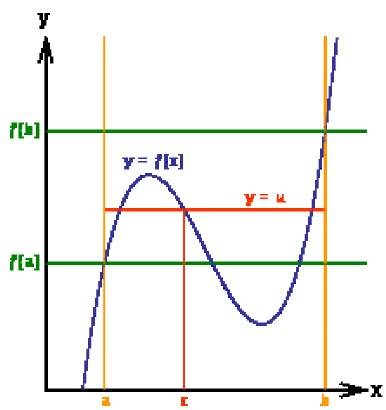
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2023**

Analysis I

Vorlesung 13

Der Zwischenwertsatz

Wir interessieren uns dafür, was unter einer stetigen Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit einem Intervall passiert. Der Zwischenwertsatz besagt, dass das Bild wieder ein Intervall ist.



Satz 13.1. *Es seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es sei $u \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) = u$.*

Beweis. Wir beschränken uns auf die Situation $f(a) \leq u \leq f(b)$ und zeigen die Existenz von einem solchen c mit Hilfe einer Intervallhalbierung. Dazu setzt man $a_0 := a$ und $b_0 := b$, betrachtet die Intervallmitte $c_0 := \frac{a_0+b_0}{2}$ und berechnet

$$f(c_0)\,.$$

Bei $f(c_0) \leq u$ setzt man

$$a_1 := c_0 \text{ und } b_1 := b_0$$

und bei $f(c_0) > u$ setzt man

$$a_1 := a_0 \text{ und } b_1 := c_0\,.$$

In jedem Fall hat das neue Intervall $[a_1, b_1]$ die halbe Länge des Ausgangsintervalls und liegt in diesem. Da es wieder die Voraussetzung $f(a_1) \leq u \leq$

$f(b_1)$ erfüllt, können wir darauf das gleiche Verfahren anwenden und gelangen so rekursiv zu einer Intervallschachtelung. Sei c die durch diese Intervallschachtelung definierte reelle Zahl. Für die unteren Intervallgrenzen gilt $f(a_n) \leq u$ und das überträgt sich wegen der Stetigkeit nach dem Folgenkriterium auf den Grenzwert c, also $f(c) \leq u$. Für die oberen Intervallgrenzen gilt $f(b_n) \geq u$ und das überträgt sich ebenfalls auf c, also $f(c) \geq u$. Also ist $f(c) = u$. □

Die in diesem Beweis beschriebene Methode ist konstruktiv und kann zu einem expliziten Verfahren ausgebaut werden.

Korollar 13.2. *Es seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) \leq 0$ und $f(b) \geq 0$. Dann gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x \leq b$ und mit $f(x) = 0$, d.h. f besitzt eine Nullstelle zwischen a und b.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 13.1. □

Beispiel 13.3. Ein regelmäßiger quadratischer Tisch mit vier Beinen A, B, C, D steht auf einem unebenen, aber stufenfreien Untergrund. Im Moment steht er auf den Beinen A, B, C und das Bein D ragt in die Höhe (wenn man B, C in ihrer Position belässt und D auf den Boden drückt, würde A versinken). Wir behaupten, dass man den Tisch durch eine (maximal Viertel)-Drehung um die eigene Achse (sagen wir gegen den Uhrzeigersinn) in eine Position bringen kann, wo er auf allen vier Beinen steht (wobei der Tisch nicht unbedingt genau horizontal stehen muss). Dazu betrachten wir die Funktion, die einem Drehwinkel (zwischen 0 und 90 Grad) die Höhe des Beines D über dem Grund zuordnet, wenn die drei übrigen Beine auf dem Boden stehen (würden). Dabei kann diese Höhe auch negativ werden (was sich bei einem sandigen Untergrund praktisch realisieren lässt; sonst denke man sich dies „virtuell“). Bei 0 Grad ist die Höhe positiv. Bei 90 Grad erhält man eine Situation, die symmetrisch zur Ausgangssposition ist, wobei aber nach wie vor die Beine A, B, C auf dem Boden sein sollen. Wegen der in der Klammer formulierten Beobachtung muss die Höhe von D negativ sein. Die Funktion hat also auf dem Intervall sowohl positive als auch negative Werte. Da sie wegen der Stufenfreiheit stetig ist, besitzt sie nach dem Zwischenwertsatz auch eine Nullstelle.

Beispiel 13.4. Die Abbildung

$$f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q},\, x \longmapsto x^2 - 2,$$

ist stetig, sie genügt aber nicht dem Zwischenwertsatz. Für $x = 0$ ist $f(0) = -2 < 0$ und für $x = 2$ ist $f(2) = 2 > 0$, es gibt aber kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $f(x) = 0$, da dafür $x^2 = 2$ sein muss, wofür es in $\mathbb{Q}$ keine Lösung gibt. Der Zwischenwertsatz funktioniert also nur für reelle Zahlen.

