教育統計學綱要

楊 國 礎 編

上 海 中 華 書 局 印 行

教育統計學綱要

楊國礎編

上海中華書局印行

序言

編者曾在湖南省教育會暑期學校，私立嶽雲中學校教育專修科，湖南省立第一師範學校，以及省立第一中學校高級師範科講授教育統計學，前後不下十次。苦無適當教本，不得不自編講義。幾改經易，始成今稿。自信內容簡要，尚合高中師範科教本之用。且對於統計圖，示例甚多，亦很可供辦理教育行政及學校行政者之參考。

最後吾欲致謝薛鴻志周調陽二兄及張耀翔朱君毅二先生；因為使無諸位先生之著作作參考，此稿簡直不能完成。

同時此稿內之統計圖表，多從各方面引來，尤以從東大附中及附小之校刊內，參引甚多，并此誌謝。

民國十九年五月十日楊國礎序於
湖南省立第一中學校。

教育統計學綱要

目　　錄

教育統計學綱要

第一章

緒論

一 統計學之起原

統計學 (Statistics) 發達雖遲，而萌芽極早。紀元前3050年埃及因建築金字塔，卽有全國人口與財富調查之統計，以爲徵收建築費之標準。紀元前 594 年，梭倫分希臘人民爲四等，按等徵收田賦，並課外國僑民人丁稅。紀元前 309 年，雅典國民爲二萬一千人，外國僑民一千人，奴隸之數達十萬以上。中古時代，各封建國諸侯，亦常有調查戶口及財產之舉；然其目的，不外徵收租稅，分配土地，及估計兵力三者而已。十八世紀初葉，普魯士王信仰統計學頗篤，凡戶口之增減，職業之種類，不動產及租稅之總數，皆有表冊可稽。十九世紀以降，斯學日增完備。時至今日，歐美諸邦，政府有政府之統計，商工有商工之統計，推而至於銀行鐵路工廠以及其他職業，幾無一不有統計。

我國爲五千年文明古國，統計學不可謂毫無基礎。如天文統計，[illegible]時代。禹平水土，劃天下爲九州，分田賦爲九等，相土[illegible]以貢[illegible]物，雖未能以科學的方法，製成圖表，詔示後人，抑亦

統計調查之精確者也。成周因井田而定賦稅，稅以足食，賦以足兵，足見分田，制祿，均賦，徵兵等制，成周時咸有統計為標準。漢高祖入關，諸侯皆爭取珠玉寶貨，蕭何獨入秦丞相，取秦圖籍藏之，得知天下戶口多少阨塞强弱之處，漢用以興。圖，統計學之一種也，籍之內容，雖不得詳，其爲統計調查之報告書，可無疑義。由此觀之，嬴秦以上，我國之統計，較之歐西，實有過之無不及。

英文統計 Statistics 一語，係由拉丁字 Status 轉化而來。按 Status 之意義，係表示國家政治情形及其所處之實際地位。據此，統計學原爲考察國家情況之一種科學。然其初紀載國家之情形，是以文字。至十八世紀中葉，始漸有簡明數字之記載。迄十九世紀以後，政治現象愈繁，數字記載之方法，就成長足之進步。於是數字統計方法，就代文字以興。文字既變爲數字，其應用亦因之而益廣。在昔日之統計，專論國情；至現在舉凡搜集數字材料之科學，無往不假借統計方法，爲研究之工具矣。

二　統計學之定義

統計學經數千年之進化，始完成爲一科學，故定義甚不一致。其最古者，謂：「統計學者，研究國家之科學也。」(The Study of State)此定義在上古時代，不能謂爲非是。蓋彼時統計之範圍狹小，祇有戶口統計與財產統計，以供君主徵兵役課賦稅之用而已。近古時代，統計之用途，較昔稍廣，不但政府辦理統計，卽私人亦有辦理之

者，則此定義不可以不變。韋伯斯特氏(Webster)曰：「統計學者，研究國家與人民之狀況，其事實可以數目，表册，及他種排列方法而表示之之科學也。」此定義較上述者頗爲完善，但現今統計學之範圍，較前更闊。寶來氏(Bowley)曰：「統計學者，觀察社會各方面之科學也。」此定義與韋氏所舉者略同，惟稍覺含渾耳。又曰：「統計學者，計算數目之科學也。」此定義雖較妥當，但仔細考慮，錯誤亦在所不免。蓋統計學之功夫，雖有大部分消耗於計算數目之中，而他一部分如調查之方法，表之製法，圖之作法等，非計算數目也明矣。然則統計學之定義爲何？金氏(King)曰：「統計學者，應用分析法與綜合法，研究由計算或估計所得之數，而判斷其天然現象或社會現象之原因與結果之科學也。」此定義雖不得謂爲完善，但比較稍概括耳。

三　統計學之分類

統計學爲獨立之科學與否？久爲學者所爭論。有謂統計學僅爲一種研究之方法者。有謂統計學不僅爲一種研究之方法，且具有特別研究之骨髓，應成爲一種獨立之科學者。又有調和兩說，謂統計學爲一種方法兼爲科學者。今日學者，大都贊成此說，取獨立科學論及方法二者之意義，說明統計學。故學者有統計方法與應用統計之分。

1. 統計方法(Statistical method)　統計方法，實可視爲算學

之支派；因其有一定之規則，用以整理多種變易不定之事實也。其中有許多規則，可以直接應用於各種性質不同之科學上；但亦有特殊之規則，僅能適用於某種特殊之科學。所謂統計方法家，僅以發明定律(Laws)，規則(Rules)，方法(Method)為天職，以為整理材料之資。故研究統計方法者，類皆為數學專家。至於應用方面，則留以待人，非彼等之所過問也。

2. 應用統計(Applied statistics) 應用統計者，卽應用統計方法家所發明之規則及公式於一切具體之事實是也。故應用統計與統計方法之關係，正與純正科學與應用科學之關係同。故研究統計方法者，常為數學專家；而研究應用統計者；同時或為民籍專家，或為社會，生物，教育專家，或為經濟，保險與慈善專家。

四 統計學之應用

統計學應用甚廣，舉凡關於人事之各種學科，幾無一不視彼為一種研究之工具。因為無論何種學科，俱有一種共同性質。此種共同性質為何，卽被測驗或被考察之各種事實，其結果俱為變易的，而非確定的。因之統計學，卽成為各科學家所不可少之一種工具。茲就其範圍所及，舉其重要者，述之於次：

1. 社會學方面 如犯罪之統計，自殺者之統計，人口死亡之統計等。

2. 經濟學方面 十七世紀末葉，格利哥雷(Gregory King)用

統計方法，發明供給與價格中，有一定不易之關係。用統計方法，研究經濟學最著名者，尚有寶來(Bowley)亞丹(Adams)披耳生(Pearson)諸人。

3. 生物學方面　用統計方法，研究生物學者，當首推高爾登(Galton)之研究遺傳。

4. 教育方面　教育上應用統計方法乃近今二十年來事，當推美人桑戴克(Thorndike)披耳生(Pearsons)猶爾(Yule)諸人。

五　教育統計學之需要

我國近年來，高唱科學的教育(Scientific Education)。顧科學的教育，無在不須統計。離乎統計，即不能完成科學的教育。所謂智力測驗教育測驗，均為科學教育之要法。而欲求其結論，萬不能忽略統計。我國通常對於統計之知識，甚形缺乏，而高談科學之教育界，又較勝幾何？所以真欲促進教育，使教育變為科學的，非普及統計知識與應用統計方法不可。如教育效率之大小，學生優劣之測量，教育事實之調查，（如學生方面，教師方面，課程方面，教學方面，教育行政方面等。）皆非求助於統計學，不克成功。故教育統計學，實有其絕大之功用也。

問　題　一

1. 何謂統計學？

2. 統計方法與應用統計之差異為何？

3 統計學應用甚廣，試略言之。

4. 試言教育統計學之需要？

第 二 章

教育材料搜集法

統計方法雖為研究各科學之利器，然苟無材料 (Data) 以供研究，統計亦無從着手。所以在未論列統計方法之前，不能不先述搜集材料之方法。

無論任何材料，俱有其來源可尋，通常教育材料，可由下列各方面徵集之：

1. 教育部各省教育廳及各地方教育機關所公佈之法令。
2. 教育部各省教育廳所發佈之各種教育統計圖表。
3. 學校章程。
4. 團體與個人之教育研究與調查。

吾人所需要之教育材料，如能從此四方面獲得，自然不成問題。否則非個人從事搜集不可。搜集教育材料之重要方法有二，即印發問卷與個人調查是。

一　印發問卷(Use of question-blank)

吾人所欲研究問題之範圍，常不限於一地。如全國各地男女小學教育經費之比較，全國中等學校概況之類，吾人既不能親赴各地實際調查，惟有將各人所需要之材料，列成問題，寄往各地，請人填答。但是應用此種方法時，須注意下列各點：

1. 問題之種類　可概爲下列數種：——

(一)關於各人經驗者　如教員之年齡，學位，性別，薪俸等；此種問題，常易得圓滿答覆，以答者不須用幾許心思也。

(二)在學校記錄上可以查出者　如學生年級年齡之分配，一學年中學生缺席或遲到之人數，學生家庭職業之類別等。

(三)關於學校行政及教學方面者　如學校組織大綱，全校經費之分配，教科用書，實驗室設備等項。

(四)關於學生生活者　如學生之個人生活，團體生活，及所印行之各種出版物等。此項問題，較難作答。故調查者，不易收得幾許之材料。

2. 問卷作法　問卷之優劣與問卷收回之多寡，大有關係。問卷優者，通常能收回二分之一，或四分之三；過劣者，則常求半數而不可得。事倍功半，得不償失。故問卷作法，必須注意：——

(一)明定所需要的各種材料之種類及多寡。

(二)確定問題之種類及多寡，總求能將所需要之材料，全體包括。

(三)問題措辭，須十分明瞭，使答者不致誤會。遇有專門名辭，更須特別簡明注釋。

(四)每問題所需之答案，不可過長。最好在十字左右，或用二三數目字作答。答案所需地位，問卷上須預爲留出。

(五)問卷擬好後，須先發出數十本，作爲預試。俟收回後再行修改。

(六)問卷修好後，最好用厚紙，鉛印，大小一致，以便將來整理收藏。

(七)每問卷須附一回信地址及粘有郵票之信封。

(八)發出問卷之數目，須倍於所希望收回之數目；否則將來或有材料不及之虞。

二 個人調查

印發問卷，雖可得較多材料，但不實不盡之處，在所難免。在可能範圍內，個人調查，實較印發問卷爲可靠。不過時間精力，消耗較多耳。

個人調查之材料，可分爲下列二種：

1. 各種印刷品上之材料：——

(一)各教育行政機關及各教育團體之出版物。

(二)各學校之記錄及報告。

(三)各學校所用之課本及講義。

2. 各種實驗所得之結果：——

(一)心理測驗所得之結果。

(二)實驗新教學法所得之結果。

(三)施行教育測驗所得之結果。

搜集材料之方法，雖不必祇此二種；然此二種實爲其中之重要者，吾人不可不知其概略。

問題二

1. 教育材料之來源爲何？

2. 搜集教育材料之普通方法爲何？並就其優劣點比較言之。

第三章

表列法

(Tabular method)

一　何謂表列法

吾人無論研究任何教育問題，第一步必先搜集材料。然此種搜得之材料，散漫無緒，吾人須用何法，方能使之整理？則非求助於表列法不可。表列法者，羅列萬事萬物於紙，而以簡單數字，表明其實況者也。蓋統計材料至爲紛繁，吾人如不用科學的統計方法分析之，綜合之，比較之，又何能使事物之因果關聯，一覽而洞悉無餘乎？且也，無論分析法或圖示法，俱須先就散漫之材料，加以整理；將其項目之性質相同者，分類排列，而後可收簡明表顯之功。故表列法，爲一切材料表顯法則之初步，亦卽一切材料表顯法則之根本也。

二　表之種類

統計表，可依統計材料之繁簡，而分爲一重表，二重表，三重表等，玆述於下：

1. 一重表　此表只含有一種事實，如第一表內，人數之分配，以年齡爲標準。

第一表　北平師大附小民國十五年上期在校兒童年齡比較表

年　齡	兒童數
5——6	9
6——7	48
7——8	81
8——9	80
9——10	85
10——11	104
11——12	101
12——13	92
13——14	57
14——15	17
15——16	1
總　計	675

2. 二重表　此表含有兩種事實，如第二表內有校別與性別二種事實是。

第二表　北平中等以上學校男女學生人數比較表(民國十年度)

校　別	學生	
	男	女
大學校	6,299	124
專門學校	5,515	380
師範學校	340	220
中學校	3,859	1,027
職業學校	694	603
總　計	18,707	2,354

3. 三重表　此表含有三種事實，如第三表內有年次，人口數，

學齡兒童數三種事實是。餘可類推。

第三表　北平歷年人口數及學齡兒童數比較表

民國年次	人口數	學齡兒童數
元　年	695,267	79,199
二　年	717,826	84,343
三　年	745,710	93,140
四　年	756,752	90,349
五　年	770,541	93,893
六　年	792,074	84,921
七　年	779,713	95,132
八　年	796,599	107,832
九　年	825,341	100,508
十　年	834,372	98,698

三　表之功用

表之目的，在使無系統之事實，分門別類，列成系統，俾易考察研究。即已成系統之事實，欲再加詳細研究，亦須重行整理，或分析，或綜合，按類排列，以適應所欲研究之目的。故分類方法，爲列表之重要步驟。分類既成，即可依次列入表內縱橫各欄；如此整理之後，非僅便於考察比較，且能助長分析之識見與推論之思考焉。

是以分列成表之材料，較諸未分類者，自有其優點。舉其大者言之，約有六項：

1. 適於科學的研究。

2. 便於考察。

3. 便於比較。

4. 便於記憶。

5. 便於總計。

6. 免除重複的說明。

四　表之製法

製表之要素，分四項言之：

1. 表之名稱

(1)說明表之次序所用之數字(如第幾表)或文字(如甲，乙，A，B，等表)及表之名稱等，均須列於表之上部。

(2)表之名稱，須簡賅完善，以無庸另加注釋而能了解表之內容者爲宜。

(3)名稱中所列之項目，其先後次第，宜與表中所列細大項目之次第一致，如第三表。

(4)表之內容，如有空間及時間之區別時，亦應在表之名稱中注明。

(5)表之重要數字，宜指出時，須列入名稱之內，俾易引起讀者之注意。

2. 表之項目

(1)表之項目，(如第五表中之國民小學，高等小學，公立，男女學生等)皆列於表之上部或左部。至何者宜上，何者宜左，則無一

定規則。通常概以項目較繁，變化較大者，列於左部，簡易者列於上部，如第四表是。若所列之項目，無繁簡之區別時，則無一定之限制，可任製表者之方便，

第四表　國立北京八校民國十一年度全年經費比較表

校別	全年經費數
北京大學	792,444
北京師範大學	471,320
北京農業大學	248,400
北京法政大學	186,200
北京工業專門學校	173,764
北京女子高等師範	152,772
北京醫學專門學校	142,240
北京美術專門學校	116,052

第五表　熱綏察三區民國十一年度公私立國民及高小男女學生數比較表

省區及學校	學生數								
	公立			私立			總計		
	男	女	總	男	女	總	男	女	總
熱河	9,288	928	10,216	1,326	30	1,356	10,614	958	11,572
國民小學	8,251	829	9,080	1,326	30	1,356	6,577	859	10,436
高等小學	1,037	99	1,136	……	…	……	1,037	99	1,136
綏遠	1,182	42	1,224	3,610	…	3,610	4,792	42	4,834
國民小學	916	42	958	3,610	…	3,610	4,526	42	4,568
高等小學	266	…	266	……	…	……	266	…	266
察哈爾	5,350	279	5,629	5,113	98	5,211	10,463	377	10,840
國民小學	4,606	248	4,854	5,073	98	5,171	9,679	346	10,025
高等小學	744	31	775	40	…	40	784	31	815
總計	15,820	1,249	17,069	10,049	128	10,177	25,869	1,377	27,246

(2)排列表之項目時，其先後次第，各有不同，通常所採用之標準如下：

(一)位置之先後；如教育部所出之全國教育統計圖表，即係按行政區域位置之先後排列。如第五表是。

(二)等級之高低；如各機關之職員一覽表等。

(三)時間之遲早；時間早晚之排列，若在左部，時間早者宜在上，依次向下排列；若在上部，時間早者宜在左，依次向右排列。

(四)分量之多寡；如第四表即是按照其內容數目之多寡而排列者。

(3)表中項目之大者，又可分成細目。排列時，將細項目位於大項目之下。至大項目與細項目之區分，由製表者之目的定之。

(4)注意比較某一項目時，須用粗大字表顯之，俾易注意。如第四表，因欲顯明北京師範大學與其他各校經費數目之差異，故該項之數字，特別粗大，若以紅色刊印，尤能醒目。凡備展覽之表，均可用紅色表示注重之項目。

(5)各項目之文字較長，須分列兩行以上時，皆宜橫行，以求與橫行列法劃一，而免閱者空費時間。如第三表。

民 國 年 次	不宜寫作	民 年 國 次
學齡兒 童人數	不宜寫作	學兒人 齡童數

3. 表格線

(1)表中每一豎行，須以直線劃分之。細項目之間，用一直線。重要項目之間，用雙直線，或一粗大直線。以示區別。如第五表，男女總各欄之間，用一直線，公私總各欄之間，用二直線。

(2)表中排列項目之部分，宜用直線區別之；中間排列數字之部分，多不用橫線，以求清楚，觀以上各表便知。

(3)總數欄宜用線劃分之，俾易觀察。

4. 數字列法

(1)表中數字之位置，須上下相對，俾易加減比較。有小數時，小數之位置，尤宜上下相對，免致觀察錯誤。

(2)無數字之格，須用短橫線或短點線補充之，使觀察時不致錯誤。

(3)數目多至四位以上，須用分段點，每三位分作一段，如第三表第四表是。

五 表之位置及其他

1. 所列之表，應置於解釋此表正文附近，愈近愈好，惟前後則可以不拘。有時放在前面，有時放在後面，有時放在中間，俱視製表時之目的而定。

2. 表宜正向安置，使閱者看表時，不要將紙倒轉來看。萬一須倒轉寫時，須能使閱者可以從紙的右邊去看，即將表之上端，置於左

方，下端置於右方。

3. 表之看法，係從上至下，從左至右，此點有一部分與圖相反。因為圖之看法係從下至上，從左至右。

問題三

1. 表列法在敎育統計上，何以為一切表顯法則之初步？

2. 試言表之功用？

3. 何謂三重表？

4. 表之標題，是否應將表中重要項目揭示明白。為何？

第四章

圖示法

(Graphic method)

一　圖示法之功用

通常用以表顯事實之方法，約有三種。卽：(1)文字，(2)表格，(3)圖形。此三種方法各有特長，各有相當之功用。比較言之，用文字說明事實，過於冗長，多佔篇幅；旣不便於比較，又易使人誤解；不若表格用數字記載事實之簡賅精確，且便考察比較也。然用表格說明事實，旣嫌艱深，又感乾燥無味，常人決不喜披閱；故又不若圖形之表示事實，彰明昭著，普通人亦能一見了然也。

質言之，圖示法之功用，可得言者，約如下：

1. 能使統計中之重要事實，表顯無誤。

2. 普通人見之易於領會。

3. 使人易於記憶。

4. 減省時間與篇幅。

5. 用圖表顯事實，遠勝數字與文字。

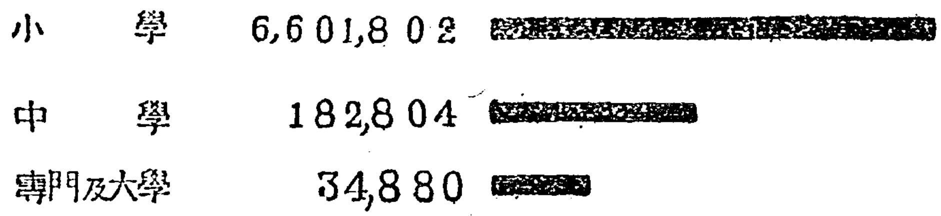
統計圖雖有上述五種功用，然亦有危險處。蓋奸商政客等，每每利用統計圖，假造事實，淆亂是非，欺騙民衆也。

二　圖之種類

圖之形態，極其繁複。言其種類，難以畢舉。茲因其形狀不同，由簡入繁，分述於下：

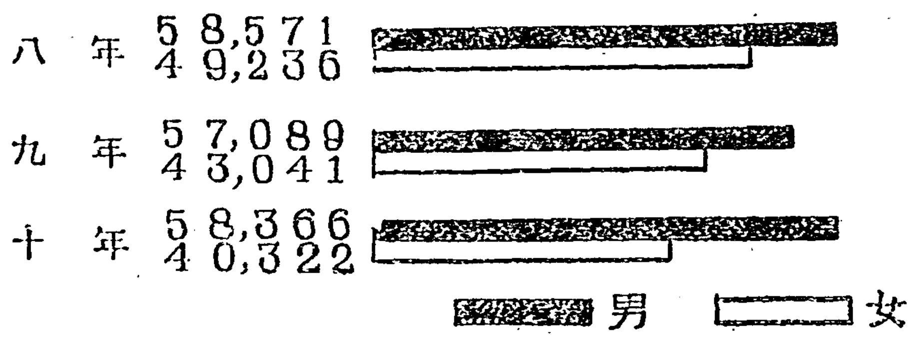
1. 直線圖　直線圖或作直條圖，係以直線，表明各項目，而互相比較。分單量直線圖與複量直線圖兩種。

(一)單量直線圖　卽以一粗道直線代表一項目；由直線之長短，卽可知各項目數值之大小，如第一圖是。



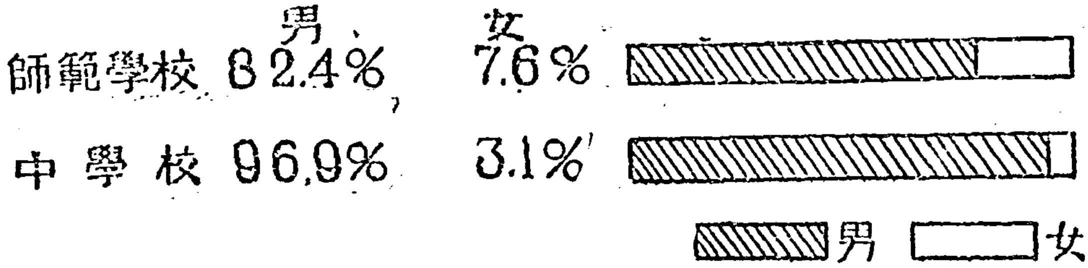
第一圖　民國十二年度全國各級學校學生數

如有兩種單量事實並列比較時，兩直線須各着顏色，以示區別，並須注明各色直線所代表之事實，如第二圖是。



第二圖　民國八年至十年北京男女學齡兒童數比較圖

(二)複量直線圖　卽以一等長直線，代表一項目之百分數，再以黑白線代表各項中之各部分而作百分比，如第三圖是。



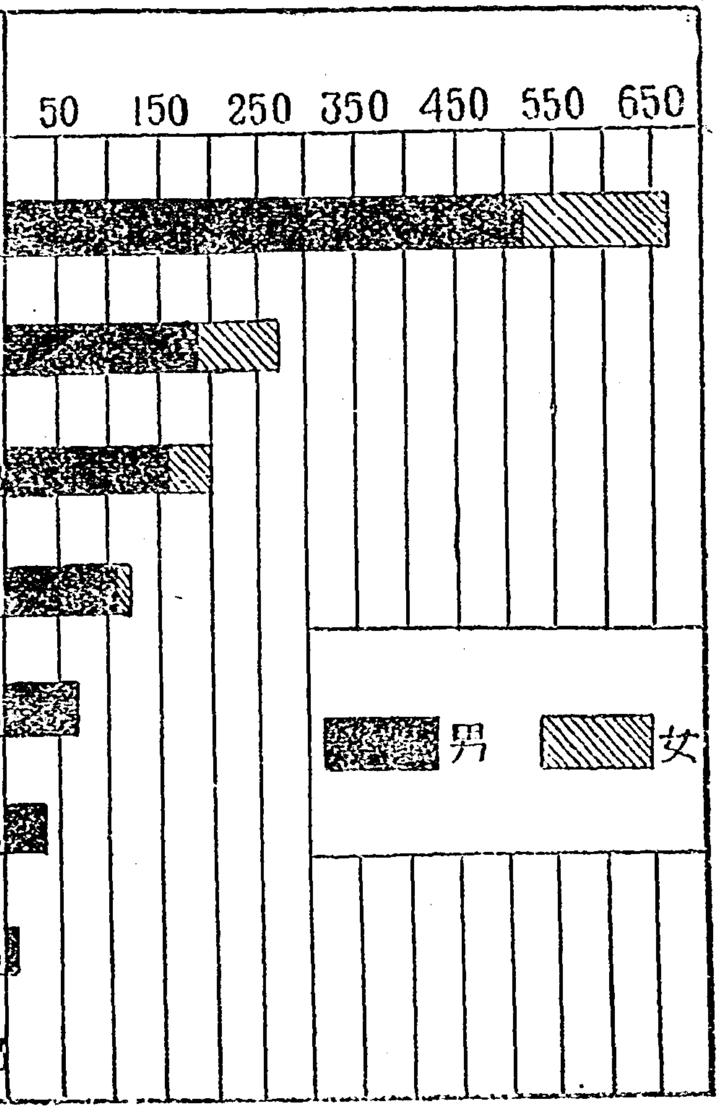
第三圖　全國師範學校及中學校學生數百分比較圖(十二年度)

此外尚有一種複雜的直線圖，並用數字表明直線所代表之數

第四圖　民國十一年湖南暑期學校各種資格

男女學員人數比較圖

資格	男	女	總
小學教職員	512	148	660
中學以上教職員	180	85	265
中等學校畢業生	154	44	198
專門大學畢業生	104	18	122
地方辦學人員	68		68
專門大學學生	42		42
中等畢業學力	8		8
總計	1068	275	1363



目，如第四圖是。此種圖可值得吾人注意者有四點：

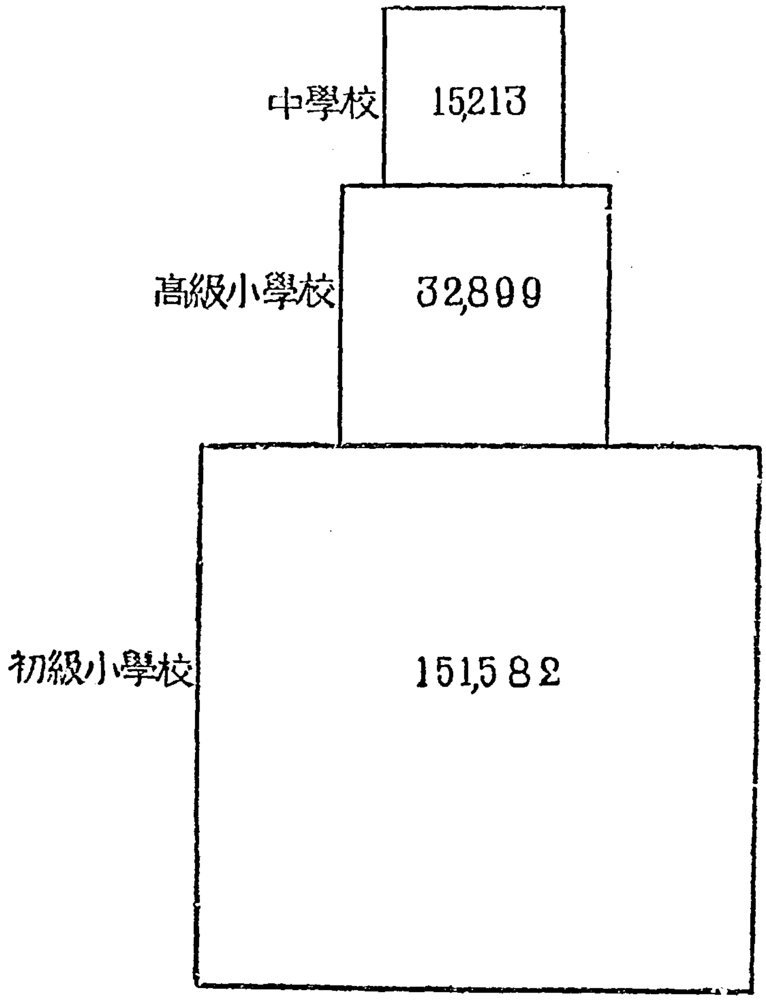
A. 各種資格可以比較。

B. 男女同在一直線上表顯出來。

C. 直線上邊以及左邊都有數目，使觀者一見就知直線所代表之人數。

D. 從上至下又有直線使人不至看錯數目。

2. 方形圖　方形圖係以一方形代表一項目。以方形面積之大

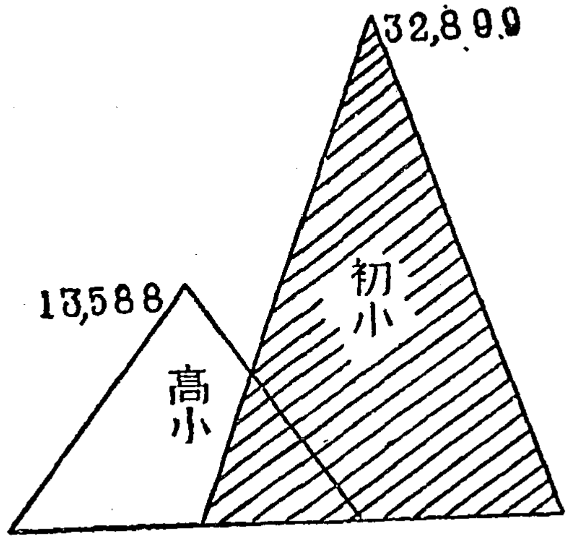


第五圖　教會立初級小學高級小學及中學學生人數比較圖

小，顯明所代表事物之多寡，如第五圖是。

此種圖形，因所含之面積，極難準確，故比較殊不易易。苟非藉數字說明，幾令人不明其眞相也。

3. 三角形圖　吾人有時以等邊三角形之面積，去比較二種事實之價值，而兩三角形之底線相等，如第六圖是。

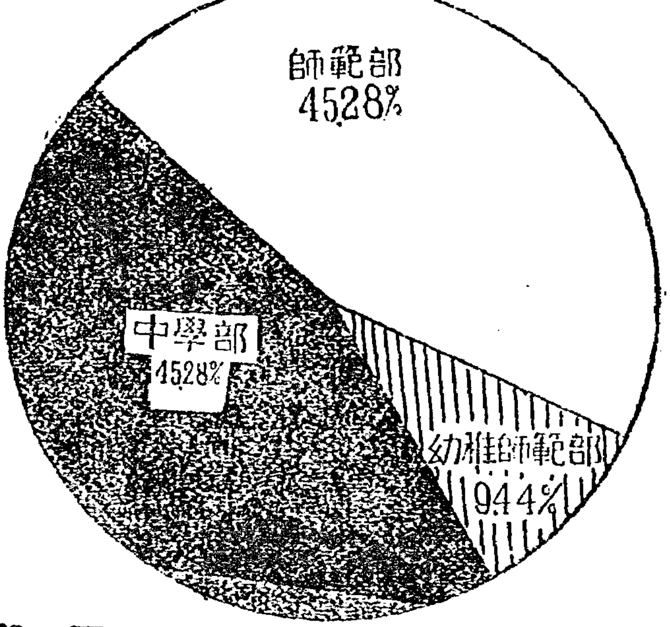


第六圖　教會立高級小學及初級小學學生比較圖

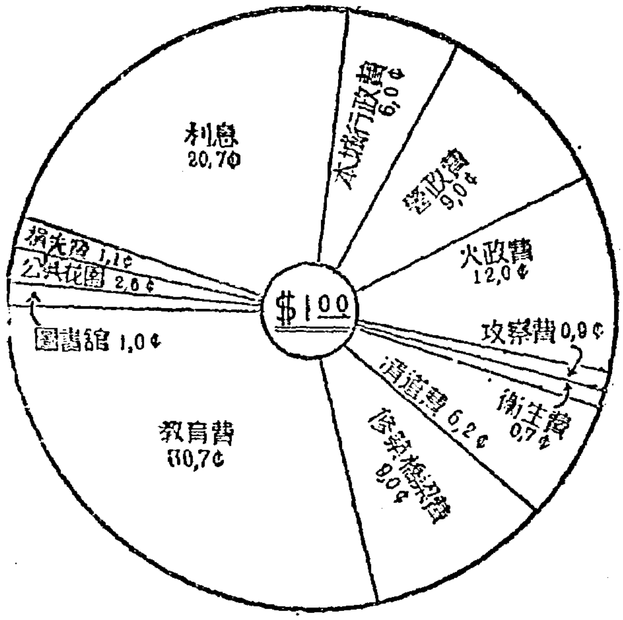
此種圖形，雖能達到正確的比較，但不易繪劃，故不若用直線圖之爲愈。

4. 圓形圖　此種圓形圖之用法有二，分述於次：

(一) 以一圓之全面積，代表某一事物之全體，再按其事物所分之項目，分全圓之面積爲若干分，以代表各項目之數值，如第七圖第八圖是。



第七圖　江蘇省立第一女子師範學校各部學生數比較圖（民國十三年）



第八圖　美國巴不脫蘭特 *Portland* 城每年稅收支出比較圖

A. 作法　圓周共360度。$360°$之45.28，即$\frac{360°}{100}\times 45.28=163°$，再用半圓規切量之。

B. 長處

(1)此種圓形圖，各種雜誌及展覽多用之，故知者頗多。

(2)此圖可利用顏色，使較顯明。

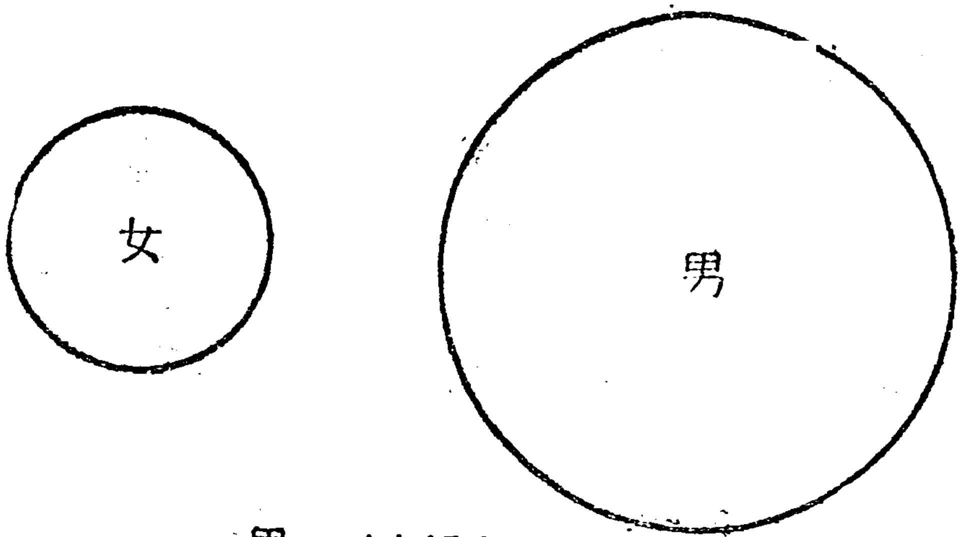
C. 短處

(1)標字方向不同，不便閱讀。

(2)數目字不能如橫條圖之列在一排，以便比較。

(3)若所分之部分過多，而其中有狹小之部分時，則不能將注釋之文字列入，如第八圖是。

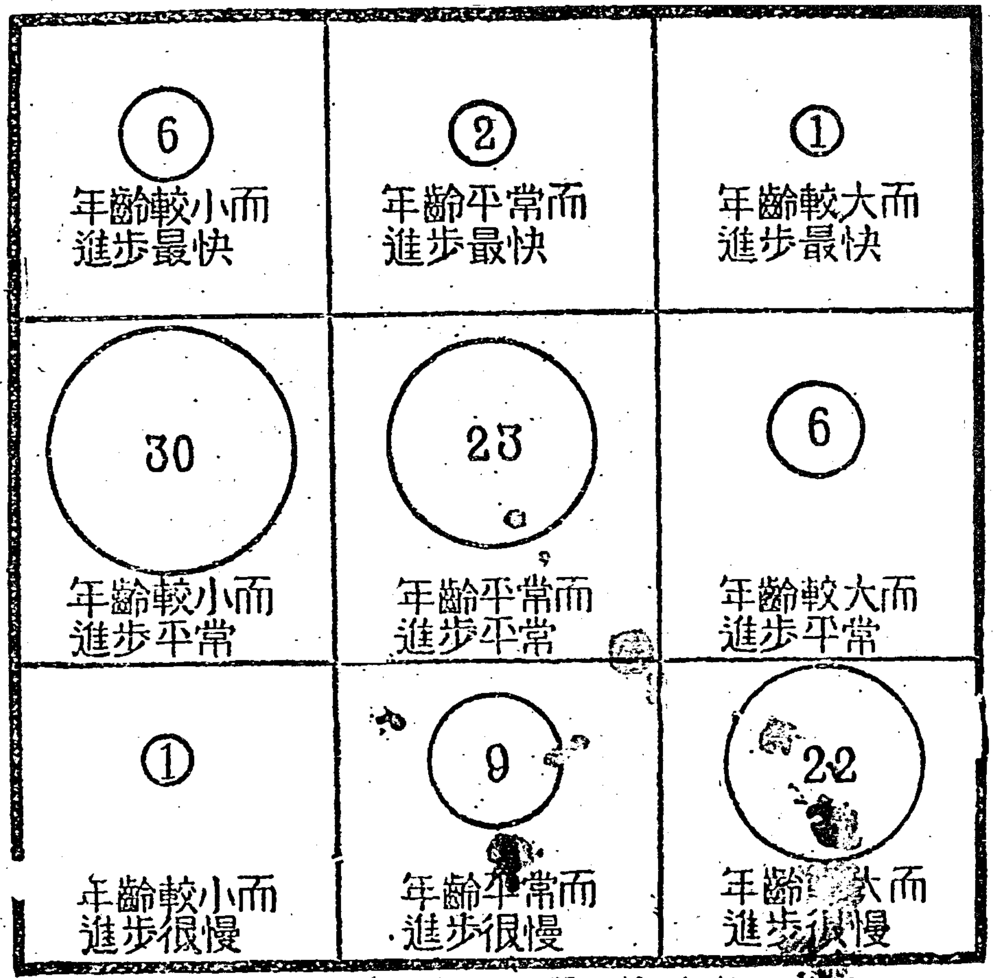
(二)有以二個以上不等之圖形，代表二個以上不等之事實



男	44,454	80%
女	11,167	20%

第九圖　民國十二年度北京男女學生数比較圖

者；卽以大圓形表明大量之事實，以小圓形表明小量之事實。如第九圖第十圖是。



第十圖　美國克富南城小學校兒童各年歲進步比較圖(1914—1915)

