修正課程標準適用

高中甲組代數學

第二冊

編者　余介石

上海中華書局印行

修正課程標準適用

高中甲組代數學第二册

目　次

第七章

二次方程式

69.<u>範式和解法</u>　二次方程,都可化為下面的兩種範式:

$$ax^2+bx+c=0,\text{ 或 }x^2+px+q=0.$$

根是有理數時,可用 §39 的方法去求.一般解法是利用　$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$,　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 兩個恆等式,將範式分解成兩個一次因式再解.這法叫做配方術,詳細步驟如下:

$$ax^2+bx+c=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right\}$$

將前兩項配成平方 $=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right\}$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right\}.$$

分解得　$\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$

兩個因式,所以他的兩根的公式是:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

如果範式是　$ax^2+2bx+c=0$,

則兩根是　$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{a}$,　$x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{a}$.

【例一】解方程式　$3x^2-x-4=0$.

【解】$a=3,\quad b=-1,\quad c=-4$,代入公式,得

$$x_1=\frac{1}{6}\left\{1-\sqrt{1-4\cdot3(-4)}\right\}=\frac{1}{6}(1-\sqrt{1+48})=\frac{1}{6}(1-7)=-1,$$

$$x_2=\frac{1}{6}(1+7)=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}.$$

【例二】解方程式　$3x^2+6x-2=0$.

【解】用第二公式　$a=3,\quad 2b=6,\quad c=-2$,則得

$$x_1=\frac{1}{3}\left\{-3-\sqrt{9-3(-2)}\right\}=-1-\frac{\sqrt{15}}{3},\ x_2=-1+\frac{\sqrt{15}}{3}.$$

70.虛數和特性　在§4的註二裏說過,負數的平方根叫做虛數.所以虛數是除去負數不能開平方根和偶次方根的限制而生的.換句話說,就是虛數運算,不合於§9的符號律.

任何負數 $-a^2$(a是實數)的平方根,都可寫做

$$\sqrt{-a^2}=a\sqrt{-1}=ai.$$

i是表$\sqrt{-1}$的符號,即　$i=\sqrt{-1},\quad i^2=-1$.

i即$\sqrt{-1}$叫做虛數單位,a叫做係數.

由定義可知(一)虛數的奇次方還是虛數;偶次方卻是實數,方數爲奇數的二倍時是負數,爲4的倍數時是正數.

【例一】$\sqrt{-4}=\sqrt{-2^2}=2i,\quad \sqrt{2^2-4\cdot3\cdot2}=\sqrt{-20}=2\sqrt{5}i.$

【例二】$\sqrt{-3}\sqrt{-6}=\sqrt{3}\,i\cdot\sqrt{6}\,i=3\sqrt{2}\,i^2=-3\sqrt{2}.$

【注意】算虛數時,宜先化出單位再算,便不易錯.

【例三】$i^3=i^2\cdot i=-1i=-i,\quad i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1.$

(二)虛數和實數,決不能相等.

因為虛數的平方是負數,實數平方是正數,如能相等,就不合於推演律裏的乘方定律.

(三)虛數同實數相加,減只能用運算符號,聯成一數,並不能相合.

因為如果 $a+bi=\begin{cases} ci \\ \text{或 } c, \end{cases}$ 則 $\begin{cases} (c-b)i=a \\ \text{或 } bi=c-a. \end{cases}$

都和(二)衝突.

【註】為了公律常住性起見,我們設兩虛數的和差是一虛數,係數為原來兩數裏係數的和差.

71.<u>雜數和特性</u> 用加減號聯實虛數兩部所成的數,叫雜數,雜數的特性和算法如下:

(一)要使雜數 $a+bi=0$,必須 $a=b=0$.

因為虛數和實數不能相合相消.

(二)兩雜數 $a+bi=c+di$,必須 $a=c, b=d$.

因為 $(a-c)+(b-d)i=0$, 必須 $a-c=b-d=0$.

要使雜數運算,合乎公律,應該有:

(三)兩雜數相加減,分別虛實部相加減.

(四)兩雜數相乘,按多項式法則相乘.

【註一】雜數的除法和平方根等到第十一章再講.

【註二】代數基本定理(§40 註)在雜數範圍內才成立.

【注意】§§70,71 所說的特性,幷非能證明的定律,卻是規定的新數算法,目的在使新數服從原有的公律定律.(但要撤去的限制,如符號定律,當然不能再遵守.)

【例一】$2-3i+(-1+2i)=(2-1)+(-3+2)i=1-i$.

【例二】$(2-3i)(-1+2i)=2(-1+2i)-3i(-1+2i)$

$$=-2+4i+3i-6i^2=-2-(-6)+4i+3i=4+7i.$$

72.根的討論.判別式 二次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

兩根的性質,就 $D=b^2-4ac$ 一式,數值的正負而定.D便叫做二次方程的判別式.

(一)$b^2-4ac>0$, 兩根是不相等的實數.

(二)$b^2-4ac=0$, 兩根是相等的實數.

(三)$b^2-4ac<0$, 兩根是不相等的雜數.

如範式是 $ax^2+2bx+c=0$,則 $D=b^2-ac$.

【例一】研究方程式$3x^2-2kx+27=0$兩根的性質.

【解】$D=k^2-3\cdot27=k^2-81=(k-9)(k+9)$,所以

(1)如果$k>9$或$k<-9$,則D的兩個因式同號,所以$D>0$;方程式有相異實根.

(2)如果$k=9$或-9,則$D=0$,有相等實根.

(3) 如果 $9>k>-9$, 則 D 的兩個因式異號,所以 $D<0$; 方程式有相異雜根.

【例二】求 $f(x)=(a-b)x^2+(a+b)^2x+(a^2-b^2)(a+b)$ 一式爲完全平方(就是由一整式自乘而得的)時,a 和 b 的關係.

【解】如 $f(x)$ 是完全平方,則 $f(x)=0$ 有相等實根.故

$$\begin{aligned}D&=(a+b)^4-4(a-b)(a^2-b^2)(a+b)\\&=(a+b)^4-4(a-b)^2(a+b)^2\\&=(a+b)^2[(a+b)^2-4(a-b)^2]\\&=-(a+b)^2(3a^2-10ab+3b^2)\\&=-(a+b)^2(3a-b)(a-3b)=0.\end{aligned}$$

$\therefore\ a=-b,\quad 3a=b,\quad$ 或是 $\quad a=3b.$

習題三十

1. 決定下列各二次方程式兩根的性質,幷求出來:

(1) $x^2+x+1=0$;　　(2) $3x^2-4x+\dfrac{4}{3}=0$;

(3) $3x^2+2x-1=0$;　　(4) $2x^2-3x+1=0$;

(5) $3x^2-2x+1=0$;　　(6) $\dfrac{x^2}{4}-x+1=0$.

再求各方程式兩根的和,以及兩根的積.

2. 按定義 $i^2=-1$.

但 $i^2=\sqrt{-1}\sqrt{-1}$

$=\sqrt{(-1)^2}=\sqrt{1}=1.$

豈不是 $-1=1$ 麼; 錯誤的地方在那裏?

3. 化簡

(1) $\sqrt{3}\sqrt{-48}$; (2) $\sqrt{-3}\sqrt{-48}$; (3) $(2\sqrt{-4})^2$;

(4) $(-\sqrt{-12})^3$; (5) $\left(-\sqrt{-3\sqrt{-4}}\right)^4$; (6) $i^{13}-i^{17}$;

(7) $\sqrt{-a^{9n}}\sqrt{-a^{2n+1}}$; (8) $\sqrt{2ax-(a^2+x^2)}$.

4. 求下列各組雜數的和差同積.

(1) $3-i,\ 2i+7$; (2) $i-1,\ \frac{1}{2}+5i$;

(3) $\frac{4-3i}{2},\ 2(3-4i)$; (4) $2-\frac{3}{5}i,\ \ 2+\frac{3}{5}i$;

5. $(1-i)^2=?$ $\left[\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{3}\,i\right)\right]^3=?$

$\left[\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}\,i\right)\right]^3=?$

6. 求下列各方程式的判別式:

(1) $(x-a)^2+m(x-a)+n=0$; (2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+n)^2}{b^2}=1$;

(3) $(y+1)^3+y^3+(y-1)^3-3(y+1)y(y-1)=0$.

7. 討論下列各方程式的根的性質:

(1) $(x-k)^2+3(x+2k)=0$; (2) $x^2-x+2k^2+3k-2=0$;

(3) $(3x+k-1)^2=2(3x+k-1)-1$.

8. 如 $ax^2+bx+c=0$ 中,a, c 異號,則兩根必是異號實數.

9. 證明如 $b=k+\frac{ac}{k}$,則 $ax^2+bx+c=0$ 的根,必是實數.

10. 方程式 $(a^2+p^2)x^2-2(aq+bp)x+(b^2+q^2)=0$ 的根,

如不是雜數,則必是相等實根,試加證明.

73.根和係數的關係　設二次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

的兩個根是x_1,x_2,則由§40可知

$$ax^2+bx+c\equiv a(x-x_1)(x-x_2)$$
$$\equiv a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2].$$

又按§41得　$b=-a(x_1+x_2),c=ax_1x_2,$

即　$$\boldsymbol{x_1+x_2=-\frac{b}{a},\qquad x_1x_2=\frac{c}{a}.}\qquad(1)$$

如範式爲　$x^2+px+q=0,$

則　$$\boldsymbol{x_1+x_2=-p,\qquad x_1x_2=q.}\qquad(2)$$

【例一】$x^2+2x-1=0$的兩根,依公式解出,是$-1\pm\sqrt{2}$.

$$\therefore\quad x_1+x_2=(-1-\sqrt{2})+(-1+\sqrt{2})=-2,$$
$$x_1x_2=(-1-\sqrt{2})(-1+\sqrt{2})=(-1)^2-(\sqrt{2})^2$$
$$=1-2=-1,$$

和公式(2)相合.

【例二】$4x^2-4x+5=0$的兩根,依式解出,是$\frac{1}{2}\pm i$.

$$\therefore\quad x_1+x_2=\left(\frac{1}{2}-i\right)+\left(\frac{1}{2}+i\right)=1,$$
$$x_1x_2=\left(\frac{1}{2}-i\right)\left(\frac{1}{2}+i\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-i^2=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4},$$

和公式(1)的結果相同.

74.根的對稱式　上節的公式(1),(2)表示兩

種簡單的根的對稱式,由原方程式係數表出.其他根的對稱式,也可用係數來表.

x_1x_2 兩根對稱式的最普通形狀是

$$x_1^n x_2^m + x_2^n x_1^m = x_1^m x_2^m (x_1^{n-m} + x_2^{n-m}) \quad n>m.$$

和

$$\frac{x_1^n}{x_2^m} + \frac{x_2^n}{x_1^m} = \frac{1}{x_1^m x_2^m}(x_1^{m+n} + x_2^{m+n}).$$

但 $x_1^m x_2^m = (x_1x_2)^m = q^m$ 或 $\left(\frac{c}{a}\right)^m$,所以如果 $x_1^k + x_2^k$ 能用係數表出,則一切對稱式都可以表出.

為布式簡明起見,用 S_k 代表 $x_1^k + x_2^k$,先看

$$S_1 = x_1 + x_2 = -p;$$

$$S_1^2 = (x_1+x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = S_2 + 2q,$$

$$\therefore \quad S_2 = S_1^2 - 2q;$$

$$S_1S_2 = (x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2)$$
$$= x_1^3 + x_2^3 + x_1x_2(x_1+x_2) = S_3 + qS_1,$$

$$\therefore \quad S_3 = S_1S_2 - qS_1;$$

....

$$S_1S_{k-1} = (x_1+x_2)(x_1^{k-1}+x_2^{k-1})$$
$$= x_1^k + x_2^k + x_1x_2(x_1^{k-2}+x_2^{k-2}) = S_k + qS_{k-2},$$

$$\therefore \quad S_k = S_1S_{k-1} - qS_{k-2}$$

可見由 $S_1, S_2, S_3, \cdots$ 便能陸續推求 S_k 的值.由此得

定理. **二次方程式兩根 x_1, x_2 的對稱式,可**

用原方程式係數的整式或分式表出.

【註】$1/x_1^k+1/x_2^k$ 用 S_{-k} 來表,可以化為 S_k 再求.

【注意】這兩節的理,都可以推廣到高次方程式上去,結果很重要,見本書第十五章方程式論.

【例】求用 $x^2+px+q=0$ 的係數 p,q,來表 S_4,S_{-2}.

【解】$S_2^2=(x_1^2+x_2^2)^2=x_1^4+x_2^4+2x_1^2x_2^2=S_4+2q^2$,

又 $S_2=p^2-2q$;

$$\therefore\quad S_4=S_2^2-2q^2=(p^2-2q)^2-2q^2=p^4-4p^2q+2q^2.$$

$$S_{-2}=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2x_2^2}=\frac{p^2-2q}{q^2}.$$

【註】如用本節的公式來求 S_4,則要先求出 S_2,S_3,不如這裏所用解法的便利.

75.作已知數為根的方程　上面所說,是研究已知方程式的根或根的對稱式的方法.反過來說,我也可求作方程式,使以已知數為根,或兩根間有某種特殊關係.

【例一】作一二次方程式,以 r 和 $2r$ 為根.

【解】 $x_1+x_2=r+2r=3r,\quad x_1x_2=r2r=2r^2$,

故所求的方程式是 $x^2-3rx+2r^2=0$.

【例二】如方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根,互為倒數(即兩根的積為1),求係數間的關係.

【解】設一根為 r,則他根為 $\frac{1}{r}$,故

$$\frac{c}{a}=r\cdot\frac{1}{r}=1.\qquad 即\quad c=a\quad 與係數\ b\ 無關係.$$

【例三】如方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根是 x_1, x_2，求以 (1) x_1-k, x_2-k; (2) kx_1, kx_2; (3) $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ 爲根的方程式.

【解】(1) $(x_1-k)+(x_2-k)=x_1+x_2-2k=-\frac{b}{a}-2k$;

$$(x_1-k)(x_2-k)=x_1x_2-k(x_1+x_2)+k^2=\frac{c}{a}+\frac{kb}{a}+k^2.$$

故所求的方程是 $x^2+\left(\frac{b}{a}+2k\right)x+\left(\frac{c}{a}+\frac{kb}{a}+k^2\right)=0$,

即
$$ax^2+(2ka+b)x+(ak^2+bk+c)=0.$$

(2) $kx_1+kx_2=k(x_1+x_2)=-\frac{kb}{a}$, $kx_1\cdot kx_2=\frac{k^2c}{a}$,

故所求的方程式是 $ax^2+bkx+ck^2=0$.

(3) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{b}{a}\Big/\frac{c}{a}=-\frac{b}{c}$, $\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=\frac{a}{c}$,

故所求的方程式是 $cx^2+bx+a=0$.

【註】這個例子,應用到高次方程式上去,對於解法有很大的幫助,等到學方程式論時便知.(參看 §79 和第十五章).

習題三十一

1. 求作以下各組數爲根的二次方程式:

(1) $\frac{1}{3}(1-\sqrt{7}), \frac{1}{3}(1+\sqrt{7})$;

(2) $\frac{1}{2}-2\sqrt{-2}, \frac{1}{2}+2\sqrt{-2}$.

2. 求用 $x^2+px+q=0$ 的係數來表

$$S_6, S_{-3}, \frac{x_1^3}{x_2^2}+\frac{x_2^3}{x_1^2}.$$

3. 求定$x^2+2x+k=0$中常數k的值,使

(1)兩根的平方和是 8; (2)兩根的差是 2;

(3)一根是他根的 2 倍; (4)一根是他根的平方;

(5)兩根的差等於平方和的一半.

4. 求證 $ax^2+bx+c=0$ 有一根 n 倍於他根的條件是

$$b^2=\frac{(a+1)^2ac}{-n}.$$

5. 設$x^2+px+q=0$的根是x_1,x_2,求作二次方程,使根爲:

(1)$\frac{x_1}{x_2}$, $\frac{x_2}{x_1}$; (2)$x_1x_2^2, x_2x_1^2$; (3)$(x_1-x_2)^2, (x_1+x_2)^2$.

6. 有二次方程式 $2x^2-x-3=0$, 求作一方程式,使其二根(1)較所設方程各根少 2; (2)各倍於所設方程的根.

7. 將上題中方程式的根各減去一相等的定數,使新方程式中,缺去含 x 的項.

8. 將方程式 $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x+1=0$ 的根,各乘以一相等定數,使新方程式中係數都是整數.

76. <u>準二次方程</u>　高次方程式,可以化爲二次方程式去解的,叫做**準二次方程式**.舉例如下:

【例一】解$3x^4-29x^2+18=0$

【解】令$u=x^2$,原方程式變爲$3u^2-29u+18=0$.

$$\therefore\ u=9\text{或}\frac{2}{3};\quad\text{即}\quad x=\pm 3\text{或}\pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

【例二】求二項方程式$x^3-1=0$的一切根.

【解】$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$.

$$x-1=0,\text{則}x=1;\ x^2+x+1=0,\text{則}x=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3}i).$$

【註】$x^3-1=0$即$x=\sqrt[3]{1}$. 由上面的解,可知1的立方根有三個,兩個是雜數.在雜數範圍裏,任何數a的n次方根,都有n個不同的值,就是$x^n-a=0$的根.這理須至方程式論裏才能證明(參看§40的註).

【例三】解$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=15$.

【解】左邊可化為$[x^2+5x+4][x^2+5x+6]$.

令$x^2+5x=u$,則得$[u+4][u+6]=15$,

即
$$u^2+10u+9=(u+9)(u+1)=0.$$

$$\therefore\ u=-1,\text{則}\quad x^2+5x=-1,\ x=\frac{1}{2}(-5\pm\sqrt{21});$$

$$u=-9,\text{則}\quad x^2+5x=-9,\ x=\frac{1}{2}(-5\pm\sqrt{11}i).$$

77.<u>倒數方程式</u>　在方程式　$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$裏,如$a_0=a_n,\cdots a_r=a_{n-r},\cdots$,或$a_0=-a_n,\cdots,a_r=-a_{n-r},\cdots$;就叫做**倒數方程式**.

