法, 適合於交換定律.

二矢之數乘法, 有幾種極重要之性質, 常見於矢算中者述之於下.

1. 依(1301)之定義, 可得

$$\left.\begin{aligned} &(m\vec{a}\cdot n\vec{b}) = manb\cos\widehat{a,\ b} = mnab\cos\widehat{a\ ,b} = mn(\vec{a}\cdot\vec{b}),\\ &\text{故}\qquad (\vec{a}\cdot\vec{b}) = ab\,(\vec{a}_1\cdot\vec{b}_1)\ . \end{aligned}\right\} \tag{1303}$$

2. 若二矢中有一矢爲單位矢 (例如 $\vec{b}_1$), 則

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}_1)=a\cos\alpha=OD$$

表 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 之座上之正射影.同樣,$(\vec{a}_1\vec{b})$ 表示 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 之座上之正射影.

3. 由 $(\vec{a}\,\vec{b})=a(\vec{a}_1\vec{b})=b(\vec{a}\vec{b}_1)$,幷由本節(2)所述$(\vec{a}\cdot\vec{b}_1)$ 與$(\vec{b}\cdot\vec{a}_1)$ 之意義, 可將二矢之數乘法, 給與另一定義

"二矢之數乘積, 爲一矢在他矢上之正射影與他矢矢值之積".

4. 若二矢均爲單位矢; 如 $\vec{a}_1,\vec{b}_1$, 則

$$(\vec{a}_1\vec{b}_1)=\cos\widehat{a,b}.$$

故有二矢 $\vec{a},\vec{b}$ 於此, 其夾角 θ 可以表之如:

$$\cos\theta=\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{a\ b}. \tag{1304}$$

5. 若 $\vec{a}\perp\vec{b}$, 則 $\theta=90°$ 而 $\cos\theta=0$. 因得

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})=0.$$

故無論二矢之值若何, 當其互相垂直時,其數乘積常爲零.

當$(\vec{a}\cdot\vec{b})=0$ 時, 其必然之結果, 爲下列三式之一:

$$a=0 \quad 或 \quad b=0 \quad 或 \quad \vec{a}\perp\vec{b}.$$

6. 若 $\vec{a}\parallel\vec{b}$, 則 $\theta=0$ 而 $\cos=1$. 因得

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})=ab\ .$$

即:同方位二矢之數乘積,爲其矢長之乘積.

7. 當 $\vec{a}=\vec{b}$ 時, $(\vec{a}\cdot\vec{a})=a^2$ (1305)

表明:一矢與其本身之數乘積等於其値之自乘.

上述二矢之數乘法,雖僅就同原二矢而言,但若 $\vec{a}',\vec{b}'$ 二矢不同原點,欲求其數乘積時,可利用自由矢之性質,以空間一點 O 爲原點,作二矢之同質矢 $\vec{a}$, $\vec{b}$. 得

$$(\vec{a}'\cdot\vec{b}')=(\vec{a}\cdot\vec{b})\ .$$

§ 28. 數乘法服從分配律

本節命題,以公式表之,爲: $(\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})+(\vec{b}\cdot\vec{c})$

此式可證明如下:

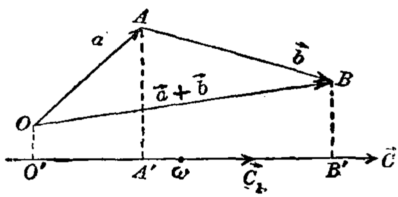


圖 43

如圖(43), $O'A'$, $A'B'$, $O'B'$ 各爲 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$ 在 $\vec{c}$ 之方位之正射影. 依前節(2),得

$$\overrightarrow{O'A'}=(\vec{a}\cdot\vec{c}_1),\quad \overrightarrow{A'B'}=(\vec{b}\cdot\vec{c}_1),\quad \overrightarrow{O'B'}=(\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c}_1).$$

依射影之性質，知 $\overrightarrow{O'B'}=\overrightarrow{O'A'}+\overrightarrow{A'B'}$.

故 $(\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c}_1)=(\vec{a}\cdot\vec{c}_1)+(\vec{b}\cdot\vec{c}_1)$.

以 c 乘上式兩邊，由(1303)得

$$(\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})+(\vec{b}\cdot\vec{c}) \qquad (1306)$$

適爲所欲得之公式.

據此，可得 $(\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{d})=(\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{d})+(\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{d})$

$$=(\vec{a}\cdot\vec{c})+(\vec{a}\cdot\vec{d})+(\vec{b}\cdot\vec{c})+(\vec{b}\cdot\vec{d}).$$

依此類推，若干矢之和之數乘積，均可得出.

§ 29. 二矢之矢乘法

二矢 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, 其間之夾角爲 $\widehat{AOB}=\theta$. 以 $\vec{b}$ 矢"矢乘" $\vec{a}$ 矢，其矢乘積爲一矢，記如 $[\vec{a}\cdot\vec{b}]$, 且適合於下列三條件：

1. 矢乘積當垂直於 $\vec{a}, \vec{b}$ 二矢所定之平面. 換言之，矢乘積當同時於 $\vec{a}, \vec{b}$ 二矢.

2. 依右系座標之規定(卽適合於右手定則，螺旋定則……). 矢乘積之正向，當與自 $\vec{a}$ 向 $\vec{b}$ 之迴轉方向相應.

3. 矢乘積之值，當爲$\vec{a}$，$\vec{b}$之矢值，及其夾角之正弦之連乘積 $ab\sin\theta$.

據此，若$\vec{n}$爲一單位矢，同時垂直於$\vec{a}$，$\vec{b}$二矢.其正向與$\widehat{AOB}$之迴轉方向相應，則得

$$[\vec{a}\cdot\vec{b}]=\vec{n}ab\sin\theta \tag{1307}$$

方括中二矢之次序，不可隨意倒置，蓋

$$[\vec{b}\cdot\vec{a}]=\vec{n}ab\sin\widehat{BOA}=\vec{n}ab\sin(-\theta)=-\vec{n}ab\sin\theta.$$

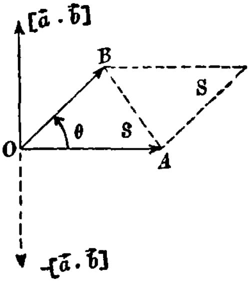


圖 44

故
$$[\vec{b}\cdot\vec{a}]=-[\vec{a}\cdot\vec{b}]. \tag{1308}$$

此式表明矢乘法不適合於交換律，爲矢算特性之一.

矢乘法有幾種重要性質，常見於矢算中者，玆述如下：

1. 以$\vec{a}$，$\vec{b}$二矢爲邊圍成一平行四邊形，其面積 S 適爲 $ab\sin\theta$，故二矢之矢乘積之值，可以表示二矢所圍成之平行四邊形之面積，因得：

$$[\vec{a}\cdot\vec{b}] = \vec{n}S. \tag{1309}$$

又三角形 OAB 之面積 s 爲 S 之半, 故

$$\frac{1}{2}[\vec{a}\cdot\vec{b}] = \vec{n}s.$$

2. 當二矢互相垂直時, $\theta=90^\circ$, $\sin\theta=1$, 故

$$[\vec{a}\cdot\vec{b}] = \vec{n}ab.$$

3. 當二矢平行時, 以二矢爲邊所圍成之平行四邊形之面積爲零. 故　$[\vec{a}\cdot\vec{b}]=0.$

若二矢之矢乘積爲零, 其必然之結果爲下列三條件之一:

$$a=0 \quad 或 \quad b=0 \quad 或 \quad \vec{a}\parallel\vec{b}.$$

4. 因之:一矢爲其本身所矢乘, 其積爲零

$$[\vec{a}\cdot\vec{a}]=0. \tag{1310}$$

5. 由矢乘法之定義, 得

$$\left.\begin{array}{l}[p\vec{a}\ q\vec{b}] = \vec{n}paqb\sin\theta = pq\vec{n}ab\sin\theta = pq[\vec{a}\ \vec{b}], \\ 故 \qquad [\vec{a}\ \vec{b}] = ab[\vec{a}_1\vec{b}_1].\end{array}\right\} \tag{1311}$$

6. 若二矢均爲單位矢, 其矢乘積之值, 爲二矢夾角之正弦.

$$[\vec{a}_1\cdot\vec{b}_1] = \vec{n}\sin\theta.$$

故 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 二矢之夾角, 可以其正弦表之如下:

$$\sin\theta=\frac{[\vec{a}\cdot\vec{b}]}{ab}.$$

§ 30. 矢乘法服從分配律

以公式表之, 本節所討論者, 爲

$$[\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}]=[\vec{a}\cdot\vec{b}]+[\vec{a}\cdot\vec{c}]$$

之是否眞確. 上式之眞確性, 可證之如下.

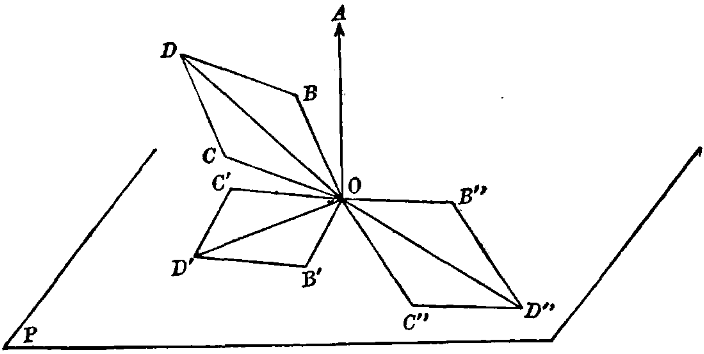


圖 45

證: (圖 45) $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \ \overrightarrow{OC}=\vec{c}.$

過 O 點作一平面 P, 使垂直於 $\vec{a}$, 則

$$\overrightarrow{OB''}=[\vec{a}\cdot\vec{b}]\quad \overrightarrow{OC''}=[\vec{a}\cdot\vec{c}]\quad 與\quad \overrightarrow{OD'}=[\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}]$$

均當在其上.

今作 $\vec{b},\vec{c}$ 之和 $\overrightarrow{OD}$. $OBDC$ 圍成一平行四邊形. 將此平

行四邊形射影於 P 上，得 $OB'D'C'$，亦爲一平行四邊形．此中

$$\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OB}\cos\widehat{BOB'}=b\sin\widehat{AOB}.$$

但$[\vec{a}\cdot\vec{b}]$之值爲$\overline{OB''}=ab\sin\widehat{AOB}=a\cdot\overline{OB'}$.

依據初等幾何之性質，知 $\overrightarrow{OB''}$ 當在 P 上，且與 $\overrightarrow{OB'}$ 成垂直．故 $\overrightarrow{OB''}$ 可認爲由 $\overrightarrow{OB'}$ 放大 a 倍，同時作 $90°$ 之旋轉而得．同樣

$$\overrightarrow{OC''}=a\cdot\overrightarrow{OC'},\qquad \overrightarrow{OD''}=a\cdot\overrightarrow{OD'}.$$

$\overrightarrow{OC''}$ 與 $\overrightarrow{OD''}$ 可認爲由 $\overrightarrow{OC'}$ 與 $\overrightarrow{OD'}$ 放大 a 倍，并作一直角之旋轉而得．故 $OB''D''C''$ 與 $OB'D'C'$ 相似，亦爲一平行四邊形．依二矢加法之性質(平行四邊形定則)，得

$$\overrightarrow{OD''}=\overrightarrow{OB''}+\overrightarrow{OC''}.$$

故
$$[\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}]=[\vec{a}\cdot\vec{b}]+[\vec{a}\cdot\vec{c}].\qquad(1312)$$

此式表明矢乘法亦如普通乘法，可以適用分配律，推而廣之

$$\begin{aligned}[\vec{a}+\vec{d}\cdot\vec{b}+\vec{c}]&=[\vec{a}+\vec{d}\cdot\vec{b}]+[\vec{a}+\vec{d}\cdot\vec{c}]\\&=[\vec{a}\cdot\vec{b}]+[\vec{d}\cdot\vec{b}]+[\vec{a}\cdot\vec{c}]+[\vec{d}\cdot\vec{c}]\end{aligned}$$

一如普通乘法．其必需注意之點，卽運算當中，不可將被乘矢與乘矢之次序顚倒，因交換律不適用於矢乘法也．

§ 31. 二矢和之數值關係

不同方位二矢之和,其值不能與二矢之值之和相等,於前章中業經鄭重聲明,提起注意.然則其間之數值關係,究爲何如?

設有二矢 $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$, 其和爲 $\overrightarrow{BA}=\vec{c}$.

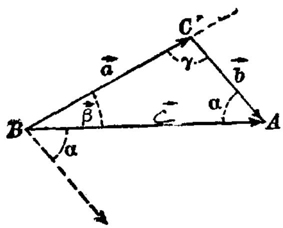


圖 46

(如圖 46) 此二矢與其和適圍成一三角形,故二矢和之數值關係,不啻三角形邊與角間之數值關係.其最要者有三:曰射影定律,曰餘弦定律,曰正弦定律,讀者知之稔矣.今請以矢算方法證明之,以與初等幾何及三角學之證法相比較.

1. 以 $\vec{c}_1$ 數乘 $\quad \vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$

之兩邊,得 $\quad (\vec{c}\cdot\vec{c}_1)=(\vec{a}\cdot\vec{c}_1)+(\vec{b}\cdot\vec{c}_1)$.

即 $\quad c=a\cos\beta+b\cos\alpha$

是爲射影定律.

2. $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ 之兩邊, 各爲其本身所乘數, 得

$$(\vec{c}\cdot\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b}).$$

解之, 同時注意 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之夾角爲 γ 之補角, 得

$$c^2=a^2+b^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})=a^2+b^2+2ab\cos(\pi-\gamma)$$

$$=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

是爲餘弦定律. 當 $\gamma=\frac{\pi}{2}$ 時, $\cos\gamma=0$, ABC 爲一直角三角形, c 爲其斜邊, 得

$$c^2=a^2+b^2.$$

3. 以 $\vec{c}_1$ 矢乘 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ 之兩邊, 得

$$[\vec{c}\cdot\vec{c}_1]=[\vec{a}\cdot\vec{c}_1]+[\vec{b}\cdot\vec{c}_1].$$

設 $\vec{n}$ 爲垂直於 $\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{c}$ 三矢之平面之單位矢. 其正向合於 $\vec{c}$ 向 $\vec{a}$ 之迴旋方向, 則依矢乘法之性質, 上式當爲

$$0=-\vec{n}a\sin\beta+\vec{n}b\sin\alpha,$$

$\vec{n}$ 是單位矢, 不能爲零, 上式成立之完全條件爲

$$-a\sin\beta+b\sin\alpha=0.\quad 故\quad \frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}.$$

推廣之至第三邊及第三角, 得 $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$

是爲正弦定律.

§ 32. 單位矢 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 間之關係

下系空間座標 $oxyz$ 三軸之單位矢各爲 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. 此三單位矢間之關係，爲矢算之骨幹，今縷述之.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 既各爲單位矢，則 $i=j=k=1$.

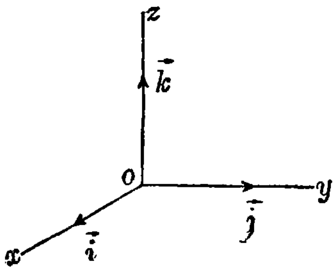


圖 47

故
$$(\vec{i}\cdot\vec{i})=(\vec{j}\cdot\vec{j})=(\vec{k}\cdot\vec{k})=1. \tag{1313}$$

同時
$$[\vec{i}\cdot\vec{i}]=[\vec{j}\cdot\vec{j}]=[\vec{k}\cdot\vec{k}]=0. \tag{1314}$$

又此三矢互相垂直，故

$$(\vec{i}\cdot\vec{j})=(\vec{j}\cdot\vec{i})=(\vec{j}\cdot\vec{k})=(\vec{k}\cdot\vec{j})=(\vec{k}\cdot\vec{i})=(\vec{i}\cdot\vec{k})=0. \tag{1315}$$

依 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 三文字輪換之次序，二單位矢之迴轉正向，相當於第三矢之正向(§ 21,22) 故

$$\left.\begin{aligned}&[\vec{i}\cdot\vec{j}]=\vec{k}, \quad [\vec{j}\cdot\vec{k}]=\vec{i}, \quad [\vec{k}\cdot\vec{i}]=\vec{j},\\ &[\vec{j}\cdot\vec{i}]=-\vec{k}, [\vec{k}\cdot\vec{j}]=-\vec{i}, [\vec{i}\cdot\vec{k}]=-\vec{j}.\end{aligned}\right\} \tag{1316}$$

本節之四個公式極爲重要，竟有以之爲二矢乘法之出發點者.

§ 33. 乘法之轉變式

玆有二矢 $\vec{a}, \vec{b}$. 其在空間座標系上之射影，各爲 A_x, A_y, A_z; B_x, B_y, B_z. 此六數決定二矢及與此二矢平行之方位，稱爲 $\vec{a}, \vec{b}$ 二方位之示位參數.

由 $$\vec{a}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k},\qquad \vec{b}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}.$$

運用分配律
$$\begin{aligned}(\vec{a}\cdot\vec{b}) &= (A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k})(B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k})\\ &= A_xB_x(\vec{i}\cdot\vec{i})+A_yB_y(\vec{j}\cdot\vec{j})+A_zB_z(\vec{k}\cdot\vec{k})\\ &\quad+A_xB_y(\vec{i}\cdot\vec{j})+A_yB_x(\vec{j}\cdot\vec{i})+A_yB_z(\vec{j}\cdot\vec{k})\\ &\quad+A_zB_y(\vec{k}\cdot\vec{j})+A_zB_x(\vec{k}\cdot\vec{i})+A_xB_z(\vec{i}\cdot\vec{k}).\end{aligned}$$

因公式 (1313) 及 (1315), 得
$$(\vec{a}\cdot\vec{b})=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z. \tag{1317}$$

因之 $$(\vec{a}\cdot\vec{a})=a^2=A_x^2+A_y^2+A_z^2,$$

或 $$a=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}. \tag{1318}$$

此式表出矢與其射影間之數值關係.

設二矢間之夾角爲 θ, 則因 $(\vec{a}\cdot\vec{b})=ab\cos\theta$ 得

$$\cos\theta=\frac{(\vec{a}\,(\vec{b})}{ab}=\frac{A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z}{\sqrt{(A_x^2+A_y^2+A_z^2)\,(B_x^2+B_y^2+B_z^2)}}. \tag{1319}$$

當二矢互相垂直時, $\cos\theta=0$. 故

$$A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=0.$$

$\vec{a},\vec{b}$ 二矢與 ox,y,z 各軸所成之夾角各爲 α,β,γ 與 α',β',γ'; 其單位矢 $\vec{a}_1$ 與 $\vec{b}_1$ 之射影各爲 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 及 $\cos\alpha',\cos\beta',\cos\gamma'$, 此六數稱爲 $\vec{a},\vec{b}$ 方位之示位餘弦.

由
$$\vec{a}_1=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k},$$
$$\vec{b}_1=\cos\alpha'\,\vec{i}+\cos\beta'\,\vec{j}+\cos\gamma'\,\vec{k}.$$

二式兩邊各平方之, 可得示位餘弦間之關係

$$\left.\begin{aligned}\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,\\ \cos^2\alpha'+\cos^2\beta'+\cos^2\gamma'=1.\end{aligned}\right\} \tag{1320}$$

又二矢之夾角, 亦可用示位餘弦表出

$$\cos\theta=(\vec{a}_1\cdot\vec{b}_1)=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'$$
$$+\cos\gamma\cos\gamma'. \tag{1321}$$

仍由分配律, 可得

$$\begin{aligned}[\vec{a}\cdot\vec{b}]=&A_xB_x[\vec{i}\cdot\vec{i}]+A_yB_y[\vec{j}\cdot\vec{j}]+A_zB_z[\vec{k}\cdot\vec{k}]\\ &+A_xB_y[\vec{i}\cdot\vec{j}]+A_yB_x[\vec{j}\cdot\vec{i}]+A_yB_z[\vec{j}\cdot\vec{k}]\\ &+A_zB_y[\vec{k}\cdot\vec{j}]+A_zB_x[\vec{k}\cdot\vec{i}]+A_xB_z[\vec{i}\cdot\vec{k}].\end{aligned}$$

由公式 (1314) 與 (1316), 得

$$[\vec{a}\cdot\vec{b}]=(A_yB_z-A_zB_y)\vec{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\vec{j}$$
$$+(A_xB_y-A_yB_x)\vec{k}. \tag{1322}$$

乍視之,此式似甚複雜.然記得一項,其他二項均可由文字之輪換推得.最便記憶之法,厥爲行列式:

$$[\vec{a}\cdot\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}. \tag{1323}$$

此行列式第二三列之互換,將使行列式之符號,隨之變換,表明矢乘法不適合於交換定則,又當二矢平行時:

$$\frac{A_x}{B_x}=\frac{A_y}{B_y}=\frac{A_z}{B_z}.$$

行列式之第二三行成比例,其值爲零,亦與前此所言相符.

又設另有一矢 $\vec{c}$,其射影爲 C_x,C_y,C_z,則

$$[\vec{a}\cdot\vec{b}]+[\vec{a}\cdot\vec{c}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x+C_x, & B_y+C_y, & B_z+C_z\end{vmatrix}=[\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}]$$

可爲分配律之簡單證明.

上述 (1317) 與 (1322) 二式, 稱爲數乘法及矢乘法之轉變式, 爲矢之本身及其射影間之關連式;矢算與解析幾何之互相轉變, 胥利賴之.

§ 34. 兩座標系之關係

設有二座標系 $oxyz$ 與 $o'x'y'z'$ 於空間, 其各軸之單位矢各爲 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 與 $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$.

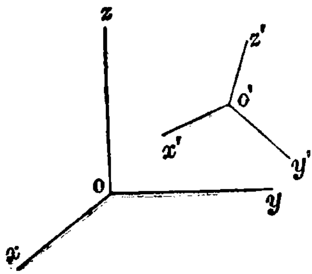


圖 48

設 $o'x'$ 在 $oxyz$ 上之示位餘弦(亦卽 $\vec{i}'$ 在 $oxyz$ 各軸上之正射影)爲

$$(\vec{i}'\cdot\vec{i}) = \cos\alpha = a, \quad (\vec{i}'\cdot\vec{j}) = \cos\beta = b, \quad (\vec{i}'\cdot\vec{k}) = \cos\gamma = c.$$

同樣, oy' 與 oz' 之示位餘弦爲 a', b', c' 與 a'', b'', c''. 同時 ox 軸在 $o'x'y'z'$ 各軸上之示位餘弦, 則爲

$$(\vec{i}\cdot\vec{i}') = a, \quad (\vec{i}\cdot\vec{j}') = a', \quad (\vec{i}\cdot\vec{k}') = a''.$$

oy 與 oz 在 $o'x'y'z'$ 系上之示位餘弦爲 b,b',b'' 與 c,c',c''.

今將此九個示位餘弦列表如下:

	$o'x'$	$o'y'$	$o'z'$	
ox	a	a'	a''	$\vec{i}$
oy	b	b'	b''	$\vec{j}$
oz	c	c'	c''	$\vec{k}$
	$\vec{i'}$	$\vec{j'}$	$\vec{k'}$	

上表之運用至爲便利.例如:欲尋 oy 在 oz' 上之示位餘弦,則於 oy 之列與 oz' 之行相交之處得 b''. 同時 b'' 又在 $\vec{j}$ 列與 $\vec{k'}$ 行之交,此示

$$(\vec{j}\cdot\vec{k'})=(\vec{k'}\cdot\vec{j})=b''.$$

餘類推.

有上表,則於此九個極易混淆之示位餘弦,不致再有雜亂錯誤之虞.今請尋求其間之關係式.

I. 由公式(1320),或(1313),得

$$\left.\begin{aligned}(\vec{i'}\cdot\vec{i'})&=a^2+b^2+c^2=1,\\(\vec{j'}\cdot\vec{j'})&=a'^2+b'^2+c'^2=1,\\(\vec{k'}\cdot\vec{k'})&=a''^2+b''^2+c''^2=1,\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
(\vec{i}\cdot\vec{i}) &= a^2+a'^2+a''^2=1,\\
(\vec{j}\cdot\vec{j}) &= b^2+b'^2+b''^2=1,\\
(\vec{k}\cdot\vec{k}) &= c^2+c'^2+c''^2=1.
\end{aligned}\right\}$$

II. 由公式(1315),得

$$\left.\begin{aligned}
(\vec{i}\cdot\vec{j}) &= a\,b+a'\,b'+a''b''=0,\\
(\vec{j}\cdot\vec{k}) &= b\,c+b'c'+b''c''=0,\\
(\vec{k}\cdot\vec{i}) &= c\,a+c'\,a'+c''a''=0,\\
(\vec{i}'\cdot\vec{j}) &= a\,a'+b\,b'+c\,c'=0,\\
(\vec{j}'\cdot\vec{k}') &= a'a''+b'b''+c'c''=0,\\
(\vec{k}'\cdot\vec{i}') &= a''a+b''b+c''c=0.
\end{aligned}\right\}$$

§ 35. 座標變換

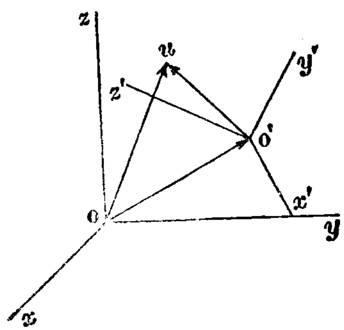


圖 49

空間兩座標系之互換,向稱麻煩.今以矢算尋求其公式,所得之式雖同,而立式之際,可少費解釋而易於了悟.

空間一點 M 之位置,原由 $oxyz$ 上之座標 x,y,z 決定.今不動 M,而以另一座標系 $o'x'y'z'$ 以定其位置.此座標系之 o' 在 $oxyz$ 上之座標為 x_0,y_0,z_0,其各軸之方位,與上節所討論者同.設 M 在其上之座標為 x',y',z'.座標變換之目的在於已知 x,y,z 而求 x',y',z' 或其相反之計算.

I. 以原座標表新座標.

因 $\overrightarrow{O'M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OO'}=(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})-(x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+z_0\vec{k})$.

以 $\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'}$ 分別數乘此式,得

$$\left.\begin{aligned} x'&=(\overrightarrow{O'M}\cdot\vec{i'})=\{x-x_0\}(\vec{i}\cdot\vec{i'})+\{y-y_0\}(\vec{j}\cdot\vec{i'})\\ &\qquad+\{z-z_0\}(\vec{k}\cdot\vec{i'})\\ &=a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0),\\ y'&=(\overrightarrow{O'M}\cdot\vec{j'})=a'(x-x_0)+b'(y-y_0)+c'(z-z_0),\\ z'&=(\overrightarrow{O'M}\cdot\vec{k'})=a''(x-x_0)+b''(y-y_o)+c''(z-z_0). \end{aligned}\right\}$$

II. 以新座標表原座標.　已知 x',y',z',欲求 x,y,z 可以上式為一組方程式而解之,然不如仍以矢算寫出為便.於

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}=x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+z_0\vec{k}+x'\vec{i'}+y'\vec{j'}+z'\vec{k'}.$$

以 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$,分別數乘之,同時注意公式 (1313) 與 (1315),得

$$x=(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{i})=x_0(\vec{i}\cdot\vec{i})+y_0(\vec{i}\cdot\vec{j})+z_0(\vec{i}\cdot\vec{k})+x'(\vec{i'}\cdot\vec{i})$$
$$+y'(\vec{j'}\cdot\vec{i})+z'(\vec{k'}\cdot\vec{i})$$

$$\left.\begin{aligned} &=x_0+ax+a\,y'+a''z',\\ y=(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{j})&=y_0+bx'+b'y'+b''z',\\ z=(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{k})&=z_0+cx'+c'y'+c''z'.\end{aligned}\right\}$$

本節與前節所述之公式,均爲解析幾何之基本公式.

§36. 轉變式之簡單運用

I. 設有二單位矢 $\vec{u}, \vec{u'}$, 其終點均在 oxy 平面之單位圓上. 二矢與 x 軸之夾角各爲 α 與 β. 得

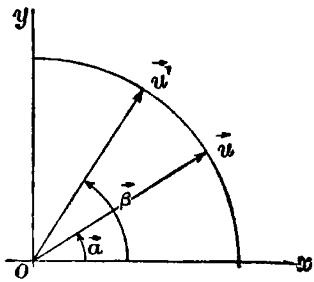


圖 50

$$\vec{u}=\cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j},$$
$$\vec{u'}=\cos\beta\,\vec{i}+\sin\beta\,\vec{j},$$

$$\cos \widehat{u, u'} = (\vec{u} \cdot \vec{u'}) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

但 $\widehat{u, u'} = \beta - \alpha$, 故

$$\cos(\beta-\alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha.$$

將 α 變作 $-\alpha$, 得

$$\cos(\beta+\alpha) = \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha.$$

II. 再

$$[\vec{u} \cdot \vec{u'}] = \vec{k}\sin(\beta-\alpha) = \vec{k}(\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta),$$

故 $$\sin(\beta-\alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta.$$

以 $-\alpha$ 代 α, 得

$$\sin(\beta+\alpha) = \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta.$$

III. 如圖 51. ABC 爲一單位球上之球面三角形. 其邊弧各爲 a, b, c. 以球心 O 爲原點, OA 爲 z 軸,作一座標系. 以 θ, θ' 表 B, C 二點之經度, 由公式 (1215), 得

$$\overrightarrow{OB} = \sin c\cos\theta\vec{i} + \sin c\sin\theta\vec{j} + \cos c\vec{k},$$

$$\overrightarrow{OC} = \sin b\cos\theta'\vec{i} + \sin b\sin\theta'\vec{j} + \cos b\vec{k},$$

故 $$(\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}) = \sin b\sin c\{\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\} + \cos b\cos c$$

$$= \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos(\theta'-\theta).$$

但 $\theta' - \theta = A$, $(\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}) = \cos a.$

7

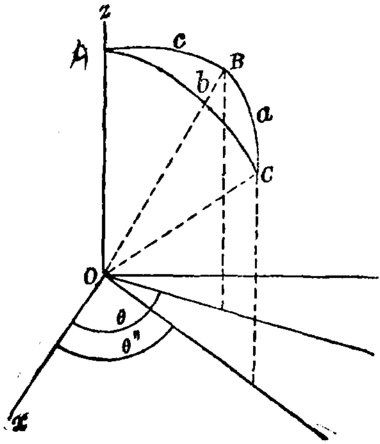


圖 51

故 $$\cos a = \cos b\cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

因對稱之故 $$\left.\begin{aligned}\cos b &= \cos c\cos a + \sin c \sin a \cos B,\\ \cos c &= \cos a\cos b + \sin a \sin b \cos C.\end{aligned}\right\}$$

IV. 三角形之面積. 空間三點 (Ax_a,y_a,z_a), $B(x_b,y_b,z_b)$, C $(x_c,y_c,z_c$ 圍成一三角形, 其面積 s 爲 § 29:1)

$$\vec{n}s = \frac{1}{2}[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}] = \frac{1}{2}[\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}]$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_b - x_a, & y_b - y_a, & z_b - z_a \\ x_c - x_a, & y_c - y_a, & z_c - z_a \end{vmatrix}.$$

特例(一)：A 與原點重合,得 $\vec{n}\cdot s=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_b & y_b & z_b\\ x_c & y_c & z_c\end{vmatrix}$.

故 $s=\frac{1}{2}\sqrt{(y_bz_c-z_by_c)^2+(z_bx_c-x_bz_c)^2+(x_by_c-y_bx_c)^2}$.

特例(二)：三點均在平面 oxy 上,得 $\vec{n}=\vec{k}$

$$\vec{n}\cdot s=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_b-x_a, & y_b-y_a, & 0\\ x_c-x_a, & y_c-y_a, & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\vec{k}\begin{vmatrix}x_b-x_a & y_b-y_a\\ x_c-x_a & y_c-y_a\end{vmatrix}.$$

故 $s=\frac{1}{2}\{(x_b-x_a)(y_c-y_a)-(x_c-x_a)(y_b-y_a)\}$.

特例(三)：A 在原點, B, C 均在 oxy 平面上,得

$$s=\frac{1}{2}(x_by_c-x_cy_b).$$

§ 37. 應用雜例

1. 直角三角形中,斜邊之中線爲斜邊之半長.

如圖 (52), 設 $\overline{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, 得 $\vec{d}=\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$.

平方之. 同時注意 $(\vec{a}\cdot\vec{b})=0$, 得

$$d^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2)=\frac{1}{4}\overline{AB}^2.$$

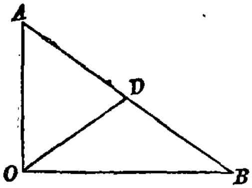


圖 52

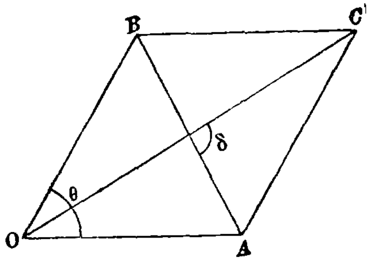


圖 53

故 $$d=\frac{\overline{AB}}{2}.$$

2. 以平行四邊形之對角線爲邊，仍作一平行四邊形.其面積二倍於原四邊形.

設以 $\vec{a},\vec{b}$ 二矢代原平行四邊形之二鄰邊 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$（圖53），其對角線 OC, BA 爲 $\vec{a}+\vec{b}$ 與 $\vec{a}-\vec{b}$.

$$[\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}]=[\vec{a}\cdot\vec{a}]+[\vec{b}\cdot\vec{a}]-[\vec{a}\cdot\vec{b}]-[\vec{b}\cdot\vec{b}].$$

但 $$[\vec{a}\cdot\vec{a}]=[\vec{b}\cdot\vec{b}]=0,\quad [\vec{a}\cdot\vec{b}]=-[\vec{b}\cdot\vec{a}].$$

故 $$[\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}]=2[\vec{b}\cdot\vec{a}].$$

上式兩邊矢乘積之值，適表所論二平行四邊形之面積.

3. 對角線正交之平行四邊形爲菱形.

從上題記法，依假設 $(\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b})=0.$

展開之，得 $\quad a^2-b^2=0\quad$ 或 $\quad a^2=b^2$

表明此平行四邊形之鄰邊相等，故爲一菱形.

4. 長方形之兩邊角線等長.

仍依(2)之記法: $(\vec{a}+\vec{b})^2=a^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})+b^2$, (1)

$$(\vec{a}-\vec{b})^2=a^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})+b^2. \quad (2)$$

依假設 $(\vec{a}\cdot\vec{b})=0$. 故得 $(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a}-\vec{b})^2$.

5. 平行四邊形中, 兩對角線之平方和, 等於四邊之平方和.

將上題 (1), (2) 兩式相加, 得

$$(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}-\vec{b})^2=2a^2+2b^2,$$

明示 $\overline{OC}^2+\overline{BA}^2=\overline{OA}^2+\overline{BC}^2+\overline{OB}^2+\overline{AC}^2$.

6. 自圓 (或球) 上一點, 作二直線, 至其同心圓 (或球) 之任意直徑之兩端, 此二直線之平方和爲一常數 (圖 54).

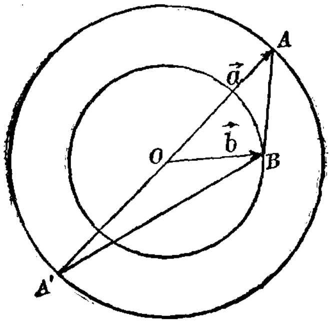


圖 54

上題之公式 $(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}-\vec{b})^2=2(\vec{a}^2+\vec{b}^2)$

中，若 a 與 b 爲常數，則此式右方亦爲一常數．此時 $\vec{a}, \vec{b}$ 各爲二同心圓之半徑，聯 B 與 A, A' 直徑之兩端，得

$$\vec{a}+\vec{b}=A'B, \quad \vec{a}-\vec{b}=AB,$$

故得 $$\overline{A'B}^2+\overline{AB}^2=2(a^2+b^2)=\text{常數}.$$

7. 求平行四邊形二對角線間之夾角 ϕ.

如圖 (53)，仍依 (2) 之記法，以 l, l' 表兩對角線之長，

$$(\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BA})=(\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b})=a^2-b^2, \tag{1}$$

$$[\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BA}]=[\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}]=2[\vec{b}\cdot\vec{a}]. \tag{2}$$

由(1)式，得 $$l\,l'\cos\phi=a^2-b^2, \tag{3}$$

由(2)式，僅取矢値 $$l\,l'\sin\phi=2ab\sin\theta. \tag{4}$$

以(3)式除(4)式，得 $$\tan\phi=\frac{2ab\sin\theta}{a^2-b^2}.$$

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{2ab\sin\alpha}{a^2-b^2}\right).$$

8. 任意四邊形中，若兩中線成垂直，則其二對角線必等.

如圖(55)令 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, 二中線各爲

$$\overrightarrow{GE}=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a}\ +\vec{b},$$

$$\overrightarrow{FD}=\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}-\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c}).$$

依假設 $$(\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{FD})=0.$$

卽
$$\left[\frac{1}{2}\left\{\vec{a}+\vec{c}\right\}\cdot\vec{b}+\frac{1}{2}\left\{\vec{c}-\vec{a}\right\}\right]$$
$$=\frac{c^2}{4}-\frac{a^2}{4}+\frac{1}{2}(\vec{a}\cdot\vec{b})+\frac{1}{2}(\vec{c}\cdot\vec{b})=0.$$

稍加變化:去分母,移項,得

$$c^2+2(\vec{c}\cdot\vec{b})+b^2=a^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})+b^2,$$

得
$$(\vec{c}+\vec{b})^2=(\vec{a}-\vec{b})^2.$$

但
$$\vec{c}+\vec{b}=\overrightarrow{OC},\qquad \vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA},$$

故
$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BA}.$$

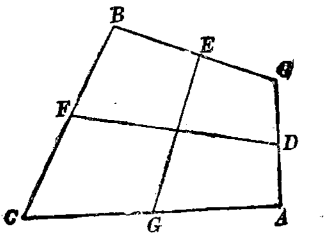


圖　55

9. 任意四邊形中,對角線之平方和,二倍於中線之平方和.

依上例之記法:兩中線之平方和爲

$$(\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a})^2+\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{c})^2$$
$$=\frac{1}{2}\left\{2b^2+a^2+c^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})+2(\vec{b}\cdot\vec{c})\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{(\vec{b}+\vec{c})^2+(\vec{b}-\vec{a})^2\right\}.$$

卽
$$2\left\{\overline{GE}^2+\overline{FD}^2\right\}=\overline{OC}^2+\overline{BA}^2.$$

10. 任意四邊形內，四邊平方和與對角線平方和之差，適爲兩對角線之中線之平方之四倍.

如圖 56，設 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$.

四邊之平方和爲

$$a^2+c^2+(\vec{b}-\vec{a})^2+(\vec{b}-\vec{c})^2$$
$$=2(a^2+b^2+c^2)-2(\vec{b}\cdot\vec{a})-2(\vec{b}\cdot\vec{c}).$$

兩對角線之平方和爲

$$b^2+(\vec{a}-\vec{c})^2=a^2+b^2+c^2-2(\vec{a}\cdot\vec{c}).$$

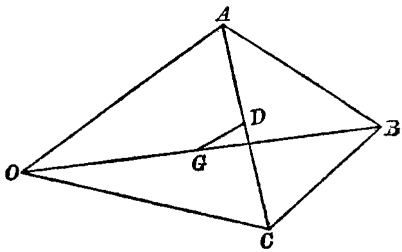


圖 56

二者之差爲 $$a^2+b^2+c^2-2(\vec{b}\cdot\vec{a})-2(\vec{b}\cdot\vec{c})+2(\vec{a}\cdot\vec{c})$$
$$=(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})^2=4\left(\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}-\frac{\vec{b}}{2}\right)^2.$$

但 $$\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}=\overrightarrow{OD},\quad \frac{\vec{b}}{2}=\overrightarrow{OE},\quad \overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{ED}.$$

故二者之差爲　$4(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OE})^2=4\overline{ED}^2$.

注意：上列三例之任意四邊形，四邊不必在一平面上.

11. 三角形內，任一中線之平方，等於其兩鄰邊平方和之半與第三邊半長之平方之差.

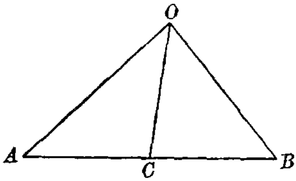


圖 57

如圖 57，令

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\quad \overrightarrow{OB}=\vec{b},\quad \overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}),\quad \overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}.$$

故得
$$\overline{OC}^2=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b})^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2)+\frac{1}{2}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$
$$=\frac{1}{2}(a^2+b^2)-\frac{1}{4}(a^2+b^2)+\frac{1}{2}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$
$$=\frac{1}{2}(a^2+b^2)-\left[\frac{1}{2}\left\{\vec{b}-\vec{a}\right\}\right]^2$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\overline{OA}^2+\overline{OB}^2\right\}-\left\{\frac{1}{2}\overline{AB}\right\}^2.$$

12. G 爲三角形 ABC 之重心，O 爲一任意點（可在三角形之平面以外），則

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=3(\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2)-(3\,\overline{OG})^2.$$ 圖58

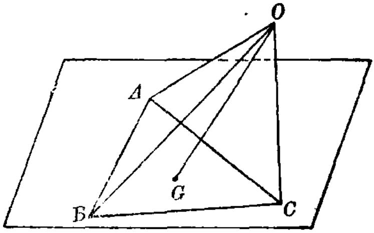


圖 58

設 $$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\quad \overrightarrow{OB}=\vec{b},\quad \overrightarrow{OC}=\vec{c}.$$

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=(\vec{b}-\vec{a})^2+(\vec{c}-\vec{b})^2+(\vec{a}-\vec{c})^2$$

$$=2(a^2+b^2+c^2)-2\left\{(\vec{a}\cdot\vec{b})+(\vec{b}\cdot\vec{c})+(\vec{c}\cdot\vec{a})\right\}. \quad (1)$$

但 $$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}),$$

得

$$a^2+b^2+c^2+2\left\{(\vec{a}\cdot\vec{b})+(\vec{b}\cdot\vec{c})+(\vec{c}\cdot\vec{a})\right\}-9\cdot\overline{OG}^2=0. \quad (2)$$

以 (2) 式之左方加於 (1) 式之右方，得

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=3(a^2+b^2+c^2)-9\cdot\overline{OG}^2$$

$$=3(\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2)-(3\cdot\overline{OG})^2.$$

13. 在底面平行之任意四角柱內，諸棱之平方和，等於諸對角線之平方和與兩對對角線交點間直線之平方之八倍之總和.

令 $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=\vec{c},\ \overrightarrow{OD}=\vec{d}.$ （如圖 59）

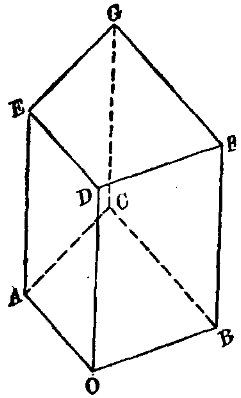


圖 59

諸棱之平方和爲

$$2\left\{a^2+b^2+(\vec{c}-\vec{a})^2+(\vec{c}-\vec{b})^2+2d^2\right\},$$

或 $$2\left\{2a^2+2b^2+2c^2+2d^2-2(\vec{a}\cdot\vec{c})-2(\vec{b}\cdot\vec{c})\right\}. \qquad (1)$$

諸對角線之平方和爲

$$(\vec{c}+\vec{d})^2+(\vec{c}-\vec{d})^2+(\vec{a}+\vec{d}-\vec{b})^2+(\vec{b}+\vec{d}-\vec{a})^2,$$

或 $$2\left\{a^2+b^2+c^2+2d^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})\right\}. \qquad (2)$$

又 $$\frac{1}{2}\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}),$$

$$\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}=\vec{b}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\vec{d})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{d})$$

各爲自 O 至兩對對角線之交點之矢，故聯兩交點間之矢

爲

$$\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{d})-\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}).$$

其平方之八倍爲

$$2\left\{a^2+b^2+c^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})-2(\vec{b}\cdot\vec{c})-2(\vec{c}\cdot\vec{a})\right\}. \qquad (3)$$

以(3)加於(2)中,適得(1),故如題云.

14. 依前章§24之記法,證明斯德華(Steward)公式:

$$\Sigma m_i\overline{OM_i}^2=\overline{OG}^2\Sigma m_i+\Sigma m_i\overline{GM_i}^2.$$

證:將 $$\overrightarrow{OM_i}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GM_i}.$$

平方之,得 $$\overline{OM_i}^2=\overline{OG}^2+\overline{GM_i}^2+2(\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{GM}).$$

以 m_i 乘各項,得

$$m_i\overline{OM_i}^2=m_i\overline{OG}^2+m_i\overline{GM_i}^3+2\ (\overrightarrow{OG}\cdot m_i\overrightarrow{GM_i}).$$

取類似之若干式相加,將各項之公因子提出,得

$$\Sigma m_i\overline{OM_i}^2=OG^2\,\Sigma m_i+\Sigma m_i\overline{GM_i}^2+2(\overrightarrow{OG}\cdot\Sigma m_i\overrightarrow{GM_i}).$$

依重心之定義 $$\Sigma m_i\overrightarrow{GM_i}=0.$$

故得 $$\Sigma m_i\overline{OM_i}^2=\overline{OG}^2\,\Sigma m_i+\Sigma m_i\overline{GM_i}^2.$$

15. 四面體內,若兩對對邊成垂直,則第三對對邊亦成垂直.

如圖60,令 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. 設 OA 垂直於 CB, OB 垂直於 CA 得 $(\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c})=0$,

$$(b\cdot\vec{a}-\vec{c})=0.$$

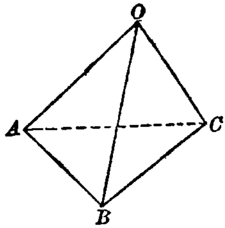


圖 60

由此二式相減

$$\left\{(\vec{a}\cdot\vec{b})-(\vec{a}\cdot\vec{c})\right\}-\left\{(\vec{b}\cdot\vec{a})-(\vec{b}\cdot\vec{c})\right\}=(\vec{b}\cdot\vec{c})-(\vec{a}\cdot\vec{c})=0,$$

或
$$(\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c})=0$$

表明 OC 與 AB 成垂直.

16. 對邊兩兩垂直之四面體,其對邊之平方和為一常數.

記法同前例.

由
$$(\vec{c}\cdot\vec{b}-\vec{a})=0,\quad 或\quad (\vec{b}\cdot\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c});$$

可得
$$\overrightarrow{OB}\cdot\cos\widehat{BOC}=\overrightarrow{OA}\cdot\cos\widehat{AOC}. \tag{1}$$

由三角形 BOC 與 AOC 內,求 $\widehat{BOC}$ 與 $\widehat{AOC}$ 之餘弦,得

$$\cos\widehat{BOC}=\frac{\overline{OB}^2+\overline{OC}^2-\overline{BC}^2}{2\cdot\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}},$$

$$\cos\widehat{AOC}=\frac{\overline{OA}^2+\overline{OC}^2-\overline{AC}^2}{2\cdot\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}.$$

代入(1)式,得

$$\frac{\overline{OB}^2+\overline{OC}^2-\overline{BC}^2}{2\cdot\overrightarrow{OC}}=\frac{\overline{OA}^2+\overline{OC}^2-\overline{AC}^2}{2\cdot\overrightarrow{OC}}.$$

稍加變化,得 $\overline{OB}^2+\overline{AC}^2=\overline{OA}^2+\overline{BC}^2\,(=\overline{OC}^2+\overline{AB}^2)$.

故如命題所云.

17. 垂直於四面體之四面,向外方各作一矢,其長度與各面之面積成比例,此四矢之和爲零.

垂直於 OAB, OBC, OCA 三面之矢,各爲 $\lambda[\vec{a}\cdot\vec{b}]$, $\lambda[\vec{b}\cdot\vec{c}]$, $\lambda[\vec{c}\cdot\vec{a}]$, 垂直於 ABC 面之矢爲 $\lambda[\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}]$ $=\lambda[\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}]=\lambda\left\{[\vec{c}\cdot\vec{b}]-[\vec{a}\cdot\vec{b}]-[\vec{c}\cdot\vec{a}]+[\vec{a}\cdot\vec{a}]\right\}$.

此四矢之和適爲零.

18. 四面體內邊角之關係.

仍依第14例之記法,可得

$$(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB})=(\vec{a}-\vec{c}\cdot\vec{b}-\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{b})-(\vec{a}\cdot\vec{c})-(\vec{c}\cdot\vec{b})+c^2.$$

以 m, n 代 CA, CB 之長度,得

$$mn\cos\widehat{ACB}-ab\cos\widehat{AOB}=c^2-ac\cos\widehat{AOC}-bc\cos\widehat{BOC},$$

....

....

由文字之輪換,可得其他五式.

19. 自平行四邊形之平面上一點，作一對角及其相鄰二夾邊之垂線. 對角線與其垂線之乘積 (僅就長度而言) 爲兩鄰邊各與其垂線之乘積之和或差. 隨此點在平行四邊形之外，或在其內而定.

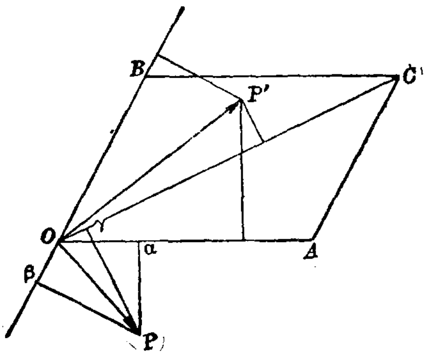


圖 61

如圖 61, 令 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}$.

先設定點 P 在平行四邊形之外, $\overrightarrow{OP}=\vec{\rho}$, 則

$$[\vec{a}\cdot\vec{\rho}]+[\vec{b}\cdot\vec{\rho}]=[\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{\rho}].$$

但 $[\vec{a}\cdot\vec{\rho}]$, $[\vec{b}\cdot\vec{\rho}]$ 與 $[\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{\rho}]$ 之方向相同, 且

$$[\vec{a}\cdot\vec{\rho}]=\vec{n}\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}\sin\widehat{AOP}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{O\alpha}.$$

故上式僅就數值而言, 爲

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{O\alpha}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{O\beta}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{O\gamma}.$$

次設定點 P' 在平行四邊形內，令 $\overline{OP'}=\vec{\rho}'$，則

$$[\vec{a}\cdot\vec{\rho}'] + [\vec{b}\cdot\vec{\rho}'] = [\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{\rho}].$$

但 $[\vec{a}\cdot\vec{\rho}']$ 與 $[\vec{b}\cdot\vec{\rho}']$ 之矢向，恰相反對，故得

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{O\alpha} \sim \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{O\beta} = \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{O\gamma}.$$

20. 於 ΔABC 之二邊 AB, AC 上，各作一平行四邊形(均在三角形之外) $ABDE$ 與 $ACFG$. 延長 DE 與 FG，交於 H. 則此二平行四邊形面積之和，等於以 AH 及 CB 爲邊，所作平行四邊形之面積.

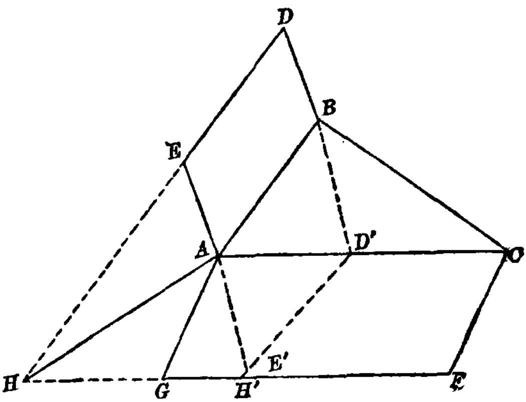


圖　62

令　$\overrightarrow{AE}=\vec{a}$,　$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$,　$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$,　$\overrightarrow{AG}=\vec{d}$,　則

$$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EH}=\vec{a}+x\vec{b},$$

或

$$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GH}=\vec{d}+y\vec{c}.$$

以 $\vec{b}, \vec{c}$ 分別矢乘二式, 得

$$[\overrightarrow{AH}\cdot\vec{b}]=[\vec{a}\cdot\vec{b}], \qquad [\overrightarrow{AH}\cdot\vec{c}]=[\vec{d}\cdot\vec{c}].$$

上二式相減, 得 $[\overrightarrow{AH}\cdot\vec{b}-\vec{c}]=[\vec{a}\cdot\vec{b}]-[\vec{d}\cdot\vec{c}]$,

或 $$[\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CB}]=[\vec{a}\cdot\vec{b}]+[\vec{c}\cdot\vec{d}]. \tag{1}$$

此式之三矢其方向與方位均同, 而其數值關係, 有如題云.

注意: 若此二平行四邊形中, 其一在三角形之內側(例如 $ABD'E'$), 則 (1) 式變為

$$[\overrightarrow{AH'}\cdot\overrightarrow{CB'}]=[\overrightarrow{AE'}\cdot\vec{b}]+[\vec{c}\cdot\vec{d}].$$

此中$[\overrightarrow{AB'}\cdot\vec{b}]$與$[\vec{c}\cdot\vec{d}]$之矢向, 顯然相反, 故題中之"和"字宜改為"差"字.

21. 三角形之三垂線共點.

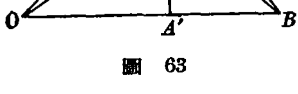


圖 63

如圖 63, 設二垂線 AA' 與 BB' 交於 H. 令 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OH}=\vec{c}$, 由射影之關係

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{c}\cdot\vec{b}),$$

$$(\vec{b}\cdot\vec{a}) = (\vec{c}\cdot\vec{a}).$$

上二式左右兩邊行減法,得

$$0 = (\vec{c}\cdot\vec{b}) - (\vec{c}\cdot\vec{a}),$$

或 $$(\vec{c}\cdot\vec{a}-\vec{b}) = 0$$

表明 $OH \perp AB$. 延長 OH 與 AB 相交, 必為 AB 邊之高, 故知三垂線會於一點.

22. 於三角形之上邊上, 向外各作一正三角形. 聯此三三角形之重心, 得一正三角形, 其重心與原三角形之重心重合.

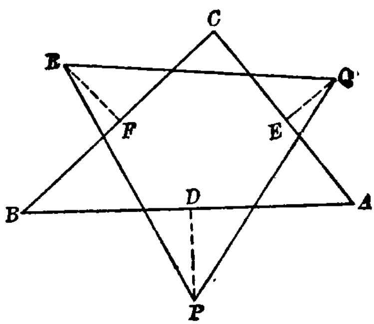


圖 64

如圖 64, P, Q, R 為 BC, CA, AB 三邊上之正三角形之重心, D, E, F 各為三角形三邊之中點. 令 $\overrightarrow{PD} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{\beta}$

$\overrightarrow{CE}=\vec{\gamma}$, $\overrightarrow{EQ}=\vec{\delta}$, 又三邊之長各爲 $2a, 2b, 2c$, 則

$$\overline{PQ}^2=(\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}+\vec{\delta})^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$$
$$+2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})+2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta})+2(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})+2(\vec{\beta}\cdot\vec{\delta})+2(\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta}).$$

此中 $$(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})=(\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta})=0,$$

$$\alpha=\frac{\overline{BC}}{2}\tan 30^\circ=\frac{a}{\sqrt{3}},\qquad \delta=\frac{b}{\sqrt{3}},$$

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})=\frac{1}{\sqrt{3}}ab\cos(\widehat{PQ, CA})=\frac{1}{\sqrt{3}}ab\cos\left(\frac{\pi}{2}-C\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}ab\sin C,$$

....

