



3

356066

教育短波社研究部  
研究報告叢刊之一

# 珠算教學的研究

曹日昌著

教育短波社出版

謹以此書爲

先父曹岐瑞先生紀念

# 珠算教學的研究

曹日昌著

## 目 錄

自 序	1
第一章 珠算和筆算的混合與聯絡	1
第二章 教具——算盤的改良	23
第三章 記數和撥珠	41
第四章 口訣問題	55
第五章 加法	93
第六章 減法	113
第七章 乘法	121
第八章 除法	139
第九章 開方	161
第十章 捷算	181
第十一章 練習和測驗	221
第十二章 教材和應用問題	237
第十三章 教學法上他項問題	253
附 錄 珠算論文索引	263
索 引	269

## 圖 表 目 錄

第一圖 曹日昌設計之算盤	25
第二圖 張顯光設計之星徽裝置	28

228050

---

第三圖	金氏新式算盤	32
第一表	珠算筆算分教合教的比較	17
第二表	各組每分鐘演算題數分配表	80
第三表	各組每分鐘演算可靠題數分配表	81
第四表	每實足年齡每分鐘每人演算可靠題數分配表	81
第五表	「堆百子」對照表	105

## 自 序

民國二十年至二十一年度，作者在北平師範大學，擔任了平民學校初級第二十二班的珠算教師，實地感到了我國傳統的珠算教學法之不當，於是引起改革珠算教學法的動機，隨即做了一個小規模的實驗。因為各種條件控制得不好，結果很不圓滿，過後也就擱置下了。二十一年九月，作者轉入清華大學心理學系，二十二年至二十三年度選習周先庚教授的高級實驗心理學。有一次，周先生令每位同學擬十個實驗研研問題。作者所擬的問題中，有一個便是改善珠算教學法的實驗，同時向周先生報告了作者過去做的那一個實驗，周先生深加贊許，並鼓勵作者繼續去做。當時作者覺到，要做珠算教學法的實驗，應當先把過去關於珠算教學的文獻做個系統的考查。這是作者寫本書的起因。

二十三年六月，教育短波社成立，同年十月，刊行教育短波。編輯主任朱啟賢先生囑作者編寫珠算教學法，作者答應以後就開始編寫，二十三年至二十四年連續在教育短波上發表了六章。二十四年九月，作者到定縣去工作。因為工作忙迫，不能按期交稿，教育短波遂停止刊登，可是作者在定縣工作之餘，仍是繼續編寫。到了二十四年十二月底，全部告成。

本書的性質一如書名所示，不是普通的珠算教學法，是關於珠算教學法的「研究」，是過去各位學者關於珠算教學研究報告的系統介紹，同時還包含了作者個人對珠算教學上各種問題的意見。二十幾年

來各位學者在國內發表的四十九篇關於珠算教學的論文，是本書大部材料的來源，編成索引，附錄於後。

周先庚教授在研究上給了作者很大的鼓勵與幫助，又曾為本書校閱原稿，給了作者許多寶貴的意見，是作者首要感謝的。趙冀良先生(中華平民教育促進會幹事)也曾為本書校閱原稿，給了作者一些珍貴的意見。編寫本書時朱啟賢先生不時給作者鼓勵與催促，接洽印刷出版時蒙郝鳴琴先生(教育短波社總務主任)多方贊助，也都是作者要感謝的。最後還要向國內一切從事珠算教學研究的學者表示深摯的感謝與敬意！

先父曹岐瑞先生在作者八歲時即教授作者珠算，作者之有今日亦多為先父所賜，即謹以此書為先父紀念。

二十六年元旦，曹日昌於清華園。

## 第一章 珠算和筆算的混合與聯絡

I	問題	1
II	珠算和筆算混合教學的理由	1
III	混合教學的教材	4
IV	混合教學的時間支配	12
V	珠算和筆算的聯絡	14
VI	珠算筆算分數合教的實驗研究	16
VII	總結提要	20

### I 問題

珠算和筆算同屬一科(算術科)，二者應該取什麼樣的關係呢？簡單一句話：應該混合教學。如果混合教學不能做到，也要取極密切的聯絡。現在我們把(1)珠算和筆算混合教學的理由，(2)混合教學的教材，(3)混合教學的時間支配，(4)珠算和筆算的聯絡，(5)珠算筆算分數合教的實驗研究，五個問題討論一下：

### II 珠算和筆算混合教學的理由

為什麼珠算要和筆算混合教學呢？珠算和筆算混合教學有什麼好處呢？笑留先生(參考1)以為珠算的運用在乎計算迅速，若不能計算迅速，則學習珠算的意義要失掉許多。然而珠算就是一件容易學會而不容易練快的東西，要求能運算快非多加練習不可。各小學規定的珠算鐘點都很少，因之珠算練習的機會也就很少。筆算的時間較多，所以珠算要和筆算混合教學便可得到較多的練習機會，比較「一暴十寒」



的練習方法，效率自然要高的。這正合乎教育心理學上「分配學習」勝於「集中學習」的原則。並且珠算和筆算混合教學，可以互相印證，可使學生對二者的觀念都更為清晰。二者混合教學，筆算也不吃虧，因為珠算特有的教材並不多，絕不能佔了大部分的時間，使學生減少了學習筆算的機會；反之，筆算却可以得到另一種方式的練習，成績或許更好。

黃鏡白先生(參考<sup>9</sup>)說：「珠算和筆算應混合教學，」因為「混合教學的利益在能相互關明算法，訂正錯誤，便於教學的進行。」南昌高橋小學(參考<sup>7</sup>)以為珠算筆算混合教學有三種好處：「(1)無割裂之弊，教學筆算從珠算研究日常問題引起，教學珠算用筆算的原理解釋證驗。(2)珠算練習機會多，可使手指撥珠運算純熟。(3)有時珠算代替筆算演草，證算，簡捷經濟，且使兒童知何者當使筆算演式運算，何者便利用珠算，則應付生活上日常數量問題自然裕如。」張仲弢先生(參考<sup>11</sup>)以為「教學珠算和筆算的目的，是要培養兒童解決生活中的計算能力……，兩者性質既同，混合教學當然便利。教珠算時可以指示筆算的算法，教筆算時也可聯絡珠算的算法，使兒童更加明瞭。當練習時，可以互相驗算，互相訂正。」糜子輝先生(參考<sup>5</sup>)則列舉了珠算筆算混合教學的五大優點：「(1)珠算與筆算由一人擔任，可以聯絡進行，沒有隔閡的弊病。(2)珠算與筆算同時教學，可以互相說明方法，兒童容易了解，還可增強記憶。(3)混合教學後，有許多學校，不致忽略珠算，或竟不教珠算等偏跛的弊病。(4)混合教學，兒童所需求的知

識和技能，容易獲得，並且切合實際應用。(5)混合教學後，互相驗算結果，可以增加許多練習機會。」蔣霖先生(參考14)也和龔先生抱有相同的意見。陳耿光先生(參考10)著有筆算珠算混合教學法專書，他以為「要使兒童學得珠算的實用技能，要使小學校能教完部頒小學課程標準中所規定的算術教材，要使每個兒童避免丟了珠算學筆算，丟了筆算學珠算的麻煩，筆算珠算混合教學，就是一個最好的方法。方法的要點，就是使兒童在小學校裏既學筆算，同時也學珠算，筆算中各種方法儘量應用於珠算上，珠算補筆算之不足，使每個兒童學完筆算同時也學會珠算。」

珠算和筆算混合教學的好處，混合教學的理由，由上邊引証的各家的話中已經可以略知梗概了，不過我們以為珠算筆算應該混合教學的理由，還不只此。我們以為珠算和筆算應該混合教學的最大的理由，就是珠算筆算同是算術。最恰當的算術原理只有一個，對某一個問題最經濟的解決的方法也只有一個，不過解決問題時可用的工具却可不只一種。因為解決問題時所用的工具不同，於是有了所謂筆算，珠算，心算等。譬如目前一個問題：買了五十本教科書，每本價洋一角二分，共計多少錢？這是一個問題，解決這個問題最經濟的方法也只有一個，就是用每本的價目(0.12元)去乘總本數(50本)，此外沒有更巧妙的方法；不過計算這個題目，或解決這個問題時，所用的工具却可不同。若用鉛筆紙張呢，便是筆算；若用算盤算珠呢，便是珠算；若不用任何工具，只憑自己喉頭的肌肉運動去計算呢，便是心算。所

以珠算筆算只是在計算上所用的工具的不同，牠們所根據的原則，方法，原是一樣的東西。自然我們就不能任意分離牠們，使牠們有了隔閡，而使「珠算是一個進程，一個系統教學，筆算又是一個進程，一個系統教學。」(參考 9) 在一方面叫「乘」，叫「除」；在另一方面又叫「因」，叫「歸」；在一方面叫「乘數」，「除數」，「被乘數」，「被除數」，而在另一方面又叫「法數」，「實數」。我們要給學生一個統一的原則，一個統一的方法。在實証這種原則，應用這種方法時，他們可用不同的工具，紙筆也好，算盤也好，只就當時的情境而定。我們要使他們的知識成一個統一的整體，在不同的情境下，作不同的應用。——這是我們主張珠算筆算混合教學的主旨。

### III 混合教學的教材

珠算筆算混合教學時，教材怎樣分配呢？這不是一個容易解決的問題。因為既然採用混合教學，就應該珠算筆算同時開始學習，認識書寫阿拉伯數字的時候，也就該是學習撥珠記數的時候。不過現在在小學中，教育部規定在第一學年就開始學習筆算，而珠算却要到了第四學年才能開始。在這種情形之下，採用混合教學是有相當困難的，教材的支配更屬不易。糜子輝先生主張(1)教學珠算的基本方法——加減乘除——時，所用的教材要和筆算分開；(2)珠算的練習材料也要與筆算分開；(3)珠算的四則基本法學會以後，計算應用題時，珠算筆算方可用同樣教材。他說：「在事實上，珠算開始教學時，兒童學習筆算，已有三年的歷史，對於整數四則以及小數四則的計算技能

已具相當的基礎，而珠算方從一個珠兒代表幾學起，其間程度懸殊，……要想在珠算開始教學時即與筆算應用同一教材，當然是不可能的，所以……珠算基本方法——即加減乘除——教學時，所用的材料，以與筆算分開爲是。……珠算練習材料與筆算練習材料，因爲一個有工具，可以幫助計算，一個沒有工具，須得運用心算，所以……也以分開爲是。……等到珠算的四則基本法已經學會以後，計算應用題，實際應用練習的時候，那麼珠算和筆算的材料無疑的可以依照……不必分開的原則去進行了。」在這幾點上，蔣霖先生也是和糜先生有着完全相同的意見。

在小學算術教科書中，筆算珠算採用混合編制的有商務印書館的復興算術教科書（參考4）。在這部教科書中前六冊（供小學一、二、三、三學年用的）完全是筆算的教材，在七八兩冊（供小學第四學年用的）中添上了珠算的教材，不過也只是把珠算的教材夾雜在筆算的教材中間罷了，二者絕不相干的。舉例來看：

復興算術教科書第七冊目錄（課數中有〔 〕者爲珠算教材）：

1. 復習前冊
2. 萬以內的數目的認識和應用
- (3) 算盤的認識，定位，和撥珠的方法
4. 菱形，梯形，平行四邊形的認識和應用
- (5) 1至5的加法練習
6. 方寸方尺的認識和應用

[7] 6至9的加法練習

(下略).....

.....

復興算術教科書第八冊目錄：

1. 復習前冊

[2] 關於1至9的乘法九九的練習

3. 法數三位的乘法

[4] 一位數乘兩位數的練習

5. 續法數三位的乘法

[6] 續一位數乘兩位數的練習

7. 法數三位的除法

8. 復習

(下略).....

.....

試看「萬以內的數目的認識和應用」和「算盤的認識，定位，和撥珠的方法」，「菱形，梯形，平行四邊形的認識和應用」和「1至5的加法練習」，有什麼關係呢？

糜子輝先生提議的辦法，復興算術教科書的編制，都不是盡善盡美的，不過若「部令」碍難通融，或自己也不願大事變動的話，也真沒有其他多麼優良的辦法和編制了。

陳耿光先生擬過一份珠算筆算教材綱要，比復興算術教科書中的

教材，在排列上稍有進步。不過是為第三學年開始教學珠算應用的。  
現在節錄如下：

第三學年第一學期
----------

## 筆算

1. 千以內數的認識
  5. 進位的加法
  6. 退位的減法
- .....
- .....

16. 有餘數的除法練習
17. 總復習

## 珠算

2. 定位的方法
  3. 撥珠的方法
  4. 初步加減法練習
- .....
- .....

15. 不退位的一位數除法練習
- 總復習

第三學年第二學期
----------

1. 方尺方寸的認識和應用
  3. 法數一位的進位乘法練習
- .....
- .....

11. 斤兩的認識和應用
13. 總復習

2. 方尺方寸的簡單計算
  4. 同(3)
- .....
- .....

12. 斤兩的加減法練習
- 總復習

第四學年第一學期
----------

- |                    |                   |
|--------------------|-------------------|
| 1. 萬以內數目的認識        | 2. 復習三位數加減法及一位數乘法 |
| 3. 菱形梯形平行四邊形的認識和應用 |                   |
| 4. 方分方丈的認識和應用      |                   |
| 5. 畝分毫厘的認識和應用      | 6. 簡易的計畝法         |
| .....              | .....             |
| .....              | .....             |
| 18. 秒的計算           | 17. 物價的計算         |
| 19. 總復習            | 總復習               |

第四學年第二學期
----------

- |                    |                      |
|--------------------|----------------------|
| 1. 法數三位數的乘法練習      | 2. 同(1)              |
| 3. 法數三位數的除法練習      | 4. 簡易的不退位及退位的二位數除法練習 |
| .....              | .....                |
| .....              | .....                |
| 16. 家庭學校用品的價格估計和調查 | 15. 家庭簿記初步練習         |
| 17. 總復習            | 總復習                  |

第五學年第一學期
----------

- |                         |               |
|-------------------------|---------------|
| 1. 萬到萬萬各數的認識            |               |
| 2. 整數四則的應用              | 3. 繼續二位數的除法練習 |
| .....                   | .....         |
| .....                   | .....         |
| 15. 立方寸立方尺立方丈的<br>認識和應用 | 16. 體積應用練習    |
| 17. 總復習                 | 總復習           |

**第五學年第二學期**

- |                 |           |
|-----------------|-----------|
| 1. 小數(不名數)加減法練習 |           |
| 2. 小數(不名數)乘除法練習 | 3. 折扣應用練習 |
| .....           | .....     |
| .....           | .....     |
| 10. 簡利息的初步練習    | 11. 同(10) |
| 12. 總復習         | 總復習       |

**第六學年第一學期**

- |                       |              |
|-----------------------|--------------|
| 1. 分數和小數關係的認識<br>和計算  |              |
| 2. 分數和複名數關係的認<br>識和計算 |              |
| 3. 分數和成分關係的認識<br>和計算  | 4. 折扣的繼續應用練習 |

- |              |          |
|--------------|----------|
| .....        | .....    |
| .....        | .....    |
| 9. 日常應用的利息計算 | 10. 同(9) |
| 11. 總復習      | 總復習      |

第六學年第二學期
----------

- |                       |           |
|-----------------------|-----------|
| .....                 | .....     |
| .....                 | .....     |
| 1. 合作商店的研究和實習         |           |
| 2. 物價漲落的調查和計算         | 3. 商業算術練習 |
| .....                 | .....     |
| .....                 | .....     |
| 7. 家庭簿記的練習            | 8. 同(7)   |
| 9. 簡易統計圖表的認識製<br>作和計算 |           |
| 10. 總復習               | 總復習       |

若是教育部規定的辦法可通融，能在第一學年便開始教學珠算（民衆學校例外，因為教育部對民衆學校的課程還沒有嚴格的規定），我們就要重新編製教材，使牠特別適合混合教學之用。黃競白先生恰好就擬過一份混合算術課程綱要，照錄如下，以資參考。

1. 百以內阿拉伯數目字的寫讀
2. 算盤計數和運珠練習
3. 加法歌訣和百以內加法的練習
4. 減法歌訣和百以內減法的練習

5. 千以內加減法的練習應用和十進複名數的計算，元角分，丈尺寸，石斗升
6. 小數的寫讀和小數加減的練習
7. 碼子字的寫讀和記賬法
8. 乘法歌訣和一位乘一位，二位，三位；二位乘二位，三位的練習
9. 面積和畝分厘的計算
10. 小數乘法的練習和折扣的計算
11. 千以內的加減乘的練習應用，和十進複名數的計算
12. 除法歌訣和一位數除多位數除法的練習
13. 整數和小數加減乘除的練習應用
14. 斤兩法的歌訣，和兩求斤，斤求兩的練習應用
15. 諸等數，長度，時間等的練習應用
16. 利息的求法
17. 總複習

黃先生擬的這份混合算術課程綱要，就我們的眼光看來，也還有該商榷的地方。不過教材這件東西的地方性特別大，在一處適用的在另一處就未必如此，一個人一手擬定的很難無條件的通行全國，所以雖然我們對於教材還有自己的意見，也不必自己另擬一份給讀者看了。有了黃先生的這一份，已經可以刺激讀者使他在需要的時候，要自己編製教材了。

#### IV. 混合教學的時間支配

珠算筆算實行混合教學時，時間怎樣分配呢？我們先介紹各專家的意見：

笑留先生主張：每課珠算所佔的時間要在十分鐘以上。練習時採取下列三個方式：

1. 筆算的問題用筆算計算以後，再用珠算檢算一次，或用「反覆法」，或用「反對法」。

2. 若已經把預定的題目算完而下課時間還沒有到的時候，可由教師口述一兩個日常應用算題，學生用珠算計算。

3. 若筆算的題目不能或無須用珠算檢算的時候，則由教師另出珠算的算題，在課後演算。

笑留先生所講的只是珠算筆算「同課練習」，不能算是純正的混合教學，不過他所說的關於時間的支配也可資參考。

糜子輝先生主張珠算筆算混合教學時關於時間的支配，要根據下述的兩個原則：

「1. 在珠算開始教學時，每節算術時間可以劃出一半來作為珠算教學時間，其餘一半為筆算練習時間。

「2. 在珠算基本法已經學會以後，每節算術時間，可以劃出五分鐘或十分鐘來作為練習時間，這種機械的練習如筆算也需要，那麼筆算與珠算可以互相間隔練習，免得失於偏跛之弊。

「上面所述兩點只是指珠算的開始教學與基本練習，至於應用方

面，驗算方面，那就不必分開時間，凡是可以兩面相互用時，就要盡量聯合，時間的支配似乎不必拘泥。」

蔣霖先生在這方面也是和糜先生有着同樣的意見。

南昌高橋小學在調查了幾個學校的珠算教學以後，關於混合教學的時間支配和練習問題，曾得了下面幾個結論：

1. 珠算筆算教學的時間，不必固定，要「隨兒童學習的程度而定。」

2. 每次算術教學時至少作五分鐘的計算技術練習。所謂計算技術，就是指的珠算或心算。

3. 視珠算學習的進度，筆算練習逐漸減少，珠算練習逐漸增多。

以上三位專家的意見，都是對小學而發的。在小學中珠算筆算實行混合教學，時間的支配，不是一個容易解決的問題，很難找到一個適當的分配方法。主要的困難就是筆算在一年級時開始學習，而珠算要在第四學年才開始。在開始學習珠算的時候，學生珠算筆算的知識相差太大，教材不能一致，因之在教學時間的分配上也就有了問題了。究竟怎樣分配好，須要很多實驗的研究才可決定，我們不能冒然的加以斷語。小學法規上，關於添授珠算的時間的規定，應多有伸縮的餘地，以便實行混合教學。若能不受「部章」的限制，珠算筆算同時開始學習，在教學的時間支配上就不發生任何問題了。那時也就不必討論每節中珠算佔多少分鐘，筆算佔多少分鐘了，只就整個的混合教學歷程，按步就班的進行，把筆算珠算完全打成一片，學生的手中同時

拿着算盤和筆紙，在算盤上某一檔撥上一個上珠一個下珠，就在紙上練習寫「6」字，這時那還能分珠算佔多少時間，筆算佔多少時間呢？誠如陳耿光先生所說：「筆算和珠算打成一片，教筆算的時候就是教珠算的時候，沒有時間的分別，沒有算法的不同。」

### V 珠算和筆算的聯絡

不能實行混合教學時，珠算和筆算也要取密切的聯絡。在現時的課程標準之下，珠算筆算不能同時開始學習，實施真正的混合教學大不容易，所以珠算筆算的聯絡問題，也應該特別注意。談到珠算筆算的聯絡，總不外「參証」和「比較」兩點。黃競白先生說：「珠算……筆算……為教學時間經濟與學習效能增進起見，彼此均須注意聯絡。就是在教學珠算時隨時聯絡筆算，以筆算證明練習的有無錯誤；反之在教學筆算時亦然。」關於珠算筆算聯絡問題，高橋小學也是主張應當二者「互相證驗」。朱時隆先生(參考6)主張珠算筆算「互相聯絡教學，利用筆算教學以解決珠算教學的困難。」莊伯倫先生(參考13)也主張珠算要與筆算聯絡教學，教學筆算時相機用珠算說明，教學珠算時相機用筆算說明。蔣霖先生說：「如果兩者不能混合教學，教學珠算該與算術(即筆算——曹日昌附註)，充分聯絡，以收互相參証之效。如定位的方法，口訣的指導，小數計算法等，可應用心算筆算教學。基本四則計算法的不同，得數位數的變動，實數和得數的分別，及法實數帶零的計算法等，可和筆算上各種方法比較教學。並且在兒童能力所及到之處，可用珠算計算筆算式題。」黃炳華先生(參考12)以為「珠算

和筆算都是幫助心算的工具，教學時二者應密切聯絡，不應分開。」不過若二者的材料相近，才能聯絡，教學時才能打成一片。若是二者的材料，完全不同，勉強拉在一起，聯絡教學還不如分開教學較有系統。黃先生的意見中，應注意的一點是教學的方法應以教材為準。珠算教學和筆算教學應取什麼樣的關係，要看珠算教材和筆算教材有什麼樣的關係。

關於珠算筆算聯絡教學的具體的方法，周元讓先生(參考3)說的比較詳盡，他提出五種方法：

1.『利用筆算的經驗來解決珠算問題。珠算和筆算的原理是完全一樣的。我們可以利用這一點，使兒童能將筆算的經驗運用到珠算上來。例如兒童已經學會筆算加減法，知道3加2等於5，5減3等於2，我們便可趁此告訴他珠算上「二上二」，「二下五去三」，「二去二」或「二上三去五」的口訣；並且指示他怎樣解決實際問題。

2.『利用珠算的敏捷幫助筆算的不足。……四則練習，筆算不如珠算敏捷，因此我們可以在規定時間內，令兒童解決算術問題時用算盤代替草稿。

3.『珠算筆算互相證驗結果。怎樣纔能知道計算的結果正確與否？這就全靠證驗。現在我們要使珠算筆算能夠打成一片，最好的方法也是互相證驗結果。而且珠算筆算互相証驗，不但能收聯絡之效，還可提起兒童的學習興趣。

4.『斤兩法的利用。筆算裏的斤兩法最易和珠算聯絡，我們應該

盡量利用。利用的方法頂顯明的是指定若干問題，使兒童用珠算解決。

5.『珠算筆算教材互相銜接。……在可能範圍內珠算和筆算的教材要能夠互相銜接。因為假如某種方法兒童在筆算裏尚未學過，你教他去運算珠算，那麼題目尙且不了解，何來興味之可言呢？』

前邊說過珠算筆算聯絡的要點在乎互相參証，比較。隨時隨地都有聯絡的可能，當然聯絡的方法也不只周先生所提的五種。各位珠算教師若能「舉一反三」，「觸類旁通」，自己想出種種的方法並善為利用，結果一定會很好的。使兒童明瞭珠算筆算二者的基本算理和方法原是一致的，同時也了解二者在運算上的差異。如教學加法時，首要使兒童知道無論珠算上筆算上的加法，總是一樣的，不過因為用的工具不同，而運算上的步驟也就稍有差別，在筆算上計算時要從低位數算起，而在珠算上便要從高位數算起。然而無論如何，加法總還是加法，二者根本上還是一件東西。教師常存着這個觀念，總是從這個觀點去教兒童，自然就可使兒童的數學知識成了一個統一的整體，不致成為珠算筆算兩個隔離了的體系。其實珠算上一切的算法都可用筆算的算法去說明，使二者相互參証，比較。譬如珠算上的「歸除」似乎和筆算上多位除法的算法差得很遠了，然而曹日昌（參考 8）在另一篇文章裏討論過，證明二者原無二致，其他更無庸論了。

## VI 珠算筆算分教合教實驗的研究

珠算和筆算混合教學效率大呢？分別教學效率大呢？在理論上當

然是前者優於後者，我們一向也是假定合教的效率遠勝於分教。但是究竟我們的假定對不對呢？即使是對，合教的效率又比分教的效率高多少呢？這些都有待於實驗的研究。這種研究已經有人開始了，很值得介紹一下：

浙江省立七中附小(參考2)在民國二十一年做了一個珠算筆算分教合教的實驗。他們在秋三級舉行珠算筆算混合教學，在秋四級舉行分別教學。在未開始實驗以前，在各級都舉行了一次初試測驗。在秋四級舉行的包含筆算和珠算兩種測驗，在秋三級舉行的只有筆算測驗(因為秋三級還沒有學過珠算)。初試測驗舉行以後，就開始了教學實驗。十二個禮拜以後，又舉行了一次覆試測驗，在這覆試測驗裏，每級都包有筆算測驗和珠算測驗兩種，每級的覆試分數和初試分數相比，求其差數，那級的差數大，便是那級的進步多；若是秋三級的進步多，便是合教勝於分教，反之，便是分教勝於合教。所得的結果如下表：

第一表 珠算筆算分教合教的比較

平均進步數				優勝點
分教組		合教組		
珠算	8.323	珠算	7.100	1.223
筆算	4.882	筆算	7.830	2.948

「表裏邊的數目，是把初試各人的總成績和這次覆試的總成績兩相比較，然後再把二組珠算的進步數各自相加，求得二組珠算的進步數，

末後除以各該組的總人數，即為表裏邊的二組的珠算平均進步數了。再用同樣方法，先把二組筆算的進步數相加，求出二組筆算進步數，末後也除以各該組的總人數，便求得二組筆算平均進步數了。這進步數就是……差數，平均進步數就是平均差數。……再將兩組珠算同筆算的平均差數兩相比較，就可求出二組筆算和珠算的優勝點。要曉得效率那組高，那組低，就可從優勝點一望而得了。」

「看了上面的優勝點」，似乎「珠算是分教好，筆算是合教好，二種方法可說是各有短長。」不過這種結果恐怕還有問題，因為在這個實驗中，幾種條件沒有控制。

1. 我們要實驗比較分教和合教的教學效率，須要除了教學方法以外，其他條件——學生智力，年齡，程度，教材，教師等——都完全相等，只變化教法一個因子，這樣纔可看出教法的差異對於效率的影響來。在這個實驗中，學生的智力，年齡，程度，教材，教師，都沒有控制，所以所得的進步的差別，不一定是教法差異的結果。

2. 合教因為種種原因未能順利進行。據報告上說，在分教組中是還按着原來的步驟進行。合教組就因為學生的「筆算珠算程度懸殊，窒礙進行，」只能「相機教學；因此合教機會很少，除了後來計算加減法時有些微的合教機會外，其餘差不多無合教可言。」這樣看來，分教是分教，合教大部也還是分教，自難比較分教合教的效率了。

3. 合教不但是機會少，就在僅有的機會中也沒有充分實行。據報告上說，所謂合教，大部是「一個問題用筆算的方法先列算式，再用珠算

計算結果；」或是「同一問題混用珠算筆算。」其實珠算筆算混合教學還不只這些。

4. 在分教合教兩組中，筆算珠算所佔的時間也不相等。在原報告上說：「分教合教兩組，總教學時間是相等的，而分教則珠算與筆算時間各佔一半，合教則因珠算筆算二者程度懸殊，很少機會合教，故時間大概筆算居多一點。」教學時間都不相等，自然更無法比較了。

5. 初試覆試用的測驗都是七中附小同人自己編造的，因為事實關係，沒有經過編造一個標準測驗所應經過的步驟。所以這些測驗，還有問題，測驗結果自然也就有了問題。

6. 即使測驗無問題，兩組進步的不同也是教法不同的結果，所得的平均進步數和優勝點也還有問題。因為這二者都是差數。在統計學上我們知道一個差數是否可靠，要決定於兩種測驗中分數的分配情形，和受測驗的人數的多少。在這個實驗中初試和覆試分數分配的情形和各級的人數我們都不知道，我們當然不敢無條件的信任平均進步數和優勝點的可靠性了。

有這六種理由我們差不多可以斷然的說，浙江省立七中附小做的這個珠算筆算分教合教的實驗的結果還有問題。不過即使這個實驗的結果完全不可靠，牠也有很大的價值。牠有一個歷史的價值，牠是第一個珠算筆算分教合教的實驗研究，牠激起我們對於這個問題做實驗研究的興趣。我們批評牠，是指出牠沒有顧到的地方；間接的就是告訴大家說，對於這個問題雖然已經有人開始了實驗的研究，然而可靠

的結果還沒有得到，今後還需要繼續的作嚴正的，科學的，實驗的研究。

## VII 總結提要

在本章內所討論的問題是珠算和筆算的「混合」與「聯絡」。「混合」和「聯絡」不只是程度的差別，而有根本的不同。所謂「聯絡」，自然還是珠算和筆算成兩個系統，不過二者之間發生極密切的關係罷了；所謂「混合」，則根本是一個系統。這雖然是很淺近的道理，以前的人却似乎都沒有分清這一點。大家似乎是以爲一節時間內既教學珠算，又教學筆算，便算是混合教學。其實這是不對的。在一節時間內先教珠算後教筆算，或先教筆算後教珠算，二者還是兩個系統，絕對稱不起混合教學。所謂混合教學，是要把珠算筆算完全打成一片，學生的手中同時拿着算盤和筆紙。在算盤的一檔上撥一個上珠一個下珠，就在紙上練習寫「6」字。在這裏不但分不開那是珠算教材，那是筆算教材；也分不開什麼時候是在教珠算，什麼時候是在教筆算，二者完全是一個系統，可以放棄珠算筆算的名稱，直稱「算術」。——今後要談混合教學，應當先把「混合」的意義弄清楚。

總結起來，在本章討論過的約有五點：——

1. 珠算筆算應當實行混合教學，這樣才可使兒童的數學知識成一個統一的整體，在不同的情境下作不同的應用。
2. 珠算筆算教材本不應該分開，不過在現在的小學課程標準之下，珠算筆算不能同時開始學習，所以教材的分配就感到困難。

3. 教學時間也和教材一樣，本不應該分開那是珠算教學時間，那是筆算教學時間，不過在現在的小學課程標準下，分配也有困難。

4. 如不能實行混合教學時，珠算筆算即宜取密切的聯絡，聯絡的要點在「參證」與「比較」。

5. 珠算筆算分教合教實驗的研究已經有人開始，不過還沒有得到確切的結論，今後還須繼續努力。

#### 本章參考

1. 笑留（民國七年）：小學珠算筆算同課練習之商榷。中華教育界，第七卷第六期。
2. 浙江省立七中附小（民國二十一年）：珠算筆算分教合教的試驗。浙江教育行政週刊，第三卷第四十四期（總第一四八號）。
3. 周元讓（民國二十二，三年）：珠算教學的實際問題。蘇揚中小校刊，第七卷第八期，99—100頁；第七卷第十期126—127頁。
4. 許用賓，沈百英（民國二十二年）：復興算術教科書。商務印書館。
5. 糜子輝（民國二十二年）：對於珠算與筆算混合教學的商榷。兒童與教師，第八期，365—367頁。
6. 朱時隆（民國二十三年）：小學珠算教學的我見。進修半月刊，第三卷第十七期，48—49頁。
7. 高橋小學（民國二十三年）：筆算與珠算混合教學的研究。南昌小學界，第一卷第二期，三期合刊，49—52頁。

8. 曹日昌 (民國二十三年)：在北平市小見到的珠算教學與建議。天津大公報，明日之教育，第二十三期(六月十一日)。
9. 黃澆白 (民國二十三年)：民校算術教學問題的商榷。教育與民衆，第五卷第十期，37—49頁。
10. 陳耿光 (民國二十四年)：筆算珠算混合教學法。黎明書局。
11. 張仲弢 (民國二十四年)：珠算教學之我見，小學教育月刊，第三卷第一期，14—18頁。
12. 黃炳華 (民國二十四年)：談談鄉村小學珠算教學。教師之友，第一卷第十期，1491—1495頁。
13. 莊伯倫 (民國二十四年)：小學各科教學述要，(三)算術科、三、珠算教學要點。武進教育月刊，第八十七、八十八期合刊，18—31頁。
14. 蔣霖 (民國二十四年)：珠算教學的小貢獻。江蘇小學教師半月刊，第二卷第十期，7—9頁。

## 第二章 教具——算盤的改良

I 引言	23
II 普通算盤	23
III 大算盤	34
IV 總結提要	37

### I 引言

珠算科的教具不只是算盤，凡是用以幫助兒童了解數量的概念和運算的步驟的工具，都是珠算科的教具。不過這些東西不是珠算科所特有的，在筆算科中也是一樣的，或者更為廣泛的應用，關於這些東西的運用，在普通算術教學法的書籍中討論的已經很多了，不必再在這裏重事敘述，所以我們現在所要討論的只是珠算科所特有的教具——算盤。

在珠算課程中所用的算盤有兩種：一種是演算時用的普通算盤，一種是教師講解時用的大算盤，現在我們分別討論如下。

### II 普通算盤

一個普通算盤含有兩重的性質，就日常應用的觀點說，牠是一個計算的工具；就珠算教學的觀點說，牠是一個純粹的教具。就一個計算的工具說，牠愈能便於計算愈好；就一個純粹的教具說，牠愈能利於學生的學習運算愈好。這似乎是我們所持的觀點不同，對牠的要求也就有了差別。其實算盤還是一個算盤，便於計算的也就是利於學生

學習運算的，學生在學習時使用的也應該就是便於計算的，所以這兩個觀點實在是分不開的。我們在從教具的觀點討論算盤時，還要先從計算工具的觀點把牠考查一下，看看我們這件多年來沿用的計算工具，在構造上是否已經盡善盡美了，若不然，我們又該如何改造牠，使牠成爲一個完美的計算工具，完美的珠算教具。

我國的算盤已經沿用很久了，似乎都沒有覺得牠怎樣不方便，然而仔細推敲起來，牠還有許多不很完善的地方，其笨笨大者有三：

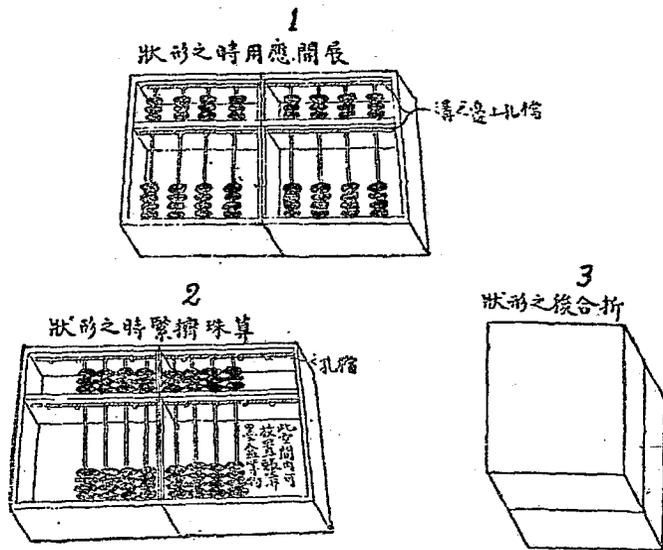
1. **攜帶不便** 算盤雖然有大有小，然而太小的不利於撥珠運算，所以應用的很少，普通應用的，總是寬五六寸，長一尺以上的。這雖然也算不了什麼大東西，然而在「文房」各「寶」中，却是「龐然大物」了。因之牠就有了一個毛病，「笨重」，攜帶不便。小本商人，旅行收賬，走讀學生，往返攜帶，都感到算盤是個累贅。然而有人提議改良算盤使之便於攜帶，還是近年來的事情。

徐德春先生(參考3)提出爲改良通行算盤的「笨重」與攜帶不便的毛病，最好是把「牠的榫梁算珠等改良」，使能「自由拆卸，自由裝配。」徐先生只是做了這樣一個提議，並沒有真的造出一個改良的算盤來。閻生夫先生(參考12)提議「爲逐日就學之學生計，」可以把算盤的體積縮小，「以便攜帶而利教學。」對於閻先生的提議我們不能完全同意，因爲算盤太小了，固然便於攜帶，但是算珠太小運算時却不方便。

曹日昌(參考10)也曾提出改良算盤的問題，動機和徐德春先生的一樣，覺得現在沿用的算盤攜帶太不方便。曹日昌設計了一個算盤

(見下第一圖)。

### 第一圖 曹日昌設計之算盤



在這個算盤中，周圍的邊或框增高，突出算珠兩三分，以恰不妨碍手的撥珠動作爲度。在上下框和橫樑插溜的孔上邊，再刻一溝，使檔帶着算珠能左右移動。這樣若把各檔都向算盤的中央移動一下，互相擠緊，在兩端就可留下空的地方，可以放置筆，墨盒，賬簿等零星物件。算盤的底是兩節的，在橫樑上裝有「荷葉」，這樣可以把算盤摺疊起來，成一個匣子的樣子，裏邊盛着筆，墨盒，賬簿等物，恰合一個小本商人旅行收賬時的需要。就在走讀的小學生，若能把算盤摺疊起來放在書包裹，也容易攜帶，並且算盤能成一個匣子的樣子，裏邊

能盛筆，墨，小刀等零星物品，更是方便的很。只是這種算盤在應用時，先要把牠打開，把裏邊的東西拿出來，再把檔珠擺好，才能應用，這都需要相當的時間，恐怕是這種算盤的一個缺點。

曹日昌最近又設計了一個算盤，在攜帶上更爲方便。在這個算盤中，邊和底都沒有，只在每檔的上下兩端有一個頂頭，妨止算珠滑脫。檔和算珠和普通算盤的相同，不過檔最好是用鐵質的，以圖堅固。橫樑是鈹鏈做的，用時展開成一個算盤的樣子，不用時捲起來成一束的檔和算珠。這樣普通一尺多長，五六寸寬的算盤，就變成五六寸長，直徑兩三寸的一個圓柱體了。這種攜帶時是方便極了，只是橫樑要用鈹鏈做，成本恐怕要大，難以推廣。

也許有人說這種改良是不必要的，因為中國的算盤就無須乎攜帶。算盤是極普遍的東西，走到什麼地方都有算盤可以借用，萬一借不到的時候，還可以用銅板，石子等物代替。這在旅行的商人是對的。不過也不能因爲有勉強可以補救的方法，就忽略了牠的笨重的缺點。並且在走讀的小學生，算盤却是一定要攜帶的，若能把牠改成一個輕便的東西，對於小學生更是方便的很。所以若從教具的觀點來看，這種改良也是必要的。

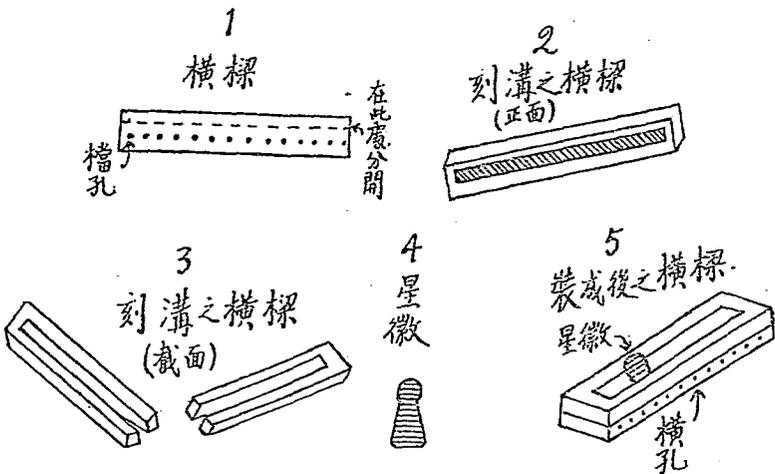
2. **缺少定位星** 在普通商人用珠算時用到點子定位的時候很少。商人用算盤也和我們用滑尺一樣，只是用牠求應得的數字，至於單位早已在心裏計算好了。譬如一個布商，賣了一丈六尺布，每尺價洋八分，他拿起算盤計算的時候，中心早已想好了，「共該一塊多錢」，

等到算盤上的「一二八」出來以後，他不用點子定位，就知道是一元二角八分了。這在小學生就不成，小學生沒有預先想出單位的能力，必須就結果考核，才知道單位的所在。在珠算上點位最重要的兩部手續是：記牢被乘數或被除數的單位所在的地位（在加減法中則為被加數和被減數），和尋找乘積或商數的單位應在的地位。記牢了被乘數或被除數的單位所在的地位，便容易找到乘積或商數的單位應在的地位；若先找到了乘積或商數的單位應在的地位，並且記好，則不記被乘數或被除數的單位所在的地位亦可。在撥上被乘數或被除數而尚未運算的時候，被乘數或被除數的單位是在算盤上明明的擺着，不過若把牠的地位記好，運算過後再根據牠來求乘積或商數的單位，在小學生便不是一件容易的事；在撥上被乘數或被除數而尚未運算的時候，先找將來的乘積或商數的單位應在的地方，也很容易，不過若把牠記牢，等運算完畢時再根據牠去點位也有些困難。所以在教學珠算的時候，應該用一種方法，幫助學生記憶被乘數或被除數的單位所在的地位，或將來乘積或商數的單位應在的地位。普通用的方法是給兒童一塊粉筆，使他在撥上被乘數或被除數以後在牠的單位的檔上作一個記號，或是在撥上被乘數或被除數以後，便找將來的乘積或商數的單位應在的地方，找到了，在那裏記一下。這個方法自然很不完善，因為計算不同的題目時，被乘數或被除數和乘積或商數的單位都不見得落在一個地方，若勉強使牠們落在一個地方也很不自然，否則往返塗擦，更不方便。所以不知在算盤自身上有一個機制，可以來回移動，以

做各單位的標記。且幸張顯光先生(參考 2)在民國六年時就已經給我們想出這個方法來了。

張先生提出的方法是在算盤橫樑上裝設「單位星徽」。裝設的方法也很簡單，就是先把算盤的橫樑縱分為上下兩部(第二圖 1)，在上部中間刻一條通穿的，上狹下寬的縱溝(第二圖 2,3)。再用金石或木料造一個上部為球狀，下部為圓椎體的星徽(第二圖 4)，嵌入溝中，使球狀的頭部突出溝外，再把橫樑的上下兩部合而為一(第二圖 5)，裝

第二圖 張顯光設計之徽星裝置



在算盤上，就成了一個有星徽的算盤了。這星徽是可以左右移動的。在計算乘除法的時候，撥上被乘數或被除數以後，便根據乘數或除數的位數找將來的乘積或商數的單位應在的地方，找到以後，把星徽移到那一檔，然後運算，算出結果以後，有星徽的那一檔便是牠的單位。

在計算加減法時可用星徽標記被加數或被減數的單位，因為那也就是將來的和數或餘數的單位。在有小數的算題中用星徽作小數點，那更是便利的很。所以有了這一個星徽，點位的問題便簡單多了。

算盤上的星徽是很必要的，二十二年健民先生(參考 4)也曾提議在算盤上添設「星點」(就是星徽)，裝置的法子大概也和張顯光先生說的差不多。不過在我們看來，裝設星徽大可不必像張先生說的那樣費事。隨便用幾塊鉛鐵，打成鞍形的樣子，卡在算盤的橫樑上，使牠不易脫掉且能左右移動就成功了。各種計算機上標誌單位的東西都是這樣做的，張健先生(參考 11)也提議這樣做。還有，星徽若只有一個，有時候要不夠用。譬如計算複名數時，就需要好幾個標誌單位的東西。所以若裝置星徽時，就無妨多裝置幾個。

閻生夫先生還提議「利用盤之四邊裝製種種活動數碼，以便記數，利用盤中之樑製定種種標準單位，以便記位。」什麼樣的「活動數碼」，什麼樣的「標準單位」，閻先生沒有說明白，我們不知道。據我們猜，閻先生所說的「標準單位」大概是固定在樑上的，這樣就不如星徽來的便利了。

3. 算珠分配不當 現行算盤最大的一個缺點，就是算珠分配的不當，以致計算某種問題時常發生困難。在現行的算盤裏，有兩個上珠，五個下珠。一個上珠當五個下珠，記 5 的時候總是用一個上珠，下珠只是用以記 1 至 4 各數的，所以下珠只有四個便儘夠了。左一檔裏的珠總是十倍於右一檔裏的珠，記 10 的時候都是上進左一檔用一個

下珠，所以一檔的珠只是用以記1至9各數的，所以有一個上珠(當五)四個下珠(各當一，共四)就儘夠了。壽孝天先生(參考1)早就看到了這一點，民國三年的時候壽先生便在商務印書館造成一種「壽氏加減算盤」，其中便是一個上珠，四個下珠，因為這樣做加減法儘夠用的了。

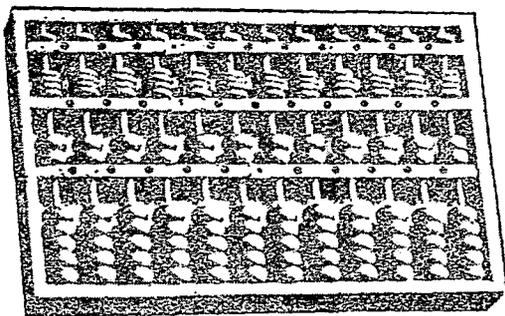
在珠算的乘法中，被乘數的位某數沒有用乘數的各位數都乘完以前不能和乘積相混，乘積都要記在這一位的下面；在除法中，被除數的餘數也不能和商數相混，前者也都要記在後者的右面。在現行的算盤中一檔最高能記數到15(兩上珠當10下五珠當5)，然而有時乘法中在被乘數某位下的乘積，或除法中在商數某位下的餘數都會超過15以上。如 $99 \times 99 = ?$  和  $980 \div 99 = ?$  兩題，都會發生這種情形。普通補救的辦法，就是拿頂上一珠暫時記10用，這叫做「頂珠當十法」。或者在心中虛擬一個當五的上珠，默默的記着，這叫做「默記一珠法」。這兩種方法用起來都不很方便，並且容易鬧錯誤。假使普通的算盤上再添上一個上珠，遇到這類的算題時便不致發生什麼困難了。這一點也是壽孝天先生最早看到的，隨着他的「加減算盤」壽先生在商務印書館還造了「壽氏乘除算盤」。其中便是上珠三個，下珠四個。壽先生這兩種算盤雖然沒有怎樣流行，然而比起舊式的算盤來確是進步多了。

張顯光先生，張健先生和曹日昌(參考9)也都主張把算盤改造成上三珠下四珠的樣子。健民先生和唐海滄先生(參考9)主張只要上珠

一個，下珠四個的一種，健民先生和唐先生以為這樣算盤「於乘除時亦甚便利」，在我們看來，未必如此。兩個上珠還有時不夠用，何況一個？惠汝濱先生（參考6）則提議下珠四個，上珠兩個，在上珠之上再加一道橫樑，橫樑上邊再加一個珠，叫做「天珠」。下珠當一，上珠當五，天珠當十。這樣每檔四個下珠，兩個上珠，一個天珠，共可記數到24。惠先生這個提議不免有些「過火」。計算時在一檔裏要記的數目最高不能超過18，所以用壽先生的辦法就儘夠了。惠先生提議減一個下珠，在上珠之上另增一珠，是對的，不過把這個新增的珠另放在一道橫樑之上，定名「天珠」，當十之用，就有些「大可不必」了。

除了上述三點——攜帶不便，缺少定位星徽，算珠分配不當——之外，現行的算盤還有一個小的不方便的地方，就是有時不敷用。現行的算盤大約都是十三檔或十七檔的，而前一種更為普遍。這十三檔的算盤在計算簡單的題目時，不成問題，若計算繁複的算題時就有些不敷用了。如計算較繁的乘除題目，便很難在這樣小的算盤上並列上被乘數和乘數，或被除數和除數。若把檔數加多呢，則二數並列，佔很長的一排，計算時也不方便。為彌補這個缺點，金劍清先生（參考8）「發明」了一種雙重的算盤。每個算盤分為「本」「輔」二盤，輔盤連於本盤之上。本盤每檔七珠，上二下五，質料比較堅厚，專供運算之用；輔盤每檔五珠，上一下四，質料較薄，專供記數布式之用。三道橫樑上，都有星徽。整個算盤如第三圖。

第三圖 金氏新式算盤圖



在計算加減法時，便把被加數或被減數列在本盤上，加數或減數列在輔盤上；計算乘法時，便把被乘數或被除數列在本盤上，把乘數或除數列在輔盤上。用這個算盤計算開方，更是便利的很。還有一點，金先生自己沒有指出，我們覺得倒是這種算盤的最大的優點，就是能記臨時的結果。譬如有一算題，須要算好幾步才能得到需要的結果，算出第一步的結果時，還算第二步。在普通的算盤上這第一步的結果便沒處記存，只好另寫在一張紙上。在金先生的算盤上便可把牠記在輔盤上，再在本盤上計算第二步。所以金先生的算盤在做統計工作上最為有用。自然在這裏該指明的，就是金先生的算盤只能在辦公處或統計室應用，商人學生，往返攜帶是不合適的，因為牠更笨重了。

截止到現在，以上關於普通算盤的討論都是從計算工具的觀點出發的，這雖然也與教具問題有密切的關係，究竟不完全是個教具的問題。若純粹從教具的觀點來討論算盤，其中最重要的一個問題便是算

