EUCLIDE E LA LOGICA NATURALE

RIFLESSIONI

DI

SEBASTIANO PURGOTTI

PERUGIA

TIPOGRAFIA DI VINCENZO BARTELLI
piazza s. Lorenzo n.° 55

All' Illustre Cavaliere

GIUSEPPE ALLIEVO

Professore di Antropologia e Pedagogia nella facoltà di Filosofia e lettere, e di Filosofia razionale nel Liceo Cavour in Torino.

Mio Carissimo Amico

Che nel decimottavo ed anche verso i primi anni di questo secolo l' insegnamento dell' Aritmetica, Algebra e Geometria fosse bisognoso di migliorìe, molti Filosofi e Matematici lo asserirono: e lungo elenco degli autorevoli loro nomi e delle loro espressioni io ne esposi in altro mio scritto.

Che molti difetti proseguissero ancora a regnare nelle opere matematiche poscia uscite in luce fino alla metà del secolo che corre, ce lo attesta Jacoby, il quale nella sua Algoritmia edita nel 1851 *scriveva che* « i libri elementari delle Matematiche in generale sono difettosi, e si indirizzano più alla memoria che all' intelligenza ».

Che i citati inconvenienti si trovino ancora nelle opere le più recenti, mostra di crederlo anche il chiarissimo Hoüel, allorchè nel suo Essay critique sur les principes fondamentaux de la Géométrie, *che l' anno scorso uscì in luce, esprime il desiderio di potere per sua parte* « contribuer a la destruction des PRÉJUGÉS et des FAUSSES « IDÉES qui regnent encore sur le point de la science qui sem- « blerait devoir être le mieux connu ».

Non è dunque un delirio della esaltata mia fantasia, se pur io vi trovi concetti non solo illusorii e lambiccati, come dicea Romagnosi, ma falsi ancora e contradditorii. È poi per la scienza un grave infortunio che, mentre moltissimi declamano contro sì gravi difetti, niuno di valido nerbo siasi accinto ad eliminarli. Fin dalla mia giovinezza vivo ne ebbi io il desiderio: così valevoli fossero state a secondarlo le troppo limitate mie forze!

Ciò null' ostante di alcuni difetti, e dei modi di correggerli io trattai nelle mie Lettere filosofiche *sino dal* 1852: *di altri pure tenni discorso nei miei* Segreti dell' Arte di comunicar le idee, ec. *editi nell' anno* 1858. *Nel* 1864 *publicai le mie* Osservazioni su varie inesattezze che allignano ancora nei moderni corsi di Matematica elementare. *Una* Nota *esposi nell' anno scorso* Intorno ad un errore che si commette nel comune insegnamento della teorica delle equazioni di 2° grado, e al modo di rettificarlo. *Ed ora mosso dai medesimi desiderii, che in me nacquero sin dai miei più verdi anni, senza spirito nè di piacenterìa, nè di contraddizione, metto in luce la presente operetta.*

Ed a Voi, che nei Giornali favorevolissimo giudizio esternaste sulle mie sopra indicate Osservazioni, *e che al certo non riguardaste per un articolo sibillino la Nota sopracitata sulle equazioni di 2° grado, e vi trovaste non già sofisticherie, ma nerbo di ragioni, che v' indussero a significarmi aver io «* trionfalmente combattuto l' errore che si commette nel comune insegnamento della teorica delle equazioni di 2° grado » *a Voi che con l' autorevole approvazione data ai miei modi di vedere, mi avete in essi sempre più confermato, io dedico questo mio tenue lavoro.*

Versato come ben siete nelle Matematiche, profondissimo conoscitore delle scienze metafisiche e pedagogiche, niuno meglio di Voi potrà darmi su queste mie Riflessioni *imparziale giudizio; ed io l' attendo dalla Vostra cortesia. Questa offerta intanto aggradite in tenue attestato dell' alta stima che vi professa*

L' affezionatissimo Amico vostro

Sebastiano Purgotti

EUCLIDE E LA LOGICA NATURALE

RIFLESSIONI

DI

SEBASTIANO PURGOTTI

SOMMARIO

I.

Elogi d' Euclide e suoi difetti.

Euclide è un sommo Geometra: oggidì però più ammirabile che imitabile (§. 1 al 3). Non v' ha dubbio infatti che intorno all' accuratezza delle definizioni e all' ordine delle materie e alla chiarezza e brevità delle dimostrazioni gli si sieno prodigati elogi superiori al suo merito. Certo è pure, che nei suoi Elementi trovasi una inutile ridondanza di assiomi, di postulati, di proposizioni; e sopratutto poi è difettosa, a giudizio pur anche dei più caldi suoi ammiratori, la teoria delle proporzioni (§. 4 al 20).

II.

Di alcune interessanti nozioni relative alle proporzioni.

E perchè abbiano più evidente risalto i difetti della teorica delle proporzioni di Euclide, premesse alcune interessanti non comuni notizie elementari di Aritmetica ragionata, passo ad esporre intorno alle ragioni alcune particolari mie idee. Dimostro che se il quoto esprime il *quante volte* un termine è contenuto nell' altro allorchè sono essi omogenei, esprime poi *la grandezza della parte rispondente all' unità* allorchè i termini sono eterogenei: ond' è che esso dall' uno passa all' altro significato all' alternarsi delle proporzioni (§. 21 al 45). Espongo che le proporzioni consistono sempre nella eguaglianza di due quoti: che il conseguente della seconda è sempre il suo antecedente moltiplicato pel quoto della prima ragione, d' onde scende (e non già viceversa) che il prodotto dei medi è uguale a quello degli estremi; e che questo teorema e il suo inverso sono il fondamento della teorìa universale delle proporzioni (§. 46 al 53). Poscia (malgrado gli atti di ammirazione che faranno taluni) io elimino dalle proporzioni gli incommensurabili perchè simboli dell' impossibile: ond' è per es. che chiamata D la diagonale del quadrato, e preso uno dei suoi lati per unità, le formole $D^2 = 2$; e $D = \sqrt{2}$ non sono vere eguaglianze. Rimarco in fine che se queste proporzioni, che io non ammetto, si trovano in tutti i trattati di Geometria che sono a mia cognizione, in tutti trovo pure delle espressioni, dalle quali apparisce essersi alla mente dei loro autori affacciata questa verità incontrastabile, che *ragione irrazionale* non è già, come parve a Wallis, un semplice solecismo, è una solenne contraddizione (§. 54 all' 82).

III.

Difetti della definizione V^a del lib. V. di Euclide, perno su cui si aggira tutta la sua teorica delle proporzioni.

Gli esposti rilievi sono diretti a fare viemmeglio conoscere, che la celebre definizione V^a del V. d'Euclide è tale, che 1° senza una benigna interpretazione conduce ad errori (§. 83 al 104). 2° Che benignamente interpretata è un teorema che da Euclide non è dimostrato (§. 105 e 106). 3° Che sebbene di dimostrazione venisse corredato, pure da niun buon metodo didattico porsi potrebbe a fondamento della dottrina delle proporzioni. Nè ciò sembra a me solamente: tale, per tacer d' altri, è pur l' opinione del sommo restauratore dei metodi d' istruzione il gran Galileo (§. 107 al 111).

IV.

Migliorie nell' insegnamento della Matematica elementare.

Dagli equimoltiplici di Euclide non potrà dunque trarre al certo alcun utile l' insegnamento delle Matematiche elementari. Non potrà esso sperarlo, che dal felice connubio delle sue teoriche con la Logica naturale. Più spesso allora saranno ai segni annesse le idee; ed a ciò contribuirà pure il far precedere all' Algebra, siccome viene ora prescritto, la parte più elementare della Geometria. Sarà pur utile che le tante belle proprietà dell' estensione sieno precedentemente apprese sulla figura; ma non per questo totalmante escluso esser debbe l' uso delle formole che ti dipingono nella mente il quadro conciso dei risultati ottenuti, nè qalche applicazione, la quale è indipensabile talvolta per chiarire le idee. *Est modus in rebus: sunt certi denique fines, quos ultra citraque nequit consistere rectum* (§. 112 al 119). Sommo sussidio poi alla memoria è il lucido ordine e il nesso dei teoremi parchi di numero e ridondanti di utilità, che debbe l' Insegnante esporre senza perdere di vista la genesi delle idee geometriche, che tanto pure raccomanda nel recentissimo suo Saggio critico intorno ai principi fondamentali della Geometria l'illustre Hoüel, idee geometriche, delle quali alcune, d'uopo è persuadersene, non discendono dalla Logica deduttiva (§. 120 al 124).

Eccovi, ingenuo io dico a chiunque, senza bugiarde proteste d'un'affettata umiltà, che mi dimostrino disposto a credere di essere in tutte le esposte idee caduto in abbagli, nè molto meno con la pretensione orgogliosa di non averne preso veruno, eccovi i modi miei di vedere (§. 125 al 127).

CAPO I.

Elogi d'Euclide e suoi difetti.

1 La Geometria tiene un rango dei più importanti fra le materie della Classica istruzione, siccome quella, che più contribuisce allo sviluppo dell'intelletto, al rigore abituandolo del raziocinio. A migliorarne l'insegnamento alcune scuole d'Inghilterra e di Francia fanno ora ritorno ad Euclide; ed Euclide viene ora di nuovo proposto in Italia. In particolar modo innanzi allo studio delle proporzioni viene raccomandato lo studio del Libro V, come il più atto, ci si dice, a dare idee precise sul rapporto di due grandezze concrete della stessa specie commensurabili od incommensurabili.

Ma sono realmente gli Elementi di Euclide e in special modo il suo quinto libro il farmaco salutare atto a porgere riparo ai difetti dell'insegnamento? Incapace di sublimi investigazioni io qui mi permetto di esporre i risultati del rozzo scrutinio che su tale quesito ha saputo farvi la mia Logica naturale.

2 Euclide è sommo. *Niun paralogismo*, scriveva Pietro Ramo sulla metà del secolo decimo-sesto, *ho potuto mai scorgere in tutti quanti i suoi elementi malgrado le*

più severe ricerche (*a*) . E pochi anni dopo uno dei suoi più valenti Commentatori il Commandino disse altrettanto. Lo stimava a tal segno il Cardano, che avvisavasi potere nelle ardue quistioni quelli solamente ben discernere il vero dal falso, che hanno famigliarità con Euclide (*b*) . Tartaglia lo sceglie a testo delle sue lezioni in Venezia : quasi un secolo dopo lo traduce e lo illustra il celebre Tacquet, e Whiston, il successore alla Cattedra di Newton, dichiara che *per ogni dove si innoltrino gli Allievi nei campi delle Matematiche, uopo è che Euclide sia loro auspice e duce* (*c*).

Verso la metà del secolo XVII senza la scorta di verun precettore sulle sole carte di Euclide studiando, divenne profondo geometra il genio di Pascal. E quando Wolfio negli esordii del secolo XVIII allettato dalla chiara esposizione con cui aveva allora il Lamy mercè dei suoi elementi facilitato l'apprendimento delle Matematiche, chiede al celebre Leibnitz consiglio, se debba il suo corso comporre sulla scorta e coll' ordine di quel trattato, Leibnitz lo esorta a non discostarsi dagli elementi impareggiabili del Greco Geometra ; e Wolfio stesso poscia ci attesta doversi agli elementi di Euclide dare fra tutti gli altri la palma.

Lo Scozzese Gregory e l' immortale Newton lo ebbero in altissima stima ; e il Bossut, in prova irrefragabile di un merito senza pari, rimarca come niun libro di scienza ebbe giammai un incontro paragonabile agli Elementi di Euclide (*d*) . La medesima osservazione fanno pure gli insigni

---

(*a*) Nullus paralogismus, nulla pseudographia in totis elementis nobis quamquam severe inquirentibus animadverti potuit. *Ramo* Proemium Mathem. 1567.

(*b*) Soli hi in arduis quistionibus videantur posse a vero falsum discernere, qui Euclidem habent familiarem.

(*c*) Pergant ulterius tyrones quoquo patet Mathescos campus, sed duce et auspice Euclide.

(*d*) Jamais livre de science n'a eu succes comparable a celui des elements d' Euclide.

espositori dei progressi delle lettere e delle Matematiche Andres e Montucla, in rivista ponendoci i sommi Geometri che in quasi tutte le lingue lo hanno e tradotto e commentato, e le moltissime edizioni che di queste traduzioni e commenti l' una all' altra si sono succedute.

3 Ed in vero negli inizii del secolo V lo commentò Teone Alessandrino per istruire la tanto celebre quanto sventurata sua Ipazia. Varie traduzioni ne furono fatte dal greco in Arabo; e dall'Arabo dopo il *Mille* dell'era nostra lo volse per la prima volta in latino il Novarese Campano. E senza occuparmi delle traduzioni che in seguito ne furono fatte in molte estere lingue, dirò solo che verso la metà del secolo decimosesto ne fece la prima versione italiana l' illustre Tartaglia: di bel nuovo nella lingua del Lazio pochi anni dopo il tradusse e commentò quel rinomatissimo Matematico, che ebbe gran parte nella riforma del Calendario il Clavio; e quasi contemporaneamente lo volse in latino ed in italiano idioma l' eruditissimo Commandino, arricchendolo anch' egli di importanti commenti. Comparvero nel 1620 gli *Euclidis elementorum libri sex* tradotti dal Briggs: nel 1628 l' *Euclides restitutus* del Borelli: tre lustri dopo gli *Euclidis elementorum libri quindecim breviter et succincte demonstrati* del Barow; ed acquistarono celebrità gli *Elementa Euclidea del Tacquet* usciti in luce nel 1655, e poco dopo quelli di De Chales, i due Commentatori che Wolf sopra tutti gli altri commenda (*e*).

Quattro lustri prima che avesse termine il secolo XVII uscì in luce *l' Euclide restituto* del professore della Sapienza in Roma Vitale Giordano; e nei primi anni del XVIII fu pure riprodotto dal Grandi illustre professore del Pisano Ateneo. Nello stesso nostro secolo poi dell' Euclide del Flauti ventidue edizioni l' una all' altra si sono succedute; ed altra

---

(*e*) *Wolf* — Corso di Matematiche Tomo V. Cap. III. Num. 2.

edizione degli *Elementi di Euclide* si sta ora compiendo per opera dei chiarissimi professori Betti e Brioschi.

4 Una diffusione così universale, un incontro così fortunato, io credo sia senza esempio. Ma e che perciò? L'altissima stima che io nutro verso quel sommo, avvalorata dall' universale consentimento, dovrà per questo cambiarsi in cieca venerazione? Ma se i meriti ammirabili di Euclide sono evidenti, incontrastabili, e da tutti gli scienziati riconosciuti per sommi, ne segue forse non esservi nel vasto cumulo dei suoi materiali particella che oro non sia? E le lodi a lui prodigate sono poi scevre affatto di esagerazione?

Gli stessi più caldi suoi ammiratori lo hanno pure accusato di qualche difetto. Il Grandi è fra questi: eppure dichiara che « *essendo state fatte grandissime scoperte in questa sublimissima scienza* (la Geometria) *non v' ha dubbio che non possa essere stato immaginato e disteso un metodo più facile, più breve e forse ancora più comodo di quello tenuto da Euclide* (*f*) ». E poco dopo il Lecchi confessa pure che « troppo facilmente viene Euclide lodato per un perfetto Geometra in cui nulla havvi a desiderare. . . . . » Ma che, egli prosegue, ma che: dopo Euclide a vantaggio della Scienza nulla si è fatto? (*g*).

5 Eco facendo a questi riflessi, allorchè veggo recato Euclide alle stelle *per l' accuratezza del definire*, ingenuo e senza riguardi, non posso a meno di opporvi delle eccezioni. Accuratezza havvi forse nella definizione negativa del punto, nelle definizioni illusorie della retta indefinibile e del piano, nella incompleta delle parallele, non essendo proprie-

(*f*) *Grandi* — Istituzioni geometriche ec. Firenze 1741. — Prefazione.

(*g*) Perfectum Geometram, et cui nihil admodum desit, Euclidem facile praedicant. Sed valeat prima illa Marci Tullii libera vox. Nihilum tot saeculis, summis ingeniis, maximis studiis explicatum putamus? Nihil est ergo actum post Euclidem? (Elementa Geometriae Auctore *Antonio Lecchio* — Praefatio).

tà esclusiva di esse il non incontrarsi mai, nella definizione inesatta dei poliedri simili intorno alla quale giusti sono i rilievi del Simson, ec.?

Quando mi si decanta per *un modello da imitarsi nell' ordine* e *nel nesso delle proposizioni,* io rimarco che per es. nè tutte, nè bene ordinate sono le condizioni diverse sotto le quali possono i triangoli dimostrarsi eguali, nè quelle sotto cui possono dimostrarsi simili: rimarco che sotto uno stesso punto di vista poste pure non sono le diverse specie di quadrilateri, sicchè da un filo connettitore possa trarre la memoria un sussidio: rimarco non esservi alcun affilamento di deduzioni allorchè, dopo di avere prima esposte alcune proprietà dei triangoli, a quelle passa degli angoli adiacenti ed opposti al vertice, le quali dalle prime veruna dipendenza non hanno; e poscia alle proprietà dei triangoli fa di nuovo ritorno.

6 Mentre mi si elogia il *convincente modo col quale lo svolgimento dei suoi teoremi s' insinua nell' animo di chi li studia*; ed io noto l' abuso delle dimostrazioni indirette, l' uso attuale delle quali non cessa di essere difettoso e perciò riprovevole (e prego Hoüel a riflettervi) per la ragione che il greco Geometra ebbe allora i suoi motivi per farvi ricorso.

7 E a chi poi mi sostiene che *nel dimostrare uso egli faccia del minor numero di verità possibili*; ed io addito per es. il modo con cui nella proposizione XIII del libro 1° dimostra che la somma degli angoli adiacenti è uguale a due retti; e tutte quelle dimostrazioni del quinto e del sesto libro, nelle quali agli equi-moltiplici fa egli ricorso.

8 Nè saprò mai persuadermi che *nulla negli elementi di Euclide trovisi d' inconcludente e di inutile.* Non gli farò io un addebito della scrupolosa rassegna delle da lui dette *comuni notizie*; ma pure, dirò per es., era necessario registrare come assioma 4° nel libro V che « *Di Due* » *quantità che si moltiplicano per lo stesso numero quella* » *è maggiore che dà maggiore prodotto?* » Ed era per

soprappiù utile richiamare questo assioma con una citazione di paragrafo nella proposizione decima del libro stesso, quasi fosse presumibile che lo studente avesse bisogno di tornare a meditare su quella proposizione per rimanerne convinto? Certamente il richiamo di que' teoremi, dai quali dipendono le dimostrazioni che attualmente si studiano, è utile non dirò, ma utilissimo divisamento; ma il richiamo di verità le più evidenti, richiamo che spinge la curiosità dello studente a conoscere di che si tratta nel paragrafo richiamato, è sempre, se non altro, una nociva distrazione.

9 E dei postulati che vi aspettate che io dica? Che direste di me, se venendo a trovarvi in casa, prima di ogni altra cosa vi chiedessi il permesso di consumare respirando, un poco di quell' ossigeno che trovasi nell' ambiente della vostra camera? Chiedere una cosa che non può essere negata ha più dell' insulto che del rispetto, e sempre avrà del ridicolo, se l' insulto o il rispetto (siccome accade nei postulati geometrici) non possa aver luogo.

10 E dagli Assiomi e dai Postulati passo facendo alle Proposizioni, che dirò della sola 2^a e 3^a del libro primo, che fra varie di consimil calibro per brevità scelgo ad esempio? Nella seconda si propone Euclide il difficile problema di condurre da un punto in un piano una retta eguale ad altra data; e per battere tutt' altro sentiero, che quello suggerito dalla Logica naturale, vi applica una costruzione geometrica. Nella proposizione terza ci offre un metodo tutto suo per tagliare da una retta maggiore una parte eguale ad altra minore. E se non altri, certamente il Merciajo, appena avrà appreso l' ingegnoso trovato datole dalla soluzione Euclidea, se ne gioverà nella circostanza di dover da una pezza di nastro togliere un solo metro. Parmi vederlo, non più meccanicamente come prima, applicare il regolo misuratore alla pezza, ma in vece, preso quel regolo per raggio, descrivere, giusta l' istruzione ricevuta, sopra una tavola una periferia, e poscia alla data pezza applicare la lunghezza di uno dei suoi raggi! Nè a procurare

una giustificazione a questa inutilità venga Hoüel a dirci aver ciò fatto Euclide per dimostrare, che una figura può essere trasportata nel suo piano, senza che alcuno dei suoi elementi (distanze mutue od angoli) cangi di grandezza; giacchè nulla di tutto questo è applicabile al caso, trattandosi d' una linea isolata. Avrà egli certamente ciò fatto per esercizio di ragionamento: ma ne ha ben d' altronde l' Allievo nei teoremi, che forse in troppo numero i suoi Elementi contengono.

11 In somma nello stato attuale della scienza a me sembra, che Euclide ammirabile sempre, non sia modello meritevole della più servile imitazione. Quell' Hoüel medesimo il quale ci annuncia *(h)*, che adotterebbe il metodo Euclidiano in tutto il suo rigore, quell' Hoüel, il quale ci esterna essere egli d' avviso *(i)* « *che nel rigore delle deduzioni, niun trattato ha sorpassato gli elementi di Euclide,* non per tanto ci confessa, che non gli è sembrato esente d' ogni critica (*ne nous a pas paru a l' abri de toute critique* pag. 5.)

E nella stessa critica poi egli è così giudizioso, che io medesimo non sarei lontano dal riconoscere utile il trattato di Euclide, dopo che subito avesse tutte le modificazioni dall' illustre Prof. di Bordeaux suggerite. Le sue orme seguendo, direi io pure: adottiamo Euclide per testo. Non tralasciamo però dal sostituirvi dimostrazioni più semplici, giacchè quelle di Euclide (è Hoüel che ce lo fa rimarcare) sempre non hanno quella semplicità che sembra regnare nelle opere moderne, (*n' ont pas toujours la simplicité qui semble regner dans les ouvrages modernes pag.* 5.); e facciamo queste sostituzioni senza risparmio; poichè le cause che giustamente rendono i difetti non

---

(*h*) Essai critique sur les principes fondamentaux de la Geometrie. Par *I Hoüel.* Paris 1867. pag. 84.

(*i*) Idem pag. 5.

imputabili, se ne escludono il biasimo, non per questo li anuullano; e perciò non offrono titolo alcuno per renderli immuni da correzione. Perciò le proposizioni per l'assurdo (e sono molte) siano il più possibile rimpiazzate da dimostrazioni dirette le più semplici e le più luminose. È Hoüel che ce lo consiglia. « *Il suffirait de remplacer autant que possible les démonstrations par l' absurde par des démonstrations directes plus simples et plus lumineuses* pag. 6. »

Corrediamole inoltre di qualche ideologica nozione intorno all' origine delle idee geometriche, con le quali, Hoüel soggiunge, che s' introduce nella Geometria più generalità e più chiarezza « *J' ai essayé de montrer comment en ne perdant jamais de vue l' origine des idées géométriques, et rapportant toujours chaque proposition à sa veritable source, on introduit dans la theorie plus de clarté et de généralité,* pag. 7. E questi cambiamenti non si trascuri che sieno poi accompagnati da uno sconvolgimento di disposizione delle materie, *per subordinarle* ad un ordine più razionale: il *suffirait de subordonner les propositions a un ordre plus rationel* pag. 6: sono tutti suggerimenti di Hoüel.

Queste tenuissime bagattelle risguardano la sostanza del libro. Relativamente poi all' abbigliamento con cui sono vestite le idee, un altro solo piccolo cambiamento, e ho finito: fa d' uopo sia sbarazzato il trattato da ciò che la esteriore sua forma offre (non mi tacciate di troppo cinismo, perchè son parole di Hoüel) *di arido e di ribultante:* si: sia *débarrassé de ce que la forme offre d' aride et de rebutant* pag. 6.

Ma, di grazia, dopo che e sulle idee, e sul modo di esprimerle fatto avremo que' radicali cambiamenti di che si è fatto parola, il libro scelto a modello insensibilmente assottigliandosi, va ad esinanire; e, *ahimé d' Euclide non riman che il nome.*

12 Ed a coloro (e ve ne saranno) cui sembrassero esagerate e mosse dalla più impudente alterigia le mie cri-

tiche osservazioni, a coloro i quali sostengono niuna cosa essere da Euclide asserita che sia erronea, niuna che non sia dimostrata, io mi limiterò ad additare quella definizione V^a del V libro dei suoi elementi, precipuo perno della sua teoria delle proporzioni, cui si vorrebbe oggi fare ritorno. La disamina di questa base degli equimoltiplici Euclidei diretta dal semplice lume della Logica naturale è l' oggetto principale dell' attuale mio ragionamento.

13 Nè a sottoporre questa teorica a critica severa sono io il primo. La disapprovazione ebbe essa dai più insigni tra que' Matematici stessi, i quali in tutto il rimanente furono di Euclide appassionati seguaci. E dalle valide testimonianze di questi, che non possono esservi certamente sospetti voglio dare cominciamento alle mie riflessioni.

Uno dei più celebri commentatori d' Euclide il Tacquet non può astenersi dal dichiarare nei suoi commenti aver egli procurato di rendere più agevole la dottrina delle proporzioni, la quale, come è esposta da Euclide, è ABBASTANZA SPINOSA. E poco dopo soggiunge *che quel* LABIRINTO DEI MOLTIPLICI *fu sempre e a lui e agli altri spiacevole; ed intrica così la mente degli Allievi da non trovar la via da uscirne* (*l*).

E se ci facciamo a consultare una delle prime Glorie italiane il gran Galileo, e non ha egli fatto soggetto di trattenimento della sua quinta giornata l' esame del quinto libro d' Euclide ? E cosa fa egli dire in proposito ai suoi interlocutori ? E non dichiara forse Sagredo di avere un dubbio già antiquato intorno a questa definizione (la quin-

---

(*l*) Proportionum doctrinam , ut quidem ab Euclide traditur , SATIS SPINOSAM efficere planiorem conatus sum . . . . Ille MULTIPLICIUM LABYRINTHUS mihi aliisque semper displicuit ; et tyronibus plurimum semper facessivit negotii , quorum ita plerumque mentes intricat , ut exitum vix reperiant . E conchiude che ad altre dimostrazioni è d' uopo ricorra, ut doctrinam proportionum (notate l'espressione) AB EA LABE vindicemus .

ta del quinto libro d' Euclide? (*m*) E non confessa il più dotto dei conversanti il Salviati di essere stato qualche anno involto nella stessa caligine (*n*)? E poscia convinto dei gravi difetti, non passa egli a dire candidamente « che si *potrebbe compendiare in parte e riordinare tutto il quinto libro d' Euclide* (*o*)? Dunque anche a Galileo questo libro V non sembrava una gemma!

14 Se consultiamo il successore alla Cattedra di Newton il celebre Whiston nelle sue ammonizioni agli Allievi inscrite nelle opere del Tacquet, troviamo sostenere egli « *che i ragionamenti ridondanti di ambagi che dà Euclide intorno alle proporzioni in tutto l' INTERO LIBRO hanno bisogno più d' illustrazioni e di esempi, che di dimostrazioni; e coloro, soggiunge, che con un lungo periodeggiare di proposizioni espongono questa dottrina, la quale è facilissima a comunicarsi, avvolgono tra le nubi una cosa chiarissima e di gran lunga la rendono più difficile* (*p*). » Per la qual cosa conchiude » *se stasse a me, fin dal bel principio data avrei la dottrina delle ragioni con tutt' altro metodo che con quello adoperato da Euclide* (*q*).

15 Se esaminiamo ciò che ci dice in proposito un' altro celebre commentatore degli elementi Euclidei il Dechales,

---

(*m*) Opere di *Galileo Galilei*. — Firenze 1718. Tomo II. pag. 681.

(*n*) Idem — pag. 681.

(*o*) Idem — pag. 688.

(*p*) Varios de proportionalibus ratiocinandi modos, quos integro hoc libro PER AMBAGES quamplurimas tradit Euclides, non tam demonstratione proprie dicta, quam illustratione non nulla et exemplis indigere censeo. Eos autem qui longo propositionum circuitu doctrinam hanc facillimam tradendam volunt, rem per se clarissimam nube quadam involvere, et longe difficiliorem reddere omnino puto — Elementa Eucl. Venetiis 1737 pag. 116.

(*q*) Unde sane, si mihi esset integrum, rationum doctrinam sine methodo Euclidea a primordiis tradidissem — *loc. cit.*

ci è dato notare queste espressioni. « *Euclide non ha dato una definizione giusta, che spieghi la natura della simiglianza delle ragioni .... ed è l' oscurità di questa definizione* (la V^a del V) *che ha reso questo libro difficile* (*r*) .

E Ximenes , mentre per un certo rispetto si mostra titubante, pure non può a meno di esprimersi così « *Una tal dottrina si pretende da alcuni poco salda .... Checchè sia di ciò: certo è che questa dottrina è lunga, e non necessaria; e se ancor si vuole, è una dottrina che dalle stesse ragioni somiglianti segue qual corollario , ma non è delle stesse proporzioni la principale proprietà*. (*s*)

16 Loda Euclide il Viviani ; e dice di *confarsi con lui* « *senza introdurre novità maggiore che nelle definizioni, e nel far teoremi dimostrati, quelli che come principi noti vengono supposti da Euclide stesso, lo che poi è quel solo che in tale scienza* (delle proporzioni) *pareva a desiderarsi* (*t*) » Ma non vi paja piccola bagattella, io avrei detto a Viviani il non aver Euclide dimostrato ciò che di dimostrazione abbisogna ; e per soprappiù in una teoria, che voi stesso a tutta ragione ben dite essere essenzialissima, perchè « *prepara la materia e la condiziona ad ogni più squisito lavoro, sicchè costruire senz' essa sarebbe un modellare con la polvere senza arrivar mai a fare cosa consistente e massiccia* (*u*) ».

17 Sublimi elogi si fanno di Euclide dal Cav. Brunacci, che negli accreditati suoi Elementi sino al libro IV

(*r*) *De Chales* — Gli elementi d' Euclde spiegati dal Dechales e riveduti da Ozanam tradotti dal francese Bergamo 1785. p. 140.