故 $$\overline{PQ}^2=\frac{a^2}{3}+a^2+b^2+\frac{b^2}{3}+0+\frac{2}{\sqrt{3}}ab\sin C$$
$$+\frac{2}{3}ab\cos C-2ab\cos C+\frac{2}{\sqrt{3}}ab\sin C+0$$
$$=\frac{4}{3}(a^2+b^2-ab\cos C)+\frac{4}{\sqrt{3}}ab\sin C.$$

因 $a^2+b^2-ab\cos C=\frac{1}{2}\{a^2+b^2+(a^2+b^2-2ab\cos C)\}$

$$=\frac{1}{2}\{a^2+b^2+c^2\}.$$

三角形 ABC 之面積爲 $s=\frac{1}{2}2a\cdot 2b\sin C=2ab\sin C.$

故 $$\overline{PQ}^2=\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)+\frac{2}{\sqrt{3}}s.$$

此式於 a b, c 爲對稱，故知 P, Q, R 爲等邊三角形.

復次，G 爲 ABC 之重心，知

$$\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DG}=\vec{\alpha}+\frac{\vec{\beta}+2\vec{\gamma}}{3},$$

$$\overline{PG}^2=\alpha^2+\frac{\beta^2}{9}+\frac{4\gamma^2}{9}+\frac{2}{3}(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})+\frac{4}{3}(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})+\frac{4}{9}(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})$$

$$=\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{9}+\frac{4c^2}{9}+\frac{4}{3\sqrt{3}}ab\sin C-\frac{4}{9}ab\cos C$$

$$=\frac{2}{9}(a^2+b^2+c^2)+\frac{2}{3\sqrt{3}}s.$$

此式於 a, b, c 爲對稱，故

$$\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{QG}=\overrightarrow{RG}.$$

故知 G 亦爲正三角形 PQR 之重心.

23 自內接於圓之三角形之三項點，作圓之切線，各與對邊之延長線交於一點.此三交點必共線[西摩孫線(Simson's line)].

如圖 65, O 爲圓心，圓半徑爲 r. A 點之切線與 BC 之延長線交於 P; B 交 AC 於 Q; C 交 AB 於 R. 令

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=\vec{c},\ OA\perp AP;$$

故 $$(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AP})=0. \tag{1}$$

但 $$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{BC}=\vec{b}-\vec{a}+x\{\vec{c}-\vec{b}\}.$$

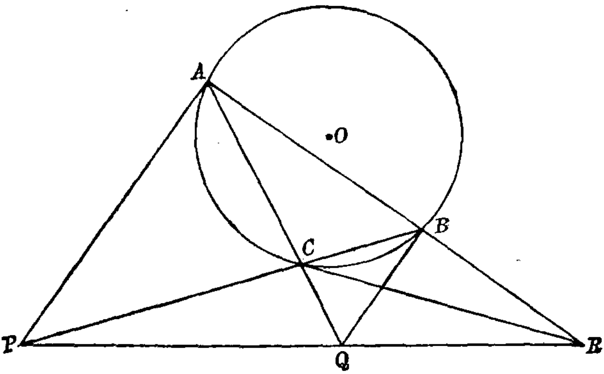


圖 65

以此值代入 (1) 中, 得

$$[a\cdot\vec{b}-\vec{a}+x\{\vec{c}-\vec{b}\}]=0,$$

或
$$(\vec{a}\cdot\vec{b})+x\{(\vec{a}\cdot\vec{c})-(\vec{a}\cdot\vec{b})\}=a^2=r^2.$$

故
$$x=\frac{r^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})}{(\vec{a}\cdot\vec{c})-(\vec{a}\cdot\vec{b})}.$$

更得
$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+x\overrightarrow{BC}=\vec{b}+\frac{r^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})}{(\vec{a}\cdot\vec{c})-(\vec{a}\cdot\vec{b})}(\vec{c}-\vec{b})$$

$$=\frac{\{(\vec{a}\cdot\vec{c})-r^2\}\vec{b}+\{r^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})\}\vec{c}}{(\vec{a}\cdot\vec{c})-(\vec{a}\cdot\vec{b})}.$$

同樣
$$\overrightarrow{OQ}=\frac{\{(\vec{a}\cdot\vec{b})-r^2\}\vec{c}+\{r^2-(\vec{b}\cdot\vec{c})\}\vec{a}}{(\vec{a}\cdot\vec{b})-(\vec{b}\cdot\vec{c})},$$

$$\overrightarrow{OR}=\frac{\{(\vec{b}\cdot\vec{c})-r^2\}\vec{a}+\{r^2-(\vec{c}\cdot\vec{a})\}\vec{b}}{(\vec{b}\cdot\vec{c})-(\vec{a}\cdot\vec{c})}.$$

將此三式去分母而加之，得

$$\{(\vec{a}\cdot\vec{c})-(\vec{a}\cdot\vec{b})\}\overrightarrow{OP}+\{(\vec{a}\cdot\vec{b})-(\vec{b}\cdot\vec{c})\}\overrightarrow{OQ}+\{(\vec{b}\cdot\vec{c})-(\vec{a}\cdot\vec{c})\}\overrightarrow{OR}=0.$$

同時 $$\{(\vec{a}\cdot\vec{c})-(\vec{a}\cdot\vec{b})\}+\{(\vec{a}\cdot\vec{b})-(\vec{b}\cdot\vec{c})\}+\{(\vec{b}\cdot\vec{c})-(\vec{a}\cdot\vec{c})\}=0.$$

故由公式 (1210)，知 P, Q, R 三點共線.

第四章　多矢之乘法

§38. 三矢之混合乘法

空間三矢 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 之混合乘法，以算式表其定義：爲

$$(\vec{a}\cdot[\vec{b}\cdot\vec{c}])$$

此中 $[\vec{b}\cdot\vec{c}]$爲一矢，其與 $\vec{a}$ 之數乘積爲一數．故三矢之混合乘積爲一數．

以空間一點 O 爲原點，作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, 并以 $OABC$ 爲頂作一平行六面體，以 $\vec{n}$ 表垂直於 OBC 面之單位矢，S 表此底面 $OBCD$ 之面積，V 表平行六面體之體積，得

$$[\vec{b}\cdot\vec{c}]=\vec{n}S,$$

故

$$(\vec{a}\cdot[\vec{b}\cdot\vec{c}])=(\vec{a}\cdot\vec{n})S.$$

但$(\vec{a}\cdot\vec{n})$表 $\vec{a}$ 矢在 $\vec{n}$ 矢上之正射影，爲自 O 點所作至 $AEFG$ 面之高 OA'，故

$$(\vec{a}\cdot[\vec{b}\cdot\vec{c}])=\overrightarrow{OA'}\cdot S.$$

因 $\overrightarrow{OA'}$ 與 $\vec{n}$ 之方向之相同與否，$\overrightarrow{OA}\cdot S$ 可以爲正爲負，故若 $\epsilon=\pm1$，則得

$$(\vec{a}\cdot[\vec{b}\cdot\vec{c}])=\epsilon V.$$

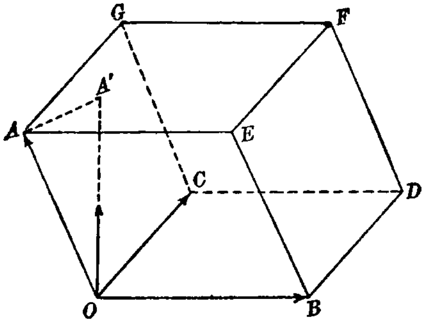


圖 66

若三矢之佈置，合於右手定則之次序，則 $\epsilon=1$，而三矢之混合乘積爲正. 反之，則 V 之前當置負號，而混合乘積爲負.

因對稱之故，知 $(\vec{b}\cdot[\vec{c}\cdot\vec{a}])=\epsilon' V,$

$$(\vec{c}\cdot[\vec{a}\cdot\vec{b}])=\epsilon'' V.$$

但三文字依一定次序之轉換，并不改變三矢排列之爲左系或右系，故

$$(\vec{a}\cdot[\vec{b}\cdot\vec{c}])=(\vec{b}\cdot[\vec{c}\cdot\vec{a}])=(\vec{c}\cdot[\vec{a}\cdot\vec{b}]). \qquad (1)$$

若轉換之次序變更，則三矢排列之系統隨之更變，故

$$(\vec{a}\cdot[\vec{c}\cdot\vec{b}])=(\vec{b}\cdot[\vec{a}\cdot\vec{c}])=(\vec{c}\cdot[\vec{b}\cdot\vec{a}])=-(\vec{a}\cdot[\vec{b}\cdot\vec{c}]). \quad (2)$$

因數乘法適合於交換定則，而 $(\vec{a}\cdot[\vec{b}\cdot\vec{c}])=([\vec{b}\cdot\vec{c}]\cdot\vec{a})$ 中文字輪換之次序未變，故爲便利起見簡書之爲 $(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})$.

如是, (1), (2) 二式,可合併書之爲

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})=(\vec{b}\cdot\vec{c}\cdot\vec{a})=(\vec{c}\cdot\vec{a}\cdot\vec{b})=-(\vec{a}\cdot\vec{c}\cdot\vec{b})=-(\vec{c}\cdot\vec{b}\cdot\vec{a})$$
$$=-(\vec{b}\cdot\vec{a}\cdot\vec{c})=\epsilon V. \tag{1401}$$

除三矢中有零矢,或三矢爲共面矢外, V 決不爲零,故 $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})$ 通常不爲零.

當$(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})=0$ 時,若其三因子均非零矢,則三矢必爲共面矢.

若混合乘積中,有二因子相等,例如 $\vec{b}=\vec{c}$, 則三矢必同平面,故

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{b})=0 \tag{1402}$$

此爲極重要之性質,此後當常見之,常運用之.

§ 39. 混合乘法之轉變式

設 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 在一空間座標系上之射影各爲 $A_x\, A_y, A_z, B_x \cdots C_z$, 則

$$[\vec{b}\cdot\vec{c}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}.$$

以 I, J, K 表 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 之係數,得

$$[\vec{b}\cdot\vec{c}]=I\vec{i}+J\vec{j}+K\vec{k}. \tag{1}$$

但 $$\vec{a}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k},$$

故 $$(\vec{a}\cdot[\vec{b}\cdot\vec{c}])=A_xI+A_yJ+A_zK. \tag{2}$$

比較 (1), (2) 二式,可知:將 $[\vec{b}\cdot\vec{c}]$ 之轉變式中之 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, 易為 A_x, A_y, A_z, 即得$(\vec{a}\cdot[\vec{b}\cdot\vec{c}])$之轉變式,故

$$(\vec{a}\cdot[\vec{b}\cdot\vec{c}])=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \tag{1403}$$

由此行列式各列之互換, 可以推出上節之 (1401); 又 $(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})=0$ 之討論, 亦可運用此行列式行之.

§ 40. 三矢之雙矢乘法

空間有三矢 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$; $\vec{b}$ 與 $\vec{c}$ 之矢乘積為一矢, $[\vec{b}\cdot\vec{c}]$ 與 $\vec{a}$ 之矢乘積亦為一矢 $[\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})]$.

就方位言, $[\vec{b}\cdot\vec{c}]$ 垂直於 $\vec{b}, \vec{c}$ 所定之平面, $[\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})]$ 則又垂直於 $[\vec{b}\cdot\vec{c}]$, 故 $[\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})]$ 當在 $\vec{b}, \vec{c}$ 所定之平面上. 依矢之分解之性質, 可得

$$[\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})]=x\vec{b}+y\vec{c}. \tag{1}$$

以 $\vec{a}$ 數乘兩邊, 得 $[\vec{a}\cdot\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})]=x(\vec{a}\cdot\vec{b})+y(\vec{a}\cdot\vec{c})=0.$

因 $\vec{a}, \vec{a}, [\vec{b}\cdot\vec{c}]$ 三矢之混合乘法中，有二矢相同故也 (1402)，故得比例關係

$$\frac{x}{(\vec{a}\cdot\vec{c})} = -\frac{y}{(\vec{a}\cdot\vec{b})}.$$

設 λ 表此二比之值，得　$x=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{c}),\quad y=-\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}).$

代入 (1) 式，得

$$[\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})] = \lambda\{(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}\}.$$

此中之 λ 爲一尙未決定之係數，欲定其質，可注意此式之獲得，幷未加以何種特別限制，故其性質非常普遍，無論與 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 以若何特殊之值，上式均應成立.

茲設 $\vec{b}$, $\vec{c}$ 二矢互相垂直，$\vec{a}=\vec{c}$，則上式變爲

$$\{c\cdot[\vec{b}\cdot\vec{c}]\} = \lambda\{(\vec{c}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{c}\} = \lambda c^2\vec{b} + 0. \qquad (2)$$

但 $[\vec{b}\cdot\vec{c}] = \vec{n}\cdot bc$（$\vec{n}$ 爲垂直於 $\vec{b}, \vec{c}$ 平面之單位矢）$\vec{b}, \vec{c}, \vec{n}$ 之次序合於右手定則之規定，故 $[\vec{c}\cdot\vec{n}] = c\cdot\vec{b}_1$，

得
$$[\vec{c}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})] = bc^2\vec{b}_1 = c^2\vec{b}.$$

代入 (2) 式，得　$c^2\vec{b} = \lambda c^2\vec{b}.$

故 $\lambda=1$，而 $[\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})] = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}.$ 　(1404)

因矢乘法不適於交換律，故

$$[(\vec{b}\cdot\vec{c})\cdot\vec{a}] = (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} - (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}. \qquad (1404')$$

§ 41. 三矢乘法之推廣

由三矢之混合乘法與雙矢乘法,可推廣之至於四矢或多矢之乘法,不過較爲麻煩而已. 例如四矢$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, 可組成下列各種形式不同之乘法:

$$[(\vec{a}\cdot\vec{b}\ \cdot(\vec{c}\cdot\vec{d}\ ],\qquad \{\vec{a}\ [\vec{b}\cdot(\vec{c}\cdot\vec{d})]\},$$

$$[(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot(\vec{c}\cdot\vec{d})],\qquad \{\vec{a}\cdot[\vec{b}\cdot(\vec{c}\cdot\vec{d})]\}.$$

玆分述之:

例1. 於$([\vec{a}\cdot\vec{b}]\cdot[\vec{c}\cdot\vec{d}])$中, 令$[\vec{c}\cdot\vec{d}]=\vec{r}$, 得

$$([\vec{a}\cdot\vec{b}]\cdot[\vec{c}\cdot\vec{d}])=([\vec{a}\cdot\vec{b}]\cdot\vec{r})=(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{r})=(\vec{a}\cdot[\vec{b}\cdot\vec{r}]),$$

即
$$\{(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\ \vec{c}\cdot\vec{d})\}=\{\vec{a}\cdot[\vec{b}\cdot(\vec{c}\cdot\vec{d})]\}.$$

今將此式展開, 得

$$([\vec{a}\cdot\vec{b}]\cdot[\vec{c}\cdot\vec{d}])=(\vec{a}\cdot\{\vec{b}\cdot[\vec{c}\cdot\vec{d}]\})=[\vec{a}\ \{\vec{c}(\vec{b}\cdot\vec{d})-\vec{d}(\vec{b}\ \vec{c})\}]$$

$$=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c}).\qquad(1405)$$

若 $\vec{a}=\vec{c}$, $\vec{b}=\vec{d}$, 上式變爲

$$([\vec{a}\cdot\vec{b}])^2=(\vec{a})^2(\vec{b})^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2.$$

令 α,β,γ 表 $\vec{a}$ 在座標軸上之射影; $\alpha'\ \beta'\ \gamma'$爲 $\vec{b}$ 之射影, 此式之轉變式

$$(\beta\gamma'-\gamma\beta')^2+(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^2+(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2$$

$$=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)-(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')^2$$

稱爲拉果蘭 (Lagrange) 公式，解析學中習見之.

2. $[(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot(\vec{c}\cdot\vec{d})]$ 爲 $[\vec{a}\cdot\vec{b}]$ 與 $[\vec{c}\cdot\vec{d}]$ 之矢乘積因 $[\vec{a}\cdot\vec{b}]$ 垂直於 $\vec{a},\vec{b}$ 所定之平面，故 $[[\vec{a}\cdot\vec{b}]\cdot[\vec{c}\cdot\vec{d}]]$ 當在 $\vec{a},\vec{b}$ 二矢之平面上.同理，此矢亦當在 $\vec{c},\vec{d}$ 所定之平面上.故 $[(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot(\vec{c}\cdot\vec{d})]$ 在 $\vec{a},\vec{b}$ 與 $\vec{c},\vec{d}$ 二平面之交線上.

今令 $[\vec{a}\cdot\vec{b}]=\vec{r}$，$[\vec{c}\cdot\vec{d}]=\vec{s}$，可得

$$[(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot(\vec{c}\cdot\vec{d})]=[\vec{r}\cdot(\vec{c}\cdot\vec{d})]=\vec{c}(\vec{r}\cdot\vec{d})-\vec{d}(\vec{r}\cdot\vec{c})$$
$$=\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{d})-\vec{d}(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}),$$
$$[(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot(\vec{c}\cdot\vec{d})]=[(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{s}]=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{s})-\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{s})$$
$$=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}\cdot\vec{d})-\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}\cdot\vec{d}). \qquad (1406)$$

3. $$\{\vec{a}\cdot[\vec{b}\cdot(\vec{c}\cdot\vec{d})]\}=[\vec{a}\cdot\{\vec{c}(\vec{b}\cdot\vec{d})-\vec{d}(\vec{b}\cdot\vec{c})\}]$$
$$=[\vec{a}\cdot\vec{c}](\vec{b}\cdot\vec{d})-[\vec{a}\cdot\vec{d}](\vec{b}\cdot\vec{c}).(1407)$$

此爲一垂直於 $\vec{a}$ 之矢.

§ 42. 運用雜例

1. 空間三點 $A(a_x, a_y, a_z)$, $B(b_x, b_y, b_z)$, $C(c_x, c_y, c_z)$ 與原點爲一錐體之頂點.求此錐體之體積 V.

以 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 爲邊，圍成一平行六面體，此六面體之

體積爲錐體 $OABC$ 之六倍，故

$$V=\frac{1}{6}(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC})=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

2. 求三角形之垂心.

如圖 67，令 $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{CB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{c}$，以 $\vec{\epsilon}$ 表垂直於三角形平面之單位矢，三角形之高，當各平行於：

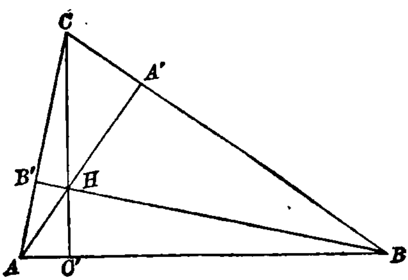


圖 67

$$-[\vec{\epsilon}\cdot\vec{c}] \quad +[\vec{\epsilon}\cdot\vec{b}] \quad +[\vec{\epsilon}\cdot\vec{a}].$$

但
$$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH},$$

得
$$\vec{b}-x[\vec{\epsilon}\cdot\vec{c}]=\vec{c}+y[\vec{\epsilon}\cdot\vec{b}].$$

以 $\vec{b}$ 數乘之.因 $(\vec{\epsilon}\cdot\vec{b}\cdot\vec{b})=0$，得

$$b^2-x(\vec{\epsilon}\cdot\vec{c}\cdot\vec{b})=(\vec{c}\cdot\vec{b}).$$

故
$$x=\frac{b^2-(\vec{b}\cdot\vec{c})}{(\vec{\epsilon}\cdot\vec{c}\cdot\vec{b})}=\frac{(\vec{b}\cdot\{\vec{b}-\vec{c}\})}{(\vec{\epsilon}\cdot\vec{c}\cdot\vec{b})}=\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{(\vec{\epsilon}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})}.$$

故得
$$\overrightarrow{AH}=\vec{b}-\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{(\vec{\epsilon}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})}[\vec{\epsilon}\cdot\vec{c}].$$

3. 求三角形之外接圓.

如前例記法, 設 O 爲外接圓心, 則
$$\overrightarrow{C'O}=x[\vec{\epsilon}\cdot\vec{c}],\quad \overrightarrow{B'O}=-y[\vec{\epsilon}\cdot\vec{b}].$$

以 $\vec{b}$ 數乘下式,

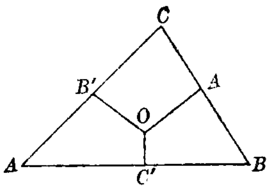


圖 68

$$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\vec{c}+x[\vec{\epsilon}\cdot\vec{c}]=\frac{1}{2}\vec{b}-y[\vec{\epsilon}\cdot\vec{b}],$$

得
$$\frac{1}{2}(\vec{b}\cdot\vec{c})+x(\vec{\epsilon}\cdot\vec{c}\cdot\vec{b})=\frac{1}{2}b^2.$$

故
$$x=\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{2(\vec{\epsilon}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})},$$

$$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{2(\vec{\epsilon}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})}[\vec{\epsilon}\cdot\vec{c}].$$

此矢決定圓心之位置. 欲求圓之半徑 R, 可將 $\overrightarrow{AO}$ 平方之, 得

$$R^2=\overrightarrow{AO}^2=\frac{1}{4}c^2+\frac{a^2b^2\cos^2 C}{4b^2C^2\sin^2 A}\cdot c^2.$$

因 $(\vec{\epsilon}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})^2=(\epsilon\cdot[\vec{b}\cdot\vec{c}])^2=b^2c^2\sin^2 A,([\vec{\epsilon}\cdot\vec{c}])^2=c^2,$

又 $$\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{2(\vec{\epsilon}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})}\cdot(\vec{\epsilon}\cdot\vec{c}\cdot\vec{c})=0 \text{ 故也.}$$

故得 $$R^2=\frac{c^2}{4}+\frac{a^2\cos^2 C}{4\sin^2 A}=\frac{c^2\sin^2 A+a^2\cos^2 C}{4\sin^2 A}.$$

但 $$c^2\sin^2 A+a^2\cos^2 C=c^2\sin^2 A+a^2(1-\sin^2 C)$$

$$=(c^2\sin^2 A-a^2\sin^2 C)+a^2.$$

由正弦定律 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$, 故 $c^2\sin^2 A-a^2\sin^2 C=0.$

故得 $$R=\frac{a}{2\sin A}.$$

4. 三角形之垂心, 重心與外接圓心共線, 且垂心與重心之距離, 爲外心與重心距離之二倍.

記法如前, 得 $$\overrightarrow{AG}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3},$$

$$\overrightarrow{AH}=\vec{b}-\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{(\vec{\epsilon}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})}[\vec{\epsilon}\cdot\vec{c}],$$

$$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{2(\vec{\epsilon}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})}[\vec{\epsilon}\cdot\vec{c}],$$

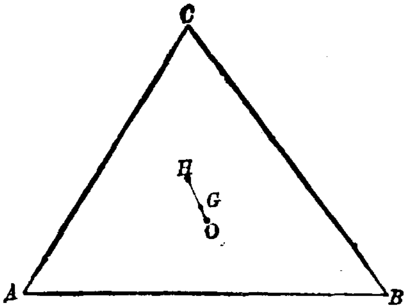


圖 69

$$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AO}=\frac{\vec{b}}{3}-\frac{\vec{c}}{6}-\frac{1}{2}\,\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{(\vec{\epsilon}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}}\,[\vec{\epsilon}\cdot\vec{c}],$$

$$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}-\frac{(\vec{a}\;\vec{b})}{(\vec{\epsilon}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})}[\vec{\epsilon}\cdot\vec{c}].$$

故 $$\overrightarrow{GH}=2\overrightarrow{OG}.$$

此式不特表明 $\overrightarrow{GH}=2\overrightarrow{OG}$,且因 $\overrightarrow{GH}$ 與 $\overrightarrow{OG}$ 平行而有一共同之點 G, 同時表明 O, G, H 三點共線.

5. 四面體各面之面積, 與平面角之關係.

如圖 70, 令 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$;

$$[\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}]=[\vec{a}-\vec{c}\cdot\vec{b}-\vec{c}]=[\vec{a}\;\vec{b}]-[\vec{a}\cdot\vec{c}]-[\vec{c}\cdot\vec{b}].$$

平方之, $$([\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}])^2=([\vec{a}\cdot\vec{b}])^2+([\vec{a}\cdot\vec{c}])^2+([\vec{c}\cdot\vec{b}])^2$$
$$-2([\vec{a}\cdot\vec{b}]\cdot[\vec{a}\cdot\vec{c}])+2([\vec{a}\cdot\vec{c}]\cdot[\overleftarrow{c}\cdot\vec{b}])$$

$$-2([\vec{a}\cdot\vec{b}]\cdot[\vec{c}\cdot\vec{b}]). \tag{1}$$

設以 A, B, C 表示與 BC, CA, AB 各邊相對之平面角，以

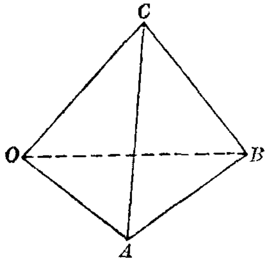


圖　70

S_{AOB} 表 AOB 面之面積，得

$$([\vec{a}\cdot\vec{b}]\cdot[\vec{a}\cdot\vec{c}]) = |[\vec{a}\cdot\vec{b}]|\cdot|[\vec{a}\cdot\vec{c}]|\cos A$$

$$= 4S_{AOB}\times S_{AOC}\times\cos A,$$

$$([\vec{a}\cdot\vec{c}]\cdot[\vec{c}\cdot\vec{b}]) = |[\vec{a}\cdot\vec{c}]|\cdot|[\vec{c}\cdot\vec{b}]|\cos(180^\circ - C)$$

$$= -4S_{AOC}\times S_{COB}\times\cos C,$$

$$([\vec{a}\cdot\vec{b}]\cdot[\vec{c}\cdot\vec{b}]) = 4S_{AOB}\times S_{BOC}\times\cos B,$$

又　$$([\vec{a}\cdot\vec{b}])^2 = (2S_{AOB})^2 = 4S^2_{AOB},$$

....　..............................

....

以 4 除 (1) 餘，將各乘積之值代入，得

$$S^2_{ABC} = S^2_{AOB} + S^2_{BOC} + S^2_{COA} - 2S_{AOB}\times S_{AOC}\times\cos A$$

$$-2S_{BOC}\times S_{BOA}\times\cos B-2S_{COA}\times S_{COB}\cos C.$$

若平面角 $A, B\ C$ 均爲直角,得

$$S^2{}_{ABC}=S^2{}_{AOB}+S^2{}_{BOC}+S^2{}_{COA}.$$

6. 自四面體之頂點作對面之垂線,在何種情形之下,此等垂線可以相交.

依上例記法,自 A 與 B 所作對面之垂線各平行於

$$[\vec{b}\ \vec{c}],\quad [\vec{c}\cdot\vec{a}].$$

設此二垂線交於一點 P,則 A, B, P 三點當在一平面上,故 (§ 38)

$$(\{\vec{b}-\vec{a}\}\cdot[\vec{b}\cdot\vec{c}]\cdot[\vec{c}\cdot\vec{a}])=0.$$

但 (140б), $$[[\vec{b}\cdot\vec{c}]\cdot[\vec{c}\cdot\vec{a}]]=\vec{c}(\vec{b}\cdot\vec{c}\cdot\vec{a}),$$

故得 $$(\vec{b}\cdot\vec{c}\cdot\vec{a})\{(\vec{b}\cdot\vec{c})-(\vec{a}\cdot\vec{c})\}=0;$$

或 $$(\vec{b}\cdot\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c}).$$

自圖 70 上觀之,

$$\overline{BC}^2+\overline{OA}^2=(\vec{c}-\vec{b})^2+a^2=c^2+b^2-2(\vec{b}\cdot\vec{c})+a^2$$
$$=a^2-2(\vec{a}\cdot\vec{c})+c^2+b^2=(\vec{a}-\vec{c})^2+b^2$$
$$=\overline{CA}^2+\overline{OB}^2.$$

故欲兩垂線相交,必須兩對邊之平方和爲一常數.依 § 37 之第 15, 16 二例,此四邊形之各對對邊均成垂直.

7.　化簡　　$([\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}][\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}][\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}])$.

以 $[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}]$,$[\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}]$,$[\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}]$各作一矢看待,上式形式雖甚複雜,亦不過一混合乘法而已.先將內面之兩重矢乘法解開

$$
\begin{aligned}
&([\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}]\cdot\{[\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}]\cdot[\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}]\})\\
&=[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}]\cdot\{\vec{\gamma}([\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}]\cdot\vec{\beta})-\vec{\beta}([\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}]\cdot\vec{\gamma})\}\\
&=([\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}]\cdot\vec{\gamma})([\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}]\cdot\vec{\beta})-0\\
&=(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})^2. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

此式可化爲行列式書之.令

$$
\begin{aligned}
\vec{\alpha}&=a\vec{i}+a'\vec{j}+a''\vec{k},\\
\vec{\beta}&=b\vec{i}+b'\vec{j}+b''\vec{k},\\
\vec{\gamma}&=c\vec{i}+c'\vec{j}+c''\vec{k},
\end{aligned}
$$

$$[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}]=(a'b''-a''b')\vec{i}+(a''b-ab'')\vec{j}+(ab'-a'b)\vec{k},$$

....

將(1)式兩邊展開,得一有趣之恆等式:

$$
\begin{vmatrix}
a'b''-a''b' & a''b-ab'' & ab'-a'b\\
b'c''-b''c' & b''c-bc'' & bc'-b'c\\
c'a''-c''a' & c''a-ca'' & ca'-c'a
\end{vmatrix}
=\begin{vmatrix}
a & a' & a''\\
b & b' & b''\\
c & c' & c''
\end{vmatrix}^2
$$

§43.　雜公式

由公式(1406),　$[[\vec{a}\cdot\vec{b}]\cdot[\vec{c}\cdot\vec{d}]]=\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{d})$

$$-\vec{d}(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}\cdot\vec{d})-\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}\cdot\vec{d}),$$

可得 $$\vec{d}(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})=\vec{a}(\vec{d}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})+\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{d}\cdot\vec{c})+\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{d}).$$

此式表明任何一矢 $\vec{d}$，均可以不同平面之已知三矢 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 表之.

$$\vec{d}=\vec{a}\cdot\frac{(\vec{d}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})}{(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})}+\vec{b}\frac{(\vec{a}\cdot\vec{d}\cdot\vec{c})}{(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})}+\vec{c}\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{d})}{(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})}. \qquad (1408)$$

此式甚便記憶，各項之形式對稱. 係數之分母均為 $(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})$，含 $\vec{a}$ 一項之係數之分子，則由 $(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})$ 中，以 $\vec{d}$ 易 $\vec{a}$ 而得.

設 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 非共面矢，$(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})\neq 0$，則 $[\vec{a}\cdot\vec{b}]$, $[\vec{b}\cdot\vec{c}]$, $[\vec{c}\cdot\vec{a}]$ 亦不能共面，因其各垂直於其因子之平面也. 故任一矢 $\vec{\rho}$，可以表之如下：

$$\vec{\rho}=x[\vec{a}\cdot\vec{b}]+y[\vec{b}\cdot\vec{c}]+z[\vec{c}\cdot\vec{a}]. \qquad (1)$$

x, y, z 均為尚待決定之係數.

以 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 分別數乘 (1) 式，得

$$(\vec{a}\cdot\vec{\rho})=y(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}),(\vec{b}\cdot\vec{\rho})=z(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}),(\vec{c}\cdot\vec{\rho})=x(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}).$$

以 x, y, z 之值代入 (1) 式，去分母，得

$$\vec{\rho}(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})=[\vec{a}\cdot\vec{b}](\vec{c}\cdot\vec{\rho})+[\vec{b}\cdot\vec{c}](\vec{a}\cdot\vec{\rho})$$
$$+[\vec{c}\cdot\vec{a}](\vec{b}\cdot\vec{\rho}). \qquad (1409)$$

再以一矢 $\vec{d}$ 數乘此式，可得

$$(\vec{d}\cdot\vec{\rho})(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})-(\vec{b}\cdot\vec{\rho})(\vec{c}\cdot\vec{a}\cdot\vec{d})-(\vec{c}\cdot\vec{\rho})(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{d})$$

$$-(\vec{a}\cdot\vec{\rho})(\vec{b}\cdot\vec{c}\cdot\vec{d})=0 \qquad (1410)$$

空間任何五矢，均可以上式聯接之.

求 1409 式時，曾先假定 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 不在一平面上，即

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})\neq 0.$$

若 $(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})=0$，則無論 $\vec{\rho}$ 在 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 之公共平面與否，均得

$$[\vec{a}\cdot\vec{b}](\vec{c}\cdot\vec{\rho})+[\vec{b}\cdot\vec{c}](\vec{a}\cdot\vec{\rho})+[\vec{c}\cdot\vec{a}](\vec{b}\cdot\vec{\rho})=0. \quad (1411)$$

此式可導出一極有趣味之幾何性質，設 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{\rho}$ 各爲同平面之直線 OA，OB，OC，OD 之單位矢，上式之幾何意義爲：

$$\sin\widehat{AOB}\cos\widehat{COD}+\sin\widehat{BOC}\cos\widehat{AOD}$$
$$+\sin\widehat{COA}\cos\widehat{BOD}=0. \qquad (1412)$$

此中之角，可爲劣角或優角，其正向均以一種旋轉方向爲標準.若 OD' 與 OD 垂直，且以上列諸矢同面，則上式可化爲（取消 D' 之附撇）

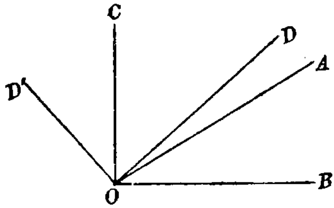


圖　71

$$\sin AOB\sin COD+\sin BOC\sin AOD$$

$$+\sin COA \sin BOD = 0. \qquad (1412')$$

又當 $(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})=0$ 時, (1410) 式變爲

$$(\vec{a}\cdot\vec{\rho})(\vec{b}\cdot\vec{c}\cdot\vec{d})+(\vec{b}\cdot\vec{\rho})(\vec{c}\cdot\vec{a}\cdot\vec{d})+(\vec{c}\cdot\vec{\rho})(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{d})=0$$

與以 $\vec{d}$ 數乘 (1411) 所得者相符.

§44. 平面三角之基本公式

於 §36 中, 曾有平面或球面三角之公式. 但其證法, 係矢式之轉變式而來, 不爲純粹矢算, 茲以 §43 之第 1412 公式

$$\sin AOB \cos COD + \sin BOC \cos AOD$$
$$+\sin COA \cos BOD = 0,$$
$$\sin AOB \sin COD + \sin BOC \sin AOD$$
$$+\sin COA \sin BOD = 0.$$

給 $\vec{d}$ 以特殊之值, 以證明下列諸式:

1. 令 $\vec{d}=\vec{b}$, $\widehat{a,b}=A$ $\widehat{b,c}=B$, 則 $\widehat{a,c}=A+B$; 則 (1412) 變爲 $\sin A\cos B+\sin B\cos A-\sin(A+B)=0$,

故 $$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A.$$

2. 令 $\vec{d}=\vec{b}$, $\widehat{a,b}=A$, $\widehat{b,c}=B$, 則 $\widehat{a,c}=A-B$, 得

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\sin B\cos A.$$

3. 令 $\vec{d}=\vec{a}$, $\widehat{a,c}=\frac{\pi}{2}$, $\widehat{b,c}=A$ 則

(1412) 變爲 $$\sin A+\cos\left(\frac{\pi}{2}+A\right)=0,$$

故 $$\cos\left(\frac{\pi}{2}+A\right)=-\sin A.$$

4. 令 $\vec{d}=\vec{a}$, $\widehat{b,d}=\frac{\pi}{2}$, $\widehat{b,c}=A$, 得

$$\sin A-\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=0,$$

故 $$\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\sin A.$$

5. 令 $\vec{d}=\vec{b}$, $\widehat{a,d}=\frac{\pi}{2}$ $\widehat{d,c}=A$, 得

$$-\sin\left(\frac{\pi}{2}+A\right)+\cos A=0,$$

故 $$\sin\left(\frac{\pi}{2}+A\right)=\cos A.$$

6. 令 $\vec{d}=\vec{b}$, $\widehat{c,d}=A$, $\widehat{a,b}=\frac{\pi}{2}$, 得

$$-\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)+\cos A=0,$$

故 $$\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\cos A.$$

7. 令 $\widehat{b, c}=A,\ \widehat{a, d}=B,\ \widehat{b, d}=\frac{\pi}{2}$, 則 (1412′) 變爲

$$-\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)$$

$$+\sin A\sin B+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\overline{A+B}\right)=0,$$

故 $$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$$

8. 令 $\widehat{b, c}=A,\ \widehat{d, a}=B,\ \widehat{b, d}=\frac{\pi}{2}$, 則得

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B.$$

其他公式,大多可由上列諸式導出.

§45. 球面三角之基本公式

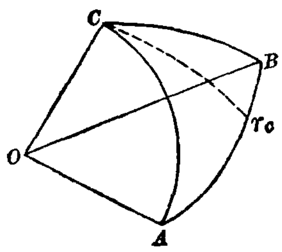


圖 72

如圖 72, ABC 爲一球面三角形, O 爲球心, $\overrightarrow{OA}=\alpha$, $\overrightarrow{OB}=\beta$, $\overrightarrow{OC}=\gamma$ 均爲單位矢, 以 a, b, c 表 BC, CA, AB

諸弧,以 A, B, C 表 OA OB, OC, 棱上之平面角, p_a, p_b p_c 爲自弧三角之頂點至對弧之高.

1. 設 $\overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OC'}$ 爲 $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 在 $\overrightarrow{OA}$ 上之正射影則

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{B'B}, \quad \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{C'C},$$

$$\cos a=(\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OC'}\cdot\overrightarrow{OB'})+(\overrightarrow{C'C}\cdot\overrightarrow{B'B})$$

$$+(\overrightarrow{OB'}\cdot\overrightarrow{CC'})+(\overrightarrow{OC'}\cdot\overrightarrow{BB'}).$$

但 $OB'\perp CC', OC'\perp BB'$, 故上式後二項等於零.注意 $\overrightarrow{OC}$ 等矢之值與弧角之關係, 上式可書爲:

$$\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\sin c\cos A.$$

由文字之輪換,可得相類之其他二式.

2. 由矢式 $[[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}]\cdot[\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}]]=\vec{\beta}(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}).$ (1)

注意 $$[[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}]\cdot[\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}]]=\sin c\cdot\sin a\cdot\sin B\cdot\vec{\beta},$$

$$\vec{\beta}([\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}]\vec{\gamma})=\sin c\sin p_c\,\vec{\beta}.$$

代入 (1) 中, 得 $\vec{\beta}\sin c\sin a\sin B=\vec{\beta}\sin c\sin p_c,$

或 $$\sin p_c=\sin a\sin B.$$

又由 $$[[\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}][\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}]]=\vec{\alpha}(\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}),$$

得 $$\sin b\sin c\sin A\,\vec{\alpha}=\vec{\alpha}\sin c\sin p_c;$$

故 $$\sin p_c=\sin b\sin A.$$

比較 (2), (3) 二式, 推廣之, 得 $\dfrac{\sin a}{\sin A}=\dfrac{\sin b}{\sin B}=\dfrac{\sin c}{\sin C}.$

3. 由 $([\vec{a}\cdot\vec{b}]\cdot\vec{c})=([\vec{b}\cdot\vec{c}]\cdot\vec{a})=([\vec{c}\cdot\vec{a}]\cdot\vec{b})$,

得 $$\sin c\sin p_c=\sin a\sin p_a=\sin b\sin p_b.$$

取 $$[[\vec{\gamma}\cdot\vec{a}]\cdot[\vec{a}\cdot\vec{\beta}]]=\vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})$$

之數値, $$\sin b\sin c\sin A=\sin c\sin p_c$$
$$=\sin a\sin p_a=\sin b\sin p_b$$

得 $$\sin p_a=\frac{\sin b\sin c}{\sin a}\sin A.$$

同樣, 得 $$\left.\begin{aligned}\sin p_b&=\frac{\sin c\sin a}{\sin b}\sin B,\\ \sin p_c&=\frac{\sin a\sin b}{\sin c}\sin C.\end{aligned}\right\}$$

又 $$\left.\begin{aligned}\sin p_b&=\sin c\sin A=\sin a\sin C,\\ \sin p_c&=\sin a\sin B=\sin b\sin A,\\ \sin p_a&=\sin b\sin C=\sin c\sin B.\end{aligned}\right\}$$

§ 46 球面三角運用雜例

1. 設 ABC, $A'B'C'$, 爲球面上三直角之二三角形, A, B, C, A', B', C' 之次序, 適合右手定則, 則

$$\cos AA'=\cos BB'\cos CC'-\cos B'C\cos BC'.$$

證: 先設球爲單位球, 依上節記法

$$[\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}]=\vec{a},\quad [\vec{\beta'}\cdot\vec{\gamma'}]=\vec{a'};$$

得 $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha})=([\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}]\cdot[\vec{\beta'}\cdot\vec{\gamma'}])$.

展開之, $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha'})=(\vec{\beta}\cdot\vec{\beta'})(\vec{\gamma}\cdot\vec{\gamma'})-(\vec{\beta'}\cdot\vec{\gamma})(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma'})$,

即 $\cos AA'=\cos BB'\cos CC'-\cos B'C\cos BC'$.

球之半徑並非單位長時,則依相似形之關係,上式亦當眞確.

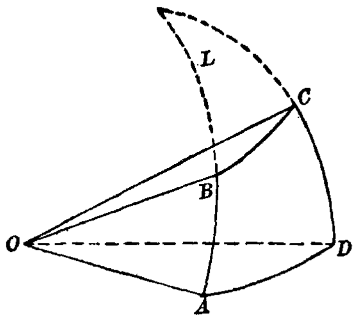


圖 73

2. $ABCD$ 爲球面上之四邊形 (圖 73), L 爲 $\widehat{AB}$, $\widehat{CD}$ 二弧之夾角, 則 (高斯公式, Gauss's formulæ)

$$\sin\widehat{AB}\sin\widehat{CD}\cos L=\cos\widehat{AC}\cos\widehat{BD}-\cos\widehat{AD}\cos\widehat{BC}.$$

證: 設自球心至諸頂點之徑矢爲 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$, 自球心至 $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DA}$ 諸弧之極之徑矢各爲 $\vec{\alpha'}, \vec{\beta'}, \vec{\gamma'}, \vec{\delta'}$, 則

$$[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}]=\vec{\alpha'}\sin\widehat{AB},$$

$$[\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta}]=\vec{\gamma'}\sin\widehat{CD}.$$

由 $([\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}]\cdot[\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta}])=(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})(\vec{\beta}\cdot\vec{\delta})-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta})(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}),$

可得 $$\sin\widehat{AB}\sin\widehat{CD}\cdot(\vec{\alpha'}\cdot\vec{\gamma'})$$
$$=\cos\widehat{AC}\cos\widehat{BD}-\cos\widehat{AD}\cos\widehat{BC}.$$

又 $$(\vec{\alpha'}\cdot\vec{\gamma'})=\cos L,$$

故 $$\sin\widehat{AB}\sin\widehat{CD}\cos L$$
$$=\cos\widehat{AC}\cos\widehat{BD}-\cos\widehat{AD}\cos\widehat{BC}.$$

3. 設上例中，$\widehat{AC}$, $\widehat{BD}$ 之交角為 M, $\widehat{AD}$, $\widehat{BC}$ 之交角為 N, 求證

$$\sin AB\sin CD\cos L+\sin AC\sin DB\cos M$$
$$+\sin AD\sin BC\cos N=0.$$

又 A, B, C, D 同在一大圓上時，此式將呈何狀？

依上例記法，得恆等式：

$$([\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}]\cdot[\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta}])=(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})(\vec{\beta}\cdot\vec{\delta})-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta})(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}),$$
$$([\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}]\cdot[\vec{\delta}\cdot\vec{\beta}])=(\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta})(\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta})-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})(\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta}),$$
$$([\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta}]\cdot[\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}])=(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})(\vec{\delta}\cdot\vec{\gamma})-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})(\vec{\delta}\cdot\vec{\beta}).$$

此三式右左兩方相加，得

$$([\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}][\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta}])+([\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}][\vec{\delta}\cdot\vec{\beta}])+([\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta}]\cdot[\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}])=0.$$

此中諸矢，均為單位矢，以數值譯出上式，適得

$$\sin\widehat{AB}\sin\widehat{CD}\cos L+\sin\widehat{AC}\sin\widehat{DB}\cos M$$

$$+\sin AD\sin BC\cos N=0.$$

若 A, B, C, D 在同一大圓上，則 $L=M=N=0$. 上式變爲

$$\sin\widehat{AB}\sin\widehat{CD}+\sin\widehat{AC}\sin\widehat{DB}+\sin\widehat{AD}\sin\widehat{BC}=0.$$

若大圓上一點 A' 而 $OA\perp OA'$，則上式變爲 (將 A' 之附撇取消)

$$\cos\widehat{AB}\sin\widehat{CD}+\cos\widehat{AC}\sin\widehat{DB}+\cos\widehat{AD}\sin\widehat{BC}=0$$

第五章　微分要義

本書僅屬矢算之初步討論，本可將矢之微分棄而不談，但中編"幾何運用"中，於尋求切線時，有運用微分之必要；且運動學與動力學均以微係數爲基本工具；故特於此將中下二編運用所及之處提要言之，繁簡適當與否，在所不計，蓋本章之目的本不在作矢微分之討論也．讀者直可視之爲本書之附錄．

§47　矢函數

於窗口擲石，石卽沿一拋物線而下墜．以石塊離手之一刹那爲時間之起點，則後此某一瞬間，石塊在空間之位置均有一定．卽石塊之位置，隨時間而變．今以空間一點 O 爲原點(例如石塊離手之處)，擲石後 t_1 秒石塊在 M_1，其位置由 $\overrightarrow{OM_1}$ 矢決定．t_2 秒時，石塊由 M_1 移至 M_2，其徑矢 $\overrightarrow{OM_1}$ 變爲 $\overrightarrow{OM_2}$．故知表石塊位置之徑矢，隨時間而變．

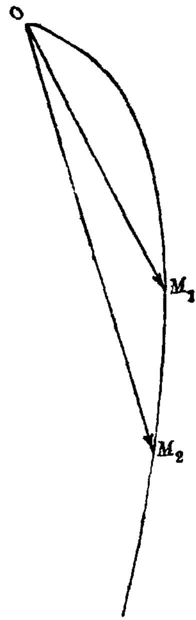


圖　74

用算學術語言之,則謂此徑矢爲時間之函數.

太陽 S 與地球 T 間之相互引力常在 TS 線上,且與 TS

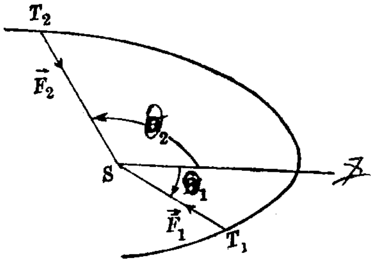


圖 75

之平方成反比例 今以 θ 表 TS 與一軸 SX 所夾之角,當此角自 θ_1 變至 θ_2 時,地球之位置,自 T_1 移至 T_2,二者間之相互引力,自 $\vec{F_1}$ 變至 $\vec{F_2}$,$\vec{F_1}$ 與 $\vec{F_2}$ 不特數值不同,方位亦異,故知此力 $\vec{F}$ 隨 θ 而變,稱 $\vec{F}$ 爲 θ 之函數.

如是一矢 $\vec{\rho}$ 隨一數 t 而變,每一 t 之值,均有一 $\vec{\rho}$ 與之相應,則稱 t 爲自變數,$\vec{\rho}$ 爲 t 之矢函數,記之如

$$\vec{\rho}=\vec{ft}, \qquad \vec{\rho}=\vec{\varphi t}$$

等.

§ 48 微係數 微分

設 $\vec{\rho}$ 爲 t 之矢函數,當 t 自 t_0 變至 t_2 時,$\vec{\rho}$ 自 $\vec{\rho_0}$ 變至

$\vec{\rho_2}$; t 僅有數值之變化, $\vec{\rho}$ 之變化, 則包含二部: 卽矢值 ρ

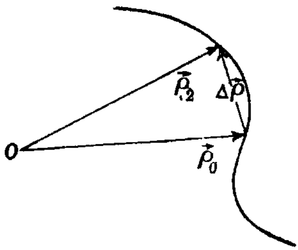


圖 76

之變化, 與矢向之變化 t_0 與 $\vec{\rho_0}$ 各爲此變化之始值, t_2 與 $\vec{\rho_2}$ 則爲終值. 而 t_2-t_0 與 $\vec{\rho_2}-\vec{\rho_0}$ 表示 t 與 $\vec{\rho}$ 變化之量, 稱爲 t 與 $\vec{\rho}$ 之增量, 以 Δt 與 $\overrightarrow{\Delta\rho}$ 表之.

$\dfrac{\overrightarrow{\Delta\rho}}{\Delta t}$ 亦爲一矢, 其位向通常與 $\vec{\rho}$ 不同. 當 Δt 無限接近於零時, $\overrightarrow{\Delta\rho}$ 之值亦隨之無限接近於零. 此時若 $\dfrac{\overrightarrow{\Delta\rho}}{\Delta t}$ 之數值, 方位與方向, 均有極限, 則此極限名爲 $\vec{\rho}$ 之一級微係數. 仿拉果蘭諸之記法, 記如 $\vec{\rho'}$

$$\vec{\rho'}=\lim_{\Delta t\to 0.}\frac{\overrightarrow{\Delta\rho}}{\Delta t}$$

t_2 無限接近於 t_0 時, Δt 與 $\overrightarrow{\Delta\rho}$ 均爲無限小之量, 稱爲 t 與 $\vec{\rho}$ 之微分. 各以 dt, $\overrightarrow{d\rho}$ 記之. 故一級微係數, 可認爲 $\vec{\rho}$ 與 t

之微分之比，而記如 $\overrightarrow{\rho'}=\dfrac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}$.

因得 $\overrightarrow{d\rho}=\overrightarrow{\rho'}\,dt.$

若 $\overrightarrow{\rho'}$ 亦有微係數，此微係數稱為 $\vec{\rho}$ 之二級微係數，記如 $\overrightarrow{\rho''}$

$$\overrightarrow{\rho''}=\frac{\overrightarrow{d\rho'}}{dt}=\frac{d}{dt}\left\{\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}\right\}=\frac{\overrightarrow{d^2\rho}}{dt^2}$$

一如普通解析學中所習見者，餘類推.

推廣言之，一矢可為若干自變數之矢函數. 例如 $\vec{\rho}$ 為 u 與 t 二自變數之矢函數，假想 u 為常數，則 $\vec{\rho}$ 對於 t 之一級微係數，稱為 $\vec{\rho}$ 對於 t 之一級偏微係數 記如 $\dfrac{\overrightarrow{\partial\rho}}{\partial t}$，以示區別於一個自變數之微係數 $\dfrac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}$. 同樣，可知 $\dfrac{\overrightarrow{\partial\rho}}{\partial u}$ 之意義

又 $\dfrac{\overrightarrow{\partial\rho}}{\partial t}$ 亦為 t 與 u 之矢函數，其對於 t 與 u 之一級偏微係數，為 $\vec{\rho}$ 之二級偏微係數，記如：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\overrightarrow{\partial\rho}}{\partial t}\right\}=\frac{\overrightarrow{\partial^2\rho}}{\partial t^2}\quad 與\quad \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\overrightarrow{\partial\rho}}{\partial t}\right\}=\frac{\overrightarrow{\partial^2\rho}}{\partial u\cdot\partial t}$$

而 $$\frac{\overrightarrow{\partial^2\rho}}{\partial t\cdot\partial u}=\frac{\overrightarrow{\partial^2\rho}}{\partial u\cdot\partial t}$$ 需证明.

亦與普通解析學相同，茲不贅論

$f_{xy}=f_{yx}.$

$f_{xy}(x+\theta_2\Delta x,\ y+\theta_1\Delta y)=f_{yx}(x+\theta_1\Delta x,\ y+\theta_2\Delta y)$

若 $\vec{\rho}$ 不隨 t 而變，則 $\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}=0$. 此理至明.

§49. 基本公式

1. 方位一定之矢之微係數　設 $\vec{\rho}$ 之方位不隨 t 而變.是則 $\vec{\rho}$ 之變化,僅爲矢值 ρ 之變化. 當變數 t 之增量爲 Δt 時,相應之 $\overrightarrow{\Delta\rho}$ 之方位,仍平行於其 $\vec{\rho}$ 之單位矢 $\vec{\rho_1}$,至其數值之變化,則爲 $\Delta\rho$,故 $\overrightarrow{\Delta\rho}=\Delta\rho\cdot\vec{\rho_1}$,

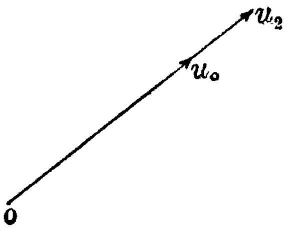


圖 77

而
$$\vec{\rho}'=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{\Delta\rho}}{\Delta t}=\vec{\rho_1}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\rho}{\Delta t}=\frac{d\rho}{dt}\cdot\vec{\rho_1}. \tag{1501}$$

故方位不變之矢,其微係數與之同方位.

2. 矢值不變之矢之微係數　設 $\vec{\rho}$ 之矢值 ρ 常爲定長. $\vec{\rho}$ 之變化僅爲方位變化,當 $\vec{\rho}$ 隨 t 而變化時, $\vec{\rho}$ 之終點劃一球面上之曲線,而 $\overrightarrow{\Delta\rho}=\overrightarrow{M_0M_2}$ 爲此球上之弦. 當 M_2

無限接近於 M_0 時, $\overrightarrow{\Delta\rho}$ 變為 $\overrightarrow{d\rho}$ $\overline{M_0M_2}$ 與一大圓之弧 $\widehat{M_0M_2}$ 相混,設此時 OM_0 與 OM_2 所成之無限小角為 $d\theta$,

則 $$\overline{M_0M_2}\to\widehat{M_0M_2}\to\rho\,d\theta$$

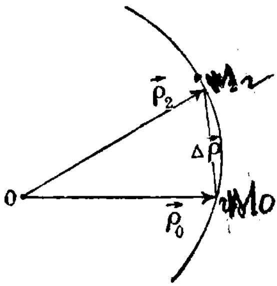


圖 78

$\overrightarrow{M_0M_2}$ 之方位趨近於通過 M_0, M_2 二點之大圓之切線,而與 OM 成垂直,故此方位之單位矢為 $\vec{n}$, 則

$$\overrightarrow{d\rho}=\vec{n}\rho\cdot d\theta,$$

而其對於 t 之微係數為 $$\vec{\rho}'=\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}=\vec{n}\cdot\rho\cdot\frac{d\theta}{dt}. \tag{1502}$$

故矢值不變之矢,常與其微係數成垂直.

