

## Einführung in die mathematische Logik

### Arbeitsblatt 22

### Übungsaufgaben

AUFGABE 22.1. Zeige, dass für  $\Gamma = \mathbb{N}^{\neq}$  die beiden Repräsentierungskonzepte zusammenfallen.

AUFGABE 22.2. Es sei

$$T = \mathbb{N}2 \subseteq \mathbb{N}$$

die Menge der geraden natürlichen Zahlen. Es sei  $\Gamma$  die Ausdrucksmenge, die besagt, dass  $+$  eine assoziative, kommutative Verknüpfung mit 0 als neutralem Element ist. Es sei

$$\psi = \exists y(x = y + y).$$

Zeige, dass  $T$  durch  $\psi$  in  $\Gamma$  schwach repräsentiert wird, aber nicht stark.

AUFGABE 22.3. Es sei

$$T = \mathbb{N}2 \subseteq \mathbb{N}$$

die Menge der geraden natürlichen Zahlen. Es sei  $\Gamma$  die Ausdrucksmenge, die besagt, dass  $+$  eine assoziative, kommutative Verknüpfung mit 0 als neutralem Element ist. Es sei

$$\varphi = \exists y(x = y + y) \rightarrow \forall z \neg(x + 1 = z + z)$$

und

$$\Delta = \Gamma \cup \{\varphi\}.$$

Es sei

$$\psi = \exists y(x = y + y).$$

Zeige, dass  $T$  durch  $\psi$  in  $\Delta$  repräsentiert wird.

AUFGABE 22.4. Zeige, dass eine widersprüchliche Ausdrucksmenge  $\Gamma \subseteq L^{\text{Ar}}$  Repräsentierungen erlaubt.

AUFGABE 22.5. Es sei  $\Gamma \subseteq L^{\text{ar}}$  eine Ausdrucksmenge, die Repräsentierungen erlaube. Zeige, dass jede größere Ausdrucksmenge  $\Gamma' \supseteq \Gamma$  ebenfalls Repräsentierungen erlaubt.

AUFGABE 22.6. Zeige, dass die Gleichheit von natürlichen Zahlen (also die Diagonalrelation in  $\mathbb{N}^2$ ) durch den Ausdruck  $x = y$  in der erststufigen Peano-Arithmetik repräsentierbar ist.

AUFGABE 22.7. Es sei  $\Gamma \subseteq L^{\text{Ar}}$  das Axiomensystem eines kommutativen Halbringes. Zeige, dass die Gleichheit von natürlichen Zahlen (also die Diagonalrelation in  $\mathbb{N}^2$ ) durch den Ausdruck  $x = y$  in  $\Gamma$  nicht repräsentiert wird.

AUFGABE 22.8. Es sei  $\Gamma \subseteq L^{\text{Ar}}$  das Axiomensystem eines kommutativen Halbringes. Zeige, dass  $\Gamma$  keine Repräsentierungen erlaubt.

Insbesondere erlauben die erststufigen Peano-Axiome ohne das Induktionsschema keine Repräsentierungen.

AUFGABE 22.9. Sei  $k \in \mathbb{N}$  und sei

$$\alpha := \exists y(y + \cdots + y = x),$$

wobei  $k$ -mal der Summand  $y$  vorkommt. Zeige, dass  $\mathbb{N}k \subseteq \mathbb{N}$ , also die Menge der Vielfachen von  $k$ , in der erststufigen Peano-Arithmetik durch  $\alpha$  repräsentiert wird.

AUFGABE 22.10. Zeige, dass die Menge der Quadratzahlen in der erststufigen Peano-Arithmetik repräsentiert werden kann.

AUFGABE 22.11. Es sei  $\Gamma \subseteq L^{\text{ar}}$  eine widerspruchsfreie und  $R$ -entscheidbare Ausdrucksmenge.

a) Zeige, dass jede in  $\Gamma$  repräsentierbare Relation  $R \subseteq \mathbb{N}^r$   $R$ -entscheidbar ist.

b) Zeige, dass jede in  $\Gamma$  repräsentierbare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{N}^r \longrightarrow \mathbb{N}^s$$

$R$ -berechenbar ist.