在§79裏可以證明倒數方程式的一切根是兩兩互為倒數.就是如有一根r,必有他根$\frac{1}{r}$. 按§75例二,便知這種方程式,可以分解為

x^2+ux+1 形狀的二次因式故有解法如下:

【例】解倒數方程式 $f(x)=6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$.

【解】 $f(x)=6(x^4+2x^2+1)+5x(x^2+1)-50x^2$

令 $x^2+1=ux$, $=6x^2u^2+5x\cdot ux-50x^2$

$=x^2(2u-5)(3u+10)=0$.

$\therefore\ u=\frac{5}{2}$, 則 $x^2+1=\frac{5}{2}x$, $x=\frac{1}{2}$ 或 2;

$u=-\frac{10}{3}$, 則 $x^2+1=-\frac{10}{3}x$, $x=-\frac{1}{3}$ 或 -3.

【註】由此可知一倒數方程式,可先求一較低次的方程式的根,再解一二次方程式,便得.

如 $f(x)=0$ 的次數是奇數,則在 $a_0=a_n,\cdots,a_r=a_{n-r}\cdots$ 時, $f(-1)=0$, 在 $a_1=-a_n,\cdots,a_r=-a_{n-r},\cdots$ 時, $f(1)=0$. 所以奇次的倒數方程式有 $x+1$ 或 $x-1$ 的因式.除去這因式後,便得一偶數次的方程式.這方程式比原方程式,只少去 -1 或 $+1$ 一根,其餘兩兩互爲倒數的根,依然存在,所以還是倒數方程式,可照上例的方法去解.

【註】由此可知三次和五次的倒數方程式,都可用二次方程式的方法解出.

習題三十二

解下列的各方程式:

1. $(1-x^2)^3=(1-x^3)^2$.

2. $(x-2)(x-5)(x-7)=8.5.3$.

3. $(x+a)^3+(x+b)^3+(x+c)^3=3(x+a)(x+b)(x+c)$.

4. $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)=44$.

5. $(x^2-3x)^2+4x^2-12x-21=0$.　**6.** $x^4+x^2+1=0$.

7. $x^3+a^3=0$.　**8.** $x^4+1=0$.

9. 如 $1,\omega_1,\omega_2$ 是 $x^3-1=0$ 的三個根,試證

(1) $\omega_1{}^2=\omega_2$;　(2) $\omega_1{}^2+\omega_1+1=\omega_2{}^2+\omega_2+1=0$.

10 $x^3-2x^2-2x+1=0$,　**11.** $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$.

12. $x^5-5x^4+9x^3-9x^2+5x-1=0$.　**13.** $x^6+1=0$.

14. $x^4-2x^3-5x^2+2x+1=0$.【提示】令 $x^2-1=ux$.

78.<u>二個方程式的公根,消去法</u>　假設 $x=x_0$ 同時能適合方程式　$f(x)=0$,　$F(x)=0$, 就叫做這二個方程式的**公根**,或**公解**.

如在這二個方程式裏,含有未定係數,我們可以定出係數間的一關係式,使他們有公根.假設他們有公根 x_0,則 $f(x),F(x)$必有公因式 $x-x_0$.就是說用歐氏求 $H. C. F.$ 法,將二式輾轉相除 (§29),最後的餘式應該是零.這不含有 x 的餘式,叫做**結式**,求二式結式的方法,叫做**消去法**.使結式等於零,便是所求的關係式,而爲 $f(x)=0$, $F(x)=0$ 有

公根的條件.

[註] 用歐氏求 $H.C.F.$ 的法子求結式,理最淺近,但手續很繁,應用時總要稍加變化.求結式的法子很多,用行列式求最便,見§247.

【例】求 $f(x)=x^2+px+q=0$, $F(x)=x^2+rx+s=0$ 有公根的條件.

【解】如 $f(x)=0$, $F(x)=0$ 有公根,必定是這一次方程式 $f(x)-F(x)=0$ 的根.解出得 $x=-\dfrac{q-s}{p-r}$,代入 $f(x)=0$ 內,

$$\left(\frac{q-s}{p-r}\right)^2-\frac{p(q-s)}{p-r}+q=\left(\frac{q-s}{p-r}\right)^2-\frac{qr-ps}{p-r}=0,$$

即 $$(q-s)^2=(p-r)(qr-ps).$$

【注意】上面所說的是:如結式等於零, $f(x)=0$, $F(x)=0$ 便有公根.這樣便叫"結式為零"為 $f(x)=0$, $F(x)=0$ 有公根的**充足條件**,意思便是說只要有這條件便够了.

如 $f(x)=0$, $F(x)=0$ 有公根,他們便有公因式.按上面的解釋,可知結式必是零,我們便說"結式為零"是**必要條件**.

既充足而又必要的條件,叫做**充要條件**.關於充要條件,定理和逆定理,必同時成立,不然就不是充要.例如"奇數"是質數(2除外)的必要條件,但不充足,因為奇數未必都是質數.又如一行列式有兩行(列)相等,必定為零(習題二十七第7題(4)),前面一句話是充足條件,但非必

要.

79.<u>方程式變易</u> 假設方程式 $f(x)=0$ 的根是 $x_0,x_1,x_2,\cdots$, 我們要去求出另一方程式,使他以 $\phi(x_0),\phi(x_1),\phi(x_2),\cdots$ 爲根.

作方程式 $y=\phi(x)$, 同 $f(x)=0$ 消去 x, 得出 $F(y)=0$ 便是所求的方程式.

因爲 $F(y)=0$ 的根 $y_0,y_1,\cdots$, 才能使 $y=\phi(x)$, 同 $f(x)=0$ 有公根.但 $f(x)=0$ 的根是 $x_0,x_1,x_2,\cdots$, 所以 $F(y)=0$ 的各根是 $\phi(x_0),\phi(x_1),\cdots$ 內的數.

$f(x)=0$ 的任一根 x_k,如能適合於 $y=\phi(x)$,則因結式爲零,是兩方程式有公根的必要條件,所以 $y_k=\phi(x_k)$ 必定能使結式 $F(y)$ 爲零.

【例一】作以 $f(x)=a_0x^n+a_1x_1{}^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0$ 各根的倒數爲根的方程式.

【解】從 $y=\dfrac{1}{x}$,卽 $x=\dfrac{1}{y}$, 同 $f(x)=0$ 消去 x,再去結果分母.

$$F(y)=a_ny^n+a_{n-1}y^{n-1}+\cdots\cdots+a_1y+a_0=0.$$

【註一】如 $a_0=a_n,\cdots\cdots,a_r=a_{n-r},\cdots$, 或 $a_0=-a_n,\cdots$, $a_r=-a_{n-r}\cdots$,則 $F(y)=0$ 和 $f(x)=0$ 的根全同,可見 $f(x)=0$ 的根兩兩互爲倒數.

【註二】如 $a_n\to 0$, $f(x)=0$ 有一個根 $\to 0$, $F(y)=0$ 有一個

根$\to\infty$.可見最高次項係數$\to$**0**時,便有一根$\to\infty$.

【例二】作一方程式使各根爲$f(x)=0$的減k.

【解】從$y=x-k$,卽$x=y+k$,同$f(x)=0$消去x,得

$$F(y)=a_0(y+k)^n+a_1(y+k)^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0.$$

實際運算,用綜合算法最便,例如欲作一新方程式,使其各根比$f(x)=2x^3-7x^2-3x+1=0$的根少4:

$$\begin{array}{r|rrrr}
4 & 2 & -7 & -3 & +1 \\
 & & 8 & 4 & 4 \\
\hline
 & 2 & +1 & +1 & \mathbf{5} \\
 & & 8 & 36 & \\
\hline
 & 2 & 9 & \mathbf{37} & \\
 & & 8 & & \\
\hline
 & \mathbf{2} & \mathbf{17} & &
\end{array}$$

$$2x^3-7x^2-3x+1$$
$$=2(y+4)^3-7(y+4)^2-3(y+4)+1$$
$$=2y^3+17y^2+37y+5=F(y),$$

就是

$$=2(x-4)^3+17(x-4)^2+37(x-4)+5.$$

用綜合算法的理由,看右邊末後一式,卽可明白,就是用$x-4$陸續除$f(x)$和上次所得的商式,便得各係數.

從末式又可看出$F(y)=F(x-4)=f(x)$,就是變$f(x)$爲含$x-4$的函數.這法顯然可推廣,變$f(x)$爲含$\phi(x)$的函數,只要$\phi(x)$的次數比$f(x)$的低就可以了.

80.<u>重根</u>　由上節例二,可推出一個重要的方法,就是研究$f(x)=0$有無重根$x=a$,幷可斷定相重幾次(這次數叫做重根的級).就是看$f(x)$含

有$(x-a)$的幾次乘方.

【註】不是重根,便叫做單根.

關於重根,有兩個基本問題:(一)證驗$x=a$是不是重根?(二)重根如何求法?看下面的法則.

法則一　要判斷$x=a$是不是$f(x)=0$的重根,可化$f(x)$為$x-a$的函數,如第一次餘式為零,第二次的不為零,便是單根.如第二次的也為零,而第三次的不為零,便是二級重根.照此推去,到第r次餘式為零,而$r+1$次的不為零,便是r級重根.

【例一】證明$x=2$是$f(x)=x^3-x^2-8x+12=0$的重根.

【證】算式如右.可知$x=2$是$f(x)=0$的二級重根.

$$f(x)=(x-2)^2(x+3)=0,$$

$$\therefore\quad x=2,2,-3.$$

$$\begin{array}{c|rrrr}
2 & 1 & -1 & -8 & 12 \\
 & & 2 & 2 & -12 \\
\hline
2 & 1 & 1 & -6 & \mathbf{0} \\
 & & 2 & 6 & \\
\hline
 & 1 & 3 & \mathbf{0} &
\end{array}$$

法則二　欲求$f(x)=0$的重根,可以假設是$x=u$.用綜合除法求出第一次餘式$R_1(u)$,第二次餘式$R_2(u)$,再求$R_1(u)=0$, $R_2(u)=0$的公根.

設　$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_rx^{n-r}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$,

則按餘式定理，　$R_1(u)\equiv f(u)$.

又用上面法則，可求得

$$R_2(u)\equiv f'(u)\equiv na_0u^{n-1}+(n-1)a_1u^{n-2}+\cdots+(n-r)a_ru^{n-r-1}+\cdots+a_{n-1}.$$

算式如下：

$$\begin{array}{llllll|l}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & \\
 & a_0u & a_1u+a_0u^2 & \cdots & a_{n-2}u+\cdots+a_0u^{n-1} & a_{n-1}u+\cdots & \\
\hline
a_0 & a_1+a_0u & a_2+a_1u+a_0u^2 & \cdots & a_{n-1}+a_{n-2}u+\cdots+a_0u^{n-1} & & f(u) \\
 & a_0u & a_1u+2a_0u^2 & \cdots & a_{n-2}u+\cdots+(n-1)a_0u^{n-1} & & \\
\hline
a_0 & a_1+2a_0u & a_2+2a_1u+3a_0u^2 & \cdots & a_{n-1}+2a_{n-2}u+\cdots+na_0u^{n-1} & &
\end{array}$$

由此得

法則三　求 $f(x)$ 被 $x-u$ 除的第二次餘式 $f'(u)$ 即 $R_2(u)$，可用 $f(x)$ 各項指數乘係數，而將各指數減 1，所成的新多項式便是.

【註】$f'(u)$叫做$f(u)$的導微函數.導微函數是微分學裏的一個重要觀念，但這裏所說的，是從狹義(§218).

【例二】求 $f(x)\equiv x^4-4x^3+8x+4=0$ 的重根.

【解】$f(u)\equiv u^4-4u^3+8u+4, f'(u)\equiv 4u^3-12u^2+8$.

$$\begin{array}{r|rrrr|rrrrr|r}
 & 4 & -12 & 0 & 8 & 1 & -4 & 0 & 8 & 4 & 1 \\
 & 1 & & & & 1 & -3 & 0 & 2 & & \\
 & 4 & & & & & -1 & 0 & 6 & 4 & -1 \\
1 & 1 & -3 & 0 & 2 & & -1 & 3 & 0 & -2 & \\
 & 1 & -2 & -2 & & & -3 & -3 & 6 & 6 & \\
-1 & & -1 & 2 & 2 & & & 1 & -2 & -2 & \\
 & & -1 & 2 & 2 & & & & & & \\
 & & 0 & 0 & 0 & & & & & &
\end{array}$$

$H.C.F.\equiv u^2-2u-2\equiv F(u)$.

$F(u)=0$的根是$1\pm\sqrt{3}$,便是$f(x)=0$的重根.

這兩個重根是幾級的,不用法則一去驗,能斷定麼?

我們不難驗明 $f(x)\equiv(x^2-2x-2)^2$.

習題三十三

1. 試從$f(x)=ax^2+bx+c=0$, $F(x)=Ax^2+Bx+C=0$二方程式消去x.

2. 將上題$f(x)=0$, $F(x)=0$二方程式當作含x^2同x的聯立方程式,解出x^2, x,再行消去.

3. 設$f(x)=x^2+x-1=0$,求$F(x)=x^3+2x^2+x+1$的值.

【提示】從$f(x)=0$, $F(x)=k$,消去x.

4. 求作以$f(x)=x^3+px^2+qx+r=0$各根的平方爲根的方程式.

5. 用k乘$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0$的各根,作出的方程式是怎樣? 求$k=-1,\frac{1}{4}$時的特例.

6. 設有$f(x)=2x^4+x^3-4x^2+6x+7=0$,求作方程式,以

(1) $f(x)=0$諸根各加2的數爲根;

(2) $f(x)=0$諸根各被3除的數爲根.

7. 化x^3+9x^2+27爲$x+3$的函數;x同x^2+1的函數.

8. 用一常數乘$f(x)=x^4-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{25}-\frac{1}{48}=0$的諸根,使新方程式首項係數還是1,其他都是整係數.

9. 將$f(x)=0$的各根加減一常數,使新方程式中沒

有 x^2 一項,沒有 x 一項.怎樣才能使他少去絕對項?

(1) $f(x)\equiv x^3+6x^2+9x+10=0$;

(2) $f(x)\equiv x^3-x^2-x-3=0$.

10. 辨別下表裏的條件的種類(充足,必要,或充要):

情形	條件	種類
$x-a$ 是 $f(x)$ 的因式	$f(a)=0$	
$ac=bc$	$a=b$	
A,B 的 H.C.F. 是 D	$AM+BN\equiv D$	
A,B 是互質式	$AM+BN\equiv 1$	
$a+b:a-b=c+d:c-d$	$a:b=c:d$	
$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=k$	$\sum a_1x_1/\sum b_1x_1=k$	
$f(x,y)=0$ 的圖解是直線	$f(x,y)=0$ 是一次的	
$\left.\begin{matrix}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{matrix}\right\}$ 是矛盾的	$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$	
$\left.\begin{matrix}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{matrix}\right\}$ 是獨解的	$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$	

11. 求下列各式的導微函數.

(1) $2x^5-4x^4+x^2-20x$; (2) $x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2$.

12. 證明 $f(x)\equiv x^n-a^n=0$ 不能有重根.

13. 求 $f(x)\equiv x^5-x^4-5x^3+x^2+8x+4=0$ 的重根,是幾級的?

81.<u>高次聯立方程式</u> 假設有二個高次聯立方程式 $f(x,y)=0,\quad F(x,y)=0.$
要解這二方程式,便是求他們的公根.按消去法的理,可以暫將內中的一未知數,譬如說 y,當作未定係數,去求這二方程式的結式,使結式爲零,便得一不含 x 只含 y 的方程式.解出 y,代入原方程式,求出公根,和代入的 y 值,合成各組的解.對於二個以上的聯立方程式,也可依同法推廣去求.

由此可知**高次聯立方程式,可變爲一元高次方程式解決**.依結式的性質,并能證明幾個方程式公解組數(包括雜根,等根,無窮大根)正同他們次數的乘積相等,但理論很繁,本書不能討論,只好待到高等代數裏研究.

在理論上看來,聯立方程式的解法問題,可算完全解決,但實際上的運算很繁,本書所論,只限於能用特殊方法處理,而歸於二次方程式解決的.

82.<u>代入法</u> 如果聯立方程式

$$f(x,y)=0 \qquad F(x,y)=0$$

中有一個是一次的,便可解出一未知數,代入他方程式,得一個一元高次方程再解.

【例一】解聯立方程式:　$2y-3x=1,$　(1)

$$13x^2-8xy+3=0.\qquad(2)$$

【解】就(1)解出 y,得　$y=\frac{1}{2}(3x+1)$　(3)

代入(2)　$13x^2-4x(3x+1)+3=x^2-4x+3=0$　(4)

解(4)便有　$x=1,3$;由(3)得 $y=2,5$.

卽得兩組解:　$x,y=1,2$ 或 $3,5$.

【注意】要取相當的值,配成各組解,譬如 3 不能和 2 相配,不然就有 4 組解答了.

原來的方程式,雖都不是一次,但可分解成一次因式,也可依上法求解.

【例二】解聯立方程式　$3x^2-32y^2+5=0,$　(1)

$$2x^2+4xy+2y^2+3x+3y-2=0\qquad(2)$$

【解】分解(2)爲　$[2(x+y)-1][x+y+2]=0,$　(3)

將 $2(x+y)-1=0$ 同(1)聯立,得解 $x,y=1,\ -\frac{1}{2};\ \frac{3}{29},\ \frac{23}{58}$.

將 $x+y+2=0$ 同(1)聯立,得解 $x,y=-3,1;-\frac{41}{29},-\frac{17}{29}$.

這便是(1),(2)的一切解答.

【註】由這個特例,可明白 §81 所說解答組數的道理.

在 $f(x,y)=0,\ \ F(x,y)=0$ 的最高次各項,有公

因式時,公解的組數表面上要減少.其實是幾組解,變爲 ∞ 了.看下面的例子,便可明白.

【例三】解聯立方程式 $y-mx=0$, (1)

$y^2-x^2+2x+2y+4=0$. (2)

【解】消去 y 得 $(m^2-1)x^2+2(m+1)x+4=0$. (3)

(一)如 $m^2-1\neq 0$, (3)有兩個根,代入(1)得兩組解.