設 $\vec{u}$ 為一單位矢, $u=1$, 得

$$\frac{\overrightarrow{du}}{dt}=\vec{n}\frac{d\theta}{dt} \quad 或 \quad \vec{u}'=\vec{n}\theta'. \tag{1503}$$

3. 任意矢之微係數 設 $\vec{\rho}$ 自 $\vec{\rho}=\overrightarrow{OM}$ 變至 $\vec{\rho}_2=\overrightarrow{OM_2}$,

此二矢之夾角爲 θ, 則 $\overrightarrow{\Delta\rho}=\overrightarrow{MM_2}$ 將 $\overrightarrow{MM_2}$ 分解爲二矢 $\overrightarrow{MN}$ 與 $\overrightarrow{NM_2}$, 令 $\overrightarrow{MN}$ 垂直於 $\overrightarrow{OM}$, 設 $\overrightarrow{MN}$ 方位之單位矢爲 $\vec{n}$, 得

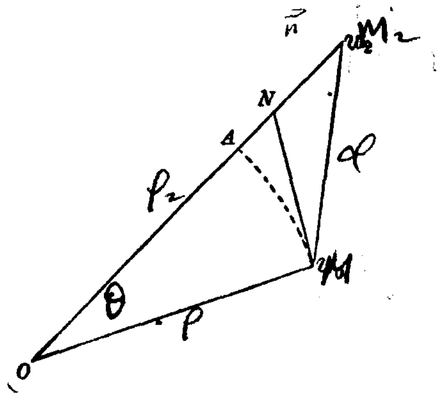


圖 79

$$\overrightarrow{\Delta\rho}=\overrightarrow{MN}\cdot\vec{n}+\overrightarrow{NM_2} \tag{1}$$

以 O 爲心,以 $\rho=OM$ 爲半徑, 作一圓弧, 截 OM_2 於 A, 則

$$\widehat{MA}=\rho\theta$$

當 $\overrightarrow{\Delta\rho}$ 之值無限接近於零時, θ 變爲無限小 $d\theta$, $\overline{MN}$ 與 $\widehat{MA}$ 相混, $\overrightarrow{NM_2}$ 之方位與 $\overrightarrow{OM}$ 相混,而 $\overrightarrow{NM_2}$ 僅表 $\vec{\rho}$ 之數值之增量 $d\rho$, 故若以 $\vec{\rho}_1$ 表 $\vec{\rho}$ 之單位矢, 則 (1) 變爲

$$\overrightarrow{d\rho}=\rho\,d\theta\,\vec{n}+d\rho\cdot\vec{\rho}_1.$$

故 $\vec{\rho}$ 對於 t 之微係數爲 $\overrightarrow{\frac{d\rho}{dt}}=\rho\frac{d\theta}{dt}\vec{n}+\frac{d\rho}{dt}\vec{\rho_1}.$

或 $$\vec{\rho}'=\rho\theta'\vec{n}+\rho'\cdot\vec{\rho_1}. \tag{1504}$$

§ 50. 微分規例

1. 設 $\vec{\alpha}$ $\vec{\beta}$……等有限個矢，均爲 t 之矢函數，$a, b,$……

……均爲常數，則 $\vec{\rho}=a\vec{\alpha}+b\vec{\beta}+$………

之微係數爲 $$\vec{\rho}'=a\vec{\alpha}'+b\vec{\beta}'+\text{………}. \tag{1505}$$

蓋當 t 增至 $t+\Delta t$ 時，$\vec{\alpha}, \vec{\beta}$……各增至 $\vec{\alpha}+\overrightarrow{\Delta\alpha}$，$\vec{\beta}+\overrightarrow{\Delta\beta}$

………而 $\vec{\rho}$ 變爲 $\vec{\rho}+\overrightarrow{d\rho}=a(\vec{\alpha}+\overrightarrow{\Delta\alpha})+b(\vec{\beta}+\overrightarrow{\Delta\beta})+$………

故 $\overrightarrow{\Delta\rho}=(\vec{\rho}+\overrightarrow{\Delta\rho})-\vec{\rho}=a\overrightarrow{\Delta\alpha}+b\overrightarrow{\Delta\beta}+$………

若以 Δt 除上式，而令 $\Delta t\to0$，則得

$$\overrightarrow{\frac{d\rho}{dt}}=a\overrightarrow{\frac{d\alpha}{dt}}+b\overrightarrow{\frac{d\beta}{dt}}.$$

2. 設 $\vec{a}$，$\vec{b}$………等爲有限個不變之矢，x，y………爲有

限個 t 之函數，則 $\vec{\rho}=x\vec{a}+y\vec{b}+$………

之微係數爲 $$\vec{\rho}'=x'\vec{a}+y'\vec{b}+\text{………}. \tag{1506}$$

此式之證法，與 (1505) 全同，不過前者之變量爲矢，後者之變量爲數而已.

若一矢 $\vec{\rho}$ 在一座標系上之射影爲 X, Y, Z，則因

$$\vec{\rho}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}.$$

運用上式,可得　$\vec{\rho}'=X'\vec{i}+Y'\vec{j}+Z'\vec{k}.$　(1507)

3. 設　$\vec{\rho}=m\vec{\alpha},$

m 與 $\vec{\alpha}$ 均爲 t 之函數,當 t 增至 $t+\Delta t$ 時,m 與 $\vec{\alpha}$ 各增至 $m+\Delta m$, $\vec{\alpha}+\Delta\vec{\alpha}$, $\vec{\rho}$ 則變爲

$$\vec{\rho}+\Delta\vec{\rho}=(m+\Delta m)(\vec{\alpha}+\Delta\vec{\alpha}),$$

故　$\overrightarrow{\Delta\rho}=\Delta m\cdot\vec{\alpha}+m\cdot\overrightarrow{\Delta\alpha}+\Delta m\cdot\overrightarrow{\Delta\alpha}.$

以 Δt 除上式,得　$\dfrac{\overrightarrow{\Delta\rho}}{\Delta t}=\dfrac{\Delta m}{\Delta t}\cdot\vec{\alpha}+m\cdot\dfrac{\overrightarrow{\Delta\alpha}}{\Delta t}+\dfrac{\Delta m}{\Delta t}\cdot\overrightarrow{\Delta\alpha}.$

當 $\Delta t\to 0$ 時,$\overrightarrow{\Delta\rho}$, Δm, $\overrightarrow{\Delta\alpha}$ 隨之,上式右邊末項亦隨 $\overrightarrow{\Delta\alpha}$ 趨近於零,其他各項,各有極限,故得

$$\vec{\rho}'=m'\vec{\alpha}+m\vec{\alpha}'.\tag{1508}$$

因 $\vec{\rho}=\rho\cdot\vec{\rho_1}$. 運用上式,得　$\vec{\rho}'=\rho'\cdot\vec{\rho_1}+\rho\cdot\vec{\rho_1}'$.

由公式 (1503),得　$\vec{\rho_1}'=\vec{n}\theta'$,

故　$\vec{\rho}'=\rho'\cdot\vec{\rho_1}+\rho\cdot\theta'\vec{n}$

與前節所得 (1504) 相符.

4. 數乘積之微係數　設 $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ 均爲 t 之矢函數

$$r=(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$$

隨 $\vec{\alpha}$ 與 $\vec{\beta}$ 而變,故爲 t 之函數.當 t 之增量爲 Δt 時,r 之

增量爲

$$\Delta r=(r+\Delta r)-r=(\vec{\alpha}+\overrightarrow{\Delta\alpha}\cdot\vec{\beta}+\overrightarrow{\Delta\beta})-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$$
$$=(\overrightarrow{\Delta\alpha}\cdot\vec{\beta})+(\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{\Delta\beta})+(\overrightarrow{\Delta\alpha}\cdot\overrightarrow{\Delta\beta}).$$

以 Δt 除上式兩邊，而令 $\Delta t\to 0$，此時末項爲一無限小與一定矢之乘積，其他各項均各有極限，故得

$$r'=(\vec{\alpha}'\cdot\vec{\beta})+(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}'). \tag{1509}$$

5. 矢乘積之微係數 若 $\vec{\rho}=[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}]$，則得

$$\vec{\rho}'=[\vec{\alpha}'\cdot\vec{\beta}]+[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}']. \tag{1510}$$

其證法與 (1509) 相似，惟運用之時，必須注意 $\vec{\alpha}$ 與 $\vec{\beta}$ 之次序，不能互換，蓋矢乘法，不適合於交換定則也.

6. 混合乘積之微係數 設 $r=(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})$.

欲求其微係數，可令 $r=([\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}]\cdot\vec{\gamma})$.

運用 (1509) 與 (1510) 二式，得

$$\frac{dr}{dt}=\left(\frac{d}{dt}[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}]\cdot\vec{\gamma}\right)+\left([\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}]\cdot\overrightarrow{\frac{d\gamma}{dt}}\right)$$

$$=\left(\left\{\left[\overrightarrow{\frac{d\alpha}{dt}}\cdot\vec{\beta}\right]+\left[\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{\frac{d\beta}{dt}}\right]\right\}\vec{\gamma}\right)+\left([\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}]\cdot\overrightarrow{\frac{d\gamma}{dt}}\right).$$

或 $$r'=(\vec{\alpha}'\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})+(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}'\cdot\vec{\gamma})+(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}'). \tag{1511}$$

以上諸式，其形式均與普通解析學之公式相似，故極便

於記憶.欲求微分時,只須以 dt 乘上述各公式即得.例如由

(1505) 得 $$\vec{\rho}'dt = a\,\vec{\alpha}'dt + b\,\vec{\beta}'dt + \cdots\cdots,$$

或 $$\overrightarrow{d\rho} = a\,\overrightarrow{d\alpha} + b\,\overrightarrow{d\beta} + \cdots\cdots.$$

由 (1506) 得 $$\overrightarrow{d\rho} = dx\cdot\vec{a} + dy\cdot\vec{b} + \cdots\cdots.$$

由 (1508) 得 $$\overrightarrow{d\rho} = dm\cdot\vec{a} + m\cdot\overrightarrow{da}.$$

由 (1509) 得 $$dr = (\overrightarrow{d\alpha}\cdot\vec{\beta}) + (\vec{a}\cdot\overrightarrow{d\beta}).$$

由 (1510) 得 $$\overrightarrow{d\rho} = [\overrightarrow{d\alpha}\cdot\vec{\beta}] + [\vec{a}\cdot\overrightarrow{d\beta}].$$

由 (1511) 得 $$dr = (\overrightarrow{d\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}) + (\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{d\beta}\cdot\vec{\gamma}) + (\vec{a}\cdot\vec{\beta}\cdot\overrightarrow{d\gamma}).$$

§ 51. 定理

1. $\vec{\rho}$ 爲一變矢,則

$$\vec{\rho}' = \frac{(\vec{\rho}\cdot\vec{\rho}')}{\rho}. \tag{1512}$$

蓋 $$\rho^2 = (\vec{\rho}\cdot\vec{\rho}).$$

取兩邊之微係數,得

$$2\rho\cdot\rho' = (\vec{\rho}'\cdot\vec{\rho}) + (\vec{\rho}\cdot\vec{\rho}') = 2(\vec{\rho}\cdot\vec{\rho}').$$

以 2ρ 除此式兩邊,即得 (1512).

2. 矢值不變之矢(但不爲零矢),其微係數常與之垂直.

依假設 $(\vec{\rho}\cdot\vec{\rho})=\rho^2=$ 常數.

取兩邊之微係數, 即得 $(\rho\cdot\rho')=0$.

表明 $\vec{\rho}\perp\vec{\rho'}$. 其逆亦眞.

§ 49 之公式 (1502), 亦表示 $\vec{\rho}\perp\vec{\rho'}$, 與此處相同.

3. 若 $[\vec{\rho}\cdot\vec{\rho'}]=0$. 而 $\vec{\rho}\neq 0$;

則 $\vec{\rho}$ 之方位一定.

證: 由 $$\left(\frac{\vec{\rho}}{\rho}\right)'=\frac{\rho\cdot\vec{\rho'}-\rho'\cdot\vec{\rho}}{\rho^2}.$$

引用公式(1512),得 $$\left(\frac{\vec{\rho}}{\rho}\right)'=\frac{\rho^2\vec{\rho'}-(\vec{\rho}\cdot\vec{\rho'})\vec{\rho}}{\rho^3}=\frac{[\vec{\rho}\cdot(\vec{\rho'}\cdot\vec{\rho})]}{\rho^3}.$$

依假設 $[\vec{\rho}\cdot(\vec{\rho'}\cdot\vec{\rho})]=0$, 得 $$\left(\frac{\vec{\rho}}{\rho}\right)'=(\vec{\rho_1})'=0.$$

此式表明 $\vec{\rho}$ 之單位矢不變, 即 $\vec{\rho}$ 之方位不變.

4. 設 $\rho\neq 0$, $[\vec{\rho}\cdot\vec{\rho'}]\neq 0$, 而 $(\vec{\rho}\cdot\vec{\rho'}\cdot\vec{\rho''})=0$;

則 $\vec{\rho}$ 常平行於一定平面.

證: 命 $[\rho\cdot\rho']=\vec{r}$, 則由 (1510) 與 (1310),
$$\vec{r'}=[\vec{\rho'}\cdot\vec{\rho'}]+[\vec{\rho}\cdot\vec{\rho''}]=[\vec{\rho}\cdot\vec{\rho''}].$$

又由公式 (1406), 得

$$[\vec{r}\cdot\vec{r'}]=[(\vec{\rho}\cdot\vec{\rho'})\cdot(\vec{\rho}\cdot\vec{\rho''})]=(\vec{\rho}\cdot\vec{\rho'}\cdot\vec{\rho''})\vec{\rho}-(\vec{\rho}\cdot\vec{\rho'}\cdot\vec{\rho})\vec{\rho''}$$

依假設 $(\vec{\rho}\cdot\vec{\rho'}\cdot\vec{\rho''})=0$, 由公式 (1402), 知 $(\vec{\rho}\cdot\vec{\rho'}\cdot\vec{\rho})=0$.

故 $$[\vec{r}\cdot\vec{r'}]=0.$$

由本節定理(3),知$\vec{r}$之方位一定不變.假想有定平面垂直於$\vec{r}$,則$\vec{\rho}$既垂直於$\vec{r}$,必常平行於此平面.

§52. 矢函數之幾何意義 曲線之矢方程式

設$\vec{\rho}=\overrightarrow{\varphi t}$表$\vec{\rho}$與$t$之關係.當$t$發生變化時,$\vec{\rho}$亦隨之而變.若$t$之變化爲連續的,則除在特種情形之外,$\vec{\rho}$之變化,亦爲連續的,$\vec{\rho}$之終點,即依$\varphi$之規定,劃一曲線於空間.$\vec{\rho}=\overrightarrow{\varphi t}$稱爲此曲線之矢方程式,而$\vec{\rho}$爲此曲線之徑矢.此曲線爲$\vec{\rho}$之終點之軌跡,簡稱$\vec{\rho}$之軌跡.

普通研究曲線時,取曲線上一點S_0爲曲線之原點,其他各點S,均由S_0S弧s而定.矢算因之設S_0,S之徑矢

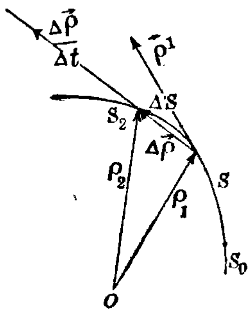


圖 80

各爲 $\vec{\rho_0}$ 與 $\vec{\rho}$, 當 S 變至 $S_2(\vec{\rho_2})$ 時, s 之增量 $\Delta s=\widehat{ss_2}$ 爲曲線之弧, $\vec{\rho}$ 之增量 $\overrightarrow{\Delta\rho}=\vec{\rho_2}-\vec{\rho}$ 爲 SS_2 間之弦, 而 $\frac{\overrightarrow{\Delta\rho}}{\Delta t}$ 之方位與之相同. 當 Δt 無限接近於零時, S_2 無限接近於 S, $\overrightarrow{\Delta\rho}$ 與 Δs 均成無限小之弦與弧, 而混合爲一. 故可於 Δs 之上, 加一箭頭, 以示

$$\overrightarrow{d\rho}=\overrightarrow{ds}. \tag{1513}$$

此時 $\frac{\overrightarrow{\Delta\rho}}{\Delta t}$ 之極限爲 $\vec{\rho}'$ 故 $\vec{\rho}'=\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}=\frac{\overrightarrow{ds}}{dt}.$ (1514)

$\vec{\rho}'$ 與曲線 $\vec{\rho}=\overrightarrow{\varphi t}$ 交於 S 及一無限接近之點, 依切線之定義, 知 $\vec{\rho}'$ 之方位, 爲 S 點之切線方位. 故曲線上一點之切線可以 $\overrightarrow{d\rho}$ 或 $\vec{\rho}'$ 表之.

以 $\vec{u}$ 表 S 之切線方位, 由 (1513) 式, 可知

$$\frac{\overrightarrow{d\rho}}{ds}=\vec{u}. \tag{1515}$$

$\vec{u}$ 與曲線上 S 附近之一點 S' 決定一平面, 稱爲 S 點之觸面. 其上一矢 $\vec{\epsilon}$ 有 $(\vec{\epsilon}\cdot\vec{u})=0$ (1516)

之關係者, 其方位與切線成垂直, 稱爲 S 點之主法線. 其單位矢通常以 $\vec{n}$ 表之.

$[\vec{u}\cdot\vec{n}]$ 表一單位矢, 垂直於觸面, 稱爲 S 點之次法線, 以

$\vec{b}$ 表之.

自 $SS'=ds$ 弧之兩端,各作其主法線,交於一點 C,稱爲 ds 弧之曲率中心. 二法線所成之無限小角,稱爲曲心角 (angle de contingence),亦即 S, S' 之切線所夾之角也. SC 稱爲曲率半徑,通常以 R 表之. SS' 至小,可以與一圓弧相混,得

$$\left.\begin{array}{ll} \text{相混,得} & ds = R\,d\alpha \ \text{或}\ \dfrac{ds}{d\alpha} = R \\ \text{合方位言之,則有} & \overrightarrow{d\rho} = \overrightarrow{ds} = \vec{u} R\,d\alpha \end{array}\right\} \qquad (1517)$$

又 $\dfrac{d\alpha}{ds} = \dfrac{1}{R}$,稱爲曲線在 S 點之曲率.

中編　幾何運用

第一章　直線 平面

§ 53. 通過原點之直線

設一直線 Δ 經過原點，平行於一矢 $\vec{\alpha}$，自原點至直線上任何點之徑矢 $\vec{\rho}$，均爲 $\vec{\alpha}$ 之倍矢，故依公式 (1102)，得

$$\vec{\rho}=\lambda\vec{\alpha} \tag{2101}$$

爲 Δ 之矢方程式. 其中之 λ，爲一變數. 當 λ 變化時，$\vec{\rho}$ 之終點，常沿一平行於 $\vec{\alpha}$ 之直線而行. 此直線有一點經過原點 $(\lambda=0)$，故 $\vec{\rho}$ 之軌跡爲一直線.

二平行直線，有共通之單位矢，故

$$\vec{\rho}_1=\vec{\alpha}_1 \tag{2102}$$

亦爲 Δ 之矢方程式.

二平行矢之矢乘積常爲零. 故 Δ 之矢方程式，又可書如

$$[\vec{\rho}\cdot\vec{\alpha}]=0. \tag{2103}$$

設空間有一點 $A(\vec{a})$, 則 $\vec{\rho}=\lambda\vec{a}$ 表一直線, 經過原點, 且與 $\vec{a}$ 平行. 今知此直線必須經過 A 點,故上述諸方程式,可認爲聯原點及空間 A 點之直線之方程式.

$\vec{a}$ 在座標系各軸上之射影 a, b, c, 爲 Δ 之示位參數. 以 x, y, z 表 $\vec{\rho}$ 之終點之座標, 則 (2101) 之轉變式爲

$$\begin{cases} x=\lambda a, \\ y=\lambda b, \\ z=\lambda c. \end{cases} \tag{1}$$

(2102) 在 x 軸上之射影式爲

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

或
$$x=\lambda a,$$

仍與 (1) 相同.

(2102) 之轉變式爲 $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix}=0.$

欲此式成立,而各行各列不同時爲零,只須第二第三兩列,互成比例

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}. \tag{2}$$

設此諸量之比爲 λ, 亦得 (1) 式. (1) 與 (2) 均爲直線 Δ 之解析方程式.

§ 54. 平行線

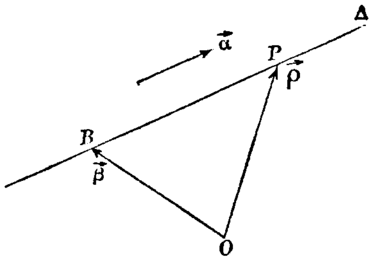


圖 81

過空間一點 $\vec{B}(\vec{\beta})$ 引一直線 Δ, 平行於一矢 $\vec{\alpha}$, 此直線之矢方程式爲

$$\vec{\rho}=\vec{\beta}+\lambda\vec{\alpha}.$$

蓋若 $P(\vec{\rho})$ 爲 Δ 上一點, $\overrightarrow{BP}$ 必平行於 $\vec{\alpha}$, 因得

$$\overrightarrow{BP}=x\vec{\alpha}.$$

但 $$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB},$$

故得 $$\vec{\rho}-\vec{\beta}=\lambda\vec{\alpha},$$

或 $$\vec{\rho}=\vec{\beta}+\lambda\vec{\alpha}, \tag{2104}$$

是爲已知其方位及一定點之直線之矢方程式.

今知 $$\overrightarrow{BP} \parallel \vec{a},$$

故 $$[\vec{\rho}-\vec{\beta}\cdot\vec{a}]=0. \tag{2105}$$

此式與 (2104) 無殊，特形式稍異耳.

今試通過空間二定點 $B(\vec{\beta})$, $B'(\vec{\beta'})$ 引 $\vec{a}$ 之平行線，此二線必互相平行. 故二平行線之通式爲

$$\begin{cases} \vec{\rho}=\vec{\beta}+\lambda\vec{a}, \\ \vec{\rho}=\vec{\beta'}+\lambda'\vec{a}; \end{cases} \tag{2106}$$

或 $$\begin{cases} [\vec{\rho}-\vec{\beta}\cdot\vec{a}]=0, \\ [\vec{\rho}-\vec{\beta'}\cdot\vec{a}]=0. \end{cases} \tag{2107}$$

今設 B 之座標爲 x_0, y_0, z_0. 則 (2104) 之轉變式爲

$$\begin{cases} x=x_0+\lambda a, \\ y=y_0+\lambda b, \\ z=z_0+\lambda c, \end{cases} \tag{1}$$

(2105) 展開爲 $$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \end{vmatrix}=0.$$

由此式得 $$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}. \tag{2}$$

(1) 與 (2) 均爲解析幾何中之基本公式.

§ 55. 經過二定點之直線

設 $A(\vec{\alpha}), B(\vec{\beta})$ 各爲空間一定點. 過此二點之直線,可認爲經過 A 點而平行於 $\overrightarrow{AB}=\vec{\beta}-\vec{\alpha}$ 之直線,故其矢方程式爲

$$\vec{\rho}=\vec{\alpha}+\lambda(\vec{\beta}-\vec{\alpha}). \tag{2108}$$

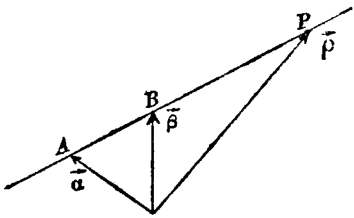


圖 82

當此中之一點與原點重合時 (例如 $\vec{\alpha}=0$), 則此式變爲 $\vec{\rho}=\lambda\vec{b}$ 與 (2101) 相同.

(2108) 又可書如 $\vec{\rho}=(1-\lambda)\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$,

因得 $$\vec{\rho}-(1-\lambda)\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta}=0.$$

同時 $$1-(1-\lambda)-\lambda=0.$$

依公式 (1210),知 A, B, P 三點在一直線,亦與此處之假設相脗合.

今設欲分 AB 爲二線段 AP, PB, 使其比爲 λ, 欲求 P 點之徑矢 $\vec{\rho}$, 可由 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$,

得
$$\vec{\rho}-\vec{\alpha}=\lambda(\vec{\beta}-\vec{\rho}).$$

故
$$\vec{\rho}=\frac{\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}}{1+\lambda}. \tag{2109}$$

當 λ 變時, $\vec{\rho}$ 亦隨之而變. 然其終點常與 A, B 共線.故其軌跡爲 A, B 二點所決定之直線. 此式與 (1211) 相同, 可爲直線 AB 之方程式.

又 $\overrightarrow{AP}\parallel\overrightarrow{AB}$, 故 $[\vec{\rho}-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-\vec{\alpha}]=0$ (2110)

與 (2103) 及 (2105) 相類. 設 A, B 之座標各爲 x_1, y_1, z_1, 與 x_2, y_2, z_2, 此式之轉變式爲

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

解析幾何學中習見之矣.

§ 56. 垂直於定線段之直線

設 $\vec{\delta}=\overrightarrow{OD}$ 爲經過原點之矢.通過 D 點所作垂直於 $\vec{\delta}$ 之線, 其數無限量. 今僅就包含 $\vec{\delta}$ 之一平面言之. 設 Δ 垂直於 $\vec{\delta}$, 且通過 D 點, Δ 上一點 $P(\vec{\rho})$ 必適合下式:

$$\overrightarrow{OD}\perp\overrightarrow{DP}.$$

但 $\overrightarrow{DP}=\vec{\rho}-\vec{\delta}$, 故得 $(\vec{\delta}\cdot\vec{\rho}-\delta)=0$,

或
$$(\vec{\delta}\cdot\vec{\rho})=\delta^2=c. \tag{2111}$$

此間假設 $\vec{\delta}$ 及 $\vec{\rho}$ 常在同一平面上. 上式之轉變式可爲一二元方程式. 設 $\vec{\delta}$ 之射影爲 a, b; $\vec{\rho}$ 之終點之軌跡爲 x, y; 得

$$ax+by=c.$$

爲平面幾何中之直線方程式.

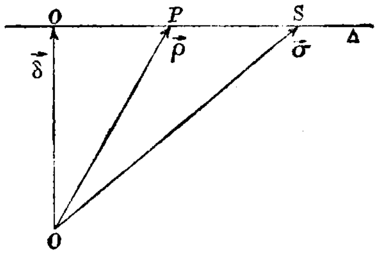


圖 83

又 $\vec{\delta}$, $\vec{\rho}$, $\vec{\rho}-\vec{\delta}$ 均在一平面上, 可知

$$(\vec{\delta}\cdot\vec{\rho}\cdot\vec{\rho}-\vec{\delta})=0,$$

或
$$([\vec{\delta}\cdot\vec{\rho}]\cdot\vec{\rho}-\vec{\delta})=0.$$

此式表明 $\vec{\rho}-\vec{\delta}$ 垂直於 $[\vec{\delta}\cdot\vec{\rho}]$. 但依假設 $\vec{\rho}-\vec{\delta}$ 亦垂直於 $\vec{\delta}$, 故 $\vec{\rho}-\vec{\delta}$ 當垂直於 $\vec{\delta}$ 與 $[\vec{\delta}\cdot\vec{\rho}]$ 之矢乘積, 即 $(\vec{\delta}\cdot[\vec{\delta}\cdot\vec{\rho}])$.

今設 $S(\vec{\sigma})$ 爲空間一點, 自此作直線垂直於 $\vec{\delta}$, 其方程式當爲 (1304)

$$\vec{\rho}=\vec{\sigma}+\lambda(\vec{\delta}\cdot[\vec{\delta}\cdot\vec{\rho}]). \qquad (2112)$$

若 S 與原點重合, 則得 $\vec{\rho}=\lambda(\vec{\delta}\cdot[\vec{\delta}\cdot\vec{\rho}])$.

設 S 之座標爲 x_0, y_0, z_0, $\vec{\delta}$ 之射影爲 a, b, c. (2112) 之

轉變式爲

$$x=x_0+\lambda\{a(ax+by+cz)-x(a^2+b^2+c^2)\},$$

$$y=y_0+\lambda\{b(ax+by+cz)-y(a^2+b^2+c^2)\},$$

$$z=z_0+\lambda\{c(ax+by+cz)-z(a^2+b^2+c^2)\}.$$

於此三式中消 λ, 得 $\dfrac{cy-bz}{cy_0-bz_0}=\dfrac{az-cx}{az_0-cx_0}=\dfrac{bx-ay}{bx_0-ay_0}$

此式用解析法求之, 當不簡單.

§ 57　點至直線之垂線足

今有一直線 Δ, 其矢方程式爲 $\vec{\rho}=\vec{\beta}+\lambda\vec{\alpha}$.

自一點 $S(\vec{\sigma})$ 至 Δ 之垂線足爲 $D(\vec{\rho})$, 令 $\overrightarrow{SD}=\vec{\delta}$, 則

$$\vec{\delta}=\vec{\rho}-\vec{\sigma}.$$

依假設, $\overrightarrow{SD}\perp\overrightarrow{BD}$, 故 $(\vec{\rho}-\vec{\sigma}\cdot\vec{\alpha})=0$.

$\vec{\rho}$ 之終點在 Δ 上, 故 $\vec{\rho}=\vec{\beta}+\lambda\vec{\alpha}$ 能適合上式而得

$$(\vec{\beta}+\lambda\vec{\alpha}-\vec{\sigma}\cdot\vec{\alpha})=0.$$

解之,得 $\lambda=\dfrac{(\vec{\sigma}-\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha})}{\alpha^2}$

故 S 至 Δ 之垂線足之徑矢爲

$$\vec{\rho}=\vec{\beta}+\lambda\vec{\alpha}=\vec{\beta}+\frac{(\vec{\sigma}-\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha})}{\alpha^2}\vec{\alpha}.$$

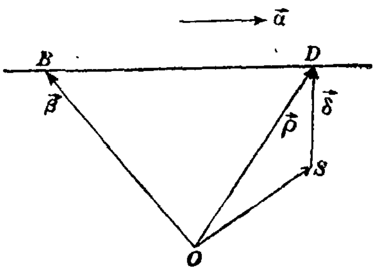


圖 84

或
$$\vec{\rho}=\vec{\beta}+(\vec{\sigma}-\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha})\vec{\alpha}^{-1}. \tag{2113}$$

設 Δ 之方程式爲 $\begin{cases} x=x_0+\lambda a, \\ y=y_0+\lambda b, \\ z=z_0+\lambda c. \end{cases}$

S 之座標爲 x' y', z', 垂線足之座標當爲 (2113) 之轉變式:

$$D\begin{cases} x=x_0+\{a(x'-x_0)+b(y'-y_0)+c(z'-z_0)\}\dfrac{a}{a^2+b^2+c^2}, \\ y=y_0+\{a(x'-x_0)+b(y'-y_0)+c(z'-z_0)\}\dfrac{b}{a^2+b^2+c^2}, \\ z=z_0+\{a(x'-x_0)+b(y'-y_0)+c(z'-z_0)\}\dfrac{c}{a^2+b^2+c^2}. \end{cases}$$

§ 58 點至直線之距離

依前節之記法, S 至 Δ 之距離, 爲 $\vec{\delta}$ 之數値 δ.

於 Δ 上作一矢 $\overrightarrow{\omega A}$ 令其與 $\vec{\alpha}$ 同質. 三角形 $S\omega A$ 之面

積，適爲其底邊 $\overline{\omega A}$ 與高 SD 之乘積之半，

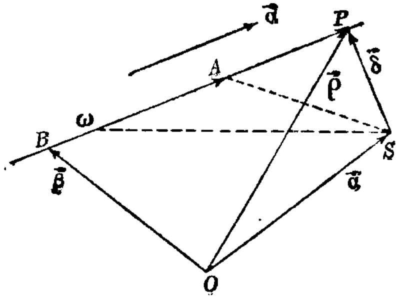


圖 85

故
$$\delta=\frac{2\text{ 面 }A\omega S}{\overline{\omega A}};$$

或
$$\delta=\frac{|[\vec{a}\cdot\vec{\delta}]|}{a}=|[\vec{a}_1\cdot\vec{\rho}-\vec{\sigma}]|.$$

但
$$\vec{\rho}-\vec{\sigma}=\vec{\beta}+\vec{a}^{-1}(\vec{a}\cdot\vec{\sigma}-\vec{\beta})-\vec{\sigma}.$$

注意 $[\vec{a}_1\cdot\vec{a}^{-1}]=0$，得

$$\delta=|[\vec{a}_1\cdot\vec{\beta}-\vec{\sigma}]|. \tag{2114}$$

此式外形，雖屬簡單，然在解析幾何中，實爲一至繁之式．

試依上節記法，將此式展開，卽得

$$\delta=\frac{\sqrt{\{c(y'-y_0)-b(z'-z_0)\}^2+\{a(z'-z_0)-c(x'-x_0)\}^2+\{b(x'-x_0)-a(y'-y_0)\}^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

若 c 點與原點重合，則 $\vec{\sigma}=0$，因 D 在 Δ 上，故

$$\vec{\delta}=\vec{\beta}+\lambda\vec{\alpha}.$$

以 $\vec{\delta}$ 數乘此式，注意 $(\vec{\delta}\cdot\vec{\alpha})=0$，得 $\delta^2=(\vec{\beta}\cdot\vec{\delta})$，

或
$$\delta=(\vec{\beta}\cdot\vec{\delta_1}). \tag{2115}$$

此式至爲顯明，僅表示 $\overrightarrow{OD}$ 爲 $\overrightarrow{OB}$ 之正射影而已，

§ 59. 分角線

有 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 二同原矢於空間，作其單位矢之和 $\vec{\alpha_1}+\vec{\beta_1}=\overrightarrow{OC}$

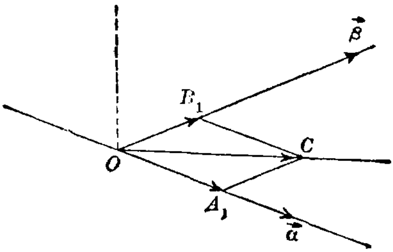


圖 86

(圖 86)．當行此加法時，所作之平行四邊形 OA_1CB_1 中，$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$，此平行四邊形爲一菱形．依菱形之幾何性質，知 $\overrightarrow{OC}$ 將 AOB 角分爲二等分．故 AOB 角之內分角線之矢方程式爲

$$\vec{\rho}=\lambda(\vec{\alpha_1}+\vec{\beta_1}).$$

同時　$$\vec{\rho'}=\lambda'(\vec{\alpha_1}-\vec{\beta_1})^*;\tag{2116}$$

則爲 $\angle AOB$ 之外分角線.

由恆等式 $$(\vec{\rho}\cdot\vec{\rho'})=\lambda\lambda'(\vec{\alpha_1}+\vec{\beta_1}\cdot\vec{\alpha_1}-\vec{\beta_1})$$
$$=\lambda\lambda'\{(\vec{\alpha_1}\cdot\vec{\alpha_1})-(\vec{\beta_1}\cdot\vec{\beta_1})\},$$

或 $$\vec{\rho}\cdot\vec{\rho'}=\lambda\lambda'(1-1)=0;$$

可知 $\vec{\rho}\perp\vec{\rho'}$, 表示角之內外分角線, 互成垂直.

分角線最顯著之一性質, 可由其矢式求出. 茲試僅取內分角線證之:

設 $P(\rho)$ 爲分角線上一點, 得 $\vec{\rho}=\lambda(\vec{\alpha_1}+\vec{\beta_1})$.

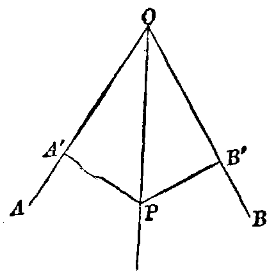


圖　87

以 $\vec{\alpha_1}$, $\vec{\beta_1}$ 分別矢乘之, 得

$$[\vec{\rho}\cdot\vec{\alpha_1}]=\lambda\{[\vec{\alpha_1}\cdot\vec{\alpha_1}]+[\vec{\beta_1}\cdot\vec{\alpha_1}]\}=\lambda[\vec{\beta_1}\cdot\vec{\alpha_1}],$$
$$[\vec{\rho}\cdot\vec{\beta_1}]=\qquad\qquad\lambda[\vec{\alpha_1}\cdot\vec{\beta_1}].$$

* 此處之 $\vec{\rho'}$, λ' 幷非徵係數.

此中 $[\vec{\rho}\cdot\vec{\alpha_1}]$ 與 $[\vec{\rho}\cdot\vec{\beta_1}]$ 之數值,各爲 P 至 OA 與 OB 之距離.故若僅就長度言之,自對角線上一點至角之兩邊之距離相等.

若以 $\vec{\alpha_1},\vec{\beta_1}$ 分別數乘 $\vec{\rho}=\lambda(\vec{\alpha_1}+\vec{\beta_1})$,

則得
$$(\vec{\rho}\cdot\vec{\alpha_1})=\lambda\{1+(\vec{\alpha_1}\cdot\vec{\beta_1})\},$$
$$(\vec{\rho}\cdot\vec{\beta_1})=\lambda\{(\vec{\alpha_1}\cdot\vec{\beta_1})+1\}.$$

故
$$(\vec{\rho}\cdot\vec{\alpha_1})=(\vec{\rho}\cdot\vec{\beta_1}),$$

表明分角線之線段,至角之兩邊之正射影相等.

§60 由方位所決定之平面

1. 先設平面 π 通過原點,而垂直於一矢 $\vec{\delta}$,如是自原

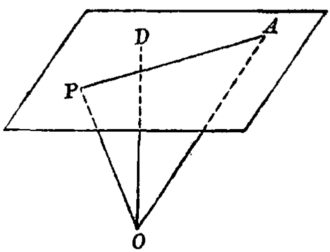


圖 88

點至平面上任一點之矢 $\vec{\rho}$,均垂直於 $\vec{\delta}$,故
$$(\vec{\delta}\cdot\vec{\rho})=0$$
爲此平面之方程式.

2. 茲設平面 π 經過一點 $D(\vec{\delta})$, 且與 $\vec{\delta}$ 垂直,聯 D 與 π 上任一點 $P(\vec{\rho})$ 之線段, 均與 $\vec{\delta}$ 成正交, 故

$$(\vec{\delta}\cdot\overrightarrow{DP})=0,$$

或
$$(\vec{\delta}\cdot\vec{\rho}-\vec{\delta})=0.$$

又可得
$$(\vec{\delta}\cdot\vec{\rho})=\delta^2=d\ (\text{常數}). \tag{2117}$$

此式與 (2111) 相同, 但在彼處, $\vec{\rho}$ 常被限制在一定平面上,故不若此處之普遍運用時,若非不得已, 不必以 (2111) 爲直線之矢方程式.

3. 設一平面經過 $A(\vec{\alpha})$ 點, 且垂直於 $\vec{\delta}$, 則聯 A 與平面上 $P(\vec{\rho})$ 點之矢, 當垂直於 $\vec{\delta}$, 故得此平面之方程式

$$(\vec{\delta}\cdot\vec{\rho}-\vec{\alpha})=0,$$

或
$$(\vec{\delta}\cdot\vec{\rho})=(\vec{\delta}\cdot\vec{\alpha})=d'\ (\text{常數}).$$

設 $\vec{\delta}$ 之射影爲 a, b, c, (2117) 與上式之轉變式, 均有下述之形式
$$ax+by+cz=d.$$
解析幾何之基本公式也.

§ 61　點至平面之距離

有一平面 $\vec{\pi}$, 其方程式爲 $(\vec{\delta}\cdot\vec{\rho})=d$.

先就特種情形研究之, 而求原點至此平面之距離.

原點至 π 之垂線，爲 $\vec{\delta}$ 之倍矢，故 $\vec{\rho}=x\vec{\delta}$.

故得
$$(\vec{\delta}\cdot x\vec{\delta})=d,$$

或
$$x\delta^2=d.$$

原點至 π 之距離爲 $\rho=x\delta=\frac{d}{\delta}$.

今有 $(\vec{\delta}\cdot\vec{\rho}-\vec{\alpha})=0$，表通過 $A(\vec{\alpha})$ 且垂直於 $\vec{\delta}$ 之平面.欲求一點 $M(\vec{\mu})$ 至此面之距離，可先寫出自 M 至平面之垂線方程式.此式爲 $\vec{\rho}=\vec{\mu}+x\vec{\delta}.$

以 $\vec{\delta}$ 數乘此式，得 $(\vec{\rho}\cdot\vec{\delta})=(\vec{\mu}\,\vec{\delta})+x\delta^2.$

由平面之方程式，得 $(\vec{\delta}\cdot\vec{a})=(\vec{\delta}\cdot\vec{\mu})+x\delta^2.$

故 M 至 π 之距離爲 $x\delta=\dfrac{(\vec{\delta}\cdot\vec{a})-(\vec{\delta}\cdot\vec{\mu})}{\delta}=(\vec{\delta_1}\cdot\vec{a}-\vec{\mu}).$

設 π 之解析方程式爲

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

M 之座標爲 x', y', z'. h 爲 M 至 π 之距離，則得

$$h=\frac{a(x_0-x')+b(y_0-y')+c(z_0-z')}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

若給 π 之方程式爲 $(\vec{\delta}\cdot\vec{\rho})=d$，可注意 $(\vec{\delta}\cdot\vec{a})=d$，而得

$$h=\frac{ax_0+by_0+cz_0-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

§ 62. 經過三點之平面

$A(\vec{\alpha})$, $B(\vec{\beta})$ $C(\vec{\gamma})$ 三點, 決定一平面 π. 設 $P(\vec{\rho})$ 爲 π 上一任意點, 則 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CB}$ 諸矢, 均在同一平面上. 依 § 38, 得

$$(\vec{\rho}-\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}-\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}-\vec{\gamma})=0. \tag{2118}$$

解之, 得

$$(\vec{\rho}\cdot\{[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}]+[\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}]+[\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}]\})=(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}) \tag{2118'}$$

爲 π 之矢方程式. 此式可化爲比較對稱之形:

$$(\vec{\rho}\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})-(\vec{\gamma}\cdot\vec{\rho}\cdot\vec{\alpha})+(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}\cdot\vec{\rho})-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})=0.$$

此式可視爲 A, B, C, P 四點共面之條件.

$[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}]+[\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}]+[\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}]$ 爲垂直於平面 π 之矢, 故自原點至 π 之距離爲

$$\frac{(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})}{|[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}]+[\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}]+[\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}]|}. \tag{2119}$$

設 A, B, C 三點之座標各爲 x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2, 與 x_3, y_3, z_3. 此三點所定之平面, 其方程式爲 (2118) 之轉變式: 即

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix}=0.$$

至於 (2119) 式之轉變式,并無運用方面之必要,讀者試展開之,即知其麻煩之程度也.

§ 63　二平面之交線

1　設二平面 π,π' 之方程式各爲

$$(\vec{\delta}\cdot\vec{\rho})=d,\quad(\vec{\delta'}\cdot\vec{\rho})=d'.$$

可得

$$\frac{(\vec{\delta}\cdot\vec{\rho})}{d}=\frac{(\vec{\delta'}\cdot\vec{\rho})}{d'}.$$

或

$$(\vec{\rho}\cdot d'\vec{\delta}-d\vec{\delta'})=0. \tag{1}$$

此式表一平面 Q, 經過原點, 而垂直於 $d'\vec{\delta}-d\vec{\delta'}$. 當 $(\vec{\delta}\cdot\vec{\rho})=d$ 時,若 (1) 成立,必有 $(\vec{\delta'}\cdot\vec{\rho})=d'$, 其逆亦真.此示 Q 通過 π,π' 之交線.

茲欲尋求此交線之方程式, 先宜注意此直線同時在二平面上, 故同時垂直於 $\vec{\delta}$ 與 $\vec{\delta'}$, 而其方程式爲

$$\vec{\rho}=\vec{r}+\lambda[\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'}].$$

此中 $\vec{r}$ 之終點,可爲交線任一點.但爲便利起見,特假定其爲交線與 $\vec{\delta},\vec{\delta'}$ 平面之交點. 換言之, 即假定 $\vec{r}$ 在 $\vec{\delta}$ 與 $\vec{\delta'}$ 所決定之平面上. 如是則

$$\vec{\rho}=m\vec{\delta}+n\vec{\delta'}+\lambda[\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'}]. \tag{2}$$

其中之 m 與 n 均爲尙待決定之係數.

以 $\vec{\delta}, \vec{\delta'}$ 分别數乘上式, 注意公式 (1402), 得

$$\begin{cases} (\vec{\delta}\cdot\vec{\rho}) = m\delta^2 + n(\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'}) = d, \\ (\vec{\delta'}\cdot\vec{\rho}) = m(\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'}) + n\delta'^2 = d'. \end{cases}$$

解此聯立方程式, 得

$$m = \frac{d\delta'^2 - d'(\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'})}{\delta^2\delta'^2(1-\cos^2\widehat{\delta,\delta'})} = \frac{d\delta'^2 - d'(\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'})}{\delta^2\delta'^2\sin^2\widehat{\delta,\delta'}}.$$

或
$$m = \frac{d\delta'^2 - d'(\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'})}{|[\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'}]|^2}.$$

同樣
$$n = \frac{d'\delta^2 - d(\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'})}{|[\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'}]|^2}.$$

m 與 n 旣經決定, 代入 (2) 式, 得

$$\vec{\rho} = \frac{d\delta'^2 - d'(\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'})}{|[\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'}]|^2} + \frac{d'\delta^2 - d(\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'})}{|[\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'}]|^2} + \lambda[\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'}].$$

若二平面均過原點, 則因 $[\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'}]$ 在兩面之交線上, 故此交線之方程式爲
$$\vec{\rho} = \lambda[\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'}].$$

2.　設二平面 π, π' 之方程式爲

$$(\vec{\delta}\cdot\vec{\rho} - \vec{\alpha}) = 0, \tag{3}$$

$$(\vec{\delta'}\cdot\vec{\rho} - \vec{\alpha'}) = 0. \tag{4}$$

交線上任一點之徑矢 $\vec{\rho}$, 必須適合 (3), (4) 二式 此矢可分解爲三矢 令各平行於 $\vec{\delta}$, $\vec{\delta'}$, $[\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'}]$. 依公式 (1409), 得

$$\vec{\rho}(\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'}\cdot[\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'}]) = (\vec{\rho}\cdot\vec{\delta})(\vec{\delta'}\cdot[\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'}])$$

$$+(\vec{\rho}\cdot\vec{\delta'})([\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'}]\cdot\vec{\delta})+(\vec{\rho}\cdot[\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'}])[\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'}]. \qquad (5)$$

由 (3) 與 (4), 得 $(\vec{\rho}\cdot\vec{\delta})=(\vec{\delta}\cdot\vec{\alpha}),\ (\vec{\rho}\cdot\vec{\delta'})=(\vec{\delta'}\cdot\vec{\alpha'})$.

代入 (5) 式, 得

$$\vec{\rho}([\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'}])^2=(\vec{\delta}\cdot\vec{\alpha})(\vec{\delta'}\cdot[\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'}])+(\vec{\delta'}\cdot\vec{\alpha'})([\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'}]\cdot\vec{\delta})$$

$$+(\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'}\cdot\vec{\rho})[\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'}].$$

此中 $(\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'}\cdot\vec{\rho})$ 爲不定量 令之爲 $\lambda([\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'}])^2$, 得

$$\vec{\rho}=\frac{(\vec{\delta}\cdot\vec{\alpha})}{([\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'}])}(\vec{\delta'}\cdot[\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'}])+\frac{(\vec{\delta'}\cdot\vec{\alpha'})}{([\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'}])}([\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'}]\cdot\vec{\delta})+\lambda[\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'}]$$

爲所求交線之矢方程式 若兩平面均過原點, 則 $\vec{\alpha}=0$, $\vec{\alpha'}=0$, 仍得

$$\vec{\rho}=\lambda[\vec{\delta}\cdot\vec{\delta'}].$$

§64 運用雜例

1. 三角形中,一角之內分角線,分對邊爲二線段,與兩鄰邊成比例.

設三角形 ABC 之三邊, 各爲

$$\vec{a}=\overrightarrow{BC},\ \vec{b}=\overrightarrow{CA},\ \vec{c}=\overrightarrow{AB}.$$

$\angle A$ 之分角線之方程式爲 $\qquad \vec{\rho}=x[\vec{c}_1-\vec{b}_1]. \qquad (1)$

此線交 BC 於 A', 其矢座標爲

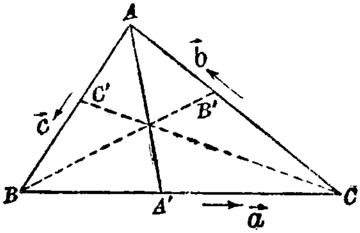


圖 89

$$\vec{a'}=\vec{c}+\overrightarrow{BA'}=\vec{c}+y\vec{a}=\vec{c}-y(\vec{c}+\vec{b}), \qquad (2)$$

或 $$\vec{a'}=-\vec{b}+\overrightarrow{CA'}=-\vec{b}+z(\vec{c}+\vec{b}). \qquad (3)$$

A' 又適合於 (1), 故由 (1) 與 (2)

$$\vec{c}-y(\vec{c}+\vec{b})=x(\vec{c}_1-\vec{b}_1)=\frac{x}{bc}\{b\vec{c}-c\vec{b}\}. \qquad (4)$$

今以 $b\vec{c}-c\vec{b}$ 與上式作矢乘, 得:

$$[\vec{c}\cdot b\vec{c}-c\vec{b}]-y[\vec{c}+\vec{b}\cdot b\vec{c}-c\vec{b}]=0,$$

或 $$c[\vec{b}\cdot\vec{c}]-y\{b[\vec{b}\cdot\vec{c}]+c[\vec{b}\cdot\vec{c}]\}=0.$$

故 $$y=\frac{c}{b+c}.$$

而 $$\overrightarrow{BA}=\frac{c}{b+c}\vec{a}=\frac{ca'}{b+c}\vec{a}_1,$$

得
$$\overrightarrow{BA'}=\frac{ca}{b+c}.$$

同樣,用 (3) 與 (1), 得 $\overrightarrow{A'C}=\frac{ba}{b+c}.$

故得
$$\frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}}=\frac{c}{b}.$$

2. 三角形之內分角線,會於一點.

記法如前例, $\angle B$ 與 $\angle C$ 之內分角線之方程式各爲

$$\vec{\rho}=\vec{c}+y(\vec{a_1}-\vec{c_1}),$$
$$\vec{\rho}=-\vec{b}+z(\vec{b_1}-\vec{a_1}).$$

此二線之交點之徑矢,必同時適合上二式,故

$$\vec{c}+y(\vec{a_1}-\vec{c_1})=-\vec{b}+z(\vec{b_1}-\vec{a_1}).$$

以 $\vec{a_1}=\frac{\vec{a}}{a}$, $\vec{b_1}=\frac{\vec{b}}{b}$, $\vec{c_1}=\frac{\vec{c}}{c}$. 代入,得

$$\frac{z}{b}\vec{b}+\frac{y}{c}\vec{c}-\frac{y+z}{a}\vec{a}-(\vec{b}+\vec{c})=0.$$

但
$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0, \tag{1}$$

故得
$$\frac{z}{b}\vec{b}+\frac{y}{c}\vec{c}+\left(1-\frac{y+z}{a}\right)\vec{a}=0.$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 間,僅有之關係爲 (1),故欲此式成立,必需

$$\frac{z}{b}=\frac{y}{c}=1-\frac{y+z}{a}.$$

解之，得　$$y=\frac{ac}{a+b+c},\quad z=\frac{bc}{a+b+c}.$$

故知 B, C 之分角線交點之徑矢為

$$\vec{\rho}=\vec{c}+y(\vec{a_1}-\vec{c_1})=\vec{c}+\frac{ac}{a+b+c}(\vec{a_1}-\vec{c_1}),$$

或　$$\vec{\rho}=c\vec{c_1}-\frac{ac}{a+b+c}\vec{c_1}+\frac{c}{a+b+c}\vec{a}.$$

但 $\vec{a}=-(\vec{b}+\vec{c})=-(b\vec{b_1}+c\vec{c_1})$. 代入上式簡之，得

$$\vec{\rho}=\frac{bc}{a+b+c}(\vec{c_1}-\vec{b_1}).$$

與前題之 (1) 相較，知此點在 A 之分角線上，由是知三內分角線會於一點.

別證：　設 B', C' 為 $\angle B, \angle C$ 之分角線，各與其對邊之交點，由前題所得　$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}}=\frac{c}{b}.$$

用文字輪換法，推得　$$\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}}=\frac{a}{c},\quad \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}}=\frac{b}{a}.$$

此三式兩邊相乘，得　$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}}\cdot\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}}=1.$$

此式合於蛇蛙定律，故 AA', BB', CC' 三線會於一點(§18).

3. $\vec{\beta}, \vec{\gamma}$ 二矢之座標交於 $A(\vec{a})$. 其示位餘弦各為 X,

Y, Z, 與 X', Y', Z'. A 之座標爲 x_0, y_0, z_0. 求經過 A 點垂直於 $\vec{b}, \vec{c}$ 之直線之方程式.

解: 此直線之方位爲 $[\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}]$, 故由 (2104), 知其矢方程式爲

$$\vec{\rho}=\vec{\alpha}+\lambda[\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}].$$

將此式投射於座標軸上, 得直線之方程式

$$x=x_0+\lambda\{YZ'-Y'Z\},$$

$$y=y_0+\lambda\{ZX'-Z'X\},$$

$$z=z_0+\lambda\{XY'-X'Y\}.$$

又由 $$(\vec{\rho}-\vec{\alpha}\cdot[\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}])=0.$$

倣 (2105) 之形式展開之, 得

$$\frac{x-x_0}{YZ'-Y'Z}=\frac{y-y_0}{ZX'-Z'X}=\frac{z-z_0}{XY'-X'Y}.$$

4. $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 爲 A, B 二點之徑矢, $(\vec{\delta}\cdot\vec{\rho})=d$ 爲一平面 π 之方程式. 求一矢方程, 令表平面經過 A, B, 且垂直於 π.

解: 設 $P(\vec{\rho})$ 爲所求平面上一點, 則 $\vec{\rho}-\vec{\alpha}, \vec{\alpha}-\vec{\beta}$ 均在其上, 今知 $\vec{\delta}$ 垂直於 π, 可假所求平面由三矢 $\vec{\rho}-\vec{\alpha}, \vec{\alpha}-\vec{\beta}$ 與 $\vec{\delta}$ 所決定, 得

$$(\vec{\rho}-\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}-\vec{\beta}\cdot\vec{\delta})=0,$$

或 $$(\vec{\rho}\cdot\vec{\alpha}-\vec{\beta}\cdot\vec{\delta})+(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\delta})=0. \tag{1}$$

設 A, B 二點之座標爲 x_1, y_1, z_1 與 x_2, y_2, z_2. π 之方程式爲
$$ax+by+cz=d.$$
所求平面之解析方程式爲 (1) 之轉變式, 得
$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

5. 平面 π 經過 $C(\vec{\gamma})$ 點, 且平行於二直線
$$\vec{\rho}=\vec{\beta}+\lambda\vec{\alpha}, \qquad \vec{\rho'}=\vec{\beta'}+\lambda'\vec{\alpha'},$$
求其方程式.

