Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Einführung in die mathematische Logik

Vorlesung 15

Auffüllungsstrategien

Die weitere Strategie zum Beweis des Vollständigkeitssatzes ist nun, eine widerspruchsfreie Ausdrucksmenge zu einer maximal widerspruchsfreien Ausducksmenge, die Beispiele enthält, aufzufüllen, und so ein erfüllendes Modell mit Hilfe des Satzes von Henkin zu bekommen. Dabei betrachten wir zunächst das Problem, Beispiele hinzuzunehmen. Es sei Γ eine widerspruchsfreie Ausdrucksmenge über dem Alphabet S. Zu jedem Ausdruck α müssen wir einen Ausdruck der Form $\exists x\alpha \rightarrow \alpha\frac{t}{x}$ mit einem gewissen Term t hinzunehmen. Das Problem ist hierbei, dass bei ungeeigneter Wahl von t die Hinzunahme dieses Ausdrucks Γ widersprüchlich machen könnte. Es gibt keine Garantie, dass es überhaupt einen S-Term t gibt, mit dem man Γ widerspruchsfrei erweitern kann. Von daher wählt man eine andere Strategie, indem man simultan das Symbolalphabet erweitert und den hinzuzunehmenden Existenzausdruck mit einem neuen „unbelasteten" Term ansetzt.

Lemma 15.1. *Es sei Γ eine widerspruchsfreie Menge an S-Ausdrücken (über einem Symbolalphabet S). Es sei z ein weiteres Variablensymbol, das nicht zu S gehört, und sei α ein S-Ausdruck. Dann ergibt die Hinzunahme von $\exists x\alpha \rightarrow \alpha\frac{z}{x}$ zu Γ eine ebenfalls widerspruchsfreie Ausdrucksmenge (über dem Symbolalphabet $S' = S \cup \{z\}$).*

Beweis. Nehmen wir an, dass $\Gamma' = \Gamma \cup \{\exists x\alpha \rightarrow \alpha\frac{z}{x}\}$ widersprüchlich ist. Dann kann man aus Γ' jeden Ausdruck ableiten. Es gilt also

$$\Gamma' \vdash \psi$$

und damit

$$\Gamma \vdash \left(\exists x\alpha \rightarrow \alpha\frac{z}{x}\right) \rightarrow \psi$$

für jeden Ausdruck ψ. Es gilt also insbesondere

$$\Gamma \vdash \neg\exists x\alpha \rightarrow \psi$$

und

$$\Gamma \vdash \alpha\frac{z}{x} \rightarrow \psi\,.$$

Wir nehmen nun zusätzlich an, dass z in ψ nicht vorkommt. Da z überhaupt nicht in den anderen Ausdrücken vorkommt, können wir mittels Axiom 11.2 (genauer wegen der in Aufgabe 11.20 besprochenen Variante) auf

$$\Gamma \vdash \exists x\alpha \rightarrow \psi\,.$$

schließen. Damit ergibt sich mit der Fallunterscheidungsregel

$$\Gamma \vdash \psi \,,$$

im Widerspruch zur Widerspruchsfreiheit von Γ. $\square$

LEMMA 15.2. *Es sei* Γ *eine widerspruchsfreie Menge an* S*-Ausdrücken (über einem Symbolalphabet* S*). Dann gibt es eine Symbolerweiterung* $S^* \supseteq S$ *und eine widerspruchsfreie* S^**-Ausdrucksmenge* $\Gamma^* \supseteq \Gamma$ *derart, dass es zu jedem Ausdruck* $\exists x \alpha \in L^S$ *einen Term* t *(über* S^**) derart gibt, dass*

$$\exists x \alpha \rightarrow \alpha \frac{t}{x} \in \Gamma^*$$

gilt.