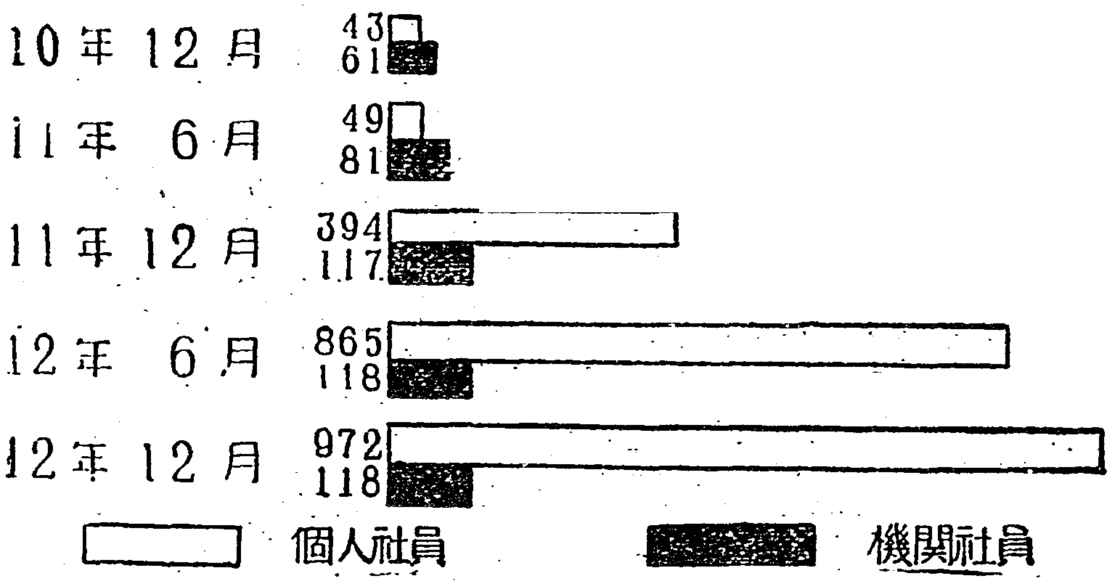
唯作此種圖形時，非以直徑相比較，卽以面積相比較。然比較各圖之直徑或面積時，皆不易精確，所以採用之者甚少。

5. 曲線圖　係以曲線表明各種趨勢，較直線圖尤易觀察比較，因為直線圖不能表顯事實各時期之變遷，及其增減之趨勢，試比較

下列之第六表，第十一圖；第十二圖，即知曲線圖形之勝於表格與直線圖形也。

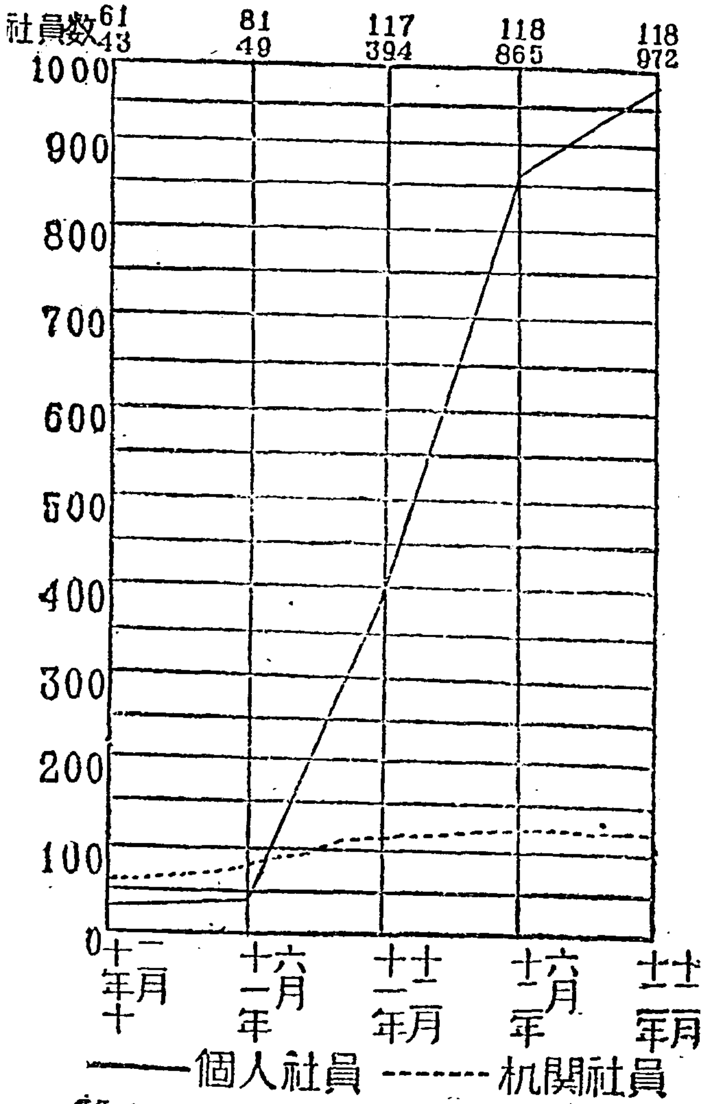
第六表　民國十年至十二年中華教育改進社
個人社員及機關社員數目比較表

時　　期	機關社員	個人社員
十　年十二月	61	43
十一年六　月	81	49
十一年十二月	117	394
十二年六　月	118	865
十二年十二月	118	972



第十一圖　民國十年至十二年中華教育改進社
個人社員及機關社員數目比較圖

此種曲線圖形，畫法非常簡單，以圖之底線，表明年次，依數目之大小，由左向右排列。於圖之左邊線，注明人數，如上圖，每一橫格代表50人。豎格線畫明後。卽按各年次所有之個人社員及機關社



第十二圖 民國十年至十二年中華教育改進社個人社員及机關社員數目比較圖

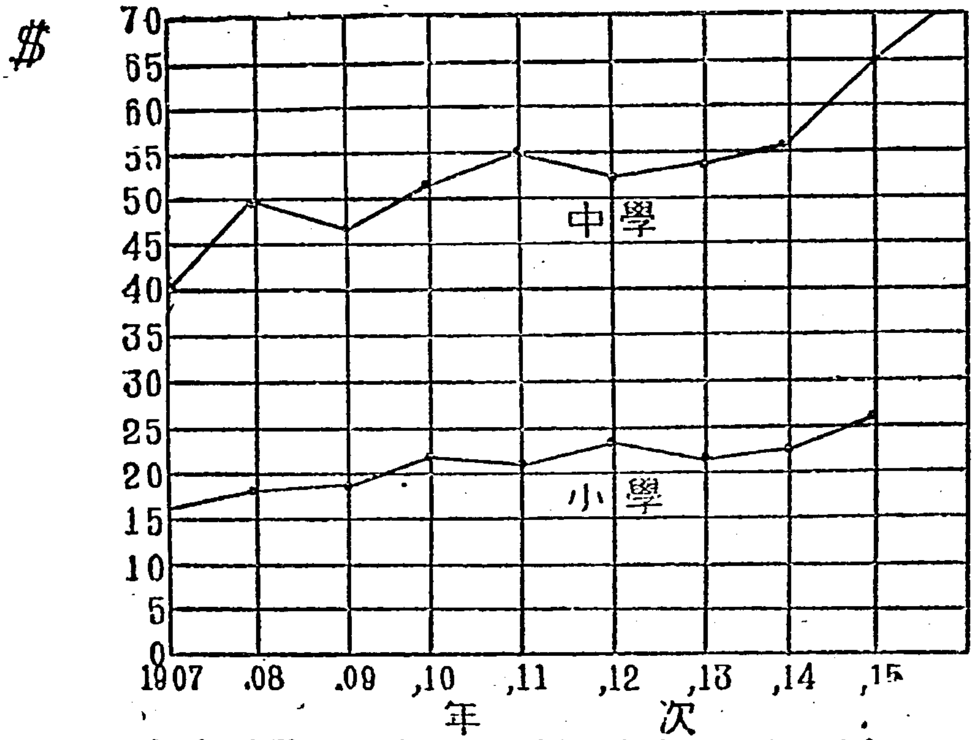
員人數，分別在相對之豎線上，以點標記之；如十一年十二月之個人社員數為394，即在代表此年次豎線上，與人數400相對之處（微向下）記一點。各年須按此法將點記好後，再以直線連結各點，即成為曲線圖。

曲線圖最常見者約有二種：

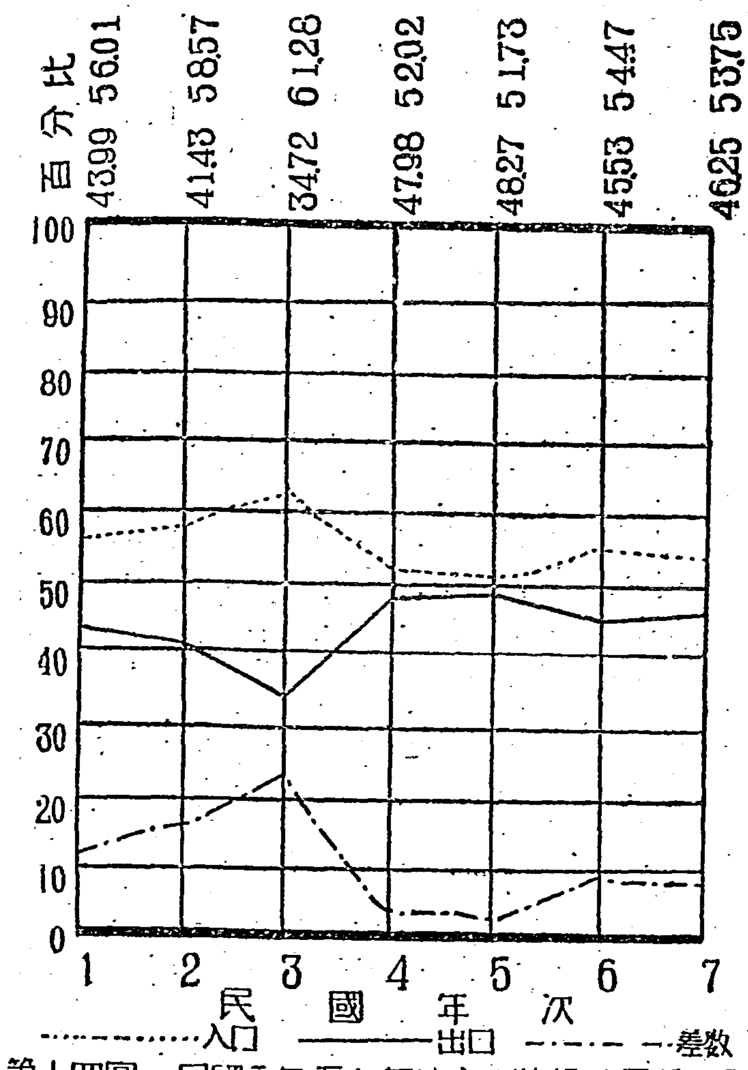
A. 橫向曲線

B. 次數曲線

（一）橫向曲線　即曲線之趨勢向橫的方向進行，係表顯歷史的材料，以觀察其歷史的變遷。如第十三圖第十四圖是。

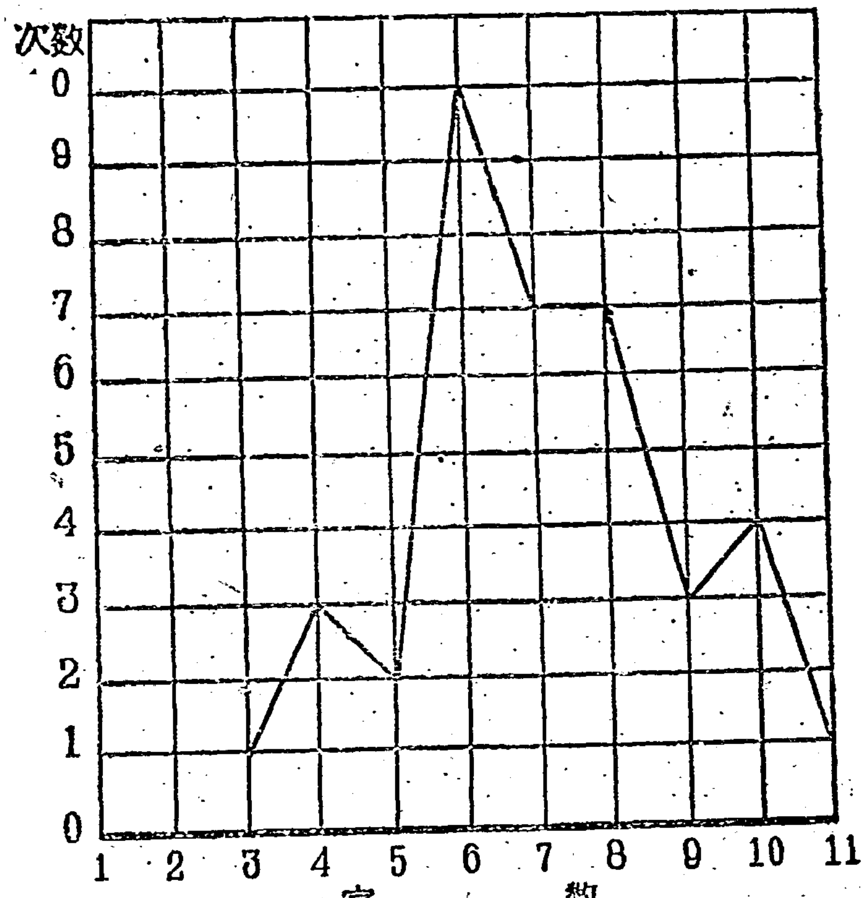


第十三圖　美國伊利諾省老克佛城(Rockford)每年費於中小學學生之經費数比較圖

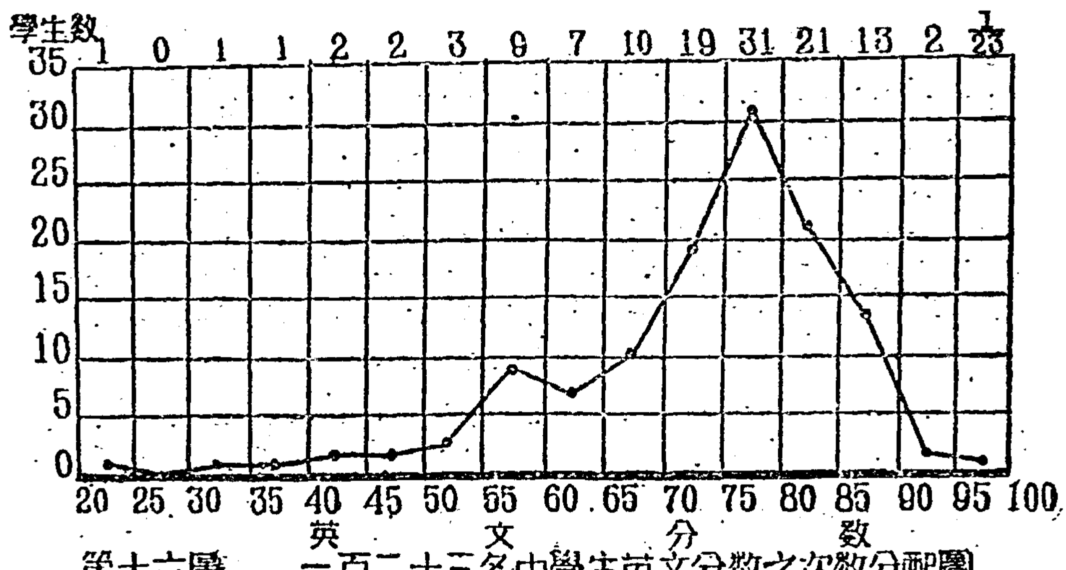


第十四圖　民國元年至七年出入口貨價值百分比圖

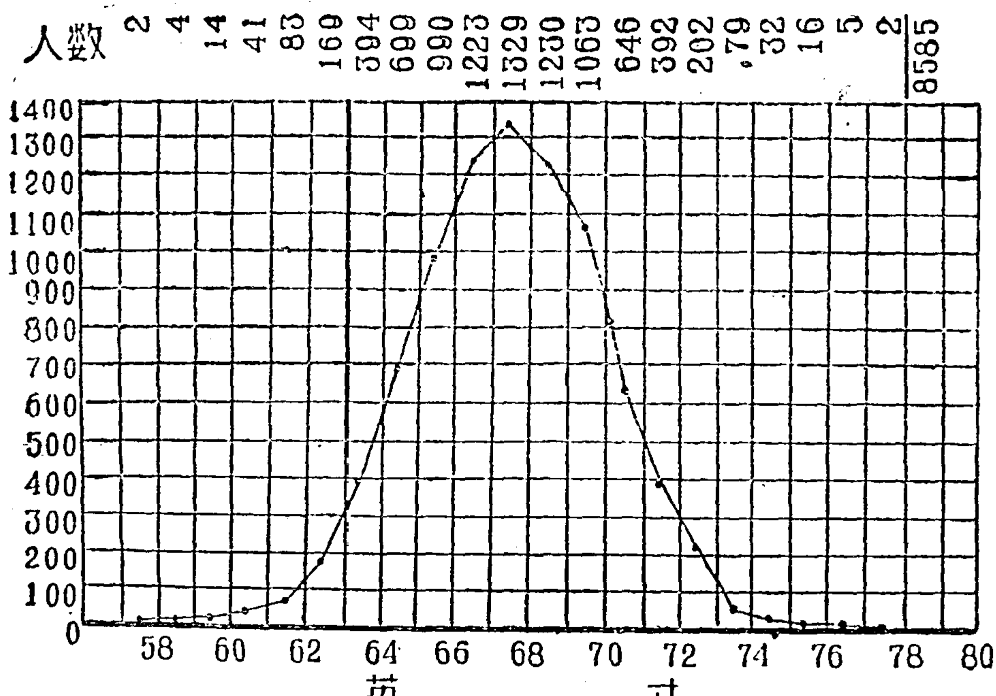
(二)次數曲線　前列二圖，皆以時間爲主體，以比較各時間所發現之事實。既以時間爲比較之主體，故將時間之次第，列於橫量尺上，然後標準時間，以考察各時間中事實之變遷。次數曲線，則以次數所由生之量數爲主體。故以橫量尺表明量數之價值，以豎量尺表明各量數所發現之次數，然後按各量數的價值，以觀察其次數變動之規律。如第十五圖，第十六圖，第十七圖是。



第十五圖　一人於一定時間內所能記之字數（共計四十次）

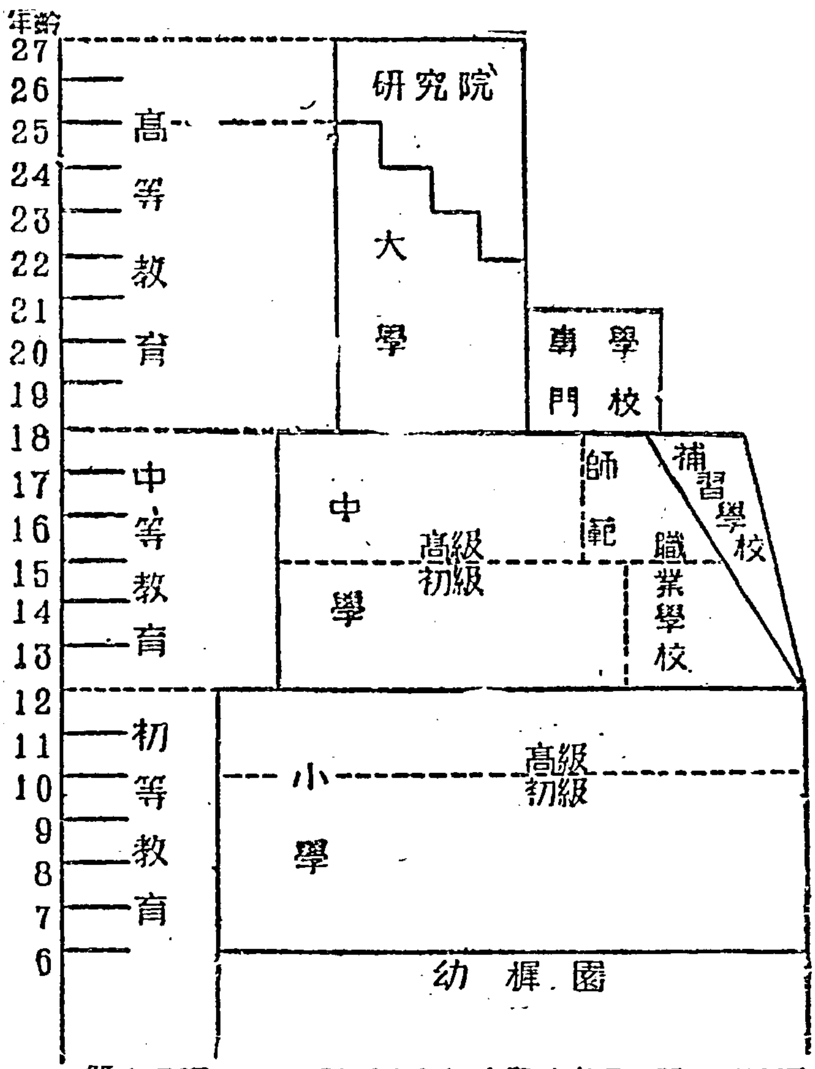


第十六圖　一百二十三名中學生英文分數之次數分配圖



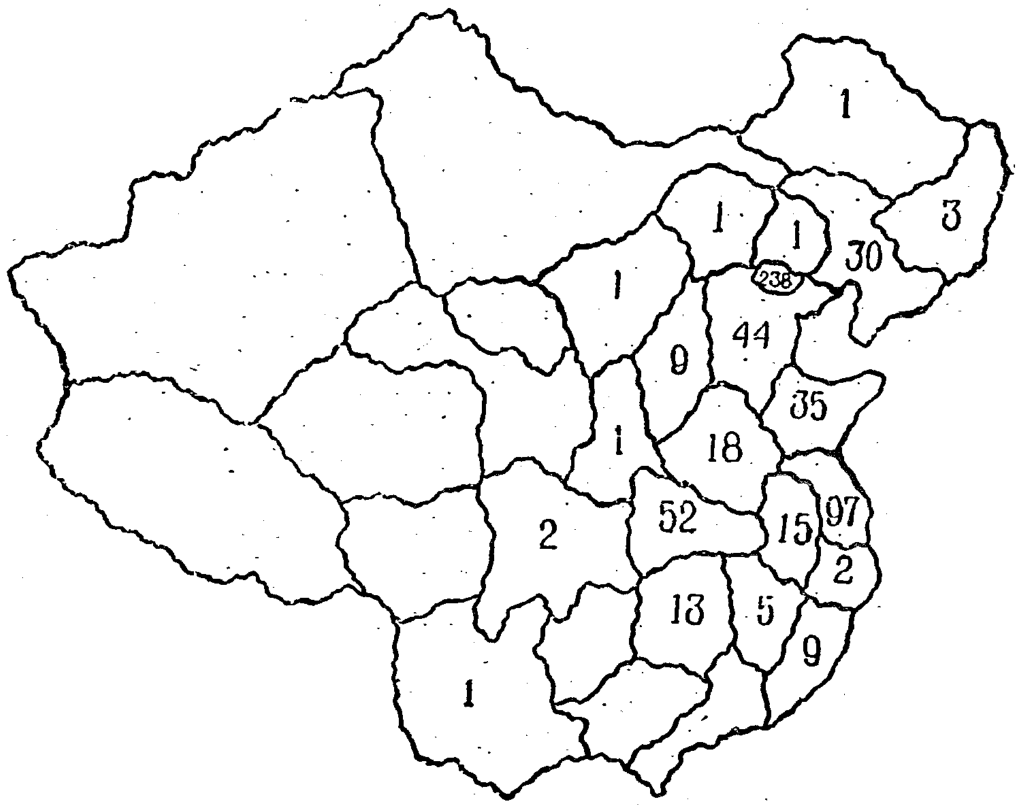
第十七圖　英國成年男子8585人體高之次数分配圖

6. 系統圖



第十八圖　民國十七年大學院修正之學校系統圖

7. 地圖



第十九圖　中華教育改進社第二屆年會各省到會人數分配圖

此種圖示，可加着顏色，以示區別。其全無人數之省區，則無庸着色，使人一覽顯然。

三　圖之作法

圖之作法本極繁複，茲舉其重要各項於下：

1. 圖之名稱，宜求清楚完備；有必要時，詳細名稱及說明等，亦應增補，以求明晰。

2. 圖之名稱，須列於圖之下面。

3. 圖之排列方法，宜由左而右。

4. 横量尺之數字，皆宜列於圖之下；有必要時，可列一量尺於圖之上部。

5. 豎量尺之數字，皆宜列入圖之左；有必要時，亦可列一量尺於圖之右。

6. 凡當可能之時，宜將作圖所用之數字材料，列於圖內。

7. 若數字材料不能列於圖內時，宜列一表，附於圖近。

8. 排列圖中之文字及數字，均宜使其能由圖之正面或側面讀之。

9. 豎行排列時間之數目時，時期之早者宜在上。

10. 横行排列時間之數目時，時期之早者宜在左。

11. 凡曲線圖之主體變量，宜在横量尺上表明之。

12. 凡曲線圖之横量尺，宜由左而右讀之；豎量尺宜由下而上讀之。

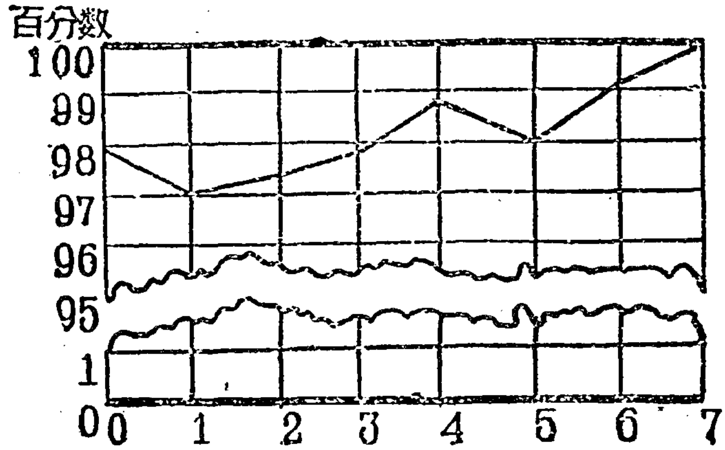
13. 在可能範圍內，曲線圖豎量尺之規定，以能將零線列於圖內為宜。

14. 曲線圖豎量尺之零線，宜比方格線格外加寬。

15. 若豎量尺之零線，不能順序列於圖下時，零線上宜以横道空白表明之，如二十圖是。

16. 曲線圖之量尺，表明百分率時，百分之百之直線，或其他作比較標準線，宜特別加寬，以示區別。

17. 若曲線圖之橫量尺，由零點起時，則在零點上之豎線，宜用寬線。



第二十圖 表示橫道空白之圖形

18. 若橫量尺表明時間時，則在曲線圖之左右二邊線，不宜用寬線，因時間之起訖，一圖之中，不能包括也，

19. 曲線之線，宜比格線格外加寬，使與其背地容易區別。

20. 若一圖之中，所畫之曲線不多，可將曲線上每點之實在數目，注於圖之上部。

21. 注於圖上之數目，若可以相加作總數時，卽宜總計，以便參考。

22. 圓形圖以一圓作各項目比較時，須以圓周線之長短作比例標準；以兩圓形比較時，則以圓之直徑爲準。

23. 方形圖作比例，係以四邊所包含之面積爲標準，故作圖時較難。

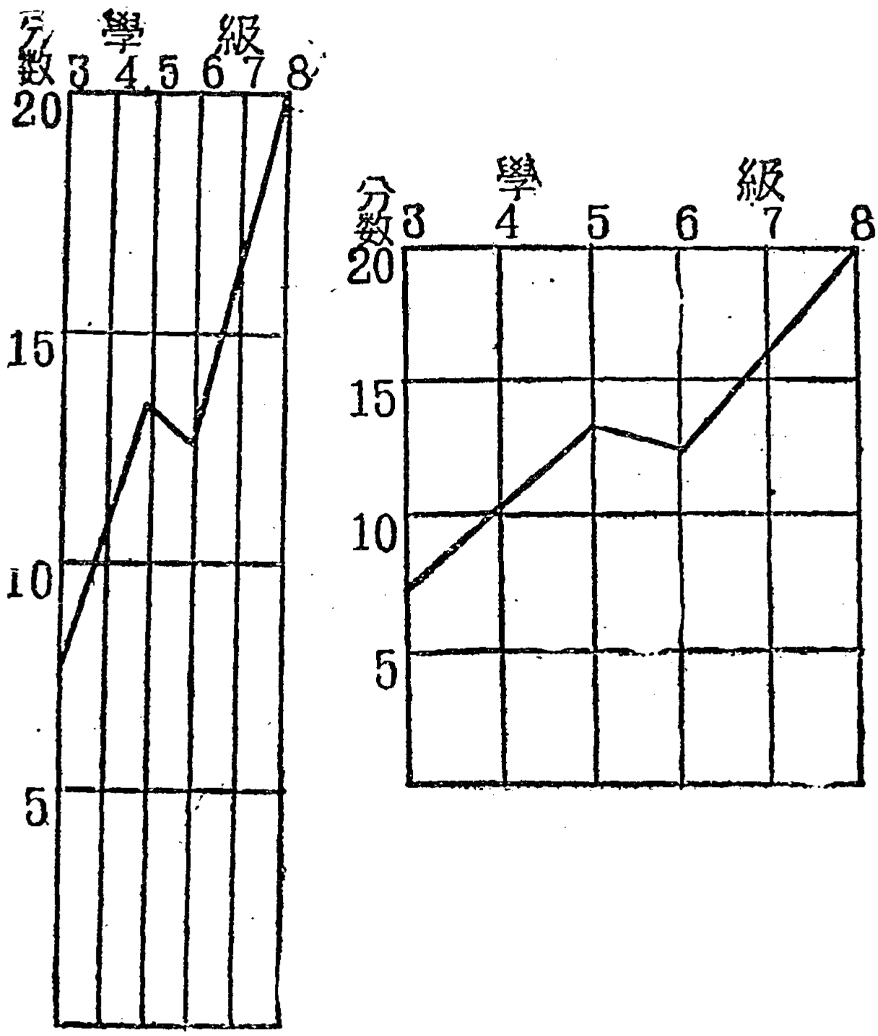
24. 直線圖直條宜稍寬；直線之長短，須用量尺作準，各直線間

距離不可太狹。

25. 用直線圖比較時，注重比較之項目，宜用特種顏色或較大數字表出之。

26. 橫直線圖，左邊先列各項目，次列各項目之數字。

27. 圖不宜太大，務使閱者，不必轉移頭頸，卽能一覽無遺。普通圖形，最大不宜過於一頁。



第二十一圖

28. 圖中字跡，不宜過小。

29. 圖當有變化，不宜單調。

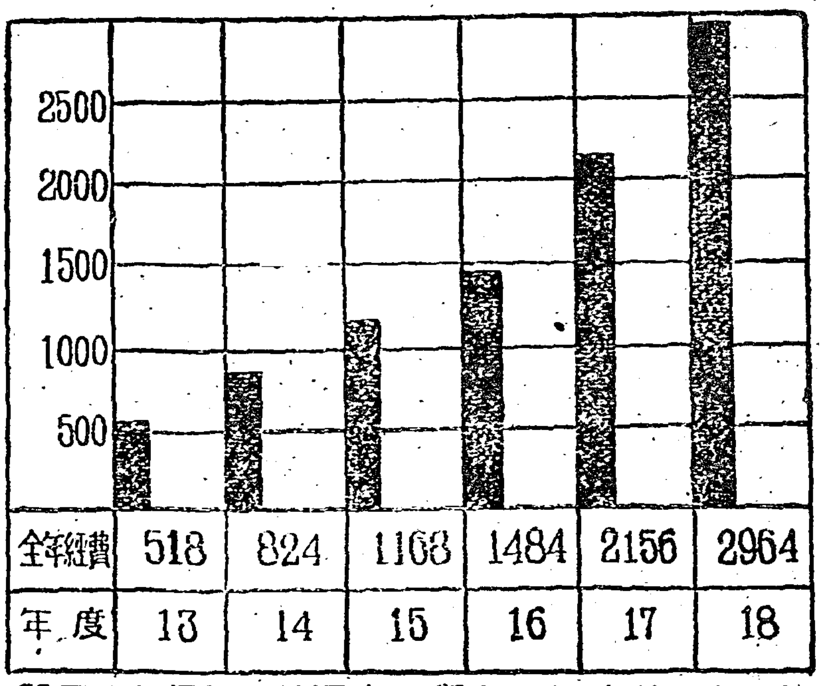
30. 圖之長闊，當有合度之比率；不然，卽將發生誤會。

四　學校行政報告中之統計圖

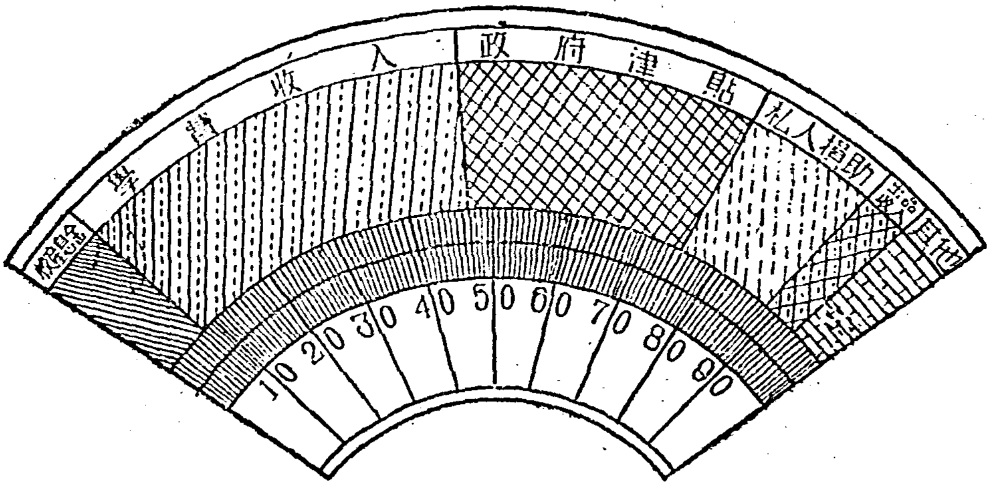
以上不過泛論圖之作法及種類，至學校行政報告必須具有之

重要統計圖，今按其性質異同，分示於下：

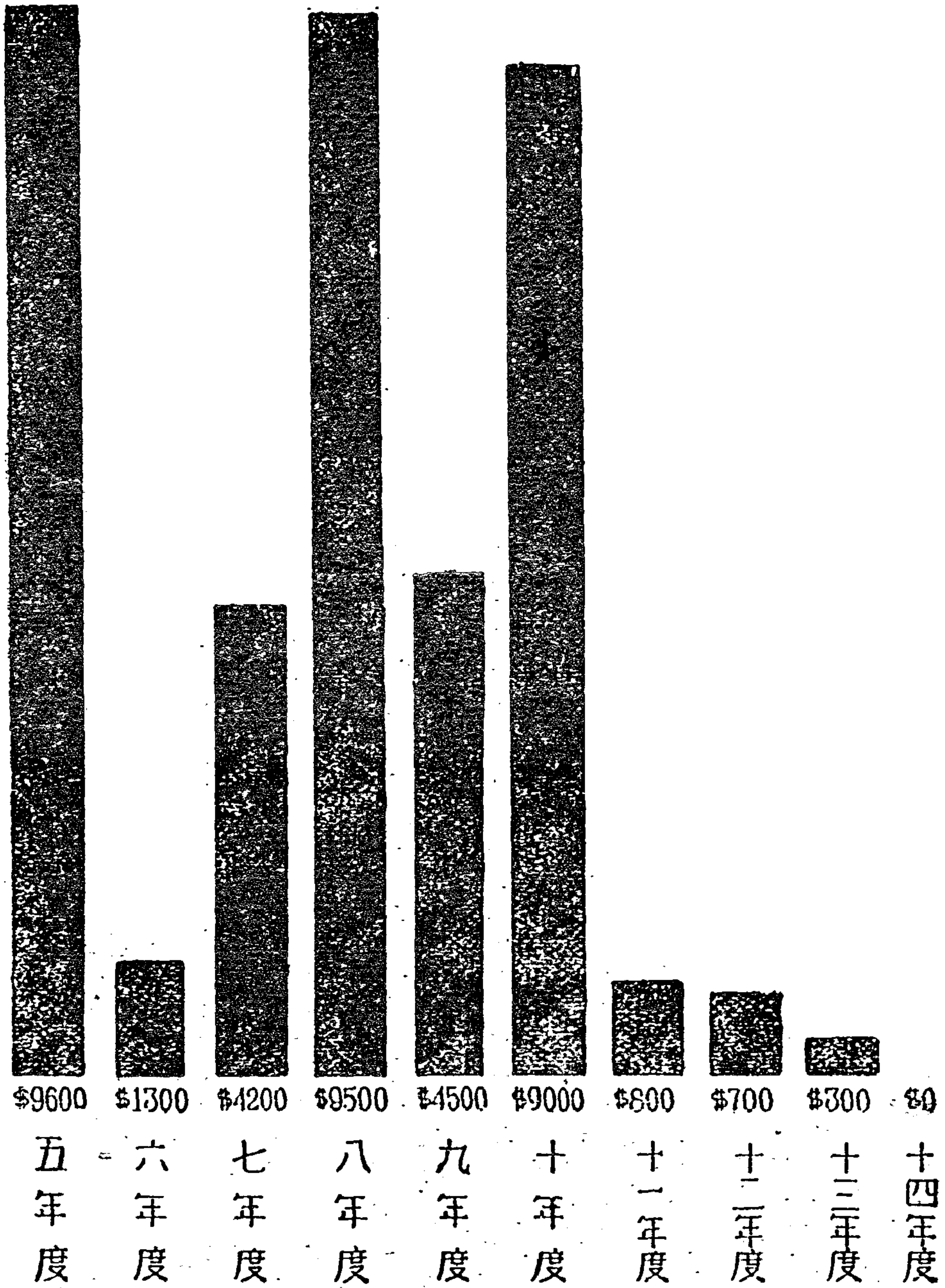
1. 學校經費 學校辦理之善與不善，雖視敎職員之努力與否爲衡，而經費之充裕與否，亦大有關係。校外人士之觀察，亦常注意一校之經費狀況如何，以爲敎育效率之比較；更視歷年之增減，以覘其事業發達之程度。