(二)如 $m\to 1$, 則 $m^2-1\to 0$ 而 $m+1\neq 0$. 由(3)只得一個有限根,代入(1)得一組解.他一組解是無窮大 (參看§79例一的註二).

注意在這時(1)的最高次各項 $y-x$ 和(2)的最高次各項 x^2-y^2 有公因式 $y-x$. 但和低一次的各項 $2x+2y$ 沒有公因式.

(三)如 $m\to -1$, 則 $m^2-1\to 0$, 且 $m+1\to 0$. (3)便變爲矛盾式,我們可以說兩組解都變爲無窮大.

注意這時(1)的最高次各項 $y+x$ 和(2)的最高次各項 x^2-y^2, 次高各項 $2x+2y$, 都有公因式.

習題三十四

1. 假設齊次方程式 $f(x,y)=0$, $F(x,y)=0$ 的次數,各爲 m, n, 幷分成一次因式,證明其有 mn 組公解.

解下面的各組聯立方程式:

2. $\begin{cases} 2x^2-xy-3y=0, \\ 7x-6y-4=0. \end{cases}$　3. $\begin{cases} x+y=a, \\ xy=b. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=1, \\ x+y=0. \end{cases}$　5. $\begin{cases} y^2-x^2+2x+2y=0. \\ y+x=0. \end{cases}$

6. 求定 m 和 c 的值,使聯立方程式

$$x^2+xy-2y^2+x=0, \qquad y=mx+c$$

的兩組解都→∞

7. 證明 $2x-y+4$ 是 $2x^2+xy-y^2+10x+y+12$ 的因式.

83. <u>加減法</u>　有時 $f(x,y)=0$, $F(x,y)=0$ 雖都不是一次方程式,但可用常數乘過再加減得出一個一次方程,或可以分解成一次因式的.

【例一】解聯立方程式　$3x^2+6xy-x+3y=0$　(1)

$$2x^2+4xy-2x-y+2=0 \qquad (2)$$

【解】用 2 乘(1), 3 乘(2)相減,便消去一切二次項,得

$$4x+9y-6=0 \qquad (3)$$

再取(1)(3)聯立,便得兩組解: $x,y=-3,2,;\ -2,\frac{14}{9}$.

【註】我們所以能同時消去高次各項,就是因爲他們有公因式.故解的組數不如 §81 裏所說的多(參看上節例三前的解釋).

【例二】解聯立方程式　$2x^2-5xy-3y^2=36,$　(1)

$$2x^2-11xy-6y^2=60 \qquad (2)$$

【解】用 5 乘(1),3 乘(2),再相減,得

$$4x^2+8xy+3y^2=(2x+y)(2x+3y)=0. \qquad (3)$$

將 $2x+3y=0$ 同(1)聯立,得解 $x,y=3,-2;-3,2.$

將 $2x+\ y=0$ 同(1)或(2)聯立,都能得到矛盾的結果 $36=0$ 或 $60=0$.這就是表示一組無窮大的解.

【註】注意 $2x^2-5xy-3y^2$, $2x^2-11xy-6y^2$ 有公因式 $2x+y$.

【又解】設 $y=kx$, 代入(1)和(2),再相除,便有

$$x^2(2-5k-3k^2)/x^2(2-11k-6k^2)=36/60=3/5,$$

即 $$3k^2+8k+4=(k+2)(3k+2)=0, \quad k=-2,\ -\frac{2}{3}.$$

這種解法的道理,和上面的一樣麼?

【例三】解聯立方程式 $$x^2+2xy+2y^2+3x=0, \quad (1)$$
$$xy+y^2+3y+1=0. \quad (2)$$

【解】用 2 乘(2),加(1),即得

$$(x+2y)^2+3(x+2y)+2=[(x+2y)+1][(x+2y)+2]=0. \quad (3)$$

將 $x+2y+1=0$ 和(2)聯立,得

$$x,y=-3+2\sqrt{2},1-\sqrt{2};-3-2\sqrt{2},1+\sqrt{2}.$$

將 $x+2y+2=0$ 和(2)聯立,得

$$x,y=-3+\sqrt{5},\frac{1-\sqrt{5}}{2};-3-\sqrt{5},\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

【例四】解聯立方程式 $$x^2+y^2-3x-y=0, \quad (1)$$
$$10x^2+5y^2-27x-4y+5=0. \quad (2)$$

【解】從(2)中減去5乘(1),便消去y^2,而有

$$5x^2-12x+y+5=0,\qquad \therefore y=-5x^2+12x-5. \quad (3)$$

代入(1)中,得 $$5x^4-24x^3+40x^2-27x+6=0. \quad (4)$$

按§39方法,得(4)的有理根$x=1, 2$.

分解因式,有 $$(x-1)(x-2)(5x^2-9x+3)=0, \quad (5)$$

$$\therefore \quad x=1, 2, \ \frac{1}{10}(9\pm\sqrt{21}),$$

代入(3),得 $$y=2, -1, \frac{1}{10}(7\pm3\sqrt{21}).$$

84.相除法　假設有一組聯立方程式

$$AB=CD, \quad (1) \qquad B=D. \quad (2)$$

用(2)的兩邊除(1)的兩邊,得　$A=C.$　(3)

將(2)(3)聯立,便得一部份的公解,除此外還有$B=0$, $D=0$ 的公解,也顯然能適合於(1)和(2).這些公解,很容易疏忽而失去,不可不留心.

注意在這一種聯立方程式,往往合於在§83 裏例三前所說的情形,而有無窮大的解.

【註】如B, D有一是常數,或$B=0, D=0$是矛盾的,用這法時,不至忽略有限值的公解.

【例一】解聯立方程式 $x^3-y^3=63$, (1) 和$x-y=3$ (2)

【解】用(2)兩邊除(1)兩邊得 $$x^2+xy+y^2=21 \quad (3)$$

又由(2)有 $$y=x-3, \quad (4)$$

代入(3),幷化簡 $\quad 3(x^2-3x-4)=3(x-4)(x+1)=0.\qquad(5)$

$$\therefore\quad x,y=4,1;\ -1,\ -4.$$

在此例 $D=3$ 是常數,所以未失去有限值的解.再看 $x-y$ 是 x^3-y^3 的因式,可知有無窮大的公解.

【例二】解聯立方程式 $\quad (x+y)^2(x-y)=3xy+6y.\qquad(1)$

$$x^2-y^2=x+2\qquad(2)$$

【解】用(2)兩邊除(1)兩邊,得 $\quad x+y=3y\qquad(3)$

將(2),(3)聯立,得一部份公解

$$x,y=\frac{2}{3}(1\pm\sqrt{7}),\frac{1}{3}(1\pm\sqrt{7}).$$

還有由 $x^2-y^2=0,x+2=0$ 所定的公解 $x,y=-2,2;-2,-2.$ x^2-y^2 是 $(x+y)^2(x-y)$ 的因式,所以有無窮大的解.

【例三】解聯立方程式 $\quad y^2-3xy+2xy^2=6x\qquad(1)$

$$x^2-y^2=-5y\qquad(2)$$

【解】這組方程式顯然有 $x,y=0,0$ 的解,又有無窮大解.現在再求其他的有限值解,可用(2)除(1),得

$$(x-2y)/(x+y)=6x/(-5y),\text{卽}(3x-2y)(2x+5y)=0.\qquad(3)$$

將 $3x-2y=0$ 同(2)聯立,得 $\quad x,y=0,0;6,9.$

將 $2x+5y=0$ 同(2)聯立,得 $\quad x,y=0,0;\frac{50}{21},\ -\frac{20}{21}.$

注意 $x,y=0,0$ 的一組解,原已由觀察得出,當求得(3)的時候,我們必須假設 $x\neq0,y\neq0$.在這種限制下,自然不應有 $x,y=0,0$ 的解,換句話說,就是這組解是由於觀察

得來的,并只有一組,而非從第二步解法得出,也沒有二組.

習題三十五

解下列的聯立方程式:

1. $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2+4x+3y-1=0, \\ 2x^2-6xy+y^2+3x+2y-3=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ xy=b. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2+4y^2=(x+2y-1)^2, \\ 4x^2+9y^2=(2x-3y+2)^2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2-3xy-10y^2=32, \\ x^2-xy-6y^2=24. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=3, \\ (x-y)^2+(x+2y)^2=10. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2=ax+by, \\ y^2=ay+bx. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=21(x-y), \\ xy=20. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2+y-8=0, \\ y^2+15x-46=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=21, \\ x^2+xy+y^2=7. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^3-y^3+3y(x+1)=0, \\ x^2+xy+y^2=x+1. \end{cases}$

11. $x^2+2xy+y^2=x,\quad x^2-y^2=6y.$

12. $x^2+y^2=2xy+16,\quad xy(xy-11)=12.$

【提示】從第二方程解出xy,再同第一方程聯立.

*85.對稱性的聯立方程,代換法 (一)聯立方程$f(x,y)=0$, $F(x,y)=0$左邊都是對稱整式,按§74的理便知這些對稱式,可以$p=x+y$,$q=xy$的整式表出.從含p,q的聯立方程式消去p或q所得的結式,次數常較從$f(x,y)=0$, $F(x,y=0$消去x或y所得的次數要低些,所以先求p,q,比較容易.再按§73可知x, y是二次方程$x^2+px+q=0$的根,所以

$$x=\frac{1}{2}(p\pm\sqrt{p^2-4q}),$$

$$y=\frac{1}{2}(p\mp\sqrt{p^2-4q}).$$

又因 $x+y=p$,

$$x-y=\pm\sqrt{(x+y)^2-4xy}=\pm\sqrt{p^2-4q}.$$

可見代換式 $x+y=2u,\quad x-y=2v,$

---

*§§85,86和習題三十六,可以酌量略去.

即是　　$x=u+v,\quad y=u-v,$

效用也同,但計算上總很繁,不及上法簡便.

【例一】解聯立方程式　$x^2-x^2y^2+y^2=19,$　(1)

$x-xy+y=4.$　(2)

【解】令 $x+y=p$, $xy=q$, 則(1),(2)兩式變爲

$$p^2-2q-q^2=19, \quad (3) \qquad p-q=4 \quad (4)$$

由(4)得 $p=q+4$,代入(3),化簡便有 $q=\frac{1}{2}$,而 $p=4\frac{1}{2}$.

$$\therefore\ x+y=\frac{9}{2}, \qquad xy=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\ x=\frac{1}{2}\left[\frac{9}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2-4.\frac{1}{2}}\right]=\frac{1}{4}(9\pm\sqrt{73}), y=\frac{1}{4}(9\mp\sqrt{73}).$$

【註】在(2)中最高次項 $-xy$ 是(1)中的最高次項的因式,所以有無窮大的解.

【又解】令 $x=u+v$, $y=u-v$, 代入(2)得

$$2u-(u+v)(u-v)=4 \quad 即 \quad v^2=4-2u+u^2 \qquad (5)$$

對於(1)用同一代換,再按(5)化簡,便得　$u=\frac{9}{4}$.

$$\therefore\ v=\pm\sqrt{4-2\cdot\frac{9}{4}+\left(\frac{9}{4}\right)^2}=\pm\sqrt{4-\frac{9}{2}+\frac{81}{16}}=\pm\frac{\sqrt{73}}{4}.$$

$$\therefore\ x=\frac{1}{4}(9\pm\sqrt{73}), \qquad y=\frac{1}{4}(9\mp\sqrt{73}).$$

(二)如果二方程式成一對稱組;就是說將 x,y 對換時,二方程式也對換.這種聯立方程,和上節所說的,有一種相同特性;即如有一組解

$x=a$, $y=b$, 而 $a\neq b$, 則必又有一組根 $x=b$, $y=a$. 但是他的解法卻不能同前一種的有定法.普通常可用加減法.

【例二】求解 $x^3=7x+3y$, (1) $y^3=7y+3x$ (2)

【解】(1)加(2),得 $(x+y)(x^2-xy+y^2-10)=0$. (3)

從(1)減(2),得 $(x-y)(x^2+xy+y^2-4)=0$ (4)

將(3),(4)內因式相配求解,便有九組解答:

$$x,y=0,0;\ 2,-2;\ -2,2;\ \pm\sqrt{10},\mp\sqrt{10};$$

$$\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{13}),\ \frac{1}{2}(1\mp\sqrt{13});\ \frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{13}),\ \frac{1}{2}(-1\mp\sqrt{13}).$$

86.<u>多元聯立方程式</u> 多元聯立高次方程式,解法往往很繁,只有能用特法處理的,才簡易些.

【例一】解聯立方程式: $(y+z)(x+y+z)=4$, (1)

$(z+x)(x+y+z)=6$, (2)

$(x+y)(x+y+z)=8$. (3)

【解】(1)加(2)加(3), $2(x+y+z)^2=18$. (4)

$\therefore\ x+y+z=\pm3$. 代入(1),(2),(3)得

$y+z=\pm\frac{4}{3}$, (5) $z+x=\pm2$, (6) $x+y=\pm\frac{8}{3}$. (7)

$$\therefore\ x,y,z=\frac{5}{3},\ 1,\ \frac{1}{3};\ -\frac{5}{3},\ -1,\ -\frac{1}{3}.$$

【例二】解 $xy=6$, (1) $yz=8$, (2) $zx=12$. (3)

【解】(1)乘(2)乘(3),再兩邊開方，　$xyz=\pm 24$　(4)

用(1),(2),(3)各除(4),得　$x,y,z,=4,\ 3,\ 2;\ -4,\ -3,\ -2.$

習題三十六

解下列各聯立方程式:

1. $\begin{cases} x^5+y^5=32, \\ x+y=1. \end{cases}$　**2.** $\begin{cases} x^4+y^4-(x^2+y^2)=72, \\ x^2+x^2y^2+y^2=19. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y=8xy, \\ x^2+y^2=40x^2y^2. \end{cases}$　**4.** $\begin{cases} x^2+3xy+y^2+2x+2y=8, \\ 2x^2+2y^2+3x+3y=14. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^3=5y, \\ y^3=5x. \end{cases}$　**6.** $\begin{cases} x^2+y=\frac{8}{3}, \\ x+y^2=\frac{34}{9}. \end{cases}$　**7.** $\begin{cases} x^2y=a, \\ xy^2=b. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x(y+z)=12, \\ y(z+x)=6, \\ z(x+y)=10. \end{cases}$　**9.** $\begin{cases} x^2-(y+z)^2=a^2, \\ y^2-(z+x)^2=b^2, \\ z^2-(x+y)^2=c^2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=7, \\ y^2+yz+z^2=1, \\ z^2+zx+x^2=3. \end{cases}$　**11.** $\begin{cases} yz=a(y+z)+p, \\ zx=a(z+x)+q, \\ xy=a(x+y)+r. \end{cases}$

12. $\dfrac{y+z}{a}=\dfrac{z+x}{b}=\dfrac{x+y}{c}=xyz.$

13. $$\frac{1}{2}\ \frac{x+y+xy}{x+y-xy}=\frac{1}{3}\ \frac{3(y+z)+yz}{3(y+z)-yz}$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{z+x+2xz}{z+x-2xz}=1.$$

87.多元消去法 從 n 個獨立聯立方程,可以消去 $n-1$ 個未知數,方法因題而異,幷無一定.

【例一】試從下列各方程式內,消去 x,y(式內 $a \neq c$):

$ax^2+bxy+cy^2=1$, (1) $cx^2+bxy+ay^2=1$ (2) $x+y=1$ (3)

【解】從(1)減(2),得 $(a-c)(x^2-y^2)=0$.

但 $a \neq c$, $\therefore$ $x^2-y^2=0$, $x=\pm y$.

$x=-y$ 不合於(3),用 $x=y$ 代入(3),即得 $x=y=\frac{1}{2}$,

$$\therefore \quad a\left(\frac{1}{2}\right)^2+b\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+c\left(\frac{1}{2}\right)^2=1 \text{ 即 } a+b+c=4.$$

【例二】試從下列各方程式消去 k 和 l:

$kx+ly=a$, (1) $lx-ky=b$, (2) $k^2+l^2=1$ (3)

【解】將(1),(2)各取平方相加,再按(3)的關係式,便有

$$(k^2+l^2)(x^2+y^2)=x^2+y^2=a^2+b^2.$$

【例三】從 $x+y+z=a$, $x^2+y^2+z^2=b^2$, $x^3+y^3+z^3=c^3$, $xyz=d^3$ 四種方程式裏,消去 x, y, z.

【解】$\because$ $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$,

$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(\sum x^2-\sum xy)+3xyz$,

故令 $x+y+z=p$, $xy+yz+zx=q$, $xyz=r$,

則原來的方程式,各變爲

$$p=a,\ p^2-2q=b^2,\ p(p^2-3q)+3r=c^3,\ r=d^3.$$

$$\therefore \quad p=a; \quad q=\frac{1}{2}(p^2-b^2)=\frac{1}{2}(a^2-b^2), r=d^3.$$

代入第三個方程式化簡,便有 $a^3-3ab^2+2c^3-6d^3=0$.

【例四】從 $ll'=a\quad mm'=b,\quad nn'=c,$

$$mn'+m'n=2f,\quad nl'+n'l=2g,\quad lm'+l'm=2h$$

諸方程式間,消去 l, l', m, m', n, n'.

【解】將後面的三個方程式兩端連乘,即有

$$\begin{aligned}8fgh&=ll'(m^2n'^2+m'^2n^2)+mm'(n^2l'^2+n'^2l^2)\\&\qquad+nn'(l^2m'^2+l'^2m^2)+2ll'mm'nn'\\&=ll'(mn'+m'n)^2+mm'(nl'+n'l)^2\\&\qquad+nn'(lm'+l'm)^2-4ll'mm'nn'\\&=4af^2+4bg^2+4ch^2-4abc.\qquad(1)\end{aligned}$$

【註】要 $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ 能分解成兩個一次因式 $lx+my+n, l'x+m'y+n'$, 由比較係數,便得本題,所以(1)式爲零,便是那二次式能分解的條件.

【注意】題裏的六個方程式不是獨立的,否則只能從六個方程式消去五個未知數.

88. 應用題 【例一】以每秒60市尺的速度,向上拋一物體,問在什麼時候能達到60市尺高的地方? 如果上拋的速度是每秒30市尺,他能達到30市尺高的地方麼?

