Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2020**

Mathematik für Anwender II

Vorlesung 31

Ungewöhnliche Zeiten erfordern ungewöhnliche Maßnahmen. Bei all dieser sozialen Distanz sehnt sich der Mensch nach Nähe und Wärme. Deshalb ist uns ein Vorlesungshund zugelaufen. Sie heißt Vorli.

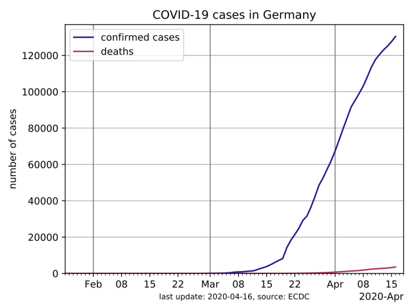
Gewöhnliche Differentialgleichungen

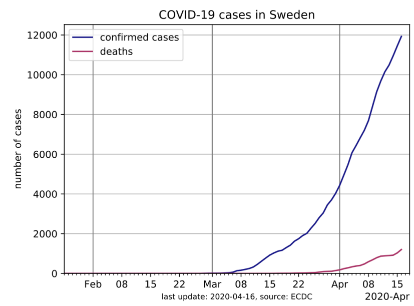
Wir beginnen mit zwei Beispielen, die beide zu gewöhnlichen Differentialgleichungen führen.

Beispiel 31.1. Wir versuchen, die Ausbreitung einer Virusinfektion wie bei der Corona-Pandemie von 2020 zu modellieren. Die Ausbreitung wird durch eine Funktion

$$y\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto y(t),$$

beschrieben, wobei $t \in \mathbb{R}$ für die Zeit und $y(t)$ für die Gesamtanzahl der bis zum Zeitpunkt t Infizierten (einschließlich der Genesenen) angibt. Dies ist zunächst eine empirische Funktion, die man aus verschiedenen Gründen auch gar nicht genau kennt, insbesondere, da nicht jeder getestet wird. Man kann stattdessen auch die Entwicklung der bestätigt Infizierten betrachten. Diese empirische Funktion wird durch die Daten, die jeden Tag das Robert-Koch-Institut übermittelt, beschrieben, und ist so gesehen zunächst eine Abbildung von einer Anfangsmenge der natürlichen Zahlen (die ersten 100 Tage seit Ausbruch) in die natürlichen Zahlen, wobei jedem Tag die Anzahl der bis dahin Infizierten zugeordnet wird.





Wenn man zu den Daten aus verschiedenen Ländern den Verlauf skizziert, ergibt sich jeweils ein ähnliches Bild. Die Ausbreitung scheint einer Gesetzmäßigkeit zu folgen, die man in der *mathematischen Modellierung* verstehen möchte. Das bedeutet (in einem ersten Schritt), dass man die empirische Funktion, also das vorliegende Datenmaterial, durch eine mathematische Funktion, also einen funktionalen Ausdruck, annähern möchte, um so den qualitativen und den quantitativen Verlauf der Ausbreitung zu verstehen und auch Extrapolationen (Prognosen) formulieren zu können. Hierbei wird man den Definitionsbereich und den Wertebereich als die reellen Zahlen (oder Intervalle davon) und die Funktion als stetig oder differenzierbar ansetzen. Man kann mit verschiedenen Zeiteinheiten arbeiten und auch die Gesamtzahl absolut oder aber prozentual (bezogen auf die Erdbevölkerung, ein Land, ...) angeben. So oder so ergibt sich, dass der Verlauf gut durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden kann, also von der Bauart

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto b^t,$$

mit einer Basis $b > 1$ ist. Welche Basis b zu nehmen ist, hängt von der Skalierung und auch von länderspezifischen Gegebenheiten ab. Diese Basis ist äquivalent zum Verdoppelungszeitraum der Ausbreitung, man kann das eine aus dem andern berechnen, siehe Aufgabe 31.2.