第二十二圖 某區立小學歷年經常費比較圖



第二十三圖 某私立學校經費來原比較圖

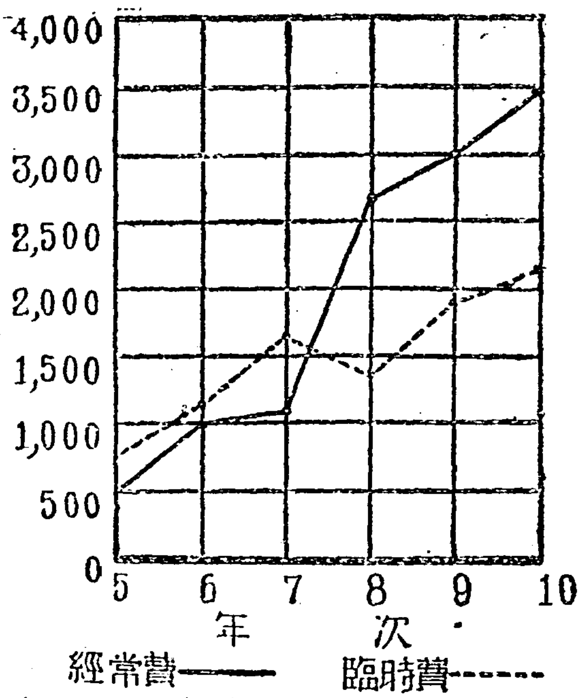


第二十四圖　東大附小歷年臨時費實支数比較圖

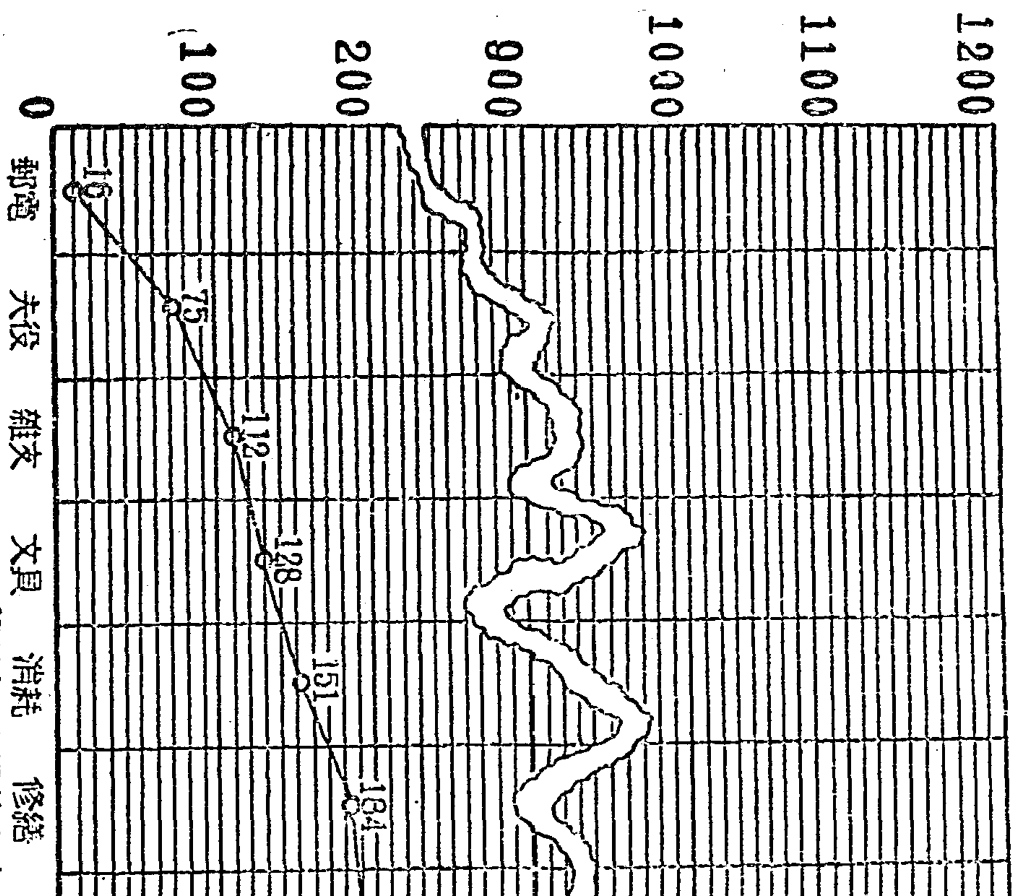
第廿五圖 十八年上期中央大學區立實驗學校各項經費支配比較圖

項	目	預示數
薪工	薪水	$13014
	食工	1062
辦公費	文具	240
	電郵	90
	購置	660
	耗消	1080
雜費	修繕	60
	雜支	102
	特別費	210

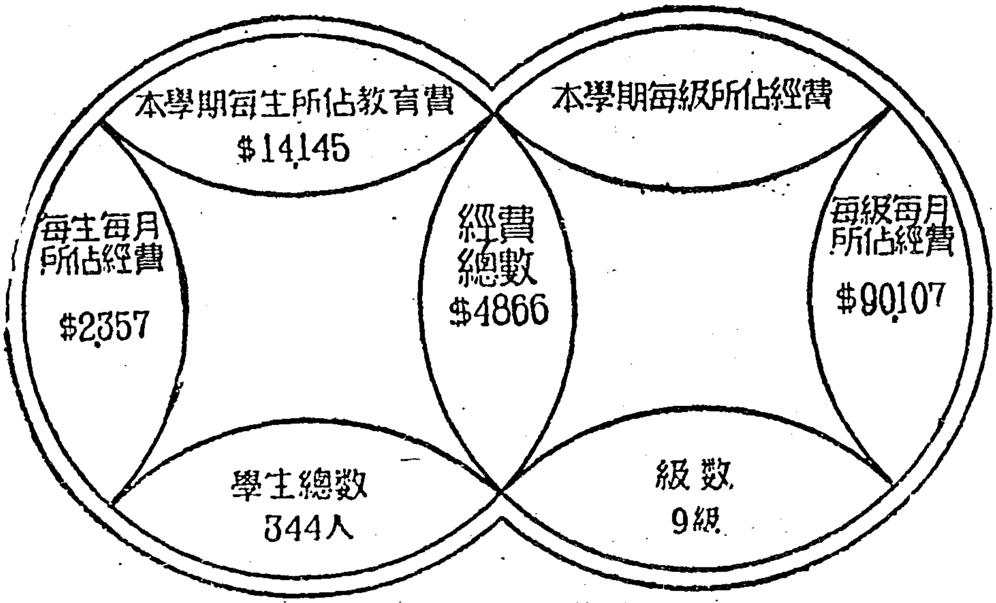
預示總額依實領總額而定



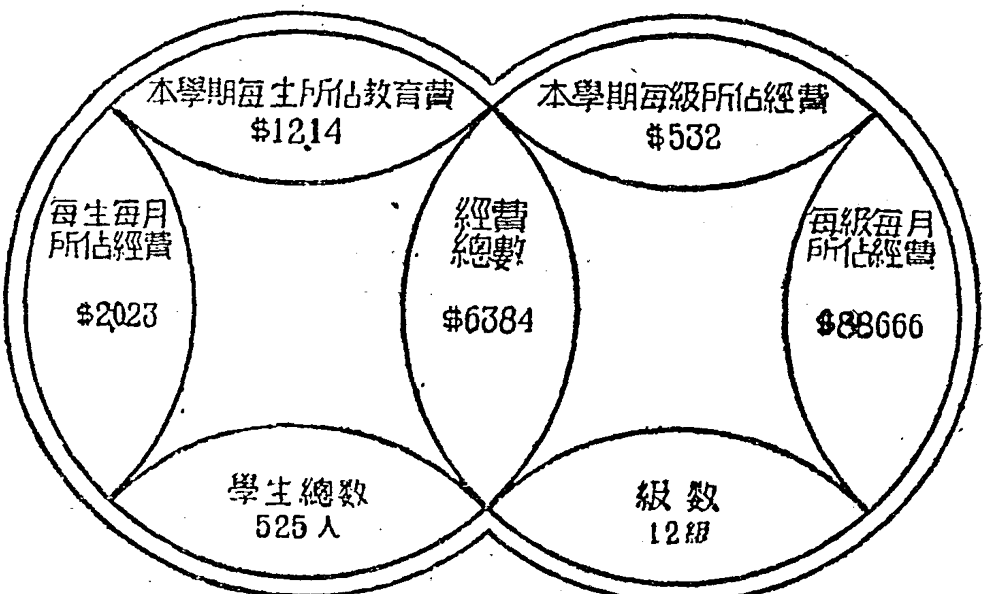
第廿六圖 某學校民國五年至十年經常費臨時費比較圖



第二十七圖　北京師大附屬小學校每月經費支出比較圖（十五年上期）

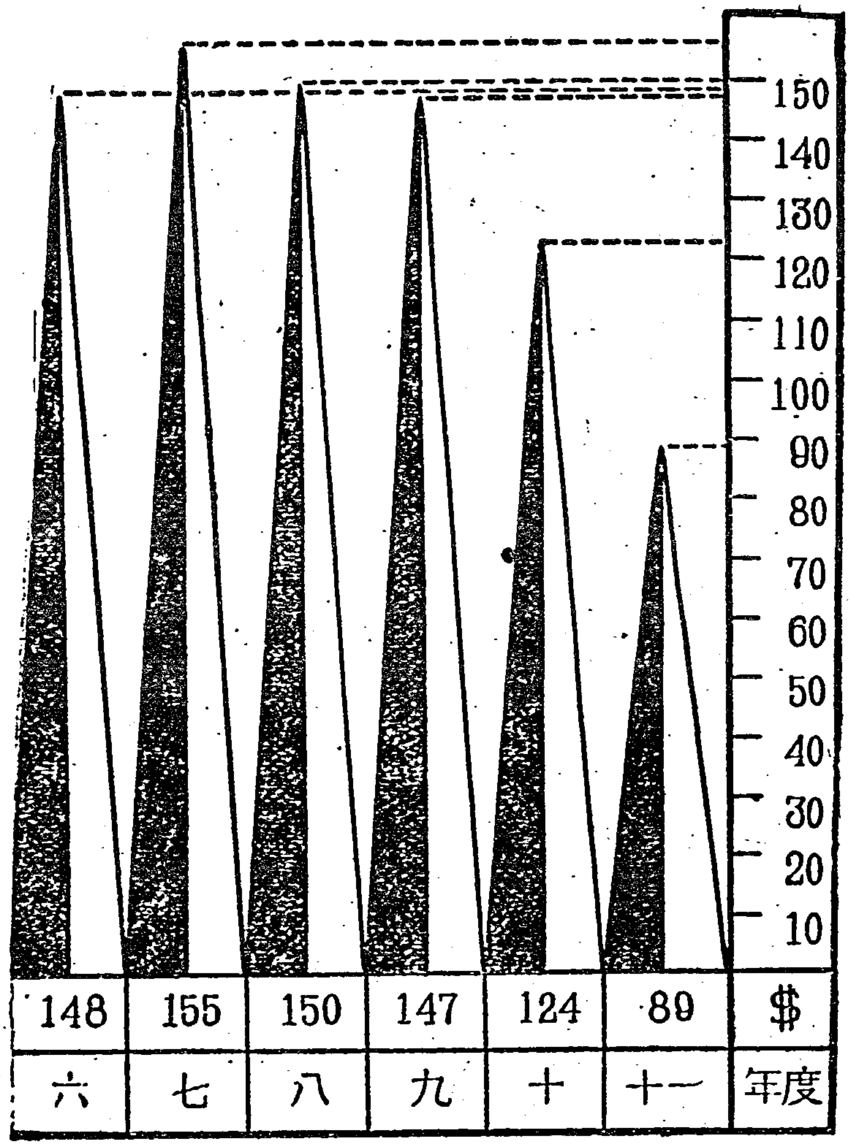


十六年度上學期



十六年度下學期

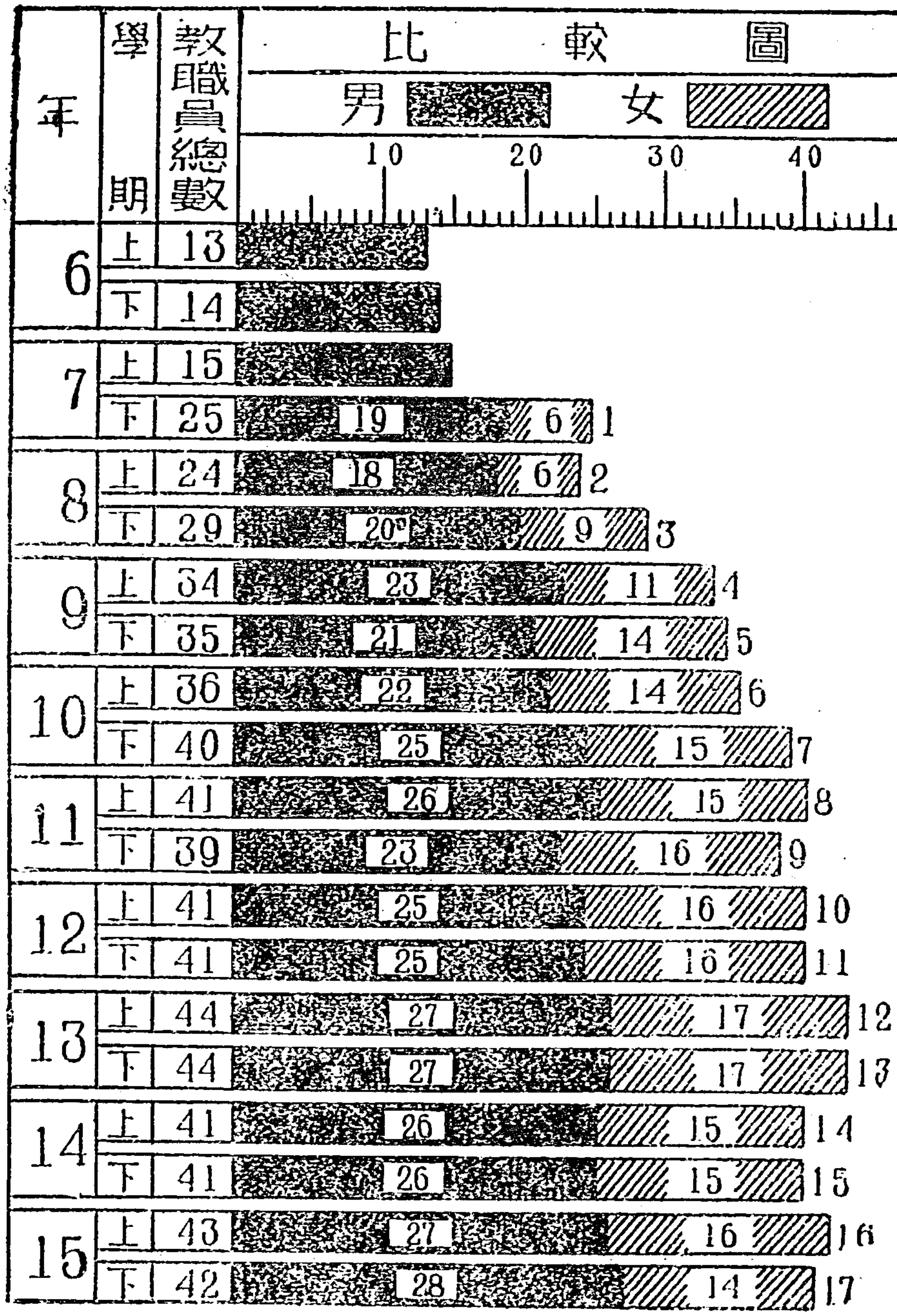
第廿八圖 南京特別市東區實驗學校經常費與學級數及學生數之關係

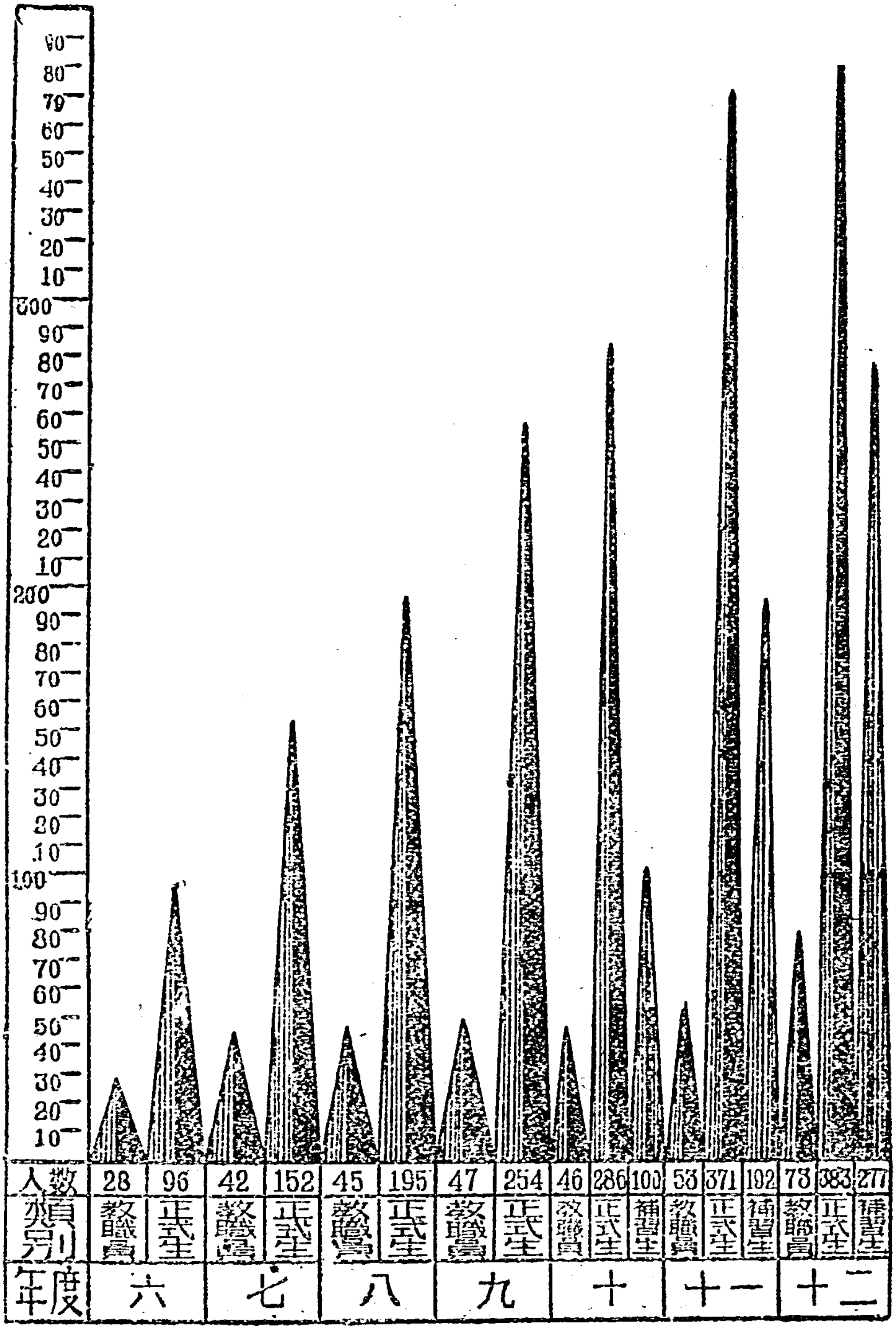


第廿九圖　東大附中歷年在校學生平均每人消耗公費比較圖(民國六年度至十一年度)

