Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2024/2025**

Lineare Algebra

Arbeitsblatt 5

Die Pausenaufgabe

AUFGABE 5.1. Erstelle eine Geradengleichung für die Gerade im $\mathbb{R}^2$, die durch die beiden Punkte $(-4, 3)$ und $(5, -6)$ verläuft.

Übungsaufgaben

AUFGABE 5.2.*

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} 3x & & +z & +4w & = & 4 \\ 2x & +2y & & +w & = & 0 \\ 4x & +6y & & +w & = & 2 \\ x & +3y & +5z & & = & 3\,. \end{array}$$

AUFGABE 5.3. Bestimme eine Ebenengleichung für die Ebene im $\mathbb{R}^3$, auf der die drei Punkte

$$(1, 0, 0), (0, 1, 2) \text{ und } (2, 3, 4)$$

liegen.

AUFGABE 5.4. Bringe das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x - 4 + 5y &= 8z + 7x, \\ 2 - 4x + z &= 2y + 3x + 6, \\ 4z - 3x + 2x + 3 &= 5x - 11y + 2z - 8 \end{aligned}$$

in Standardgestalt und löse es.

AUFGABE 5.5. Löse über den komplexen Zahlen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} \mathrm{i}x & +y & +(2-\mathrm{i})z & = & 2 \\ & 7y & +2\mathrm{i}z & = & -1+3\mathrm{i} \\ & & (2-5\mathrm{i})z & = & 1\,. \end{array}$$

Aufgabe 5.6. Es sei K der in Beispiel 3.8 eingeführte Körper mit zwei Elementen. Löse in K das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} x & +y & & = & 1 \\ & y & +z & = & 0 \\ x & +y & +z & = & 0\,. \end{array}$$

Aufgabe 5.7. Finde zu einer komplexen Zahl

$$z = a + b\mathrm{i} \neq 0$$

die inverse komplexe Zahl mit Hilfe eines reellen linearen Gleichungssystems mit zwei Variablen und zwei Gleichungen.

Der Körper $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ besteht aus allen reellen Zahlen der Form $a + b\sqrt{3}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$. Das inverse Element zu $a + b\sqrt{3} \neq 0$ ist $\frac{a}{a^2+3b^2} - \frac{b}{a^2+3b^2}\sqrt{3}$.

Aufgabe 5.8.*

Löse das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper $K = \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$:

$$\begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & -2-3\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 4-2\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5.9. Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 4x + 7y + 3z & = & 4 \\ 11x + 9y + 13z & = & 9 \\ 6x + 8y + 5z & = & 2 \end{array}$$

mit dem Einsetzungsverfahren.

Aufgabe 5.10. Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 5x + 6y + 2z & = & 6 \\ 4x + 8y + 9z & = & 5 \\ 11x + 5y + 7z & = & 8 \end{array}$$

mit dem Gleichsetzungsverfahren.

Aufgabe 5.11.*

Zeige, dass es zu jedem linearen Gleichungssystem über $\mathbb{Q}$ ein dazu äquivalentes Gleichungssystem mit der Eigenschaft gibt, dass alle Koeffizienten ganzzahlig sind.

Aufgabe 5.12. Zeige, dass es zu jedem linearen Gleichungssystem über $\mathbb{Q}$ ein dazu äquivalentes Gleichungssystem mit der Eigenschaft gibt, dass darin der Betrag aller Koeffizienten kleiner als 1 ist.

Aufgabe 5.13. Zeige durch ein Beispiel, dass das durch die drei Gleichungen I,II,III gegebene lineare Gleichungssystem nicht zu dem durch die drei Gleichungen I-II, I-III, II-III gegebenen linearen Gleichungssystem äquivalent sein muss.

Aufgabe 5.14.*

Aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 werden verschiedene Produkte P_1, P_2, P_3, P_4 hergestellt. Die folgende Tabelle gibt an, wie viel von den Rohstoffen jeweils nötig ist, um die verschiedenen Produkte herzustellen (jeweils in geeigneten Einheiten).

a) Erstelle eine Matrix, die aus einem Vierertupel von Produkten die benötigten Rohstoffe berechnet. b) Die folgende Tabelle zeigt, wie viel von welchem Produkt in einem Monat produziert werden soll.