盤的大小與手指運動的關係。曹日昌（參考5）在另一篇文章裏曾經詳細的討論過這個問題，現在就把其中緊要的幾句話轉錄如下：

「珠算運算迅速與否，和手指的運動有莫大的關係。……要養成正確的手指運動的習慣，也只有在合宜的算盤上才可。兒童短短的手指，在大的算盤上運動永不會正確的，若在這時養成了壞的習慣，以後要想改變是很困難的。……很小的學生用一個特大的算盤，用大指撥下珠的末幾個的時候，食指和中指摸不到上珠；用食指或中指撥上珠的時候，大指又摸不到下珠的末幾個。……將近成熟年齡較長的兒童反用一個頂小的算盤，想撥一個珠，一動手便動了兩個，以致錯誤叢生，這樣如何能養成正確的手指運動習慣而計算迅速呢？」所以要  
求兒童學習珠算時能養成正確的手指運動習慣，應該給兒童預備下合宜的算盤，大小合乎他的手指。不過這也有些困難，「一方面沒有專為兒童做的算盤，一方面家家却差不多又都有一兩個算盤，兒童用算盤的時候家庭自然要他拿去，至於是否合用，家庭是不知道的。不過學校却應當注意到這一點，或由學校商諸商家專造一種為學生應用的算盤，和教科書一樣，由學生自己購買。不過這樣也恐怕有困難，因為學生家庭自己已經有了算盤，或者就不願學生再買了。所以不如由學校購置，分發給學生應用。好在這種情形在其他學科中是沒有的。若不用質料很好的東西，學校購置一二百具，也所費無幾。」

提到購買算盤，這裏又發生一個問題。算盤不比他種教具，他種教具，整個學校購置一兩份，許就夠了，而算盤則非每個學生一個

不可。現行的質料較好的普通算盤價錢總在一塊錢左右，最便宜的也要兩三角錢，在中等家庭當然不成問題，在破產的農民身上購買就有些吃力了。這在普及民衆教育上也未始不是一個小小的障礙。如何製造一個完美而經濟的算盤，也是很值得我們研究的。

### III 大算盤

在改良普通算盤上我們提出了六點：(1)改良算盤使之便於攜帶，(2)增設星徽，(3)重新分配算珠，(4)增設輔盤（與第一點衝突不能兼顧），(5)備製大小適合兒童手指的算盤，(6)製造經濟算盤。在這六點中，第一點和第五點和大算盤無關。因為大算盤大部是放在一個教室裏不動，至多也不過由一個教室搬到另一個教室，所以不發生攜帶的問題。大算盤是為教師指示算法時用的，兒童用的時候很少，所以不必顧及兒童的手指的大小。除了這兩點之外，其餘四點也是大算盤上的問題，好在這都可完全仿照普通算盤的辦法改造，裝置。所以一個較完美的大算盤，也應當裝上星徽，算珠的分配也應當是上三下四，也應該添設輔盤，也應該價值便宜。

說到製造經濟的大算盤，我們介紹兩位研究者想出的辦法，一個是顧其昌先生（參考13）想的，一個是錢鼎澄先生（參考7）想的，現在先介紹顧先生的辦法。

顧先生的辦法中最主要的一點，就是自己用棉花，碎皮，縫製珠算。先用木料照通行的大算盤備製邊框和橫樑，再截尺半長的15號粗鉛絲十七八根，做柱或檔之用。然後縫製算珠，縫製的方法如下：用

三方寸和兩方寸的兩塊白布，剪成大小兩個圓形。把大的白圓布用線縫一周，剩下兩個線頭，再用一塊適當的棉花中間包上一塊方形的舊皮子，放在大白圓布上，把餘下的兩個線頭用力一抽，打成死結，這塊白布自然就成了球狀的囊了，棉花包在裏頭。再把那塊剪好了的小白圓布蓋在這球狀的囊的口上，在四周縫緊，就成了一個圓形的算珠了。用同樣方法造一百多個算珠。取出五個染成紅的，五個染成黃的，五個染成藍的，五個染成黑的。在每個算珠的中央，鑽一個孔，穿在作檔的鉛絲上，和樞樑裝配起來，一個大算盤就成功了。在最右第一檔穿五個白珠，第二檔穿五個藍珠，第三檔五個黃珠，第四檔五個紅珠，第五檔五個黑珠，在這五檔都是上珠一個下珠四個。自第六檔起每檔穿七個白珠，上二下五。右邊五檔有色的珠，是為初學的兒童學習認數和進位用的。

顧先生設計的這個大算盤，沒有星徽，沒有輔盤，在算珠的分配也還是用的舊方法。自然這些在我們製造時都可以改良的，加上星徽，加上輔盤，把每檔的算珠改成上三下四，這都不費什麼事的。有了星徽以後，着色的算珠就可不要，因為有星徽做標誌，學習認數和進位也就夠方便的了。

錢鼎澄先生想的辦法，可說是更是「別開生面」的。做法是用一塊彷彿現行的大算盤大小的板子，仿照現行的大算盤的形式在橫樑和各檔的地位用黑漆劃上黑綫，作橫樑的劃粗些，作檔的劃細些。在每條檔綫上，「固定的，樑上釘四釘（兩釘近樑，兩釘貼邊），樑下釘八

釘或九釘，釘和釘間的距離要視所用的算珠的大小而定。」釘子都從板後釘入，板面露出釘尖，預備穿珠之用。記數的時候要記什麼數字，就往釘上穿幾個珠子。譬如要記15，就在一檔的橫樑下的釘上穿上一珠，再在下一檔橫樑上的釘上穿上一珠，就算成功了。所用的算珠不必特製，破舊算盤的算珠，甚至舊麻雀牌等物，當中穿上一個孔，也可應用。算珠最好用兩種顏色的，這樣在計算時或者清楚一些。如計算加法時，被加數一樣顏色，加數又一樣顏色，加在一起，和數顯然的是被加數和加數堆積起來的，兒童或者容易明白些。錢先生認為這是這個大算盤的最好的一點。

顯然的，錢先生想的辦法很像用銅板，石子等物代算盤時的辦法，不過前者加上了一塊板和穿算珠的釘罷了。這個方法誠然是很簡便了，不過恐怕不大切合實用。套上移下算珠的麻煩，很有可觀，一定會影響教學的效率。並且這個大算盤的樣子和兒童所用的普通的算盤相差太大，教師在這個大算盤上教示算法，是否學生就能在自己的普通算盤上照樣演算呢？這裏邊還包含着一個「學習遷移」的問題，要學生「類化」呢！還有錢先生提議用兩種顏色的算珠，並且錢先生以為這是很特出的一點，其實在我們看來，這個辦法也有不妥。在沒有進退位的算題中，或者可以應用，在有進位位的算題中，就毫無用處了。譬如 $5+5=?$ 一題，我們用一種顏色的算珠擺上了被加數5，可是我們要把加數的5加在被加數5上的時候，却不是在被加數的5上邊再堆上另一種顏色的代表加數5的算珠，而是要把被加數的5去掉，在左邊一檔另擺

上代表10的一個珠。這個珠用什麼顏色的呢？用和代表被加數的算珠一樣顏色的嗎？牠和被加數是不同的；用和代表被加數的算珠相反的顏色的嗎？牠和被加數也沒有處於相反的地位。這豈不是兩難？算珠上弄上兩種顏色，豈不是自找麻煩？所以還是不如用一種顏色的好。

錢先生想的辦法不可用，在經費困難的學校無妨應用顧先生的辦法。在經費充足的學校則無妨用比通行的更精緻的一種大算盤，這便是凌君平先生（參考14）的「彈簧珠算盤」。通行的大算盤有一個毛病，就是算珠轉運不靈（轉動太靈時，又要滑脫了）。凌先生想到改良這一點，於是造了一種彈簧算盤。在算珠內裝有鋼絲彈簧，用指力撥動，上下自如，隨處停止，不致下墮。據實業部獎勵工業技術審查委員會稱：「現時學校中之大算盤，或用毛柱，或用弦綫者，均不及其便利。」可見這是一種很好的大算盤了。

## VI 總結提要

總計在本章內提出的普通算盤改良的問題，約有六點；(1)改良算盤使之便於攜帶，(2)增設星徽，(3)重新分配算珠，改每檔上二珠下五珠為上三珠下四珠，(4)增添輔盤，(5)備製大小適合兒童手指的算盤，(6)製造價格低廉的算盤。

在大算盤上則只有：(1)增設星徽，(2)重新分配算珠，(3)增設輔盤，(4)製造價值低廉的算盤，四點。

### 本章參考

1. 壽孝夫（民國三年）；改良算盤說。教育雜誌，第六卷第七號，

85—89頁。

2. 張顯光(民國六年)：珠算教授之一得。教育雜誌，第九卷第三期，53—60頁。
3. 徐德春(民國二十二年)：珠算口訣改用手語法的一個嘗試計劃。浙江教育行政週刊，第五卷第七期(總二一五號)。
4. 健民(民國二十二年)：怎樣教學珠算。蘇揚中小校刊，第六卷第七期，54—56頁。
5. 曹日昌(民國二十三年)：在北平市小見到的珠算教學與建議。天津大公報，明日之教育，第二十三期(六月十一日)。
6. 惠汝濱(民國二十三年)：小學珠算教學的一得。江蘇小學教師半月刊，第一卷第二十三期，20—30頁。
7. 錢鼎澄(民國二十三年)：自製大算盤的又一法。進修半月刊，第三卷第二十三期，43—44頁。
8. 金劍清(民國二十四年)：金氏新式算盤說明書。科學的中國，第五卷，第二期3—8頁。
9. 唐海滄(民國二十四年)：改革小學珠算教學芻議。進修半月刊，第四卷第十期，6—11頁。
10. 曹日昌(民國二十四年)：二十年來國人對於珠算的研究述要。中華教育界，第二十二卷第十期，43—53頁；第十一期，29—36頁。
11. 張健(民國二十四年)：怎樣研究珠算。青年界，第七卷第三

期，19—24頁。

12. 閻生夫(民國二十四年)：珠算教學之理論與實際。河南民衆教育，創刊號，41—52頁；第一卷第二期，61—77頁。
13. 顧其昌(民國二十四年)：兩種算術自製教具。江蘇小學教師半月刊，第二卷第十二期，36—38頁。
14. 凌君平：彈簧珠算盤，商務印書館經售。



## 第三章 記數和撥珠

I 記數	41
II 撥珠	45
III 總結提要	53

### I 記數

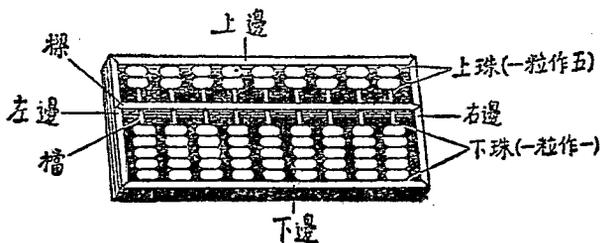
現在我們討論到珠算學習上最基本的兩個步驟，記數和撥珠。不幸的就是據作者所知，在這兩方面還沒有一個人做過實驗的研究，所以在本章內只能指示在這兩方面的學習所應根據的原則，和一些「理想」的辦法，給讀者一個可供試驗的「假說」。

在小學內，開始學珠算大都是在四年級，在民衆學校，學生的年齡更大，對於「數」的觀念大都很明晰了，這層我們不必顧慮了，所以我們的討論就以珠算的「記數」起。

算盤的算珠有上珠下珠的分別，每一下珠當「一」，每一上珠當「五」。記1至4各數的時候，記「幾」就用「幾」個下珠。到了記5的時候，就不用五個下珠了，而用一個上珠；記6的時候，也不用六個下珠（算盤上也無六個下珠可用），而用一個上珠，一個下珠。以上至7，8，9各數，都是上下珠兼用。普通第一次教學珠算時，或是珠算教科書的第一課，都是就只告訴學生，「算珠有上下之別，上珠一粒當五，下珠一粒當一」，就算完事了。以後立刻就開始教學生記數運算。譬如商務復興算術教科書（參考3）珠算的第一課（第七冊第九頁）

的教材就是如下排列的：

### 算盤的式樣



### 定位的方法

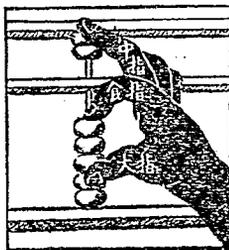
「運算時可先認定任何一檔作單位，在單位左一檔是十位，左二檔是百位，左三檔是千位，個，十，百，千，位置的排列和筆算一樣。」

### 撥珠的方法

1. 大指管下珠的撥上。
2. 食指管下珠的撥下。
3. 中指管上珠的撥上和撥下。

「把下列各數撥在算盤上：

12, 35, 94, 123, 504,  
670, 3241, 2304, 3005, 4050」



這樣略說明一下算盤各部的名稱，就講定位的方法，撥珠的方法，隨即立刻教兒童在算盤上記數，並且一開首就是兩位以上的數，這在年齡較長或智力特高的兒童，或者不成問題，若在年齡較小或者

智力平庸的學生，或者就感到困難了。本來嗎，在日常生活中，總是一件當一件，在筆算上都是「十進」，為什麼到了珠算上忽然又跳出「五進」來了呢？「一個」上珠要當「五」？記 5 的時候要用「一個」上珠；記 6 的時候要用一個上珠，和一個下珠呢？這在年歲幼小或者智力平庸的，並且以前也沒有學過珠算的兒童，不能不算是一樁怪事。為要使他們能澈底明瞭，記憶堅固，我們應當多分幾個步驟來教。那又怎樣辦呢？我們提議採用下述的幾個步驟：

第一步使兒童明瞭「一對一」或者「一個當一個」實在是一個笨的辦法。在年歲幼小的兒童，無妨就真的讓他們這樣做一次，使他們能切實的感到「一對一」的不妥當。譬如可把學生分成兩組，做一種有勝負分數的遊戲。給他們一個算盤，讓他們在算盤上記着各組的分數。兒童還不知道珠算上記數的方法，自然就以一珠記一分。這樣記的分數多了，在算盤撥上了好多算珠，核算結果時還得一個一個的去數，這時教師就暗示給他們：「這種記法多麼笨呢？假使能用一個特殊的珠（比如說樑上的珠）當五，那末記 5 的時候就用這樣一個珠；記 6 的時候就用這樣一個珠，和一個普通的珠（比如說樑下的珠），不是就方便多了嗎？」

第二步就用實物證明，使兒童能確實明瞭「五進」的事實。在都市的小學中，可用鈔票說明。教師預備一張五元的鈔票，五張一元的鈔票，在講算盤上上下珠的值的時候，就拿出鈔票來說明：一個當五個的事情是很普通的，比如鈔票吧，有一元一張的，要用一元的時候，

就拿一張，用兩元的時候拿兩張，用三元的時候拿三張，用四元的時候拿四張。用五元的時候自然可以拿五張，不過這樣有些麻煩了，所以銀行裏又印出五元一張的，那末用五元的時候，就不用拿一元的五張了，可拿五元的一張；用六元的時候也不必拿一元的六張了，可拿五元的一張，和一元的一張；用七元的時候，便用五元的一張，一元的兩張；以至八元九元，也都可拿五元的一張，一元的三張，或四張。在算盤上也是一樣。下珠好比一元一張的鈔票，上珠好比五元一張的鈔票，所以記1的時候就用一個下珠，記2的時候，就用兩個下珠，記3的時候就用三個下珠，記4的時候就用四個下珠。到了記5的時候，我們就不必用五個下珠了，而用一個上珠；記6的時候，用一個上珠，一個下珠；記7的時候，用一個上珠，兩個下珠；以至記8記9，也都是用一個上珠，三個或四個下珠。在鄉村小學中，鈔票若一時不容易找，若有當五的銅元和銅錢，也是一樣好。再不然就用其他細小的東西也可以，譬如火柴，就可應用。取十根火柴，取出五根來，捆在一起，那末1就是一根，2就是兩根，3就是三根，4就是四根，5却不是幾「根」，而是一「捆」。6是一捆和一根，7是一捆和兩根，8，9也是這樣。拿一「根」比下珠，一「捆」比上珠，也可一樣的說明珠算上的「五進」的事實。

第三步，在兒童會在算盤上記1至9各數時，就教九以內的加法，減法，以至加減法。這樣不但學生是學了記數，並且也就正式開始了學習運算。至於九以內的加法，減法，加減法的教材的組織，和練習

的分配，將在第五，第六，和第十一，三章內敘述，此處暫且不講。隨着加法，減法，加減法，的教學的歷程前進，兒童自然就學會記9以上各數了。

## II 撥珠

在算盤上撥珠，本來有一定的方法：就是大指管撥上下珠，食指管撥下下珠，中指管撥上和撥下上珠。若不照這種方法撥珠，一定不能運算得快。所以學習珠算時，要養成正確的撥珠習慣，是非常重要的。說到這裏，就立刻發生了一個問題，究竟應該在什麼時候教學撥珠的方法呢？

據一般珠算教科書的編輯者（如許用賓沈百英先生等，參考3）和一些專家（如周元讓先生，參考2；秦啟文先生，參考7）的意見，都以為應該在最初教學，所以無論那部珠算教科書，或是專家擬的珠算教材綱要，「開宗明義」第一章總是撥珠的方法。一般教珠算的教師也都是抱這種意見，因為很少見教師在最初不給學生講撥珠的方法的。這種意見對不對呢？我們想來還有問題。

曹日昌（參考5）由清華大學心理學系的介紹，參觀過許多小學的珠算教學，見到的學生，有正確的撥珠習慣的很少。然而在各班上最初都會鄭重的講過撥珠的方法，只是只講了一次以後很少重複罷了。這足以表示在最初便講撥珠的方法，而以後不再繼續的重複是沒有多大效用的，學生很難因一次的說明就養成正確的撥珠習慣。

打算盤，就其大部是手指運動來說，很有些像西文打字，我們可

以藉學習打字的事實來討論珠算撥珠的問題。普通西文打字有兩種方法：一種叫做「視覺法」，一種叫做「觸覺法」。所謂視覺法，就是眼睛看着字母的鍵，要打那一個字母的時候，先用眼看準那個字母的鍵，再用手指去按牠。所謂觸覺法，就是眼睛絕對不看着字母的鍵，把打字機上四十幾個鍵分配在十個手指上，每個手指一定管那幾個鍵。要打那一個字母的時候，便動那一個鍵。兩種方法比較起來，觸覺法算是正當的方法，若求能打得快，非用觸覺法不可，用視覺法是很少有希望的。普通才學打字的時候，若有深有打字經驗的人作指導，他一定讓用觸覺法，因為這是正當的方法，也惟有用這種方法才可以學得好。若才學時沒有人指導，自己亂試的，大半用視覺法，因為這種方法比較容易，不必死記那個手指管那幾個鍵。可是若只用這個方法，很少有學好的希望。不過布克教授(參考1)曾詳澈的研究過打字的學習，他發現最初用視覺法，打了幾次以後便改用觸覺法，結果，自然比始終用視覺法的好得多，就是比始終用觸覺法的也不在以下，甚至還要好些。曹日昌個人才學打字時，也是這樣學的，就是先用視覺法，過了幾天又改用觸覺法，自信結果也很好。為什麼？

打字，除了打一個一個的字母以外，還有許多事情。怎樣上紙，怎樣打大寫，怎樣留空白，……這都是和打一個字母是一樣重要的事，並且也是要一開始就要學會的。開始學習打字時，要學做這些事情，又要牢記那個手指管那幾個字鍵，工作的確有些太難了。一開首便把工作弄的太難了，是不利於學習的。如果開始用視覺法，學習的人暫

時不必死記手指和字鍵的關係，只從事練習其他工作，等到對於打字機的各部的運用都有相當的熟練以後，再改用觸覺法，去記手指和各字鍵的關係，這樣把不同的工作分在不同的時間去學習，使學習的人不致在一開始便感到很大的困難，所以對於學習不但沒有害處，還許有些好處。

用觸覺法打字，就好比用正確的撥珠方法打算盤，用視覺法就好比用不正確的撥珠方法。自然要求算盤能打的快，非用正確的撥珠方法不可，不過照兒童自然的趨勢，恐怕一定不按這種方法，大都是只用一個食指。若告訴他要一定用那個手指撥那些算珠，他一定感到機械而困難。兒童才一學珠算，最重要的還是記憶上珠當五，下珠當一，怎樣把下珠化為上珠，怎樣把上珠化為下珠，一些工作，這時若還要求他撥珠也要按一定的方法，他或許也就會感到工作太繁雜，對於學習有了不利的影響。所以我們以為不如把撥珠的方法移到稍後教學，使兒童才學珠算時致全力於下珠化上珠，上珠化下珠的一些工作。至於他怎樣撥珠，暫時不管他，讓他任意去做，等到這些工作都練習的有相當純熟以後，再教他正確的撥珠的方法，以後還繼續不斷的重複指導，不許他有非正確的手指運動。我們這個對於撥珠方法學習的時期的主張，完全是由理論和間接的經驗推論出來的，是否有當，還要以後直接的實驗結果去證實。

關於撥珠，除了撥珠方法學習的時期的問題以外，還有三個問題，也值得提一下：第一是左手撥珠的問題。在商業界有些特殊的人

才，能用左手撥珠運算，這樣他可以用右手拿筆記錄，用左手撥珠運算，在結算賬目時是便利的很。蔣霖先生(參考11)等主張在學校最好也訓練學生，使他們也能用左手撥珠運算。黃炳華先生(參考8)還說他曾經實驗過，最初學習珠算時就用左手的，結果比用右手的計算還敏捷。所以開始學習珠算時應當訓練兒童用左手。但是依我們看來，這還有考慮的餘地。在一向就用左手的學生，這無問題；在一向沒有用左手的習慣的學生，若訓練他用左手撥珠運算，開始一定很困難，恐怕是「得不償失」，所以還是不訓練為妙。唐海滄先生(參考6)也不主張用左手。

第二個問題是多個手指活動的時間的因子。譬如要在算盤上記6，手指的活動是用中指撥下一個上珠，用大指撥上一個下珠，這時是中指大指同時活動呢？還是一前一後呢？又如計算 $4+1=$ ？這個題目，手指的活動是，用中指撥下一個上珠，用食指撥下四個下珠，這時是中指食指同時活動呢？還是一前一後呢？在這兩種情形之下，珠算熟練的人大部是兩個手指同時活動。又計算 $2+7=$ ？一個問題，手指的活動是，用中指撥下一個上珠，用大指撥上兩個下珠，這時有的人便是先動中指後動大指。又如計算 $9+3=$ ？一個問題，手指的活動是，用中指撥上一個上珠，用食指撥下兩個下珠，用大指在左一檔撥上一個下珠，這時大部分的人是先動中指，後動食指。又如計算 $4+3=$ ？一個問題，手指的活動是，用中指撥下一個上珠，用食指撥下兩個下珠，這時幾乎所有的人都是兩個手指的活動一前一後，先動中指，後動

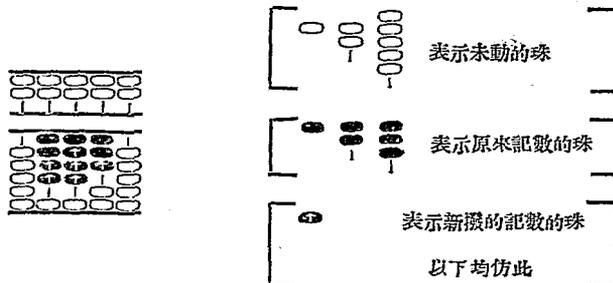
食指了。其實在這第三，四，五，三個例中的情形，也和第一二兩例中的情形差不多，在後者能兩個手指同時活動，在前者也可以兩個手指同時活動，在計算時兩個手指同時活動自然比一前一後迅速的多，所以我們訓練學生撥珠，應該教他們在所有的這些例子的情形下都要兩個手指同時活動。

和這一個問題連帶着的一個問題，就是無名指利用的問題。譬如在算盤上記85一數，照普通的辦法是，用中指撥下一個上珠，用大指撥上三個下珠，再用中指在下一檔撥下一個上珠。在珠算純熟的人大都是用中指和無名指同時撥下兩檔的兩個上珠，同時還用大指在其中前一檔撥上三個下珠。所以若能利用無名指，有時也很可以使運算迅速。因此在訓練兒童撥珠時，也大可使他練習運用無名指。還有人主張小指也要利用，不過小指比其他手指都短許多，在其他手指撥珠的時候，牠往往摸不到算珠，所以若想運用牠撥珠，必須加以特殊的訓練，恐怕也是得不償失。

第三個問題是撥珠練習的問題。撥珠的動作，分析起來，不外「上珠」，「下珠」，「退珠」，「進珠」四種。「上珠」是撥上下珠，「下珠」是撥下上珠和撥下下珠，「退珠」是撥上上珠和撥下下珠，「進珠」是撥去本檔的珠，撥上或撥下左一檔的珠。系統的練習撥珠，也就是系統的練習這上珠，下珠，退珠，進珠，四種活動。徐德春先生(參考3)在浙江省立金華中學附小編有加法的撥珠的系統練習材料，現在舉幾個例來看。

1. 上珠練習材料

(例)  $212 + 231 = 443$



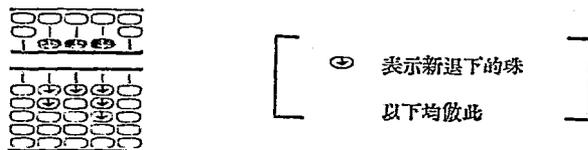
(1)  $123 + 321 = ?$     (2)  $231 + 201 = ?$  ..... (9)  $212 + 132 = ?$

(19)  $212 + 132 = ?$  ..... (49)  $252 + 225 + 512 = ?$

(50)  $155 + 512 + 232 = ?$

2. 下珠練習材料

(例)  $213 + 342 = 555$



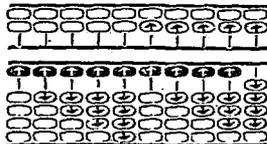
(1)  $212 + 143 = ?$     (2)  $342 + 213 = ?$  ..... (25)  $221 + 324 + 112 = ?$

..... (26)  $223 + 213 + 122 = ?$  ..... (49)  $213 + 244 + 141 = ?$

(50)  $312 + 133 + 116 = ?$

3. 退珠進珠練習材料

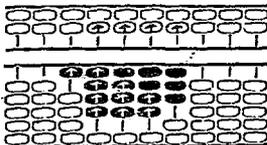
(例)  $123456789 + 987654321 = 1111111110$



- (1)  $678 + 987 + 445 = ?$  ..... (10)  $346 + 764 + 939 = ?$  .....  
 (20)  $459 + 331 + 749 = ?$  ..... (21)  $561 + 558 + 994 = ?$  .....  
 (40)  $933 + 655 + 518 = ?$  ..... (50)  $891 + 764 + 955 = ?$

4. 上珠進珠退珠練習材料

(例)  $5678 + 8765 = 14443$



- (1)  $627 + 987 = ?$     (2)  $548 + 866 = ?$     (3)  $483 + 167 = ?$  .....  
 (48)  $8577 + 7645 + 6539 = ?$     (49)  $6738 + 8676 + 6792 = ?$   
 (50)  $6792 + 8765 + 7686 = ?$

徐先生編的這加法撥珠練習材料，並不怎樣「系統化」。其中重複的地方很多，還有完全重複，兩個題目雷同的，如上珠練習材料中的第九和第十九兩題便是一例。還有許多沒有顧到的情形。所以徐先生編的這份材料，稱之為「練習材料」則可，稱之為「系統的練習材料」便有

些勉強。若編製某種活動的系統的練習材料，須先分析組成這種活動的「原子」，根據分析的結果，編製練習材料，每一個原子都能顧到。拿加法的「上珠」練習來說。上珠時可以上一珠，兩珠，三珠，四珠。上一珠時，原來在算盤上記的數（被加數），可以為0，為1，為2，3，5，6，7，8各數；上兩珠時，原來在算盤上記的數可以為0，1，2，5，6，7各數；上三珠時，原來在算盤上記的數可以為0，1，5，6各數；上四珠時，原來在算盤上記的數可以為0，5兩數。所以在一位加法中，系統上珠練習材料應當包括下列各題：

$$0+1=? \quad 1+1=? \quad 2+1=? \quad 3+1=? \quad 5+1=?$$

$$6+1=? \quad 7+1=? \quad 8+1=? \quad 0+2=? \quad 1+2=?$$

$$2+2=? \quad 5+2=? \quad 6+2=? \quad 7+2=? \quad 0+3=?$$

$$1+3=? \quad 5+3=? \quad 6+3=? \quad 0+4=? \quad 5+4=?$$

其他加法的下珠，進珠，退珠；減法，乘法，除法的各種撥珠活動，也要用同樣的方法去編製練習材料，這些都要在第五，六，七，八四章內敘述，此處暫且不講。

此外還有一種通行的純粹練習撥珠的方法，也該提一提。這種方法是同時用中指撥下一個上珠，用大指撥上一個或兩個下珠；撥後，又同時用中指撥去剛撥下的上珠，用食指撥下剛撥上的下珠；撥後，又同時用中指撥下一個上珠，用大指撥上一個或兩個下珠；撥後，又撥去。如是循環繼續不已，直到練習者不願繼續為止。這種方法常在一半遊戲一半練習撥珠時用之，蔣霖先生主張四年級時應當用這種方

法作撥珠練習。以我們的眼光看來，這種方法太機械，就是用這種方法能撥珠迅速，也未必能在計算題目時撥珠迅速。所以若練習撥珠時，還是用系統的材料用計算題目的方式練習，比較妥當。莊伯儉先生(參考9)主張撥珠要和認珠記數同時教學，否則撥珠便成了盲目的機械的動作，和我們的意見也正相同。晏揚先生(參考10)主張應用遊戲競賽練習撥珠，值得考慮，但是如不和記數演題打成一片，仍不免如莊先生所說成了機械的動作，那就失了珠算練習的本旨了。

### III 總結提要

在本章討論的是記數和撥珠兩個問題。教學記數，應該分三個步驟：第一步，使兒童明瞭「一對一」或「一個當一個」實在是一種笨的辦法；第二步，用實物證實「五進」的事實，並練習記九以內各數；第三步，兒童會在算盤上記九以內各數以後，便開始教學九以內的加法，減法，以至加減法。隨着加法，減法，加減法的教學歷程前進，兒童自然就學會記九以上的數目了。

關於撥珠：1.我們主張撥珠方法移至稍後教學，以後還繼續不斷的重複，以阻止不良習慣的發生。

2.不是一向用左手的學生，不應該訓練用左手撥珠。

3.撥珠時以兩個或兩個以上的手指同時活動為原則，可以訓練使用無名指，小指不必應用。

4.練習撥珠，應該用系統的材料，以計算題目的方式練習。

本章參考
------

1. 美國布克教授：技術心理學等書。(原文係英文，中國無譯本)。
2. 周元讓(民國二十二年)：珠算教學的實際問題。蘇揚中小校刊。第七卷第八期，99—100頁；第七卷第十期，126—127頁。
3. 許用賓沈百英(民國二十二年)：復興算術教科書。商務印書館。
4. 徐德春(民國二十三年)：珠算不用口訣編造直接練習的系統材料之實驗研究。浙江教育行政週刊，第五卷第四十期(總二四八號)。
5. 曹日昌(民國二十三年)：在北平市小見到的珠算教學與建議。天津大公報，明日之教育，第二十三期(六月十一日)。
6. 唐海滄(民國二十四年)：改革小學珠算教學芻議。進修半月刊，第四卷第十期，6—11頁。
7. 秦啟文(民國二十四年)：珠算教學細目的商榷。教師之友，第一卷第九期，1331—1339頁。
8. 黃炳華(民國二十四年)：談談鄉村小學珠算教學。教師之友，第一卷第十期，1491—1495頁。
9. 莊伯綸(民國二十四年)：小學各科教學述要，(三)算術科、三、珠算教學要點。武進教育月刊，第八十七，八十八期合刊，18—31頁。
10. 晏揚(民國二十四年)：珠算的指法練習。教師之友，第一卷第九期，1340—1343頁。
11. 蔣霖(民國二十四年)：珠算教學的小貢獻。江蘇小學教師半月刊，第二卷第十期，7—9頁。

## 第四章 口訣問題

I 口訣的分析	55
II 口訣的改良	62
III 廢除口訣的試驗	74
VI 如何利用口訣	84
V 總結提要	88

### I 口訣的分析

人類常把一些複雜的事物或行爲，象徵化，成爲一些簡單的符號或語文。這樣不但可以節省許多精力，並可幫助記憶，使將來這個經驗容易復現，這是人類「行爲經濟」中最重要的一着。我們去參觀一個學校，看牠有多少實驗室，在看的時候，我們不企圖真的把那一個一個的房間都裝進腦子裏去，只輕輕的對自己說(或者說「想」)；「啊，五個實驗室。」(把複雜的事物象徵化，成爲簡章的語言。)參觀回來以後，我們對於那個學校的實驗室的數量，便會有個清晰的印象，「五個」。在年齡太小的兒童，或者低能的成人，不能運用這種象徵化的作用，在看的時候，只感覺到一座實驗室，又一座，又一座，……參觀回來，我們若問他那個學校實驗室的數量，他一定茫然不知。行爲主義心理學家說語言是記憶的基礎，就是這個道理。在數學上用2除10商5，若在珠算上演算這個問題，要把記被除數10的一個下珠撥去，另撥上一個上珠，代表商數5。把這一串的行爲(以2除10，去

代表10的下珠，撥代表商數5的上珠)象徵化，成爲一句簡單的語言，「二一添作五」。這便是珠算口訣。

過去珠算上一切的算法，都有口訣，所以要問珠算上一共有多少種口訣，這雖然不是一個絕對無法回答的問題，可是一時誰也說不上來。我們若把珠算上所有的口訣都拿來分析，不但太麻煩，也不必。我們現在只將幾種最普通的口訣：加法口訣，減法口訣，乘法口訣，除法口訣，斤兩口訣，加以分析，藉以明瞭口訣的性質。

1. **加法口訣** 加法口訣可以分爲四種：

一.  $2+1=?$   $3+1=?$  在這類題目中用的口訣是「上一」。第一個「一」字是指加數的1，「上一」是指運珠的方法，撥「上一」珠。閻生夫先生(參考27)稱這類的口訣爲「單口訣」。同類的口訣一共有九句，一上一，二上二，以至九上九。設若加數等於 $\zeta$ ，這類口訣的公式便是「 $\zeta$ 上 $\zeta$ 」。

二.  $4+1=?$  「一下五去四」。 「一」字指加數，「下五去四」指運珠的方法，撥下當五的一個珠，撥去當一的四個下珠。同類的口訣一共有四句。一下五去四，二下五去三，三下五去二，四下五去一。設加數等於 $\zeta$ ，公式便是「 $\zeta$ 下五去 $\zeta$ 」。  $\zeta+\zeta=5$

三.  $8+2=?$  「二去八進一」。 「二」指加數；「去八進一」指運珠的方法。所以稱「進」，因爲是要進上一檔的緣故。這類的口訣一共有九句，一去九進一，二去八進一，以至九去一進一。其中四句都各另有一句相似的，如「二去八進一」和「八去二進一」，所以也可以說是五

句。設加數為 $x$ ，公式為「 $x$ 去 $x$ 進一」。○ $x+x=10$ 。閻生夫先生稱二三兩類的口訣為「連口訣」。

四。  $8+5=?$  「八去二還三進一」。○「八」是加數，「去二還三進一」是撥珠方法。這類口訣一共有四句，九去一還四進一，八去二還三進一，七去三還二進一，六去四還一進一。設加數等於 $x$ ，公式為「 $x$ 去 $x$ 還 $n$ 進一」。○ $x+x=10$ ， $x+n=5$ 。這樣口訣，閻生夫先生稱為「複口訣」。

## 2. 減法口訣

減法口訣大部和加法口訣是對稱的，為避免累贅，只將每種的舉例，數目，公式，列下，再稍加說明。

一。「一去一」，共九句，一去一，二去二，以至九去九。公式：「 $x$ 去 $x$ 」。這類的口訣閻生夫先生也稱為單口訣。

二。「一上四去五」，共四句，一上四去五，二上三去五，三上二去五，四上一去五。公式：「 $x$ 上 $x$ 去五」。○ $x+x=5$ 。

三。「二退一還八」共九句，一退一還九，二退一還八，以至九退一還一。如果減去類似重複的便是五句。公式：「 $x$ 退一還 $x$ 」。○ $x+x=10$ 。二三兩類閻生夫先生也稱為「連口訣」。

四。「八退一還五去三」，這類口訣閻生夫先生也稱為「複口訣」。共四句，九退一還五去四，八退一還五去三，七退一還五去二，六退一還五去一。公式：「 $x$ 退一還五去 $x$ 」。○ $x+(5-x)=10$ 。不過遇到這類的情形大部用兩句口訣，如「八退一還五去三」一句，便可用兩句口訣，「八去一還二」，「二下五去三」。這兩種都在前面講過，不再說了。

3. **乘法口訣** 珠算上乘法口訣，和筆算上的幾乎完全相同，稍有差異的就是在多位乘法中用乘數的第二位以下各數乘被乘數時的「一一隔位一」，「一二隔位二」等十幾句口訣；和以乘數第一位數乘被乘數各數時的「一一退位一」，「一二退位二」等十幾句口訣。「隔位」「退位」是指乘積的位置。就被乘數的檔位說，在牠右邊一位便算是退位，在牠右邊兩位便算是隔位。至於其他口訣，完全和筆算上的相同，不必講了。

4. **除法口訣** 除法口訣可以分爲兩大部，第一部是一位除法的口訣，即所謂「歸訣」；第二部是多位除法的口訣，就是「撞歸」口訣。

一. 一位除法口訣 一位除法的口訣一共有五十句，就字句的組織說，又可分爲五類：

(1) 除數等於或小於被除數，能除盡，並且商數也是整數，口訣中用「逢」「進」兩字。「逢」字下爲被除數，「進」字下爲商數。所以稱「進」因爲是要把商數擺在左邊一檔。這類口訣爲「逢二進一」，「逢四進二」，「逢六進三」等，一共有十四句。每句中都沒有表出除數，除數須記在運算者的心中，所以口訣中同一被除數可以有不同的商數，如「逢四進二」(除數爲二)，還有「逢四進一」(除數爲四)。

(2) 商數得5，用「添作」兩字。有「二一添作五」，「四二添作五」，「六三添作五」，「八四添作五」，四句。每句中第一個字是除數，第二個字是被除數，最後一字是商數，「添作」是運珠的方法。珠算除法運算時總是把被除數改爲商數，在這類情形中被除數在數字上總是小

於商數，必須在被除數上「添」上一些什麼才可以「作」成商數。在這幾句口訣中，除數，被除數，商數，運珠方法都有。

(3) 被除數小於除數，商數恰是被除數的0.20倍，有「五一倍作二」，「五二倍作四」，「五三倍作六」，「五四倍作八」，四句。每句中第一字是除數，第二字是被除數，末一字是商數。「倍作」是運珠的方法，就數字講，商數恰是被除數的一倍，所以用「倍」作。

(4) 被除數小於除數，商數等於被除數，以外還有餘數，如「六一下加四」，「七一下加三」等，一共有十四句。每句中也是第一字是除數，第二字是被除數，也就是商數，末一字是餘數。因為商數等於被除數，所以也不必再動，只在牠「下」面「加」上餘數就是了。

(5) 被除數小於除數，並且不能除盡，有餘數，口訣中要把除數，被除數，商數，餘數，都表示出來，如「三一三十一」。第一個「三」字是除數，第一個「一」字是被除數，第二個「三」字是商數，第二個「一」字是餘數。在一檔上擺上商數「三」，在牠右一檔擺上除數「一」，雖然一個是商數，一個是餘數，不能「混為一談」，但是若只從算珠上看來，恰是「三十一」的模樣，所以就索性叫了牠們「三十一」。同類的口訣一共有十四句。

二. 多位除法口訣 在多位除法中還是大部要用一位除法的口訣，所以這裏所謂多位除法的口訣，只是在多位除法中特有的口訣，並不是多位除法中唯一的口訣。在這些口訣中還可分為兩組，每組九句。

(1) 第一組是遇到除數和被除數的首位數相同，而被除數比除數稍小時，講如何定商的。閻生夫先生稱之為「種歸正口訣」。有九句，由「見一無除作九一」至「見九無除作九九」。「見」字和「逢」字差不多，即是「遇到」的意思。「見」字底下一字是被除數，「無除」是表示被除數不足。「作」字底下的「九」是商數，「九」字底下一字是餘數。除數是什麼，沒有說明，不過牠的首位數是和被除數的首位數相同的。

(2) 第二組說明在用第一組口訣決定的商數太大時，補救的辦法。閻生夫先生稱之為「種歸副口訣」。有「無除退一下還一」；或「借一來一」，至「無除退九下還九」，或「借九來九」，九句。以「無除退一下還一」一句為例，「無除」是「沒有除」或「沒有動」的意思，「退一」是從商數減出1來。從商數減出來的數，自然應該與除數相乘加在被除數裏，所以底下便是「下還一」。

5. 斤兩口訣 斤兩口訣是用以求幾兩等於多少斤的。一共有十五句，第一句是一個樣子，其餘十四句是一個樣子。第一句是「一退六二五」。「一」指一兩，「六二五」是0.0625斤，一兩等於0.0625斤，所以要退一位。到二兩以上都是等於0.10斤以上，所以在算盤上也就不必退位了。

從以上的分析中，我們可以看出：

1. 加法和減法每種有二十六或二十二句口訣，都可以歸納到四個公式之下。每句的第一個字，都是加數或減數，第一字以後說明運珠的方法，用「上」，「下」，「去」，「還」，「進」，「退」幾個字來表示。「上」

是撥上算珠(上下珠)，「下」是撥下算珠(上珠)，「去」是撥去算珠。「上」「下」都是擺上數目，「去」是消除數目，「還」也是擺上數目，「進」是撥進左一檔，「退」是借左一檔的數目，移至右一檔。因為珠算上一個上珠當五個下珠，時時須要把上珠化爲下珠，所以珠算的加減法比筆算的多一種手續，也就有了那「八去二還三進一」和「八退一還五去三」一類的冗長的口訣。自然，解釋這種口訣是和說明算法需要一樣的精神。

2. 乘法口訣和筆算上的幾乎完全相同，只在特殊情形之下，加上表示位數的「退」「隔」兩字。

3. 除法口訣一共有兩大部，第一部有五類五十句，第二部十八句。在第一部中的口訣，每句上都有被除數，商數，和除數(能除盡的自然例外)。不過有的有除數，如「三一三十一」；有的沒有除數，如「逢二進一」；有的有運珠方法，如「二一添作五」；有的沒有，如「三一三十一」。表示運珠方法的有「進」，「倍」，「添」，「下加」等字。「進」表示進上左一檔。「倍」和「添」都是改作的意思(把被除數改成商數)，因為要改成的數比原來的數大，所以用了「添」「倍」兩個字。可是這樣一來，就把被除數和商數的關係完全掩沒了，並且容易引起許多誤會。「下加」是把除數加在被除數中，不說「餘」而只說「加」也算沒有表示清楚。至於沒有表示運珠方法的更是不清楚了，而尤其把商數和除數混在一起，以一個兩位數看待，稱「幾十幾」，更是沒有道理。

第二部的十八句，第一組的每句中的作「九幾」也是把商數和除數混在一起了。第二組的九句中「無除」和第一組中各句的「無除」，意義不同，在第一組各句中的「無除」是「不夠除的」，在第二組中是「還沒有開始運算除」的意思，不同的意思用了同樣的字來表示，也不能不算缺點。

4. 斤兩口訣中除數（十六）是省略了，每句的第一字便是被除數（兩數），第二字以下便是商數（折合的斤數），運算方法一概沒有。

5. 由以上概略的分析中我們已經可以看出，口訣雖然有幫助記憶的功能，然而牠的缺點（而尤其是現行的口訣）也太多了，所以近來有人起來提倡改良口訣，甚至起了廢除口訣的企圖。

## II 口訣的改良

從前面簡略的分析中，我們已經看出現行的口訣有許多毛病。其中最主要的有兩點：第一，就各句說，句子的組織不健全，以致「難解」；第二，就全體說，形式不一，難以記憶。現在我們分別討論一下：

1. 所謂口訣的句子組織不健全，大部的原因是用字不當。譬如「三一三十一」一句口訣，本來的意思是：「以三除一十商三餘一」。第二個三字和第二個一字，一個是商數，一個是餘數，雖然在算盤上要在一檔撥「三」，下一檔撥「一」，在表面上看來，和撥上一個「三十一」差不多，然而那絕不是「三十一」，不能把這個「三」和「一」混為一談，而現在的口訣中，竟把牠們弄成「三十一」了。在這句口訣

的本身是不健全了，在初學的人也就不容易明白牠的意義了。看到這一點而提議改良現行口訣的人，便主張改換各句中不合理的字；把整句口訣的意義弄明白。張宗麟先生(參考7)說：現行的口訣[有的省去動詞，有的省去連續詞，所以初讀起來，都像不可解的句子，非要在算盤上會算以後，然後才會明瞭口訣是什麼意義。口訣的本義是爲着便利打算盤的，現在要打了算盤方來解釋口訣，所以口訣對於初學者的幫助是不多的。既然會打算盤，倘若還在那裏念口訣(就是每打一數，必念該數的口訣，甚至從頭念起，念到該數。)這是極不經濟，於速度上大有妨礙的。所以珠算的口訣，必須修改到看得懂，初學者可以對着口訣打算盤。]現在試行改良口訣的人已經很多了，各家改良的口訣，雖然未必都能達到張宗麟先生所說的「看得懂，初學者可以對着口訣打算盤」的標準，但是比起舊口訣來都進步多了。現在我們把各家改良的口訣稍爲介紹一點，以做珠算教師的參考。

張健先生(參考3)在他的小朋友珠算一書中，差不多把現行的口訣中不通的地方都改正了。譬如除法的「二一添作五」，「四二添作五」的「添」字，「五一倍作二」，「五二倍作四」的「倍」字，都改成「商」字，讀作「二一商作五」，「四二商作五」，和「五一商作二」，「五二商作四」。又如他把二歸的「逢四進二」，和四歸的「逢四進一」，改作了「二四上進二」，和「四四上進一」。他把「三一三十一」，「三二六十二」等，改成了「三一三剩一」，「三二六剩二」。還有「六一下加四」等句中的「加」字，也改成了「剩」字，讀作「六一下剩四」等。此外改正的地方還很多。

張仲弢先生(參考20)完全贊成張健先生的修改方法。自然張先生改過以後是否盡善盡美，還是問題，不過比現行的總是進步多了。

健民先生(參考6)提議把「逢六進三」，「逢三進一」的「逢」字，「進」字，改成「除」字，和「得」字。那便是「除六得三」「除三得一」。「四二添作五」「五一倍作二」的「添」字，「倍」字，都改成「改」字，讀作「四二改作五」，「五一改作二」。「三一三十一」「六一一下加四」的「十」字和「下加」兩字，都改成「餘」字，讀作「三一三餘一」，「六一一餘四」。黃炳華先生(參考22)也主張「三一三十一」一類口訣中的「十」字改成「餘」字，不過他主張把「二一添作五」一類口訣中的「添作」兩字改為「分得」二字，成為「二一分得五」，「四二分得五」等。

陸在新先生(參考12)也發表了一整套的除法口訣，他的改良之點是：(1)把原來口訣中的「逢」字，「進」字，改成了「除」字和「商」字，並且加上除數，如「二除四商二」(逢四進二)，「三除六商二」(逢六進二)。(2)把「添作」，「倍作」，改成「十之」，如「二一十之五」(二一添作五)，「五一十之二」(五一倍作二)。(3)把「十」字和「下加」都改成了「餘」字，「三一三餘一」(三一三十一)，「九一一餘一」(九一下加一)。在(1)(3)兩點上閻生夫先生和陸先生有同樣的意見。閻先生對(2)中的「倍作」「添作」等字，則和健民先生的意見相同，就是把牠們都改作「改作」。

蔣霖先生(參考26)以為陸在新先生的「二一十之五」，「五一十之二」裏邊的「十之」兩字，恐怕還是不明白，不如改為「改作」兩字。蔣

先生還以為除法口訣中的「逢」字，不如改為「退」字，如「退二進一」（逢二進一），「退四進二」（逢四進二）。斤兩口訣中第一個字以下，應該添一個「點」字（小數點的意思），如「一點六二五」，「二點一二五」等。

此外提議改良，或實行改良，口訣中不通的字的人，自然還有。如周元讓先生（參考4）主張把「二一添作五」改為「二一變作五」。南昌高橋小學同人（參考9）主張把「三一三十一」，「六五八十二」，改為「三一三餘一」，「六五八除二」等。不過不必一一介紹了。總之，現行的口訣在組織上多不健全，其中有許多不通的字，致使初學的人不容易了解，亟需改良。現在各家改良的口訣，都有牠的優點，都比現行的好，然而也都不能算盡善盡美。張健先生擬有整套的改良口訣，在他的珠算教科書（小朋友珠算）內全都是用的他的改良口訣，所以張先生改良的口訣是特殊值得注意。他把「逢四進二」，「逢四進一」等改為「二四上進二」，「四四上進一」等，似乎是和舊口訣「六一下加四」，「八一下加二」等是同樣的句法。這改良過的口訣，究竟比舊口訣清楚了多少，還是一個問題。其他各家的改良口訣也都可以加以同樣的考慮。所以我們說：「現在各家改良的口訣都有牠的優點，都比現行的好，然而也都不能算盡善盡美。」

在盡善盡美的，標準的口訣未造出以前，珠算教師應該隨時創造新口訣，改善舊口訣，對於不同的口訣，用實驗的方法決定他們的優劣。譬如單是以「二除一十商五」一個算法，便有了好幾種口訣：舊口訣是「二一添作五」，張健先生改的是「二一商作五」，健民先生改的是

「二一改作五」，陸在新先生改的是「二一十之五」，周元讓先生改的是「二一變作五」，別人還許有別的改法。究竟那一種最好，要取決於學生，看對於他們「添作」，「商作」，「改作」，「十之」，「變作」，究竟那一種最容易了解，最容易記憶。其他口訣也要同樣的加以比較，以定優劣。

2. 前面說過，一位除法的口訣一共才五十句，就字句的組織說就可分為五類，表示這些口訣在形式上有着很大的差異。類似的事實，而用絕不相似的形式去表現，是不利於學習的。所以我們要改良口訣，還應該於可能範圍內把他們的形式劃一，以便記憶。所幸形式上的改良，和字句上的改良是有密切關係的。把字句的組織改良了，也就是把形式改良了，使類似的事實用類似的形式來表示。在一位除法的口訣中，(2)類和(3)類，(4)類和(5)類的情形都相同。在(2)類和(3)類都是，就數字說，被除數小於除數，商數大於被除數，無除數。表示這兩類口訣的句法，應當相同，然而在舊口訣中却不相同。在(2)類用「添作」兩字，如「二一添作五」，「四二添作五」等；在(3)類用「倍作」兩字，如「五一倍作二」，「五二倍作四」等。如張健先生把「添作」，「倍作」，都改成「商作」，成了「二一商作五」，「四二商作五」，和「五一商作二」，「五二商作四」。這在字句的組織上是比較合理了，而在形式上也劃一了。(4)類和(5)類也是一樣，都是在數字上，被除數小於除數，有餘數。情形相同，口訣的句法也應相同，然而在舊口訣中却不然。在(4)類用「下加」兩字，如「六一下加四」，「七一下加三」；在