2. 敎職員　敎職員爲全校實施敎育者，學生將來之成績，幾全由敎職員決定，故關於敎職員之各種統計，亦須求詳。

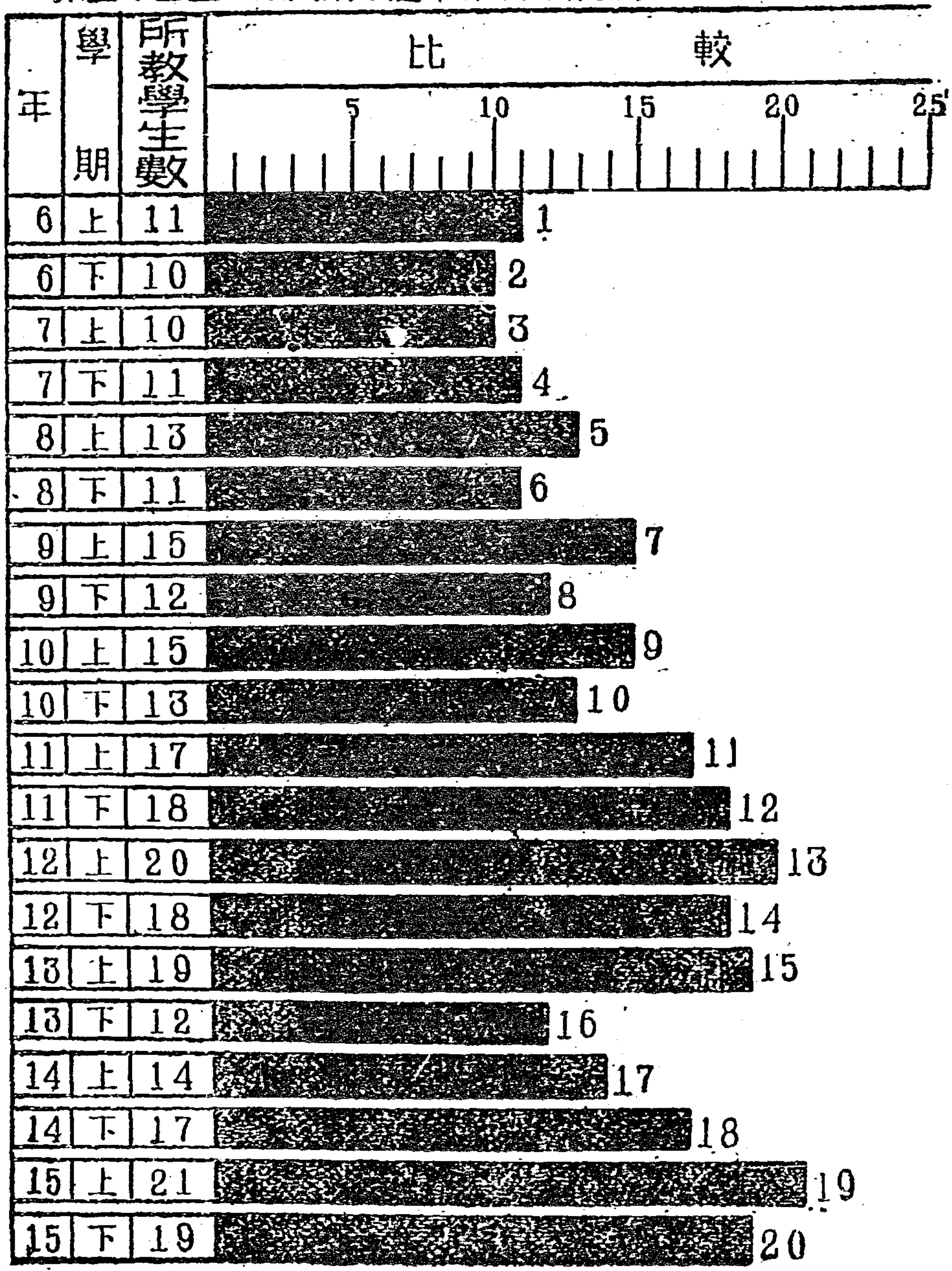
第三十圖 東大附小歷年教職員數比較圖



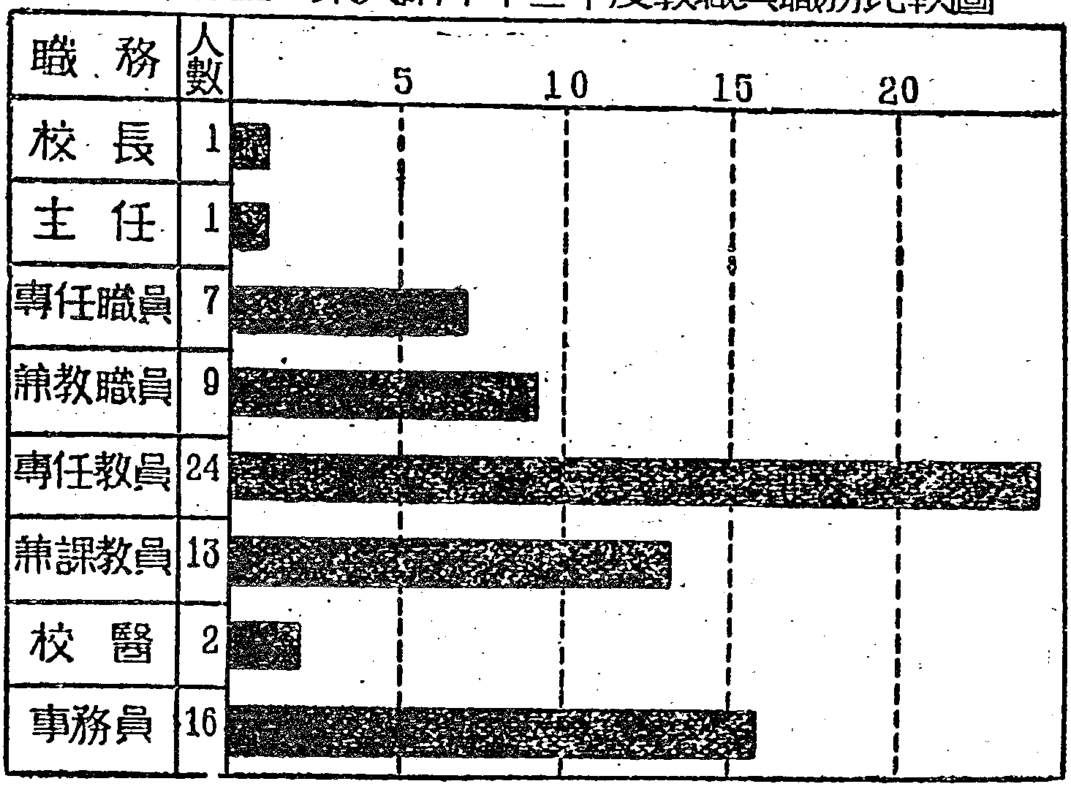


第三十一圖　東大附中歷年教職與在校學生比較圖

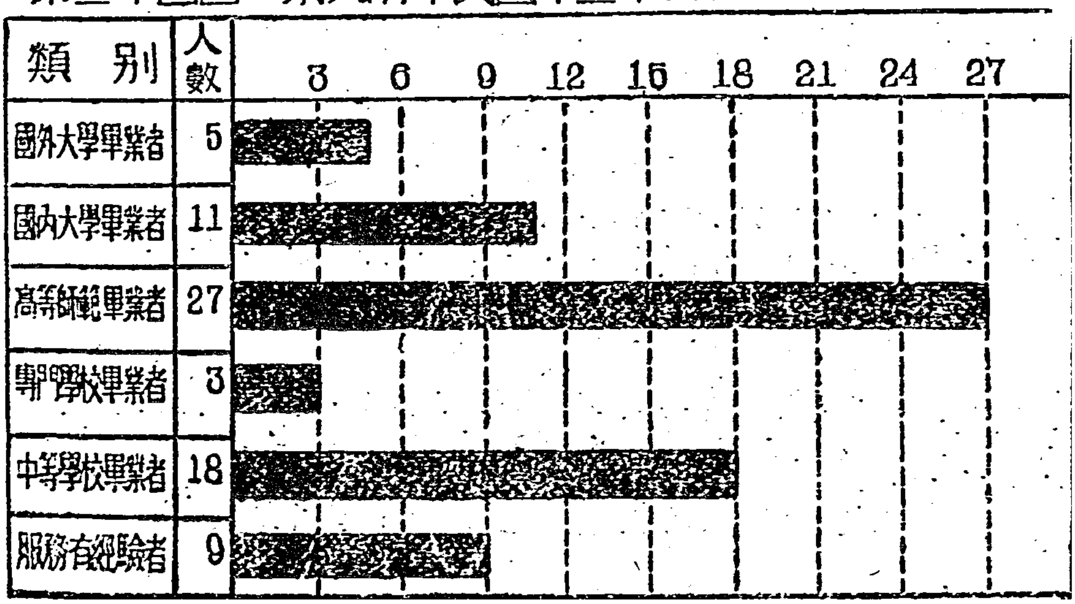
第三十二圖 東大附小歷年每教員所教學生平均數比較圖

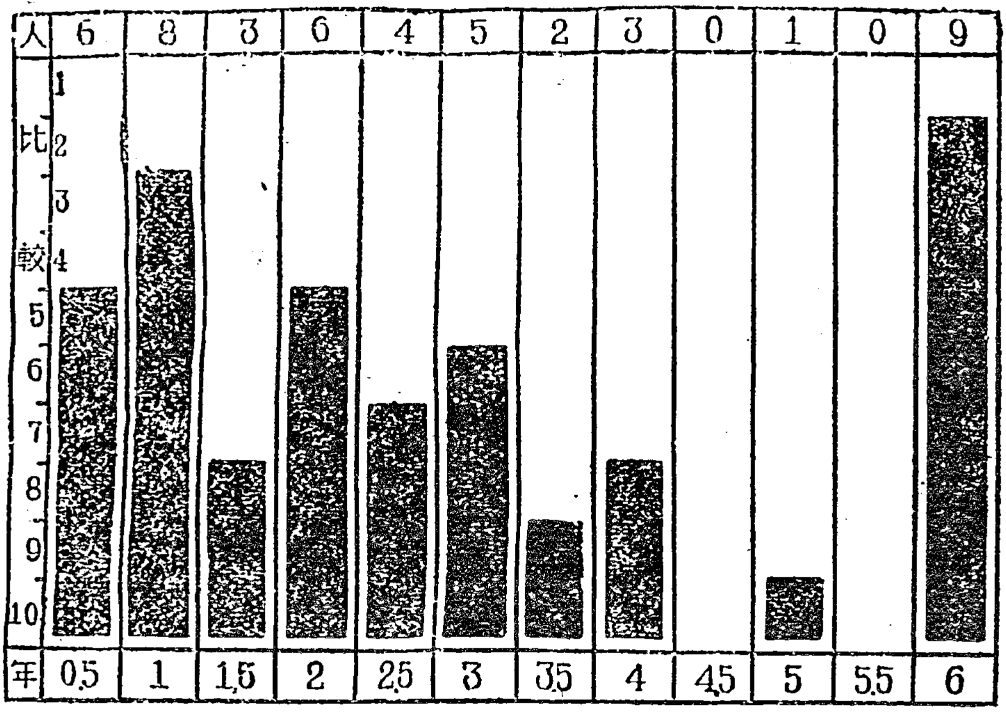


第三十三圖　東大附中十二年度教職員職務比較圖

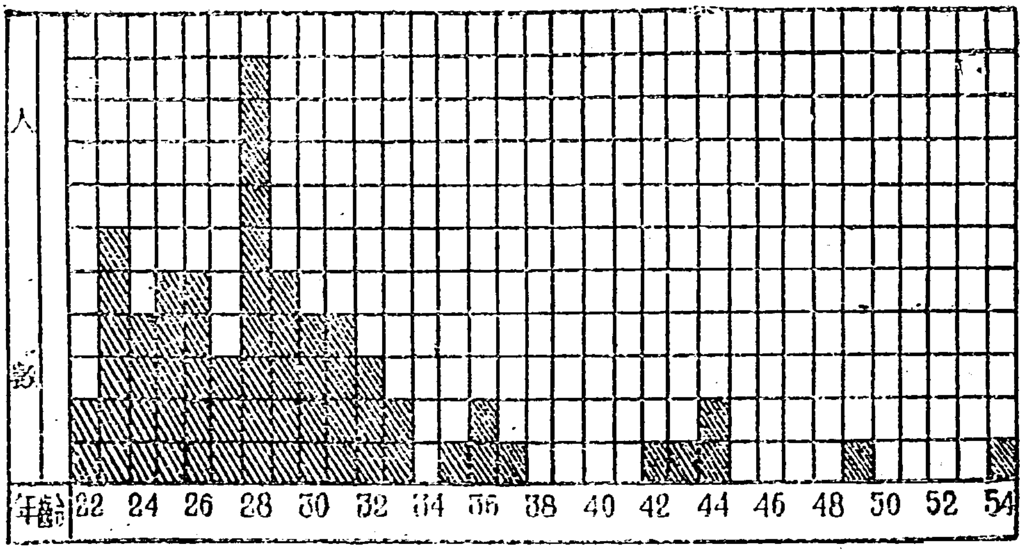


第三十四圖　東大附中民國十二年度教職員資格比較圖

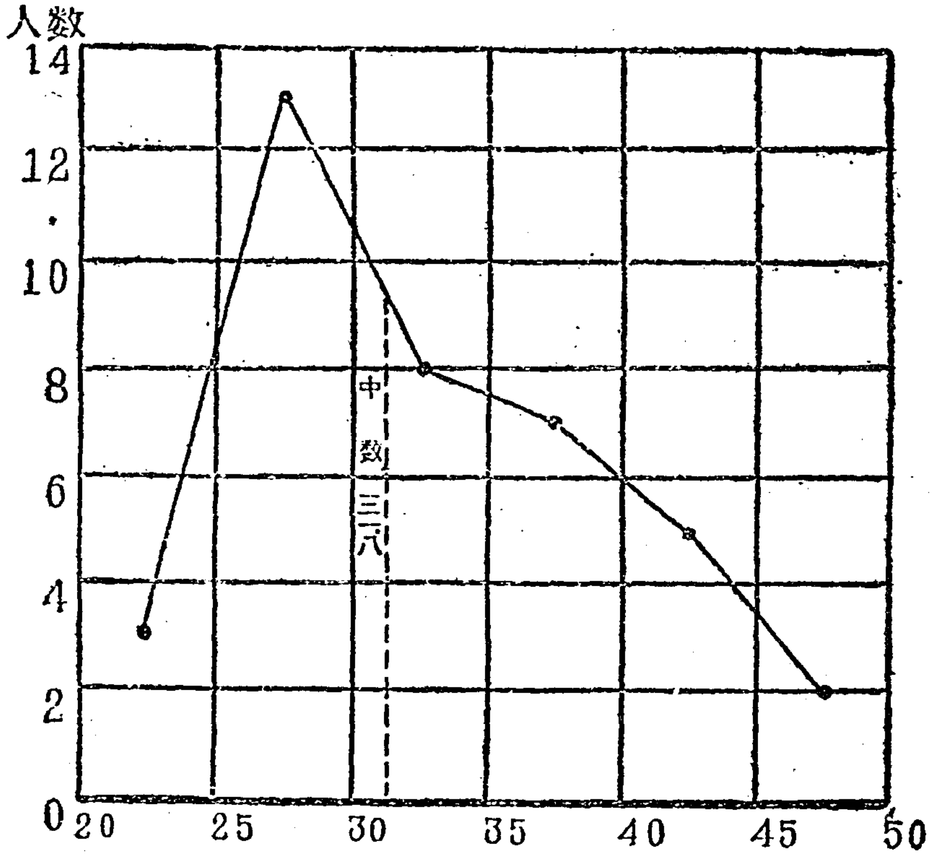




第三十五圖 東大附中民國十二年度教職員在校任職年數比較圖

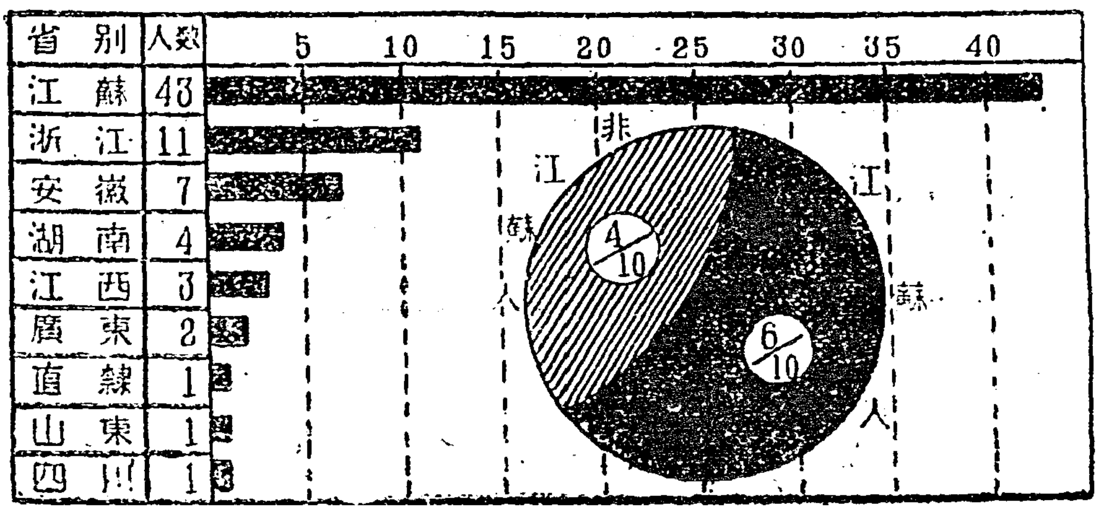


第三十六圖 東大附中民國十二年度教職員年齡比較圖



第三十七圖　某校民國十年度教職員年齡比較圖

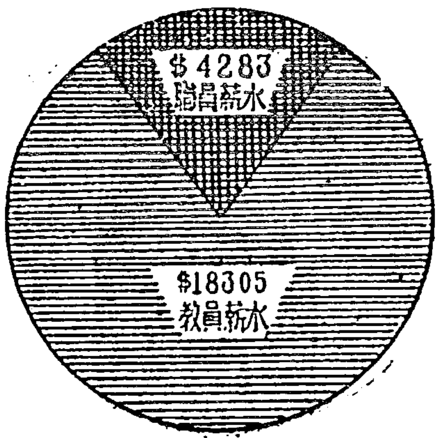
第三十八圖　東大附中民國十二年度教職員籍貫分配圖



A　職員薪水

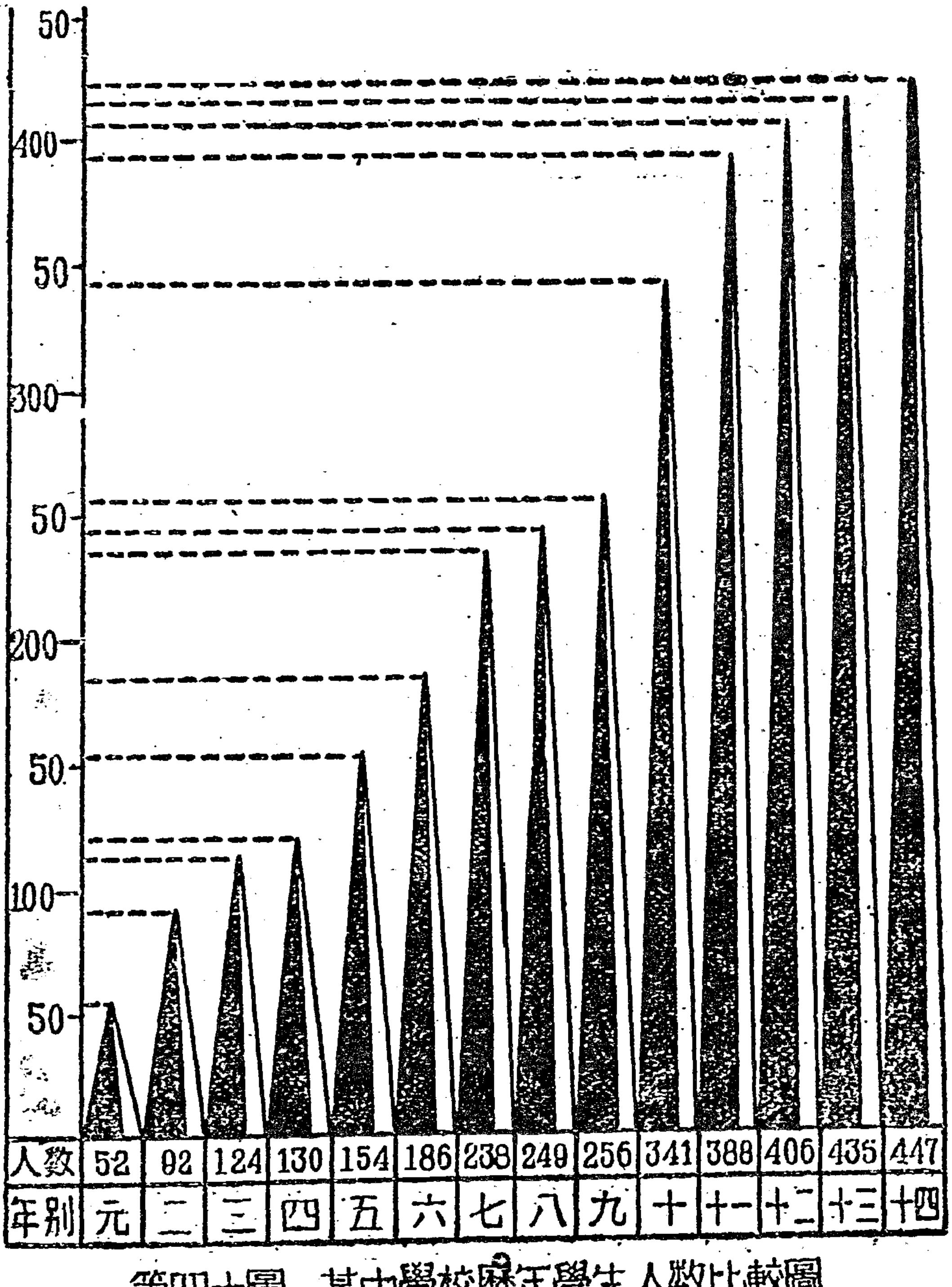
薪　　水	人數
20 —— 29.99 元	5
30 —— 39.99	10
40 —— 49.99	14
50 —— 59.99	5
60 —— 69.99	3
70 —— 79.99	
80 —— 89.99	2
90 —— 99.99	1
100 —— 109.99	
110 —— 119.99	1
120 —— 129.99	3
130 —— 139.99	
140 —— 149.99	
150	3
總　　計	47

B. 教職員薪水比較



第三十九圖
北京師範大學民國十四年度下期教職員薪水比較

3. 學生　無論在校學生及畢業學生之情形，實爲參觀者所急欲明瞭。故學校對於此項統計，亦宜不厭求詳。



第四十圖　某中學校歷年學生人数比較圖

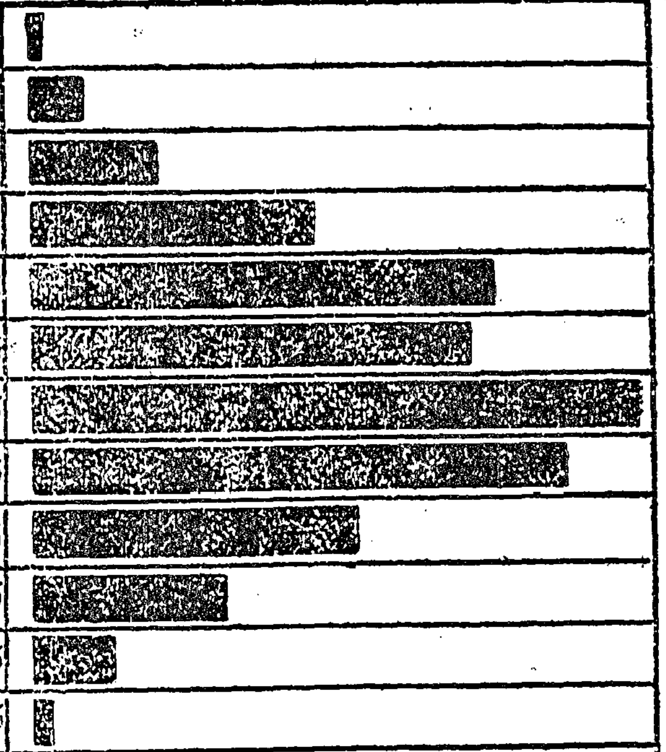
江蘇縣別	人數
江陰	23
金壇	21
江寧	17
無錫	17
宜興	16
高郵	12
武進	11
鹽城	11
六合	9
丹徒	9
阜寧	7
泰縣	6
如皋	6
泰興	6
松江	5
高淳	5
邳縣	5
江都	4
丹陽	4
常熟	4
寶應	4
句容	4
奉賢	4
崇明	4
金山	3
東台	3
銅山	3
溧陽	3
嘉定	3
蕭縣	3
江浦	3
吳縣	3
南匯	2
宿遷	2
崑山	2
南通	2
寶山	2
泗陽	2
吳江	2
漣水	2
碭山	2
沛縣	1
上海	1
靖江	1
儀徵	1
淮陰	1
總計	261

省別	人數	比較圖
江蘇	261	
安徽	64	
浙江	11	
湖北	8	
江西	8	
河南	6	
直隸	6	
湖南	6	
四川	5	
山東	3	
福建	2	
貴州	1	
廣東	1	
廣西	1	
總計	383	

第四十一圖

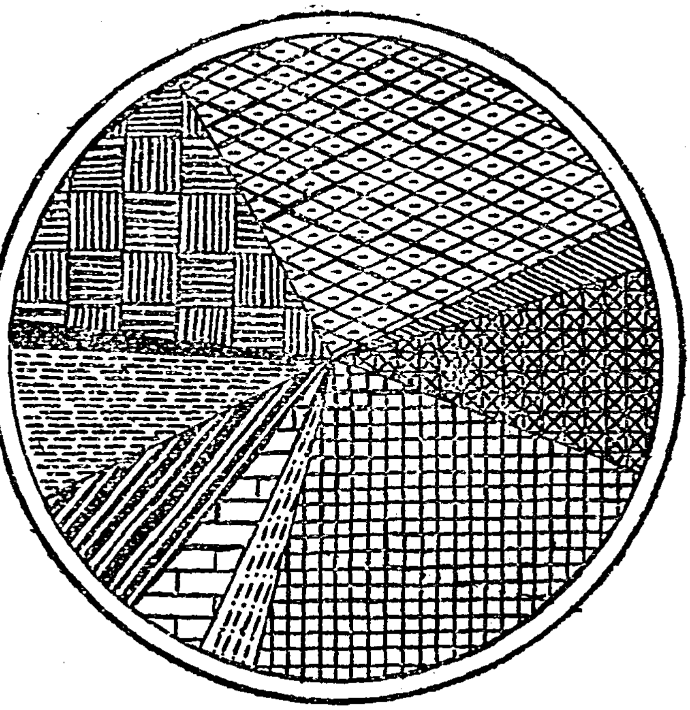
東大附中民國十二年度在校學生籍貫比較圖

年齡＼人數＼級組	高二 1	高二 2	高一 3	高一 4	初三 5	初三 6	初二 7	初二 8	初一 9	初一 10	統計	百分比
10-10:11										1	1	0.25 %
11-11:11								1	4	1	6	1.5 %
12-12:11					1		2	1	3	7	14	4 %
13-13:11					2	3	6	5	11	8	35	9 %
14-14:11		2	1	1	6	7	10	10	13	8	58	15 %
15-15:11	3	3	4	4	10	5	4	10	5	6	54	14 %
16-16:11	2	5	8	10	10	20	9	7	3	4	78	20 %
17-17:11	8	6	12	12	5	8	7	4		1	63	17 %
18-18:11	11	7	8	10	1		2	1			40	10.25 %
19-19:11	6	10	4	1	2						23	6 %
20-20:11	2	4	1	1		1					9	2.5 %
21-21:11		2									2	0.5 %
總數	32	39	38	39	37	44	40	39	39	36	383	
平均年齡	18:2		17:5		16:2		15:4		14:2		16:2	



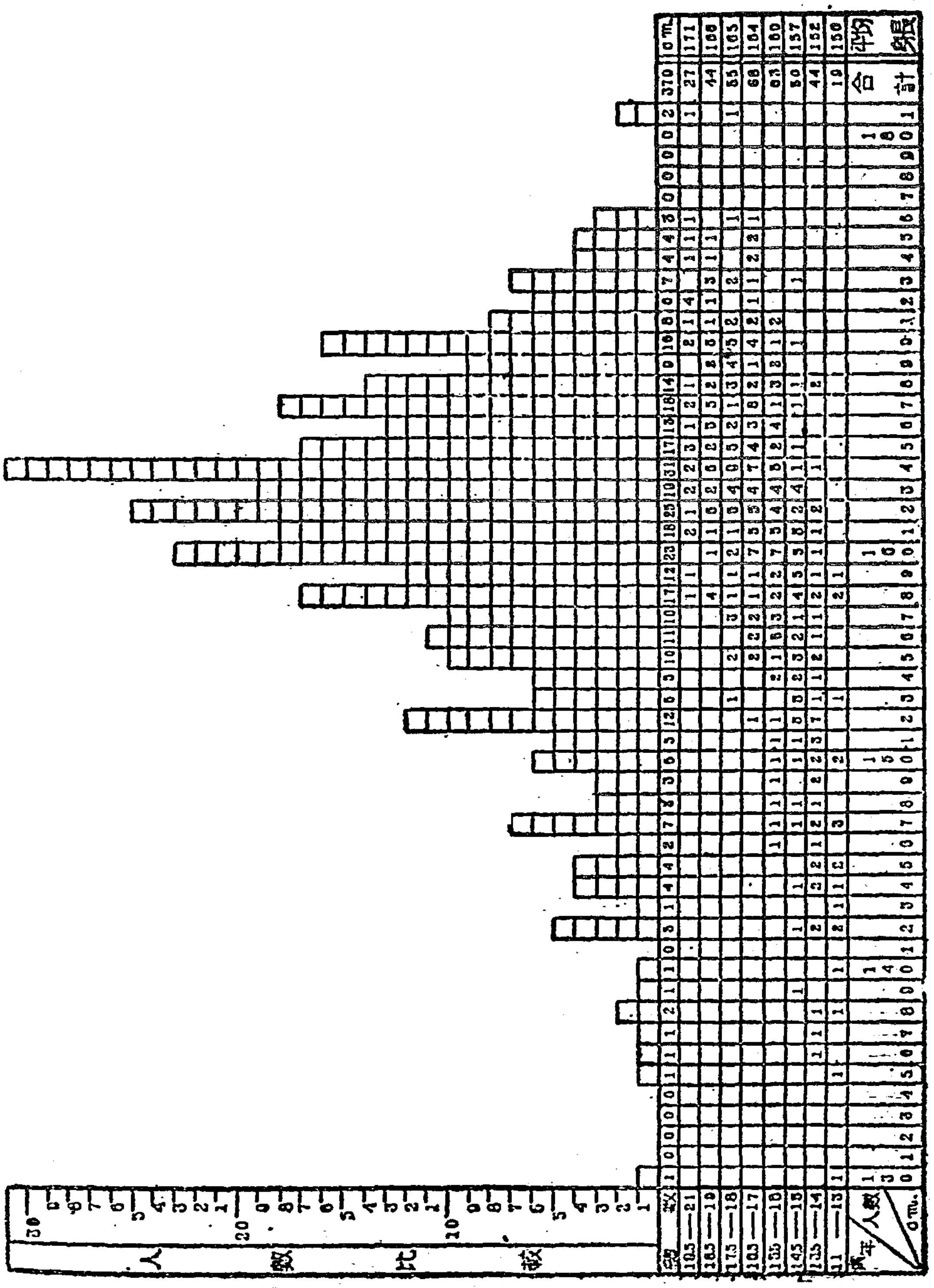
第四十二圖　東大附中民國十二年度在校學生實足年齡比較

級 / 組 / 人類	高二		高一		初三		初二		初一		總計	圖例	%
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			
農	4	6	8	5	4	15	1	6	4	4	57		15
商	11	5	6	11	10	8	14	11	12	13	101		26
軍警	1	1			1		1		1	2	7		2
政法	2	3	4	3	4	5	5	8	4	4	42		11
教育	9	9	9	10	8	12	9	6	12	5	89		23
醫		1		3			1	1	2	1	9		3
其他		1	1		1	1	3	1	2	5	15		4
閒居或守業	1	4	5	2	6	1	2	2	2	2	27		7
未詳	3	8	5	5	3	1	3	4			32		8
缺或已故	1	1				1	1				4		1
合計	32	39	38	39	37	44	40	37	39	36	383		100

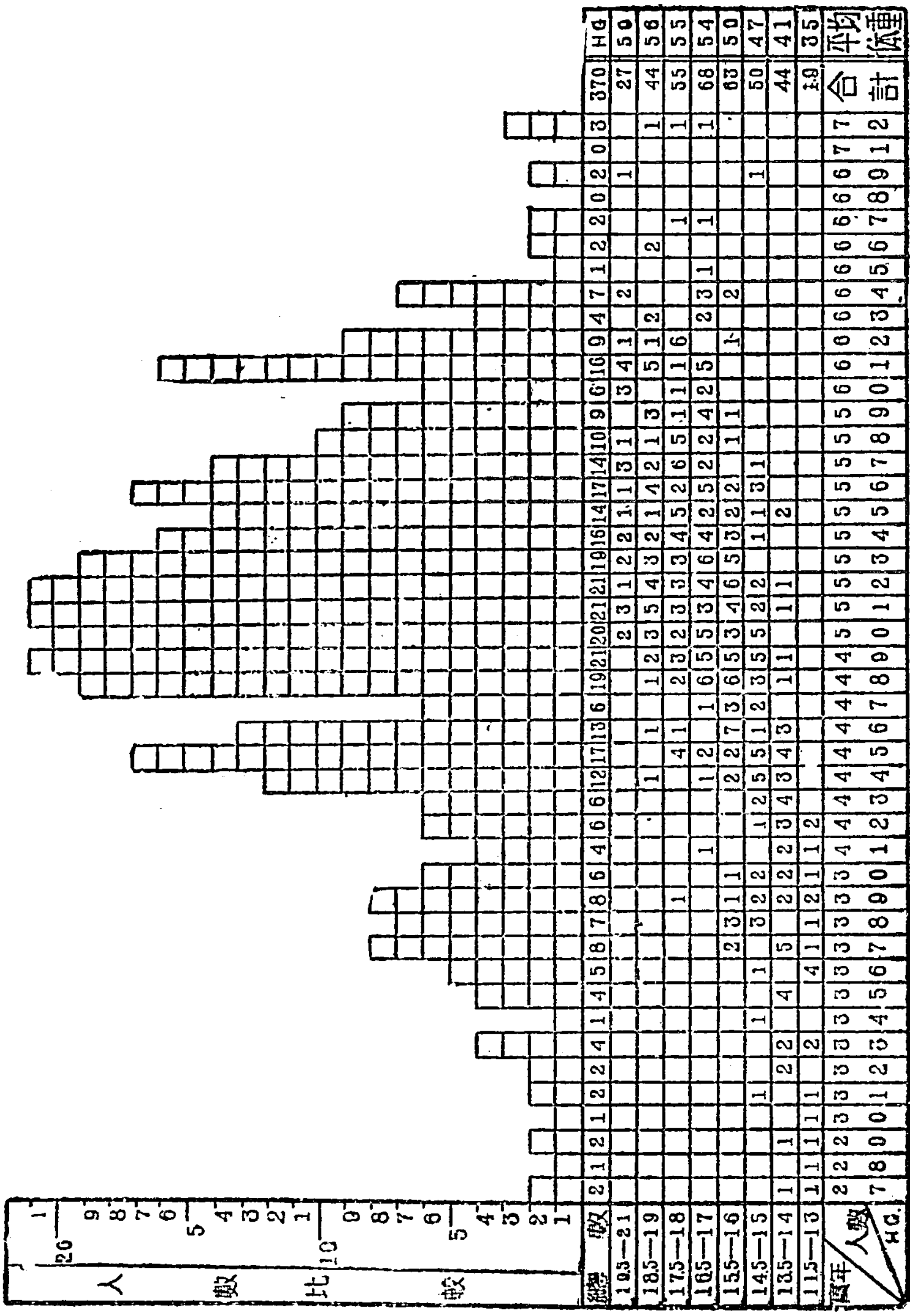


第四十三圖

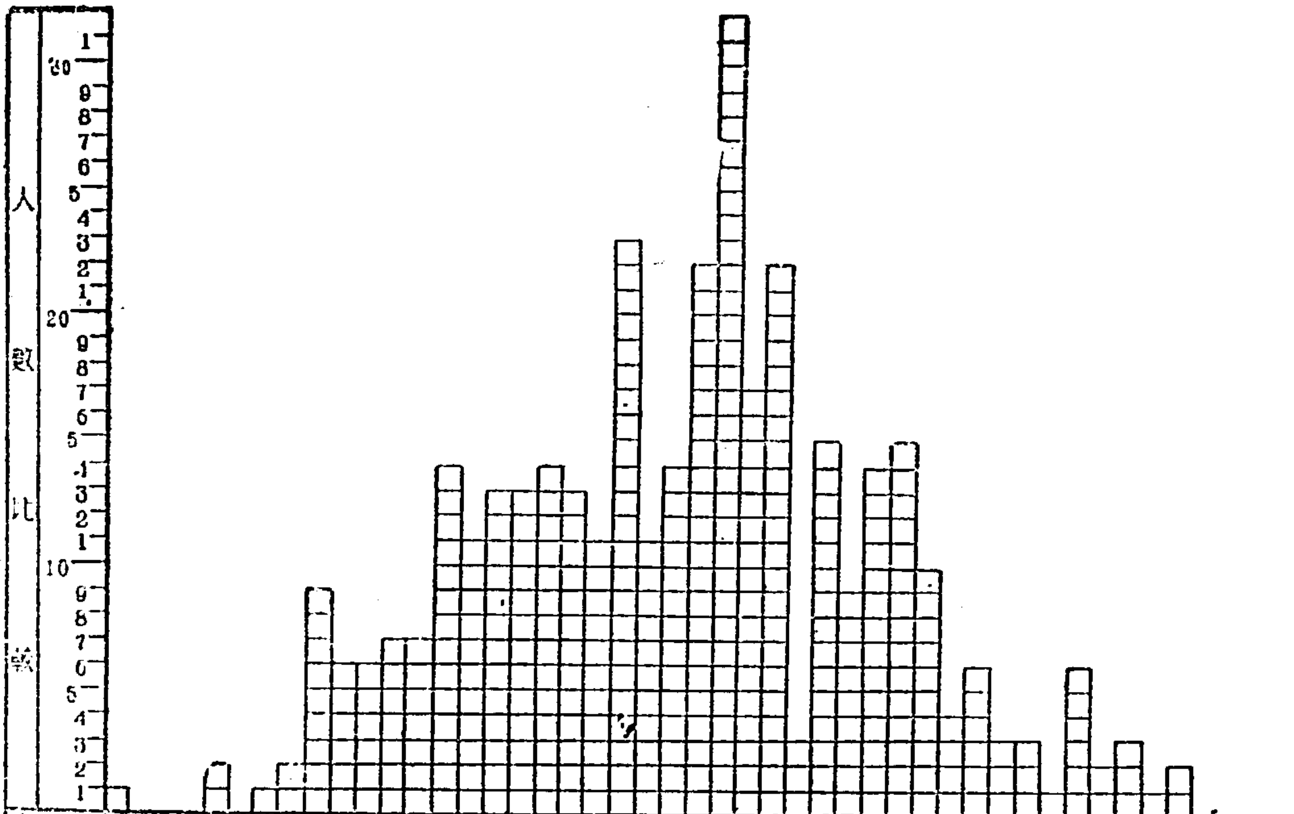
東大附中民國十二年度在校學生家長職業比較



第四十四圖　東大附中民國十二年度在校學生身長比較



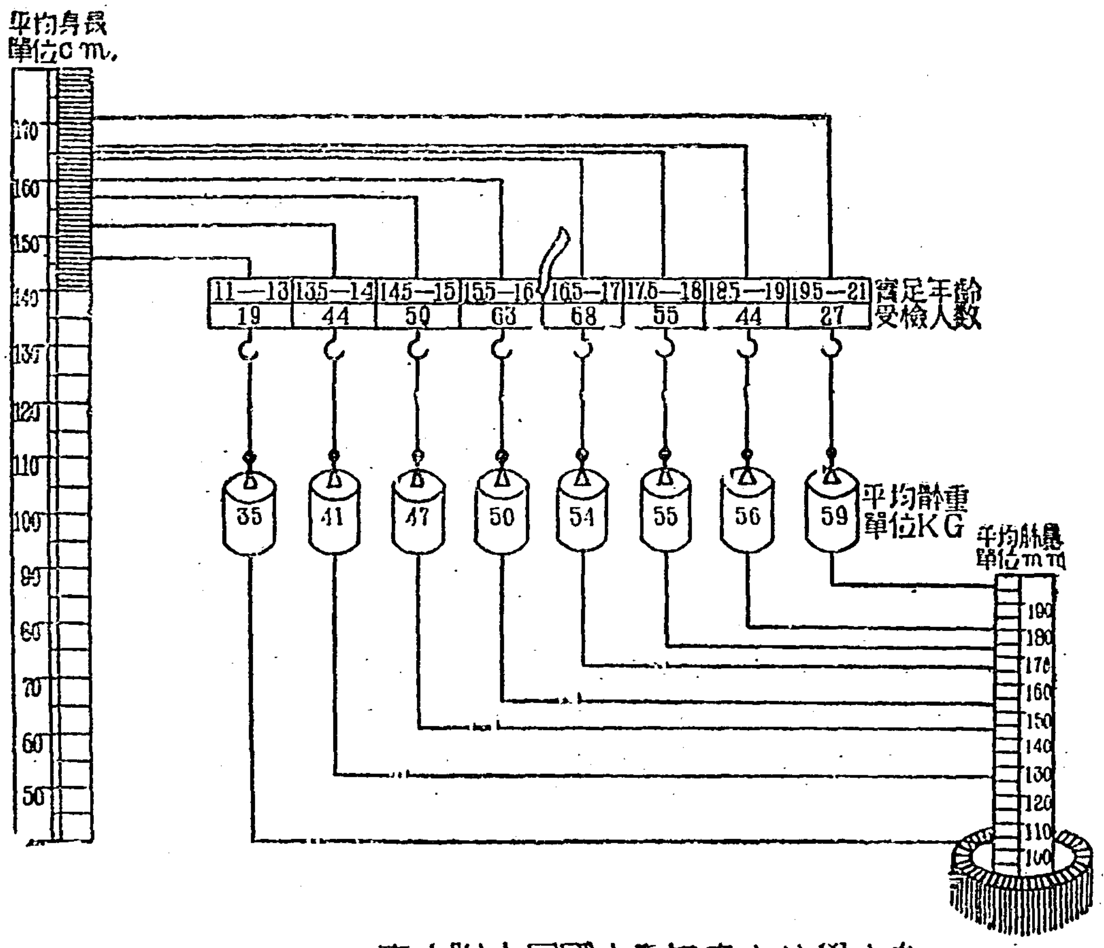
第四十五圖 東大附中民國十二年度在校學生体重比較



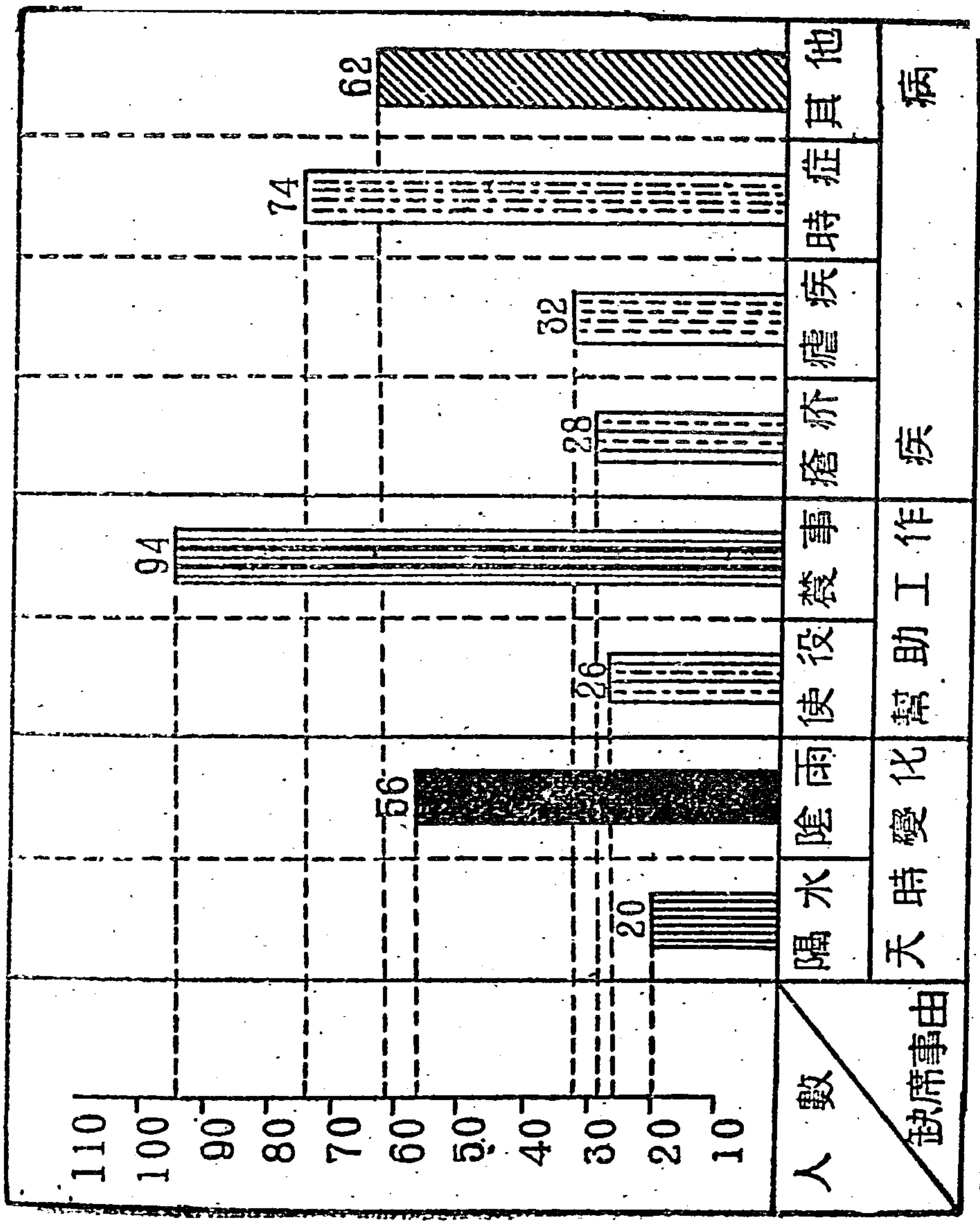
年齡＼人數 mm	46—50	51—55	56—60	61—65	66—70	71—75	76—80	81—85	86—90	91—95	96—100	101—105	106—110	111—115	116—120	121—125	126—130	131—135	136—140	141—145	146—150	151—155	156—160
總數	1	0	0	0	2	0	1	2	9	6	6	7	7	14	11	13	13	14	13	11	23	11	14
195—21																					1		1
185—19																2				1	4	2	1
175—18											1			1	1		3	3		1	1	2	5
165—17											1	1	2	1				4	5	1	2	2	3
155—16										1		2	1	3	3	3	2	2	2	3	9	2	2
145—15					1				3	1		1	2	4	2	2	2	3	4		3	1	2
135—14							1	1	3	1	2		1	4	3	6	5	2	2	5	2	2	
11—13	1				1			1	3	3	2	3	1	1	2		1						

年齡＼人數 mm	161—165	166—170	171—175	176—180	181—185	186—190	191—195	196—200	201—205	206—210	211—215	216—220	221—225	226—230	231—235	236—240	241—245	246—250	251—255	256—260	合計	平均肺量
總數	22	32	17	22	3	15	9	14	15	10	4	6	3	3	1	6	2	3	1	2	358	mm.
195—21	2	4	2	1	1			1	1	3	1	1	2	1	1			2		1	27	196
185—19	2	5	2	6		4	1	1	3	3	1	3				3					44	181
175—18	3	5	2	2	1	3	4	5	4	2	1	1	1	1		1				1	55	175
165—17	7	7	3	9		4	3	3	3	2		1					1		1		67	167
155—16	3	7	4		1	4		3	3		1			1		1	1				63	156
145—15	5	3	3	3				1								1		1			49	144
135—14		1	1				1		1												44	127
11—13																					19	96