Diese Modellierung ist bisher aber nur die Beobachtung einer Übereinstimmung einer mathematischen Funktionsklasse mit empirischen Funktionen. In einem zweiten Schritt kann man sich fragen, ob es „in der Natur der Sache liegt“, dass die Ausbreitung eines Virus exponentiell verläuft. Gibt es einen mathematischen Grund dafür, eine innere Dynamik, eine zu jedem

Zeitpunkt gültige Gesetzmäßigkeit, die den Verlauf erklären kann? Die Antwort zu dieser Frage erfolgt im Rahmen der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, und beruht auf einer einfachen Beobachtung. Wir nehmen die Funktion $y(t)$ als differenzierbar an. Die Ableitung $y'(t)$ beschreibt dann den momentanen Zuwachs zu jedem Zeitpunkt, ist also ein Maß für die Neuansteckungen. Der naheliegende Ansatz ist nun zu sagen, dass zu jedem Zeitpunkt die Anzahl der Infizierten, also $y(t)$, proportional zur Anzahl der Begegnungen zwischen Infizierten und Nichtinfizierten ist und damit proportional zur Anzahl der Neuinfektionen, also zu $y'(t)$ (für Einschränkungen zu dieser Überlegung siehe weiter unten). Dies führt zu Beziehung

$$y'(t) = cy(t)$$

mit einem konstanten Proportionalitätsfaktor c, der ein Maß für die Ansteckungswahrscheinlichkeit ist und vom Virus, vom Abstandsverhalten der Bevölkerung u. Ä. abhängt. Wir haben also eine Beziehung zwischen der gesuchten Funktion und ihrer Ableitung, die in jedem Moment gilt und für die Ausbreitung eines Virus charakteristisch sein sollte. Ein solcher Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung heißt eine *gewöhnliche Differentialgleichung*. Wenn eine solche Differentialgleichung vorliegt, fragt man sich, welche Funktionen $y(t)$ diese Gleichung erfüllen. Dies ist im Allgemeinen schwierig. Im vorliegenden Fall lässt sich direkt durch Ableiten bestätigen, dass die Funktionen

$$y(t) = ae^{ct}$$

mit $a \in \mathbb{R}$ Lösungen sind. Der Vorfaktor a ist dabei durch

$$y(0) = a$$

festgelegt, also durch den Wert der Funktion zum Zeitpunkt 0, und das c im Exponenten ist direkt der Proportionalitätsfaktor aus der Differentialgleichung. Wegen

$$ae^{ct} = e^{\ln a}e^{ct} = e^{\ln a + ct}$$

ist der Vorfaktor a im Wesentlichen eine Verschiebung um Zeitargument, und c kann man durch eine Umskalierung der Zeit zu 1 normieren. Man kann nun sogar zeigen, dass die Exponentialfunktionen die einzigen Funktionen sind, die diese Differentialgleichung erfüllen, siehe Aufgabe 16.3 bzw. Aufgabe 31.5. Dies bedeutet, dass eine Virusausbreitung durch den Faktor c und dem Wert an einem einzigen Zeitpunkt eindeutig bestimmt ist. Dies ist ein Spezialfall des Satzes, dass ein Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung besitzt, von dem wir verschiedene Varianten kennenlernen werden.

Kommen wir nun zu einigen Einschränkungen der oben formulierten Modellierung. Zunächst ist klar, dass die Exponentialfunktion zu jeder Basis $b > 1$ gegen unendlich geht, es aber nur endlich viele Menschen gibt. Als kann irgendwas nicht stimmen. Der Punkt ist, dass die Anzahl der Infizierten zur Anzahl der Begegnungen von Infizierten mit der Gesamtbevölkerung proportional ist, aber nicht mit der Anzahl der Begegnungen mit den Nichtinfizierten. Dieser Unterschied ist zu Beginn der Ausbreitung unerheblich, da zu Beginn die Gesamtbevölkerung nahezu vollständig nicht infiziert ist. Im Verlauf der Epidemie, wenn sich der Durchseuchungsgrad erhöht, wird es zunehmend wahrscheinlicher, dass sich Infizierte und Infizierte begegnen, was zu keiner Neuansteckung führt.

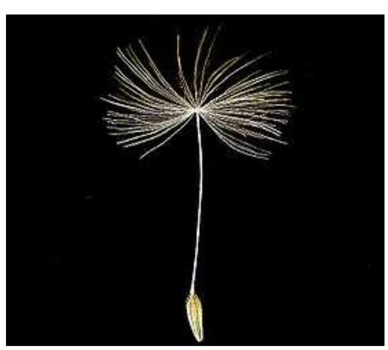
Ferner haben wir ignoriert, dass die Genesenen nicht mehr andere Leute anstecken können. Hier muss man den Unterschied zwischen infiziert und akut infiziert berücksichtigen. Dieser Unterschied ist für den Anfangsverlauf der Ausbreitung ebenfalls unerheblich, spielt aber im späteren Verlauf eine wichtige Rolle. Die Neuansteckung ist also proportional zur Anzahl der akut Infizierten, dies ist die Differenz zwischen der Gesamtinfiziertenzahl und der Gesamtinfiziertenzahl vor einem gewissen Genesungszeitraum d (bei Corona ca. $2-3$ Wochen). Dies führt auf die Bedingung