(5)類商數和餘數之間連以「十」字，如「三一三十一」，「三二六十二」，這樣不但形式不一，而意義也不明顯。像健民先生把牠們改為「六一一餘四」，「七一一餘三」，和「三一三餘一」，「三二六餘二」，這樣一改，意義明顯了，形式也劃一了。所以形式的齊一，和字句的組織是有密切關係的，改了一樣另一樣也就隨着改了。二者比較起來，還是字句的組織比較重要。只要我們把口訣的字句的組織改健全了，能明晰的表示牠所代表的意義了，全部口訣的形式自然就趨於整齊劃一了，就有不整齊的地方，自然也應該犧牲形式的齊一，因為全部形式的齊一始終不如字句的組織重要呀。

以上所介紹的改良的口訣，幾乎全部是一位除法的口訣，關於他種口訣的很少。這也是原因的。加法口訣和減法口訣，一部分，如「一上一」，「一去一」等十八句，很少應用；其他部分，如「一下五去四」，「二去八進一」，「一上四去五」，「二退一還八」等，雖然應用的較多，可是大家還沒有感到牠們怎樣不合用，所以很少有人提議改良。珠算的乘法口訣和筆算的完全一樣，每句都不外被乘數，乘數，和積數三者，組織簡單，似乎也沒有什麼大的缺點。多位除法，斤兩法等口訣，雖然應用也不少，始終不如一位除法的口訣普遍，同時大家也沒有怎樣感到牠們的缺點，所以提議改良的人也很少。雖然人數很少，關於加法，減法，乘法，多位除法，斤兩法的口訣也有人提議改良，現在把各家的改良口訣，也介紹一下，以資參考。

關於加法，健民先生說：「以中指撥上珠近樞謂之下，以表指撥

下珠近樑謂之上，反是謂之去，這是珠算中運珠之通則。但六上六，七上七……則反是，所以應改為六下五上一，七下五上二，……」我們前面說過，六上六，七上七，幾句口訣應用的人很少，所以改良與否，都無關大體。健民先生這樣一改也不見得比舊的清楚好多，反而有累贅的嫌疑，所以健民先生這個提議，我們是不怎樣同情的。

唐海滄先生(參考17)主張舊日的一切的加減法口訣都應當廢除，另造一套新口訣，在這一套新口訣中，只敘述5的補數和5的關係，10的補數和10的關係，不及其他。所以加法的口訣，是下列十三句：

一四,五 二三,五 三二,五 四一,五 一九,十 二八,十  
 三七,十 四六,十 五五,十 六四,十 七三,十 八二,十  
 九一,十

減法的口訣，是下列十三句：

五一,四 五二,三 五三,二 五四,一 十一,九 十二,八  
 十三,七 十四,六 十五,五 十六,四 十七,三 十八,二  
 十九,一

在加法口訣中所謂「一四,五」就是「一加四爲五」，所謂「一九,十」就是「一加九爲十」；在減法口訣中所謂「五一,四」就是「五減一爲四」，「十一,九」就是「十減一爲九」。其餘類推。至於這套口訣的用法，我們舉例說明：

例題(1)  $4+2=?$

在這個題目中加數是2，用「二三,五」口訣，在被加數4上去「三」

加「五」，得6，便是和數。

例題(2)  $8+7=?$

在這個題目中加數是7，用「七三，十」口訣，在個位去「三」在十位加「一」，得15，便是和數。

例題(3)  $7-3=?$

在例題(3)中減數是3，用「五三，二」口訣，在被減數7上去「五」加「三」，得4，便是差數。

例題(4)  $24-6=?$

在例題(4)中減數是6，用「十六，四」口訣，十位減「一」個位加「四」。加四時用「四一，五」口訣，在被減數個位數4上去「一」加「五」，得18，便是差數。

由例題中我們可以看出，每句口訣有三個字。加法口訣應用時，第一個字是加數，第二個字是運算時撥去的數，第三個字是運算時撥上的數。如在例題(1)中，加數是2，用「二三，五」口訣，運算時，去「三」加「五」。減法口訣應用時第二個字是減數，第一個字是運算時減去的數，第三個字是運算時加上的數。如在例題(3)中，減數是3，用「五三，二」口訣，運算時去「五」加「三」。

唐先生的這一套口訣，確是很簡單，不過牠們所敘述的只是5的補數和5的關係，以及10的補數和10的關係。這些關係不用學這口訣，兒童也可以知道。在這套口訣中，關於運算的方法絲毫沒有提，對於運算不會有什麼幫助。如何運算，還是要用其他的話說明，所以

唐先生的這套口訣，可以說是「有若無」的。

在減法中被減數中要減的位數是零，或是小於減數，需要從上一位借，而上一位又恰是5時，向來沒有固定的口訣，閻生夫先生製了幾句口訣，照錄如下：

減數 口訣

- |   |        |          |
|---|--------|----------|
| 1 | 上四去五還九 |          |
| 2 | 上四去五還八 |          |
| 3 | 上四去五還七 |          |
| 4 | 上四去五還六 |          |
| 5 | 上四去五還五 |          |
| 6 | 上四去五還四 | 上四去五還五去一 |
| 7 | 上四去五還三 | 上四去五還五去二 |
| 8 | 上四去五還二 | 上四去五還五去三 |
| 9 | 上四去五還一 | 上四去五還五去四 |

在這種情形下普通不用口訣，也可以說是沒有口訣的需要，所以閻先生的這一點創造，我們認為對於珠算教學也沒有什麼大的貢獻。

在乘法上，則有陸在新先生(參考13)的改良口訣。陸先生以為現行的乘法口訣，有三個缺點：(1)每句有的四字，有的五字，很不整齊，不大容易記憶。(2)「口訣中法實之積最多為兩位數，至少是一位數，一位數之前無零字，兒童演算時致常有錯誤。」(3)「缺少以零乘之的口訣。」因此陸先生創造了他的「在新乘法口訣」，節錄如下：

○○○○，  
 ○一○○， 一一〇一；  
 ○二○○， 一二〇二， 二二〇四；  
 ○三○○， 一三〇三， 二三〇六， 三三〇九；  
 ……  
 ○九○○， 一九〇九， 二九一八， 三九二七，  
 四九三六， ……九九八一。

閻生夫先生也有一部新的乘法口訣，除去沒有第一行的「○○○○」和「○一○○」至「○九○○」以外，其他地方和陸先生的「在新乘法口訣」完全相同。

陸先生說他的口訣，「試驗之下，覺演算之錯誤幾完全免掉；尤以用在珠算上效力更大。」

可是陸先生的口訣發表以後，便有許多批評牠。劉心東先生（參考25）說，陸先生的口訣雖然有字數整齊，和增加了以零乘的口訣，兩個優點，却也有三個缺點：(1)「法實和積的中間無界限，兒童讀時多有不便。」(2)「法實的積是一位數時，前面畫一「○」字，但兒童演算問題時，多有在積前置一「○」字，在教學上恐有不便。」(3)「法實未能互易，……兒童會了二乘四，往往對於四乘二仍非練習不可，所以為完美起見，似乎還應該把法實兩數倒過來應用。」

費天降先生（參考24）也以為口訣中在乘積前面有了「○」字，兒童會在計算時把乘積前邊也劃上「○」。在珠算上雖然沒有畫「○」的危

險，可是若定位的方法給兒童講清楚了，兒童自然會定位，口訣中的「〇」字也不必要，因此費先生又自己創了一套乘法口訣如下：

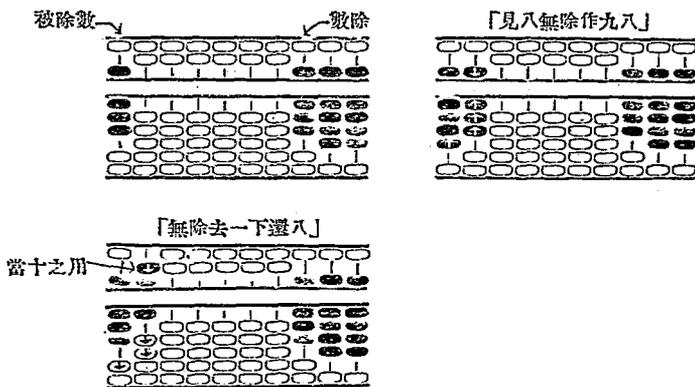
〇〇等於〇，〇一等於〇，〇二等於〇……〇九等於〇；  
 一一等於一，一二等於二，一三等於三……一九等於九；  
 二二等於四，二三等於六，二四等於八……二九一十八；  
 三三等於九，三四一十二，三五一十五……三九二十七；  
 ……  
 九九八十一。

陸先生和費先生都添上了以零乘的口訣，兒童熟讀以後，或者不至於發生「零乘五等於五」一類的錯誤，這是乘法口訣的一個進步。其他地方，陸先生和費先生的口訣，都和現行的口訣相差無幾，不必討論了。唐海滄先生也曾提議改良乘法口訣，不過他只提議把「三六一十八」一類的口訣中的「十」字去掉，和現行口訣相差更少，更不必討論了。

蔣霖先生提議改良斤兩口訣，前邊已經提過。閻生夫先生還提議改良第一組的多位除法口訣，把每句中的「見」字和「無除」兩字去掉，改成「一一作九一」，「二二作九二」等。朱彤暈先生（參考15）提議多位除法第二組的口訣中，可以省去「無除去一下還九」一句，因為這句口訣無論如何是用不着的。現在舉例以證明。 $9000 \div 999 = ?$  一題，用過「見九無除作九九」以後，已經夠連續減「九九八十一」，「九九八十一」的。『依此類推，這句「無除去一下還九」的口訣是不需要的。』朱先

生的提議是對的，可惜朱先生未能說明這句口訣永遠用不着的理由。我們替他追問一步，為什麼這句口訣永遠用不着？

在珠算的除法中，有了商數以後，要以商數乘除數，從被除數裏減去商數和除數的乘積。在應用「見幾無除作九幾」的時候，商數一定是9。9乘1至8各數為首的數，在數字上，乘積可以超過那個為首的數字，而在9則不然，9乘以9為首的數，在數字上乘積永遠不會超過9。舉例來說： $899 \times 9 = 8991$ ，在數字上8991超過8。在 $8000 \div 899 = ?$ 一題中，用過「見八無除作九八」以後，商數得9，商數9乘除數899得8991，超過被除數中在商數下一位的8，所以還要用「無除去一下還八」一句口訣，也就是「無除去一下還八」一句口訣有時要用的。



$9 \times 999 = 8991$ ，在數字上8991沒有超過9。在 $9000 \div 999 = ?$ 一題中，用過「見九無除作九九」以後，商數9下面的9，很夠減去商數9乘除數999的乘積8991了，所以用不到「無除去一下還九」一句口訣。在這種情

形下，還用不到這句口訣，若是商數下面的被除數更大於9，或者除數更小於999……，「無除去一下還九」一句口訣更用不到了，所以這句口訣是永遠用不着的。

### III 廢除口訣的試驗

學珠算就讀口訣，這是從來認為天經地義不容懷疑的。張顯光先生(參考2)說，「口訣之於珠算，無異人生之必須空氣。」二者的關係，可想而知了。就是最近的健民先生也說「珠算口訣和筆算中的公式一樣，是珠算上一種最經濟最簡便的方法。」閻生夫先生也認為口訣等於科學公式，是絕對不能廢棄的。曹日昌(參考10)參觀了十個小學中十四班的珠算教學，他所見到的是：「講授新方法時先提示應用的口訣，溫習時要背誦口訣，演算時要高唱口訣，課外練習時也要把應用的口訣寫在本子上，交給教師。」「大家似乎是認為全部的珠算科就是幾十句口訣，小學珠算科的目的就在教學生如何利用口訣。」

然而最近有人對口訣懷疑了。張宗麟先生的話我們引證過了，他說：「口訣的本義是為着便利打算盤的，現在要打了算盤方來解釋口訣，所以口訣對於初學者的幫助是不多的。既然會打算盤，倘若還在那裏念口訣，這是極不經濟，於速度上大有妨礙的。」張先生緊接着便提出口訣改良的問題，不知道這不是改良所能解決的。就是能如張先生所說的，能改到「看得懂，初學者可以對着口訣打算盤，」還是不能制止「會打算盤以後，……還……念口訣」，這還是「不經濟」，還是「於速度上大有妨礙。」何況現在的口訣也絕改不到能使初學者一看便懂，

能對着口訣打算盤的程度呢？試看由「三一三十一」改到「三一三餘一」，已經是很好了，可是「三一三十一」初學的人不懂，「三一三餘一」就能一看便懂嗎？能不用人教，會了這句口訣，便自能打算盤嗎？所以改良口訣所得的效果，是很有限的，用了改良的口訣，依然會有會打算盤還念口訣的毛病。其於運算速度上的妨碍，新舊口訣是一樣的。有人認清了這一點，所以不試求改良口訣，而直接企圖廢除口訣。

企圖廢除口訣，作廢除口訣的實驗的有曹日昌（參考18）和徐德春先生（參考5,8）。兩人彼此的研究，都是獨立的。

曹日昌的實驗是在民國二十年至二十一年做的。那時曹日昌在北平師範大學教育系讀書，同時在同學主辦的平民學校初級第二十二班擔任珠算的課程。由民國二十年暑假開始，最初也是用傳統的方法教授，教了半年，學生已經學會了乘法。他看到有些學生在運算的時候，總是先讀出口訣來，然後再猶猶疑疑的撥珠運算，覺得很不對。自己反省了一下，覺到自己也有時在運算時還一面念口訣。這時想到：在筆算上一面算，一面念，如對 $\frac{8}{+5}$ 一題，做時尙讀「8加5等於13」，比直然拿起筆來寫答數要慢得多，在珠算上一面撥珠，一面讀訣，也比只是撥珠要慢吧？後來越想越對，便下了廢除口訣的決心。在第二學期開始時（民國二十一年春），正該起始教學除法，便開始了「不用口訣的珠算教學」實驗。因為該班的一點鐘的閱讀指導，也是曹日昌擔任的，所以每週有兩點鐘供曹日昌支配，可以實行分組教學。經過了一次珠算測驗，根據測驗的結果，把全班學生分成了人數相等，平

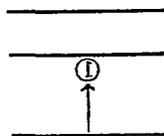
均能力相等的甲乙兩組。甲組用傳統方法在原來時間教學珠算，乙組自由閱讀；在原來閱讀時間，甲組自由閱讀，乙組不用口訣教學珠算。這時教的是除法，廢除了口訣，教的時候只由教者在大算盤上示範演算，不介紹口訣。譬如教2的除法時，教者先在黑板上寫出 $10 \div 2 = 5$ 一個算式，然後說道：「這個題目在珠算上怎樣做呢？——就是把代表被除數的當10的這個下珠撥下去，同時在本檔上撥下一個當5的上珠來，這就是商數。」一面說一面作，使學生也依樣撥珠。這樣教了幾個月以後，把甲乙兩組學生合起來，又舉行了一次測驗，兩組的成績，竟沒有多大區別。就表面的結果看來，似乎是口訣的存廢，沒有多大關係。不過這個結論未必可靠。有幾個原因，使着我們不敢相信這個實驗的結果是正確的。第一「不用口訣的珠算教學法」，因係草創，沒有把全部的活動步驟弄好。第二，兩組的學習情形，教學方法，沒有嚴密的控制。在不用口訣的珠算教學時，借用筆算的原則算法，解釋珠算算法的時候較多；在用口訣的珠算教學時，借用筆算的原則算法的時候較少。第三，因為沒有標準的珠算測驗，兩次測驗所用的題目都是自己編造的，牠們的可靠度如何，不得而知。第四，兩組學生的年齡，智力，家長的珠算程度，學生在校在家溫習珠算的時間，也都沒有控制。有這四種原因，使我們不敢相信這次實驗所得的結論。所以究竟在珠算上用口訣好，還是不用口訣好，只由這一個實驗，還不能得到結論。

徐德春先生的實驗，是在民國二十二年至二十三年做的。徐先生

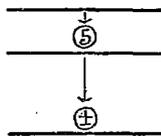
覺到先讀口訣，背口訣，然後「照訣運算」的學習歷程，未必有心理學上的根據；在學習方面也不見得經濟；在效率方面也不見得宏大。看初學者的心不應手，手足無措的情形，便知道讀口訣和運珠是兩件事，不知道要花多少時間，才可把牠們打成一片。珠算的撥珠運算，本來大部是手指的工作，若一面還念口訣，就是使口舌唇齒等也工作起來，豈不是白耗精力？爲了要先把口訣和運珠打成一片，爲了要使初學者減少許多器官的工作，徐先生想起把通行的珠算口訣，仿照聾啞教育中的手語法，變成「珠算手語法」。所謂「珠算手語法」，就是教學珠算時，不教讀口訣，只教動手撥珠。下面是手語法的圖說。

1. ①，②，③，④，⑤，⑩表示算珠代表的數目。
2. ↑表示上珠。
3. ↓表示下珠。
4. ↖表示進珠。
5. ↘表示退珠。
6. —表示算盤的橫樑，其上爲上二珠，其下爲下五珠。
7. 把原來每句口訣都用阿拉伯碼或蘇州碼列成問題，如：  
 $1+4=?$  一加×得幾？
8. 加法手語示例

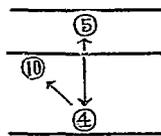
(ㄅ)  $0+1=?$       (ㄆ)  $1+4=?$       (ㄇ)  $1+9=?$



原口訣  
「一上一」



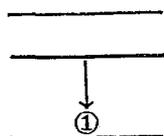
原口訣  
「一下五去四」



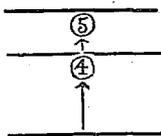
原口訣  
「一去九進一」

### 9. 減法手語示例

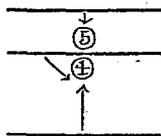
(ㄅ)  $1-1=?$       (ㄆ)  $5-1=?$       (ㄇ)  $10-1=?$



原口訣  
「一去一」



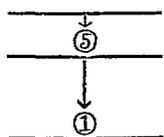
原口訣  
「一上四去五」



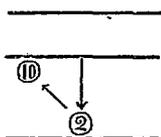
原口訣  
「一退十還九」

### 10. 除法手語示例

(ㄅ)  $1 \div 2 = 0.5$       (ㄆ)  $2 \div 2 = 1$



原口訣  
「二一添作五」



原口訣  
「逢二進一」

加法手語，共有二十六個，可分為四類：

1. 零加各基數，共九個，為  $0+1=?$ ， $0+2=?$ ，.....  
 $0+9=?$

2. 5的補數的加法，共四個，為  $1+4=?$ ， $4+1=?$ ，

$$3+2=? , 2+3=?$$

3. 10的補數的加法，共九個，爲  $9+1=?$ ，  $1+9=?$ ，

$$8+2=? , \dots\dots 5+5=?$$

4. 5加大於5的基數，共四個，爲  $6+5=?$ ，  $7+5=?$ ，

$$8+5=? , 9+5=?$$

減法手語，共有二十二個，分爲三類：

1. 餘數爲零的，九個，爲  $1-1=?$ ，  $2-2=?$ ， $\dots\dots 9-9=?$

2. 5減小於5的基數，四個，爲  $5-1=?$ ，  $5-2=?$ ，

$$5-3=? , 5-4=?$$

3. 10減各基數，共九個，爲  $10-1=?$ ，  $10-2=?$ ， $\dots\dots$

$$10-9=?$$

乘法手語，「只要記住留頭和進退算珠，」與加減法同，不必另敘述了。除法手語的數目，和舊有的九歸口訣一樣，在排列上也相同。

在把手語法造妥以後，徐先生就開始了他的實驗，教學加法，所用的教材一共有三種：(1)加法手語基本練習甲，就是前面所說的那二十六個加法手語。(2)加法手語基本練習乙，是照舊法「三盤清」改編的。(3)上珠，下珠，進珠，退珠練習材料，就是前邊第三章50至51兩頁中所載的撥珠練習材料，一共有四種，每種五十題，共二百題。

被試驗的學級是秋四甲，該級共有學生四十二人，分爲六組，每組七人。在第一組有中六人，有兩個是留級生，已經學過珠算了，其他四人在家庭裏也學過了，所以這一組是學過珠算的。此外第二組中

有一個是在家中學過珠算的，有一個略懂珠算的，第四組中有兩個略懂珠算的，其他便都是沒有學過珠算的了。

教學練習的時間，每星期兩節，共六十分鐘。學習的進程是第一二兩星期練習加法手語基本練習甲和加法手語基本練習乙；第三星期用上珠練習材料五十題，反覆練習；第四星期用下珠練習材料五十題，反覆練習；第五星期用進珠退珠練習材料五十題，反覆練習；第六七兩星期用上珠進珠退珠練習材料五十題，反覆練習。每一種材料練習完畢以後，作一次小考查。由導師口述算題，令兒童演算，把結果寫在答案紙上。六種練習材料都做完以後，舉行總考查，印發直接系統練習題一百個，規定在五分鐘內，每分鐘起止一次，統計作的題目的數目。結果見下列三表：

第二表 各組每分鐘演算題數分配表

組別 題數	第一組	第二組	第三組	第四組	第五組	第六組	總計
10—14	1						1
15—19	0	1	1				2
20—24	1	1	0	1	1		4
25—29	2	0	1	1	0	1	5
30—34	0	2	1	0	1	0	4
35—39	2	1	2	1	1	0	7
40—44	1	1	1	2	0	0	5
45—49		0	0	1	2	2	5
50—54		1	0	1	0	3	5
55—59			0		0	0	0
60—64			1		0	1	2
65—69					0		0
70—74					1		1
75—79					0		0
80—84					1		1

附註：

- (1) 總題數為 100
- (2) 每組人數為 7
- (3) 第一組係學過珠算的

第三表 各組每分鐘演算可靠題數分配表

入 題 數	組 別	第一組	第二組	第三組	第四組	第五組	第六組	總 計
10—14		2	1			1		4
15—19		3	2	1	1	0	1	8
20—24		0	2	0	1	2	0	5
25—29		0	0	0	2	1	1	4
30—34		1	1	2	0	0	2	6
35—39		0	1	1	3	0	1	6
40—44		1		2		2	0	5
45—49				0		0	1	1
50—54				0		1	0	1
55—59				1			1	2

第四表 各實足年齡每分鐘每人演算可靠題數分配表

入 題 數	年 齡	7.5	8.5	8.5	9.5	9.5	10.5	10.5	11.5	11.5	總 計
		上	上	下	上	下	上	下	上	下	
25—29		1							1	1	3
30—34							1	1	0	0	2
35—39			1			1	2	3	1	1	9
40—44			0	1	1	0	1	1	0	0	4
45—49			2	1	0	2	2		1	0	8
50—54			0	0	2	0	2			0	4
55—59			1	1	0	1	0			1	4
60—64				0	1	0	1			0	2
65—69				1	0	1				1	3
70—74				1	1						2
75—79					0						0
80—84					1						1

『看了上列三表的分配，就可約略的知道各組進程及其可靠性；且第二三兩表中的第一組係曾學過珠算或能背口訣者，然其「速率」，「可靠題數」等均不若其他未學過珠算的各組；我們認為不用口訣，以直接的系統材料練習珠算，於學習上可免不少障礙，此可於：

『表二——各組每分鐘演習題數，速度之分配，均尚集中；

『表三——係就表二速度之分配加以更進一步之核計，此項速度是否可靠，觀其結果，第一組的分配極散漫，是可知該組兒童已學過口訣並未有多大幫助，反而不正確；其他，第二至第六組的分配，除有一二例外的，均頗集中；

『表四——按照智力年齡，大的未必一定程度高；觀此表則不用口訣的直接練習材料於年齡小的兒童所得的幫助極大。』

徐先生的結論是：「不用口訣，以直接的系統材料練習珠算，於學習上可免不少障礙。」「用口訣未必勝於不用口訣，直接練習材料，似未少讓於舊口訣。」

我們可以無條件的接受徐先生的結論嗎？不可以。有幾點徐先生還沒有顧到：

1. 要比較口訣和手語法的效率，應當把學生分為其他條件相等的兩組，一組用口訣教學，一組用手語法教學，過了相當時期，再比較兩組的成績，以定口訣和手語法的相對的效率。現在徐先生的實驗中，所有的學生都是用手語法教學的，當然不能和口訣教學的比較。雖然其中有幾個人是學過口訣的，不能代表用口訣教學的。他們先學

習了口訣，現在不讓他們用口訣，而用手語法，當然他們感到不方便，即便成績稍差，或成績分配稍不集中，也是自然的道理，不能作為手語法優於口訣的証據，只能證明學過口訣再學手語法有些不便而已。

2. 徐先生找到的第一組學過珠算的和其他各組的差異沒有統計學上的意義，一組只有七個人，本來就不够談成績的差異的，何況差異又不大？徐先生說，在表三裏第一組的成績分配不集中，但是我們實在看不出牠和其他各組有什麼顯著的差異來。各組的年齡，智力，都沒有嚴密的控制，即便稍有差異，也未必是以前學過口訣的影響。

3. 徐先生的實驗也和曹日昌的實驗一樣，所用的測驗的材料都是自己編造的，沒有經過編造標準測驗所應經過的步驟，牠們的可靠度還都有問題。

因為有這三種原因，而尤其是1 2兩個，使着我們不敢無條件的接受徐先生的結論，也可以說徐先生的實驗研究，還沒有達到能得確切的結論的地步。

曹日昌的實驗，徐德春先生的實驗，也和科學史上許多的對各種問題的第一個實驗一樣，有着許多的缺點。然而並不因為牠們的缺點而減少了牠們的價值，牠們提出了新的問題，新的方法，在珠算教學上開闢了新的園地，創造了新的紀元，沿着這一個方向研究下去，一定會有豐富的收穫！

曹日昌的實驗，徐德春先生的研究，都還沒有得到確切的結論。用口訣的弊病，已經明瞭了。不用口訣呢？曹日昌感到有時不用口訣

很難給學生一個清晰的印像。一套撥珠的方法，若用口訣表示，只四五個字就夠了。學生若能明瞭了口訣的意義，就能把那套撥珠的方法清晰的記在心裏，不用口訣則必須用許多話去講，兒童非練習幾次不能熟記。徐先生則找到，『手語的初步極不易教學。……能說話，好說話的兒童，教以此項只用手不動口的工作，反而覺得不自然，不易入手。比如 $3+2=?$ 一題的計算，舊口訣為「三下五去二」，手語則只示以 $\frac{\textcircled{5}}{\textcircled{2}}$ ，極難說明，除以理解外，易蹈背口訣之勞。』所以，不用口訣也有不用口訣的壞處。

這個問題的研究所指示給我們的，似乎是這樣：因為口訣能幫助記憶，所以在初學時用口訣可使兒童學習較快；可是因為用口訣就必須把念口訣和撥珠連在一起，練習越多，二者的連結越堅固，以致凡撥珠時必念口訣，因而影響撥珠運算的速度。不用口訣，在練習純熟以後，計算者只動手撥珠，沒有其他工作，計算較快；可是初學時因為不利用能幫助記憶的語言，所以學習較慢。所以用口訣是初學時有利，學成後有弊；不用口訣是初學時有弊，學成後有利。二者相權，是那個利大弊小，有賴於更進一步的實驗研究，更精密的比較用口訣和不用口訣或手語法的教學效率。

## VI 如何利用口訣

用口訣和不用口訣究竟那個效率大？現在還不知道，等着更進一步的研究。在確切的結論沒有得到之前，我們固然希望對這個問題有興趣的珠算教師從事這種研究，研究的結果證明了不用口訣勝於用口

訣，固然是給珠算教學上開闢一個新世界；就是結果證明了不用口訣不如用口訣，也算重新估定了口訣的價值，在珠算教學上也是很偉大的貢獻。所以無論將來的結果如何，這種實驗研究是值得做的。不過我們並不希望所有的珠算教師都做這種工作，因為實驗研究工作，也不是一件容易的事，不是人人所能擔任的。在研究興趣較淡的教師，我們還是希望他靜候別人研究的結果，暫時還是引用口訣教學。不過用口訣時不要像現在許多的珠算教師，把口訣看得太重，把牠當成了珠算科唯一的內容，可是也不要太忽略了牠，馬馬胡胡的把牠提示給學生就算了。在運用口訣時，下述幾點應該特殊注意：

1. 由前邊的口訣分析中，我們知道現行的口訣（改良的口訣也是一樣，不過在程度上稍有差別而已。）在字句的組織上大部不完全，所以讀起來，非常費解，若不加以詳細的解釋，兒童恐怕不能明瞭牠的意義，兒童若不能明瞭牠的意義，非但不能記憶，也無補於學習。所以用口訣時，要詳細的給兒童解釋牠的意義，這是第一要義，也是各位專家一致的主張。張顯光先生，健民先生，周元讓先生，黃競白先生（參考11）黃炳華先生，張仲毅先生等都主張教口訣時應該詳加解釋。張顯光先生和健民先生還以為在珠算的口訣中有許多在字面上非常相似，而其實代表絕對不相同的事實的，如一位除法中二歸的「逢四進二」，和四歸的「逢四進一」等，在年齡較小或智力平庸的學生，一定容易混亂，更非特別注意詳加解釋不可。惠汝濱先生（參考14）和閻生夫先生以為珠算口訣中特有的一些字，如「上」，「下」，「進」，「退」，

「逢」，「添」，「倍」……等，也都應該特別解釋。

2. 只明瞭了口訣的意義還不夠，還必須記得純熟，才能運用自如。所以教口訣的第二要義，是使學生熟記口訣。至於如何使學生熟記口訣，除了勤加練習之外，健民先生提議採用練習片。蔣霖先生提議用「閃爍片」。用的時候，由教師或學生代表抽出來，由兒童共讀，分行讀，指名讀，或個別輪流讀。或由教師或學生代表依照片上的字和兒童問答。最重要的還是劉道成先生(參考15)的提議。他說應教兒童用科學方法記憶口訣，最好把口訣分門別類排成相當的格式，再用簡明的語言加以解釋，使兒童心目中有了系統，自然就容易記憶了。我們前邊講口訣的分析時，把每種口訣都分了幾類，很可供教學口訣時的參考。

3. 口訣雖要熟記，然而我們要記好，珠算上最主要還是撥珠運算，不要只顧了熟記口訣，反而忽略了撥珠運算，成了「喧賓奪主」之勢。高橋小學諸同人說的很對：

「珠算藉口訣為撥珠之助，但究以撥珠為主體，……與其教兒童胡亂念口訣，不如明白說這樣撥珠的理由，和三個手指的運算，以後再提出口訣來。」所以在珠算上「應當注意運珠方法和手指運動，勿過重視口訣。」黃競白先生也主張先教撥珠方法後教口訣。張健先生(參考17)說，學珠算「要合用心手口」。用心了解口訣，用手練習撥珠，用口誦讀口訣，三者打成一片，不可偏重一方。陳耿光先生(參考20)主張「珠算口訣和算法同時教學。」蔣霖先生則主張要使學生在計算時注意運算，不要用嘴巴把口訣讀出來。總之口訣雖要熟記，可是主要的

還是撥珠運算，不要只顧口訣而忘記了撥珠運算，這是用口訣時的第三要義。

4. 運用口訣的第四要義，也是最重要的一點，就是使學生學習口訣時要自動，要合乎創造的歷程。曹日昌（參考10）說現在教珠算的人「多用演釋法，一來便先提示口訣」。結果是學生聽了「莫名其妙」，「不知所云」。「口訣本來是由歸納法得來的，」就是先有了撥珠的活動和撥珠的方法，把牠們「歸納」起來，象徵化，成為簡單的語文，才成了口訣。學習時也應當使學者照創造的步驟，自己去研求，就是也讓他先學撥珠的方法和撥珠的活動，再使他自己歸納成簡單的語文，——口訣。「這樣才能澈底明瞭，記得牢固。」天民先生（參考1）也主張要使學生自動。譬如教除法時，應當使「兒童自作除算九九數（一位除法口訣）」如教2的除法，應當先給兒童 $10 \div 2 = ?$ 一個問題，使他自己想以2除10商5，如何處置，再在算盤上暗示給他做的方法，再告訴他「二一添作五」的口訣，使之熟記。莊伯綸先生（參考22）也有同樣的意見。其他一切口訣也都應該以同樣的方法教學。

5. 最末一點，是不必要的口訣不要應用。如加法中的「一上一」，減法中的「一去一」一類的口訣，只是描述動作，不是表示算法的，會不會這句口訣和能不能運算無大關係。所以這類的口訣可以廢除，因為只要能運算還何必再要口訣。唐海滄先生和張仲弢先生都主張在簡單的加減計算中不必應用口訣，可見這也是人所共見的一點。

### Ⅴ 總結提要

總結在本章內討論的約有下列各點：

1. 口訣是把撥珠方法，撥珠活動，象徵化了語言，牠能幫助記憶。現行的加法和減法口訣，各有二十二或二十六句，可分為四類。乘法口訣和筆算上的幾乎完全相同。除法口訣可以分為兩部，第一部五十句，分為五類；第二部十八句，分為兩類。斤兩口訣共十五句，也可分為兩類。各種口訣都有兩種缺點；就各句說，字句組織不健全，以致難解；就全體說，形式不一，難以記憶。

2. 實行改良口訣的人很多，各家改良的口訣都有牠的優點，可是也都不能算盡善盡美，有待繼續改善。

3. 廢除口訣的試驗，已做了的有兩起，不過還都沒有得到確切的結論。大約係用口訣便於初學，不用口訣可以增加熟練後的運算速度，二者究竟那個效率大，還須繼續研究。

4. 在不用口訣的試驗沒有得到正面的結論以前，教者仍以用口訣為妥，惟須注意(ㄟ)詳細解釋，(ㄨ)記憶純熟，(ㄒ)不妨礙撥珠的練習，(ㄘ)教學時注意兒童自動，(ㄨ)不必要的口訣不要應用。

#### 本章參考

1. 天民(民國三年)：蒙台梭利教育原理珠算教授法。教育雜誌，第六卷第四號，95—111頁。
2. 張顯光(民國六年)：珠算教授之一得。教育雜誌，第九卷第三

號，53—60頁。

3. 張健(民國二十一年)：小朋友珠算。北新書局。
4. 周元讓(民國二十二，三年)：珠算教學的實際問題。蘇揚中小校刊，第七卷第八期，99—100頁；第七卷第十期，126—127頁。
5. 徐德春(民國二十二年)：珠算口訣改用手語法的一個嘗試計劃。浙江教育行政週刊，第五卷第七期(總二一五號)。
6. 健民(民國二十二年)：怎樣教學珠算。蘇揚中小校刊，第六卷第七期，54—56頁。
7. 張宗麟(民國二十二年)：鄉村小學教材研究，第十一章，算術。黎明書局。
8. 徐德春(民國二十三年)：珠算不用口訣編造直接練習的系統材料之實驗研究。浙江教育行政週刊，第五卷第四十期(總二四八號)。
9. 高橋小學校(民國二十三年)：筆算與珠算混合教學的研究。南昌小學界，第一卷第二，三期合刊，49—52頁。
10. 曹日昌(民國二十三年)：在北平市小見到的珠算教學與建議。天津大公報，明日之教育，第二十三期(六月十一日)。
11. 黃競白(民國二十三年)：民校算術教學問題的商討。教育與民衆，第五卷第十期，37—49頁。
12. 陸在新(民國二十三年)：珠算歸訣的改良。江蘇小學教師半月刊，第一卷第二十三期，32—33頁。

13. 陸在新(民國二十三年)：改良乘法口訣。江蘇小學教師半月刊，第一卷第二十三期，33—34頁。
14. 惠汝濱(民國二十三年)：小學珠算教學的一得。江蘇小學教師半月刊，第一卷第二十三期，26—30頁。
15. 劉道成(民國二十三年)：小學的珠算。南昌小學界，第一卷第四期，31—38頁。
16. 朱彤翬(民國二十四年)：珠算應用的商榷。江蘇小學教師半月刊，第二卷第十期，10—11頁。
17. 唐海滄(民國二十四年)：改革小學珠算教學芻議。進修半月刊，第四卷第十期，6—11頁。
18. 曹日昌(民國二十四年)：二十年來國人對於珠算的研究述要。中華教育界，第二十二卷第十期，43—53頁；第二十二卷第十一期，29—36頁。
19. 張健(民國二十四年)：怎樣研究珠算。青年界，第七卷第三期，19—24頁。
20. 張仲駿(民國二十四年)：珠算教學之我見。小學教育月刊，第三卷第一期，14—18頁。
21. 陳耿光(民國二十四年)：筆算珠算混合教學法，黎明書局。
22. 黃炳華(民國二十四年)：談談鄉村小學珠算教學。教師之友，第一卷第十期，1491—1495頁。
23. 莊伯綸(民國二十四年)：小學各科教學述要(三)算術科，三、

珠算教學要點。武進教育月刊，第八十七，八十八期合刊，18—31頁。

24. 費天降(民國二十四年)：對於改良乘法口訣的質疑。江蘇小學教師半月刊，第二卷第十期，10頁。
25. 劉心東(民國二十四年)：改良後乘法口訣的缺點。江蘇小學教師半月刊，第二卷第十期，9—10頁。
26. 蔣霖(民國二十四年)：珠算教學的小貢獻。江蘇小學教師半月刊，第二卷第十期，7—9頁。
27. 閻生夫(民國二十四年)：珠算教學之理論與實際。河南民衆教育，創刊號，41—51頁；第一卷第二期，61—77頁。



## 第五章 加 法

I 教學加法的步驟.....	93
II 練習材料.....	101
III 定位和檢答.....	108
VI 總結提要.....	111

## I 教學加法的步驟

俞子夷先生(參考2)說得好，加法「不是一口氣可以教得成功的，應當分別難易，一步一步的教。」「每次學習少數的困難點，等到學習純熟以後，再加新的困難點，這樣漸漸成功習慣，纔可以達到完成的目的」。所以教學加法要分步驟，我們也就談談教學加法的步驟。

最初研究珠算加法教學步驟的是天民先生(參考1)。他以為教學加法應當分兩個步驟，第一步是「準備教授」，第二步是「基數累加」。在準備教授時，先教各數與5的關係，教材為：

$$1=5-4, \quad 2=5-3, \quad 3=5-2, \quad 4=5-1, \quad 6=1+5,$$

$$7=2+5, \quad 8=3+5, \quad 9=4+5.$$

因為在珠算上，上珠當五，有五進的事實，各數沒有不和5發生關係的，所以教學加法的第一步，就是教各數與5的關係。珠算上不但有「五進」，還有「十進」(進位)，所以在準備教授中教了各數與5的關係以後，便該教學各數與10的關係，用天民先生的話，便是「十之補數之處置。」教材如下：

$$10=9+1=1+9, \quad 10=8+2=2+8, \quad 10=7+3=3+7,$$

$$10=6+4=4+6, \quad 10=5+5.$$

所謂「基數累加」，就是連續的加某一個9以下的自然數。在天民先生定的教材中，累加的次數是10，所以就是連續的加十次某一個自然數，各基數的順序是1,5,6,9,8,7,2,3,4，所以全部的教材是下面的樣子：

$$(1) 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1=?$$

$$(2) 5+5+5+5+5+5+5+5+5+5=?$$

$$(3) 6+6+6+6+6+6+6+6+6+6=?$$

$$(4) 9+9+9+9+9+9+9+9+9+9=?$$

$$(5) 8+8+8+8+8+8+8+8+8+8=?$$

$$(6) 7+7+7+7+7+7+7+7+7+7=?$$

$$(7) 2+2+2+2+2+2+2+2+2+2=?$$

$$(8) 3+3+3+3+3+3+3+3+3+3=?$$

$$(9) 4+4+4+4+4+4+4+4+4+4=?$$

1的累加，加到第五次時必須把下珠化成上珠(一下五去四)，加到第十次時必須進上一檔(一去九進一)，所以在基數累加中，下珠化上珠和進位自然的就學到了。

天民先生在二十幾年前，就注意到珠算加法的教學步驟，這是很可佩服的，不過天民先生定的教學步驟也還有不妥的地方，開始教學珠算時兒童連最簡單的加法都還不知道，就教下珠化上珠(各數與5的關

係)和進位(十之補數之處置),恐怕要發生困難。我們以為教學加法應當從最簡單的教起。唐海滄先生(參考6)擬定的教學加法步驟,就是從簡單的加法教起。唐先生以為第一步應當先教「直接加法」。所謂直接加法,唐先生說是「無需心算或口訣幫助」的,其實就是不包含上珠化下珠和進位的,如 $123+561=?$ 一類的題目。第二步教「五的加法」,就是包含上珠化下珠的,如 $432+234=?$ 一類的題目。最後教「十的加法」,就是包含進位的加法,如 $8+7=?$ 一類的題目。唐先生定的步驟很妥當,只是簡略一些。還有「直接加法」的教材不知是什麼,若都是像唐先生給的例題 $123+561=?$ 一類的材料,恐怕也不適於初學。

我們在第三章裏說過,「在兒童會在算盤上記1至9各數時,就教九以內的加法,減法,以至加減法,」減法在下一章內敘述,現在只討論加法。在討論記數的時候,我們分了三個步驟,使兒童明瞭了「五進」的事實,一下就會記1至9各數。其實未嘗不可把這個步驟分得更詳細些。先使兒童暫時保持「一對一」的觀念,學在算盤上用下珠記1至4各數;第二步再教以五進的事實,教學記5以上9以下各數。在純粹學記數的時候,不必多添這個步驟,因為在記數時各珠是靜的,不發生變化,下珠當一,上珠當五,記4時用四個下珠,記5時用一個上珠,記6時用一個上珠一個下珠,這沒有什麼難解的地方。在計算加法時就不然了,各珠要發生變化,有時要把上珠化成下珠。譬如 $4+3=7$ 一題,和數的7,超過了5,記7的時候要用一個上珠,兩

個下珠，而在被加數和加數裏邊都沒有上珠，二數相加時，又不能在被加數的四個下珠上面再堆上加數的三個下珠，非借用上珠不可，於是就起了「上珠分解」的問題。實際上計算這個题目的步驟，不是像筆算上單純的在  $\begin{array}{r} 4 \\ +3 \\ \hline \end{array}$  下面寫上和數7，而是等於把原來的題目變成4(被加數四個下珠)+5(藉用的一個上珠)-2(上珠的值比加數3多餘的數)=，一題運算。口訣也是「三下五去二」，本來的題目是四加三，其中沒有「五」也沒有「二」，何以口訣上有這兩個數目呢？就是計算時要有「上珠分解」的關係。「上珠分解」比單純的「上珠當五」複雜些，不可一踏而就，在教學「上珠分解」前面，要有預備的步驟，所以加法教學的步驟應當是：

1. 第一步，教學4以內的加法。兒童既然有了「數」的概念，向他說拿一個算珠(下珠)當1，兩個算珠當2，三個算珠當3，四個算珠當4，當然是很容易明瞭的。一個算珠當1，再加上一個算珠成兩個算珠，當2，也是很容易明瞭的。這就是加法了。所以珠算上4以內的加法，在常態兒童，只要有了數的概念，是絲毫沒有困難的。4以內的加法共有六題如下：

$$1+1=? \quad 1+2=? \quad 2+1=? \quad 1+3=? \quad 3+1=?$$

$$2+2=?$$

有許多教算術的人，還添上零加各數的問題。零加一數等於該數。以零作被加數，未加數以前算盤空無所有，只是撥上加數而已；以零作加數，撥作被加數以後就完事了。所以零加各數的問題，實際

還是記數的問題，不應該在這裏講。並且零的概念不大容易明瞭，在筆算上零加各數的加法，不能一開始教學加法時就教。在開始學珠算的時候，兒童已經學了三年的筆算了，對於零的觀念當然很清楚了，也無須乎在開始教學珠算時談零的概念了。

2. 第二步，5 的補數的加法，就是和數為 5 的加法。兒童既然明瞭了 4 以內的加法，那麼四個珠加上一個珠，或三個珠加上兩個珠，成五個珠，代表 5，當然也很容易了解。不過在習慣上，到了 5 的時候，不用五個下珠，而用一個上珠，照第三章講的方法，使兒童明白了「五進」的事實，那末把五個下珠換成一個上珠，兒童也很容易明瞭。和數為 5 的加法共有四個如下：

$$2+3=? \quad 3+2=? \quad 1+4=? \quad 4+1=?$$

3. 第三步，5 加 1 至 4 各數，和 1 至 4 各數加 5。兒童明瞭了一個上珠當 5，那末在牠下邊撥上一個下珠就是 6，撥上兩個下珠就是 7，這差不多和單純的記數一樣，當然也很容易了解。兒童能夠了解 5 加 1 至 4 各數，那麼反過來 1 至 4 各數加 5 也可一樣的了解。所以若是兒童會了第二步，這第三步也不成問題。5 加 1 至 4 各數，和 1 至 4 各數加 5 的加法，有八個如下：

$$5+1=? \quad 5+2=? \quad 5+3=? \quad 5+4=? \quad 1+5=?$$

$$2+5=? \quad 3+5=? \quad 4+5=?$$

4. 第四步，9 以內的加法。兒童會了和數為 5 的加法和 5 加 1 至 4 各數，就該教學所有的 9 以內的加法了。這一步就包含了「上珠分

解」的事實，像前邊舉的一個例子， $4+3=7$ ，記和數7時要用上珠，所以在被加數4上不加加數的3，反加一個代表5的上珠，可是這樣一來便成 $4+5=9$ ，不是原來的題目了，所以又必須加以改正，原來加數是3，現在加了5，多加了2，必須把這個2減出來，使和數還等於7，所以實際上計算的步驟，成了 $4+5-2=7$ 。舊的口訣是「三下五去二」，也是這個意思。這一步在珠算加法中是最重要的，也是筆算上沒有的，所以必須特別注意，給兒童詳加解釋。明白了這一步，簡單的加法就不成問題了。9以內的加法除了前三步中給的十八題以外，還有以下各題：

$$\begin{array}{l} 8+1=? \quad 7+1=? \quad 6+1=? \quad 7+2=? \quad 6+2=? \\ 4+2=? \quad 6+3=? \quad 4+3=? \quad 3+3=? \quad 4+4=? \\ 3+4=? \quad 2+4=? \quad 3+6=? \quad 2+6=? \quad 1+6=? \\ 2+7=? \quad 1+7=? \quad 1+8=? \end{array}$$

5. 第五步，9以內連加法。連加法就是三個或三個以上的數目連續相加，如 $3+4+2=?$ 一題。在筆算上，連加是在簡單的加法中最難的一步，因為在筆算上做連加時須要暗記前兩個數目相加後臨時的結果，如 $3+4+2=?$ 一題，做時先使3, 4, 相加，把牠們的和數7記在心裏，再和第三個數2相加，若不能在心裏暗記臨時的結果，連加一定做不對。在珠算上臨時的結果也要在算盤上出現，不必記在心裏，所以在珠算上連加或者不會發生什麼困難，不過也應當特別注意，因為連加是由簡單加法到繁複加法的階梯，連加能做得正確迅速，才

能計算繁複的加法。9以內的連加的題目很多，不必列舉了。

6. 第六步，10的補數的加法，或和數為10的加法。由9以內的加法到和數為10的加法，這是加法中最緊要的一步，其中包有進位的問題。珠算上左一檔的珠，當右一檔的珠的十倍，就要在這個時候說明。兒童開始學珠算時已經學了三年的筆算，對於進位的事實已經很明瞭了，這或者不致發生什麼困難，不過也要特別注意，因為這是由一位加法到兩位加法的橋樑，弄好了這一步，兩位的加法就不致發生什麼嚴重的問題了。和數為10的加法有九個，如下：

$$9+1=? \quad 8+2=? \quad 7+3=? \quad 6+4=? \quad 5+5=?$$

$$4+6=? \quad 3+7=? \quad 2+8=? \quad 1+9=?$$

7. 第七步，10加9以下各基數。這一步很容易，就是在左一檔撥上被加數10(一個下珠)在右一檔撥加數的9以下各基數，或在右一檔撥上被加數1至9各數，在左一檔撥加數10。在這裏要注意的是不要弄錯了位，這一步的加法共有下面十八個：

$$10+1=? \quad 10+2=? \quad 10+3=? \quad 10+4=? \quad 10+5=?$$

$$10+6=? \quad 10+7=? \quad 10+8=? \quad 10+9=? \quad 1+10=?$$

$$2+10=? \quad 3+10=? \quad 4+10=? \quad 5+10=? \quad 6+10=?$$

$$7+10=? \quad 8+10=? \quad 9+10=?$$

8. 第八步，和數在19以下，被加數為兩位數，加數為一位數，或加數為兩位數，被加數為一位數的加法，如  $11+1=?$   $11+2=?$   $12+5=?$   $5+12=?$  ……………等。這裏不包含進位的問題，所以比

起第七步來也不覺得困難。可是第七步中被加數和加數分佔兩檔，沒有直接發生「加」的關係，相加時弄清檔位，把兩數擺在一起就是了；而在第八步中，加數就要實在的「加」在被加數之上了。

9. 第九步，和數在20以上，被加數為兩位數，加數為一位數，或被加數為一位數，加數為兩位數的加法，如  $12+9=?$   $15+7=?$   $8+16=?$   $7+17=?$  ……………等。在這裏包含一個進位的問題，所以比第八步是更進一步。

10. 第十步，被加數加數都是兩位數，沒有進位的加法，如  $11+23=?$   $35+21=?$   $45+13=?$   $56+32=?$  ……………等。在這種加法，十位和十位相加，個位和個位相加，沒有進位的關係，所以好似並列的兩個9以內的加法的問題，自然不會感覺什麼困難的。

11. 第十一步，被加數，加數，和數，都是兩位數，有進位的加法，如  $17+24=?$   $67+15=?$   $36+58=?$   $44+37=?$  ……………等。有了進位，所以比第十步是更進一步。

12. 第十二步，被加數，加數，為兩位數，和數是三位數的加法，如  $47+85=?$   $63+59=?$   $92+78=?$   $78+64=?$  ……………等。每一個題，包含兩層進位，所以比第十一步又進一步。