【解】假設所求的時間是 t, 則 $s=vt-\frac{1}{2}gt^2$.

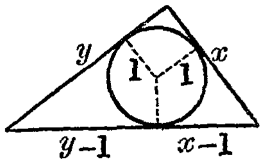
$g=$ 每平方秒9.8公尺 = 每平方秒29.4市尺.

(1) $60=60t-14.7t^2,\qquad \therefore\ t=1.8$ 秒或 2.3 秒.

這兩個答案,各爲物體先升後降時經過60市尺地方的時間.

(2) $30=30t-14.7t^2$ 沒有實根,就是不能達30市尺高.

【例二】一直角三角形的面積是6,內切圓半徑是1,求周界.



【解】假設兩腰的長是 x 和 y,則其斜邊應長　$x+y-2$.

由二種求三角形面積法的公式得

$$\frac{1}{2}xy=6,\quad 1\cdot\frac{1}{2}[x+y+(x+y-2)]=6,$$

即　$xy=12,\quad x+y=7.$

所以 x,y 是　$u^2-7u+12=0$

的根.但是在本題裏,只要求　$p=2(x+y)-2,$

即周界長是 $2\cdot7-2=12$,而各邊長爲3, 4, 5.

【例三】在直角平分線上一點 p,作一直線使他被直角兩邊所截的一段,長度爲 k,求這線截直角兩邊的長.

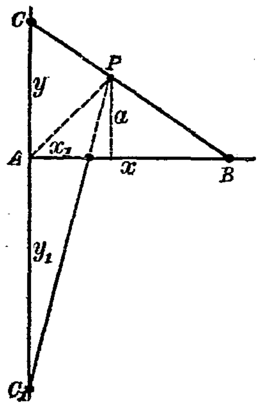
【解】令已知點 p 到直角兩邊的距離爲 a,所求的兩截段的長各爲 x 和 y,則

$$x^2+y^2=k^2 \qquad (1)$$

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}ay=\frac{1}{2}xy,$$

即

$$a(x+y)=xy. \qquad (2)$$



命 $x+y=u, xy=v$, 則有

$u^2-2v=k^2,\quad au=v.$

消去 v, 得 $u^2-2au-k^2=0$.

$\therefore\quad u=a\pm\sqrt{a^2+k^2},$

$v=a[a\pm\sqrt{a^2+k^2}].$

故 x, y 是下列二次方程式的根:

$$X^2-(a\pm\sqrt{a^2+k^2})X$$
$$+a[a\pm\sqrt{a^2+k^2}]=0 \quad (3)$$

按原題題意, x, y 都應當為正,所以在(3)中係數內根號應取正號,并且應有

$$D\equiv(a+\sqrt{a^2+k^2})^2-4a(a+\sqrt{a^2+k^2})$$
$$\equiv k^2-2a^2-2a\sqrt{a^2+k^2}\geqq 0,$$
$$k^2-2a^2\geqq 2a\sqrt{a^2+k^2}, \text{解得}\quad k\geqq 2\sqrt{2}a,$$

就是說 k 的長,不能短於 $2\sqrt{2}a$.

如取根號前負號,則 x, y 值一正一負,應怎樣解釋?

習題三十七

1. 求從 $x+y=a, x^2+y^2=b^2, x^3+y^3=c^3$ 中消去 x, y.

2. 求從 $ax+bxy=c+dy, ay+byz=c+dz$,

$az+bzx=c+dx$ 中消去 x, y, z.

3 求從$\frac{x+y}{a^2}=\frac{y+z}{b^2}=\frac{z+x}{c^2}$, $xy+yz+zx=0$
中消去x, y, z.

4. 求從$x^2+yz=a, y^2+zx=b, z^2+xy=c$
及 $x^2+y^2+z^2=2d$中消去x, y, z.

5. 路燈二盞,各裝在2丈高而相隔10丈的柱上,如一盞的光3倍於他一盞,問在路上什麼地方,照度相等?

【註】照度和隔光源的距離平方成反比例.

6. 以每秒1000市尺的速度向上射出一彈,過2秒後再射出一彈.問何時兩彈相遇? 在高度幾市尺的地方?

7. 在20市丈高的塔上,平放一鎗,如射出的速度是每秒1000市尺,問彈子落地處隔塔是多少遠?

8. 有半徑為r的圓,求其內接等腰三角形各邊的長.

(1) 已知底邊和底上的高等長;

(2) 已知底邊等於腰長的一半.

9. 有半徑為r的圓,他的外切等腰梯形面積比圓面積大兩倍,求梯形各邊的長.

第七章摘要

本章授下列各項:

二次方程式解法: 準二次方程.

虛數,雜數.	公根,消去法.
根的性質.	方程式變易,重根.
根和係數關係.	高次聯立式.
根的對稱式,應用.	應用問題.

1. 二次方程式$ax^2+bx+c=0$的兩個根是

$$x_1=\frac{1}{2a}(-b-\sqrt{b^2-4ac}),\quad x^2=\frac{1}{2a}(-b+\sqrt{b^2-4ac}).$$

2. 虛數單位是$i=\sqrt{-1}$,就是$i^2=1$.

3. 虛數實數不能相合相消.聯兩種數所成的數,如$a+bi$,叫做雜數.

4. 二次方程式根的虛,實,等,異,看判別式$b^2-4ac \gtreqless 0$而定.

5. 根和係數關係是 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$.

6. 二次方程式兩根的對稱函數,可用係數的整式或分式表出.

應用:可作已知數爲根的方程式.

7. 可化爲二次方程式求解的高次方程式,叫做準二次方程.最重要的是一部份的倒數方程式和二項方程式.

8. 用歐氏方法,求 $f(x)$, $F(x)$ 的 H. C. F. 所得最後的餘式,叫做結式,求法叫做消去法.

9. 結式爲零,是$f(x)=0$,$F(x)=0$有公根的充要條件.

10. 應用消去法可(1)作方程式變易,(2)求重根.

11. 高次聯立方程式可化爲一元高次方程式再解.

12. 高次聯立方程式有(1)代入法,(2)加減法,(3)相除法,(4)代換法等等特殊解法.

第八章

不等式

89.<u>數量的比較</u>　表示兩個數量大小關係的,叫做不等式.不等的記號是$\neq$,如果要表出大小的向來,可用符號"$>$"和"$<$",開口處對大數.

【例】$4>2$, $-3<-2$, $m\neq n$.

有a, b二數,如(一)$a-b>0$,則$a>b$;

(二)$a-b<0$,則$a<b$.

這是比較兩數量大小的基本判別.

90.<u>不等式運算一:加減法</u>　(一)遞較定理.

如$a>b$,且$b>c$,　則　$a>c$.

證　$\because\ a-b>0,\quad b-c>0;$

$\therefore\ a-c=(a-b)+(b-c)>0,$

即　$a>c$.

推論　如$a_1>a_2, a_2>a_3, \cdots a_{n-1}>a_n$,則$a_1>a_n$.

因　$a_1-a_n=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)>0$.

【註】由此可知要證一羣的量,都小於某量,只要證明羣內最大量小於那量就够了.

(二)加減定理. 如 $a>b$, 則 $a\pm c>b\pm c$.

證 $\because (a\pm c)-(b\pm c)=a-b>0$,

$\therefore a\pm c>b\pm c$.

(三)移項定理. 如 $a+b>c+d$, 則

$a+b-d>c$, 又 $a>c+d-b$.

證 $\because (a+b)-d>(c+d)-d$, (定理二)

$\therefore a+b-d>c$.

同理可證 $a>c+d-b$.

【註】由此可知,任何不等式都可將各項移於一邊,使他一邊爲 0, 如右形: $A>0$ 或 $A<0$.

推論 如 $a>b$, 則 $-a<-b$.

也可直接證明如下: $a-(a+b)>b-(a+b)$,

$\therefore -b>-a$, 卽 $-a<-b$.

(四)同向不等式和定理. 如

$a_1>b_1, a_2>b_2$, 則 $a_1+a_2>b_1+b_2$.

證 因爲 $(a_1+a_2)-(b_1+b_2)=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)>0$.

推論. 如 $a_1>b_1, a_2>b_2, \cdots\cdots a_n>b_n$, 則

$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n>b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n$.

91.關於加減的不定情形 注意下面所說

的不定情形:

(一)如 $a_1>b$, $a_2>b$, 則 a_1 同 a_2 的大小,不能斷定.

【例】 $5>2$, $4>2$, 而 $5>4$;

$3>2$, $4>2$, 而 $3<4$.

(二)異向不等式的和,不能斷定大小.

【例】 $6>4$, $8<9$, 而 $6+8>9+4$;

$6>4$, $8<10$, 而 $6+8=10+4$;

$6>4$, $8<11$, 而 $6+8<11+4$.

(三)同向不等式的差,不能斷定大小.

【例】 $13>6$, $9>3$, 而 $13-9>6-3$,

$13>6$, $9>2$, 而 $13-9=6-2$;

$13>6$, $9>1$, 而 $13-9<6-1$.

習題三十八

1. 說明: 正數絕對值大的,數值就大,負數絕對值大的,數值反小.

2. 說明: $|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$.

3. 一常數加一正值而可為零的變數,在什麼時候,他們的和最小? 如由常數減去這變數,在什麼時候,他們的差最大? 結論與這常數的是正是負有關係麼?

4. 證明: 如 $a>b$,則 $k-a<k-b$.

5. 證明：異向不等式的差,是一個與被減式同向的不等式.

6. 如 $a>b+d$, $c>d>e$, 則 $a>b+e$. 又 a 能和 $b+c$ 比較麼?

7. 如 $a>b$, $c<d$, $b-d>k$, 問 $a-d$, $b-c$ 和 k 的大小如何? 我們能斷定 $a-d$ 同 $b-c$ 的大小麼?

8. 如 $a<b<c$ 且 $c-a<p-q$, 求定 $q-a+b$, p, q 三個數的大小.

92. 不等式運算二:乘同除　**(一)乘法定理.**

如 $a>b$,而

$$(1)\ c>0,\quad 則\ ac>bc;$$

$$(2)\ c<0,\quad 則\ ac<bc.$$

證　(1) 因 $c>0$ 且 $a-b>0$.

$\therefore\quad ac-bc=c(a-b)>0$, 即 $ac>bc$.

(2) 與 (1) 相同.

推論一.　**如 $a>b$,而 (1) $c>0$, 則 $a/c>b/c$;**

(2) $c<0$, 則 $a/c<b/c$.

推論二.　**如 $a/b>c/d$,而 (1) $bd>0$, 則 $ad>bc$;**

(2) $bd<0$, 則 $ad<bc$.

用 bd 乘不等式兩邊,即能證明.

(二)代換定理. 如 $a>bc, b>0, c>d$, 則

$$a>bd.$$

證 $\because c>d,\ b>0,\ \therefore bc>bd,$

又原設 $a>bc,\qquad \therefore a>bd.$

(三)同向不等式積定理. 正數同向不等式的乘積,成為一不等式,向也不改.

證 設 $a_1>b_1,\ a_2>b_2$ 都是正數,則

$$a_1a_2-b_1b_2=(a_1a_2-b_1a_2)+(b_1a_2-b_1b_2)$$
$$=a_2(a_1-b_1)+b_1(a_2-b_2)>0,$$
$$\because\ a_2>0, b_1>0, a_1-b_1>0, a_2-b_2>0.$$

所以有 $a_1a_2>b_1b_2,$

【注意】只要 a_2 同 b_1 或 a_1 同 b_2 爲正,結果便能成立.

推論一. 如有正數不等式 $a>b, c<d$, 則

$$a/c>b/d.$$

推論二. 如 $a_1>b_1, a_2>b_2, \cdots a_n>b_n$, 各數都是正數,則 $a_1a_2\cdots a_n>b_1b_2\cdots b_n.$

93.不等式運算三:冪同根 (一)乘方定理. a, b 都是正數,而 $a>b$, 則 $a^n>b^n$.

這條定理是上節定理(三)推論的特例.

(二)方根定理. 將正數不等式 $a>b$ 兩邊開

n 次方根,主根成同向的不等式.

證　如果 $\sqrt[n]{a}\ngtr\sqrt[n]{b}$, 即 $\sqrt[n]{a}\leqslant\sqrt[n]{b}$,

按(一)得　$a\leqslant b$,　和假設矛盾.

$$\therefore\ \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}.$$

這便是幾何裏的歸謬證法.

特例　平方根的情形,最爲重要.

$x^2<a$		$x^2>a$	
$a>0$	$a\leqslant 0$	$a>0$	$a\leqslant 0$
$-\sqrt{a}<x<+\sqrt{a}$	x 沒有實數值可合	$x>+\sqrt{a}$ 或 $x<-\sqrt{a}$	x 是任何實數值,都能合

94. 關於乘,除,冪,根的不定情形　(一)異向不等式相乘,積的大小,不能斷定.

【例】　$3>2$,　$4<5$,　而 $3.4>2.5$;

$3>2$,　$4<6$,　而 $3.4=2.6$;

$3>2$,　$4<7$,　而 $3.4>2.7$.

(二)同向不等式相除,商的大小,不能斷定.

【例】　$28>12$,　$7>4$,　而 $28/7>12/4$;

$28>12$,　$7>3$,　而 $28/7=12/3$;

$28>12$,　$7>2$,　而 $28/7<12/2$.

(三)兼含正負數的不等式,冪的大小不定.

【例】 $4>-2$,而$4^2>(-2)^2$;$4>-5$,但$4^2<(-5)^2$.

(四)不等式兩邊開方,如沒有主根的限制,結果的大小不定.

【例】 $9>4$, 而$3>2$, $-3<2$.

習題三十九

1. 如$a/b>c/d$,不拘 b 和 d 是不是同號,總有 $abd^2>cb^2d$.

2. 兩邊都是負數的同向不等式,奇數個相乘,得同向的不等式;偶數個相乘,便得異向的.

3. 兩邊不都是正數或負數的同向不等式,乘積的大小能斷定麼? 試用實例說明.

4. 分數的分母增大,分子減小,他的值怎樣? 分母分子同加或同減一數,他的值怎樣?

5. 用不等式$c>d$的兩邊除等式$a=b$的兩邊,試討論結果的向.

6. 設$m>n$,如正數$a<1$,則$a^m<a^n$,.如$a>1$,則$a^m>a^n$.

7. 設$m>n,a>b>1$,證明$a^m>b^n$.

   a^n和b^m的大小能斷定麼? 用例子來說明.

8. 設$m>n,1>a>b>0$,證明$a^n>b^m$.

   a^m和b^n的大小能斷定麼? 用例子來說明.

95.兩種不等式 前面說過,等式有兩種,即

恆等式和方程式,不等式也有絕對不等式和條件不等式的區別.不等式裏的文字,不論代表什麼實數時,不等的關係,都能成立的,就叫做絕對不等式.如果必須式內文字,是在某範圍裏的數值,才能適合的,便是**條件不等式**,這範圍叫做他的解.

絕對不等式,要加證明,條件不等式,應當求解.這是我們要分別研究的問題.

【例】 $x^2+1>0$ 是絕對不等式,因為不論 x 代表什麼實數,這不等式都能成立.

要 $x^2-1=(x+1)(x-1)<0$, 必須兩個因式的值是異號數,卽 $-1<x<+1$, 所以他是條件不等式, $-1<x<+1$ 是解.

96. <u>絕對不等式證法</u> 絕對不等式的主要證法,就是**將各項移到不等號一邊**〔§90(三)註〕,**再將這一邊的式子,變為若干同號的平方和**,便可證明.這法也是最直接的方法,此外尚有幾種間接方法,都一一就例子說明.

由這證法,便可知道絕對不等式內文字,限於代表實數,不比恆等式內文字,也能表虛數或

雜數;一有虛數或雜數,就是能化成平方和,他的值還是不能有定號.

【例一】設$a>b>0$,試證$\frac{1}{2}(a+b)>\sqrt{ab}$. (1)

【證】 $$\frac{1}{2}(a+b)-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(a-2\sqrt{ab}+b)$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0,$$
$$\therefore \frac{1}{2}(a+b)>\sqrt{ab}.$$

【又證】如果(1)能成立,便可依次推得
$$(a+b)^2>4ab,$$
$$a^2+2ab+b^2-4ab>0,$$
$$(a-b)^2>0.$$
末式能成立,各步又都可逆,所以可反推得本題.

【註】這種逆證法,是常用的.

【又證】由恆等式 $$\frac{a}{\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}$$
的兩邊各減去1,得 $$\frac{a-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{ab}-b}{b}.$$
但$a>b>0$,故 $$\sqrt{ab}>b.$$
$$\therefore \quad a-\sqrt{ab}>\sqrt{ab}-b,$$
$$\therefore \quad \frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$$

【例二】如$\frac{x}{a}\neq\frac{y}{b}\neq\frac{z}{c}$,則

(1) $\sum a^2\cdot\sum x^2>(\sum ax)^2$,

(2) $\Sigma a^2\cdot\Sigma x^2>(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2$.

【證】 $\because\ \Sigma a^2\cdot\Sigma x^2-(\Sigma ax)^2$

$$\equiv(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2,$$

所以(1),(2)都是絕對不等式.

*97.兩個重要的定理 **定理一.** 在分數

$$a_1/b_1,\ a_2/b_2,\cdots a_n/b_n$$

中,分母是同號數,各分數的值,不盡相等,最大的是M,最小的是m,則 $m\leqslant\Sigma a/\Sigma b<M$.

證 $\therefore\ m\leqslant a_1/b_1\leqslant M,\quad m\leqslant a_2/b_2\leqslant M,$ $\cdots m\leqslant a_n/b_n\leqslant M.$

假設$b_1,b_2\cdots b_n$都是正數,則

$$mb_1\leqslant a_1\leqslant Mb_1,\ mb_2\leqslant a_2\leqslant Mb_2,\ \cdots mb_n\leqslant a_n\leqslant Mb_n.$$

$$\therefore\ m\Sigma b\leqslant\Sigma a\leqslant M\Sigma b,\quad \text{即}\quad m\leqslant\frac{\Sigma a}{\Sigma b}\leqslant M.$$

$b_1,b_2,\cdots b_n$都是負數時,證法還是一樣.