解: 設 $P(\vec{\rho})$ 爲此平面上一點,則 $\vec{\rho}-\vec{\gamma}$ 與 $\vec{\alpha}, \vec{\alpha'}$ 均平行於此面, 故得
$$(\vec{\rho}-\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha'})=0$$
爲此平面之方程式. 設 $\vec{\gamma}$ 等於 $\vec{\alpha}$ 或 $\vec{\alpha'}$, 則本題可認爲已知一點及一直線, 欲求其所決定之平面. 若 $\vec{\gamma}$ 不定時, (1) 式即爲平行於二直線之一切平面之通式.

若二直線之方程式各爲
$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}, \quad \frac{x-x_0'}{a'}=\frac{y-y_0'}{b'}=\frac{z-z_0'}{c'}.$$
C 之座標爲 x', y', z', 則 (1) 之轉變式爲

$$\begin{vmatrix} x-x' & y-y' & z-z' \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ x_0' & y_0' & z_0' \end{vmatrix}=0.$$

又經過 C 點,所作平行於 $\vec{a}$, $\vec{a}'$ 之平面,由上編第二章諸定律,可知其方程式爲

$$\vec{\rho}=\vec{\gamma}+\lambda\vec{\alpha}+\lambda'\vec{a}'.$$

6. 平面 π 經過二平行線

$$\vec{\rho}=\vec{\beta}+\lambda\vec{a},\qquad \vec{\rho}=\vec{\beta}'+\lambda'\vec{a}',$$

求其方程式.

解: π 經過 $\vec{\beta}$ 與 $\vec{\beta}'$ 之終點,且平行於 $\vec{\alpha}$,故其方程式爲(見例 4)

$$(\vec{\rho}-\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}-\vec{\beta}'\cdot\vec{\alpha})=0.$$

7. 通過定直線 $\vec{\rho}=\vec{\beta}+\lambda\vec{a}$,作一平面,與 $(\vec{\delta}\cdot\vec{\rho})=0$ 垂直.求其矢方程式.

解: 此平面可視爲通過 $\vec{\beta}$ 之終點,且平行於 $\vec{\alpha}$ 與 $\vec{\delta}$,故其方程式爲(見例 5)

$$(\vec{\rho}-\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta})=0.$$

8. 作一直線,經過一定點,且與不同平面之二直線相截.

取定點爲原點,二直線 Δ, Δ' 之方程式各爲

$$\vec{\rho}=\vec{\beta}+\lambda\vec{\alpha}, \tag{1}$$

$$\vec{\rho}=\vec{\beta'}+\lambda'\vec{\alpha'}. \tag{2}$$

作一平面 π 經過原點及 Δ, 此平面上任意點之徑矢 $\vec{\rho}$ 與 $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ 共面, 故其方程式爲

$$(\vec{\rho}\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})=0. \tag{3}$$

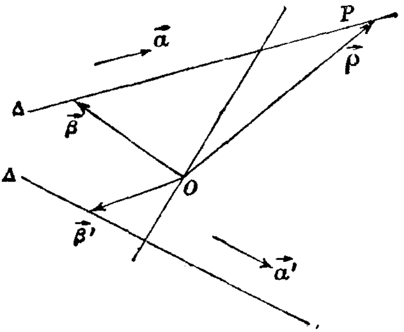


圖 90

此面與 Δ' 相截於一點 P, 其徑矢常同時適合於 (2) 與 (3),

故 $$(\vec{\beta'}+\lambda'\vec{\alpha'}\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})=0.$$

得 $$\lambda'=-\frac{(\vec{\beta'}\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})}{(\vec{\alpha'}\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})}.$$

故知 π 與 Δ' 之交點之徑矢爲 $$\vec{\beta'}-\frac{(\vec{\beta'}\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})}{(\vec{\alpha'}\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})}\vec{\alpha'}.$$

連 P 與原點之直線, 全在 π 上, 故必與 Δ 相遇, 此直線即

爲所求之直線，其方程式爲

$$\vec{\rho}=\lambda\left\{\vec{\beta'}-\frac{(\vec{\beta'}\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})}{(\vec{\alpha'}\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})}\vec{\alpha'}\right\}.$$

因對稱之故，亦得
$$\vec{\rho}=\lambda'\left\{\vec{\beta}-\frac{(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha'}\cdot\vec{\beta'})}{(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}\ \ \vec{\beta'})}\vec{\alpha}\right\}.$$

9. 給與不同平面二直線 Δ, Δ'，其方程式各爲

$$\vec{\rho}=\vec{\beta}+\lambda\vec{\alpha}, \tag{1}$$

$$\vec{\rho}=\vec{\beta'}+\lambda'\vec{\alpha'}. \tag{2}$$

求作一直線，與之相截，且平行於一定方位 $\vec{\gamma}$.

經過直線 Δ，作一平面 π，平行於 $\vec{\gamma}$. 已知 π 上一點（$\vec{\beta}$ 之終點），并知其平行於 $\vec{\alpha}$, $\vec{\gamma}$，故其方程式爲

$$([\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}]\cdot\vec{\rho}-\vec{\beta})=0,$$

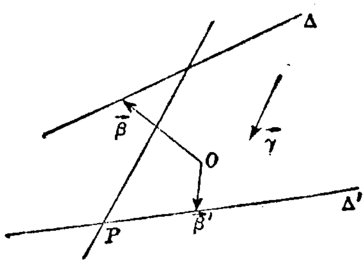


圖　91

或
$$(\vec{\rho}\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})=(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}) \tag{3}$$

π 與 Δ' 交於 P, 其徑矢同時適合 (2) 與 (3), 故

$$(\vec{\beta}'+\lambda'\vec{\alpha}'\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})=(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}).$$

得　$$\lambda'=\frac{(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})-(\vec{\beta}'\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})}{(\vec{\alpha}'\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})}=\frac{(\vec{\beta}-\vec{\beta}'\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})}{(\vec{\alpha}'\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})}.$$

故　$$\overrightarrow{OP}=\vec{\beta}'+\frac{(\vec{\beta}-\vec{\beta}'\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})}{(\vec{\alpha}'\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})}\vec{\alpha}'.$$

過 P 點引直線與 $\vec{\gamma}$ 平行, 此直線全在 π 上, 故必與 Δ 相交, 而爲所尋求之直線, 其方程式爲

$$\vec{\rho}=\vec{\beta}'+\frac{(\vec{\beta}-\vec{\beta}'\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})}{(\vec{\alpha}'\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})}\vec{\alpha}'+\lambda\vec{\gamma}.$$

因對稱之故, 亦可得

$$\vec{\rho}=\vec{\beta}+\frac{(\vec{\beta}'-\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}'\cdot\vec{\gamma})}{(\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}'\cdot\vec{\gamma})}\vec{\alpha}+\lambda'\vec{\gamma}.$$

10. 空間二直線之公垂線之長.

設二直線之方程式爲　$\vec{\rho}=\vec{\beta}+\lambda\vec{\alpha},$

$$\vec{\rho}'=\vec{\beta}'+\lambda'\vec{\alpha}'.$$

$\vec{\nu}$ 爲自公垂線之一端至他端之矢, 二直線之公垂線方位爲 $[\vec{\alpha}\ \vec{\alpha}']$, $\vec{\nu}$ 爲 $[\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}']$ 之倍矢, 故

$$\vec{\nu}=x[\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}'].$$

但　$$\vec{\nu}=\vec{\rho}-\vec{\rho}'=\vec{\beta}-\vec{\beta}'+\lambda\vec{\alpha}-\lambda'\vec{\alpha}'.$$

故 $$(\vec{\nu}\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha'})=(\vec{\beta}-\vec{\beta'}\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha'}),$$

或 $$x([\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha'}])^2=(\vec{\beta}-\vec{\beta'}\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha'}).$$

由此式得 x 之值，故知

$$\vec{\nu}=\frac{(\vec{\beta}-\vec{\beta'}\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha'})}{([\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha'}])^2}[\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}].$$

而 $$\nu=\frac{(\vec{\beta}-\vec{\beta'}\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha'})}{([\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha'}])}. \tag{1}$$

設二直線之方程式爲 $$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c},$$

$$\frac{x-x_0'}{a'}=\frac{y-y_0'}{b'}=\frac{z-z_0'}{c'}.$$

(1) 之轉變式當爲

$$\nu=\frac{\begin{vmatrix} x_0-x_0' & y_0-y_0' & z_0-z_0' \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}}{\sqrt{(bc'-b'c)^2+(ca'-c'a)^2+(ab'-a'b)^2}}.$$

11 一平面 π 之方位既定，試決定其至原點之距離，使其通過已知三平面之交點.

設 $\vec{\delta}$ 決定 π 之垂直方位，已知三平面之方程式爲

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{\rho})=a,\quad (\vec{\beta}\cdot\vec{\rho})=b,\quad (\vec{\gamma}\cdot\vec{\rho})=c.$$

又設 π 之方程式爲　$(\vec{\delta}\cdot\vec{\rho})=x.$

x 之值并非任意. 必須使此方程式中,有一 $\vec{\rho}$ 之值,能適合四列四平面之方程式.

四矢 $\vec{\rho},\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 之關係, 可以公式 (1409) 聯之, 得

$$\vec{\rho}(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})=[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}](\vec{\gamma}\cdot\vec{\rho})+[\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}](\vec{\alpha}\cdot\vec{\rho})+[\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}](\vec{\beta}\cdot\vec{\rho})$$

$$=c[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}]+a[\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}]+b[\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}].$$

以 $\vec{\delta}$ 與上式作數乘, 得

$$x(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})=c(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\delta})+a(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta})+b(\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta}).$$

此式決定 x 之值. π 至原點之距離應爲

$$\frac{x}{\delta}=\frac{c(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\delta})+a(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta})+b(\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta})}{\delta(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})}.$$

12. 作一平面 π, 使過原點,且與三角給與之方位成等角, 并決定此角.

設 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 爲已知方位之單位矢, π 既過原點,其方程式之形式,當如　$(\vec{\delta}\cdot\vec{\rho})=0.$

今設此等方位與所求平面夾成之等角爲 θ, 依所給條件,必須　$(\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta})=(\vec{\beta}\cdot\vec{\delta})=(\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta})=\delta\sin\theta=x.$　(1)

可得 $$\sin\theta=\frac{x}{\delta}.$$

以 (1409) 式連 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ 間之關係，得

$$\vec{\delta}(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})=[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}](\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta})+[\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}](\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta})+[\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}](\vec{\beta}\cdot\vec{\delta}).$$

由 (1) 式，得 $\vec{\delta}(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})=x\{[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}]+[\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}]+[\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}]\}$.

曲括中之矢和，爲一已與 $\vec{\delta}$ 同座標之矢，故所求平面之方程式爲：
$$(\vec{\rho}\cdot[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}]+[\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}]+[\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}])=0.$$
此平面與三已知方位所成之等角爲

$$\theta=\sin^{-1}\frac{(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})}{|[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}]+[\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}]+[\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}]|}.$$

13. 在何種條件之下，三平面

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{\rho})=a,\quad(\vec{\beta}\cdot\vec{\rho})=b,\quad(\vec{\gamma}\cdot\vec{\rho})=c$$

有一公共交線.

此題在解析幾何中，解法甚多，今以矢算作兩種解法，以資比較.

I. 由 (1409) 式，$\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ 與 $\vec{\rho}$ 之關係，有如下式

$$\vec{\rho}(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})=[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}](\vec{\gamma}\cdot\vec{\rho})+[\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}](\vec{\alpha}\cdot\vec{\rho})+[\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}](\vec{\beta}\cdot\vec{\rho}).$$

依三平面之方程式，得

$$\vec{\rho}(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}) = c[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}] + a[\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}] + b[\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}]. \qquad (1)$$

若 $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}) \neq 0$. 此式常決定一 $\vec{\rho}$ 之值, 爲三平面交點之徑矢,故欲此式不表一單純之矢, 必須有:

$$\begin{cases} (\alpha\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}) = 0, & (2') \\ c[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}] + a[\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}] + b[\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}] = 0. & (2) \end{cases}$$

使 (1) 成爲 $\frac{0}{0}$ 之形式.但當 (2) 式成立時,以 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ 中之任一矢數乘之, 均得 (2′). 是以 (2′) 包括在 (2) 中, 而爲其必然之結果. 僅有 (2′) 式時, (2) 式不必一定成立. 故三平面交於一點之條件僅爲 (2) 式.

II. 以 l, m 分乘第一第二兩平面之矢方程式, 而行減法, 可得

$$(l\vec{\alpha} - m\vec{\beta}\cdot\vec{\rho}) = al - bm.$$

此式表經過第一第二兩平面之交線之任意平面. 今欲第三平面 $(\vec{\gamma}\cdot\vec{\rho}) = c$ 交第一第二兩平面於其交線,必須有一組 l, m 之值, 使

$$\begin{cases} l\vec{\alpha} - m\vec{\beta} = \vec{\gamma}, & (3) \\ al - bm = c. & (4) \end{cases}$$

以 $[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}]$ 數乘 (3) 式, 得　　$0 = (\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})$.

以 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ 分別矢乘 (3) 式, 得

$$\left.\begin{aligned}[\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}] &= m[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}],\\ [\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}] &= -l[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}].\end{aligned}\right\} \qquad (\ )$$

以 $[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}]$ 數乘 (4) 式, 得

$$la[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}] - mb[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}] = c[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}].$$

將 (5) 式之值代入, 得

$$a[\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}] + b[\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}] + c[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}] = 0$$

與前所得之 (2) 式無異.

14. 若二定點至二平面距離之和相等. 則連此二點之直線上各點, 至二平面之距離之和, 爲一常數.

設 A, A' 爲二定點. 其徑矢各爲 $\vec{\alpha}, \vec{\alpha'}$. 所設二平面之方程式各爲 $(\vec{\delta}\cdot\vec{\rho}) = c, \qquad (\vec{\delta'}\cdot\vec{\rho}) = c'.$

此中之 $\vec{\delta}$ 與 $\vec{\delta'}$ 各爲垂直於二平面之單位矢. 設自 A 至二平面垂線足之徑矢爲 $\vec{x\delta}, \vec{y\delta'}$, 則因

$$(\vec{\delta}\cdot\vec{\alpha} + x\vec{\delta}) = c, \qquad (\vec{\delta'}\cdot\vec{\alpha'} + y\vec{\delta'}) = c'.$$

得 $$x = c - (\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta}), \qquad y = c' - (\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta'}).$$

故自 A 點至二平面距離之和爲

$$x+y=c+c'-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta}+\vec{\delta'}).$$

同樣, A' 點至二平面距離之和爲

$$x'+y'=c+c'-(\vec{\alpha'}\cdot\vec{\delta}+\vec{\delta'}).$$

依假設　$$x+y=x'+y'.$$

故　$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta}+\vec{\delta'})=(\vec{\alpha'}\cdot\vec{\delta}+\vec{\delta'}),$$

或　$$(\vec{\alpha'}-\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta}+\vec{\delta'})=0. \qquad (1)$$

AA' 線上任一點 A'', 其徑矢爲 $\vec{\alpha''}=\vec{\alpha}+z(\vec{\alpha'}-\vec{\alpha})$.

故此點至二平面距離之和爲

$$x''+y''=c+c'-(\vec{\alpha''}\cdot\vec{\delta}+\vec{\delta'}),$$

或　$$x''+y''=c+c'-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta}+\vec{\delta'})+z(\vec{\alpha'}-\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta}+\vec{\delta'}).$$

注意 (1), 知此式右邊之第三項爲零, 故:

$$x''+y''=x+y=x'+y'$$

爲一常數.

15.　過空間一定點,作兩兩垂直之三線段,以達一平面.此諸線段之倒數之平方和,爲一常數,與各線之方位無關.

解:　以定點爲原點,所引三線段之單位矢爲 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$; 其長各爲 x, y, z. 此三線段所表之矢爲

$$x\vec{i},\ y\vec{j}\ 與\ z\vec{k}.$$

設平面之方程式爲 $(\vec{\delta}\cdot\vec{\rho})=c.$

此中之 $\vec{\delta}$ 爲一定矢. 因 $x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k}$ 爲平面上三點之徑矢. 故

$$x(\vec{\delta}\cdot\vec{i})=c,\quad y(\vec{\delta}\cdot\vec{j})=c,\quad z(\vec{\delta}\cdot\vec{k})=c.$$

將 $\vec{\delta}$ 分解爲三矢, 使各平行於 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, 同時注意 $(\vec{\delta}\cdot\vec{i})$ 爲 $\vec{\delta}$ 在 $\vec{i}$ 軸上之正射影. 得:

$$\vec{\delta}=\vec{i}(\vec{\rho}\cdot\vec{i})+\vec{j}(\vec{\rho}\cdot\vec{j})+\vec{k}(\vec{\rho}\cdot\vec{k})$$

$$=\frac{c}{x}\vec{i}+\frac{c}{y}\vec{j}+\frac{c}{z}\vec{k}.$$

平方之. 得 $$\delta^2=c^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)$$

故 $$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{\delta^2}{c^2}\ (\text{常數})$$

有如題云.

第二章　圓　球　軌跡雜例

§ 65. 圓之矢方程式

設圓之中心爲 $C(\vec{c})$, 半徑爲 R, 圓周上一點爲 $P(\vec{\rho})$, 則 $\vec{\rho}-\vec{c}$ 表一矢 $\overrightarrow{CP}$ 爲圓之半徑. 故

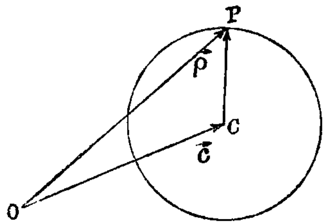


圖 92

$$\left.\begin{aligned}|\vec{\rho}-\vec{c}|&=R,\\(\vec{\rho}-\vec{c})^2&=R^2.\end{aligned}\right\}\tag{2201}$$

或

解之, 得
$$\rho^2-2(\vec{\rho}\cdot\vec{c})=R^2-c^2=k.\tag{2202}$$

是爲圓心在 C 點之圓之方程式. 此中之 k 當由圓之半徑決定.

若原點在圓周上, 則 $c^2=R^2$, 得 $k=0$, 此圓之方程式, 卽變爲
$$\rho^2-2(\vec{\rho}\cdot\vec{c})=0. \tag{2203}$$

由此式, 可得
$$(\vec{\rho}\cdot\vec{\rho}-2\vec{c})=0. \tag{1}$$

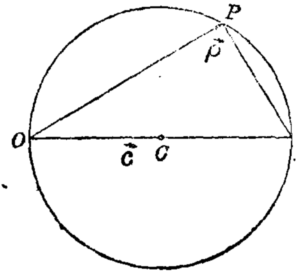


圖 93

但 (圖 93)
$$\vec{\rho}-2\vec{c}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DP}.$$

故 (1) 之意義爲: '半徑上之圓周角, 常爲直角".

若取 C 爲原點, 則圓之方程式至爲簡單, 只須表明原點至圓上各點之弦矢有一定之長度卽可. 令以 $\vec{r}$ 表一半徑, 可得
$$\rho=r=R. \tag{2204}$$

此式與極座標之圓方程式同.

又由
$$\rho^2=r^2,$$

可得
$$(\vec{\rho}+\vec{r}\cdot\vec{\rho}-\vec{r})=0. \tag{2}$$

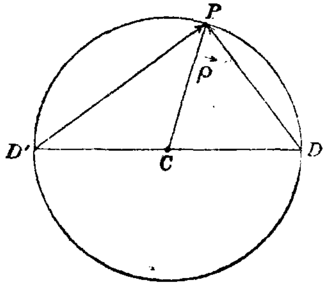


圖 94

此中 (圖 94)　　$\vec{\rho}+\vec{r}=\overrightarrow{D'P},\ \vec{\rho}-\vec{r}=\overrightarrow{DP}.$

故 (2) 式仍表示直徑上之圓周角, 為一直角.

今以 x, y 表 $\vec{\rho}$ 之終點之座標, 以 a, b 表 C 之座標, 則

(2201) 變為　　$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$

(2202) 變為　　$x^2+y^2-2ax-2by=k.$

(2203) 變為　　$x^2+y^2-2ax-2by=0.$

(2204) 變為　　$x^2+y^2=R^2.$

若以 O 為極, OC 為極軸, 則 (2202) 可變為

$$\rho^2-2\rho c\cos\theta=k.$$

復轉變為　　$\rho=2r\cos\theta.$

為圓之極座標公式.

§ 66. 圓之切線

圓上一點 $P(\vec{\rho})$ 之切線方位,已知爲 $\vec{\rho}$ 之微分方位.取圓之方程式

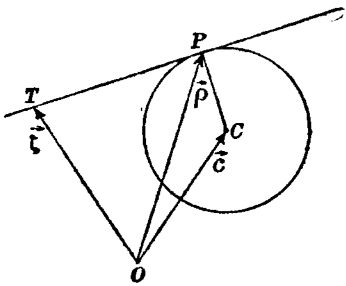


圖 95

$$(\vec{\rho}-\vec{c})^2=R^2.$$

而微分之,得 $$(\vec{\rho}-\vec{c}\cdot\overrightarrow{d\rho})=0.$$

$\vec{\rho}-\vec{c}$ 適爲半徑 $\overrightarrow{CP}$, 此式表明切線切位,係與半徑成垂直.

今設 $P(\vec{\rho})$ 點之切線上,有一點 $T(\vec{\tau})$,則 $\vec{\tau}-\vec{\rho}$ 爲沿切線上之一矢.故 $$(\vec{\rho}-\vec{c}\cdot\vec{\tau}-\vec{\rho})=0.$$

今將 $\vec{\tau}-\vec{\rho}$ 化作 $\vec{\tau}-\vec{c}-(\vec{\rho}-\vec{c})$.代入上式,同時注意圓之方程式,得 $$(\vec{\rho}-\vec{c}\cdot\vec{\tau}-\vec{c})-R^2=0. \qquad (2205)$$

若欲此切線經過 $S(\vec{\sigma})$, 必須

$$(\vec{\rho}-\vec{c}\cdot\vec{\sigma}-\vec{c})-R^2=0.$$

故過 σ 點之切線式為 $(\vec{\tau}-\vec{c}\cdot\vec{\sigma}-\vec{c})-R^2=0.$ (2206)

設 P 與 S 之座標各為 x, y, z 與 x', y', z'. T 之座標為 X, Y, Z, 則 (2205) 與 (2206) 之解析式為

$$(x-a)(X-a)+(y-b)(Y-b)-R^2=0$$

與 $$(X-a)(x'-a)+(Y-b)(y'-b)-R^2=0$$

§ 67. 極與極線

以圓心為圓點, 則 $\vec{c}=0$, 切線之公式變為

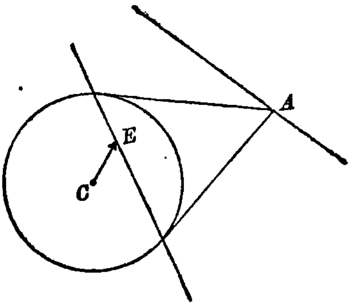


圖 96

$$(\vec{\pi}\cdot\vec{\rho})=R^2.$$

若此切線通過一點 $A(\vec{a})$, 必有

$$(\vec{a}\cdot\vec{\rho})=R^2.$$

此式表一直線,垂直於 $\vec{a}$,其與圓之交點,爲自 A 點所作圓之切線之切點.此線稱爲圓對於 A 點之極線.A 點則爲其相應之極.

當 A 點在圓外時,極與極線之意義,固可作如是觀.但若有一點 $E(\vec{\sigma})$ 在圓內時,$(\vec{\sigma}\cdot\vec{\rho})=R^2$ 雖仍表一直線,但此直線不能與圓相交,以切點解釋極與極線,自無意義.

今過 E 點作一直線,與圓周交於二點,此二點之切線會於一點 $A(\vec{a})$ 此直線之方程式爲 $(\vec{\rho}\cdot\vec{a})=R^2$.

此直線經過 E 點,故 $(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})=R^2$.

今設 E 點不變,A 點之位置隨自 E 所引之直線而變,其軌跡爲一直線 $(\vec{\sigma}\cdot\vec{\rho})=R^2$,稱爲 E 點之極線.

§ 68. 冪度

取圓之方程式 $(\vec{\rho}-\vec{c})^2=R^2$.

書如 $$\rho^2-2\rho\,(\vec{\rho_1}\cdot\vec{c})+c^2-R^2=0. \tag{1}$$

此爲一 ρ 之二次方程式.此中之 $(\vec{\rho_1}\cdot\vec{c})$ 爲方程式中之參數.隨其所取不同之值,而 ρ 有不同之若干組根.$\vec{\rho}$ 之二根

爲過原點直線,與圓周之交點之徑矢,ρ 之二值爲原點與二交點之距離.由二次方程式根之性質,設 ρ_2, ρ_3 爲 (1) 之一對根,知

$$\rho_2 \cdot \rho_3 = c^2 - R^2.$$

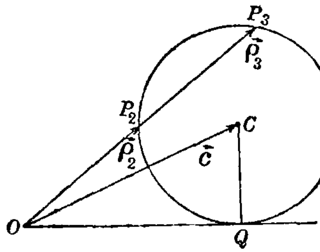


圖 97

表明無論 $\overrightarrow{\rho_1}$ 之方位如何,原點與二交點之距離之積爲一常數,如圖 (97),當有

$$\overrightarrow{OP_2} \cdot \overrightarrow{OP_3} = c^2 - R^2.$$

由直角三角形 OCQ 之性質,知 $c^2 - R^2$ 爲原點至圓切線長之平方.故知自一點作直線,交圓周於二點.此點與二交點距離之乘積,爲自此點至圓之切線長之平方.此積爲一常數 $c^2 - R^2$,稱爲此點對於圓之冪度.

設原點在圓周上,則 $c^2 - R^2 = 0$,表明圓周上之點對圓之冪度爲零

§69. 根軸

依定義： 對於二圓,羃度相等之點之軌跡,稱爲二圓之根軸.

玆有二圓；其中心 C, C' 之徑矢各爲 $\vec{c}, \vec{c}'$, 其半徑各爲 R, R'. 今設 $P(\vec{\rho})$ 點對兩圓之羃度相等,此點當在根軸上.

此點對於 $\vec{c}$ 圓之羃度爲

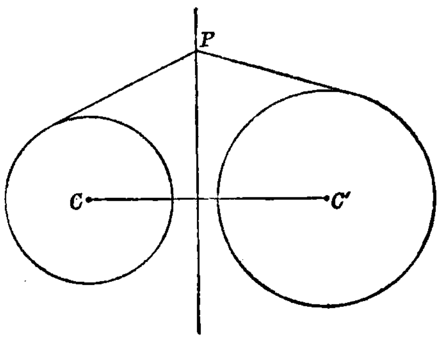


圖 98

$$\overline{PC}^2 - R^2 = (\vec{c} - \vec{\rho})^2 - R^2.$$

對於 $\vec{c}'$ 圓之羃度爲 $(\vec{c}' - \vec{\rho})^2 - R'^2.$

依假設 $(\vec{c} - \vec{\rho})^2 - R^2 = (\vec{c}' - \vec{\rho})^2 - R'^2.$

卽得 $(\vec{c} - \vec{c}' \cdot \vec{\rho}) = \frac{1}{2}(c'^2 - c^2 + R^2 - R'^2).$ (2207)

此式表一直線,垂直於二圓之聯心線 CC',爲 P 之軌跡,是卽根軸之方程式,

若二圓相交,其交點對兩圓之羃度均爲零,當爲根軸上之二點.已知根軸爲一直線,故過二交點之直線,爲二圓之根軸.

§ 70. 球

設球心之徑矢爲 $\vec{c}$,半徑爲 R,球之方程式爲

$$(\vec{\rho}-\vec{c})^2=R^2.$$

此式與圓之方程式無殊,所以能爲球,而又同時爲圓之方程式者,蓋討論圓時,假定各徑矢均在一平面上也.嚴格言之,此式所表實爲一球,而表圓時,則當加一平面之方程式,以示此圓爲球與平面之截面.

如是,前此所討論圓之性質,均可擴充之以至一球,特前此所討論之切線,極線,此處當改爲切面,極面.根軸則當爲平面,而不僅爲一直線,如是而已.

至於轉變式,則當由二度空間,推廣至三度.例如 (2201) 則有

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

(2202) 之轉變式爲

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz=k.$$

(2205) 與 (2206) 則有

$$(x-a)(X-a)+(y-b)(Y-b)+(z-c)(Z-c)-R^2=0.$$

餘如上例，不贅

§71 球之外切錐體

自球外一點 $A(\vec{\alpha})$ 引一直線 $\dfrac{\alpha+\lambda\rho}{1+\lambda}$ 與球相交，此直線與球之交點，由 λ 之值所支配．以此矢代入球之方程式

$$(\vec{\rho}-\vec{\gamma})^2-R^2=0$$

中，得 $$(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\rho}-\{1+\lambda\}\vec{\gamma})^2-(1+\lambda)^2R^2=0. \qquad (1)$$

此爲 λ 之二次方程式．若 λ 有二根，則自 A 所引之直線交球於二點．若 λ 僅有一複根，則自 A 所引之直線，與球體相切．λ 有複根之條件，在 (1) 之判別式爲零

$$\{(\vec{\rho}-\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}-\vec{\gamma})-R^2\}^2-\{(\vec{\rho}-\vec{\gamma})^2-R^2\}\{(\vec{\alpha}-\vec{\gamma})^2-R^2\}=0. \qquad (2208)$$

今欲知此式所表爲何，可將原點移至 A 點，設以 A 爲原點之諸徑矢爲 $\vec{r}$，得

$$\vec{\rho}=\vec{\alpha}+\vec{r}.$$

代入 (2208), 得 $\{(\vec{a}-\vec{\gamma})^2-R^2+(\vec{r}\cdot\vec{a}-\vec{\gamma})\}^2$

$$-\{(\vec{a}-\vec{\gamma})^2-R^2+2(\vec{a}-\vec{\gamma}\cdot\vec{r})+r^2\}\{(\vec{a}-\vec{\gamma})^2-R^2\}=0.$$

簡之, 得 $\{(\vec{r}\cdot\vec{a}-\vec{\gamma})\}^2-r^2\{(\vec{a}-\vec{\gamma})^2-R^2\}=0.$ (2208′)

今以 $x\vec{r}$ 代上式中之 $\vec{r}$, 上式仍爲眞確,得知: 自原點 (A) 與切點所決定之全直線, 均爲上式表出, 故上式所表爲一圓錐體, 外切於球.

設以 x_0, y_0, z_0 及 a, b, c 代表 A 與 C 之原座標(原點爲 O), 以 x, y, z 表 $\vec{r}$ 之終點之座標 (原點爲 A), 得 (2208′) 之轉變式: $\{x(x_0-a)+y(y_0-b)+z(z_0-c)\}^2$

$$-(x^2+y^2+z^2)\{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2-R^2\}=0.$$

§ 72. 球之外切圓柱體

平行於 $\vec{a}$ 矢之直線上各點,若已知其中一點, $P(\vec{\rho})$, 均可以 $\vec{\rho}+\lambda\vec{a}$ 表之. 今欲此矢之終點在球

$$(\vec{\rho}-\vec{\gamma})^2-R^2=0$$

上,必需有 λ 之值,使 $(\vec{\rho}+\lambda\vec{a}-\vec{\gamma})^2-R^2=0.$

此爲 λ 之二次方程式. 當 λ 有二根時,所設之直線,與球相切, 其條件爲

$$\{(\vec{a}\cdot\vec{\rho}-\vec{\gamma})\}^2-a^2\{(\vec{\rho}-\vec{\gamma})^2-R^2\}=0. \qquad (2209)$$

以 $\vec{\rho}+\lambda\vec{a}$ 代此中之 $\vec{\rho}$, 此式仍得成立, 明示自切點所引平行於 $\vec{a}$ 之直線, 均在此式之內, 故此式表一圓柱體, 外切於球.

設 x_0, y_0, z_0 與 a, b, c 各爲 $\vec{a}, \vec{\gamma}$ 之射影, P 之座標爲 x, y, z. 此式之轉變式爲

$$\{x_0(x-a)+y_0(y-b)+z_0(z-c)\}^2$$

$$-(x^2+y^2+z^2)\{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2\}=0.$$

§ 73. 運用雜例

1. 連接二圓交點之直線, 與聯心線成正交.

取一交點 O 爲原點, 設二圓心之徑矢各爲 $\vec{c}, \vec{c}'$, 則二圓

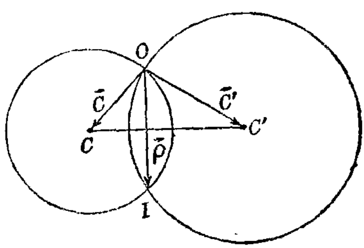


圖 99

之方程式各爲 $$\rho^2-(\vec{c}\cdot\vec{\rho})=0,$$

$$\rho^2-(\vec{c'}\cdot\vec{\rho})=0.$$

他一交點 I 之徑矢 $\vec{\rho'}$ 同時適合上二式，故得

$$\rho'^2-(\vec{c}\cdot\vec{\rho'})=\rho'^2-(\vec{c'}\cdot\vec{\rho'}),$$

或 $$(\vec{\rho'}\cdot\vec{c}-\vec{c'})=0.$$

此示 $OI\perp C'C$.

2. 自直徑上一點，至平行於直徑之弦之兩端，引二線段. 此二線段之平方和，與此點所分直徑二線段之平方和相等.

如圖，設 P 爲 DD' 直徑上一點，C 爲圓心，MM' 爲平行

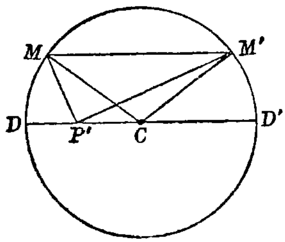


圖 100

於 DD' 之弦. 令 $$\overrightarrow{CM}=\vec{\rho},\quad \overrightarrow{CM'}=\vec{\rho'},$$

$$\overrightarrow{PC}=\vec{c},\quad \overrightarrow{PM}=\vec{a},\quad \overrightarrow{PM'}=\vec{a'};$$

得 $$\overline{PM}^2=(\vec{a}\cdot\vec{a})=(\vec{c}+\vec{\rho})^2=c^2+\rho^2+2(\vec{c}\cdot\vec{\rho}),$$

$$\overline{PM'}^2=(\vec{a'}\cdot\vec{a'})^2=(\vec{c}+\vec{\rho'})^2=c^2+\rho'^2+2(\vec{c}\cdot\vec{\rho'}).$$

但 $\vec{\rho},\vec{\rho'}$ 均爲圓之半徑，故 $\rho^2=\rho'^2$，因得

$$\overline{PM}^2+\overline{PM'}^2=2c^2+2\rho^2+2(\vec{c}\cdot\vec{\rho}+\vec{\rho'}).$$

由 $$(\vec{\rho}+\vec{\rho'}\cdot\vec{\rho}-\vec{\rho'})=\rho^2-\rho'^2=0.$$

可知 $\vec{\rho}+\vec{\rho'}$ 與 $\vec{\rho}-\vec{\rho'}=\overrightarrow{M'M}$ 成垂直，故亦與直徑垂直，而

得 $$(\vec{c}\cdot\vec{\rho}+\vec{\rho'})=0.$$

故 $$\overline{PM}^2+\overline{PM'}^2=2\overline{OC}^2+2\overline{DC}^2.$$

但 $$2\overline{OC}^2+2\overline{DC}^2=(\overline{OC}^2+2\overline{OC}\cdot\overline{CD'}+\overline{CD'}^2)$$

$$+(\overline{OC}^2-2\overline{OC}\cdot\overline{CD}+\overline{CD}^2)$$

$$=(\overline{OC}+\overline{CD'})^2+(\overline{CD}-\overline{OC})^2.$$

故 $$\overline{PM}^2+\overline{PM'}^2=\overline{OD'}^2+\overline{OD}^2.$$

3. 球與平面之截面.

設球之方程式爲 $\rho^2=R^2.$

自球心至平面之垂線爲 $\vec{d}$，平面上一矢爲 $\vec{r}$，則 $\vec{\rho}=\vec{d}+\vec{r}$ 爲平面上一點之徑矢，若此矢適合於球之方程式，此點當在球面上. 以 $\vec{d}+\vec{r}$ 代入球之公式中，得

$$(\vec{d}+\vec{r})^2=R^2.$$

注意 $\vec{d}\perp\vec{r}$, $(\vec{d}\cdot\vec{r})=0$. 將上式展開, 卽得

$$r^2=R^2-d^2.$$

若 $d<R$, 則上式表一圓, 其圓心在 $\vec{d}$ 之終點, 半徑爲

$$\sqrt{R^2-d^2}.$$

若 $d>R$, 則上式爲不可能,表示圓與平面不相交 當 $R=d$ 時, 平面與球相切 (僅相交於一點).

4. 兩球之交面.

設兩球之方程式爲

$$\rho^2-(\vec{\rho}\cdot\vec{c})=k,$$

$$\rho^2-(\vec{\rho}\cdot\vec{c}')=k'.$$

上二式行減法, 卽得

$$2(\vec{\rho}\cdot\vec{c}'-\vec{c})=k-k',$$

或

$$(\vec{\rho}\cdot\vec{c}'-\vec{c})=k''\ (\text{常數}).$$

此式表一平面, 垂直於兩球之聯心線 CC', 但球與平面之截面爲一圓, 故兩球之交面, 亦爲一圓.

5. 三球兩兩之交面, 會於一直線

設 $C(\vec{c})$, $C'(\vec{c}')$, $C''(\vec{c}'')$ 爲三球之中心, 其方程式各爲

$$\rho^2-2(\vec{\rho}\cdot\vec{c})=k, \tag{1}$$

$$\rho^2-2(\vec{\rho}\cdot\vec{c'})=k', \tag{2}$$

$$\rho^2-2(\vec{\rho}\cdot\vec{c''})=k''. \tag{3}$$

C, C' 二球之交面之方程式爲

$$2(\vec{\rho}\cdot\vec{c}-\vec{c'})=k'-k. \tag{a}$$

其他二交面各爲:

$$2(\vec{\rho}\cdot\vec{c'}-\vec{c''})=k''-k', \tag{b}$$

$$2(\vec{\rho}\cdot\vec{c''}-\vec{c})=k-k''. \tag{c}$$

今若有一矢 $\vec{\rho'}$ 適合 (a), (b) 二式,亦必適合 (a), (b) 二式之差.但(a),(b)二式之差適爲(c)式.故知同時在(a),(b)二平面上之諸點,亦必同時在(c)平面上,卽三平面有公共之交線.

此題中諸矢,若均在一平面上,則本題可改之如下:

"三圓兩兩之交線,會於一點".

其證法,全與本題相同,蓋圓與球之方程式,外貌固無二致也.

§ 74. 軌跡雜例

1. 與二定點成等距之諸點之軌跡.

設二定點 A, A' 之徑矢各爲 $\vec{a}$, $\vec{a'}$. 以 $P(\vec{\rho})$ 表軌跡上一

點,依題意必有 $|\vec{\rho}-\vec{a}|=|\vec{\rho}-\vec{a'}|$,

或 $(\vec{\rho}-\vec{a})^2=(\vec{\rho}-\vec{a'})^2$.

此式可書如 $(\vec{\rho}\cdot\vec{a}-\vec{a'})=\frac{a'^2-a^2}{2}$.

此式表一平面,垂直於聯二點之直線 $\vec{a}-\vec{a'}=\overrightarrow{A'A}$. 以 $\vec{\rho}=\frac{\vec{a}+\vec{a'}}{2}$ 代入,能適合此式,故又知此平面通過 AA' 之中點,是爲所求之軌跡.

2. 球之諸弦,其平行於一定方位者之中點之軌跡.

設 $(\vec{\rho}-\vec{c})^2-R^2=0$,

爲一球之方程式. 給與之定方位爲 $\vec{a}$. $P(\vec{\rho'})$ 爲一任意點. 若 $\vec{\rho'}+\lambda\vec{a}$ 表球上一點,必有

$$(\vec{\rho}+\lambda\vec{a}-\vec{c})^2-R^2=0,$$

或 $\lambda^2a^2+2\lambda(\vec{a}\cdot\vec{\rho}-\vec{c})-R^2+(\vec{\rho}-\vec{c})^2=0$.

此爲一 λ 之二次方程式. 若 λ 有符號不同,絕對值相等之二根,則 P 當爲平行於 $\vec{a}$ 之一弦之中點. 今將 $\vec{\rho'}$ 附撇取去,得所需之條件爲 $(\vec{a}\cdot\vec{\rho}-\vec{c})=0$.

此式表一平面,垂直於 $\vec{a}$,且通過球心,是爲所求之軌跡.

3. 經過一定點 A, 引若干直線. 自他一定點 O 作此諸直線之垂線. 求垂線足之軌跡.

以 O 爲原點, 設 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$. 自 A 所引之諸直線,其方程式有如

$$\vec{\rho}=\vec{a}+\lambda\vec{b}.$$

設自 O 至其中之一之垂線爲 $\vec{d}$, 且 $\vec{d}$ 之終點 $\vec{\rho}=\vec{a}+\lambda\vec{b}$ 上, 可得

$$\vec{d}=\vec{a}+\lambda\vec{b}.$$

以 $\vec{d}$ 數乘此式, 注意 $\vec{b}\perp\vec{d}$, 得 $\quad d^2=(\vec{a}\cdot\vec{d})$,

或

$$d^2-2\left(\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{d}\right)=0.$$

此式表一球, 通過 O 點, 而以 OA 爲直徑.

4. 經過一定點 O, 任作一直線, 與一定平面交於 P. 於 OP 上取 P', 令 $\quad \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP'}=m^2$,

求 P' 之軌跡.

設 $\overrightarrow{OP'}=\vec{\rho}$, 則 $\overrightarrow{OP}=\lambda\vec{\rho}$, 由 P' 與 P 之關係, 得

$$(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP'})=m^2,$$

或

$$\lambda(\vec{\rho}\cdot\vec{\rho})=m^2,$$

故

$$\lambda=\frac{m^2}{\rho^2}. \tag{1}$$

設 $\vec{d}$ 爲自 O 所作定平面之垂線, 則平面之方程式爲

$$(\vec{d}\cdot\lambda\vec{\rho}-\vec{d})=0,$$

或
$$\lambda(\vec{d}\cdot\vec{\rho})=d^2.$$

將 (1) 中 λ 之值代入此式, 可得

$$\rho^2=\frac{m^2}{d^2}(\vec{d}\cdot\vec{\rho}).$$

此式表一球, 經過 O 點, 其直徑隨 m 而定.

5. 有二定點於空間,一動點 P 至此二點之距離,常爲定比 m. 求 P 之軌跡.

設二定點爲 O, A. 以 O 爲原點, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OP}=\vec{\rho}$, 依題意:

$$|\vec{\rho}-\vec{a}|=m\rho,$$

或
$$\rho^2-2(\vec{a}\cdot\vec{\rho})+a^2=m^2\rho^2;$$

得
$$(1-m^2)\rho^2-2(\vec{a}\cdot\vec{\rho})=-a^2=-\frac{(1-m^2)}{(1-m^2)}a^2.$$

以 $(1-m^2)$ 除各項, 得

$$\rho^2-\frac{2(\vec{a}\cdot\vec{\rho})}{1-m^2}+\frac{a^2}{(1-m^2)^2}=\frac{m^2a^2}{(1-m^2)^2},$$

即
$$\left(\vec{\rho}-\frac{\vec{a}}{1-m^2}\right)^2=\left\{\frac{ma}{1-m^2}\right\}^2.$$

此式表一球, 半徑爲 $\frac{ma}{1-m^2}$, 中心之徑矢爲 $\frac{\vec{a}}{1-m^2}$.

6. 給與三定點 O, A, B. 求一動點P之軌跡,使合於下述之關係 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\overline{OP}^2$.

取 O 爲原點,令 $\overrightarrow{OP}=\vec{\rho}$, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, 依題意

$$\rho^2=(\vec{\rho}-\vec{a})^2+(\vec{\rho}-\vec{b})^2,$$

或

$$\rho^2-2(\vec{\rho}\cdot\vec{a}+\vec{b})+(a^2+b^2)=0.$$

將左邊配成平方: $(\rho-\{\vec{a}+\vec{b}\})^2=2(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

此式表一球,其中心在以 AB 爲頂點之平行四邊形之第四頂點,半徑爲 $\sqrt{2(\vec{a}\cdot\vec{b})}$. 若 $(\vec{a}\cdot\vec{b})>0$, 卽 $\measuredangle AOB$ 爲一銳角,則此球爲一實際存在之球. 若 $(\vec{a}\cdot\vec{b})<0$, 卽 $\measuredangle AOB>90^\circ$ 時,此球不能存在.又當 $OA\perp OB$ 時, $(\vec{a}\cdot\vec{b})=0$, P 之軌跡,卽縮成一點

7. 一動點至二定點之距離之平方和,爲一常數,求動點之軌跡.

設二定點爲 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, 動點爲 $P(\vec{\rho})$, h^2 爲所設常數,

依題意 $$(\vec{\rho}-\vec{a})^2+(\vec{\rho}-\vec{b})^2=h^2.$$

解之,得 $$\rho^2-2\left(\vec{\rho}\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)=\frac{h^2-a^2-b^2}{2}.$$

此式表一球,中心在 AB 之中點.

8.　動點 P 與二定點 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ 之距離之平方差爲一常數 h, 求此點之軌跡.

設 $\vec{\rho}$ 爲 P 之徑矢,依題意:

$$(\vec{\rho}-\vec{a})^2-(\vec{\rho}-\vec{b})^2=h.$$

解之,得

$$(\vec{\rho}\cdot\vec{b}-\vec{a})=\frac{h-a^2-b^2}{2}.$$

爲 P 點之軌跡之方程式. 表一平面, 與 AB 成垂直.

9.　一動直線 Δ 常平行於一定平面 π, 且與不在同平面之二直線 D, D' 交於 M, M'. 一點 N 分 MM' 爲二線段使其比常爲 M, 求 N 之軌跡.

設 M 與 M' 之徑矢各爲 $\vec{r}, \vec{r'}$. M 與 M' 既常在 D 與 D' 上, 其徑矢必合於 D 與 D' 之方程式

$$\vec{r}=\vec{b}+\lambda\vec{a},\qquad \vec{r'}=\vec{b'}+\lambda'\vec{a'}.$$

設 N 之徑矢爲 $\vec{\rho}$, 依 (1211) 或 (2109), 可得

$$\vec{\rho}=\frac{(\vec{b}+\lambda\vec{a})+m(\vec{b'}+\lambda'\vec{a'})}{1+m}. \tag{1}$$

設 π 之方程式爲　$(\vec{d}\cdot\vec{\rho})=c.$

MM' 既與 π 平行, 必有　$(\vec{d}\cdot\vec{r}-\vec{r'})=0.$

將 $\vec{r}$ 與 $\vec{r'}$ 之值代入，解之，得

$$(\vec{b}-\vec{b'}\cdot\vec{d})+\lambda(\vec{a}\cdot\vec{d})-\lambda'(\vec{a'}\cdot\vec{d})=0,$$

故
$$\lambda'=\frac{(\vec{a}\cdot\vec{d})}{(\vec{a'}\cdot\vec{d})}\lambda+\frac{(\vec{b}-\vec{b'}\cdot\vec{d})}{(\vec{a'}\cdot\vec{d})}.$$

令之爲 $\lambda'=u\lambda+v.$ 代入 (1) 中，得

$$\vec{\rho}=\frac{\vec{b}+\lambda\vec{a}+m\vec{b'}+mu\lambda\vec{a'}+mv\vec{a'}}{1+m}$$

$$=\frac{\vec{b}+m\vec{b'}+mv\vec{a'}}{1+m}+\lambda\left\{\frac{\vec{a}+mu\vec{a'}}{1+m}\right\},$$

可書如
$$\vec{\rho}=\vec{\beta}+\lambda\vec{\alpha}.$$

此爲一直線之方程式，表 N 之軌跡.

10. 三定平面相交於一點 O. 一動平面 π 與之相截，成一三角錐（四面體），其體積爲一常量. 求自 O 至 π 之垂線足之軌跡.

設三平面之交線之單位矢各爲 $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$. 經過 O 點之三角錐之三稜，其長各爲 a, b c (變量). 所成錐體之體積爲：

$$\frac{1}{6}(a\vec{\alpha}\cdot b\vec{\beta}\cdot c\vec{\gamma}).$$

今 $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ 皆爲定矢，$(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})$ 當爲一常數，依題意，必須

$a\ b.c$ 之乘積爲一常數 $a\ c=K$.

平面 π 可認爲由三矢 $a\vec{\alpha}$, $b\vec{\beta}$, $c\vec{\gamma}$ 所決定. 由 (2119), 可知: 自原點至垂線足之徑矢爲:

$$\vec{\rho}=abc(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})\{ab[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}]+bc[\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}]+ca[\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}]\}^{-1}.$$

由此式, 可得

$$ab[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}]+bc[\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}]+ca[\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}]=\vec{\rho}^{-1}\cdot abc(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}). \quad (1)$$

以 $\vec{\alpha}$ 數乘此式 得

$$bc(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})=abc(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})(\vec{\alpha}\cdot\vec{\rho}^{-1}),$$

或
$$\frac{1}{a}=(\vec{\alpha}\cdot\vec{\rho}^{-1}). \quad (2)$$

同樣以 $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ 分別數乘 (1) 式, 得

$$\frac{1}{b}=(\vec{\beta}\cdot\vec{\rho}^{-1}). \qquad \frac{1}{c}=(\vec{\gamma}\cdot\vec{\rho}^{-1}). \quad (3, 4)$$

以 (2), (3), (4), 三式相乘, 得

$$abc(\vec{\alpha}\cdot\vec{\rho}^{-1})(\vec{\beta}\cdot\vec{\rho}^{-1})(\vec{\gamma}\cdot\vec{\rho}^{-1})=1,$$

或
$$K(\vec{\alpha}\cdot\vec{\rho})(\vec{\beta}\cdot\vec{\rho})(\vec{\gamma}\cdot\vec{\rho})=\rho^6.$$

是爲所尋軌跡之矢方程式.

設 $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ 互相垂直, 成一直座標軸, 以 x, y, z 表 $\vec{\rho}$ 之終

點之座標. 上式卽變爲:

$$Kxyz = x^2 + y^2 + z^2)^3,$$

爲一六次曲面

第三章 圓錐曲線

本章曾在理工雜誌第一卷第四期發表，茲僅將原文略加修改，使其合於本書體例而已.

注意　本章所討論之矢，均須假定其同在一平面上.

§ 75. 圓錐曲線之通式

設於一直線Δ與一點 S 所定之平面上,取一點 P, 使 PS (P 至 S 之距離) 與 PQ(P 至 Δ 之距離)之比,等於一定數 e

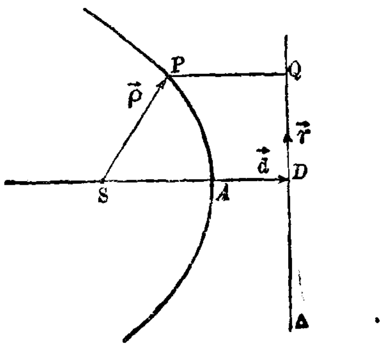


圖 101

$$\overline{PS}=e\cdot\overline{PQ}. \tag{2301}$$

依 Boscovich 所下之定義：

P 點之軌跡，爲一圓錐曲線．S 與 Δ 各爲此曲線之焦點與準線；e 爲圓錐曲線之離心率，常爲正數，蓋此處於 $\overline{SP}$ 與 $\overline{PQ}$，均不過計其長度而已，并不及其方位與方向．e 之數值變化，直接影響於圓錐曲線之種類，後將論之．

今請以矢之公式，將圓錐曲線之方程式寫出．

令　$\overrightarrow{SP}=\vec{\rho}$，$\overrightarrow{SD}=\vec{d}$，$\overline{PQ}$ 與 $\overline{SD}$ 平行，故

$$\overrightarrow{PQ}=x\vec{d}.$$

於 Δ 上取一單位矢 $\vec{r}$，則　$\overrightarrow{DQ}=y\vec{r}.$

Q 點之矢座標爲　$\vec{\rho}+x\vec{d}=\vec{d}+y\vec{r}.$

以 $\vec{d}$ 數乘上式之兩邊：　$(\vec{d}\cdot\vec{\rho})+xd^2=d^2.$

移項，平方之，得：　$x^2d^4=\{d^2-(\vec{d}\cdot\vec{\rho})\}^2.$

由 (2301)，得：　$\rho^2=e^2x^2d^2.$

消去 x^2，得：　$\rho^2d^2=e^2\{d^2-(\vec{d}\cdot\vec{\rho})\}^2.$　(2302)

此式表明 $\vec{\rho}$ 之終點之軌跡，適合於 (2301) 之條件，故爲圓錐曲線之矢方程式，其矢之原點，在圓錐曲線之一焦點上．

§76. 圓錐曲線之分類

設以 $\vec{\rho}=x\vec{d}$. 代入 (2302) 式, 以 d^4 除之, 得

$$x^2=e^2(1-x)^2$$

解之
$$x=\frac{e}{e\pm 1},$$

$$\vec{r}=\frac{e}{e+1}\vec{d} \quad 與 \quad \vec{r'}=\frac{e}{e-1}\vec{d}$$

爲以 $\overline{SD}$ 爲座標之二矢,其終點均屬上述 P 點之軌跡; 至其與 S, Δ 之相對位置,則全恃 e 之值而定. 分三種情形討論之.

1. $e<1$. $\vec{r}$ 與 $\vec{r'}$ 之矢長,均爲有限,故此曲線交 SD 於二點 A, A'. $\vec{r}$ 與 $\vec{d}$ 同方向, 而矢長小於 $\overline{SD}$; $\vec{r'}$ 之矢向適與 $\vec{d}$ 相反, 而其值則大於 $\overline{SD}$. 故 A, A' 均在 Δ 之同側而

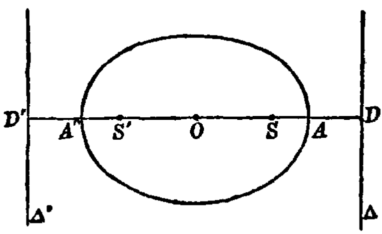


圖 102

各在 S 之一方. $\vec{\rho}$ 之軌跡稱爲橢圓線 (圖 102).

2. $e>1$. $\vec{r}$ 與 $\vec{r'}$ 之長,均為有限,故此曲線交 SD 於二點 A, A'; $\vec{r}, \vec{r'}$ 之值均為正,其終點 A, A' 均在 S 之同側至於矢長,則 r 小於 d,而 r' 大於 d,故 A, A' 各在 Δ 之一

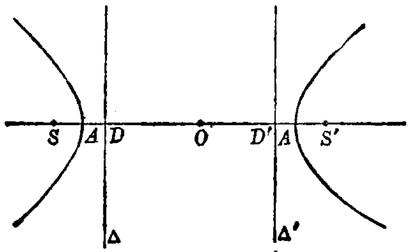


圖 103

方. $\vec{\rho}$ 之終點之軌跡,謂之雙曲線 (圖 103).

3. $e=1$. $\vec{r}=\frac{1}{2}\vec{d}$. $\vec{r'}$ 自 $\vec{d}$ 之反方向,增至無窮大. 此曲線交 $\overline{SD}$ 於其中點及一無窮遠點. 汎言之,則此曲線僅交

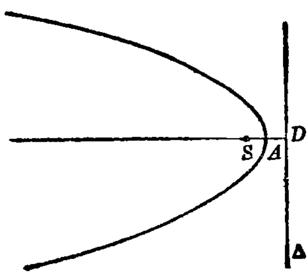


圖 104

SD 於一點. $\vec{\rho}$ 之終點之軌跡,謂之拋物線 (圖 104).