13. 第十三步，在兩位的加法純熟以後。自然就要教學兩位以上的加法。在教學多位加法時，也要循序而進，不要性急。把基本的習慣養好以後，遇到什麼問題也能應付自如。至於教學多位加數的步驟，不必在這裏敘述，可由教師根據學生的學習程度，參照前面所講

的教學簡單加法的步驟，斟酌進行。在這裏要提一句，就是遇到有連進位時，如  $825+175=?$ ，要特別注意。因為趙冀良先生(參考5)找到，在珠算加法中最容易發生錯誤的就是連進位。

14. 在第六步以後，因為要說明教學的循序而進的「步驟」，所以把連加省略了，其實在每一步後面，都應當有連加法。如在第六步以後，應當有和數為10的連加法，如  $2+3+5=?$   $4+2+4=?$ ……等；第七步以後，可以有  $10+2+5=?$   $10+3+4=?$  一類的連加；第八步以後，可以有  $11+3+2=?$   $5+2+11=?$  一類的連加；第九步以後，可以有  $15+3+4=?$   $5+4+16=?$  一類的連加，還可以有  $8+7+9=?$   $9+5+8=?$  一類的連加；第十，第十一，第十二，三步，每步之後，也都應當有相當的連加法。在前面說過，連加做得正確迅速，才能計算繁複的問題，所以這一點在實際教學上也是應該特別注意的。

## II 練習材料

在天民先生的基數累加的教材中，也有練習的材料，是兩數交互累加，如

$$\begin{aligned} &1+4+1+4+1+4+1+4+1+4+1+4+1+4+1+4+1+4+1+4 \\ &+1+4=50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &6+9+6+9+6+9+6+9+6+9+6+9+6+9+6+9+6+9+6+9 \\ &+6+9=150 \end{aligned}$$

兩數交互着各加十次，得數就等於二數的和數的十倍，所以很容

易訂正。

此外天民先生還有單獨的加法練習材料，分爲二部，第一部是基數的加法。

1. 以自然數或順或逆依次相加，如

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$$

$$9+8+7+6+5+4+3+2+1=45$$

2. 先在算盤上擺上一個自然數再依次加自然數。這類的題目共有十八個。

$$1+1+2+3+4+5+6+7+8+9=46$$

$$2+1+2+3+4+5+6+7+8+9=47$$

.....

$$9+1+2+3+4+5+6+7+8+9=54$$

$$1+9+8+7+6+5+4+3+2+1=46$$

$$2+9+8+7+6+5+4+3+2+1=47$$

.....

$$9+9+8+7+6+5+4+3+2+1=54$$

第二部是兩位數加法的練習，十個連續的自然數依次相加。共有三十六個練習題，如下：

$$(1) 10+11+12+13+14+15+16+17+18+19=145$$

$$(2) 19+18+17+16+15+14+13+12+11+10=145$$

$$(3) 11+12+13+14+15+16+17+18+19+20=155$$

$$(4) 20 + 19 + 18 + 17 + 16 + 15 + 14 + 13 + 12 + 11 = 155$$

$$(5) 20 + 21 + 22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 = 245$$

$$(6) 29 + 28 + 27 + 26 + 25 + 24 + 23 + 22 + 21 + 20 = 245$$

$$(7) 21 + 22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 = 255$$

$$(36) 100 + 99 + 98 + 97 + 96 + 95 + 94 + 93 + 92 + 91 = 955$$

最初可先使兒童練習順次相加的，如(1)(3)(5)……各題，後使練習逆次相加的，如(2)(4)(6)……各題，最後再練習兩種混合的。練習時可使兒童自己考查他的速度的進展。

黃競白先生(參考4)也編過加法練習材料。在加法口訣中，每句口訣代表一種問題和一種撥珠的方法。有一句口訣，黃先生就編有一種練習材料，在不同的情形下包含那句口訣所代表的問題。如「一下五去四」一句口訣，代表  $1+4=?$  一個問題和計算這個問題時撥珠的方法；「一去九進一」一句口訣，代表  $9+1=?$  一個問題和計算這個問題時撥珠的方法。黃先生為這兩句口訣所編的練習材料，就包含個位四加一；十位四加一；個位十位四加一。個位九加一；十位九加一，個位九加一；個位九加一進十，十位進百位。練習材料如下：

一下五去四

$$14 + 11 = \quad 14 + 31 = \quad 24 + 21 = \quad 34 + 51 =$$

$$54 + 21 = \quad 54 + 31 = \quad 54 + 41 = \quad 64 + 11 =$$

$$64+21= \quad 64+31= \quad 74+11= \quad 74+21=$$

$$84+11= \quad 41+17= \quad 42+16= \quad 43+15=$$

$$44+11= \quad 45+14= \quad 46+13= \quad 47+12=$$

一去九進一
-------

$$19+11= \quad 19+21= \quad 29+11= \quad 59+11=$$

$$59+21= \quad 59+31= \quad 69+11= \quad 69+21=$$

$$79+11= \quad 29+21= \quad 19+13= \quad 39+11=$$

$$49+11= \quad 59+41= \quad 59+31= \quad 79+21=$$

$$89+11= \quad 49+51= \quad 39+61= \quad 29+71=$$

此種加法練習材料，共有九種，黃先生說：「照此編製，每種只有兩種練習方法，每種練習方法經過若干習題的練習以後，就自然會成功習慣，而不必死記口訣。並且照樣九種編好以後，學生也可以自己練習。」

徐德春先生(參考3)在他的「珠算不用口訣編造直接練習的系統材料之實驗研究」中，編有四種加法練習材料。第一種是照舊加法口訣改編的加法手語，見本書第四章77至79頁；第二種是照舊法「三盤清」改編的練習材料；第三種是加法上珠，下珠，進珠，退珠，練習材料，見第三章50至51頁，第四種是舊法的「堆百子」，就是  $1+2+3+4+5+\dots+99+100=?$  一個問題，不過計算時不必一定加到100，加至任何數都可以，並且按照對照表可以隨時檢答其結果。對照表如下：

第五表 「堆百子」對照表

做 到	和 數
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
6	21
7	28
8	36
9	45
10	55

97	4753
98	4851
99	4950
100	5050

蔣森先生(參考 8)也提議用堆百子作為加法練習材料。蔣先生還提議應用堆百子時，不防抽出其中若干數，再連續相加，這又變成一種新材料。蔣先生還有一種方法，一方面是撥珠練習材料，一方面也可作加法練習材料。方法是在算盤的某檔上由 1 連續加至 4，得和數 10，進上一檔，再在原檔繼續練習，把進上去的數目作為練習次數。在特定時間內，每人每次練習的次數可以互相比較，每人把每次練習的次數記錄下來，以後還可以用學習曲綫比較進退。記載練習次數的表格可如下式：

手指加法練習成績記載片

月 日			
次 數			

月 日			
次 數			

晏陽先生(參考7)也介紹過這種方法，不過他是用於撥珠練習。各家編製的加法練習材料，都有牠的優點。我們以為加法的練習材料應當有兩種，一種是基本技能的練習材料，一種是熟算或速算的練習材料。黃競白先生的加法練習材料，徐德春先生的加法手語，可算是一種，天民先生的加法練習材料，徐德春先生的其他三種練習材料，可算是後一種。編製加法的基本技能練習材料時，應當先分析加法的基本技能是什麼，也就是加法的技能中包含那些因子，再編製系統的練習材料，使着每一種因子或基本技能都能得到練習的機會。黃先生的加法練習材料和徐先生的加法手語，似乎都沒有顧到這一點。

加法的技能分析起來，不外1至9各基數和1至9各基數相加，每一個基數都有和九個基數相加的機會。所以加法基本技能的練習材料，應當包含所有基數和所有基數的相加。題數等於 $9P_2+9=9\times 8+9=81$ ，全部如下：

$$1+1=? \quad 1+2=? \quad 1+3=? \quad 1+4=? \quad 1+5=? \quad 1+6=?$$

$$1+7=? \quad 1+8=? \quad 1+9=? \quad 2+1=? \quad 2+2=? \quad 2+3=?$$

$$2+4=? \quad 2+5=? \quad 2+6=? \quad 2+7=? \quad 2+8=? \quad 2+9=?$$

$$3+1=? \quad 3+2=? \quad 3+3=? \quad 3+4=? \quad 3+5=? \quad 3+6=?$$

$$3+7=? \quad 3+8=? \quad 3+9=? \quad 4+1=? \quad 4+2=? \quad 4+3=?$$

$$4+4=? \quad 4+5=? \quad 4+6=? \quad 4+7=? \quad 4+8=? \quad 4+9=?$$

$$5+1=? \quad 5+2=? \quad 5+3=? \quad 5+4=? \quad 5+5=? \quad 5+6=?$$

$$5+7=? \quad 5+8=? \quad 5+9=? \quad 6+1=? \quad 6+2=? \quad 6+3=?$$

$$6+4=? \quad 6+5=? \quad 6+6=? \quad 6+7=? \quad 6+8=? \quad 6+9=?$$

$$7+1=? \quad 7+2=? \quad 7+3=? \quad 7+4=? \quad 7+5=? \quad 7+6=?$$

$$7+7=? \quad 7+8=? \quad 7+9=? \quad 8+1=? \quad 8+2=? \quad 8+3=?$$

$$8+4=? \quad 8+5=? \quad 8+6=? \quad 8+7=? \quad 8+8=? \quad 8+9=?$$

$$9+1=? \quad 9+2=? \quad 9+3=? \quad 9+4=? \quad 9+5=? \quad 9+6=?$$

$$9+7=? \quad 9+8=? \quad 9+9=?$$

在熟算或速算練習，天民先生和徐德春先生編製的材料，都可以應用，不過有三點須加注意。

1. 天民先生編製的兩基數交互累加，和自然數依次相加的練習材料；徐德春先生編製的上珠，下珠，進珠，退珠，練習材料，和堆百子，如兒童能盡心練習，自然能使他的計算技能純熟。不過這類的材料，內容簡單，形式機械，恐怕兒童不感興趣；兒童若無興趣，練習的效果必然就減低了。所以應用這種材料時，如何使兒童保持着很高的興趣，這是很該注意的一點。

2. 不要流為機械的撥珠練習。我們在第三章裏說過，用機械的方法練習撥珠，就是練習得撥珠迅速，也未必能在計算題目時計算迅速。因為珠算上計算題目，不只是撥珠的問題，還有計算的歷程。如計算  $9+1=10$  一個問題，「撥去本檔的上一珠下四珠，在左一檔撥上一個下珠」的撥珠動作，固然重要；而「9加1等於10，進位記10」的意識歷程，或計算歷程，更重要。在機械的練習撥珠時，把撥珠動作和計算歷程分開了，只去練習撥珠動作，結果撥珠動作純熟了，而計算歷程沒有進步，所以在實際計算題目時還是不能迅速。所

以在加法練習時，應當使學生時常意識着是在做加法，注意計算歷程，不要盲目的只顧撥珠。曹日昌個人記得早年學習珠算時，會了加法以後，有人便教以連續累加 625 一數，累加至十六次在上兩檔得 1 ( $625 \times 16 = 10000$ )，據說這是「獅子滾綉珠」的另一打法，自己也這樣做，毫不意識到這是在做一個加法，結果後來打這個「玩法」能打得很快了，可是實際計算加法的題目時並不能做這樣快。爲什麼？就是練習時，撥珠動作和計算歷程發生隔離了。在「堆百子」或蔣霖先生提議的連續加 1 至 4 各數的練習中，也很容易發生這種情形，教者應該特別注意。

3. 練習進展的情形，應當使兒童知道。在學習心理學上證明了，學習者若知道了他的學習的進展的情形，對於他的學習是有很大的幫助的，在珠算的練習上，又何嘗不然？所以兒童練習的進展的情形，應當使兒童自己知道。蔣霖先生提議的記載成績的辦法，很可應用。同樣的練習材料，在固定的時間內，每次練習時，都把做的分量記錄下來，以後根據這種記載畫出練習曲線，使兒童一看便知道他的練習的進展的情形，一定會發生興趣，更加奮勉；拿自己的練習曲線和別人的比較，引起了競爭心，以後練習時一定會更加努力。

### III 定位和檢答

在教學加法和其他一切的算法上，有兩件最重要的事，就是定位和檢答。在珠算上定位比較筆算上困難，而在乘除法尤甚。關於乘除法的定位，以後再談，此處只講加法或加減法的定位。在珠算上加減

法的定位，所以比筆算上困難的就是珠算上沒有表示位數的「○」，所以初學的人時常弄錯位數。不過只要記牢了被加數或被減數的原來的個位，得出結果後定位也就不發生什麼困難了，因為和數或差數的個位，也就是原來被加數或被減數的個位。至於為什麼被加數或被減數的個位就是將來的和數或差數的個位，需要教師給學生解說清楚，好這一層借筆算的例子是很容易說明的。

使兒童記憶被加數或被減數的個位的方法很多，在有星徽的算盤上，用星徽標誌要記的個位是絲毫不成問題的。在沒有星徽的算盤上，通常是給兒童一塊粉筆，讓他在撥上被加數或被減數以後，用粉筆在被加數或被減數的個位的檔上作一個記號，以後便拿牠做定位的根據。也有的以算盤上特殊的一檔，如銅鐵絲作柱的一檔，作個位的，以後即以這一檔為定位的根據。自然，用實物來幫助兒童記憶所要記的檔位也沒有什麼弊病，不過在年歲較長或天資較高的兒童，我們也可以訓練他不藉實物的幫助，來記憶要記的檔位，因為這樣又可省去一番手續，或者對於計算的速度上有些幫助。一個普通的算盤上的檔位是很有限的，一個數目的個位的檔位，根據牠在算盤上的相對的位置，是很容易記憶的。不過這種訓練，要只限於高材生，因為在智力平庸的兒童，或者不用實物幫助，就不能記憶被加數或被減數的單位，因此在定位上弄出許多錯誤，那真是「得不償失」了。

計算上頂重要的是正確，計算的結果若有錯誤，還不如不計算。所以開始教學珠算時，就應當使兒童養成自己檢答結果的習慣，計算

的結果要自己檢答，就是自己負責，兒童有了自己負責的習慣，纔不至於敷衍，以為是給教師做算術。自幼就養成了在計算上要求精確的習慣，以後纔能成為良好的會計師，良好的統計家，良好的數學家。

俞子夷先生以為教過 9 以內的連加法以後，就可教兒童自行檢答，因為連加法至少有三個數，計算時照一個次序運算，檢答時照另一個次序運算，不至使兒童感到重複無味。如  $3+4+2=?$  一題，計算時照 3 加 4 加 2 的順序計算，得 9，檢答時可使兒童照 2 加 4 加 3 的順序計算，看看是否還是得 9。這樣好像使兒童算了兩個題目，不會感到重複。其實所謂檢答，並不一定限於形式的演算，凡是自己檢查自己計算的結果是否正確，都可以叫做檢答。這樣說來，教學 9 以內兩數的加法時也未嘗不可使兒童自行檢答。 $8+3=?$  一題，兒童得了結果以後，再使他自己仔細考查一下，看看自己的結果是否正確，就是檢答了。

在筆算上有算草，檢答時很方便，只就算草再考查一下就成了。珠算上沒有算草，計算完畢以後，算盤上只單單的擺着答數，檢答時差不多是要重算一次，這樣也許兒童會感到重複，也許因為演算的歷程相同，計算時發生的錯誤在重算時還照樣發生，所以計算加法，檢答時，如其重算，不如用減法。有了和數以後，再從和數減去原來的加數或被加數，看看結果是否等於原來的被加數或加數，如二者相等，和數就是正確的，如二者不相等，就是有了錯誤，須要重算。（加法減法差不多是要同時開始教學的，所以記算加法時檢答可用減法，

參看第十三章。)

## VI 總結提要

關於珠算加法教學的問題，在本章討論過的有下列三點：

1. 教學加法應當詳分步驟，循序而進。以曹日昌個人的意見，至少要分十幾步。

2. 加法練習材料，宜分為基本技能練習材料和熟算練習材料。前者要系統的顧到加法中所有的基本技能，應用後者須(一)內容豐富，使兒童感到興趣；(二)不至流為機械的撥珠練習；(三)使兒童知道自己的練習的進展的狀況。

3. 開始教學時，即使兒童注意定位，能不用實物的幫助更好，還要養成兒童自行檢答結果的習慣。

### 本章參考

1. 天民(民國三年)：蒙台梭利教育原理珠算教授法。教育雜誌，第六卷第四號，95—111頁。
2. 俞子夷(民國二十年)：小學算術科教學法。商務印書館。
3. 徐德春(民國二十三年)：珠算不用口訣編造直接練習的系統材料之實驗研究。浙江教育行政周刊，第五卷第四十期(總二四八號)。
4. 黃競白(民國二十三年)：民校算術教學問題的商討。教育與民衆，第五卷第十期，37—49頁。

- 
5. 趙冀良(民國二十三年)：平民學校珠算教學之實驗。教育與民衆，第五卷第十期，49—63頁。
  6. 唐海滄(民國二十四年)：改革小學珠算教學芻議。進修半月刊第四卷第十期，6—11頁。
  7. 晏揚(民國二十四年)：珠算的指法練習。教師之友，第一卷第九期，1340—1343頁。
  8. 蔣霖(民國二十四年)：珠算教學的小貢獻。江蘇小學教師半月刊，第二卷第十期，7—9頁。

## 第六章 減法

I 教學減法的步驟……………113

II 練習材料……………117

III 總結提要……………119

### I 教學減法的步驟

減法是加法的反面，所以教學減法的步驟差不多都可和教學加法的步驟相對照。天民先生(參考1)以為教學減法可以分為三個大的步驟：第一步是「準備教授」。在準備教授中(1)先教本檔可減的也就是沒有借位的減法，(2)再教本檔無可減的也就是有借位的減法，在這一步中要使兒童就實際的情形切實的明瞭了「借」的意義。天民先生給了一個說明「借」的道理的方法，給兒童九十九文錢，使他在算盤上記着。支八文，使他同時在算盤上計算，兒童當然可以做這一個減法。再支八文，再使他同時在算盤上計算，這時兒童自然就會明白「借」的道理了。

第二步教學基數的累減。先教5的累減，以99為被減數，累次減5，也使兒童自己探尋本檔無上珠時的辦法。以後再順序教9，8，7，6，4，3，2，1，各數的累減。也都以99為被減數，因為99是最方便的被減數，無論減什麼基數，第一次總有減的。第三步教一般的減法，也要特別注意被減數中間有空位時「借」的算法。

唐海滄先生(參考4)以為初教減法應當和教加法一樣，也分三步。

第一步教「直接減法」，「直接減法」和「直接加法」的意義相似，就是不包含上珠化下珠和借位的減法，如 $896-625=?$ 一類的題目。第二步教「五的減法」，就是包含上珠化下珠的算題，如 $567-123=?$ 。第三步教「十的減法」，就是包含借位的題目，如 $24-6$ 等。

天民先生和唐海滄先生定的步驟大致是對的，可惜就是太簡略。我們以為在實際教學減法時還須詳盡些，應當採下列的步驟。

1. 第一步，教學4以下的減法。這也同加法一樣，是最初步的東西，兒童只要有數的概念，就可以做。這類減法共有下列十題：

$$2-1=? \quad 3-1=? \quad 4-1=? \quad 3-2=? \quad 4-2=? \quad 4-3=?$$

$$1-1=? \quad 2-2=? \quad 3-3=? \quad 4-4=?$$

2. 第二步，9以下的減法(一)。這樣減法比起第一步的來只是被減數都有上珠，可是上珠都不變動，所以比前一步的也沒有什麼困難。這類減法共有下列十題：

$$6-1=? \quad 7-1=? \quad 7-2=? \quad 8-1=? \quad 8-2=? \quad 8-3=?$$

$$9-1=? \quad 9-2=? \quad 9-3=? \quad 9-4=?$$

3. 第三步，9以下的減法(二)。前一步是只動下珠，這一步是只動上珠，所以難易相差很少。題目如下：

$$6-5=? \quad 7-5=? \quad 8-5=? \quad 9-5=? \quad 5-5=?$$

4. 第四步，9以下的減法(三)。這一步是前兩步的合併，既動上珠又動下珠。題目共有十個，如下：

$$7-6=? \quad 8-6=? \quad 8-7=? \quad 9-6=? \quad 9-7=? \quad 9-8=?$$

$$6-6=? \quad 7-7=? \quad 8-8=? \quad 9-9=?$$

5. 第五步，5減4以下各數。這一步就包含了上珠化下珠的手續。前章已經講過了，這一步是珠算中特有的一步，應當特別注意，教學時要講解不厭周詳，務使兒童明瞭為止。所謂上珠化下珠，也是「借」的一種。普通所謂「借」，是自上一位或上一檔借，如  $\overset{10}{-4}$ ，被減數個位為零，無可減者，所以由十位「借」10，減去減數4，餘6，放在個位裏。這是筆算珠算中共有的。所謂上珠化下珠，是自本檔借，如  $\overset{5}{-3}$ ，雖然本檔夠減的，然而數目在上珠上，而減時要用下珠，或從下珠裏減，下珠沒有，或者不夠減的，所以自上珠裏借5，減去減數3，餘2，放在下珠裏，這是珠算上特有的。兒童在筆算上早已明瞭了前一種的借法，這後一種的借法，若講得清楚，兒童當然也很容易明白。這一步應有的題目如下：

$$5-1=? \quad 5-2=? \quad 5-3=? \quad 5-4=?$$

6. 第六步，9以下的減法(四)。這一步是前五步的合併，所有9以內的減法都包括在內了。一位減法的教學，到了這一步，也就完全成功了。所有9以內減法共計四十五題，除了前五步中列舉的三十九個以外，還有下列六題：

$$6-2=? \quad 6-3=? \quad 6-4=? \quad 7-3=? \quad 7-4=? \quad 8-4=?$$

7. 第七步，10減各基數。在這一步要講「借」的算法，好在兒童在筆算上早已明瞭「借」的算法了，所以這一步也不會發生什麼困難。有九個基數，自然這一類的題目便有九個。

$$10-1=? \quad 10-2=? \quad 10-3=? \quad 10-4=? \quad 10-5=?$$

$$10-6=? \quad 10-7=? \quad 10-8=? \quad 10-9=?$$

8. 第八步，19以下各數減9以下各數(一)○沒有「借」的，其中還可分為兩部分：第一部是不包含上珠化下珠的，如  $18-3=?$   $19-2=?$   $17-1=?$ ……各題等於一至四各步的減法，只是被減數有十位，不過這十位不發生變動。第二部是包含上珠化下珠的，如  $17-3=?$   $18-4=?$   $16-3=?$ ……各題，除了被減數有十位以外，和第六步的減法相似。

9. 第九步，19以下各數減9以下各數(二)○有「借」的，如  $12-7=?$   $11-4=?$   $15-8=?$   $17-9=?$ ……等題。在這種題目中，被減數的個位有數目，借來的10減去減數後的餘數，還要加在被減數的個位上，所以這一步是比第七步更進一步。

10. 第十步，20以上各數減10，如  $25-10=?$   $41-10=?$ ……各題。這是兩位減法的第一步。

11. 第十一步，20以上各數減10至20各數。如  $25-12=?$   $37-14=?$ ……等題。在這一步中還可先教沒有「借」的，如  $25-12=?$   $37-14=?$ ……各題；後教有借的，如  $21-14=?$   $36-18=?$ ……各題。

12. 第十二步，兩位和兩位以上的減法。兒童會了第十一步的減法以後，就可教學兩位和兩位以上的減法了。這裏的教學步驟，不必細講了。總之也要分步驟，分步驟的原則是「由簡入繁」，增加上珠化下珠和「借」兩種因子，就是由簡變繁的方法。而增加隔位借，如

$813-517=?$  一題中借法，更是足以增加題目的難度。因為趙冀良先生(參考3)找到隔位借是珠算減法中最難的一部分。教到這類的算題時，也要特別注意。

13. 加法中有連加，減法中也有連減；在加法中每步後都可以有連加，在減法中每步後也都可以有連減。如果願意早開始教學連減，在第一步以後就開始也未嘗不可。很明顯的，第一步之後就可有  $4-2-1=?$  一類的連減，第二步之後可以有  $9-2-2=?$  一類的連減，第三四步之間可以有  $9-3-5=?$  一類的連減。不過在第六步之後，開始教學連減，也不為晚。第六步之後，可以有  $9-4-3=?$   $8-4-2=?$ ……等連減，第七步以後可以有  $10-3-5=?$   $10-1-6=?$ ……等連減，第八步以後可以有  $18-2-3=?$ ，  $16-1-4=?$ ……一類的連減，第九步以後可以有  $15-3-6=?$ ，  $17-2-6=?$ ……一類的連減。第十，第十一，第十二，各步之後，也都可有各種的連減，是更不成問題了。

## II 練習材料

減法的練習材料，自然也可分為基本技能練習材料和熟算練習材料兩種。徐德春先生(參考2)的減法手語，也可算是減法基本技能練習材料。徐先生的減法手語共有二十二個，計分三類：第一類是餘數為零的，有下列九題：

$$1-1=? \quad 2-2=? \quad 3-3=? \quad 4-4=? \quad 5-5=? \quad 6-6=?$$

$$7-7=? \quad 8-8=? \quad 9-9=?$$

第二類是5減小於5的基數，有下列四題：

$$5-1=? \quad 5-2=? \quad 5-3=? \quad 5-4=?$$

第三類是10減各基數，有下列九題：

$$10-1=? \quad 10-2=? \quad 10-3=? \quad 10-4=? \quad 10-5=?$$

$$10-6=? \quad 10-7=? \quad 10-8=? \quad 10-9=?$$

徐先生的減法手語，是系統的，不過這些似乎不能算是包括了一切的減法基本技能。我們以為減法的基本技能是所有的1至10各數減1至9各數的算法，所以基本技能練習材料就應當包括所有的這些算法。這也就是在前節前七步內所講的算法，為清楚起見，現在更系統的列舉如下：

$$1-1=? \quad 2-1=? \quad 2-2=? \quad 3-1=? \quad 3-2=? \quad 3-3=?$$

$$4-1=? \quad 4-2=? \quad 4-3=? \quad 4-4=? \quad 5-1=? \quad 5-2=?$$

$$5-3=? \quad 5-4=? \quad 5-5=? \quad 6-1=? \quad 6-2=? \quad 6-3=?$$

$$6-4=? \quad 6-5=? \quad 6-6=? \quad 7-1=? \quad 7-2=? \quad 7-3=?$$

$$7-4=? \quad 7-5=? \quad 7-6=? \quad 7-7=? \quad 8-1=? \quad 8-2=?$$

$$8-3=? \quad 8-4=? \quad 8-5=? \quad 8-6=? \quad 8-7=? \quad 8-8=?$$

$$9-1=? \quad 9-2=? \quad 9-3=? \quad 9-4=? \quad 9-5=? \quad 9-6=?$$

$$9-7=? \quad 9-8=? \quad 9-9=? \quad 10-1=? \quad 10-2=? \quad 10-3=?$$

$$10-4=? \quad 10-5=? \quad 10-6=? \quad 10-7=? \quad 10-8=? \quad 10-9=?$$

關於熟算練習材料，天民先生編製的教材中的基數累減，就可做為熟算練習。蔣霖先生(參考5)提義的「遞減法」，就是規定一個被減

數，自某數連續減至某數，也可應用。把「堆百子」反過來，作為減法練習，也未嘗不可。先在算盤擺上5050，作為被減數，再遞減1至99，或99至1各數。此外可作熟算練習材料的還多的很，不必一一列舉了，由教者自行編製去吧。不過在應用熟算練習材料時，也要注意在前一章內所說的三點：(1)內容豐富，使兒童感到興趣；(2)不要流為機械的撥珠練習；(3)使兒童知道自己的練習的進展的狀況。

### III 總結提要

總結在本章討論過的有兩點：

1. 教學減法要分步進行，由開始教學至兩位和兩位以上的減法，至少要分十幾個步驟。

2. 練習材料可分為基本技能練習材料和熟算練習材料。基本技能練習材料要包括所有的1至10各數減1至9各數的算法。可做熟算練習材料的很多，只要顧到了內容和兒童的興趣，教者可隨意編製。在應用時要注意(1)不要流為機械的撥珠練習，(2)使兒童知道自己的練習的進展的狀況。

此外還有和加法的教學中一致的兩點：(1)使兒童注意定位，能不藉實物的幫助更好；(2)養成自行檢答的習慣。減法的檢答有兩種方法，第一種是由被減數中減去差數，看結果是否等於原來的減數；第二種是減數和差數相加，看結果是否等於原來的被減數。二者比較起來，應用第二種方法較好，因為這樣不但使兒童檢答結果，還可以藉此更了解了加法和減法的關係。

## 本章參考

1. 天民(民國三年)：蒙台梭利教育原理珠算教授法。教育雜誌，第六卷第四號，95—111頁。
2. 徐德春(民國二十二年)：珠算口訣改用手語法的一個嘗試計劃。浙江教育行政周刊，第五卷第七期(總二一五號)。
3. 趙冀良(民國二十三年)：平民學校珠算教學之實驗。教育與民衆，第五卷第十期，49—63頁。
4. 唐海滄(民國二十四年)：改革小學珠算教學芻議。進修半月刊，第四卷第十期，6—11頁。
5. 蔣霖(民國二十四年)：珠算教學的小貢獻。江蘇小學教師半月刊。第二卷第十期，7—9頁。

## 第七章 乘法

I 教學乘法的步驟.....	121
II 一位乘法.....	123
III 多位乘法.....	125
IV 定位.....	131
V 檢答.....	134
VI 練習材料.....	135
VII 總結提要.....	136

### I 教學乘法的步驟

比較的，教學乘法的步驟比教學加減法的步驟要簡單些，一方面因為乘法的性質和加減法不同，一方面因為開始教學乘法時，兒童的經驗與開始教學加減法時不同，因為開始教學乘法時，兒童已經學過加減法了，可說在算術上已經有了相當的根底了。

天民先生(參考 1)以為教學乘法應當分三個步驟：第一步，教學「倍基數相乘」，就是一位的乘法。先教 2 的乘法，注意於乘積的定位和教材的排列。教材如下：

(1) $321 \times 2 = ?$	(2) $123 \times 2 = ?$
$4321 \times 2 = ?$	$1234 \times 2 = ?$
$54321 \times 2 = ?$	$12345 \times 2 = ?$
⋮	⋮
$987654321 \times 2 = ?$	$123456789 \times 2 = ?$

以後順序教 3,4,5,6,7,8,9 的乘法，教材的組織和 2 的乘法的教材相似。

第二步，教學兩位的乘法，教材的組織也和 2 的乘法相似。

$$(1) 321 \times 21 = ?$$

$$(2) 123 \times 21 = ?$$

$$4321 \times 21 = ?$$

$$1234 \times 21 = ?$$

$$54321 \times 21 = ?$$

$$12345 \times 21 = ?$$

⋮

⋮

$$987654321 \times 21 = ?$$

$$153456789 \times 21 = ?$$

被乘數共有十八個，乘數有 21,32,43,54,65,76,87,98,12,23,34,45,56,67,78,89,等十六個，所以共可有題二百八十八個，依題練習，很夠應用。

第三步，教學三位以上的乘法，可使兒童仿照上列的教材自己編造問題，練習，檢答。

天民先生編製的教材有些不妥，被乘數的 123456789, 987654321 等數，是兒童不能了解的，在他的經驗裏沒有這樣的數的概念，在實際上也很少這樣的數量，兒童學了牠也沒有用。兒童若不能了解教材，必然成了機械的學習，那遠不是教學乘法的目的。不過天民先生定的教學步驟是很對的，無疑的，教學乘法是應當先教一位的乘法，再教兩位的乘法，最後教兩位以上的乘法。這個根本的步驟是不用再討論了，在下兩節我們專討論一位乘法和多位乘法的教學。

## II 一位乘法

所謂一位乘法，係指：(1)被乘數一位乘數一位的乘法和(2)被乘數多位乘數一位的乘法。我們先討論前者。

教學一位數乘一位數的乘法，可照天民先生所定的步驟，先教學2的乘法，以後順序教學3,4,5,6,7,8,9，各數的乘法。在敘述上自然有先後，實際上大多數的兒童會了2或任何一個基數的乘法以後，其他基數的乘法同時也就會了，所謂「先教2的乘法，以後順序教學3,4,……各數的乘法，」只是教學進程的敘述，並不包含兒童會了2的乘法以後，不特別教學不會3的乘法的意義。所以教學一位數乘一位數的乘法的主要問題，不在兒童會了一種基數的乘法以後如何教學其他基數的乘法，而在如何首次開始教學一個基數的乘法。

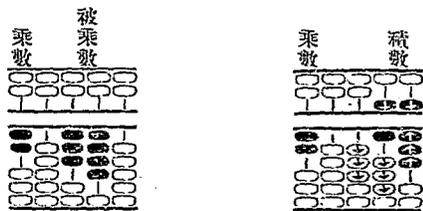
兒童學習珠算乘法時，筆算的乘法早已學過了，下列三題無論用筆算用心算兒童都會做的，現在的問題只是在珠算上如何演算這些題

$$4 \times 2 = ? \quad 5 \times 2 = ? \quad 6 \times 2 = ?$$

目。說得具體一些：在那裏撥被乘數？那裏撥乘數？那裏撥積數？這幾個問題，都不妨先讓兒童自己去想解決的方法，然後再由教師指出正當的方法。被乘數和乘數擺在什麼地方都可以，不過在算盤上二者須有相當的距離。最主要的是積數，牠不另佔第三個位置，而就佔據被乘數的地方，撥積數時要先把被乘數去掉，再撥上積數；更緊要的是積數的個位要撥在被乘數個位的下一檔，積數的十位纔撥在被乘數的個位的檔上。如上列三題， $4 \times 2 = 8$ ，積數的8要撥在被乘數的右

一檔，同時把被乘數4撥去。 $5 \times 2 = 10$ ，積數的10要撥被乘數5的檔上，同時把5撥去。運算的手續是把上珠(代表被乘數5)撥去，在同檔撥上一個下珠(代表積數10)。 $6 \times 2 = 12$ ，積數的十位數10，要撥在被乘數6的檔位，積數的個位數2，撥在下一檔。運算的手續是撥去被乘數6的上珠(除一下珠代表積數十位數的10)，再在下一檔撥上兩個下珠(代表積數個位數的2)。在這裏兒童有兩點不容易明瞭，第一，為什麼積數要撥在被乘數的地方，撥積數時要把被乘數去掉？第二，為什麼積數的十位數要撥在被乘數的個位的檔位，個位數要撥在下一檔？若使兒童能切實的明瞭這兩點，須待他學了一位數乘多位數的乘法以後，我們現在就講一位數乘多位數的乘法。

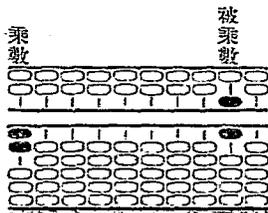
教學一位數乘多位數的乘法，應當自被乘數的各位數和乘數相乘都不超過10的乘法教起，如 $34 \times 2 = ?$ 一題，乘數乘被乘數的個位數



4得8，撥在4的下一檔，把4撥去；乘數乘被乘數的十位數3得6，撥在3的下一檔，把3撥去；乘個位數得的積和乘十位數得的積不相混，只是並列着擺在算盤上。所以 $34 \times 2 = ?$ 一個題目，好像是並列着的 $4 \times 2 = ?$ 和 $30 \times 2 = ?$ 兩個題目一樣，兒童自然不會感到大的困難。這類的題目會了以後，再教 $63 \times 2 = ?$ 一類的題目，在這

裏被乘數的十位數6和乘數的乘積是超過10的。再後教  $67 \times 2 = ?$  一類的題目，被乘數的個位數和十位數和乘數的乘積都是超過10的。一位數乘兩位數的乘法學會以後，就該教學一位數乘三位以及三位以上的數的乘法了。

現在可以談前面提的那兩個問題了。第一個是為什麼積數要撥在被乘數的地方，撥積數時要把被乘數去掉？或者說運算時要把被乘數改為積數。這可說是珠算上的「慣例」，在加法中運算時是把被加數改為和數，減法中是把被減數改為差數，乘法中也是把被乘數改為積數。珠算與筆算不同，在筆算上演算時被乘數和乘數上下並列，如  $\begin{array}{r} 8 \\ \times 5 \\ \hline 40 \end{array}$ （被加數和加數，被減數和減數也是一樣），二者連讀非常容易，在牠們下面寫積數也很容易，因為能和被乘數和乘數的位數上下對照，積數的位數也不容易弄錯。在珠算上就不同了，被乘數和乘數是左右並列，並且當中有着相當的距離，連讀起來就已經感困難了，若另在牠們之外，第三個地方撥積數，因為沒有被乘數或乘數的位數作根據，定積數的位數時一定更感困難，計算時也一定要常鬧錯誤。在簡單的題目中還沒有什麼。如  $6 \times 2 = 12$  一題，在算盤上是先要擺成下列的樣子：

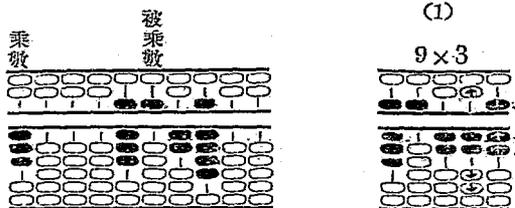




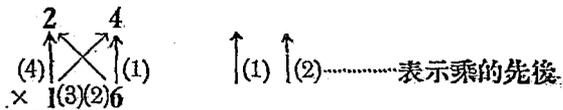
感到這種撥積方法的困難，那末爲什麼積數要撥在被乘數的地方，也就是運算時爲什麼要把被乘數改成積數，兒童當可了了了。

第二個問題爲什麼積數的十位數要撥在被乘數個位的檔位，個位數要撥在更下一檔？只要給兒童一個一位數乘多位數的乘法，讓他在演算時注意一下就明白了。我們選用前一個例題， $8529 \times 3 = ?$

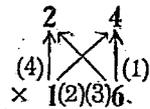
運算步驟



有一步運算步驟，已經夠了。在珠算上乘法的運算步驟與筆算上稍有不同，在筆算上是以乘數的一位遍乘被乘數各位，如  $\begin{array}{r} 24 \\ \times 16 \\ \hline \end{array}$  一題，運算步驟的先後是：



而在珠算上則爲以乘數的各位遍乘被乘數的一位，上列一題的運算步驟是：



所以被乘數的第一位數，沒有爲乘數的各位數都乘遍以後，被乘數的第二位數是不能動的，所以被乘數的第一位數在「被乘」的過程中，

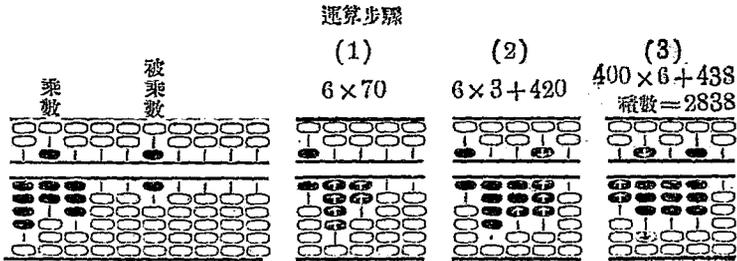
是不能侵動被乘數的第二位數的。這也就是爲什麼積數的十位數要撥在被乘數個位的檔位，而個位數要撥在下更一檔了。譬如前一題  $8529 \times 3$ ，在運算的第一步  $9 \times 3 = 27$  只有把積數 27 的十位數 2 撥在原來被乘數第一位數 9 的檔位，積數 27 的個位數 7 撥在原來被乘數的第一位數的下一檔，纔不致侵碍被乘數的第二位數 2，如果把積數的個位數 7，撥在原來被乘數 9 的檔位，積數的十位數 2 撥在上一檔，那末被乘數的第二位數 2 加積數的十位數 2 變成 4 了，那還怎樣繼續演算呢？說到這裏，兒童一定可以明白爲什麼積數的十位數要撥在被乘數個位的檔位，個位數要撥在更下一檔了。

### III 多位乘法

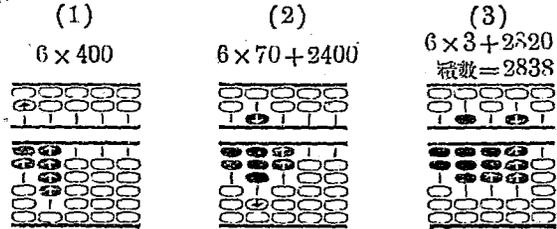
所謂「多位乘法」就是乘數是多位數，被乘數是一位或多位數的乘法。在多位乘法的教學中，第一個問題就是：教學那種算法？大家都知道多位乘法有三種不同的算法，第一種叫做「留頭乘」，第二種叫做「破頭乘」，第三種叫做「掉尾乘」。留頭乘是運算時先用乘數的第二位數乘被乘數的某位數，再用乘數的第三位，再用第四位，第五位……最後纔用第一位。因爲乘的時候，乘數的「頭」一位要「留」在最後用，所以叫做「留頭乘」。破頭乘是運算的時候先用乘數的第一位數乘被乘數的某位數，以後再用第二位，第三位，一直照順序乘下去。因爲第一次就用乘數的頭一位去乘，所以叫做「破頭乘」。所謂掉尾乘，是運算時先用乘數的末位數乘被乘數的某位數，再用倒第二位，倒第三位，……因爲先用乘數的末「尾」一位數，所以叫做「掉尾乘」。如

$6 \times 473$  一題，三種算法的運算步驟各如下列：

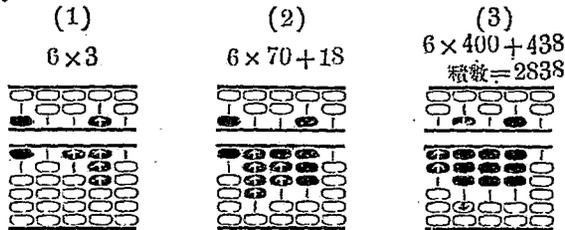
1. 留頭乘



2. 破頭乘



3. 掉尾乘



現在我們可以把三種方法作一個比較。破頭乘第一步就把被乘數的某位數變成積數了，這在簡單的乘法中，不致發生什麼問題，在繁複的乘法中恐怕這被乘數的某位數有被遺忘的危險。如在前一個例題中，第一步便把被乘數 6 變為積數 2400 了，第二步用乘數的第二位數 70 乘

被乘數的時候，在很小的兒童說不定會把牠忘記了，在繁雜的乘法中這種可能性更大。掉尾乘沒有忘掉被乘數的危險，可是牠也有一個困難點，就是找第一步的積數的檔位。如在前一例題中，第一步的積數18應該撥在那一檔呢？這在幼小的兒童是很成問題的。所以破頭乘和掉尾乘都有特殊的缺點，比較起來，沒有缺點或缺點最小的要算留頭乘了。牠一方面是先用乘數的第二位數乘被乘數的某位數，積數的檔位不致成什麼問題；一方面在乘的過程中被乘數的某位數是保留在算盤上，不至於忘記而發生錯誤。所以留頭乘應用的比較其他兩種算法都普遍些，在學校教學多位乘法時，也應該教兒童應用留頭乘。自然，為說明比較，破頭乘和掉尾乘也都可以在適當的時間內介紹給兒童的。不過也有和我們的意見相反的，譬如唐海滄先生(參考4)主張乘法一概用掉尾乘。為什麼？唐先生沒有說。閻生夫先生(參考5)主張兩位的乘法用掉尾乘，兩位以上的用留頭乘。我們知道在兩位的乘法中，留頭乘和掉尾乘是一樣的，所以閻先生倒可以說是和我們有相同的意見的。

在教學多位乘法時兒童最不容易明白的是運算的步驟，這可和筆算比較說明。例如前邊舉過的一個例子， $24 \times 16 = ?$  一題，在筆算中運算的步驟是：

$$\begin{array}{r} \quad 2 \quad \quad 4 \\ \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \\ (4) \uparrow \quad \quad \uparrow (1) \\ \times 1(3)(2)6 \\ \hline \end{array}$$

在珠算中運算的步驟是：

$$\begin{array}{r} 2 \quad 4 \\ (4) \uparrow \quad \times \quad \uparrow (1) \\ \times \quad 1(2)(3)6 \\ \hline \end{array}$$

說明運算的步驟時，教師可以在大算盤演算示範，同時說明各步的積數應在的檔位，兒童明白了運算的步驟，和運算時各步的積數應在的檔位，多位乘法自然就會算了。

教學多位乘法時，可以先教乘數兩位被乘數一位的乘法，次教乘數三位被乘數一位的乘法，然後教乘數兩位被乘數兩位的乘法，以後更順序教逐漸繁難的算法。

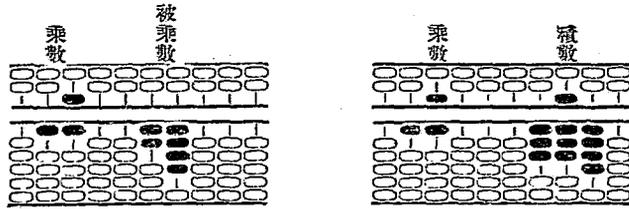
#### IV 定位

珠算中乘法的定位比在加減法中困難了，所以在乘法中定位的問題比在加減法中更重要。趙冀良先生(參考3)根據珠算測驗的結果，找到「乘法中點位(定位)跟算法一樣要緊，且較為困難。」可見乘法的定位是更不容忽視了。

乘法中定位的方法，是在被乘數的個位數檔位的右邊，乘數是幾位數，便加上幾檔，那最右一檔便是積數的個位數的檔位。所以乘數若是兩位數，積數的個位檔便在被乘數的個位檔的右兩檔，乘數若是三位數，積數的個位檔便在被乘數的個位檔的右三檔。若使兒童明白乘法定位的方法，應當使他一方面有實際的證驗，一方面有理論的瞭解。

給兒童一個算題， $24 \times 16 = ?$  使他先用筆算算出來，知道積數

是等於384,三百八十四個,然後再用珠算計算,結果算盤上呈現着下列的樣子:



兒童既然知道了積數,算盤上的當然也知道是三百八十四個。這時教師可使兒童考查積數的個位檔和被乘數的個位檔的關係,兒童當然可以看出積數的個位檔比被乘數的個位檔向右移了兩檔,這時教師再提示給他乘數就是兩位數。再用同樣的方法,使兒童演算乘數是一位數的乘法,乘數是三位,四位的乘法,使他們切實的明白了乘數的位數,和積數的個位檔,及被乘數的個位檔,三者的關係,兒童自然就了解了乘法的定位的方法了。

在理論方面,還可使兒童明瞭積數的位數,等於乘數的位數加被乘數的位數,或等於乘數的位數加被乘數的位數減一。如乘數和被乘數的最高位數相乘,積數等於或超過10,則積數的位數等於乘數的位數加被乘數的位數;如乘數和被乘數的最高位數相乘,積數在10以內,則積數的位數等於乘數的位數加被乘數的位數減一。舉例說明如下:

$$24 \times 16 = 384$$

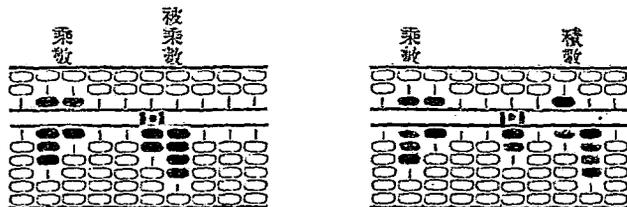
在這個題目中,乘數的最高位數,1(16的10),和被乘數的最高

位數 2 (24的20)，相乘得 2，在10以內，所以積數的位數應當等於乘數的位數加被乘數的位數減一。結果恰是這樣，乘數的位數是二，被乘數的位數是二，二者相加得四，減一得三，而積數 384 就是個三位數。再如下題

$$24 \times 86 = 2064$$

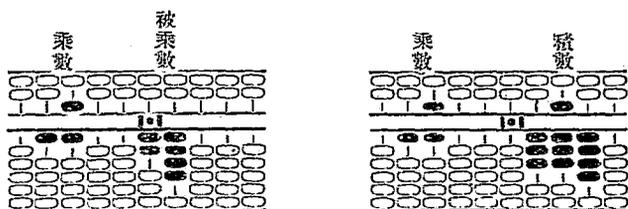
乘數的最高位數 8 乘被乘數的最高位數 2 得 16，超過了 10，所以積數的位數應當等於乘數的位數加被乘數的位數。結果恰是這樣，乘數的位數是二，被乘數的位數是二，二者相加得四，積數也就是一個四位數。

兒童明白了這個道理，對於珠算上乘法的定位更容易了解。珠算乘法的定位方法是在被乘數的個位檔右邊照乘數的位數加幾檔，那最右一檔就是積數的個位檔。如果乘數的最高位數乘被乘數的最高位數，積數等於或大於 10，被乘數的最高位數的檔位撥上了積數的最高位數，那末積數所佔的檔數(也就是位數)就等於被乘數所佔的檔數加乘數所佔的檔數。如上例題



在被乘數最高位數的檔上(有星徽☆作記)撥上了積數的最高位數 2，

所以積數所佔的檔數等於被乘數所佔的檔數加乘數所佔的檔數。如果乘數的最高位數乘被乘數的最高位數，積數在10以下，那末積數的最高位數要撥在被乘數的最高位數的右一檔，積數所佔的檔數自然就等於被乘數的檔數加乘數的檔數減一了。如上例題



積數的最高位數3撥在被乘數的最高位數的右一檔，積數所佔的檔數自然就等於被乘數所佔的檔數加乘數所佔的檔數減一了。這不是和前面說的「積數的位數等於乘數的位數加被乘數的位數，或等於乘數的位數加被乘數的位數減一」一樣嗎？兒童明白了一樣，對另一樣自然也就明白了。

## V 檢答

在教學乘法時也和教學加法時一樣，應該在很早的時期就使兒童自行檢答結果。在一位的乘法中，檢答時可用連加法，如 $7 \times 3 = 21$ 一題，檢答可按 $7 + 7 + 7 = ?$ 一題計算。這樣還可使兒童更切實的了解了加和乘的關係。在多位乘法中，檢答時可用被乘數和乘數互易相乘，如 $24 \times 16 = 384$ 一題，檢答時可按 $16 \times 24 = ?$ 一題計算。這樣還可使兒童明白乘數和被乘數二者互換位置對於積數是沒有影響