Beweis. Die Menge S^* definieren wir als disjunkte Vereinigung

$$S^* \,=\, S \cup V,$$

wobei V eine Variablenmenge ist, die für jeden Ausdruck der Form $\exists x \alpha \in L^S$ genau eine (neue) Variable enthält, die wir mit $y_{\exists x \alpha}$ bezeichnen. Wir setzen

$$\Gamma^* \,=\, \Gamma \cup \left\{ \exists x \alpha \rightarrow \alpha \frac{y_{\exists x \alpha}}{x} |\, \exists x \alpha \in L^S \right\}.$$

Daher ist $\Gamma \subseteq \Gamma^*$ und Γ^* enthält S-Beispiele. Es bleibt also die Widerspruchsfreiheit zu zeigen. Wäre Γ^* widerspruchsvoll, so wäre auch eine endliche Teilmenge davon widerspruchsvoll und insbesondere würde es Ausdrücke $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L^S$ derart geben, dass

$$\Gamma \cup \{\exists x_1 \alpha_1 \rightarrow \alpha_1 \frac{y_{\exists x_1 \alpha_1}}{x_1}\} \cup \ldots \cup \{\exists x_n \alpha_n \rightarrow \alpha_n \frac{y_{\exists x_n \alpha_n}}{x_n}\}$$

widersprüchlich ist (dabei können die x_i gleich oder verschieden sein). Da bei jeder Hinzunahme eine neue Variable $y_{\exists x_n \alpha_n}$ verwendet wird, können wir induktiv Lemma 15.1 anwenden und erhalten die Widersprüchlichkeit von Γ. $\square$

LEMMA 15.3. *Es sei* Γ *eine widerspruchsfreie Menge an* S*-Ausdrücken (über einem Symbolalphabet* S*). Dann gibt es eine aufsteigende Folge von Symbolmengen*

$$S_n \subseteq S_{n+1} \text{ mit } S_0 = S$$

und eine Folge von aufsteigenden S_n*-Ausdrucksmengen*

$$\Gamma_n \subseteq \Gamma_{n+1} \text{ mit } \Gamma_0 = \Gamma$$

derart, dass zum Symbolalphabet $S' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ *die* S'*-Ausdrucksmenge*

$$\Gamma' \,=\, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$$

widerspruchsfrei ist und Beispiele enthält.

Beweis. Wir konstruieren die Folgen S_n und Γ_n sukzessive mit der in Lemma 15.2 beschriebenen Methode durch

$$S_{n+1} = (S_n)^*$$

und

$$\Gamma_{n+1} = (\Gamma_n)^*.$$

Wäre Γ' widersprüchlich, so würde sich schon aus einer endlichen Teilmenge ein Widerspruch ergeben. Dann wäre schon eines der Γ_n widersprüchlich im Widerspruch zu Lemma 15.2. □

Wir wenden uns nun dem Problem zu, wie man eine widerspruchsfreie Ausdrucksmenge zu einer maximal widerspruchsfreien Menge ergänzen kann. Wie im entsprechenden Beweis der Aussagenlogik verwenden wir das Lemma von Zorn, wobei wir im abzählbaren Fall noch eine Beweisvariante angeben, die ohne das Lemma von Zorn auskommt.

Lemma 15.4. *Es sei* Γ *eine widerspruchsfreie Menge an* S*-Ausdrücken (über einem Symbolalphabet* S*). Dann gibt es eine maximal widerspruchsfreie* S*-Menge* Γ' *mit* $\Gamma \subseteq \Gamma'$.