茲分論之:

I. 橢圓

§ 77. 橢圓之矢方程式

橢圓(雙曲線亦然)交 SD 於 A, A' 二點. 二點之距離爲 $\overrightarrow{A'A}$ 之矢長
$$\overrightarrow{A'A}=\vec{r}-\vec{r'}=\frac{2e}{1-e^2}\vec{d}.$$

令 $\dfrac{e}{1-e^2}\vec{d}=\vec{a}$, 則 $\overrightarrow{A'A}=2a$

稱爲橢圓之長軸(在雙曲線則稱貫軸). 以 $A'A$ 爲直徑, 所作之圓, 稱爲補助圓.

設 O 爲 $A'A$ 之中點, 則
$$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AS}=\frac{e}{1-e^2}\vec{d}-\frac{e}{1+e}\vec{d}=\frac{e^2}{1-e^2}\vec{d}.$$

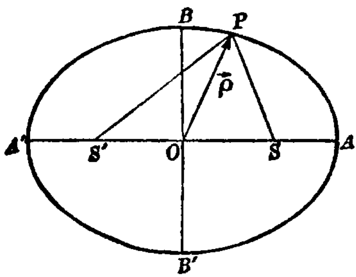


圖 105

故　　$\overline{OS}=ae.$

$\overrightarrow{OS}$之值，通常以c表之，稱爲半焦距.

將矢之原點，由S遷至O.

令　　$$\overrightarrow{OP}=\vec{\rho}',\quad \overrightarrow{OS}=\vec{c}=e\vec{a}. \tag{2303}$$

因　　$$\vec{\rho}=\vec{\rho}'-\vec{c}.$$

代入(2302)式，簡之，得

$$a^2\rho'^2-(\vec{c}\cdot\vec{\rho}')=a^4(1-e^2).$$

設$\vec{\rho}'$之一値$\vec{\lambda}$能適合上式，則$-\vec{\lambda}$亦能適合上式，表明橢圓(或雙曲線)之本身，對O點爲對稱. O點即稱爲橢圓(或雙曲線)之心. 因對稱之故，橢圓(或雙曲線)之焦點與準線，除S與Δ外，尚有以O爲對稱心之S'與Δ'.

$\overline{S'S}=2\overline{OS}=2ae$稱爲焦距，已如上述.

玆爲便利起見，將$\vec{\rho}'$之附撇取消，得

$$a^2\rho^2-(\vec{c}\cdot\vec{\rho})^2=a^4(1-e^2) \tag{2304}$$

爲橢圓(或雙曲線)以其中心爲原點之矢方程式.

§ 78. 橢圓之另一定義

今試再由橢圓(或雙曲線)之另一定義，立出上式.

依定義：一點 P 與二點 S, S' 之距離之和爲定長者，P 之軌跡稱爲橢圓線（$\overline{PS}$ 與 $\overline{PS'}$ 之差爲定長者，則 P 之軌跡爲一雙曲線）.

設以 SS' 之中心 O 爲原點，$\overline{SP}$ 與 $\overline{S'P}$ 之和（或差）常爲 $2a$，命 $\overrightarrow{OS}=\vec{c}$，$\overrightarrow{OS'}=-\vec{c}$.

則
$$\overrightarrow{SP}=\vec{\rho}-\vec{c}, \quad \overrightarrow{S'P}=\vec{\rho}+\vec{c}.$$

依定義，
$$\sqrt{(\vec{\rho}-\vec{c})^2}\pm\sqrt{(\vec{\rho}+\vec{c})^2}=2a.$$

若用加號，則此式表一橢圓，若用減號，則此式表一雙曲線.

去根號，整理之，得

$$a^2\rho^2-(\vec{c}\cdot\vec{\rho})^2=a^2(a^2-c^2)=a^4\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right).$$

此中之 c，爲橢圓（或雙曲線）之半焦距，a 爲長軸之半長，與前面所定之 $2a=\overline{A'A}$ 並無歧異*. 故若令 $\frac{c}{a}=e$，則由 (3) 之關係，可知此 e 與彼 e，爲同一 e. 故得

$$a^2\rho^2-(\vec{c}\cdot\vec{\rho})^2=a^4(1-e^2),$$

與由圓錐曲線之一般公式所導出者相脗合.

---

* 由定義，$\overline{SA}+\overline{S'A}=2a$. 因對稱之故，$\overline{SA}=\overline{S'A'}$

得
$$\overline{A'S'}+\overline{S'A}=\overline{A'A}=2a.$$

§79. 橢圓之化簡方程式

今試設一線算子 (Opératem linéaire) φ，施此算子於 $\vec{\rho}$ 上，令 $\vec{\rho}$ 受相當變化，使

$$\overrightarrow{\varphi\rho}=\frac{a^2\vec{\rho}-(\vec{c}\cdot\vec{\rho})\vec{c}}{a^4(1-e^2)} \tag{2305}$$

成一 $\vec{\rho}$ 之一次矢函數，則 (2304) 式可變爲極簡之形

$$(\vec{\rho}\cdot\overrightarrow{\varphi\rho})=1. \tag{2306}$$

設以 SS' 爲 ox 軸，以通過 O 點而垂直於 SS' 之直線爲 y 軸，於 ox 與 oy 上，各取一單位矢 $\vec{i}$, $\vec{j}$ 設 $\vec{\rho}$ 之終點之座標爲 (x, y) 則 $\vec{\rho}=x\vec{i}+y\vec{j}$, $\vec{c}=ae\vec{i}$,

$$\overrightarrow{\varphi\rho}=\frac{a^2x\vec{i}+a^2y\vec{j}-(aex)ae\vec{i}}{a^4(1-e^2)}=\frac{a^2(1-e^2)x\vec{i}+a^2y\vec{j}}{a^4(1-e^2)}.$$

令 $$a^2(1-e^2)=b^2.$$

得 $$\overrightarrow{\varphi\rho}=\frac{x}{a^2}\vec{i}+\frac{y}{b^2}\vec{j}=\frac{\vec{i}(\vec{i}\cdot\vec{\rho})}{a^2}+\frac{\vec{j}(\vec{j}\cdot\vec{\rho})}{b^2}. \tag{2307}$$

(2306) 式卽變爲 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{2308}$$

設以 $\vec{\rho}=y\vec{j}$. 代入 (2306) 式中，則得 $y=\pm b$.

故 oy 軸交橢圓於二點 $B(b\vec{j})$ 與 $B'(1-b\vec{j})$. 而 $\overline{B'B}=2b$, 則稱爲橢圓之短軸.

設 (2305) 式與 (2306) 式表一雙曲線, 則 $e>1$, 可令 $a^2(1-e^2)=-b^2$.

得
$$\overrightarrow{\varphi\rho}=\frac{x}{a^2}\vec{i}+\frac{y}{b^2}\vec{j}=\frac{\vec{i}(\vec{i}\cdot\vec{\rho})}{a^2}-\frac{\vec{j}(\vec{j}\cdot\vec{\rho})}{b^2} \tag{2307'}$$

及
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{2308'}$$

(2308) 式與 (2308′) 式均爲解析幾何中最習見之公式. 此處寫出, 不過闡明矢算與解析幾何之關聯而已. 至於橢圓線之研究, 仍以 (2306) 式爲主.

§ 80. 線算子 φ 之性質撮要

(2306) 式中既含有算子 φ, 則於開始運用之前, 似宜先將算子 φ 之性質與本章有關者,略加討論,方爲合理. 惟本章並非算子 φ 之專論, 茲僅將其最重要之性質,錄列於下:

1. 設
$$\vec{\rho}=p\overrightarrow{\rho'}+q\overrightarrow{\rho''},$$

則
$$\varphi\vec{\rho}=p\varphi\vec{\rho'}+q\varphi\vec{\rho''}.$$

此式極易證明, 只須將 $\overrightarrow{\rho'}$ $\overrightarrow{\rho''}$ 與 $\vec{\rho}$ 射影於二垂直軸上, 依

(2307) 式寫出, 即得.

II. $$(\vec{\tau}\cdot\overrightarrow{\varphi\rho})=(\vec{\rho}\cdot\overrightarrow{\varphi\tau}).$$

蓋若 $$\tau=x_1\vec{i}+y_1\vec{j},\quad \vec{\rho}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j};$$

則上式之兩邊, 均等於

$$\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}$$

也. 如是, $\vec{\tau}$ 與 $\vec{\rho}$ 之互換, 不能影響於上式, 故 φ 算子爲一自軛算子.

III. 設以 $\overrightarrow{d\rho}$ 表 $\vec{\rho}$ 之微分, 則

$$(\vec{\rho}\cdot\overrightarrow{\varphi d\rho})=(\overrightarrow{d\rho}\cdot\overrightarrow{\varphi\rho})=(\vec{\rho}\cdot\overrightarrow{d\varphi\rho}).$$

以其均等於 $$\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}$$

也.

§ 81. 橢圓之切線

今即以上節所述第三性質, 運用於橢圓之切線.

設 $M(r)$ 爲橢圓線上之一點, 則

$$(\vec{r}\cdot\overrightarrow{\varphi r})=1.$$

微分之, 得 $$(\overrightarrow{dr}\cdot\overrightarrow{\varphi r})+(\vec{r}\cdot\overrightarrow{d\varphi r})=0.$$

由上述之性質，得　$(\overrightarrow{dr}\cdot\overrightarrow{\varphi r})=0.$

已知 $\overrightarrow{dr}$ 爲 $M(\vec{r})$ 點之切線方向，$\overrightarrow{\varphi r}$ 與之垂直故 $\overrightarrow{\varphi r}$ 表 M 點之法線方向 (MN).

設 $T(\vec{\rho})$ 爲 $M(\vec{r})$ 之切線上任意一點，因 MT 必垂直於 M 點之法線 $\overrightarrow{\varphi r}$

故　$$(\vec{\rho}-\vec{r}\cdot\overrightarrow{\varphi \rho})=0.$$

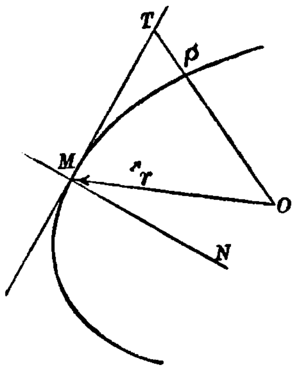


圖 106

由數乘之性質，$$(\vec{\rho}\cdot\overrightarrow{\varphi r})-(\vec{r}\cdot\overrightarrow{\varphi r})=0.$$

因　$$(\vec{r}\cdot\overrightarrow{\varphi r})=1.$$

故　$$\left.\begin{aligned}&(\vec{\rho}\cdot\overrightarrow{\varphi r})=1,\\ &(\vec{r}\cdot\overrightarrow{\varphi \rho})=1.\end{aligned}\right\}\qquad(2309)$$

又因 φ 爲自軛算子，故

二式均爲 $M(\vec{r})$ 點之切線式 設以 x_1 y_1 表 $\vec{r}$ 之終點之座標, 依(2307)之關係, 得切線之解析式

$$\frac{x\,x_1}{a^2}+\frac{y\,y_1}{b^2}=1.$$

§ 82 定理

(1) 已知 $M(\vec{\rho})$ 點之法線爲 $\overrightarrow{\varphi\rho}$ 自二焦點 S, S' 作 M 之切線之垂線 SH 與 $S'H'$, 則

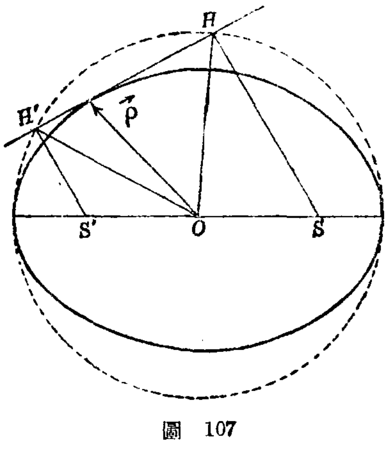


圖 107

$$\overrightarrow{SH}=x\overrightarrow{\varphi\rho},\qquad \overrightarrow{S'H'}=y\overrightarrow{\varphi\rho}.$$

H 點既在 M 之切線上, $\overrightarrow{OH}$ 當適合於 $\vec{\rho}$ 之切線式, 故

$$(\vec{c}+x\overrightarrow{\varphi\rho}\cdot\overrightarrow{\varphi\rho})=1.$$

由此得　$\overrightarrow{SH}=x\overrightarrow{\varphi\rho}=\{1-(\vec{c}\cdot\overrightarrow{\varphi\rho})\}\cdot(\overrightarrow{\varphi\rho})^{-1}$.

同樣得　$\overrightarrow{S'H'}=y\overrightarrow{\varphi\rho}=\{1+(\vec{c}\cdot\overrightarrow{\varphi\rho})\}\cdot(\overrightarrow{\varphi\rho})^{-1}$.

SH 與 $S'H'$ 平行, 故其數乘積等於其值之積

$$\overline{SH}\cdot\overline{S'H'}=(\overrightarrow{SH}\cdot\overrightarrow{S'H'})=\frac{1-(\vec{c}\cdot\overrightarrow{\varphi\rho})^2}{(\overrightarrow{\varphi\rho})^2}.$$

但
$$1-(\vec{c}\cdot\overrightarrow{\varphi\rho})^2=\frac{a^4-(\vec{c}\cdot\vec{\rho})^2}{a^4},$$

$$(\overrightarrow{\varphi\rho})^2=\frac{a^4-(\vec{c}\cdot\vec{\rho})}{a^6(1-e^2)}.$$

故
$$\overline{SH}\cdot\overline{S'H'}=a^2(1-e^2)=b^2.$$

即"以自焦點所作任一切線之垂線爲邊, 所得之矩形, 與以短軸之半長爲邊所作之正方形, 面積相等".

(2)　又
$$1-(\vec{c}\cdot\overrightarrow{\varphi\rho})=\frac{a^2-(\vec{c}\cdot\vec{\rho})}{a^2}.$$

以此值代入

$$\overrightarrow{OH}=\vec{c}+x\overrightarrow{\varphi\rho}=\vec{c}+\frac{\{1-(\vec{c}\cdot\overrightarrow{\varphi\rho})\}\overrightarrow{\varphi\rho}}{(\overrightarrow{\varphi\rho})^2}$$

中,平方之,稍加整理,得　$\overline{OH}^2=a^2$.

即"自焦點所作切線之垂線足,均在補助圓之圓周上".

§ 83. 極 極線

設 $T(\vec{\tau})$ 點爲一定點, 橢圓上 $M(\vec{r})$ 點之切線式爲

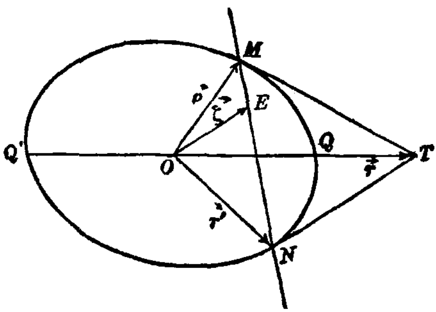
$$(\vec{r}\cdot\overrightarrow{\varphi\rho})=1.$$

若此切線經過 T 點,必須 $(\vec{r}\cdot\overrightarrow{\varphi\tau})=1.$

故 M 點在直線 $(\vec{\rho}\cdot\overrightarrow{\varphi\tau})=1$

上.

通過橢圓內一點 $E(\vec{\sigma})$ 上, 任作一橢圓之弦 MN, 過 M 與 N 之切線, 相交於一點 $T(\tau)$ 其方程式爲



108 圖

$$(\vec{\sigma}\cdot\overrightarrow{\varphi\tau})=1.$$

同時 $(\vec{\rho}\cdot\overrightarrow{\varphi\tau})=1.$

故 T 點在一直線 $(\vec{\rho}\cdot\overrightarrow{\varphi\sigma})=1$

上.

設以 T 爲定點, 則 $(\vec{\rho}\cdot\overrightarrow{\varphi\tau})=1$ 稱爲以 T、爲極之極線 (相對於此橢圓而言). 設以 E 爲一定點,則 $(\vec{\rho}\cdot\overrightarrow{\varphi\sigma})=1$, 或 T之軌跡,稱爲以 E 爲極之極線. 故 '過 T 點之任一直線, 均爲以 MN 上一點爲極之極線; 若 T 點之極線繞一定點而旋轉, 則 T 之軌跡爲一直線".

由上述極與極線之性質, 欲作以橢圓外一點爲極之極線,只須連接此點至橢圓之二切點即可. 設極在橢圓之內, 可通過此點任作二弦 MN, $M'N'$; M, N 二點之切線,相交於 T; M', N' 二點之切線,相交於 T', 連 TT' 所得之直線, 即爲所求之極線.

§ 84. 共軛直徑

設一點 $T(\vec{\tau})$ 之極線 $(\vec{\rho}\cdot\overrightarrow{\varphi\tau})=1$ 截橢圓於二點 $M(\vec{r})$, $N(\vec{r'})$, 則由 $(\vec{r}\cdot\overrightarrow{\varphi\tau})=1$ 與 $(\vec{r'}\cdot\overrightarrow{\varphi\tau})=1$.

得 $$(\vec{r}-\vec{r'}\cdot\overrightarrow{\varphi\tau})=0. \tag{2310}$$

表明若 OT 交橢圓於 Q 點,則 MN 與 Q 點之法線成垂直. 即 MN 平行於 Q 之切線, 方程式之有此形

$$(\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{\varphi\beta})=0 \tag{2311}$$

者，在橢圓之研究上，極爲重要，兹詳論之.

設 $\vec{\alpha}=\overrightarrow{OD}$, $\vec{\beta}=\overrightarrow{OQ}$ 爲橢圓之二半徑，

$$(\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{\varphi\beta})=0$$

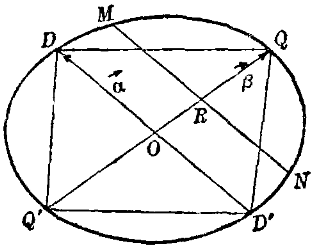


圖 109

表明 OD 平行於 Q 點之切線.同時,因 φ 爲自軛算子之故,

$$(\vec{\beta}\cdot\overrightarrow{\varphi\alpha})=0$$

表明 OQ 亦平行於 D 點之切線. 如此之二半徑,謂之共軛半徑；而直徑 DD' 與 QQ' 則稱爲共軛直徑. 二者之方向,稱爲共軛方向.

橢圓上任一點 $M(\vec{\rho})$ 可以 $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ 二矢表之，得

$$\vec{\rho}=x\vec{\alpha}+y\vec{\beta},$$

$$\overrightarrow{\varphi\rho}=x\overrightarrow{\varphi\alpha}+y\overrightarrow{\varphi\beta}.$$

因 M 點在橢圓上, 故

$$(\vec{\rho}\cdot\overrightarrow{\varphi\rho})=1=x^2+y^2=\left(\frac{\overline{OR}}{\overline{OQ}}\right)^2+\left(\frac{\overline{RM}}{\overline{OD}}\right)^2.$$

每一 x 之値,必有絕對值相同,符號相反之二 y 與之相應. 同樣每一 y 之值,亦必有絕對値相同,符號相反之二 x 與之相應,此種性質,表明:"任一直徑,平分其共軛方向之諸弦".

反之,設 $\vec{\alpha}$ 爲一半徑,與 $\vec{\alpha}$ 矢平行之弦之中點之軌跡,必爲與 $\vec{\alpha}$ 共軛之直徑. 蓋若 $R(\vec{\beta'})$ 爲此軌跡上之一點,則弦上任一點之方程式爲　$\vec{\beta'}+x\vec{\alpha}$.

此弦之終點在橢圓上,故

$$(\vec{\beta'}+x\vec{\alpha}\cdot\varphi\{\vec{\beta'}+x\vec{\alpha}\})=1.$$

解之,得　$x^2+2x(\vec{\beta'}\cdot\overrightarrow{\varphi\alpha})+(\vec{\beta'}\cdot\overrightarrow{\varphi\beta'})-1=0$

依假設,x 必須有同值異號之二根,故

$$(\vec{\beta'}\cdot\overrightarrow{\varphi\alpha})=0$$

表明 $\vec{\beta'}$ 之方向與 $\vec{\alpha}$ 爲共軛.

由 (2310),知 OT 與 MN 爲共軛,設 R 爲 MN 之中點,欲知 $\overline{OR}$ 之長,可令 $\overrightarrow{OR}=x\vec{\tau}$,因 R 在 T 之極線上,故(圖 108)

$$x(\vec{\tau}\cdot\overrightarrow{\varphi\tau})=1.$$

設 $\overrightarrow{OQ}=y\vec{\tau}$, 則 $$y^2(\vec{\tau}\cdot\overrightarrow{\varphi\tau})=1.$$

故 $x=y^2$, 即 $$\overline{OT}\cdot\overline{OR}=\overline{OQ}^2.$$

因 O 爲 QQ' 之中點,故此式表明 Q, Q' 與 R, T 爲調和點對, 即 $$(Q'Q, RT)=1.$$

此種性質, 亦有取之以爲極與極線之定義者.

已知 QQ' 與 DD' 爲共軛 (圖 109), $\overrightarrow{OQ}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OD}=\vec{\beta}$; 則

$$\overrightarrow{DQ}=\overrightarrow{Q'D'}=\vec{\beta}-\vec{\alpha}, \qquad \overrightarrow{D'Q}=\overrightarrow{Q'D}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}.$$

由 $$(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\cdot\varphi\{\vec{\beta}-\vec{\alpha}\})$$

$$\equiv(\vec{\beta}\cdot\overrightarrow{\varphi\beta})-(\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{\varphi\alpha})+(\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{\varphi\beta})-(\vec{\beta}\cdot\overrightarrow{\varphi\alpha})\equiv 0.$$

知 $\overline{DQ}$, $\overline{Q'D'}$ 與 $\overline{D'Q}$, $\overline{Q'D}$ 亦在共軛方向,此爲補弦之一性質.

§ 85. 線算子 ψ

韓密登 (Hamilton) 於其不朽之作 (elements of quaternion) 中, 曾因討論圓錐曲線之便, 加入一算子 ψ, 此算子雖不甚重要, 然本章既以矢算討論圓錐曲線, 似不宜不稍論及之.

ψ 算子之定義爲：　$\overrightarrow{\psi^2\rho}=\overrightarrow{\varphi\rho}$.

$\overrightarrow{\psi^2\rho}$ 之意義與 $\overrightarrow{\psi\psi\rho}$ 相同，由此易知*

$$\overrightarrow{\psi\rho}=\frac{\vec{i}(\vec{i}\cdot\vec{\rho})}{a}+\frac{\vec{j}(\vec{j}\cdot\vec{\rho})}{b}.$$

蓋　$\psi^2\rho=\frac{\vec{i}(\vec{i}\cdot\overrightarrow{\psi\rho})}{a}+\frac{\vec{j}(\vec{j}\cdot\overrightarrow{\psi\rho})}{b}=\frac{\vec{i}(\vec{i}\cdot\vec{\rho})}{a^2}+\frac{\vec{j}(\vec{j}\cdot\vec{\rho})}{b^2}$

也. ψ 仍爲一自軛算子,通常視爲 φ 之平方根,有上述一切 φ 之性質. 如是,橢圓之方程式 $(\vec{\rho}\cdot\overrightarrow{\varphi\rho})=1$ 可書爲

$$(\vec{\rho}\cdot\overrightarrow{\psi\psi\rho})=(\overrightarrow{\psi\rho}\cdot\overrightarrow{\psi\rho})=(\overrightarrow{\psi\rho})^2=1,$$

或　$$\psi\rho=1.$$

表明 $\overrightarrow{\psi\rho}$ 爲一單位矢，并知施 ψ 於一橢圓（或雙曲線）之矢時，即將此橢圓（或雙曲線），化爲一圓.

自 $\overrightarrow{\psi\rho}$ 之本式觀之，以

$$\vec{\rho}=a\cos\theta\cdot\vec{i}+b\sin\theta\cdot\vec{j}. \tag{2312}$$

代入，　$$\psi\rho=\frac{\vec{i}(\vec{i}\cdot\vec{\rho})}{a}+\frac{\vec{j}(\vec{j}\cdot\vec{\rho})}{b}.$$

* 此僅就橢圓而言，若就雙曲線言之，則

$$\overrightarrow{\psi\rho}=\frac{\vec{i}(\vec{i}\cdot\vec{\rho})}{a}+\frac{\vec{j}(\vec{j}\cdot\vec{\rho})}{b\sqrt{-1}}.$$

或以 $$\vec{\rho}=a\operatorname{ch}\theta\cdot\vec{i}+b\operatorname{sh}\theta\cdot\vec{j}\tag{2312'}$$

代入, $$\overrightarrow{\psi\rho}=\frac{\vec{i}(\vec{i}\cdot\vec{\rho})}{a}+\frac{\vec{j}(\vec{j}\cdot\vec{\rho})}{b\sqrt{-1}}$$

中, 均得 $$(\overrightarrow{\psi\rho})^2=1.$$

故 (2312) 與 (2312′) 亦各爲橢圓線與雙曲線之方程式.

II. 雙曲線

§ 86. 雙曲線之另一定義

雙曲線之性質, 大多與橢圓線相似, 前面所述之橢圓線之性質中, 除最少數爲橢圓線所特有外, 大抵爲二者所公有, 故此處只擇前節所未言及者論之. 至於前節雖有, 而在

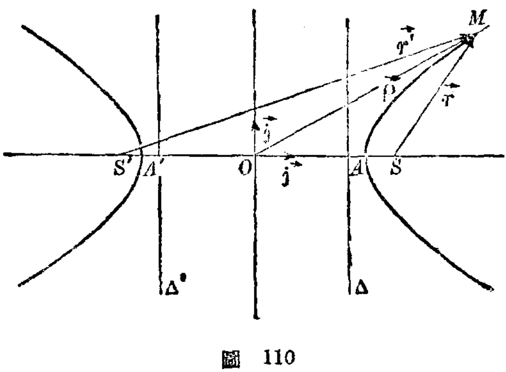


圖 110

本節亦決不能忽略者（如切線等）亦只略略提及而已，不加深論，以免重複.

本章討論雙曲線，即以上述之 (2312') 式

$$\vec{\rho}=a\operatorname{ch}\theta\cdot\vec{i}+b\operatorname{sh}\theta\cdot\vec{j}$$

爲基本式. 今試先證明其確與雙曲線之普通定義"與二定點之距離之差爲常量 $2a$ 之點之軌跡"脗合.

令 $a^2+b^2=c^2$. 於 $\vec{i}$ 軸上取二點 S, S'，令

$$\overrightarrow{OS}=c\vec{i},\qquad \overrightarrow{OS'}=-c\vec{i}.$$

又令雙曲線上任一點 M 爲 $\overrightarrow{OM}=\vec{\rho}$ 之終點，

則 $$\overrightarrow{SM}=\vec{r}=\vec{\rho}-c\vec{i},$$

$$r^2=\rho^2+c^2-2c(\vec{i}\cdot\vec{\rho})=a^2\operatorname{ch}^2\theta+b^2\operatorname{sh}^2\theta+c^2-2ac\operatorname{ch}\theta$$

$$=(a^2+b^2)\operatorname{ch}^2\theta-b^2+c^2-2ca\operatorname{ch}\theta=(c\operatorname{ch}\theta-a)^2,$$

$$r=c\operatorname{ch}\theta-a.$$

同樣， $$\overrightarrow{S'M}=\vec{r}'=\vec{\rho}+c\vec{i}$$

得 $$r'=c\operatorname{ch}\theta+a.$$

故 $$r'-r=2a$$

與幾何定義相脗合.

此二點 S, S' 稱爲雙曲線之焦點，已如上述.

§ 87. 切線 極線

在初等幾何學中,知雙曲線上一點之切線,爲自二焦點至此點所作二直線之分角線,故此切線之方向平行於

$$\overrightarrow{r_1}+\overrightarrow{r'_1}.$$

又 $$\overrightarrow{r_1}=\frac{\vec{\rho}-c\vec{i}}{c\,\mathrm{ch}\,\theta-a},\qquad \overrightarrow{r'_1}=\frac{\vec{\rho}+c\vec{i}}{c\,\mathrm{ch}\,\theta-a},$$

$$\overrightarrow{r_1}+\overrightarrow{r'_1}=\frac{2c\,\mathrm{ch}\,\theta}{c^2\,\mathrm{ch}^2\,\theta-a^2}[a\,\mathrm{sh}\,\theta\cdot\vec{i}+b\,\mathrm{ch}\,\theta\cdot\vec{j}].$$

故切線之方向爲 $a\,\mathrm{sh}\,\theta\cdot\vec{i}+b\,\mathrm{ch}\,\theta\cdot\vec{j}$, 與由雙曲線之本式

$$\vec{\rho}=a\,\mathrm{ch}\,\theta\cdot\vec{i}+b\,\mathrm{sh}\,\theta\cdot\vec{j}$$

微分而得者相合. 同時

$$\vec{\rho}=a\,\mathrm{sh}\,\theta\cdot\vec{i}+b\,\mathrm{ch}\,\theta\cdot\vec{j}$$

亦表一雙曲線,其方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1,$$

或 $$(\vec{\rho}\cdot\overrightarrow{\varphi\rho})=-1$$

稱爲原雙曲線之共軛雙曲線.

既知一點之切線之方向,此切線之方程式自不難寫出.

$$\vec{\rho}=a\operatorname{ch}\theta\cdot\vec{i}+b\operatorname{sh}\theta\cdot\vec{j}+\lambda(a\operatorname{sh}\theta\cdot\vec{i}+b\operatorname{ch}\theta\cdot\vec{j}),$$

或　$$\vec{\rho}=\vec{i}a(\operatorname{ch}\theta+\lambda\operatorname{sh}\theta)+\vec{j}b(\operatorname{sh}\theta+\lambda\operatorname{ch}\theta).$$

若欲此直線通過一定點 $T(x_1\vec{i}+y_1\vec{j})$，其完全條件為

$$x_1=a(\operatorname{ch}\theta+\lambda\operatorname{sh}\theta)\quad\text{與}\quad y_1=b(\operatorname{sh}\theta+\lambda\operatorname{ch}\theta).$$

消去 λ，得　$$\frac{x_1}{a}\operatorname{ch}\theta-\frac{y_1}{b}\operatorname{sh}\theta=1$$

為 T 點之極線式.以 θ 為未知數，解之，可得二值，相應於自 T 所作切線之二切點. 設以 x, y 表二切點之座標,得

$$\operatorname{ch}\theta=\frac{x}{a},\qquad \operatorname{sh}\theta=\frac{y}{b}.$$

代入上式，得

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$$

為極線之解析式.

§88　共軛直徑

設自雙曲線上一點 M 之矢座標上任一點 P，作此 M 點之切線之平行線，則此平行線上任一點之矢式，當為

$$\vec{\rho}=\lambda(a\operatorname{ch}\theta\cdot\vec{i}+b\operatorname{sh}\theta\cdot\vec{j})+\mu(a\operatorname{sh}\theta\cdot\vec{i}+b\operatorname{ch}\theta\cdot\vec{j})$$

$$=\vec{i}a(\lambda\ \mathrm{ch}\ \theta+\mu\ \mathrm{sh}\ \theta)+\vec{j}b(\lambda\ \mathrm{sh}\ \theta+\mu\ \mathrm{ch}\ \theta).$$

設欲此點爲所設雙曲線上之一點，其充分必需條件爲

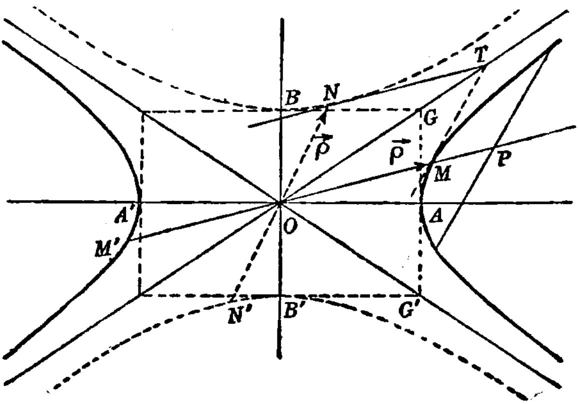


圖 111

$$\lambda\ \mathrm{ch}\ \theta+\mu\ \mathrm{sh}\ \theta=\mathrm{ch}\ \theta',$$

$$\lambda\ \mathrm{sh}\ \theta+\mu\ \mathrm{ch}\ \theta=\mathrm{sh}\ \theta'.$$

消去 θ，得 $$\lambda^2-\mu^2=1.$$

當 λ 之絕對值，自 1 變至無窮大時，常有 μ 之二值與之相應，適合於上式．此二值之絕對值相等，符號相反，表明 $\overrightarrow{OM}$ 之座標平分與 M 之切線平行之弦．即 $\overrightarrow{OM}$ 爲平行於 M 之切線之弦之中點之軌跡．當 λ 之絕對值小於 1 時，μ 與之相應之值爲虛數．故實際上，OM 所平分之弦，均係在

MM' (M' 爲 M 對於 O 之對稱點) 線段之外.

設 NN' 爲共軛雙曲線之直徑, 且平行於 M 點之切線, N 之矢座標爲

$$\overrightarrow{ON}=\vec{i}a\operatorname{sh}\theta+\vec{j}b\operatorname{ch}\theta.$$

故其切線平行於 OM; 故 MM' 爲 NN' 與二共軛直徑,其與 $\vec{i}$ 軸所成之角之傾斜度各爲

$$m=\frac{b\operatorname{sh}\theta}{a\operatorname{ch}\theta},\qquad m'=\frac{b\operatorname{ch}\theta}{a\operatorname{sh}\theta}.$$

故二共軛直徑之傾斜度之關係爲

$$mm'=\frac{b^2}{a^2}.$$

§ 89. 漸近線

由同一 θ 之值, 雙曲線與其共軛線之方程式可書爲

$$\vec{\rho}=\operatorname{ch}\theta[\vec{i}a+\vec{j}b\operatorname{th}\theta]$$

與
$$\vec{\rho'}=\operatorname{ch}\theta[\vec{i}a\operatorname{th}\theta+\vec{j}b].$$

此二矢各平行於

$$a\vec{i}+b\operatorname{th}\theta\,\vec{j}\quad 與\quad a\operatorname{th}\theta\,\vec{i}+b\vec{j}.$$

當 θ 增至無窮大時, $\vec{\rho}$ 與 $\vec{\rho'}$ 同時增至無窮大, 而二矢之方

向均爲 $a\vec{i}+b\vec{j}$. 故 $\vec{\rho}$ 與 $\vec{\rho'}$ 均在 $a\vec{i}+b\vec{j}$ 之方向, 有一無窮遠點. 故 $a\vec{i}+b\vec{j}$ 爲此二互軛雙曲線之漸近線. 同樣, 可知 $a\vec{i}-b\vec{j}$ 亦爲漸近線*. 其方程式可書爲

$$(\vec{\rho}\cdot\overrightarrow{\varphi\rho})=0.$$

由上述共軛直徑之理, 若以 OM, ON 爲邊, 作一平行四邊形, OM 與 ON 各平行於 N 與 M 之切線, 故平行四邊形之第四頂點 T 在

$$\vec{\rho}=(\vec{i}a\,\mathrm{ch}\,\theta+\vec{j}b\,\mathrm{sh}\,\theta)+(\vec{i}a\,\mathrm{sh}\,\theta+\vec{j}b\,\mathrm{ch}\,\theta)$$

$$=(\mathrm{ch}\,\theta+\mathrm{sh}\,\theta)(a\vec{i}+b\vec{j})$$

上, 卽 T 點之軌跡, 爲此二雙曲線之漸近線.

§ 90. 亞婆龍定理

設 $\overline{OM}=a'$, $\overline{ON}=b'$, 二者之夾角爲 ω,

$$a'^2=a^2\,\mathrm{ch}^2\,\theta+b^2\,\mathrm{sh}^2\,\theta,\quad b'^2=a^2\,\mathrm{sh}^2\,\theta+b^2\,\mathrm{ch}^2\,\theta$$

故 $$a'^2-b'^2=a^2-b^2. \qquad (2313)$$

又 $$[\vec{\rho}\cdot\vec{\rho'}]=[\vec{\rho_1}\cdot\vec{\rho'_1}]a'b'\sin\omega=[\vec{\rho_1}\cdot\vec{\rho'_1}]ab.$$

故 $$ab=a'b'\sin\omega. \qquad (2314)$$

---

* $a\vec{i}+b\vec{j}$ 之終點在 G, $a\vec{i}-b\vec{j}$ 之終點在 G' (見圖 111).

(2313) 式表明"任意二共軛半徑之平方差 (在橢圓則爲平方和) 爲一常數", (2214) 表明"二共軛半徑 (直徑亦然) 及此半徑端點之切線所圍成之面積爲一常量". 是爲亞婆龍氏之二大定理.

§ 91. 雙曲線之另一方程式

研究雙曲線時, 若不用 $\vec{\rho}=\vec{i}a\,\mathrm{ch}\,\theta+\vec{j}b\,\mathrm{sh}\,\theta$ 式, 而用 $\rho=x\vec{i}+y\vec{j}$. 只須將 x 與 y 加以若干限制, 使此矢之尖端常在一雙曲線上即可.

例如令
$$x=t,\ y=\frac{1}{t},$$

$$\rho=t\vec{i}+\frac{1}{t}\vec{j}.$$

即表一正雙曲線 (漸近線互相垂直之雙曲線) 其漸近線相當於解析幾何之 x, y 二軸. 今將運用此法, 以研究拋物線.

III. 拋物線

§ 92. 拋物線之方程式

在解析幾何中, 若以拋物線之對稱軸爲 x 軸, 以其頂點

之切線爲 y 軸，則 x、y 之關係爲 $y^2=2px.$

若於 $\vec{\rho}=x\vec{i}+y\vec{j}$ 中，令 $y=t,\ x=\dfrac{t^2}{2p}$.

可得
$$\vec{\rho}=\frac{t^2}{2p}\vec{i}+t\vec{j}. \tag{2315}$$

設 S 爲對稱軸上之一點，其矢座標爲 $\lambda\vec{i}$，則拋物線上一

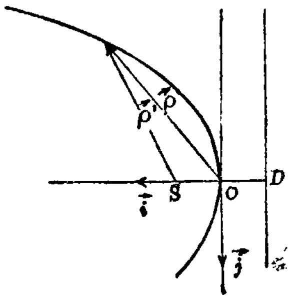


圖 112

點 $M(\vec{\rho})$ 可書爲 $\overrightarrow{SM}=\vec{\rho'}=\dfrac{t^2}{2p}\vec{i}+t\vec{j}-\lambda\vec{i},$

$$\rho'^2=\left(\frac{t^4}{4p^2}-\frac{\lambda\, t^2}{p}+\lambda^2\right)+t^2.$$

令 $\lambda=\dfrac{p}{2}$, 則 $\rho'^2=\left(\dfrac{t^2}{2p}+\dfrac{p}{2}\right)^2.$

故
$$\rho'=\frac{t^2}{2p}+\frac{p}{2}.$$

若於拋物線之外，定一直線其方程式爲

$$\vec{\rho}=-\frac{p}{2}\vec{i}+\mu\vec{j}.$$

則自拋物線上一點,至此直線之距離 $\frac{t^2}{2p}+\frac{p}{2}$ 適等於上述之 $\overline{SM}$, 故 S 爲此拋物線之焦點,此直線爲拋物線之準線.

§ 93. 焦點弦之性質

設一通過焦點之弦,交拋物線於二點 $M(\vec{\rho})$, $M'(\vec{\rho'})$, $\overrightarrow{SM}$ 與 $\overrightarrow{S'M'}$ 同座標, 故 $\lfloor\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{S'M'}\rfloor=0.$

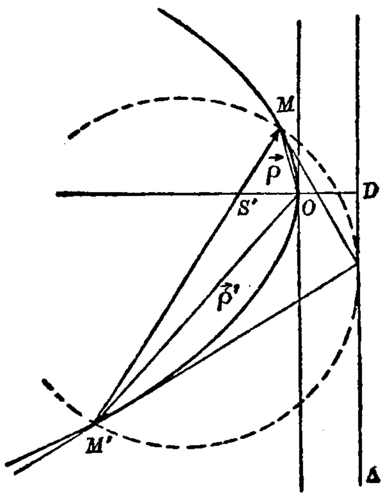


圖 113

但
$$\overrightarrow{SM}=\vec{\rho}+\frac{p}{2}\vec{i},\quad \overrightarrow{S'M'}=\vec{\rho'}+\frac{p}{2}\vec{i}$$

故
$$[\vec{\rho}\cdot\vec{\rho}'] - \frac{p}{2}[\vec{\rho} - \vec{\rho}'\cdot\vec{i}] = 0.$$

以
$$\vec{\rho} = \frac{t^2}{4p}\vec{i} + t\vec{j}, \qquad \vec{\rho}' = \frac{t'^2}{2p}\vec{i} + t'\vec{j}$$

代入，得

$$\left(\frac{t^2t'}{2p} - \frac{tt'^2}{2p}\right)[\vec{i}\cdot\vec{j}] - \frac{pt'}{2}[\vec{i}\cdot\vec{j}] + \frac{pt}{2}[\vec{i}\cdot\vec{j}] = 0.$$

故
$$\frac{tt'}{2p}(t-t') + \frac{p}{2}(t-t') = 0.$$

得
$$t' = -\frac{p^2}{t}.$$

如是則
$$\vec{\rho} = \frac{t^2}{2p}\vec{i} + t\vec{j} \quad 與 \quad \vec{\rho}' = \frac{p^3}{2t^2}\vec{i} - \frac{p^2}{t}\vec{j} \tag{2316}$$

爲終點在焦點弦之兩端之二矢．用微分法，知此 M, M' 二點之切線．各平行於下列二矢

$$\vec{\tau} = \frac{t}{p}\vec{i} + \vec{j}, \qquad \vec{\tau}' = -\frac{p}{t}\vec{i} + \vec{j}.$$

然
$$(\vec{\tau}\cdot\vec{\tau}') = 0,$$

故"焦點弦之二端所作之切線成正交".

設 $\overrightarrow{SM}$ 平行於 $\vec{j}$ 軸，則 $\overrightarrow{SM} = \vec{\rho} - \frac{p}{2}\vec{i} = x\vec{j},$

或
$$\frac{t^2}{2p}\vec{i} + t\vec{j} - \frac{p}{2}\vec{i} = x\vec{j}.$$

令兩邊之 $\vec{i}$ 與 $\vec{j}$ 之係數相等，得 $x=t=\pm p$.

表明"焦點弦之垂直於對稱軸者，其長爲頂點至焦點之長之四倍". 此弦稱爲主焦弦.

此二切線之方程式，各爲

$$\vec{\rho}=\frac{t^2}{2p}\vec{i}+t\vec{j}+\lambda\left(\frac{t}{p}\vec{i}+\vec{j}\right), \tag{2317}$$

$$\vec{\rho'}=\frac{p^3}{2t^2}\vec{i}-\frac{p^2}{t}\vec{j}-\mu\left(\frac{p^3}{t^3}\vec{i}-\frac{p^2}{t^2}\vec{j}\right).$$

若令 $\qquad \lambda=-\dfrac{p^2+t^2}{2t}, \qquad \mu=\dfrac{t^3+tp^2}{2p^2}.$

則上二矢均等於 $\qquad -\dfrac{p}{2}\vec{i}+\dfrac{t^2-p^2}{2t}\vec{j}.$

故"於焦點弦之二端所作之切線，必正交於準線上"之一點 P.

此種性質，僅爲焦點弦所特有，故若"以焦點弦爲直徑，所作之圓，必適與準線相遇；而以其他弦爲直徑，所作之圓，必不能與準線相遇".

P 點之徑矢，既爲 $-\dfrac{p}{2}\vec{i}+\dfrac{t^2-p^2}{2t}\vec{j}$，將原點移至 S 點，則

$$\overrightarrow{SP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OS}=-p\vec{i}+\frac{t^2-p^2}{2t}\vec{j}.$$

又

$$\overrightarrow{SM}=\vec{\rho}-\frac{p}{2}\vec{i}=\frac{1}{2p}(t^2-p^2)\vec{i}+t\vec{j}. \tag{2318}$$

由 $$(\overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{SM})=0.$$

可知"連接焦點,與焦點弦之兩端所作切線之交點,所得直線,垂直於焦點弦".

(2318) 亦爲拋物線之矢方程式,其原點在拋物線之焦點.

(2317) 式爲切線之通式,若令 $\lambda=-t$,則 $\vec{\rho}=-\frac{t^2}{2p}\vec{i}$,表明 M 之切線交於對稱軸之點 T,與自 M 所作 $\vec{i}$ 軸之垂線足 H 相對稱,其對稱心爲拋物線之頂點.

§ 94 拋物線之直徑

設有一任意弦 MM',其端點之矢,各爲

$$\vec{r}=\frac{t^2}{2p}\vec{i}+t\vec{j},\qquad \vec{r}'=\frac{t'^2}{2p}\vec{i}+t'\vec{j},$$

$$\overrightarrow{MM'}=\vec{r}'-\vec{r}=\frac{1}{2p}(t'^2-t^2)\vec{i}+(t'-t)\vec{j}.$$

此矢常平行於 $$\frac{1}{2p}(t'+t)\vec{i}+\vec{j}.$$

故若 $t+t'$ 之值既定,則 MM' 弦之方向亦隨之而定.設令 $t+t'=\theta$,則 MM' 之中點之矢座標爲

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MM'}=\frac{1}{4p}(t'^2+t^2)\vec{i}+\frac{1}{2}(t'+t)\vec{j}.$$

或 $$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{4}(t^2-2tt')\vec{i}+\frac{\theta}{2}\vec{j}.$$

此矢可書爲 $$\overrightarrow{OQ}=\lambda\vec{i}+\frac{\theta}{2}\vec{j}.$$

此中之 θ 爲一常數(決定矢之方向), λ 爲一變數. 隨 MM'

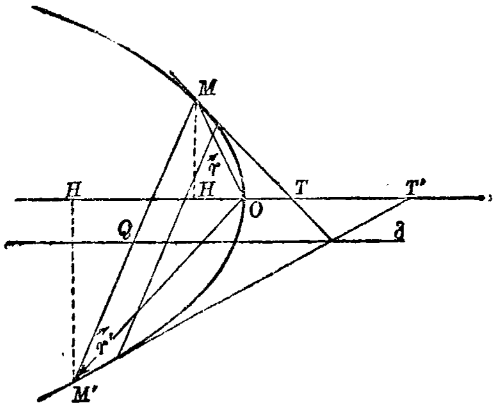


圖 114

弦之位置而定. $\overrightarrow{OQ}$ 方程式所表者, 爲自 $\frac{\theta}{2}\vec{j}$ 之終點所引平行於對稱軸之直線. 換言之,無論弦之方向如何,其相應之共軛直徑, 常平行於對稱軸. 此爲拋物線之一特性.

又 M, M' 二點之切線式,各爲

$$\vec{\tau}=\frac{t^2}{2p}\vec{i}+t\vec{j}+\mu\left(\frac{t}{p}\vec{i}+\vec{j}\right),$$

$$\vec{\tau}' = \frac{t'^2}{2p}\vec{i} + t'\vec{j} + \nu\left(\frac{t'}{p}\vec{i} + \vec{j}\right).$$

若令 $$\mu = \frac{t'-t}{2}, \qquad \nu = \frac{t-t'}{2}.$$

則 $$\vec{\tau} = \vec{\tau}' = \frac{tt'}{2p}\vec{i} + \left(\frac{t+t'}{2}\right)\vec{j} = \frac{tt'}{2p}\vec{i} + \frac{\theta}{2}\vec{j}.$$

表明"M 與 M' 之切線,相交於與 MM' 弦相應之直徑上".

§ 95 拋物線方程式之另一形式

將 $$\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{2p}(t'^2 - t^2)\vec{i} + (t'-t)\vec{j}$$ 加以變化,可得

$$\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{2p}(t'-t)^2\vec{i} + (t'-t)\left\{\frac{t}{p}\vec{i} + \vec{j}\right\}.$$

令 $$\vec{\alpha} = \frac{1}{p}\vec{i}, \qquad \vec{\beta} = \frac{t}{p}\vec{i} + \vec{j}.$$

則 $$\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{2}(t'-t)^2\vec{\alpha} + (t'-t)\vec{\beta}.$$

$\vec{\beta}$ 平行於 M 之切線,$t'-t$ 爲一變數,故拋物線之方程式,

可書爲 $$\vec{\rho} = \frac{t^2}{2}\vec{\alpha} + t\vec{\beta} \tag{2319}$$

矢之原點,可在拋物線上任一點.二軸則各爲過此點之直徑與切線,茲運用此式以證明下之性質:

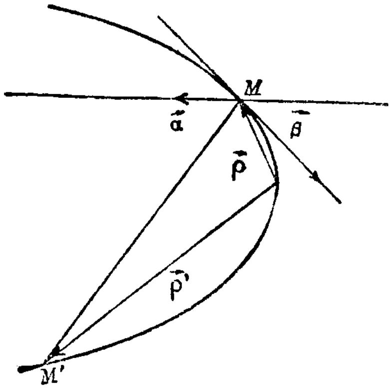


圖 115

"將內接於拋物線之三角形之三邊延長，各交對角頂之切線於三點，此三點共線".

設 O, M, M' 爲一任意內接三角形，以 O 點爲原點，則 M 與 M' 之徑矢各爲

$$\vec{\rho}=\frac{t^2}{2}\vec{a}+t\vec{\beta},$$

$$\vec{\rho}'=\frac{t'^2}{2}\vec{a}-t'\vec{\beta}.$$

令 $\vec{\pi}, \vec{\pi}', \vec{\pi}''$ 各爲三交點 I_1, I_2, I_3 之徑矢，則

$$\vec{\pi}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MI_1}=\frac{t^2}{2}\vec{a}+t\beta+x(t\vec{a}+\vec{\beta}),$$

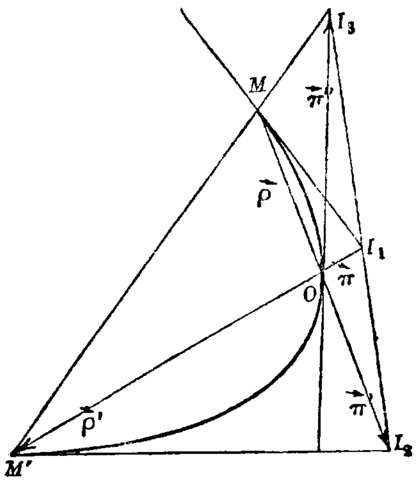


圖 116

又
$$\vec{\pi} = x'\overrightarrow{OM'} = x'\left(\frac{t'^2}{2}\vec{\alpha} + t'\vec{\beta}\right).$$

比較二式中 $\vec{\alpha}$ 與 $\vec{\beta}$ 之係數, 得

$$\frac{t^2}{2} + xt = \frac{x't'^2}{2}, \qquad t + x = x't'.$$

解之, 得
$$x' = \frac{t^2}{2tt' - t'^2}.$$

故
$$\vec{\pi} = \frac{t^2}{2t - t'}\left(\frac{t'}{2}\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right).$$

同樣, 得
$$\vec{\pi} = \frac{t'^2}{2t' - t}\left(\frac{t}{2}\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right).$$

但
$$\overrightarrow{\pi''}=\overrightarrow{OM}+y\overrightarrow{MM'}=\vec{\rho}+y(\rho'-\rho)$$
$$=\frac{t^2}{2}\vec{\alpha}+t\vec{\beta}+y\left[\frac{t'^2-t^2}{2}\vec{\alpha}+(t'-t)\vec{\beta}\right].$$

又
$$\overrightarrow{\pi''}=z\vec{\beta}.$$

比較 $\vec{\alpha}$ 與 $\vec{\beta}$ 之係數, 得　$z=\dfrac{tt'}{t+t'}$.

故
$$\overrightarrow{\pi''}=\frac{tt'}{t+t'}\vec{\beta}.$$

但
$$\frac{2t-t'}{t}\vec{\pi}-\frac{2t'-t}{t'}\overrightarrow{\pi'}-\frac{t^2-t'^2}{tt'}\overrightarrow{\pi''}$$
$$=t\left(\frac{t'}{2}\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)-t'\left(\frac{t}{2}\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)-(t-t')\vec{\beta}=0.$$

同時
$$\frac{2t-t'}{t}-\frac{2t'-t}{t'}-\frac{t^2-t'^2}{tt'}=0.$$

故 $\vec{\pi},\overrightarrow{\pi'}$ 與 $\overrightarrow{\pi''}$ 之端點在一直線上.

§96 定理

(2318) 式於研究與焦點有關係之性質時,較直用 (2315) 式爲便, 茲運用之於二重要性質, 以爲例:

以焦點爲原點, 抛物線上二點 M 與 M' 之徑矢, 各爲

$$\vec{\rho}=\frac{1}{2p}(t^2-p^2)\vec{i}+t\vec{j},$$

$$\vec{\rho'}=\frac{1}{2p}(t'^2-p^2)\vec{i}+t'\vec{j}.$$

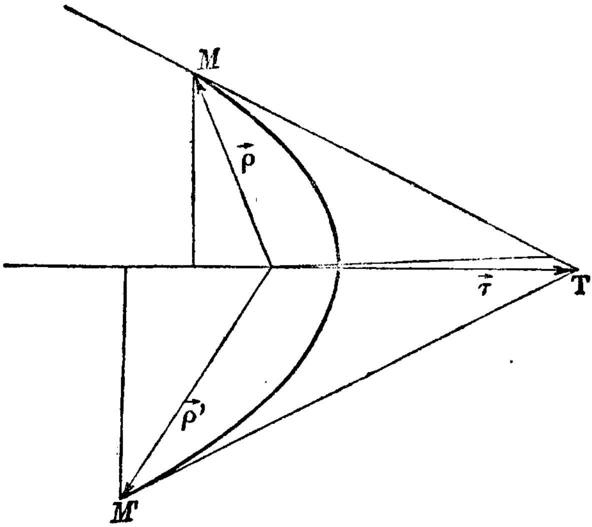


圖 117

作二點之切線交於 T 命 $\vec{\tau}$ 爲其徑矢，得

$$\vec{\tau}=\overrightarrow{SM}+\overrightarrow{MT}=\frac{1}{2p}(t^2-p^2)\vec{i}+t\vec{j}+x\left(\frac{t}{p}\vec{i}+\vec{j}\right),$$

又 $$\vec{\tau'}=\overrightarrow{SM'}+\overrightarrow{M'T}=\frac{1}{2p}(t'^2-p^2)\vec{i}+t'\vec{j}+y\left(\frac{t'}{p}\vec{i}+\vec{j}\right).$$

比較二式中 $\vec{i}$ 與 $\vec{j}$ 之係數，得聯立方程式，解之，得：

$$x=\frac{1}{2}(t'-t),\qquad y=\frac{1}{2}(t-t').$$

故 $$\vec{\tau}=\frac{1}{2p}(tt'-p^2)\vec{i}+\frac{1}{2}(t+t')\vec{j}.$$

表明"二切線之交點至對稱軸之距離,爲二切點至同軸之距離之等差級數中項".