的，以檢計算乘法時為方便計，可以任意變乘數為被乘數，被乘數為乘數。如  $16 \times 273 = ?$  一題，計算時就可變為  $273 \times 16 = ?$  這樣計算就方便多了。在教學繁複的乘法時，兒童或者就學了除法，那末檢答時又可用除法了。如  $24 \times 86 = 2064$  一題，檢答時可按  $2064 \div 24 = ?$  或  $2064 \div 86 = ?$  一題計算。這樣又可使兒童切實的明瞭乘和除的關係。所以使兒童自行檢答結果，不只是使他對自己計算的結果負責，能求得精確的結果，還可使他學習一些新的東西，對整個的算術能作更澈底的了解。

## VI 練習材料

乘法的基本技能練習材料似乎應該和乘法口訣一樣的組織，因為這樣才可以把基本的乘法技能都顧到。徐德春先生(參考 2)的乘法手語，也可說是乘法基本技能練習材料，也是和乘法口訣組織一樣的。為清楚起見，現在再把基本乘法列舉如下，乘法的基本技能練習材料也就該是這些了：

$$1 \times 1 = ? \quad 1 \times 2 = ? \quad 1 \times 3 = ? \quad 1 \times 4 = ? \quad 1 \times 5 = ? \quad 1 \times 6 = ?$$

$$1 \times 7 = ? \quad 1 \times 8 = ? \quad 1 \times 9 = ? \quad 2 \times 1 = ? \quad 2 \times 2 = ? \quad 2 \times 3 = ?$$

$$2 \times 4 = ? \quad 2 \times 5 = ? \quad 2 \times 6 = ? \quad 2 \times 7 = ? \quad 2 \times 8 = ? \quad 2 \times 9 = ?$$

$$3 \times 1 = ? \quad 3 \times 2 = ? \quad 3 \times 3 = ? \quad 3 \times 4 = ? \quad 3 \times 5 = ? \quad 3 \times 6 = ?$$

$$3 \times 7 = ? \quad 3 \times 8 = ? \quad 3 \times 9 = ? \quad 4 \times 1 = ? \quad 4 \times 2 = ? \quad 4 \times 3 = ?$$

$$4 \times 4 = ? \quad 4 \times 5 = ? \quad 4 \times 6 = ? \quad 4 \times 7 = ? \quad 4 \times 8 = ? \quad 4 \times 9 = ?$$

$$5 \times 1 = ? \quad 5 \times 2 = ? \quad 5 \times 3 = ? \quad 5 \times 4 = ? \quad 5 \times 5 = ? \quad 5 \times 6 = ?$$

$$5 \times 7 = ? \quad 5 \times 8 = ? \quad 5 \times 9 = ? \quad 6 \times 1 = ? \quad 6 \times 2 = ? \quad 6 \times 3 = ?$$

$$6 \times 4 = ? \quad 6 \times 5 = ? \quad 6 \times 6 = ? \quad 6 \times 7 = ? \quad 6 \times 8 = ? \quad 6 \times 9 = ?$$

$$7 \times 1 = ? \quad 7 \times 2 = ? \quad 7 \times 3 = ? \quad 7 \times 4 = ? \quad 7 \times 5 = ? \quad 7 \times 6 = ?$$

$$7 \times 7 = ? \quad 7 \times 8 = ? \quad 7 \times 9 = ? \quad 8 \times 1 = ? \quad 8 \times 2 = ? \quad 8 \times 3 = ?$$

$$8 \times 4 = ? \quad 8 \times 5 = ? \quad 8 \times 6 = ? \quad 8 \times 7 = ? \quad 8 \times 8 = ? \quad 8 \times 9 = ?$$

$$9 \times 1 = ? \quad 9 \times 2 = ? \quad 9 \times 3 = ? \quad 9 \times 4 = ? \quad 9 \times 5 = ? \quad 9 \times 6 = ?$$

$$9 \times 7 = ? \quad 9 \times 8 = ? \quad 9 \times 9 = ?$$

乘法的熟算練習材料，可由教師自行編製。舊口珠算上各種「玩法」，大部是關於乘法的，其中也有很多可以採為熟算練習材料的。不過在應用時，也要注意前面在加減法的熟算練習材料中所說的幾點：(1)顧及兒童的興趣，(2)不要流為機械的撥珠練習，(3)兒童的練習的進展狀況要兒童知道。

## VII 總結提要

總結在本章討論過的有：

1. 教學乘法時應當先教一位的乘法，次教兩位的乘法，再教兩位以上的乘法。
2. 在教學一位的乘法時，先教一位數乘一位數的乘法，後教一位數乘多位數的乘法。務使兒童切實的明白了下列兩種問題：(一)為什麼運算時要就被乘數改撥積數。(二)為什麼積數的十位數要撥在被乘數個位的檔位，個位數要撥在下一檔。
3. 在多位乘法的各種算法中，以留頭乘為最好，所以教學多位乘

法時也應該教兒童應用留頭乘，兒童學習多位乘法時，最重要的困難是運算的步驟和各步的積數應在的檔位，應藉筆算比較說明，至兒童切實明瞭為止。教學多位乘法時應先教兩位數乘一位數的乘法，次教三位數乘一位數的乘法，再教兩位數乘兩位數以至更繁複的乘法。

4. 教學定位，應當使兒童一方面明瞭了在算盤上積數的個位檔，和被乘數的個位檔，以及乘數的位數，三者的關係；一方面瞭解了積數的位數等於被乘數的位數加乘數的位數，或等於被乘數的位數加乘數的位數減一。

5. 乘法檢答可用連加，被乘數乘數交互相乘，除法，三種方法。在教學乘法的初期用連加，中期用互乘，後期用除法。

6. 乘法基本技能練習材料和乘法口訣組織相同，熟算練習材料可由教師自編，惟須注意：(一)顧及兒童興趣，(二)不致流為機械的撥珠練習，(三)使兒童知道自己的練習進展的狀況。

#### 本章參考

1. 天民(民國三年)：蒙台梭利教育原理珠算教授法。教育雜誌，第六卷第四號，95—111頁。
2. 徐德春(民國二十二年)：珠算口訣改用手語法的一個嘗試計劃。浙江教育行政週刊，第五卷第七期(總二一五號)
3. 趙靈良(民國二十三年)：平民學校珠算教學之實驗。教育與民衆，第五卷第十期，49—63頁。

- 
4. 唐海滄(民國二十四年)：改革小學珠算教學芻議。進修半月刊，第四卷第十期，6—11頁。
  5. 閻生夫(民國二十四年)：珠算教學之理論與實際，河南民衆教育，創刊號，41—51頁；第一卷第二期，61—77頁。

## 第八章 除 法

I 教學除法的步驟 .....	139
II 一位除法 .....	141
III 多位除法 .....	150
VI 定位 .....	153
V 檢答 .....	157
IV 練習材料 .....	158
III 總結提要 .....	519

## I 教學除法的步驟

教學除法的步驟是可以和教學乘法的步驟相比擬的。在天民先生(參考1)的「蒙台梭利教育原理珠算教授法」中，除法的教學也是分了三步，第一步是準備教授，第二步是基數除法，第三步是兩位數除法。在準備教授中，先教2的除法。開始教學時，給兒童 $10 \div 2 = ?$ 一個問題，兒童已經學過筆算除法了，對於這個題目當然知道應該商5。只是這個商數5在算盤上如何處置呢？使他思量一下，教師再告訴他在珠算上演算的方法，同時教以「二一添作五」的口訣。用同樣方法，給他 $20 \div 2 = ?$ 一個問題，使他先自己思考，然後教以計算的方法，和「逢二進一」的口訣。2的除法教完以後，再順序教3, 4, 5, 6的除法。會了這一些以後，兒童或者就能不必特別學習，就會計算7, 8, 9各數的除法了。

所謂「基數除法」，還是一位除法，和前邊準備教授中的教材所

不同的，不在除數，而在被除數。如 2 的除法的教材如下：

$$(1) 1234 \div 2 = ?$$

$$(2) 9876 \div 2 = ?$$

$$12345 \div 2 = ?$$

$$98765 \div 2 = ?$$

$$123456 \div 2 = ?$$

$$987654 \div 2 = ?$$

⋮

⋮

$$123456789 \div 2 = ?$$

$$987654321 \div 2 = ?$$

其他如 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 各基數的除法，也都可以應用同樣的被除數編製教材，被除數也可稍加變化，如把(1)的 1234, 12345……等改為 2345, 23456……等。自然這樣一改，在計算歷程上也會發生變化，兒童便又多得一種練習的機會。

兩位除法的教材中的被除數和基數除法的一樣，除數可用 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 等，其他教學步驟也和基數除法相似。

天民先生的除法教學法也和他的乘法教學法一樣，教材的編製有些不妥， $123456789 \div 2 = ?$  一類的題目，完全是舊法「九歸架」中的材料。123456789 一類的數量，不但兒童不能了解，實際上也不會遇到，拿牠做教材是很不合宜的，不過天民先生定的教學步驟大致不差，無疑的，教學除法應當先教基數的除法，再教兩位數的除法，這個整體的步驟是誰也知道的，用不着討論。現在的問題是實際教學一位除法和兩位除法時該如何進行，天民先生定的步驟太簡略，實際教學時還需要分得更詳盡一些，我們在下兩節裏分別討論一下。

## II 一位除法

教學一位的除法，以我們的意見，應該參照舊口訣的組織分步進行，這並不是說教學時一定用口訣，只是說在教學上某一個階段教學某一類口訣所代表的「算題」和「算法」。在第四章的口訣的分析中，我們說過，一位除法的口訣，可以分爲五類；那末一位除法的教學，最初也可分爲五步。

1. 第一步，教學(1)類口訣(58頁)所代表的算題。在這類算題中「除數等於或小於被除數，能除盡，並且商數也是整數。」這類的算題一共有二十三個：

$$1 \div 1 = ? \quad 2 \div 1 = ? \quad 3 \div 1 = ? \quad 4 \div 1 = ? \quad 5 \div 1 = ?$$

$$6 \div 1 = ? \quad 7 \div 1 = ? \quad 8 \div 1 = ? \quad 9 \div 1 = ? \quad 2 \div 2 = ?$$

$$4 \div 2 = ? \quad 6 \div 2 = ? \quad 8 \div 2 = ? \quad 3 \div 3 = ? \quad 6 \div 3 = ?$$

$$9 \div 3 = ? \quad 4 \div 4 = ? \quad 8 \div 4 = ? \quad 5 \div 5 = ? \quad 6 \div 6 = ?$$

$$7 \div 7 = ? \quad 8 \div 8 = ? \quad 9 \div 9 = ?$$

教學時可照天民先生定的「準備教授」中的教學方法。兒童在筆算上已經學了除法，對於 $4 \div 2 = ?$ 一個題目當然會算；現在的問題只是在珠算上如何演算。說得具體一點，也就是在那裏撥被除數，在那裏撥除數，在那裏撥商數，幾個問題。這都可以讓兒童自己先想一下，然後再由教師指示出正當的運算方法。被除數和除數，只要二者之間有相當的距離，不論撥在什麼地方都可以。不過商數都是有一定的位置，牠一定要撥在被除數的前一檔，撥商數時要把被除數撥掉。也和乘

法中一樣，兒童在這裏也許有兩個問題不容易明白，第一個是為什麼撥商數時要把被除數撥去？第二個是為什麼在這些題目中商數要撥在被除數的前一檔？這兩個問題須要等到兒童學了一位數除多位數的除法以後，纔能切實的明瞭，現時是不好說明的。

2. 第二步，教學(2)類口訣(58頁)所代表的問題，在這類問題中，就數字說，被除數小於除數，商0.5(或5)。這類問題共有四個：

$$1 \div 2 = ? \quad 2 \div 4 = ? \quad 3 \div 6 = ? \quad 4 \div 8 = ?$$

運算時和前一步的算題不同，商數不撥在被除數的前一檔，要撥在被除數的檔位，自然為什麼要這樣撥商數，也是要等以後纔能明瞭的。

3. 第三步，教學(3)類口訣(59頁)所代表的題目。在這類題目中「被除數小於除數，商數恰是被除數的0.2倍。」這類的題目有下列四個：

$$1 \div 5 = ? \quad 2 \div 5 = ? \quad 3 \div 5 = ? \quad 4 \div 5 = ?$$

這類題目運算時商數也是要撥在被除數的檔位，因為商數等於被除數的0.2倍，所以撥商數時不必把商數去掉，只把牠改成牠的2倍的數目就成了。

4. 第四步教學(4)類口訣(59頁)所代表的算題。這類的算題是「被除數小於除數，商數等於被除數，有餘數。」有下列十四題：

$$1 \div 6 = ? \quad 1 \div 7 = ? \quad 2 \div 7 = ? \quad 1 \div 8 = ? \quad 2 \div 8 = ?$$

$$3 \div 8 = ? \quad 1 \div 9 = ? \quad 2 \div 9 = ? \quad 3 \div 9 = ? \quad 4 \div 9 = ?$$

$$5 \div 9 = ? \quad 6 \div 9 = ? \quad 7 \div 9 = ? \quad 8 \div 9 = ?$$

運算時也要把商數撥在被除數的檔位。因為商數等於被除數，所

以運算時不必再動，只在下一檔撥上餘數就成了，同時被除數也就算變成商數了。在這裏兒童也許提出一個問題來，就是為什麼餘數要撥在下一檔？這也要在教學一位數除多位數的除法時纔容易說明。

5. 第五步教學(5)類口訣(59頁)所代表的問題。這類問題是「被除數小於除數，不能除盡，有餘數。」這類問題有下列十四個：

$$1 \div 3 = ? \quad 2 \div 3 = ? \quad 1 \div 4 = ? \quad 3 \div 4 = ? \quad 2 \div 6 = ?$$

$$4 \div 6 = ? \quad 5 \div 6 = ? \quad 3 \div 7 = ? \quad 4 \div 7 = ? \quad 5 \div 7 = ?$$

$$6 \div 7 = ? \quad 5 \div 8 = ? \quad 6 \div 8 = ? \quad 7 \div 8 = ?$$

就數字上說，商數大於被除數，運算時是把被除數改成商數，再把除數撥在下一檔。

這五步教完以後，最後一步就該教學下列一些算題的算法。

$$3 \div 2 = ? \quad 5 \div 2 = ? \quad 7 \div 2 = ? \quad 9 \div 2 = ? \quad 4 \div 3 = ?$$

$$5 \div 3 = ? \quad 7 \div 3 = ? \quad 8 \div 3 = ? \quad 5 \div 4 = ? \quad 6 \div 4 = ?$$

$$7 \div 4 = ? \quad 9 \div 4 = ? \quad 6 \div 5 = ? \quad 7 \div 5 = ? \quad 8 \div 5 = ?$$

$$9 \div 5 = ? \quad 7 \div 6 = ? \quad 8 \div 6 = ? \quad 9 \div 6 = ? \quad 8 \div 7 = ?$$

$$9 \div 7 = ? \quad 9 \div 8 = ?$$

這類的算題，運算時要分兩步，如  $3 \div 2 = ?$  一題，第一步要從被除數3裏邊拿出2來(餘1)，用除數除之；第二步再用除數除餘剩的1。用口訣計算時，第一步的口訣是「逢二進一」，第二步的口訣是「二一添作五」。這樣簡單的一個算題，却要二部手續纔計算完，這是珠算比筆算困難的地方。被除數明明是3，却要先從裏邊拿出2

來，用除數去除，也是不容易明瞭的地方，教學時應該特別注意。

普通教學除法時都是先教一個基數的除法，一個基數的除法都學會以後，再教另一個基數的除法。如教學2的除法，則必須把2除各數的算法都教會以後，纔教學3, 4, 或其他基數的除法。在現在我們定的教學步驟中，是按運算的方式(也就是舊口訣的組織)分步驟，所以一個基數的除法往往分了幾步去教，一步中又教幾個基數的除法。如在第一步中2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 各基數的除法。就都教到了，然而就是2的除法，到了第五步也還沒有教完。這種教法比普通的方法，那一種兒童容易學，那一種效率大，我們不敢斷定，希望有人能把牠們用實驗的方法比較一下。

現在我們談一位數除多位數的除法。其實一位數除多位數的除法不必等到一位數除一位數的除法都學會以後纔開始教學，差不多可以和一位數除一位數的除法同時開始。譬如第一步中教了 $4 \div 2 = ?$ 和 $8 \div 2 = ?$ 的算法以後，就可以教 $48 \div 2 = ?$ 和 $74 \div 2 = ?$ 兩題的算法。在前一題中，演算時先照 $4 \div 2 = ?$ 的計算法計算，再照 $8 \div 2 = ?$ 的計算法計算，好像 $4 \div 2 = ?$ 和 $8 \div 2 = ?$ 兩個算題一樣，在算法上兒童當然不會感到什麼困難的。教了第二步以後，就可教 $16 \div 2 = ?$ ， $28 \div 2 = ?$ 一類的算題；教了第三步以後，就可教 $25 \div 5 = ?$ 一類的題目；教了第四，五兩步以後，就可教 $32 \div 8 = ?$ ， $81 \div 9 = ?$ 一類的題目；一位數除一位數的最後一步也教學過後，又可教 $75 \div 5 = ?$ ， $98 \div 7 = ?$ 一類的算題。所以一位數除一位數的除法學完以後，一位數除兩位數的除法

也就可以學一大部分了。

教學一位數除多位數的除法，應該先自除數一位被除數兩位的除法教起。先教被除數的兩位數都可單獨的用除數除盡的除法，如  $46 \div 2 = ?$   $96 \div 3 = ?$  一類的算題。後教被除數的個位數不能用除數除盡的除法如  $24 \div 3 = ?$   $42 \div 6 = ?$  等。先教能除盡的除法，後教不能除盡的除法。一位數除兩位數的除法完全學會以後，再教一位數除三位，四位，以至五位數的除法。也是要先教被除數的各位數都可用除數除盡的除法，後教被除數的低位數不能用除數除盡的除法；先教能除盡的除法，後教不能除盡的除法。

我們再回到前邊提的幾個問題。第一個是為什麼商數要撥在被除數的地位，運算時要把被除數改成商數。對於這一個問題，還可以先告訴兒童這是珠算上的「慣例」。在珠算的加法中運算時要把被加數改成和數，減法中要把被減數改成差數，乘法中要把被乘數改成積數，除法中運算時也是要把被除數改為商數。兒童在乘法中已經明瞭了為什麼在運算時一定要把被乘數改成積數了，在這裏也許能用類推推理，明瞭了為什麼除法中運算時要把被除數改為商數。不過教者還可以更進一步告訴兒童，在前一章中講過，在乘法中運算時若不把被乘數改成積數而在第三個地方撥積數有許多困難，並且容易發生錯誤，在除法中則會影響到運算的速度。如下列一題：

$$5192 \div 8 = ?$$

若不就被除數改撥商數，而在第三個地方另撥商數，則計算的步驟如下：

(1) 
$$\begin{array}{r} 6 \\ 8 \overline{) 5192} \\ \underline{48} \\ 392 \end{array}$$

(2) 
$$\begin{array}{r} 64 \\ 8 \overline{) 5192} \\ \underline{48} \\ 392 \\ \underline{32} \\ 72 \end{array}$$

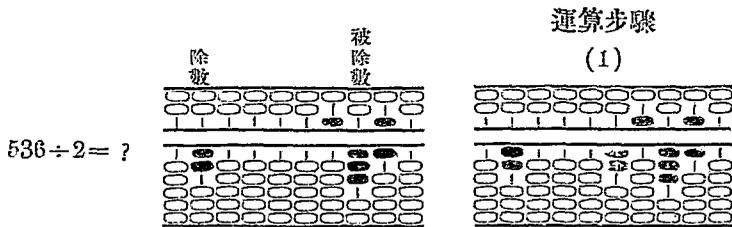
(3) 
$$\begin{array}{r} 649 \\ 8 \overline{) 5192} \\ \underline{48} \\ 392 \\ \underline{32} \\ 72 \\ \underline{72} \\ 0 \end{array}$$

這完全和筆算是一樣的算法了。珠算的一個特色，就是一個除數和一個被除數都有一定的運算方法(或一定的口訣)，可以不假思索撥珠運算。如除數8遇到被除數5，不必考慮，就可在5上加上一個下珠變成6(商數)，在下一檔撥上2(餘數)。在筆算就不然了，在這種情形之下，總得先考慮一下，該商什麼數，在適當的地方寫上商數，再用商數

乘除數，自被除數裏減去這個積數。因為這個緣故，所以在珠算上運算時若不把被除數直接改為商數，而在另一個地方撥商數，勢必同筆算的運算歷程一樣，運算時先想該商什麼數，然後在一個檔位撥上商數，再用商數和除數相乘，從被除數裏減了牠們的積數，比通常的計算方法多了幾個步驟，當然會影響到運算的速度。珠算的優點就在計算迅速，若不能計算迅速，珠算就不如筆算了。兒童明白了這個道理，再自己親手做一下，也會感到除法運算時不把被除數直接改為商數，而在另一檔位撥商數，比把被除數直接改撥商數要慢得多，自然也就明白為什麼除法中運算時要把被除數直接改成商數了。

第二個問題是為什麼在  $4 \div 2 = ?$  一題中的商數要撥在被除數的前一檔，而在  $1 \div 2 = ?$  一題中的商數要撥在被除數的檔位。第一，我們要使兒童知道這兩個問題中的商數的位數不一樣，若兩題中的被除數都是個位數，那末前一個題的商數 2 也是個位數，而後一個題的商數是一位小數 0.5；若兩個题目的被除數都變為十位數，成為  $40 \div 2 = ?$  和  $10 \div 2 = ?$  兩題；前一個題的商數是十位數 20，後一個題的商數是個位數 5。若兩題的被除數和除數的位數都相等，二者的商數總是差一位，自然算盤上也應該佔上下兩檔了。兒童若明白了這一點，那末這個問題正和乘法中為什麼積數的十位數要撥在被乘數個位的檔位，個位數要撥在更下一檔的一個問題，是相對的。乘法中所以積數的十位數要撥在被乘數個位的檔位，個位數要撥在下一檔，是因為「被乘數的第一位數(最低位數)沒有為乘數的各位數都乘遍以後，

被乘數的第二位數是不能侵動的。」被乘數的第一位數在「被乘」的過程中不能侵佔第二位數的檔位，所以牠的積數除了佔據自己的檔位以外，只能佔據下邊的檔位。一位數乘一位數時積數中最高數量是十位數，所以就讓十位數佔據被乘數自己的檔位，個位數佔在下一檔。除法也和乘法類似，不過運算時從最高位數(最左位數)第一位數算起，在運算過程中，商數不能和被除數相混，第一位數的商數不能侵略第二位數的檔位，第一位數的商數若有兩位數，只好一位佔在被除數的檔位，一位佔在更前一檔了。如下列一題



在運算過程中，第一步用除數除了被除數的第一位數 5 (500)，商得 25 (250)，把被除數改成商數只有把商數的 2 撥在被除數的上一檔，5 撥在被除數的檔位，纔不至妨礙被除數的第二位數。如果把商數的 2 撥在被除數的檔位，5 撥在下一檔，那末被除數的第二位數就要變動了，那還怎樣繼續運算呢？這樣一講，兒童自可明白為什麼除法運算時商數十位數要撥在被除數的上一檔，個位數要撥在下一檔了。

第三個問題是為什麼除數要加在被除數的下一檔。如在下列一題中，除數 3 除被除數第一位數 1 (100)，商 3 餘 1，把 1 加在被除數的

第二位 5 上邊。

除數

156 ÷ 3 = ?

被除數

運算步驟  
(1)

這一點似乎容易說明，因為在筆算上也是把前一位的除數加在後一位的。如在下列一題中

$$57 \div 3 = ? \quad \begin{array}{r} 1 \\ 3 \overline{) 57} \\ \underline{3} \phantom{0} \\ 27 \\ \underline{27} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{前一位的餘數} 2(20) \text{加下一位數 } 7 \\ \text{得 } 27, \text{再被 } 3 \text{ 除。} \end{array}$$

不過在珠算上和筆算上除法運算的步驟稍有不同，如前一例題，  
156 ÷ 3 = ? 在筆算上的運算步驟是：

$$\begin{array}{r} 52 \\ 3 \overline{) 156} \\ \underline{15} \phantom{0} \\ 6 \\ \underline{6} \\ 0 \end{array}$$

被除數的第一位在數字上若是比除數小的時候，便先和第二位連結起來，然後再用除數去除。在珠算上則不然，無論被除數比除數是多是少，總是一位一位的用除數除，所以計算的步驟實在是：

$$\begin{array}{r}
 3 \\
 + \frac{2}{52} \\
 \hline
 156 \\
 \left. \begin{array}{l} \text{除數} \rightarrow 3 \quad \leftarrow \text{商數} \\ \text{被除數} \end{array} \right\} \\
 \hline
 10 \\
 9 \\
 \hline
 1+5=6 \\
 \frac{6}{6} \\
 \hline
 \frac{6}{6} \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

因為運算的步驟稍有不同，所以在運算的過程中，在珠算上有時發現餘數，而在筆算上就沒有；又有時在筆算上發現餘數在珠算上又沒有（注意：此處所謂餘數是指運算過程中除數除被除數的某位數時的餘數，不是指總結果中的餘數，總結果中的餘數筆算珠算當然是是一致的。）但是無論珠算筆算，除數除被除數前一位數時的餘數總是要加在被除數的後一位中的。兒童對於筆算上為什麼前一位的餘數要加在後一位是了解的，對於珠算上的這個問題自然也該明瞭了。

### III 多位除法

曹日昌（參考3）參觀了北平市十幾個小學的珠算教學，據各小學的珠算教師報告，在珠算上學生最感困難的就是多位除法，所以教學多位除法應當特別注意。

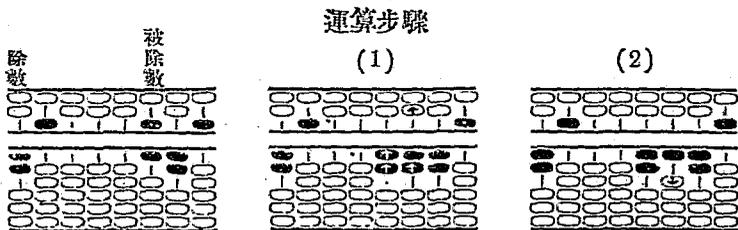
珠算上多位除法從前叫做「歸除」；因為在運算時先用除數的第一位數除被除數的第一位數，運算的方法和一位除法一樣。這樣得了商數以後，再用商數乘除數，從被除數裏減這個積數，這一種計算歷程從

前就叫做「除」。一位除法從前叫做「歸」，所以多位除法叫做「歸除」。平常教師講多位除法時，也總是說一個多位除法的算題是「幾歸(除數的第一位數)幾除(除數的第二位以及以下各數)，第一位用歸法，以下用除法」。

在珠算上多位除法的運算和筆算上稍有不同。在筆算上有了商數以後，並不立刻用除數的第一位數和商數相乘，從被除數裏減這個積數，以後再用商數乘除數的第一位數以下各數，從被除數裏減去積數；而是用商數乘整個的除數，再從被除數裏減去牠們的積數，如  $625 \div 25 = ?$  一題的演算步驟：

$$\begin{array}{r} 2 \\ 25 \overline{) 625} \\ \underline{50} \end{array}$$

得了商數 2 以後，不是用 2 去乘除數 25 的 2，而是去乘整個的除數 25，得積數 50，從被除數裏減這個積數。在珠算上就不是了，在得到商數以後，便是這個商數已經和除數的第一位數相乘而從被除數裏減了牠們的乘積了，以後便只用商數乘除數的第二位數以及以下各數，累乘累自被除數減，如上一例題的演算：



在運算步驟(1)中，得了商數2，並且這商數2早已和除數的第一位數2相乘，從被除數裏減了他們的乘積4了(口訣「逢四下還一進二」，二是商數，四是從被除數裏減去的商數和乘數的乘積)。教者若能把筆算和珠算的運算步驟比較說明清楚，對於多位除法兒童是不難明瞭的。

珠算上多位除法的所謂「歸」，就是用除數的第一位數除被除數的第一位數的算法，也不是和筆算上的算法絲毫不可對比的。牠和筆算上的「試商」很相似。如前一例題中，珠算上所謂歸，就是用除數的第一位數2去除被除數的第一位數6；在筆算上試商也都是以除數的第一位數和被除數的第一位數相較。在前一個例題中，筆算上普通計算時在想商數的時候，在算者心中也不是真的去看625中有多少25，反之却是 $6 \div 2 = ?$ 一個簡單的題目。珠算筆算所差的只是筆算的商數得出以後，被除數還沒有發生變化；在珠算上「得到商數以後，便是這個商數已經和除數相乘而從被除數裏減了牠們的乘積了」。所以筆算珠算的多位除法並沒有什麼根本的不同，只是演算的步驟稍有差別而已。這一點是應該使兒童切實明瞭的。

在珠算的多位除法中，兒童最不容易了解的部分，還有「撞歸」。撞歸是遇到除數的第一位數和被除數的第一位數相同，在數字上除數又大於被除數時的算法。撞歸有九句口訣，就是第四章(60頁)所說的多位除法(1)類口訣。兒童所以不容易明白撞歸，似乎是不在於算法的本身而在於口訣。如 $3478 \div 37 = ?$ 一題，計算這一個算題時，要用「見

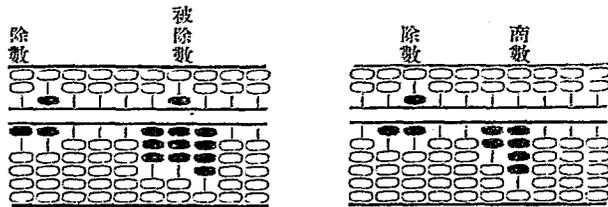
「三無除作九三」一句口訣，這句口訣是有相當的難解的。所以教學這個算題不應該先教口訣，要先教兒童如何演算這個算題，先使兒童用筆算演算一次，知道了確實的商數，再用珠算演算，他看見被除數和除數的第一位數都是3，一定要用「逢三進一」的口訣，商1，商過以後，他自然就知道商數太大了。這時教師暗示給他改商數1為下一位的9，同時說明理由，等兒童完全了解了這個算題的算法以後，再介紹「見三無除做九三」的口訣，這樣或者撞歸也就不怎樣困難了。

至於教學多位除法的步驟，自然也應當先教能除盡的除法，後教不能除盡的除法；先教兩位數除兩位數的除法，次教兩位數除三位或四位數的除法，再後教除數為三位數以及更大的數目的除法。

#### IV 定位

珠算除法的定位和乘法的定位正是對照的，所以教學除法定位也應該和教學乘法定位採同一的步驟。除法中定位的方法是除數是幾位數便從被除數的個位檔向左移幾檔，那一檔便是商數的個位檔。若使兒童明白這種定位的方法，應當先使他自己找出這種方法，並且證明牠是對的。

和教學乘法的定位時一樣，先給兒童一個算題  $384 \div 16 = ?$ ，使他用筆算算出來，知道了商數是24，二十四個，再用珠算計算，結果算盤上呈現着下列的樣子：



兒童既然已經知道了商數，算盤上的  
 當然也知道是二十  
 四個，這時教師可使兒童考查商數的  
 個位檔和被除數的  
 個位檔二者的關係，兒童當然可以看出商數的個位檔比被除數的個位  
 檔向左移了兩位，教師再暗示給他除數就恰是兩位。再用同樣方法，  
 使兒童計算除數為一位數，兩位數，三位數，四位數的除法，使他切  
 實的了了解了除數的位數，被除數的個位檔，和商數的個位檔三者的關  
 係，他自然就明瞭了除法定位的方法了。

在乘法中，積數的位數等於乘數的位數加被乘數的位數，或等於乘  
 數的位數加被乘數的位數減一；恰相對照，在除法中，商數的位數等  
 於被除數的位數減除數的位數，或等於被除數的位數減除數的位數加  
 一。如果被除數的前幾位數大於除數，商數的位數便等於被除數的位  
 數減除數的位數再加一；如果被除數的前幾位數小於除數，商數的位  
 數便等於被除數的位數減除數的位數。舉例說明，如下列一題：

$$384 \div 16 = 24$$

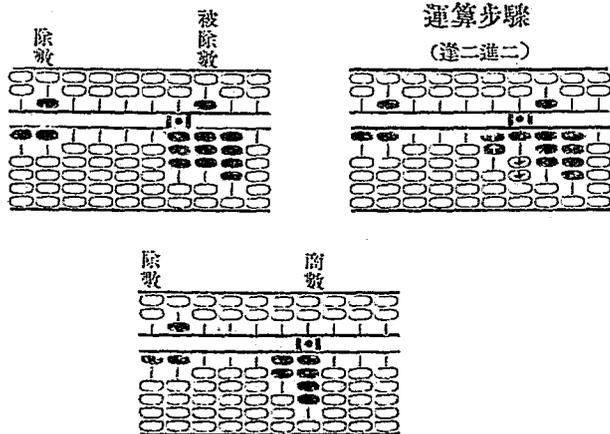
被除數的前兩位數大於除數，所以商數的位數應當是等於被除數的位  
 數減除數的位數再加一，被除數的位數是三，除數的位數是二，三減

二等於一，再加一等於二，商數 24 就是個兩位數。又如下題

$$2046 \div 86 = 24$$

被除數的前兩位數小於除數，所以商數的位數應該是等於被除數的位數減除數的位數。被除數的位數是四，除數的位數是二，四減二等於二，商數 24 也就是個兩位數。

在珠算上計算除法時，商數的首位數不是佔在被除數的首位數所佔的檔位，便是佔在更前一檔。如果在一位除法中，或在多位除法中，除數第一位數除被除數的第一位數時，所用的口訣是一位除法的(1)類口訣(第四章58—60頁)，商數的首位數就佔在被除數的首位數所佔的檔位的前一檔；如果所用的是(2)類，(3)類，(4)類，(5)類，或多位除法的(1)類口訣，商數的首位數便佔在被除數的首位數所佔的檔位。如下列一題： $384 \div 16 = ?$



被除數的前兩位數大於除數，運算時第一步用一位除法的(1)類口訣，商數的首位數佔在被除數的首位檔(有星徽爲記)的前一檔。又如下題：

$$2064 \div 80 = ?$$



被除數的前兩位數小於除數，運算時第一步用一位除法的(4)類口訣，所以商數的首位檔就是被除數的首位檔。

除法定位的方法，是除數是幾位數便從被除數的個位檔向左移幾檔，那一檔便是商數的個位檔。如果商數的首位檔就在被除數的首位檔的地方，商數的所佔的檔數(也就是商數的位數)不是就等於被除數的檔數(也就是位數)減除數的檔數(也就是位數)嗎？如果商數的首位檔佔在被除數的首位檔的前一檔，商數所佔的檔數不是就等於被除數的檔數減除數的檔數再加一嗎？這不是和前面說的「商數的位數等於被除數的位數減除數的位數，或等於被除數的位數減除數的位數加一」是一樣的嗎？所以除法定位的方法，不但是在算盤上可以由被除數的個位檔，商數的個位檔，和除數的位數，三者的關係說明；並且可以由被除數，除數，商數三者的位數的關係演證，兒童明白了任何一點，都會了解除法的定位方法的，若能把兩點都弄清楚，除法的定位更不成問題了。

## V 檢答

除法的檢答有兩種方法，第一種是除數和商數相乘，如  $384 \div 16 = 24$  一題，檢答時可按  $16 \times 24 = ?$  一題計算，如果積數等於被除數，結果便是正確。這樣不但實施檢答，檢查自己的結果，還可藉這種練習更明瞭了乘除的關係。第二種方法是商數和除數互換，如  $384 \div 16 = 24$  一題，檢答時可按  $384 \div 24 = ?$  一題計算。如果新的商數等於原來的除數，結果便是正確。還可藉這種練習更明瞭了被除數，除數，商數三者的關係。乘法檢答時可用連加，似乎除法檢答時也可以用連減，不過這種方法不大適用。如一個簡單的算題  $6 \div 2 = 3$ ，檢答時若用連減，是自 6 中連續減 2，至除數為零而止。所求的數目是減的「次數」，就是看從 6 裏可以減出「多少個」2 來，若是減的「次數」等於原來的商數，結果便是正確。不過這減的次數，是不大容易記住的，一方面減一方面記減的次數，在兒童不是很容易的事，所以這種檢答的方法，是不大合用的，除法的檢答仍以上述兩種方法為宜。

講加，減，乘，除，各種方法時，我們都討論了檢答，總是說在開始教學一種新方法不久，就可教學檢答，希望兒童養成對於自己算得的結果負責的良好習慣。我們在這裏還要補充幾句話，無論是對加法，減法，乘法，除法，的檢答，都可應用。就是無論什麼算題，都要使兒童在運算時仔細小心，不要專恃檢答（等於重算一次）檢查結果。若能使兒童養成無論什麼算題，只算一次便絕無錯誤的技能，纔是教學算術的最美滿的結果。在數學能力和興趣較高的學生，要注意

培這養種能力。對於數學能力和興趣平常的學生可使多用檢答。對於數學能力和興趣較高的學生，則該訓練他不專恃檢答檢查結果。

## II 練習材料

除法的練習材料自然也可以分為基本技能練習材料和熟算練習材料。基本技能練習材料也就是一位除法的教材，「一共有八十一個算題，在本章第一節中本來都有了，為清楚起見更列舉如下：

$$\begin{aligned}
 &1 \div 1 = ? \quad 2 \div 1 = ? \quad 3 \div 1 = ? \quad 4 \div 1 = ? \quad 5 \div 1 = ? \quad 6 \div 1 = ? \\
 &7 \div 1 = ? \quad 8 \div 1 = ? \quad 9 \div 1 = ? \quad 2 \div 2 = ? \quad 4 \div 2 = ? \quad 6 \div 2 = ? \\
 &8 \div 2 = ? \quad 3 \div 3 = ? \quad 6 \div 3 = ? \quad 9 \div 3 = ? \quad 4 \div 4 = ? \quad 8 \div 4 = ? \\
 &5 \div 5 = ? \quad 6 \div 6 = ? \quad 7 \div 7 = ? \quad 8 \div 8 = ? \quad 9 \div 9 = ? \quad 1 \div 2 = ? \\
 &2 \div 4 = ? \quad 3 \div 6 = ? \quad 4 \div 8 = ? \quad 1 \div 5 = ? \quad 2 \div 5 = ? \quad 3 \div 5 = ? \\
 &4 \div 5 = ? \quad 1 \div 6 = ? \quad 1 \div 7 = ? \quad 2 \div 7 = ? \quad 1 \div 8 = ? \quad 2 \div 8 = ? \\
 &3 \div 8 = ? \quad 1 \div 9 = ? \quad 2 \div 9 = ? \quad 3 \div 9 = ? \quad 4 \div 9 = ? \quad 5 \div 9 = ? \\
 &6 \div 9 = ? \quad 7 \div 9 = ? \quad 8 \div 9 = ? \quad 1 \div 3 = ? \quad 2 \div 3 = ? \quad 1 \div 4 = ? \\
 &3 \div 4 = ? \quad 2 \div 6 = ? \quad 4 \div 6 = ? \quad 5 \div 6 = ? \quad 3 \div 7 = ? \quad 4 \div 7 = ? \\
 &5 \div 7 = ? \quad 6 \div 7 = ? \quad 5 \div 8 = ? \quad 6 \div 8 = ? \quad 7 \div 8 = ? \quad 3 \div 2 = ? \\
 &5 \div 2 = ? \quad 7 \div 2 = ? \quad 9 \div 2 = ? \quad 4 \div 3 = ? \quad 5 \div 3 = ? \quad 7 \div 3 = ? \\
 &8 \div 3 = ? \quad 5 \div 4 = ? \quad 6 \div 4 = ? \quad 7 \div 4 = ? \quad 9 \div 4 = ? \quad 6 \div 5 = ? \\
 &7 \div 5 = ? \quad 8 \div 5 = ? \quad 9 \div 5 = ? \quad 7 \div 6 = ? \quad 8 \div 6 = ? \quad 9 \div 6 = ? \\
 &8 \div 7 = ? \quad 9 \div 7 = ? \quad 9 \div 8 = ?
 \end{aligned}$$

其中前五十九個是一位除法口訣所代表的，後二十二個是沒有特殊的

口訣的（每一算題要用兩句口訣）。除法的基本技能練習，應包括所有的這八十一個算題，徐德春先生（參考 2）的除法手語也是除法基本練習材料，可是在數目上只和一位除法的口訣一樣多，沒有包括了我們上邊說的那二十二算題，似乎不大夠用。

趙冀良先生（參考 4）根據測驗的結果，找到 3, 5, 9，為除數的除法最容易，4, 6, 8，為除數的除法比較難些。這個結論未必十分可靠，不過教者可以特加注意，若這個結論可信的話，那末對於 4, 6, 8 為除數的除法的練習應當特別注意。

除法的熟算練習材料也和乘法的熟算練習材料一樣，可由教師自行編製，舊口珠算上的各種「玩法」也有可採用的，不過無論是教師自行編製，或是採用現成的材料，應用時都該注意前面屬次說的三點：（1）顧到材料的內容和兒童的興趣，（2）不要使練習變為機械的撥珠練習，（3）要使兒童自己知道他的練習進展的狀況。

## VII 總結提要

總結在本章討論的有下列幾點：

1. 教學除法應當先教一位的除法再教多位的除法。
2. 教學一位數除一位數的除法應當按口訣的性質分為六步（第六步是要用兩句口訣的算題），教學一位數除一位數的除法時，也就可以開始教學一位數除多位數的除法。先教一位數除兩位數的，後教一位數除多位數的，先教能除盡的，後教不能除盡的。教學時務使兒童切實的明瞭了下列三個問題：（一）為什麼商數要撥在被除數的地位；（二）為什麼有的商數要撥在被除數的前一檔，有的要撥在被除數的檔位；（三）為什麼前一位的餘數要加在下一位。
3. 教學多位除法應當注意解釋運算的步驟，最好和筆算多位除法

的運算步驟比較說明。關於「種歸」，應當先教演算的方法，後介紹口訣。教學多位除法也要先教能除盡的，後教不能除盡的；先教兩位數除兩位數的除法，再教兩位數除三位數，或四位數的，最後教除數為三位數乃至更大的數目的除法。

4. 教學定位應當使兒童一方面了解在算盤上商數的個位檔，被除數的個位檔，和除數的位數三者的關係；一方面明瞭商數的位數等於被除數的位數減除數的位數，或等於被除數的位數減除數的位數加一。

5. 除法檢答有兩種方法：一是除數和商數相乘，一是商數和除數互換，以商數除被除數。連減法不適用。要訓練兒童在運算時細心，不要專恃檢答檢查結果。

6. 除法的基本練習材料有八十一個算題。熟算練習材料可由教師自行編造或採擇，惟須注意：(一)顧到材料的內容和兒童的興趣。(二)不要流為機械的撥珠練習。(三)使兒童知道他自己練習的進展的狀況。

#### 本章參考

1. 天民(民國三年)：蒙台梭利教育原理珠算教授法。教育雜誌，第六卷第四號，95—111頁。
2. 徐德春(民國二十二年)：珠算口訣改用手語法的一個嘗試計劃。浙江教育行政周刊，第五卷第七期(總二一五號)
3. 曹日昌(民國二十三年)：在北平市小見到的珠算教學與建議。天津大公報，明日之教育，第二十三期(六月十一日)
4. 趙翼良(民國二十三年)：平民學校珠算教學之實驗。教育與民衆，第五卷第十期，41—43頁。

## 第九章 開 方

I 引言	161
II 開平方法	161
III 開立方法	186
VI 高次方開法和開方用算盤	178
V 總結提要	179

### I 引言

本來在普通小學和民衆學校中珠算一科是教不到開方的，以普通小學和民衆學校教師爲對象讀者的本書，似乎不必討論開方的問題。不過開方的應用很廣，如在統計工作中，地畝計算中，都常常要用到開方，所以在普通小學和民衆學校中對於數學成績特優而興趣濃厚的學生，都無妨教以開方的方法，我們也就無妨討論一下開方教學的問題。

在數學心理中關於開方的問題研究的人非常少，至於珠算上開方教學的問題更少有人討論。因爲材料的缺乏，在本章內我們不能討論多少教學的問題，大致將偏於開方的計算方法的介紹，這是要先聲明的。

### II 開平方法

關於「平方」的意義是用不着解釋的。在珠算上開平方的方法和筆算上的方法是一樣的。計算時第一步，先將積器分組，從個位數向左分

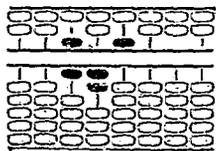
起，每兩位一組。自然，最左一組也許包含兩位數，也許包含一位數。（若積算的位數是偶數，最左一組便包含兩位數，積算的位數是奇數，最左一組便包含一位數。）分組也就順便定了方根的位數，因為積算有幾組，方根便是幾位數。第二步，求最左一組數的平方根或近似平方根，從積算裏減去這方根的平方。這求得的平方根便是所求的方根的第一位數。方根的第一位數撥在積算的左邊，同時在積算的右邊也撥上一個同樣的數目。第三步，把積算右邊的數目加倍，用牠除積算的最左一組的餘數和次一組，這樣所得的商數便是所求的方根的第二位數。把牠撥在方根的第一位數下面，同時也併入積算右邊的數內。再用方根的第二位數乘積算右邊的數目，從積算裏減去這個積數，這樣便得出方根的兩位數來了。如果所求的方根是兩位數的，到這裏便算完成了；如果方根的位數還多，便照同樣的步驟繼續算下去，直到積算完了時為止。舉例說明如下：

例題(1)  $\sqrt{020} = ?$

### 演算步驟

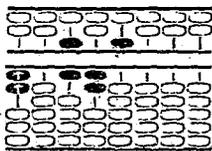
#### 第一步

把積算分組，左一組只包含一個數，6。



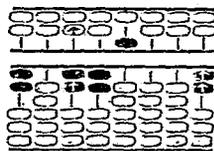
#### 第二步(1)

求左一組的近似根，3。



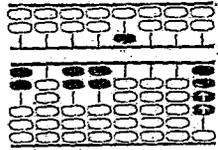
#### 第二步(2)

從左一組裏減了近似根的平方



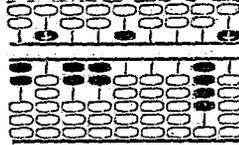
第三步(1)

把積器右邊的數目加倍



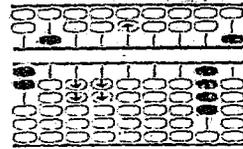
第三步(2)

用積器右邊的數目除積器，  
得方根的第二位數，5



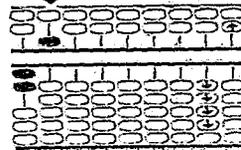
第三步(3)

用方根的第二位數乘積器右  
邊的數，從積器裏減去積數



第三步(4)

得出方根

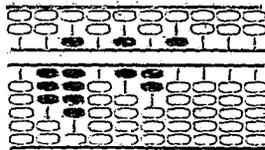


例題(2)  $\sqrt{390625} = ?$

演算步驟

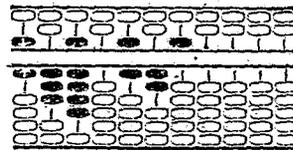
第一步

把積器分組



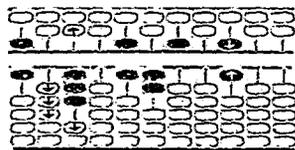
第二步(1)

求左一組的近似根，6



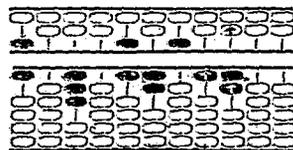
第二步(2)

從左一組裏減了近似根的平方



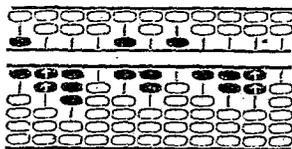
第三步(1)

把積器右邊的數加倍



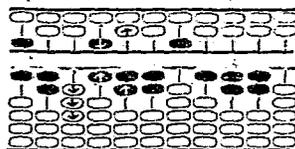
## 第三步(2)

用積器右邊的数字除積器，得方根的第二位数，2



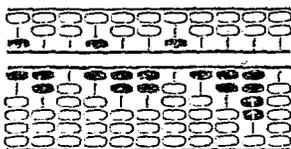
## 第三步(3)

用方根的第二位数乘積器右邊的数字，從積器裏減去積數



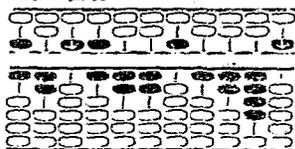
## 第四步(1)

把積器右邊的数字的第三位數加倍



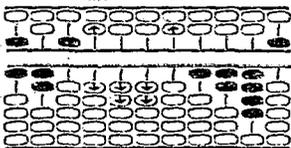
## 第四步(2)

用積器右邊的数字除積器，得方根的第三位數，5



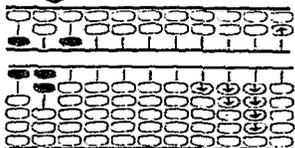
## 第四步(3)

用方根的第三位数乘積器右邊的数字，從積器裏減去積數



## 第四步(3)

得出方根



在珠算上學到開方的學生大都是在筆算上學過開方的，所以對於開方的運算步驟的了解或者不致發生問題。不過開方在算術上總是最難的一部分，一定有許多學生雖然學過開方而對於開方的運算步驟還不十分明瞭，所以我們在這裏再講一次。在開平方的步驟中有兩點非常重要：第一是積器的分組，第二是把已求出的方根（積器右邊的数字）加倍，作為試驗除數。現在先講第一點。

在第七八兩章裏都講過，積數的位數等於乘數的位數加被乘數的位數，或等於乘數的位數加被乘數的位數減一。積數是平方根自乘得出來的，所以在這裏乘數和被乘數是同樣的數目，自然位數也相等。那末積數的位數一定是等於平方根的位數的二倍，或等於平方根的位數的二倍減一。反過來說，平方根的位數一定等於積數的位數的半數，或等於積數的位數加一的和數的半數。積數的位數若是二，平方根的位數便等於二的半數，一。積數的位數若是三，平方根的位數便等於三加一折半，二。1 的平方根等於 1，100 的平方根等於 10，10,000 的平方根等於 100。所以 1 和 100 中間任何數的平方根總在 1 和 10 的中間，也就是總是個一位數；100 和 10,000 中間任何數的平方根總在 10 和 100 中間，也就是總是個十位數。換句話說，一位數或兩位數的平方根總是一位數，三位數或四位數的平方根總是兩位數。所以若把積數分組，每兩個數目一組，無論最後一組包括一位數還是兩位數，平方根的位數總等於積數的組數。積數若有一組，平方根便是個位數；積數若有兩組，平方根便是十位數；積數若有三組，平方根便是百位數。——積數分組的道理便在這裏。