	P_1	P_2	P_3	P_4
	6	4	7	5

Welche Rohstoffmengen werden dafür benötigt? c) Die folgende Tabelle zeigt, wie viel von welchem Rohstoff an einem Tag angeliefert wird.

	R_1	R_2	R_3
	12	9	13

Welche Produkttupel kann man daraus ohne Abfall produzieren?

Aufgabe 5.15. Es sei

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1\,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix und $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ ein n-Tupel über einem Körper K, und es sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ein Variablentupel. Welche Besonderheiten erfüllt das lineare Gleichungssystem

$$Dx = c,$$

und wie löst man es?

Aufgabe 5.16. Löse die linearen Gleichungssysteme

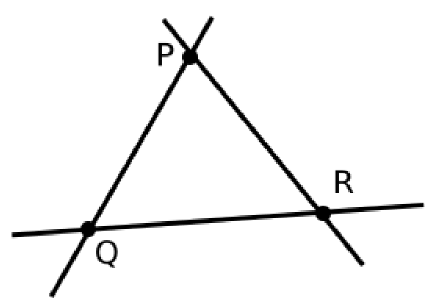
$$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

simultan.

Aufgabe 5.17. Ein lineares Ungleichungssystem sei durch die Ungleichungen

$$\begin{aligned} x &\geq 0, \\ y &\geq 0, \\ x + y &\leq 1, \end{aligned}$$

gegeben. Skizziere die Lösungsmenge dieses Ungleichungssystems.

Aufgabe 5.18. 

Es sei

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &\geq c_1, \\ a_2x + b_2y &\geq c_2, \\ a_3x + b3y &\geq c_3, \end{aligned}$$

ein lineares Ungleichungssystem, dessen Lösungsmenge ein Dreieck sei. Wie sieht die Lösungsmenge aus, wenn man in jeder Ungleichung $\geq$ durch $\leq$ ersetzt?

Aufgabe 5.19.*

Beweise das Superpositionsprinzip für lineare Gleichungssysteme.

Aufgabe 5.20.*

Bestimme in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ den Lösungsraum $L_a \subseteq \mathbb{R}^3$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 5x + ay + (1-a)z &= 0, \\ 2ax + a^2y + 3z &= 0. \end{aligned}$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 5.21. (4 Punkte)

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrcr} x & +2y & +3z & +4w & = & 1 \\ 2x & +3y & +4z & +5w & = & 7 \\ x & & +z & & = & 9 \\ x & +5y & +5z & +w & = & 0\,. \end{array}$$

Aufgabe 5.22. (3 Punkte)

Betrachte im $\mathbb{R}^3$ die beiden Ebenen

$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 4y + 5z = 2 \right\}$ und $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = -1 \right\}$.

Bestimme die Schnittgerade $E \cap F$.

Aufgabe 5.23. (3 Punkte)

Bestimme eine Ebenengleichung für die Ebene im $\mathbb{R}^3$, auf der die drei Punkte

$$(1,0,2), (4,-3,2) \text{ und } (2,1,-1)$$

liegen.

Aufgabe 5.24. (4 Punkte)

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$2x \quad -ay \qquad = \quad -2$$

über den reellen Zahlen in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$. Für welche a besitzt das Gleichungssystem keine Lösung, eine Lösung oder unendlich viele Lösungen?

AUFGABE 5.25. (3 Punkte)

Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcr} 5x \quad - y + 7z & = & 6 \\ 3x + 6y + 3z & = & -2 \\ 8x + 8y + 7z & = & 3 \end{array}$$

mit dem Einsetzungsverfahren.

AUFGABE 5.26. (4 (2+2) Punkte)

Ein lineares Ungleichungssystem sei durch die Ungleichungen

$$\begin{aligned} x &\geq 0, \\ y + x &\geq 0, \\ -1 - y &\leq -x, \\ 5y - 2x &\geq 3, \end{aligned}$$

gegeben. a) Skizziere die Lösungsmenge dieses Ungleichungssystems. b) Bestimme die Eckpunkte der Lösungsmenge.

Abbildungsverzeichnis