將 $\vec{\rho}$, $\vec{\rho'}$ 與 $\vec{\tau}$ 自乘,得 $$\tau^2=\frac{1}{4p^2}(t^2+p^2)(t'^2+p^2),$$

$$\rho^2=\frac{1}{4p^2}(t'^2+p^2),\qquad \rho'^2=\frac{1}{4p^2}(t'^3+p^2).$$

得 $$\rho\rho'=\frac{1}{4p^2}(t^2+p^2)(t'^2+p^2)=\tau^2.$$

表明"二切線之交點,至焦點之距離,爲二切點至焦點距離之等比級數中項".

§ 97　算子 φ 與拋物線

上述討論雙曲線與拋物線之方程式,實不過將二者之輔變數方程聯爲一式而已;其爲矢算,不甚澈底;雙曲線與橢圓線有極相似之性質,故於以 φ 算子討論橢圓後,若再用同式研究雙曲線,未免失之重複無味,不得不稍加改變.至於拋物線,則 φ 算子之運用,至今尚未提及,請於章末出之.

於圓錐曲線之通式 (2302),令 $e=1$,得

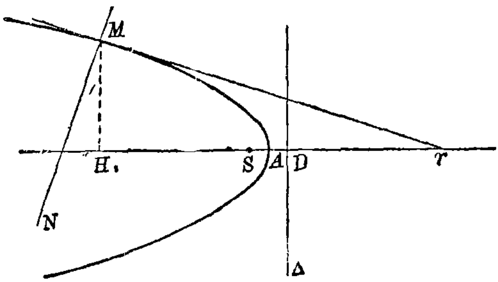


圖 118

$$\rho^2 d^2 = \{d^2 - (\vec{d}\cdot\vec{\rho})\}^2.$$

令
$$\overrightarrow{\varphi\rho} = \frac{\vec{\rho} - \vec{d}^{-1}(\vec{\rho}\cdot\vec{d})}{d^2},$$

則拋物線之方程式變為

$$(\vec{\rho}\cdot\overrightarrow{\varphi\rho} + 2\vec{d}^{-1}) = 1. \qquad (2320)$$

此式中之 φ, 具有於橢圓線中討論過之性質, 由

$$(\vec{d}\cdot\overrightarrow{\varphi\rho}) = \frac{(\vec{d}\cdot\vec{\rho}) - (\vec{d}\cdot\vec{\rho})}{d^2} = 0.$$

可知 $\overrightarrow{\varphi\rho}$ 為一垂直於對稱軸之矢.

又
$$d^2\cdot\overrightarrow{\varphi\rho} = \vec{\rho} - \vec{d}^{-1}(\vec{d}\cdot\vec{\rho})$$

表明 MH 上某一矢,等於 SM 與 AH 上某一矢之差, 故必需

$$\overrightarrow{MH} = d^2\varphi\rho, \qquad \overrightarrow{SH} = \vec{d}^{-1}(\vec{d}\cdot\vec{\rho}) = \vec{d}(\vec{d}^{-1}\cdot\vec{\rho}).$$

將 (2320) 式微分之，得

$$(\overrightarrow{d\rho}\cdot\overrightarrow{\varphi\rho}+\vec{d}^{-1})=0$$

故 $\overrightarrow{\varphi\rho}+\vec{d}^{-1}$ 決定 $M(\vec{\rho})$ 點之法線方向，故

$$\vec{\sigma}=\vec{\rho}+x(\overrightarrow{\varphi\rho}+\vec{d}^{-1}) \tag{2321}$$

爲拋物線之法線之方程式.

若欲求拋物線上 M 點之切線，只須寫出切線上任一線段均垂直於此點之法線卽得，設 $T(\vec{\tau})$ 爲切線上一點，則 $\vec{\tau}-\vec{\rho}$ 爲切線上一線段，故切線之方程式爲

$$(\vec{\tau}-\vec{\rho}\cdot\overrightarrow{\varphi\rho}+\vec{d}^{-1})=0.$$

由 (2320) 式，變化之，得

$$(\vec{\tau}\cdot\overrightarrow{\varphi\rho}+\vec{d}^{-1})+(\vec{d}\cdot\vec{\rho})=1. \tag{2322}$$

令 $\vec{\tau}=x\vec{d}$，爲切線交對稱軸之點. 代入上式，得

$$x=1-(\vec{d}^{-1}\cdot\vec{\rho}).$$

因 $$x\vec{d}-\frac{1}{2}\vec{d}=\frac{1}{2}\vec{d}-\vec{d}(\vec{d}^{-1}\vec{\rho}).$$

得 $$\overrightarrow{ST}-\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SH},$$

或 $$\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{HA}$$

與上法所得者相同

§ 98 算子 φ 之運用

茲以 φ 算子演一較爲複雜之題, 以結本章.

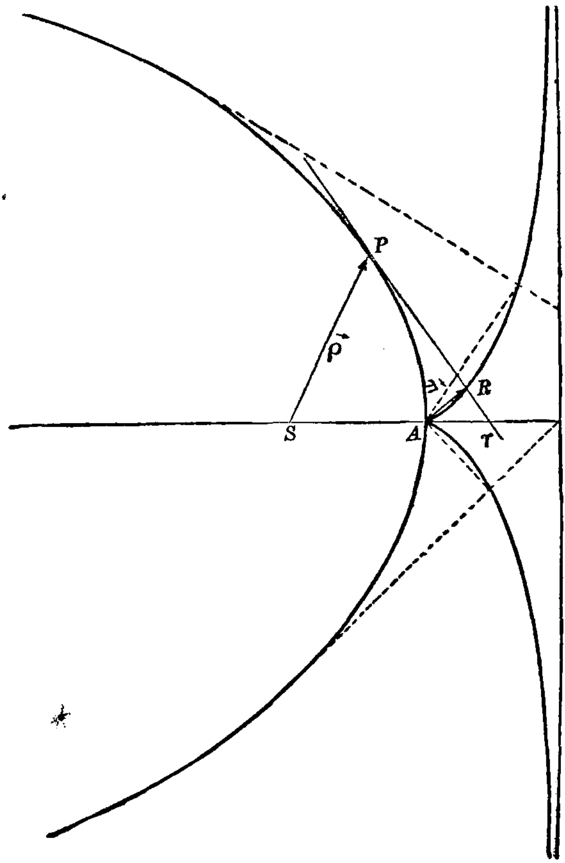


圖 119

題： 自拋物線之頂點，作切線之垂線；求垂線足之軌跡.

設 PT 爲 P 點之切線，R 爲自 A 所作之垂線足，

又 $$\vec{\pi}=\overrightarrow{AR},\qquad \vec{\rho}=\overrightarrow{SP}.$$

則 $$\vec{\pi}=x(\overrightarrow{\varphi\rho}+\vec{d}^{-1}).\tag{1}$$

因 $$\overrightarrow{SR}=\frac{\vec{d}}{2}+\vec{\pi}$$

之終點在切線上，適合於 (2322) 式；代入 (2322) 并注意

$$(\vec{d}\cdot\overrightarrow{\varphi\rho})=0,$$

$$(\vec{d}\cdot\vec{d}^{-1})=1.$$

得 $$2(\vec{\pi}\cdot\overrightarrow{\varphi\rho})+2(\vec{\tau}\cdot\vec{d}^{-1})+2(\vec{\rho}\cdot\vec{d}^{-1})=1.\tag{2}$$

又拋物線之方程式爲

$$(\vec{\rho}\cdot\overrightarrow{\varphi\rho}+2\vec{d}^{-1})=1.\tag{3}$$

由 (1), (2), (3) 三式，消去 $\vec{\rho}$ 與 $\vec{x}$，即得所求軌跡之方程式.

以 $\vec{d}$ 及 $\overrightarrow{\varphi\rho}$ 數乘 (1) 式之兩邊，得

$$(\vec{d}\cdot\vec{\pi})=x,\qquad (\vec{\pi}\cdot\overrightarrow{\varphi\rho})=x(\overrightarrow{\varphi\rho})^2.$$

代入 (2) 式，得

$$2x(\overrightarrow{\varphi\rho})^2+2(\vec{d}^{-1}\cdot\vec{\pi})+2(\vec{d}^{-1}\cdot\vec{\rho})=1.\tag{4}$$

又 $$(\vec{\rho}\cdot\overrightarrow{\varphi\rho})=\frac{\rho^2-(\vec{d}^{-1}\cdot\vec{\rho})(\vec{d}\cdot\vec{\rho})}{d^2}=\frac{\rho^2-d^{-2}(\vec{d}\cdot\vec{\rho})^2}{d^2}$$

$$=\frac{\rho^2-d^{-2}(\vec{d}\cdot\vec{\rho})-2(\vec{d}\cdot\vec{\rho})(\vec{d}^{-1}\cdot\vec{\rho})}{d^2}$$

$$=\frac{\{\vec{\rho}-\vec{d}^{-1}(\vec{d}\ \vec{\rho})\}^2}{d^2}=d^2(\overrightarrow{\varphi\rho})^2.$$

代入 (3) 式, 得 $d^2(\overrightarrow{\varphi\rho})^2+2(\vec{d}^{-1}\cdot\vec{\rho})=1.$ (5)

(4) 式與 (5) 式相減, 以 $(\vec{\pi}\cdot\vec{d})=x$ 代入, 得

$$\{2(\vec{d}\cdot\vec{\pi})-d^2\}\ \overrightarrow{\varphi\rho})^2+2(\vec{d}^{-1}\cdot\vec{\pi})=0. \qquad (6)$$

由 (1) 式, 得 $x\overrightarrow{\varphi\rho}=\vec{\pi}-x\vec{d}^{-1}=\vec{\pi}-(\vec{d}\cdot\vec{\pi})\vec{d}^{-1}.$

以 x^2 或 $(\vec{d}\cdot\vec{\pi})^2$ 乘 (6) 式, 將 $x\overrightarrow{\varphi\rho}$ 之值代入, 得

$$\{2(\vec{d}\cdot\vec{\pi})-d^2\}\{\vec{\pi}-(\vec{d}\cdot\vec{\pi})\vec{d}^{-1}\}^2+2(\vec{\pi}\cdot\vec{d}^{-1})(\vec{\pi}\cdot\vec{d})^2=0.$$

簡之, 得 $2\pi^2(\vec{\pi}\cdot\vec{d})-\pi^2d^2+\ \vec{\pi}\cdot\vec{d})^2=0$

爲所求軌跡之矢方程式.

令 $\vec{\pi}=x\vec{i}+y\vec{j},\qquad \vec{d}=a\vec{i}.$

上式變爲 $2(x^2+y^2)\cdot ax-a^2(x^2+y^2)+a^2x^2=0,$

或 $$y=\pm\sqrt{\frac{2x}{a-2x}}.$$

此式表一蔓葉線, 以拋物線之準線爲其漸近線.

第四章　似位形　反値形

§ 99. 似位形之定義

有一圖形 F 及一定點 O 自 O 點引諸直線與 F 交於 $A, B, C, \cdots\cdots$ 諸點. 於此諸直線上, 取 $A', B', C', \cdots\cdots$ 令

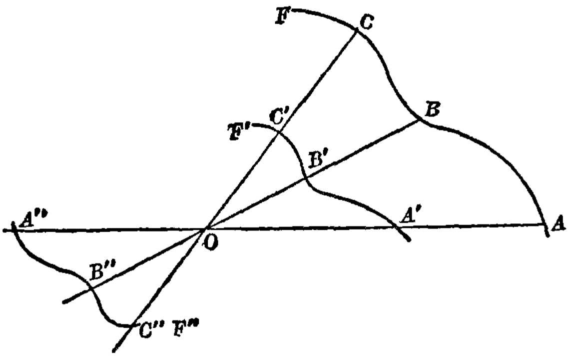


圖 120

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}=\cdots\cdots=h.$$

連接 $A', B' C'$ 諸點, 得另一圖形 F' 稱爲 F (原形) 之似位形, 而 O 爲似位心, h 爲似位比.

於諸直線上取 A'', B'', C'', ……令

$$\frac{\overline{OA''}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OB''}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OC''}}{\overline{OC}}=\cdots\cdots=-h.$$

連 A'', B'', C'', ……諸點,亦得一圖形 F'', 仍爲 F 之似位形. F' 與 F'' 則稱爲以 O 爲心之對稱圖形. 可以 O 爲旋轉心, 作 180° 之旋轉, 使 F' 與 F'' 相重合.

設 h 爲一正數, 則 A, A'; B, B' 諸點, 均在 O 之同側, F' 稱爲 F 之似位正形. 而 A, A'' 等各在 O 之一側, F'' 稱爲 F 之似位倒形.

設 F 上一點 P 之徑矢爲 $\vec{\rho}$, 依定義, 其似位形上與之相應之點 P' 之徑矢, 當爲

$$\vec{\rho'}=h\vec{\rho}. \tag{2401}$$

其似位形之對稱形之徑矢爲

$$\vec{\rho''}=-\vec{\rho'}=-h\vec{\rho}$$

今若以一點 $A(\vec{a})$ 爲似位心, P 與 $P'''(\vec{\rho'''})$ 爲似位之點, 得

$$\frac{\overline{AP'''}}{\overline{AP}}=h$$

或

$$\vec{\rho'''}-\vec{a}=h(\vec{\rho}-\vec{a}). \tag{2402}$$

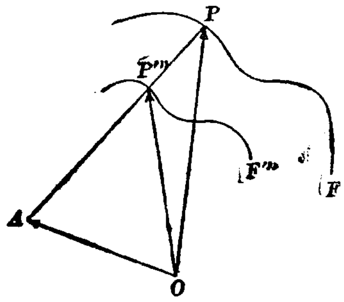


圖 121

此式與 (2401) 相減, 可得

$$\overrightarrow{\rho'''}-\overrightarrow{\rho'}=\overrightarrow{a}(1-h).$$

此式表明: 自 F' 變至 F''', 或自 F''' 變至 F', 其間之手續, 僅為一平行於 $\overrightarrow{a}$ 之平行移動.

§ 100. 直線與平面之似位形

設以原點為似位心, 欲求一直線

$$\overrightarrow{\rho}=\overrightarrow{b}+\lambda\overrightarrow{a}$$

之似位形, 可令 $\overrightarrow{\rho'}=h\overrightarrow{\rho}$, 得

$$\overrightarrow{\rho'}=h\overrightarrow{b}+\lambda h\overrightarrow{a}.$$

此式仍表一直線與原直線平行, 隨 h 之為正為負, 與其原形同向或異向.

二相交之直線，其似位形亦爲相交之二直線，且各與原圖形相平行，故似位形二直線之夾角與原直線之夾角相等. 即謂角之似位形，爲一等角.

欲求平面 $(\vec{d}\cdot\vec{\rho})=c$

之似位形，可以 $\vec{\rho}=\dfrac{\vec{\rho}'}{h}$ 代入上式，得

$$(\vec{d}\cdot\vec{\rho}')=hc$$

此式仍表一平面，與原平面平行. 原點與原平面之距離爲 $\dfrac{c}{d}$，至其似位形之距離則爲 $\dfrac{hc}{d}$.

二平面之平面角，其似位形爲相等之平面角，與二直線間夾角之關係相似.

§ 101. 球與圓之似位形

球與圓之矢方程式，均爲：

$$(\vec{\rho}-\vec{c})^2=R^2.$$

故其似位形，亦有相類之性質. 以 $\vec{\rho}=\dfrac{\vec{\rho}'}{h}$ 代入上式，得：

$$(\vec{\rho}'-h\vec{c})^2=h^2R^2.$$

此式就球而言，則表球之似位形，而爲一球. 就圓而言，則

表圓之似位形,而為一圓. 其中心在 $h\vec{c}$ 之終點,半徑為 hR.

若似位心為圓或球之中心, 則原形與似位形之方程式各為

$$\rho^2=R^2$$

與

$$\rho'^2=h^2R^2$$

僅為二同心之球, 或同心圓.

§102 任意二球(或二圓)均為似位形(定理)

設二球之半徑各為 R, R'. 中心各為 C, C'. 於聯心線上取一點 O 為原點, 令

$$\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}=\frac{R'}{R}. \qquad (1)$$

令 $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, 則 C 球之方程式為

$$(\vec{\rho}-\vec{c})=R^2.$$

今求 C 之似位正形, 欲使似位比等於 $\frac{R'}{R}$. 以 $\vec{\rho}=\dfrac{\vec{\rho}'}{\frac{R'}{R}}$ 代入上式, 得

$$\left(\vec{\rho}'-\frac{R'}{R}\vec{c}\right)^2=R^2\cdot\frac{R'^2}{R^2}.$$

由 (1), 知 $\frac{R'}{R}\vec{c}=\vec{c}'$, 故 C 之似位形為

$$(\vec{\rho}-\vec{c}')=R'^2.$$

此適爲 C' 球之似位形. 故知二球常以 O 點爲心, 互爲似位正形.

今若於 CC' 上取 O' 爲原點, 令

$$\frac{\overline{O'C'}}{\overline{O'C}} = -\frac{R'}{R}. \tag{2}$$

而以 $\overrightarrow{O'C} = \vec{c}$, C 球之方程式爲

$$(\vec{\rho} - \vec{c})^2 = R^2,$$

其似位形之以 $-\dfrac{R'}{R}$ 爲似位比者, 有方程式

$$\left(\vec{\rho} + \frac{R'}{R}\vec{c}\right)^2 = R^2 \cdot \frac{R'^2}{R^2}.$$

注意 (2) $+\dfrac{R'}{R}\vec{c} = -\vec{c}$, 可得 $\qquad (\vec{\rho} - \vec{c'})^2 = R'^2.$

此式適爲 C' 球之矢方程式, 故知 C, C' 互爲似位反形,而

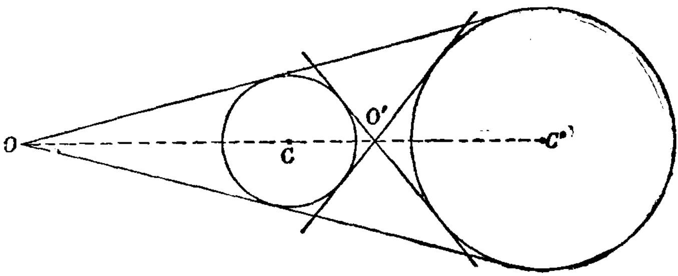


圖 122

以 O' 爲似位心.

上述球之似位關係，可將圓包入其中. 二圓亦常爲似位形.

§103 定理

與 F 似位之二圖形 F', F'' 亦爲似位形. 此三圖形兩兩相應之三似位心在一直線上.

取 F, F' 之似位心爲原點 O. 設 F, F'' 之似位心爲 $S(\vec{\sigma})$.

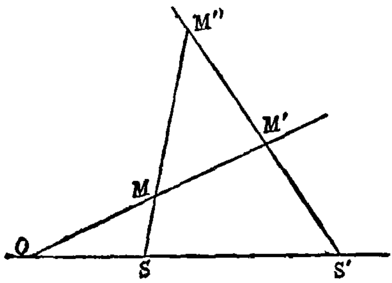


圖 123

設 M, M', M'' 爲 F F', F'' 上相應之點，其徑矢各爲 $\vec{\rho}, \vec{\rho'}, \vec{\rho''}$. 依假設：$M$ 與 M' 成似位

$$\vec{\rho'} = h\vec{\rho}. \tag{1}$$

M 與 M'' 成似位　$\vec{\rho''} - \vec{\sigma} = h'(\vec{\rho} - \vec{\sigma}),$　　(2)

或 $$\overrightarrow{\rho''}=h'\vec{\rho}+(1-h')\vec{\sigma}. \tag{2'}$$

於 OS 上取一點 $S'(\overrightarrow{\sigma'})$ 爲似位心 求 M' 之似位形 $M'''(\overrightarrow{\rho'''})$,

其方程式爲 $$\overrightarrow{\rho'''}-\overrightarrow{\sigma'}=\lambda(\overrightarrow{\rho'}-\overrightarrow{\sigma'}),$$

或 $$\overrightarrow{\rho'''}=\lambda\overrightarrow{\rho'}+(1-\lambda)\overrightarrow{\sigma'}.$$

由 (1), $$\overrightarrow{\rho'''}=\lambda h\vec{\rho}+(1-\lambda)\overrightarrow{\sigma'}. \tag{3}$$

此式與 (2′) 比較, 令 $\vec{\rho}$ 之係數相等, 得 $\lambda=\dfrac{h'}{h}$.

比較 (2′), (3) 之末項, 由

$$\left(1-\frac{h'}{h}\right)\overrightarrow{\sigma'}=(1-h')\vec{\sigma}$$

可得 $$\overrightarrow{\sigma'}=\frac{h(1-h')}{h-h'}\vec{\sigma}. \tag{4}$$

此式 $$\overrightarrow{\rho'''}=h'\vec{\rho}+(1-h')\vec{\sigma}$$

與 (2′) 全同. 表示 M''' 與 M'' 重合. 卽 M'' 與 M' 爲似位形. 其似位比爲 $\lambda=\dfrac{h'}{h}$, 似位心之徑矢爲 $\overrightarrow{\sigma'}$, 有如 (4) 式所決定.

本節之定理, 爲似位形之主要定理.

§ 104 似位形之切線性質

設原曲線各點之徑矢爲 $\vec{\rho}$, 其似位形各點之徑矢爲 $\overrightarrow{\rho'}$,

依定義 $$\vec{\rho}' = h\vec{\rho}.$$

此中之 h 為一常數，取上式兩邊之微分，得

$$\overrightarrow{d\rho'} = h\overrightarrow{d\rho}. \tag{2403}$$

$\overrightarrow{d\rho}$ 與 $\overrightarrow{d\rho'}$ 各示原形與似位形相應點之切線方位．上式既表 $\overrightarrow{d\rho'}$ 為 $\overrightarrow{d\rho}$ 之倍矢，不啻謂原形與似位形相應之點，其切線互成平行．此種性質，於既知原形而作似位形之圖形時，予以不少便利．

若原形為曲面時，(2403) 表出：相應二似位點之切面，互相平行．

§ 105. 反値形

設有一定點 O 與一圖形 F. 自 O 聯 F 上各點 $A, B, C,$

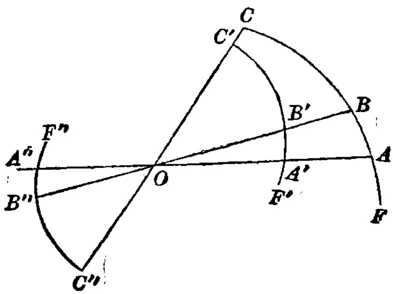


圖　124

……於其上取 A', B', C', ……諸點, 令

$$\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=\overline{OB}\cdot\overline{OB'}=\overline{OC}\cdot\overline{OC'}=\cdots\cdots=h$$

A, B, C, ……諸點合成之圖形 F', 謂之 F (原形) 之反值形 O 稱爲反值極, 或簡稱極. h 謂之反值冪.

設 $h>0$, A', B', C', ……與 A, B, C, ……同在 O 之一側. F' 特稱爲 F 之反值正形. 若使 A'', B'', C'', ……諸點, 有關係如:

$$\overline{OA}\cdot\overline{OA''}=\overline{OB}\cdot\overline{OB''}=\overline{OC}\cdot\overline{OC''}=\cdots\cdots=h.$$

則 A'', B'', C'', ……諸點所成之圖形, 與 F' 對稱, 稱爲 F 之反值倒形.

設 F 上一點 P 之徑矢爲 $\vec{\rho}$, F' 上與相應之點爲 $P'(\vec{\rho'})$,

由 $$\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=h$$

得 $$\overrightarrow{OP'}=\frac{h}{\overline{OP}}.$$

但 $\overrightarrow{OP}$ 與 $\overrightarrow{OP'}$ 同方位, 故上式可以矢之記號加入, 得

$$\vec{\rho'}=h\vec{\rho}^{-1} \quad 或 \quad \vec{\rho}=h\vec{\rho'}^{-1} \tag{2404}$$

爲原形與反值形之關係式.

若反值極爲一點 $A(\vec{a})$, 則原形與其反值形之關係爲

$$\vec{\rho'}-\vec{a}=h(\vec{\rho}-\vec{a})^{-1}. \tag{2405}$$

§106　平面與直線之反値形

平面與直線有同樣之方程式：(2111) 與 (2116). 故研究平面之反値形，可以推得直線之反値形.

以反値極爲原點，於平面之方程式

$$(\vec{d}\cdot\vec{\rho'})=c \tag{1}$$

中，以 $\vec{\rho'}=h\vec{\rho}^{-1}$ 代入，得

$$(\vec{d}\cdot h\vec{\rho}^{-1})=c.$$

以 ρ^2 乘此式，可得

$$\rho^2-\frac{h}{c}(\vec{d}\cdot\vec{\rho})=0,$$

或

$$\left(\vec{\rho}-\frac{h}{2c}\vec{d}\right)^2=\frac{h^2}{4c^2}d^2. \tag{2}$$

此爲一球之方程式，其半徑爲 $\frac{h}{2c}d$，且經過原點. 自原點至球心之半徑，與原平面成垂直.

就一平面上之諸矢言之，(1) 表一直線，(2) 僅表一圓，爲直線 (1) 之反値形. 其圓心與原直線之關係，與反値球與原平面之關係同.

107. 球(或圓)之反值形

圖形 F' 爲 F 之反值形. 反之, F 必爲 F' 之反值形. 蓋公式 (2404) 至爲對稱也. 前節已知平面之反值形, 爲一經過反值極之球, 故經過反值極之球, 必爲一平面, 殆無疑義. 玆再證之以爲公式 (2404) 之運用.

球旣經過反值極, 以反值極爲原點, 其方程式爲

$$\rho'^2-2(\vec{c}\cdot\vec{\rho'})=0.$$

今以 $\vec{\rho'}=h\vec{\rho}^{-1}$ 代入上式, 將附撇取消, 得

$$h^2\vec{\rho}^{-2}-2(\vec{c}\cdot h\vec{\rho}^{-1})=0.$$

以 ρ^2 乘此式, 得 $$(\vec{c}\cdot\vec{\rho})=\frac{h}{2}$$

爲平面之方程式. 此平面垂直於 $\vec{c}$ (通過原點之半徑), 有如上節所述. 由原點至此平面之距離爲: $\frac{h}{2c}$.

就普遍情形言之, 球之反值形, 實不必爲一平面. 反值形爲平面之球, 僅少數之特例耳.

設球之方程式爲

$$(\vec{\rho}-\vec{c})^2=R^2 \quad 或 \quad \rho^2-2(\vec{c}\cdot\vec{\rho})=R^2-c^2.$$

以原點爲反値極，將 $\vec{\rho}' = h\vec{\rho}^{-1}$ 代入，取消附撇，可得

$$h^2\vec{\rho}^{-2} - 2(\vec{c}\cdot h\vec{\rho}^{-1}) = R^2 - c^2.$$

以 ρ^2 乘上式，得

$$h^2 - 2h(\vec{c}\cdot\vec{\rho}) + (c^2 - R^2)\rho^2 = 0,$$

或
$$\rho^2 - \frac{2h}{c^2 - R^2}(\vec{c}\cdot\vec{\rho}) + \frac{h^2}{c^2 - R^2} = 0,$$

$$\left(\vec{\rho} - \frac{h}{c^2 - R^2}\vec{c}\right)^2 = \frac{h^2c^2}{(c^2 - R^2)^2} - \frac{h^2}{c^2 - R^2} = \frac{h^2R^2}{(c^2 - R^2)^2}.$$

此式仍表一球，其中心 $\frac{h}{c^2 - R^2}\vec{c}$，與原球之中心與反値極同在一直線上，而其半徑爲 $\left|\frac{h}{c^2 - R^2}\right|R$.

當 $c^2 = R^2$，反値極經過球面.反値球之半徑增至無窮大，而成一平面，與上述之特例相合.

將本節所論之矢，加以限制，使其常在一平面上，則所有"球"字，均宜改爲"圓"字. 通常：圓之反値形仍爲一圓；其反値極在圓周上者，反値形爲一直線，有如上述.

§ 108. 反値形之切線

設 $P(\vec{\rho})$ 與 $P'(\vec{\rho}')$ 爲相應之二反値點，各在反値曲線

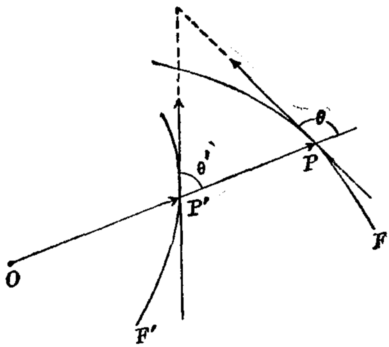


圖 125

F 與 F' 上,得 $\qquad \vec{\rho'} = h\vec{\rho}^{-1},$

或 $\qquad (\vec{\rho} \cdot \vec{\rho'}) = h.$

取出式兩邊之微分,得

$$(\overrightarrow{d\rho} \cdot \vec{\rho'}) + (\overrightarrow{d\rho'} \cdot \vec{\rho}) = 0. \tag{1}$$

此式中, $\overrightarrow{d\rho}$ 表 P 點之切線方位, $\overrightarrow{d\rho'}$ 表 P' 點之切線方位.

設 $\overrightarrow{ds}, \overrightarrow{ds'}$ 各為 F 與 F' 在 P, P' 點之增量.

由 (1513), $\qquad \overrightarrow{d\rho} = \overrightarrow{ds}, \qquad \overrightarrow{d\rho'} = \overrightarrow{ds'}.$

(1) 卽變為 $\qquad (\vec{\rho} \cdot \overrightarrow{ds'}) + (\vec{\rho'} \cdot \overrightarrow{ds}) = 0.$

令 P, P' 之切線,與 PP' 之夾角為 θ 與 θ', 則上式可書如

$$\rho\, ds' \cos\theta' + \rho' ds \cos\theta = 0. \tag{2}$$

又因 O, P', P 三點,在一直線上,故

$$\rho \cdot \rho' = h.$$

微分之,得 $$\rho\, d\rho' + \rho' d\rho = 0.$$

反値形中,ρ 增大則 ρ' 減小,ρ 減小則 ρ' 反增大.故 $d\rho$ 與 $d\rho'$ 之符號常前反.今設 F 與 F' 爲反値正形,則 ds 與 ds' 有同樣之符號.若以 ds, ds' 代 $d\rho, d\rho'$ 時,必須換其中之一之符號,始能適合上式,故

$$\rho ds' - \rho' ds = 0.$$

因此式之故,(2) 卽變爲

$$\rho\, ds'(\cos\theta + \cos\theta') = 0,$$

或 $$\cos\theta + \cos\theta' = 0;$$

故得 $$\theta' = 180° - \theta.$$

此式表明 PP' 線與 P, P' 二點之切線,圍成一等邊三角形 PTP' (圖 105),其底邊爲 PP'.

若所討論之原形,不爲曲線而爲曲面時,其切面之關係,與曲線之切線性質相類.

下編　力學要義

第一章　力學原理

§ 109. 運動與時間

空間一點 M 與另一點 O 之相對位置常不變更者，以力學之術語言之，則謂 M 對於 O 爲靜止，或 O 對於 M 爲靜止．今以 O 爲原點，M 之徑矢爲 $\vec{\rho}$，表示 M 與 O 成相對的靜止時，即謂 $\vec{\rho}$ 爲一不變之矢．

當 O 與 M 之相對位置變更時，$\vec{\rho}$ 亦隨之而變，其變化不特有 ρ 之或伸或縮，亦有 $\overrightarrow{\rho_1}$ 繞 O 點之旋轉．此時之 M，對於 O 而言，爲一運動之點．M 在空間所劃之曲線稱爲動徑．支配 $\vec{\rho}$ 之變化，使其終點劃此曲線之變數 t，稱爲時間．

$$\vec{\rho}=\overrightarrow{\varphi t}. \tag{3101}$$

將此式投射於一過 O 點之正座標系上，得

$$x=\varphi_1(t),\qquad y=\varphi_2(t),\qquad z=\varphi_3(t).$$

此爲一曲線之參數方程式, t 爲參數,決定 M 點之動徑.

上述之定義,至爲抽象,殆爲一純粹之算學定義.實際上:所謂點者,實不必爲一幾何之點.對物理學家言,可爲電子,對兵工家言,可爲礮彈,對天文學家言,可爲一碩大無朋之星體(多數點之集合,其各點相對之位置不變者,則稱爲固體).至於時間之意義,汎言之,則人皆知爲何物,但一究其實際,則不知已費去若干哲人之筆墨矣.至今仍成一疑問,當非本書所宜討論,今但作一粗俗而近於滑稽之解釋曰:時間者鐘錶所計之量也.

言運動,必須設一比較之標準點,言時間,又必須有運動,故研究力學最要之點即在此標準點之選擇.理論力學中,座標軸定位之愼重,即此理也.

§110　刻卜勒原理　力

刻氏以爲:"不受任何外界影響之物體,其原爲靜止者,則常爲靜止,若已在運動者,則當以不變之速度,作一永久之直線運動".

此種物體動者恆動,靜者恆靜之性質,謂之物體之慣性.

然就吾人之經驗言之,固未嘗見有永久不變其狀態之

物,動者終有一時,可以歸於靜止.靜者亦必有時而動,是殆因絕對不受任何外界影響之物,僅能於理想中尋求之.實際上,一切物體均在可能變易其狀態之情況中,而此變易其動靜狀態之原因,即謂之力.

動者靜,靜者動,其原因在力.動者雖仍在運動狀態中,然其動徑已不復爲一直線,或動徑雖仍爲一直線,而動體之行由徐趨急,自速轉遲,就慣性原理言之,均非自然狀態,其使之變化之原因,亦爲力.

今有一質點 M,當某一剎那,其單位時間內可能變易之

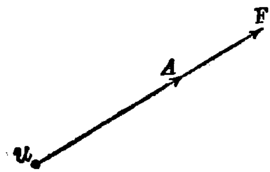


圖 126

速度,爲此一剎那之加速度(加速度之意義詳見第二章).以 $\vec{\gamma}=\overrightarrow{MA}$ 表之.習慣上,認爲此加速度之發生,係因有一外力加於 M 上,此力之方向與方位,全與 $\overrightarrow{MA}$ 相同,其度量與 $\overline{MA}$ 之比,爲一常數.力既具有向量之三條件,故可以矢表之,設 $\vec{f}$ 表此力,得

$$\vec{f}=m\vec{\gamma}. \tag{3102}$$

此中之 m 爲一常數,係質點本身特質之一,稱爲質點之質量.$\vec{f}$ 幷非自由矢,力旣施於 M 表示之時,卽以 M 爲原點,稱爲此力之作用點.

§ 111. 伽利略原理

原理:"同時施諸力於一物體,所給與此物體之加速度,與分別施力於此物,所宜得之加速度之總和同".

例如以 $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \cdots\cdots \overrightarrow{F_i}, \cdots\cdots \overrightarrow{F_n}$ 同時施於一物體 P P 卽得加速度 $\vec{\gamma}$. 今若以 $\overrightarrow{F_i}$ 等分別施於 P, 其所宜得之加速

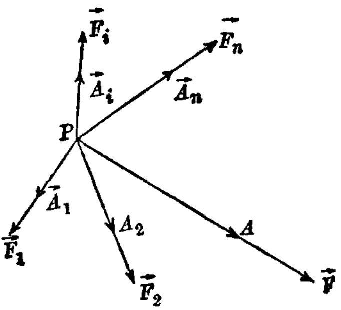


圖 127

度各爲 $\overrightarrow{\gamma_i}$, 此諸加速度之和爲

$$\overrightarrow{\gamma'}=\Sigma\overrightarrow{\gamma_i}.$$

伽利略原理所示卽爲: $\vec{\gamma}=\vec{\gamma}'$.

但 P 旣有加速度 $\vec{\gamma}$, 必受一力之作用

$$\vec{F}=m\vec{\gamma}. \tag{1}$$

又 $\vec{\gamma}_i=\dfrac{\vec{F_i}}{m}$, 故 $\vec{\gamma}=\vec{\gamma}'=\Sigma\dfrac{\vec{F_i}}{m}=\dfrac{1}{m}\Sigma\vec{F_i}$.

以此值代入 (1), 得 $$\overrightarrow{}=\Sigma\vec{F_i}. \tag{3103}$$

$\vec{F}$ 稱爲 $\vec{F_i}$ 諸力之合力, 而 $\vec{F_i}$ 諸力則稱爲 $\vec{F}$ 之分力, 或元素. 因力之代表物爲矢, 故分力與合力之關係, 可運用平行四邊形法則以求之.

§ 112 牛頓原理

原理: "一物體施力於他物體, 則同時他物體亦加一力於此物體. 此二力之大小相等, 方向相反".

例如, 物體 A 施力 $\vec{F}$ 於物體 B, 此力之方位與 AB 直

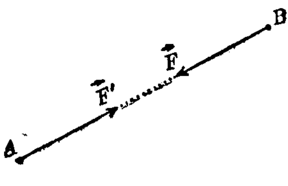


圖 128

線同，依牛頓原理，B 亦施一力 $\overrightarrow{F'}$ 於 A，其方位仍爲 AB 大小與 F 相同，而方向相反，適爲反矢之性質：

$$\overrightarrow{F'}=-\overrightarrow{F}$$

$\overrightarrow{F}$ 稱爲原動力，$\overrightarrow{F'}$ 稱爲反動力，二者之和爲零.

$$\overrightarrow{F}+\overrightarrow{F'}=0. \tag{3104}$$

在固體內，各組成分子間互相作用之力謂之內力（例如內聚力等）．原因不自分子本體而來之力曰外力．依據牛頓原理，任意二分子間作用之合力爲零．如是推之至於各部分子，其相互間作用之力之總和亦爲零．

固體同時受內外力之作用試一尋諸力之合力，則因內力之合力爲零，故諸力之總和僅爲外力之合力．今以 $\overrightarrow{F_i}$ 表內力，$\overrightarrow{F_e}$ 表外力，$\overrightarrow{F}$ 表固體所受任意之力（不論內力或外力）可得

$$\Sigma\overrightarrow{F_i}=0, \qquad \Sigma\overrightarrow{F}=\Sigma\overrightarrow{F_e}. \tag{3105}$$

上述之三原理，刻卜勒原理亦稱慣性原理，伽利略原理亦稱合力原理，牛頓原理，又名反動力原理（或反作用原理）爲牛頓力學之基礎．

§ 113．力學

力學之目的在研究物體之運動，與運動之原因；大要分

爲三部：曰運動學，曰動力學，曰靜力學.

運動學由幾何圖形與時間之觀念相合而成，研究物體之運動，而不及其運動之原因，非力學之本體也.

動力學較運動學更進一步，於幾何圖形與時間外，更加入力之觀念，不特研究運動，且研究造成與支持運動之原因.

靜力學研究物體靜止之條件，可以包含於動力學中，蓋其所研究者，亦力與運動也．特此處所言之運動，不可泥於通俗之意義，而當自算學上尋求之.所謂靜止者，特速度爲零之運動耳．故靜力學上之方程式，均不過動力學方程式之特例而已.

§ 114　力對於點之力矩

$\overrightarrow{MF}=\vec{f}$ 表一力，其座標爲直線 Δ，依定義，此力對於一

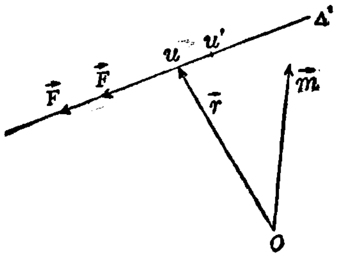


圖 129

點 O 之力矩，爲一向量，具有四種條件：

1. 其度量當爲力之度量 f 與自 O 至 Δ 之距離 d 之乘積 fd.

2 其方位須與 OMF 平面成垂直.

3. 其方向須與自 OM 至 MF 之旋轉方向相應.

4. 附着於 O 點 (O 點稱爲力矩中心或矩心).

今作 M 之徑矢 $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$, 可知 $d=r\sin(\widehat{r,F})$, 故具有上述四條件之矢，適爲 $\vec{r}$ 與 $\vec{F}$ 之矢乘積，以 $\vec{m}$ 表此力矩，得

$$\vec{m}=[\vec{r}\cdot\vec{f}]. \tag{3106}$$

力學中何以必有此矢？設 S 爲一固體，固定其 O 點使不得動，今加力 $\vec{f}$ 於 M, 此力無法使 S 之全部向前推進，

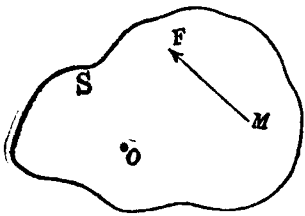


圖 130

僅能使 S 繞 O 旋轉，O 與 MF 之距離愈大，旋轉之趨勢亦愈大，若 $\overrightarrow{MF}$ 通過 O 點，則幷此旋轉之可能亦無之；且旋

轉之勢，又隨 F 之大小而定；故 $\vec{m}$ 實表一旋轉之量爲一軸矢，必要時，可記如 $\overset{\smile}{m}$ 以辨別之.

今將 $\vec{f}$ 在其座標上作平行移動，使其原點移至 $M'(\vec{r'})$，此時 $\vec{f}$ 對於 O 之力矩爲　$\vec{m'}=[\vec{r'}\cdot\vec{f}]$.

但 $\vec{m}-\vec{m'}=[\vec{r}\cdot\vec{F}]-[\vec{r'}\cdot\vec{F}]=[\vec{r}-\vec{r'}\cdot\vec{F}]=[\overrightarrow{M'M}\cdot\vec{F}]$.

因 $\overrightarrow{M'M}\parallel\vec{F}$，　故　$\vec{m}-\vec{m'}=0$，　得　$\vec{m}=\vec{m'}$.

此式極易明瞭，不必用算式亦可知之，蓋 $\vec{f}$ 在 Δ 上作平行移動時，O 與其座標之距離并不變更；故 $\vec{f}$ 之力矩并不因是而變．且無論力之作用點在何處，當尋求諸力之合力時，所得之結果不變．故就此二點言之，力之代表物當爲一滑動矢.

$\vec{f}$ 對於一定點 $A(\vec{a})$ 之力矩爲

$$\overset{\smile}{m}=[\vec{r}-\vec{a}\cdot\vec{f}].$$

當 $\vec{a}$ 與 $\vec{f}$ 平行時，因 $[\vec{a}\cdot\vec{f}]=0$，此式之值與 $[\vec{r}\cdot\vec{f}]$ 無殊，故知力矩之心作平行於 $\vec{f}$ 之運動時，力矩不變.

注意：　$\vec{r}$ 不必一定爲作用點之徑矢，亦可爲矢座標上任一點之徑矢.

§ 115. 力對於軸之力矩

定理：　將力對於一軸上各點之力矩，投射於此軸上，其各正射影相等.

證：　設 $\vec{f}$ 爲力，$\vec{a}$ 爲與軸上之單位矢，O, O' 爲軸上之任意二點. 設 M 爲力之座標上任一點，則 $\vec{f}$ 對 O 與 O' 之

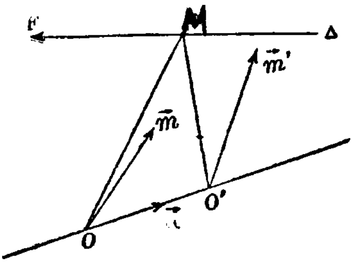


圖 131

力矩各爲：

$$\vec{m} = [\overrightarrow{OM} \cdot \vec{f}],$$

$$\overrightarrow{m'} = [\overrightarrow{O'M} \cdot \vec{f}].$$

但 $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}$，故此二力矩在 $\vec{a}$ 軸上之射影各爲：

$$(\vec{a} \cdot \vec{m}) = (\vec{a} \cdot \overrightarrow{OM} \cdot \vec{f})$$

與

$$(\vec{a} \cdot \overrightarrow{m'}) = (\vec{a} \cdot \overrightarrow{O'O}\ \vec{f}) + (\vec{a} \cdot \overrightarrow{OM} \cdot \vec{f}) = (\vec{a} \cdot \overrightarrow{OM} \cdot \vec{f})^{*}.$$

---

* $\vec{a} \parallel \overrightarrow{o'o}$.

故 $$(\vec{a}\cdot\vec{m}) = (\vec{a}\cdot\vec{m'}) = \cdots\cdots = \text{常數}.$$

由此定理,可得一定義:

"力對於一軸之力矩,爲力對於此軸上任一點之力矩,在此軸上之射影". 通常以 Γ 記之,得

$$\Gamma = (\vec{a}\cdot\check{m}) = (\vec{a}\cdot\vec{r}\cdot\vec{f}). \tag{3107}$$

§116. 諸力之總力矩

依定義:諸力對於一點之總力矩,爲各力對於此點之諸力矩之和.

例如:諸力爲 $\vec{f}_1, \vec{f}_2 \cdots\cdots \vec{f}_i, \cdots\cdots \vec{f}_n$, 無論其矢座標相交與否,此諸力對於一定點之力矩各爲 $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \cdots\cdots \vec{m}_i, \cdots\cdots \vec{m}_n$. $\vec{f}_i$ 諸力對於此點之總力矩爲

$$\check{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \cdots\cdots + \vec{m}_i + \cdots\cdots + \vec{m}_n = \Sigma\vec{m}_i. \tag{3108}$$

但若 $m_1, m_2, \cdots\cdots$ 係各對於不同點之力矩,上述定義,卽不適用.

同樣,諸力對於一軸之總力矩,爲各力對於同軸之力矩之總和.

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \cdots\cdots + \Gamma_i + \cdots\cdots + \Gamma_n = \Sigma\Gamma_i. \tag{3109}$$

§117. 力矩之解析式

設力 $\vec{f}$ 之射影為 X, Y, Z; 作用點之座標為 x, y, z. 此力對於 O 點之力矩為

$$\vec{m}=[\vec{r}\cdot\vec{f}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ X & Y & Z\end{vmatrix}.$$

此矢在 $\vec{i}$ 軸上之射影為 $yZ-zY$ 適為 $\vec{f}$ 對於 x 軸之力矩. 通常 $\vec{f}$ 對於三座標軸之力矩, 以 L, M, N 表之, 得

$$L=yZ-zY,\quad M=zX-xZ,\quad N=xY-yX.$$

設 $\vec{a}$ 軸通過 O 點, 其示位餘弦為 α, β, γ. $\vec{f}$ 對於 $\vec{a}$ 軸之力矩為

$$\Gamma=(\vec{a}\cdot\vec{r}\cdot\vec{f})=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ x & y & z\\ X & Y & Z\end{vmatrix}.$$

設一點 $B(\vec{b})$ 之座標為 x_1, y_1, z_1, 則 $\vec{f}$ 對於此點之力矩當為

$$\vec{m}=[\vec{r}-\vec{b}\cdot\vec{f}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ X & Y & Z\end{vmatrix}.$$

若 $\vec{a}$ 軸通過 B 點，則

$$\Gamma=(\vec{a}\ \vec{r}-\vec{b}\ \vec{f})=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ X & Y & Z\end{vmatrix}.$$

餘類推.

§ 118. 勃魯克座標 (Coordonnée Plückerienne)

給與滑動矢 $\vec{F}$ 代表一力，依定義，其力矩當與之垂直，故

$$(\vec{F}\cdot\vec{m})=0$$

反之，得定理： 給與二自由矢 $\vec{F}$ 與 $\vec{m}$ $(\vec{F}\neq 0)$，合於 $(\vec{F}\cdot\vec{m})=0$ 之條件，必有，且僅有一直線，爲 $\vec{F}$ 之座標使 $\overset{\smile}{m}$ 爲 $\vec{F}$ 之力矩.

今先證明僅能有一如此直線存在之可能，再證明此直線確屬存在.

設 Δ 與 Δ' 各爲合於上述條件之二直線. 以 m 之原點

爲原點,聯 Δ 與 Δ′ 上之任意二點 $M(\vec{r})$ 與 $M'(\vec{r}')$,自此二點作 $\vec{F}$ 同質之矢.依假設,得

$$[\vec{r}\cdot\vec{F}]=\vec{m},$$

$$[\vec{r}'\cdot\vec{F}]=\vec{m}$$

但
$$[\vec{r}\cdot\vec{F}]-[\vec{r}'\cdot\vec{F}]=[\vec{r}-\vec{r}'\cdot\vec{F}]=0$$

故知 $\overrightarrow{MM'}\parallel\vec{F}$ 即示 Δ 與 Δ′ 實僅一直線.

今仍以 $\vec{m}$ 之原點爲原點,過

$$\vec{r}=F^{-2}[\vec{F}\cdot\vec{m}]+x\vec{F}$$

之終點,作一 F 之同質矢,則其力矩爲

$$[\vec{r}\cdot\vec{F}]=F^{-2}([\vec{F}\cdot\vec{m}]\cdot\vec{F})+x[\vec{F}\cdot\vec{F}]$$

$$=F^{-2}\{F^2\vec{m}-(\vec{F}\cdot\vec{m})\vec{F}\}+0=\vec{m}$$

如是給與垂直二矢 $\vec{F}$, $\vec{m}$;此二矢即決定一直線 Δ 使其上與 $\vec{F}$ 同質之矢之力矩,適爲 $\vec{M}$,此二矢稱爲 Δ 之勃魯克座標.

解析幾何中,給與二矢之射影 X Y, Z; 與 L, M, N. 使

$$LX+MY+NZ=0$$

時,此六數決定如上所述之 Δ 直線,亦稱 Δ 之勃魯克座標.

§119 兩力之相互力矩*(Comoment de 2 vecteurs)

二滑動矢 $\vec{u}, \vec{v}$, 表不爲零之二力. 其原點各爲 $A(\vec{a}), B(\vec{b})$, 依定義, 此二力之相互力矩, 爲混合乘積

$$(\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}). \tag{3110}$$

記之如 $m(\vec{u}, \vec{v})$.

此定義有不健全之處, 必須加以補充:

1. 二滑動矢之相互力矩, 與二矢之次序無關.

即 $$m(\vec{u}, \vec{v})=m(\vec{v}, \vec{u}).$$

其理由至爲明顯, 可於下式見之.

$$(\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{u}\cdot\vec{v})=(\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{v}\cdot\vec{u}).$$

2. 依滑動矢之定義: 當 $\vec{u}$, $\vec{v}$ 各在其座標上滑動時, 二矢之性質不變. 相互力矩之公式中, 含有二矢之原點, 是否與原點之位置有關係? 設將 $\vec{u}$ 之原點自 $A(\vec{a})$ 移至 $A'(\vec{a}')$, 此時二矢之相互力矩爲

$$m'(\vec{u}, \vec{v})=(\vec{a}'-\vec{b}\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}).$$

但 $\vec{a}'-\vec{b}=(\vec{a}'-\vec{a})+(\vec{a}-\vec{b})$, 故

* 見 Bricard: Calcul vectoriel 之 § 20.

$$m'(\vec{u}\ \vec{v}) = (\vec{a'} - \vec{a}\cdot\vec{u}\cdot\vec{v} + (\vec{a}\ \ \vec{b}\ \vec{u}\cdot\vec{v}).$$

$\vec{a'} - \vec{a}$ 係在 $\vec{u}$ 之座標上,故此式之第一混合乘積爲零,而得

$$m'(\vec{u}, \vec{v}) = m(\vec{u}, \vec{v}),$$

表明二滑動矢之相互力矩,實與其位置無關

今取 $\overrightarrow{BA}, \vec{u}, \vec{v}$ 爲邊,作一平行六面體,由混合乘積之性質,知此六面體之體積,適表 $\vec{u}, \vec{v}$ 二矢之相互乘積.

當 $\vec{u}\ \vec{v}$ 互成平行或相交時,此六面體之各邊均在一平面上,此時之相互力矩爲零.

由勃魯克座標成決定之二滑動矢. $\vec{u}, \vec{m}$ 與 $\vec{v}, \overrightarrow{m'}$, 其相互力矩,可用下法求得:

$$m(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{a} - \vec{b}\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}) = (\vec{a}\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}) - (\vec{b}\cdot\vec{u}\cdot\vec{v})$$

$$= ([\vec{a}\cdot\vec{u}]\ \vec{v}) + ([\vec{b}\cdot\vec{v}]\vec{u}).$$

但 $[\vec{a}\cdot\vec{u}] = \vec{m}$, $[\vec{b}\cdot\vec{v}] = \overrightarrow{m'}$.

故
$$m(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{m}\cdot\vec{v}) + (\overrightarrow{m'}\cdot\vec{u}). \qquad (3110')$$

§ 120　力羣

諸力合成一羣,謂之力羣.各力稱爲此力羣之元素.

例如: $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \cdots\cdots \overrightarrow{F_n}$ 諸元素,構成一力羣; $\overrightarrow{F'_1}$ $\overrightarrow{F'_2}, \cdots\cdots \overrightarrow{F'_n}$ 另爲一羣可記之如 $S[\overrightarrow{F}]$, $S'[\overrightarrow{F'}]$. 或竟簡之曰力羣 S 與 S'.

力羣中,各元素之座標,會於一點者,稱爲會合力羣.

各元素之座標,并不完全會於一點之力羣,謂之散漫力羣.

假設力之代表物,僅爲自由矢,會合力羣與散漫力羣本無二致.因力爲滑動矢,會合力羣與散漫力羣間,有極大之差異,茲分別研究之

§ 121. 會合力羣

諸力 $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \cdots\cdots \overrightarrow{F_i}, \cdots\cdots \overrightarrow{F_n}$ 之座標會於一點 $M(\overrightarrow{r})$. 以

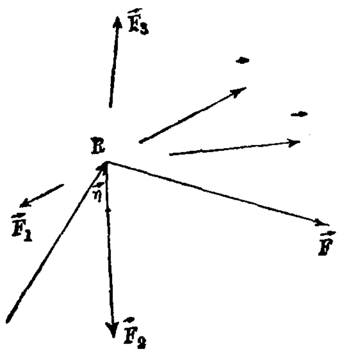


圖 132

M 爲原點作此諸力之合力 $\vec{F}$, 稱爲此力羣之合力.

$$\vec{F}=\Sigma\vec{F_i}.$$

M 既爲諸矢座標之交會點, 諸力對於 O 點之力矩當爲

$$\vec{m_i}=[\vec{r}\cdot\vec{F_i}].$$

此諸力之總力矩爲

$$\vec{m}=\Sigma\vec{m_i}=\Sigma[\vec{r}\cdot\vec{F_i}].$$

各項中有公因子 $\vec{r}$, 可以提出, 得

$$\vec{m}=[\vec{r}\cdot\Sigma\vec{F_i}]=[\vec{r}\cdot\vec{F}]. \tag{3111}$$

故得定理 1: 會合力羣對於一點之總力矩, 等於其合力對於同點之力矩.

設 $\vec{a}$ 爲單位矢, 示一軸之方位. 諸力對於此軸之力矩各爲

$$\Gamma_i=(\vec{a}\cdot\vec{m_i}).$$

諸力對於 $\vec{a}$ 軸之總力矩爲

$$\Gamma=\Sigma\Gamma_i=\Sigma(\vec{a}\cdot\vec{m_i})=(\vec{a}\cdot\Sigma\vec{m_i})=(\vec{a}\cdot\vec{m}). \tag{3112}$$

而 $(\vec{a}\cdot\vec{m})$ 適爲合力對於 $\vec{a}$ 軸之力矩,故得定理 2: 會合力羣對於一軸之總力矩, 等於其合力對於同軸之力矩.

由此兩定理觀之, 會合力羣可以合併成一合力, 其作用與力羣之作用完全相同.

§ 122. 散漫力羣之准合力與總力矩

散漫力羣非若會合力羣,通常不能由一合力代表其作用.