舊日珠算上關於平方根的定位本來有四句口訣，是：「一百一十定無疑，一千三十有零除，九千九百不離十，一萬才為一百推。」每句中第一個數字是積數，第二個數字是平方根。四句口訣的意思是：積數若是 100，平方根是 10；積數若是 1,000，平方根是 30 多；積數就是到了 9,900，平方根也還是個十位數；積數到了 10,000，平方根才

是100呢。平方根的定位照前面講的做，一點困難沒有，所以這四句口訣實在沒有用處。教學珠算開方時與其介紹這四句無用的口訣，不如教學生把下列的九句乘法口訣溫習一下，使他們在運算時容易商平方根的第一位數。這九句乘法口訣是：

一一得一 二二得四 三三得九  
 四四一十六 五五二十五 六六三十六  
 七七四十九 八八六十四 九九八十一

現在我們談第二點。為什麼在運算時把求得的方根（積羈右邊的數）加倍，作為試驗除數。若明白這個道理，須先明白：兩個數的和數的平方，等於兩數各數的平方，和兩數乘積的二倍，三者之和。例如

$$\begin{aligned} 8^2 &= (5+3)^2 \\ (5+3)^2 &= (5+3) \times 8 \\ &= 5 \times 8 + 3 \times 8 \\ &= [5 \times (5+3)] + [3 \times (5+3)] \\ &= 5 \times 5 + (5 \times 3) + (3 \times 5) + 3 \times 3 \\ &= 5^2 + 2 \times (5 \times 3) + 3^2 \\ &= 64 \end{aligned}$$

若用一個公式代表  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

現在我們知道  $a^2 + 2ab + b^2$  的平方根是  $a+b$ ，我們故意再把牠開方，求牠的平方根。

$$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = ?$$



「80 + 一個位數」和30總相差不多，所以用80除249就大致就可以得到那個個位數。80就是方根第一位數40的兩倍。講到這裏總可大致明瞭為什麼開方逆算時若把已得的方根加倍作為試驗除數了。

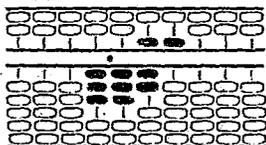
### III 開立方方法

珠算上開立方也是和筆算上一樣。計算的第一步，也是先將積羈分組。不過開平方時是每兩位數一組，開立方時是每三位數一組。從個位數起自右而左。分到最左一組，也許包含三位數，也許包含一位數或兩位數。（積羈的位數若是3的倍數，最左一組便包含三位數，否則便包含一位或兩位數。）也和開平方一樣，積羈分了組也就定了立方根的位數，積羈有幾組立方根便是幾位數。第二步，求最左一組的立方根或近似立方根，從積羈最左一組裏減去所得立方根的立方。這求得的立方根便是所求的立方根的第一位數，把牠最好撥在積羈的左邊。第三步，用所得的立方根自乘再乘3，把這樣得的積數撥在積羈的右邊，作為試驗除數，用牠去除積羈，得出所求的立方根的第二位數。立方根的第一第二兩位數相乘乘3，把這樣得的積數加在試驗除數裏，再加上立方根的第二位數的平方，用立方根的第二位數乘這樣得的和數，從積羈裏把積數減出來。如果立方根若是兩位數，算到這裏就完了；如果位數還多，使用同樣的方法繼續算下去，直至積羈完畢為止。舉例說明如下：

$$\text{例題(4)} \quad \sqrt[3]{3375} = ?$$

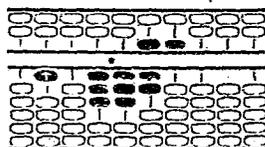
第一步

把積羈分組，左一組包含一個數



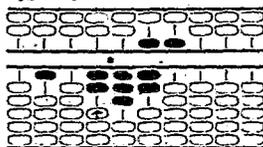
第二步(1)

求左一組的近似立方根，1。



第二步(2)

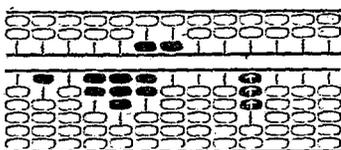
從左一組裏減去立方根的立方，1。



第三步(1)

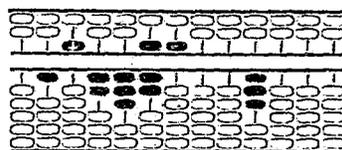
把所得的立方根自乘乘3作爲試驗除數

$$10 \times 10 \times 3 = 300$$



第三步(2)

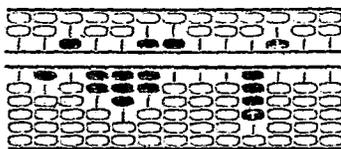
用試驗除數除積羈，得立方根的第二位數，5。



第三步(3)

試驗除數加立方根的第一第二兩位數相乘乘3的積數

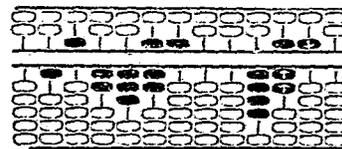
$$300 + (10 \times 5 \times 3) = 450$$



第三步(4)

再加立方根第二位數的平方

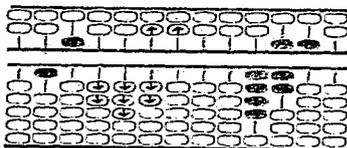
$$450 + 5^2 = 475$$



## 第三步(5)

用立方根的第二位數5，乘積幕右邊的數475，從積幕裏減去積數。

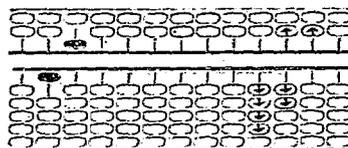
$$2375 - (475 \times 5) = 0$$



## 第三步(6)

立方根得出，計算完成。

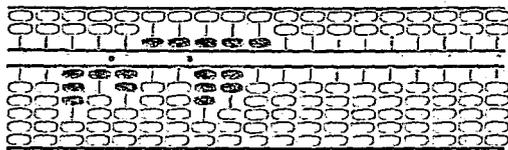
立方根15



例題(5)  $\sqrt[3]{31255875}$

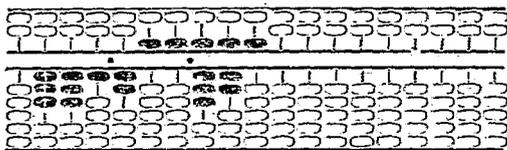
## 第一步

把積幕分組，共得三組，最左一組包含兩個數。



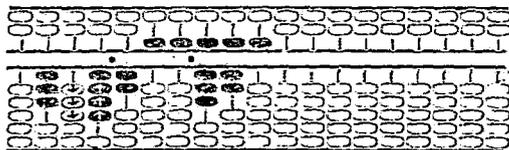
## 第二步(1)

求最左一組的近似立方根：3。



## 第二步(2)

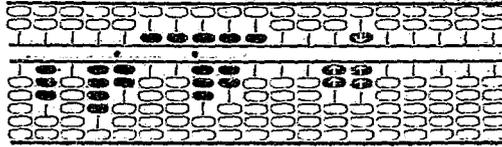
從最左一組裏減去立方根的立方，27



第三步(1)

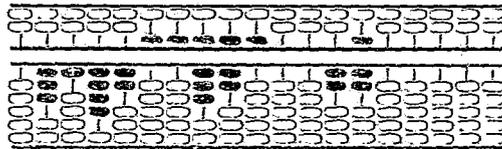
把所得的立方根自乘乘3,作為試驗除數

$$30 \times 30 \times 3 = 2700$$



第三步(2)

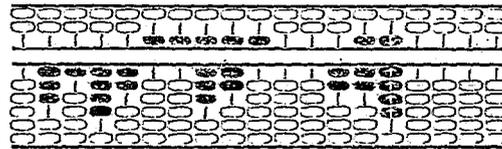
用試驗除數除極器,得立方根的第二位數1.



第三步(3)

試驗除數加立方根第一位第二位兩數相乘乘3的積數

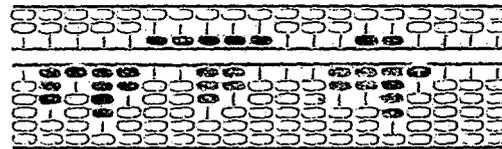
$$2700 + (30 \times 1 \times 3) = 2790$$



第三步(4)

再加立方根第二位數的平方1

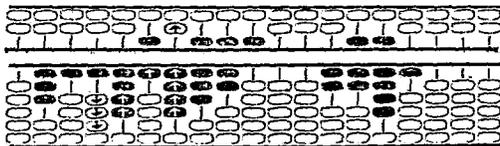
$$2790 + 1^2 = 2791$$



## 第三步(5)

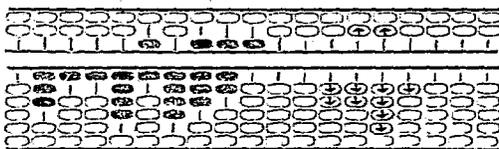
用立方根的第二位數乘積幕右邊的數從積數裏減去積數。

$$4255 - 2791 \times 1 = 1464 \dots$$



## 第三步(6)

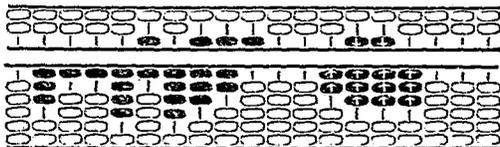
把積幕右邊的數目撥去



## 第四步(1)

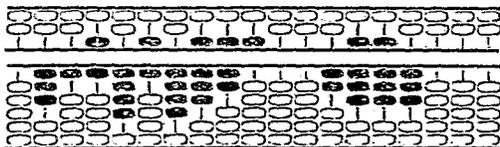
把所得的立方根自乘乘3,作為試驗除數

$$310 \times 310 \times 3 = 288300$$



## 第四步(2)

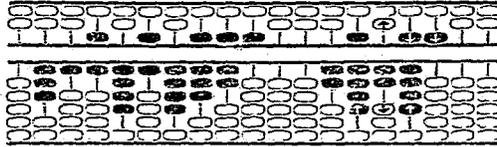
用試驗除數除積幕,得立方根的第三位數5。



第四步(3)

試驗除數加立方根第一二兩位，第三位，兩數相乘乘3的積數

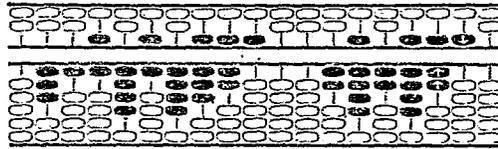
$$288300 + (310 \times 5 \times 3) = 292950$$



第四步(4)

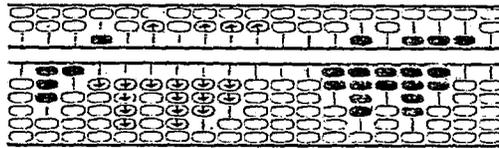
再加立方根第三位數的平方

$$292950 + 5^2 = 292975$$



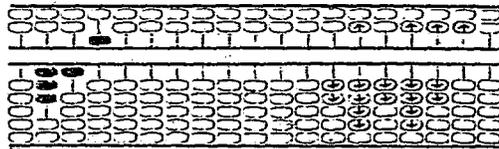
第四步(5)

用立方根第三位數乘積器右邊的數，從積器裏減去積數。



第四步(6)

立方根得出，計算完成。



自然，在開立方方法中也有兩個問題，和開平方方法中的兩個問題是相對的。第一個是積羈分組的問題，第二個是運算步驟的問題。現在我們先討論第一個。也和開平方方法中一樣，教學立方積羈分組的問題，應該先使學生自己想出：三個一位數相乘，積數一定是個一位數或兩位數或三位數；三個兩位數相乘，積數一定是個四位數或五位數或六位數；三個三位數相乘，積數一定是個七位數或八位數或九位數。所謂立方就是一個數自乘再乘，也就等於三個同樣的數目相乘，自然牠的積羈的位數也逃不出上述的公例。反過來說，由積羈的位數求方根的位數自然也是明白的很。積羈若是個一位，兩位，或三位數，牠的立方根一定是個一位數；積羈若是個四位，五位，或六位數，牠的立方根一定是個兩位數；積羈若是個七位，八位，或九位數，牠的立方根一定是個三位數。

這還可以從 1, 10, 100, 各數的立方來看。1 的立方等於 1, 10 的立方等於 1,000, 100 的立方等於 1,000,000, 1,000 的立方等於 1,000,000,000。也可以說，1 的立方根等於 1, 1,000 的立方根等於 10, 1,000,000 的立方根等於 100, 1,000,000,000 的立方根等於 1,000。1 的立方根等於 1, 1,000 的立方根等於 10, 那末 1 和 1,000 中間的任何數目(一位, 兩位, 或三位的數目)的立方根一定在 1 和 10 中間, 也就是一一定是個一位數; 1,000 的立方根等於 10, 1,000,000 的立方根等於 100, 那末 1,000 和 1,000,000 中間的任何數目(四位, 五位, 或六位的數目)的立方根一定在 10 與 100 之間, 也就是一一定是個兩位

數；1,000,000 的立方根等於 100，1,000,000,000 的立方根等於 1,000，那末 1,000,000 和 1,000,000,000 中間任何數目（七位，八位，或九位的數目）的立方根總在 100 和 1,000 之間，也就是一定是個三位數。這樣看來，也是三位數以及以下的數目的立方根總是一位數，四位至六位的數目的立方根總是兩位數，七位至九位的數目的立方根總是三位數。若把積羈的位數分組，每三位一組，三位以及以下的數目自然只有一組，四位至六位的有兩組，七位至九位的有三組，組數恰等於立方根的位數，所以分組就定了立方根的位數。這是分組的理由和意義。

舊日珠算上也有關於立方根定位的四句口訣，是「一千定十定無疑，三萬總爲三十除，九十九萬不離十，百萬方爲一百推。」這四句口訣也和平方根定位的四句口訣差不多，大意是；積羈若是 1,000，立方根是 10；積羈若是 30,000，立方根是 30 多些；積羈到了 990,000，立方根也還是十位數；積羈一直要到了 1,000,000，立方根才能到 100。積羈分組以後，立方根的位數自然就定了，所以用不着什麼定位的口訣。與其念這無用的口訣，不如使學生熟記各基數的立方，以便在運算時容易求得立方根的第一位數。茲將基數的立方編成口訣列下：

一之立方一	二之立方八	三之立方爲二七
四之立方爲六四	五之立方一二五	六之立方二一六
七之立方三四三	八之立方五一二	九之立方七二九

現在我們講到第二個問題，開立方運算步驟的問題。在開立方的運算步驟中最難解的是第三步，要把已得的立方根自乘乘3作為試驗除數，以後試驗除數又加立方根第一第二兩位數相乘乘3的積數，和立方根第二位數的平方。這樣得出來的數目再和立方根的第二位數相乘，從積裏減去牠們的積數。若求了解這種算法的道理，須先明白：甲乙兩數的和數的立方，等於甲數的立方，甲數的平方和乙數的乘積的三倍，甲數和乙數的平方的乘積的三倍，和乙數的立方，四者之和。例如：

$$\begin{aligned}
 9^3 &= (4+5)^3 \\
 (4+5)^3 &= (4 \times 5)^2 \times 9 \\
 &= (4^2 + 2 \times 4 \times 5 + 5^2) \times 9 \\
 &= 4^2 \times (4+5) + 2 \times 4 \times 5 \times (4+5) + 5^2 \times (4+5) \\
 &= 4^3 + 4^2 \times 5 + 2 \times 4^2 \times 5 + 2 \times 4 \times 5^2 + 5^3 \\
 &= 4^3 + 3 \times 4^2 \times 5 + 3 \times 4 \times 5^2 + 5^3
 \end{aligned}$$

若用一個公式代表，便是： $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

我們知道  $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$  的立方根是  $a+b$ ，我們再故意求

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$  的立方根，藉以說明運算的步驟。

$$\begin{array}{r}
 \sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = ? \\
 \begin{array}{r}
 a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad | \quad a+b \leftarrow \text{立方根} \\
 \hline
 3a^2 \quad | \quad 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
 3ab + b^2 \quad | \quad 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
 \hline
 3a^2 + 3ab + b^2
 \end{array}
 \end{array}$$

立方根的第一位數  $a$  是很顯然的。積裏減去立方根第一位數  $a$  的立方  $a^3$  以後，還餘  $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 。我們知道立方根的第二位數是  $b$ ，但是如何得出  $b$  呢？用  $3a^2$ ——立方根的第一位數  $a$  的平方的三倍——除所餘積裏的第一位數  $3a^2b$ ，便可得  $b$ ，所以我們使用立方根的第一位數自乘(平方)乘 3 作為試驗除數。有了立方根的第二位數  $b$  以後，如何把積裏除盡呢？ $3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (3a^2 + 3ab + b^2)b$  只有用  $3a^2 + 3ab + b^2$  作除數方可(立方根的第二位數  $b$  是商數)。就是在試驗除數  $3a^2$  之外再加  $3ab$  和  $b^2$  兩數， $3ab$  是立方根的第一二兩位數相乘乘 3 的積數， $b^2$  是立方根第二位數  $b$  的平方。這也就是要把已得的立方根作為試驗除數，試驗除數又加立方根的第一二兩位數相乘乘 3 的積數，和立方根的第二位數的平方，作為完全除數的必然的理由。再就實數舉例說明：

例題(C)  $\sqrt[3]{21952} = ?$

$20^2 \times 3 = 120$	$\begin{array}{r} 21.952 \overline{) 21952} \leftarrow \text{立方根} \\ 8 \\ \hline 13952 \\ \hline 13952 \quad (1744 \times 8) \\ \hline 0 \end{array}$
$20 \times 8 \times 3 = 480$	
$8^2 = 64$	
1744	

積裏是個五位數可以分為兩組，由此知道立方根一定是個兩位數。立方根的第一位數得出 2，也就是 20，立方根的第二位數是一個位數，我們可以說：積裏等於 20 加一個位數的和數的立方。由前透的道理知道： $21952 = (20 + \text{一個位數})^3$

$$(20 + \text{一個位數})^3 = 20^3 + 3 \times 20^2 \times \text{一個位數} + 3 \times 20 \times \text{一個位數}^2 + \text{一個位數}^3$$

於是

$$21952 - 8000 = 3 \times 20^2 \times \text{一個位數} + 3 \times 20 \times \text{一個位數}^2 + \text{一個位數}^3$$

$$13952 = (3 \times 20^2 + 3 \times 20 \times \text{一個位數} + \text{一個位數}^2) \times \text{一個位數}$$

$$\text{所以 } 13952 \div (3 \times 20^2 + 3 \times 20 \times \text{一個位數} + \text{一個位數}^2) = \text{一個位數}$$

( $3 \times 20^2$ )和( $3 \times 20^2 + 3 \times 20 \times \text{一個位數} + \text{一個位數}^2$ )相差不很大，(所差的是 $3 \times 20 \times \text{一個位數} + \text{一個位數}^2$ )所以我們可以用 $3 \times 20^2$ 作為「試驗」除數，以求 $13952 \div (3 \times 20^2 + 3 \times 20 \times \text{一個位數} + \text{一個位數}^2)$ 的商數。自然， $13952 \div (3 \times 20^2 + 3 \times 20 \times \text{一個位數} + \text{一個位數}^2)$ 的商數是比 $13952 \div 3 \times 20^2$ 的商數小的。 $3 \times 20^2$ 是立方根的第一位數平方的三倍。這就是把已得的立方根自乘乘3作為試驗除數的道理。 $[13952 \div (3 \times 20^2 + 3 \times 20 \times \text{一個位數} + \text{一個位數}^2) = \text{一個位數}]$ 的公式可以說明試驗除數又加立方根第一二兩位數相乘乘3，和立方根的第二位數的平方的道理。

## VI 高次方開法和開方用算盤

立方以上的高次方的開方法，除去數學上的研究以外，應用很少，更用不着講了。不過為滿足有數學天才的學生的求知慾，也可以在他的能理解的範圍以內告訴他四次方，六次方，八次方，九次方，十二次方等的開法。四次方就是平方的平方，六次方就是平方的立方，或立方的平方，八次方是四次方的平方，或平方的四次方，九次方是立方的立方，十二次方是四次方的立方，或立方的四次方。所以

若求四次方根，就求平方根的平方根；若求六次方根，就求平方根的立方根，或立方根的平方根；若求八次方根，就求平方根的平方根的平方根；若求九次方根，便求立方根的立方根；若求十二次方根，便求立方根的平方根的平方根，或平方根的平方根的立方根，或平方根的立方根的平方根。

由前邊幾個例題的圖解中可以看到，普通開方都要用檔位很多的算盤。(計算開立方的例題 5，就非用十七檔的算盤不可)。普通的算盤檔位都不很多，所以開方時常常不夠用，檔位很多的算盤，檔位夠用了，而方根，積冪，試驗除數，排成很長的一排，計算起來也很不方便。通常都用兩個算盤，自然也很麻煩。若用金劍清先生(參考 1)的金式算盤(第二章 32 頁)這些困難便都可免除了。把積冪撥在本盤上，把方根和試驗除數撥在輔盤上。檔位既可夠用，計算起來也清楚明白。

## V 總結提要

總結在本章內討論的有下列各點：

1. 在普通小學和民衆學校本來教不到開方，不過開方的應用很廣，所以對於數學成績特優興趣特厚的學生也可以教一點開方的方法。

2. 教學開平方法要注意：(一)積冪分組，和(二)把已得方根加倍作為試驗除數兩點。

3. 教學開立方方法要注意：(一)積冪分組，和(二)把已得的立方根自乘乘 3 作為試驗除數，試驗除數又加立方根的第一二兩位數相乘

乘3，和立方根第二位數的平方，兩點。

4. 對於數學天才特優的學生，他若自動的問起時，也可以告訴他四次方，六次方，八次方，九次方，十二次方，等的開法。

5. 開方時用金氏算盤最為方便。

#### 本章參考

1. 金劍清(民國廿四年)：金氏新式算盤說明書。科學的中國，第五卷第二期，3—8頁。
2. 珠算教師如對開方法不甚明瞭可參閱普通算術，代數教科書，珠算全書及算法統宗等書。

## 第十章 捷 算

I 珠算應用和捷算	181
II 加法捷算	182
III 減法捷算	184
VI 乘法捷算	184
V 除法捷算	192
IV 斤兩法捷算	199
III 開方捷算	200
II 捷算問題	217
I 總結提要	218

## I 珠算應用和捷算

學習珠算主要的目的在應用，應用時計算必須「正確」「迅速」，因為不正確，計算不如不計算；不迅速，便失去了應用珠算的意義。計算「正確」是個習慣的問題，前邊已經屢有論列。「迅速」則是個方法和熟練的問題。計算技術不純熟，固然不能計算迅速，而所用的方法若太繁複也不能計算迅速。因此「捷算」或簡便算法也很有介紹的必要。本章便專門來介紹捷算。

在算術心理中關於捷算的研究便沒有什麼，而珠算上捷算教學的問題更少有人討論過，所以在本章中也和在前一章一樣，偏重於方法的介紹，專門教學上的討論較少，這是先要聲明的。

## II 加法捷算

1. 等差級數加法 等差級數的和數，等於等差級數的首項和末項的平均數和項數的乘積。設：

$$a = \text{首項} \quad d = \text{公差} \quad n = \text{項數}$$

$$l = \text{末項} \quad S = \text{等差級數之和}$$

$$S = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (a+n-1d) \quad (1)$$

$$S = (a+n-1d) + (a+n-2d) + \dots + (a+d) + a \quad (2)$$

$$(1) + (2) \quad 2S = (2a+n-1d) + (2a+n-1d) + \dots + (2a+n-1d)$$

$$= n(2a+n-1d)$$

$$S = \frac{n(2a+n-1d)}{2}$$

$$= \frac{n(a+l)}{2}$$

例題(1)  $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = ?$

$$\text{首項} = 1 \quad \text{末項} = 9 \quad \text{項數} = 9$$

$$\text{和數} = \frac{1+9}{2} \times 9 = \underline{45}$$

例題(2)  $4+7+10+13+16+19+22+25+28 = ?$

$$\text{和數} = \frac{4+28}{2} \times 9 = \underline{144}$$

2. 等比級數加法

$$\text{等比級數的和數} = \frac{\text{末項} \times \text{公比} - \text{首項}}{\text{公比} - 1}$$

$$\text{設 } a = \text{首項} \quad r = \text{公比} \quad l = \text{末項}$$

$$n = \text{項數} \quad S = \text{等比級數之和}$$

$$S = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \quad (1)$$

$$rS = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n \quad (2)$$

$$(2) - (1) \quad rS - S = ar^n - a$$

$$(r-1)S = ar^n - a$$

$$S = \frac{ar^n - a}{r-1} = \frac{1r - a}{r-1}$$

例題(3)  $7 + 14 + 28 + 56 + 112 + 224 + 448$

公比,  $r=2$        $r-1=1$

$$\therefore S = 1 \times 2 - a$$

$$\text{和數} = 448 \times 2 - 7 = \underline{889}$$

3. 相加的數目裏邊若有近似「圓成數」(就是10,或10的倍數)的,便可用一個圓成數代替,算出結果後再加訂正,

例題(4)  $5682 + 995 = 5682 + 1000 - 5 = \underline{6677}$

4. 若有多個近似數相加時可取其中任一數作代表,用乘法計算,然後再訂正結果。

例題(5)  $16 + 17 + 16 + 15 + 14 = 16 \times 5 + 1 - 1 - 2 = \underline{78}$

5. 求多個近似數的平均數,若牠們的高位數都相同,只個位數或十位數和個位數不同,便可只求低位數的平均數然後加在高位數上。

例題(6) 求 4364, 4367, 4363, 4365, 4366 之平均數

$$\text{平均數} = 4360 + [(4+7+3+5+6) \div 5] = \underline{4365}$$

關於以上各法讀者欲知其詳可參看徐玉相先生(參考2)的簡便算法。

### III 減法捷算

1. 減數若是近似圓成數，或和被減數的相應部分近似時，便可用圓成數或被減數的一部計算，然後再訂正結果。

$$\text{例題(7)} \quad 48534 - 9998 = 48534 - 10000 + 2 = \underline{38536}$$

$$\text{例題(8)} \quad 6875 - 879 = 6875 - 875 - 4 = \underline{5996}$$

2. 兩數平方的差數 在代數上我們知道， $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ，若兩數相差不大，或是牠們的差數或和數為圓成數，便可按這個公式計算。

$$\text{例題(9)} \quad 13^2 - 12^2 = (13+12)(13-12) = 25 \times 1 = \underline{25}$$

$$\text{例題(10)} \quad 53^2 - 43^2 = (53+43)(53-43) = 93 \times 10 = \underline{930}$$

$$\text{例題(11)} \quad 76^2 - 24^2 = (76+24)(76-24) = 100 \times 52 = \underline{5200}$$

3. 兩數立方的差數 在代數上我們知道， $a^3 - b^3 = (a-b)[(a-b)^2 + 3ab]$ ，若兩數相差不大，或差數為圓成數，便可用上列公式計算。

$$\text{例題(12)} \quad 87^3 - 86^3 = (3 \times 87 \times 86 + 1) \times 1 = \underline{22447}$$

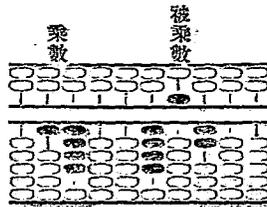
$$\text{例題(13)} \quad 125^3 - 25^3 = (3 \times 125 \times 25 + 100^2) \times 100 = \underline{1937500}$$

關於減法捷算也可參看徐先生的簡便算法。

### VI 乘法捷算

1. 加乘法 如果乘數是 11 至 19 各數或是三位數而第一位數是 1 的，便可以用加乘法。舊日珠算上斤兩法中有所謂「身加六」的就是這一類的算法。舉例說明如下：

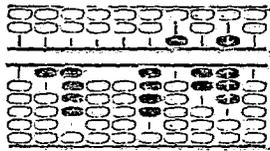
$$\text{例題(14)} \quad 452 \times 14 = ?$$



運算步驟

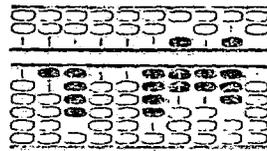
(1)

$$4720 + (2 \times 4)$$



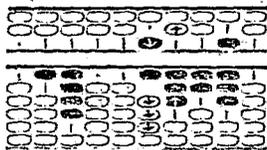
(2)

$$4523 + (50 \times 4)$$



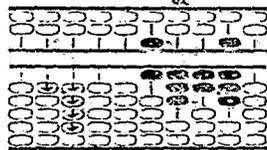
(3)

$$4723 + (400 \times 4)$$

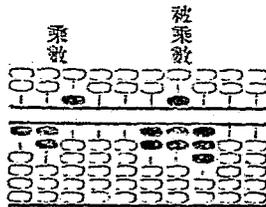


(4)

積數

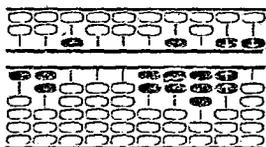


例題(15)  $2^3 \times 125 = ?$



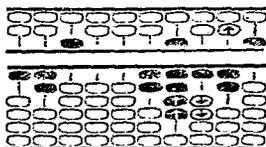
運算步驟 (1)

$$27300 + (3 \times 5) + (3 \times 20)$$



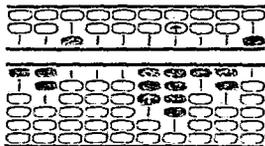
(2)

$$27375 + (70 \times 5) + (70 \times 20)$$

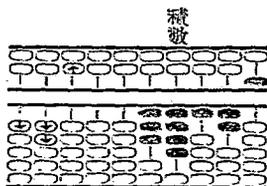


(3)

$$29125 + (200 \times 5) + (200 \times 20)$$



(4)

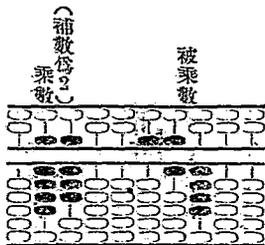


由圖解中，我們可以看到，這種算法是被乘數撥在算盤上不動，乘數的第一位數 1 不用，只用乘數的其餘位數乘被乘數，把乘積加在被乘數上。這種運算步驟好像不合理，其實非常合理，理由也很簡單。○  $452 \times 14 = 452 \times 10 + 452 \times 4 = 4520 + 452 \times 4$  所以  $452 \times 14 = ?$  一個題目，可以按  $4520 + 452 \times 14 = ?$  計算。○  $452$  和  $4520$  兩個數目自然不同，然而在算盤上總是幾個算珠，所  以這幾個算珠既可以代表被乘數的  $452$ ，也可以代表部分積數的  $4520$ 。我們若把  $452 \times 14 = ?$  一個題目當作   $4520 + 452 \times 4$  計算，那就是在撥上被乘數  $452$  以後，便在他右一檔虛擬一個零位，變成  $4520$ ，再加  $452 \times 4$  的積數就是了，這就是加法。○  $273 \times 125 = ?$  一題的算法也是根據同樣的道理，所差的不過在這個算題中要在被乘  $273$  右

邊虛擬兩個零位，變為 27300，再加  $273 \times 25$  的積數而已。

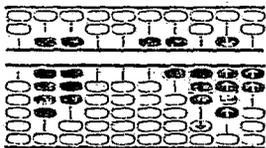
**2 減乘法** 如果乘數近於 10，100 等圓成數，計算時可以用減乘法。被乘數撥在算盤上不動，只當牠就是被近似乘數的一個圓成數乘過了，再從其中減去被乘數和乘數的補數的乘積。如下兩例題：

例題(16)  $564 \times 98 = ?$



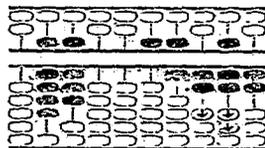
運算步驟 (1)

$$56400 - (4 \times 2)$$



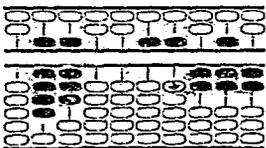
(2)

$$56392 - (60 \times 2)$$



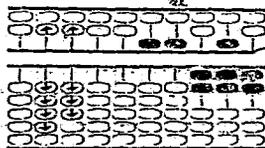
(3)

$$56272 - (500 \times 2)$$

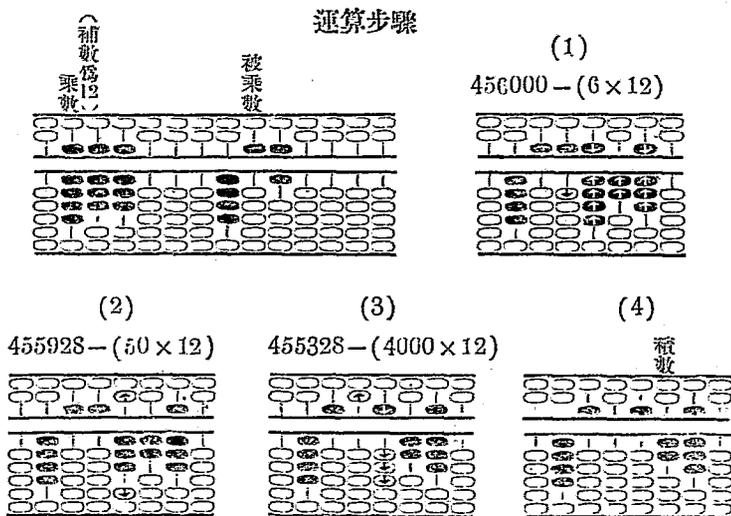


(4)

積數



例題(17)  $456 \times 988 = ?$



例題(16)  $564 \times 98 = ?$  在運算步驟中是按  $564 \times 100 - 564 \times 2$  計算的，例題(17)  $456 \times 988 = ?$  在運算步驟中是按  $456 \times 1000 - 456 \times 12$  計算的，所根據的理由和加乘法相似，不必再解釋了。

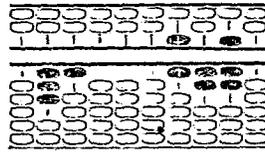
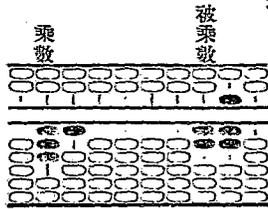
**3. 逆乘法** 逆乘法和加乘法所根據的原理是一樣的。乘數的首位數是1時用加乘法，乘數的末位數是1時用逆乘法。在加乘法中，是把被乘數變成牠的十倍或百倍數，只當是用乘數的首位數10，100等乘過了；在逆乘法中，被乘數無論在算珠上，在位數上，都不變動，只當是用乘數的末位數乘過了，再在牠上邊加上乘數的十位數或百位數和被乘數的乘積。舉例說明如下：

例題(18)  $27 \times 31 = ?$

運算步驟

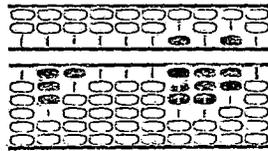
(1)

$$27 + (20 \times 30)$$



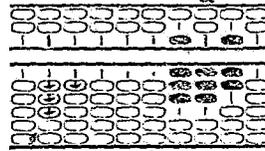
(2)

$$627 + (7 \times 30)$$

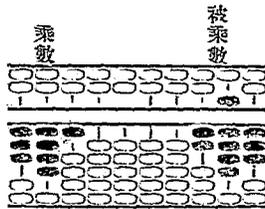


(3)

積數



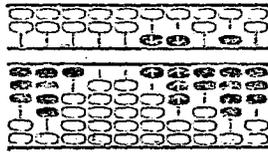
例題(19)  $293 \times 341$



運算步驟

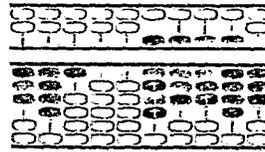
(1)

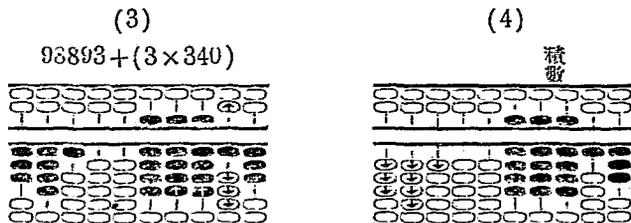
$$293 + (200 \times 340)$$



(2)

$$65213 + (90 \times 340)$$





例題(18)是按  $27 \times 31 = 27 \times 30 + 27$  計算的，例題(19)是按  $293 \times 341 = 293 \times 340 + 293$  計算的，用不着解釋。所可注意的是在這種算法中先用乘數乘被乘數的高位數。如在例題(18)中第一步[步驟(1)]是用乘數31的30乘被乘數27的20，在例題(19)中第一步[步驟(1)]是用乘數341的340乘被乘數293的200，與普通乘法的算法不同，所以叫做「逆乘法」。這也是不得已的辦法，因為如果先用乘數乘被乘數的低位數，積數加在上邊，被乘數的高位數就被擾亂了。如在例題(18)中，如果先用乘數的30乘被乘數27的7，把積數加在被乘數27上，算盤上的算珠成了下列的樣子  被乘數的高位數20不見了，以後的步驟不能進行了，這是逆  乘法中所以要「逆乘」的道理。

4. 分乘法 如果打算把算法變簡，可用分乘法，就是先把乘數分化成牠的因數，再用這些因數去乘被乘數。如以35乘某數，可先以5乘之，再用7乘所得的積數。如以150乘某數，可先以13乘之，再以12乘所得的積數。

關於加乘，減乘，逆乘，各法，請參看華印椿先生(參考3)的珠算

速計法。

5. 他種捷算乘法 乘法的捷算法除了上列四種之外還有許多種。列舉幾種如下(參考 2)：

一. 個位數為 5 的數目的平方 如若求某數的平方，這個數目的個位數是 5，可以先把某數的個位數 5 切去。原數切去 5 以後的數和這個數加 1 的數相乘，再在這個乘積末尾加 25，即得原數的平方。如求 25 的平方，把 25 的 5 切去，得 2，2 和 2 加 1 的數 3 相乘，得 6，在 6 後邊加 25，得 625，就是 25 的平方。理由如下：

$$\text{由公式： } A^2 = (A - B)(A + B) + B^2$$

$$25^2 = (25 - 5)(25 + 5) + 25$$

$$= 20 \times 30 + 25$$

$$= 2 \times 3 \times 100 + 25$$

$$= \underline{625}$$

二. 近於圓成數的數目的平方 如果一數近於圓成數，若求牠的平方，也可按公式  $A^2 = (A - B)(A + B) + B^2$  計算，以某數為 A，以其補數為 B。如求 91 的平方：

$$91^2 = (91 - 9)(91 + 9) + 9^2 = 82 \times 100 + 81 = \underline{8281}$$

三. 乘數為 25；125 等數時的捷算 以 25 乘某數，等於以 100 乘某數，再以 4 除之；以 125 乘某數，等於以 1,000 乘某數，再以 8 除之。所以若乘數為 25 或 125 時，就可把被乘數擺在算盤上，竟以 4 或 8 除之，在商數下邊虛擬兩或三零位，就是積數了。

## V 除法捷算

1. 分除法 除數若是複數，如果只求算法簡單，不怕手續變繁，可以把除數化為牠的因數，再連續的用牠們除被除數。如除數為 56 時，可先以 7 除被除數，再以 8 除商數。如除數是 144 可以先用 6 除被除數，次用 6 除商數，再用 4 除新商數。

2. 特殊除數的捷算 遇到一些特殊的除數，有時是可以把計算變簡，下面是最普通的幾種(參考 2)：

一. 除數為 25, 125 等數 以 25 除某數，等於以 100 除某數再以 4 乘之；以 125 除某數等於以 1000 除某數，再以 8 乘之。所以除數若是 25 或 125，計算時就可以直然把被除數擺在算盤上，縮小 100 或 1000 倍，以 4 或 8 乘之。

二. 除數為 99, 999, … 等數 除數若是 99, 999, … 等數，並且大於被除數時，商數是循環小數，循環的位數等於除數中 9 的個數，循環小數中的數字，就是被除數中的數字，都不用計算。如

$$8 \div 99 = 0.\dot{0}8 \quad 43 \div 99 = 0.\dot{4}3$$

$$824 \div 999 = 0.\dot{8}24 \quad 3752 \div 9999 = 0.\dot{3}752$$

三. 除數為 101, 1001, … 等數 除數如果等於  $10^n + 1$  ( $n$  為任何正整數)，並且大於被除數(假定為  $a$ )，商數一定是循環小數，週期是  $2n$  位。左邊的  $n$  位若是當作是一個數，牠等於  $a-1$ ；右邊的  $n$  位若當作一個數，牠等於  $10^n - a$ 。

例題(20)  $83 \div 101 = ?$

除數  $10^n + 1 = 101 = 100 + 1 = 10^2 + 1$ ，所以  $n = 2$ ，被除數  $a = 83$ 。商數為  $2n$  或  $4$  位的循環小數，牠的左邊的兩位等於  $a - 1 = 83 - 1 = 82$  右邊的兩位等於  $10^n - a = 100 - 83 = 17$ 。所以  $83 \div 101 = 0.\dot{8}217$ 。

如果把商數分為兩段，每段  $n$  位，那末左邊的  $n$  位中和右邊的  $n$  位中每對位置相應的數字相加，和數總等於  $9$ 。如在前一例題中，商數截為兩段，左邊一段為  $82$ ，右邊一段為  $17$ ， $8$  和  $1$  位置相應， $2$  與  $7$  位置相應，兩數相加都等於  $9$ 。所以在求商數時由  $a - 1$  的公式中求出商數的左邊一段以後，只順序的求其中每個數字對  $9$  的補數就可以求出右邊的一段了，不必再用  $10^n - a$  的公式。

[證明] 原題是  $a \div (10^n + 1)$ ，被除數和除數雙方都以  $10^n - 1$  乘之，因為  $(10^n + 1)(10^n - 1) = 10^{2n} - 1$ ，所以乘後原題變為  $a(10^n - 1) \div 10^{2n} - 1$ 。因為  $10^{2n} - 1 = 99 \dots 9$  所以原題又可變為  $a(10^n - 1) \div 99 \dots 9$  ( $2n$  個  $9$ )。按除數為  $99, 999$  等數的除法，知道上式之商是  $2n$  位的循環小數，其中一節數字是  $a(10^n - 1)$ 。若  $a(10^n - 1)$  的位數小於  $2n$ ，便在牠的左邊加  $0$  以補足之。又  $a(10^n - 1) = a(10^n) - a = a00 \dots 0$  ( $n$  個  $0$ )  $- a$ ，減數  $a$  並不大於  $10^n$ ，所以若從上邊被減數減  $a$  時只須在被減數左邊的  $a$  中借  $1$  個就夠了。

所以結果是：左邊的  $n$  位若當作一數，便等於  $a - 1$ ；右邊

的  $n$  位等於  $100\dots\dots 0 - a = 10^n - a$ 。若以左邊的  $n$  位當作一數與右邊的  $n$  位相加，則得  $10^n - a + a - 1 = 10^n - 1 = 99\dots\dots 9$  ( $n$  個 9)，也就是左邊  $n$  位數中與右邊  $n$  位數中位置相應的數相加都等於 9。

3. 飛歸 飛歸通常也算作除法捷算的一種，不過牠的口訣太多，學習起來非常困難，實是「捷」而「不捷」。華印椿先生便以為牠「口訣繁多，不合實用，」沒有收入他的「珠算速計法」中。張健先生(參考9)也反對飛歸，他說：「飛歸打起盤來非常容易錯，因為所需要的口訣太多不容易記牢；那些口訣又互相類似，很容易弄錯。」然而也有許多的情形適用特殊的飛歸。如在常計算地畝的人，「飛歸取畝」的方法是很有用的。在其他特殊的情形也許有其他適用的特殊飛歸。飛歸要在實際應用時自己去學，學校中教學珠算時大可不必管牠。

4. 通除 所謂「通除」實際就是累減，不過減法是從被減數的低位數減起，通除是從被除數的高位數減起。通除和通乘(金蟬脫壳法)一樣，雖然不致於像明儒程大位(參考1)所說「布算繁疊……蠢於小兒之數，」然而也難稱不起是捷算。最近趙志芳先生(參考4)把通除加以改良，造出他的「簡除」和「速除」，現在把趙先生的這兩種算法介紹於下：

一、簡除 簡除中有三句口訣，先介紹如下：

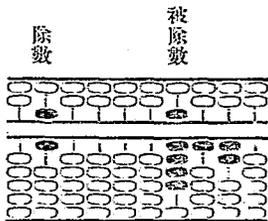
口 訣	用 時	撥 珠 法
(1) 多前空加一， 照全數除之。	被除數大於或 等於除數時。	在被除數前隔一檔的檔位裏撥上一個下珠，從被除數的首位起，減去除數的全數。
(2) 少前隨下五， 作半數除之。	被除數大於或 等於除數的半 數時。	在被除數的前一檔裏撥下一個上珠，從被除數的首位起，減去除數的半數。
(3) 無除隨上一， 退一檔照全數 除之。	被除數小於除 數的半數時。	在被除數的前一檔裏撥上一個下珠，從被除數的第二位起，減去除數的全數。

「用時」一項中，被除數和除數大小的比較，是就同位的數字而言。譬如除數是兩位數，便和被除數的首兩位數比較；除數是三位數，便和被除數的首三位數比較。三句口訣的意義不很明顯，不過若和「用時」及「撥珠法」參照着看，自可明瞭。現在再稍加解釋一下：(1) 如果被除數大於或等於除數，自然可以商 1。所謂「多前空加一」，就是被除數「多」於除數，在被除數的前邊隔一檔的檔位裏商 1。有了商數以後，要從被除數裏減去商數和除數的乘積，現在商數是 1，商數和除數的乘積還等於除數，所以要從被除數裏減了除數。所謂「照全數除之」，就是從被除數裏減了除數的全數。(2) 被除數若小於除數，只大於或等於除數的半數，只可商 0.5。所謂「少前隨下五」，就是被除數「少」於除數，商 0.5。商 1 時要把 1 撥在被除數前面隔一檔的檔位裏，0.5 只能撥在牠的下一檔，所以是被除數的前一檔。商數 0.5 乘除數得除數的半數，從被除數減去，這就是「作半數除之」的意義。(3) 被除數小於除數的半數，不能商 0.5，可以商 0.1。所謂「無除隨上

一」，就是說被除數小於除數，沒有除的(無除)，商0.1，0.1應當和0.5擺在一檔裏，所以也是撥在被除數的前一檔。0.1乘除數得除數的十分之一，從被除數減去時，要從下一檔減起，所以說「退一檔照全數除之」。

把口訣說明以後，再用例題表示算法。

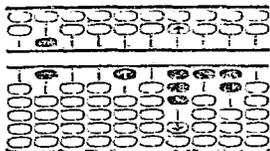
例題(21)  $912 \div 6 = ?$



運算步驟

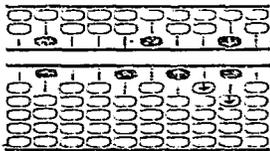
(1)

被除數首位的9大於除數，  
用第一句口訣，「多前空加  
一，照全數除之。」



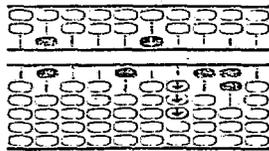
(3)

被除數的首位數1小於除數  
的半數，用第三句口訣，  
「無除隨上一，退一檔照全  
數除之。」



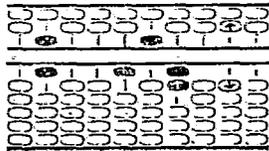
(2)

被除數首位成3，恰等於除數的  
半數，用第二句口訣，「少前  
隨下五，作半數除之。」



(4)

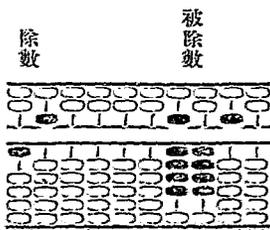
被除數的首位數6恰等於除數，  
用第一句口訣，「多前空加一  
照全數除之。」得出商數152，  
計算完成。



在簡除中，被除數比除數大時，只有一句口訣，「多前空加一照全數除之」，就是只可商1。若被除數比除數不只大一倍，要商1以上的數，便只有重複這句口訣，重複着這樣計算。譬如要商8，就要重複8次，要商9，就要重複9次。被除數小於除數時，只有兩句口訣，「少前隨下五作半數除之」，和「無除隨上一退一檔照全數除之」，就是只可商0.5或0.1。要商0.2, 0.3, 0.4, 0.6, …… 0.9等數也要重複計算。這樣看來，所謂「簡」除，倒是很麻煩的一種算法，沒有這種缺點的是「速除」。

二. 速除 簡除中的口訣是「多前空加一」，「少前隨上五」，和「無除隨上一」，無論實際上該商幾，總是先商1，或0.5，或0.1。在速除中則不然，該商幾便商幾。被除數大於除數時，該商2，便商2，把口訣改成「多前空加二」；該商3，便商3，把口訣改成「多前空加三」。被除數小於除數時，該商0.4，便商0.4，該商0.6，便商0.6，把口訣改成「少前隨上四」，和「少前隨上六」等。有了商數以後，用商數乘除數，從被除數裏減去牠們的積數。舉例說明如下：

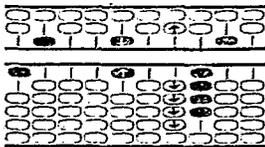
例題(22)  $945 \div 15 = ?$



## 運算步驟

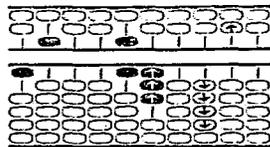
(1)

可以商6，口訣「多前空加六」，從被除數減商數和除數的乘積，「一六下除六，五六除三十。」



(2)

可以商3，口訣「多前空加三」從被除數減商數和除數的乘積，「一三下除三，三五除十五」，得出商數63，計算完成。



每步計算時，應該商什麼是要靠心算的。在速除中用除數的全數和被除數的首幾位估量，以定商數，有了商數以後，再用商數乘除數，從被除數裏減去牠們的積數，整個的運算步驟和筆算除法一樣。所以趙先生的簡除和速除一方面是由珠算的通除，一方面是由筆算除法，蜕化而來的。