定義 有n個正數$a_1,a_2,\cdots a_n$,則

$\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 叫做他們的算術平均數;

$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}$ 叫做他們的幾何平均數.

定理二. n個正數不都相等的時候,他們的算術平均數總大於幾何平均數;這些數都相

*本節可酌量略去.

等時,兩種平均數也相等.

證 假設$a_1=a_2$,如用$\frac{a_1+a_2}{2}$來代替這兩數,則因 $\frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_1+a_2}{2}\right)=\frac{1}{2}(a_1+a_2)$,

$$\sqrt{\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_1+a_2}{2}}=\frac{a_1+a_2}{2}>\sqrt{a_1a_2}$$

(§96,例一)

所以代換後,算術平均數不變,幾何平均數增大.照這理去推,可知諸數內,如果有兩個不等,總可使幾何平均數漸次增大,到諸數都相等時爲止.那時幾何平均數同算術平均數相等.換句話說,就是幾何平均數總要小些,只有在各數都同時,才能和算術平均數相等.

推論一. 如 n 正數的和爲一定時,他們的乘積,以諸數都相等時爲最大.

要是用$\sqrt{a_1a_2}$來代替a_1,a_2,
則$\frac{1}{2}(\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_2})<\frac{1}{2}(a_1+a_2)$,
可見積不變,而和減小,所以有

推論二. n 個正數的積爲一定時,他們的和,以諸數都相等時爲最小.

【註】定理二的證明分兩層:(一) n 個正數中,如有兩

數不相等,可用這兩數的算術平均數代替,則這 n 個數的算術平均數不變,幾何平均數增大;(二)照這法使幾何平均數增到最大的時候,便等於算術平均數.所以可見除了這些數都相等時,總是幾何平均數小.

習 題 四 十

1. 證明任何正數同他的倒數的和,不能比 2 小.
2. 試證 $a^2+b^2+c^2,>ab+bc+ca$.
3. 試證 $b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2>abc(a+b+c)$.
4. 如 $a+b+c>0$, 試證 $a^3+b^3+c^3>3abc$.
5. 如 $a\neq b\neq c$ 都是正數,試證 $(a+b)(b+c)(c+a)>8abc$.
6. 設 $x\neq 1, n>m>0$, 試證 $x^n+\frac{1}{x^n}>x^m+\frac{4}{x^m}$.
7. 設 $\Sigma a^2=\Sigma x^2=1$, $\frac{x}{a}\neq\frac{y}{b}\neq\frac{z}{c}$,試證 $ax+by+cz<1$.
8. 如 $a>b>0$, 試證 $\sqrt{a-b}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$.
9. 不用求不盡根的差近值,而證

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}<\sqrt{30}.$$

10. 設 $a^2<a^2+e<(a+1)^2$, 試證.

$$a+\frac{1}{2}\cdot\frac{e}{a}>\sqrt{a^2+e}>a+\frac{e}{2b+1}$$

98.<u>一次條件不等式解法</u> (一)一元的. 設有不等式

$$ax+b>0.$$

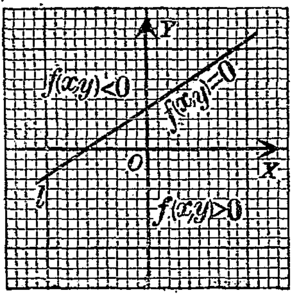
按移項定理 $ax>-b$.

如 $a>0$, 則 $x>-\frac{b}{a}$;如 $a<0$, 則 $x<-\frac{b}{a}$.

(二)二元的. 設有不等式

$$f(x,y)\equiv ax+by+c>0.$$

可先作 $f(x,y)\equiv ax+by+c=0$ 的圖解,得直線 l.這條直線分平面爲兩部份,**在同部分內點的位標,代入函數 $f(x,y)$ 內,結果的值是同號.**最便利的驗看方法,就是用原點來試.假設右圖裏 $f(0,0)>0$, 則凡在 l 下面一部份內的點,他們的位標,都合於所設的不等式.



上面所說的情形,對於多數的高次二元不等式,也能適合.就是說,由高次二元方程式 $f(x,y)=0$ 的圖解分成平面兩部份,往往有上面所說的性質.

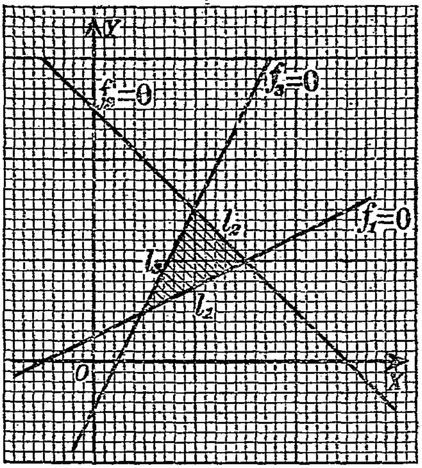
(三)二元聯立不等式. 先分求合於各個不等式的平面部份,再看他們有沒有公共部份.作法看下例就可明白.

【例一】解聯立條件不等式

$f_1(x,y) \equiv x-2y+1<0,$

$f_2(x,y) \equiv x+\ y-5<0,$

$f_3(x,y) \equiv 2x-y-1>0,$



【解】先作$f_1(x,y)=0$, $f_2(x,y)=0$, $f_3(x,y)=0$的圖解,各得直線l_1, l_2, l_3.

因為 $f_1(0,0)>0$, $f_2(0,0)<0$, $f_3(0,0)<0$, 所合於這聯立式的解,對於 l_1 同 l_3 說,不和原點,共在一邊,對於 l_2 說,與原點同在一邊.所以就在這三條直線所圍成的三角形內,如上圖.

【注意】不等式運算步驟,往往是不可逆的,所以對於求得的結果,要留心解釋.現在舉個例子來說明:

【例二】 解 $5x+3y>121$; (1) $1.75x+y=42$ (2)

【解】 $3\times(2)$ $\underline{5.25x+3y=126 \quad (3)}$

$(3)-(1)$ $.25x < 5$ $\therefore$ $x<20.$ (4)

$5\times(4)$ $\underline{5x < 100 \quad (5)}$

$(1)-(5)$ $3y>21$ (6) $\therefore$ $y>7.$ (7)

我們不能說$x<20, y>7$能適合於(2),譬如$x=10, y=8$便不能.必定要同時適合於(1)的,譬如$x=10, y=24.5$的一

組值,才能合用.

注意(6)是由(1)減去(5)得來,但是由(5)加(6),不能倒過來得出(1),這種不可逆的步驟,應當特別注意.

【例三】某人有10元鈔票若干張,不夠付一筆155元幾角的欠款,故向朋友借幾張5元的鈔票,張數恰好是自己所有鈔票張數的一半.結果付淸欠款,還有餘多.問此人原有票洋多少元?

【解】令 $x=$ 此人所有的元數,

$y=$ 不夠的元數,

則 $\frac{x}{4}=$ 借來的元數.

依題意,得 $$155<x+y \qquad (1)$$

$$\frac{x}{4}>y \qquad (2)$$

從(1)減去(2) $$155-\frac{x}{4}<x \qquad (3)$$

$$\therefore\quad 155<x+\frac{x}{4},\qquad 即\ x>124.$$

但 x 必定是10的倍數,且小於160. $\therefore x=130,140$ 或 150.

又因爲借來是5元鈔票,張數是自有的一半,即元數是原有的 $\frac{1}{4}$,所以原有元數必是4和5的倍數.

$\therefore\quad x=140$, 即此人原有10元票14張.

99. 高次不等式 高次一元函數能分解成一次實係數因式的,他的數值變化,很易考驗.

【例一】解高次不等式$f(x) \equiv x^5-5x^4+6x^3-2x^2<0$.

【解】$f(x) \equiv x^2(x-1)(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})$.

這函數數值的符號,就看各因式數值而定.x^2總是正的,所以對於這函數數值的符號,沒有影響.

x		$2-\sqrt{2}$		1		$2+\sqrt{2}$	
$x-2+\sqrt{2}$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-2-\sqrt{2}$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$

所以解答是

$x<2-\sqrt{2}$

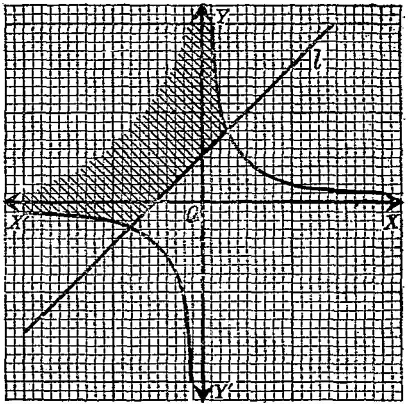
同

$1<x<2+\sqrt{2}$

高次二元不等式只有用圖解法解決.

【例二】解$f_1(x,y)=x-y+1<0, f_2(x,y)=xy-1<0$.

【解】先作 $f_1(x,y)=0, f_2(x,y)=0$的圖解.$f_1(x,y)=0$ 的是一條直線l,$f_2(x,y)=0$的是兩枝曲線,如右圖.又$f_1(0,0)>0, f_2(0,0)<0$,所以合於這聯立不等式的部份,是介於兩枝曲線中間,而在l上面.



習題四十一

1. 解條件不等式 $x+7>\frac{3x}{2}-8$.

2. 解一元聯立不等式 $4x-6<2x+3, 3x+1>13-x$.

3. 不等式 $4x-6>2x+3, 3x+1<13-x$ 能聯立麼?

4. 將 §98 例一的各不等式,取種種不同的向,例如 $f_1>0, f_2>0, f_3>0$ 等等,一共可得幾組問題? 都有解麼?

5. 某分數分子加 3,結果便大於 $\frac{1}{2}$,分母加 3,便等於 $\frac{2}{7}$,求這分數.

6. 某寄宿舍內,每房間如住 7 人,則有 18 人無房可住;如每房住 10 人,則最後一間,尚未住滿.問宿舍有房幾間? 寄宿生共有多少人?

7. n 位數的 r 次乘冪的位數如何?

8. 解高次不等式:

(1) $2x^2-7x+6<0$;　(2) $10x-3(x^2+1)<0$;

(3) $(x+1)^3(x^2-2x-1)>0$;　(4) $x^3(x-1)^2(x-2)>0$.

9. 解聯立不等式 $x^2+2x-15<0, x^2+2x-8>0$.

10. 證明下列的絕對不等式:

(1) $x^2+1>0$; (2) $(x-1)^2+1>0$; (3) $x^2-2x+5>0$.

11. 解 $x^2+y^2-1<0,\ y^2-4x<0$.

12. 解不等式 $|a-x|<\frac{|a|}{2}$.

第八章摘要

本章授下列各項:

不等式運算. 條件不等式解法.

絕對不等式證明. 圖解法.

1. 不等式的加減法有(一)遞較定理,(二)加減定理,(三)移項定理,(四)同向不等式和定理.

2. 不等式的乘除法有(一)乘法定理,(二)代換定理,(三)同向不等式積定理.

3. 不等式的根冪有(一)乘方定理,(二)方根定理.

4. 不等式的加,減,乘,除,根,冪各有不定情形,必須特別注意.

5. 絕對不等式的主要證法,是將各項移到不等號一邊,再將那邊變爲同號的平方和.

6. 關於不等式有兩個重要定理:

(一)將諸分數的分子分母(如有負號,寫在分子上)各加起來,所得的分數,必定介於原有分數最大值和最小值的中間.

(二)算術平均數常大於幾何平均數.

7. 一次不等式可用代數法和圖解法求解.

8. 高次一元不等式要分解因式,再看各因式的正負,列表來求解.

9. 聯立二元不等式必須用圖解法.

第九章

二次函數

100. 二次函數數值的正負　設有二次一元函數

$$y=f(x)\equiv ax^2+bx+c,$$

我們要去研究 x 值變動時,y 值的正負,可分三種情形討論如下:

(一)$b^2-4ac<0$　用§69的配方術,便得

$$y=f(x)\equiv a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

括號內的式子,是兩個正數或零同正數的和,因爲只有$x=-\frac{b}{2a}$的時候,$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$, 除此外,他都是正數,按題中假設$\frac{4ac-b^2}{4a^2}$也是正數,所以不論 **$x$ 的值如何變動, $f(x)\equiv ax^2+bx+c$ 的值總有一定的號,如果$a>0$,便常爲正, $a<0$,便常爲負.**

(二)$b^2-4ac=0$　這時$f(x)\equiv a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$,

所以除了$x=-\frac{b}{2a}$時$f(x)=0$以外,其餘的 x 值都使$f(x)$與 a 同號.

(三)$b^2-4ac>0$　在這個時候,方程式

$$f(x)\equiv ax^2+bx+c=0$$

有兩個實根$x_1<x_2$, 所以$f(x)$可分解成

$$f(x)\equiv a(x-x_1)(x-x_2).$$

按§99的理,便知

$x<x_1<x_2$ 或 $x_1<x_2<x$ 時,$f(x)$ 與 a 同號;

$x_1<x<x_2$ 時,$f(x)$ 與 a 異號.

將上述的三層歸納起來,便得下面的

定理. **有二次一元函數 $f(x)\equiv ax^2+bx+c$.**

(一)如方程式 $f(x)=0$ 無實根,則 $f(x)$ 的數值有一定的號,和最高次項係數 a 值的號相同.

(二)如 $f(x)=0$ 有等根,則除了這等根能使 $f(x)=0$ 以外,其餘的任何 x 值,都使 $f(x)$ 與 a 值同號.

(三)如 $f(x)=0$ 有 $x_1<x_2$ 兩實根,則 x 值在兩根中間的時候,$f(x)$ 的值與 a 值異號;x 值在兩根以外,即大於大根或小於小根的時候,$f(x)$ 的值與 a 值同號.

【例一】 $f(x)\equiv x^2+x+1.$

【解】 $f(x)\equiv x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1\equiv\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

所以不論 x 的值如何變動,$f(x)$ 的值,總是正的.

【例二】 $f(x)\equiv 2x-(3x^2+1).$

【解】 $f(x)\equiv -3x^2+2x-1\equiv -3\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{9}\right]$

所以不論 x 的值如何變動,$f(x)$ 的值,總是負的.

【例三】 $f(x)\equiv 2x^2-8x+8$.

【解】 $f(x)\equiv 2(x^2-4x+4)\equiv 2(x-2)^2$

除了 $x=2$ 時,$f(x)=0$,其餘的 x 值,都使 $f(x)$ 爲正.

【例四】 $f(x)\equiv 6x^2+x-2$.

【解】 $f(x)\equiv 6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)$

所以 $x<-\frac{2}{3}<\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{2}{3}<\frac{1}{2}<x$ 時,$f(x)>0$,就是與 6 同號;$-\frac{2}{3}<x<\frac{1}{2}$ 時,$f(x)<0$,就是與 6 異號.

101. <u>二次函數的極大極小</u>　設有二次函數

$$f(x)\equiv ax^2+bx+c$$

$$\equiv a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]\equiv -\frac{b^2-4ac}{4a}+a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2,$$

式內 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ 總是正數或零.所以如 $a>0$,則 $f(x)$ 的值等於 $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ 與一正數或零的和,可知當 $x=-\frac{b}{2a}$ 即 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ 時,$f(x)$ 的值最小.同理如 $a<0$,則 $f(x)$ 的變值,以當 $x=-\frac{b}{2a}$ 時爲大.所以有

定理.　二次函數 $f(x)\equiv ax^2+bx+c$,在 $a>0$ 時,$x=-\frac{b}{2a}$ 使函數的變值爲最小,在 $a<0$ 時,$x=-\frac{b}{2a}$ 使他爲最大.

因爲這條定理的重要,所以再說一種證法.

這法可以應用到許多同類的問題上去.

令　$f(x)\equiv ax^2+bx+c=m,$

則　$ax^2+bx+(c-m)=0$　(1)

(1)中的 x 值都是實數,所以應該有

$$b^2-4a(c-m)=b^2-4ac+4am\geqq 0$$

卽　$4am\geqq-(b^2-4ac).$

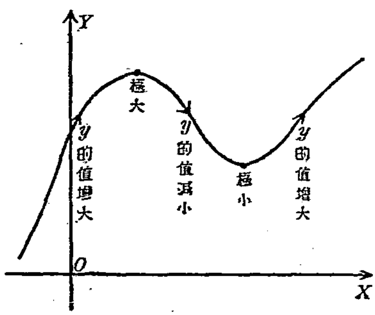
(一)如 $a>0$, 則　$m\geqq-\frac{b^2-4ac}{4a},$

就是說 m 的值以 $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ 爲最小,這數值,是當 $x=-\frac{b}{2a}$ 時 $f(x)$ 的值,換句話說,卽是 $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ 爲函數 $f(x)$ 的最小值.

(二)如 $a<0$, 則　$m\leqq-\frac{b^2-4ac}{4a},$

卽 $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{b^2-4ac}{4a}$ 是函數 $f(x)$ 的最大值.

定義. 這最大值,叫做極大,最小值,叫做極小.



【註】上面所說的是極大同極小的狹義定義.對於二次以上的函數 $y=f(x)$, 極大極小的意義如次:假設 x 的值變化,漸次增大,y 的變

値,先是增加,等到 x 的値,經過某値 x' 後,y 的變値,漸次減小,則與 $x=x'$ 相當的 y 値叫做**極大**.如在經過 $x=x'$ 的前後,y 的變値由漸減化爲漸增,則這相當 y 値叫**極小**.

用圖形來說明,就是曲線先升後降,經過一極大點,如先降後升,則經過一極小點,如上圖.在此可見極大未必是最大値,極小也未必最小,就是在全部曲線上,極大點未必最高,極小點未必最低,所講的極大極小,是對於隣近的一切値而言.

但是在二次函數裏極大就是最大,極小就是最小,所以可立狹義的定義.爲免去初學者誤解高次函數也是如此起見,特爲詳細的解釋如上.

又在二次函數的變値內,必有一極大或極小,却不能同時兼有極大極小.但在其他的函數,或者兼有幾個極大極小,或只有一種,甚或一種也沒有,因題而異,幷無一定.

【例一】求 $f(x)\equiv 2x^2+7x+2$ 的極大或極小.