第四十六圖　東大附中民國十二年度在校學生肺量比較

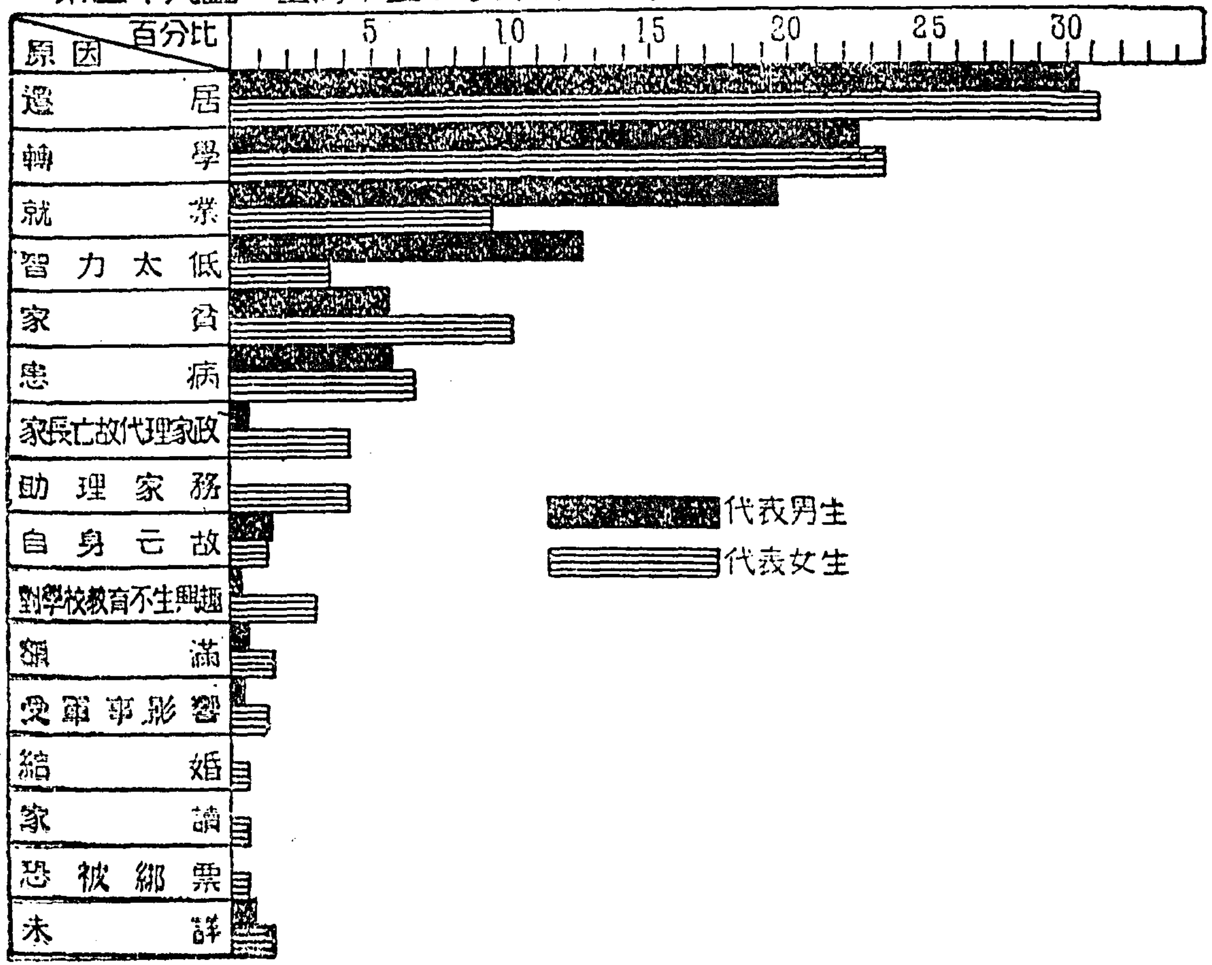


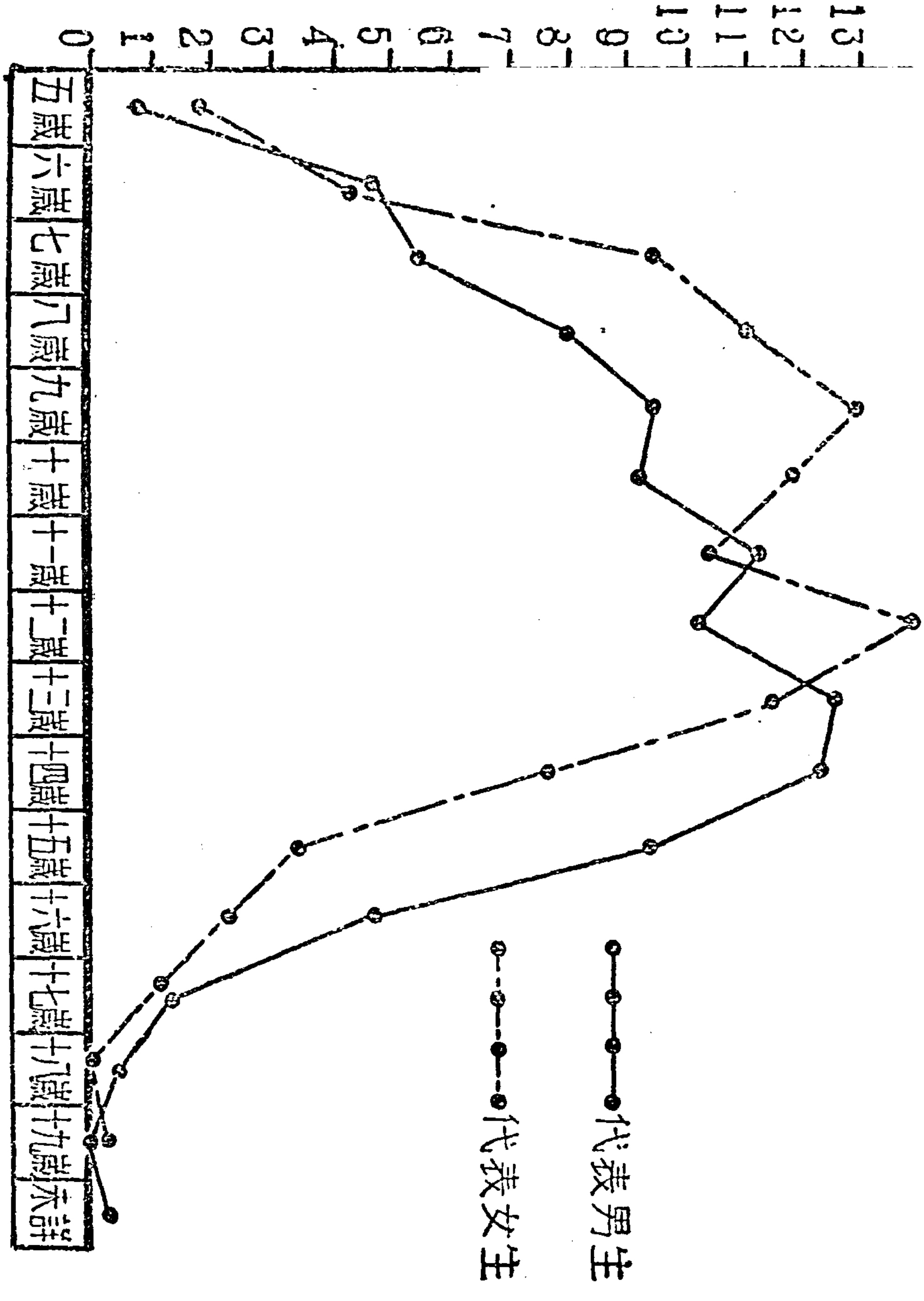
第四十七圖 東大附中民國十二年度在校學生身長體重肺量各實足年齡平均比較圖



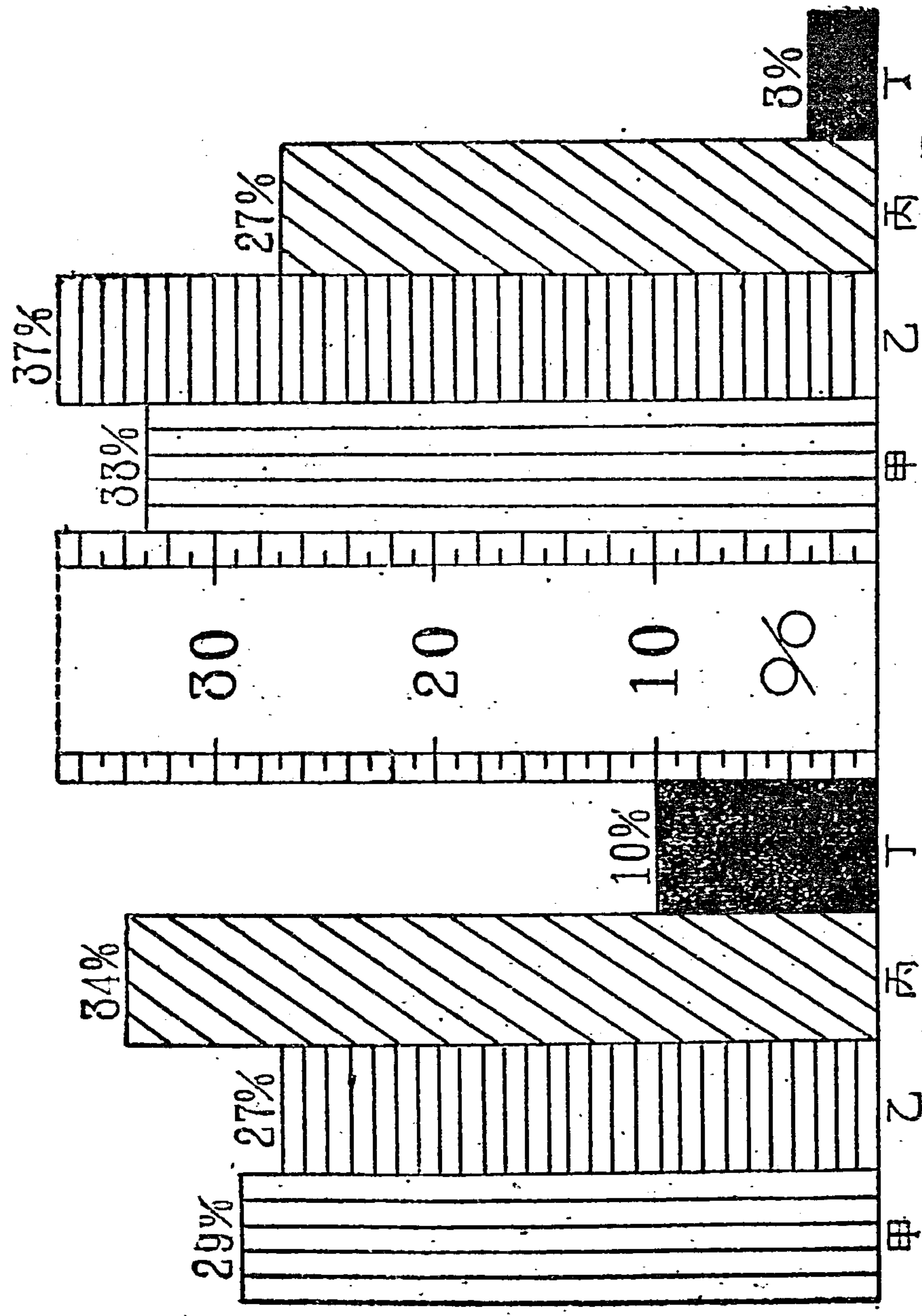
第四十八圖　燕子磯小學十八年度上期在校學生缺席事由統計圖

第四十九圖　上海市立小學男女生退學人數百分比圖（十六年度上期）

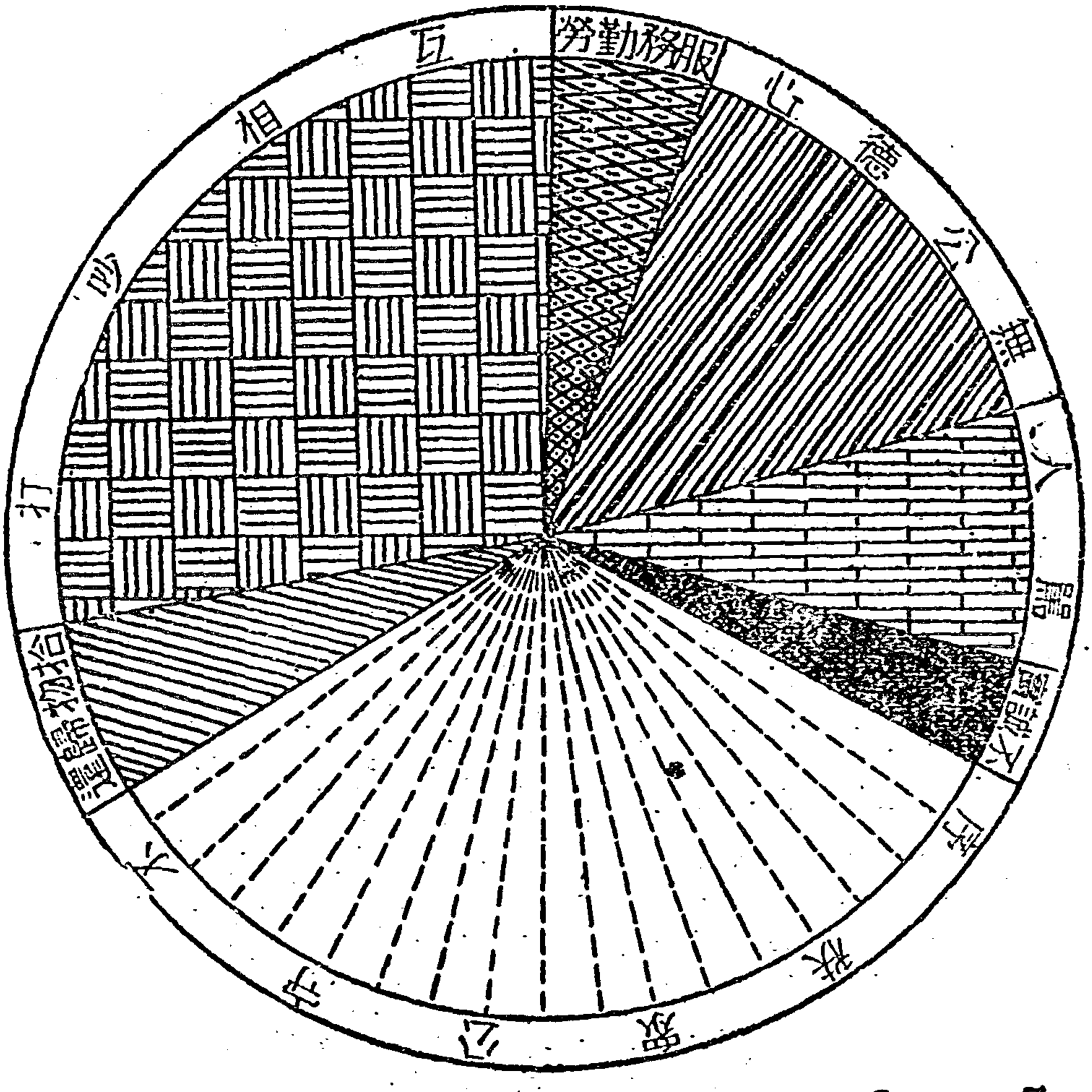




第五十圖　上海市立小學男女生退學年齡百分比圖（十六年度上期）

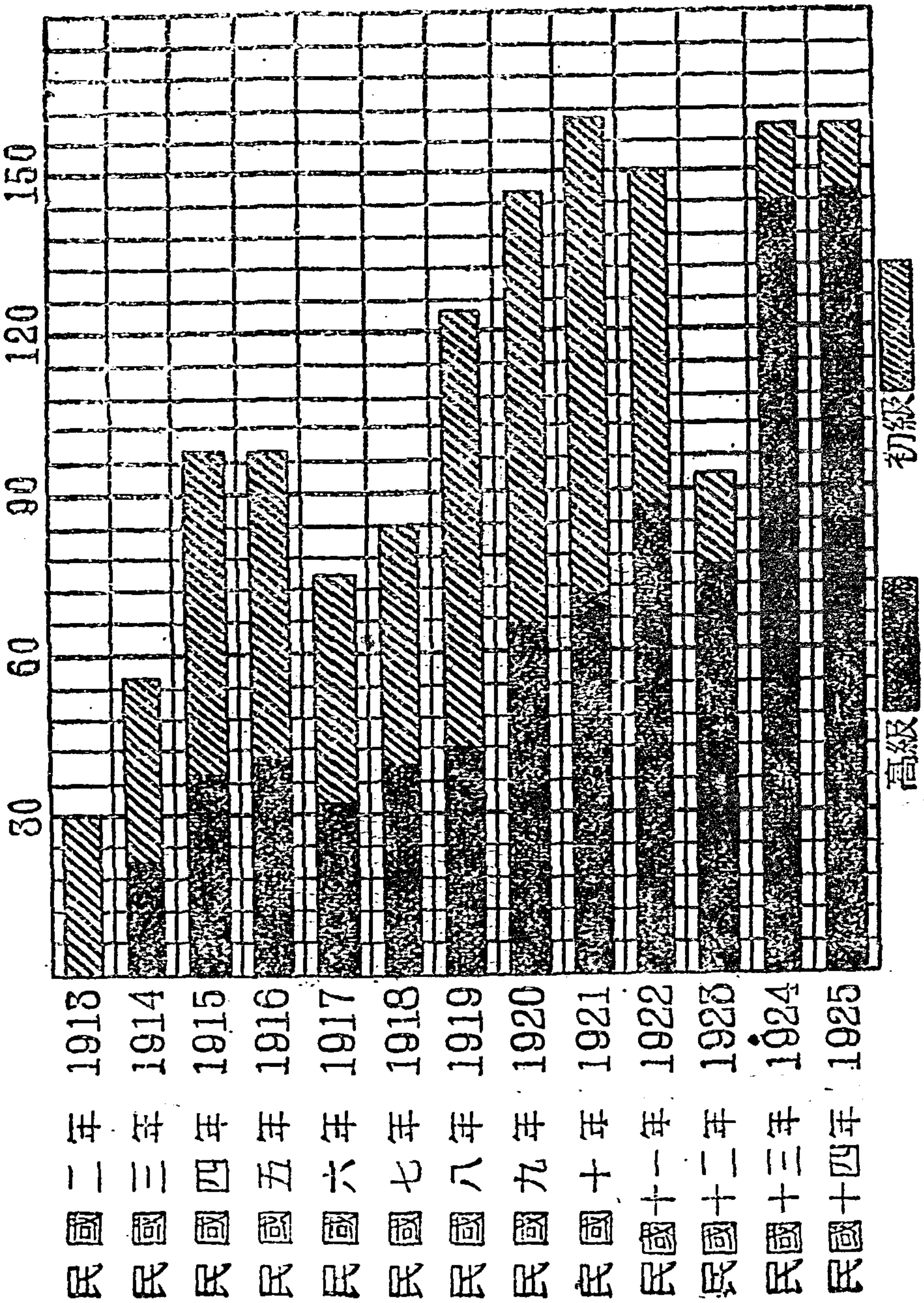


第五十一圖 北京師大附小十四年度下期全校兒童學業及操行成績百分比圖



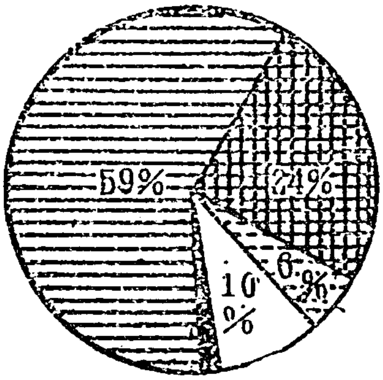
1. 互相吵打	2. 不守公衆秩序	3. 無公德心	4. 罵人	5. 拾物歸還	6. 服務勤勞	7. 不誠實
25%	30%	15%	10%	9%	7%	4%

第五十二圖　南京特別市東區實驗學校十六年度下期五月份兒童行為統計圖

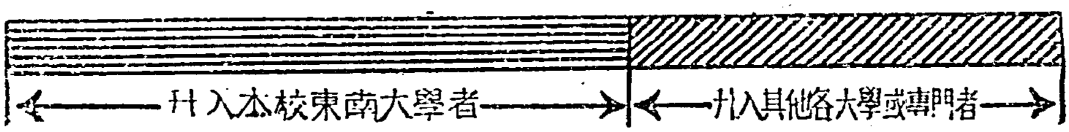


第五十三圖 北京師大附小歷年畢業兒童人數統計圖(民國十五年上期)

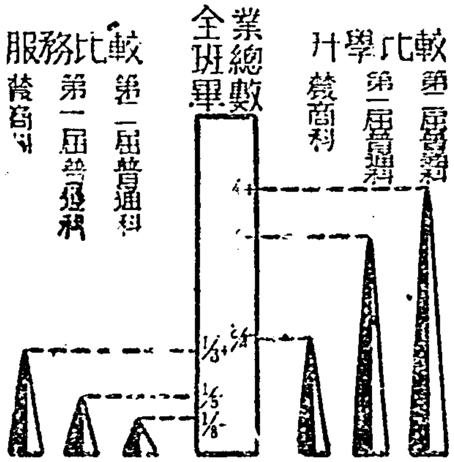
科別＼人數＼類別	升學	服務	閒居	未詳	已故	總計
農科	3	5	1	6		15
工科	7	5	1	1		14
商科	5	6	2	1	1	15
第一屆普通科	27	9	2	3		41
第二屆普通科	32	5	2	2		41
合計	74	30	8	13	1	126



科別＼人數＼升學別	東南大學	赴德留學	京平民大學	南方大學	金陵大學	北洋大學	廈門大學	沪江大學	唐山大學	復旦大學	武昌師範大學	私立中國公學	同濟醫學	醫學專門	公立法政	第二工業專門	上海第一師範專科	第五師範專科	大同大學	第一中高三	總計	佔畢業總數
農科	2		1																		3	¾弱
工科	4	1		1									1								7	
商科	2			1	1							1									5	
第一屆普通科	16			1		2	1	1	1	1					2			1		1	27	¾弱
第二屆普通科	20					1	1	1			1			2	1	1	2		1	1	32	¾強
合計	44	1	1	3	1	3	2	2	1	1	1	1	1	2	3	1	2	1	1	2	74	¾弱
佔升學總數	⅗弱	⅖強																				

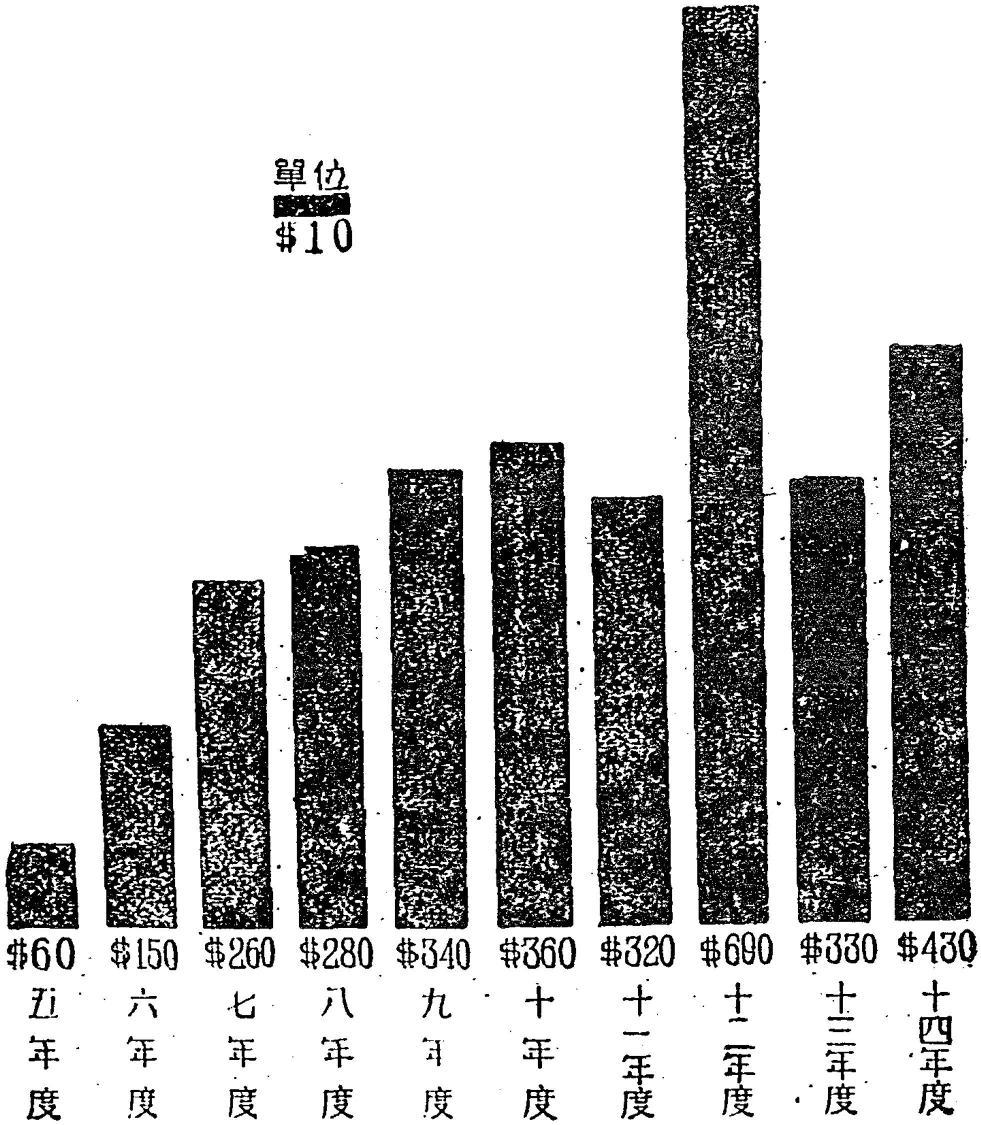


科別＼人數＼服務別	小學教師	郵務生	機關職員	書記	總計	佔畢業總數
農科	3		2		5	⅓強
工科	2		3		5	
商科		1	4	1	6	
第一屆普通科	8		1		9	⅕強
第二屆普通科	3	1	1		5	⅛弱
合計	16	2	11	1	30	¼弱
佔服務總數	½強	½弱				

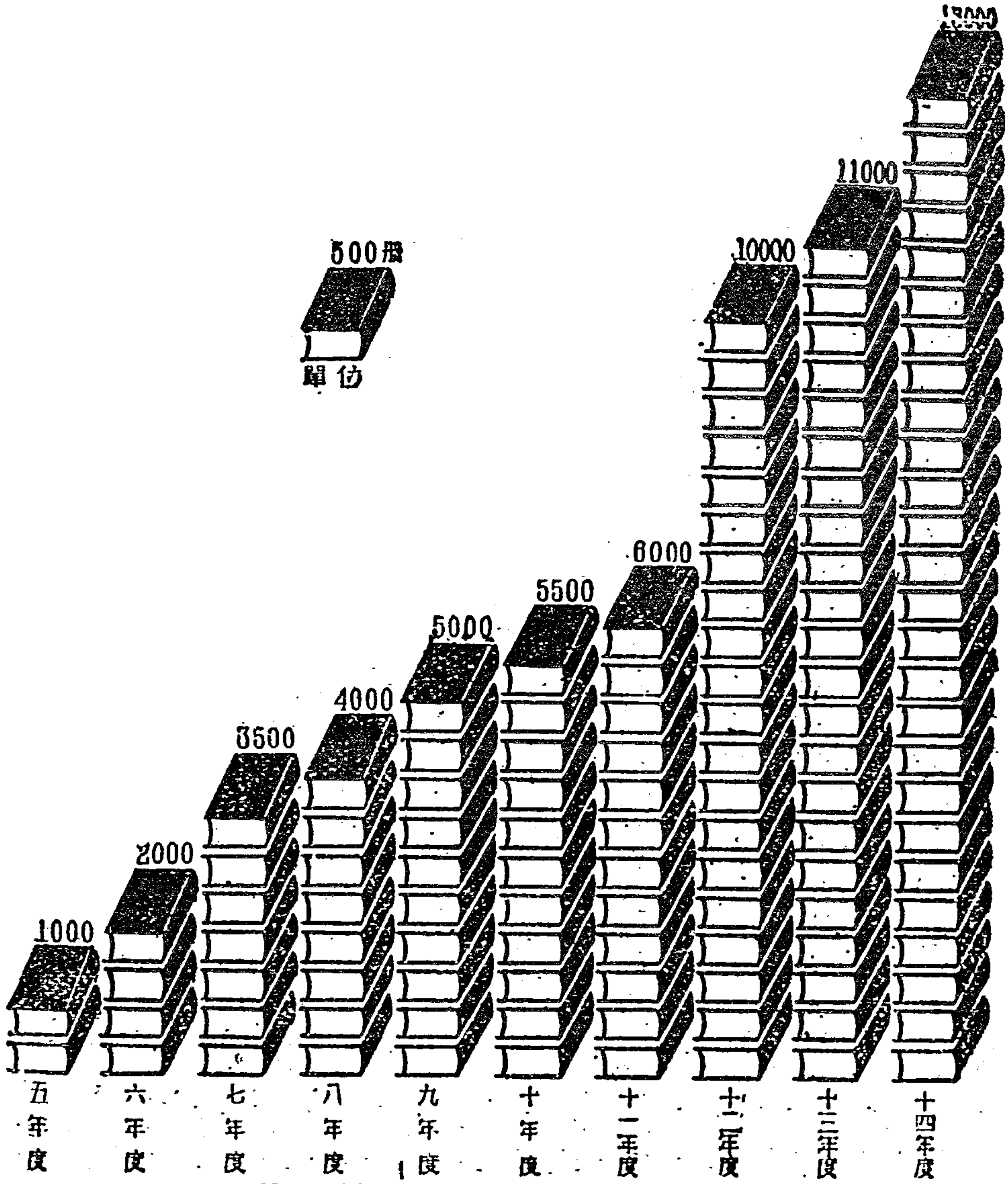


第五十四圖　東大附中畢業生現況比較(民國十二年上期)

4. 圖書設備 普通學校之圖書設備，亦很值得吾人之注意。今將關於此方面之統計，示數例於下：

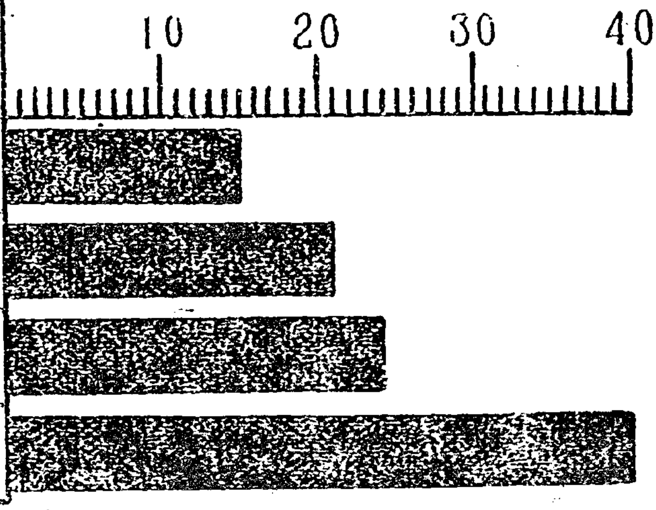


第五十五圖 東大附小歷年圖書費實支數比較圖



第五十六圖　東大附小歷年圖書數比較圖

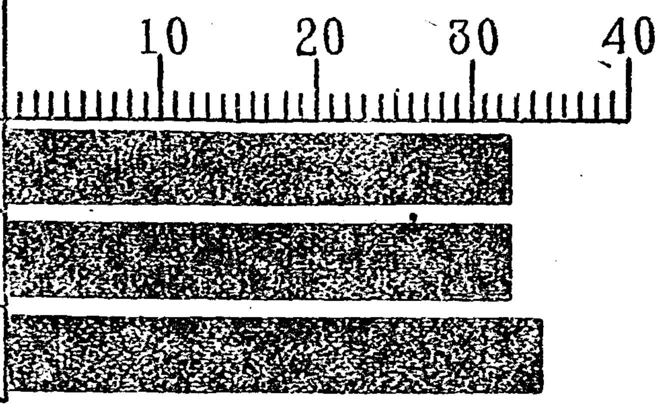
館別	冊數	百分比 %
低級圖書館	2476	15
中級圖書館	3478	21
高級圖書館	3835	24
教育圖書館	6502	40



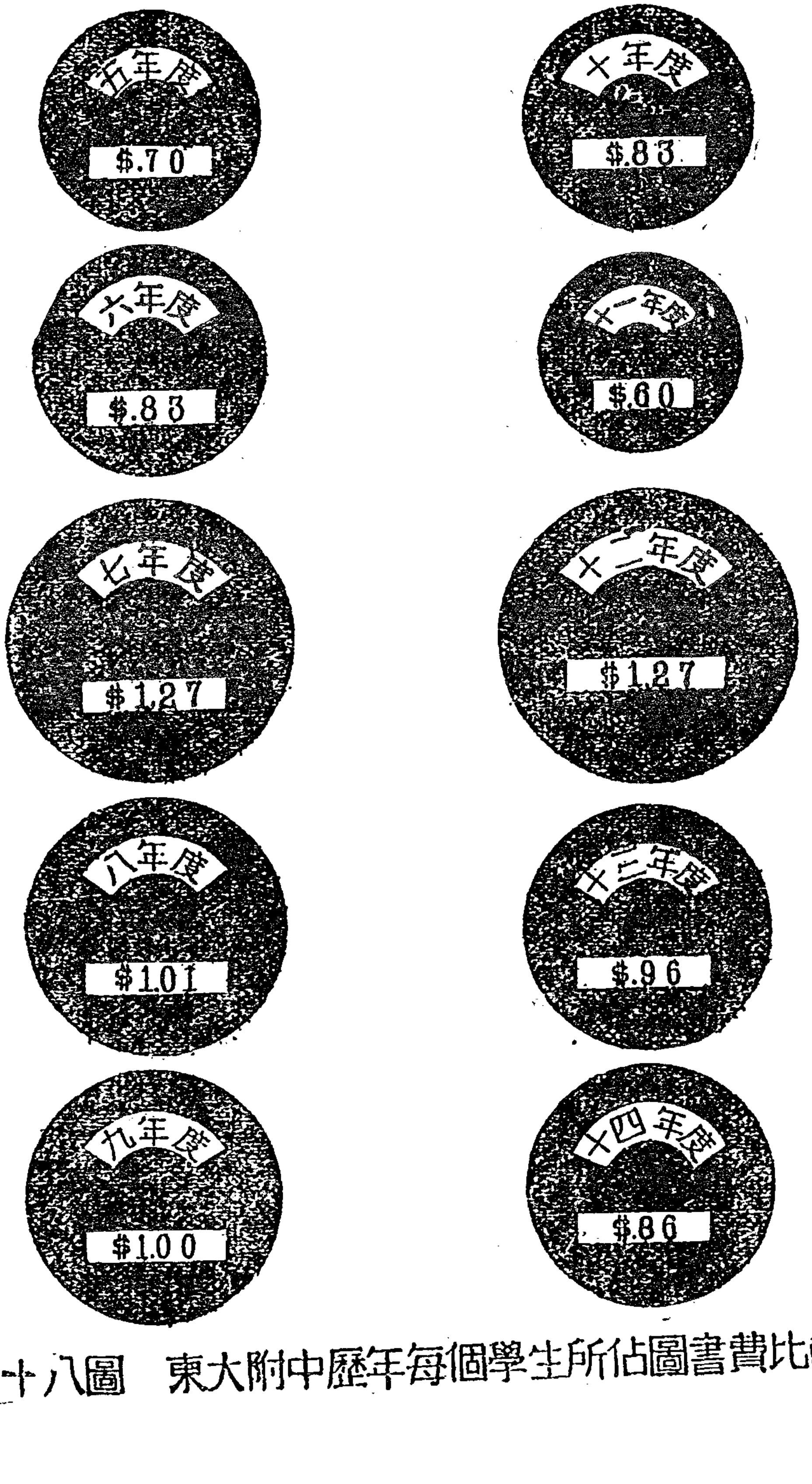
附註 (一) 低級圖書館內有自編油印讀本 1907 冊
中級圖書館內有自編油印讀本 1088 冊
(二) 各種雜誌均不在內