$$y'(t) \,=\, c(y(t)-y(t-d)),$$

man spricht von einer *Differentialgleichung mit Verzögerung*, was wir nicht behandeln werden. Für den ersten Zeitraum der Länge d nach Ausbruch spielt der Korrekturterm aber keine Rolle.

Schließlich ist der Faktor c keine Konstante, sondern wird durch politische Maßnahmen und Verhaltensregeln beeinflusst.

Beispiel 31.2. Welche Bewegung vollzieht ein Löwenzahnfallschirmchen? Das Fallschirmchen lässt sich zu jedem Zeitpunkt von dem Wind tragen, der an der Stelle herrscht, wo es sich gerade befindet. Der Wind, seine Stärke und seine Richtung, hängt sowohl von der Zeit als auch vom Ort ab. Das bedeutet, dass hier ein gewisser „Rückkopplungsprozess“ vorliegt: Die bisherige Bewegung (also die Vergangenheit) bestimmt, wo sich das Fallschirmchen befindet und damit auch, welcher Wind auf es einwirkt und damit den weiteren Bewegungsablauf. Solche Bewegungsprozesse werden durch Differentialgleichungen beschrieben.



Differentialgleichungen sind ein fundamentaler Bestandteil der Mathematik und der Naturwissenschaften. Sie drücken eine Beziehung zwischen einer abhängigen Größe (häufig $y(t)$) und der Änderung dieser Größe ($y'(t)$) aus. Viele Gesetzmäßigkeiten in der Natur wie Bewegungsprozesse, Ablauf von chemischen Reaktionen, Wachstumsverhalten von Populationen werden durch Differentialgleichungen beschrieben. Hier besprechen wir nur solche Differentialgleichungen, die durch Integration gelöst werden können.

Definition 31.3. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge und es sei

$$f\colon U \longrightarrow \mathbb{R},\, (t,y) \longmapsto f(t,y),$$

eine Funktion. Dann nennt man

$$y' = f(t,y)$$

die (gewöhnliche) *Differentialgleichung* zu f (oder zum *Vektorfeld* oder zum *Richtungsfeld* f).

Dabei ist $y' = f(t,y)$ erstmal nur ein formaler Ausdruck, dem wir aber sofort eine inhaltliche Interpretation geben. Das y soll eine Funktion in einer Variablen repräsentieren und y' ihre Ableitung. Dies wird präzisiert durch den Begriff der *Lösung einer Differentialgleichung*.

Definition 31.4. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge und es sei

$$f\colon U \longrightarrow \mathbb{R},\, (t,y) \longmapsto f(t,y),$$

eine Funktion. Zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = f(t,y)$$

heißt eine Funktion

$$y\colon I \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto y(t),$$

auf einem (mehrpunktigen) Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ eine *Lösung der Differentialgleichung*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind.

(1) Es ist $(t, y(t)) \in U$ für alle $t \in I$.
(2) Die Funktion y ist differenzierbar.
(3) Es ist $y'(t) = f(t, y(t))$ für alle $t \in I$.

Statt Lösung sagt man auch *Lösungsfunktion* oder *Lösungskurve*.

Differentialgleichungen beschreiben häufig physikalische Prozesse, insbesondere Bewegungsprozesse. Daran soll auch die Notation erinnern, es steht t für die Zeit und y für den Ort. Dabei ist hier der Ort eindimensional, d.h. die Bewegung findet nur auf einer Geraden statt. Den Wert $f(t,y)$ sollte man sich als eine zu einem Zeit- und Ortspunkt vorgegebene Richtung auf der Ortsgeraden vorstellen. Eine Lösung ist dann eine Funktion

$$y\colon I \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto y(t),$$

die differenzierbar ist und deren Ableitung, vorgestellt als Momentangeschwindigkeit, zu jedem Zeitpunkt t mit dem durch $f(t, y(t))$ gegebenen

Richtungsvektor übereinstimmt. Später werden wir auch Bewegungen betrachten, die sich in der Ebene oder im Raum abspielen, und die durch ein entsprechendes Richtungsfeld gesteuert werden.