(*s*) *Ximenes* — I sei primi elementi della Geometria piana — Venezia 1800. pag. 226.

(*t*) *Viviani* — Quinto libro degli elementi di Euclide , ovvero Scienza universale delle proporzioni ec. — Firenze 1746. pag. 13.

(*u*) Idem pag. 7.

la traduzione ne riproduce del Grandi; ma in pari tempo apertamente dichiara « *di avere cangiata la dottrina delle proporzionali sostituendo agli egualmente moltiplici alcuni principi e modi di dimostrazione attinti dal sommo Galileo e da Simpson (v)*.

18 Encomiatore di Euclide è pure il chiarissimo Professore Fortunato Fontana, ma nel pregevole suo corso di Matematica elementare, (*x*) mentre segue Euclide sino a tutto il libro IV, espone poi nel V le materie che Euclide tratta nel libro VI, rimandando i Giovani alla dottrina delle proporzioni da lui trattata nel Capo VI dell'Algebra: e malgrado la sua propensione per Euclide, del suo libro V dedicato alle proporzioni, quasi non esistesse, non fa la menoma parola: tanto egli vede essere riprovevole cosa il presentarlo agli Allievi.

19 E senza diffondermi in più citazioni, dalle esposte parmi risulti abbastanza, che Matematici i più rinomati abbiano trovato difficoltà, oscurità, princìpi non dimostrati e di dimostrazione bisognosi nella definizione V^a del V e sue conseguenze, in una dottrina cioè, da cui non solo deriva la regola la più interessante per la soluzione d'una infinità di problemi, detta perciò *Regola d' oro*; ma in una dottrina cui si affidano le parti tutte della Matematica pura e mista, delle quali perciò, dice ben Tacquet, ne è come il midollo.

20 Ma soltanto e difficoltà, e oscurità, e princìpi non dimostrati si hanno in questa teorìa delle proporzioni di Euclide? Se non v' incresce l' indugio, io credo potervi convincere che v' è qualche cosa di peggio. Ma perchè i miei rilievi sieno più appariscenti, stimo necessario di prima richiamarvi al pensiero alcune nozioni suggerite dalla Logica naturale che sono di schiarimento alla vera teorica delle proporzioni, e poscia intorno a questa teorica stessa esporvi alcune particolari mie considerazioni.

(*v*) *Brunacci* — Elementi d' Algebra e Geometria — Bologna 1826. Prefazione.

(*x*) *Fontana* — Elementi d' Algebra e Geometria — Roma 1858.

CAPO II.

Interessanti nozioni relative alle proporzioni.

Preliminari alla teorica delle proporzioni.

21 I Nelle operazioni aritmetiche è necessario distinguere i numeri indicanti oggetti dai numeri indicanti le *volte* che i numeri indicanti oggetti vengono ripetuti. II Questi numeri indicanti non altra cosa che ripetizione, non debbono confondersi (come spesso suole farsi da molti) con i numeri indicanti oggetti in astratto; e debbono essere riconosciuti per essenzialmente interi. Ed a quelli, che spirito di contraddire induce a riguardare per sofistica o difficile a intendersi questa distinzione, io rispondo che nella ben lunga mia pratica non ho mai trovato difficile il far comprendere ai Giovanetti, che se possono frazionarsi le *volte* dei fabbricati, non così le *volte* che ripetiamo gli oggetti, non potendosi certamente spezzare gli atti individui, nè prendersi una cosa *due terzi di volta*, *tre quarti di volta*, ec.; bensì due volte il suo terzo, tre volte il suo quarto, ec.

22 Nella moltiplicazione in cui una data grandezza detta Moltiplicando viene ripetuta un dato numero di volte (numero che dicesi Moltiplicatore) affine di ottenere un tutto detto Prodotto, è ben chiaro che il prodotto esser debbe della stessa natura del moltiplicando, ossia della grandezza dalla cui ripetizione è formato, perchè l' operazione aritmetica non ha veruna forza di effettuare metamorfosi, e convertire in tutt' altra natura da quella che avevano prima della loro riunione le parti riunite. E questa verità incontrastabile ben è che sia radicata nelle menti degli Allievi, affinchè si accorgano che quando certe dimostrazioni relative a proporzioni ed a misure di superficie o di volumi con essa non si conciliano, fossero pure di Euclide o di Newton, è d' uopo conchiudere che sono false. Ed è pur bene che gli Allievi tengano per fermo che la moltiplica-

zione altro non significa che *ripetizione*; giacchè il *latior sensus* accordatole da Newton non ci è stato spiegato ancora nè da verun Matematico, nè da verun Ideologo (§. 29.)

23 La divisione ha strettissime relazioni con la moltiplicazione; ed è interessantissimo anche per la teoria delle proporzioni il ben rimarcare, che essa si presta alla soluzione di due sorte di problemi, l'uno dall'altro diversi, che sono ben dichiarati nella seguente definizione. » I La divisione è quell'operazione per mezzo della quale dato il *tutto*, ossia il *prodotto*, e data la grandezza della parte che ripetuta il produce, o ciò che è lo stesso dato il tutto e data la grandezza delle parti tutte eguali che lo formano e che dicesi moltiplicando, si cerca il numero delle volte, che questa grandezza viene ripetuta per produrlo, si cerca cioè il moltiplicatore. (*Punto fermo e riposo (y)*). II La divisione è quella operazione pur anche per mezzo della quale, dato il tutto, ossia il prodotto, e dato il numero delle volte che è ripetuta la parte che lo produce, o ciò che è lo stesso, dato il tutto e il numero delle parti uguali che lo formano, numero che si è detto moltiplicatore, si trova la grandezza della parte ripetuta, ovvero la grandezza di ognuna delle parti uguali che lo formano, grandezza che è detta moltiplicando.

24 Dopo queste analitiche osservazioni, le quali è bene che moltissime volte sieno dagli Allievi ripetute nelle soluzioni dei problemi della *divisione*, possiamo dire più brevemente, che, la divisione è quella operazione, per la

---

(y) Mi si perdoni lo scherzo. L'espressione « *punto fermo, e riposo* » è una misura igienica. Lo spirito di contraddizione, che talvolta cade nel ridicolo, allorchè 32 anni or sono io detti alle stampe questa definizione, non avendo altri attacchi da addurre, ne andette a ricercare uno nell'Igiene. Vi sarebbe pericolo, si disse, che ripetendosi tutta d'un fiato dagli Allievi più volte una definizione sì lunga, ne soffrisse la loro salute. Ecco senza nulla togliere alla chiarezza il sicuro preservativo. *Punto e riposo*.

quale, dato il prodotto e il moltiplicando, si trova il moltiplicatore, ovvero dato il prodotto e il moltiplicatore, si trova il moltiplicando, ed anche con più laconismo, le due proposizioni in una accogliendo « la divisione è quella operazione per di cui mezzo, dato il prodotto ed uno dei suoi fattori si trova l'altro. » Il mezzo poi per ottenere il risultato che dicesi *quoto* è l'osservare quante volte il fattore dato, che chiamasi *divisore*, è contenuto nel prodotto, che dicesi *dividendo*. Queste ultime proposizioni però poco giovano senza il precedente sviluppo.

25 Le definizioni della moltiplicazione, e della divisione date, come è sopra indicato, conducono di per sè stesse nel modo il più naturale a questa interessante osservazione. « In tutti i problemi possibili relativi alla moltiplicazione e alla divisione, per quanto ideare si vogliano svariatissimi, si hanno sempre quattro elementi: 1° *l'unità*: 2° *il corrispondente dell'unità ad essa eterogeneo, che è il moltiplicando*: 3° *l'omogeneo dell'unità, che ci determina il moltiplicatore*: 4° *l'omogeneo del corrispondente dell'unità, ossia l'omogeneo del moltiplicando, che è il prodotto*. E perchè il problema sia risolvibile, un solo dei tre nominati elementi debbe essere incognito.

La cosa ignota che si ricerca può essere il numero omogeneo al corrispondente dell'unità, omogeneo cioè al moltiplicando, può essere cioè il prodotto; ed allora sono dati due eterogenei, la grandezza della parte corrispondente alla unità, ossia il moltiplicando, ed il suo eterogeneo ed omogeneo all'unità da cui si deduce il moltiplicatore, ossia il numero delle volte che debbe la grandezza della parte essere ripetuta; e perciò l'operazione richiesta è la *moltiplicazione*.

La cosa ignota che si ricerca può essere il numero corrispondente alla unità, e alla medesima eterogeneo, cioè il moltiplicando; e perciò l'operazione diretta a trovarlo è la divisione nel caso in cui dato il prodotto e il moltiplicatore, si cerca il *moltiplicando*.

La cosa ignota che si ricerca può essere il numero omogeneo all' unità che nella operazione si trasforma nel *quante volte* è ripetuta la grandezza delle parti, si trasforma cioè nel moltiplicatore; e perciò l' operazione che soddisfa allo scopo è la divisione nel caso in cui dato il prodotto e il moltiplicando si cerca il *moltiplicatore*.

26 E da queste osservazioni pure risulta, che I quando dividendo e divisore sono omogenei, danno per quoto il *quante volte*, che ci determina il valore del numero ad essi eterogeneo, ed omogeneo all' unità. II Quando dividendo e divisore sono eterogenei, danno per quoto la grandezza della parte che è omogenea al dividendo.

27 Finalmente intorno alla moltiplicazione e divisione è ad osservarsi, che essendo il moltiplicatore un numero indicante *volte*, e perciò essenzialmente intero, moltiplicare per frazione è un assurdo, siccome pure è assurdo il dividere per frazione, quando la frazione divisore è non il moltiplicando bensì il moltiplicatore. Ma poichè di queste espressioni a rigore inesatte far uso si suole per laconismo, così interessantissima cosa ella è il far conoscere agli Allievi il significato che viene ad esse tribuito. Duopo è conoscano, che *moltiplicar per frazione* una quantità, significa moltiplicarla pel numeratore dopo di averla resa tante volte più piccola quante sono le unità del denominatore: e che, *dividere per frazione* quando il divisore indica *volte*, è un dividere pel numeratore affine di avere la determinata parte di ciò che si cerca, e quindi moltiplicare l' ottenuto quoto pel denominatore per avere la cosa cercata.

Additare i diversi casi pratici che richieggono queste così dette moltiplicazioni e divisioni per frazioni, condurre la mente dell' Allievo a rilevare come la stessa sua logica naturale lo porti ad eseguire l' una dopo l' altra quelle due operazioni che sono accolte sotto i nomi superiormente indicati, addimostrargli in quali casi l' analogia richiegga che al complesso delle due operazioni si dia il semplice nome di *moltiplicazione*, e in quali altri quello di *divisione*, presentare moltissimi quesìti a risolvere relativi sì all'un caso che all'altro, questa ginnastica del pensiero è indispensabile ufficio dell'Aritmetica RAGIONATA. Ciò null'ostante eccone in nota un esempio (z).

28 Queste osservazioni intorno alla moltiplicazione e divisione per frazione ci recano ad un'altra illazione. Egli è evidente che una operazione, per l'unico motivo che il problema richiede che sia o preceduta o seguita da un'altra, non cessa di essere quella che è; e perciò egli è pure evidente, che quando le condizioni dei problemi richieggono che ad una moltiplicazione sia annessa anche una divisione, siccome accade nella così detta Moltiplicazione per frazione, se giova per laconismo esprimere con il solo nome di *Moltiplicazione* il complesso della moltiplicazione e della divisione, è però sempre vero che la moltiplicazione che vi si eseguisce, è una moltiplicazione per

---

(z) Sulla base d'un metro sia eretto un rettangolo costituito da 32 quadratelli; cosicchè la porzione di esso corrispondente a metri $^3/_4$ di base vedesi formata da quadratelli 24. Quì il corrispondente dell'unità metro, ossia il moltiplicando è quadratelli 32: l'omogeneo del corrispondente dell'unità ossia il prodotto è quadratelli 24: l'omogeneo dell'unità (ossia il numero che se fosse intero sarebbe il vero moltiplicatore, e che per analogia dicesi moltiplicatore anche quando è frazionario) è il $^3/_4$. Ciò posto I supponiamo ignoto l'omogeneo del corrispondente dell'unità, cioè il prodotto: II supponiamo ignoto il corrispondente dell'unità, cioè il moltiplicando; e sia noto in ambedue i casi il $^3/_4$ omogeneo dell'unità. Avremo i due seguenti problemi.

Problema I. *Sopra la base di un metro essendo eretto un rettangolo di quadratelli* 32, *quant'è la porzione di esso rettangolo corrispondente alla porzione di metri* $^3/_4$ *di base?* La logica naturale mi porta a riflettere che essendo 32 quadratelli il rettangolo corrispondente ad un metro di base, il rettangolo corrispondente ad $^1/_4$ solo di base, sarà 32 reso quattro volte più piccolo, sarà cioè $^{32}/_4 = 8$. E se quadratelli 8 è la parte del rettangolo relativa ad $^1/_4$ di base la parte relativa a $^3/_4$ di base sarà 8 ripetuto tre volte, intero, in cui non ha luogo il menomo cambiamento che possa indurci a dichiararla avente un senso diverso.

29 E da ciò pure risulta, che le così impropriamente dette definizioni della moltiplicazione dateci da Clavio, da Newton, da la Croix, da Cauchy, le quali tutte vanno a coincidere nel direi, che la moltiplicazione presa nel più lato senso consiste nel fare sul moltiplicando ciò che si fa sull' unità perchè divenga il moltiplicatore, sono proposizioni vere, ma non definizioni, perchè indicare rassomiglianze non è definire, e nulla quelle proposizioni ti precisano, finchè la mente non va a riflettere che cosa eseguiamo sull' unità perchè divenga essa il moltiplicatore; e quando vi abbiamo riflettuto, ci avvediamo, che altro non si fa che il complesso d' una moltiplicazione e di una divisione, complesso in cui la moltiplicazione eseguita è la precisa ripetizioned' una quantità, e non ci offre alcun significato diverso da quello che le si è accordato nei primissimi elementi di Aritmetica, siccome diverso c' indurrebbe a supporre che fosse quel *latior sensus* di

---

ossia 24. Moltiplicar dunque 32 per $^3/_4$ non è un ripeterlo $^3/_4$ *di volta*; ma è un renderlo 4 volte più piccolo per avere un semplice quarto; e poscia moltiplicare questo quarto per 3 affine di avere i $^3/_4$ richiesti. Moltiplicare dunque per $^3/_4$ egli è un moltiplicare per 3 dopo di aver diviso per 4.

Problema II. *La porzione d' un intero rettangolo corrispondente a metri $^3/_4$ di base è quadratelli 24; quanti quadratelli è l' intero rettangolo costruito sulla base di un metro?* La logica naturale mi suggerisce, che essendo 24 quadratelli i tre quarti dell' intero rettangolo eretto sopra un metro di base, la parte del rettangolo eretta sopra $^1/_4$ solo di base sarà 24 reso tre volte più piccolo, ossia 8; e questa *quarta parte* 8 ripetuta quattro volte, ossia 32 quadratelli sarà l' intero rettangolo richiesto. Nella così detta divisione pel moltiplicatore $^3/_4$ non si rende dunque $^3/_4$ *di volta* più piccolo il prodotto 24, ma lo si rende 3 volte più piccolo, affine di ottenere prima il quarto di ciò che si cerca; e questo quarto si rende poscia 4 volte più grande per avere la cosa cercata.

Newton, che bene esaminato non è nè *latior* nè *strictior*; ma è precisamente identico in tutti i casi.

30 Queste idee elementari, che abbiamo premesse alle poche altre che ora daremo intorno alle proporzioni, se enunciate in astratto sembrano difficili, nojose ed astruse, divengono facilissime e chiarissime tosto che applicate sieno ai casi concreti. E se appunto per questa loro chiarezza credono taluni che sia superfluo l' esporle, una pratica di molti anni mi ha fatto conoscere essere in vece utilissimo. Dobbiamo obbligare gli Allievi a rientrare in sè stessi, a sorprendere la mente in quella successione di giudizi che la Logica naturale le suggerisce per ottenere l' intento. Questa è ginnastica dell' intelletto. Il trascurare di tener dietro a questo mentale lavoro, il non abituarsi ad applicare alla circostanza gli esposti principi, ha spesso recato ad inesattezze anche sommi Matematici. Il sistema *degli indivisibili* di Cavalieri avrebbe incontrato minori difficoltà per essere accettato, se egli, riflettendo che il prodotto conviene sia sempre omogeneo al moltiplicando (§. 22) non avesse detto che le linee sono composte dalla ripetizione di punti, e le superficie dalla ripetizione delle linee, e dalla ripetizione della superficie i volumi, ma avesse esposto come era forse in sua mente, e come dopo lui disse Newton, risultar le linee dalla ripetizione non di punti, ma di lineole: risultar le superficie non di linee, ma di areole, e i volumi non di superficie, ma di lamine evanescenti. Dall' abituare la mente a tornare appena se ne offra la circostanza, sulle esposte nozioni, deriva pure la facilità di annettere esatto significato ad espressioni molto laconiche. Così per es. ho trovato molti Allievi non avere idee abbastanza chiare intorno alle laconiche espressioni del Fisico, per es. che la *velocità è lo spazio diviso pel tempo*. Ma quelli che sono stati abituati a far molte applicazioni degli stabiliti elementari principi, ti dicono subito: abbiamo lo spazio diviso pel tempo: dunque dividendo e divisore sono eterogenei: dunque il quoto che si cerca è omogeneo al

prodotto (§. 26): dunque anche il qnoto è uno spazio; ed è il moltiplicando: dunque è grandezza della parte corrispondente all' unità (§. 25); dunque é lo spazio descritto nell' unità di tempo; e dal valore di questo spazio descritto nell' unità di tempo, risulta appunto l' idea della velocità, intorno alla quale, per poca abitudine sugli esposti rilievi cadde in errore, come altra volta esposi (aa) anche il profondo Galuppi. Consimili rilievi hanno pur luogo, allorchè ci si dice che la densità è *la massa divisa pel volume*. E molti altri esempi, addurre potrei, se la brevità non lo vietasse, in prove di fatto che attestino quanto a ben entrare in possesso del giusto concetto di molte e molte espressioni, giovino le sopra esposte nozioni, che io perciò non so comprendere come possano riguardarsi per sofisticherie, o almeno per inutili sottigliezze da chi abbia mente abituata a riflettere.

Esatta idea delle ragioni e proporzioni per quoto.

31 Col corredo degli ora stabiliti principi intrapren- diamo un esame analitico delle ragioni e proporzioni per quoto.

Negli usi della vita ci si offrono talvolta quantità aventi tra loro tale corrispondenza, che al crescere o decrescere delle une, crescono o decrescono le altre, non però in modo che al duplicarsi, triplicarsi ec. delle prime, si duplichino, triplichino, ec. le seconde. Così avviene p. es. del prezzo dei diamanti, il quale al duplicarsi o triplicarsi del peso non si duplica o triplica, ma cresce in maggiore rapporto. Così pur avviene dello spazio descritto da un grave cadente, giacchè quello percorso in due o tre secondi è più che doppio o triplo del primo. E di queste quantità, i di cui incrementi o decrementi dipendono da particolari condizioni o leggi, non è quì luogo di parlare.

32. Altre quantità però vi sono, come le basi e le

(aa) *Purgotti* — Lettere filosofiche pag. 137 e seguenti.

aje dei rettangoli equialti, le quali si corrispondono in modo, che, essendo per es. 6 metri quadrati l' aja di uno di essi avente per base un metro, ne segue che indispensabilmente è 6+6 l' aja d' un altro avente per base metri 1+1; è 6+6+6 l' aja d' un altro, la cui base è+1+1+1 ec. In egual modo subiscono un uniforme incremento i prezzi ed i pesi d' una merce, i pesi ed i volumi d' una stessa materia, il danaro dato ad interesse ed il suo frutto, ec. E poichè su questa sorta di quantità spesso accade vi sia una incognita, la quale con qualche artificio può dedursi dalla cognizione di altre tre, da questa ricerca, donde ha tratto origine la teorica delle proporzioni, daremo principio, partitamente esaminando i due diversi mezzi che la Logica naturale ci suggerisce per ottenere l' intento, l' uno dei quali parte dal confronto di due termini omogenei, e dal confronto di due termini eterogenei l' altro.

Eguaglianza delle ragioni, allorchè in ciascuna il conseguente è omogeneo al suo antecedente.

33 Si abbiano due rettangoli equialti eretti l' uno sopra una base di metri 4, l' altro sopra una base di metri 12. Metri quadrati 24 è l' aja del 1°: quanta è l' aja del 2° ?

Paragonando tra loro i due termini omogenei noti la base 4 e la base metri 12, osserviamo che il 1° è contenuto 3 volte nel 2°; e perciò conchiudiamo, che 4 a 12 è una ragione per quoto, il cui valore od esponente è il 3. Paragonando poscia l' aja di metri quadrati 24 del 1° rettangolo con l' aja di metri quadrati x del 2°, riflettiamo, che come la base metri 4 è contenuta 3 volte nella base 12, così l' aja 24 metri quadrati del rettangolo eretto sulla base 4 conviene sia contenuta 3 volte nell' aja x del rettangolo eretto sulla base 12; e perciò deduciamo, che il rettangolo x conseguente della 2ª ragione 24 *ad* x, debbe essere formato dal suo antecedente 24 moltiplicato per 3 valore della 1ª; ed abbiamo perciò $x = 24 \times 3 = 72$.

34 La soluzione di questo quesito ci offre nelle due ragioni 4 *a* 24, e 12 *a* 72 l' esempio del caso il più sem-

plice, nel quale si riconosce l' eguaglianza di due ragioni; ed è allorquando avviene, che il *QUANTE VOLTE l' antecedente della 1ª ragione è contenuto nell' omogeneo suo conseguente sia eguale al QUANTE VOLTE l' antecedente della 2ª è contenuto pur esso nel suo conseguente*.

35 Ecco ora l' esempio di un secondo caso in cui parimenti il Matematico riconosce l' eguaglianza di due ragioni.

Sieno due rettangoli equialti. Metri quadrati 24 è l' aja del 1° eretto sopra una base di metri 4: si chiede di quanti metri quadrati è l' aja del 2°, che ha la base di metri 14.

In questo esempio la base metri 4 non è esattamente contenuta nella base 14, giacchè il quoto che si ottiene è $^{14}/_4 = ^7/_2$. E quì giova rammentare, che allorquando dividendo e divisore sono omogenei, il quoto esprime un *quante volte* (§. 26); giova rammentare che il numero esprimente un *quante volte* è essenzialmente intero (§. 21) e che perciò l' ottenuto $^7/_2$ non può esprimere $^7/_2$ *di volta*: giova rammentare ciò che l' Aritmetica RAGIONATA nella teoria delle frazioni ci insegna, che quando il divisore è il moltiplicando, se il risultato della divisione è una frazione, il vero quoto è il solo numeratore, e nel nostro caso il solo 7, mentre il denominatore 2 ci avverte che non tutto il divisore 4, ma la sola parte due volte più piccola di esso, cioè il 2 è contenuta esattamente 7 volte nel dividendo 14. Passando ora a paragonare le aje dei due rettangoli equialti, otteniamo la ragione 24 ad x. E riflettendo che le loro basi ed aje sono grandezze di uniforme incremento, ci avvediamo, che al modo stesso che la metà della base 4 è contenuta 7 volte nella base 14, così pure 7 volte la metà dell' aja del rettangalo 1° si contiene nell' aja del 2°; e perciò conchiudiamo, che l' aja x (conseguente della 2ª ragione 24 *ad* x) si ottiene col ripetere 7 volte la metà del suo antecedente 24, il che laconicamente esponiamo, scrivendo $x = 24 \times ^7/_2 = 84$. E perciò anche in questo 2° caso, come nel 1°, il conseguente della 2ª ragione è il suo antecedente moltiplicato pel quoto della 1^a. E poichè anche in questo 2^o caso il quoto delle due ragioni è uguale, per eguali riconosciamo pur esse.

Conchiudiamo perciò essere due ragioni eguali anche quando avvenga, che il quante volte una parte aliquota dell' antecedente della 1^a ragione (e dicesi aliquota una parte che sia 2,3, *n* volta più piccola del dato numero) è contenuta nel suo conseguente sia uguale al *quante volte* la stessa parte aliquota dell' antecedente della 2^a ragione è contenuta nel suo conseguente *(bb)*.

36 Altri casi di esatta contenenza di un numero nell' altro, ossia di esatta misura non si danno; e perciò insieme riunendo quanto nei due ultimi paragrafi abbiamo esposto conchiudiamo, che in tutti i casi nei quali i termini della stessa ragione sono omogenei, una ragione si dice uguale ad un altra allorchè avvenga che il QUANTE VOLTE *l' antecedente della* 1^a, *ovvero la sua metà il suo terzo* ...

(bb) Può darsi che si ricerchi quante volte una parte dell' antecedente è contenuta nel suo conseguente anche nel caso in cui l' antecedente sia maggiore; poichè se sarebbe assurdo il chiedere quante volte il *più* è contenuto nel *meno*, non così è il chiedere quante volte sia contenuta in un numero più piccolo la parte di uno più grande. E l' indole di alcuni problemi è tale, da direttamente ricercare quante volte una parte di un numero maggiore è contenuta nel minore, e non già quante volte stia nel maggiore il minore. Così se una base di 24 metri fosse l' antecedente, ossia il divisore, e metri 18 il conseguente, ossia il dividendo, il quoto di questa ragione sarebbe $^{18}/_{24} = {}^3/_4$; e questo quoto $^3/_4$ esprime, che non l' antecedente 24, ma la sola quarta sua parte 6 è contenuta 3 volte in 18, lo che ci porta a conchiudere che posto fosse p. es. 48 metri quadrati l' antecedente della 2^a ragione, non esso 48, ma la quarta sua parte cioè 12 metri quadrati è l' aja che debbe essere contenuta 3 volte nel suo conseguente; e quindi questo esser debbe 36, cioè il 48 moltiplicato (giusta il solito laconico modo di esprimerci) per $^3/_4$.

la sua parte ennesima è contenuta nel rispettivo conseguente, sia uguale al QUANTE VOLTE *l' antecedente della* 2^a, *o la sua metà, il suo terzo ... la sua parte ennesima è contenuta nel suo conseguente*. E nella eguaglianza di due ragioni consiste la proporzione (*cc*).

Eguaglianza delle ragioni quando l' antecedente di ciascuna è eterogeneo al suo conseguente.

37 Noi siamo giunti alla soluzione del problema al §. 33, così ragionando « Come la base metri 12 è la stessa base metri 4 ripetuta 3 volte, egualmente il rettangolo eretto sulla base metri 12 è il rettangolo eretto sulla base metri 4, che è 24 metri quadrati, ripetuto 3 volte, è perciò 72. »

Al medesimo intento però la stessa Logica naturale ci conduce per un altro sentiero. « Il rettangolo eretto sul-

---

(*cc*) A questi soli due casi, al quante volte cioè o lo stesso antecedente, o una sua parte aliquota è contenuta nel conseguente, riduconsi tutti quanti mai sono i casi diversi contemplati dagli antichi trattatisti nelle ragioni per quoto. Quindi riprovevole cosa sarebbe il tener dietro alla distinzione di tutte le diverse ragioni, che anche il Viviani riporta nella sua *Scienza Universale delle proporzioni* (Firenze 1746 pag. 40) e che sono niente meno che dieci cui si dettero i nomi seguenti :

I. Moltiplici	VI. Submoltiplici
II. Superparticolari	VII. Subsuperparticolari
III. Superparzienti	VIII. Sussuperparzienti
IV. Moltiplici superparticolari	IX. Submoltiplici subsuperparticolari
V. Moltiplici superparzienti	X. Submoltiplici subsuperparzienti

L' occuparsene sarebbe un opprimere la memoria senza alcun utile dell' intelletto. Io credo perciò di aver fatt' uso della maggior possibile concisione, riducendo ai due soli esposti casi queste poco simpatiche distinzioni; e quindi io sono d' avviso che chi nel leggere tutto ciò che ho fin quì esposto intorno alle ragioni eguali, mi avesse tacciato di troppa prolissità, darebbe a conoscere avere idee troppo superficiali intorno alla materia di che si tratta.

la base metri 4 è metri quadrati 24: dunque quello eretto sulla base 1 è 4 volte più piccolo, è cioè $^{24}/_{4} = 6$. Dunque quello eretto sulla base 12, sarà 6 ripetuto 12 volte, sarà cioè 72. »

Così ragionando, noi abbiamo formato una prima ragione con due termini corrispondenti eterogenei; e sono metri lineari 4 di base, metri quadrati 24 di area. E col dividere 24 per 4, abbiamo ottenuto per quoto metri quadrati 6 esprimenti il rettangolo avente metri 1 di base. Siamo poscia passati a considerare la 2ª ragione formata egualmente di due eterogenei, che sono base metri lineari 12, aja metri quadrati x. E moltiplicando per questo 12 l' aja 6 corrispondente ad un metro, abbiamo ottenuto metri quadrati 72 per l' aja del rettangolo eretto sulla base di metri 12.

38 Notiamo bene però, che quando noi meditiamo sulla 1ª ragione *4 a* 12, non ricerchiamo già quante volte il 4 metri lineari è contenuto in 24 metri quadrati (assurda ricerca), bensì quante volte il 4 metri quadrati è contenuto in 24 metri quadrati. Questa cognizione però non è quella che c' interessa: essa è una cognizione di passaggio, una idea d' intermezzo per giungere ad ottenere lo scopo voluto. Noi siamo indotti a cercare quante volte il 4 metri quadrati è contenuto in 24, perchè essendo 24 il complesso dei metri quadrati costituenti i 4 rettangoli eretti ognuno sopra un metro di base, ad ogni quattro quadrati del rettangolo complessivo corrisponde un solo quadrato per ciascuno dei quattro rettangoli equialti eretti sulla base di un metro; ond' è che quante volte il 4 quadrati è contenuto in 24, e tanti son quelli, che formano l' aja di ognuno dei rettangoli rispondenti ad uno solo di base *(dd)*.