【解】 $$f(x)\equiv 2\left[\left(x+\frac{7}{4}\right)^2-\frac{33}{16}\right]\equiv -\frac{33}{8}+2\left(x+\frac{7}{4}\right)^2$$

所以 $x=-\dfrac{7}{4}$ 時,$f(x)=-\dfrac{33}{8}$ 是極小値.

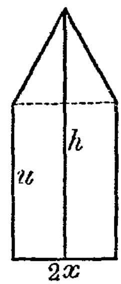
【又解】令 $f(x)\equiv 2x^2+7x+2=m$,

卽 $$2x^2+7x+(2-m)=0.$$

x 是實値,所以 $$7^2-4.2(2-m)\geqq 0$$

$$33+8m\geqq 0 \qquad \therefore\ m\geqq -\frac{33}{8}.$$

所以m的極小值是$-\frac{33}{8}$.



【例二】有一個窗子的形狀,下部是長方形,上面安置一個正三角形.假設這窗子周界長22市尺,問他的長同闊應該怎樣,才能使射入的日光最多?

【解】令$2x$=底闊市尺數,

u=長方形邊高市尺數,

則　$2u+6x=22$　　或$u=11-3x$,

要射入的日光最多,必需窗子的面積A最大.

$$A=2xu+\sqrt{3}\,x^2=22x+(\sqrt{3}-6)x^2,$$

所以　$x=-\dfrac{22}{2(\sqrt{3}-6)}=2.577,\qquad 2x=5.15,$

$$h=u+\sqrt{3}\,x=11-3\times 2.58+\sqrt{3}\times 2.58=7.73$$

即底闊5.15市尺,從頂到底的高是7.73市尺.

習題四十二

1. 研究下列各二次函數變值的號和極大極小:

(1) $2x^2-12x-3$;　　(2) $9x-8-3x^2$;

(3) $5-6x-4x^2$;　　(4) $3x^2+7x-6$.

2. 從函數$y=3x^3-x+1$的圖解,去求極大極小差近值.

3. 塡寫下面表內的空處:

判別式／函數	$b^2-4ac<0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac>0$
$f(x)\equiv ax^2+bx+c$ 的值	總是與 a…………	除了……… $f(x)=0$ 以外總與 a………	$f(x)\equiv a(x-x_1)(x-x_2)$ ………………與 a 同號 ………………與 a 異號

$x=-\frac{b}{2a}$ 的時候	如 $a>0$	如 $a<0$
$f(x)\equiv ax^2+bx+c$ 的值	是……………	是……………

4. 假設 x 同 y 都是實數,問下列各方程式內的 x,y 值,有沒有限制? 要是有的,試求出來:

(1) $y^2-x^2=4x+3y$;　(2) $y^2+x^2-4x-3y+1=0$;

(3) $y^2-x^2=4x+4y$;　(4) $y^2-2xy+2x^2-3x+1=0$.

5. 如何才能使 $(1-k)x^2+x+(k+1)$ 常小於零?

6. 證明不論 k 值怎樣, $(k^2+1)x^2+2kx-1$ 常大於零.

7. 長方形田一塊,周界長一市里,問在什麼時候,才有最大的面積?

8. 有等腰三角形,高 20,底長 14.內接一長方形,一邊和三角形的底相合.問何時這長方形的面積最大?

9. 一球向上拋去,速度是每秒 50 英尺,經 t 秒時間,達到高度 $50t-16t^2$ 英尺,問何時這球最高?

102. 二次函數的圖解　根據上面兩節所

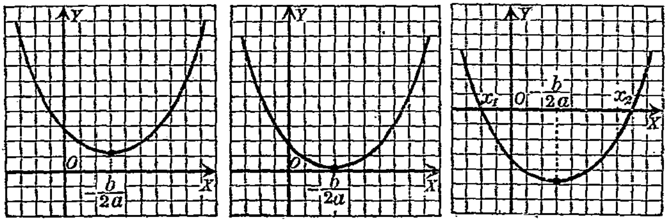
研究的二次函數特性,便可得出他的變值如下表.

設　　$y=f(x)\equiv ax^2+bx+c$

$$
a>0\begin{cases}
(\text{一})\,b^2-4ac<0 & \begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & -\frac{b}{2a} & & +\infty \\ \hline y & +\infty & \searrow & m>0 & \nearrow & +\infty \end{array} \\[2ex]
(\text{二})\,b^2-4ac=0 & \begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & -\frac{b}{2a} & & +\infty \\ \hline y & +\infty & \searrow & m=0 & \nearrow & +\infty \end{array} \\[2ex]
(\text{三})\,b^2-4ac>0 & \begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & x_1 & -\frac{b}{2a} & x_2 & +\infty \\ \hline y & +\infty & \searrow 0 & \searrow m<0 \nearrow & 0 & \nearrow +\infty \end{array}
\end{cases}
$$

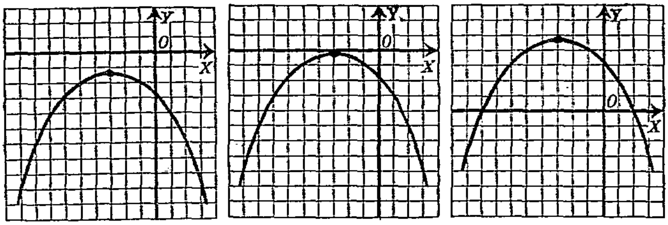
【說明】表內的$\nearrow$表示 y 的變值漸增,$\searrow$表示他漸減. m 是極小值.

由此便得圖解如下:



(一)　　　　(二)　　　　(三)

同法可得$a<0$時二次函數的圖解如下:



(四) (五) (六)

應用 二次函數的圖解,可以應用來解二次方程$x^2+px+q=0$方法如下:

(一)先作出$y=x^2$的圖解.

(二)作直線$y=-px-q$的圖解.

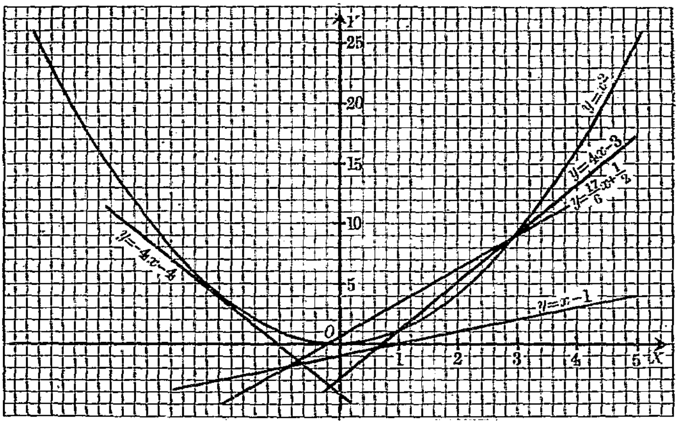
(三)讀出這兩線交點的橫標,便得兩根.

【註】x軸的單位,宜比y軸的大些,方便於實用.

因爲交點縱橫標是$y=x^2$, $y=-px-q$的公根,所以就是結式所成方程$x^2=-px-q$的根.

【注意】我們應作出 $y=x^2$ 的圖解(如下圖)備用解二次方程式時,可求出直線的兩相當點,用尺靠兩點放好,便可看出交點橫標,不必將直線畫出.

我們應取大小適宜的單位,使交點可在圖上讀出.



【例一】求解 $x^2-4x+3=0$.

【解】從 $y=x^2$,$y=4x-3$ 的交點,讀出 $x=1,3$.

【例二】求解 $x^2+4x+4=0$.

【解】從圖看出只有一個交點,橫標是 $x=-2$.

【註】這直線叫做曲線的**切線**,交點叫做**切點**.

【例三】求解 $x^2-x+1=0$.

【解】$y=x^2$ 和 $y=x-1$ 不能相交,所以無實根.

【例四】求解 $6x^2-17x-3=0$.

【解】從圖看出有兩個交點,橫標是 $x=-\frac{1}{6},3$.

習題四十三

1. 求作下列各函數的圖解:

(1) $y=x^2+x+1$;　　(2) $y=1+x-x^2$;

(3) $y=2x^2-12x+18$;　　(4) $y=8x^2+2x-3$;

(5) $y=x-(1+x^2)$;　　(6) $y=6x-3(1+x)^2$.

2. 二次方程式根的虛實同異,就圖解說,有何意義?

3. 說明:如二次函數 $f(x)$ 的極大值是負數,或極小值是正數,則 $f(x)=0$ 必定沒有實根;如極大值是正數,極小值是負數,則 $f(x)$ 必有實根.

4. 用圖解法求方程式 $4x^2-4x+1=0$, $2x^2-7x+3=0$, $x^2+x+3=0$, $4x^2-28x+13=0$ 的根.

5. 有二次函數　$y=kx^2-\frac{x}{2}-2$,

求當 $k=1, \frac{1}{5}, \frac{1}{50}, 0, -\frac{1}{32}, -\frac{1}{5}$ 時,這函數的圖解.

將各圖解畫在同一的位標軸上,看曲線怎樣變動.

103. <u>含參變數的二次方程</u>　在一個二次方程式裏,如果係數 a,b,c 不是數字常數,而含有其他的泛定文字常數,如上面習題裏第 5 題內的 k,他雖可以有任意的數值,但一經決定以後,在這方程式裏,不能再變,與變數 x 不同.這種文字泛定常數,叫做**參變數**.

參變數的值改動,所得函數不同,由這函數所成方程式的根也不同,我們可以研究根的性質,如何變遷.

假設二次方程式 $ax^2+bx+c=0$
的兩實根是 $x_1<x_2$,則按§73有 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$. 由 $\frac{c}{a}$ 的正負,可知兩實根號的異同;由 $-\frac{b}{a}$ 的正負,可知兩根的號和絕對值的大小.所以根的性質,就由 $\frac{c}{a}$, $-\frac{b}{a}$, b^2-4ac 的正負決定如下表:

$$
(一)\ \frac{c}{a}>0\begin{cases}\mathrm{I}.\ b^2-4ac>0 & \begin{cases}(1)\ -\frac{b}{a}>0 & \text{兩個正根}\\ (2)\ -\frac{b}{a}<0 & \text{兩個負根}\end{cases}\\[2ex] \mathrm{II}.\ b^2-4ac=0 & \begin{cases}(1)\ -\frac{b}{a}>0 & \text{相等正根}\\ (2)\ -\frac{b}{a}<0 & \text{相等負根}\end{cases}\\[2ex] \mathrm{III}.\ b^2-4ac<0 & \text{兩雜數根}\end{cases}
$$

$$
\begin{array}{l}(二)\ \frac{c}{a}<0\\ \text{則必有 } b^2-4ac>0\end{array}\left\{\begin{array}{ll}(1)\ -\frac{b}{a}>0 & \text{正根絕對值大}\\[1ex] (2)\ -\frac{b}{a}=0 & \text{二根絕對值相等}\\[1ex] (3)\ -\frac{b}{a}<0 & \text{負根絕對值大}\end{array}\right\}\text{異號兩實根}
$$

$$
\begin{array}{l}(三)\ \frac{c}{a}=0\\ \text{則必有 } b^2-4ac\geqq 0\end{array}\begin{cases}(1)\ -\frac{b}{a}>0 & \text{一零根,一正根}\\[1ex] (2)\ -\frac{b}{a}=0 & \text{兩根都是零}\\[1ex] (3)\ -\frac{b}{a}<0 & \text{一零根,一負根}\end{cases}
$$

【例一】有二次方程式 $f(x)\equiv kx^2+(2k+1)x+(k+3)=0$.
求當參變數 k 值改動時候,這方程式兩根的變化.

【解】$b^2-4ac=(2k+1)^2-4k(k+3)=-8k+1$.試求$\frac{c}{a}$, $-\frac{b}{a}$

k	$\frac{c}{a}$	b^2-4ac	$-\frac{b}{a}$	x_1	x_2	
	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	
-3	0	$+$	$-$	$-\frac{3}{5}$	0	
	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$\lvert x_1\rvert>\lvert x_2\rvert$
$-\frac{1}{2}$	$-$	$+$	0	$-\sqrt{5}$	$+\sqrt{5}$	
	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$\lvert x_2\rvert>\lvert x_1\rvert$
0	$\frac{-\infty}{+\infty}$	$+$	$\frac{+\infty}{-\infty}$	-3	∞	
	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	
$\frac{1}{8}$	$+$	0	$-$	-5	-5	
	$+$	$-$	$-$	雜數	雜數	

【註】正負無窮大號間橫線,並非分數符號,乃是表示欄中數值趨於無窮大,且突然改號的意思.

【例二】討論方程式 $f(x)\equiv kx^2+2(k+1)x+k-1=0$ 兩根的變化.

【解】$\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac=(k+1)^2-k(k-1)=3k+1$.試求$\frac{c}{a}$, $-\frac{b}{a}$.

k	$\frac{c}{a}$	b^2-4ac	$-\frac{b}{a}$	x_1	x_2	
	$+$	$-$	$-$			
-1	$+$	$-$	0	雜數	雜數	
	$+$	$-$	$+$			
$-\frac{1}{3}$	$+$	0	$+$	2	2	
	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
0	$\frac{+\infty}{-\infty}$	$+$	$\frac{+\infty}{-\infty}$	$\frac{1}{2}$	∞	$\lvert x_2\rvert>\lvert x_1\rvert$
	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	
1	0	$+$	$-$	0	-4	
	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	

【注意】在上面的兩個例子裏,一根經過 ∞ 後,兩根的大小次序便改換.譬如在例一裏,原是 $x_1<x_2$,等到 x_2 經過 ∞ 後,x_1 就大於 x_2 了(參觀 §105 的圖解)

習題四十四

1. 討論下列各二次方程根的變化:

(1) $(k-1)x^2-2kx+k=0$; (2) $3x^2+(k-1)x+(3k+2)=0$;

(3) $(k+1)x^2-2kx-1=0$; (4) $(k-7)x^2+2(k-1)x-1=0$.

2. 方程式　$ax^2+bx+c=0$

內係數 a 比 b 同 c 小得許多的時候,證明(1)他的兩根差近值是 $-\frac{b}{a}$ 同 $-\frac{c}{b}$;(2)將一差近根代入方程式左邊,所得結果同差近根的比,與由他一根所得的結果相等.

3. 試就下列各方程式驗明上題結論.

(1) $.00006x^2-3x+9=0$;　(2) $.0001x^2+3x-6=0$.

4. 在本節表內(一)的 I,II 下,爲何不列入 $-\frac{b}{2a}=0$ 一款?

***104.** 根同一已知數的比較　設

$$f(x)\equiv ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

內的係數,含有參變數,另一已知實數 m,我們可

---

*自本節起,到 §107 止,以及四五,四六兩習題可酌量刪去.

求出當 k 值改動時,(1)的兩根和 m 的比較.在此除了需用上節的討論以外,還要注意 $f(x)$ 的號(§100).研究這類問題,也以列表爲宜.

(一)$af(m)<0$,就是函數值與 a 異號,按照§100的定理,可知 $f(x)=0$ 必定有兩個實根 x_1,x_2,並且 m 介於兩根中間.

(二)$af(m)=0$, 必是 $a=0$ 或 $f(m)=0$.

(1) 如是 $a=0$, 則 $f(x)=0$ 一根是 ∞,他一根是 $-\frac{c}{b}$ 很容易同 m 比較.

(2) 如是 $f(m)=0$,則必 $m=x_1$,或 $m=x_2$,因爲二次方程式,只能有兩個根 x_1,x_2.(§40 定理)

(三)$af(m)>0$, 則需先研究判別式的正負.

(1) $b^2-4ac<0$, $f(x)=0$ 只有雜數根,不能同實數 m 比較.

(2) $b^2-4ac=0$, 則 m 可同等根 $-\frac{b}{2a}$ 比較.

(3) $b^2-4ac>0$, 則 $f(x)=0$ 有兩實根 $x_1<x_2$,而 m 在兩個根的外邊,即 $m>x_2>x_1$ 或是 $x_1<x_2<m$, 就是說如 m 小於(或大於)一根,則必定也小於(或大於)他根.又因 $x_1<-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}(x_1+x_2)<x_2$, 所以

$$(A)\text{如}m>-\frac{b}{2a}>x_1,\text{則 }m>x_2>x_1,$$

$$(B)\text{如}m<-\frac{b}{2a}<x_2,\text{則 }m<x_1<x_2.$$

就上面討論的結果,可以列爲下表:

(一) $af(m)<0$, 則 $x_1<m<x_2$.

$$(\text{二})\ af(m)=0\begin{cases}(1)a=0,m\ \text{可同}-\dfrac{c}{b}\text{比較.}\\(2)f(m)=0,\text{則}x_1=m\text{或}x_2=m.\end{cases}$$

$$(\text{三})\ af(m)>0\begin{cases}(1)b^2-4ac<0,m\ \text{不能和雜根比.}\\(2)b^2-4ac=0,m\ \text{可和等根}-\dfrac{b}{2a}\text{比.}\\(3)b^2-4ac>0\begin{cases}m>-\dfrac{b}{2a},\text{則}m>x_2>x_1\\m<-\dfrac{b}{2a},\text{則}m<x_1<x_2\end{cases}\end{cases}$$

【註】這個問題,和根的正負問題,性質相同,看§107.

【例一】求$m=3$與方程式　$f(x)\equiv 2x^2-8x+(k+1)=0$ 兩根的比較.

【解】$af(m)=2f(3)=2(2.3^2-8.3+k+1)=2(k-5)$.

$b^2-4ac=8^2-2.4(k+1)=8(8-k-1)=8(7-k)$.

$-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{8}{2.2}=2$.

k	$af(m)$	b^2-4ac	
	$-$	$+$	$x_1<3<x_2$
5	0	$+$	$x_1<3=x_2$
	$+$	$+$	$x_1<x_2<3$
7	$+$	0	$x_1=x_2=2<3$
	$+$	$-$	實數不能和雜數比較.

【例二】求方程式 $f(x)\equiv kx^2+(2k+1)x+(k+3)=0$ 兩根同 $m=-1$ 比較.