高級圖書館現有圖書比較

館別	冊數	百分比 %
文藝圖書館	1256	32.7
自然圖書館	1256	32.7
社會圖書館	1323	34.6



第五十七圖　東大附小各圖書館現有圖書數比較圖



第五十八圖　東大附中歷年每個學生所佔圖書費比較圖

問題四

1. 圖示法何以爲教育統計上表顯事實之良好工具？

2. 圖之號數及名稱應置於圖之何部？

3 直線圖與曲綫圖均爲圖示法中良好之圖形，但此兩種圖形，究以何者爲普而應用較廣？

4. 表示一個事務中之各部分時，對於單圓圖與分段直條圖，以採用何者爲佳？

5. 試將以下材料，用一種圖示法表示之。

東南大學十三年度錄取新生之籍貫統計：

省分	人數	省分	人數
江蘇	120	河南	7
浙江	38	湖北	5
四川	29	廣西	5
安徽	26	雲南	5
湖南	26	福建	1
江西	21	陝西	1
廣東	8	甘肅	1
山東	7	總數	300

第五章
全部量數
(Mass measure)

一　何謂全部量數

全部量數，即將全體之事實，用統計方法表顯之，使人一見即能明瞭全體之大概情形。將散漫事實，整理為全部量數，是為統計學上第一步手續。此步手續，無論以後計算時是否需要，決不可省。通常分為四種如下：

1. 順序分配(Order Distribution)
2. 次數分配(Frequency Distribution)
3. 次數面積(Frequency Surface)
4. 等級分配(Rank Distribution)

二　順序分配

何謂順序分配，即將所得之成績分數，按其價值，從小至大，順次排列，是為順序分配。

例如第七表之材料，是未經整理分配之成績，不但不易核算，並且不明瞭其意義所在，因之無甚價值。如遇此種材料，雖欲統計，亦無從着手。若將此表之材料，依照順序排列，最少者為 1，最多者為11，列成第八表，則明顯多矣，

第七表　一人於一定時間內所記之字數

7	10	6	6	6	10	1	6	6
9	4	8	7	11	7	7	6	9
5	4	7	5	8	10	6	6	7
7	8	3	6	10	4	6	2	8
8	8	8	9					

此種順序分配，較之上第七表，雖然清楚得多；但是數目過大，作起統計來，手續依舊麻煩。最好列成次數分配，則較為簡易矣。

第八表　順序分配表

1	2	3	4	4	4	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	8	8
8	8	8	8	8	9	9	9	10
10	10	10	11					

三　次數分配

凡所搜集之材料或事實，紛亂參差，茫無頭緒。次數分配者，即是將此種紛亂參差之事實，作有規則有系統之分類，按次數多寡而分配之之謂。例如測驗一班學生之數學成績，其結果在一分鐘內；各人所能作之題數如下：

第九表　24名學生在一分鐘內所做題數

5	8	10	4	1	6	5	3
2	6	5	4	7	5	5	3
4	6	7	5	9	6	7	5

上表是隨手抄錄，毫無組織，故必按照次數的分配，整理之。如做五題者共有七人，卽是做對五題，共有七次；做對四題，共有四次。如此一一整理，便成爲下列之次數表。

第十表　排列第九表材料

量數(一分鐘內所做題數)	排　列	次數(卽學生數)
1	|	1
2	|	1
3	||	2
4	|||	3
5	|||||||	7
6	||||	4
7	|||	3
8	|	1
9	|	1
10	|	1
		$n=24$

製造次數分配表，有四個步驟：

(1)注意全距(range)之長短　卽檢查最小量數與最大量數中間之距離。

(2)決定每組組距(Class interval)之大小　卽分全距爲若干組，每組含有若干單位。

(3)決定每組組距之界限　卽劃定特殊之組限。

(4)排列各量數在各組距中發見之次數。

明瞭此四種步驟，卽可將散漫之材料，組織成爲系統，使之秩然有序，以作各種計算之基礎。茲將製造次數分配之各步驟，詳述於下：

1. 全距　此步手續，卽從各量數中尋出最小量數與最大量數，再由最大量數中減出最小量數；所得之數，卽爲全距。以實例說明之，如第十一表所列之事實，爲一百二十三名學生之英文分數。吾人依次檢查各行分數，最小者爲20，最大者爲95，由95減去20得75，是爲中間相差之數，是卽全距。求得全距之後，卽當進而決定組距之大小。

第十一表

一百二十三名中學生之英文分數

80	77	45	74	95	80	87	73	59
80	57	52	75	75	63	75	84	50
77	76	63	90	79	80	58	71	60
85	76	76	72	73	56	75	84	80
87	85	69	85	40	66	78	79	66
86	85	75	80	79	80	60	89	70
78	82	52	75	67	80	77	80	60
74	73	79	60	66	57	74	76	79
55	87	87	72	73	68	87	81	73
75	35	73	75	67	78	86	73	80
40	82	55	65	80	86	79	65	73
56	71	73	80	67	78	62	79	79
81	77	82	78	93	78	70	72	79
45	81	75	20	80	30			

2. 組距　組距亦稱級距(Step interval)組距大小之決定，則視乎全距之情形如何以爲斷。全距如甚小，僅有10單位，或多至20單

位，自無須再求簡捷，將單位合併。然而如第十一表所舉之事實，全距所包含之單位有75，勢必另定組距，以求簡捷。求當宜之組距，有下列四個步驟：

(1)求全距　即於原來事實中，尋出最大之數與最小之數而求其差數。

(2)用一適當之數去除全距，所得之商，須在10與20之間。此商即單位數。小於10易算而不精確，大於20較精確而難於計算。

(3)即將所求得之除數作爲組距。例如第十一表全體數量之單位爲75，以5除之，得15；此15即爲單位數，5即爲組距。

(4)組距之大小，應各組一律，不可或大或小。

關於次數分配之採用分組辦法，有一根本假定；即假定任何組中所有之價值，均集中於其組距之中點，而可以此中點之價值（簡稱中值 Mid-Value）作代表。則如表十二，係以5爲組距，而分之爲20.0—24.99；25.0—29.99等15組。在 45.0—49.99 組距之間，所含之二量數，其平均價值，與該組中值 47.5 相差無幾。50.0—54.99 組距之間，所含之三量數，其平均價值，與該組距中值 52.5 相差更微。此種假定，若是分配非常集中，則愈與事實相符；若是分配非常散漫，則不大可靠；所以吾人分組時，要特別留心。

3. 組限　組限(Class limits)亦稱級限(Step limits)，所謂組限者，即組距之界限。組限有上限下限之區別。如20.0—24.99爲一組，

20.0爲下限，24.99爲上限。組距之界限，務必如此詳細書出，始免混淆不清之弊。

表示組限之普通方法計有四種，示例如下：

下所舉者，下限爲 6.0，組距爲 1。

一

中點法

分數	次數
6.5	1
7.5	3

二

下限法

分數	次數
6.0	1
7.0	3

三

雙限簡法

分數	次數
6－7	1
7－8	3

四

雙限詳法

分數	次數
6－6.99	1
7－7.99	3

上所舉之四種方法，以用第四法可以免除許多錯誤，故最宜於初學。第二法最簡便，但須牢記上限，不然，即容易弄錯。第三法甚通用，不過6—7，並不是眞正至7，是從 6 至 6.999，若是滿7，即應歸入第二組，其所以列爲6—7者，純爲便利計也。

若所計算之分數，爲教育測驗分數，則須先考查其係何種測驗，然後方知此分數之意義爲何。教育測驗，通常分爲兩種：一種是作業測驗(Performance tests)，如算學測驗是；一種是作品測驗

(Product tests)，如習字測驗是。此兩種測驗分數之意義，是不相同。比如有測驗分數於此；如6，7，8，等等；若是從作業測驗中得來，6一定是表示6—6.99，或作6—7；7一定是表示7—7.99，或直作7—8，其餘類推。倘若此等分數，是從作品測驗來的，則6一定是表示5.5—6.5，不是表示6—6.99或6—7；7一定是表示6.5—7.5，不是表示7—7.99或7—8。由此吾人可以知道同一分數，因測驗之性質不同，其組限亦因之而異，此則吾人不可不注意也。

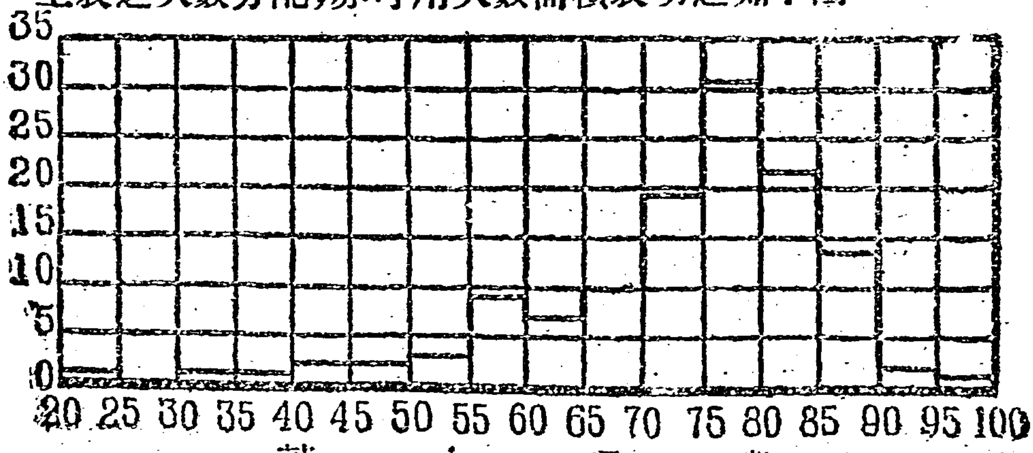
4.排列　全距，組距，組限各步手續，既已明瞭，則吾人當從事於最後之一步，即排列每組中量數之次數。例如表十二係用表十一之事實，以5爲組距，列成次數分配表，吾人可藉此以說明排列時之手續。初於左方列組距一欄，將各組量數列於其下，並將各組之起訖記明，由小而大，由上而下(或由下而上亦可)，以至依次列完爲止。次將各組距之中值列作一欄，置於組距欄之右；各組之中值須正對各該組排列(此欄爲求平均數及差異數時計算便利而設，否則可略)。再次列排列爲一欄，循表十一之分數依次檢查。每遇一分數，即在其相當組別之右方排列欄之下畫一短豎線。如一組中已畫有四短豎線之後，若再須畫短線時，則在已畫之四短豎線上，畫一短横線，使每五線爲一組，以便總計。依此法作去，直至將各分數列完爲止。最末列次數一欄於排列欄之右，將所畫之各線核算，以數字表出之；即成爲次數分配表。

第十二表 123名中學生英文分數之次數分配　組距為5

組　　距	中　値	排　列	次　數
20.0——24.99	22.5	丨	1
25.0——29.99	27.5		
30.0——34.99	32.5	丨	1
35.0——39.99	37.5	丨	1
40.0——44.99	42.5	丨丨	2
45.0——49.99	47.5	丨丨	2
50.0——54.99	52.5	丨丨丨	3
55.0——59.99	57.5	卌丨丨丨丨	9
60.0——64.99	62.5	卌丨丨	7
65.0——69.99	67.5	卌卌	10
70.0——74.99	72.5	卌卌卌丨丨丨丨	19
75.0——79.99	77.5	卌卌卌卌卌卌丨	31
80.0——84.99	82.5	卌卌卌卌丨	21
85.0——8999	87.5	卌卌丨丨丨	13
90.0——94.99	92.5	丨丨	2
95.0——100.00	97.5	丨	1
總　　數			123

四　次數面積

上表之次數分配，亦可用次數面積表明之如下圖：



第五十九圖　一百二十三名中學學生英文分數之次數面積

此類圖形，係用矩形之面積，表明次數分配。矩形之底邊，與組距之長相等；矩形之高與在該組間數量之次數相等。

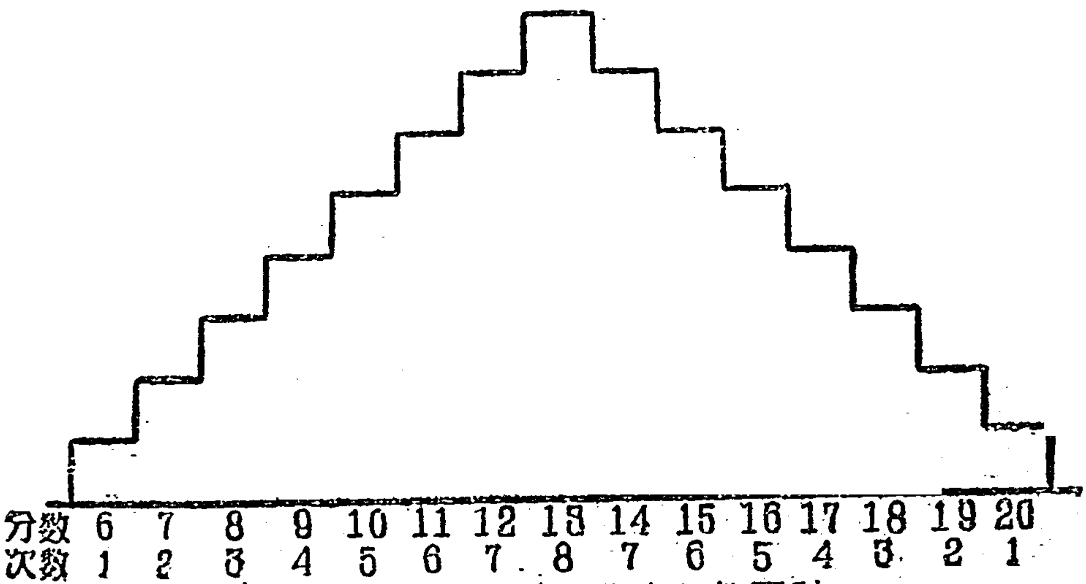
次數面積，通常分為三種，玆分述於下：

1. 常態次數面積 (Normal Frequenoy Surface) 假如吾人施行測驗後，其成績結果如第十三表所示，令人閱之，不甚了然，若將其改成次數面積，如六十圖，則一目了然矣。

第十三表　六十四名四年級學生默字測驗分數

（係特別選擇者）

15	19	14	19	14	11	16	11
15	11	11	9	15	10	19	13
17	18	17	12	9	10	16	16
13	12	14	12	11	7	8	18
17	17	14	10	12	12	14	9
13	15	16	16	14	10	18	13
13	13	15	10	11	20	12	14
13	8	8	6	13	9	12	15

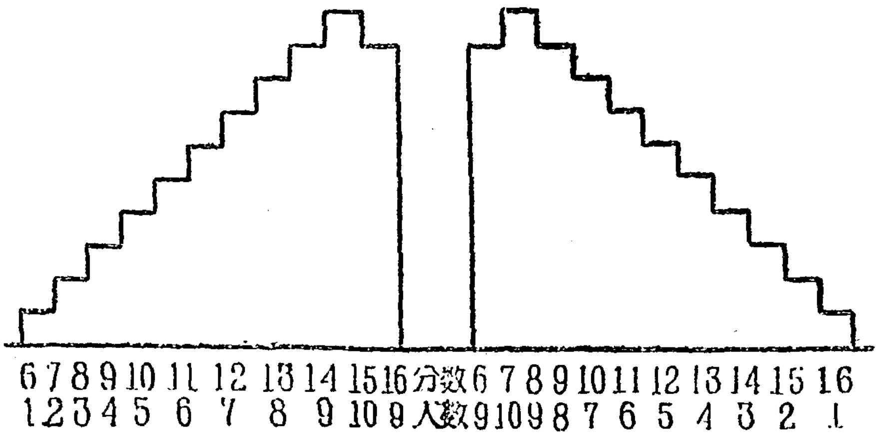


第六十圖　近似常態次數面積

此圖製法，手續非常簡單，閱者一見卽能明瞭。次數一項，通常並不列出，唯於圖之左端，沿着最左之直線，立一量表，以指示各分數之次數而已。此圖將次數置於分數之下，卽成一橫列之次數分配表。圖表並用，更易使讀者獲得明確之觀念。

此種圖形，實際上不能多得。因世間事實，莫不受複雜原因之影響。欲得完全對稱次數面積，必適合以下諸條件：(1)關於一事實，必求盡量之觀察（最少必得極多之觀察）；(2)有影響於此事之原因，其勢力必互相均等，而每種勢力之或隱或現，其機會相等；(3)諸原因必互不相關，各自獨立。凡材料之屬於此種分配者，如智力體重等均是。

2. 偏態次數面積 (Skewed frequency surface) 偏態次數面積，

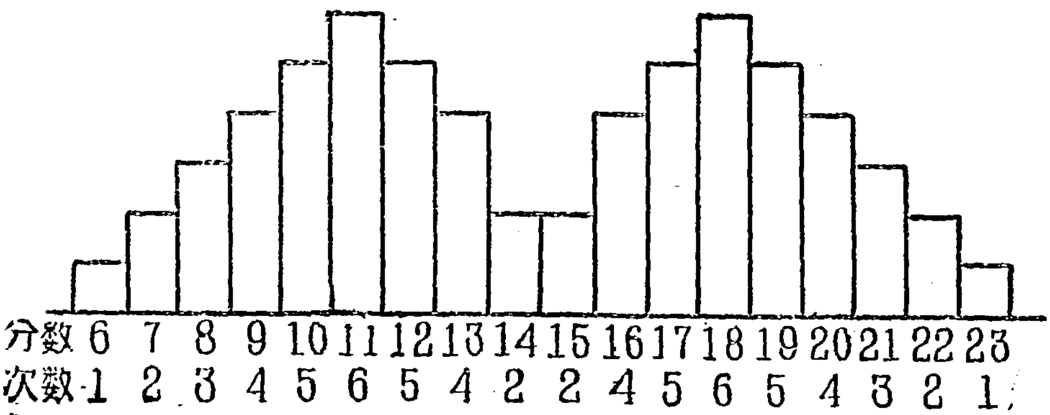


第六十一圖 負的偏態次数面積　　第六十二圖 正的偏態次数面積

可分為二種；(1)正的偏態次數面積，(2)負的偏態次數面積，如六十一圖，六十二圖是。

偏態之原因，則因(1)事實觀察之不足，及(2)有影響於此事實之原因之勢力不均，與夫(3)諸原因之互相關係。世間之事實，多屬此類，如財產之分配，死亡律之分配，甚至體重之分配，亦不免稍帶偏態。

3. 多衆數次數面積(Multi-modal frequency surface)亦爲非常態面積之一種；此種面積，有兩個集中趨勢，或衆數，如第六十三圖所示。



第六十三圖　多衆數次數面積

多衆數之原因，則因數種不相調和之事實，雜爲一團，雖合猶分，每種必表出其集中趨勢，而各露其高峯。例如合初級小學三年級與初中三年級學生於一堂，而測驗其算術程度，則其分數之分配，必爲多衆數次數面積。若分子愈雜，則衆數愈多。

五　等級分配

欲作等級分配 (Rank distribution) 須先作成順序分配以爲底

本，然後按照此底本以定其所處的等級。例如有些測驗分配，如 4，5，7，6，3，7，8，4，7，8，等等，吾人欲將其作爲等級分配時，須先將其化爲順序分配如下表：

第十四表

序分配	等級分配
8	1.5
8	1.5
7	4
7	4
7	4
6	6
5	7
4	8.5
4	8 5
3	10

問題五

1. 決定組距之大小，以何爲標準？若過大過小時，有何弊病發生？

2 何謂等級分配？何謂順序分配？

3. 次數面積成爲常態之理由爲何？

4 次數面積成爲偏態之理由爲何？

5. 次數面積成爲多衆數之理由爲何？

6. 將下列事實，以次數面積圖表示之。

組距	次數	組距	次數
25－30	3	65－70	31
30－35	10	70－75	25
35－40	7	75－80	26
40－45	17	80－85	10
45－50	37	85－90	9
50－55	27	90－95	4
55－60	30	95－100	1
60－65	30		267

第六章

集中量數

(Measures of central tendency)

一 何謂集中量數

前章所述之全部量數，係將所有之各種量數，悉行表出，使人一見，即知其大概情形，然手續繁雜，而結果含糊。若用集中量數，則可免除此弊。彼係用一個數目，表示全體成績之大概情形，所以比較全部量數爲簡明。吾人有此代表量數，不僅可以明瞭一羣之狀況，並且可以比較各羣之異同。言其種類約有五：

1. 衆數(Mode)
2. 平均數(Mean)
3. 中數或中分數(Median or Midscore)
4. 下二十五分點(Lower quartile point)
5. 上二十五分點(Upper quartile point)

二 衆數

眞實的衆數，算法太複雜，通常不用，暫置勿論。

通常所謂衆數，即是次數最多之分數。祇須將所得之分數，列

成次數分配，一見便知。因其手續簡單，所以用之者頗衆。如六十三圖之衆數爲11，與18，六十二圖之衆數爲15，六十一圖之衆數爲7，六十圖之衆數爲13是。

三　平均數

平均數之意義，甚爲明瞭，與算術上之平均數全同，爲吾人最常用之算法。玆將其求法，分下列兩種說明之。

1. 通常算法　通常求平均數之方法，即將各量數相加，所得之和，以量數之數目除之，即得。其公式如下：

$$M=\frac{\Sigma m}{n}$$

M＝平均數(mean)

Σ＝相加總數(讀如 Sigma)

m＝量數(measure)

n＝各量數之數目(number)

若各量數之次數，不止一次，則須將各項次數，與其相當之量數相乘後，然後相加，以求各量數之總和。其式爲：

$$M=\frac{\Sigma fm}{n}$$

f＝次數(frequency)

例一　量數未歸類者

第十五表

城市	費用	次數
甲	$ 46	1
乙	42	1
丙	57	1
丁	71	1
戊	51	1
己	61	1
庚	50	1
辛	32	1
壬	31	1
癸	21	1
	452	10

$N=10 \qquad \Sigma m=452$

$\therefore \quad M=\frac{452}{10}=45.2$

例二 <u>量數已歸類，但組距爲一者。</u>

第十六表

分數	次數	分數×次數
1	2	2
2	0	0
3	3	9
4	6	24
5	5	25
6	4	24
7	2	14
8	2	16
	24	114

$n=24 \qquad \Sigma fm=114$

$\therefore \quad M=\frac{114}{24}=4.75$

例三　<u>量數已歸類，但組距在二以上者。</u>

在此方法中，吾人應注意者，即每組內之諸量數，必有一假定之代表數；此數爲何，即中值是也。故在計算時，必用各組之中值，爲各該組之代表量數。如下表：

第十七表

組距	中值	次數	次數×中值
15–25	20	2	40
25–35	30	0	0
35–45	40	3	120
45–55	50	6	300
55–65	60	5	300
65–75	70	4	280
75–85	80	2	160
85–95	90	2	180
		24	1380

$n=24 \qquad \Sigma fm=1380$

$\therefore \quad M=\frac{1380}{24}=57.5$

但照此法，數目太大，計算時，殊不經濟。爲便利起見，宜用簡法，今述於次：

2. 簡法　上述之計算方法，層次明顯，理亦易通。特此計算之數過繁，不甚省力。明下列之簡捷方法，則此法可以棄置不用。

設有40,52,56,62,68等五個數目，如求其平均數時，先估計此五數之平均數為何？假如估計56為此五個數之平均數，然後以56與此五數一一比較。68與56相差為12；62與56相差為6；56與56相差為零；52,40,與56相差為－4,－16；其結果如下：

量數 m	差數 d
68	12
62	6
56	0
52	−4
40	−16
	$\Sigma d=-2$

以 d(deviation) 代表各量數與估計平均數之差

Σd＝各量數與估計平均數之差之總和

然後將此各量數與估計平均數相差之數之總和 −2 以此五個數目平均之得 −.4，卽估計平均數與實得平均數相差之數；然後將此相差之數 −.4 與估計平均數相加，得55.6，卽為實得平均數。若以通常算法求之，亦得 55.6。以公式表明之於下：

$$M=E.M.+C$$

$$C=\frac{\Sigma d}{N} \quad 或 \quad C=\frac{\Sigma fd}{N}\times i$$

式中之M＝實得平均數(Obtained Mean)

E.M.＝估計平均數(Estimated Mean)

C＝校正數(Correction)

i＝組距(Interval)

算式如下：

例一　量數未歸類者

第十八表

分　數	估計平均數	分數與估計平均數之差 +	分數與估計平均數之差 −
45			−18
80		17	
45			−18
65		2	
50			−13
88		25	
73		10	
65		2	
84		21	
63	63		
50			−13
40			−23
50			−13
75		12	
40			−23
45			−18
74		11	
74		11	
60			−3
75		12	
n=20		123	−142

$$E.M.=63$$

$$\Sigma d=-142+123=-19$$

$$C.=-19\div 20=-.95$$

$$\therefore\quad M=63+(-.95)=62.05$$

例二 量數已歸類，組距單位在二以上者。

第十九表

組　距	次　數	量數與某計平均數之差	次數×差數
15－25	2	－3	－6
25－35	0	－2	0
35－45	3	－1	－3
45－55	6	0	－9
55－65	5	1	5
65－75	4	2	8
75－85	2	3	6
85－95	2	4	8
	24		27

$$E.M.=50$$

$$\Sigma fd=27-9=18$$

$$C=\frac{18}{24}\times 10\quad 7.5$$

$$\therefore\quad M=50+7.5=57.5$$

手續說明：

(1)組距與次數既排好後，求次數之總和得24。

(2)觀察大勢，估計平均數所在之組距。此組距須與眞正平均數相差不遠。現假定爲45－55。此組之中值50，卽爲估計平均數。

(3)每組雖爲十單位，而暫作爲一計算。求各組中值與50之差。若較50大，則差爲正，小則爲負。比如35－45一組，在估計平均數下一位，則爲－1；55至65一組，在估計平均數上一位，則爲＋1，餘類推。

(4)以差數乘次數，而將正負號記下。

(5)將負號的「次×差」及正號的「次×差」分別相加，然後相消，得餘數18。

(6)以次數之總和24除18得.75，再以10乘之。(因先以10單位爲1，藉省時力，故仍以10乘之)得7.5爲校正數。

(7)將校正數7.5加於估計平均數50之上，得57.5，卽爲實得平均數。

用簡法求平均數最易犯之謬誤爲：

(1)不用一組之中值爲估計平均數。

(2)不用次數乘差數。

(3)分數與次數兩列的觀念每易混淆。

(4)以負爲正。

四　中數

中數之意義，卽依量數價值之次第找看最中之那項量數，或一點。在此數之每邊各有量數總數之二分之一。換言之，中數係一個中央位置，成績在中數以上者有一半，在中數以下者，亦有一半。有此中數，吾人卽可知道全體成績之大概情形。

求中數之方法有兩種：一種很簡捷，但求得之分數，只可稱爲中分數；通常用於簡單分數。一種較複雜，求得之數，亦較精確，稱爲中點數，通常用於組合分數。

1. 中分數之求法　通常用於未歸類之量數。照上面所下之定

義，中分數所在之位置，應落在$\frac{N}{2}$個量數中。其法先求得次數和，加一，以二除。$\left(\frac{n+1}{2}\right)$得商後，即就次數項內，由上向下，或由下向上，不問其為順序分配或次數分配，數至洽當此商數之次數時，即轉查其對過之量數。若次數和為奇數時，則此對過之量數，即為中分數；若次數為偶數，由下數上及由上數下，其對過之兩個量數，不易決定誰為中數時，則將此兩量數相加以二除得商，即為中分數。(但遇不合理數值時，如13.5人，則取最近整數14，作為中分數。)

例一 示總數為奇數之中數求法

第二十表

算學分數	次數(學生數)		
10	1	7	
20	1		
27	1		
27	1		
40	1		$\frac{15+1}{2}=8$
50	1		
62	1		
70	1		md. 中數
80	1	7	70＝中數
80	1		
83	1		
83	1		
83	1		
90	1		
95	1		
	N＝15		

例二　示總數爲偶數之中數求法

第二十一表

m	次數
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1
	N=10

5.5　5.5

$$\frac{10+1}{2}=5.5$$

$$中數=\frac{5+6}{2}=\frac{11}{2}=5.5$$

2. 中點數之求法　通常用於已歸類之量數。其公式如下：

$$(一)\ Md=V+\frac{\frac{n}{2}-F}{f}\times i$$ (由低端向高端計算 F 時用此式)

$$(二)\ Md=V-\frac{\frac{n}{2}-F}{f}\times i$$ (由高端向低端計算 F 時用此式)

式中：V＝含有中數組之下限或上限

n＝總數(次數相加)

F＝自次數分配之一端算起，至含有中數止，所含量數次數之和。

f＝含有中數組之次數

i＝組距

算式如下：

例一 示已歸類之量數由低端向高端求中數之方法

第二十二表

組　距	次　數	
20–29.99	8	
30–39.99	10	
40–49.99	17	
50–59.99	21	180….F
60–69.99	32	
70–79.99	38	
80–89.99	54	
90–99.99	68	……………f
100–109.99	42	
110–119.99	30	
120–129.99	25	
130–139.99	12	122….F
140–149.99	7	
150–159.99	6	
n=370		

$$Md=v+\frac{\frac{n}{2}-F}{f}\times i$$

$v=90$

$n=370$

$F=180$

$f=68$

$i=10$

$$\text{近}Md=90+\frac{\frac{370}{2}-180}{68}\times 10$$

$$=90+\frac{5}{68}\times 10$$

$$=90+.074\times 10$$

$$=90+.74$$

$$=90.74$$

手續說明：

第一步　先求出次數之總數，即得n，第二十二表$n=370$。

第二步　以2除n，而$\frac{n}{2}$的量數，即是中點數所在，第二十二表$\frac{n}{2}=185$。

第三步　自表下端依次將次數加起，務加至略小於$\frac{n}{2}$數爲止。第二十二表內之次數，由第一組加至第七組時共得180；若再與第八組之次數相加，即得數爲248，而多於$\frac{n}{2}$。所以本表內，只能加至

第七組爲止，得數爲180。

第四步　由第二步之得數減去第三步之得數，卽185－180餘5。

第五步　用含中點數組之次數，除上面所得之數，卽 5÷68＝.074。

第六步　用組距來乘第五步之得數，卽 .074×10＝.74。

第七步　將第六步之得數與含中點數組之下限相加，卽是中點數，卽 90＋.74＝90.74。

例二　示已歸類之量數由高端向低端求中數之方法

由量數之低端算起，當如上式；若用原表材料，由高組算起，則當用第二公式：

$$\text{Md.}=V-\frac{\frac{n}{2}-F}{f}\times i$$

由上表：

V ＝100（含有中數組之上限；因爲由低端算起當用下限；現由高端算起，則當改用上限。）

$n=370$

$F=122$

$f=68$

$i=10$

$$\text{故 } Md.=100-\frac{\frac{370}{2}-122}{68}\times 10$$

$$=100-\frac{63}{68}\times 10$$

$$=100-.926\times10$$

$$=100-9.26$$

$$=90.74$$

例三　示已歸類之量數，由任何端算起，二分之一量數恰當零時，求中數之方法。

第二十三表

m	f	
0– 2	1	
2– 4	1	
4– 6	0	4
6– 8	2	
8–10	0	
10–12	0	
12–14	2	
14–16	0	
16–18	0	4
18–20	0	
20–22	2	

n=8

由上表，從上數下，數至第四組，恰等於二分之一次數，則中點數應在第五組量數內；但第五組量數之次數爲零，應在第六組量數內；而第六組量數之次數亦爲零，究在何組量數內，不能決定。最好將四五六七四組變成二組，則第四組改爲 6—10，第五組改爲 10—14。則第二十三表變成：

m	f
0－ 2	1
2－ 4	1
4－ 6	Q
6－10	2
10－14	2＝f
14－16	0
16－18	0
18－20	0
20－22	2

$\left.\begin{matrix}1\\1\\Q\\2\end{matrix}\right\}$ F＝4

n＝8

由上表：

$V=10$

$F=4$

$f=2$

$n=8$

$i=4$

代入公式，則爲

$$Md=10+\frac{\frac{8}{2}-4}{2}\times 4$$

$$=10+\frac{0}{2}\times 4$$

$$=10$$

五　下二十五分點及上二十五分點

上曾言之，中數係一個中央位置，上下各有全體量數百分之五十，故亦可稱五十分點。同樣可知下二十五分點，有百分之二十五的量數在彼以下，百分之七十五的量數，在彼以上；故下二十五分

點，或作二十五分點，以Q_1代之。上二十五分點有百分之七十五的量數在彼以下，百分之二十五的量數，在彼以上；故上二十五分點，或作七十五分點，以Q_3代之。至於計算方法，大致與求中數相同；其公式如下：

$$Q_1=V+\frac{\frac{n}{4}-F}{f}\times i$$ (由低端向高端計算)

$$Q_3=V+\frac{\frac{3}{4}n-F}{f}\times i$$ (由低端向高端計算)

或$$Q_3=V-\frac{\frac{1}{4}n-F}{f}\times i$$ (由高端向低端計算)

算式如下：

例一 求Q_1之方法

第二十四表

組距	次數	
20—29.99	8	
30—39.99	10	
40—49.99	17	88……F
50—59.99	21	
60—69.99	32	
70—79.99	38……	……f
80—89.99	54	
90—99.99	68	
100—109.99	42	
110—119.99	30	
120—129.99	25	
130—139.99	12	
140—149.99	7	
150—159.99	6	
n=370		

$$Q_1=v+\frac{\frac{n}{4}-F}{f}\times i$$

$v=70$

$n=370$

$F=88$

$f=38$

$i=10$

計 $$Q_1=70+\frac{\frac{370}{4}-88}{3.8}\times 10$$

$$=70+\frac{4.5}{38}\times 10$$

$$=70+1.18$$

$$=71.18$$

例二　<u>由低端向高端求 Q_3 之方法</u>

由上表：

$V=100$

$n=370$

$F=248$

$f=42$

$i=10$

代入公式：

$$Q_3=100+\frac{\frac{3}{4}\times370-248}{42}\times10$$

$$=100+\frac{29.5}{42}\times10$$

$$=100+7.02$$

$$=107.02$$

例三　<u>由高端向低端求 Q_3 之方法</u>

由上表：

$V=110$

$n=370$

$F=80$

$f=42$

$i=10$

代入公式：

$$Q_3 = 110 - \frac{\frac{370}{4} - 80}{42} \times 10$$

$$= 110 - \frac{12.5}{42} \times 10$$

$$= 110 - 2.976$$

$$= 107.02$$

六 各集中量數之性質及功用

1. 衆數

(1)衆數非由所測之全體量數求出，乃由其中集合於一組之小部分量數求出。

(2)衆數顯而易見，因其由次數最多之組規定而成。

(3)衆數不受極端量數(最大量數及最小量數)之影響。

(4)衆數之變動最大，故精確之度不及平均數及中數，其變動之情形，隨分組之方法而異。

(5)衆數最易使人了解其意義。所代表者，又爲最普通之情形，此卽特點所在，亦爲他種集中量數所不可及。

2. 中數

(1)中數亦非全體量數之價值求出，各量數之價值，僅有間接之關係。

(2)中數較平均數容易計算，然精確之度不及平均數。

(3)中數之價值受極端量數之影響很小，故不足以作代表量數。然若極端量數不近情理之時，欲減少其謬誤之效力，以中數作代表量數爲最宜。

3. 平均數

(1)平均數由所測之全體量數求出，故比衆數及中數精確。

(2)用簡捷方法，平均數亦極易求。

(3)平均數易受極端量數或不合理量數之影響；就此點言，其功用不及衆數及中數。

(4)平均數容易使人誤會其所代表各量數之價值，皆與平均數相近似。

問題六

1. 某級兒童算學測驗之結果，各兒童所得之分數為：2,3,5,4,2,9,6,9,5,7,9,8，試求其中數。

2. 某級兒童之習字分數為：2,2,3,4,5,5,6,7,8,9,9,9,10,11,12,13，試求其中數。

3. 求下二表之衆數，平均數，中數，下二十五分點，及上二十五分點：

m	f
7.5 — 2.5	1
2.5 — 3.5	2
3.5 — 4.5	2
4.5 — 5.5	3
5.5 — 6.5	5
6.5 — 7.5	8
7.5 — 8.5	6
8.5 — 9.5	3
9.5 — 10.5	2
10.5 — 11.5	0
11.5 — 12.5	1

m	f
5 — 10	2
10 — 15	1
15 — 20	4
20 — 25	5
25 — 30	7
30 — 35	8
35 — 40	6
40 — 45	9
45 — 50	1
50 — 55	1

4. 求下二表之中數：

m	f
2	1
3	1
4	0
5	2
6	0
7	0
8	2
9	0
10	2

m	f
10	1
15	2
20	4
25	C
30	0
35	0
40	0
45	0
50	3
55	3
60	1

第七章
差異量數
(Measures of Variability)