(dd) Per render conto in somma a noi stessi del valore della 1ª ragione 4 a 24, non facciamo altro che rendere il 24 metri 4 volte più piccolo con quel processo della successiva sottrazione

E perciò, essendosi potuto togliere 6 volte il 4 metri quadrati dal 24, deduciamo, che sopra un metro di base sta un rettangolo di metri quadrati 6.

Fatto che ha la mente questo primo giudizio SENZA AVERE MAI ABBANDONATO LE IDEE NÈ DEI METRI LINEARI DELLA BASE, NÈ DEI METRI QUADRATI DELL' AJA DEI RETTANGOLI, essa passa tosto a quest' altro. Se sulla base di metri 1 sta un rettangolo di metri quadrati 6, sulla base di metri 12 starà un rettangolo di metri quadrati 6 ripetuto 12 volte, ossia di metri quadrati 72; e così la x della 2^a ragione (la quale è *metri lineari* 12 *a metri quadrati* x) risulta identica a ciò che si ottenne col 1° processo, ed anche in questo 2° la x è il prodotto dell' antecedente 12 della 2^a ragione moltiplicato pel quoto 6 valore della 1^a. Essendo perciò lo stesso quoto 6 il valore sì della 1^a che della 2^a ragione, d' uopo è che si dica che le due ragioni sono eguali, e formano una proporzione che è la seguente:

Base 4 ad aja 24 come base 12 ad aja 72

e che perciò si conchiuda esistere ragioni eguali e quindi proporzioni anche nel caso in cui in ciascuna ragione l' antecedente sia eterogeneo al suo conseguente.

39 Non ci sfugga di mente però la diversità del significato che ha il quoto quando ambo i termini d' una stessa ragione sono omogenei, e allorchè sono eterogenei. Il quoto 3 ottenuto nel 1° caso (§. 33) è numero indicante *ripetizione*: è numero indicante *oggetti* il quoto 6 nel 2°. Là il 3 esprime il moltiplicatore, il quante volte cioè la base metri 4 è contenuta nella base 12, e quante volte l' aja del rettangolo eretto sulla 1^a base è contenuta su quella del rettangolo eretto nella 2^a. Qui il quoto 6 indica il moltiplicando, cioè la grandezza corrispondente alla unità che le è etero-

---

che l' Aritmetica RAGIONATA insegna e dimostra doversi usare anche quando nella divisione si cerca non il numero delle parti che formano il tutto dividendo, ma la loro grandezza.

genea (§. 26), indica cioè il numero dei quadrati di cui risulta l'aja del rettangolo eretto sulla base d'un metro solo.

40 Ora riflettendo che questo stesso moltiplicando 6 è quoto che si ottiene tanto dalla ragione o divisione $^{24}/_{4}$ che dalla $^{72}/_{12}$: rammentando inoltre, che quando il quoto d'una 1ª divisione è identico a quello d'una 2ª, necessita che i termini della 2ª sieno i rispettivi della 1ª resi entrambi *n* volte più grandi o più piccoli, ne segue, che tra i divisori o antecedenti che nella nostra proporzione sono 4 e 12 vi sia la stessa ragione di contenenza che fra i dividendi o conseguenti 24 e 72. E ciò vale quanto il dire, che essendo data la seguente proporzione:

(A) **base 4 ad aja 24, come base 12 ad aja 72,**

necessita che si abbia ancora

(B) **base 4 a base 12 come aja 24 ad aja 72.**

Viceversa poi essendo data la proporzione (B)

(B) **base 4 a base 12, come aja 24 ad aja 72**

necessita che si abbia ancora

(A) **base 4 ad aja 24 come base 12 ad aja 72.**

Infatti la data proporzione (B) ci espone, che come 12 lo è di 4, così 72 è triplo di 24; e perciò dividere 72 per 12 è un dividere il triplo di 24 pel triplo di 4. Quindi, avendosi dall'Aritmetica che il quoto d'una seconda debbe necessariamente essere uguale al quoto d'una prima divisione, quando i termini della seconda sieno i termini della prima resi *n* volte o più grandi (come nel caso nostro) o più piccoli, ne segue debba essere $^{24}/_{4} = {}^{72}/_{12}$, debba cioè il 24 reso quattro volte più piccolo essere eguale al 72 reso 12 volte più piccolo, debba essere cioè

Base 4 ad aja 24, come base 12 ad aja 72

che è ciò che doveva dimostrarsi.

41 Gli stessi ragionamenti che abbiamo fatto sulle basi 4 e 12 e sulle aje 24 e 72 dei rettangoli equialti, facciamo pure su 4 e 24 chilogrammi di pane, e su soldi 12 e soldi 72 rispettivi prezzi: facciamoli pure su pesi e volumi: su capitali e frut-

ti, ec. E non perdendo mai di vista i successivi giudizi che andiamo formando in tutti questi esempi, noi ci avvedremo, che senza distaccar mai la nostra mente dalle idee delle basi e delle aje dei rettangoli, dalle idee concrete dei chilogrammi di pane e dei soldi, dei pesi e dei loro rispettivi volumi, dei denari a interesse e loro frutti; e senza che nemmeno per ghiribizzo ci salga in mente di trasformare i dati numeri concreti in astratti, rimaniamo ad evidenza convinti, che si può col solo collocare in una data proporzione un medio nel posto dell' altro, il che si chiama *alternarla*, passare dall' eguaglianza di due ragioni a termini omogenei all' eguaglianza di due ragioni a termini eterogenei, e viceversa. Solo è d' uopo si rifletta (ed è questa avvertenza di una somma importanza) che mentre i due quoti eguali della data 1^a proporzione esprimono il *moltiplicatore*, cioè il *quante volte*, i due quoti eguali, che coll' alternamento si ottengono, e che sono nella nuova proporzione diversi dai quoti eguali della 1^a, esprimono il *moltiplicando*, ossia la *grandezza delle parti relativa all' unità eterogenea*.

42 Le esposte teorie intorno all' eguaglianza delle ragioni appariscono aride, stucchevoli, difficili ad essere comprese a chi mercè l' esercizio non ha acquistata l' abitudine di applicarle. Tali sembrano pure a me medesimo, se io torno a rileggerle collocandomi nella posizione di chi non avesse mai fatto il menomo esercizio sulle nozioni appositamente da me collocate nel principio di questo Capitolo. Egli è perciò ben facile che vi sieno di quelli che al leggere queste teoriche inclinino a riguardarle per nauseanti sofisticherie, o almeno per osservazioni superflue, meritevoli al più d' un infimo posto nelle Aritmetiche mercantili. Nè improbabile è pure, che le molte parole da me spese per dimostrare la possibilità dell' alternamento in tutte le proporzioni, sieno riguardate come prolissità inutili e proprie di istruttori imbecilli, incapaci di accorgersi, che a ciò dimostrare basti il dire che nell' alternamento il prodotto

dei medi rimane identico a quello degli estremi. Ad eliminare questi giudizi sarà util cosa il quì addurre qualche prova di fatto, la quale addimostri, come, essendo talvolta insorte delle difficoltà nella mente di sommi scienziati, non sieno essi stati in grado di scioglierle per non avere portato il pensiero sulle verità contenute nelle esposte teorie; per lo che o sono caduti in contraddizione, o da un errore sono precipitati in un altro.

43 Euclide per es. vi dice che la ragione è *una relazione fra due grandezze omogenee*. Dunque il confronto di due termini eterogenei per Euclide non è una ragione: dunque in tutti que' casi (e sono la massima parte) in cui i termini omogenei di una ragione sono eterogenei a quelli dell' altra, se la proporzione si alterna, cessa di essere, poichè il 1° e 2° termine, siccome eterogenei, non formano più ragione; e così pure il 3° ed il 4°. Dunque Euclide si contraddice allorchè nella definizione 13ma e nella proposizione 16ma del libro V ammette l' alternamento.

Ozanam conviene con Euclide; e di più fa ciò che Euclide non fece, ci espone il perchè non può una ragione risultare di termini eterogenei, dicendo « *Egli è evidente che i termini d' una ragione deggiono essere omogenei perchè altrimenti non potrebbe darsi come, e quante volte una grandezza è contenuta in un altra* » (ee).

De-Chales volle evitare la contraddizione in cui cadde Euclide; e perciò parlando dell' alternamento delle proporzioni, ci disse che « *questa maniera non può aver luogo, che quando i quattro termini sono dello stesso genere*, cioè *o tutti quattro di linee, o di superficie, o di solidi* (ff). » Ma ciò ammettendo: dunque, io soggiungo, nei moltissimi casi, nei quali i quattro termini non sono

---

(ee) *Ozanam* — Cours de Mathematique ec. Tome premier. Paris 1699 pag. 172.

(ff) *De-Chales* — Gli Elementi di Euclide spiegati dal De-Chales ec. Bergamo 1785 pag. 144 e pag. 160.

tutti omogenei, secondo De-Chales l'alternamento è impossibile: e ciò è contro il fatto; poichè da tutti i Matematici si pratica di spesso ricorrere all'alternamento delle proporzioni anche quando vi sono termini eterogenei.

Di questo inconveniente si accorse Clavio; e non seppe trarsi bene d'impaccio. Credè poscia Wallis aver trovato un facile rimedio alla grave difficoltà che presenta il poter concepire quante volte una quantità sia contenuta in altra ad essa eterogenea con un'ardita metamorfosi, col fare ricorso cioè ai numeri astratti. « *In questo modo*, egli dice, *i simboli più non esprimono nè linee, nè pesi,* « *quantità immediatamente eterogenee*, *ma numeri*, *e* « *perciò quantità omogenee* (*gg*). » Ma che le linee ed i pesi, allorchè sono espressi per numeri considerati in astratto, possano riguardarsi per *quantità omogenee*, egli è un errore ben grave. Altro è dire numeri, dalla idea dei quali eliminiamo la considerazione se dessi sieno omogenei o eterogenei (e tali sono i numeri astratti) altro è dire, essi sono omogenei. Dichiarare omogenee delle cose, che per ipotesi non sono nè omogenee nè eterogenee, è un contraddirsi. Di più: se Wallis avesse tenuto dietro al lavoro della mente, sarebbesi accorto essere un fatto incontrastabile che in molti casi essa alterna le proporzioni che hanno eterogenei gli antecedenti senza imbattersi mai nell'assurdo, e senza congedarsi mai dal concreto.

Il Lecchi segue il Wallis, ma non pienamente soddisfatto delle sue spiegazioni non può a meno di non confessarci essere sua opinione, che allorquando mercè l'alternamento si fa il confronto fra due termini eterogenei, vi sia una perturbazione. Ciò è reso manifesto dalle sue parole « *sarà lecito adoperare l'alternazione nei pro-*

(*gg*) Hac ratione symbola jam non lineas et pondera quantitates heterogeneas immediate significant, sed utrobique, numeros, adeoque homogeneas. *Vol. I. cap.* 35.

porzionali non omogenei, allorchè con una seconda alternazione venga restituito ciò che nella prima era stato PERTURBATO *(hh)*. » E noi conveniamo pienamente col Lecchi, allorchè ci annuncia una perturbazione, la quale non potendo essere che nel concetto, e non potendo in altro consistere che nell' ammettere un impossibile, qual' è che una cosa possa essere contenuta in altra di specie diversa è una vera aberrazione mentale. Col Lecchi però non conveniamo allorquando egli si adatta a tollerare questa aberrazione perchè può essere tolta per mezzo d' una seconda alternazione. L' errore va sempre evitato, nè mai va permesso che si commetta, sul dato che può in seguito essere corretto *(ii)*.

44 Ora come dei lucidi intervalli si danno nei mentecatti, così intervalli d' aberrazione noi conveniamo con Loke potersi dare pur troppo in tutti gli uomini di mente sana; ma che poi *possa* non solo, ma necessariamente *debba* la mente sana passare per questi intervalli di aberrazione,

---

(*hh*) Licebit alternationem adhibere etiam in proportionalibus non homogeneis, ubi nempe secunda permutatione restituitur quod prima DETURBATUM erat — *Lecchi* — Arithmetica universalis Isaci Newtoni 1752. Lib. II. pars III. pag. 85.

(*ii*) Che se si dicesse potersi in Matematica concedere l'uso di proposizioni indicanti l' impossibile, perchè troviamo che spesso nel calcolo si usano i simboli dell' impossibile: sì, noi rispondiamo, di questi simboli essa si serve, ma non approva proposizioni impossibili. Fa uso di simboli dell' impossibile perchè anche per mezzo di essi si esprimono delle verità. Quindi le proposizioni, nelle quali esistono questi simboli, come per es. $(\sqrt{-1})^2 = -1$ sono sempre vere, e non presentano mai un impossibile siccome lo è *il quante volte* per es. il peso di un corpo è contenuto nel suo volume, od in genere una quantità qualsiasi in altra di specie diversa, lo che è appunto l' assurdo, che s' incontra nell' alternamento delle proporzioni, ossia è quella *perturbazione* di cui Lecchi favella, e che non può ammettersi senza alienazione d' intelletto.

sien pure brevissimi (e notate in quali circostanze) quando essa si occupa di matematiche dimostrazioni, quasi che queste aberrazioni facessero parte anch' esse di quelli elementi, o come suol dirsi nozioni di passaggio, per giungere al *quod erat demonstrandum*, questo è ciò che la Logica naturale non potrà approvare giammai. Ed un metodo che ciò richiegga, e che per velare quest' assurdo ci voglia far credere che la mente passa a considerare i numeri in astratto per poi a comodo suo tornare al concreto, un tal metodo cui pur troppo non è nè il solo Wallis nè il solo Lecchi che faccia ricorso, permettetemi che per eccitarvi sempre più ad averlo in abborrimento, ve lo dichiari nel suo vero aspetto, è al più alto grado vergognoso e ridicolo.

45 Ma e voi, potrà dirmisi, voi che eretto vi siete in critico severo, in rigoroso Aristarco di molti e molti pregevolissimi autori, come sciogliete quelle difficoltà, che voi dite non aver essi saputo risolvere? Nel modo il più facile, io rispondo, e non già per sublimi trovati, di che io non sarei al certo capace, ma per mezzo di idee le più elementari. Se indiscreta e troppa ardita la mia preghiera non fosse, degnatevi, io vi direi, tornare col pensiero per pochi istanti su quelle da voi credute sofistiche distinzioni che nella definizione della *Divisione* io vi feci rimarcare (§. 23): tornate a leggere i §§. 37, 38, 39: applicate le verità ivi esposte a vari esempi, affinchè facili vi riescano a intendersi e a ritenersi; e la difficoltà sarà subito dileguata. Voi tosto vi accorgerete, che l' imbarazzo in cui e trovavansi i citati autori, e molti altri si trovano tutt' ora, tutto dipendeva e dipende dal persistere nella idea, che il quoto valore delle ragioni nell' alternamento delle proporzioni non cambi significato, mentre la Logica naturale ci fa conoscere che da quello di *moltiplicatore*, ossia del *quante volte* passa a quello di *moltiplicando*, ossia di *grandezza della parte relativa all' unità*, e viceversa. E dopo che vi sarete così convinti che il nodo della difficoltà esposta

non è tagliato, ma sciolto a meraviglia dal duplice significato, che può ricevere il quoto, spero che troverete ragionevoli i motivi che mi indussero ad ampliare la definizione della Divisione (§. 23) giacchè uno si fu quello appunto di far sì, che per essa divenisse ben chiaramente dilucidato quel duplice significato del quoto, che nelle comuni Aritmetiche non trovasi nemmeno enûnciato.

Formola analitica delle proporzioni e fondamentali loro proprietà.

46 Sviluppata la parte ideologica relativa alla eguaglianza delle ragioni e all' alternamento delle proporzioni, passiamo ad occuparci della utilissima loro formola generale analitica.

In tutti gli esempi esposti abbiamo sempre considerato il conseguente pel numero *che contiene*: l' antecedente, o qualche determinata sua parte, pel numero *contenuto*. Era indifferente fare l' inverso; lo che è praticato dalla maggior parte dei trattatisti: ma siccome, scelto un sistema, egli è bene attenersi sempre al medesimo per evitare confusioni, noi quello abbiamo prescelto che si confà con le formole e le espressioni da tutti adottate per le progressioni, le quali sono una catena di ragioni, e si definiscono per *serie di termini in tal modo disposti che quante volte il secondo* CONTIENE *il primo, altrettanto il terzo* CONTIENE *il secondo*, ec. e non viceversa. Ciò stabilito, conviene avvertir bene, che quando trattasi di proporzioni, l' espressione $m : n$ non significa « m diviso per n » come si pratica nelle divisioni, ma significa, a tenore di quanto abbiamo esposto « n diviso per m ».

47 Inoltre rammentando che una proporzione ossia l' eguaglianza di due ragioni in altro non consiste che nell' eguaglianza dei loro quoti, giusta il significato che ad essi compete a tenore dell' omogeneità od eterogeneità di ambi i termini di ciascuna ragione, ne segue, che altro non essendo le ragioni che divisioni o frazioni, il conseguente dee sempre riguardarsi per dividendo o numeratore e l'antecedente per divisore o denominatore, cosicchè in tutte

e tre le seguenti linee l'espressione destra è equivalente alla sinistra.

I $3:24 = 9:72$ ovvero $^{24}/_{3} = {}^{72}/_{9}$
II $4:18 = 12:54$ ovvero $^{18}/_{4} = {}^{54}/_{12}$
III $16:\ 6 = 40:15$ ovvero $^{6}/_{16} = {}^{15}/_{40}$

Nella I^a l'antecedente è contenuto esattamente nel suo conseguente; e perciò le *frazioni sono apparenti*; e l'intero 8 è il valore di entrambe.

Nella II^a non l'antecedente, ma la sua sola metà è contenuta esattamente nel rispettivo conseguente maggiore dell'antecedente: le frazioni sono *spurie miste*, e riducendole ai menomi termini trovasi essere $^{9}/_{2}$ il valore di entrambe.

Nel III^o caso non l'antecedente, ma una sola sua parte è contenuta nel conseguente minore dell'antecdente: le *frazioni sono vere*; e riducendole, trovasi essere $^{3}/_{8}$ il loro valore.

48 Sono questi i tre casi che meritano di essere distinti nell'eguaglianza delle ragioni; e poichè in tutte e tre il conseguente di ciascuna ragione non è che il rispettivo antecedente moltiplicato pel quoto, che è identico in tutte due, ne segue che esprimendo questo quoto eguale in entrambe le ragioni per q, qualsiasi ragione può essere espressa per $a:aq$, qualunque altra eguale ad essa per $c:cq$; quindi l'espressione generale analitica di qualunque proporzione è $a:aq = c:cq$

49 La formola analitica col porre in evidenza l'intima costituzione delle proporzioni ci mostra che (TEOREMA I.) il prodotto aqc dei medi è uguale a quello degli estremi acq; giacchè risultano entrambi degli stessi identici fattori, quali sono i due antecedenti a,c e il quoto comune q. Ella è questa la dimostrazione la più semplice e diretta della proprietà fondamentale delle proporzioni per quoto, la quale emerge dall'intima loro costituzione.

50 E questa ci addita pure il modo di dimostrare la proposizione inversa, fertilissima di applicazioni pur essa, che cioè (TEOREMA II.) *quattro termini tali, e disposti*

in modo, che il prodotto dei medi sia uguale a quello degli estremi formano una proporzione. Ed in vero noi ignoriamo se la ragione del 1° al 2° sia uguale alla ragione del 3° al 4°: sappiamo però che il quoto della 1ª ragione moltiplicato pel prodotto dei due antecedenti è uguale al quoto della 2ª moltiplicato per lo stesso prodotto; ma due quantità che moltiplicate per una terza danno uno stesso prodotto è d'uopo che siano eguali: dunque i due quoti sono eguali: eguali le due ragioni, proporzionali i 4 termini.

E questa verità stessa possiamo più brevemente esporre se (indicato che siasi per q' il quoto della 2ª ragione perchè non sappiamo se sia eguale al q quoto della prima, e perchè è anzi questa eguaglianza l'oggetto che ci proponiamo di dimostrare) esprimiamo la ragione del 1° al 2° termine con $a \colon aq$, e quella del 3° al 4° con $c \colon cq'$; giacchè avendo per ipotesi che nei 4 termini così disposti $a \colon aq,\ c \colon cq'$ si ha $a.cq' = aq.c$, ne segue che dividendo ambi i membri per ac risulti $q' = q$ donde l'uguaglianza delle ragioni, e la proporzione.

51 Su questi due teoremi (§. 49 e 50) e sulla proprietà che hanno le proporzioni di potere essere riguardate come eguaglianze di frazioni, e di poter essere alternate anche nel caso di eterogeneità di termini, l'edificio intero riposa della teoria universale delle proporzioni; giacchè tutte le diverse maniere, e sono moltissime, con le quali da una o da più proporzioni possono ottenersi delle nuove, non ne sono che dei facilissimi corollari: e per darvene due esempi, scelgo le seguenti proposizioni IVª e XIIª del libro V di Euclide siccome molto interessanti.

52 Ecco la IVª « *Se di 4 grandezze la prima alla seconda ha la medesima ragione che la terza alla quarta, ancora le equimoltiplici della prima e della terza paragonate con le equimoltiplici della seconda e della quarta, secondo qualsivoglia moltiplicazione avranno fra loro la medesima ragione.* »

Ed in fatti, se abbiamo la proporzione

$$a : c = r : s,$$

abbiamo pure, alternando

$$a : r = c : s \text{ ovvero } r/a = s/c$$

quindi per la teoria delle frazioni

$$rm/am = sn/cn \text{ ossia } am : rm = cn : sn$$

e di nuovo alternando

$$am : cn = rm : sn$$

cioè gli equimoltiplici am e cn della prima e terza grandezza stanno tra loro, come gli equimoltiplici rm ed sn della seconda e quarta, lo che equivale a dire « gli antecedenti d'una proporzione moltiplicati entrambi per qualsiasi numero stanno fra loro come i rispettivi conseguenti entrambi per qualsiasi numero moltiplicati pur essi ».

Ecco la XII^a. *Se quante grandezze si vogliano sieno proporzionali, come una delle antecedenti ad una delle conseguenti, così sarà la somma delle antecedenti alla somma delle conseguenti.*

Questa proposizione diviene subito evidente, quando il conseguente di ciascuna ragione venga espresso per mezzo del suo antecedente. Chiaro allora risulta, che in una serie di ragioni eguali $a : aq$, $c : cq$, $m : mq$, il primo (e così qualunque altro antecedente) sta al suo conseguente, come la somma degli antecedenti alla somma dei rispettivi conseguenti, si ha cioè

$$\text{(A) } a : aq = (a+c+m) : (aq+cq+mq)$$

Ed in vero a convincerci che (A) sia realmente una proporzione, basta sostituire al 4° termine $(aq+cq+mq)$ l'equivalente $(a+c+m)q$; giacchè allora la (A) diventa la seguente

$$\text{(B) } a : aq = (a+c+m) : (a+c+m)q$$

E che (B) sia una proporzione ci si fa manifesto in due modi: o se si osservi, che il conseguente della 2^a ragione è il suo antecedente moltiplicato pel quoto della 1^a il che val quanto il dire, che il quoto della 2^a è uguale al quoto della 1ª; ovvero se si rimarchi, che il prodotto dei medi $aq(a+c+m)$ è eguale a quello degli estremi $a(a+c+m)q$.

Giova però che il ragionamento algebricamente espresso sovente sia nelle lezioni orali sviluppato agli Allievi anche con maggiore dettaglio, e quindi corredato di esempi, affinchè si abitui la mente ad annettere sempre ai segni le idee. Così la verità di questa proposizione sarà molto più agevolmente compresa, e rimarrà nella memoria più impressa, aggiungendovi questa dilucidazione. Se le singole grandezze a, c, m, separatamenie considerate sono contenute un egual numero q di volte nelle loro rispettive, cioè se a è contenuta q volte in un numero, che perciò possiamo esprimere per aq: se c è contenuta anch' essa q volte in altro numero, che perciò possiamo chiamare cq; e così se m è contenuto anch' essa q volte in un numero che perciò possiamo chiamare mq, è chiaro che lo stesso numero q di volte che sta a in aq, c in cq, m in mq, staranno pure le quantità stesse a, c, m nelle loro rispettive aq, cq, mq quando le consideriamo riunite, debbe cioè anche $(a+c+m)$ essere contenuto q volte in $(aq+cq+mq)$. Così se 2 è contenuto tre volte in 6, come 5 in 15, e 7 in 21, avremo pure $2+5+7$ contenuto tre volte in $(6+15+21)$. Così se 1 è contenuto due volte in 2, come 3 in 6, come 5 in 10, e 7 in 14, avremo pure $(1+3+5+7)$ contenuto 2 volte in $(2+6+10+14)$.

Obbligando in tal guisa la mente ad annettere ai segni le idee, mercè le dilucidazioni aggiunte allo stretto linguaggio algebrico, e col fermare per mezzo dei numeri particolari, il pensiero, sicchè alle nozioni generali più agevolmente si ascenda; e queste restino meglio impresse, avviene che le formole si spoglino di quella aridità di cui vengono redarguite, sempre conservando quell' utilità immensa, che esse ci danno nelle applicazioni ai casi particolari.

Il modo di dimostrare tenuto nei due esposti esempi basta per farci conoscere, come dalla formola generale delle proporzioni, e dalla cognizione dell' intima loro costituzione si possano dedurre moltissime altre proprietà. Ed a rimanere poi convinti di quanto questo metodo meriti sopra ogni altro la preferenza, basta farne spassionatamente confronto con altri che non partono dalla cognizione dell' intrinseco valore delle ragioni, che non partono cioè dalla cognizione di quell' *egual quante volte*, che l' una e l' altra ragione delle proporzioni ci offrono.

53 Non avendo particolari rilievi a fare intorno alle applicazioni e quindi alle così dette regole auree dirette, e inverse, mi permetto questa sola osservazione, ed è, che la regola pratica di *dividere il prodotto dei medi pel primo estremo noto*, affine di ottenere il conseguente ignoto della 2^a ragione, che comunemente si fa discendere dalla eguaglianza dei prodotti sì dei medi, che degli estremi, direttamente deriva da una proprietà più immediata da cui la stessa eguaglianza discende dei citati prodotti.

Tenendo dietro infatti all' origine delle proporzioni, troviamo nascere esse dalla uniformità degli incrementi e decrementi, cui sono soggette alcune quantità che hanno una reciproca dipendenza, e da questa necessariamente derivare, che il conseguente della 2^a ragione non è che lo stesso suo antecedente moltiplicato pel quoto della $1.^a$ E dir ciò è dire che la produzione la più diretta di questo 2^o conseguente ossia 4^o termine della proporzione, allorchè è ignoto, consiste nell' eseguire la detta moltiplicazione. Possono però darsi due casi.

I. Può darsi che il quoto della prima ragione si rilevi a colpo d' occhio, o si ottenga per mezzo di una facilissima divisione, o sia per qualche titolo conosciuto, ed allora si ha tosto il 4^o termine per mezzo della indicata moltiplicazione. Così per es., se si ha

$$24 : 144 = 30 : x$$

e si conosca che il quoto di 144 diviso per 24 è 6, noi tosto rileviamo il valore del quarto termine incognito x, moltiplicando per 6, che è il quoto della 1^a ragione, l' antecedente della 2^a ragione che è 30, ed otteniamo subito

$$(D)\ x = 30 \times 6 = 180.$$

II. Può darsi che il quoto della 1ª ragione non sia immediatamente conosciuto: supponiamo p. es. che il quoto di 144 diviso per 24 immediatamente non ci apparisca essere 6. In tal caso nella espressione superiore (D) conviene sostituire al 6 che supponiamo di non conoscere una espressione equivalente, cioè 144 diviso per 24 (giacchè ogni quoto non è che il dividendo diviso pel divisore); e così in vece della (D) si ha

$$x = 30 \times \frac{144}{24}, \text{ ossia } x = \frac{30 \times 144}{24}$$

e dall' ultima espressione rilevasi, che in questo II° caso il 4° termine incognito di una proporzione si ottiene col dividere il prodotto dei medi per l' estremo noto. E siccome è ben chiaro, che con questo processo stesso può pure ottenersi il 4° termine anche nel caso I° perché altro non si è fatto che sostituire al quoto il suo equivalente, ecco perchè l' esposta regola si è dagli Algebristi indistintamente data per tutte le proporzioni; e comunemente la si fa derivare dalla proprietà che il prodotto dei medii è uguale a quello degli estremi.

Sono però a notarsi in questo metodo due inconvenienti. L' uno si è che invertiamo l' ordine con cui si succedono i nostri giudizi; giacchè l' eguaglianza del prodotto dei medii a quello degli estremi è proprietà che deriva (e non viceversa) dalla condizione (essenzialissima all' esistenza delle proporzioni) in cui trovasi il conseguente della 2ª ragione, di dover essere il suo antecedente moltiplicato pel quoto della 1ª. Il secondo inconveniente si è, che non essendo da questa regola suggerito che un unico mezzo per ottenere il 4° termine, essa ci porta a supporre che non possa altrimenti ottenersi che col far la moltiplicazione dei medii, e dividere poscia il prodotto per l' estremo noto: e certamente il far ciò nel caso in cui si conosce il quoto della 1ª ragione è un cadere nel ridicolo. Non mostreremmo al certo gran senno, se essendoci proposta la proporzione $24 : 144 = 30 : x$, e conoscendo che 6 è il quoto della 1ª ragione, piuttosto che ottenere la x col moltiplicare 30 per 6, ci determinassimo a moltiplicare prima 144 per 30; e poscia a dividere il prodotto per 24. Con più esattezza perciò certamente la regola pratica di che si tratta sarebbe espressa così « *Si ottiene il 4° termine incognito col moltiplicare il 3° termine pel quoto della 1ª ragione, lo che importa, quando questo quoto non è conosciuto, che si faccia il prodotto de medii, e si divida per l' estremo noto*.

E intorno alle proporzioni io non ho altri rilievi da esporre.

Negli incommensurabili non si danno ragioni.