【解】$af(m)=k[k(-1)^2+(2k+1)(-1)+k+3]=2k.$

$$b^2-4ac=(2k+1)^2-4k(k+3)=-8k+1$$

$$-\frac{b}{2a}=-\frac{2k+1}{2k}$$

k	$af(m)$	b^2-4ac	a	$-\frac{b}{2a}$	
	$-$	$+$		>-1	$x_1<-1<x_2$
0	0	$+$	0		$x_1=-3<-1, x_2\to\infty$
	$+$	$+$		<-1	$x_1<x_2<-1$
$\frac{1}{8}$	$+$	0			$x_1=x_2=-5<-1$
	$+$	$-$			雜數不能比較.

習題四十五

1. 不必解下列方程式,而求他兩根與 2 的比較:

(1) $x^2-2x-3=0$; (2) $x^2-2x-4=0$;

(3) $4x^2-12x+9=0$ (4) $x^2-2x-3=0$.

再求出根來核驗.

2. 為什麼本節討論(三)內(3)條下,沒有 $m=-\frac{b}{2a}$ 一層?

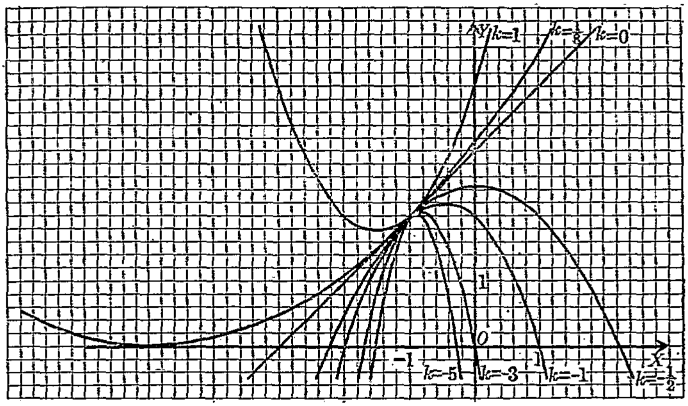
3. 將習題四十四題 1 內四個方程式的根各與 2 比較.

4. 試定方程式 $(k-4)x^2-kx+(k-2)=0$ 內 k 值的範圍,使 $x_1<-1<x_2$,并證明 x_2 必定是正數.

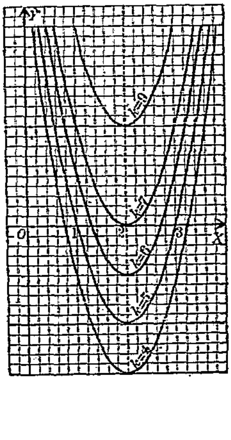
5. 試定方程式 $kx^2+(2k+1)x+(k+3)=0$

內 k 值的範圍,使得兩根都是大於 -2 的負數.

105. 幾何的說明　上面所說的含參變數方程式根的變化,幷同一已知數比較兩種問題,現在用圖解來說明,更易明白.



上面的圖說明 § 103 的例一幷 § 104 的例二,右面的圖說明 § 104 的例一.



注意圖裏各曲線的形狀同位置(或單是位置),隨着參變數,徐徐變化,所以他們與 x 軸的交點(卽方程的根)也是徐徐移動.

106. 根同兩已知數的比較 在§104裏所講的理,可以推廣來研究根同兩已知數的比較.

設有兩已知數$m>n$和方程式

$$f(x)\equiv ax^2+bx+c=0.$$

(一)$f(m)f(n)<0$,則$f(m)$同$f(n)$異號,所以必有一值同a異號,由此可知$f(x)=0$有實根$x_1<x_2$.

(1)如 $af(m)<0$, 則$n<x_1<m<x_2$.

(2)如 $af(n)<0$, 則$x_1<n<x_2<m$.

(二)$f(m)f(n)=0$, 則m,n至少有一數是根.

(三)$f(m)f(n)>0$

(1)如$af(m)<0$, 則也有$af(n)<0$,

$\therefore x_1<n<m<x_2$.

(2)如$afm>0$, 則也有$af(n)>0$

(A)$b^2-4ac<0$雜數根不能同實數比,

(B)$b^2-4ac=0$可將等根$-\frac{b}{2a}$相比.

(C)$b^2-4ac>0$則已知數在兩根外面.

(甲)$-\frac{b}{2a}>m>n$,則$n<m<x_1<x_2$,

(乙)$m>-\frac{b}{2a}>n$,則$n<x_1<x_2<m$,

(丙)$m>n>-\frac{b}{2a}$,則$x_1<x_2<n<m$.

上面的結果可以列表如下:

$$(\text{一})f(m)f(n)<0\begin{cases}(1)af(m)<0,\text{則 } n<x_1<m<x_2\\(2)af(n)<0,\text{則 } x_1<n<x_2<m.\end{cases}$$

(二)$f(m)f(n)=0$　則 m,n 至少有一數是根.

(三)$f(m)f(n)>0$

(1) $af(m)<0, af(n)<0$, 則 $x_1<n<m<x_2$

(2) $af(m)>0, af(n)>0$

(A)$b^2-4ac<0$ 雜根不能比

(B)$b^2-4ac=0$ 用等根 $-\dfrac{b}{2a}$ 比

$$(C)b^2-4ac>0\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}>m>n,\text{則} n<m<x_1<x_2\\m>-\dfrac{b}{2a}>n,\text{則} n<x_1<x_2<m\\m>n>-\dfrac{b}{2a},\text{則} x_1<x_2<n<m,\end{cases}$$

【例】求 $kx^2+(2k+1)x+(k+3)=0$ 兩根同 -1, 1 的比較.

【解】$f(1)=4(k+1), f(-1)=2, b^2-4ac=-8k+1$

k	$f(1)f(-1)$	$af(1)$	$af(-1)$	b^2-4ac	$-\dfrac{b}{2a}$	
	$-$	$+$	$-$	$+$		$x_1<-1<x_2<1$
-1	0	0	$-$	$+$		$x_1<-1<x_2=1$
	$+$	$-$	$-$	$+$		$x_1<-1<1<x_2$
0	$+$	0	0	$+$		$x_1=-3<-1<1<x_2\to\infty$
	$+$	$+$	$+$	$+$		$x_1<x_2<-1<1$
$\frac{1}{8}$	$+$	$+$	$+$	0	<-1	$x_1=x_2<-1<1$
	$+$	$+$	$+$	$-$		雜數不能比

【註】可參看§105的第一圖.

107. 根同已知數比較的又一法　欲求 $f(x)=0$ 的根同一已知數 m 的比較,可作一新方程式,兩根都比 $f(x)=0$ 的少 m(§75例三, §79例二), 再研究這新多項式值的正負.

欲求 $f(x)=0$ 的根同兩已知數 m, n 的比較, 可如上法作新方程式,求他兩根正負,并且同 $n-m$ 比數.

【例一】用上法討論§104的例一.

【解】$f(y+3)=2(y+3)^2-8(y+3)+(k+1)$

$$=2y^2+4y+(k-5)\equiv F(y)=0$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac=2^2-2(k-5)=14-2k=2(7-k)$$

k	$\frac{c}{a}$	b^2-4ac	y_1	y_2	
	$-$	$+$	$-$	$+$	$x_1<3<x_2$
5	0	$+$	$-$	0	$x_1<3=x_2$
	$+$	$+$	$-$	$-$	$x_1<x_2<3$
7	$+$	0	$-$	$-$	$x_1=x_2<3$
	$+$	$-$			實數不能同雜根比較,

【說明】$F(y)=0$ 的兩根,比 $f(x)=0$ 的各少3,就是

$$y_1=x_1-3,\quad y_2=x_2-3.$$

所以如 $y_1<0, y_2>0$,則 $x_1<3, x_2>3$,即是 $x_1<3<x_2$,其他

情形可類推.

【例二】同上法討論§106的例子.

【解】$f(y-1)=k(y-1)^2+(2k+1)(y-1)+(k+3)$

$$=ky^2+y+2\equiv F(y)=0$$

$m'=n-m=1-(-1)=2,$

$aF(m')=kF(2)=k(4k+4)=4k(k+1)$

$b^2-4ac=1-4.2k=1-8k,$

k	$aF(m')$	$\frac{c}{a}$	b^2-4ac	$-\frac{b}{a}$		
	$+$	$-$	$+$	$+$	$y_1<0<y_2<2$	$x_1<-1<x_2<1$
-1	0	$-$	$+$	$+$	$y_1<0<y_2=2$	$x_1<-1<x_2=1$
	$-$	$-$	$+$	$+$	$y_1<0<2<y_2$	$x_1<-1<1<x_2$
0	0	$-$	$+$	—	$y_1<0<2, y_2\to\infty$	$x_1<-1<1, x_2\to\infty$
	$+$	$+$	$+$	$-$	$y_1<y_2<0<2$	$x_1<x_2<-1<1$
$\frac{1}{8}$	$+$	$+$	0	$-$	$y_1=y_2<0<2$	$x_1=x_2<-1<1$
	$+$	$+$	$-$	$-$	雜數不能比	雜根不能比.

習題四十六

1. 不必解下列各方程式,而求兩根與$-1,3$的比較.

(1) $x^2-3x+2=0;$ (2) $2x^2-7x-4=0;$

(3) $2x^2+7x-4=0;$ (4) $x^2-2x-4=0.$

2. 用圖解說明習題四十四內題1和習題四十五內題3.

3. 求下列方程式兩根同1,5兩已知數比較:

(1)$x^2+2kx-(2k-3)=0$; (2)$kx^2-(2k-1)x+(k-2)=0$

第九章摘要

本章授下列各項:

二次函數值的正負. 二次函數的極大極小.

二次函數的圖解. 含參變數的二次方程.

根同一已知數比較. 根同兩已知數比較.

1. 二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 只在 $f(x)=0$ 有兩實根,并且 x 的值在兩根中間的時候,和最高項係數 a 異號,其餘的時候,都是同號.

2. 二次函數 $f(x)$ 在 $x=-\frac{b}{2a}$ 的時候,如 $a>0$, 函數值最小,如 $a<0$, 函數值最大.

這最大最小值叫做極大極小.

3. 二次函數 $y=f(x)$ 都是表拋物線.

4. 二次函數 $f(x)$ 係數內含有參變數 k, 則 k 變化時,$f(x)=0$ 的根性質也變化,可以列表討論.

就幾何方面來講,就是 $y=f(x)$ 的圖解形狀位置變動,所以交 x 軸交點也變動.

5. 二次方程式 $f(x)=0$ 的根,可以和一個或兩個已知數比較.這種問題也須列表討論.

第十章

分式函數

108. 分式的種類　設有A, B兩整式,而B的值不是零,用B除A,寫成$\frac{A}{B}$或A/B的形式,便叫做**簡分式**,簡稱做**分式**;A叫做**分子**,B叫做**分母**.整式同分式的和,叫做**帶分式**;有時A, B就是分式,或分式組成的式子,則$\frac{A}{B}$或A/B,就叫做**疊分式**.

在簡分式內,分子次數比分母次數低的,叫做**眞分式**,相等或較高的,叫做**假分式**.

【例】$\frac{x^2+x-1}{x^3-1}$是簡分式;$x^2+1-\frac{x+1}{x^3-1}$是帶分式.
$\frac{x^2+1}{1+\frac{x}{x^2-1}}$是疊分式;$\frac{x-1}{x^3-1}$是眞分式;$\frac{2x^4-1}{x^3+1}$同$\frac{2x^3-1}{x^3+x+1}$都是假分式.

分式也稱做**分數函數**,分式或整式合稱**有理式**,或**有理函數**,同含根號的**無理式**,成爲相對的名詞.

109. 分式的運算　分式的運算原則和分數的相同(§8),現在列舉如下:

(一)化約法 $\frac{MA}{MB}=\frac{A}{B}$ $M\neq0$.

【註】將分式中分子分母的 $H.C.F.$ 約去,所得新分式中,分子分母,沒有公因式,叫做**既約分式**,這種運算叫做**約分**.反過來,將分子分母,各乘一相同的式,叫做**擴分**.

(二)加減法 $\frac{A}{B}\pm\frac{C}{D}=\frac{AD\pm BC}{BD}$.

按化約法,結果內分子分母的公因式,可以約去,使成既約分式.假設 B, D 的 $H.C.F.$ 是 G,即 $B=B'G$, $D=D'G$, B',D' 沒有公因式.

$$\frac{A}{B}\pm\frac{C}{D}=\frac{AD'G\pm B'GC}{B'GD'G}=\frac{AD'\pm B'C}{B'D'G}$$
$$=\frac{AD'}{B'GD'}\pm\frac{CB'}{D'GB'}$$

如果分子分母有公因式,可以再行約去.

注意 $B'D'G$ 是 B,D 的 $L.C.M.$ 故有下列

法則 先將各項約分,次擴分,使他們用各分母的 $L.C.M.$ 做新分母,再求新分子和差.

(三)乘除法 $\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}$, $\frac{A}{B}\Big/\frac{C}{D}=\frac{AD}{BC}$.

在乘法或除法裏,如遇分子分母各因式有公因式時,可以先行約去.

【例一】 $\frac{a+x}{b}\Big/\frac{a^2-x^2}{ab}=\frac{ab(a+x)}{b(a^2-x^2)}=\frac{a}{a-x}$

【例二】 $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\Big/\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)=\frac{ad+bc}{bd}\Big/\frac{ad-bc}{bd}$

$$=\frac{ad+bc}{ad-bc}$$

【例三】 $x-\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{x^3-3x+1}{x^2-1}=x-\dfrac{1}{1-x}-x-\dfrac{-2x+1}{x^2-1}$

$$=\frac{x+1}{x^2-1}+\frac{2x-1}{x^2-1}=\frac{3x}{x^2-1}.$$

【例四】 $\dfrac{9x^2-64}{x-1-\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{4+x}}}=\dfrac{9x^2-64}{x-1-\dfrac{1}{\dfrac{4+x-x}{4+x}}}=\dfrac{9x^2-64}{x-1-\dfrac{4+x}{4}}$

$$=\frac{9x^2-64}{\dfrac{4x-4-(4+x)}{4}}=\frac{9x^2-64}{\dfrac{3x-8}{4}}=\frac{4(9x^2-64)}{3x-8}=4(3x+8).$$

【註】這種疊分式,又叫做**連分式**.演算時,要從最下一層起,漸次向上推算.

【例五】 $\dfrac{x^2-1}{x^3+x^2-2x}+\dfrac{2x^2+3x-2}{2x^3+x^2+3x-2}.$

【解】第一個分式,分子分母的 $H.C.F.=x-1$,

第二個分式,分子分母 $H.C.F.=2x-1$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{x+1}{x^3+x^2+2x}+\dfrac{x+2}{x^2+x+2}$

$$=\frac{x+1}{x(x^2+x+2)}+\frac{x+2}{x^2+x+2}=\frac{x+1+x(x+2)}{x(x^2+x+2)}$$

$$=\frac{x^2+3x+1}{x(x^2+x+2)}.$$

結果是既約分式,不能再化簡.

在求分式代數和的時候,如某項不是既約分式,但分母分子的公因式,是他項內分母的因

式就可不必約去這因式,以免擴分時依舊要乘入.

【例六】$\dfrac{x-1}{x^2-1}+\dfrac{x+1}{x^3-1}$.

【解】第一項內雖然分子分母有公因式$x-1$,但這因式也是第二項分母的一因式,所以不必約去.

$$\text{原式}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)+(x+1)(x+1)}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{x^3-1+x^2+2x+1}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{x(x^2+x+2)}{(x+1)(x^3-1)}.$$

如分式是輪換對稱式,宜將內中字母依一定的輪換次序排好,再行演算.

【例七】$\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3}{(c-c)(c-b)}$.

【解】將原式改寫成$-\dfrac{a^3}{(a-b)(c-a)}-\dfrac{b^3}{(b-c)(a-b)}$

$$-\frac{c^3}{(c-a)(b-c)},$$

便易看出分母的$L.C.M.=(a-b)(b-c)(c-a)$.

$$\therefore \text{分子}=-[a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)]$$

$$=k(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a).$$

因爲他是四次式,在$a=b,b=c,c=a$時,都是零(§47),k的值可定出是1. $\therefore$原式$=a+b+c$.

習題四十七

化簡下列各分式:

1. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^3+1}$.　2. $x+\frac{1}{3-2x}+\frac{33x-8x^4}{8x^3-27}$.

3. $\left(a^4-\frac{1}{a^4}\right)\Big/\left(a-\frac{1}{a}\right)$.　4. $\frac{x^2-5x+6}{x^2+3x-4}\cdot\frac{x^2+7x+12}{x^2-8x+15}$.

5. $\frac{1}{a-x}-\frac{1}{a+x}-\frac{2x}{a^2+x^2}-\frac{4x^4}{a^4+x^4}$.

6. $\frac{x^2-4}{x^3-3x^2-x+6}-\frac{3x^2-14x-5}{3x^3-2x^2-10x-3}$.

7. $\frac{1}{x}-\left\{1-\left[\frac{x-1}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}-\frac{(x-2)(x-3)}{x(x+1)}\right)\right]\right\}$.

8. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(xy+\frac{1}{xy}\right)^2-$
$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(xy+\frac{1}{xy}\right)$.

9. $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}\right)\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)$.

10. $\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y+z}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y+z}}\div\dfrac{\frac{1}{y}-\frac{1}{x+z}}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x+z}}$.　11. $x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x}}}$.

12. $\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$.

13. $\frac{p-a}{(p-q)(p-r)}+\frac{q-a}{(q-r)(q-p)}+\frac{r-a}{(r-p)(r-q)}$.

14. $\frac{x^2-(y-z)^2}{(x+z)^2-y^2}+\frac{y^2-(z-x)^2}{(x+y)^2-z^2}+\frac{z^2-(x-y)^2}{(y+z)^2-x^2}$.

15. $\frac{b}{(a-b)(a-c)}+\frac{c}{(b-c)(b-a)}+\frac{a}{(c-a)(c-b)}$.

***110. 部份分式法原理**　分式加減法有一種反運算,在積分學裏,很有應用,就是將一眞分

式,化成幾個眞分式的代數和,并且他們的分母是互質式,所分成的各分式,便叫做部份分式.