AUFGABE 22.12.\*

Es sei  $\Gamma \subseteq L^{\text{Ar}}$  eine arithmetische Ausdrucksmenge ohne freie Variablen und  $R \subseteq \mathbb{N}$  eine Relation. Es seien  $\alpha, \beta \in L^{\text{Ar}}$  Ausdrücke in einer freien Variablen  $x$ . Zeige, dass aus

$$\Gamma \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$$

folgt, dass  $\alpha$  in  $\Gamma$  die Relation  $R$  genau dann repräsentiert, wenn  $\beta$  in  $\Gamma$  die Relation  $R$  repräsentiert.

## AUFGABE 22.13.\*

Es sei  $\Gamma \subseteq L^{\text{Ar}}$  eine arithmetische Ausdrucksmenge und  $R \subseteq \mathbb{N}$  eine Relation. Es seien  $\alpha, \beta \in L^{\text{Ar}}$  Ausdrücke in einer freien Variablen  $x$ . Zeige, dass aus

$$\Gamma \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$$

*nicht* folgt, dass  $\alpha$  in  $\Gamma$  die Relation  $R$  genau dann repräsentiert, wenn  $\beta$  in  $\Gamma$  die Relation  $R$  repräsentiert.

AUFGABE 22.14. Es sei  $s_1, s_2, s_3, \dots$  eine Aufzählung einer abzählbar-unendlichen Symbolmengen. Berechne die zu Wörtern über diesem Alphabet zugehörige Zahl im Sinne der Primzahlkodierung und umgekehrt.

- (1)  $s_1 s_2 s_1 s_3 s_3 s_2$ ,
- (2)  $s_{13} s_{12} s_1 s_4 s_4 s_4$ ,
- (3)  $s_2 s_2 s_2 s_2 s_2 s_2$ ,
- (4)  $2^1 3^3 5^{17} 7^1$ ,
- (5)  $2^1 3^1 5^1 7^1 11^1$ ,
- (6)  $2^3 3^3 5^3 7^3 11^3$ ,
- (7) 1728.

AUFGABE 22.15. Es sei  $n \in \mathbb{N}$  eine fixierte natürliche Zahl und

$$\alpha(x) := x = n,$$

wobei  $n$  durch die  $n$ -fache Summe der 1 mit sich selbst realisiert werde. Zeige direkt, dass es Sätze  $p, q \in L_0^{\text{Ar}}$  mit

$$\vdash \alpha(GN(p)) \leftrightarrow p$$

und mit

$$\vdash \neg \alpha(GN(q)) \leftrightarrow q$$

gibt.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 22.16. (4 Punkte)

Zeige, dass die Menge der Primzahlen in der erststufigen Peano-Arithmetik repräsentiert werden kann.

AUFGABE 22.17. (4 Punkte)

Es sei  $s_1, s_2, s_3, \dots$  eine Aufzählung einer abzählbar-unendlichen Symbolmengen. Berechne die zu Wörtern über diesem Alphabet zugehörige Zahl im Sinne der Primzahlkodierung und umgekehrt.

- (1)  $s_3 s_2 s_1 s_1 s_2 s_3$ ,
- (2)  $s_{20} s_{17} s_1 s_4 s_{19}$ ,
- (3)  $2^1 3^2 5^3 7^4 11^5$ ,
- (4)  $10!$ .

AUFGABE 22.18. (4 Punkte)

Zeige, dass in der erststufigen Peano-Arithmetik die Addition von natürlichen Zahlen repräsentierbar ist.

AUFGABE 22.19. (6 Punkte)

Es sei

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

eine Polynomfunktion mit  $f(n) = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \dots + a_1 n + a_0$  mit Koeffizienten  $a_i \in \mathbb{N}$ . Zeige, dass  $f$  durch den Ausdruck  $y = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_1 x + a_0$  in der erststufigen Peano-Arithmetik repräsentiert wird.