34 Ma, propriamente niun altro rilievo ti si offre al pensiero, così parmi che taluno mi obbietti, propriamente niun altro? E intorno alle proporzioni le più astruse e difficili a concepirsi, quali sono quelle che versano sugli incommensurabili, tu ti appigli al prudenzialissimo partito del silenzio? Si: con tutta franchezza io rispondo; e il vero perchè non è quello che tu immagini: anzi non può essere più convincente. Tu dai ad esse l'epiteto di astruse e difficili: io quello loro applico di inesistenti.

Ma come, mi si replica, come inesistenti, se sono in bocca dei Matematici tutti? — Si te lo concedo; ed appunto uno egli è questo di que' gravi errori, il cui insieme deturpa ancora l' elementare insegnamento delle Matematiche contro il quale tanto si è declamato e si declama tutt' ora. Fra gli autori da me esaminati, è ben vero, niuno ne trovo che non ammetta proporzioni negli incommensurabili, ed una delle cause fu questa per le quali trent' anni indietro le ammetteva pur io: ma è ben vero pur anche che niuno ne trovo il quale in qualche espressione delle sue opere non manifesti che la verità del contrario gli era balenata nella mente, grande estrinseco argomento in favore del mio assunto. Laonde di ognuno di essi è d' uopo conchiudere che o un inveterato pregiudizio gli ha ottenebrata la mente, sicchè gli è sfuggito il concetto del vero (l' incompatibilità delle ragioni con l' incommensurabilità) mentre stava per afferrarlo, o dopo averlo afferrato, veggendo che il non farne conto non reca alterazione veruna nei finali risultati dei calcoli, non gli è piaciuto introdurre novità, e spingere il carro fuori delle vecchie rotaje, ove ad appianare il suolo sparso di asprezze perchè non ancora da altri calcato, non v' ha dubbio che vi è d' uopo di maggiore fatica.

Confortato io intanto da quel mio Angelo tutelare che a lato d' EUCLIDE ho vergato in fronte di questo mio libercolo, dopo di avere più e più volte in vari miei scritti esposto *essere un errore l' ammettere gli incommensurabili proporzionali*, lo che non disdico, ma solennemente confermo, sarà ormai tempo che senza riguardi in tutti i suoi aspetti io di questo errore disveli la enormità.

55 Di grandezze incommensurabili, prive cioè di comune unità di misura, ossia tali che niuna di esse, nè alcuna sua più piccola determinata parte presa per unità, è contenuta esattamente nell' altra, molte ne offre la Geometria. Tale è, per servirmi dell' esempio stesso che è preso in considerazione dalla maggior parte degli autori che ne trattano, tale è la diagonale del quadrato rispetto al suo lato; ed appunto dalle osservazioni relative alla diagonale ed al lato del quadrato io prendo le mosse.

Scende dal teorema di Pittagora che esattamente dupla dell' aja d' un quadrato è l' aja del quadrato costruito sulla sua diagonale. E da questo teorema (preso il lato del quadrato per unità, e chiamata D la diagonale) comunemente si crede che derivino $D^2 = 2$; e $D = \sqrt{2}$. Ebbene io voglio convincervi che queste due pretese uguaglianze sono due assurdi.

Il lato base sulla quale si vuole erigere un quadrato sia un metro. Se tu lo dividi in 10 decimetri, e sopra ognuno di questi tu alzi un quadratello, il loro insieme forma un rettangoletto avente per base un metro e per altezza la novella unità misuratrice della base, cioè un decimetro. Ora coll' accostare tanti di questi rettangoletti l' uno all' altro, sicchè si combacino per le basi, quante sono le unità misuratrici della base, tu formi così il metro quadrato con 10 rettangoletti, ciascuno dei quali è costituito dall' insieme di 10 decimetri quadrati, lo formi perciò con 100 decimetri quadrati. Vogliasi ora erigere un quadrato sulla diagonale del già eretto. Il teorema di Pittagora ti assicura che il quadrato della diagonale ha un aja doppia, è cioè 200 decimetri quadrati, ma non ti dimostra già che tu possa dividere la diagonale in decimetri, e poi costruirvi il quadrato nel modo stesso con cui l' hai costruito sul metro, accostando al primo rettangoletto eretto sulla base altro eguale, ed altro eguale a questo pure, e così di seguito, sicchè il numero totale di decimetri quadrati 200 risulti dal numero dei decimetri quadrati costituenti il primo rettangoletto ripetuto tante volte per quanti essi fossero. Questa costruzione è dimostrata impossibile dalla teorìa dell' estrazione delle radici per approssimazione. Intanto cominciando ad estrarre coi noti metodi la radice quadrata dal 2 metri q. valore del quadrato della diagonale espresso per mezzo della frazione apparente $^{200}/_{100}$ di metro quadrato, ossia 200 decimetri quadrati, noi troviamo che 14 è il numero di essi che ripetuto 14 volte dà 196 pel massimo quadrato contenuto nei 200 decimetri quadrati, aja del quadrato costruito sulla diagonale. Perciò se disponiamo 14 di questi decimetri q. in modo da formare un rettangoletto, e questo ripettiamo 14 volte, formiamo un quadrato costituito da 196 decimetri q., il quale ha 4 decimetri quadrati di meno del quadrato eretto sulla diagonale. Formeremmo però un quadrato di esso maggiore, se ripetessimo 15 volte un rettangoletto costituito da 15 decimetri q., giacchè ne conterrebbe 225. Da tutto ciò si deduce, che la diagonale essendo maggiore della base del 1°, e minor della base del 2°, è più lunga di 14 e più breve di 15 decimetri.

Può dunque dirsi che la diagonale risulti di due parti, l'una misurata dal decimetro, la quale è 14, l'altra è un avanzo che del decimetro è minore, e perciò non misurabile dal decimetro. Quindi al quadrato della parte misurata della diagonale, che è 196 decimetri q. conviene aggiungere il doppio rettangolo avente per lati attigui la parte misurata e l'avanzo, più il quadrato dell'avanzo (giusta la proposizione IV^a del libro 2° d' Euclide) affine di ottenere il quadrato eretto sulla diagonale che è decimetri quadrati 200.

Ripetendo lo stesso ragionamento, dopo di avere espresso il quadrato della diagonale (che è metri q. 2) non più per 200 centesimi, ma per 20000 decimillesimi, ossia per 20000 centimetri q., troviamo che la diagonale è più lunga di 141, e più breve di 142 centimetri, e che il quadrato costruito sulla parte misurata della diagonale la quale è centimetri 141, è centimetri quadrati 19881 tanto più prossimo al 20000 centimetri q., quadrato della diagonale, di quello che lo è il quadrato costituito da 196 decimetri quadrati; giacchè vi si approssima di più per 281 centim. q. E sempre più ancora approssimare ci possiamo, con la certezza però che il quadrato della massima parte della diagonale (la quale è misurata ed espressa dalla radice di 2, che andiamo ottenendo per approssimazione) differisce sempre dal quadrato della diagonale per quanto è la somma del doppio rettangolo avente per lati attigui la parte misurata della diagonale e l'avanzo, più il quadrato dell'avanzo.

56 Dopo queste considerazioni torniamo col pensiero sulle formole I^a $D \times D = 2$, II^a $D = \sqrt{2}$. Se non è sofisticheria annettere ai segni le idee, meco converrete che ognuno dei tre D in queste due formole adoperato ha un significato diverso: tanto è lungi dal ben comprenderle chi non se ne fosse accorto, o sostenere volesse che ve ne ha un solo. Infatti la equazione $D^2 = 2$, ossia $D \times D = 2$ significa che il moltiplicando D ripetuto D *volte* è 2 metri quadrati. Ora il moltiplicando debbe essere omogeneo al prodotto (§. 22) ed il prodotto è superficie: dunque superficie an-

che il moltiplicando D. Notate dunque bene che il $\hat{D}$ moltiplicando non è più, come saremmo indotti a credere, la diagonale, ma in conformità di quanto abbiamo già osservato, essere dovrebbe un rettangoletto avente per base la diagonale, e per altezza o il decimetro, o il centimetro o quella più piccola unità con cui fosse stata misurata.

Il 2° fattore D poi, cioè il moltiplicatore, neppure esso può esprimere la diagonale, perchè è un numero indicante ripetizione; e indicarci perciò dovrebbe *quante volte* il rettangoletto costruito sulla base avesse a ripetersi per formare il quadrato della diagonale. Finalmente il D della 2ª equazione $D = \sqrt{2}$ esprime la linea diagonale. Abbiamo dunque I. *D rettangolo*: II. *D numero di volte*: III. *D retta diagonale*.

Il numero D dei decimetri q. o centimetri q., o di altri quadrati sempre più piccoli costituenti il rettangoletto eretto sulla base, avente perciò per altezza l' altezza del quadratello misuratore, ossia il D rettangoletto che è il moltiplicando, debbe essere ripetuto *D volte*, tante volte cioè quanti sono i quadratelli che lo costituiscono, ovvero, ciò che è lo stesso, quante sono le basi di questi quadratelli, basi costituenti le unità lineari che misurano la diagonale, affinchè la somma di queste altezze ripetute sia l' altezza del quadrato eretto sulla diagonale. D' uopo è dunque che il numero D dei quadratelli costituenti il rettangoletto (che è il moltiplicando) ripetuto *D volte* produca un numero di unità frazionarie equivalenti a 2, d' uopo è che si verifichi la seguente equazione espressa sì in simboli che in parole:

D	$\times$	D	$=$	2
Il numero dei quadratelli che formano il rettangoletto eretto sulla base.	*ripetuto*	*un numero di volte eguale al numero dei quadratelli del rettangoletto*	*è un prodotto eguale*	*a due metri quadrati*

Ma che vi sieno due fattori uguali producenti il 2 è dimostrato impossibile: dunque non esiste nè il *D rettangoletto* che esser dovrebbe il moltiplicando, nè il *D volte* che esser dovrebbe il moltiplicatore: dunque $D^2 = 2$ ossia $D \times D = 2$ è un patente assurdo perchè non esiste nè moltiplicando, nè moltiplicatore.

E nemmeno può dirsi che il *D* rettangoletto eretto sulla diagonale, non potendo avere una esistenza numerica, abbia una esistenza geometrica o almeno ispezionabile per figura; giacchè se ispezionabile a colpo d' occhio è la base, la quale è la stessa diagonale, ispezionabile non ne è l' altezza, non già perchè ignota, ma perchè è anzi cosa notissima che quest' altezza non v' è. L' altezza del rettangoletto infatti esser dovrebbe eguale all' unità misuratrice della base, e questa non v' è, perchè se vi fosse, la diagonale sarebbe espressa da un numero *n* di queste unità: da un numero *n* di quadratelli il rettangoletto; e da un numero *n* di rettangoletti il quadrato della diagonale che è 2; e si avrebbe $n \times n = 2$, il che la teoria dei numeri dimostra impossibile.

57 Assurdo è parimenti $D = \sqrt{2}$. allorchè diamo alla *D* il significato di diagonale. E prima d' ogni altro osserviamo che a rigore $\sqrt{2}$ esprime il numero dei quadratelli costituenti il rettangoletto, numero, che moltiplicato per sè stesso dovrebbe dar 2; e perciò non esprime la diagonale che è una linea. Rimarchiamo però che se si desse questo numero di quadratelli, questo numero sarebbe il medesimo del numero delle loro basi che costituiscono la diagonale, e perciò esprimerebbe anche la diagonale. Ma $D = \sqrt{2}$ quando per *D* s' intenda il rettangoletto costruito sulla diagonale è impossibile. Infatti il segno $\sqrt{}$ significa quantità che moltiplicata per sè stessa debbe dare per prodotto il numero che gli è a destra, e che nel nostro caso è 2. Ma il moltiplicando non può non essere omogeneo al prodotto. Dunque la radice debbe necessariamente essere numero, e nel nostro caso numero di unità superficiali, nè alcun altro *quid* che numero non sia. Il segno che viene dopo il segno $\sqrt{}$ è il 2; e poichè non v' è numero alcuno che

moltiplicato per sè stesso dia 2, ne segue che $\sqrt{2}$ significa *numero che non è numero*, cioè un assurdo per contraddizione di termini.

Dunque $\sqrt{2}$, e dicasi lo stesso di ogni altra irrazionale, è un simbolo dell' impossibile, e non già l' espressione d' un *quid* reale. Che se vorrete insegnarmi con Wronski che gli *irrazionali sono parto felice dell' influenza regolativa della ragione*, io vi dirò che queste espressioni sono belle *nugae canorae*, piacevolissime agli adoratori della Metafisica Allemanna, cui però niuna idea positiva risponde. Non può mai avere esistenza reale una cosa che ha il requisito di non poter essere. È per necessità di linguaggio che diamo il nome di cosa al *non ente*.

Il D diagonale poi è una linea realmente esistente, la quale in tutti i casi in cui esattamente contenga l' unità misuratrice, è ben chiaro, che tante ne contiene quanto è il numero dei quadratelli costituenti il rettangoletto erettovi, poichè ciascuna unità lineare spettante alla diagonale è base a ciascuno di essi; e perciò può sempre dedursi dal loro numero. Ma quando il rettangoletto, e quindi il numero de' quadratelli che dovrebbero formarlo non esiste, è ben chiaro che la diagonale non può essere espressa dal numero delle basi di questi quadratelli, che non esistono.

Dunque, posto il lato del quadrato per unità, il rettangoletto costruito sulla diagonale, e quindi la diagonale stessa sarebbe espressa da $\sqrt{2}$, se $\sqrt{2}$ esistesse. Ma $\sqrt{2}$ non esiste: dunque la diagonale D non può essere espressa da $\sqrt{2}$. Dunque l' eguaglianza $D = \sqrt{2}$ è un' eguaglianza che ha una esssenziale dipendenza da una condizione che la teoria dei numeri mostra impossibile. Dunque è un eguaglianza apparente. Dunque il crederla reale è un assurdo.

Quindi è in grazia di dimostrate equivalenze che il quadrato eretto sopra D è 2: ma $D^2 = 2$ è un assurdo perchè lo stesso quadrato 2 non è fattibile come abbiamo osservato da $D \times D$. E da ciò risulta che trattandosi di superficie, ogni 2^a potenza, ossia ogni assieme di quadratelli formanti un rettangoletto ripetuto le tante volte, quanti essi sono, forma un quadrato, ma non ogni quadrato è potenza 2ª.

Giudichi chi sa giudicare, se le esposte riflessioni sieno sofisticherie o la tanto giustamente raccomandata ginnastica dell' intelletto.

58 Dopo di avere dimostrato che gli irrazionali sono simboli dell' impossibile, riflettendo che il numero non è che un complesso di unità, una unità cioè le tante volte ripetuta, ossia una quantità misurata, è ben chiaro, che il dare ai segni irrazionali $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ ec. il titolo di ***numeri irrazionali***, è dire che gli impossibili sono numeri, è dire che le quantità incommensurabili sono indicate da questi numeri irrazionali, è dire che sono espresse dai numeri le quantità inesprimibili in numeri, egli è insomma un ammettere una solenne contraddizione.

E se è evidente, che i numeri incommensurabili sono una solenne contraddizione e trovansi d' altronde in tutti i trattati di Geometrìa, due cose ora io mi propongo di investigare: I le cause, che hanno indotto ad ammetterli, e II i fatti, i quali addimostrano, che i sommi Matematici che per non opporsi alla consuetudine non gli hanno eliminati, si sono però ben accorti, che l' averli ammessi è un errore.

59 I Una delle cause che ha indotto i Matematici a sostenere l' assurdo sono quelle apparenti uguaglianze sopranotate p. es. $D = \sqrt{2}$. In grazia di esse suole dirsi « *Tutto ciò che è uguale ad una cosa esistente esiste: ma $\sqrt{2}$ è eguale ad una cosa esistente qual' è la diagonale del quadrato: dunque $\sqrt{2}$ esiste*. Ed io rispondo: falsa è la minore, come ho dimostrato: dunque nego la conseguenza. E soggiungo » *Posto il lato del quadrato per unità, la sua diagonale sarebbe espressa da $\sqrt{2}$, se $\sqrt{2}$ esistesse: ma $\sqrt{2}$ non esiste: dunque la diagonale non può essere espressa da $\sqrt{2}$*, legittima conseguenza ben diversa dall' altra erronea « *dunque la diagonale non esiste* »

conseguenza che alcuni critici si avvisano, che debba legittimamente scendere dalle mie premesse, mentre scende in vece dal majuscolo errore del sostituire che essi fanno il *non poter essere* al *non poter essere espresso*, intrudendo così un quarto termine nel sillogismo. Questi critici eminentemente logici si sono dimenticati di quel trito esempio *Bibere et ribibere ec.* Si abbiano perciò essi quella stima che meritano.

60 Intanto l'abitudine di annettere a tutti i segni qualche cosa di reale ha fatto sì che anche ai simboli dell'impossibile siasi associata l'idea di qualche realtà; e vieppiù la falsa supposizione viene coltivata di questo vero « che le quantità incommensurabili, quantità realmente esistenti sarebbero espresse da que' simboli, se le condizioni per esse indicate non fossero dalla teoria dei numeri dimostrate impossibili. Questa apparenza di realtà è favorita dalla condizione che distingue gli *irrazionali incommensurabili* impropriamente detti *reali* dagli *irrazionali immaginari* e consiste nell'essere dai simboli degli incommensurabili sempre simboli dell'impossibile, e non già dagli altri suggerita la strada per ottenere dei commensurabili, che producono numeri prossimissimi a quelli che dagli irrazionali (se esistessero) sarebbero prodotti.

Egli è per queste incidenze che la reale esistenza degli incommensurabili viene associata a que' segni, i quali, rintracciandone bene l'origine, non ad altro si veggono destinati che a significarci essere impossibile, che certe quantità sieno esprimibili in numeri.

61 Bene spesso però que' Matematici stessi, che non hanno saputo ancora eliminare dalla scienza questa solenne contraddizione dei numeri incommensurabili, in varie loro espressioni danno a divedere, che della loro inesistenza si sono accorti: ma come baleno che guizza tra nubi questa verità senza lasciar di sè traccia nell' intelletto si è dileguata.

Ho sotto gli occhi alcuni squarci delle opere di tre celebri Matematici, Francoeur, Montferrier, Bertrand, che attestano quanto ho sopra asserito; e per non essere di soverchio prolisso, questi tre soli mi contenterò presentarvi.

62 Francoeur parlando della $\sqrt{7}$ (*ll*) nomina *frazioni i di cui numeratori non differiscono che di 1, e che comprendono* $\sqrt{7}$ *tra loro, o* PIUTTOSTO *7 tra i loro quadrati*. A me basta quella sola parola « PIUTTOSTO » per isvelarmi lo stato dell' animo in cui trovavasi Francoeur allorchè la vergò. Non è quel « *piuttosto* » il più chiaro indicio d' un pentimento di aver superiormente data esistenza alla $\sqrt{7}$? Non ti appalesa che riconosce preferibile la giusta espressione « 7 esiste fra i quadrati di due frazioni » all' altra assurda « fra due frazioni esiste l' inesistente $\sqrt{}$ di 7? »

63 La non esistenza dei numeri irrazionali si è pure manifestata a Montferrier nel suo più lucido aspetto allorchè sua mercè dopo avere egli detto (*mm*) che *un numero è l' assieme di più unità*, dopo averlo confermato alla pagina 106 parlando della grandezza assoluta dei numeri, passa di questa grandezza a conchiudere « *che non v' è altro modo che misurandola coll' unità numerica che noi possiamo formarcene un idea determinata.* » E non viene con ciò a patentemente mostrarci esser egli intimamente convinto, che l'idea della grandezza dei numeri tutta consiste nella conoscenza del quante volte si contiene in essi la unità, ossia che numero altro non è che quantità misurata? Sì certamente. Ma per l'influenza di inveterati pregiudizi questo vero egli perde di vista; e poche linee più oltre si contraddice aggiungendo « *che la grandezza del numero irrazionale* $\sqrt{2}$, *la quale* « *non può essere misurata esattamente, si trova nota al-* « *meno approssimativamente, quando si sa ad un dipresso* « *che è uguale a una volta e a due quinti di volta quella*

(*ll*) *Francoeur* — Corso completo di Matematiche pure Tomo I. Firenze 1840, pag. 81.

(*mm*) *Montferrier* — Cours elementaire des Mathematiques pures Tome I. Paris 1837, pag. 4.

« *dell' unità* . » Quanti errori (diciamo netta e tonda la verità) quanti errori in queste poche linee per non volersi svincolare da un pregiudizio ! Con qual coraggio chiama egli *numero* l' irrazionale $\sqrt{2}$? Se numero (lo ha egli detto più volte), se numero è un assieme di unità, di cui non si ha idea determinata che misurandolo, con qual coraggio chiama egli numero il $\sqrt{2}$, che egli stesso ammette non essere una unità ripetuta, una quantità misurata, un numero ? E tralasciando di fargli rimprovero della inesatta espressione del « *due quinti di volta* la grandezza dell' unità » (sebbene non so qual maggior fatica gli sarebbe costata sostituirvi l' espressione esatta « *due volte il quinto dell' unità* ») aggiungo questo rilievo : quando estraendo la radice dal 2 per approssimazione, ha egli ottenuto 1,4, si esprime egli forse a tenore delle giuste nozioni che ci ha date sul numero allorchè ci dice che la grandezza del *numero irrazionale* si trova nota *almeno approssimativamente e ad un dipresso*? Per poco che avesse egli piegata la sua attenzione sull' 1,4, ossia sull' $1+{}^2/_5$, come egli si esprime, si sarebbe avveduto che l'*approssimativamente* e il *d' appresso* si trovano fuori del loro nicchio. Non è l' $1+{}^2/_5$ ossia il 14 decimi che si trova *approssimativamente* e d' *appresso* a $\sqrt{2}$. Il 14 decimi (ognun d' essi essendo in superficie (§.55) ${}^1/_{10}$ di ${}^1/_{10}$ del quadrato di 1) è la radice esatta di 196 centesimi, ed è questo 196 centesimi ciò che trovasi *approssimativamente* e d' *appresso* al quadrato 200 centesimi ossia al quadrato 2. La radice 1,4 non può esser prossima a $\sqrt{2}$; giacchè $\sqrt{2}$, attesa la proprietà che ha di NON ESSERE, non può ESSERE nè prossima nè remota ad alcuna quantità . Nè queste sono sofisticherie : sono verità palpabili ed evidentissime a chiunque non abbia la mente preoccupata da spirito di contraddizione.

64 E Bertrand celebre membro dell' Istituto di Francia non ci dà nelle sue opere anch' egli prove di fatto di essersi bene accorto che le radici dei numeri non quadrati sono inesistenti ? Egli ce lo manifesta allorquando a-

vendoci significato « *che il risultato della misura d' una* « *grandezza si rappresenta mediante un numero* » e riflettendo che presso i Matematici tutti per radice quadrata d' un numero s' intende quella quantità, che moltiplicata per sè stessa il produce, da ciò trasse anch' egli quella conseguenza medesima che molti anni indietro aveva tratto pur io, non potersi cioè alle radici dei numeri non quadrati applicare la definizione data alle radici in generale dai Matematici tutti, il che val quanto il dire, che giusta il significato che si dà alle radici, le radici dei numeri non quadrati non esistono. Questa idea è venuta dunque in capo anche a Bertrand; e da questa idea giustissima abbiamo preso entrambi le mosse; ma pur troppo per una direzione ben diversa. Non potendo una definizione di cose esistenti certamente addattarsi agli irrazionali che non esistono, o era d' uopo dichiarare che gli irrazionali, siccome inesistenti, non possono essere riguardati quali cose reali suscettibili d' una definizione positiva, quale è quella data alle radici, e quindi dalla definizione escluderli; e questo è il partito che io presi, i dettami seguendo del senso comune: o d' uopo era stabilire per essi una definizione diversa; ed a questa determinazione appigliossi Bertrand. Egli amò piuttosto di contraddirsi ammettendo i numeri irrazionali in opposizione alla definizione da lui data del numero, e creò appositamente per questi *nulla vestiti di segno* una novella definizone; e ci disse « *La radice quadrata di un numero* N « *che non è un quadrato perfetto si definisce dicendo, che* « *è un numero incommensurabile maggiore dei numeri* « *i cui quadrati sono inferiori ad* N, *e minore dei numeri* « *i cui quadrati sono superiori ad* N (*nn*). » Di questa definizione vi bastino le due prime parole per riconoscere come Egli tutta la edifichi sopra un assurdo; e degli altri

---

(*nn*) Trattato di Aritmetica di *G. Bertrand*. Prima edizione italiana. Firenze 1856. pag. 85, e seg.

suoi difetti, che non hanno immediato rapporto con i nostri riflessi, sarebbe un escir dal seminato il parlare *(oo)*. Mio scopo era l' additarvi, che se anche Bertrand ha ammesso gli irrazionali essere numeri, si era però ben accorto che non lo sono, quando si avvide, che loro non potea applicarsi la definizione delle radici. E se superato egli avesse la ritrosia di opporsi ai pregiudizi comuni, ritrosia che bisogna pur vincere una volta se vogliamo che cessino le continue lamentazioni su i difetti dell' elementare insegnamento delle Matematiche, egli non avrebbe fatto ricorso per sostenere un assurdo a que' studiati arzigogoli diretti ad abusare della credulità degli Allievi, al delirio portandoli di ravvisare una qualche esistenza nel nulla.

65 Ma se Francoeur, se Montferrier, se Bertrand hanno mostrato una qualche inclinazione ad escludere dai numeri i simboli degli irrazionali, non così (ostinati oppositori mi potrebbero soggiungere) non così questa inclinazione si scorge negli scritti del celebre Wronski, il quale, tutt' altro che riconoscere in essi un assurdo, come tu con tanta audacia asserisci, loro assegna una essenziale caratteristica, e caratteristiche essenziali non possono certamente darsi in cose non esistenti. Ecco come egli ti spiega i suoi sublimi pensieri « *Il distintivo carattere dei numeri irra-* « *zionali è riposto in una generazione indefinita, deri-* « *vante dalla influenza regolativa e intellettuale della ra-* « *gione nel dominio sensibile dell' intendimento (pp)* » —. Avete bene appreso questi elevati concetti? — Ed io ingenuamente rispondo che non ho appreso un *acca*: che sarei anzi tentato a dirvi che qui Wronski *proiicit ampullas et sesqui-pedalia verba*: ma me ne astengo, perchè

(*oo*) Chi amasse conoscerli legga i Segreti dell' Arte di comunicar le idee ec. Perugia 1858. pag. 94.

(*pp*) *Wronski* — Introduzione alla Filosofia delle Matematiche pag. 164.

non amo mi si dica *qui ignorat blasphemat*. Vi dirò piuttosto che questo squarcio non è pane per i miei denti. Quì la mente convien che voli ben alto, e ai tapini miei pari spesso *volo e capitombolo è tutt' uno*. Egli è per questa ragione, che se talvolta mi prende il destro di sollevarmi un tantino, quella benedetta mia fida compagna (la Logica naturale) presomi per mano, *tu non sei aligero*, mi dice, ed al suolo mi risospinge; cosicchè abbandonando ogni quistione trascendentale, io mi limito soltanto alla umile seguente richiesta.

66 Ditemi: con tutta l' influenza regolativa e intellettuale della ragione nel dominio sensibile dell' intendimento, ditemi qual concetto acquista la mente nel confronto che fate del lato del quadrato con la sua diagonale finchè trattenete il vostro pensiero sul confronto di 1 a $\sqrt{2}$? Non havvi allora nella mente un vuoto assoluto? — Certamente. Voi non mi dite già « *questo* $\sqrt{2}$ *è un numero occulto che si scuoprirà* » Voi mi dite « *il cercato numero è impossibile* » Ed in vero niuna idea ci si offre finchè nel confronto di 1 a $\sqrt{2}$ non si sostituiscano a $\sqrt{2}$ i successivi risultati che ci dà l' estrazione di radice per approssimazione, risultati che non hanno più il carattere d' incommensurabilità, essendo quantità misurate. Idea del valore della diagonale cominciamo ad avere quando in vece di $\sqrt{2}$ poniamo 1,4; e meglio allorchè poniamo 1,41; e meglio allorchè poniamo 1,4142136, ec. Giudichiamo allora che questa lunghezza ottenuta non differisce nemmeno d' una decimilionesima parte del lato dalla intera diagonale, e che perciò senza errore sensibile possiamo ad essa sostituirla. Ma il numero sostituito ha poi la divisa, il carattere dell' incommensurabile, come ha $\sqrt{2}$? Rammentatevi che Voi ora siete obbligati a rispondermi « *No* certamente ».

67 Quale è dunque il lavorìo mentale, la serie cioè dei giudizi che facciamo per giungere ad un ultimo concetto, quando ci si offrono simboli irrazionali come $\sqrt{2}$? Cerchiamo espressioni meno sublimi, ma le più chiare pos-

sibili. Il primo giudizio che facciamo è « $\sqrt{2}$ *non esiste* » perchè non esiste numero che per sè moltiplicato dia 2. Ottenuto per estrazione di radice il numero 1,4142136, giudichiamo essere questa l' espressione d' una parte misurata della diagonale, che non giunge a differirvi nemmeno di un decimilionesimo. Un terzo giudizio ci porta a conoscere, che questa parte misurata può senza errore sensibile sostituirsi alla diagonale incommensurabile.

E tranquilla riposa la mente intorno a questa sostituzione sul riflesso, che la tenuissima differenza ottenuta, per quanto sia stata in forza della immaginazione spinta l' unità di misura al più prodigioso impicciolimento, la parte residua è sempre *troppa*, e sempre indefinitamente potrebbe rendersi più tenue. E null'altra cosa più che questo riflesso è l'origine e il fondamento della *teorìa dei limiti*, e della *teorica degli infinitamente piccoli*. Ecco i tre giudizii facilissimi che si succedono nella mente. Se poi volete, non so se abbellirli o deturparli con veli, nastri, strascico, col vestiario in somma dell' impostura, ricorrete pure al fraseggio di Wronski. Basta che non vi sfuggano di mente questi tre importantissimi veri. I. Del valore della diagonale relativamente al lato non abbiamo idea veruna, finchè l' abbiamo espressa per $\sqrt{2}$. Dicasi il simile di qualsivoglia altra quantità incommensurabile. II. I numeri che andiamo successivamente ottenendo non esprimono $\sqrt{2}$ cioè l' incommensurabile, ma una parte misurata di esso, parte che nei calcoli in particolare si sostituisce all' incommensurabile, perchè non vi differisce, che per un residuo tenuissimo che render possiamo a nostro piacere sempre più piccolo. III. Questa parte misurata della diagonale che prendiamo in sua vece non è già prossima a $\sqrt{2}$ che non esiste, ma è radice esatta del quadrato prossimo a 2. La differenza fra l' espressione assurda *radice prossima* di 2 e l' espressione accurata *radice del quadrato prossimo* a 2 è d' un importanza capitale, sebbene da alcuni critici (e a dir vero molto profondi) non venga apprezzata.