Beweis. Wie betrachten die Menge

$$M = \left\{\Delta |\, \Gamma \subseteq \Delta \subseteq L^S,\, \Delta \text{ widerspruchsfreie Ausdrucksmenge}\right\}$$

aller widerspruchsfreien S-Ausdrucksmengen oberhalb von Γ. Es ist $\Gamma \in M$. Es sei $N \subseteq M$ eine nichtleere total geordnete Teilmenge. Die Vereinigung $\Delta' = \bigcup_{\Delta \in N} \Delta$ ist ebenfalls eine S-Ausdrucksmenge, die Γ umfasst. Sie ist auch widerspruchsfrei. Würde nämlich $\Delta' \vdash \neg\alpha \wedge \alpha$ gelten, so könnte man schon aus einer endlichen Teilmenge $T \subseteq \Delta'$ einen Widerspruch ableiten. Die Elemente aus T liegen jeweils in je einem $\Delta \in N$, und da diese eine Kette bilden, gibt es auch ein $\tilde{\Delta}$ mit $T \subseteq \tilde{\Delta}$, also wäre $\tilde{\Delta}$ widersprüchlich. Somit sind die Voraussetzungen im Lemma von Zorn erfüllt und daher gibt es eine maximale Menge Γ' in M. Diese ist offenbar maximal widerspruchsfrei. □

Wir besprechen eine Variante der vorstehenden Auffüllung für den Fall eines abzählbaren Symbolalphabets, die das Lemma von Zorn vermeidet und im Wesentlichen (siehe die Einschränkung weiter unten) konstruktiv ist. Man beachte, dass die oben durchgeführte Aufnahme von Beispielen bei einem abzählbaren Ausgangsalphabet wieder abzählbare Symbolalphabete liefert und dies auch bei der abzählbaren Wiederholung dieses Prozesses wie in Lemma 15.3 der Fall ist.

Lemma 15.5. *Es sei* Γ *eine widerspruchsfreie Menge an* S*-Ausdrücken über einem abzählbaren Symbolalphabet* S*. Dann gibt es eine maximal widerspruchsfreie* S*-Menge* Γ' *mit* $\Gamma \subseteq \Gamma'$*, die man durch sukzessive Hinzunahme von einzelnen Ausdrücken erhalten kann.*

Beweis. Da S abzählbar ist, ist auch L^S abzählbar. Es sei α_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Abzählung sämtlicher Ausdrücke aus L^S. Wir definieren induktiv eine aufsteigende Folge Γ_n von Ausdrucksmengen durch $\Gamma_0 = \Gamma$ und

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\alpha_{n+1}\}, & \text{falls dies widerspruchsfrei ist}\,, \\ \Gamma_n \text{ sonst}\,. \end{cases}$$

Wir setzen

$$\Gamma' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n .$$

Diese Menge ist widerspruchsfrei, da andernfalls schon eines der Γ_n widersprüchlich wäre, was aufgrund der induktiven Definition nicht der Fall ist. Um zu zeigen, dass Γ' maximal widerspruchsfrei ist, sei $\alpha \notin \Gamma'$. Da α in der Abzählung der Ausdrücke vorkommt, ist $\alpha = \alpha_n$ für ein gewisses n. Im n-ten Konstruktionsschritt wurde α_n nicht hinzugenommen, sonst wäre $\alpha_n \in \Gamma_n \subseteq \Gamma'$. Also ist $\Gamma_{n-1} \cup \{\alpha_n\}$ widersprüchlich und damit ist auch $\Gamma' \cup \{\alpha\}$ widersprüchlich. □

Die vorstehende Variante sieht auf den ersten Blick konstruktiver aus, als sie ist. Das Problem ist die Entscheidung, ob $\Gamma_n \cup \{\alpha_{n+1}\}$ widerspruchsfrei ist. Dafür gibt es (anders als bei der Aussagenlogik) kein algorithmisches Verfahren.

Der Vollständigkeitssatz

Die folgende Aussage ist der *Vollständigkeitssatz.*

Satz 15.6. *Es sei S ein Symbolalphabet, Γ eine Menge an S-Ausdrücken und α ein weiterer S-Ausdruck. Dann gilt $\Gamma \vDash \alpha$ genau dann, wenn $\Gamma \vdash \alpha$ gilt.*