Mit der im Beweis des Zwischenwertsatzes verwendeten Intervallhalbierungsmethode kann man insbesondere auch Quadratwurzeln „ausrechnen“, also Folgen angeben, die gegen die Quadratwurzel konvergieren. Die Konvergenzgeschwindigkeit beim babylonischen Wurzelziehen ist aber deutlich höher.

Korollar 13.5. *Es sei I ein reelles Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist auch das Bild $f(I)$ ein Intervall.*

Beweis. Sei $J = f(I)$. Aus dem Zwischenwertsatz folgt sofort, dass wenn $y, z \in J$ sind und $u \in \mathbb{R}$ mit $y \leq u \leq z$ gegeben ist, auch $u \in J$ sein muss. Nach Aufgabe 6.20 ist J ein Intervall. □

Stetige bijektive Funktionen und ihre Umkehrfunktion

Für eine bijektive stetige Funktion auf einem reellen Intervall ist die Umkehrabbildung wieder stetig. Dies ist keineswegs selbstverständlich.

Satz 13.6. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, streng wachsende Funktion. Dann ist das Bild

$$J := f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$$

ebenfalls ein Intervall, und die Umkehrabbildung

$$f^{-1}\colon J \longrightarrow I$$

ist ebenfalls stetig.

Beweis. Dass das Bild wieder ein Intervall ist folgt aus Korollar 13.5. Die Funktion f ist injektiv, da sie streng wachsend ist und damit ist die Abbildung

$$f\colon I \longrightarrow J$$

auf das Bild bijektiv. Die Umkehrfunktion

$$f^{-1}\colon J \longrightarrow I$$

ist ebenfalls streng wachsend. Sei $g := f^{-1}$ und $y := f(x)$ vorgegeben. Es sei zunächst y kein Randpunkt von J. Dann ist auch x kein Randpunkt von I. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben und ohne Einschränkung $[x - \epsilon, x + \epsilon] \subseteq I$ angenommen. Dann ist

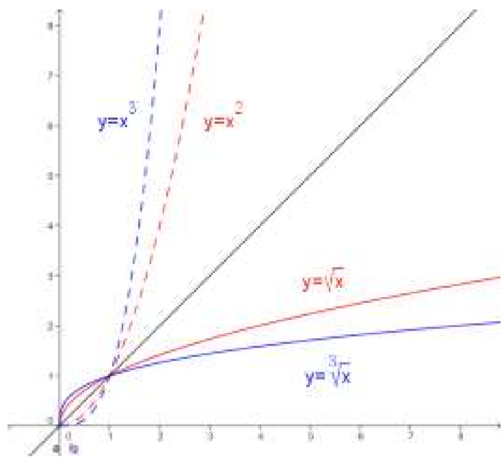
$$\delta := \min\left(y - f(x - \epsilon), f(x + \epsilon) - y\right) > 0$$

und für $y' \in [y - \delta, y + \delta]$ gilt wegen der Monotonie

$$g(y') \in [g(y - \delta), g(y + \delta)] \subseteq [x - \epsilon, x + \epsilon].$$

Also ist g stetig in y. Wenn y ein Randpunkt von J ist, so ist auch x ein Randpunkt von I, sagen wir der rechte Randpunkt. Dann ist zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ wieder $[x-\epsilon, x] \subseteq I$ und $\delta := y - f(x-\epsilon)$ erfüllt die geforderte Eigenschaft. $\square$

Stetigkeit der Wurzeln



Satz 13.7. *Es sei $n \in \mathbb{N}_+$. Für n ungerade ist die Potenzfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^n,$$

stetig, streng wachsend, bijektiv und die Umkehrfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^{1/n},$$

ist streng wachsend und stetig. Für n gerade ist die Potenzfunktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto x^n,$$

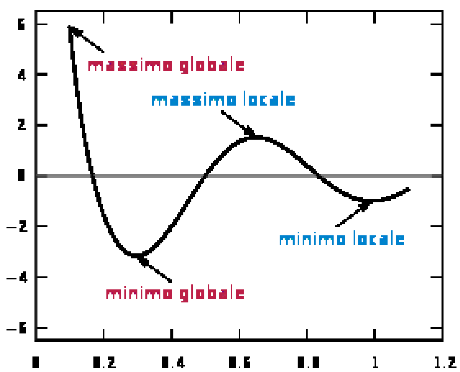
stetig, streng wachsend, bijektiv und die Umkehrfunktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto x^{1/n},$$

ist streng wachsend und stetig.