68 Se i simboli delle quantità incommensurabili non ci danno alcuna idea positiva di esse, ed altro non fanno che attestarci non essere esprimibili in numeri, non essere cioè l' una di due quantità, nè alcuna sua più piccola determinata parte contenuta nell' altra, ne segue, che dire incommensurabili è propriamente dire quantità non suscettibili di ragione, e quindi non suscettibili di proporzione. E siccome le proporzioni appunto si vollero da Euclide e quindi dai Matematici tutti negli incommensurabili riconoscere, vediamo, come o *per fas* o *per nefas* è piaciuto ai Geometri dare a queste proporzioni esistenza.

69 Euclide ben si accorse, che era impossibile ammettere ragioni tra gli incommensnrabili, se dalle ragioni non si elimina l' idea del *quante volte*, la quale è ben chiaro che non solo non trovasi negli incommensurabili, ma dalla voce stessa *incommensurabili* è espressamente esclusa. E non potendosi dal concetto delle ragioni eliminare l' idea essenziale del contenersi una cosa nell' altra, idea espressa dal *quante volte*, questa parola egli soppresse perchè non apparisse quella incompatibilità che è innegabile fra ragione e incommensurabilità; e per definizione della ragione ne uscì questo . . . (anatematizzatemi pure quanto volete, che io non respingo la parola in gola) ne uscì quest' ABORTO per tre titoli difettosissimo « *Ragione è una scambievole « relazione fra due grandezze omogenee in ordine alla « loro quantità* (qq) ». Difetto 1° è l' estendersi essa anche alle ragioni per differenza, che vi deggiono essere escluse. Difetto 2° è l' esclusione delle quantità eterogenee, le quali giova ammettere che si dieno dando al quoto quel significato che gli spetta (§. 39 e 33). Difetto 3° è questa piccola bagattella: tutta intera la definizione è un accozzamento di parole, che non ci determinano nulla; giacchè il sapere

---

(qq) Gli Elementi d' *Euclide* — Betti e Brioschi. Firenze 1868.

che tra due cose v' è una scambievole relazione ; e il non sapere in che questa consiste, egli è un sapere nulla, e a nulla pure valgono i sussidi che ti danno gli interpreti col solo cambiamento della parola « relazione » in quello di *convenientia*, *habitudo, attitudine, rispetto, riguardo, rapporto, particolar modo di essere d' una grandezza verso un altra*, e simili.

Euclide dunque per comprendere nella definizione delle ragioni anche gli incommensurabili, si è trovato costretto a darne una vaghissima e inconcludente, che lascia gli Allievi col desiderio di sapere cosa significhi, sicchè l' adagio si verifica che « *nulla stringe chi troppo abbraccia*. »

70 Ma del vuoto, della sua definizione, della necessità di far conoscere che una proporzione consiste nella eguaglianza dei quoti di due ragioni ne è sì convinto, che allorquando passa egli a trattare delle proporzioni nei numeri (e solo nei numeri abbiam già veduto poter esse aver luogo) le fa nella detta eguaglianza dei quoti consistere. Nella definizione 20^{ma} del libro VII infatti, così dice « I numeri « allora sono proporzionali quando il primo sarà egualmente « molteplice del secondo, e il terzo del quarto, ec. » (Euclide del Commandino pag. 97). E frattanto (notiamolo a conforto di quelli che non si piegano tanto volentieri a riconoscere in Euclide un perfetto modello di ordine e di chiarezza) in tutto il libro V e VI in cui è trattata per intero la teorìa delle proporzioni relativa alle quantità estese, l' idea della ragione viene agli Allievi nascosta.

71 Questo suo modo di comunicare le idee non piacque nemmeno ai suoi più ligii seguaci. La necessità di far conoscere che le ragioni consistono in un concetto di contenenza di una in altra grandezza da essi pure fu ben sentita. D' altronde però che vi fossero ragioni tra gli incommensurabili, lo avea detto Euclide, *Ipse dixit*, e quindi sacrilego attentato sarebbe stato l' opporvisi. In tale stato di cose altra via conciliativa ad essi non rimaneva che l' erroneamente introdurre il rapporto di contenenza anche negli incommensurabili, e poichè troppo evidente sarebbe

stata l' incompatibilità del *quante volte* con essi, naturalmente furono indotti ad ammettere diverse maniere sotto le quali una quantità potesse essere contenuta in un' altra : e quindi che di questi modi di contenenza uno fosse il *quante volte*, fosse cioè quel modo appunto di contenersi che è proprio dei numeri ; ed un altro occulto e non esprimibile in numeri quello fosse, che negli incommensurabili si riscontra. Che sia stato questo il modo di argomentare dei Commentatori e sostenitori di Euclide e d' altri molti, gli squarci che io tolgo dai più valenti ve lo addimostrano.

72 Tacquet per es. ti dice, che si danno ragioni tra gli incommensurabili. e le contraddistingue col nome di irrazionali; e mentre ti previene, però con qualche imbarazzo, che la ragione consiste nell' essere una quantità contenuta egualmente o più nell' altra *certo quodam modo*, ti pone fuori d' ogni speranza di progredire oltre nell' intima conoscenza di queste ragioni perchè ti soggiunge « *neque tamen ulterius quaeri et explicari debet certus ille modus quo* A *continet* B, *quia per nullos numeros explicabilis est* (*rr*) ». Ammette pure tra gl' incommensurabili le proporzioni e dopo nulla averti detto in che desse consistono, ti soggiunge questa spiegazione egualmente anch' essa come quella delle ragioni, chiara e succosa « *etiam identitas modi quo* A *continet* B *cum modo quo* C *continet* D *ulterius inexplicabilis est* (pag. 121) ». Ozanam in simil modo diportasi allorchè ci dice che *La raison sourde, qu on appelle aussi Raison irrationelle, est celle qui ne peut pas être exprimée en nombres, c' est à dire où il est impossible exprimer par nombres combien de fois l' antecedent contient ou est contenu dans le consequent* (*ss*). Il Lecchi ci dice pur egli « *Ratio irrationalis est quae veris numeris*

(*rr*) *Tacquet* — Elementa Euclidea. Venetiis 1737. pag. 120.

(*ss*) *Ozanam* — Cours de Mathematique ec. Tome premier pag. 180.

exhiberi non potest (*tt*). E il Lamy avverte, *C' est une necessité d' entendre per ce mot un certain rapport selon le quel on considere, le* MANIERE *qu' une grandeur en contient une autre, ou qu elle en est contenue. Quand il est impossible d' exprimer par nombre celle* MANIERE, *on appelle cela une Raison sourde* (*uu*). Ragioni irrazionali ammette pure Ximenes, giacchè ci espone che *nel caso d' incommensurabilità la ragione chiamerassi irrazionale* (*vv*).

75 Da tutti questi squarci che vi ho esposto bene apparisce essere l' opinione dei citati autori uniforme nell' ammettere che le quantità possano le une essere contenute nelle altre in un modo dal *quante volte* diverso, val quanto dire in un modo non esprimibile in numeri. Ora portiamoci un poco a meditare su questa maniera di contenersi d' una quantità in un' altra non esprimibile in numeri che per quasi universale consenso viene negli incommensurabili ammessa. E diamo principio alle nostre riflessioni coll' avvertire che qui non é quistione se debba ammettersi, che una quantità possa essere contenuta nella sua incommensurabile un numero occulto di volte: la quistione è se possa ammettersi che una quantità sia contenuta in un altra in un modo che affatto non sia numero indicante *volte* nè occulto nè manifesto. Ecco i termini del quesito, in cui d' uopo è che ci diportiamo più da Logici che da Matematici.

74 Il rapporto di contenenza d' una quantità in un' alaltra è mai possibile che ammetta diverse maniere? Questa idea del contenersi d' una cosa nell' altra, è semplice, ovvero è composta di diverse idee semplici, delle quali se

---

(*tt*) *Lecchi* — Arithmetica Isaaci Newton. Mediolani 1752. pag. 46.

(*uu*) *Lamy* — Ouvrages de Mathematique. Tome premier. pag. 142.

(*vv*) *Ximenes* — I sei primi Elementi di Geometria piana. Venezia 1800 pag. 224.

ne possa o eliminare taluna, o ad una un' altra sostituire, o qualche altra particolarizzarsi in diverse specie? Se dall' idea del contenersi una cosa in un' altra togli tu il quante volte l' una può essere ripetuta nell' altra, che ti rimane? Tu vieni a toglier tutto; ed il rapporto dileguasi. Diversità nelle idee delle cose delle quali vogliamo osservare o cerchiamo di esplorare la contenenza secondo che trattasi o di linee o di superficie, o di volumi, e diversità pure nei modi di applicazione, la immaginiamo: ma diversità di modi nell' idea semplicissima del contenersi, quasi che immaginar potessimo il contenersi una cosa nell' altra, aflatto escludendo l' idea dell' esservi posta o una, o due, o tre, o un numero ignoto di volte, questa diversità per intimo senso ci accorgiamo che è impossibile. Sì: notiamolo bene: non è che noi ideare non sappiamo modi diversi di contenenza perchè ci sono occulti: non sappiamo idearli perchè modi diversi dal quante volte, no, non vi sono.

Eppure nell' ammettere queste diverse maniere del contenersi una quantità nell' altra tutte consistono le diverse espressioni sopracitate dei più rinomati pur anche tra i seguaci del greco Geometra!! Mi piace però farvi in pari tempo conoscere che in qualche altro squarcio delle opere loro apparisce che questo occulto modo di contenersi è una chimera; e che la loro mente pur anche nel caso degli incommensurabili altro nelle ragioni non sa vedere che il quante volte una cosa è contenuta in quella parte commensurabile, la quale senza errore sensibile può all' incommensurabile essere sostituita.

E non è *Tacquet*, che dopo di avere ammesso (sempre però con una qualche trepidazione addimostrataci da quelle sue espressioni *certus ille modus, alio quodam sensu*) il contenersi d' una quantità in un altra in un modo non esprimibile in numeri, non è il *Tacquet* medesimo il quale senza trepidazione ti dice alla pag. 123 che l' eguaglianza delle ragioni irrazionali non più in un certo modo inesplicabile, ma *evidentemente risplende*, *continuo elucessit*, quando per mezzo di sottrazioni fatte ai conseguenti di parti commensurabili proporzionali vadano i termini ad esaurirsi?

E non è *Lecchi*, che dopo avere ammesso le ragioni irrazionali, alla pag. 53 della parte 3ª ci riferisce (senza però citarne l' autore) le parole stesse che Whiston nei suoi Commentari a Tacquet ci ha espresse, che cioè « *neque sane quantitatum incommensurabilium ulla est quae non possit per* NUMEROS *ad veram rationem in infinitum approximantes certissime exprimi?* Ciò è consono a quanto poco prima alla pag. 46 ci ha detto, che cioè *ratio irrationalis veris numeris exhiberi non potest .... cum numerus surdus proprie loquendo numerus non sit*. In vero se la ragione non si può con i *numeri veri*, non la si può esprimere in modo alcuno, perchè numeri falsi non esistono.

E *Lamy*, dopo di avere ammesso anch' egli le ragioni irrazionali, non è egli che con l' esempio e le dilucidazioni che ne dà alla pag. 169 ci fa conoscere non darsi ragione senza numero? Sì al certo: e così verificasi ciò che ha esposto alla pag. 139; che cioè « *ce mot* RAPPORT *ne signifie* « *proprement qu' une maniere d' etre d' une chose au re-* « *gard d' une autre*; *ou* POUR PARLER PLUS JUSTE, *c' est la* « *maniere qu' on concoit qu' une chose est, en la rappor-* « *tant à une autre* ». Dovendo infatti il rapporto tra quantità essere un concetto, questo non si ha senza numero.

E *Ximenes* anch' egli alla pag. 227 conchiude che « *se all' infinito tante parti aliquote con qualche avanzo* « *conterrà la prima* (quantità incommensurabile) *della* « *seconda, quante la terza della quarta con qualche avan-* « *zo, si potrà paragonare la prima alla seconda allo* « *stesso modo che la terza alla quarta. E la dissomi-* « *glianza della ragione sarà infinitamente piccola, cioè* « *nulla.* »

Tutti in somma i citati, ed altri moltissimi che per brevità non ho nominato, mentre ammettono che diensi ragioni negli incommensurabili, vanno poi a riconoscerle nella parte loro commensurabile, la quale mercè gli avanzi evanescenti può al relativo incommensurabile sostituirsi, siccome mi era proposto di dimostrarvi.

75 *Autori poi meno antichi*, le cui opere molto accreditate hanno servito di testo nella maggior parte delle scuole fin da quando io era discepolo, ed anche in seguito, dire cioè voglio *Legendre* e *Francoeur*, non si sono contentati di dirci che havvi un rapporto di contenenza, il quale non è esprimibile in numeri; ma trattandosi di proporzioni hanno commesso un errore più grave, hanno vestito l' assurdo d' un apparato illusorio, d' un falso processo dimostrativo, di cui la proporzione tra gli incommensurabili apparisce essere legittima conseguenza.

76 Ecco il paralogismo di *Legendre*, che è il paralogismo stesso di vari antichi Geometri di più appariscenti forme vestito « Quando è dimostrato che b non può stare in c co- « me m in una quantità maggiore o minore di $\sqrt{n}$, con- « chiude che b debbe stare in c come m in $\sqrt{n}$. » Ma noi soggiungiamo fra m e $\sqrt{n}$ non v' è ragione, perchè $\sqrt{n}$ non esiste (§.58): dunque l' argomento di Legendre è nullo; e a niuna conchiusione potremo mai giungere, finchè non ragioneremo sulle parti misurate sostituibili senza error valutabile a quelle che non hanno suscettività di misura.

77 *Francoeur* poi per dimostrare che si danno proporzioni tra gli incommensurabili, ricorrendo al suo *principio dei limiti*, espone la vera proporzione, che ha luogo fra le parti misurate degli incommensurabili, che sono prossimissime ad essi, ciascuna di queste parti esprimendo per mezzo dell' incommensurabile diminuito del variabile suo avanzo. E non badando che (mentre questi due termini insieme, l' uno cioè meno l' altro, costituiscono un numero qual' è la parte misurata) niuno di essi è numero quando si considerano separati, si fa lecito di distintamente assoggettarli a moltiplicazione affine di ottenere il prodotto dei medi e degli estremi, e quindi a suo bell' agio in fine si fa a decomporre i supposti ottenuti prodotti in fattori che non hanno esistenza, trasformando le egua-

glianze in quelle proporzioni tra gli incommensurabili, che egli si era proposto di dimostrare. Ma (senza parlare di altri difetti) basti il solo notare che alla voluta proporzione non può altra esistenza competere che quella dei suoi termini incommensurabili, i quali ben sappiamo che di esistenza sono privi.

78 Passando in fine in rivista gli *autori moderni*, io trovo che quasi tutti relativamente agli incommensurabili camminano sulle orme di Legendre e Francoeur. Lo stesso Hoüel che ha saputo svincolarsi da vari pregiudizj dell'insegnamento elementare della Geometria, non ha avuto ancora il coraggio di escludere in totalità dalla sua mente i rapporti irrazionali. Leggo infatti nel suo *Essay critique sur les principes fondamentaux de la Geometrie ec.* venuto in luce l'anno scorso 1867 alla pag. 4, *che la estensione dei teoremi d'aritmetica al caso degli incommensurabili non può essere giustificata fintanto che non si sia definita con maggior precisione l'eguaglianza di due rapporti fra quantità incommensurabili*. Sembra dunque che egli attenda un bel giorno, in cui si sarà determinata precisamente *l'egalité de deux rapports entre quantités incommensurables*. Egli ha dunque ancora dei dubbi intorno a questi rapporti, dubbi che crede di potere un giorno dileguare. A me però sembra di aver dimostrato che egli avrà un bell'attendere questo giorno felice. Dal *posse* col tempo si fa passaggio all'*esse*: dal *non posse* all'*esse* giammai.

79 L'inammisibilità delle proporzioni negli incommensurabili, sebbene dimostrata con prove le più inconcusse, pure è ben vero che a primo aspetto sgomenta. Dura cosa fu per me ancora l'escluderle. Io non sapeva per es. persuadermi che $1:\sqrt{2} = \sqrt{2}:2$ esser non dovesse una proporzione. Se costruisco un triangolo, io diceva, ponendo pel segmento superiore del lato sinistro il lato d'un quadrato, e la diagonale pel segmento inferiore: se pongo per segmento superiore del lato destro la stessa diagonale, e per l'inferiore il doppio del lato; e se per i punti di

divisione dei due segmenti tiro una retta, dire non potrò, che questa retta, divide i lati in parti proporzionali ? Sia pure che io ignori come 1 è contenuto in $\sqrt{2}$, e come $\sqrt{2}$ in 2: e non sarà vero che 1 stà a $\sqrt{2}$, come $\sqrt{2}$ a 2, e che eguali sieno i modi di essere della 1^a e 2^a ragione ? E un altro titolo anche per dover dire, che questa retta divide i lati in parti proporzionali non è quello di essere parallela alla base del triangolo ? Tutte queste difficoltà mi si paravano innanzi, e superarle io non seppi se non allorquando posi mente, che tirando dal punto di divisione sinistro una retta a qualsiasi punto o inferiore o superiore al punto di separazione dei due segmenti del lato destro, questa non può dividere i lati in parti proporzionali. Ed in vero *se è condotta al di sopra*, il segmento destro inferiore diviene più grande a spese del superiore; e perciò il quoto della loro ragione o divisione cresce per doppio titolo, uno dei quali è la diminuzione dal segmento superiore che prendiamo per divisore, l'altro è l'aumento del segmento inferiore che prendiamo per dividendo. Ragionisi in senso inverso *se è condotta al di sotto*. E nell'uno e nell'altro caso il quoto della ragione o divisione dei segmenti destri non può dunque essere eguale al quoto della ragione o divisione dei due segmenti sinistri *(xx)*.

Ciò posto, se dal punto di separazione dei segmenti del lato sinistro del triangolo può condursi una retta parallela alla base, il che la Geometria c'insegna esser sempre possibile, e questa essere non può alcuna di quelle

---

(xx) E dico ragione o divisione, perchè se a rigore fra essi segmenti incommensurabili ragione non si dà, io la concepisco tra quelle parti commensurabili che senza scrupolo so di poter loro sostituire mercè quell'aforismo che « *qualsiasi differenza la più tenue che possa immaginarsi fra l'incommensurabile e la misurata sua parte è sempre troppa*. » Ed è in questa riflessione che io trovo le colonne di Ercole, ove mi appoggio tranquillo, senza smarrirmi nelle sottili discussioni dei *Limitisti* e degli *Infinitesimalisti*.

che dallo stesso punto partendo vanno ad un punto qualsiasi inferiore o superiore al punto di separazione dei segmenti del lato destro, perchè niuna di esse divide i lati in parti proporzionali, come si è ora dimostrato, dir ciò è dire, che la retta parallela alla base dee confondersi con quella che congiunge i due punti suddetti. Se però necessariamente questa è parallela alla base, non per tanto dir possiamo *a rigore* che essa divida i lati in parti proporzionali, poichè si è dimostrato che tra 1 e $\sqrt{2}$ non v'è ragione, come non v'è tra $\sqrt{2}$ e 2 (§.57). Dire possiamo però, che delle rette le quali dal punto che separa i segmenti del lato sinistro si recano al lato destro, quelle dividono i lati in segmenti sempre più prossimi ad essere proporzionali, le quali più si avvicinano alla retta condotta fra i detti due punti di separazione dei segmenti superiori e inferiori.

80 E se tu in ciò convieni, con severo cipiglio redarguendomi, mi dissero una volta taluni, se la differenza tra l'una e l'altra ragione dei segmenti destri e sinistri va sempre più a esinanirsi, e perchè tanto affaticarti a gridar contro chi ammette anche nel caso dell'incommensurabilità, che la retta condotta in un triangolo parallela alla base di un punto all'altro dei lati, li divide in parti proporzionali? E non sarà quindi una sofisticheria da ostinati imbecilli l'opporsi a questo universale consentimento, *che ragioni e proporzioni si danno tra le quantità incommensurabili ancora?* Ed io tranquillamente ad essi risposi. L'uso dell'espressione che una retta condotta parallela alla base di un triangolo divida i lati in parti proporzionali, anche nel caso dell'incommensurabilità si tolleri pure, e ne fo uso pur io. Quando le idee sono esatte, poco monta se uguale esattezza non sia sempre nelle parole. D'una sola cosa però mi è d'uopo avvertirvi, io loro soggiunsi, ed è che scavando e scavando per rinvenire argomenti atti a confutare il mio assunto, vi siete data la zappa nel piede. Mi redarguite perchè non ammetto ragioni tra due incommensurabili, e mi redarguite perchè la differenza fra

la data quantità incommensurabile e la misurata sua parte può rendersi evanescente. Ebbene: che venite a dirmi con ciò? Finchè voi nella figura del triangolo dato (§. 79) osservate i segmenti senza curarvi del quantitativo, voi fate astrazione dai numeri. Ma quando v' interessa di rimarcarvi e riconoscervi una proporzione, e mi dite il segmento superiore sinistro 1 sta all' inferiore $\sqrt{2}$, come a destra il superiore $\sqrt{2}$ sta a 2, riflettete che la parola « *sta*, altro non significa, se non che « *è contenuto* » rammentatevi essersi dimostrato (§.73) che l' idea del contenersi non è distaccabile dall' idea della ragione e del numero, che niun concetto vi si desta nel guardare il segmento sinistro superiore e inferiore finchè gli esprimete per $1:\sqrt{2}$, e così dite dei segmenti destri $\sqrt{2}:2$: che allora solo si dissipano le nubi, e comincia la mente a veder chiaro, ed a percepire un vero rapporto, allorchè alla $\sqrt{2}$ va sostituendo i risultati successivi della estrazione di radice (tanto è falso che nelle proporzioni geometriche si possa far astrazione dai numeri (su di che in seguito): e quando dopo tutto ciò anche voi senza accorgervi non avete potuto far a meno di presentarvi al pensiero quei risultati, ditemi di grazia, le ragioni che hanno tra loro i segmenti destri e sinistri che in mente avete, sono fra due incommensurabili, o fra due quantità misurate che ad esse senza error sensibile sostituite? Riflettetevi bene, io così proseguiva, e poi ditemi a chi di noi sieno più riferibili quei titoli di cui mi avete fatto dono gentile. Ma no: perchè arrossire non abbiate, vi dispenso dalla risposta, e mi congedai.

Perdonatemi l' episodio; e conchiudiamo essere cosa evidente che le ragioni tra quantità incommensurabili, ragioni, che gli antichi chiamarono *ragioni irrazionali* sono impossibili. Quindi l' espressione *ratio irrationalis* (λογος αλογος) che Wallis *(yy)* vorrebbe farci riguardare per un

---

(yy) *Wallis* — Algebra. Capo 19.

semplice solecismo proveniente dai diversi significati della voce *ratio* (λογος), quasi che *ratio irrationalis* significasse rapporto di contenenza *ineffabile* cioè inesprimibile in parole, è tutt'altro che un semplice difetto di proprietà di linguaggio: è una vera contraddizione in termini: tutt'altro che solecismo, è un assurdo.

81 E se è un assurdo, e perchè mai coltivare la strana pretensione di dimostrarlo? Se l'espressione « *incommensurabili proporzionali* » può solo tollerarsi nel senso che proporzionali sono i commensurabili ad essi sostituibili senza errore valutabile, il porre nei trattati di Geometria un ragionamento diretto a dimostrare proporzioni tra quantità commensurabili, ed un altro ragionamento per le incommensurabili, egli è un dar prove di fatto della cieca credenza che possano in realtà nelle quantità incommensurabili darsi ragioni, bisogna esser del folle avviso che anche gli assurdi sieno suscettibili di dimostrazione, mentre la Logica ci assicura *a priori* che o un sofisma od un paralogismo sta certamente nascosto in quelle pseudo-dimostrazioni, che sono dirette a provare un assurdo. Ce ne sieno d'esempio le vergognose prove fatte in proposito da Legendre e da Francoeur (§. 76 e 77) del quale l'illudente sottile artificio (*vedi il giudizio uman come spesso erra*) ed io ingenuo il confesso, e pur troppo *di me medesimo meco mi vergogno*, per 20 e più anni senza accorgermi dell'errore, ho seguito pur io. E se l'errore è gravissimo, a che tanta ritrosia a svellerlo dalla mente: dirò di più, ripetendo ciò che esposi in altro mio scritto (*zz*) « a che tanto arrabattarsi e cercare arzigogoli per « tentare nel caso dell'incommensurabilità dimostrazioni « diverse da quelle date pel caso della commensurabiltà « (unico caso da contemplarsi), se ciò tentare è un ten-

---

(*zz*) *Purgotti* — Intorno a varie inesattezze che allignano ancora nei moderni corsi di Matematica. Perugia 1865. pag. 31.

« tare l' impossibile? Perchè perder tempo, che dico, per-
« chè spenderlo pessimamente o Istruttori per ingannare voi
« stessi e i discenti, voi ed essi abituando alla contraddizio-
« ne al paralogismo? Presentando simili larve di dimostra-
« zioni agli Allievi, voi vedrete che essi, se non sanno
« opporvisi, non per questo si trovano soddisfatti delle vo-
« stre parole, perchè l' assurdo sebbene mascherato col
« manto della verità non offre al certo possenti attrattive
« per insinuarsi nelle menti che non amano riposarsi come
« ben si esprime Rosmini, sul comodo guanciale dell' auto-
« rità ». Dite chiaramente ad essi: queste parole « *vi sono proporzioni negli incommensurabili* » si tollerano unicamente perchè proporzionali sono tra loro quelle quantità commensurabili che possono ad essi sostituirsi. Dite chiaramente ad essi che i simboli irrazionali sono simboli dell' impossibile, giacchè non vi farà certamente spavento l' obbiezione di que' profondi ingegni, i quali si avvisano che così noi poniamo tutti in un fascio i così detti irrazionali reali e gli immaginarii *(aaa)*. Più e più volte ripetete ad essi ciò che io per procurare di svellere delle radici un inveterato universale pregiudizio torno a ripetere a voi: quando un numero non quadrato venga espresso per n, dire $\sqrt{n}$ è dire *quel numero che ripetuto tante volte, quante sono le sue unità, produce quell'* n, *che dalla esposta ripetizione non può giammai essere prodotto*: dire dunque $\sqrt{n}$ è dire numero che ha proprietà di non esistere: dire $\sqrt{n}$ è dunque esprimere non una quantità come mercè d' un pessimo insegnamento siete abituati a credere, ma la negazione dell' esistenza d' una quantità, che per sè moltiplicata dia n.

Sì: i simboli irrazionali sono *segni d' una negazione*

(aaa) Intorno alla differenza fra queste due sorti di simboli, vedi *Purgotti* Segreti dell' arte di comunicare le idee ec. Perugia 1858, pag. 92.

di esistenza, e non già di occulti modi di contenenza, modi diversi dal *quante volte*, come e Tacquet, e De Chales, e Whiston, e Ozanam, e Lamy, e Lecchi, e tanti altri ci dicono (§. 71 al 73). Sì: sono *segni d' una negazione di esistenza*, e non già segni di numeri minori di alcuni e maggiori di alcuni altri, come vorrebbe Bertrand (§.64). Sì: sono *segni d' una negazione di esitenza* e non già sono il *limite di numeri, i di cui quadrati hanno per limite un numero non quadrato*, come si espresse Catalan e dopo di lui Briot, e Serret *(bbb)*. Sì: sono *segni d' una negazione di esistenza* e non già segni di veri prodotti dell' intendimento, formanti una classe particolare di realtà intellettuali, come Wronski li definisce (§. 57, 65, 66). De-

---

(bbb) Catalan — Manuel d' Arithmetique et d' Algebre. Paris 1866. — Egli pure in una nota alla pag. 88 ha rimarcato, che la pretesa definizione « $\sqrt{7}$ *est une quantité, qui multipliée par elle meme reproduit* 7 » *constitue un cercle vicieux complete « car, pour savoir ce que signifie l'expression* MULTIPLIER PAR $\sqrt{7}$, *il faudrait avoir defini* $\sqrt{7}$ ». Ma nel tempo stesso che di questo errore si accorge, non si avvede poi che, coll' attribuirgli l' idea di *limite*, accorda a $\sqrt{7}$ una esistenza, mentre $\sqrt{7}$ esprime la negazione dell' esistenza d' una quantità che sia atta a riprodurre 7 col moltiplicarsi per sè medesima. Il limite non è dunque $\sqrt{7}$; ma è 7, cui (senza mai poterlo raggiungere) si approssimano sempre più i quadrati di que' numeri che otteniamo con l' estrazione di radice per approssimazione. Mi duole di dovere continuamente ritornare su ragionamenti più e più volte esposti, lo che mi sarà certamente rimproverato: ma la colpa non è già mia, è tutta vostra; giacchè a sbarbicarvi di mente un pregiudizio che è universale, io non saprei tentare mezzo migliore, che dimostrare, e tornare più e più volte a dimostrare in circostanze diverse, che molti scienziati ragguardevolissimi ci danno nei loro scritti prove non dubbie, che avrebbero pienamente aderito alla verità che l' esposto inveterato errore distrugge, se (mentre stavano per afferrarla) loro non l' avesse strappata di mano l' eccessivo rispetto verso l' opinione dominante.

sistete dunque, agli Insegnanti io ripeto, dall' impastocchiare le menti degli Allievi con i più lambiccati e misteriosi concetti. Le vostre lezioni, credetemi, saranno molto più chiare; e al solito finale delle vostre dimostrazioni, al *quod erat demonstrandum,* io vi assicuro che i più svegliati tra essi non proseguiranno ad aggiungere a bassa voce quella brutta appendice « *sed non est demonstratum* ».