Beweis. Die Richtung von rechts nach links ist der Korrektheitssatz. Sei umgekehrt $\Gamma \nvdash \alpha$. Um zu zeigen, dass auch $\Gamma \nvDash \alpha$ gilt, müssen wir ein Modell angeben, das Γ erfüllt, aber nicht α. Die Nichtableitbarkeit $\Gamma \nvdash \alpha$ bedeutet, dass $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ widerspruchsfrei ist, und wir müssen zeigen, dass $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ erfüllbar ist. Nach Lemma 15.3 gibt es eine widerspruchsfreie Erweiterung $S \subseteq S'$ des Symbolalphabets und eine Erweiterung Γ' von $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$, die Beispiele enthält. Nach Lemma 15.4 gibt es eine maximal widerspruchsfreie S'-Ausdrucksmenge $\Gamma'' \supseteq \Gamma'$. Diese enthält mit Γ' ebenfalls Beispiele. Nach dem Satz von Henkin gibt es eine S'-Interpretation, die Γ'' erfüllt. Diese Interpretation erfüllt erst recht $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$. □

Für Tautologien ergibt sich der folgende Spezialfall.

Korollar 15.7. *Es sei S ein Symbolalphabet und $\alpha \in L^S$ ein S-Ausdruck. Dann ist α genau dann eine ableitbare Tautologie, wenn α allgemeingültig ist.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 15.6 mit

$$\Gamma = \emptyset.$$

□

KOROLLAR 15.8. *Es sei S ein Symbolalphabet und Γ eine Menge an S-Ausdrücken. Dann ist Γ genau dann widerspruchsfrei, wenn Γ erfüllbar ist.*

Beweis. In dieser Form haben wir den Vollständigkeitssatz bewiesen. Diese Aussage ergibt sich aber auch als Spezialfall von Satz 15.6, wenn man für α eine widersprüchliche Aussage ansetzt. □

Das folgende Korollar, der sogenannte *Endlichkeitssatz*, demonstriert, dass der Vollständigkeitssatz keineswegs selbstverständlich ist. Es sei eine Folgerungsbeziehung $\Gamma \vDash \alpha$ bewiesen, also gezeigt, dass jede Interpretation, die Γ erfüllt, auch α erfüllen muss. Dabei sei Γ unendlich, man denke etwa an ein unendliches Axiomenschema, wie es im Induktionsschema der erststufigen Peano-Arithmetik vorliegt. Ist es vorstellbar, dass in einem Beweis irgendwie auf all diese unendlich vielen Voraussetzungen Bezug genommen wird?

KOROLLAR 15.9. *Es sei S ein Symbolalphabet, Γ eine Menge an S-Ausdrücken und α ein weiterer S-Ausdruck. Dann gilt $\Gamma \vDash \alpha$ genau dann, wenn es eine endliche Teilmenge $\Gamma_e \subseteq \Gamma$ gibt mit $\Gamma_e \vDash \alpha$.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 15.6, da die Endlichkeitsbeziehung für das Ableiten nach Definition gilt. □

KOROLLAR 15.10. *Es sei S ein Symbolalphabet und Γ eine Menge an S-Ausdrücken. Es sei jede endliche Teilmenge $\Gamma_e \subseteq \Gamma$ erfüllbar. Dann ist Γ erfüllbar.*

Beweis. Dies folgt aus Korollar 15.8. Für die Widerspruchsfreiheit ist die Aussage klar, da eine Ableitung eines Widerspruchs nur Bezug auf endlich viele Voraussetzungen nimmt. □

Als ein weiteres Korollar zum Vollständigkeitssatz führen wir die Existenz von Peano-Halbringen an, die nicht archimedisch geordnet sind und daher nicht isomorph zum Standardmodell $\mathbb{N}$ sind. Die erststufigen Peano-Axiome charakterisieren also nicht die natürlichen Zahlen.

KOROLLAR 15.11. *Es gibt Peano-Halbringe, die nicht zu $\mathbb{N}$ isomorph sind, also nicht die zweitstufigen Dedekind-Peano-Axiome erfüllen.*

Beweis. Siehe Aufgabe 15.11. □