一　何謂差異量數

集中量數，固然可以使吾人對於一羣事實，知其大概情形，然究不能使吾人明白全體量數分配之狀況。從度量教育成績所得的經驗，學生之能力，萬有不齊。祇知道中數或平均數，尚不能明瞭全級的眞相。必進一步求其相互間參差之度然後可。差異量數者，卽研究此參差之情形，而用一個數目以表示全級差異之狀況者也。比如有一些分數於此，是代表一班學生之成績，如將其差異量數求出，卽可明瞭此班學生之成績(或程度)齊不齊。程度愈齊整者，其差異量數亦愈小。反之，差異量數較大者，則該班之參差程度亦較大。其與集中量數不同之點，卽集中量數在分配圖坐標上，其地位爲一點；差異量數在分配圖坐標上，其地位爲一距離，此則不可不注意也。

二　差異量數之種類

差異量數最通用者，約有四種：

1. 全距離〔total range〕　全距離包含有全體的分數。

2. 二十五分差〔Quartile deviation(Q)〕　在集中量數(或中數)

上下各一Q，約包含全體分配中間之一半。

3. 平均差[mean deviation(Mn. D. or A. D.)] 在集中量數上下各一平均差，約包全體分數之57.5%。

4. 均方差[standard deviation(S. D.) or mean Square deviation or Sigma(σ)] 在集中量數上下各一個均方差，約占全體分數68%。

三 全距離

所謂全距離，即是從最小分數到最大分數之距離；核算時，只須從最大分數內減去最小分數即得。

以全距離測量離中趨勢，只能得其大概，且不免有如下之困難：

1. 分配中之極端量數（極大或極小）雖不多見，然偶爾發見，全距離將大受其影響；取之則全距離突然漲大，捨之又忽然縮小，殊不固定。

2. 全距離雖能表示首尾之相差，而不能形容內部分配之實情。因此二種困難，此法可棄而不用。

四 二十五分差

二十五分差或作四分差，為分配中下二十五分點至上二十五分點之距離之半數。在下二十五分點以下及上二十五分點以上之極端量數，俱置之不問。若將此距離置於次數面積上平均數之左右兩邊，從底線向上引兩縱線，則此兩縱線間之面積，約含全體量數

百分之五十。此百分之五十量數中，任何一量數與平均數之差，不能超過二十五分差之價值以外，此卽二十五分差之意義。吾人根據此種差異量數之價值，卽可以推知其所代表各量數之差異程度。

1. 算法　茲將其計算之公式列下：

$$Q=\frac{Q_3-Q_1}{2}$$

算式如下：

例一　由未歸類量數求 Q

第二十五表

第一組	第二組
	96
96	95
94	94
93	93
92	92
90	90
88	89
87	88
86	87
85	86
84	84
83	82
81	81
80	80
78	78
76	77
75	76
74	75
72	73
70	72
67	70
	67
n=20	n=22

手續說明：

(1)以4除量數數目。在第一組$\frac{n}{4}=5$;在第二組$\frac{n}{4}=5.5$

(2)從分配之最小量數一端起，計算至第$\frac{1}{4}$及第$\frac{3}{4}$之量數，得Q_1及Q_3。在第一組Q_1爲第5第6兩量數數值之平均數$=75.5$；Q_3爲第15與第16兩量數數值之平均數$=89$。在第二組Q_1爲第6量數數值$=76$；Q_3爲第17量數數值$=90$。

(3)代入公式：

第一組　$Q=\frac{89-75.5}{2}=6.75$

第二組　$Q=\frac{90-76}{2}=7$

例二　由已歸類量數求Q

第二十六表

組距	次數	
95 – 100	8	
90 – 95	3	
85 – 90	9	
80 – 85	4	
75 – 80	24	
70 – 75	13	
65 – 70	26	$Q_3=67.308$
60 – 65	12	……從下數至此處$=213$
55 – 60	27	
50 – 55	13	
45 – 50	45	$Q=Q_3$至Q_1距離之$\frac{1}{2}$
40 – 45	21	
35 – 40	44	
30 – 35	15	……從下數至此處$=51$
25 – 30	17	$Q_1=37.727$
20 – 25	2	
15 – 20	9	
10 – 15	3	
5 – 10	3	
0 – 5	2	
	$n=300$	
	$n/4=75$	

手續說明：

(1)求$\frac{n}{4}$。 $\frac{300}{4}=75$量數

(2)求Q_3。 $Q_3=65+\frac{\frac{3}{4}\times300-213}{26}\times5=65+\frac{12}{26}\times5$

$=65+2.308=67.308$

(3)求Q_1。 $Q_1=35+\frac{\frac{1}{4}\times300-51}{44}\times5=35+\frac{24}{44}\times5$

$=35+2.727=37.727$

(4)求Q。因 $Q=\frac{Q_3-Q_1}{2}$ 故 $Q=\frac{67.308-37.727}{2}$

$=\frac{29.581}{2}=14.791$；即所求之二十五分差。

2. 二十五分差之特性：

(1)以二十五分差，表示離中趨勢，常人多易了解。

(2)二十五分差，在各種差異量數中，計算最易。

(3)$\pm Q=$全體量數50%。

(4)此種差異量數之用途，十分普通。

五　平均差

平均差是指全體各個量數，對於中量(平均數或中數)差異之平均數。求平均差時，中數與平均數，均可用為標準；然就理論言，則以中數為較好；因用中數求平均差，不但容易計算，且所求出之平均差，其量亦小。故求平均差時，先應求中數，然後求全體量數對於此中數之差度。再將差度之總數平均之。

平均差係一種距離，若在常態次數面積上之中數左右兩旁各置一平均差，其所佔之面積，均含全體量數百分之57.5。

求平均差之方法，有通常算法及簡捷方法兩種，茲分述於下：

1. 通常算法　先求各量數與中數之差；各差數相加，不計正負號，得一總和；以次數之總和除之，即得平均差。公式如下：

$$A.D.=\frac{\Sigma d}{N}$$

在此公式內：

d＝各量數與中數之差數，正負號不計。

A.D.＝平均差。(average deviation)

算式如下：

例一　量數未歸類者

第二十七表

量數	差數
90	9.5
87	6.5
86	5.5
85	4.5
83	2.5
78	2.5
74	6.5
73	7.5
71	9.5
70	10.5
2)10+1 5.5 中數＝80.5	10)65(6.5 ＝平均差

手續說明：

(1)計算中數爲 80.5。

(2)求各量數與此中數之差數如9.5，6.5等。

(3)不計符號之正負，而將各差數相加，得65。

(4)以次數之總和10除65，得 6.5，卽爲平均差。

例二　<u>量數已歸類者(由實得中數求差數)</u>

公式如下：

$$A.D.=\frac{\Sigma fd}{n}$$

算式如下：

第二十八表

組距	中值	次數	差數	次×差
2 – 3	2.5	1	–4.5	–4.5
3 – 4	3.5	1	–3.5	–3.5
4 – 5	4.5	2	–2.5	–5.0
5 – 6	5.5	4	–1.5	–6.0
6 – 7	6.5	4	–.5	–2.0
7 – 8	7.5	5	.5	2.5
8 – 9	8.5	3	1.5	4.5
9 – 10	9.5	2	2.5	5.0
10 – 11	10.5	1	3.5	3.5
11 – 12	11.5	0	4.5	0
12 – 13	12.5	1	5.5	5.5
		24		42.0

中數$=7$，　$n=24$，　$\Sigma fd=42$

$$\therefore\quad A.D.=\frac{42}{24}=1.75$$

手續說明：

(1)照常法求中數得7。

(2)求各組中值與7之差，得4.5，3.5等。

(3)以各次數乘各該差數得4.5，3.5，5.0等。

(4)不計符號正負，而將第三步所得各數相加得42.0。

(5)以次數之總和24除次數乘差數之和42得1.75，即為平均差。

上述之通常算法，祇能用於次數少而分數較小之分配中。若分數較大而次數又在數百以上，如用通常算法，手續未免太繁，則宜用簡捷算法。今述如下：

2. 簡法　簡易方法，可以預先任意在全體量數中，假定某量數為中數，然後求各量數與此估計中數之差數；其次即將所有之差數相加，再以總數除之，便得平均差。但是此平均差，是從估計中數求得，並非眞實之平均差，故最後必須用校正數校正方可。其公式如下：

$$\text{A.D.}=\frac{\Sigma fd+c(Nb-Na)}{n}i$$

$$C=\frac{\text{O.Md}-\text{E.Md.}}{i}$$

A.D.＝平均差

Σfd＝次數乘差數(與估計中數)之和

C＝校正數(Correction)

Na＝量數之較實得中數大者(Numbers above)

Nb＝量數之較實得中數小者(Numbers below)

O.Md.＝實得中數(Obtained median)

E.Md.＝估計中數(Estimated median)

算式如下·

例三　量數已歸類者(由估計中數求差數)

第二十九表

組距	次數		差數	次×差
40－45	1	148 量數之較眞正中數小者	－8	－8
45－50	1		－7	－7
50－55	2		－6	－12
55－60	6		－5	－30
60－65	9		－4	－36
65－70	21		－3	－63
70－75	33		－2	－66
75－80	47		－1	－47
80－85	28		0	0
85－90	51	141 量數之較眞正中數大者	1	51
90－95	68		2	136
95-100	22		3	66
	n＝289			$\Sigma fd=522$

O.Md＝84.375　　　Na＝141

E.Md＝82.5　　　Nb＝148

$$C=\frac{84.375-82.5}{5}\qquad \Sigma fd=522$$

$$=1.875\div5=3.8$$

$$A.D.=\frac{522+.38(148-141)}{289}\times 5$$

$$=\frac{522+.38\times 7}{289}\times 5$$

$$=\frac{524.66}{289}\times 5$$

$$=1.816\times 5=9.08$$

手續說明：

(1)求次數之總和 n 爲289。

(2)求實得中數爲84.375。

(3)求實得中數84.375在80—85組距間，故卽用此組之中值82.50爲估計中數。並假定此組中之各量數，均集中於此組中點，其價值各爲82.50

(4)求校正數C爲$\frac{84.375-25.5}{5}=.38$

(5)求量數之較實得中數小者(Nb)卽 1+1+2+6+9+21....28=148。(最後28亦算入，因此組之28個量數，均假設集中於此組之中點，其價值等於82.5，較實得中數84.375爲小也。)

(6)再求量數之較實得中數大者(Na)卽 N—Na 或 289—148=141。

(7)求次數乘差數之總和(Σfd)得522。

(8)將以上所得價值代入公式：

$$A.D.=\frac{522+.38(148-141)}{289}\times 5=1.816\times 5=9.08$$

此種算法，再示一例於下：

第三十表

組距	f	d	fd	
95-100	1	4	4	
90-95	2	3	6	
85-90	13	2	26	68....Na
80-85	21	1	21	
75-80	31	0	0	
70-75	19	1	19	
65-70	10	2	20	
60-65	7	3	21	
55-60	9	4	36	
50-55	3	5	15	
45-50	2	6	12	55....Nb
40-45	2	7	14	
35-40	1	8	8	
30-35	1	9	9	
25-30	0	10	0	
20-25	1	11	11	

n = 123　　$\sum fd = 222$

$$\text{O.Md}=76.05 \qquad \text{Na}=68$$

$$\text{E.Md.}=77.5 \qquad \text{Nb}=55$$

$$C=\frac{76.05-77.5}{5} \qquad \Sigma f\text{d}=222$$

$$=-.29$$

$$\text{A.D.}=\frac{222+[-.29(55-68)]}{123}\times 5$$

$$=\frac{222+(-.29\times -13)}{123}\times 5$$

$$=\frac{225.77}{123}\times 5=1.836\times 5=9.18$$

上列算法，甚爲簡明。惟必須說明者，222爲由估計中數所求之差數之和，與由實得中數所求出之差數，相差爲 $+(-.29\times55)-(-.29\times68)$。$-.29$爲校正數；55爲實得中數以下之次數，68爲實得中數以上之次數。估計中數既與實得中數相差爲 $-.29$，則在實得中數以下共有55個量數比實得中數小$-.29$，故必須$+(-.29\times55)$。又在實得中數以上之量數，共68個比實得中數大 $-.29$ 故必須 $-(-.29\times68)$。若先由$55-68$，然後再與 $-.29$ 相乘，卽 $222+[-.29(55-68)]=222+(-.29\times-13)$亦可。

3. 平均差之特性：

(1)平均差係根據於全體量數求出，故各量數，均能發生影響。

(2)平均差容易計算，且易使人瞭解。

(3)平均差精確之度，較優於二十五分差，但計算較難。

(4)$\pm$ A.D.＝全體量數 57.5%。

(5)此種差異量數，用之者少，通常多用均方差。

六 均方差

均方差爲各量數與中量（平均數或中數）之差數平方和之平均數之方根，爲差異量數中最完善之一種，故又名標準差 (Standard deviation 簡寫作 S. D.)普通以 σ (Sigma)代之。求均方差時，雖可用平均數或中數爲中量；然按數學上之理論，求精密之差異量數，須使差數之平方和爲最小。而求最小差數之平方和須由平均數

求各量數之差數。故求均方差時，通常俱用平均數爲中量，而不用中數去求。

均方差亦係一種距離，若在常態次數而積上之平均數左右兩端各置一均方差，則其所佔之位置，約含全體量數百分之 68.26。

均方差之求法亦分二種如下：

1. 通常算法　其公式爲：

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}$$

或 $$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma f d^2}{n}}$$

在此二公式內，σ 爲均方差，d 爲各量數與平均數之差，n 爲次數之總和，f 爲次數；玆舉例說明於次：

例一　由未歸類量數求 σ

第三十一表

量數	差數	差數方
90	10.3	106.09
87	7.3	53.29
86	6.3	39.69
85	5.3	28.09
83	3.3	10.89
78	—1.7	2.89
74	—5.7	32.49
73	—6.7	44.89
71	8.7	75.69
70	—9.7	94.09
m=79.7		488.10

$$\therefore \sigma=\sqrt{\frac{488.10}{10}}=\sqrt{48.81}=6.98$$

手續說明:

(1)求量數之平均數為 79.7。

(2)求各量數與79.7之差,寫在差數項下,如10.3,7.3,6.3等。

(3)求差數乘方,得 106.09,53.29,39.69等。

(4)求各差數方之和,得 488.10。

(5)以次數之總和除之,得 48.81。

(6)求48.81之平方根,得6.98,即為均方差。

例二 <u>由已歸類量數求 σ</u>

第三十二表

組距	次數	差數	次×差	次×差數方
2－3	1	－4.5	－4.5	20.25
3－4	1	－3.5	－3.5	12.25
4－5	2	－2.5	－5.0	12.50
5－6	4	－1.5	－6.0	9.00
6－7	4	－.5	－2.0	1.00
7－8	5	.5	2.5	1.25
8－9	3	1.5	4.5	6.75
9－10	2	2.5	5.0	12.50
10－11	1	3.5	3.5	12.25
11－12	0	4.5	.0	00
12－13	1	5.5	5.5	30.25

$n=24$　　　　$\Sigma fd^2=118.00$

$m=7$

$$\therefore \sigma=\sqrt{\frac{118}{24}}=\sqrt{4.917}=2.21$$

手續說明：

(1)求平均數得7。

(2)求每組之中值與平均數之差數，得 −4.5，−3.5，−2.5 等。

(3)將各量數之差數與相當之次數相乘，得 −4.5，−3.5，−5.0 等。

(4)再以第二步所得之數，各與相當之差數相乘，即 fd^2 得 20.25，12.25，12.50等。

(5)求第四步所得各數之和得118。

(6)求118之平均數得 4.917。

(7)求此平均數4.917之方根，即將其開方，得2.21，即所求之均方差。

在已歸類量數之分配表中，用通常算法，去求均方差，手續未免過繁；故宜改用簡法。

2. 簡捷算法　用簡法求均方差，無須求眞正平均數，祇用一估計平均數與各組量數求差數。此估計平均數，用任何組之中值俱可。惟用估計平均數所求之均方差，自與由實得平均數所求者有幾許之差異，故亦須用校正數校正之。其公式爲：

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma f d^2}{n}-c^2}\times i\quad c=\frac{\Sigma f d}{n}$$

玆舉例以明之：

例三　已歸類量數用簡法求σ

第三十三表

組距	次數	與估計平均數之差數	次數×差數	次數×差數方
40–45	1	−8	−8	64
45–50	1	−7	−7	49
50–55	2	−6	−12	72
55–60	6	−5	−30	150
60–65	9	−4	−36	144
65–70	21	−3	−63	189
70–75	33	−2	−66	132
75–80	47	−1	−47	47
80–85	28	0	−269	0
85–90	51	1	51	51
90–95	68	2	136	272
95–100	22	3	66	198

n=289　　253　　289)1369(4.73

−269

289)−16(−.055

C=−.055　　$C^2=(-.055)^2=.003$

$$\therefore \sigma=\sqrt{\frac{1369}{289}-(-.055)^2}\times 5$$

$$=\sqrt{4.73-.003}\times 5$$

$$=2.17\times 5$$

$$=10.85$$

手續說明：

(1)將分數歸入相當組內。

(2)假定一含有中數之組，即以該組距之中值爲估計平均數，表中之估計平均數爲組距80–85之中值82.5。

(3)假設組距爲一單位，求估計平均數與各組中值之差數，得 -1，-2等及 1，2 等。

(4)將各次數與其相當之差數相乘，得$8\times-8=-64$等。

(5)求次數乘差數之代數和，得-16。

(6)以次數之總和289除-16，得商數$-.055$爲校正數。方之，得 .003 爲校正數方。

(7)以「次數×差數」×差數，得64，49等數，加之，即

$\Sigma f d^2=1369$。

(8)以289除1369，即$\frac{\Sigma f d^2}{n}=4.73$

(9)$4.73-.003=4.727$爲σ^2。

(10)將σ^2開方，求σ；$\sigma=\sqrt{4.727}=2.17$。但此數係假定組距之單位爲一所求得之均方差。

(11)用原組距單位乘所求得之均方差，$2.17\times5=10.85$ 即實際之均方差。

3. 均方差之特性：

(1)根據全體量數求出。

(2)計算容易。

(3)精確之程度，比平均差較大。

(4)若分配對稱或近乎對稱，則以 6 乘均方差，大約包括全體量數百分之九十九有奇。此法可當用以證驗所求得之均方差有無錯誤。

(5)從平均數前後各展開一均方差，共含有全體量數百分之68.26。其中任何一量數與平均數之差，不能超過均方差之價值，是卽均方差之意義。

七 各種差異量數之關係

由經驗所得之結果，在對稱或稍偏之次數分配中，六倍均方差之距離，約含全體量數百分之九十九。平均差與二十五分差，均比均方差爲小，前者約當均方差之五分之四，後者約當均方差之三分之二。由此關係推算，七倍半平均差之距離，或九倍二十五分差之距離亦約含全體量數百分之九十九。

除上面所述之差異量數外，尙有兩種差異量數，卽(1)中點差(Median deviation 簡寫作 Md. D.)，與(2)概誤差(Probable error 簡寫作 P. E.)，在常態或近似常態分配中，均與二十五分差相近。由上述之理論，得各種差異量數之關係如下：

$$\sigma = 1.2533\ \mathrm{M.D.}$$

$$\sigma = 1.4826\ \mathrm{P.E.},\ 或\ \mathrm{Md.D.},\ 或\ Q$$

$$\mathrm{M.D.} = .7979\,\sigma$$

$$\mathrm{M.D.} = 1.1843\ \mathrm{P.E.},\ 或\ \mathrm{Md.D.},\ 或\ Q$$

$$\mathrm{P.E.}\ 或\ \mathrm{Md.D.}\ 或\ Q = .6745\,\sigma$$

$$\mathrm{P.E.}\ 或\ \mathrm{Md.D.}\ 或\ Q = .8453\ \mathrm{M.D.}$$

以上係各種差異量數之關係。此種關係，須在常態次數分配

中，方能和合。平常應用，有一種差異量數卽已足。若有時因特別原故，須用多種差異量數時，可依上列之關係以轉化之，無須一一去求。

八　相對差異量數

上面所述之全距，二十五分差，平均差，均方差等，謂之絕對差異量數。(Measures of absolute variability)吾人欲比較兩班學生程度整齊與否，絕不能用其所有之絕對差異量數作比較。因爲差異的比較，有兩個條件：(1)所用單位須相同，(2)平均數須相同。在此兩條件下，方能比較其差異。其差數大者，不及差數小者之程度來得整齊。

假使吾人欲比較兩班學生程度整齊與否，而又不合上述二條件，則須用相對差異量數(measures of relative variability)

相對差異量數，通常稱之爲差異係數，(Coefficient of variation)卽均方差與平均數之百分率。因爲均方差比平均數愈小時，(卽二者比率數小時）則該班學生之程度亦較整齊；反是，均方差與平均數愈相近時，(卽二者之比率數大時)則該班學生之程度亦較參差。吾人由比率數之大小，卽可知兩班學生程度之差異。計算比率數，可依照披耳生(Pearson)之公式求之：

$$V=100\frac{\sigma}{M}$$

$$V=\text{比率數}$$

σ＝均方差

M＝平均數

舉例說明於下：

湖南省立第一中校十八年度，初中錄取新生成績之平均數爲71.52，均方差爲16.4，則比率數

$$V=100\times\frac{16.4}{71.52}=22$$

高中錄取新生成績之平均數爲52.64，均方差爲15.8，則比率數

$$V=100\times\frac{15.8}{52.64}=30$$

由此可知高中錄取生之比率數大於初中錄取生之比率數，卽初中錄取生全體之成績較高中錄取生之成績來得整齊。若僅就二者之均方差相較，一爲16.4，一爲15.8，相差並不見大，孰不知其實相差甚遠也。

九　偏態量數

次數分配對稱時，衆數，平均數，中數三者合而爲一。換言之，卽衆數，平均數，中數以上各量數之次數與以下各量數之次數，必完全相等，無論何種事物，若盡量測驗時，必成此種分配。所以此種分配，又名常態分配。若事物之觀察或測驗不盡量時，則次數分配，往往向上或向下偏斜。而代表此種偏斜度之量數，謂之偏態量數(measures of skewness)。

由上言之，次數分配如爲偏斜時，則衆數，平均數，中數三者，

不但不能合一，且彼此有若干之差異；三者之差異愈大，即偏斜之度亦愈大。故吾人欲推求次數分配偏斜之程度，須就此中量之關係，用差異量數求出比率數。求偏態量數之公式有二：

1. 披耳生公式：

$$j=\frac{M-MO}{\sigma}$$

式中之 j，代表偏態係數。(Coefficient of skewness) 惟眞確衆數，甚不易求出。但

$$Mo.=M-3(M-Md)$$

$$\therefore \quad j=\frac{M.-[M-3(M-Md)]}{\sigma}$$

$$=\frac{3(M-Md)}{\sigma}$$

細察上之公式，平均數與衆數相離愈遠時，偏態之度亦愈大。故吾人可由平均數與衆數，或平均數與中數相差之大小，而推算偏態量數之多少。

2. 猶爾公式：

$$j=\frac{(Q_3-Md.)-(Md.-Q_1)}{Q}$$

$$=\frac{Q_1+Q_3-2Md}{Q}$$

以上兩式相較，前者比後者較精密，故引用者最多。兩式所得之比率數爲零時，則次數之分配爲對稱。如所得之差數爲正，則低端之次數多；所得之差數爲負，則上端之次數多；故按比率數之正

負，即可知次數分配向下偏斜或向上偏斜之程度也。

問題七

1. 差異量數之功用爲何？

2. 差異量數以何者爲最完善？

3. 單位不同之兩分配，可否用絕對差異量數比較其差異？

4. 差異係數之功用爲何？

5. 偏態係數之功用爲何？

6. 試求下表所列事實之二十五分差。

7. 試求下表所列事實之平均差。

8. 試求下表所列事實之均方差。

分數	次數
5—10	3
10—15	18
15—20	30
20—25	64
25—30	81
30—35	103
35—40	109
40—45	118
45—50	115
50—55	98
55—60	59
60—65	32
65—70	13
70—75	5
75—80	4
	852

第八章
相關量數
(Measures of relationship)

一　何謂相關?

相關之意義，甚易明瞭，語曰:「誠中形外」;又曰:「進銳退速」。細玩此二語之意義，彷彿「中外」，「進退」，彼此各有相互之關係存焉。又嘗聞之，現在學校求學之學生，其體育成績好者，國文成績未見好;文科成績好者，理科成績未見好;活動力大之學生，成績未見如何出衆;諸如此類問題，宛若其中含有相當之關係。究竟此中之關係情形如何，非有一種量數表明之不可。在統計學上表明此種兩兩相關之情形者，謂之相關量數。

由上言之，欲求相關，必具兩類事實。而此兩類事實之量數，謂之對偶量數。

在下表內，算學與書法兩類分數，俱兩兩相對，如第一號學生2與5，第四號學生4與8等，俱爲對偶量數。

第三十四表

24名學生算學分數與書法分數分配表

學生	算學分數	書法分數	學生	算學分數	書法分數
1	2	5	13	7	5
2	2	5	14	7	7
3	4	5	15	7	4
4	4	8	16	7	7
5	5	2	17	7	6
6	5	6	18	8	2
7	5	4	19	8	6
8	5	5	20	8	9
9	6	7	21	9	8
10	6	4	22	9	6
11	6	7	23	10	9
12	6	5	24	12	6

二　相關之種類

相關之種類有三,列之如下:

1. 正相關(或積極相關)　二種測驗顯正關係時,則二量之性質相近,即其一量增加時,他一量亦必隨之增加。

2. 負相關(或消極相關)　二種測驗顯負相關時,則二量之性質相反,即其一量增加時,他一量反隨之遞減。

3. 無相關　二種測驗,顯無關係時,則一量之增減,與他一量無關

三　相關係數之意義

兩種量數相互之關係如何,非有一簡單之量數表明之不可。此

簡單量數，稱爲相關係數，(Coefficient of Correlation) 通常以 r 代之。

兩種量數完全正相關時，r 之數值爲正 1；正相關逐漸減低時，r 之數值亦逐漸減小爲 .90，.75，.40，.01 等。減至 0 時，則兩量數已全無關係，即 0 係 r 在全無關係時之數值。兩種量數完全負相關時，r 之數值爲負 1。負關係逐漸減低時，r 亦逐漸向 0 移動，成爲 —.90，—.50，—.10，—.01 等。減至 0 時，則兩量數已成爲無關係。

吾人由 r 數值之正負符號，即可知關係之正負。由正負數值之大小，即可知正負關係之大小。r 之值在 .60 或 .70 以上時，不問正負，均極最有關係。在 .35 至 .60 時，算頗有關係。在 .15 至 .35 時，算略有關係。不及 .15 時，其關係在可有可無之間，通常不甚注意也。

相關係數，尚有一種解釋。若兩種測驗有完全正相關時，知道一種測驗內某人之地位，即可預斷其在第二種測驗之地位；此種預斷，十分正確。相關程度漸漸減少，此預斷亦漸難確實。若相關係數減至零時，此種預斷即全不可靠。用第三十五表，可以查悉預斷之錯誤有多少。r 爲 0 時，錯誤爲 1，即是預斷全錯。r 爲 .10 時，預斷之錯誤爲 .995。r 爲 .85 時，預斷之錯誤，將近一半。自此以上，r 之價值增大，預斷之錯誤即減少。

第三十五表

r	預斷錯誤
.00	1.0000
.10	9950
.20	.9798
.30	.9539
.40	.9165
.5C	8660
.60	.8000
.70	.7410
.80	6000
.85	5268
.90	.4369
.95	.3122
.97	.2431
.99	.1411
1.00	.0000

相關係數之大小固然重要；然其可靠與否，亦不可忽略。相關係數可靠與否，須視人數之多少與 r 之大小而定。用 24 人求得 r=.307，可知相關不大，預斷須有 .954 之錯誤，並且不甚可靠。

四 相關係數之求法

求相關係數之方法，最通用者，有標準法(Standard method)與等級法(Rank method)兩種，茲述於下：

1. 標準法　又稱乘積率法 (Product moment) 以英人披耳生(Pearson)之公式爲最通行，最準確，最易算。又分通常算法與簡捷算法兩種：

甲.通常算法　披耳生求標準相關之公式如下：

$$r=\frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2.\Sigma y^2}}$$

在此公式內：

r=披耳生相關係數之符號

x=第一類事實任何量數與其平均數之差數

y=第二類事實任何量數與其平均數之差數

例一　求下兩類事實(音樂成績與算學成績)之相關係數

學生	音樂分數	算學分數
甲	6	6
乙	7	7
丙	8	8
丁	9	9
戊	10	10

算法：

學生	音樂分數	算學分數	x	y	xy	x^2	y^2
甲	6	6	−2	−2	4	4	4
乙	7	7	−1	−1	1	1	1
丙	8	8	0	0	0	0	0
丁	9	9	1	1	1	1	1
戊	10	10	2	2	4	4	4
	m=8	m=8			10	10	10

$$r=\frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2.\Sigma y^2}}=\frac{10}{\sqrt{10\times10}}=\frac{10}{10}=1$$

上例甚簡明，計算手續，無庸另加說明。

例二 求下兩類事實(體育成績與國文成績)之相關係數

學生	體育分數	國文分數
甲	10	6
乙	9	7
丙	8	8
丁	7	9
戊	6	10

算法:

學生	體育分數	國文分數	x	y	xy	x^2	y^2
甲	10	6	2	−2	−4	4	4
乙	9	7	1	−1	−1	1	1
丙	8	8	0	0	0	0	0
丁	7	9	−1	1	−1	1	1
戊	6	10	−2	2	−2	4	4
	m=8	m=8			−10	10	10

$$r=\frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2\cdot\Sigma y^2}}=\frac{-10}{\sqrt{10\times10}}=\frac{-10}{10}=1$$

例三 求教學經驗與所得薪俸之相關係數

教師	教學經驗	所得薪俸
甲	4	3
乙	5	6
丙	6	8
丁	7	5
戊	8	3
己	9	4
庚	10	6

算法：

教師	教學經驗	所得薪俸	x	y	xy	x^2	y^2
甲	4	3	-3	-2	6	9	4
乙	5	6	-2	1	-2	4	1
丙	6	8	-1	3	-3	1	9
丁	7	5	0	0	0	0	0
戊	8	3	1	-2	-2	1	4
己	9	4	2	-1	-2	4	1
庚	10	6	3	1	3	9	1
	m＝7	m＝5			0	28	20

$$r=\frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2\cdot\Sigma y^2}}=\frac{0}{\sqrt{28\times 20}}=0$$ 全無關係

例四　求入學考試與畢業成績之相關係數

學生號數	入學成績	畢業成績
1	11	14
2	14	10
3	15	16
4	18	16
5	19	18
6	19	16

算法：

學生號數	入學成績	畢業成績	x	y	xy	x^2	y^2
1	11	14	-5	-1	5	25	1
2	14	10	-2	-5	10	4	25
3	15	16	-1	1	-1	1	1
4	18	16	2	1	2	4	1
5	19	18	3	3	9	9	9
6	19	16	4	1	3	9	1
	m＝16	m＝15			28	52	38

$$r=\frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2\cdot\Sigma y^2}}=\frac{28}{\sqrt{52\times 38}}=\frac{28}{44.4}=.63$$

手續說明:

(1)將各學生之入學成績及畢業成績一一並列。

(2)求入學成績及畢業成績之平均數;入學成績平均數=16,畢業成績平均數=15。

(3)將入學成績之各分數與其平均數相減,所得之差數,記在 x 欄內;畢業成績之各分數與其平均數相減,所得之差數,記在 y 欄內。

(4)將 x 欄各數與 y 欄相當之各數相乘,求 xy; 即 $(-5)\times(-1)=5$ 等等。

(5)將各差數自乘,求 x^2 及 y^2;如 -5 之乘方爲 25,-1 之乘方爲 1 等等。

(6)將 xy 欄各數用代數法相加,求 xy 乘積之和;即 $\Sigma xy=28$。

(7)將 x^2 欄各數相加,求 Σx^2; y^2 欄各數相加,求 Σy^2;如表 $\Sigma x^2=52$; $\Sigma y^2=38$。

(8)將求得之各數,代入公式,得 $r=.63$。

此種計算方法,在分數之次數不多時,甚爲適用。若分數過繁,而眞正平均數非整數,其差數常有小數,乘除極費時力,則宜用簡法。

乙.簡法　簡捷求法,與通常算法,其理則一;所不同者,唯在用估計平均數求差數,再用校正數修正之一點而已。其公式爲:

$$r=\frac{\Sigma x'y'-N\cdot C_x\cdot C_y}{n\sqrt{\frac{\Sigma x'^2}{n}-C_x^2}\sqrt{\frac{\Sigma y'^2}{n}-C_y^2}}$$

$$C_x=\frac{\Sigma x'}{n}\qquad Cy=\frac{\Sigma y'}{n}$$

在此公式內：

x'＝第一類事實任何量數與估計平均數之差數

y'＝第二類事實任何量數與估計平均數之差數

$C_x=x$ 行估計平均數之校正數

$Cy=y$ 行估計平均數之校正數

例一　用簡法求相關係數

用上表材料

學生號數	入學成績	畢業成績	x'	y'	$x'y'$	x'^2	y'^2
1	11	14	−4	−2	8	16	4
2	14	10	−1	−6	6	1	36
3	15	16	0	0	0	0	0
4	18	16	3	0	0	9	0
5	19	18	4	2	8	16	4
6	19	16	4	0	0	16	0
	Em＝15	Em＝16	6	−6	22	58	44

$$C_x=\frac{\Sigma x'}{n}=\frac{6}{6}=1\qquad C_x^2=1^2=1$$

$$Cy=\frac{\Sigma y'}{n}=\frac{-6}{6}=-1\qquad C_y^2=-1^2=1$$

$$\frac{\Sigma x'^2}{n}=\frac{58}{6};\qquad \frac{\Sigma y'^2}{n}=\frac{44}{6};\qquad \Sigma x'y'=22$$

$$\therefore r=\frac{22-6\times(+1)\times(-1)}{6\sqrt{\frac{58}{6}-1}\sqrt{\frac{44}{6}-1}}=\frac{22+6}{6\sqrt{8.6666}\sqrt{6.3333}}$$

$$=\frac{28}{6\times2.94\times2.51}=\frac{28}{44.2764}=.63$$

手續說明：

(1)將各學生之入學成績與畢業成績一一並列。

(2)假設入學成績之平均數$=15$;畢業成績之平均數$=16$。

(3)將入學成績之各分數，與其估計平均數相減，所得之差數記在 x' 欄內。畢業成績之各分數，與其估計平均數相減，所得之差，記在 y' 欄內。

(4)將 x' 欄各數與 y' 欄相當之各數相乘，得 $x'y'$ 各數。

(5)將各差數自乘，求 x'^2 及 y'^2；得 x'^2 及 y'^2 兩欄各數。

(6)將 x' 欄各數，用代數法相加，得 $\Sigma x'=6$；y' 欄各數，用代數法相加，得 $\Sigma y'=-6$。

(7)將 $x'y'$ 欄各數，用代數法相加，得 $\Sigma x'y'=22$。

(8)將 x'^2 欄各數相加，得 $\Sigma x'^2=58$；y'^2 欄各數相加，得 $\Sigma y'^2=44$。

(9)將第六步所得 $\Sigma x'=6$，以人數 $n=6$ 除之，得校正數 $Cx=1$；$\Sigma y'=-6$，以人數 $n=6$ 除之，得校正數 $Cy=-1$。

(10) $Cx=1$，則 $Cx^2=1^2=1$；$Cy=-1$，則 $C_y^2=-1^2=1$。

(11)將求得之各數，代入公式，得 $r=.63$。

丙.相關表法　求相關時，若對偶量數過多，而甲乙兩法均感困難；則將材料，列成一相關表(如第三十六表)則更可省事。

按上簡法公式：

$$r=\frac{\Sigma x'y'-NCxCy}{n\sqrt{\frac{\Sigma x'^2}{n}-C_x^2}\sqrt{\frac{\Sigma y'^2}{n}-C_y^2}}$$

上式以 n 除之，則：

$$r=\frac{\frac{\Sigma x'y'}{n}-CxCy}{\sqrt{\frac{\Sigma x'^2}{n}-C_x^2}\sqrt{\frac{\Sigma y'^2}{n}-C_y^2}}$$