82 Ho più volte insistito, e con tutte le mie forze insisto sulla estirpazione di questo universale pregiudizio di credere gli *incommensurabili suscettibili di ragione* perchè è desso quella piaga cancrenosa, che si è dilatata nella teorica universale delle proporzioni. *Hinc prima mali labes*. Ed in vero quest' assurda pretensione d' includere anche gli incommensurabili nella definizione delle ragioni e proporzioni geometriche induce Euclide ad escludervi l' idea del quoto, ad escludervi cioè quell' idea loro così essenziale e caratteristica, che determinò il celebre nostro Lagrangia a cambiare la determinazione di *ragioni e proporzioni geometriche* in quella di *ragioni e proporzioni per quoto*. E da questa male avventurata esclusione Euclide (voglio dirvelo con le stesse non sospette parole di un suo valente commentatore il Clavio). « *Euclides cogitur confugere ad earum equimultiplicia, ut complectatur omnes proportiones magnitudinum tam rationales quam irrationales (ccc)* ». Le quali parole io, penetrando nella mente stessa di Clavio, scevrandola però d'ogni umano rispetto, traduco così: Euclide dopo di aver commesso un solenne sbaglio, quale si fu l' ammettere la possibilità delle proporzioni negli incommensurabili, *cogitur confugere*, è costretto ad ammetterne un altro non meno solenne del primo, la tortuosa e lambiccata *teorica degli Equimoltiplici*. Ed

---

(ccc) *Clavio* — Euclidis Elementorum Libri XV. — Romae 1683. pag. 653, appunto l'esame scrupoloso e imparziale dei madornali difetti che in questa teorica si rinvengono è il soggetto del seguente capitolo.

CAPO III.

Difetti della definizione V^a del libro V,

perno su cui si aggira tutta la teoria delle proporzioni di Euclide.

83 Una teorica che trae sua origine da un' assurda pretensione, progredire non potea certamente con prospero successo. Già vedemmo i difetti della definizione data da Euclide della *ragione geometrica* (§. 69) : ebbene ora passo a dimostrarvi, che men difettosa non è certamente quella della loro eguaglianza, ossia delle proporzioni, che è la famosa definizione V^a del libro V. E questa prendo di mira tra le altre, perchè da essa hanno dipendenza in gran parte i teoremi del libro V e molti pure del VI.

84 Ecco le precise parole tolte *ad litteram* dalle più antiche ed accreditate traduzioni con le quali viene espressa questa V^a definizione negli *Elementi di Euclide per cura dei Professori Betti e Brioschi* 1868 alla pagina 139. « *La ragione di una prima grandezza a una seconda si dice essere uguale a quella d' una terza ad una quarta, quando prese della prima e della terza le ugualmente moltiplici secondo qualsivoglia numero, e della seconda e della quarta pure le egualmente moltiplici secondo qualsivoglia numero, se la moltiplice della prima è maggiore della moltiplice della seconda, anche la moltiplice della terza sia maggiore della moltiplice della quarta, se uguale uguale, se minore minore* ».

85 Se questa di Euclide fosse una semplice definizione nominale, conchiudere potremmo aver egli capricciosamente voluto dare il nome di *ragioni eguali* a quelle nelle quali si verifica, che gli equimoltiplici dei due antecedenti, per qualsivoglia numero ottenuti, si accordano nell' es-

sere eguali o maggiori o minori degli equimoltiplici dei rispettivi conseguenti per qualsiasi numero ottenuti pur essi, ma niuna altra critica avrebbe luogo (*ddd*).

Se però fosse questo l' unico significato dato da Euclide alla eguaglianza delle ragioni, ogni volta che esso facesse motto di termini proporzionali, in altro non potrebbe far consistere la proporzionalità, che nella *proprietà degli equimoltiplici* ora enunciata, e nulla si saprebbe intorno alla eguaglianza dei quoti delle due ragioni, eguaglianza dei quoti in che appunto e non in altro, giusta il senso comune, l' eguaglianza delle stesse ragioni consiste. E siccome tutto sull' eguaglianza dei quoti di due ragioni il vasto edificio riposa delle proporzioni, se questa cognizione manca, *tota ruit moles ingens*.

86 Ma a questa sua così detta definizione V^a Euclide non dà il semplice valore d' una definizione nominale. Egli stesso vi ammette un' intima connessione con la vera eguaglianza di due ragioni, spesso prendendo la sua definizione per un criterio affine di conoscere se due ragioni sieno eguali giusta il vero significato. E che ciò sia, prova manifesta ne danno molte proposizioni del suo libro V^o e VI^o, alcune delle quali si risolverebbero in una inane identità, altre non soddisfarebbero affatto allo scopo voluto, se l' eguaglianza delle ragioni venisse presa nel solo senso Euclideo.

87 Per es. la proposizione IV^a del Libro V^o non sarebbe che un inane identità; perchè si ridurrebbe a dire « Se di quattro grandezze la 1^a alla 2^a ha la stessa ragione che la 3^a alla 4^a (il che nel senso Euclideo altro non vale che il verificarsi in esse la proprietà degli equimoltiplici) la proprietà degli equimoltiplici si verifica ». La proposizione I^a del libro VI non soddisferebbe allo scopo. Vuole in essa

---

(*ddd*) Occorrendomi nominar più volte questa proprietà, avverto che d' ora innanzi, quando, a cagion di brevità farò uso delle sole parole *proprietà degli equimoltiplici*, intendo esprimere la proprietà quì ora enunciata.

dimostrarci che la ragione dei triangoli equialti è uguale a quella delle basi nel vero senso, e non già nel senso Euclideo; e perciò il dimostrare, che in quelle ragioni si verifica la proprietà degli equimoltiplici a nulla gioverebbe, se questa non servisse d' indicio per conchiudere che le due ragioni sono eguali nel vero senso, che cioè a base doppia, tripla, *ennupla* corrisponde doppia, tripla, *ennupla* aja.

88 E poichè Euclide medesimo vuole a questa stessa conclusione della vera eguaglianza delle ragioni pervenire in ambedue le esposte proposizioni, è ben chiaro, che egli stesso ritiene la sua V^a non per una semplice definizione nominale delle ragioni eguali, ma spesso per un criterio da cui la *vera* eguaglianza delle ragioni dedurre.

89 Rimarchiamo però fin d' ora, che il dedurre la *vera* eguaglianza delle ragioni dalla loro uguaglianza nel senso Euclideo importa, che sia fatto palese quell' intimo nesso che le collega. E questo, a primo aspetto almeno, non apparisce; nè ci sembra mezzo il più soddisfacente per giungere a dimostrare la verità d' una proporzione, preferire alla via diretta delle *aliquote* la via tortuosa degli *equimoltiplici*, ove a passo a passo c' incontriamo fin dagli esordii in una folta nebbia, che il bel sereno ci vela della matematica evidenza.

90 Le esposte riflessioni ci hanno dimostrato che la definizione V^a del V^o di Euclide non è *tutta luce*. Inoltriamoci in più profonde disamine, e troveremo *le tenebre*.

Assunto I.

La famosa definizione quinta del V dl Euclide presa nel suo naturale significato senza una benigna interpretazione è una proposizione erronea.

91 Due ragioni che non sono nel vero senso eguali perchè non aventi egual quoto per es. $2:4$; e $3:5$ sono eguali nel senso Euclideo, allorchè a tenore della definizione V^a moltiplico il 1^o e 3^o termine per 10, e il 2^o e 4^o per 3. Ottengo infatti $20:12$; e $30:15$; e trovo verificata la proprietà degli equimoltiplici, in cui tutta consiste

l' eguaglianza Euclidea delle ragioni, perchè il moltiplice del 1° termine è maggiore del moltiplice del 2°; e così lo è del moltiplice del 4° quello del 3°.

Stando però in mio arbitrio prendere gli equimoltiplici col moltiplicare il 1° e 3° e così il 2° e 4° per quel numero che più mi piaccia, moltiplico gli uni per 16 e gli altri per 9; ed ottenendosi 32:36 e 48:45, trovo che mentre il moltiplice del 1° termine è minore del moltiplice del 2°, non così il moltiplice del 3° lo è di quello del 4°: che anzi è maggiore. Non si verifica dunque in questo esempio la proprietà degli equimoltiplici: dunque le due ragioni 2:4 e 3:5 tanto come una conseguenza della definizione V^a, quanto in conformità della definizione VII^a del V° libro non sono eguali.

92 Queste stesse due ragioni dunque, secondo che ad oggetto di produrre gli equimoltiplici si sceglie a moltiplicatore un numero piuttosto che un altro, a stretto rigore attenendoci alla definizione V^a di Euclide sono eguali insieme e diseguali: dunque questa definizione senza qualche benigna interpretazione ci porta ad una contraddizione, e perciò ad un assurdo.

93 Nè taluno del franco mio dire si meravigli; poichè se a dichiarare che non solo la definizione V^a del V° è prolissa, oscura, difficile, lo che si è pur detto da molti e molti, ma che inoltre nuda com'è, senza una benigna interpretazione involva contraddizione e quindi rechi all' assurdo forse primo a dirlo son' io, primo non son io certamente ad avervi questo errore riconosciuto. Non vi spiaccia seguirmi nell' analitico esame di alcuni squarci di vari Commentatori di Euclide, e ne rimarrete appieno convinti.

94 Un chiaro indicio di essersi avveduto dell' errore nascosto in questa V^a definizione ne dà quel Matematico che fu il primo a tradurre dall' Arabo nella lingua del Lazio gli elementi Euclidei; giacchè cuoprirlo s' ingegna, una restrinzione apponendo alla libertà illimitata che la definizione di Euclide concede per la formazione degli equimoltiplici.

95 Il rimedio però è quasi peggiore del male. Ed in vero quando Campano ci dice doversi interpretare che la moltiplicazione sì degli antecedenti che dei conseguenti sia fatta non per qualsiasi numero in senso assoluto, ma per qualsivoglia di que' numeri i quali facciano sì che i moltiplici dei rispettivi termini delle due date ragioni sieno proporzionali, Campano viene a supporre che Euclide abbia contro le regole le più comuni della Logica inserito il definito nella definizione, errore in cui io non credo possa essere incorso Euclide, come pure non lo credettero nè il Commandino, nè il Clavio, nè il Tacquet.

96 Non lo credette il Commandino; poichè scrisse non doversi opinare come opinò il Campano « *altramente il* « *medesimo se dichiararia per il medesimo, che è inconve-* « *niente.* (eee) » Non lo credette il Clavio il quale alla p. 655 parlando del Campano ci dice « *Sed quis non videt, si ita* « *intelligatur definitio, Euclidem idem per idem definire* « *quod sane absurdum est.* » Non il Tacquet, che alla pag, 121 così si esprime « *Notandum est Euclidem non* « *assumere aequimultiplicium excessus defectusque pro-* « *portionales; sic enim inepte idem per idem explicasset.* » L' interpretazione del Campano non è dunque ammissibile.

97 Che della erroneità della V^a definizione siasi pure accorto il Commandino ce lo appalesano i suoi commenti. Per un rispetto all' autore egli non annuncia l' errore, ma lo corregge tacitamente con le seguenti parole « *Accomo-* « *DEREMO le molliplici talmente, che la moltiplice della 1^a* « *sia eguale alla moltiplice della 2^a; giacchè se la molti-* « *plice della 3^a sarà eguale alla moltiplice della 4^a, avremo* « *compreso che la 1^a alla 2^a ha la medesima proporzione* « *che la 3^a alla 4^o* (eee). »

98 Con questa ristrinzione, col moltiplicare cioè i conseguenti non per un numero qualunque ma per

---

(eee) *Commandino* — Degli elementi di Euclide Libri XV. Urbino 1575. pag. 63.

un numero tale che rende il moltiplice del 2° termine eguale al moltiplice del 1°, la definizione V^a così modificata diventa infallibile criterio della vera eguaglianza delle ragioni. Ed invero le 4 grandezze 2:4 e 3:5 che secondo la definizione d' Euclide provammo (§. 90) essere proporzionali, cessano di esserlo, se applicandovi la modificazione appostavi dal Commandino dopo di avere moltiplicato il 1° e 3° termine per 10, moltiplichiamo il 2° e 4° non per un numero qualunque, come Euclide dichiara, ma per un tal numero quale è il 5, che trasformi il 2° termine 4 in 20, in quel numero stesso cioè, in cui si è trasformato il termine 1°; giacchè così la ragione 1^a diviene 20:20; e la 2^a diviene 30:25, lo che ci appalesa, che esse eguali non sono nemmeno nel senso Euclideo.

99 Ora se il Commandino *accomoda* le equimoltiplici e non le forma sotto *qualsivoglia moltiplicazione*, ciò chiaramente addimostra essersi bene avveduto che la definizione come data da Euclide è erronea.

100 Clavio chiaramente addimostra essersi avveduto pur egli del notato difetto; poichè dopo di avere con un più lungo giro di parole espresso il concetto medesimo della definizione V^a (che nel suo trattato è la sesta) quale ci viene data dal Campano e dal Commandino, corregge il difetto (senza nominarlo) mercè di un lunghissimo commento di oltre 5 pagine di minutissimo carattere, aggiungendo del proprio, che le ragioni allora sono eguali, quando la proprietà degli equimoltiplici si verifichi SEMPRE (*deprehensumque fuerit* PERPETUO *id ita se habere* (fff)). E poco dopo più chiaramente espone, che se la detta proprietà degli equimoltiplici anche in un solo caso non si verificasse, *quamvis in infinitis aliis conditio praedicta reperiatur, nulla ratione dicentur eamdem habere proportionem*. Giustissime osservazioni queste sono per certo: sono però del Clavio, e non di Euclide.

(*fff*) *Clavio* — Euclidis Elementorum Libri XV. Romae 1603. pag. 653, 654.

101 Che Vitale Giordano il quale scrisse anni 80 dopo il Clavio, siasi accorto anch'egli dell'errore commesso da Euclide nella V^a definizione (che pure del suo trattato è la 6^a) a chiare note apparisce dalla lettura delle lunghe sue annotazioni e commenti, dai quali risulta, che se la proprietà degli equimoltiplici non si verifica *in ogni* moltiplicazione, le ragioni non sono eguali; e in una nota conchiude che affine sieno eguali due ragioni, è d' uopo che la proprietà degli equimoltiplici si verifichi « *secondo qualunque moltiplicazione; cioè secondo tutte le moltiplicazioni (ggg).* » E ognuno ben vede, che quello stiracchiato CIOÈ accomoda tutto: ma quel CIOÈ è del Giordano e non d' Euclide.

102 Che i difetti della definizione V^a in tutta la loro enormità fossero stati riconosciuti dal Sommo Galileo ce lo manifesta l' addizione d' una semplice parola da Lui fatta alla definizione stessa, giacchè mercè di quest' aggiunto la definizione cessa di essere erronea. Ed ecco i precisi termini nei quali da Galileo è posta in bocca dell' Interlocutore *Sagredo* « *Allora 4 grandezze sono proporzionali quando gli ugualmente moltiplici della 1^a e 3^a presi secondo qualunque moltiplicità si accorderanno* SEMPRE *nel superare, mancare o pareggiare gli ugualmente moltiplici della 2^a e 4^a (hhh).* » Qui inserita nella stessa definizione troviamo quella parola « *sempre* » che Clavio e Giordano posero nei loro commenti, parola che sola serve a far sì che sparisca l' errore, e non ci rechi alla contraddizione. Tacquet, forse senza conoscere i lavori di Galileo rettifica anch' egli coll' inserirvi la stessa parola *SEMPRE*, la definizione di Euclide alla pag. 115.

(ggg) *Vitale Giordano* — Euclide restituto. Roma 1686, pag. 176.

(hhh) *Opere di Galileo* — Firenze 1718. Tomo 2° pag. 682. Dialogo quinto.

103 E sostengo che Galileo e Tacquet, forse studiando entrambi su i commenti di Clavio, abbiano essi del proprio nella definizione stessa inserito la parola « SEMPRE », non essendo presumibile, che questa parola fosse nel vero testo d' Euclide, subito che manca in tutte le più antiche accreditate traduzioni *(iii)*, e che ve l' abbiano inserita per rettificare con una benigna interpretazione le parole d' Euclide.

104 Riepilogando conchiudiamo dunque essersi dimostrato che la definizione V^a, dando alle parole il loro naturale significato, ci conduce alla contraddizione di riguardare due ragioni e per eguali e per diseguali (§. 92). Che di questo errore si accorse il Campano, ma con un altro errore il corresse ponendo il definito nella definizione: se ne accorse il Commandino, e lo corresse col fatto lasciando all' arbitrio la scelta del moltiplicatore per gli antecedenti: non così però per i conseguenti (§. 98): se ne accorsero e Clavio e Giordano che con i lunghi loro commenti ci esposero che a provar l' eguaglianza di due ragioni è d' uopo mostrare che la proprietà degli equimoltiplici si verifichi non (come si esprime Euclide) *sotto qualsivoglia numero* scelto a moltiplicatore, ma sotto tutti e singoli i numeri immaginabili: se ne accorsero finalmente e Galileo e Tacquet, e l' errore eliminarono col solo aggiungere la parola « *sempre* » nella definizione medesima. Che la definizione V^a del V d' Euclide conduca dunque a un errore è cosa che se non era espressa, era però ben conosciuta da Uomini sommi. E dimostrato così il primo assunto, passiamo al 2°.

(iii) Manca in quella del *Campano* (Venezia 1482) in quella del *Zamberto* (Basilea 1537) in cui è pure riportata quella di *Teone* e di *Ipsicle*, in quella del *Flussato Candalla* (Parisiis 1566), in quella del *Commandino* (Urbino 1575): manca nell' edizione fatta da *I. Errard de Bar-le-due* (Paris 1598), nell' altra di *Clavio* (Romae 1603), nell' Euclide restituto del *Giordano* (Roma 1686) nel *De-Chales* tradotto dal Francese (Bergamo 1785); e chi sa in quante altre edizioni che non sono a mia cognizione.

ASSUNTO II.

La definizione quinta del V benignamente interpretata è un teorema, che però da Euclide non è dimostrato.

105 Che l' addizione della parola « *sempre* » basti a rettificare la erronea proposizione, forse primo a darne la dimostrazione fù Clavio. In modi più semplici e chiari questa fu ripetuta da Galileo, e forse senza conoscere nè l' una nè l' altra, cosicchè credette suo il merito dell' invenzione, la dette pure Tacquet. E quì io ve la espongo nel più conciso modo possibile.

Comincio dall' osservare che la facoltà illimitata di poter formare gli equimoltiplici moltiplicando per qualsiasi numero gli antecedenti e per quasiasi numero i conseguenti, fa sì che la proprietà degli equimoltiplici si verifichi nelle ragioni sì eguali che diseguali. Havvi questa sola differenza a notarsi che nelle ragioni giusta il comune senso eguali la proprietà degli equimoltiplici si verifica sempre, qualunque sia il numero moltiplicatore per cui siensi ottenuti gli equimoltiplici, nelle diseguali havvi sempre un qualche caso in cui non si verifica la detta proprietà; e questa 2ª circostanza parmi che non sia avvertita da Euclide (*lll*).

(*lll*) Eccovene un esempio nelle due stesse ragioni diseguali esposte (§. 91) . . . . 2 : 4 e 3 : 5

Moltiplichiamo per 10 il 1° e 3° termine, cioè gli antecedenti; e si avrà . . . . 20 : 4 e 30 : 5

Lasciando costanti gli equimoltiplici degli antecedenti, passiamo ora a successivamente moltiplicare per 2, per 3, ec. i conseguenti. Per 2 avremo 20 : 8 e 30 : 10

Moltiplicandoli per 3, abbiamo . . . . . . 20 : 12 e 30 : 15

Moltiplicando per 4, abbiamo . . . . . . 20 : 16 e 30 : 20

E fin quì in tutte le esposte ragioni la proprietà degli equimoltiplici si verifica.

Proseguendo, passando cioè a moltiplicare i conseguenti per 5 otteniamo . . . . 20 : 20 e 30 : 25

Moltiplicandoli per 6, abbiamo . . . . . . 20 : 24 e 30 : 30

Ciò esposto, ecco la *Iª* Proposizione di cui dobbiamo convincerci « *Nelle ragioni eguali si verifica sempre la proprietà degli equimoltiplici* » . Ed invero si è dimostrato (§. 52) che ottenuti gli equimoltiplici di due ragioni eguali, il moltiplice del 1° termine contiene il moltiplice del 2° o vi è contenuto, quante volte il moltiplice del 3° contiene il moltiplice del 4°, o vi è contenuto, lo che è stato pure dimostrato da Euclide nella proposizione IVª del V°. Dunque da ciò scende per legittima conseguenza che se il 1° moltiplice è maggiore, o eguale, o minore del 2°, egualmente anche il 3° sia maggiore, o eguale, o minore del 4°. È evidente infatti che, se così non fosse, il 1° rapporto di contenenza non potrebbe essere uguale al 2°, come chiede l' ipotesi.

Proposizione *IIª*. *Se dunque si danno due ragioni rispetto alle quali la proprietà degli equimoltiplici* presi sotto moltissime diverse moltiplicazioni si verifichi, ma sotto talune, ed anche sotto una sola non si avveri, queste due ragioni è impossibile che sieno eguali, perchè se il fossero, mercè il teorema ora dimostrato niun caso potrebbe darsi in cui la detta verifica non avesse luogo. Questa proposizione, che è la definizione VIIª del V° d' Euclide tutt' altro che definizione avrebbe dovuto essere un corollario della Iª proposizione sopraesposta cioè della IVª del V°.

Ed in queste nuove ragioni la proprietà degli equimoltiplici cessa di verificarsi.

Proseguendo, passando cioè ora a moltiplicare i conseguenti per 7, otteniamo . . . . . . 20:28 e 30:35

Moltiplicando per 8, si ha . . . . 20:32 e 30:40

E così di seguito moltiplicando i conseguenti per i successivi numeri naturali indefinitamente, scorgesi a chiare note, che di nuovo la proprietà degli equimoltiplici torna a verificarsi e costantemente all' infinito, se si lascino inalterati i primi equimoltiplici ottenuti del 1° e 3° termine, sebbene le ragioni primitive 2:4 e 3:5 sieno diseguali.

Se però è così dimostrato che quando in due ragioni non si verifica la proprietà degli equimoltiplici, certamente esse sono nel vero senso diseguali, resta ora a vedersi, se avendosi due ragioni diseguali, siccome in esse si è veduto (§. 105) che la proprietà degli equimoltiplici si verifica sotto moltissime diverse moltiplicazioni, dare si possa il caso che si verifichi sempre; e la negativa risposta ci è data dalla seguente:

Proposizione III.ª *Nelle ragioni diseguali, quantunque in moltissimi casi si verifichi la proprietà degli equimoltiplici, un caso almeno in cui dessa non si avveri, debbe esservi sempre.* Questa proposizione non solo non dimostrata, ma nemmeno enunciata da Euclide nel suo libro V, è stata dimostrata ma con troppa prolissità dal Clavio, più elegantemente da Galileo e dal Tacquet; ed io qui ardisco esporvela alla meglio col linguaggio (mi servirò (*mmm*) delle espressioni autorevoli di Hoüel) più chiaro e preciso della teoria moderna.

Si abbiano due ragioni diseguali espresse per

$$a : aq \; ; \; c : c(q-d)$$

Si moltiplichino per n ambi i conseguenti, e per qn, ossia per n moltiplicato pel quoto q della prima ragione, ambi gli antecedenti: ed è chiaro che avremo in grazia del modo con cui abbiam formato il moltiplicatore degli antecedenti

$$a \times qn : aq \times n \; ; \text{ e } \; c \times qn : c(q-d)\, n,$$

avremo cioè necessariamente eguali i termini della prima ragione, e diseguali necessariamente i termini della 2ª, e quindi non verificata la proprietà degli equimoltiplici, e quindi necessariamente diseguali le ragioni.

E se quando le ragioni sono diseguali, debbe necessariamente darsi un caso in cui la proprietà degli equi-

(*mmm*) *Hoüel* — Essai critique sur les principes fondamentaux de la Geométrie elementaire ..... Paris 1867 *pag.* 6.

moltiplici non si verifica, ne segue che allorquando abbiamo certezza che in due ragioni questo caso non si dia, abbiamo certezza che le ragioni non sono diseguali, ed è ciò lo stesso che il dire, abbiamo la certezza che sono eguali; ed ecco perciò così dimostrata la seguente:

Proposizione IV^a. *Quando la proprietà degli equimoltiplici si verifica sempre*, ossia quando si verifica qualunque sia il numero moltiplicatore pel quale si ottengono gli equimoltiplici, le ragioni sono eguali nel vero loro significato.

Per mezzo delle quattro ora esposte proposizioni siamo ora dunque giunti a dimostrare, come per mezzo dell' addizione della parola « *sempre* » dalla proprietà degli equimoltiplici scende la vera eguaglianza delle ragioni.

Che poi nel vero testo d' Euclide la definizione V^a del V° contenga realmente la parola « *sempre* » siccome la troviamo nelle traduzioni di Galileo e di Tacquet; ovvero che almeno abbia Euclide supposto che vi si debba intendere, rileverà agevolmente ognuno, che vi sono molti titoli per dubitarne. Ma siamo pure generosi a concederlo: sarà sempre verissimo che (accordata questa benigna interpretazione), la derivazione della vera eguaglianza delle ragioni dalla proprietà degli equimoltiplici è da Euclide ammessa ma non dimostrata. E ben se ne avvidero e Galileo e Tacquet, il primo dei quali fa a dire a Salviati (pag. 682). « *Comunque ciò sia, parmi questo di Euclide piuttosto un teorema da dimostrarsi che una definizione a premettersi* » e l' altro ci espose che « *ea definitione non naturam aequalium rationum, sed affectionem solummodo aliquam explicari* » (pag. 115).

106 La definizione V^a del V° d' Euclide dunque riguardata come definizione nominale, già lo vedemmo (§.85, 86) non serve a nulla: riguardata poi come teorema, siccome spessissimo l' adopera Euclide per dedurre che due ragioni sieno eguali, è difettosa: non difetta però di molte cose: non gli manca che la sola dimostrazione!

Ciò poi che in Euclide è riprovevole si è l' abuso del doppio significato che egli dà all' *eguaglianza delle ragioni* presa ora nel *vero senso*, ed ora nel *senso Euclideo*. È poichè in varie proposizioni del V° e VI° la vera eguaglianza delle ragioni è da Euclide stesso riguardata come una illazione che scende dalla proprietà degli equimoltiplici, dare principio egli doveva alla sua definizione, o a meglio dire teorema, non con le parole « *Due ragioni si* DICONO *eguali* » ma in vece con queste altre « *Due ragioni si* DIMOSTRANO *eguali* » quando in esse si verifica la proprietà degli equimoltiplici. Perchè dunque ha egli preferito « il *si dicono* » al « *si dimostrano* ? » Sarà un poco temerario il sospetto: ma lo scopo quello sarebbe mai stato di evitare una *dimostrazione*, che non era certamente delle più facili? Una proposizione che non è dimostrata ha bisogno di un *salvum me fac*, ed Euclide glielo ha procurato, ponendola in quell' elenco in testa al quale sta scritto « *Noli me tangere* » nell' elenco cioè delle definizioni. Così ha egli trovato il modo di nascondere agli Allievi il bisogno della dimostrazione. Così p. es. nella proposizione 1ª del Libro VI esposta alla pag. 209 e 210 dell' edizione fiorentina 1868, egli dopo di aver dimostrato che nei triangoli equialti si verifica la proprietà degli equimoltiplici rapporto alle basi e alle aje, con un richiamo che egli fa della definizione V tosto vi affibbia « *dunque* sta aja ad aja, come base a base. E questo è un detestabile inganno, giacchè il richiamo di questa definizione ci porta a conchiudere che le due ragioni sono eguali nel senso Euclideo, e non già nel senso vero che è quello che c' interessa. E se è verità che due ragioni, le quali sono egua'i nel senso Euclideo, lo sono pure nel vero senso, è anche vero che Euclide non si è dato il menomo carico di dimostrarlo nella speranza che gli Allievi, dovendo ammettere che le ragioni sono eguali nel senso suo, si appaghino di questa eguaglianza, e non si avvedano che l' essere eguali nel senso Euclideo non basta a convincere l' intelletto che sono eguali realmente. Tutto il circuito degli equimoltiplici è dunque un apparato illusorio: è fumo che ottenebra, non luce che rischiari.

Questa dimostrazione dunque della proposione I^a del VI, e tutte quelle che vi dipendono, ed altre, in cui l' eguaglianza di due ragioni si deduce dalla dimostrata proprietà dei loro equimoltiplici, mancano tutte di base, perchè il principio richiamato ha bisogno di essere dimostrato, e si usa la frode di far credere che questo bisogno non vi sia in grazia della riprovevole astuzia di dare il nome stesso di eguaglianza di ragioni anche alla *proprietà degli equimoltiplici*. Gli adoratori di Euclide abbiano pazienza: ma le magagne e le insidie vanno svelate ovunque si trovino e sieno nei trattati del loro *santo Padre* pur anche. Quindi se fosse vero che in Inghilterra, in Francia, in Germania ..... tali dimostrazioni vergini come sono in Euclide fossero ora riprodotte (il che stento a credere) dovrei io mancar di coraggio per dire questo è deplorabile regresso nei metodi dell' istruzione? No certamente. Ed a coloro che mi dicessero E chi sei tu, che con tanta arroganza ti opponi alle determinazioni che si prendono relativamente alle migliorie dell' istruzione in Inghilterra, in Francia, in Germania .....? — Chi sono? *Sono un pover' uomo che fa uso del senso comune*.