Beispiel 31.5. Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung $y' = y$, in der t gar nicht explizit vorkommt (solche Differentialgleichungen nennt man zeitunabhängig). Durch diese Differentialgleichung werden Wachstumsprozesse beschrieben, bei denen beispielsweise der Zuwachs gleich der Bevölkerung ist. Gesucht ist also nach einer Funktion $y(t)$, die differenzierbar ist und die mit ihrer eigenen Ableitung übereinstimmt. Wir wissen bereits, dass die Exponentialfunktion $y(t) = e^t$ diese Eigenschaft besitzt. Ebenso ist jede Funktion ae^t mit einem festen $a \in \mathbb{R}$ eine Lösungsfunktion.

Wenn der Zuwachs zur Bevölkerung proportional ist, so führt dies zur Differentialgleichung

$$y' = cy$$

mit einer festen Zahl c. In diesem Fall sind $y(t) = ae^{ct}$ die Lösungen. Bei $c > 0$ spricht man von *exponentiellem Wachstum* und bei $c < 0$ von *exponentiellem Verfall*.

Beispiel 31.6. Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung $y' = yt$. Gesucht ist also nach einer Funktion $y(t)$, die differenzierbar ist und deren Ableitung die Gestalt $y(t)t$ besitzt. Hier ist nicht unmittelbar klar, wie eine Lösung aussieht und wie man sie findet. Durch Probieren findet man die Lösung $y(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$.

Die Lösung einer Differentialgleichung ist im Allgemeinen nicht eindeutig, man muss noch Anfangsbedingungen festlegen.

Definition 31.7. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge und es sei

$$f\colon U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t,y) \longmapsto f(t,y),$$

eine Funktion. Es sei $(t_0, y_0) \in U$ vorgegeben. Dann nennt man

$$y' = f(t,y) \text{ und } y(t_0) = y_0$$

das *Anfangswertproblem* zur gewöhnlichen Differentialgleichung $y' = f(t,y)$ mit der *Anfangsbedingung* $y(t_0) = y_0$.

Definition 31.8. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge und es sei

$$f\colon U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t,y) \longmapsto f(t,y),$$

eine Funktion. Es sei $(t_0, y_0) \in U$ vorgegeben. Dann nennt man eine Funktion

$$y\colon I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto y(t),$$

auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ eine *Lösung des Anfangswertproblems*

$$y' = f(t,y) \text{ und } y(t_0) = y_0\,,$$

wenn y eine Lösung der Differentialgleichung ist und wenn zusätzlich

$$y(t_0) = y_0$$

gilt.

Es gibt kein allgemeines Verfahren eine Differentialgleichung bzw. ein Anfangswertproblem explizit zu lösen. Die Lösbarkeit hängt wesentlich von der gegebenen Funktion $f(t,y)$ ab.

Das eine Differentialgleichung beschreibende Vektorfeld $f(t,y)$ hängt im Allgemeinen von beiden Variablen t und y ab. Einfache, aber keineswegs triviale Spezialfälle von Differentialgleichungen liegen vor, wenn das Vektorfeld nur von einer der beiden Variablen abhängt.

Ortsunabhängige Differentialgleichungen

Definition 31.9. Eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = f(t,y)$$

heißt *ortsunabhängig*, wenn die Funktion f nicht von y abhängt, wenn also $f(t,y) = g(t)$ mit einer Funktion g in der einen Variablen t gilt.

Eine ortsunabhängige gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' \,=\, g(t)$$

zu einer stetigen Funktion g ist nichts anderes als das Problem, eine Stammfunktion $G(t)$ von g zu finden; eine Lösung y der Differentialgleichung ist ja genau durch die Bedingung ausgezeichnet, dass $y'(t) = g(t)$ ist. Da eine Stammfunktion nur bis auf die Integrationskonstante bestimmt ist, besitzt ein ortsunabhängiges Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung.