趙先生說他的「簡除速除確是簡易便學」，能夠合於「費力省所得的效果大的教學原則」。道理淺明，「便學」確是簡除和速除的優點。速除的運算步驟和筆算除法相似，會了筆算除法的人一定容易學習速除。趙先生說他「曾以不滿一小時的時間，而教會一個初學除法的小學生，」當係實情。唐海滄先生(參考8)曾為文介紹簡除速除，備極推崇。不過簡除速除也不是完全沒有缺點，簡除和通除相似，通除的缺點簡除也都有。速除要用心算(簡除也要用心算，只是分量少些)，引用心算是又多一層麻煩。在一切計算上，藉機械的力量越多，引用心算越少，計算的速度和確度也就越大，所以筆算勝於心算，用計算尺又勝於筆算，用計算機又勝於計算尺。所以速除要引用心算，是牠的缺點之一。既然要用心算求商數，還要用「多前空加幾」，「少前隨上幾」

的口訣，也是有些「畫蛇添足」。不過無論如何，趙先生的簡除，速除，而尤其是速除，都是珠算除法上大可注意的改革。牠們的真正價值如何，現在還不易斷定，最好有人拿牠們和普通的珠算除法做個實驗的比較研究。

## VI 斤兩法捷算

所謂斤兩法，主要的就是兩求斤和斤求兩的方法，譬如有了一兩的價格，求一斤的價格，或已知一斤的價格，再求一兩的價格。普通有了一兩的價格求一斤的價格，是用16乘；已知一斤的價格求一兩的價格，是用斤兩口訣。已知一斤的價格求一兩的價格，用斤兩口訣，也等於用16除。16可以分爲 $2 \times 2 \times 2 \times 2$ ，根據這個道理，在斤兩法中便有所謂「一掌經法」，只用手指和心算。如已知一兩的價格是五元，求一斤的價格，伸出一手，屈第一指，呼5，屈第二指，照屈第一指時加倍，呼10，屈第三指，照屈第二指時加倍，呼20，屈第四指，又照屈第三指時加倍，呼40，屈第五指，又照屈第四指時加倍，呼80，五指屈完，呼出的80就是一斤的價格。若已知一斤的價格，求一兩的價格，便伸出五指，屈第一指時，呼出原來一斤的價格，屈第二指時減半，屈第三指時又減半，屈第四指時又減半，屈第五指時又減半。五指屈完，最後呼出的數目便是一兩的價格。一掌經法是公認的斤兩法捷算，近來也有人提倡牠（如惠汝濱先生，參考4），所以也很值得注意。不過這完全是心算，不是珠算了，我們在這裏介紹，有點「過分」了。

## VII 開方捷算

### 1. 開平方捷算

一. 在計算機上開平方的方法，在珠算上也可以運用，並且也很簡便。詹才鎬先生(參考 5)曾介紹過，現在舉例說明：

$$\text{例題(23)} \quad \sqrt{459684} = ?$$

計算時先把積羈擺在算盤上，照普通的方法分組。在這個例題中，可以分爲三組：45，96，84。在算盤的另一端，撥上一個下珠，作 1。在積羈的最左一組 45 內減 1，成 44。在算盤另一端的數 1 上加 2，成 3，從積羈的 44 內減 3，成 41。再在另一端的數 3 上加 2，成 5，從羈的 41 內減去，餘 36。再在另一端數上加 2，從積羈減去，如此繼續下去，直到另一端的數成了 11，而積羈的左一組內只餘 9，不足減時爲止。於是在另一端的數上退一位，加 11，成爲 121。積羈的左一組除 9，第二組是 96，和爲 996，減去 121，餘 875。再在 121 上加 2，成 123，從 875 內減去。如此繼續，直至另一端的數成爲 133，而積羈的兩組只餘 107，不足減時爲止。再照前法，在另一端的數 133 上退一位加 11，成 1341，同時積羈中前兩組的除數連絡最右一組成爲 10784，減去 1341，餘 9443。再在 1341 上加 2，成 1343，從 9443 減去，餘 8100。再繼續加減，直至算盤另一端的數變成 1355，而積羈減盡。1355 加 1 折半得 678，便是所求的平方根。

如果積羈的最左一組的數很小，如  $\sqrt{144} = ?$  一題中，積羈最左一組只是 1，減一次就沒有了，就在另一端的數 1 上退一位加 11，成

21，由積幕的第二組減去。如在 $\sqrt{10404} = ?$ 一題中，最左一組減完後，另一端的數1上退一位加倍11，成21，而積幕的第二組還不夠減，便退兩位加101，成201，由積幕的第二三兩組內減去。如在 $\sqrt{1006009} = ?$ 一題中，退兩組也不夠減的，便退三位加1001，成2001，從積幕的第三四兩組內減去。又如在 $\sqrt{5867} = ?$ 一題中，另一端的數加至151時，積幕只餘91了，不能減盡。遇到這種情形，可以虛擬小數點後一組，試驗5867這個數目是否是無理數。把151加1折半得76，也算是5867的近似根。

二. 前一種算法根據的是這樣一個定理：自1起連續奇數的和等於奇數「個數」的平方。若把這個定理直接應用於開平方法上，便得到另一種的開平方法，也是詹先生介紹過的。方法是由1起遞加各奇數，等到和數等於或最近於積幕時，把最後所加的那個奇數加1折半，便是所求的平方根。例如 $\sqrt{5625} = ?$ 一題，計算時自1起遞加諸奇數，1, 3, 5, 7, ……直至149時，和數恰是5625。把最後所加的149加1折半，得75，便是所求的平方根。又如計算 $\sqrt{5620} = ?$ 一題，自1遞加各奇數至147時和數為5476，至149時和數為5625，都近似積幕。147加1折半是74，149加1折半是75，所求的平方根一定在74與75之間。

前兩種算法所根據的定理前面已經說過，是「自1起連續奇數的和等於奇數「個數」的平方」。這個定理是很容易證明的，我們只看下面一些例子：

$$1^2=1$$

$$2^2=4=1+3$$

$$3^2=9=1+3+5$$

$$4^2=16=1+3+5+7$$

$$5^2=25=1+3+5+7+9$$

$$\vdots$$

$$10^2=100=1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$$

若把這個定理化爲一個公式，便是：

$$n^2=1+3+5+\dots+(2n-1)$$

$n^2$  是任何一數，自 1 到  $(2n-1)$  是  $n$  個奇數。

$n^2$  等於自 1 起到  $(2n-1)$  各連續奇數的和，所以要求  $n^2$  的平方根  $n$  便是便去求自 1 起到  $(2n-1)$  止各連續奇數的個數。求自 1 起到  $(2n-1)$  止各連續奇數的個數的一個方法，是從  $n^2$  中自 1 起減去各連續奇數，看減去多少個連續奇數， $n^2$  便恰等於零。另一方法是自 1 起累加各連續奇數，看累加多少個奇數，和數便等於  $n^2$ 。這就是前面第二種開平方槌算的方法。

我們再看自 1 起， $n$  個奇數的最末一個是  $(2n-1)$ ，顯然的  $n$  和  $(2n-1)$  是有關係的。  $n$  可以由  $(2n-1)$  中求出  $n=\frac{(2n-1)+1}{2}$ 。因爲  $n$  和  $(2n-1)$  有了這個關係，所以由  $n^2$  中自 1 起減各連續奇數時，或自 1 累加各連續奇數使和數等  $n^2$  時，我們可以只注意何時  $u^2$  等於零，或何時連續奇數的和數等於  $u^2$ ，不用去管究竟累減了或累加了多少

個連續奇數，因為連續奇數的個數，可以從最末一個奇數中求出來。譬如我們求 25 的平方根我們可以只去計算從 25 減 1, 3, 5, 7, 9, 恰等於零，或 1+3+5+7+9 恰等於 25，我們不必管連續奇數的個數，雖然那是所求的平方根，因為牠可以於累減或累加完成後，由最末一個奇數 9 求出。

$$n = \frac{(2n-1)+1}{2}, (2n-1) \text{ 為最末一奇數，在這個例題中為 } 9.$$

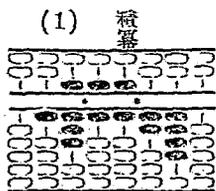
$$\therefore n = \frac{9+1}{2} = 5 \text{ 平方根}$$

再去檢查結果，1, 3, 5, 7, 9, 恰是 5 個連續奇數，這就是前面第二種算法中求平方根時，把最後所加的奇數加 1 折半的道理。

前面第二種算法是直接的應用上述的定理，第一種算法所根據的也是上述的定理，不過是間接的應用而已。第一二兩種算法所不同的是在第二種算法中是自 1 起累加各連續奇數，使和數等於積羈；在第一種算法中，是從積羈中自 1 起累減各連續奇數，使積羈變為零而止，不過「減」時是自高位數（積羈中最左一組）減起，所以在運算上和普通的累減不同，在減數上有退位加 11 等步驟。

三、有一種類似除法的開平方法，在珠算上應用非常方便，也是詹先生介紹的，現在舉例以說明之：

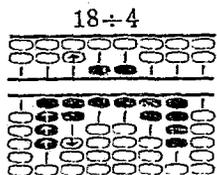
例題(24)  $\sqrt{186624} = ?$



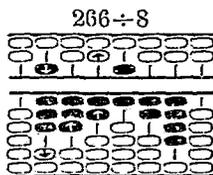
第一步照普通方法將積羈分組。在這個例題中可分三組，最左一組 18，中間一組 66，最右一組 24。第二步用心算求最左一組的近似平方根。18 的近似平方根應為 4。就以 4 為假定除數，除最

左一組，商 4 餘 2，如算盤圖式(2)。商數恰和假定除數相同，這就算是最左一組的答數。最左一組的除數 2，併入中間一組，成為 266。

(2)



(3)



把最左一組的答數 4 加倍，

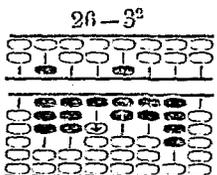
成 8，用以除 266，商 3，

餘 26，如算盤圖式(3)。再

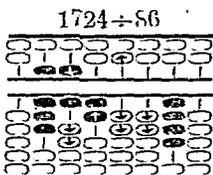
從 26 減去 3 的平方 9，餘

17，如算盤圖式(4)。中間一組的計算就此告終。餘數 17 併入最右一組，成為 1724。再把中間一組的答數 3 加倍，成 6，和他左邊的 8 併

(4)



(5)



為 86，作為最右一組的除

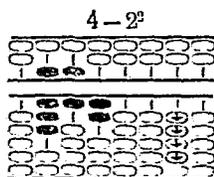
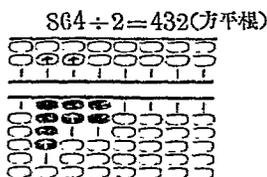
數，除 1724，商 2 餘 4，

如算盤圖式(5)。再由除數

4 裏減去最右一組答數 2 的

平方，積羈恰減盡。如算盤圖式(6)。再把最右一組的答數 2 加倍成 4，和它左邊的 86 合併成 864，折半得 432，便是所求的平方根，如算盤圖式(7)。

(6)

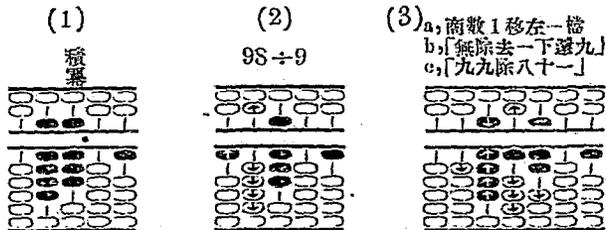
(7)  $2 \times 2$ 

由前邊例題中可以看出，這種算法的特點是，除了最左一組的平方根是要由心算計算外，其餘各組的平方根都是由前組的平方根的二倍

數除本組的積器求得的。所以很有些像除法，不過除數不是固定的。在這種算法中還有兩點需要注意：第一，最左一組的商數一定要與假定除數相同。有時商數可以大過假定除數，遇到這種情形，必須用「無除去一下還幾」的方法把商數減小，使之等於假定除數。如果商數已經等於假定除數，而積器中還有可以「逢進」的，也不要逢進。第二，最左一組的商數如在 5 以下，在原來檔位加倍；在 5 以上，要移左一檔，而後加倍，否則有誤，看下列一題：

例題(25)  $\sqrt{9201} = ?$

這個例題的積器可以分為兩組，左一組 98，右一組 01，如算盤圖式(1)。用心算求得的左一組的平方根，應當是 9，不過以 9 為除數，除 98 商數為 10，如算盤圖式(2)。商數 10 在 5 以上，照前述第二點要移左一檔；又因為商數 10 和假定除數 9 不同，必須用「無除去一下還九」的口訣，使商數變為 9，餘數為 17，如算盤圖式(3)。餘數 17 併右一組，成 1701。將商數 9 加倍，成 18，除 1701，商 9 除盡。如算盤圖式(4)。把右一組的商數 9，加入牠左邊的 18 成 198，折半得 99，就是所求的平方根，如算盤圖式(5)。



<p>(4)</p> $1701 \div 18 = 9 \dots$ $1701 - 189 \times 9$	<p>(5)</p> $9 \times 2 = 18$ $180 + 18 = 198$ $198 \div 2 = 99 \text{ (平方根)}$
---	---

計算這個題目也可以直然把由心算得來的左一組的假定除數 9，擺在左一組積羈 98 的前一檔，從 98 中減去假定除數 9 的平方 81，以下仍照上述的算法運算。凡是最左一組的積羈的假定除數在 5 以上的都可以應用同樣方法，不過要切實記好，這只應用於最左一組，並且由心算算出的假定除數或近似平方根還要是對的。

四、還有和上述第三種開平方捷算法類似的一種算法，是華印樁先生介紹過的，也很值得敘述。這種算法可以分做六步：

(1) 積羈分組。

(2) 用心算求最左一組的平方根，撥在積羈的前一位（若最左一組只有一位數，平方根便撥在積羈的前兩位），同時在積羈裏減去所得平方根的平方。

(3) 用 2 除積羈。

(4) 以第一位平方根除牠們右邊一組積羈，得出第二位平方根。

(5) 從積羈減去第二位平方根平方的半數。

(6) 用第一二兩位平方根除牠們右邊一組積羈，得出第三位根。

如此繼續算下去，直至積羈除盡為止。

現在再舉例說明：

例題(26)  $\sqrt{169} = ?$

運算步驟：

第一步	第二步	第三步	第四步	第五步
積器分組	求出左一組的平方根，在積器內減去其平方	以 2 除其餘積器 $69 \div 2 = 34 \cdot 5$	以第一位方根除積器得第二位方根	從積器裏減去第二位方根的平方的半數 4.5，得出平方根。

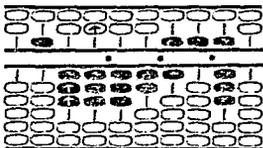
例題(27)  $\sqrt{25665316} = ?$

運算步驟：

第一步	第二步	第三步
積器分組	求最左一組近似平方根並在積器內減其平方	以 2 除其餘積器

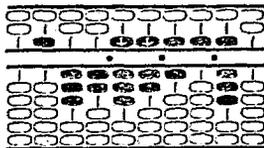
## 第四步

以第一位方根除其右一組積羈，得方根的第二位數3。



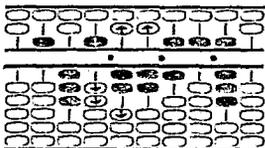
## 第五步

從積羈內減第二位方根的平方的半數，45。



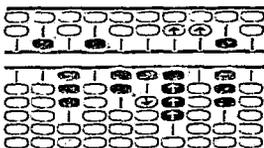
## 第六步(1)

用方根 58 除其右一組積羈 287 得第三位方根 5。



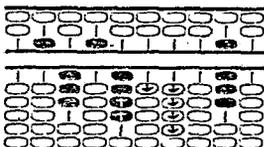
## 第六步(2)

從積羈內減去第三位方根的平方的半數，125。



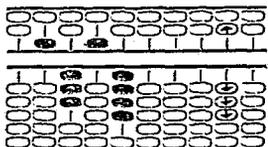
## 第六步(3)

用第一二三，三位方根除積羈得第四位方根，4。



## 第六步(4)

從積羈內減第四位方根的平方的半數，8，得出所求的平方根 5854，計算完成。



在這個算法中有兩點要特別注意：第一，是在第三步中積羈被 2 除以後，在第一步中分的「組」還是不變的。譬如在前面例題(27)中，在第二步中積羈是 3,66,53,16，用 2 除過以後，成了 1832658。這時的「組」是下列樣子的，18,32,65,8，要誤作為 1,83,26,58，以下的步驟中就要發生錯誤了。第二，是每得出一位平方根後，要從積羈裏減去牠的平方的「半數」，不要誤作就是平方。一個數的平方的半數，可以

用心算計算出來。華印椿先生有九句口訣，叫做「平方半九九」，就是敘述各基數的平方的半數的，介紹如下：

一一得半	二二得二	三三得四半
四四得八	五五十二半	六六十八
七七廿四半	八八三十二	九九四十半

前面講的第三四兩種開平方捷算法，就是普通開平方方法的變形。我們記得，普通開平方方法是求出第一位平方根以後，就在積裏減去平方根的平方，隨即把所得的平方根「加倍」，作為試驗除數，以求第二位平方根。第二位平方根求出後，乘試驗除數和第二位平方根本身，從積裏減出牠們的乘積。所以實際從積裏減去的是第二位平方根和第一位平方根的倍數的乘積，和第二位平方根的平方。在上述的第三種開平方捷算法中，求第一位平方根的方法和普通開平方方法中完全相同。求第二位平方根的方法是以第一位平方根的倍數除其餘積。第二位平方根求出後，還從積裏減去牠的平方。實際從積裏中減去的也是第二位平方根和第一位平方根的倍數的乘積，和第二位平方根的平方，這不是和普通的開平方方法一樣嗎？

上面說，在普通的開平方方法中，從積裏減去的是第二位平方根和第一位平方根的倍數的乘積，和第二位平方根的平方。我們要以 A 代表積裏，B 代表第一位平方根，C 代表第二位平方根，上面一句話所表示的關係便是這樣， $A - 2BC - C^2$ 。在第四種開平方捷算法中，第一步以後，積裏要被 2 除一次。以第一位平方根再除新積裏（被 2 除過的），

求得第二位平方根。第二位平方根求出後，在新積裏減去牠的平方的「半數」。假如也用 A(積幕) B(第一位平方根) C(第二位平方根)來代表這個運算步驟，是  $\frac{A}{2} - BC - \frac{C^2}{2}$ 。這個運算步驟中的各數恰是普通開平方方法的運算步驟中各數的  $\frac{1}{2}$  倍。自然，最後得出的數目(結果)，第四種開平方方法中的也應是普通開平方方法中的  $\frac{1}{2}$  倍，實際也恰是如此。第四種開平方捷算法中直接得出來的數目便是所求的平方根，普通開平方方法中試驗除數最後變為所求的平方根的 2 倍，也就是前者是後者的  $\frac{1}{2}$  倍。第三種開平方捷算法中，直接得出來的結果也是所求的平方根的 2 倍，所以要用 2 除一次，才能得出所求的平方根。所以第三四兩種開平方捷算法，實際就是普通開平方方法的變形，三者在本上還是一回事，所根據的原理自然也是一個。

## 2. 開立方捷算

一. 在開立方方法中，詹先生介紹過一種類似第一種開平方捷算法的捷算法，現在也舉例說明：

$$\text{例題(28)} \quad \sqrt[3]{941192} = ?$$

計算這個题目的第一步，也是和在普通的開立方方法中一樣，先將積幕分組，三位數一組。在這個例題中要分兩組，左一組是 941，右一組是 192。分組完畢以後，在算盤的左端撥上 1，同時在積幕的左一組 941 內減去，餘為 940。左端的 1 加 6 的 1 倍數(6)，成 7，再在 940 內減去，餘為 933。左端的 7 加 6 的 2 倍數(12)，成 19，在 933 內減去，餘為 914。左端的 19 加 6 的 3 倍數(18)，成 37，在 914 內

減去，餘爲 877。左端的 37 加 6 的 4 倍數(24)，成 61，在 877 內減去，餘爲 816。如此累加累減，直到左端的數加到 6 的 8 倍數(48)，成了 217，在積羈左一組內減去後，所餘僅爲 212，不能再繼續加減。於是把左端的 217 撥掉，把最後加的 6 的 8 倍數的 8 加 1 成 9，便是首位立方根（如末次所加的是 6 的 4 倍數，首位立方根便是 4 加 1, 5，如末次所加的是 6 的 6 倍數，首位立方根便是 6 加 1, 7）。在首位立方根 9 的右一位加 1，成爲 91，再以首位立方根 9 乘 91，得 819，819 再乘 3，得 2457，再在牠右一檔加 1，成 24571，撥在算盤的左端，在積羈內減去。這時積羈左一組尚餘 212，併入右一組爲 212492，減去 24571，餘爲 187621。在 24571 上加 6 的 91 倍數(546)，成 25117，在 187621 內減去，餘爲 162504。在 25117 上加 6 的 92 倍數(552)，成 25669，在 162504 內減去，餘爲 136835。如此累加累減，直到左端的數加到 6 的 97 倍數，成爲 28519，積羈減去此數適盡。最後所加的是 6 的 97 倍數，97 加 1 成 98，便是所求的立方根。

由例題(28)的演算中，讀者可以看清這種算法的運算步驟，可以「依樣畫葫蘆」計算別的題目，用不着再做一般的說明了。這種算法的一個特點是求立方根時，累加 6 的倍數，這個 6 是有道理的，不過一步一步的解釋起來，非常繁複，此處不多佔篇幅了。讀者只記住這種算法和牠的應用便可，不必再追探牠的來歷了。

二、詹先生還介紹過另一種開立方捷算法，我們也把牠敘述一下。這種算法的第一步也是照普通的方法，把積羈分組，每三位數一

組。第二步先在最左一組內減1。在算盤的另一端撥上1，為敘述方便起見，我們叫牠「隅」，在隅和積羈中間再撥上1，我們叫牠「方」。在隅上加1，把隅上新得的數加在方上；隨即加2於隅，又把新隅加入於方。如此遞加2於隅，遞加新隅於方，等到方剛能容納於積羈的最左一組時（如再加2於隅，再加隅於方，方便超過積羈的最左一組了。），便在積羈的最左一組內減去方。再加1於隅，加隅於方，又在隅退一位加11，於方退兩位加新隅。積羈的最左一組的餘數，併入次一組，減去方以後，又照前法加1於隅，加隅於方，加2於隅，加隅於方，遞加2於隅，遞加隅於方，到相當時候，從積羈內減去方。如此繼續運算，直到積羈減完為止。在隅上再加2，以3除之，商數便是所求的立方根。

現在再舉例演證：

$$\text{例題(29)} \quad \sqrt[3]{12167} = ?$$

計算時先把積羈撥在算盤的右端，次即分組，在這個題目中要分兩組，左一組是12，右一組是167。分好組後，在左一組12內減1餘11。在算盤的左端撥上1為隅，在算盤中間撥上1為方。在隅上加1成2，在方上加2，成3。又在隅上加2，成4，在方上加4成7。在積羈的左一組11內減去7，餘4，併入右一組成4167。又在隅上加1，成5，在方上加5成12。再在隅上退一位加11，成61，在方上退兩位加61，成1261。在積羈內減1261，餘2906。再在隅上加1，成62，在方上加62，成1323。在隅上加2，成64，在方上加64，成1387。在

積羈 2906 內減 1387，餘 1519。在隅 64 加 1，成 65，在方 1387 加 65，成 1452。在隅加 2，成 67，在方加 67，成 1519。在積羈內減 1519，積羈適盡。再在隅加 2，成 69，以 3 除之，得商數 23，便是所求的立方根。

這種算法所根據的原理詳細解釋起來非常繁複，限於篇幅，此處也從略了。

三. 另有一種開立方捷算法是華印椿先生介紹過的，我們也把牠敘述一下。這種方法可以分為八步：

(1) 積羈分組。

(2) 用心算求出最左一組的立方根，撥在積羈的左一檔，並在積羈的最左一組減去求得的立方根的立方。

(3) 以第一位立方根除牠右邊五檔內的數目，再用 3 除所得的商數。

(4) 以第一位立方根除其右兩檔內的數目，商數便是第二位立方根。

(5) 在第二位立方根右兩檔的數內減去第二位立方根的平方。

(6) 以 3 乘第二位立方根右兩檔內的數目（如第二位立方根右兩檔內沒有數目此步即略去），以第一位立方根乘第二位立方根右三檔內的數目（如第二位立方根右三檔內沒有數目此步即略去）。

(7) 在積羈的第二組內（最左一組的次一組）減去第二位立方根的立方。

(8) 仿(3)步，以第一二兩位立方根除牠們右七檔內的數目，用 3

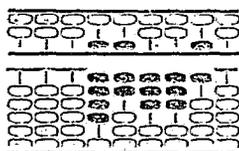
除所得的商數。以下仿(4)(5)(6)(7)各步演算。求出的立方根多一位，(3)步的除數(第一位立方根)就多一位，同時被除數(立方根右邊的數)也就多兩檔內的數目，(4)步中的除數(第一位立方根)也多一位，(6)步中的被乘數(第一位立方根右邊的數)也各多一檔內的數目。

現在再舉例演證：

例題(30)  $\sqrt[3]{97336} = ?$

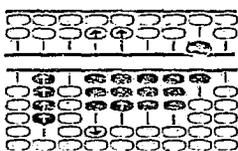
第一步

積數分組



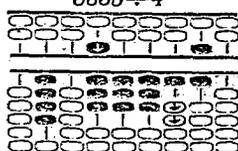
第二步

求左一組立方根4，並  
在積數內減其立方



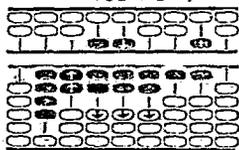
第三步(1)

以第一位立方根除  
其右五檔內之數  
 $3333 \div 4$



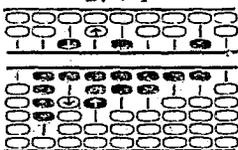
第三步(2)

以3除新商數  
 $833 \div 3$



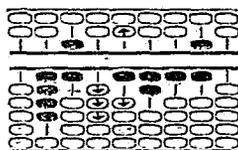
第四步

以第一位立方根除其右兩檔  
內之數，得第二位立方根6  
 $27 \div 4$



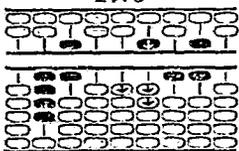
第五步

在第二位立方根之  
右兩檔內減其平方



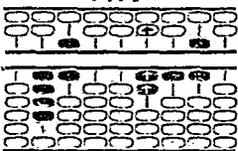
第六步(1)

以3乘第二位立方  
根右兩檔內之數  
 $1 \times 3$



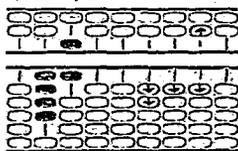
第六步(2)

以第一位立方根乘第二  
位立方根右三檔內之數  
 $5 \times 4$



第七步

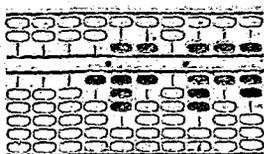
在積數內減去第二位立方  
根6的立方216，計算完成，  
得立方根46



例題(31)  $\sqrt[3]{1860867} = ?$

第一步

積幕分組



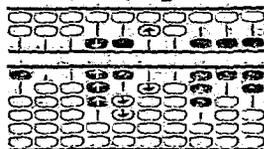
第二步

求左一組的立方根，並在積幕內減去其立方



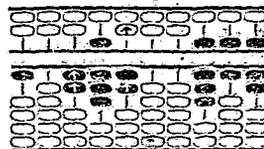
第三步(1)

以第一位立方根除其右五檔內之數  
 $86 \div 1$



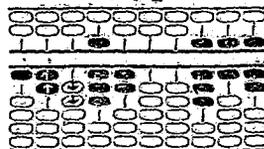
第三步(2)

以3除新商數  
 $86 \div 3$



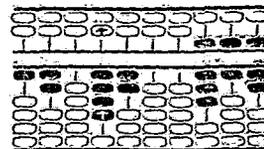
第四步

以第一位立方根除其右兩檔內之數得第二位立方根  
 $2 \div 1$



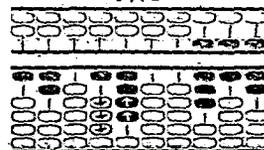
第五步

在第二位立方根右一組積幕內減去其平方



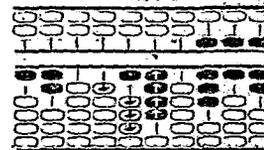
第六步(1)

以3乘第二位立方根右兩檔內之數  
 $4 \times 3$



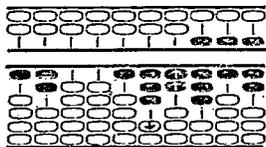
第六步(2)

以第一位立方根乘第二位立方根右三檔內之數  
 $14 \times 1$



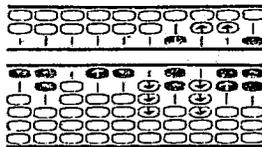
## 第七步

在積幕中一組內減去  
第二位立方根的立方



## 第八步(1)

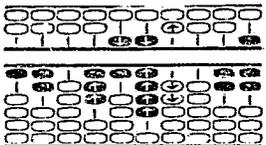
以第一二兩位立方根  
除其右七檔內之數  
 $13286 \div 12$



## 第八步(2)

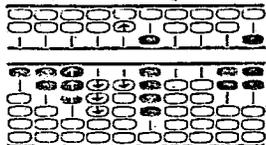
以3除新商數

$$1107 \div 3$$



## 第八步(3)

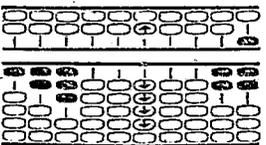
以第一二兩位立方根除其右三  
檔內之數，得第三位立方根。  
 $36 \div 12$



## 第八步(4)

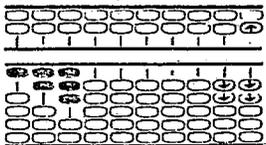
在第三位立方根右三檔之積  
幕內減第三位立方根之平方

$$9 - 9$$



## 第八步(5)

因第三位立方根右四檔內無數，以3乘  
之一步從略，亦不必以第一二兩位立方  
根乘之，只在右一組積幕內減去第三位  
立方根的立方，得出所求的立方根123。



在這種算法要特別注意的地方，是第三，四，六，八各步。其中有的是要以所得的立方根乘或除牠右邊某幾檔內的數目，有的是以3乘或除某幾檔內的數目，在這裏千萬不要弄錯檔位，檔位一錯，整個運算歷程便都錯了。

這種算法是普通開立方方法的變形，不過若證明牠原出自普通開立

方法，手續也很繁多，爲篇幅所限，此處不能詳述了。

### VIII 捷算問題

前面介紹了許多捷算法，回頭我們再綜合的談一下捷算問題。捷算的問題有四：

1. 簡與速 估量一種捷算法的第一個標準就是牠是否「捷」。在這裏「捷」字有兩種含義，第一是「簡」，第二是「速」。一種算法，步驟未必少，做起來未必省事，然而牠各步都比較簡單，容易做，容易懂，也可稱捷算，也值得介紹。一種算法，雖然不大容易懂，然而包含的步驟少，做起來快當省時，也可稱捷算，也值得介紹。若一種算法這兩種性質兼而有之，那自然更是理想的捷算了。「捷算要捷」，這看來雖然像一句費話，然而許多算法，名爲捷算而其實「不捷」，算法既不淺近，做起來也不省時，這是教學捷算時應該注意的，

2. 應用範圍 應用不廣的捷算法也是值不得介紹的。飛歸所以值不得介紹，就是因爲牠學起來很困難，而應用不廣。徐玉相先生介紹的許多捷算法，也是如此。譬如下述的一種乘法捷算。只應用於兩個兩位數的乘法，這兩個數的十位數字之和還要等於8，個位數字還要相等。算法是兩個十位數字各加1後的積數，減個位數對於10的補數，再乘以10的平方，加補數的平方。如

$$36 \times 56 = (4 \times 6 - 4) \times 10^2 + 4^2 = 2016$$

被乘數和乘數的十位數字之和等於8，個位數字相等的算題不會常遇到，所以這種算法是不值得學習的。

3. 合理與一般性 有許多捷算法，都是只在特殊的情形下適用的。因為牠所根據的不是普遍的數學原理，因而也沒有一般性。這個算法也是值不得介紹的。劉薰宇先生(參考7)有一篇文章，叫做「從數學問題說到我們的思想」，前一段講一種含有一般性的算法和一種不含一般性的算法，很有趣味，讀者無妨一讀。

4. 定位問題 捷算法因為算法的變化，往往定位時發生困難，在兒童更甚，所以教學捷算時對於結果的定位，應該特殊注意。

## IX 總結提要

應用珠算計算，需要迅速，所以捷算法有特別注意的必要。本章介紹了許多加法，減法，乘法，除法，斤兩法，開方法，各種的捷算法。捷算包有四個問題，都是在教學捷算法時應該考慮的：(1)簡與速，(2)應用範圍，(3)合理與一般性，(4)定位問題。

### 本章參考

1. 程大位(明神宗二十一年)：算法統宗。
2. 徐玉相(民國十七年)：簡便算法。商務印書館。
3. 華印椿(民國二十三年)：珠算速計法。生活書店。
4. 惠汝濱(民國二十三年)：小學珠算教學的一得。江蘇小學教師半月刊，第一卷第二十三期，26—30頁。
5. 詹才鎬(民國二十三年)：珠算開方的研究。進修半月刊，第三卷第二十一期，25—30頁。

- 
6. 趙志芳(民國二十三年)：改革珠算除法的倡議。浙江教育行政週刊，第六卷第三期(總二六三號)。
  7. 劉薰宇(民國二十三年)：數學趣味。開明書店。
  8. 唐海滄(民國二十四年)：改革小學珠算教學芻議。進修半月刊，第四卷第十期，6<sup>2</sup>—11頁。
  9. 張健(民國二十四年)：怎樣研究珠算。青年界，第七卷第三期，19—24頁。



## 第十一章 練習和測驗

I 練習.....	221
II 測驗.....	230
III 總結提要.....	234

### I 練習

在本章內首先要聲明的是這裏所講的是整個的珠算的練習問題，而不是其中任何一部門的練習問題，因為撥珠，加法，減法，乘法，除法的練習問題，已經在第三，五，六，七，八，各章內討論過了，這裏不必再提了。

珠算不只是一種「知識」，還是一種「技能」。屬於知識的東西，只要「知」了就够了。太陽系有九大行星，地球分六大洲，這些事實知道就是了。屬於技能的東西，只是「知」還不夠，還必須「能」，還必須達到一種程度的純熟。只知道在珠算上如何計算加減法是不成的，必須還能實際的在算盤上運算，並且計算的有相當熟練。因之練習問題在技能的學科內，如珠算，比在知識的學科內是重要的多。在珠算的練習上，下列四點是值得特別注意的。

1. 特定練習與系統材料 前面說了，在技能的學科內練習問題是特別的重要，所以對於珠算的練習須要特別注意，要把牠看作和教學新法是一樣的重要，要在教學時間內專為練習劃出固定的時間來。在這裏要根據「分配練習」勝於「集中練習」的原則，在時間分配上每次的

時間宜短，而次數宜多。這一點，笑留先生（參考1），蔣霖先生（參考12），張仲弢先生（參考9）等，都曾提到的。

練習時所用的材料又要是系統的。編造系統的練習材料須顧到兩方面：一方面要顧到所要培養的基本技能，使全部都有練習的機會；一方面要適合學習心理的原則，使練習經濟化，效率高。這也可說是練習材料必須具備的兩個基本條件。

2. 意識練習與機械練習 在前幾章中我們屢次提到，無論什麼練習材料，練習時都不要流為機械的撥珠，要時時意識到是在計算題目。珠算運算是要練習到機械化，然而所謂機械化，却不是不自覺自己在做什麼。譬如計算  $3+2=5$  一題，要練習到遇到這個題目時，能「不加思索」，使用食指把被加數的三個下珠撥下，同時用中指撥下一個上珠。這不加思索而撥珠，可謂計算技能已經練習到機械化了，這與機械的撥珠，用食指撥去三個下珠，同時用中指撥下一個上珠，而不知道是在計算  $3+2=5$  一題的有別。

3. 興趣 兒童對於練習若沒有興趣，結果絕不會好的。然而系統的練習材料往往失之枯燥，用系統材料時如何保持兒童的興趣，這也是很重要的一個問題。晏賜先生（參考11），高橋小學同人（參考7），張仲弢先生和黃炳華先生（參考10）都主張用比賽法。比賽法，普通有個人比賽與團體比賽。個人比賽是以個人為單位，看一班中那位計算的最快，那位計算的次快；團體比賽是以團體為單位，先把一班照座次或其他標準分為幾組，看那一組計算的最快，那一組計算的次快。

爲要使練習材料不枯燥，於系統材料之外可以加些遊戲材料或其他有趣的東西。曹日昌（參考5），閻生夫先生（參考13）和晏鳴先生都曾提議利用舊日珠算上的各種「玩法」。這也或者是方法之一，不過利用時須要注意，使兒童知道也是在計算題目，不是用算珠擺花樣。

4. 練習結果 在前幾章裏也屢次提到，練習進展的情形要使兒童知道，因爲只是知道了自己進步的情況，就是求進步的一個很有力的刺激。晏鳴先生提議的「全級比賽」和「自己比賽」，每次把所用的時間記載下來，與下次的比較。蔣霖先生提議的用成績記載片的辦法，都含有使學生知道自己練習進展情形的意思。不過最好是能根據每次成績再畫出練習曲綫來，因爲這樣更能給學生一個明晰的印象。

上述四點可說是教學珠算練習的幾個原則，以下再介紹練習珠算的一種利器，珠算練習片。

首創珠算練習片的是徐仲英先生（參考2）。他創的叫做「中心珠算練習片」。現在把牠作個比較詳盡的介紹，以供各珠算教師的參考。

1. **編製的體裁** 中心珠算練習片是根據我國商家結賬慣例編製的。我國商家結賬時，無論單項中是加，是減，是乘，是除，最後總是順次相加，求其總合。如

某糧店售出：

糙粳一百八十担，每担價洋十五元五角，合洋二千七百九十元。

白粳一百二十担，每担價洋十三元六角，合洋一千六百三十二

元。

兩宗共計洋四千四百二十二元

又如某錢莊，於

洋厘七·一七錢時，匯出規銀二百五十兩，合洋三百四十八元六角七分五。

洋厘七·一六錢時，匯出規銀三百兩，合洋四百十七元八角二分七。

兩宗共計洋七百六十六元五角零二。

前例中各項都是乘法，後例中各項都是除法，然而最後都是把牠們的積或商，順次相加，求和總合。

練習片的各課在最後也是要求總合。

2. **內容** 全部練習片共有四十二課，分為整數四則和小數四則兩類。各課內容如下：第一課指法，第二課至第五課加法，自1起各自然數連續相加；第六課減法，自5050中減1至100各連續數；第七課至第九課整數加減法；二十三至二十五課小數加減法，正面是練習題，分為加數和減數兩行，做時先把加數遞加，再於其和數內依減數題順次遞減，背面是答案；第十至十七課整數乘法；二十六至二十九課小數乘法，正當是練習題，算完時依次把各題的乘積相加求其總和，背面是答案；十八至二十二課，三十至三十八課，整數除法；三十九至四十二課小數除法，正面是練習題，算完時順次遞加商數，背面是答案。

現在把第一課和第二課更具體的敘述一下，作為實例。第一課指法。練習時間以二分鐘或三分鐘為限，停後把算得的次數記於成績記載表的速度欄內，表式如下。

中心珠算練習片 指法成績記載表

年級 姓名 席次

月	日	時間(以分爲單位)	速度	名次
合 計				
均速 = $\frac{\text{總度}}{\text{總時}}$ = _____ =				

第二課加法。自1至10各自然數循環相加，至十次爲止(每自1加至10爲一次)。片式如下；

第二課 答案

自1至10循環相加各次中的和數

做 到	和 數	對 %	做 到	和 數	對 %
1	1	1	2,6	131	26
2	3	2	2,7	138	27
3	6	3	2,8	146	28
4					

[說明]：「做到」欄內的2,6是指自1至10累做到第二次又加到6之和數欄的131，是牠的答數。「對%」欄內的26是做到2,6,和數

得 131 時做對的百分數。

3. **成績記載法** 練習的成績記在「成績記載表」內。譬如練習第五課，第六次做到 78，答 3081，對，第七次，錯，第八次，對，即為通過。

只有一個成績記載表，一個學生不能和別人做鮮明的比較，以致有些學生一課經多次練習而不能通過也不覺得怎樣，所以又有「進度比較表」，以激發兒童的競爭心。每次練習之後，教師把各人成績記載表內的成績再轉記在進度比較表內。其中⊙代表次數，點綫表示錯，實綫表示對，實綫圈表示通過。

### 成績記載表

年級                      姓名                      席次

次數	課數	總題數	做幾題	答數	對	錯	對%
6	5	100	78	3081	√		78
7	5	100	84	4350		×	
8	5	100	100	5050	√		100

速度 = $\frac{\text{對的\%之和}}{\text{對的次數}} = \frac{\quad}{\quad} = \quad$
正確 = $\frac{\text{對的次數}}{\text{做的次數}} = \frac{\quad}{\quad} = \quad$
進度 = $\frac{\text{自己的進度}}{\text{全級進度最高數}} = \frac{\quad}{\quad} = \quad$
總平 = $\frac{\text{速度} + \text{正確} + \text{進度}}{3} = \frac{\quad}{3} = \quad$

進度比較表

第二階段 第二課至第九課

課數	通過各課練習的次數					
9						
8						
7						
6					T	
5	T				F	—
4	F	T	—		F	T
3	T	F	F	F	F	F
2	T	F	F	F	F	F
姓名	趙	錢	孫	李	周	吳

4. 練習的分段 每課依次練習，一課通過後再習下一課。四十二

課分為六個階段，每一階段作為一個學習的單位。階段的分法如下：

第一階段 第一課(指法)

第二階段 第二至第九課(加減法)

第三階段 第十至十七課(乘法)

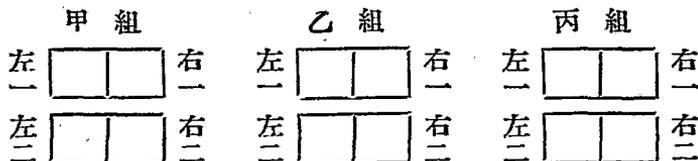
第四階段 第十八至二十二課(除法)

第五階段 第二十三至二十九課(小數加減乘)

第六階段 第三十至四十二課(整小數除法)

5. 練習的手續 把全級學生按下圖編定席次：

席次編制圖



讓兒童自己把席次填在成績記載表上。練習的時候各組分為左右兩排，一排練習，一排監視。應用的東西預備好以後，教師說「預備」！大家舉起手來，教師說「起」！大家開始做，教師說「停」！立刻停止。監視者把結果代為填在成績記載表內，並查其正誤。兩排都練習完以後，把練習片從後邊傳給前邊第一人，交給教師。下課後，教師再把成績記在進度比較表內。再把通過的人喚到面前，另試一次，教師代完全做對的人把下次應練習的課數，填在成績記載表的「課數」欄內，在進度比較表上也升高一格。

據徐先生報告，浙江嘉興烏鎮植才小學在十八年度第二學期，三年級至六年級都採用了中心珠算練習片，兩月以後，用第一課和第五課的練習材料測驗，各級都有長足的進步。並且在算術科內學生都喜歡用珠算計算了，這證明了這套中心珠算練習片的效用。

據健民先生(參考4)報告，揚州中學實驗小學也製有一套珠算練習片，不過較上述的徐先生的中心珠算練習片稍為簡單而已，揚中實小的珠算練習片共分四張：第一張是加法，第二張是減法，第三四兩張是乘法。練習片的正面印練習題三十個(由淺入深)，背面印答數。教

學加法的班級用第一張，教學減法的班級用第二張，教學乘除法的用三四張。每次練習時以三分鐘或五分鐘為限，練習的時候，把每題做得的結果寫在答案紙上，答案紙和練習片一樣大小，停止時，核算做對的題數，記在「成績記載片」內，「成績記載片」的樣式如下：

珠算練習片      成績記載片  
 \_\_\_\_\_年級 姓名 \_\_\_\_\_ 月 日 到 \_\_\_\_\_ 月 日

法 則	練習次數	題目總數	實做數	對	錯	對%
$\text{平均速度} = \frac{\text{對的總和}}{\text{練習次數}} =$						

為鼓勵兒童的興趣，更可以根據成績記載片內的平均速度或做對百分比，另填在統計表內，張貼教室中，以比較各人的進步。統計表的式樣如下：

珠算練習片      成績統計表  
 (加減乘除) 法      \_\_\_\_\_ 月 日 到 \_\_\_\_\_ 月 日

姓 名	平 均 速 度	比 較

表內比較一欄可以各種顏色綫畫，如第一次用紅綫，第二次用藍綫等。

徐仲英先生的中心珠算練習片和揚中實小的珠算練習片，都是教學珠算練習的利器（而尤其是徐先生的中心珠算練習片），不過利用這種練習片時，也不要忘了教學珠算練習的其他方面的問題。有時候因為不會運用，練習片會變得毫無効用的。上述兩種練習片上的練習題的全部具體內容，徐先生和健民先生都沒有告訴我們，不知其中自無問題。打算採用這兩種練習片的，在這裏也要注意。

## II 測 驗

關於測驗的功用，這裏不用說，讀者自己去讀教育測驗一類的書好了。這裏要做的，只是國內僅有的，已發表的，關於珠算測驗的材料的介紹。

到現在國內還沒有一種標準珠算測驗，凡是從事珠算實驗研究的人都感到非常不便。黃競白先生（參考6）曾編造過一種加法測驗材料。介紹於下：

### 珠算加法測驗

姓名\_\_\_\_\_ 正題\_\_\_\_\_

(1)  $24+21=$  (2)  $64+31=$  (3)  $69+21=$  (4)  $69+51=$

(5)  $63+37=$  (6)  $54+42=$  (7)  $38+22=$  (8)  $49+22=$

(9)  $33+33=$  (10)  $44+33=$  (11)  $37+23=$  (12)  $59+33=$

(13)  $33+24=$  (14)  $44+44=$  (15)  $56+34=$  (16)  $48+44=$

$$\begin{array}{llll}
 (17) 26 + 25 = & (18) 38 + 55 = & (19) 48 + 36 = & (20) 46 + 46 = \\
 (21) 24 + 26 = & (22) 59 + 36 = & (23) 25 + 17 = & (24) 47 + 37 = \\
 (25) 44 + 27 = & (26) 63 + 37 = & (27) 35 + 38 = & (28) 46 + 48 = \\
 (29) 47 + 28 = & (30) 59 + 38 = & (31) 45 + 39 = & (32) 55 + 39 = \\
 (33) 32 + 29 = & (34) 54 + 39 = & (35) 73 + 34 = & (36) 77 + 45 = \\
 (37) 99 + 36 = & (38) (\text{原文遺漏}) & (39) 64 + 48 = & (40) 63 + 69 =
 \end{array}$$

黃先生的這一份珠算加法測驗材料，是說明珠算測驗的需要時給的參考資料，並沒有實際的應用過，所以談不上「標準」，只能作為編造珠算加法測驗的一種參考而已。

據趙冀良先生(參考 8)報告，定縣平教會曾舉行過珠算教學實驗，在實驗期中曾舉行過三次測驗。所用的測驗材料計，加，減，乘，算式題，每種各二十題，除法算式題十題，加減法應用題八題，乘法應用題八題，除法應用題四題，共九十題。欲知詳細內容，請讀趙先生原文，下面是幾個例子：

加法算式測驗題
---------

$$(1) \begin{array}{r} 23 \\ + 15 \\ \hline \end{array}$$

$$(8) \begin{array}{r} 686 \\ + 145 \\ \hline \end{array}$$

$$(20) \begin{array}{r} 85476 \\ + 14524 \\ \hline \end{array}$$

減法算式測驗題
---------

$$(1) \begin{array}{r} 45 \\ - 23 \\ \hline \end{array}$$

$$(10) \begin{array}{r} 386 \\ - 196 \\ \hline \end{array}$$

$$(20) \begin{array}{r} 100000 \\ - 24685 \\ \hline \end{array}$$

乘法算式測驗題
---------

$$\begin{array}{r} (1) \quad 8 \\ \times 5 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (11) \quad 469 \\ \times 56 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (20) \quad 5678 \\ \times 3726 \\ \hline \end{array}$$

### 除式算式測驗題

(1)  $246 \div 3 =$       (8)  $7320 \div 24 =$       (10)  $20296 \div 236 =$

### 加減法應用題測驗題

- (1) 李五兒有銅元二百七十三枚，賣白菜又收進了一百二十四枚，他一共有了多少錢？
- (2) 老李賣布五匹，收大洋六元九角三分，賣山藥二百斤，收大洋一元五角六分，買米花了五元七角，還剩着多少？

### 乘法應用題測驗題

- (1) 一角票換四十九個銅子，三角票該換多少銅子？
- (2) 算算下列各物一共值多少錢！
- (一) 米兩石四斗，每斗值一元零二分。
- (二) 麥子三石零四升，每斗值八角五分。
- (三) 黑豆八石，每斗值洋七角零五厘。

### 除法應用題測驗題

- (2) 一斤棉花值一角六分錢，十二元錢可買多少斤？
- (4) 趙大買白菜二百九十斤，每斤值銅元六枚，算一算合洋幾元幾角幾分？ [說明]：每元合銅子五百枚

## 計分法

算式題每題二分，點位有錯的一分，不對的和沒有算的零分。應用題每題五分，點位有錯的二分半，不對的和沒有算的零分。

平教會的珠算測驗材料就解決他們的問題說，考查他們該次實驗教學結果，是很合用的，並且他們在測驗後還發現了一些重要的事實。不過參與他們的測驗並且有可靠結果的不過三十多人，無法計算「常模」，即此一點這份測驗材料只能作編造珠算測驗時的參考，不能成為「標準珠算測驗」。

黃競白先生的和定縣平教會的珠算測驗材料，都是只可做參考資料，不能稱為標準測驗，此外可做參考資料的都少有。所以就現在說，在珠算的研究上最重要的工作之一，是編造標準測驗。編造標準測驗時，除去應遵守一般的編造測驗的法則以外，下列幾點也須注意：