Con queste dimostrazioni Euclidee voi ricorrete all' inganno. Voi con lo stabilire dolosamente medesimezza di segni per la espressione di due idee diverse, chiamando cioè con le stesse parole » *eguaglianza di ragione* » tanto la loro vera eguaglianza, quanto la proprietà degli equimoltiplici, tentate di soppiatto di trascinare le menti degli Allievi dall' idea di questa a quella, senza che essi ne avvertano il passaggio, anzi la furtiva sostituzione. E ad ottenere il riprovevole intento vi giova l' astuzia usata di non portare il menomo cambiamento nei segni che identici avete stabiliti per entrambe le idee. Così nelle dimostrazioni in cui ricorrete a questa insidia, e sono parecchie nel libro

V e VI, voi non vi diportate affatto con ingenuità : vi diportate in vece come se agli Allievi diceste « pronto è l' agguato : la rete è spiegata : merlotti venite . Merlotti però gli Allievi tutti non sono ; ed è perciò che questi antichi giojelli della teoria degli equimoltiplici in scena riprodotti non fanno la più bella comparsa .

Ma non ho ancora chiuse le labbra ; e già parmi sentire piovermi addosso rimproveri per essere sceso in triviali bassezze , quali sono le ridicole allegorie di *reti* e *merlotti* contro il galateo e la serietà propria dei Cultori delle scienze . Ed io così replico a questi rimproveri . L' impostura , sia pure che si trovi nei libri di Euclide , non va tollerata . Innanzi poi al vostro galateo stanno i precetti del Venosino . Quando trattasi di gravi e ostinati pregiudizi , che è d' uopo di svellere, desso è che ci dice

. . . . *ridiculum acri*
Fortius et melius magnas plerumque secat res

E in mezzo a tanta rinnovellata venerazione per Euclide , è divenuta cosa importante , *magna res est*, il recare in piena evidenza le sue magagne , il palesare che nel V° e nel VI° si hanno parecchie dimostrazioni che non dimostrano, perchè derivanti da quella famosa V^a, la quale o tu la prendi per una definizione , e non giova allo scopo (§. 85,86) , o tu la prendi per un teorema , e da Euclide non è dimostrato . L' argomento è cornuto : e con esso mi è grato dar termine alla tesi che in questo II° Assunto aveva io preso ad isvolgere , e che svolto avere mi sembra ad esuberanza , le mie idee esponendo senza umani riguardi , senza misteri , e col solo sussidio della mia Logica naturale .

Assunto III.

La definizione quinta del quinto, sebbene corredata di dimostrazione, non può essere adottata come base della teoria delle proporzioni.

107 Ma se la definizione V^a del V° di Euclide riguardata come teorema non è da Lui dimostrata, taluni alle mie vedute contrarii poco fa mi dicevano, e che importa ? Questo

teorema non ha ricevuto in seguito il suo pieno sviluppo dai suoi Commentatori? E perchè dunque fate contro di esso tanto scalpore? Corredatelo di tutte quelle nozioni che credete necessarie, e che ci avete additate voi stesso, affinchè evidente questo vero addivenga « che *la reale e-* « *guaglianza delle ragioni è una legittima conseguenza* « *della proprietà degli equimoltiplici* »; e con questo corredo di nozioni che potranno dare oralmente i Maestri, i novelli elementi di Euclide saranno un vero beneficio recato all' insegnamento; e le parecchie dimostrazioni, che a quanto ci dicevate, non dimostravano (voi stesso sarete obbligato a convenirne) dimostreranno perfettamente. A queste lampanti verità che cosa avreste voi mai da potere opporre, proseguivano ad alta voce essi a dirmi, avvisandosi di avermi convinto e abbattuto]. Le arguzie della severa vostra critica hanno perduto tutta la loro energia, e vi abbiamo ridotto al silenzio. »

108 E mi appiglierò al silenzio, io risposi, non già perchè per vinto io mi dia, ma per cedere la parola a tale che ne sa un pocolino più di voi e di me. Porgete orecchio alle dotte riflessioni che il Genio Pisano fa uscire del labbro a Salviati nel più volte citato dialogo. « *sovvengavi,* egli così, *sovvengavi che Euclide non disse il cerchio essere una figura piana, dentro cui segandosi due corde, il rettangolo sotto le parti dell' una sia eguale al rettangolo sotto le parti dell' altra, ovvero dentro la quale tutti i quadrilateri abbiano la somma degli angoli opposti eguali a due retti. Quand' anche ciò avesse detto, sarebbero state buone definizioni* (buone nell' unico senso che sono proposizioni vere) *ma essendovi altra proprietà del cerchio più intelligibile dell' antecedente, e più facile a formarsene il concetto, fece assai meglio mettere avanti quella più chiara per definizione per cavar poi da essa le più recondite e dimostrarle* ». E questo esempio egli pone per indurre a conchiudere che Euclide avrebbe fatto assai me-

glio, se in consimile modo si fosse diportato per rapporto alla definizione delle *ragioni eguali*.

109 Definirle non doveva egli mai per mezzo di una proprietà, la quale è vera sì, ma non è certamente delle più facili ad essere a primo intuito compresa, siccome è d'uopo che sia una definizione. Ed in vero, se concedere si potesse questo arbitrio di definire a proprio capriccio, allora per definizione delle ragioni eguali potrebbe prendersi qualunque altra delle moltissime proprietà, che alle proporzioni competono: ed il Grandi nei suoi elementi ce ne sfilza in un elenco niente meno che 116 *(nnn)*; cosicchè in 116 maniere diverse secondo il capriccio dei diversi Autori potrebbe la proporzione per quoto essere definita, lo che, se il fosse, tale confusione ne seguirebbe da non piu intenderci.

Ora se a giudizio di un Galileo pur anche va scelta per definizione una proprietà essenziale tra le più facili, tra le più chiare e fertili di applicazioni, che dire dovremo della proprietà degli equimoltiplici scelta da Euclide, la quale non solo è difficile e oscura, ma a questi requisiti quello pure accoppia della inutilità?

110 Tutte quelle particolari condizioni infatti, le quali inducono nella nostra mente uno stato di certezza, che debba in due date ragioni verificarsi la proprietà degli equimoltiplici, la pongono in pari tempo anche in grado di potere direttamente, e immediatamente senza passare affatto per complicati andirivieni convincersi della vera eguaglianza.

Per non tediarvi io mi limito ad un solo esempio fra molti, e torno alla stessa proposizione I^a del VI^o che abbiamo pure osservata al §. 106. Di questa esaminiamo l'enunciato e la tela del ragionamento quale ci è dato I^o dalla teoria *degli equimoltiplici*; II^o dalla teoria *degli aliquoti*.

(nnn) Grandi — Istituzioni geometriche — Firenze 1741 pag. 96.

1°. Ecco l' *enunciato* secondo gli *equimoltiplici* — *I triangoli che hanno la medesima altezza stanno tra loro come le basi*; e ciò equivale a dire: si vuol dimostrare che in triangoli della stessa altezza sta b a B, come a ad A, ossia che la ragione delle aje è eguale alla ragione delle basi, ossia (in grazia della definizione III^a del V°) che quella relazione che in ordine alla quantità la base b ha alla B, così pure ha l' aja a ad A. « In questa stessa enunciazione del teorema io già mi avveggo che delle nubi si addensano ad offuscare l' Orizzonte. Ed in vero prima di progredire oltre vien fatto di chiedere — Questa *relazione* in che consiste? — Oh questo è ciò appunto che nello studio di tutto il libro V° e VI° in cui di questa relazione si tratta, cosa essa sia gli Allievi non debbono sapere, Egli appaga questa curiosità nella definizione XX del libro VII° quando passa a parlare dei numeri. Farlo prima, giusta il suo sistema gli è impossibile. Bisognerebbe niente meno, che il sacrilegio commettesse di deturpare le dimostrazioni geometriche con le idee dei numeri: e quantunque aver idea di proporzioni in qualsiasi sorta di grandezza senza idee di quoti, e idea di quoti senza idea di numeri è un assurdo (§. 73,74) pure numeri in Geometrìa *nec nominentur in nobis*: ed egli, se non può impedire che si desti l' idea di quoto e in sè e in altri, si astiene almeno dal farne parola, e viene a dirvi « io voglio dimostrarvi che nei triangoli equialti fra base e base v' è la *relazione* stessa che fra aja ed aja; ma non vi curate di conoscere in che dessa consista. Rinuncierei ai miei principi, se ve lo dimostrassi. » — L' iniziativa è bella: è un vero *esordio per insinuazione*: ma procediamo innanzi.

Ecco la *dimostrazione* — Euclide dati, due triangoli, t a sinistra, e T a destra aventi comun vertice, e quindi le basi b e B nella stessa direzione, prolunga la base b a sinistra in modo che se ne abbia un multiplo qualsiasi, e tirata dall' estremo di questo multiplo della base b e da ciascuno dei suoi segmenti eguali a b al comun vertice una retta, (in grazia del teorema che in triangoli d' identica altezza a basi eguali corrispondono aje eguali) ne segue, che l' aja del triangolo eretto sulla base multipla di *b* sarà tante volte multipla dell' aja *a* del triangolo *t* quante volte la base multipla di *b* la è di *b*. Ed ecco così che dei termini delle due ragioni *b*:*B* ed *a*:*A* abbiamo equimoltiplici il 1° e 3°, ossia i due antecedenti. Con simile costruzione forma egli a destra una base multipla della base *B* del triangolo *T* sotto qualsiasi moltiplicazione, e quante volte questa la è della *B*, altrettante volte l' aja del triangolo erettovi è multipla dell' aja del triangolo *T*. Sono dunque equimoltiplici anche *B* ed *A*, cioè 2° e 4° termine. Ottenuti così gli equimoltiplici del 1° e 3° e del 2° e 4°, Euclide nota, che se il multiplo di *b* ottenuto sotto qualsiasi moltiplicazione fosse divenuto eguale al multiplo di *b*, in forza del citato teorema anche il multiplo di *a* sarebbe eguale al multiplo di *A* e per conseguenza se il multiplo di *B* fosse divenuto maggiore o minore del multiplo di *B*, egualmente anche il multiplo di *a* del multiplo di *A*. Si verifica dunque in queste due ragioni la *proprietà* degli equimoltiplici. Dunque esse in forza della definizione V^a del V° deggiono DIRSI eguali, e nulla può opporsi, poichè sulle definizioni nominali non si disputa — Tutto questo lavoro dunque a quale scopo? A provare che le ragioni delle aje dei due triangoli sono eguali alle ragioni delle basi nel senso Euclideo.

Ma che il multiplo della base dell' aja rispettiva dell' uno si accordi sempre nell' essere o eguale o minore o maggiore di qualsiasi altro multiplo della base ed aja rispettiva dell' altro a che mi giova, se per es. m' interessasse di essere accertato che essendosi in un terreno di figura triangolare tirata una retta dal vertice ai $^3/_4$ della base, uno dei due triangoli in cui si è diviso abbia l' aja tripla dell' altro?

« Ma se in Euclide vi ha questo vuoto (ed anche nella edizione fiorentina del 1868) vi vuole ben poco, mi si potrebbe dire, ad aggiungervi ciò che a compimento della dimostrazione rimane. Dopo di avere dimostrato, che la proprietà degli equimoltiplici si verifica sempre, proseguite dicendo: dunque le due ragioni non possono essere diseguali, poichè se il fossero, sotto qualche moltiplicazione la proprietà degli equimoltiplici dovrebbe non verificarsi (§. 105) e se non possono essere diseguali dunque sono eguali. E se le basi stanno l'una all'altra, come 1 a 3, così dunque anche le aje. E con questa tenue appendice ecco la dimostrazione Euclidea divenuta un vero modello d'imitazione.

Adagio: io non ne converrei così facilmente: vi dissi (§. 109) non solo che questa dimostrazione a me sembra difficile e oscura: v'è di peggio: vi aggiunsi che mi sembrava anche inutile; e per dimostrarvelo, basta che vi ponga ora sott'occhio, come vi ho promesso, le prove brevi e chiarissime della stessa proposizione I° del VI° di Euclide secondo la teoria delle *aliquote*.

II.° Ecco la dimostrazione secondo le *aliquote*. Profittando dello stesso teorema di cui si è fatt'uso nella teoria degli equimoltiplici che cioè in triangoli equialti a basi eguali corrispondono aje eguali, se dal comun vertice si tirino rette alle basi dell'uno e dell'altro triangolo; e precisamente ai punti di separazione dei segmenti tutti eguali alla comune unità di misura con cui l'una e l'altra base si sono misurate, tanti sono i segmenti eguali della base di ciascuno dei due triangoli, e tante sono le aje eguali dei triangoletti cui è base ognuno dei detti segmenti: dunque se la base d'uno è *doppia, tripla, ennupla* della base dell'altra; così pure *doppia* ec. è l'aja: *quod erat demonstrandum*. Se non ho equivocato nel conto dei minuti secondi impiegati per esporvela, questa dimostrazione mi sembra più breve dell'antecedente: mi sembra ancora più chiara. E se il citato teorema che triangoli equialti aventi egual base hanno eguale aja ci reca immediatamente senza bisogno affatto di altri amminicoli alla illazione desiderata della vera eguaglianza delle due ragioni, ditemi quale nella proposizione I^a del VI^o quale importanza hanno gli equimoltiplici? Non altra certamente, (permettetemi il basso ma espressivo proverbio) che quella dei cavoli a merenda. Da certe date condizioni far discendere la proprietà degli equimoltiplici, e poi da questa a poco a poco dedurre quell' eguaglianza di due ragioni, che è l' oggetto della dimostrazione, mentre immediatamente, direttamente, e nel più chiaro modo da quelle stesse condizioni si può far discendere, egli è un metodo di dimostrare veramente ammirevole!

Mi è uscita appena l' ultima parola di bocca, e già odo farmi questo rimprovero. « *Tu da Cattedratico sputi sentenze con troppa facilità, e barzelletti a dir vero con ributtante impudenza senza accorgerti che ci schiccheri dei majuscoli errori. La tua vista geometrica è molto illanguidita, giacchè più non ti è dato di scorgere i casi tutti particolari che abbracciar debbe una dimostrazione per essere completa. Tu non ti sei avveduto, che mentre la dimostrazione magistrale d' Euclide abbraccia i casi tutti, la tua ben gretta si limita al caso semplicemente in cui le due basi abbiano una comune misura. E se non l' avessero? Che cosa in tal contingente la tua dimostrazione ci appalesa? Nulla* » — E nulla ripeto pur' io. E dite pur bene che la mia vista geometrica si è indebolita: ma indebolita è anche più la vostra memoria. Avete già dimenticato tutto ciò che con qualche risentimento vi ho esposto alla pag. 68? E se le basi non avessero comune misura, chiederò io a voi, in che condizioni ci troveremmo? Non sarebbe questo quel caso d' *incommensurabilità* nel quale la proporzione non può aver luogo? Sta dunque bene che *nulla* la mia dimostrazione possa dirvi in proposito, siccome avete notato. E rammentatevi che quando le basi sono incommensurabili, la proporzione che vi si offre al pensiero non riguarda gli incommensurabili ma que' commensurabili che ad essi voi medesimi sostituite, confessando senza volerlo, che il teorema non può avere in mira che l' *unico* caso della commensurabilità. Questa è ormai una canzone che vi ho ripetuto più volte: ma veggo che la ripetizione non è inutile, giacchè gli errori inveterati spesso ripullulano in diverse circostanze sotto aspetti diversi.

E que' Geometri appunto nei quali sbarbicato non è ancora totalmente l'errore di cui parliamo, proseguono a dirci « Comunque sieno le cose, le proporzioni tra gli « incommensurabili sono in bocca di tutti. Euclide non po- « teva perciò fare a meno di ammetterle; ed è degno di « ammirazione il modo con cui vi è eccellentemente riu- « scito. Sia pure che La Grangia dia alle ragioni geome- « triche il nome di ragioni per quoto: l' idea del quoto è « in contraddizione con quella degli incommensurabili; ed « Euclide non avrebbe potuto soddisfare alla necessità in « cui trovavasi d' incastrare anche gli incommensurabili « nel fascio delle quantità suscettibili d' essere comprese « sotto la definizione delle ragioni geometriche, senza che « da questa definizione avesse prima eliminato l' idea del « quoto. Ecco il motivo che indusse Euclide a dirci che « *la ragione Geometrica è una relazione tra due gran-* « *dezze in ordine alla loro quantità,* l' idea escludendovi « del *quante volte* l' una grandezza è contenuta nell' altra. » Se tu avessi saputo collocarti nella posizione e nell' in- « tenzioni di Euclide, non avresti con tanta leggerezza « azzardata la critica che hai fatta a quella definizione. » — Ho appreso; e perdonatemi: io non conosceva questo nuovo precetto di Didattica il quale ammette esservi dei casi nei quali sia necessario fare apparire il falso per vero. Mentre nella maggior parte delle sue teorie la logica di Euclide è lodevolissima, nel suo libro V° s' incontra per i piedi con la Logica naturale. Questa rettifica le definizioni affinchè più manifesti appariscano gli assurdi: quella guasta e rende inconcludenti le definizioni, affinchè gli assurdi appariscano per veri.

Più parole sarebbero soverchie per dimostrare, che per qualunque lato si osservi la cosa, il ricorso agli equimoltiplici nella proposizione I^a del VI^o di Euclide è del tutto inutile.

Se un ragionamento havvi sempre assai più chiaro, facile e breve della teoria degli equimoltiplici, niun buon metodo didascalico potrà approvarla giammai. Ed ecco sotto l'egida di Galileo di esuberanti prove corredato il terzo assunto pur anche.

Conchiudiamo percio I^o la definizione V^a presa nel naturale significato porta a contraddizioni. II^o Benignamente interpretata è vera, ma da Euclide non dimostrata. III^o Dimostrata ancora che fosse, sarebbe ridicolezza il servirsene.

CAPO IV.

Migliorie nell' insegnamento della Matematica elementare.

112 L'esposto ci porta a conchiudere che l'elementare insegnamento delle Matematiche di tutt' altro abbisogna che del ritorno ad Euclide. Miglioramento a desiderarsi è a mio parere il depurarlo da molti errori, dai quali deturpati sono tutt' ora i corsi elementari a giudizio pur anche del celebre Hoüel, che ce lo significò non già molti anni indietro, ma sulla fine dello scorso 1867. E questi errori non spariranno, finchè Matematica e Logica non si assorellino insieme; nè ciò potrà mai conseguirsi, finchè e dai libri di testo, e dagli Insegnanti non venga la mente degli Allievi obbligata nei punti i più essenziali ad annettere ai segni le idee relative.

Giova annettere spesso ai segni le idee.

113 Convengo pienamente ancor io che la parte la più elementare della Geometria sia bene insegnarla prima dell' Algebra, poichè la figura somministra un bel sussidio alla mente per farvi più impresse rimanere le proprietà delle linee degli angoli, dei poligoni. Sono d'avviso pur io, che il calcolo algebrico con facilità ci trascini a quasi

meccanicamente agire sulle lettere senza trattenerci sulle quantità che per esse ci rappresenta: non do però il mio assenso all' opinione di quelli, che per togliere questo difetto si avvisano abbia del tutto ad eliminarsi dalla scienza dell' estensione il calcolo algebrico. Non servirsene perchè non lo usò Euclide è un passo retrogrado assai. Vorremmo disconoscere i sommi vantaggi che sono derivati all' insegnamento dal connubio dell' Algebra alla Geometria? No certamente. Obblighiamo gli Allievi per mezzo di sintetiche costruzioni a rilevare nella figura le varie proprietà dell' estensione? ma in pari tempo facciamo sì che ne gustino le coincidenze con i risultati del calcolo. Veggano essi per es. che il quadrato costruito sopra una retta è uguale alla somma dei quadrati costruiti sulle due parti dalle quali è costituita, e del doppio loro rettangolo, ma oon si trascuri di fare ad essi osservare l' analogia con $(a+c)^2 = a^2+c^2+2ac$. Si dimostri loro il celebre teorema di Pitagora, uso facendo dell' elegante costruzione dataci dal suo inventore: ma si faccia pure ad essi conoscere come la stessa verità interessantissima è una illazione che traggesi dal maneggio delle proporzioni dei triangoli simili al totale che forma l' altezza abbassata sull' ipotenusa del triangolo rettangolo, ec.

114 Nel maneggio poi delle proporzioni e nella indicazione delle operazioni relative alla quantità estesa, si abbia l' avvertenza di ripetere spesso agli Allievi il significato di questi laconismi « *Moltiplicazione di linea per linea* « *di superficie per linea*, o di *divisione di superficie per* « *linea*, *di volume per superficie* ec. a norma del consiglio dato (§. 112).

Per es. il teorema fondamentale della planimetria « *La superficie d' un qualunque rettangolo è data dal prodotto della base nell' altezza* » sia pure espresso dalla formola $S = A.B$: ma si faccia riflettere bene che quel B nella formola non esprime la linea base del rettangolo, ma un rettangoletto risultante di tanti quadratelli aventi per lato l' unità lineare, quante sono le unità lineari della base: che quell' A

non è nè una linea, nè una superficie, ma è un numero indicante ripetizione, il quale ci significa che per cuoprire tutta l' aja del rettangolo fa d' uopo l' uno accanto l' altro collocare tanti rettangoletti quante sono le unità lineari del lato A perpendicolare alla base. E allora il concetto della $S = A.B$ è appreso magnificamente dagli Allievi; ed allora contrasto alcuno non prova la loro mente in ammettere un prodotto, che a primo aspetto a tenore dell' enunciato sembrava eterogeneo al moltiplicando, mentre lo vede omogeneo, perchè il moltiplicando stesso è una superficie.

115 In somma ai segni $S = A.B$ o la mente non annette idea veruna, o se qualche idea vi annette, questa è un *numero*. La formola infatti è diretta a dare alla superficie del rettangolo un valore. Ma il valore delle grandezze non si ottiene che per mezzo della misurazione, e non si ha misurazione senza numero.

E poichè per le superficie l' unità di misura che si è scelta è il quadrato, così la mente ottiene il numero dei quadrati costituenti S al modo stesso (nè senza perchè è il paragone) che ottiene il numero dei soldi costituenti l' importo per es. di chilogrammi 4 di pane a soldi 6 il chilogrammo. Come questi soldi 6 valore di un chilogrammo ripetiamo 4 volte perchè 4 sono i chilogrammi, così i 6 quadrati per es. (valore del rettangoletto B) ripetiamo per es. 4 volte, perchè 4 sono i rettangoletti, che conviene l' uno all' altro accostare per formare il rettangolo totale; e 4 sono perchè 4 sono le misure lineari dell' altezza A.

116 Simili osservazioni vanno praticate allorchè dimostriamo che in qualsiasi parallelogrammo parimenti $S = A.B$: che in qualsiasi triangolo $S = {}^1/_2 A.B$, in qualsiasi poligono regolare $S = {}^1/_2 A.P$, ecc. In tutti questi casi nelle prime lezioni è d' uopo trattenere la mente degli Allievi sul vero valore dei segni. Così per es. nell' ultima sopra esposta formola giova fare riflettere che P non esprime già il perimetro, e nemmeno una retta eguale all' assieme dei suoi lati, ma un rettangoletto elevato su questa retta, ed

avente l' altezza dell' unità di misura; e che A non è l' apotema, ma è un numero indicante ripetizione, il quale ci esprime, che dobbiamo ripetere tante volte il rettangoletto P, quante unità di misura sono contenute nell' apotema A. L' ottenuto rettangolo poi $A.P$ è la somma dei rettangoletti, ciascuno dei quali è il doppio di ognuno di que' triangoli isosceli tutti eguali, nei quali il poligono regolare per mezzo dei raggi obliqui è diviso; cosicchè l' aja di questo poligono è precisamente eguale alla metà di questo rettangolo. E bene è pure far loro propriamente per ispezione di figura comprendere questa equivalenza, prolungando la base di uno dei detti triangoli isosceli, sicchè divenga eguale al perimetro: elevando agli estremi di questa base prolungata due normali eguali all' apotema del poligono, compiendo il rettangolo per mezzo di una retta che congiunga le estremità superiori delle due normali, dividendo il rettangolo in tanti rettangoletti tutti eguali, quanti sono i triangoli isosceli tutti eguali nei quali è diviso il poligono regolare, e finalmente mostrando sulla figura come ogni rettangoletto è il doppio d' ogni triangolo, perchè avente egual base ed altezza, donde la conseguenza che la superficie del poligono regolare è la precisa metà del rettangolo espresso da $A.P$.

117 D' uopo è pure far bene intendere ai discenti nelle prime volte che occorrono le formole indicanti divisione nelle quantità estese, il vero significato dei segni. Noi troviamo per es. relativamente ai rettangoli, per i quali abbiamo $S = A.B$, le seguenti espressioni

« Dunque I°. . . . $B = \frac{S}{A}$; e II°. . . . $A = \frac{S}{B}$ »

e leggiamo « *dunque la base è uguale alla superficie divisa per l' altezza, e l' altezza è uguale alla superficie divisa per la base* » Queste formole e questi laconismi sono utilissimi, nè vanno eliminati dal linguaggio scientifico per la loro aridità e inesattezza, come taluni vorrebbero; ma vanno in vece più e più volte nel primitivo insegnamento dilucidati a dovere. Il difetto non è nelle formole, è nella mancanza di que' preliminari indispensabili da me esposti al (§ 21 al 29) perchè ne sia bene inteso il preciso significato.

La I^a non ci dice già a rigore che *la superficie divisa per l'altezza è uguale alla linea base*. Le nozioni date intorno alla divisione (§. 25 al 27) ci avvertono, che ciòè assurdo. Il divisore A abbiam veduto, che è il moltiplicatore: dunque il quoto B è il moltiplicando omogeneo al dividendo S; e perciò non è la linea base, ma è il rettangoletto costruitovi; e perciò S *diviso* A significa la superficie del rettangolo, resa tante volte più piccola quanti sono i rettangoletti da cui è costituita, è uguale, come è ben chiaro, al rettangoletto costruito sulla base, ossia al numero dei quadratelli che lo formano. Essendo poi questo necessariamente uguale al numero delle unità di misura della base, il numero che si ottiene esprime pure la base lineare; ed è perciò che ci permettiamo dire *la base esser la superficie divisa per l' altezza*.

La II^a non ci dice già *la superficie divisa per la base è uguale all' altezza*. Il quoto A è il moltiplicatore: dunque il divisore B è il moltiplicando (§. 25): dunque B non è la base linea, ma il rettangoletto costruitovi: dunque dividere S per B significa osservare quante volte il rettangoletto B sta nel rettangolo S. Siccome però quante volte vi è contenuto, e tante sono le unità di misura lineari contenute nell' altezza, è per questo titolo che il quoto A, il quale come dato dal calcolo non esprime che il *quante volte*, ci indica anche l' altezza che è una *linea*, quantità eterogenea al Dividendo e al Divisore, i quali sono in questo caso omogenei perchè sono il prodotto e il moltiplicando, ossia il tutto (cioè il rettangolo) e la *parte* ripetuta (cioè il rettangoletto) costruito sulla base (§. 114).

No: senza queste così chiamate da taluni sofisticherie, esatte idee relative alle laconiche espressioni « *linea moltiplicata per linea dà per risultato una superficie* » « *Superficie divisa per linea dà per risultato una linea* » e così « *Superficie moltiplicata per linea dà per risultato un volume* » « *Volume diviso per linea dà per risultato* *una superficie* » ec. esatte idee non si acquistano dagli Allievi. La sperienza di un mezzo secolo me lo conferma.

118 Dalla stessa formola fondamentale « Nei rettangoli $S = A.B$; e quindi $s = a.b$, scende immediatamente $s : S = a.b : A.B$, che cioè (per esprimerci col linguaggio usato dai Geometri) « Nei rettangoli le superficie stanno nella ragione composta delle basi ed altezze. » Ed infatti dopo che nel modo il più facile ed esatto si è dimostrato che $s = a.b$ ed $S = A.B$, è della massima evidenza, che la superficie d' uno sia contenuta nella superficie dell' altro tante volte, quante il numero delle unità di misura snperficiali di che risulta il 1° rettangolo (numero espresso per $a.b$) è contenuto nel numero delle stesse unità di misura superficiali espresse per $A.B$, delle quali risulta il 2°.

119 In tutti gli elementi di Geometria che sono a mia cognizione la dimostrazione di questo teorema semplicissimo si fa scendere dalle nubi. Cominciando da Euclide (il quale applica la sua dimostrazione non ai soli rettangoli, ma a tutti i parallelogrammi equiangoli) io veggo che hanno tutti bisogno di dar principio 1° da una particolare collocazione di un parallelogrammo rispetto all' altro, dalla contiguità cioè d' uno dei loro vertici: 2° d' uopo hanno poi della costruzione d' un terzo rettangolo: 3° del confronto di ciascuno dei due dati con questo terzo, e della formazione di due proporzioni: 4° dell' applicazione, ed eccoci al nuvolo, o della ragione composta (e così Euclide, che vi ricorre senza averla nella definizione XI del V bene spiegata) o della così detta *moltiplicazione in ordine* di due proporzioni (e così Legendre), *moltiplicazione in ordine*, della quale per lo più gli Allievi non hanno idee chiare, specialmente quando la teoria algebrica delle proporzioni non sia stata premessa.

Da questo teorema poi $s : S = a.b : A.B$ Legendre fa discendere come corollario la proposizione fondamentale per la planimetrìa $S = A.B$; facendo osservare che se uno dei due rettangoli, cioè s si prenda per unità di misura, sicchè si abbia $s = 1$, ed $ab = 1$, la proporzione superiore diventa $1 : S = 1 : A.B$, donde $S = A.B$.

120 Io ora vorrei che un Geometra ideologo, spogliandosi di ogni predilezione per le teorie cui è stato educato, meditasse alcun poco sulla serie dei giudizi per i quali è obbligata passare la mente giusta i metodi comunemente usati nelle scuole, e che vi ho qui sopra accennati per giungere alla proposizione « *Nei rettangoli* S $= A.B$; e alla serie dei giudizi, per i quali la mente è obbligata a passare giusta il metodo da me praticato. Io credo certamente, che non starebbe perplesso a chi dar preferenza, e non direbbe ciò che mi si disse una volta, che le mie dimostrazioni sono chiare, ma troppo materiali. Ora la brevità e la chiarezza delle dimostrazioni che vi ho esposte non sono che la conseguenza della riflessione portata su i veri oggetti che sono ai segni associati.