以一點 O 爲原點作諸力 $\overrightarrow{F_i}$ 之合力, $\overrightarrow{F}$ 稱爲此力羣之准合力,以示區別於會合力羣之合力.若取他一點 O' 爲原點,所得之准合力亦爲 F, 蓋自 O 與 O' 所作同質於 $\overrightarrow{F_i}$ 之矢亦互爲同質也.故散漫力羣之准合力爲不變量,與准合力之原點無關.

$$\overrightarrow{F}=\Sigma\overrightarrow{F_i}$$

總力矩則不然,諸力對於 O 點之力矩,各爲

$$\overrightarrow{m_i}=[\overrightarrow{r_i}\cdot\overrightarrow{F_i}].$$

此羣之總力矩爲 $\overrightarrow{m}=\Sigma\overrightarrow{m_i}=\Sigma[\overrightarrow{r_i}\cdot\overrightarrow{F_i}]$.

此中 $\overrightarrow{F_i}$ 之各矢座標,不能有公共之點,非若會合力羣可以將公因子 $\overrightarrow{r_i}$ 提出,故散漫力羣之總力矩,通常與准合力無關.

當 O 點由空間移至 O' $\overrightarrow{a}$) 點時,准合力 $\overrightarrow{F}$ 不變,總力矩通常有方位與數值之變化,其變化可用 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{F}$ 表之.

設自 O' 至 $\vec{F}_i$ 之作用點之徑矢為 $\vec{r'}_i$, $\vec{m'}$ 表力羣對於 O' 點之力矩. 因 $\vec{r}_i=\vec{a}+\vec{r'}_i$, 故

$$\vec{m}=\Sigma[\vec{a}+\vec{r'}_i\cdot\vec{F}_i]=\Sigma[\vec{a}\cdot\vec{F}_i]+\Sigma[\vec{r'}_i\cdot\vec{F}_i].$$

$\vec{a}$ 為公因子, 可以提出, 得

$$\vec{m}=[a\cdot\Sigma\vec{F}_i]+\Sigma[\vec{r'}_i\cdot\vec{F}_i]=[\vec{a}\cdot\vec{F}]+\vec{m'}. \quad (3113)$$

故
$$\vec{m'}-\vec{m}=[\vec{F}\cdot\vec{a}]. \quad (3113')$$

由此得定理 1: 當力矩中心自 O 移至 O' 時, 總力矩之變化,等於准合力與直線動徑 $\overrightarrow{OO'}$ 之矢乘積.

今若 $[\vec{F}\cdot\vec{a}]=0$, 則 $\vec{m'}$ 與 $\vec{m}$ 無殊. 能使 $[\vec{F}\cdot\vec{a}]$ 為零之條件, 可有下列二種:

1. 准合力為零 $\vec{F}=0$.

2. 動徑與准合力平行.

在此二種情形任一種之下, 總力矩不隨力矩中心而變. 准合力為零時, 總力矩不必為零, 此與會合力羣大異.

定理 2: 散漫力羣對於一軸之總力矩 Γ 等於此羣對軸上任一點之力矩, 在此軸上之正射影.

蓋若取 $\vec{a}$ 軸上之 O 點為力矩中心,依定義,有

$$\Gamma=\Sigma(\vec{a_1}\cdot\vec{m_i}).$$

但 $\vec{a_1}$ 爲公因子, 故

$$\Gamma=(\vec{a_1}\cdot\Sigma\vec{m_i})=(\vec{a_1}\cdot\vec{m}).\tag{3114}$$

今若取軸上之 $O'(\vec{a})$ 爲矩心, 則得

$$\Gamma'=(\vec{a_1}\cdot\vec{m'}).$$

但 $$\Gamma'-\Gamma=(\vec{a_1}\cdot\vec{m'}-\vec{m}).$$

將 (3113) 代入此式, 得

$$\Gamma'-\Gamma=(\vec{a_1}[\vec{F}\cdot\vec{a}])=(\vec{a}\cdot\vec{a_1}\cdot\vec{F})=0.$$

故知 $$\Gamma'=\Gamma.$$

此示: 散漫力羣對於點之力矩雖隨矩心而變,然定理 2 之命辭中所云 "對於任一點之力矩" 並無不合.

§ 123. 散漫力羣之不變量

以 $\vec{F}$ 數乘 (3113) 式之兩邊, 得

$$(\vec{F}\cdot\vec{m'}-\vec{m})=(\vec{F}\cdot\vec{F}\cdot\vec{a})=0.$$

故 $$(\vec{F}\cdot\vec{m})=(\vec{F}\cdot\vec{m'})=\text{常數}.\tag{3115}$$

此示: 准合力與總力矩之乘積爲一常量,今以 F_1 除上式,

得 $$(\vec{F_1}\cdot\vec{m})=(\vec{F_1}\cdot\vec{m'})=\text{常數}.\tag{3116}$$

故得定理：　總力矩在准合力方位之正射影，爲一常數.

$\vec{F}$ 與 $(\vec{F}\cdot\vec{M})$，一爲矢，一爲數，均不隨其在空間之位置而變，稱爲此散漫力羣之不變量 (invariants).

設 $\vec{F}$ 之射影爲 X, Y, Z, $\vec{M}$ 之射影爲 L, M, N，前三數在一定座標上，不隨其原點之位置而變，但若將座標軸加以旋轉，X, Y, Z 卽不復呈原有之値. L, M, N 則不特在兩正座標上，有不同之二組値，卽在同一座標系，亦隨 $\vec{m}$ 之矩心而變. 但無論如何，$X^2+Y^2+Z^2$ 表 $\vec{F}$ 之長，決不因座標軸而變. $LX+MY+NZ$ 表 $\vec{M}$ 在 $\vec{F}$ 方位之射影，與 F 之乘積，亦與座標系無關，且由 (311?) 式，可知其爲常量，如此二量

$$X^2+Y^2+Z^2 \quad 與 \quad LX+MY+NZ$$

不隨座標系而變，稱爲散漫力羣之不變量.

§ 124. 中軸

定理：　空間諸點對於散漫力羣之總力矩，與准合力相平行者，其軌跡爲一直線.

取空間一點 O 爲原點，其對於力羣之力矩爲 $\vec{m}$. 設 $P(\vec{r})$

爲軌跡上之點，其對於力羣之力矩爲 $\vec{m}'$，依假設

$$[\vec{F}\cdot\vec{m}'] = 0. \tag{1}$$

由公式 (3113)，得 $\vec{m}' = \vec{m} + [\vec{F}\cdot\vec{r}]$.

代入 (1) 式，得 $[\vec{F}\cdot\vec{m}] + (\vec{F}\cdot[\vec{F}\cdot\vec{r}]) = 0$.

解之， $[\vec{F}\cdot\vec{m}] + \vec{F}(\vec{F}\cdot\vec{r}) - \vec{r}F^2 = 0$,

或 $\vec{r} = [\vec{F}^{-1}\cdot\vec{m}] + (\vec{F}^{-1}\cdot\vec{r})\vec{F}$.

此中 $[\vec{F}^{-1}\cdot\vec{m}]$ 爲一定量，$(\vec{F}^{-1}\cdot\vec{r})$ 爲一變量，得

$$\vec{r} = [\vec{F}^{-1}\cdot\vec{m}] + x\vec{F} \tag{3117}$$

此式表一直線通過 $[\vec{F}^{-1}\cdot\vec{m}]$ 之終點，且平行於 $\vec{F}$，爲所求之軌跡．此直線稱爲力羣之中軸．

由公式 (3116)，知總力矩在準合力方位之射影 $m\cos(\widehat{F, m})$ 爲一常數．今若 $\cos(\widehat{F, m})$ 之值爲最大，則 m 之值爲最小．而 $\cos(\widehat{F, m})$ 之最大值 1，適在 $\vec{F}\parallel\vec{M}$ 之時，故中軸又可認爲：

"空間諸點，對於力羣之總力矩，呈最小值者之軌跡".

§ 125. 轉動慣量

質點 M 之質量爲 m．其至一軸 Δ 之距離爲 d，依定義：

M 對於 Δ 之轉動慣量爲 md^2，通常以 I 表之

$$I = md^2.$$

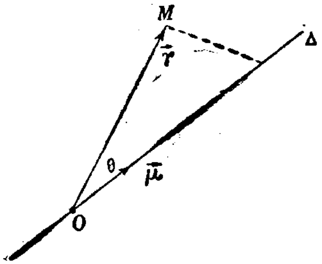


圖 133

設以軸上一點 O 爲原點，$\overrightarrow{OM} = \vec{r}$，軸上之單位矢爲 $\vec{u}$，OM 與 Δ 之夾角爲 θ，則

$$d = r\sin\theta = |[\vec{u}\cdot\vec{r}]|.$$

故
$$I = m([\vec{u}\cdot\vec{r}])^2. \tag{3118}$$

若就一組質點 M_i 言之，其轉動慣量爲各質點之轉動慣量之和
$$I = \Sigma m_i([\vec{u}\cdot\vec{r}_i]) \tag{3118'}$$

同樣 M 至一平面之距離爲 D，則其對於此平面之轉動慣量爲 mD^2，其至一點之距離爲 δ，則其對於此點之轉動慣量爲 $m\delta^2$. 此定義並可推廣之至於多數點，至於固體.

設空間有座標軸，任一質點 M_i 之座標爲 x, y, z，此三數同時爲 M_i 至 yoz，zox，xoy 三平面之距離，故

M 對於 yoz 平面之轉動慣量為　$I_{yoz}=\Sigma m_i x^2$,

M 對於 zox 平面之轉動慣量為　$I_{zox}=\Sigma m_i y^2$,

M 對於 xoy 平面之轉動慣量為　$I_{xoy}=\Sigma m_i z^2$,

M 對於 x 軸平面之轉動慣量為　$I_{ox}\ =\Sigma m_i(y^2+z^2)$,

M 對於 y 軸平面之轉動慣量為　$I_{oy}\ =\Sigma m_i(z^2+x^2)$,

M 對於 z 軸平面之轉動慣量為　$I_{oz}\ =\Sigma m_i(x^2+y^2)$.

M 對於 O 點之轉動慣量, 則為　$I_o=\Sigma m_i(x^2+y^2+z^2)$.

由此諸式, 得

$I_{ox}=I_{zox}+I_{xoy}$　而 ox 適為 zox 與 xoy 之交線,

$I_{oy}=I_{xoy}+I_{yoz}$　而 oy 適為 xoy 與 yoz 之交線,

$I_{oz}=I_{yoz}+I_{zox}$　而 oz 適為 yoz 與 zox 之交線.

故對於軸之轉動慣量, 與對於通過此軸之二正交面之轉動慣量之和相等.

又　$$I_o=I_{xoy}+I_{yoz}+I_{zox}.$$

故對於點之轉動慣量, 與對於通過此點之三正交面之轉動慣量之和相等.

§ 126. 重心之性質

Δ, Δ' 二軸互相平行. Δ 軸通過一組質點 $M_i(m_i)$ 之重

心,此組質點對於 Δ, Δ' 之轉動慣量各為 I_G 與 I. 兩軸之

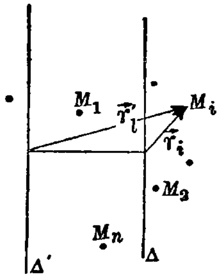


圖 134

距離為 D. 諸質點之和為 $M=\Sigma m_i$, 必有

$$I=I_G+MD^2. \tag{3119}$$

證: 取重心 O 為原點,於此作 Δ' 之垂線交 Δ' 於 $O'(\vec{D})$.

設 $\qquad \overrightarrow{OM_i}=\vec{r}_i. \qquad \overrightarrow{O'M}=\vec{r'}_i.$

依定義,得 $\qquad I=\Sigma m_i([\vec{u}\cdot\vec{r'}])^2.$

但 $\vec{r'}_i=\vec{r}_i-\vec{D}$, 故 $I=\Sigma m_i([\vec{u}\cdot\vec{r}_i-\vec{D}])^2$. 或

$$I=\Sigma m_i([\vec{u}\cdot\vec{r}_i])^2+\Sigma m_i([\vec{u}\cdot\vec{D}])^2-2\Sigma m_i([\vec{u}\cdot\vec{r}_i]\cdot[\vec{u}\cdot\vec{D}]).$$

此中 $\vec{D}\perp\vec{u}$, 故 $([\vec{u}\cdot\vec{D}])^2=D^2$, 末項則因 $[\vec{u}\ \vec{D}]$ 在括號中為公因子, 故

$$\Sigma m_i([\vec{u}\cdot\vec{r}]\cdot[\vec{u}\cdot\vec{D}])=([\vec{u}\cdot\vec{D}]\cdot[\vec{u}\Sigma m_i\vec{r}_i]).$$

但依重心之定義, $\Sigma m_i\vec{r}_i=0$, 故得

$$I=I_G+MD^2.$$

此式可推廣之至於面或點之轉動慣量,均有同樣之性質

§ 127. 慣量橢圓球

取 (3118) 式展開之. 設以 O 爲原點,作一座標系. Δ 之示位餘弦爲 α, β, γ. M_i 之座標爲 x, y, z, 得

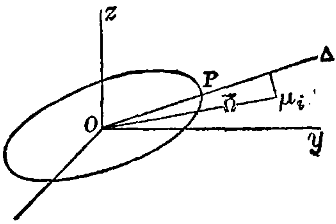


圖 135

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}, \qquad \vec{u}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k},$$

$$([\vec{u}\cdot\vec{i}])^2=\{(\beta z-\gamma y)\vec{i}+(\gamma x-\alpha z)\vec{j}+(\alpha y-\beta x)\vec{k}\}^2$$

$$=(\beta z-\gamma y)^2+(\gamma x-\alpha z)^2+(\alpha y-\beta x)^2.$$

以 m 乘此式, 然後取類似之多數式相加, 卽得

$$I=A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2-2D\beta\gamma-2E\gamma\alpha-2F\alpha\beta. \quad (3120)$$

此中之 A, B, C, 適爲各質點對於三軸之轉動慣量. D, E, F, 則稱爲相當於三軸之慣積.

今爲求此式之幾何意義起見,可於 Δ 上取一點,其徑矢爲:

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{\sqrt{I}}\vec{u},$$

而尋求當 Δ 繞 O 點旋轉時，$P(X, Y, Z)$ 之軌跡，今

$$X=(\overrightarrow{OP}\cdot\vec{i})=\frac{1}{\sqrt{I}}(\vec{u}\cdot\vec{i})=\frac{\alpha}{\sqrt{I}},$$

$$Y=\frac{\beta}{\sqrt{I}},\qquad Z=\frac{\gamma}{\sqrt{I}}.$$

將此三式中 α, β, γ 之値求出，

$$\alpha=X\sqrt{I},\quad \beta=Y\sqrt{I},\quad \gamma=Z\sqrt{I}.$$

代入 (3120) 式，得

$$1=AX^2+BY^2+CZ^2-2DYZ-2EZX-2FXY. \tag{3121}$$

此式表一橢圓球面，中心在 O，爲 P 點之軌跡，稱爲此組質點對於 O 之慣量橢圓球．在特種情形之下，若質點全與 O 點在一直線上，此時之橢圓球變爲一圓柱體，以此直線爲軸．慣量橢圓球之對稱面與對稱軸，各稱爲此組質點之慣量主面與慣量主軸（對於 O 點而言）．相對於重心之慣量橢圓球，稱爲中央慣量橢圓球．

第二章　運動學

點之運動

§ 128.　速度

點在空間運動,其動徑為曲線 Γ. 當時間 t 時,其位置在 $M(\vec{\rho}=\overrightarrow{OM})$, $t+\Delta t$ 時,其位置在 $M'(\vec{\rho'}=\overrightarrow{OM'})$. 於 MM' 上作一矢,原點在 M, 矢式為 $\dfrac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$, 稱為 Δt 時間內,點之平

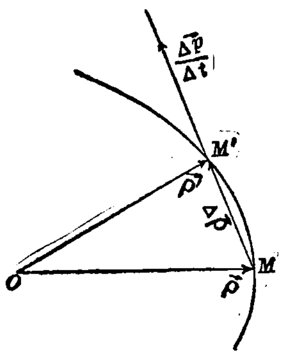


圖　136

均速度. 意謂動點若循直線 MM' 以單位時間行 $\dfrac{\overline{MM'}}{\Delta t}$ 之

率前進，則在 Δt 時間內．可以自 M 行至 M'．但動點之運動，不必常在直線上，單位時間內，不必行 $\dfrac{\overline{MM'}}{\Delta t}$ 之長．Δt 愈大，平均速度與實際相去愈遠．若令 $\Delta t\to 0$，則 M' 與 M 無限接近．通常 $\dfrac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$ 之數值與位向，均有極限，稱為動點在此一刹那之速度 $\vec{v}$

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}.$$

但 $\overrightarrow{MM'}=\vec{\rho}'-\vec{\rho}$ 為 $\vec{\rho}$ 之增量 $\overrightarrow{\Delta\rho}$，其微細值為 $\overrightarrow{d\rho}$，故

$$\vec{v}=\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt} \tag{3201}$$

表速度為動徑之微係數．

$\dfrac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}$ 之方位為 Γ 之切線方位（見上編第五章），又 $\overrightarrow{d\rho}=\overrightarrow{ds}$，今以 $\vec{u}$ 表切線之單位矢，得

$$\vec{v}=\vec{u}\cdot\frac{ds}{dt}. \tag{3202}$$

$\vec{u}$ 示速度之方位，$\vec{v}=\dfrac{ds}{dt}$ 示速度之大小．

若速度 $\vec{v}$ 為已知．dt 時間內動點移動之地位為 $\vec{v}dt$ 稱

爲動點之瞬間移動.

過 O 點作一座標, (3201) 之射影式爲

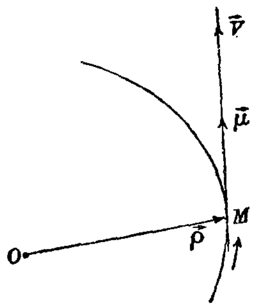


圖 137

$$v_x=\frac{dx}{dt},\qquad v_y=\frac{dy}{dt},\qquad v_z=\frac{dz}{dt}.$$

而 $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ 適爲 Γ 之切線之示位參數. $\vec{v}$ 之方位,確同於 Γ 之切線,有如上述. 至於速度之度量,則有

$$v^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

由 (3202) 式, 得 $v^2=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ 故得

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$$

爲解析幾何基本公式之一, 此示以運動學研究曲線之一例.

§ 129 加速度

當時間 t 時, 動點在 M, 其速度爲 $\overrightarrow{MV}$. 以空間 A 點爲原點作 $\overrightarrow{MV}$ 之同質矢 $\overrightarrow{A\mu}$. 當 M 之位置隨 t 而變時,其速度 $\overrightarrow{MV}$ 亦隨 t 而變. 此時 μ 卽劃一曲線於空間,稱爲動點之速度圖.

時間爲 $t+\Delta t$ 時, 點之位置在 M', 其速度爲 $\overrightarrow{M'V'}$. $\dfrac{\overrightarrow{M'V'}-\overrightarrow{MV}}{\Delta t}$ 爲一矢, 稱爲 Δt 時間內之平均加速度. 若 $\Delta t \to 0$, 通常 $\dfrac{\overrightarrow{M'V'}-\overrightarrow{MV}}{\Delta t}$ 之位向與數值, 均有一極限, 稱爲動點在此瞬間之加速度, 或稱總加速度.

但 $\overrightarrow{MV}=\overrightarrow{A\mu}$, $\overrightarrow{M'V'}=\overrightarrow{A\mu'}$ 故 $\overrightarrow{M'V'}-\overrightarrow{MV}=\overrightarrow{\mu\mu'}$, 假認速度圖爲虛擬點 μ 之動徑, 動點 M 之加速度

$$\vec{\gamma}=\lim_{t\to 0}\frac{\overrightarrow{\mu\mu'}}{\Delta t}$$

可認爲 μ 點之速度. 進言之, 加速度爲"速度之速度", 或速度之微係數

$$\vec{\gamma}=\frac{\overrightarrow{dv}}{dt}. \tag{3203}$$

又由 $\vec{v}=\overrightarrow{\frac{d\rho}{dt}}=\overrightarrow{\frac{ds}{dt}}$, 得

$$\vec{\gamma}=\overrightarrow{\frac{d^2\rho}{dt^2}}=\overrightarrow{\frac{d^2s}{dt^2}} \tag{3204}$$

表示加速度爲動徑之二級微係數.

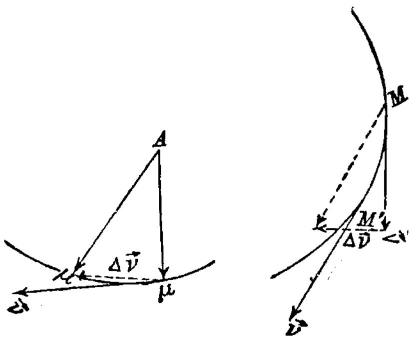


圖 138

取 (3202) 爲速度之公式而求其微係數, 得

$$\vec{\gamma}=\overrightarrow{\frac{dv}{dt}}=\frac{d}{dt}\left(\vec{u}\cdot\frac{ds}{dt}\right)=\vec{u}\frac{d^2s}{dt^2}+\overrightarrow{\frac{du}{dt}}\cdot\frac{ds}{dt},$$

$\vec{u}$ 爲單位矢, 依公式 (1503), 得

$$\overrightarrow{\frac{du}{dt}}=\vec{n}\frac{da}{dt}.$$

$\vec{n}$ 垂直於 $\vec{u}$, 適爲 Γ 之法線

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{d\alpha}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}.$$

但
$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{1}{R}\cdot\frac{ds}{dt}. \qquad \text{(見 1517)}$$

故得
$$\vec{\gamma}=\vec{u}\frac{d^2s}{dt^2}+\vec{n}\cdot\frac{1}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\vec{u}\left(\frac{dv}{dt}\right)+\vec{n}\frac{v^2}{R}. \qquad (3205)$$

由此式可知總加速度可以分解爲二：一在動徑之切線上，一則在其法線* 前者之值爲 $\frac{dv}{dt}$ 稱爲切線加速度，後者之值爲 $\frac{v^2}{R}$，稱爲法線加速度，以 $\overrightarrow{\gamma_T}$ 及 $\overrightarrow{\gamma_n}$ 表之

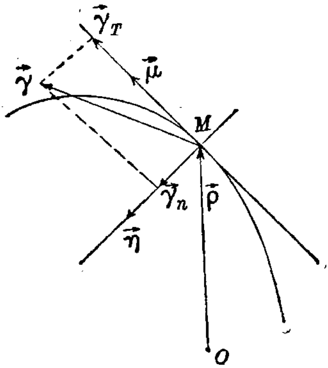


圖　139

$$\overrightarrow{\gamma_n}=\vec{n}\frac{v^2}{R}, \qquad \overrightarrow{\gamma_T}=\vec{u}\frac{d^2s}{dt^2}=\vec{u}\frac{dv}{dt}.$$

* 法線之方向，係自曲線上之點，至曲率中心之方向.

由 $$\vec{\gamma}=\vec{\gamma_T}+\vec{\gamma_n},$$

可得 $$\gamma^2=\gamma_T{}^2+\gamma_n{}^2=\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\frac{v^4}{R^2}.$$

將 (32 4) 投射於座標軸上，得

$$\gamma_x=\frac{d^2x}{dt^2},\qquad \gamma_y=\frac{d^2y}{dt^2},\qquad \gamma_z=\frac{d^2z}{dt^2}.$$

總加速度之數值有

$$\gamma^2=\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2.$$

§ 130. 直線運動與圓周運動

1. **直線運動：** 動徑爲直線之運動，曰直線運動. 直線之方位有定. 故其速度之方位亦爲不變. 又直線之曲率半徑爲無窮大，而 $\vec{\gamma_n}=\frac{v^2}{R}\to 0$, 故直線運動中，總加速度與切線加速度相混. 且直線上各點之位置，均可以一定點爲標準而計其座標 x (相當於曲線上之 s)，故得

$$v=\frac{dx}{dt},\tag{1}$$

$$\gamma=\frac{d^2x}{dt^2}.\tag{2}$$

若 v 爲常數 此種運動謂之等速直線運動. 設時間爲0時, 動點自 x_0 出發. 將(1)式積分之, 得

$$x=vt+x_0.$$

取動點在 $x=0$ 之瞬間. 爲計時起點, 上式卽變爲 $x=vt$, 示動點所行之路與時間成正比.

若 γ 爲常數, 此種運動, 稱爲等加速運動. 假定 v_0 與 x_0 各爲動點之初速與起始位置, 將(2)式積分之, 得

$$v=\gamma t+v_0,\qquad x=\frac{1}{2}\gamma t^2+v_0t+x_0.$$

若於開始計量之時,動點在原點由靜止開始運動,則 $v_0=0$, $x_0=0$; 得

$$v=\gamma t,\qquad x=\frac{1}{2}\gamma t^2$$

此示動點之速度與時間成正比, 其所行之路長, 與時間之平方成正比(落體之公式).

2. 圓周運動: 動徑爲圓之運動, 曰圓周運動.

動點在半徑爲 R, 中心爲 O 之圓上轉動, 其位置 M 不特可以普通曲線座標 s 計之, 且可由 OM 及一定軸 OM_0 之夾角 α 定之. 二者之關係爲

$$s=R\alpha.$$

圓周運動之速度爲

$$v=\frac{ds}{dt}=R\frac{d\alpha}{dt}.$$

$\dfrac{d\alpha}{dt}$ 稱爲角速度.

設有一滑動矢 $\vec{\omega}$, 經過 O 點, 垂直於圓平面,矢值爲

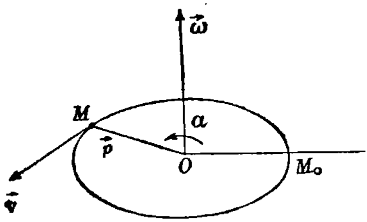


圖 140

$$\omega=\frac{d\alpha}{dt}. \qquad (3206)$$

矢之方向, 由下式所決定

$$\vec{\omega}_1=[\vec{u}\cdot\vec{R}_1],$$

則圓周運動之速度

$$\vec{v}=\vec{u}R\omega=[\vec{R}\cdot\vec{\omega}]; \qquad (3207)$$

可認爲動點對 $\vec{\omega}$ 矢之矩. $\vec{\omega}$ 稱爲轉動.

至於加速度,則

$$\vec{\gamma}_T=\vec{u}\frac{dv}{dt}=\vec{u}\frac{d}{dt}(R\omega)=\vec{u}R\frac{d\omega}{dt},$$

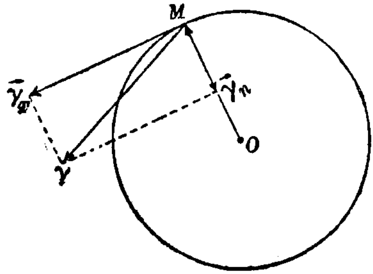


圖 141

$$\overrightarrow{\gamma_n} = \overrightarrow{R_1}\frac{v^2}{R} = \overrightarrow{R_1}\frac{\omega^2 R^2}{R} = \vec{R}\omega^2.$$

其中之 $\dfrac{d\omega}{dt}$ 稱爲角加速度.

圓周運動中,速度之值不變者,稱爲等速圓周運動. 在此特種情形之下, ω 亦爲常數. 加速度因 $\dfrac{d\omega}{dt}=0$, 使 $\gamma_T=0$, 總加速度卽與法線加速度(亦稱向心加速度)相合,得

$$\vec{\gamma} = \overrightarrow{\gamma_n} = \vec{R}\omega^2.$$

設 M 點之徑矢爲 $\overrightarrow{OM}=\vec{\rho}$, 因 $\vec{\rho}$ 與 $\vec{R}$, 數值相同方向相反. 故得

$$\vec{v} = [\vec{\omega}\cdot\vec{\rho}], \tag{3208}$$

$$\overrightarrow{\gamma_n} = -\vec{\rho}\omega^2$$

(3208) 式,至爲重要,凡長度有定之矢,其微係數均可用之

上編第五章之 (1503) 與 (1504) 二式, 以 $\vec{\omega}$ 滲入, 可書如

$$\left.\begin{aligned}\frac{\overrightarrow{du}}{dt}&=[\vec{\omega}\cdot\vec{u}],\\ \frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}&=\vec{\rho}_1\frac{d\rho}{dt}+[\vec{\omega}\cdot\vec{\rho}].\end{aligned}\right\}\tag{3209}$$

固體運動

§ 131. 平移運動

當運動時, 固體內各直線常與其原在之位置相平行者, 曰平移運動.

定理 1. 在平移運動內, 固體各點之動徑爲全等之曲線, 且可由一平行移動而使之互相重合.

證: 固體 S 內任二點 A, B 之徑矢爲 $\vec{a}, \vec{b}$.

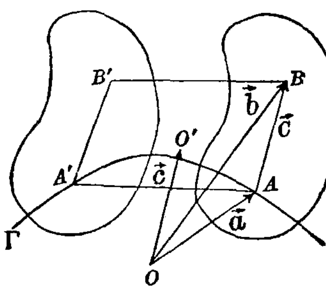


圖 142

令 $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$, 得: $$\vec{b}=\vec{a}+\vec{c}.$$

今將 S 作一平移運動, A 在空間畫一曲線 Γ, 其矢方程式

爲 $$\vec{a}=\overrightarrow{\varphi t}.$$

因平移運動中, $\vec{c}$ 常與其原位爲同質之矢, 故常有

$$\vec{b}=\overrightarrow{\varphi t}+\vec{c}.$$

今將原點移至 O' 點, 使 $\overrightarrow{OO'}=\vec{c}$. 令 $\overrightarrow{O'B}=\vec{b'}$, 得

$$\vec{b'}=\vec{b}-\vec{c}=\overrightarrow{\varphi t},$$

表明 B 點之動徑與 A 全同, 且將 O 移至 O' 時, A 之動徑即與 B 之動徑相重合.

定理 2. 在平移運動中, 任一瞬間, 固體各點之速度相等.

證: 當 S 由一平移運動, 佔據 S' 之位置時, $\vec{a}$ 之增量爲 $\overrightarrow{\Delta a}=\overrightarrow{AA'}$, $\vec{b}$ 之增量爲 $\overrightarrow{\Delta b}=\overrightarrow{BB'}$, 但 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{A'B'}$ 平行且相等, 故 $ABB'A'$ 爲一平行四邊形, 即得 $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$, 或

$$\overrightarrow{\Delta a}=\overrightarrow{\Delta b}.$$

行此平移運動, 所需之時間爲 Δt, 則

$$\frac{\overrightarrow{\Delta a}}{\Delta t}=\frac{\overrightarrow{\Delta b}}{\Delta t}$$

表示 A 與 B 之平均速度全等. 若 $\Delta t\to 0$ 則此式變爲

$$\frac{d\vec{a}}{dt}=\frac{d\vec{b}}{dt} \tag{1}$$

代表速度之矢, 均爲同質, 表明任意二點之速度全等.

定理 3. 在平移運動中, 任一瞬間, 固體各點之總加速度相等.

證: 於上定理之 (1) 式中, 兩邊再取微係數:

$$\frac{d^2\vec{a}}{dt^2}=\frac{d^2\vec{b}}{dt^2}$$

即得.

§ 132. 轉動

固體 S 中, 一直線 Δ 不動, 此直線外之各點均繞之作圓周運動. 圓之平面全與 Δ 成正交. 圓心全在 Δ 上, 如是之運動, 稱爲 S 繞 Δ 之轉動, Δ 稱爲轉軸.

固體中, 各點之相對位置不因固體之運動而變, 故在轉動中, 與軸成等距之點, 其速度不得相異, 不然, 一點之行, 較他點爲急, 此點與其他點之相對位置, 將因之而變矣. 通過 Δ 上一點, 作垂直於 Δ 之直線, 此直線各點之角速度, 當爲一致, 不然, 一點之行, 較他點爲急, 直線將於此點呈曲

折狀矣. 綜此二端觀之,固體中各點之角速度,在同一瞬間均為一致 (轉軸之角速度為零,當然例外), 此角速度當常以轉動 $\vec{\omega}$ 表之. $\vec{\omega}$ 為一滑動矢, 矢座標即 Δ, 其矢向相當於 S 之轉動正向.

固體內一點 M 隨 S 繞 Δ 而轉,其動徑為一圓 Γ, 圓心為

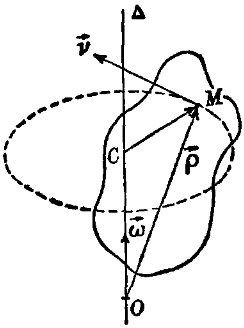


圖 143

C. 此點之速度, 在 Γ 之平面上, 與 CM 垂直. 故必垂直於 $\vec{\omega}$ 與 $\overrightarrow{CM}$ 所定之平面上. 今取軸上一點 O 為原點, $\overrightarrow{OM}=\vec{\rho}$,

則由 (3208) $\qquad \vec{v}=[\vec{\omega}\cdot\overrightarrow{CM}].$

但 $\qquad \overrightarrow{CM}=\vec{\rho}-\overrightarrow{OC}=\vec{\rho}-x\vec{\omega}.$

故得 $\qquad \vec{v}=[\vec{\omega}\ \vec{\rho}-x\vec{\omega}]$ 或 $\vec{v}=[\vec{\omega}\cdot\vec{\rho}]$ $\qquad$ (3210)

爲線速度與角速度之關係†.

固體上各點,常有共同之角速度 $\vec{\omega}$ 因角加速度爲 $\vec{\omega}$ 之微係數,故各點亦有共同之角加速度.且 $\vec{\omega}$ 之方位不變,故知角加速度 $\dfrac{\overrightarrow{d\omega}}{dt}$ 之座標亦是 Δ.

固體上一點 $M(\vec{\rho})$ 之總加速度爲

$$\vec{\gamma}=\frac{d}{dt}[\vec{\omega}\cdot\vec{\rho}]=\left[\frac{\overrightarrow{d\omega}}{dt}\ \vec{\rho}\right]+\left[\vec{\omega}\cdot\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}\right].$$

但 $\vec{\rho}$ 之矢長不變,故由 (3208) $\vec{v}=\dfrac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}=[\vec{\omega}\cdot\vec{\rho}]$,得

$$\left[\vec{\omega}\cdot\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}\right]=(\vec{\omega}\cdot[\vec{\omega}\cdot\vec{\rho}])=(\vec{\omega}\cdot\vec{\rho})\vec{\omega}-\omega^2\vec{\rho}.$$

故
$$\vec{\gamma}=\left[\frac{\overrightarrow{d\omega}}{dt}\cdot\vec{\rho}\right]+(\vec{\omega}\cdot\vec{\rho})\vec{\omega}-\omega^2\vec{\rho}.$$

此式之二部各爲 $\vec{\gamma}$ 之二垂直分矢.前一項在動徑之切線上,後二項之矢和則在 MC 上因其垂直於 $\vec{\omega}$‡,而又在 $\vec{\omega}$ 與 $\vec{\rho}$ 所定之平面上故也.前項稱爲此點之切線加速度,後

† 若將此式書作 $\vec{v}=[\overrightarrow{MO}\cdot\vec{\omega}]$ 可認線速度爲 $\vec{\omega}$ 對動點之距.

‡ 由 $(\vec{\omega}[\vec{\omega}\cdot\vec{\rho}])$ 知之

二項爲向心加速度.

注意： 本節之 $\vec{\omega}$ 與(3209)之 $\vec{\omega}$ 雖同爲角速度,而微有不同,此處之 $\vec{\omega}$ 附着於 Δ 上,不因 $\vec{\rho}$ 而變易其方位. 非若(3209)中之 $\vec{\omega}$, 常與 $\vec{u}, \vec{\rho}$ 垂直,反係由 $\vec{u}$ 與 $\vec{\rho}$ 所決定者.

§ 133　螺旋運動

固體 S 中一直線 Δ 上各點具有相等之速度,且速度之方位適與 Δ 相同. Δ 以外各點,均繞 Δ 轉動.如是之運動,由一軸滑動與各部繞軸之轉動合成,稱爲螺旋運動.

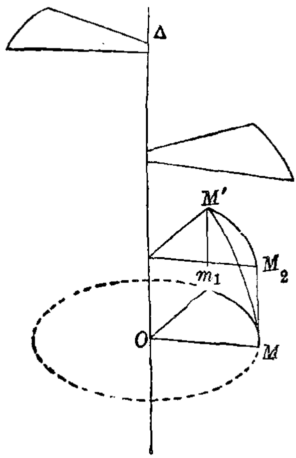


圖 144

設 $\vec{v}_\theta$ 在 Δ 上，表其上任一點之滑動速度，$\vec{\omega}$ 表 S 旋行 Δ 之轉動．當時間爲 t 時，S 內一點在 $M(\vec{\rho})$，時間在 $t+\Delta t$ 時，在 $M'(\vec{\rho}+\overrightarrow{d\rho})$．此點所行之路徑，可分解爲二：

1. 假定 Δ 不動 M 繞 Δ 行 $[\vec{\omega}\cdot\vec{\rho}]dt$，以至 M_1．

2. 然後 Δ 拖帶 M_1 上升 $\vec{v}_\theta dt$ 以至 M'．

或 1. M 隨 Δ 上升 $v_\theta dt$ 以至 M_2．

2. 然後由一旋轉 $[\vec{\omega}\cdot\vec{\rho}]dt$ 將 M_2 移至 M'．

$\widehat{MM_1}$ 與 $\widehat{M_2M'}$ 均係極微之弧，可以混爲極微之弦而認作一矢，故得

$$\overrightarrow{d\rho}=\overrightarrow{MM'}=[\vec{\omega}\cdot\vec{\rho}]dt+\vec{v}_\theta dt=\vec{v}_\theta dt+[\vec{\omega}\cdot\vec{\rho}]dt.$$

矢之加法與矢之次序無關，由此式可得 M 之速度 $\vec{v}$．

$$\vec{v}=\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}=\vec{v}_\theta+[\vec{\omega}\cdot\vec{\rho}]. \qquad (3211)$$

表明 S 上各點 M 之速度，爲 Δ 之滑動速度與 M 繞行 Δ 之速度之矢和．其合成之情形，有如圖 145 所示．

取 (3211) 式之微係數，得

$$\vec{\gamma}=\frac{\overrightarrow{d^2\rho}}{dt}=\vec{\gamma}_\theta+\left[\frac{\overrightarrow{d\omega}}{dt}\cdot\vec{\rho}\right]+(\vec{\omega}\cdot[\vec{\omega}\cdot\vec{\rho}]). \qquad (3212)$$

$\vec{\gamma}_0$ 表 Δ 之滑動加速度 $\frac{\overrightarrow{dv_0}}{dt}$ $\left[\frac{\overrightarrow{d\omega}}{dt}\cdot\vec{\rho}\right]$ 與 $(\vec{\omega}[\vec{\omega}\cdot\vec{\rho}])$ 各表轉動中，質點之切線加速度與向心加速度．此式表明滑動與轉動之加速度，依矢之加法，而合成螺旋運動之加速度．

上述螺旋運動之定義至爲普遍，於 $\vec{v}_0$ 與 $\vec{\omega}$ 之間，并無何種限制，若 $\vec{v}$ 與 $\vec{\omega}$ 成比例

$$\vec{v}=k\vec{\omega}.$$

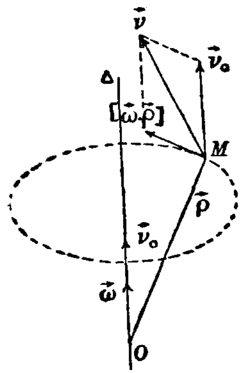


圖 145

無論 $\vec{v}$ 與 $\vec{\omega}$ 是否隨時間而變．S 上各點（除 Δ 上之點外），上升之高度，常與其轉動之角成比例．如此之運動，特稱爲螺線運動．當轉動之角度爲 2π 時，上升之高 $h=2k\pi$ 爲一常量，稱爲螺線之螺距．

若 $\vec{v}$ 與 $\vec{\omega}$ 均為常量，此螺線運動，特稱等速螺線運動.

§134. 固體運動之普遍性質

固體在空間作任何不規則運動時，其速度與加速度，常合於本節之二定理.

定理1 運動中，固體內任一點 B 之速度，可認為由二部所合成.一部為固體內他一點 A 之速度，一部為 B 繞行一通過 A 點之軸之速度.

證： 設 A, B 二點之徑矢為 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$，令 $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$. 得

$$\vec{b}=\vec{a}+\vec{c}.$$

B 點之速度為 $\dfrac{\overrightarrow{db}}{dt}$，得 $\dfrac{\overrightarrow{db}}{dt}=\dfrac{\overrightarrow{da}}{dt}+\dfrac{\overrightarrow{dc}}{dt}$

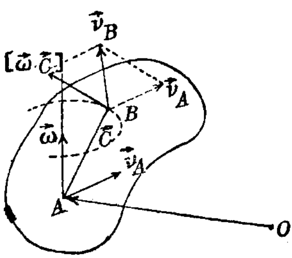


圖 146

$\vec{a}$ 為一變矢，$\dfrac{\overrightarrow{da}}{dt}$ 表 A 點運動之速度（相對於 O 而言）$\vec{c}$ 之

數值不變,由 (3209) 得, $\dfrac{\overrightarrow{dc}}{dt}=[\vec{\omega}\cdot\vec{c}]$.

$\vec{\omega}$ 爲垂直於 $\vec{c}$ 之矢,時有變化,就某一瞬間而言,如 $\vec{\omega}$ 在過 A 點之 Δ 軸上,則 $[\vec{\omega}\cdot\vec{c}]$ 表 B 點繞 Δ 旋轉之線速度,故得

$$\frac{\overrightarrow{db}}{dt}=\frac{\overrightarrow{da}}{dt}+[\vec{\omega}\cdot\vec{c}] \tag{3213}$$

即爲本定理之證.

定理 2　運動中,固體內任一點 B 之加速度,可認爲由二部構成,其一爲另一點 A 之加速度,他一部則爲 B 對於一通過 A 點之軸之轉動加速度.

證:　於 (3213), 取兩邊之微係數,得

$$\frac{\overrightarrow{d^2b}}{dt^2}=\frac{\overrightarrow{d^2a}}{dt^2}+\left[\frac{\overrightarrow{d\omega}}{dt}\cdot\vec{c}\right]+\left[\vec{\omega}\cdot\frac{\overrightarrow{dc}}{dt}\right].$$

此中 $\dfrac{\overrightarrow{d^2b}}{dt^2}$ 爲 B 點之加速度, $\dfrac{\overrightarrow{d^2a}}{dt^2}$ 爲 A 點之加速度, $\vec{\omega}$ 之意義,仍如定理 (1) 所云, $\left[\dfrac{\overrightarrow{d\omega}}{dt}\cdot\vec{c}\right]$ 示 B 點繞 Δ 轉動之切線加速度.

$$\left[\vec{\omega}\cdot\frac{\overrightarrow{dc}}{dt}\right]=(\vec{\omega}\cdot[\vec{\omega}\cdot\vec{c}])=-\vec{c}\omega^2*$$

* 因 $\vec{\omega}\perp\vec{c}$ 故 $(\vec{\omega}\cdot\vec{c})\vec{\omega}=0$.

表 B 點之向心加速度，故得

$$\frac{d^2\vec{b}}{dt^2}=\frac{d^2\vec{a}}{dt^2}+\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\cdot\vec{c}\right]-\omega^2\vec{c}. \tag{3214}$$

卽本定理之證.

由本節二定理，可以推得一極重要之性質：欲將固體 S

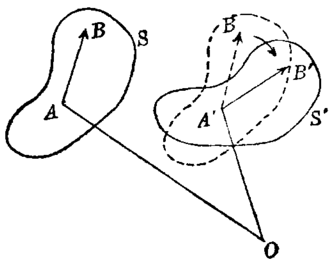


圖 147

移至他一位置 S'，可取 S 內一點 A 爲標準，將 S 作一平移運動，使 A 點與 S' 相應之 A' 點相合；然後將 A 點固定以 S 繞過 A' 之一軸轉動，而使其與 S' 完全重合. 此性質與時間無關，與 S 所行之路徑無關，視爲立體幾何圖形變位之定理亦可.

附： 固體繞一定點之運動.

固體內有一固定點，固體繞之運動，其運動之方程式，可由 (3213) 與 (3214) 得之. 取固定點爲標準點 A，卽得：

$$\frac{d\overrightarrow{a}}{dt}=0,\qquad \frac{d^2a}{dt^2}=0.$$

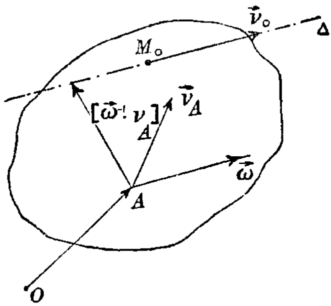


圖　143

故此運動中，各點之速度與加速度各爲

$$\frac{d\overrightarrow{b}}{dt}=[\vec{\omega}\cdot\vec{c}],\qquad \frac{d^2\overrightarrow{b}}{dt^2}=\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\cdot\vec{c}\right]-\omega^2\vec{c}.$$

§ 135. 瞬間運動軸 (axe instantané de rotation et de glissement)

依前節記法，令 B 之速度爲 $\overrightarrow{v_B}$，A 之速度爲 $\overrightarrow{v_A}$，(3213) 式可書如　$\overrightarrow{v_B}=\overrightarrow{v_A}+[\overrightarrow{BA}\cdot\vec{\omega}]$.

將此式之運動學意義完全略去不言；但論算學關係以與 (3113) 比較，認 $\overrightarrow{v_A}$ 爲一散漫力羣對 A 點之力矩. $\vec{\omega}$ 爲

此力羣之准合力，則 $\overrightarrow{v_B}$ 當為力羣對於 B 點之力矩．今若不取 A 為標準點而另取一點，上式仍得成立．可知固體運動中之速度，實與散漫力羣之計算，有相似之處．S 內必有一軸 Δ（就一瞬間而言）相當於散漫力羣之中軸，其上各點之速度，均與 $\vec{\omega}$ 平行．由 (3117) 式，知此軸之方程式為

$$\vec{r}=[\vec{\omega}^{-1}\cdot\overrightarrow{v_A}]+x\vec{\omega}.$$

就一瞬間而言，Δ 上各點 M_0 之速度均為 $\overrightarrow{v_0}$，軸外之點均繞 Δ 作轉動，表轉動之矢 $\vec{\omega}$ 與 $\vec{v}$ 同在 Δ 軸上．此示固體之運動，就一瞬間而言，實為一螺旋運動．Δ 為此運動之轉軸而兼滑動軸，簡稱瞬間運動軸．

以上所云，係僅就瞬間之運動而言，若欲直接推之至於定時間內之任何運動，以為任何運動，均為螺旋運動，則大謬矣．

當固體之位置，隨時間而變更時，瞬間運動軸亦在運動；假定固體之運動為連續的，運動軸在空間之運動亦為連續，其軌跡為一規律曲面，稱為固體運動之基面 (base)．且運動軸在固體內之位置，亦隨時間而變，其在固體內之軌跡，亦為一規律曲面，稱為滾面 (roulette)．基面與滾面，常

共有一直線且相切於其上，此直線即爲瞬間運動軸.

在固體繞其本身一固定點之運動中，瞬間運動軸常通過一固定點，故基面與滾面均爲錐面.

注意：瞬間之速度雖與螺旋運動之速度有相同之性質，但加速度則無之.

相對運動

§ 136. 運動之組合

人在車中，自以爲靜坐數小時，殊不知身隨車動，已行數百里而不自覺.蚊虻在簾幕上，沿直線進行，風吹簾動，在吾人眼中視之，其行實非直線.故知對某物而言之運動，對他物而言，不必爲同類之運動.

一點 M 在一物體 S 上運動，S 又對他一物體 S' 而運動，則 M 亦對 S' 而運動.M 對於 S' 之運動，稱爲絕對運動，S 對 S' 之運動，稱爲拖行運動，M 對 S 之運動，稱爲相對運動.人對火車而言，蚊對簾幕而言，其運動爲相對運動；火車對地面而言，簾幕對庭院而言，其運動爲拖行運動；人對地面之運動，蚊對庭院之運動，均爲絕對運動.

用類似之字面，可以作速度與加速度之定義.M 對 S'

之速度與加速度爲絕對速度與絕對加速度,通常以 $\overrightarrow{V_a}$ 與 $\overrightarrow{\gamma_a}$ 表之. S 對 S' 之速度與加速度稱爲拖行速度與拖行加速度,通常以 $\overrightarrow{V_e}$ 與 $\overrightarrow{\gamma_e}$ 表之. 相對速度與相對加速度,則爲 M 對 S 之速度與加速度,以 $\overrightarrow{V_r}$ 與 $\overrightarrow{\gamma_r}$ 表之.

在理論力學中,以一不動之立體座標 $Cx'y'z'$ 代 S'. 於

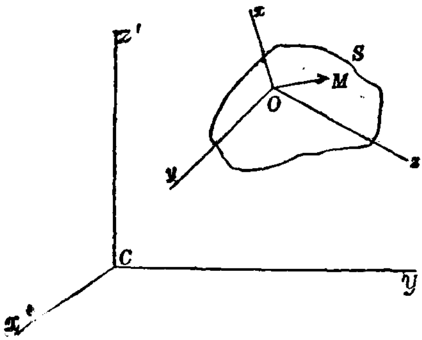


圖 149

S 上作一與之相連之座標系 (對 S 而言爲不變) $Oxyz$. S 運動時, $Oxyz$ 對 $Cx'y'z'$ 之運動代表拖行運動, M 在 $Cx'y'z'$ 上之座標爲 x', y', z'; 在 $Oxyz$ 上之座標爲 x, y, z.

$$x' = f_1(t), \qquad y' = f_2(t), \qquad z' = f_3(t)$$

表絕對運動之動徑;

$$x = \varphi_1(t), \qquad y = \varphi_2(t), \qquad z = \varphi_3(t)$$

表相對運動之動徑.

同樣 $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$ 與 $\frac{d^2x'}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z'}{dt^2}$ 表絕對速度與絕對加速度之射影; $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ 與 $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ 表相對速度與相對加速度之射影, 不贅.

矢算因之, 仍襲用理論力學之座標系, 化動點之徑矢爲分矢而研究之. 但固定座標 $Cx'y'z'$, 則以固定點 C 代之, 爲較簡耳.

§ 137 速度之組合

羅伯伐定理 (théorème de Roberval): "絕對速度,等於拖行速度與相對速度之矢和".

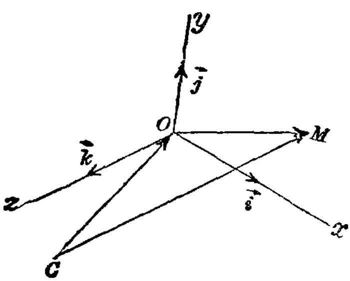


圖 150

證： 如前節記法，令 $\overrightarrow{CO}=\vec{\sigma}$，$Ox$，$Oy$，$Oz$ 軸之單位矢為 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$，則 $\overrightarrow{OM}=\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

令 $\overrightarrow{CM}=\vec{\rho}$，得

$$\vec{\rho}=\vec{\sigma}+\vec{r}=\vec{\sigma}+x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$$

取此式之微係數，得

$$\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}=\frac{\overrightarrow{d\sigma}}{dt}+x\frac{\overrightarrow{di}}{dt}+y\frac{\overrightarrow{dj}}{dt}+z\frac{\overrightarrow{dk}}{dt}+\vec{i}\frac{dx}{dt}+\vec{j}\frac{dy}{dt}+\vec{k}\frac{dz}{dt}. \tag{1}$$

此中 $\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}$ 表 M 對 C 運動之速度，為絕對速度 $\vec{V}_a$. $\frac{\overrightarrow{d\sigma}}{dt}$ 表 O 對 C 運動之速度；至於

$$x\frac{\overrightarrow{di}}{dt}+y\frac{\overrightarrow{dj}}{dt}+z\frac{\overrightarrow{dk}}{dt}. \tag{2}$$

其中 x，y，z 仍舊，而 $\frac{\overrightarrow{di}}{dt}$ 等量，表座標軸對 O 點之轉動，故假定 M 為固着於 S 上之點，(2) 式表 M 隨 S 繞旋 O 點之速度．今以 $\vec{\omega}$ 表 S 對 O 之瞬間轉動，得

$$x\frac{\overrightarrow{di}}{dt}+y\frac{\overrightarrow{dj}}{dt}+z\frac{\overrightarrow{dk}}{dt}=[\vec{\omega}\cdot\vec{r}] \tag{3215}$$

合 $\frac{\overrightarrow{d\sigma}}{dt}$ 與 $[\vec{\omega}\cdot\vec{r}]$ 為固體對 C 點運動之速度，故拖行速度

爲
$$\vec{V}_e=\frac{d\vec{\sigma}}{dt}+[\vec{\omega}\cdot\vec{r}].$$

$\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}$ 表示$Oxyz$爲固定，M 對於此座標系之速度，爲相對速度 $\vec{V}_r$

$$\vec{V}_r=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}. \tag{3}$$

由 (1) 式，得
$$\vec{V}_a=\vec{V}_e+\vec{V}_r \tag{3216}$$

爲代表羅伯伐定理之公式.

§138. 加速度之組合

加速度之組合，不若速度組合之簡單. 絕對加速度爲拖行加速度與相對加速度之矢和者，僅屬一種特例.

取上節 (1) 式之微係數，得

$$\frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2}=\frac{d^2\vec{\sigma}}{dt^2}+x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2}+y\frac{d^2\vec{j}}{dt^2}+z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2}+\vec{i}\frac{d^2x}{dt^2}+\vec{j}\frac{d^2y}{dt^2}+\vec{k}\frac{d^2z}{dt^2}$$
$$+2\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\vec{i}}{dt}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d\vec{j}}{dt}+\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d\vec{k}}{dt}\right). \tag{1}$$

$\frac{d^2\vec{\rho}}{dt}$ 表 M 對 C 運動之加速度，爲絕對加速度 $\vec{\gamma}_a$

$$\frac{d^2\vec{\sigma}}{dt^2}+x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2}+y\frac{d^2\vec{j}}{dt^2}+z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2}$$

中，第一項表 O 對 C 運動之加速度，其餘三項示 M（假定在 S 上不動）隨 S 繞 O 轉動之加速度. 故表示 S 對 C 之拖行加速度 $\vec{\gamma}_e$.

$\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$ 表 M 對 S 運動之加速度，爲相對加速度 $\vec{\gamma}_r$，尙餘 $\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\vec{i}}{dt}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d\vec{j}}{dt}+\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d\vec{k}}{dt}\right)$，必須尋其意義.

今設有一點（實不存在之點）N，附着於 S 上. 其徑矢爲 $\overrightarrow{ON}=\vec{\gamma}_r$，其在三軸上之射影各爲 $\frac{dx}{dt}$，$\frac{dy}{dt}$，$\frac{dz}{dt}$. 此式與前節之公式 (3215) 比較，可知其表 N 點對 O 運動之轉動速度，得

$$2\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\vec{i}}{dt}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d\vec{j}}{dt}+\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d\vec{k}}{dt}\right)=2[\vec{\omega}\cdot\vec{V}_r].$$

此項稱爲補充加速度，以 $\vec{\gamma}_c$ 表之

$$\vec{\gamma}_c=2[\vec{\omega}\cdot\vec{V}_r]. \tag{3217}$$

(1) 式卽變爲
$$\vec{\gamma}_a=\vec{\gamma}_e+\vec{\gamma}_r+\vec{\gamma}_c. \tag{3218}$$

是爲科尼俄士 (théorème de Coriolis) 定理： 絕對加速度等於拖行加速度. 相對加速度與補充加速度之矢和. 補

充加速度爲二倍拖行旋轉與相對速度之矢乘積.