1. 與筆算的關係 各學校中筆算珠算有採混合教學的，有採分別教學的，教學的方式不同，當然所用的測驗也就應當不同。所以珠算測驗至少應當有兩種，一種是混合的筆算珠算測驗，一種是單純的珠算測驗。

2. 算題和答案的形式 浙江七中附小同人（參考3）曾提過，簡單的題目兒童會用心算算出結果，給了答案不用算盤。自然在這種情形下所測驗的就不是珠算了。浙小同人以為不把算題寫作 $\begin{array}{r} 14 \\ + 4 \\ \hline \end{array}$ ， $\begin{array}{r} 36 \\ - 8 \\ \hline \end{array}$ 的形式，而寫作 $14+4=?$   $36-8=?$ 的形式這種弊病可以稍減。顯然的，這樣也不能完全避免兒童應用心算。珠算測驗中算題應當採用

什麼方式呢？這雖然是個不大容易解決的問題，却是值得編造珠算測驗的人慎重考慮的。

答案應當採用什麼方式呢？也是值得考慮的問題。把答案留在算盤上是不可能的，因為這樣就不能考核了。若讓兒童轉抄在紙上，那末經過這一度的轉抄，難免在這裏發生錯誤。若有這種情形，所測驗的又不是珠算了！

**3. 速度與精確** 在珠算運算技能中，速度是很重要的一方面，至少也是和精確並重的。如何兼能顧到速度與精確兩方面的考核，也是編造珠算測驗時所當注意的。

**4. 口訣定位等** 在珠算中定位和單純的運算是一樣的重要，而口訣的了解對於運算又有很大的關係，所以一種良好的珠算測驗，對於口訣和定位的考核，也必須顧到。

**5. 算題的難度** 珠算心理的研究尚少，各種算法的運算的難易還沒有人詳盡的分析過，因此編造測驗時各算題的難度也是一個必須很費斟酌的問題。

### III 總結提要

總結本章內容如下：

1. 珠算係「技能」的學科，因之練習問題特別重要，教學珠算練習須注意下列四點：（一）規定特定練習時間，引用系統練習材料。（二）使兒童練習時不要只機械的撥珠，要意識到是在計算問題。（三）顧到兒童的興趣。（四）使兒童知道自己練習進展的情形。

2. 徐仲英先生和揚中附小都造有珠算練習片，可資參考，採用。

3. 現時國內尚無標準珠算測驗，今後從事珠算研究的可着手編造。編造時除應遵守編造測驗的一般法則外，猶須注意：(一)珠算筆珠的關係。(二)算題和答案的形式。(三)速度與精確的考核。(四)口訣定位的考核。(五)算題的難度。

#### 本章參考

1. 笑留(民國七年)：小學珠算筆算同課練習之商榷。中華教育界，第七卷第六期。
2. 徐仲英(民國十九年)：一種珠算練習片的嘗試。教育雜誌，第二十二卷第十一期，43—51頁。
3. 浙江省立七中附小(民國廿一年)：珠算筆算分教合教的試驗。浙江教育行政週刊，第三卷第四十四期(總一四八)號。
4. 健民(民國二十二年)：怎樣教學珠算。蘇揚中小校刊，第六卷第七期，54—56頁。
5. 曹日昌(民國二十三年)：在北平市小見到的珠算教學與建議。天津大公報，明日之教育，第二十三期(六月十一日)
6. 黃競白(民國二十三年)：民校算術教學問題的商討。教育與民衆，第五卷第十期，37—49頁。
7. 高橋小學校(民國二十三年)：筆算與珠算混合教學的研究。南昌小學界，第一卷第二期，三期合刊，49—52頁。
8. 趙冀良(民國二十三年)：平民學校珠算教學之實驗。教育與民衆

- 衆，第五卷第十期，49—63頁。
9. 張仲強(民國二十四年)：珠算教學之我見。小學教育月刊，第三卷第一期，14—18頁。
10. 黃炳華(民國二十四年)：談談鄉村小學珠算教學。教師之友，第一卷第十期，1491—1495頁。
11. 晏揚(民國二十四年)：珠算的指法練習。教師之友，第一卷第九期，1340—1343頁。
12. 蔣霖(民國二十四年)：珠算教學的小貢獻。江蘇小學教師半月刊，第十卷第十期，7—9頁。
13. 閻生夫(民國二十四年)：珠算教學之理論與實際。河南民衆教育，創刊號，41—51頁；第一卷第二期，61—77頁。

## 第十二章 教材和應用問題

I 問題	237
II 編選珠算教材應根據的原則	237
III 應用問題	241
VI 珠算教材綱要	245
V 總結提要	250

### I 問題

在本章內要討論的問題是珠算教材與應用問題。然而在這裏主要的却不是列舉珠算科應有的教材與應用問題，或是批評某教科書上的教材與應用問題，而是討論編選珠算教材和應用問題應根據的原則，或應採取的方向。最後附帶的介紹幾種珠算教材綱要。

學習珠算而志在藉以研究高深數理的很少，大都是爲了實際應用，因此珠算教材應該特別切合實際，珠算教材中的應用問題，分量應該特別多，而這些應用問題又須確能裨益「應用」。

### II 編選珠算教材應根據的原則

編選珠算教材應當根據什麼原則呢？張顯光先生(參考1)在二十年前便說過，珠算應該特別注意於家計，農工商業，社會國家三方面。關於家計的，如米穀布帛的價值，斤兩斗石的算法，金錢收入，兌換等；關於農工商業的，如田畝的計算，原料出品的比較，贏餘，折耗的計算等；關於國家社會的，如田賦，公債，郵務等，都該做爲

珠算的教材。張先生有幾句很扼要的話。他說，編選珠算教材的唯一標準是「從社會習慣，使學生在校練習，不啻在社會應用，以學校為一小社會，而不只為徒事練習之所。……否則題中事既然稔知，而欲根據以應用，豈可得乎？」張先生這幾句雖是在二十年前說的，現在看來還不失為編選珠算教材者的面針。

健民先生(參考6)和張中弢先生(參考13)也都以為珠算教材應當注意於家庭，農工商業，社會國家三方面。他們的意見和張顯光先生的是完全一樣的。前一章介紹過的徐仲英先生(參考4)的中心珠算練習片，在體裁編制上企圖適合商家結賬的習慣與方法，也是顯然的注意於實際應用。張健先生(參考12)也以為學習珠算時應該留心實際問題，如利息，匯兌，國家財政，地方金融等。陳耿光先生(參考14)也是主張珠算教材要「注重應用」，「與社會上各種常用的算法溝通」，如折扣，利息等都須讓兒童知道。莊伯倫先生(參考11)和張中弢先生還都具體的主張要利用中國字碼（ⅠⅡⅢⅣ等），要用賬單，發票等作教材，要教學記賬方法，這自然是更顯然的注意於實際應用。曹日昌(參考7)更進而提議：「先調查在社會上應用的是那些材料，然後再根據調查的結果，規定教材。」

周元讓先生(參考5)會更完備的敘述過編選珠算教材應根據的原則。周先生以為選材的標準，在「實質」方面有三：(1)「適應兒童生活的需要，珠算教材要能和兒童的實際生活發生密切的關係，使兒童學會這個教材，就能實地應用，才可引起他的興趣。」(2)「適合兒童經驗

的範圍，教材不是兒童經驗所有的，也會使他們索然寡味。」(3)「適合兒童了解的程度。就是說，教材的意義要顯明，文字要淺近，內容的深淺是兒童所能領悟。同時要依據兒童舊有的經驗，來決擇新教學的材料，使兒童因經驗的類化而容易明瞭。」在「形式」方面也有三：(1)「練習基本算法的。……題目裏的數字不可過大。」(2)「容易解釋證驗的。如說「三個小朋友平分十枝鉛筆，照三一三餘一的口訣應該每人得三枝餘一枝，」設有小朋友懷疑，不妨用還原法或實物證驗。」(3)「分量輕重得當的。初入手學習珠算的時候材料宜輕，以後程度漸深，分量愈重，使兒童容易於領略。」

周先生以為選材範圍在「第四學年以衣食住行和學校作業，家庭經濟等問題為範圍。第五六學年除上述問題外，可略加社會，國際等經濟問題，但須隨兒童興趣而活用。」在編制方面有四原則，六要點。四原則是：「(1)由簡易到繁難，(2)由已知到未知，(3)由歸納到演繹，(4)不能違背現行課程標準。」六要點是：(1)「教材應避免文字的困難。」(2)「教材要故事化。」(3)「定位法應特別解釋清楚。」(4)「口訣要詳加說明。」(5)「不合理的歌訣要改正。」(6)「多反覆練習。」

趙翼良先生(參考9)說，據平教會的研究，平民所需要的珠算算法須包有五個要素：自然，這五個要素也就是編選教材的標準。這五個要素是：(1)「基本的」○這裏所謂基本的並不是指為別種算法或別種學科的基礎的東西，而是指民衆生活上「必須的」算法。(2)「簡易的」○「這簡易的」三字，是指算法上的簡易。凡是一種算法若有兩種或兩種

以上的方法，要採用最簡易的。(3)「多位的」。「少位的算法在成人方面用心算就可以算得上來，不必使用算盤，也就不能引起學生的興趣，同時在需要上多位的也比較少位的重要些。」(4)「名數的」。「人們日常計算的數兒多是名數的。……民衆的數量生活離不了元毛分啦，斤兩啦，石斗升啦種種，這些都是名數的，而且是本國的複名數。」(5)「理解的」。「他們(民衆)需要的算法又是理解的，不是算式的。我們平常很少看見一個人跟另一個人畫一個算式讓他來算，所計算的都是實際的問題，這些問題都需要理解的。」趙先生的這一段話可算是編選民衆學校珠算教材應根據的原則。

張健先生也提議要多計算「名數的」問題，不過計算的問題須有「基礎性」和「代表性」。

綜觀各家的意見，一句話可以包括無遺，就是珠算教材要切合實際應用。此外還有一點，在周先讓先生的話裏可以看出來，就是編選珠算教材應根據的原則和編選筆算教材應根據的原則是一樣的，同是要適合兒童生活的需要，要適合兒童的經驗範圍，……總之，編選珠算教材和編選筆算教材應當根據同樣的原則，不過編選珠算教材時更要注意到實際應用。健民先生一句話說的好，「筆算的目的固以培養兒童有解決生活中計算的能力為主，而珠算教學尤應以此為依歸。」至於詳盡的說，編選筆算教材應當根據什麼原則，普通教育的書上說的很多，這裏不必談了。

往往是理論自理論，事實自事實；二者不能密切扣合。編選珠算

教材應當切合實際應用，這是誰也不會懷疑的。然而現在一般通行的小學珠算教科書中，還是充滿了不合實際應用的教材。據曹日昌（參考7）報告，北平市小學中所用的珠算教材也大半是不合實際的。譬如教學除法，舉例時都喜歡用「分銀」的題目，多少銀子，幾個人分，一人該幾兩幾錢。實際上，那個學生有該自己幾兩幾錢的和別人「分銀」的機會呢？其他類似的情形還很多。北平如此，其他地方也未嘗不然。負責珠算教學的人，明白了這一點，應該自己檢討一下自己所用的教材，若有不合宜的地方，要速加改正。

### III 應用問題

關於應用問題我們分四點討論：（1）教學應用問題的步驟。（2）教學應用問題應注意之點。（3）應用問題的種類。（4）良好應用問題的特徵。

1. 教學應用問題的步驟。初教學應用問題，應當選兒童生活中的計算問題為教材，遊戲時勝負分數，級會的賬目，個人購買書物的銀錢出入等等，都可做為應用問題的材料。第二步教學家庭，學校的計算問題，如購買日常用品，各部預算決算等。對於程度較好天資較高的兒童，第三步即可教學社會國家的計算問題。總之教學珠算應用問題也應當和教學其他的學科一樣，由簡及繁，由近及遠，由兒童的經驗出發，漸漸擴充他的經驗範圍，達到社會國家的（計算）問題上。

2. 教學應用問題應注意之點。除了教學步驟以外，教學珠算應用問題還應當注意兩點：（一）使學生計算應用問題，不要還只是使他們

練習運算技能，要培養他們「理解問題」，「解決問題」的能力。知道什麼問題要用加法，什麼問題要用減法，而不只是練習加減法。(二)教學應用問題是珠算和其他學科聯絡的絕好機會，不可輕易放過。如勞作科中計算材料的長短，大小；社會科中計算各地的面積，人口；自然科中計算雨量溫度以及各種實驗材料；衛生科中計算身高，體重，以及他種比較統計，都是良好的應用問題材料。應用這種材料不但使各科取得了密切的聯絡，兒童也容易發生興趣。

3. 應用問題的種類。一般珠算教科書裏的應用問題多有「千篇一律」的毛病。專恃教師補充也感困難，原因就在編輯者和教師對於應用問題所知不多。因此應用問題的種類的敘述，在這裏也是必要的。

對於應用問題可以有許多不同的分類法，因為分類時可以用許多不同的標準，不過最重要的一種標準就是問題組織的形式。根據這種標準，可以把應用問題分為下列六類（參考8）

一．獨立的問題。就是前後幾個問題彼此都沒有關係的。

二．類聚的問題。一組的問題都是以某一個題目為組織中心的，

如：

(1) 志強小學校有學生 820 人，其中 308 人是女生，男生有幾人？

(2) 820 人中，731 是舊生，新生有幾人？

(3) 去年有學生 793 人，今年有學生 820 人，今年比去年多幾人？

三. 連續的問題。連續的問題也是一組互有關係的問題，和類聚的問題相似，不過連續的問題不只是互有關係，並且這個關係是連續性的。如：

- (1) 華生第一次買桃子 472 個，第二次買 634 個，送掉 200 個，還餘桃子幾個？
- (2) 華生第三次所買桃子的數目恰是以前所剩的桃子的半數，問第三次買了多少桃子？
- (3) 如每個桃子的價錢是二分。問華生前後三次買桃子共用多少錢？

四. 校核的問題。兩個問題的解答，可以彼此校核，這一類的問題便叫做校核的問題。如：

- (1) 王君有銀 30 元，以其二分之一購書，問尚餘若干元？
- (2) 王君以其所有銀二分之一購書，尚餘 15 元，問王君原有銀若干元？

五. 沒有數目的問題。只敘述計算的動境，不給實在的數字，要兒童說出應採用何種算法，而不實際計算。如：

- (1) 若你已經知道每斤肉的價錢和共付的錢數，你將怎樣求所購的肉的斤數？
- (2) 若你知道火車每小時走多少里，共走多少小時，你將怎樣求火車共走的里數？

六. 不完全的問題。要使兒童說出，一個問題，要求某種結果

時，須具備的條件，而不實際計算。在這一點上和沒有數目的問題相似。如：

- (1) 王君買肉4斤，如果你要知道他共付多少錢，你還須知道什麼？
- (2) 張君買鉛筆10枝，如果你要知道每枝的價錢，你還須知道什麼？

4. 良好應用問題的特徵。良好應用問題的特徵，也就是良好應用問題應具的條件，是編造應用問題時所當注意的，現在將幾個重要的臚列於下(參考8)：

- 一. **實在** 在實際生活中可以遇到，可以應用的，不是空中樓閣般的矯揉造作的。
- 二. **具體** 題中所敘述的事物或動境在兒童的經驗範圍以內，能為學生所了解。
- 三. **有味** 要使學生感到趣味。要使問題有趣味，內容須有變化，用字要注意。用故事體裁也是一法。
- 四. **用字審慎** 不要使學生在文字方面感到困難。
- 五. **能供給有價值的知識** 使學生計算了問題以後，能獲得一些經濟，社會，實業，各方面的關於數量的知識。這樣，以後學生自修閱讀，遇到有關數量的材料時，更能了解。
- 六. **能顧及學生練習上的需要** 使學生在計算應用問題時還能練習基本運算技能，使學生計算了應用問題以後，對於算式題的演算也

有進步。

七. **適合年級程度** 問題的難易要適合學生程度，這是不用再加說明的。

八. **組織科學化** 各種算法的練習應用，均按學習心理的原則分配恰當。

#### IV 珠算教材綱要

讀到這裏，讀者一定要提出一個問題：具體的說，珠算應該包有那些教材呢？這個問題很難回答。教材須適合當地社會情形，中國幅員廣大，各地社會情形不同，很難擬一套珠算教材，「放諸四海而皆準」。各珠算教科書上的教材，固然缺點很多，各地教育機關擬定的具體珠算課程標準，也未能完全滿意。周元讓先生，趙冀良先生，秦啟文先生(參考<sup>10</sup>)等也都擬過一份珠算教材綱要，可算作是「專家」的意見，現在把牠們介紹於下。一來使讀者知道有人作過這種研究，二來作為編造珠算教材時的參考。但須知道周趙秦等先生擬的教材綱要也未必是完美無缺的。就是真的完美無缺，只是一個「綱要」，也不能實際應用。所以實用時還是應該由珠算教師參照前節所述的「原則」和本地的社會情形，自行編造。有了詳細的具體的教材，教學時如何分配，又是一個問題。一週內應該有幾節？一節應該教多少東西？都是值得考慮的問題。就是一週內珠算教學的時間是教育當局規定的，不能擅自更動，那末在這個範圍之內如何支配才會得到最大的學習效率？做教師的也該仔細考慮一番。

周元讓先生的珠算教材綱要是爲普通小學擬的，內容如下：

第四學年第一學期

1. 撥珠的方法
2. 定位的方法
3. 加法的練習
4. 減法的練習

第四學年第二學期

1. 複習加減法
2. 法數一位乘法的練習
3. 法數二位乘法的練習

第五學年第一學期

1. 複習加減乘法
2. 法數一位的除法

第五學年第二學期

1. 複習法數一位的除法
2. 法數三位以上的乘法
3. 法數二位的除法

第六學年第一學期

1. 小數加減法
2. 小數乘法

**第六學年第二學期**

1. 四則的應用
2. 斤兩法

趙冀良先生的珠算教材綱要是為民衆學校擬的，內容如下：

1. 認數和記數法
2. 撥珠和算盤記數法
3. 整數加法
4. 名數加法
5. 整數減法
6. 名數減法
7. 加減應用練習
8. 單位整數乘法
9. 多位整數乘法
10. 名數乘法
11. 小數乘法
12. 加減乘應用練習
13. 單位整數除法
14. 多位整數除法
15. 名數除法
16. 小數除法
17. 四則應用練習

18. 斤兩法
19. 記賬和算法
20. 總複習

秦啟文先生製了一份第四五學年一二學期的分週珠算教材細目，為篇幅所限，不能全部介紹，舉例如下：

#### 第四學年第一學期

週次 教材內容

1. 算盤上各種名稱的認識，如珠檔……等○珠的代數，如  
上珠一粒當五，下珠一粒當一，……撥珠的方法，如  
拇指專管下珠的上去，食指專管下珠的去掉，……
2. 不滿五的單位加法，如  $1+1$ ， $1+2$ ， $2+1$ ……
3. 不滿五的兩位加法，如  $11+12$ ， $12+11$ ， $11+13$ ……
- ……
19. 連借位的減法，如  $100-23$ ， $110-24$ ， $256-67$ ，……
20. 三位數中間有零的數，減去個位數時要借位的減法，如  
 $103-4$ ， $405-206$ ， $432-33$ ，……

#### 第四學年第二學期 乘法

1. 五以下的單位乘法，如  $1\times 2$ ， $2\times 1$ ，……
2. 一至四各數與六至九各數的單位乘法，如  $1\times 6$ ， $6\times 1$ ，  
 $7\times 2$ ，……

20. 乘數為兩位數的乘法，如 $135 \times 89$ ， $364 \times 75$ ，……

#### 第五學年第一學期

1. 三位數的加法，如 $256 + 123$ ， $485 + 672$ ，……

2. 連加法，如 $24 + 36 + 125 + 27$ ， $820 + 16 + 254$ ，……

20. 兩位小數乘法，如 $0.25 \times 0.12$ ，……（積數小數位不夠而需要加0的）

#### 第五學年第二學期

1. 法實數中有一首位為零的整小數乘法，如 $34.5 \times 0.023$ ， $0.034 \times 3.4$ ……

2. 有隔位的整小數乘法，如 $3.04 \times 5.08$ ， $6.007 \times 4.02$ ，……

3. 乘法的棄九驗算法。

19. 除法的棄九驗算法。

20. 斤兩法：如斤化作兩，兩數合斤數。

以上的教材是專為練習技能的，因為秦先生以為在第四五兩學年應當專事練習計算技能，第六學年再「實施於應用方面。」

華印椿先生(參考2,3)擬過中等學校的珠算教材綱要。與我們現在的問題關係不大，不敘述了。此外還有人擬過小學珠算筆算混合教

材，在第一章裏介紹過，這裏也不再重複了。

## V 總結提要

總結本章要點如下：

1. 在本章內所討論的主要問題是編選珠算教材與應用問題時應根據的原則。
2. 編選珠算教材和編選筆算教材應根據同樣的原則，同是要根據兒童經驗，切合實際應用。不過編選珠算教材對後者尤應注意。現時各珠算教科書中的教材以及各地應用的他種珠算教材，多不切實際情形，教珠算者應加注意改進。
3. 教學應用問題應由簡及繁，由近及遠，自兒童固有的經驗出發，達於社會國家的各種計算問題。
4. 教學應用問題要培養學生理解問題與解決問題的能力，注意與其他學科聯絡。
5. 應用問題，根據組織形式，可分為六類，計有：(一)獨立的問題，(二)類聚的問題，(三)連續的問題，(四)校核的問題，(五)沒有數字的問題，(六)不完全的問題。
6. 良好的應用問題有八個特徵，即：(一)實在，(二)具體，(三)有味，(四)用字審慎，(五)能供給有價值的知識，(六)能顧及學生練習上的需要，(七)適合年級程度，(八)組織科學化。
7. 周元讓先生等曾擬有小學珠算教材綱要，不過不可據為「圭臬」。珠算教師要根據前節所述的原則和本地社會情形自行編造。

## 本章參考

1. 張顯光(民國六年)：珠算教授之一得。教育雜誌，第九卷第三期，53—60頁。
2. 華印椿(民國十一年)：商業中學校珠算科之教材與教學。教育與職業，第三十九期。
3. 華印椿(民國十五年)：珠算在中等學校課程中之位置。教育與職業，第七十七期，419—422頁。
4. 徐仲英(民國十九年)：一種珠算練習片的嘗試。教育雜誌，第二十二卷第十一期，43—51頁。
5. 周元讓(民國二十二，三年)：珠算教學的實際問題。蘇揚中小校刊。第七卷第八期，99—100頁；第七卷第十期，126—127頁。
6. 健民(民國二十二年)：怎樣教學珠算。蘇揚中小校刊，第六卷第七期，54—56頁。
7. 曹日昌(民國二十三年)：在北平市小見到的珠算教學與建議。天津大公報，明日之教育，第二十三期(六月十一日)。
8. 趙廷爲(民國二十三年)：小學算術科中的應用題練習。國立中央大學教育叢刊，第一卷第二期。
9. 趙翼良(民國二十三年)：平民學校珠算教學之實驗。教育與民衆，第五卷第十期，49—63頁。

- 
10. 秦啟文(民國二十四年)：珠算教材細目的商榷。教師之友，第一卷第十期，1331—1339頁。
  11. 莊伯綸(民國二十四年)：小學各科教學述要，(三)算術科，三、珠算教學要點。武進教育月刊，第八十八，八十七期合刊，18—31頁。
  12. 張健(民國二十四年)：怎樣研究珠算。青年界，第七卷第三期，19—24頁。
  13. 張中強(民國二十四年)：珠算教學之我見。小學教育月刊，第三卷第一期，14—18頁。
  14. 陳耿光(民國二十四年)：筆算珠算混合教學法。黎明書局。

## 第十三章 教學法上他項問題

- I. 開始教學珠算的時間……………253
- II. 四則的排列……………254
- III. 珠算筆算的相對價值……………256
- IV. 珠算教學的研究……………258
- V. 總結提要……………259

### I 開始教學珠算的時間

在小學裏應該什麼時候開始教學珠算呢？這個問題似乎沒有討論的餘地，因為教育部已經規定小學中要在第四學年添授珠算了，部章是一時難以改變的，不過在理論上，這個問題很有考慮的必要，我們就在這個觀點下討論這個問題。假如教育部的規定不合科學原則，我們也可呼籲修改。

普通在小學內都是第一年便有算術教學，因此許多人都認為算術教學要在第一年開始，是「天經地義」的事，其實不然。據美人忒勒（參考3）的研究，小學第一年不教學算術的，最後的成績反比教學算術的好。第二年也不教學算術（就是在第三年再開始教學），也無不良影響。我們想這也是很自然的事。算術中有許多用語文的地方，小學一年級學生語文訓練還不够，學習算術當然有許多困難，不如稍有語文訓練的二年級生。在三年級，語文技能比較更豐富了，學習算術當然有許多便利，所以就是開始學習較晚，也不會吃虧。

珠算與筆算若採混合教學，自然應當同時開始。根據忒勒的研

究，第二年或第三年開始都無不可。以我們的意見，在完全小學中，因為學生在校學習時間較長，珠算筆算教學可於第三年開始，在第一二兩年內多給兒童一些語文訓練，生活常識。在初級小學中，因為學生在校的時間只有四年，為期較短，珠算筆算可於第二年開始，這樣可以學到三年珠算，不致一無所學。

珠算筆算分別教學時，天民先生(參考1)以為珠算教學在第三或第四年開始均可。魏壽鏞先生(參考2)，劉道成先生(參考9)，黃炳華先生(參考12)和陳耿光先生(參考13)都以為應該在第三年開始。以我們的意見，也是以為在完全小學內三四年均可，在初級小學內應當在第三年開始。不過筆算在完全小學內要在第二或第三年開始，在初級小學內要在第二年開始。天民先生和魏，劉兩先生都沒有提筆算開始教學時間的問題。

什麼時期最適於開始教學珠算，在理論上還有值得討論的一點，就是學習珠算的能力與年齡的關係。趙冀良先生(參考10)找到珠算的學習能力和年齡的相關度很高(.72— .97)，在二十一歲以下，年齡愈大學習珠算的成績越好，所以單就一個人說，開始學習珠算的時間到無妨晚一些。不過這始終是個理論的結論，在實際上不能應用，因為在初級小學中，學生在校時期只有四年，在完全小學中也只有六年，不容長大了再開始學習珠算。

## II 四則的排列

現在一般算術教科書上的教材，還是根據所謂「論理的原則」組織

的，四則排列的順序，是加，減，乘，除。要學了繁複的加法才開始學減法，學完了減法才學乘法，學完了乘法才學除法。殊不知這是不合乎算術心理的！誰都知道，單簡的減法比繁複的加法容易，簡單的乘法比繁複的加減法容易，然而爲什麼要兒童先學繁難的，後學容易的呢？這合乎教學的原則嗎？

趙冀良先生發現「學生在學習加法以後，開始學習減法，及教學乘法以後，開始教學除法的時候，都感覺特別容易。」如果教材是根據論理的原則組織的，這原是意中事！

趙先生以爲「此種現象在教材編製上，不容忽視。」因此趙先生提議，『把減法教學和加法教學及除法與乘法混合起來。具體的說，學了「加法一」(一上一，二上二，……九上九，口訣，算法)，以後就學「減法一」(一去一，二去二，……九去九，口訣，算法)，學了單位乘法以後就學單位除法，如此更迭學習。』

要使珠算教學合乎算術心理，只有把珠算教材的組織變動，把加減乘除混合起來。自然，現在珠算心理的研究尙少，我們還不能確實的說出(根據心理原則)如何組織教材，因爲在珠算上各步難度的分析，彼此在學習心理上的關係，還都沒有人研究過。不過至少也要實行趙先生的提議，把加法和減法，乘法和除法混合起來。教了4以內的加法，便教4以內的減法，教了一位的乘法，便教一位的除法。在本書第五章內所講的教學加法的步驟和第六章內所講的教學減法的步驟，第七章內所講的教學乘法的步驟和第八章內所講的教學除法的步驟，

實際應用時都可以綜雜錯列起來，這樣教學如果運用得當，效率一定高的。

### III 珠算筆算的相對價值

相對的說，珠算與筆算價值孰高呢？「人各一詞」！只注意數理，而不太注意算術在中國社會的應用的，大抵推崇筆算，認為珠算沒有學習的價值。只注意社會應用，不注意數理的研究的，又大都推重珠算，認為使兒童學習筆算是一種浪費。雖是各有各的理由，這却不是我們應持的態度，我們要從各方面比較珠算筆算的價值。

許多人都承認，計算簡單的算題，珠算比較筆算敏捷。周元讓先生（參考4）說：「四則練習，筆算不如珠算敏捷。」朱時隆先生（參考5）也說：「珠算計算較筆算計算敏速。」金劍清（參考11）也說：珠算「實視筆算為便。」華印樞（參考8）更說，「珠算迅速便利迥非筆算所能及。」閻生夫先生（參考14）的話，幾乎使人懷疑其中有誇張的意味。他說：「課餘之暇，嘗聞諸生中有如是之疑難曰：「珠算與筆算孰優而孰劣乎？」吾輒令各執一端，往復辯難，辯之不足，則繼之以比賽，而其最後之勝利，常常操於用珠算者之掌握中。」沒有反對的意見，我們可以認為，計算簡單題目珠算確較筆算捷速。不過也不要把这个結論認為是「金科玉律」。我們知道，還沒有人做過珠算筆算計算，科學的，嚴正的比較。閻先生就是真的讓他的「諸生」比賽過，而勝利常歸諸用珠算者，也未可據為定論，因為「諸生」珠算筆算的熟練程度未必相等。如果二者熟練的程度不相等，結果還能可靠嗎？總之，計算簡單

題目珠算似較筆算捷速，不過沒有人做過科學的比較，我們站在科學的立場，還不能「無條件的」接受這個結論。

一件不容否認的事實，是在我國社會上珠算比筆算的應用較廣。一般商家大都是完全用珠算的，就是行政機關，學術界做統計工作的，也有許多應用珠算的。因此黃競白先生(參考7)主張在鄉村民衆學校中要以「珠算及心算爲重，筆算可有可無；在城市方面」也「當以珠算及心算爲重，」不過「得兼習筆算。」朱時隆先生也主張因珠算應用較廣，小學中應該特別注重珠算。假若我們確實的證明了珠算不如筆算便利，我們可以提倡應用筆算，廢棄珠算，不過在現在社會中珠算被普遍的應用着，這是事實。假若我們不能證明珠算不如筆算便利，或者更有理由使我們相信珠算比較筆算便利，我們就該在學校裏注意珠算教學，以應社會的需要。

還有一件不容否認的事實，就是計算繁難的算題，珠算不如筆算。雖然在計算高深的算題，或繁複的統計中，珠算還可應用，不過始終是居於輔助的地位，相當一個簡單的計算機而已。所以就是對珠算推崇備至的閻生夫先生也不能不承認珠算優於筆算，「祇以整數四則爲限，若遇繁難之問題，如分數比例等」，就「往往束手無策」了。在計算比較繁難的算題，如包有開平方立方的，珠算並不是不能計算，只是不如筆算便利，結果的正確度也比較小。這一點閻先生也見到。總之，計算繁難的算題時，珠算不如筆算。

許多人還承認珠算比筆算難學。譬如朱時隆先生說，「珠算比較

筆算難學。」教育部頒佈的小學課程標準，在算術科的教學要點裏也說，「珠算因有五進關係，比十進的筆算較為難學。」趙冀良先生曾親身向曹日昌個人說過，據他研究實驗的結果，在平教會的民衆學校中，在學生卒業時，要求珠算筆算的程度和計算技能相等，筆算教學用二千分鐘，珠算教學要用二千八百分鐘，幾乎相差三分之一。固然，珠算所以難學，也許是珠算教學法不良的緣故，有了好的教學法也許學生就不覺其難了，不過在現在珠算難學這是事實。這就來了一個問題：珠算難學（自然也可說是因為沒有好的教學法），所以教學時用時多而效果小，筆算易學，所以教學時用時少而效果大，然而珠算的應用價值却又較筆算為大，小學教育和民衆教育應該注重當時學校內的教育效率呢？還是應該注重以後社會上的應用價值呢？具體的說，應當注意應用價值小而易學容易收效的筆算呢？還是應當注意應用價值大而難學不易收效的珠算呢？在這裏我們不願作答，留給小學教育和民衆教育專家吧。

#### IV 珠算教學的研究

我國的珠算至少有了二千年以上的歷史，然而應用珠算的一向都是墨守成法，不知改進，所以現時在有這樣悠久歷史的珠算中還是充滿了許多不合理的地方。且幸現在有人覺悟了，着手從事珠算改進的研究了，在本書內介紹過的幾十位珠算研究者，都是這方面的先知先覺。本書就是企圖把幾十位先知先覺研究的結果綜合論列，加以系統的敘述。由本書內容的貧乏，可以看到這種研究現在剛在開始，偉大

的成績尚待將來的努力！

談到珠算教學研究，雖是千頭萬緒，處處是問題，然而主要的不外下列四方面：

1. 珠算教具(算盤)的改良。
2. 珠算算法(加減乘除等法)的改良。
3. 珠算教材的編選。
4. 教學方法的研究。

研究算術教學法的一向都是教育心理學者，或實際從事教學的教師，數學家很少參與。我們知道惟有數學家了解數學最深，惟有數學家有一個整體的系統的數學知識，對於應該怎樣一步一步的培養兒童的數學知識，數學家一定另有一種看法，至少可以補助教育心理學者所見之不足。因此在算術教學，珠算教學的研究上，數學家應該擔任一部工作。曹日昌(參考6)曾發表過言論，希望各小學珠算教師從事珠算教學的研究，現在更把這個希望寄託在教育心理學者和偉大的數學家身上！

## V 總結提要

總結本章要點如下：

1. 珠算教學開始的時間，採用混合教學的，(珠算筆算同時開始教學)在完全小學中應在第三年，在初級小學中應在第二年；採用分別教學的，在完全小學中第三四年開始均可，在初級小學中應在第二年。

2. 在教材中加減乘除應當混合起來，至少也要加減混合，乘除混合。

3. 計算簡單題目，珠算大概比筆算敏速，不過尚無確切的實驗的比較。計算繁難題目，珠算不如筆算便利。珠算在社會應用較廣。在現在普通的教學方法下，珠算比筆算難學。小學及民衆學校應注重珠算或筆算，還是值得考慮的問題。

4. 珠算教學的研究不外珠算教具的改良，珠算算法的改良，珠算教材的編選，教學方法的研究四方面。希望小學教師，教育心理學者，數學家，三方面共同負責。

#### 本章參考

1. 天民(民國三年)：蒙台梭利教育原理珠算教授法。教育雜誌，第六卷第四期，95—111頁。
2. 魏壽鏞(民國四年)：國民學校之教授珠算問題。中華教育界，第四卷第九期。
3. 杜佐周(民國二十二年)：關於算術教學之幾種重要的研究。中華教育界，第二十一卷第五至第七期。
4. 周元讓(民國廿二年)：珠算教學的實際問題。蘇揚中小校刊，第七卷第八期，99—100頁；第七卷第十期，126—127頁。
5. 朱時隆(民國二十三年)：小學珠算教學的我見。進修半月刊，第三卷第十七期，48—49頁。

6. 曹日昌(民國二十三年)：在北平市小見到的珠算教學與建議。  
天津大公報，明日之教育，第二十三期(六月十一日)。
7. 黃競白(民國二十三年)：民校算術教學問題的商討。教育與民衆，第五卷第十期，39—47頁。
8. 華印樞(民國二十三年)：珠算速計法。生活書店。
9. 劉道成(民國二十三年)：小學的珠算。南昌小學界，第一卷第四期，31—38頁。
10. 趙翼良(民國二十三年)：平民學校珠算教學之實驗。教育與民衆，第五卷第十期，49—63頁。
11. 金劍清(民國二十四年)：金氏算盤說明書。科學的中國，第五卷第二期，3—8頁。
12. 黃炳華(民國二十四年)：談談鄉村小學珠算教學。教師之友，第一卷第十期，1491—1495頁。
13. 陳耿光(民國二十四年)：筆算珠算混合教學法。黎明書局。
14. 閻生夫(民國二十四年)：珠算教學之理論與實際。河南民衆教育，創刊號，41—51頁；第一卷第二期，61—77頁。



## 附錄 珠算論文索引

(民國元年至民國二十四年)

1. 本索引所收集者只限「論文」，專籍不在內。
2. 論文內容以專門討論珠算問題者為限，討論其他問題而涉及珠算者不在內。
3. 論文排列以發表年代及姓氏筆畫多少為序。

民國三年

1. 天民 蒙台梭利教育原理珠算教授法，教育雜誌，第六卷第四期，95—111頁。
2. 壽孝天 改良算盤說。教育雜誌，第六卷第七期，85—89頁。

民國四年

3. 魏壽鏞 國民學校之教授珠算問題。中華教育界，第四卷第九期。
4. 壽孝天 壽氏算盤說明書。教育雜誌，第七卷第九期，33—34頁。

民國六年

5. 張顯光 珠算教授之一得。教育雜誌，第九卷第三期，53—60頁。
6. 戴仲陶 珠算改新教授法。中華教育界，第六卷第二至第三期。

民國七年

7. 笑留 小學珠算筆算同課練習之商榷。中華教育界，第七卷第六期。

民國十一年

8. 華印椿 商業中學校珠算科之教材與教學。教育與職業，第三十九期。

民國十四年

9. 辛曾輝 單級珠算教學的經過。小學教育月刊，第一卷第四期。

民國十五年

10. 華印椿 珠算在中等學校課程中之位置。教育與職業，第十七期，419—423頁。

民國十九年

11. 徐仲英 一種珠算練習片的嘗試。教育雜誌，第二十二卷第十一期，43—51頁。

民國二十一年

12. 浙江省立七中附小 珠算筆算分教合教的試驗。浙江教育行政週刊，第三卷第四十四期(總一四八號)。

民國二十二年

13. 周元讓 珠算教學的實際問題。蘇揚中小校刊，第七卷第八期，99—100頁；第七卷第十期，126—127頁。

14. 徐德春 珠算口訣改用手語法的一個嘗試計劃。浙江教育行政週刊，第五卷第七期(總二一五號)。
15. 健民 怎樣教學珠算。蘇揚中小校刊，第六卷第七期，54—56頁。
16. 健民 小學教學珠算的研究。地方教育，第四十七期。(此篇發表年月不詳)
17. 糜子輝 對於珠算與筆算混合教學的商榷，兒童與教師，第八期，365—367頁。

民國二十三年

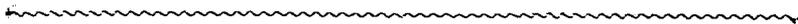
18. 朱時隆 小學珠算教學的我見。進修半月刊，第三卷第十七期，48—49頁。
19. 徐德春 珠算不用口訣編造直接練習的系統材料之實驗研究。浙江教育行政週刊，第五卷第四十期(總二四八號)。
20. 曹日昌 在北平市小見到的珠算教學與建議。天津大公報，明日之教育，第二十三期(六月十一日)。
21. 高橋小學 筆算與珠算混合教學的研究。南昌小學界，第一卷第二，三期合刊，49—52頁。
22. 陸在新 珠算歸訣的改良。江蘇小學教師半月刊，第一卷第二十三期，32—33頁。
23. 陸在新 改良乘法口訣。江蘇小學教師半月刊，第一卷第二十三期，33—34頁。

24. 惠汝濱 小學珠算教學的一得。江蘇小學教師半月刊，第一卷第二十三期，26—30頁。
25. 趙志芳 改良珠算除法的倡議。浙江教育行政週刊，第六卷第三期(總二六三號)。
26. 趙冀良 平民學校珠算教學之實驗。教育與民衆，第五卷第十期，49—63頁。
27. 詹才鎬 珠算開方的研究。進修半月刊，第三卷第二十一期，25—30頁。
28. 劉道成 小學的珠算。南昌小學界，第一卷第四期，31—38頁。
29. 錢鼎澄 自製大算盤的又一法，進修半月刊，第三卷第二十三期，43—44頁。

## 民國二十四年

30. 朱彤暈 珠算應用的商權。江蘇小學教師半月刊，第二卷第十期，10—11頁。
31. 朱時隆 整理後的珠算口訣。進修半月刊，第四卷第十期，32—40頁。
32. 金劍清 金氏新式算盤說明書。科學的中國，第五卷第二期，3—8頁。
33. 秦啟文 珠算教材細目的商權。教師之友，第一卷第九期，1331—1339頁。

34. 唐海滄 改革小學珠算教學芻議。進修半月刊，第四卷第十期，6—11頁。
35. 曹日昌 二十年來國人對於珠算的研究述要。中華教育界，第二十二卷第十期，43—53頁；第十一期，29—36頁。
36. 張 健 怎樣研究珠算。青年界，第七卷第三期，19—24頁。
37. 張中發 珠算教學之我見。小學教育月刊，第三卷第一期，14—15頁。
38. 黃炳華 談談鄉村小學珠算教學。教師之友，第一卷第十期，1491—1495頁。
39. 費天降 對於改良乘法口訣的質疑。江蘇小學教師半月刊，第二卷第十期，10頁。
40. 聶 陽 珠算的指法練習。教師之友，第一卷第九期，1340—1343頁。
41. 劉心東 改良後乘法口訣的缺點。江蘇小學教師半月刊，第二卷第十期，9—10頁。
42. 蔣 霖 珠算教學的小貢獻。江蘇小學教師半月刊，第二卷第十期，7—9頁。
43. 閻生夫 珠算教學之理論與實際。河南民衆教育，創刊號，41—51頁；第一卷第二期，61—77頁。



索 引

一 畫

一掌經法,199.

三 畫

三盤清,79,104.

口訣,55.

分析,55.

斤兩法,60.

加法,56.

改良,62.

利用,84.

乘法,58.

除法,59.

開方,166,175,209.

開方定位,165,175.

減法,57.

廢除實驗,74.

撞歸,60.

簡除,195.

四 畫

分教合教實驗,16.

分乘法,190.

分除法,192.

天珠,31.

不用口訣教學法,75,76.

不完全問題,243.

斤兩法,7.

口訣,60.

捷算,199.

手語法,77.

加法,77,78,106.

乘法,79.

除法,78.

減法,78,79,117,116.

方,212,213.

中心珠算練習片,223.

天民,87,88,93,94,101,106,

107,111,113,114,118,120,

121,122,123,136,139,140,

141, 160, 254, 260, 263.

### 五 畫

加法, 93.

口訣, 56.

手語法, 77, 78, 106.

定位, 108.

直接, 95.

教學步驟, 93.

捷算, 182.

練習材料, 101.

檢答, 108.

加乘法, 184.

四則排列, 254.

布克, 46, 54.

北平師範大學, 75.

平教會, 231, 233, 239, 253.

### 六 畫

因, 4.

同課練習, 12.

成績記載表(片), 225, 226.

成績統計表, 229.

朱彤暈, 72, 73, 90, 236.

朱時隆, 14, 21, 256, 257, 260,  
265, 266.

### 七 畫

沒有數目問題, 243.

沈百英, 21, 45, 54.

杜佐周, 260.

辛曾輝, 264.

武勤, 253.

### 八 畫

玩法, 108, 136, 223.

兩數平方之差數, 184.

兩數立方之差數, 184.

金式算盤, 32.

金劍清, 31, 32, 38, 179, 180, 256,  
261, 266.

周元讓, 15, 16, 21, 45, 54, 65, 66,  
85, 89, 238, 239, 240, 245,  
246, 250, 251, 256, 260, 264.

### 九 畫

星徽, 26.

指法, 224, 225.

- 逆乘法, 188.
- 飛歸, 194.
- 取畝, 194.
- 俞子夷, 93, 110, 111.
- 南昌高橋小學, 2, 13, 14, 21, 65, 86, 89, 222, 235, 265.
- 十 畫
- 記數, 41.
- 乘法, 121.
- 一位, 123.
- 口訣, 58.
- 手語法, 79.
- 多位, 128.
- 定位, 131.
- 教學步驟, 121.
- 捷算, 184.
- 練習材料, 135.
- 檢答, 134.
- 除法, 139.
- 一位, 141.
- 口訣, 59.
- 手語法, 78.
- 多位, 150.
- 定位, 153.
- 教學步驟, 139.
- 捷算, 192.
- 練習材料, 158.
- 檢答, 157.
- 留頭乘, 128, 129, 130, 136, 137.
- 破頭乘, 128, 129, 130.
- 通乘, 194.
- 通除, 194.
- 速除, 194, 197.
- 連續問題, 243.
- 校核問題, 243.
- 珠算筆算相對價值, 256.
- 笑留, 1, 12, 21, 222, 235, 264.
- 凌君平, 37, 38.
- 秦啟文, 45, 54, 245, 248, 249, 252, 266.
- 徐德春, 24, 38, 49, 51, 54, 75, 76, 77, 82, 83, 89, 104, 106, 107,

- 111, 117, 118, 120, 135, 136,  
159, 160, 265.
- 徐仲英, 223, 223, 230, 235, 233,  
251, 264.
- 徐玉相, 183, 184, 217, 218.
- 健民, 29, 30, 31, 33, 64, 65, 67,  
68, 74, 85, 86, 89, 223, 230,  
235, 238, 240, 251, 265.
- 唐海滄, 30, 31, 38, 48, 54, 68, 69,  
70, 87, 90, 95, 112, 113, 114,  
120, 130, 137, 198, 219, 267.
- 浙江省立七中附小, 17, 19, 21,  
223, 235, 264.
- 浙江金華中學附小, 49.
- 浙江烏鎮植才小學, 228.
- 十一畫
- 混合教學, 1.  
時間支配, 12.  
理由, 1.  
教材, 4.
- 教具, 23.
- 教材, 237.  
綱要, 245.  
編選原則, 237.  
教學研究, 258.  
算盤改良, 23.  
大算盤, 37.  
普通算盤, 23.  
頂珠當十法, 30.  
堆百子, 104, 105, 108, 119.  
掉尾乘, 128, 129, 130.  
進度比較表, 227, 229.  
開方, 161.  
口訣, 165, 166, 175, 209.  
平方, 161.  
立方, 168.  
用算盤, 179.  
高次方, 178.  
捷算, 200.  
開始教學珠算時間, 252.  
許用賓, 21, 45, 54.  
張顯光, 28, 30, 33, 74, 85, 88,

- 237, 238, 251, 263.
- 張健, 29, 38, 63, 64, 65, 66, 80,  
89, 90, 194, 219, 238, 240,  
252, 267.
- 張仲毅, 2, 21, 64, 85, 87, 90, 222,  
236, 238, 252, 267.
- 張宗麟, 63, 74, 89.
- 黃競白, 2, 10, 11, 14, 21, 85, 86,  
89, 103, 104, 106, 111, 230,  
233, 235, 257, 261.
- 黃炳華, 14, 21, 48, 54, 64, 85, 90,  
222, 236, 254, 261, 267.
- 陳耿光, 2, 6, 14, 21, 86, 90, 238,  
252, 254, 261.
- 莊伯綸, 14, 21, 53, 54, 87, 90,  
238, 252.
- 陸在新, 64, 70, 71, 72, 89, 90,  
265.
- 曹日昌, 14, 16, 21, 24, 25, 26, 30,  
33, 38, 45, 46, 54, 74, 75, 83,  
87, 89, 90, 108, 111, 150,  
160, 223, 235, 238, 241, 251,  
258, 259, 261, 265, 267.
- 清華大學心理學系, 45.
- 十二畫
- 減法, 113.
- 口訣, 57.
- 手語法, 78.
- 定位, 119.
- 直接, 114.
- 教學步驟, 113.
- 捷算, 184.
- 練習材料, 117.
- 檢答, 119.
- 減乘法, 187.
- 捷算, 181.
- 斤兩法, 199.
- 加法, 182.
- 和珠算應用, 181.
- 問題, 217.
- 乘法, 184.
- 除法, 192.

開平方法, 200.  
 開立方法, 210.  
 減法, 184.  
 等差級數之和, 182.  
 等比級數之和, 182.  
 隅, 212, 213.  
 測驗, 230.  
 費天降, 71, 72, 90, 264.  
 華印椿, 190, 194, 206, 209, 213,  
 218, 249, 251, 256, 261, 264.  
 惠汝濱, 31, 38, 85, 90, 199, 218,  
 266.  
 程大位, 194, 218.  
 揚州中學實驗小學, 228, 230, 235.

### 十三畫

圓成數, 183.  
 晏陽, 53, 54, 106, 112, 222, 223,  
 236, 267.

### 十四畫

練習, 221.  
 加法, 101.

片, 223, 228.  
 乘法, 135.  
 除法, 158.  
 減法, 117.  
 詹才鎬, 200, 201, 203, 210, 218,  
 266.  
 趙冀良, 101, 112, 120, 131, 136,  
 159, 160, 231, 235, 239, 240,  
 245, 247, 251, 254, 255, 258,  
 261, 266.  
 趙志芳, 194, 219, 266.  
 趙廷爲, 251.

### 十五畫

聯絡教學, 14.  
 撥珠, 45.  
 撞歸, 152.  
 口訣, 60.  
 彈簧算盤, 37, 38.  
 壽氏加減算盤, 30.  
 壽氏乘除算盤, 30.  
 壽孝天, 30, 31, 37, 263.

蔣霖, 3, 5, 13, 14, 21, 48, 52, 54,  
64, 72, 86, 90, 105, 108, 112,  
118, 120, 222, 223, 236, 267,

劉道成, 86, 90, 254, 261, 266.

劉心東, 71, 90, 267.

劉薰宇, 218, 219.

### 十六畫

默記一珠法, 30.

獨立問題, 242.

錢鼎澄, 34, 35, 36, 37, 33, 266.

### 十七畫

簡除, 194.

應用問題, 241.

良好問題特徵, 244.

教學步驟, 241.

教學應注意點, 241.

種類, 242.

戴仲陶, 263.

糜子輝, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 13, 21,  
265.

閔生夫, 24, 29, 33, 56, 57, 60, 64,

70, 71, 72, 74, 85, 90, 130, 137,

223, 236, 256, 257, 261, 267.

### 十八畫

歸, 4, 151, 152.

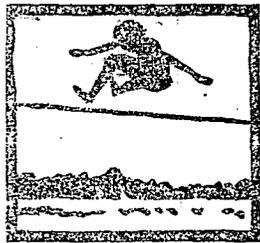
歸除, 150.

類聚問題, 242.

魏壽鏞, 254, 260, 263.

### 二十一畫

顧其昌, 34, 35, 37, 33.



不准翻印

珠算教學的研究

曹日昌著

教育短波社出版

定價 國幣五角

民國二十六年一月初版

139

1.00