Obbligar la mente a spesso tornare sulle idee (lo che pur troppo è vero che bene spesso trascurasi allorchè o si fa abuso, o non si fa retto uso delle formole, questo, e non la teoria degli equimoltiplici è uno dei miglioramenti che conviene procurare che s' introduca nell' insegnamento della Geometria elementare; e alla chiarezza delle idee non nuocerà allora la preziosa brevità dei segni algebrici con saggia parsimonia introdotti.

Nuoce all' insegnamento supporre antagonisti
numero ed estensione.

121 Ma in ciò fare credono taluni incontrare uno scoglio specialmente negli enunciati teoremi. « *Spesso le idee dei numeri furtive s' introdurrebbero nel pensiero; e la nobiltà della scienza della estensione non permette di scendere a queste bassezze. Vorreste*, mi si soggiunge, *vorreste voi intorbidare la purezza della Geometria antica, trasformando teoremi geometrici in formole algebriche, sostituendo alle grandezze concrete* (*linee, angoli, superficie, volumi*) le loro misure? *La Geometria, dice Hoüel, forma una scienza completa che basta a sè stessa, e non invoca in veruna parte nelle sue dimostrazioni la scienza dei numeri* ».

122 Ed io rimarco, che queste vedute aristocratiche,

le quali vorrebbero liberare la Geometria dal sussidio della plebe dei numeri, sono anch' esse nocive all' insegnamento; e la Logica naturale non potrà mai tollerarle. Vi sono delle proprietà nelle quantità estese che nulla hanno che fare con i numeri: ve ne sono però altre che sono fuse immedesimate con i numeri, e non vi vuole che un' ostinata stravaganza per negarlo. Fate, se è possibile, che la mente non pensi ai numeri nella teoria delle figure simili, nella planimetrìa e volumetrìa. Come ammettere proporzioni tra i lati delle figure e tra le loro aje senza l' idea del quoto, e questa senza quella dei numeri? Come planimetrìa e volumetrìa, misura cioè dei piani e volumi senza unità di misura, e senza il *numero* delle unità di misura che la cosa misurata presenta?

123 « Oh il rimedio, mi direte, è ben facile! Relati-
» vamente alle proporzioni, imitate Euclide, e ve ne
« troverete contento. Fate consistere le ragioni in una
« relazione di due grandezze in ordine alla quantità, senza
« determinare in che dessa consista; ed ecco che i numeri
« sono esclusi » — Ed ecco allora, io ripeto, le *spine*, ed il *labirinto* che Tacquet trova nel libro V di Euclide, e la *caligine* che vi incontra Galileo (§. 13) e le *ambagi* che vi scuopre Wiston (§. 14) e l' *oscurità* delle definizioni che ci dichiara De-Chales (§. 15) ec. ec.

« Relativamente poi alla planimetrìa e volumetria,
« mi si soggiunge, il rimedio è più facile e comodo. Non
« recate affatto la mente degli Allievi a cercare come si
« ottenga la misura di qualsiasi poligono. Non dovendo
« nelle scuole classiche l' insegnamento della Geometria
« essere diretto ad uno scopo professionale, quale sarebbe
» quello per es. dell' Agrimensore, il non trattarne non vi
« si può attribuire a difetto ». E debbo io convenirne? Che ad ogni geometrica proposizione non debba l' uso pratico seguire della medesima, ne convengo pienamente. Ma *est modus in rebus*. Forse il successore alla Cattedra di Newton errava grandemente, allorchè parlando degli elementi d' Euclide che usar doveva per testo, diceva che,

ob corollariorum defectum elementa nimis abstracta, gracilia et taedi plena causabar? Che nell' insegnamento della Geometria, la quale dal bisogno di misurare le terre per la divisione delle proprietà trasse e origine e nome, che nell' insegnamento della Geometria, mercè la quale « *Cautus humum longo signavit limite mensor* » abbia ad aversi la misura in aborrimento, io stupisco! Ma portare nella mente dell' Allievo il pieno convincimento, che un poligono qualsiasi il più irregolare esattamente contenga un dato numero di unità di misure, lo che sembra a primo aspetto impossibile, perchè è impossibile che qualunque unità di misura possa applicarvisi ripetutamente senza lasciare lacune e interstizi, e questo convincimento recar in sua mente mercè l' applicazione di pochi e facili teoremi relativi alle equivalenze, è forse un dargli una cognizione superflua e di niun diletto ed utilità? Non v' è forse in queste teorie di misurazione il massimo rigore geometrico, la forza tutta del raziocinio? L' occupare in esse qualche poco gli Allievi non è forse un dar loro esercizi d' intellettuale coltura, di ginnastica del pensiero, non è in somma un *miscere utile dulci*? Dovremo astenercene per non introdurre numeri nelle geometriche dimostrazioni? Ma fra numero ed estensione v' è forse un antagonismo assoluto? Ma il numero non appartiene alle grandezze sì discrete che continue? Ma le mille pianelle al magazzino cessano di esser mille, quando collegate insieme formano un pavimento? Ma tutte quelle tenui sbarre di divisione, che separano in più parti quelle molte linee verticali, di che sono gremite tante pagine del libro V° di Euclide, ovvero que' piccolissimi intervalli tra le varie parti d' una linea per es. — —, — — —, — — — —, non servono a porgerci sott' occhio 2, 3, 4 lineette esprimenti 2, 3, 4 cose in genere? E queste lineette non equivalgono a cifre; anzi sotto un altra forma, non sono cifre esse stesse? Secondo la grafica costruzione usata dagli Indiani, le nove cifre significative non erano anch' esse una collezione di tante lineette sotto diverse foggie disposte, quante sono le unità del complesso che dovevano rappresentare? E perchè Euclide, ed anche i più Moderni suoi traduttori per mezzo di quelle picciole sbarre fecero uso di una lingua che con Tracy chiamerò *dipinta*, piuttosto che della lingua *scritta* per indicare i numeri, forse i numeri indicati non sono più numeri? Quale lezione mortificante non è per noi di mediocre ingegno il vedere ingegni sublimi cadere in così madornali e patenti contraddizioni! Che vi giova il non nominare i numeri, affinchè non abbiamo a pensarvi, se poi (sieno pur minutissime quelle sbarrette) voi per mezzo di esse, ce li ponete sott' occhio? Esse anzi fanno maggiore impressione, che se ci diceste in vece *due, tre, quattro* ec., poichè

Segnius irritant animos demissa per aures
Quam quae sunt oculis subiecta fidelibus.

Per mezzo di quelle sbarre voi presentate agli Allievi dei casi particolari su cui fermare la loro mente per poi condurla a quelle generalità che non sarebbero state senza il precedente caso particolare agevolmente comprese. E non condanno già il metodo. Esso è anzi il procedimento didattico il più naturale ed il più filosofico. Vi fo soltanto riflettere, che i numeri, cui senza accorgevene siete stati naturalmente condotti a ricorrere, non deturpano, ma sussidiano molte teoriche della Geometria, e per alcune sono pur anche indispensabili, siccome abbiamo dimostrato.

Nell' insegnamento giova l' ordine il più esatto.

124 Se nell' unità del concetto, se nel rigoroso nesso, che insieme collega le cognizioni chiare e distinte che vi si riferiscono sta il pregio d'ogni scienza, il *simplex dumtaxat et unum*, e il *lucidus ordo* d'uopo è che facciano mostra di sè la più bella nella scienza per antonomasia. Uopo è di una successiva non interrotta catena, che l'una all'altra subordini le verità che si vanno sviluppando; e il primo anello d' uopo è che parta dalla origine delle idee della estensione, la quale non ci è data che dai sensi. Questo bisogno è ben sentito dal Ch. Hoüel, il quale, mentre loda Euclide, espone in pari tempo « *lo schizzo d' un piano, secondo il quale si potrebbero* (desso è che il dice) (ooo) RICOSTRUIRE PIÙ regolarmente le 32 prime proposizioni del *libro* I°, *non perdendo mai di vista l'origine delle idee geometriche.* » E intorno a queste chiaramente egli si esprime (pag. 2) *che i sensi soli possono metterci in relazione con la estensione: ed essi ci hanno fatto conoscere un gran numero di proprietà senza invocare il soccorso della Logica deduttiva;* e più chiaramente alla pag. 60 ci espone, parlando del movimento geometrico, che « *questa idea è identica con quella della grandezza, poichè è precisamente in grazia del movimento che noi giungiamo all' idea di grandezza.* »

125 Sono queste vedute di mia piena soddisfazione, perchè uniformi le trovo a quelle che da 40 anni ad oggi io cominciai ad esporre nei miei elementi di Geometria. Io ho sempre ai miei Alunni insegnato che le primitive idee dell'estensione sensibile derivano dal movimento della mano e dell'occhio, mercè del quale io percepisco la continuazione di un colore o di una resistenza, null'altro essendo in origine la quantità estesa che o un colore o una resistenza continuata. Egualmente al movimento ho fatto sempre ricorso per ispiegare i rapporti di posizione che possono avere tra loro le rette in un medesimo piano. Ed invero ho fatto sempre l'idea concepire della *coincidenza* col trasportare sopra di una retta immobile un altra retta in guisa, che due, e quindi tutti i punti di questa combacino perfettamente con quelli dell' altra. Dalla coincidenza poi ho fatto nascere la *convergenza* supponendo, che la retta sovrapposta fissata per uno dei suoi estremi sull' altra, presa per l'altro estremo, venga mossa; sicchè abbandonata la direzione primitiva, una ne prenda sempre più successivamente diversa dalla sottoposta immobile; donde l'idea dell' angolo non consistente in altro, che nella minore o maggior divergenza, (e non già in uno spazio indefinito come dice Francoeur.) E questa minore o maggior divergenza è inseparabile (se c'interessa seguire il naturale sviluppo delle idee)

(ooo) *Hoüel* — Essai critique ec. Paris 1867 pag. 7.

nella sua genesi dalla genesi dell' arco e del settore del cerchio. Dalla stessa coincidenza ho fatto pur nascere l'idea del *parallelismo*, supponendo che la retta sovrapposta tutta ad uu tratto senza serbare sulla sottoposta fissa alcun punto, concepisca un unico movimento di traslazione, scevro affatto da qualsiasi menoma rotazioue intorno a veruno dei successivi punti di una retta secante che va nel suo trasporto incontrando: e così l'idea della direzione (la quale è ben chiara, sebbene non definibile) e l' idea dell' unico movimento di traslazione insieme congiunte rendono evidente, che la retta fissa, e la retta mossa in qualunque istante della sua traslazione sono I°. equidistanti; giacchè per non esserlo più, havvi bisogno d' un moto di rotazione intorno alla secante. II°. Come equidistanti, prolungate all' infinito non s' incontrano mai. III. Fanno con la secante angoli corrispondenti eguali, giacchè affine fossero diversi, d' uopo sarebbe che la mobile nel suo allontanarsi dalla retta fissa avesse almeno per un istante roteato intorno alla secante sicchè si fosse resa più o meno da lei divergente il che è contro l' ipotesi.

Queste tre proprietà precipue delle parallele nascono così spontanee dalla genesi indicata, che senza sforzo, senza esitanza la mente le riguarda come fuse insieme, e pienamente evidenti, al modo stesso, che senza esitanza è convinta che due rette si confondano in una quando hanno due punti comuni.

126 Molti antichi e moderni Geometri hanno creduto bisognosa di dimostrazione l' eguaglianza degli angoli corrispondenti *(ppp)* e l' hanno riguardata come un corollario del postulato V d' Euclide non troppo fin qui felicemente spiegato. E intorno a ciò io rimarco, che certi principi, alla cui intuitiva evidenza ci recano i sensi, possono essere benissimo il risultato d' un ragionamento. Spesso però avviene, che nelle lunghe dimostrazioni date in proposito la conseguenza discenda dalla nascosta intrusione di qualche altro

---

(ppp) Vedi *Purgotti* — Segreti dell' arte di comuuicar le idee, Perugia 1858 pag. 17.

principio alla cui verità intuitiva parimenti contribuiscono i sensi ; ed allora non facciamo che inutilmente trasportare da un posto all' altro la verità assiomatica , riguardando uno dei due princìpi intuitivamente evidenti come un teorema che discende dall' altro che si prosegue a riguardar per assioma , mentre potrebbe indifferentemente aver luogo il viceversa. In ogni modo però, sebbene io non conosca *gli studi geometrici fatti sulla teorìa delle parallele* da Lobatschewscki , e Bolay , nè la *Pangeometrìa* , nè la *Geometrìa immaginaria* che per esser *immaginaria immagino* non esser pane per i miei denti , opere che veggo citate in Hoüel alla pag. 72 e 77, pure conchiudo che (meno il caso di un ragionamento il piu facile e breve , con che venisse dimostrata l' eguaglianza degli angoli corrispondenti nelle parallele) una dimostrazione ragionata di questa verità va esclusa dalle prime pagine di un trattato elementare di Geometrìa , e l' eguaglianza di questi angoli va presentata come idea integrante del parallelismo , siccome ho sopra enunciato, giacchè la mente non può far a meno di annuirvi .

127 Dimostrata l' utilità di dare inizio dalla genesi delle idee , da questa conviene far discendere le altre con tal subordinazione , che escluda affatto verità isolate ed indipendenti . E intorno a ciò nella mia poc' anzi citata operetta alla pag. 13 così mi esprimeva . » *Vuoi tu un se-*
« *greto per conoscere se hai fedelmente eseguito quest' im-*
« *portante precetto (unità ed ordine) dell' arte di comu-*
« *nicare le idee ? Eccolo. Quando hai dato termine ad un*
« *trattato , fanne lo scheletro . Se ti riesce di compilarlo*
« *in poche parole , e con molta facilità , e senza nulla*
« *ommettere di ciò che di sostanziale gli appartiene : se*
« *puoi farlo senza essere obbligato a deviare in importuni*
« *episodii, sii contento del tuo operato. E se questo sche-*
« *letro porrai in fine del trattato medesimo , te ne sarà*
« *ben grato l' Allievo diligente, che in quelle poche linee*
« *troverà il filo d' Arianna che bene i suoi passi diri-*
« *ge , e quella miniatura che d' un colpo d' occhio uti-*
« *lissimo tutto gli richiama ad un tratto ciò che ha pro-*

« *fondamente studiato* ». Accingiti ora a fare questo lavoro negli Elementi di Euclide, e non ti sarà dato al certo di riuscire nell' impresa. Molte verità ti rimarranno isolate, e fuor del telajo. Quell' Hoüel medesimo, che nella sua Appendice alla pag. 84 ci dichiara che adotterebbe il metodo di Euclide in tutto il suo rigore, alla pagina 7 ed 8 in cui parla dell' ordine, ben si accorge, che in tutto il suo rigore non potrebbe del metodo di Euclide far uso. E sebbene limitato egli siasi alle prime 32 proposizioni semplicemente, pure nel suo saggio di una esposizione razionale della Geometria elementare, con tutta la deferenza che ha per Euclide, di 32 proposizioni ne elimina nulla meno che 24; e delle 8 che accetta, una dichiara che potrebbe esser tolta, e relativamente ad un' altra confessa che la dimostrazione di Legendre è molto più semplice. E mentre un commendatore di Euclide nel 1867 ce lo presenta nelle sole prime 32 proposizioni le meno difettose così contraffatto da non più riconoscerlo (§. 11) dobbiamo nel 1867-68 vedercelo ricomparire (e bene a ciò riflettete) vestito dei vecchi suoi abiti anche ove i difetti sono più gravi? !

Mi è frattanto piacevole il rimarcare, che la disposizione che Hoüel dà alle poche nozioni elementari di Geometria da lui esposte è analoga a quella che circa 7 lustri indietro io detti alle materie stesse; e mi porta a credere, che sia pure a tenore delle sue vedute l' ordine che tengo nel rimanente dei miei elementi. Ciò potrà il Lettore ben rilevare confrontando il quadro degli articoli di Hoüel col quadro di tutto il mio corso elementare di Geometria, i quali pongo quì in nota (*qqq*).

(*qqq*) Ecco il sopracitato quadro di Hoüel — ***Proprietà degli angoli aventi*** 1° ***il vertice stesso*** — 2° ***il vertice diverso*** (***Teoria delle parallele***) — 3° ***Proprietà di un triangolo*** (***Eguaglianza e diseguaglianza***) — 4° ***Confronto di due triangoli*** (casi di ***eguaglianza e diseguaglianza***) — ***Poi verrebbero le proprietà dei quadrilateri e poligoni*** .

Ecco il quadro del mio Corso elementare diviso in tre libri, dedicato il 1° alle *linee*, il 2° alle *superficie*, il 3° ai *volumi* .

Nel LIBRO 1°, fatta distinzione delle *linee rette*, *poligone* e *cur*-

128 Conchiudiamo intanto che a migliorare l' insegnamento della Geometria elementare giova 1° Lo spesso ritornare al pensiere le vere idee che sono annesse ai segni, specialmente allorquando occorrono moltiplicazioni e divisioni sulle quantità estese. 2° Giova eliminare il pregiudizio che esclude i numeri dalle teorie geometriche, e nelle proporzioni include gli incommensurabili. 3° Giova al sommo un ordine il più severo che cominci dalla genesi delle idee geometriche, e tutte insieme stringa le verità che si spiegano con nesso il più rigoroso. Le teorie esposte a tenore di queste avvertenze, e non le rancide vivande degli equimoltiplici, saranno un alimento al certo più nutritore. E se è vero che agli equimoltiplici vari esteri scienziati fan ritorno; e Galileo, e la Logica naturale, mi fanno dir francamente: *essi sbagliano*. Imitiamoli nel molto in cui meritano: ma col non seguirli nell' errore si mostri che non siam ***servum pecus***; e che la scintilla del pensiero non è spenta in Italia.

---

ve; e tra queste contemplata la sola *periferia*, vo ad esporre i tre rapporti di posizione, che possono le rette avere in uno stesso piano, la *coincidenza* cioè, da cui fo nascere le altre due, *convergenza* e *parallelismo*. Nel trattar della convergenza dò la idea genetica dell' angolo, della sua misura, delle sue diverse specie e proprietà, con cui quelle collegansi delle perpendicolari e delle oblique. Nel parallelismo parlo delle proprietà degli angoli che con le parallele fa una secante, e delle molte conseguenze che ne discendono. Tutte le verità poi che risguardano le linee non chiudenti spazio a cui il libro si estende sono dimostrate senza mai far ricorso alle proprietà dei triangoli, come a detrimento dell' ordine suole praticarsi.

Nel **LIBRO II°** dedicato alle figure piane, avendo in esse distinto perimetro ed aja, in una 1ª Sezione tratto dei loro *perimetri*, e in una 2ª delle *aje*. Nella 1ª comincio dalla figura la più semplice, di cui non ho mai prima parlato: espongo le eguaglianze e disuguaglianze d' angoli e lati relative a un solo triangolo, e poi a due: quindi dopo aver classificato i quadrilateri, ne esamino le proprietà, ed a quelle poi passo dei poligoni in genere, e dei regolari. E poichè dal confronto nascono i rapporti non solo di eguaglianza e diseguaglianza, ma pur anche di somiglianza e dissimiglianza, così fo a questi passaggio. Dopo i perimetri, esposti nella 1ª, vengo nella Sezione 2ª alle Aje. E, dimostrate varie equivalenze, notato il perchè si è scelto per misura il quadrato, mi occupo dell' interessante *planimetria* e termino con i rapporti che hanno le aje dei poligoni e tra loro e con i lati. E poichè riferibile ai poligoni regolari è anche il cerchio, tutta gli è

La mia voce, ben il conosco, è voce di vil facchino diretta a sublimi ingegni che all' edificio presiedono dell' istruzione: ma come mercè la voce di un facchino che gridò *acqua alle funi* sopra stabile piedistallo si eresse la gigantesca piramide del Vaticano, possa anche la mia voce essere eccitamento a far sì, che la vasta mole della scienza dell' esattezza si elevi sopra quel nuovo stabile piedistallo, di cui al sommo bisognosa l' addimostrava, scrivendo a Berthevin, il celebre Laplace.

Queste mie ardite parole, il preveggo, non suoneranno piacevoli a taluni, che conoscitori non molto profondi della scienza dell' esattezza, giudicano degli scritti non tanto dal loro merito intrinseco (poco capaci a ben valutarlo) quanto dalla poca valentia dell' autore. Nella mente di costoro, noi umili pensatori, cui la povertà dell' ingegno non ha sollevato a voli sublimi, nè scranna abbiamo autorevole in popolose Università, noi siamo plebe che *serpit*

---

dedicata la SEZIONE 3ª. In essa noto le proprietà e i rapporti che vi hanno le corde le tangenti e le secanti isolate: 2° gli angoli; e 3° i poligoni da esse formati: ed eccoci alle iscrizioni e circoscrizioni dei poligoni regolari al circolo e viceversa; d' onde i rapporti delle diverse corde al raggio; e in fine la misura del cerchio.

Nel **LIBRO III°** dato ai VOLUMI, osservate le relazioni dei piani con le rette e tra loro, donde le idee degli angoli diedri e degli angoli poliedri, chiudendo con le loro faccie lo spazio, ecco i *poliedri*, fra i quali prendo di mira i prismi, le piramidi, e i 5 poliedri regolari, dimostrandone la genesi, le proprietà, e la misura delle loro superficie e volumi. Fo il medesimo rispetto al *cilindro*, al *cono*, alla *sfera*; e di questa rimarco anche i rapporti col cilindro e col cono.

E il quadro ho qui posto del mio trattato elementare di Geometria, non perchè il creda adattato ai Licei; giacchè oltre avervi io stesso riconosciuto qualche difetto a correggersi, è mancante di Trigonometria e Sezioni coniche, parti che nell' antico sistema d' Istruzione qui appartenevano alla Cattedra d' Introduzione al calcolo; ma per dimostrare, che l' uso di dar la genesi delle idee geometriche e l' uso del moto geometrico che Hoüel vorrebbe attuato perchè non lo è nella maggior parte dei corsi, attuato trovasi già da 31 anni a questa parte nella 1ª edizione della mia Geometria, che venne a luce in Perugia nel 1837, e che per essere uscita un poco fuori delle comuni rotaje, offrendo appunto quelle idee che desidera Hoüel, incontrò la ridevole critica di avere invaso i dominii dell' ideologia, e della fisica, perchè vi è intrusa la genesi dell' estensione e del moto.

humi, e come lordi di fango siamo posti alla pari con quei fanatici sognatori, i quali sono usciti in campo più volte, la scoperta strombettando o della quadratura del cerchio, o della duplicazione del cubo, ec. Volgere lo sguardo su di una pagina dei nostri libercoli, sarebbe un degradarsi, un perdere il tempo. Le nostre avvertenze perciò non si leggono da cotestoro: sieno o non sieno, deggiono essere sofisticherie; e i gonzi avvezzi a giurare *in verba Magistri*, piamente lo credono. Perciò se essi avvezzi a sentenziare dal tripode come sofismi e quisquiglie tutto ciò che non sono atti ad intendere, o che loro cale di non intendere, senza addurre la menoma prova, buccineranno le riflessioni che ho in queste pagine esposto essere cavilli e sofisticherie, siccome poco fa per tali buccinarono alcune mie avvertenze intorno alle equazioni di 2° grado da profondi Matematici riconosciute giustissime, rammentino che *cicaleggiare* non è *dimostrare*, e quindi che io niun conto facendo delle critiche loro, quelle moltissimo apprezzerò dei dotti in cui non è orgoglio. Egli è per avere l'imparziale loro giudizio che ad essi io dirigo questo mio scritto, di cui ecco l'origine.

Scorsi ora sono dieci anni da che la lettura dell'Articolo « *Euclide* » posto nel Dizionario delle Matematiche compilato sotto la direzione di Montferrier (*rrr*) mi obbligò ad uno studio il più che per me si potesse profondo sul V° e X° libro di questo sempre sommo Geometra. Fui veramente preso da meraviglia, allorchè in quell' articolo diretto da Montferrier di cui ho grandissima stima, trovai che « *con lo stabilire delle* « *definizioni egualmente applicabili alle quantità commen-* « *surabili, e incommensurabili, Euclide ha evitato i tanti* « *errori e le tante inesattezze che si commettono col pre-* « *mettere definizioni numeriche a ragionamenti che si* « *aggirano sopra quantità che non hanno un rapporto* « *numerico esatto* ». Mi parve allora impossibile, come mi sembra anche adesso, che dar si potesse nelle proporzioni una definizione esatta, la quale abbracciasse com-

(*rrr*) Diz. delle Sc. nat. Firenze 1842. Vol. IV.° pag. 448.

mensurabili ed incommensurabili. Per quanto rovistassi e V° e X° libro, nulla trovai che potesse rimuovermi dalle mie idee; e ciò manifestai nei miei *Segreti* ec. Ora veggo che due illustri (Betti e Brioschi) che per universale consenso primeggiano nella nostra Italia fra i cultori delle scienze esatte, e verso dei quali altissima è la stima che io nutro, raccomandano usar di nuovo gli Elementi di Euclide nell'elementare insegnamento della Geometria, includendovi quel quinto libro ancora che Brunacci e tanti altri riproduttori di Euclide avevano eliminato.

L' autorevole giudizio di Professori le mille e mille volte di me più versati nelle esatte discipline produce nella mia mente un arresto. Diffido di nuovo di me medesimo. Pongo a novello sindacato i miei princìpi: torno ad uno studio il più serio e del greco Geometra e dei suoi Commentatori antichi e moderni; e risultato di una meditazione per quanto è dato dalle mie forze profonda è un convincimento sempre più valido che la definizione V^a del V° di Euclide, e ogni teorìa che ne scende è a proscriversi dall' insegnamento.

In tale stato di cose avrei io dovuto usare silenzio, e se, mentre riconosco con Hoüel bisognosi soltanto di qualche modificazione vari teoremi d' Euclide, sono nell' intima convinzione che il V° libro non sia adottabile, doveva forse tacere per non mostrarmi contrario al parere di quei sommi? No: sarebbe stata questa un' onta la più manifesta alle eccelse doti dell' anima, che traspariscono nei loro scritti medesimi. Di esse sono infatti prova evidente le auree parole con che chiudono la loro prefazione ai nuovi Elementi di Euclide. « *Noi*, essi dicono, *abbiamo fiducia, che i professori dei Licei vorranno ajutarci in quest' opera, ed accetteremo con grato animo le loro osservazioni ed i loro suggerimenti* ». Sì: auree parole sono queste, le quali, mentre le felici disposizioni ti addimostrano del vero Sapiente che alla sublimità dell' ingegno sempre accoppia la gentilezza, incoraggiano anche le menti le più limitate ad esporre francamente i loro pensieri.

Ed io, sia pur l' ultimo fra gli Insegnanti, animato da questo amorevole invito, e memore di quanto in proposito scriveva a Gino Capponi il Giordani, che cioè « *lo scrittore, se vuole essere utile, debbe publicare il vero senza paura, imprimerlo negli animi altrui con ardente forza, e a quest' ufficio prestarsi e non a mercato di adulazione* » io ho preso la penna. Ma il vero avrò poi publicato? Reo d' imperdonabile orgoglio sarei certamente, se ardissi opinare che sia infallibile tutto ciò che mi è uscito di labbro.

Ma se nella definizione V^a del V^o libro, e quindi in tutto ciò che da essa nel V^o e nel VI^o libro deriva realmente si contenesse un difetto, sicchè per inavvertenza nei due scienziati di cui favello e non in me fosse l' abbaglio (nè ciò è cosa impossibile, giacchè che ne sieno soggetti anche i sommi, la storia ce ne assicura degli errori dello spirito umano) soddisfacente cosa è il conoscere che dispostissimi a correggersi sono pur essi. La brama ben addimostrataci di far tesoro degli altrui suggerimenti è un arra sicura di quel modesto sentire, che anche agli elevati ingegni fa dire « *Homo sum: humani nihil a me alienum puto* ». Nè può andare altrimenti la cosa. Solo i tenaci sostenitori della propria opinione si vergognano di accogliere il vero, specialmente quando autorevole non è il labbro che lo pronuncia; e si adontano ad ogni rilievo che venga fatto sopra i loro sistemi da essi creduti incrollabili, e preferiscono il ridicolo ostinarsi al coscenzioso ricredersi. Le ritrosìe, le velleità di un non secondato amor proprio a poco a poco vieppiù ingigantiscono nelle anime basse: nelle anime generose sono languide scintille, che nate appena si soffocano e spengono innanzi al venerabile simulacro del vero, cui nel tempio delle scienze l' occhio dell' intelletto è del continuo avidamente rivolto.

Egli è perciò consolante il poter dire senza tema di recare dispiacenza: *eccovi le mie idee*. « *Si quid novisti rectius istis Candidus imperti: si non, his utere mecum:* » e più consolante ancora è il riflesso, che da anime gentili non può a meno di riscuotere approvazione, anzi applauso, la schietta espressione dell' uomo che non adula

Amicus Belli, amicus Brioschi; sed magis amica veritas.

FINE.

AVVERTENZA INTERESSANTE

Alla pagina 27 linea 17 sta scritto 4 a 12 in vece di 4 a 24.

Alla pagina 38 alle sei linee la prima delle quali comincia con la parola *cioè*, e la sesta termina con la parola *essi* vanno sostituite le seguenti:

cioè data la proposizione $a:c = r:s$ gli equimoltiplici per m dei 1° e 3° termine am,rm paragonati con cn,sn rispettivi equimoltiplici del 2° e 4°, hanno la stessa ragione: ossia data una proporzione, i prodotti degli antecedenti hanno ai prodotti dei rispettivi conseguenti la ragione medesima, qualunque sia e il numero per cui gli uni, e il numero per cui sono moltiplicati gli altri.

Alla pag. 62 linea 24 sta scritto *esessere* in vece di *essere*.

Alla pag. 65 linea 17 sta scritto *dal segmento* in vece di *del segmento*.

Alla pag. 90 linea 15 sta scritto *di b* in vece di *di B*