Beispiel 31.10. Wir betrachten das ortsunabhängige Anfangswertproblem

$$y' = 2t^2 - t + 4 \text{ mit der Anfangsbedingung } y(2) = 7\,.$$

Die Funktion $2t^2 - t + 4$ besitzt die Stammfunktionen $\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 4t + c$ mit einer beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Die Anfangsbedingung $y(2) = 7$ führt auf

$$\frac{2}{3}\cdot 2^3 - \frac{1}{2}\cdot 2^2 + 4\cdot 2 + c \,=\, \frac{16}{3} - 2 + 8 + c \,=\, 7,$$

also $c = -\frac{13}{3}$. Somit ist die Lösungsfunktion des Anfangswertproblems gleich

$$y(t) \,=\, \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 4t - \frac{13}{3}.$$

Beispiel 31.11. Wir betrachten das ortsunabhängige Anfangswertproblem

$$y' = \frac{1}{t^2-1} \text{ mit der Anfangsbedingung } y(5) = 3\,.$$

Die Funktion $\frac{1}{t^2-1}$ besitzt die sogenannte Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{t^2-1} \,=\, \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t+1},$$

daher sind die Stammfunktionen (wir beschränken uns auf $t > 1$) gleich

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot \ln(t-1) - \frac{1}{2} \cdot \ln(t+1) + c.$$

Die Anfangsbedingung $y(5) = 3$ führt auf

$$\frac{1}{2} \cdot \ln 4 - \frac{1}{2} \cdot \ln 6 + c = 3,$$

also ist

$$c = 3 - \frac{1}{2} \cdot \ln 4 + \frac{1}{2} \cdot \ln 6$$

und die Lösungsfunktion des Anfangswertproblems ist

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot \ln(t-1) - \frac{1}{2} \cdot \ln(t+1) + 3 - \frac{1}{2} \cdot \ln 4 + \frac{1}{2} \cdot \ln 6.$$

Bereits die ortsunabhängigen Differentialgleichungen zeigen, dass das Auffinden einer Lösung einer Differentialgleichung schwierig ist, und zwar mindestens so schwierig wie das Finden von Stammfunktionen. Ein Großteil der Lösungsverfahren für Differentialgleichungen beruht in der Tat darauf, die Probleme in Integrationsprobleme zu übersetzen und dann zu lösen.

Zeitunabhängige Differentialgleichungen

Definition 31.12. Eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = f(t, y)$$

heißt *zeitunabhängig*, wenn die Funktion f nicht von t abhängt, wenn also $f(t, y) = h(y)$ mit einer Funktion h in der einen Variablen y gilt.

Bei einer zeitunabhängigen Differentialgleichung hängt nur das zugrunde liegende Vektorfeld nicht von der Zeit ab, die Lösungskurven sind hingegen im Allgemeinen zeitabhängig.

Beispiel 31.13. Wir betrachten die zeitliche Entwicklung einer Population, die durch folgende Eigenschaften charakterisiert ist.

(1) Die Individuen der Population leben ewig.
(2) Alle Individuen beteiligen sich ab ihrer Geburt mit gleichem (durchschnittlichen) Engagement und Erfolg an der Fortpflanzung.
(3) Zeugung und Geburt finden gleichzeitig statt.
(4) Der Fortpflanzungserfolg eines Individuums ist unabhängig von der Größe der Gesamtpopulation.

Unter diesen Bedingungen ist die Vermehrung, also der Zuwachs der Population, allein von der momentanen Populationsgröße abhängig und proportional zu dieser. Wenn man die Populationsentwicklung als $y(t)$ ansetzt, so erhält man eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$y'(t) = cy(t)$$

(oder kurz $y' = cy$) mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}_+$. Die Lösungsfunktionen sind

$$\lambda e^{ct}$$

(wobei im Populationsbeispiel $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ist). Man spricht von *exponentiellem Wachstum* der Population, und zwar unabhängig davon, ob c groß oder klein ist.

Beispiel 31.14. Eine Wüste (oder ein Kornblumenfeld) sei kreisrund und breite sich mit der Zeit kontinuierlich aus, indem die Grenze gleichmäßig nach außen geschoben werde, und zwar pro Zeiteinheit um einen gewissen Vortrieb. Die Fläche der Wüste werde durch die Funktion $z(t)$ beschrieben. Die Grenze der Wüste hat somit die Länge $2\sqrt{\pi}\sqrt{z(t)}$ und diese Länge ist proportional zum Wüstenzuwachs zum Zeitpunkt t. Es ergibt sich daher eine Differentialgleichung

$$z'(t) = c\sqrt{z(t)}$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}_+$. Die Lösungen haben die Form

$$z(t) = \frac{c^2}{4}t^2,$$

wie man direkt durch Ableiten bestätigen kann.

Abbildungsverzeichnis