例一　量數簡單且未歸類者

若量數不多，或全距離不大，無庸用組距，卽以原量數爲單位，分列於橫行及縱行，使成一相關表。然後按照公式，求相關係數。

第三十六表

24名學生算學測驗與書法測驗成績表

學　生	算學測驗	書法測驗	學　生	算學測驗	書法測驗
1	2	5	13	7	5
2	3	5	14	7	7
3	4	5	15	7	4
4	4	8	16	7	7
5	5	2	17	7	6
6	5	6	18	8	2
7	5	4	19	8	6
8	5	5	20	8	9
9	6	7	21	9	8
10	6	4	22	9	6
11	6	7	23	10	9
12	6	5	24	12	6

x 算學測驗成績

y 算法測驗成績

y \ x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	fy	y'	fy'	fy'^2	$\Sigma x'y'$
2				1^{6}			1^{-3}					2	−3	−6	18	3
3												0	−2	0	0	0
4				1^{2}	1^{1}	1						3	−1	−3	3	3
5	1	1	1	1	1	1						6	0	−9		0
6				1^{-2}		1	1^{1}	1^{2}			1^{5}	5	1	5	5	6
7					11^{-4}	11						4	2	8	16	−4
8			1^{-9}					1^{6}				2	3	6	18	−3
9							1^{4}		1^{12}			2	4	8	32	16
fx	1	1	2	4	4	5	3	2	1	0	1	24		27 / 18	92	21
x'	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5					
fx'	−5	−4	−6	−8	−4 / −27		3	4	3	0	5	15 / −12				
fx'^2	25	16	18	16	4	0	5	8	9	0	25	124				

$Cx = -12 \div 24 = -.5$

$Cx^2 = (-.5)^2 = .25$

$Cy = 18 \div 24 = .75$

$Cy^2 = .75^2 = .5625$

代入公式：

$$r = \frac{\dfrac{\Sigma x'y'}{n} - CxCy}{\sqrt{\dfrac{\Sigma x'^2}{n} - C_x^2}\ \sqrt{\dfrac{\Sigma y'^2}{n} - C_y^2}}$$

$$=\frac{\frac{21}{24}-(-.5\times.75)}{\sqrt{\frac{124}{24}-.25}\sqrt{\frac{92}{24}-.5625}}$$

$$=\frac{1.25}{2.21\times1.81}=\frac{1.25}{4.001}=.312$$

手續說明：

(1)排列相關表：橫行 x 自左至右，代表算術測驗成績，由小而大；縱行 y 自上而下，代表書法測驗成績，亦由小而大。圖之大小，應視材料之多少而定。每一格爲一單位(或每一格爲一組距)。

(2)將每個學生之二種分數交切點，作一劃記於方格內。如是，則劃記作成後，可一覽而知相關之趨勢。

(3)求縱行 y 各量數(書法測驗分數)之次數，而將其總數，書於 fy 行之下爲 24。再求橫行 x 各量數(算術測驗分數)之次數，而將其總數，書於 fx 行之後爲 24 (二總數必相同)。

(4)用 7 爲橫行 x 各量數之估計平均數，作二較粗縱線，使此行特別顯著。用 5 爲橫行 y 各量數之估計平均數，作二較粗橫線，使此行特別顯著。

(5)求橫行 x 各量數與估計平均數 7 之差得 x' 項各數；求縱行 y 各量數與估計平均數 5 之差，得 y' 項各數。

(6)求次數乘差數 fy' 之總數爲 18；求次數乘差方 fy'^2 之總數爲92。

再求fx'之總數爲-12；fx'^2之總數爲124。

(7) $\Sigma x'y'$之求法：先看x行之分數5與y行之分數2交切點；此點代表5與2二數。故對y行言，其差數爲-3；對x言，其差數爲-2；以-2與-3相乘，得6，書於交切點之右上角。又x行之分數8與y行之分數2，亦交切於一點；故此點對y行言，其差數爲-3；對x行言，其差數爲1；以1與-3相乘，得-3；亦書於該交切點之右上角。於是再求總和，即$6+(-3)=3$，書於相對之$\Sigma x'y'$行下。

再看y行分數7之橫行上四個劃記。y行7與x行6有二交切點。以次數2乘y行差數2得4，再乘x行差數-1，得-4。又y行7與x行7尚有二交切點，即$2\times2\times0=0$。最後將兩次所得者相加，即$-4+0=-4$，書於相對之$\Sigma x'y'$行下。

再看y行分數9之橫行上二個劃記。第一爲y行9與x行8之交切點，其差數$4\times1=4$。第二爲y行9與xy10之交切點，其差數$4\times3=12$。故最後$4+12=16$，書於相對之$\Sigma x'y'$行下。餘做此類推。

(8)求$\Sigma x'y'$得21。

(9)求x行量數之校正數，得$Cx=-.5$；自乘得$C_x^2=.25$

求y行量數之校正數，得$Cy=.75$；自乘得$C_y^2=.5625$

(10)求x行各量數之均方差，$\sigma x=2.21$

求 y 行各量數之均方差，$\sigma y = 1.81$

(11)兩校正數相乘得 $C_xC_y = -.375$

(12)$\dfrac{\Sigma x'y'}{n} = \dfrac{21}{24} = .875$

(13)將以上所得各數代入公式：

$$\text{即}\ r = \frac{.875-(-.375)}{2.21\times 1.81} = .312$$

例二　<u>量數繁多已歸類者</u>

若量數繁多，則宜以組距爲單位，且宜用二步手續。第一步用劃記法將對偶量數塡入相關表內；第二步將劃記改成數字，塡入另一相關表內。

玆舉例說明於次：

第三十七表　用相關表求 r 之劃記法

		作				文			
		50—54	55—59	60—64	65—69	70—74	75—79	80—84	85—89
國	0—4	|							
	5—9		||	|||					
	10—14		||||	卌	卌|	|||||||			
	15—19				卌|||	卌|||	卌||||		
	20—24				卌卌	卌||||	卌卌||	||||	
	25—29					|	||	|||	
語	30—34							||||	
	35—39								||

第三十八表　用相關表求r之方法(用上表材料)

X　作文分数

y 國語分数

	50-	55-	60-	65-	70-	75-	80-	85-	90-	y'	fy'	fy'^2	$\Sigma x'y'$
0-	1^{12}								1	−3	−3	9	12
5-		2^{12}	3^{12}						5	−2	−10	20	24
10-		4^{12}	5^{10}	6^{6}	9^{0}				24	−1	−24	24	28
15-				7^{0}	8^{0}	8^{0}			23	0	−37	0	0
20-				10^{10}	11^{0}	12^{12}	4^{8}		37	1	37	37	10
25-					1^{0}	2^{4}	3^{12}		6	2	12	24	16
30-							4^{24}		4	3	12	36	24
35-								2^{24}	2	4	8	32	24
fX	1	6	8	23	29	22	11	2	102		69	182	138
											−37		
											32		
x'	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3					
fx'	−4	−18	−16	−23	−61	22	22	6	50 / −11				
fx'^2	16	54	32	23	0	22	44	18	209				

$C_x=\frac{-11}{102}=-.11$

$C_x^2=(-.11)\ =.0121$

$C_y=\frac{32}{102}=.31$

$C_y^2=.31^2=.0951$

代入公式:

$$\text{即 } r=\frac{\frac{\Sigma x'y'}{n}-C_xC_y}{\sqrt{\frac{\Sigma x'^2}{n}-C_x^2}\ \sqrt{\frac{\Sigma y'^2}{n}-C_x^2}}$$

$$=\frac{\frac{138}{102}-(-.11)(.31)}{\sqrt{\frac{209}{102}-(-.11)^2}\ \sqrt{\frac{182}{102}-(.31)^2}}$$

$$=\frac{1.35+.0341}{1.427\times1.639}=\frac{1.3841}{2.33885}=.59$$

上表求法與前例完全相同，故做法手續，不再說明。

2. 等級法　用標準法計算相關，甚精密可靠。若遇時間短促，或教師評定成績，不用分數，而以成績之優劣，排列等第，如第一，第二，第三等，則可用英人司畢門(Spearman)之公式求之。

甲. 通常算法　司畢門求等級相關之公式如下：

$$\rho=1-\frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)}$$

在此公式內

ρ(讀如 Rho)爲司畢門等級相關係數之符號，其價值較小於 r，可直接由附表一求之。

D 爲兩類事實之等第差度。

N 爲次數之總和。

例一　二類事實之評定用等級方法者

學生號數	等第 A(算術)	等第 B(國語)	D	D^2
1	1	3	2	4
2	2	1	1	1
3	3	4	1	1
4	4	2	2	4
5	5	6	1	1
6	6	7	1	1
7	7	8	1	1
8	8	5	3	9
9	9	9	0	0
10	10	10	0	0

$\Sigma D^2=22$

代入公式：

$$\rho=1-\frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)}=1-\frac{6\times 22}{P(10^2-1)}$$

$$=1-\frac{132}{990}=1-.133=.867$$

若 ρ 爲 .867 查附表一，則 $r=.878$

上例手續甚簡易，無庸另加說明。若二類事實之評定不用等級而用分數，亦可用此法求之；惟須先將兩類事實之分數，按其價值，改作等第，然後依法求之卽得。

例二 兩類事實之評定用分數者

學生號數	算學分數	書法分數	算學等第	書法等第	D	D^2
1	2	5	1	8.5	7.5	56.25
2	3	5	2	8.5	6.5	42.25
3	4	5	3.5	8.5	5.0	25.00
4	4	8	3.5	21.5	18.0	324.00
5	5	2	6.5	1.5	5.0	25.00
6	5	6	6.5	14	7.5	65.25
7	5	4	6.5	4	2.5	6.25
8	5	5	6.5	8.5	2.0	4.00
9	6	7	10.5	18.5	8.0	64.00
10	6	4	10.5	4	6.5	42.25
11	6	7	10.5	18.5	8.0	64.00
12	6	5	10.5	8.5	2.0	4.00
13	7	5	15	8.5	7.0	49.00
14	7	7	15	18.5	3.5	12.25
15	7	4	15	4	11.0	121.00
16	7	7	15	18.5	3.5	12.25
17	7	6	15	14	1.0	1.00
18	8	2	19	1.5	17.5	306.25
19	8	6	19	14	5.0	25.00
20	8	9	19	23.5	4.5	20.25
21	9	8	21.5	21.5	0.0	0.00
22	9	6	21.5	14	7.5	56.25
23	10	9	23	23.5	.5	.25
24	12	6	24	14	10.0	100.00

$N=24$ $\Sigma D^2=1425.75$

代入公式：

$$\rho=1-\frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)}=1-\frac{6\times 1425.75}{24(24^2-1)}$$

$$=1-\frac{8554.5}{13800}=1-.619=.38$$

$\rho=.38$ 查附表一，則 $r=.39$

手續說明：

(1)將各生算學分數，排列等第；如以得最少之 2 者為 1，則得 3 分者為 2。得 4 分者有二人，則 3 加 4 以 2 除之，各為 3.5，得 5 分者有四人，將等第 5，6，7，8 平均之，各為 6.5。其餘類推。同法求書法分數等第；最少者 2 分有二人，各為 1.5。得 4 分者有三人，將等第 3，4，5 平均之，各為 4。如以所得分數最多者為第一，所得等第，雖與此完全相反，然其結果亦同。

(2)求兩類事實等第之差，再方之，得 $\Sigma D^2=1425.75$

(3)學生數　$N=24$

(4)代入公式　$\rho=.38$

(5) $\rho=.38$，查附表一，則 $r=.39$

乙. 簡法　司單門尚有一簡捷公式，計算手續，更較簡易：

$$R=1-\frac{6\Sigma G}{N^2-1}$$

在此公式內：

R 爲司畢門簡法相關係數之符號，價值較大於 r，可直接由附表二求之。

G (gains) 爲 x 量數等第大於 y 量數之等第。(或用 y 量數大於 x 量數者亦可。)

茲示例於下：

學生號數	分數		等第		G
	默法	文法	默法	文法	
1	291	100	1	2	1
2	261	94	2	10.5	8.5
3	230	100	3	2	
4	226	97	4	5.5	1.5
5	221	96	5	8	3
6	211	66	6	19	13
7	204	96	7	8	1
8	195	88	8	15	7
9	194	100	9	2	
10	173	81	10	17	7
11	166	94	11	10.5	
12	153	91	12	13	1
13	147	98	13	4	
14	142	76	14	18	4
15	122	93	15	12	
16	116	96	16	8	
17	110	97	17	5.5	
18	103	90	18	14	
19	94	83	19	16	
20	62	58	20	20	

$N=20$　　　　$\Sigma G=47.0$

代入公式：

$$R = 1 - \frac{6\Sigma G}{N^2-1} = 1 - \frac{6\times 47}{20^2-1}$$

$$= 1 - \frac{282}{400-1} = 1 - .706 = .294$$

$R = .294$ 查附表二，則 $r = .47$

手續說明：

(1)先將各個人默讀分數，列成等第。分數最多者 291 列第 1，次多者 261 列第 2，230 列第 3。同樣將文法分數，亦化成等第。如得 100 分者有三人，3 人平分 1，2，3 等第，各得 2，所以第一號學生文法等第爲 2。得 94 分者有二人，平分 10，11，兩等第，各得 10.5，所以第二號學生之文法等第爲 10.5。餘類推。

(2)求各學生文法分數較默讀分數高之等第數目，卽 G 等於 1，8.5 等。

(3)求 $\Sigma G = 47$

(4)代入公式 $R = .294$ 查附表二，$r = .47$

五　消長係數

相關係數，乃用幾個數字，表示甲乙二類事實之關係。吾人由相關係數之大小，卽可知其相互間之關係如何。然分析言之，甲類事實對於乙類事實，其影響究有多少？乙類事實對於甲類事實，其影響又有多少？二者是否相等？否則孰爲較大？此種問題，實較重要，然均非相關係數所能解答。

消長係數(Regression coefficient)能為吾人解決此種問題，能分析甲乙二類事實彼此互施不同之影響。其計算公式如次：

$$b_1 = r\frac{\sigma x}{\sigma y}$$

$$b_2 = r\frac{\sigma y}{\sigma x}$$

在此二公式內：

b_1表示當 y 量數有一單位差(deviation)時，x 量數有多少差？卽 x 依 y 為消長之係數。

b_2表示當 x 量數有一單位差時，y 量數有多少差？卽 y 依 x 為消長之係數。

假設 $r=.80$ $\sigma x=6$ $\sigma y=5$

則 $b_1=.80\times\frac{6}{5}=.96$

$b_2=.80\times\frac{5}{6}=.67$

若 $y=1$, 2, 3, 4, 5,……………………10

則 $x=.96$, 1.92, 2.88, 3.84, 4.8,…………………9.6

若 $x=1$, 2, 5, 10

則 $y=.67$, 1.34, 3.35, 6.7

問題八

1. 用標準法求相關與用等級法求相關，以何者較為精確？

2. 試就下列事實，用標準法求相關係數。

測驗 I	27	27	27	16	27	18	27	9	15	15	21	20
測驗 II	20	18	14	3	13	3	16	3	3	7	8	8
測驗 I	26	10	22	24	16	13	23	15	22	20	17	21
測驗 II	17	2	9	20	2	6	9	2	11	6	8	19
測驗 I	20	20	15	22	23	27	16	25	22	14	17	15
測驗 II	7	9	5	8	16	18	16	12	11	13	7	17

3. 試就上列事實，用相關表求相關係數。

4. 試就上列事實，用等級法求相關係數。

5. 試求上列事實之消長係數。

第九章
可靠量數
(Reliability of measures)

一 何謂可靠量數

假如某城有一千名六年級學生，吾人如欲調查其對於某種算術測驗之能力；最妥善之辦法，莫過於將該測驗測量此一千名學生，求其正答之平均數。但因限於時間，不能測驗全體，祇能從其中任意挑選百名，作爲代表，施行測驗。但從測驗此百名學生所得之平均數 (Obtained mean) 究與所代表一千名學生之眞正平均數 (True mean) 相去幾何？換言之，卽實得平均數與眞正平均數之差數爲何？

可靠量數者，卽實得量數與眞正量數差度之差異數也。實得量數與眞正量數相較，其差數愈小，則實得量數之可靠愈甚。其差數愈大，則實得量數之不可靠愈甚。故差數與可靠性相背，而與不可靠性相並行。

二 可靠量數之求法

求可靠量數之方法有二種：(一)用均方差求可靠量數；(二)用概誤差求可靠量數。茲述於下：

甲. 用均方差求可靠量數之方法 用均方差求各種可靠量數，

茲用第三十九表之事實說明之。

第三十九表

某班學生算術測驗之統計結果

分數	次數	統計結果
2－3	1	平均數＝7.0
3－4	1	
4－5	2	中數＝7.0
5－6	4	
6－7	4	廿五分差＝1.4
7－8	5	
8－9	3	均方差＝2.22
9－10	2	
10－11	1	相關係數＝＋.303
11－12	0	
12－13	1	(與習字測驗)

1. 平均數之可靠量數　其公式為：

$$\sigma m=\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

在此公式內：

σ_m 爲平均數之可靠量數，卽實得平均數與眞正平均數差度之差異數。

第三十九表之平均數爲 7.0，其可靠量數爲：

$$\sigma_m=\frac{2.22}{\sqrt{24}}=.45$$

上表平均數之可靠量數 σ_m 爲 .45，在習慣上，常以 $\pm 3\sigma$ 量數爲確實限度。由此吾人可以確定上例之眞正平均數，必在 7.0＋3(.45) 和 7.0－3(.45)之間；〔以後簡寫作 7.0±3(.45)〕質言之，卽是

在5.65與8.35之間。

但是在5.65與8.35之間之眞正平均數，究爲何種眞正平均數？此並不是24名學生之眞正平均數；因爲彼等之眞正平均數業已實際算出爲7.0，此乃爲較大團體之眞正平均數。上列24名學生，係從其中任意選擇出來者。假使此任意選出之24名學生，最爲適當，則其平均數7.0可與其較大團體之眞正平均數適合。然此甚不容易獲得。眞正平均數發現之機會，雖常在7.0±3(.45)之間，然亦有在5.65以下或8.35以上者；不過爲數絕少，一萬次中僅有三次而已。

2. 中數之可靠量數　其公式爲：

$$\sigma md.=\frac{1\frac{1}{4}\sigma}{\sqrt{n}}$$

由上表：

$$\sigma_m=\frac{1\frac{1}{4}\times 2.22}{\sqrt{24}}=.57$$

由此吾人可以確定24個學生代表之團體之眞正中數，在7.0±3(.57)之間。

3. 二十五分差之可靠量數　其公式爲：

$$\sigma_Q=\frac{1.11\sigma}{\sqrt{2n}}$$

由上表：

$$\sigma_Q=\frac{1.11\times 2.22}{\sqrt{2\times 24}}=.36$$

由此可以確定眞正二十五分差在 1.4±3(.36) 之間。

4. 均方差之可靠量數　其公式爲：

$$\sigma_\sigma=\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$$

由上表：

$$\sigma_\sigma=\frac{2.22}{\sqrt{2\times 24}}=.32$$

由此吾人可以確定眞正均方差必在 2.22±3(.32) 之間。

5. 相關係數之可靠量數　其公式爲：

$$r_\sigma=\frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$$

由上表：

$$r_\sigma=\frac{1-(.303)^2}{\sqrt{24}}=.13$$

故眞正相關係數，必在 .303±3(.13) 之間。

6. 差數之可靠量數　此種可靠量數，甚爲重要，在吾人作實驗工作時，關係尤爲重大。比如此地有兩班學生，第一班 25 人，其進步平均數爲18，進步均方差爲4；第二班36人，其進步平均數爲16，進步均方差爲3；則此兩班學生進步平均數之差數 18－16＝2。以後此兩班之進步差數，是否常常如此，殊難確定，所以非求差數之可靠量數不可。在求差數之可靠量數以前，須求與此差數有關各量數之可靠量數；其公式及計算程序如下：

$$\sigma_{diff.}=\sqrt{(\sigma m_1)^2+(\sigma m_2)^2}$$

在此公式內：

$\sigma_{diff.}$＝二數差數之可靠量數

σm_1＝第一班平均數之可靠量數

σm_2＝第二班平均數之可靠量數

由上說明：

$$\sigma m_1=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{4}{\sqrt{25}}=.8$$

$$\sigma m_2=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{3}{\sqrt{36}}=.5$$

$$\therefore\ \sigma_{diff.}=\sqrt{(.8)^2+(.5)^2}=.94$$

由此可以確定此二班進步平均數之眞正差數，乃在實得差數 $2\pm3(.94)$ 之間；卽在 $-.82$ 與 4.82 之間。可見眞正差數亦有爲零或在零下之機會。若眞正差數在零以下，則將使此種實驗之結果，有利於第二班之可能。不過此眞正差數在零上而利於第一班之機會固甚大也。

麥柯爾因差數之可靠量數，在實驗方面，爲用最廣，於是又創一實驗系數 (Experimental coefficient)。此種實驗系數，甚易求出；且可自然的表示任何差數謬誤之程度。如上例求出差數 2 之可靠量數爲 .94，其實驗系數，卽可由下式求之：

$$實驗係數=\frac{差數}{2.78\sigma_{diff}}$$ 因差數爲 2，σ_{diff} 爲 .94

$$\therefore\ 實驗係數=\frac{2}{2.78\times .94}=.76$$

此實驗差數 2，僅有其應有之數 .76 倍，由是可以確定第一班之進步實較第二班爲優。設使差數非爲 2，而爲 2.61 時，則其實驗係數如下：

$$實驗係數=\frac{2.61}{2.78\times .94}=1.0$$

實驗係數爲 1.0 時，乃表明適合之確定程度。爲 .5 時，表明 $\frac{1}{2}$ 之確定程度。爲 2.0 時，表明二倍之確定程度等等。

若欲知道所得之差數有若干機會爲零或爲負數（卽謂眞正差數爲零或爲負數），於求出實驗係數後，可按第四十表直接查得。

第四十表

用機會法則說明實驗係數

實驗係數	相近之機會
.1	1.6 比 1
.2	2.5 比 1
.3	3.9 比 1
.4	6.5 比 1
.5	11 比 1
.6	20 比 1
.7	38 比 1
.8	75 比 1
.9	160 比 1
1 0	369 比 1
1 1	930 比 1
1.2	2350 比 1
1.3	6700 比 1
1.4	20000 比 1
1.5	27000 比 1

乙. 用概誤差求可靠量數之方法　無論何種統計數，未能免「或有的差誤」，(Probable error 簡寫作 P. E. 或譯作概誤差)然可斷言者，其相差之數，總不能超過或有的差誤之三倍。在常態次數分配時，P. E.，Md. D.，Q，皆相等。即在橫坐標中點上 ±Q 或 ±P. E. 之距離，共含有百分之五十量數。惟 Q 已採為差數之用，而 P. E. 則用以度量可靠性，此二者之分也。

習慣上多用 P. E. 表明可靠量數，用 σ 者較少。P. E. 之求法，用 .6745 乘 σ 即得。茲重述上面所舉公式之一，以說明 P. E. 之化法。

用均方差求平均數之可靠量數，其公式為：

$$\sigma_m=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

故用概誤差求平均數之可靠量數，其公式為：

(1) $$\text{P. E.}_m=\frac{.6745\sigma}{\sqrt{n}}=.6745\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

同理：

(2) $$\text{P. E.}_{md}=.8454\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

(3) $$\text{P. E.}_{\sigma}=.6745\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$$

(4) $$\text{P. E.}_r=.6745\frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$$

三　可靠量數之解釋

以上所示各例，俱以 $\pm 3\sigma$ 爲可靠限度。眞正平均數或中數在 $\pm 3\sigma$ 中間之機會爲 369 比 1。下所列者，係各種機會之概算。

眞正量數（平均數，均方差，相關係數等）在實得量數與 $\pm 1\sigma$ 中間之機會爲 2.15 比 1。

直正量數在實得量數與 $\pm 2\sigma$ 中間之機會爲 21 比 1。

眞正量數在實得量數與 $\pm 3\sigma$ 中間之機會爲 369 比 1。

以上係就均方差考查可靠度而言。若用概誤差考查可靠度時，則各種機會之概算如下：

眞正量數在實得量數與 $\pm$ 1 P. E. 間之機會爲 1 比 1。

眞正量數在實得量數與 $\pm$ 2 P. E. 間之機會爲 4.5 比 1。

眞正量數在實得量數與 $\pm$ 3 P. E. 間之機會爲 22 比 1。

眞正量數在實得量數與 $\pm$ 4 P. E. 間之機會爲 142 比 1。

眞正量數在實得量數與 $\pm$ 4.4 P. E. 間之機會爲 369 比 1。（上面眞正量數在實得量數與 $\pm 3\sigma$ 間之機會亦爲 369 比 1。可知 $\pm$ 4.4 P. E. 實與 $\pm 3\sigma$ 相等。）

問題九

1. 試求下列 (a) (b) (c) 平均數，中數與均方差之可靠量數：

(a) $m=12$,　$\sigma=2$,　$n=18$。

(b) $m=13$,　$\sigma=3$,　$n=20$。

(c) $m=14$, $\sigma=4$, $n=25$。

2. 試根據第一問題內之(a)與(b)事實而求二數相差之可靠量數。

附 錄

I. 附表一

由 ρ 之價值，求與 ρ 相當之 r 價值。

ρ	r	ρ	r	ρ	r	ρ	r
.01	.0105	.26	.2714	.51	.5277	.76	.7750
.02	.0209	.27	.2818	.52	.5378	.77	.7847
.03	.0314	.28	.2922	.53	.5479	.78	.7943
.04	.0419	.29	.3025	.54	.5580	.79	.8309
.05	.0524	.30	.3129	.55	.5680	.80	.8135
.06	.0628	.31	.3232	.56	.5781	.81	.8230
.07	.0733	.32	.3335	.57	.5881	.82	.8325
.08	.0838	.33	.3439	.58	.5981	.83	.8421
.09	.0942	.34	.3542	.59	.6081	.84	.8516
.10	.1047	.35	.3645	.60	.6180	.85	.8610
.11	.1151	.36	.3748	.61	.6280	.86	.8705
.12	.1256	.37	.3850	.62	.6379	.87	.8799
.13	.1360	.38	.3935	.63	.6478	.88	.8893
.14	.1465	.39	.4056	.64	.6577	.89	.8986
.15	.1569	.40	.4158	.65	.6676	.90	.9080
.16	.1674	.41	.4261	.66	.6775	.91	.9183
.17	.1778	.42	.4363	.67	.6873	.92	.9296
.18	.1882	.43	.4465	.68	.6971	.93	.9359
.19	.1986	.44	.4567	.69	.7069	.94	.9451
.20	.2091	.45	.4669	.70	.7167	.95	.9543
.21	.2195	.46	.4771	.71	.7265	.96	.9635
.22	.2299	.47	.4872	.72	.7368	.97	.9727
.23	.2403	.48	.4973	.73	.7460	.98	.9818
.24	.2507	.49	.5075	.74	.7557	.99	.9909
.25	.2611	.50	.5176	.75	.7654	1.00	1.0000

II.　附表二

由R之價值求與R相當之r價值。

R	r	R	r	R	r	R	r
.00	.000	.26	.429	.51	.742	.76	.937
.01	.018	.27	.444	.52	.753	.77	.942
.02	.036	.28	.458	.53	.763	.78	.947
.03	.054	.29	.472	.54	.772	.79	.952
.04	.071	.30	.486	.55	.782	.80	.956
.05	.089	.31	.500	.56	.791	.81	.961
.06	.107	.32	.514	.57	.809	.82	.965
.07	.124	.33	.528	.58	.810	.83	.968
.08	.141	.34	.541	.59	.818	.84	.972
.09	.158	.35	.554	.60	.827	.85	.975
.10	.176	.36	.667	.61	.836	.86	.979
.11	.192	.37	.580	.62	.844	.87	.981
.12	.206	.38	.593	.63	.852	.88	.984
.13	.226	.39	.606	.64	.860	.89	.987
.14	.242	.40	.618	.65	.867	.90	.989
.15	.259	.41	.630	.66	.875	.91	.991
.16	.275	.42	.642	.67	.882	.92	.993
.17	.291	.43	.654	.68	.889	.93	.995
.18	.307	.44	.666	.69	.896	.94	.996
.19	.323	.45	.677	.70	.902	.95	.997
.20	.338	.46	.689	.71	.908	.96	.998
.21	.354	.47	.700	.72	.915	.97	.999
.22	.359	.48	.711	.73	.921	.98	.9996
.23	.384	.49	.721	.74	.926	.99	.9999
.24	.399						
.25	.414	.50	.732	.75	.932	1.00	1.0000

III. 名詞索引

IV. 符號表

M　(mean)——實得平均數

Σ　(讀如 sigma)——總和

m　(measure)——量數

n　(number)——各量數數目

f　(frequency)——次數

d　(deviation)——差數

E.M.(estimated mean)——估計平均數

C　(correction)——校正數

i　(interval)——組距

Md (median)——中數

V——含有中數組之上限或下限;差異係數

F——自次數分配之一端算起至含有中數止所含量數次數之和。

f——含有中數組之次數

Mo (mode)——衆數

Q_1 (lower quartile)——下二十五分點

Q_3 (upper quartile)——上二十五分點

Q　(quartile deviation)——二十五分差

A.D.(average deviation or mean deviation)——平均差

O.Md (obtained median)——實得中數

E.Md (estimated median)——估計中數

Na (numbers above)——量數之較實得中數大者

Nb (numbers below)——量數之較實得中數小者

S.D. (standard deviation or mean square deviation) or σ (Sigma)

——均方差

Md.D. (median deviation)——中點差

P.E. (Probable error)——概誤差

j——偏態係數

r——相關係數

x——第一類事實任何量數與其平均數之差數

Y——第二類事實任何量數與其平均數之差數

x'——第一類事實任何量數與估計平均數之差數

Y——第二類事實任何量數與估計平均數之差數

C_x——X 行估計平均數之校正數

Cy——Y 行估計平均數之校正數

ρ——司畢門等級相關係數之符號

D——兩類事實之等第差度

R——司畢門簡法相關係數之符號

G (gains)——X 量數之等第大於 Y 量數之等第(或 Y 量數之等第

大於X量數之等第)

b_1——X依Y爲消長之係數

b_2——Y依X爲消長之係數

σ_M——平均數之可靠量數(用均方差求)

σ_{Md}——中數之可靠量數

σ_Q——二十五分差之可靠量數

σ_σ——均方差之可靠量數

σ_r——相關係數之可靠量數

σ_{diff}——差數之可靠量數

σ_{m_1}——第一班平均數之可靠量數

σ_{m_2}——第二班平均數之可靠量數

$P.E._M$——平均數之可靠量數(用概誤差求)

$P.E._\sigma$——均方差之可靠量數

$P.E._r$——相關係數之可靠量數

V. 公式

1. 求平均數之公式:

(1) $M=\frac{\Sigma m}{n}$ ……………………………………85

或 $M=\frac{\Sigma fm}{n}$ ……………………………………85

(2) 其簡法之公式:

$M=E.M.+C$

$C=\frac{\Sigma fd}{n}\times i$ ……………………………………88

2. 求中數之公式:

$Md=V\pm\frac{\frac{n}{2}-F}{f}\times i$ ……………………………………93

3. 求下二十五分點之公式:

$Q_1=V+\frac{\frac{n}{4}-F}{f}i$ ……………………………………98

4. 求上二十五分點之公式:

$Q_3=V+\frac{\frac{3}{4}N-F}{f}i$ ……………………………………98

或 $Q_3=V-\frac{\frac{1}{4}N-F}{f}i$ ……………………………………98

5. 求二十五分差之公式:

$$Q=\frac{Q_3-Q_1}{2}$$ ……105

6. 求平均差之公式：

(1) $$A.D.=\frac{\Sigma fd}{N}$$ ……109

(2) 其簡法之公式：

$$A.D.=\frac{\Sigma fd+c(Nb-Na)}{N}i$$

$$C=\frac{O.Md-E.Md}{i}$$ ……110

7. 求均方差之公式：

(1) $$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}}$$ ……115

或 $$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}}$$ ……115

(2) 其簡法之公式：

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}-C^2}\times i$$

$$C=\frac{\Sigma fd}{n}$$ ……117

8. 求披爾生差異係數之公式：

$$V=100\frac{\sigma}{M}$$ ……121

9. 求偏態量數之公式：

(1) 披耳生公式:

$$j=\frac{3(M-Md)}{\sigma}\text{.........................}123$$

(2) 猶爾公式:

$$j=\frac{Q_1+Q_3-2Md}{Q}\text{.........................}123$$

10. 求相關係數之公式:

(1) 披而生求標準相關之公式:

$$r=\frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2\cdot\Sigma y^2}}\text{.........................}129$$

(2) 其簡法之公式:

$$r=\frac{\frac{\Sigma x'y'}{n}-N\cdot C_xC_y}{\sqrt{\frac{\Sigma x'^2}{n}-C_x^2}\sqrt{\frac{\Sigma y'^2}{n}-C_y^2}}\text{.........................}135$$

(3) 司畢門求等級相關之公式:

$$\rho=1-\frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)}\text{.........................}141$$

(4) 其簡法之公式:

$$R=1-\frac{6\Sigma G}{N^2-1}\text{.........................}143$$

11. 求消長係數之公式:

$$b_1=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

(a) $\sigma_r=\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$ 151

(b) $P.E._r=.6745\frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$ 154

(6) 求差數可靠量數之公式:

$\sigma_{diff}=\sqrt{(\sigma m_1)^2+(\sigma m_2)^2}$ 152

(7) 求實驗系數之公式:

$實驗系數=\frac{差數}{2.78\sigma_{diff}}$ 153

VI.　中西名詞對照表

Absolute variability	絕對差異
Adams	亞丁
Analytic method	分析法
Applied statistics	應用統計學
Arithmetic average	算術平均數
Arithmetic mean	算術平均數
Averages	平均數
Average deviation	平均差
Bar diagram	直線圖
Both limit method	雙限法
Bowley	寶來
Central tendency	集中趨勢
Chance	機會
Class	組
Class interval	組距
Class limit	組限
Co-efficient of correlation	相關係數
Co-efficient of skewness	偏態係數

Co-efficient of variation	差異係數
Correction	校正數
Correlation	相關
Correlation Co-efficient	相關係數
Correlation table	相關表
Curve	曲線
Data	材料
Deviation	差數
Diagram	圖
Distribution	分配
Educational statistics	教育統計學
Estimated mean	估計平均數
Estimated median	估計中數
Experimental Co-efficient	實驗係數
Fifty Percentile point	五十分點
Frequency	次數
Freqncy distribution	次數分配
Frequency surface	次數面積
Galton	高爾登
Graphic method	圖示法

Gregory	格利哥雷
Grouped measures	已歸類量數
King	金氏
Laws	定律
Lower limit	下限
Lower quartile point	下二十五分點
Mass measure	全部量數
Mean	平均數
Mean deviation	平均差
Mean square deviation	均方差(即標準差)
Measure	量數
Measures of absolute variability	絕對差異量數
Measures of central tendency	集中量數
Measures of relationship	相關量數
Measures of relative variability	相對差異量數
Measures of skewness	偏態量數
Measures of variability	差異量數
Median	中數
Median deviation	中數差
Method	方法

Mid-point	中點
Mid-value	中値
Mid-score	中分數
Mode	衆數
Multi-modal frequency surface	多衆數次數面積
Normal curve	常態曲線
Normal distributioon	常態分配
Normal frequency surface	常態次數面積
Obtained mean	實得平均數
Obtained median	實得中數
Order distribution	順序分配
Pearson	披爾生
Performance test	作業測驗
Personal investigation	個人調查
Probable error	概誤差
Product-moment method	乘積率法
Product scale	作品測驗
Quartile deviation	二十五分差(或作四分差)
Question blank or questionnaire	問卷
Range	全距

Rank distribution	等級分配
Rank method	等級法
Regression co-efficient	消長係數
Relative variability	相對差異
Reliability of measures	可靠量數
Short method	簡法
Skewed frequency surface	偏態次數面積
Spearman	司畢門
Standard deviation	標準差(均方差)
Standard method	標準法
Statistical method	統計法
Statistics	統計學
Step interval	級距
Step limits	級限
Tabular method	表列法
Thorndike	桑戴克
True mean	眞正平均數
True median	眞正中數
Ungrouped measures	未歸類量數
Upper limit	上限

Upper Quartile point	上二十五分點
Variability	差異
Webster	韋伯斯特
Yule	猶爾

中0321(全)　23,3.

民國二十三年四月印刷
民國二十三年四月發行

教育統計學綱要（全一冊）

◎定價銀五角
（外埠另加郵匯費）

編著者　楊國礎
發行者　中華書局有限公司
代表人陸費逵
印刷者　上海靜安寺路
中華書局印刷所
總發行所　上海棋盤街中華書局
分發行所　各埠中華書局

註冊商標