若拖行運動爲平移運動, $\vec{\omega}=0$, $\vec{\gamma}_c$ 隨之, 在此特別情形之下,加速度之組合,與速度之組合同.

第三章　動力學　靜力學

點之動力學

§139. 動力學之問題

動力學研究物體運動與力之關係，其問題可分爲二類：

1. 已知物體位置與時間之關係，求作用於物體之力.

2. 已知力之變化，求物體之運動.

第二類問題，通常較第一類繁雜.設有質量爲 m 之點，其位置 $M(\vec{\rho})$ 爲已知，且　$\vec{\rho}=\overrightarrow{\varphi t}$.

由此式可直接求出點之速度爲 $\overrightarrow{\frac{d\rho}{dt}}$，加速度爲 $\overrightarrow{\frac{d^2\rho}{dt^2}}$. 由公式 (3102)，可知使 M 動點之諸力之合力爲：

$$\vec{F}=m\overrightarrow{\frac{d^2\rho}{dt^2}}. \tag{3301}$$

在理論上言之，此題已完全解決.

第二類問題中，僅力爲已知量；未知之量 有速度，有動

徑,有時間,速度,動徑雖可由

$$\frac{\overrightarrow{d^2\rho}}{dt^2}=\frac{\overrightarrow{F}}{m},$$

二次積分求得,但其中含有未定之積分常數,仍未完全決定.故自唯一之已知量出發而求三未知量,必需有三個矢方程式,始能確定.本章研究動力學,亦僅就此類問題之基本方程式,稍加討論而已.

在理論力學中,第一類問題之已知者為

$$x=f_1(t),\qquad y=f_2(t),\qquad z=f_3(t).$$

所求之力,射影於三軸上,則為

$$X=m\frac{d^2x}{dt^2}=mf_1''(t),\qquad Y=m\frac{d^2y}{dt^2}=mf_2''(t),$$

$$Z=m\frac{d^2z}{dt^2}=mf_3''(t).$$

第二類問題之已知量則為

$$X=\varphi_1(t),\qquad Y=\varphi_2(t),\qquad Z=\varphi_3(t).$$

未知量有 $x, y, z, V_x, V_y, V_z, t$ 等七個,故需七個方程式以決定之.

§ 140　運動量　動力學之第一矢方程式

一點之質量為在 m,某瞬間,其速度為 $\vec{v}$, m 與 $\vec{v}$ 之乘

積 $m\vec{v}$ 爲一向量，與 $\vec{v}$ 同位同向，稱爲動點在此瞬間之動量.

就一羣質點言之,若其中 M_i 點之質量爲 m_i，速度爲 $\overrightarrow{V_i}$ 則此羣質點之動量爲各點運動量之總和 $\Sigma m_i\overrightarrow{V_i}$.

定理： 質點之動量,在某一瞬間之微係數,等於作用於此質點之力.

證： 設 $\vec{F}$ 爲作用於質點之力，其射影爲 X, Y, Z.

即得
$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{\overrightarrow{dv}}{dt} = m\vec{\gamma} = \vec{F}. \tag{3302}$$

是爲動量定理，其射影式爲

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) &= X,\\ \frac{d}{dt}\left(m\frac{dy}{dt}\right) &= Y,\\ \frac{d}{dt}\left(m\frac{dz}{dt}\right) &= Z\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

此三式在解析力學上，合成一定理： "質點之動量，在一軸上射影之微係數，等於作用於此點之力，在同軸上之射影".

若作用於質點之力爲零，由 (3302) 立得

$$m\vec{v}=\text{常量}.$$

表明 $\vec{v}$ 之方位,方向與數量,均為常量. 質點之運動為一等速直線運動, 若質點之初速為零, 即將靜止不動.

§ 141 動量矩 動力學之第二矢方程式

定義： 動量對於一點之矩, 稱為動量矩.

設 $\vec{\rho}$ 為質點 M 之徑矢, 質點之動量為 $m\vec{v}$, 其對於原點之矩為 $[\vec{\rho}\cdot m\vec{v}]$.

就一羣質點而言, 其對於一點之動量矩, 為諸質點對於同點之動量矩之總和 $\Sigma[\vec{\rho_i}\cdot m_i\vec{V_i}]$.

定理： 質點對於一點之動量矩,在某一瞬間之微係數, 等於作用於質點之力,對於同點之力矩.

證： 設作用於質點之力為 $\vec{F}$, 其對於原點之矩為

$$[\vec{\rho}\cdot\vec{F}]=\vec{m},$$

得
$$\frac{d}{dt}[\vec{\rho}\cdot m\vec{v}]=\left[\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}\cdot m\vec{v}\right]+\left[\vec{\rho}\cdot m\frac{\overrightarrow{dv}}{dt}\right].$$

但 $\dfrac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}=\vec{v}$ 而 $[\vec{v}\cdot m\vec{v}]=0$, 故

$$\frac{d}{dt}[\vec{\rho}\cdot m\vec{v}]=\left[\vec{\rho}\cdot m\frac{\overrightarrow{dv}}{dt}\right]=[\vec{\rho}\cdot m\vec{\gamma}]=[\vec{\rho}\cdot\vec{F}],$$

卽
$$\frac{d}{dt}[\vec{\rho}\cdot m\vec{v}]=\vec{m} \tag{3303}$$

是爲動量矩定理. 設 $\vec{F}$ 之射影爲 X, Y, Z, (3303) 之射影式爲

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{ym\frac{dz}{dt}-zm\frac{dy}{dt}\right\}&=yZ-zY,\\ \frac{d}{dt}\left\{zm\frac{dx}{dt}-xm\frac{dz}{dt}\right\}&=zX-xZ,\\ \frac{d}{dt}\left\{xm\frac{dy}{dt}-ym\frac{dx}{dt}\right\}&=xY-yX.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

此三式在解析力學上合成一定理: "質點對於一點之動量矩, 在一軸上之射影, 其微係數等於作用於質點之力, 對於同軸之力矩".

注意: 設矩心不在原點, 此定理仍爲眞確, 證法同上, 不過多一原點變換而已.

§ 142. 有心力

作用於動點之力, 無論動點之位置在何處, 常通過一定點者稱爲有心力. 定點稱爲力之中心. 例如太陽 S 吸引地

球T之力，常在 ST 線上，無論地球行至軌道上之任何部分，此力常通過 S，太陽即稱爲吸引力之中心.

有心力 $\vec{F}$ 既常通過中心 O，其對於中心之力矩 $[\vec{\rho}\cdot\vec{F}]$，必常爲零，(3303) 即變爲

$$\frac{d}{dt}[\vec{\rho}\cdot m\vec{v}]=0.$$

積分之，即得　$[\vec{\rho}\cdot m\vec{v}]=$常量.

因 m 爲一常數，設 $\vec{a}$ 爲一不變之矢，可得

$$[\vec{\rho}\cdot\vec{v}]=\vec{a}. \tag{3304}$$

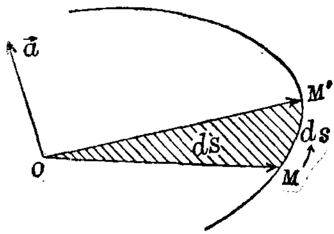


圖　151

此式表明 $[\vec{\rho}\cdot\vec{v}]$ 之方位不變，即謂質點常在與 $\vec{a}$ 垂直之平面上，作平面運動.

由 (3202)，得

$$[\vec{\rho}\cdot\vec{v}]=\left[\vec{\rho}\cdot\frac{\overrightarrow{ds}}{dt}\right]=\frac{[\vec{\rho}\cdot\overrightarrow{ds}]}{dt}=\vec{a}.$$

其中 $\vec{ds}=\overrightarrow{MM'}$ 表質點在 dt 時間內所行之路,此時之 $\vec{\rho}$ 在運動面上掃成一三角形 OMM',其面積 dS 適爲 $\frac{1}{2}[\vec{\rho}\cdot\vec{ds}]$ 之數值.故得(見圖 151

$$\frac{[\vec{\rho}\cdot\vec{ds}]}{dt}=\frac{2\vec{a_1}\,dS}{dt}=\vec{a},$$

或

$$\frac{dS}{dt}=\frac{a}{2}. \tag{3305}$$

$\frac{dS}{dt}$ 表單位時間內 M 之徑矢可能掃過之面積,稱爲面積速度.此式卽示一重要之定理,稱爲面積定理:

"有心力支配下之質點運動,其徑矢之面積速度,爲一常量".

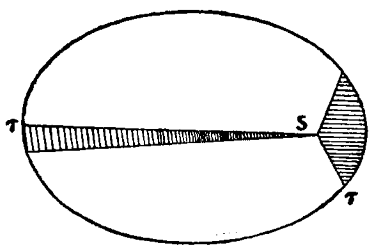


圖 152

將 (3305) 式積分之,得

$$S-S_0=\frac{a}{2}(t-t_0). \tag{3306}$$

表示徑矢所掃過之面積，與所需之時間成比例.

地球繞日之運動，即屬此種運動. 當地球在近日點時，徑矢最小，進行之速度，因之爲最大. 當地球在遠日點時，其徑矢最長，此時地球進行之速度，則爲最小. 圖 152 示同時間內，地球在不同位置進行之情形.

§ 143　功　功率

今有力 $\vec{F}$，作用於一運動之物體，在時間 dt 內，其作用點隨物體移動自 M 至 M' ($\overrightarrow{MM'}=\vec{ds}$)，依定義，此力作一徵細之功　$dT=F\cdot\widehat{MM'}\cos(\widehat{F,MM'})$.

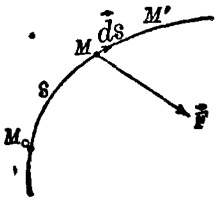


圖 153

依數乘法之定義，知　$dT=(\vec{F}\cdot\vec{ds})$.　(3307)

又 $\vec{ds}=\vec{v}dt$，故　$dT=(\vec{F}\cdot\vec{v})dt$.　(3308)

設 $\vec{F}$ 爲有心力，當動點之移動爲 $\overrightarrow{d\rho}$ 時，因

$$\overrightarrow{d\rho}=\vec{\rho_1}\,d\rho+\vec{n}\rho\,d\theta.$$

故 $\vec{F}$ 所作之功為

$$dT=(\vec{F}\cdot\overrightarrow{d\rho})=d\rho(\vec{F}\cdot\vec{\rho_1})+\rho\, d\theta(\vec{F}\cdot\vec{n})=F\cdot d\rho. \qquad (3309)$$

蓋 $\vec{\rho_1}\parallel\vec{F}$, $\vec{n}\perp\vec{F}$ 故也.

若 $\widehat{F,MM'}<90°$, 則 $dT>0$, $\vec{F}$ 稱為原動力.

$\widehat{F,MM'}>90°$, 則 $dT<0$, $\vec{F}$ 稱為阻力.

若 $\vec{F}\perp\overrightarrow{MM'}$, 則因 $dT=0$, $\vec{F}$ 對此移動并未作功.

設 $\vec{F}$ 之作用點,於 t_0 與 t 時間內,自 M_0 移至 M, 但 $\widehat{M_0M}$ 并非無限小弧, 可將 M_0M 化作無限個無限小弧 $\vec{F}$ 所作之功, 為其所作無限個微細功之總和

$$T=\int_{M_0M}dT=\int_{M_0M}(\vec{F}\cdot\vec{ds})\doteq\int_{t_0}^{t}(\vec{F}\cdot\vec{v})dt$$

$$=\int_{M_0M}Xdx+Ydy+Zdz \qquad (3310)$$

功率者單位時間內,力所能作之功也. $\vec{F}$ 與 $\vec{ds}$ 均為時間之函數,故若在 Δt 時間內,力所作之功為 ΔT, $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ 僅表示功率之平均值, 對某一瞬間之眞值而言, 功率當為

$$P=\frac{dT}{dt}=\left(\vec{F}\cdot\frac{\vec{ds}}{dt}\right)=(\vec{F}\cdot\vec{v})=X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt} \qquad (3311)$$

§ 144. 動能定理 動力學之第三矢方程式

質量爲 m 之點受力 $\vec{F}$ 之作用,在運動狀態中.當某一瞬間其速度爲 $\vec{v}$,力學上稱 $\frac{mv^2}{2}$ 爲動點在此一瞬間,所具有之動能.

定理 1. 動能在 dt 時間內之微分,等於力 $\vec{F}$ 所作之微細功.

此定理極易由下之等式證之:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\frac{m}{2}d(\vec{v}\cdot\vec{v})=m(\overrightarrow{dv}\cdot\vec{v})=m(\vec{\gamma}\cdot\vec{v})dt$$

$$=(\overrightarrow{m\gamma}\cdot\vec{v})dt=(\vec{F}\cdot\vec{v})dt=dT. \tag{1}$$

定理 2. 動能在時間 t_0 與 t 內之變化,等於力 $\vec{F}$ 在此時間內所作之功 T.

將 (1) 式積分之,卽得

$$\int_{v_0}^{v} d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\int_{t_0}^{t}(\vec{F}\cdot\vec{v})dt=\int dT,$$

或

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\int_{t_0}^{t}(\vec{F}\cdot\vec{v})dt=T.$$

上述定理 (1), 其方程式

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=dT. \tag{3312}$$

是爲動能定理之微分形式. 定理 (2) 之方程式

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=T. \tag{3313}$$

是爲動能定理之積分形式

動量定理, 動量矩定理與動能定理, 表出時間, 力, 速度與動徑間之關係. 動徑, 速度與時間三個未知量, 即假此三定理以聯之, 以成一完整之三元方程式:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(m\vec{v})=\vec{F}, \\ \dfrac{d}{dt}[\vec{\rho}\cdot m\vec{v}]=[\vec{\rho}\cdot\vec{F}], \\ d\left(\dfrac{mv^2}{2}\right)=(\vec{F}\cdot\vec{v})\,dt \end{cases}$$

爲動力學之三個主要矢方程式. 其射影式有七個, 決定七未知量 x, y, z, V_x, V_y, V_z, t, 稱爲普遍運動公式 (équations universéles de mouvement). 動力學之一切討論, 胥由是出.

§ 145. 行星運動*

依牛頓之理論,日球作用於行星之力,爲中心吸引力;力之大小,與行星之質量 m 爲正比;與日與行星之距離之平方成反比.

今以日球 S 爲原點,行星 P 之徑矢爲 $SP=\vec{\rho}$, 行星之質

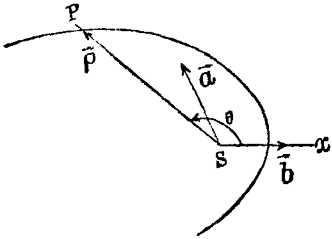


圖 154

量爲 m, 日球所施於星體之力, 當爲

$$\vec{F}=\vec{\rho}_1\frac{Km}{\rho^2}=\frac{Km}{\rho^3}\vec{\rho} \tag{3314}$$

其中之 K 爲一常數,因力與徑矢之方向相反 (引力), 故 K 在行星運動中爲一負數 ($K<0$) 運用公式 (3301), 卽得

---

* 就歷史之觀點言之,此處所討論者, 適爲牛頓引力計算之反求. 蓋牛頓基於刻卜勒之觀察, 加以計算而求出日與行星間之關係. 此處則因矢算運用之便, 若由 x 出發, 求行星之軌道.

$$m\frac{\overrightarrow{d^2\rho}}{dt^2}=\frac{Km}{\rho^3}\vec{\rho},$$

或
$$\frac{\overrightarrow{d^2\rho}}{dt^2}=\frac{K}{\rho^3}\vec{\rho}.$$

§ 142 中，曾述有心力之性質，知行星之軌道當爲平面曲線，且由 (3304) 知
$$\left[\vec{\rho}\cdot\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}\right]=\vec{a}. \tag{1}$$

此中之 $\vec{a}$ 爲一不變之矢，今以 $\frac{\overrightarrow{d^2\rho}}{dt^2}$ 矢乘此式，得

$$\left[\frac{\overrightarrow{d^2\rho}}{dt^2}\cdot\vec{a}\right]=\frac{K}{\rho^3}\left(\vec{\rho}\left[\vec{\rho}\cdot\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}\right]\right)=\frac{K}{\rho^3}\left\{\rho\cdot\frac{d\rho}{dt}\cdot\vec{\rho}-\rho^2\cdot\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}\right\}^*$$

$$=K\left\{\frac{d\rho}{dt}\cdot\frac{1}{\rho^2}\vec{\rho}-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}\right\},$$

或
$$\left[\frac{\overrightarrow{d^2\rho}}{dt^2}\cdot\vec{a}\right]=-K\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\rho}}{\rho}\right)=-K\cdot\frac{\overrightarrow{d\rho_1}}{dt}.$$

積分之，即得
$$\left[\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}\cdot\vec{a}\right]=-K\vec{\rho}_1+\vec{b}. \tag{2}$$

$\vec{b}$ 仍爲一不變之矢，欲定其性質，可以 $\vec{a}$ 數乘上式，注意 (1)

---

* 因 $\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}=\vec{\rho}_1\frac{d\rho}{dt}+\vec{n}\rho\frac{d\theta}{dt}$，故 $\left(\vec{\rho}\cdot\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}\right)=\rho\cdot\frac{d\rho}{dt}$.

式與 (1402) 得 $$0=(\vec{a}\cdot\vec{b}).\tag{3}$$

故知 $\vec{b}$ 矢與 $\vec{a}$ 矢垂直而矢身全在運動面上.

以 $\vec{\rho}$ 數乘 (2) 式, 得

$$\left(\vec{\rho}\cdot\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}\cdot\vec{a}\right)=-K(\vec{\rho_1}\cdot\vec{\rho})+(\vec{b}\cdot\vec{\rho}).$$

因 $\left(\vec{\rho}\cdot\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}\cdot\vec{a}\right)=\left(\left[\vec{\rho}\cdot\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}\right]\cdot\vec{a}\right)=a^2$, 故得

$$a^2=-K\rho+(\vec{b}\cdot\vec{\rho}).$$

今於運動面上, 定一極座標取 S 爲極, 取 $\vec{b}$ 之座標以爲極座標之極軸 x, 令 $\widehat{xSP}=\theta$, 上式卽變爲

$$a^2=-K\rho+b\rho\cos\theta,$$

或 $$\frac{1}{\rho}=\frac{-K}{a^2}+\frac{b}{a^2}\cos\theta.\tag{4}$$

此式表行星之動徑爲圓錐曲線之極座標方程式, 極點 S 爲曲線之一焦點.

欲決定圓錐曲線之種類, 須求其離心率 $e=\left|\frac{b}{K}\right|$. 欲求 $\left|\frac{b}{K}\right|$,

可將 (2) 式書作 $$\vec{b}=\left[\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}\cdot\vec{a}\right]+K\vec{\rho_1}.$$

將此式平方之, 同時注意

$$\left(\left[\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}\cdot\vec{a}\right]\right)^2=\left(\left[\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}\cdot\vec{a}\right]\cdot\left[\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}\cdot\vec{a}\right]\right)$$

$$=\left(\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}\cdot\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}\right)(\vec{a}\cdot\vec{a})=\left(\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}\ \vec{a}\right)\left(\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}\cdot\vec{a}\right)=a^2\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2$$

與
$$\left(\left[\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}\cdot\vec{a}\right]\cdot\vec{\rho_1}\right)=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}\cdot\vec{a}\cdot\vec{\rho}\right)=\frac{a^2}{\rho},$$

卽得
$$b^2=a^2\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+K^2+\frac{2K}{\rho}a^2. \tag{5}$$

若 $K>0$ 爲正值 推斥力) 則常有 $b^2>K^2$, 因而 $e>0$, 動點之動徑爲一雙曲線. 若 $K<0$ (吸引力), e 之值須視 $\frac{d\rho}{dt}$ 與 K 之關係而定, 故行星之軌道可爲任意一種圓錐曲線 (此係脫離實際, 專就數理而言).

但 $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2$ 適爲行星速度之平方 v^2, 故 (5) 式可書如

$$b^2=K^2+a^2\left(v^2+2\frac{K}{\rho}\right).$$

由動能定理, 知

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=dT=Fd\rho=\frac{Km}{\rho^2}d\rho,$$

或
$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)-\frac{Km}{\rho^2}d\rho=0.$$

積分之, 卽得
$$\frac{mv^2}{2}+\frac{Km}{\rho}=c' \text{ (常數)},$$

或
$$v^2+2\frac{K}{\rho}=c \text{ (常數)},$$

表示 $v^2+2\dfrac{K}{\rho}$ 不隨運動而變.設行星開始運動時,其速度爲 $\vec{v}_0$. 與日之距離爲 ρ_0, 隨 $v_0^2+2\dfrac{K}{\rho_0}$ 之爲正,爲零,爲負;行星之軌道爲雙曲線爲拋物線,或爲橢圓;其種類僅由初速之大小決定,與初速之方位無關.

實際上 $v^2+2\dfrac{K}{\rho}$ 均爲負值,故行星之軌道純爲橢圓,太陽據其一焦點.彗星中亦有軌道爲雙曲線與拋物線者,但不多見.

質點組之動力學

諸質點間,呈有某種聯繫關係,合成一組,是爲質點組.將日與行星,衛星均視爲質點,太陽系即在空間成爲一質點組.

質點組之特例爲固體,諸質點間,相互位置不變之質點組也.故質點組之動力學,包括固體動力學.

§ 146. 動量定理

假定質點組內之一點爲 $P(\vec{\rho})$, 質量爲 m, 作用於其上之

諸力 $\overrightarrow{F}$ 可分爲二部:一部爲內力 $\overrightarrow{F_i}$, 一部爲外力 $\overrightarrow{F_e}$, P 點之運動, 受此諸力之合力之支配, 有如下式.

$$m\overrightarrow{\frac{d^2\rho}{dt^2}}\quad \Sigma\overrightarrow{F_e}+\Sigma\overrightarrow{F_i}.$$

推廣此式, 至於質點組內各點, 取諸類似之式加之, 卽得

$$\Sigma m\overrightarrow{\frac{d^2\rho}{dt^2}}=\Sigma\Sigma\overrightarrow{F_e}+\Sigma\Sigma\overrightarrow{F_i}$$

爲質點組運動之公式, $\Sigma\Sigma\overrightarrow{F_e}$ 中之第二 Σ, 表示求作用於一點之諸外力 $\overrightarrow{F_e}$ 之合力,第一 Σ 表示求作用於各點外力之合力之總和.

由公式 (3105), 知 $\Sigma\Sigma\overrightarrow{F_i}=0$, 故質點組運動之通式爲:

$$\left.\begin{aligned}&\Sigma m\overrightarrow{\frac{d^2\rho}{dt^2}}=\Sigma\Sigma\overrightarrow{F_e},\\ \text{或}\quad &\Sigma m\overrightarrow{\gamma}=\Sigma\Sigma\overrightarrow{F_e}\end{aligned}\right\}\tag{3315}$$

動量定理:　質點組之動量, 對於時間之微係數等於作用於質點組之諸外力之合力.

就質點組內之任一點言之, 有

$$\frac{d}{dt}(m\overrightarrow{v})=\Sigma\overrightarrow{F_e}+\Sigma\overrightarrow{F_i}.$$

取類似之諸式加之，即得

$$\Sigma\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \Sigma\Sigma\overrightarrow{F_e}+\Sigma\Sigma\overrightarrow{F_i}=\Sigma\Sigma\overrightarrow{F_e}.$$

由 (1505) 知 $\Sigma\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}\Sigma m\vec{v}$，故得

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\vec{v} = \Sigma\Sigma\overrightarrow{F_e}, \tag{3316}$$

即所欲證明之定理. 將此式射影於三軸上，得

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\frac{dx}{dt} = \Sigma\Sigma X_e,$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\frac{dy}{dt} = \Sigma\Sigma Y_e,$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\frac{dz}{dt} = \Sigma\Sigma Z_e.$$

表明：“質點組之動量，在一軸上之正射影，其對於時間之微係數，等於作用於質點組之諸外力之總和，在同軸上之正射影”.

§ 147. 重心運動定理（附太陽系運動）

設質點組之質量爲 $\Sigma m = M$，重心之徑矢爲 $\vec{\pi}$，則有

$$M\vec{\pi} = \Sigma m\vec{\rho}.$$

取此式之二級微係數,即得

$$M\frac{d^2\overrightarrow{\pi}}{dt^2}=\Sigma m\frac{d^2\overrightarrow{\rho}}{dt^2}$$

於是 (3315) 可書如

$$M\frac{d^2\overrightarrow{\pi}}{dt^2}=\Sigma\Sigma\overrightarrow{F_e}. \tag{3317}$$

此中 $\frac{d^2\overrightarrow{\pi}}{dt^2}$ 表重心之加速度,故由此式得定理:

"質點組重心之運動,有如一點之運動,此點之質量爲質點組之總質量,作用於其上之力,爲作用於質點組之外力之總和".

將 (3317) 式射影於三垂直軸上,得

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2}=\Sigma\Sigma X_e$$

$$M\frac{d^2\zeta}{dt^2}=\Sigma\Sigma Y_e,$$

$$M\frac{d^2\eta}{dt^2}=\Sigma\Sigma Z_e$$

爲重心運動定理之解析式.

由重心運動定理,可以推出若干有趣之性質,今取一例以見之:

兩恆星非常接近，其相互引力之大，遠甚於其他各星體施於其上之力，將恆星視作質點，此二點卽合成一質點組，是爲雙星．雙星相互繞行，無或已時；然假定外界之力不存在（小至不必計及之程度），雙星之重心，將永爲靜止，或作等速直線運動，全視其最初時重心之動靜狀態而定．

將太陽系視作一質點組，其重心極近太陽此點，以至大之速度，向武仙星座急馳，大體上言之，其運動卽爲一等速直線運動．太陽與各行星隨之而走，故地球在空間之運動，有類於一巨大之轉動．

§ 148. 質點組之動量矩

定理： 質點組對於一定點之動量矩，等於質點組對於重心之動量矩與重心對於定點之動量矩之和．而在計算重心對於定點之動量矩時，應假定重心爲一質點，全質點組之質量，均聚其上．

證： 設定點爲 O，重心爲 $G(\vec{\pi})$，重心至質點 $P(\vec{\rho})$ 之徑矢爲 $\overrightarrow{GP}=\vec{r}$，餘依前此各節之記法，$P$ 點對於定點之動量矩爲：

$$[\vec{\rho}\cdot m\vec{v}]=\left[\vec{\rho}\cdot m\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}\right].$$

但由 $\vec{\rho}=\vec{\pi}+\vec{r}$, 得 $\dfrac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}=\dfrac{\overrightarrow{d\pi}}{dt}+\dfrac{\overrightarrow{dr}}{dt}$.

故 P 對 O 之動量矩爲:

$$\left[(\vec{\pi}+\vec{r})\cdot m\left(\frac{\overrightarrow{d\pi}}{dt}+\frac{\overrightarrow{dr}}{dt}\right)\right]=\left[\vec{\pi}\cdot m\frac{\overrightarrow{d\pi}}{dt}\right]+\left[\vec{\pi}\cdot m\frac{\overrightarrow{dr}}{dt}\right]$$
$$+\left[\vec{r}\cdot m\frac{\overrightarrow{d\pi}}{dt}\right]+\left[\vec{r}\cdot m\frac{\overrightarrow{dr}}{dt}\right].$$

質點組對 O 點之動量矩爲:

$$\Sigma[\vec{\rho}\cdot m\vec{v}]=\Sigma\left[\vec{\pi}\cdot m\frac{\overrightarrow{d\pi}}{dt}\right]+\Sigma\left[\vec{\pi}\cdot m\frac{\overrightarrow{dr}}{dt}\right]$$
$$+\Sigma\left[\vec{r}\cdot m\frac{\overrightarrow{d\pi}}{dt}\right]+\Sigma\left[\vec{r}\cdot m\frac{\overrightarrow{dr}}{dt}\right].$$

運用分配定則, 上式變爲

$$\Sigma[\vec{\rho}\cdot m\vec{v}]=\left[\vec{\pi}\cdot\frac{\overrightarrow{d\pi}}{dt}\right]\Sigma m+\left[\vec{\pi}\cdot\Sigma m\frac{\overrightarrow{dr}}{dt}\right]$$
$$+\left[\Sigma m\vec{r}\cdot\frac{\overrightarrow{d\pi}}{dt}\right]+\Sigma\left[\vec{r}\cdot m\frac{\overrightarrow{dr}}{dt}\right].$$

但依重心之定義, $\Sigma m\vec{r}=0$, 又 $\Sigma m\dfrac{\overrightarrow{dr}}{dt}=0$, 故得

$$\Sigma\left[\vec{\rho}\cdot m\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}\right]=\left[\vec{\pi}\cdot M\frac{\overrightarrow{d\pi}}{dt}\right]+\Sigma\left[\vec{r}\cdot m\frac{\overrightarrow{dr}}{dt}\right] \qquad (3318)$$

右方第一項爲重心對 O 點之動量矩（重心之質量,假擬爲

M), 第二項適爲質點組對於重心之動量矩, 即得上述之定理.

§ 149. 動量矩定理

質點組中, P 點之徑矢爲 $\vec{\rho}$, 質量爲 m. 運用點之動量矩定理, 得 $\frac{d}{dt}\left[\vec{\rho}\cdot m\overrightarrow{\frac{d\rho}{dt}}\right]=\Sigma[\vec{\rho}\cdot\overrightarrow{F_e}]+\Sigma[\vec{\rho}\cdot\overrightarrow{F_i}]$.

將此式推至全部質點, 取諸式相加之, 得

$$\Sigma\frac{d}{dt}\left[\vec{\rho}\cdot m\overrightarrow{\frac{d\rho}{dt}}\right]=\Sigma\Sigma[\vec{\rho}\cdot\overrightarrow{F_e}]+\Sigma\Sigma[\vec{\rho}\cdot\overrightarrow{F_i}].$$

此中 $\Sigma\Sigma[\vec{\rho}\cdot\overrightarrow{F_i}]$ 爲作用於全部質點之內力之總力矩, 因內力均是兩兩對消, 故 $\Sigma\Sigma[\vec{\rho}\cdot\overrightarrow{F_i}]=0$, 又由 (1505) 式, 知

$$\Sigma\frac{d}{dt}\left[\vec{\rho}\cdot m\overrightarrow{\frac{d\rho}{dt}}\right]=\frac{d}{dt}\Sigma\left[\vec{\rho}\cdot m\overrightarrow{\frac{d\rho}{dt}}\right],$$

故
$$\frac{d}{dt}\Sigma\left[\vec{\rho}\cdot m\overrightarrow{\frac{d\rho}{dt}}\right]=\Sigma\Sigma[\vec{\rho}\cdot\overrightarrow{F_e}]. \tag{3318'}$$

由此式可得質點組之動量矩定理如下:

"質點組對於定點之動量矩, 其微係數等於作用於質點組之諸外力, 對於同點之總力矩".

(3318') 式在座標軸上之射影式爲

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=\Sigma\Sigma(yZ_e-zY_e),$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=\Sigma\Sigma(zX_e-xZ_e),$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\Sigma\Sigma(xY_e-yX_e).$$

此三式表示："質點組對於定點之動量矩，其在定軸上射影之微係數，等於作用於質點組之諸外力，對於同軸之總力矩".

若諸外力對於一軸（例如 Oz）之力矩爲零，必有

$$\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=C\ (常量).$$

以 dS 表 P 之徑矢所掃過之面積在平面 xOy 上之射影 $\frac{1}{2}(xdy-ydx)$，則有 $\quad \Sigma m\frac{dS}{dt}=\frac{C}{2}.$

積分之：
$$\Sigma mS-\Sigma mS_0=\frac{C}{2}(t-t_0). \tag{3319}$$

此示：若作用於質點組之諸外力，對於一軸之總力矩爲零，則各質點之徑矢，在空間所掃過之面積，投影在垂直於軸之平面上，先以各質點之質量乘之，然後相加其總和與時間成正比例，此爲面積定理之推廣.

試取絲蠶置於極平滑之水平面上，作用於蠶身之力，僅

有地心吸力，其相對於鉛直方位之總力矩爲零．故蠶在此面上之運動，適合於面積定理．假定蠶在初時不動 $\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}=0$，則 C 亦爲零．此後無論蠶如何運動，(3319) 常爲

$$\Sigma mS-\Sigma mS_0=0.$$

故蠶頭轉向一方時，蠶尾必同時轉向他方．

§ 150　刻尼克定理 (théorème de Konig)

定理：　質點組之動能，等於質點組對重心之相對運動之動能，另加重心運動之動能．當計算重心運動之動能時，應假定質點組之全部質量，集中於重心．

證：　依 148 節之記法，質點組之動能爲：

$$\frac{1}{2}\Sigma m\left(\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}\right)^2.$$

但　$\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}=\frac{\overrightarrow{d\pi}}{dt}+\frac{\overrightarrow{dr}}{dt}$，　$\left(\frac{\overrightarrow{d\rho}}{dt}\right)^2=\left(\frac{\overrightarrow{d\pi}}{dt}\right)^2+\left(\frac{\overrightarrow{dr}}{dt}\right)^2+2\left(\frac{\overrightarrow{d\pi}}{dt}\cdot\frac{\overrightarrow{dr}}{dt}\right)$

故質點組之動能爲

$$\frac{1}{2}\Sigma m\left(\frac{\overrightarrow{d\pi}}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}\Sigma m\left(\frac{\overrightarrow{dr}}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}\Sigma 2m\left(\frac{\overrightarrow{d\pi}}{dt}\cdot\frac{\overrightarrow{dr}}{dt}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{d\pi}{dt}\right)^2\Sigma m+\frac{1}{2}\Sigma m\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\vec{\pi}}{dt}\cdot\Sigma m\frac{d\vec{r}}{dt}\right).$$

但由重心之定義,知 $\Sigma m\vec{r}=0$, 故 $\Sigma m\frac{d\vec{r}}{dt}=0$, 知質點組之

動能爲 $$\frac{1}{2}M\left(\frac{d\vec{\pi}}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}\Sigma m\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2.$$

$\frac{d\vec{\pi}}{dt}$ 爲重心運動之速度 $\vec{V}$, $\frac{d\vec{r}}{dt}$ 爲質點對重心之相對速度

$\vec{v}'$, 令設 $\vec{v}$ 爲質點之絕對速度, 得

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2=\frac{1}{2}M^2V+\frac{1}{2}\Sigma mv'^2, \tag{3320}$$

是爲刻尼克定理.

§ 151. 動能定理

對於一質點而言, 作用於其上之力爲 $\Sigma\vec{F_e}+\Sigma\vec{F_i}$, 當此點移動 $\vec{d\rho}$ 時, 諸力所作之微細功爲

$$dT=(\vec{d\rho}\cdot\Sigma\vec{F_e}+\Sigma\vec{F_i})=\Sigma(\vec{d\rho}\cdot\vec{F_e})+\Sigma(\vec{d\rho}\cdot\vec{F_i}).$$

設此點之速度爲 $\vec{v}$, 將點之動能定理運用於此點:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=dT=\Sigma(\vec{d\rho}\cdot\vec{F_e})+\Sigma(\vec{d\rho}\cdot\vec{F_i}).$$

推之至於質點組中各點而求類似諸式之和，得

$$\Sigma d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\Sigma\Sigma(\overrightarrow{d\rho}\cdot\overrightarrow{F_e})+\Sigma\Sigma(\overrightarrow{d\rho}\cdot\overrightarrow{F_i}),$$

或
$$d\left(\Sigma\frac{mv^2}{2}\right)=\Sigma\Sigma(\overrightarrow{d\rho}\cdot\overrightarrow{F_e})+\Sigma\Sigma(\overrightarrow{d\rho}\cdot\overrightarrow{F_i}). \qquad (3321)$$

$\Sigma\frac{mv^2}{2}$ 為全質點組之動能，故得動能定理之微分形式：

"質點組動能之微分，等於內力與外力所作微細功之總和".

將 (3321) 在時間 t_0 與 t 之限度內積分之，得

$$\Sigma\frac{mv^2}{2}-\Sigma\frac{mv_0^2}{2}=\int_{t_0}^{t}\Sigma\Sigma(\overrightarrow{d\rho}\cdot\overrightarrow{F_e})+\int_{t_0}^{t}\Sigma\Sigma(\overrightarrow{d\rho}\cdot\overrightarrow{F_i}), \qquad (3322)$$

為動能定理之積分形式：

"質點組之動能在定時間內之變化，等於內外各力在同時間內所作之功".

注意： 內力之總和雖為零，然其所作之功不必為零．試取二點 A, B．命其距離為 $\overrightarrow{AB}=\vec{\rho}$，其相互之引力為 F, F'，

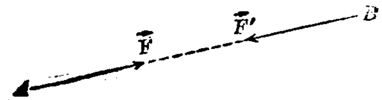


圖 155

均在$\vec{\rho}$之座標上,且　$\vec{F}+\vec{F'}=0$

假定A暫時不動,B在AB線上移動$\overrightarrow{d\rho}$.此時$\vec{F'}$雖不作功,但$\vec{F}$之功則爲(3309)

$$(\vec{F}\cdot\overrightarrow{d\rho})=F\cdot d\rho,$$

并不爲零.火藥爆炸,作功甚大,然并無外力存在,卽內力作功之明證也.

但在固體內,各點之相對位置,常爲一定.質點間距離旣不變易,諸內力之功常爲零.故運用動能定理時,一如動量與動量矩定理,可以不必顧及內力之作用.

§ 152. 轉動體

繞一定軸而運動之固體,稱爲轉動體,鐘擺與輪機皆是也.

欲決定轉動體之位置,只須取含轉軸Δ之定平面π爲標準.於轉動體上取一點P,過此作含Δ之平面π'.π與π'所成之角θ完全決定轉動體之位置.故研究轉動體之運動,只須研究θ與時間之關係.

轉動體各部,在同時間,有同樣之角速度$\vec{\omega}$,因此性質,在

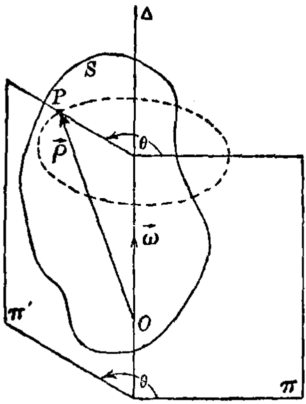


圖 156

計算動量矩與動能時，可以簡單不少.

轉量體上一點 $P(\vec{\rho})$ 之速度爲 $[\vec{\omega}\cdot\vec{\rho}]$，其對於 Δ 之動量矩爲

$$([\vec{\rho}\cdot m[\vec{\omega}\cdot\vec{\rho}]]\cdot\vec{\omega}_1) = m([\vec{\omega}_1\cdot\vec{\rho}])^2\omega.$$

固體全部之動量矩爲

$$\Sigma m([\vec{\omega}_1\cdot\vec{\rho}])^2\omega.$$

因 ω 爲常數，故得　$\omega\Sigma m([\vec{\omega}_1\cdot\vec{\rho}])^2.$

而 $\Sigma m([\vec{\omega}_1\cdot\vec{\rho}])^2$ 適爲固體對 Δ 軸之轉動慣量 I，故轉動體之動量矩爲

$$I\omega \tag{3323}$$

又 P 點之動能爲

$$\frac{m}{2}([\vec{\omega}\cdot\vec{\rho}])^2=\frac{m}{2}([\vec{\omega}_1\cdot\vec{\rho}])^2\omega^2.$$

故轉動體之動能為

$$\frac{1}{2}\Sigma m([\vec{\omega}_1\cdot\vec{\rho}])^2\omega^2=\frac{1}{2}\omega^2\Sigma m([\vec{\omega}_1\cdot\vec{\rho}])^2=\frac{I\omega^2}{2}. \qquad (3324)$$

§ 153 轉動體之運動方程式

轉動體之位置,全由 θ 所決定,知 θ 與時間之關係,卽知轉動體之運動.故研究轉動體之運動,只須一個方程式已足.此方程式,可運用動能定理推得.

定理: 作用於轉動體之諸力 $\vec{F}$ 對於 Δ 之總力矩為 Γ,其在 dt 時間內所作之微細功為 $\Gamma\, d\theta$.

證: 固體上一點 $P(\vec{\rho})$ 之速度為 $\vec{v}=[\vec{\omega}\cdot\vec{\rho}]$,所受之力為 $\vec{F}$,其所作之微細功為

$$dT_1=(\vec{F}\cdot[\vec{\omega}\cdot\vec{\rho}])dt=(\vec{F}\cdot\vec{\omega}_1\cdot\vec{\rho})\omega\, dt.$$

但由 ω 之定義,知 $\omega\, dt=d\theta$,故

$$dT_1=([\vec{\rho}\cdot\vec{F}]\cdot\vec{\omega}_1)d\theta.$$

固體全部運動所作之微細功為

$$dT=\Sigma dT_1=\Sigma([\vec{\rho}\cdot\vec{F}]\cdot\vec{\omega}_1)d\theta.$$

因 $d\theta$ 對固體上各點均爲一致，$\overrightarrow{\omega_1}$ 又爲常量，故

$$dT=(\overrightarrow{\omega_1}\cdot\Sigma[\overrightarrow{\rho}\cdot\overrightarrow{F}])d\theta=\Gamma\,d\theta. \tag{3325}$$

已知微細功之公式，運用動能定理，得

$$d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right)=dT=\Gamma\;d\theta. \tag{3326}$$

又由

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{I\omega^2}{2}\right)=\Gamma\frac{d\theta}{dt},$$

得

$$I\frac{d\omega}{dt}=\Gamma \tag{3327}$$

適爲動量矩定理．此示動量矩定理與動能定理，對轉動體而言，實僅一式，實證轉動體之運動方程式，只需一個．

靜力學

§154. 平衡

質點受諸力之作用後，原爲靜止者，仍爲靜止；則謂此點呈平衡狀態，或謂諸力互成平衡．

固體上一點受力之作用，不能自由運動；一運動則固體之全部質點亦將隨之；故施於固體一部分之力，可認爲施於固體之力．諸力作用於固體上，而不能變更其靜止之狀態爲運動者，則稱固體在平衡狀態，或謂諸力互成平衡．

以平衡之力羣,施於物體,其原爲靜止者,依平衡之意義,仍爲靜止. 故研究靜力學,不啻研究諸力成平衡之條件.

加力羣 S 於 (S_1) 與 (S_2) 中,使其皆成平衡,則 (S_1) 與 (S_2) 爲全等之二力羣.

全等之二力羣,分別作用於一物體,其效果相同. 故集多數力而成之力羣,可設法減少力之個數,使成他一羣,但須二羣全等,於應用上并無不合,且亦便利. 作此種力羣變換之法,謂之力羣之簡化.

加平衡之力羣 (S) 於他力羣 (S') 上,(S') 不能因之而有變異,不然 (S) 將失其平衡之意義矣.

§ 155. 質點之平衡條件

質點原在靜止狀態,速度爲零,苟無加速度,質點必不能運動,故質點之平衡條件爲 $\vec{\gamma}=0$, 假定施於質點之諸力爲 $\vec{F}$, 質點之質量爲 m, 由 $\Sigma\vec{F}=m\vec{\gamma}$,

得 $$\Sigma\vec{F}=0. \tag{3327'}$$

即: "質點之平衡條件,在作用其上之諸力之合力爲零".

於點之三個運動方程式,將 $\vec{v}=0$ 與 $\vec{\gamma}=0$ 代入,均得 $\Sigma\vec{F}=0$, 故 $\Sigma\vec{F}=0$ 爲質點平衡之唯一條件.

注意：　在曲面或曲線上之質點,施壓力於其上.同時曲面或曲線亦施一反動力於質點.求質點之平衡條件時,必須計及之.

§ 156. 固體之平衡條件

固體在平衡狀態時,其各質點亦呈平衡狀態.一質點所受之力,爲內力與外力之總和 $\Sigma\overrightarrow{F_e}+\Sigma\overrightarrow{F_i}$, 此點之平衡條件爲

$$\Sigma\overrightarrow{F_e}+\Sigma\overrightarrow{F_i}=0.$$

固體上一切點之平衡條件皆與此式相類,取諸式加之,得

$$\Sigma\Sigma\overrightarrow{F_e}+\Sigma\Sigma\overrightarrow{F_i}=0.$$

二重加號示施於諸質點上諸力之和.依牛頓原理,固體內常有 $\Sigma\Sigma\overrightarrow{F_i}=0$, 故固體平衡之一條件爲

$$\Sigma\Sigma\overrightarrow{F_e}=0 \qquad (3328)$$

任取空間一點爲原點,質點之徑矢爲 $\vec{\rho}$, 常有

$$[\vec{\rho}\cdot\Sigma\overrightarrow{F_e}]=0.$$

此式中諸力均會於質點上,故可書如

$$\Sigma[\vec{\rho}\cdot\overrightarrow{F_e}]=0.$$

推之至全部質點,取諸式加之,得

$$\Sigma\Sigma'[\vec{\rho}\cdot\vec{F_e}]=0 \tag{3329}$$

爲固體平衡之另一條件.

合 (3328) 與 (3329) 得一定理:

"力羣作用於固體上, 其平衡之完全條件在: 准合力及力羣對於空間任一點之總力矩均爲零".

§ 157. 力羣之簡化

定理: 有二力羣, 其准合力與對於同點之力矩均爲相等, 此二力羣爲全等.

證: 設有二力羣 (S') 與 (S''), 其准合力各爲 $\vec{F'}$ 與 $\vec{F''}$, 總力矩爲 $\vec{m'}$ 與 $\vec{m''}$, 有

$$\vec{F'}=\vec{F''},$$

$$\vec{m'}=\vec{m''}.$$

今擇一力羣 (S), 加於 (S') 上, 使其准合力與總力矩 $\vec{F}$, $\vec{m}$ 適合於

$$\left.\begin{aligned}\vec{F'}+\vec{F}=0,\\ \vec{m'}+\vec{m}=0.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

亦必有

$$\left.\begin{aligned}\vec{F''}+\vec{F}=0,\\ \vec{m''}+\vec{m}=0.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

今以 S, $(S'$ 二力羣施諸一靜止之固體,依上節之定理,(1) 式表明固體仍在平衡狀態. 施 (S) 與 (S'') 合成之力羣亦然. 已知 (S'), (S'') 同與 (S) 成平衡, 故全等.

依此定理: 欲簡化一力羣, 只須尋得他一力羣, 含力較少, 其准合力與總力矩均與原力羣相同, 即可.

§158. 化力羣爲二力

有一力羣,含力多個. 其准合力爲 $\vec{F}$, 對原點之總力矩爲 $\vec{m}$. 今若有二力 $\vec{F'}$ 與 $\vec{F''}$ (滑動矢), 其對於原點之力矩各爲 $\vec{m'}$ 與 $\vec{m''}$, 欲此二力與力羣全等, 必須

$$\vec{F}=\vec{F'}+\vec{F''}, \tag{1}$$

$$\vec{m}=\vec{m'}+\vec{m''}. \tag{2}$$

於此二式之外, 加入力與力矩之關係

$$(\vec{F'}\cdot\vec{m'})=0, \tag{3}$$

$$(\vec{F''}\cdot\vec{m''})=0. \tag{4}$$

自表面觀之, 已有四方程式決定 $\vec{F'}$, $\vec{M'}$, $\vec{F''}$, $\vec{M''}$ 四個向量,但四式均不決定矢之原點,故條件仍爲不足. 任給一自由矢以表 $\vec{F'}$, 常可將此矢限止於一直線上,然後再決定他

一矢，故化力羣爲二力，可得無限之答案.

一力羣化爲二力之法，雖有無限組，然二力間常呈一定關係，不論何組，概能適合.

定理：　將力羣化爲二力，所得任意一組，其相互力矩爲一常量.

證：　$\overrightarrow{F'}$ 與 $\overrightarrow{F''}$ 二力之座標，係由勃魯克座標 $\overrightarrow{F'}$, $\overrightarrow{m'}$ 與 $\overrightarrow{F''}$, $\overrightarrow{m''}$ 所決定，由公式 (3312′)，知其相互力矩爲

$$m(\overrightarrow{F'}, \overrightarrow{F''}) = (\overrightarrow{m''} \cdot \overrightarrow{F'}) + (\overrightarrow{m'} \cdot \overrightarrow{F''}).$$

今以 (1), (2) 兩式相乘，得

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{m}) &= (\overrightarrow{F'} + \overrightarrow{F''} \cdot \overrightarrow{m'} + \overrightarrow{m''}) \\ &= (\overrightarrow{F'} \cdot \overrightarrow{m'}) + (\overrightarrow{F''} \cdot \overrightarrow{m'}) + (\overrightarrow{F''} \cdot \overrightarrow{m''}) + (\overrightarrow{F'} \cdot \overrightarrow{m''}).\end{aligned}$$

由 (3), 4), 得

$$(\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{m}) = (\overrightarrow{F''} \cdot \overrightarrow{m'}) + (\overrightarrow{F'} \cdot \overrightarrow{m''}).$$

故得
$$m(\overrightarrow{F'}, \overrightarrow{F''}) = (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{m}) = \text{常量} \tag{3330}$$

因二矢之相互力矩等於以二矢及聯其原點之線所作之平行六面體之體積，故可將上述定理作爲：

“將力羣化爲任一組二力後，以二力爲對邊所作之四面體，體積爲一常量”.

§159　化力羣爲一力或一力偶

依上節所云,力羣常可化爲二力,此二力在特種情形下:若二力之座標相交,此二力卽可由矢之加法合爲一力;若二力方位相同,大小相等,但不同座標,不同方向,此二力卽稱爲力偶.

定理1.　力羣可以化爲一力之完全條件,在其准合力不等於零,而對於空間一點之總力矩爲零,或垂直於准合力.

此爲必需條件:蓋若力羣之准合力與總力矩爲 $\overrightarrow{F}, \overrightarrow{m}$,而此力羣可化爲一單獨之力 $\overrightarrow{F_0}$,由勃魯克座標 $\overrightarrow{F_0}\cdot\overrightarrow{m_0}$ 所決定,有則

$$(\overrightarrow{F_0}\cdot\overrightarrow{m_0})=0.$$

今力羣既可化爲 $\overrightarrow{F_0}$,必有 $\overrightarrow{F}=\overrightarrow{F_0}$　$\overrightarrow{m}=\overrightarrow{m_0}$　得

$$(\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{m})=0$$

但依假設,$\overrightarrow{F}\neq 0$,故必須 $\overrightarrow{m}=0$,或 $\overrightarrow{m}\perp\overrightarrow{F}$.

此條件又爲充分條件,蓋如所設:有 $\overrightarrow{F}\neq 0$;$\overrightarrow{m}=0$,或 $\overrightarrow{m}\perp\overrightarrow{F}$ 必可以 $\overrightarrow{F}, \overrightarrow{m}$ 二矢作勃魯克座標,而決定一滑動矢也.

定理 2. 力羣可以化爲力偶之完全條件,在其准合力爲零,總力矩不爲零.

此爲必需條件,蓋若以 $\overrightarrow{F'}$, $\overrightarrow{F''}$ 表力偶,必有 $\overrightarrow{F'}=-\overrightarrow{F''}$,故力羣若可化爲力偶,必需

$$\overrightarrow{F}=\overrightarrow{F'}+\overrightarrow{F''}=0.$$

同時總力矩不當爲零;苟總力矩爲零,則施此力羣於一固體上,將呈平衡狀態矣.

此條件且爲充分條件,蓋既有 $\overrightarrow{F}=0$,必可尋得 $\overrightarrow{F'}$, $\overrightarrow{F''}$

使
$$\overrightarrow{F'}+\overrightarrow{F''}=0=\overrightarrow{F}.$$

同時此二力不得同座標,蓋二力同座標,成爲會合力羣,其合力既爲零,其總力矩亦將爲零,此與假設不合.

§ 160. 平行力羣

力羣中,諸力之座標均平行於一方位者,稱爲平行力羣.

平行力羣有散漫力羣之一切性質,幷因其爲散漫力羣之特例,另具有特別性質.

平行力羣中諸力 $\overrightarrow{f_1}$, $\overrightarrow{f_2}$, $\cdots$ $\overrightarrow{f_i}$, $\cdots\cdots$ $\overrightarrow{f_n}$ 既有共同之方位,可於此方位定一單位矢 $\overrightarrow{u}$,諸力皆以 $\overrightarrow{u}$ 之倍矢表之,隨

力與 $\vec{u}$ 之方向相同與否，給力之數值以正負值

諸力之准合力 $\vec{F}$，亦與原有之力同方位，此可於下式見之：

$$\vec{F}=\Sigma\vec{f_i}=\Sigma f_i\cdot\vec{u}=\vec{u}\Sigma f_i. \tag{3331}$$

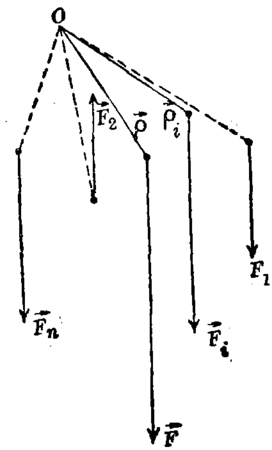


圖 157

假定諸力 $\vec{f_i}$ 之作用點之徑矢爲 $\vec{\rho_i}$，力羣對於原點之總力矩爲：

$$\vec{m}=\Sigma[\vec{\rho_i}\cdot\vec{f_i}]=\Sigma[f_i\,\vec{\rho_i}\cdot\vec{u}],$$

或

$$\vec{m}=[\Sigma f_i\,\vec{\rho_i}\cdot\vec{u}]. \tag{3332}$$

以 $\vec{F}$ 數乘此式，得

$$(\vec{m}\cdot\vec{F})=\Sigma f_i([\Sigma f_i\,\vec{\rho_i}\cdot\vec{u}]\cdot\vec{u})=0$$

故由前節定理(1)知：

"平行力羣之准合力若不爲零,此力羣相當於一力 可認爲力羣之合力".

平行力羣既相當於一單純之力,此力對一點之力矩,當爲力羣對同點之力矩,故設 $\vec{\rho}$ 爲合力之作用點之徑矢,可

得 $$[\vec{\rho}\cdot\vec{F}]=\Sigma[\vec{\rho_i}\ \vec{f_i}],$$

或 $$[\vec{\rho}\cdot\vec{u}\Sigma f_i]=[\Sigma f_i\,\vec{\rho_i}\cdot\vec{u}],$$

$$[\vec{\rho}\Sigma f_i\cdot\vec{u}]=[\Sigma f_i\,\vec{\rho_i}\cdot\vec{u}];$$

即得 $$\vec{\rho}\Sigma f_i=\Sigma f_i\,\vec{\rho_i}.$$

故 $$\vec{\rho}=\frac{\Sigma f_i\,\vec{\rho_i}}{\Sigma f_i}. \tag{3333}$$

假定各力之作用點爲一質點,假想其質量與力成比例 此式表示："合力之作用點,爲諸力作用點之重心".

又因式中並無 $\vec{u}$ 存在,故知諸力之方位同時變化時,合力之作用點不變.

以上所云,係假定 $\Sigma f_i\neq0$, 即 $\vec{F}\neq0$ 而言；但若 $\vec{F}=0$, 可有下列二種情形發生：

1. 總力矩不爲零,依前節定理(2)知此力羣相當於一力偶.

2. 總力矩爲零,此時諸力卽呈平衡.