Beweis. Die Stetigkeit ergibt sich aus Korollar 12.8. Das strenge Wachstum für $x \geq 0$ folgt aus der allgemeinen binomischen Formel. Für ungerades n folgt das strenge Wachstum für $x < 0$ aus der Beziehung $x^n = -(-x)^n$ und dem Verhalten im positiven Bereich. Daraus ergibt sich die Injektivität. Für $x \geq 1$ ist $x^n \geq x$, woraus die Unbeschränktheit des Bildes nach oben folgt. Bei n ungerade folgt ebenso die Unbeschränktheit des Bildes nach unten. Aufgrund des Zwischenwertsatzes ist das Bild daher $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Somit sind die angegebenen Potenzfunktionen surjektiv und die Umkehrfunktionen existieren. Die Stetigkeit der Umkehrfunktionen folgt aus Satz 13.6. $\square$

Minima und Maxima



Definition 13.8. Es sei M eine Menge und

$$f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f in einem Punkt $x \in M$ das *Maximum* annimmt, wenn

$$f(x) \geq f(x') \text{ für alle } x' \in M \text{ gilt},$$

und dass f das *Minimum* annimmt, wenn

$$f(x) \leq f(x') \text{ für alle } x' \in M \text{ gilt}.$$

Die gemeinsame Bezeichnung für ein Maximum oder ein Minimum ist *Extremum*. In der vorstehenden Definition spricht man auch vom *globalen Maximum*, da darin Bezug auf sämtliche Elemente der Definitionsmenge genommen wird. Interessiert man sich nur für das Verhalten in einer offenen, eventuell kleinen Umgebung, so gelangt man zum Begriff des *lokalen Maximums*.

Definition 13.9. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und sei

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f in einem Punkt $x \in D$ ein *lokales Maximum* besitzt, wenn es ein $\epsilon > 0$ derart gibt, dass für alle $x' \in D$ mit $|x - x'| \leq \epsilon$ die Abschätzung

$$f(x) \geq f(x')$$

gilt. Man sagt, dass f in $x \in D$ ein *lokales Minimum* besitzt, wenn es ein $\epsilon > 0$ derart gibt, dass für alle $x' \in D$ mit $|x - x'| \leq \epsilon$ die Abschätzung

$$f(x) \leq f(x')$$

gilt.

Wenn $f(x) > f(x')$ für alle $x' \neq x$ (bzw. für alle $x' \neq x$ aus einer offenen Umgebung von x) gilt, so spricht man von einem *isolierten Maximum* (bzw. von einem *isolierten lokalen Maximum*). Mit der Differentialrechnung werden wir bald schlagkräftige Methoden kennenlernen, um die Stellen für Minima und Maxima zu bestimmen.

SATZ 13.10. *Es sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes beschränktes Intervall und sei*

$$f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $x \in [a, b]$ mit

$$f(x) \geq f(x') \text{ für alle } x' \in [a, b] .$$

D.h., dass die Funktion ihr Maximum (und ihr Minimum) annimmt.

Beweis. Nach dem Zwischenwertsatz wissen wir, dass das Bild $J := f([a, b])$ ein Intervall ist. Wir zeigen zunächst, dass J (nach oben und nach unten) beschränkt ist. Wir nehmen dazu an, dass J nicht nach oben beschränkt ist. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in I mit $f(x_n) \geq n$. Nach Satz 7.7 besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. Da $[a, b]$ abgeschlossen ist, gehört der Grenzwert der Teilfolge zu $[a, b]$. Wegen der Stetigkeit muss dann auch die Bildfolge konvergieren. Die Bildfolge ist aber unbeschränkt, so dass sie nach Lemma 5.10 nicht konvergieren kann, und sich ein Widerspruch ergibt.

Sei nun y das Supremum von J, das es nach Satz 7.5 gibt. Es gibt nach Aufgabe 6.18 eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in J, die gegen das Supremum konvergiert. Nach Definition von J gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f(x_n) = y_n$. Für diese Folge gibt es wieder nach Satz 7.7 eine konvergente Teilfolge. Es sei x der Grenzwert dieser Teilfolge. Somit ist aufgrund der Stetigkeit $f(x) = y$ und daher $y \in J$. □

KOROLLAR 13.11. *Es sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes beschränktes Intervall und sei*

$$f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann ist das Bild $f([a, b])$ ebenfalls ein beschränktes abgeschlossenes Intervall.

Beweis. Dies folgt aus dem Zwischenwertsatz und Satz 13.10. □

Ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall nennt man auch *kompakt*.

Abbildungsverzeichnis