定理一. **兩個眞分式$\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$的和差,還是一眞分式.**

證　因爲$\frac{A}{B}\pm\frac{C}{D}=\frac{AD\pm BC}{BD}$

按定義,B的次數高於A的,D的高於C的,所以BD的高於AD和BC的.

且$AD\pm BC$的次數,不能高於AD和BC兩式中較高的一式的次數,所以必定比BD的低.

所以$(AD\pm BC)/BD$是眞分式.

定理二. **有I, I'兩整式,$\frac{A}{B}$, $\frac{A'}{B'}$兩眞分式,如$I+\frac{A}{B}\equiv I'+\frac{A'}{B'}$則必定有$I\equiv I'$,$\frac{A}{B}\equiv\frac{A'}{B'}$.**

證　按題設,得$I-I'\equiv\frac{A'}{B'}-\frac{A}{B}$.

但$I-I'$是整式或零,$\frac{A'}{B'}-\frac{A}{B}$是眞分式或零,整式不能同眞分式恆等,所以必是

$I-I'\equiv 0$,$\frac{A'}{B'}-\frac{A}{B}\equiv 0$,　即$I\equiv I'$, $\frac{A}{B}\equiv\frac{A'}{B'}$.

定理三 **有眞分式A/PQ, P,Q是互質式,則可分成一組部份分式B/P, C/Q, 且照這樣的分**

*本節可略

法只有一種.

證 因爲P,Q是互質式,按§33定理,有

$$MQ+NP\equiv 1,\quad \therefore AMQ+ANP\equiv A.$$

所以 $\frac{A}{PQ}\equiv\frac{AMQ+ANP}{PQ}\equiv\frac{AM}{P}+\frac{AN}{Q}.$

(一)如 $\frac{AM}{P}$, $\frac{AN}{Q}$ 是眞分式,本定理便已證明.

(二)如 $\frac{AM}{P}$, $\frac{AN}{Q}$ 不是眞分式,設

$$\frac{AM}{P}\equiv I+\frac{B}{P},\qquad \frac{AN}{Q}\equiv K+\frac{C}{Q}$$

$$\therefore \frac{A}{PQ}\equiv I+K+\frac{B}{P}+\frac{C}{Q}$$

但原設 $\frac{A}{PQ}$, $\frac{B}{P}$, $\frac{C}{Q}$ 都是眞分式,所以按定理和二,可知應有 $I+K\equiv 0.$

所以 $\frac{A}{PQ}\equiv\frac{B}{P}+\frac{C}{Q}$ 便是所求的部份分式.

如果有兩種分法,如 $\frac{A}{PQ}\equiv\frac{B}{P}+\frac{C}{Q}\equiv\frac{B'}{P}+\frac{C'}{Q}$,

則 $\frac{B-B'}{P}\equiv\frac{C'-C}{Q}$, $\frac{(B-B')Q}{P}\equiv C'-C.$

但P,Q是互質式,又P不能整除次數較低的$B-B'$,因此 $\frac{(B-B')Q}{P}$ 不能化成整式 $C'-C$(§34定理一).故欲恆等式成立,只有 $B-B'\equiv C'-C\equiv 0.$

【例】化 $\frac{x-1}{(x^2+1)(x^3-x+1)}$ 爲部份分式 $\frac{B}{x^2+1}+\frac{C}{x^3-x+1}.$

【解】先用§33的方法,求得

$$\begin{array}{r|r|r|l}
 & x^2+1 & x^3-x+1 & x \\
-x & 2x^2+2 & x^3+x & \\
\cline{3-3}
 & 2x^2-x & -2x+1 & \\
\cline{2-2}
-1 & 2x+4 & & \\
 & 2x-1 & & \\
\cline{2-2}
 & 5 & &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
5 &\equiv 2(x+2)+(-2x+1) \\
&\equiv 2[2(x^2+1)+x(-2x+1)]+(-2x+1) \\
&\equiv(-2x^2-x+4)(x^2+1) \\
&\quad +(2x+1)(x^3-x+1)
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad 1\equiv\frac{-2x^2-x+4}{5}(x^2+1)+\frac{2x+1}{5}(x^3-x+1)$$

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{(x^2+1)(x^3-x+1)} &\equiv\frac{(x-1)(-2x^2-x+4)}{5(x^3-x+1)}+\frac{(x-1)(2x+1)}{5(x^2+1)} \\
&\equiv\frac{-2x^3+x^2+5x-4}{5(x^3-x+1)}+\frac{2x^2-x-1}{5(x^2+1)} \\
&\equiv-\frac{2}{5}+\frac{x^2+3x-2}{5(x^3-x+1)}+\frac{2}{5}+\frac{-x-3}{5(x^2+1)} \\
&\equiv\frac{x^2+3x-2}{5(x^3-x+1)}-\frac{x+3}{5(x^2+1)}
\end{aligned}$$

【又解】 因爲$\frac{B}{x^2+1}$, $\frac{C}{x^3-x+1}$是眞分式,所以B至高是一次式,C至高是二次,故可假設

$$B\equiv ax+b,\qquad C\equiv cx^2+dx+e$$

$$\begin{aligned}
\therefore (x-1) &\equiv(ax+b)(x^3-x+1)+(cx^2+dx+e)(x^2+1) \\
&\equiv(a+c)x^4+(b+d)x^3+(-a+c+e)x^2 \\
&\quad +(a-b+d)x+(b+e).
\end{aligned}$$

$$\therefore a+c=b+d=-a+c+e=0, a-b+d=1, b+e=-1.$$

解這聯立方程組,得$a=-\frac{1}{5}$, $b=-\frac{3}{5}$, $c=\frac{1}{5}$, $d=\frac{3}{5}$, $e=-\frac{2}{5}$,和上法所得結果相同.

111. 最簡的部份分式　在方程式論裏,可以證明任何實係數多項式,都可分解成一次和二次實係數因式(§35 註和 §212),各因式中,可以有重複.不重複的因式,彼此是互質;二次式不能再分解成實係數一因式的,當然也和一次式互質.我們可就各因式的有無重複,分三層討論如下:

(一)**沒有重複的.**　設有眞分式 $A/P_1P_2P_3$,分母各因式是互質的一次和二次式,按 §110 的理*可得

$$\frac{A}{P_1P_2P_3}\equiv\frac{B}{P_1}+\frac{C}{P_2}+\frac{D}{P_3}$$

P_1, P_2, P_3 是一次或二次式,所以 B, C, D 是常數或一次式.對於因式不只三個時,不難同法去推.

(二)**都是重複的.**　設有眞分式 A/P^3,A 的次數低於 P^3 而高於 P,按 §43 例三或 §79 例二的方法可得　$A\equiv BP^2+CP+D$

$$\therefore\quad \frac{A}{P^3}\equiv\frac{B}{P}+\frac{C}{P^2}+\frac{D}{P^3}$$

(三)**有一部份因式重複的.**　設有眞分式

*如上節略去未授,則在此暫設這理爲眞.

A/PQ^3,P,Q是互質式,按(一)和(二)便得

$$\frac{A}{PQ^3}\equiv\frac{B}{P}+\frac{C}{Q^3}\equiv\frac{B}{P}+\frac{C}{Q}+\frac{D}{Q^2}+\frac{E}{Q^3}.$$

【註一】假分式如要分爲部份分式,須先化成帶分式,并使分式部爲眞分式,再照上法去求.

【註二】由上節例可知實際運算,宜用待定係數法.

由上面的討論,得到法則如下:

法則. **(一)對於分母的不重複一次因式 $x-a$ 分成的相當項是 $\frac{A}{x-a}$;重複的一次因式 $(x-a)^n$ 分成的相當項是 $\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots\cdots+\frac{A_n}{(x-a)^n}$.**

(二)對於分母的不重複二次因式 x^2+px+q 分成的相當項是 $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$; 重複的因式 $(x^2+px+q)^m$ 分成的相當項是 $\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots\cdots+\frac{B_mx+C_m}{(x^2+px+q)^m}$.

【例一】化 $\frac{x^3-2x^2-6x-21}{x^2-4x-5}$ 成部份分式.

【解】因爲分子的次數高,所以要先化成帶分式,即

$$\frac{x^3-2x^2-6x-21}{x^2-4x-5}\equiv x+2+\frac{7x-11}{x^2-4x-5}.$$

$$\equiv x+2+\frac{7x-11}{(x+1)(x-5)},$$

$$\frac{7x-11}{(x+1)(x-5)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-5}.$$

$\therefore\quad 7x-11 \equiv A(x-5)+B(x+1)$

令 $x=5$,　$7.5-11=B(5+1)$,　$\therefore B=4$.

令 $x=-1$,　$7(-1)-11=A(-1-5)$　$\therefore A=3$

$$\therefore \frac{x^3-2x^2-6x-21}{x^2-4x-5} \equiv x+2+\frac{3}{x+1}+\frac{4}{x-5}.$$

【例二】化 $\frac{x+1}{x(x-1)^3}$ 爲部份分式.

【解】令 $\frac{x+1}{x(x-1)^3} \equiv \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}$.

$$\therefore\quad x+1 \equiv A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx \qquad (1)$$

$$\equiv (A+B)x^3+(-3A-2B+C)x^2+$$

$$(3A+B-C+D)x-A.$$

$$\therefore\quad A+B=0,\ -3A-2B+C=0,\ 3A+B-C+D=1,$$

$$-A=1.$$

解這聯立方程組,得 $A=-1, B=1, C=-1, D=2$

$$\therefore\quad \frac{x+1}{x(x-1)^3} \equiv -\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}.$$

【又解】在(1)裏,令 $x=0$, 卽得 $1=A(-1)^3$, $\therefore A=-1$.

又令　$x=1$,得　$1+1=D.1$　$\therefore D=2$.

$$\therefore\quad Bx(x-1)^2+Cx(x-1) \equiv x+1+(x-1)^3-2x$$

$$\equiv x^3-3x^2+2x \qquad \equiv x(x-1)(x-2).$$

兩邊消去 $x(x-1)$,得　$B(x-1)+C \equiv x-2$.

令 $x=1$,　得　$C=1-2=-1$,　代入得 $B=1$.

【又解】先求出 $A=-1$,則 B, C, D 可用綜合除法算出(§§43,79). $x+1+(x-1)^3 \equiv x^3-3x^2+4x \equiv x(x^2-3x+4)$

$$\begin{array}{r|rrr}
1 & 1 & -3 & 4 \\
 & & 1 & -2 \\
\hline
 & 1 & -2 & 2 \\
 & & 1 & \\
\hline
 & 1 & -1 &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
x^2-3x+4 &\equiv (x-2)(x-1)+2 \\
&\equiv [(x-1)-1](x-1)+2 \\
&\equiv (x-1)^2-(x-1)+2.
\end{aligned}$$

即是 $B=1,\quad C=-1,\quad D=2.$

【例三】化 $\dfrac{5x^2-x+7}{(x^2-x+1)^2(x-3)}$ 為部份分式.

【解】令 $\dfrac{5x^2-x+7}{(x^2-x+1)^2(x-3)} \equiv \dfrac{Ax+B}{(x^2-x+1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2-x+1}+\dfrac{E}{x-3}$

$$\begin{aligned}
5x^2-x+7 &\equiv (Ax+B)(x-3)+(Cx+D)(x-3)(x^2-x+1) \\
&\qquad +E(x^2-x+1)^2 \quad (1) \\
&\equiv (C+E)x^4+(D-4C-2E)x^3+(A+4C-4D+3E)x^2 \\
&\quad +(-3A+B-3C+4D-2E)x+(-3B+3D+E)
\end{aligned}$$

$\therefore\ C+E=0,\ D-4C-2E=0,\ A+4C-4D+3E=5,$

$-3A+B-3C+4D-2E=-1,\ -3B+3D+E=7.$

解這聯立方程組,得 $A=-2,\ B=0,\ C=-1,\ D=-2,$

$E=1.$

$$\therefore \frac{5x^2-x+7}{(x^2-x+1)^2(x-3)} \equiv \frac{2x}{(x^2-x+1)^2}-\frac{x+2}{x^2-x+1}+\frac{1}{x-3}$$

【又解】在(1)裏,令 $x=3$,得 $49=49E\quad \therefore E=1$

代入(1),移項化簡,并消去兩邊的因式 $x-3$,便有

$$-(x^3+x^2+x+2) \equiv Ax+B+(Cx+D)(x^2-x+1)$$

兩邊用 x^2-x+1 除，$-x-2-\dfrac{2x}{x^2-x+1}\equiv Cx+D+\dfrac{Ax+B}{x^2-x+1}$

按§110定理二,卽得 $C=-1,\ D=-2,\ A=-2,\ B=0.$

習題四十八

化下列各分式爲部份分式:

1. $\dfrac{x^3-3x^2+4x-5}{x^2-3x+2}$.　　2. $\dfrac{x-1}{x^3-5x^2-12x}$.

3. $\dfrac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$.　　4. $\dfrac{2x^3-x^2+1}{(x-2)^4}$.

5. $\dfrac{x^2+6x-1}{(x-3)^2(x-1)}$.　　6. $\dfrac{2x+5}{(x-1)^3(x-3)}$.

7. $\dfrac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}$.　　8. $\dfrac{x^2+2}{1+x^3}$.

9. $\dfrac{2x^2-x+1}{(x^2-x)^2}$.　　10. $\dfrac{1}{x(x^2+1)}$.

11. $\dfrac{x^3+x+3}{x^4+x^2+1}$.　　12. $\dfrac{2x^2-3x-2}{x(x-1)^2(x+3)^3}$.

13. $\dfrac{(1+x)^n}{(1-2x)^3}$　　n 是大於3的整數.

112. 分式方程式　解分式方程式的法則如下:

(一)遷項到等號的一邊,求出代數和,使成簡分式 $\dfrac{N}{D}$; N 同 D 都是整式.

(二)凡能使 $N=0$ 而 $D\neq 0$ 的未知數值,便是

原方程式的根.

按分式加減法,求代數和時,往往要擴分,分子分母同乘的因式,就是D中的因式.因為D是各項分母的$L.C.M.$,所以使$D \neq 0$的未知數值,也不至使擴分時所用的因式為零.而合於$M \neq 0$的限制(§109(一)).再按§37定理一,便知化成的簡分式方程式和原方程式同解.

$\frac{N}{D}=0$的根,就是$N=0$的根,但須不使$D=0$.

【例一】解 $f(x)=\frac{x^3-6x-1}{x^2-1}+2+\frac{1}{x-1}=0$.

【解】 $f(x)=\frac{1}{x^2-1}[x^2-6x-1+2(x^2-1)+(x+1)]$

$$=(3x^2-5x-2)/(x^2-1)=N/D=0$$

$N=0$的根是 $x=-\frac{1}{3}$, 2, 不使 $D=0$,所以都是根.

如果未知數的某值,可使$N=0$,同時也能使$D=0$,便有兩種困難發生:(一)不合化約法的限制,不能擴分,便不能加減成簡分式的形狀.(二)這值代入簡分式,便成不定式(§7).

要解除這兩層困難,可設立一條規定如下:**依上面說的規則,化成簡分式,再化簡分式為既約分式$\frac{N_1}{D_1}$,而假設$\frac{N_1}{D_1}=0$ 就是原來分式方程**

式的本體.

第一層困難,由規約便可免去. $\frac{N_1}{D_1}$ 既是既約分式,分子 N_1 同分母 D_1 便無公因式,所以凡使 $N_1=0$ 的未知數值決不致使 $D_1=0$, 第二層困難也就不至發生了.

至於這種規約的意義,須借極限的觀念,才能說明,待到§§114—116裏研究.

【例二】 解 $f(x)=\frac{x^2-3x}{x^2-1}+2+\frac{1}{x-1}=0$.

【解】 $$f(x)=\frac{1}{x^2-1}[x^2-3x+2(x^2-1)+(x+1)]$$
$$=\frac{3x^2-2x-1}{x^2-1}=\frac{(3x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}.$$

按規約, $=\frac{3x+1}{x+1}=\frac{N_1}{D_1}$.

$N_1=0$ 的根是 $x=-\frac{1}{3}$, 爲 $f(x)=0$ 的根.

有時化成的簡分式或既約分式的分子是常數,這種分式方程式,便沒有有限值的解. (如果加入無窮大的觀念,却又能解釋).

【例三】 解 $f(x)=\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}-2=0$.

【解】 $f(x)=\frac{(x+1)^2+(x-1)^2-2(x^2-1)}{x^2-1}=\frac{4}{x^2-1}=\frac{N}{D}$

$N=4\neq 0$, 所以這分式方程式無解.

【註】這題同"一數同他的倒數的和,必大於2"的

理衝突.

【例四】 解$f(x)=\frac{x}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}-\frac{2}{x^2-1}=0$.

【解】 $$f(x)=\frac{1}{x^2-1}[x(x+1)-(x-1)^2-2]$$

$$=\frac{3x-3}{x^2-1}=\frac{3(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

按規約 $$=\frac{3}{x+1}=\frac{N_1}{D_1}$$

$N_1=3\neq 0$, 所以原方程式無解.

113. <u>特殊的解法</u> (一)化整法. 用各項分母的$L.C.M.$遍乘,化成一整方程式再解.

如所得的根,不使$L.C.M.$爲零,便一定是分式方程式的根,如其不然,就非用上節的方法不可.

【例一】 解方程式$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=-1$.

【解】 用各分母的$L.C.M.=(x-1)(x-2)$遍乘,得

$$(x-2)+(x-1)=-(x-2)(x-1).$$

$$x^2-x-1=0. \qquad \therefore x=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5}).$$

這根不能使$L.C.M.$爲零,所以合用.

【例二】 解方程式$\frac{1}{x-1}+\frac{x^2-x-3}{(x-2)(x-3)}-\frac{3}{x-3}=0$.

【解】 用各分母的$L.C.M.=(x-1)(x-2)(x-3)$遍乘,得

$$x^3-4x^2+2x+3=(x-3)(x^2-x-1)=0.$$

$\therefore\ x=1\pm\sqrt{5},\ 3.$

$x=1\pm\sqrt{5}$ 不能使 L. C. M. 爲零,可以合用.但 $x=3$ 是 L.C.M.$=0$ 的根,所以要照上節的方法,化原方程式爲

$$\frac{x^3-4x^2+2x+3}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{x^2-x-1}{(x-1)(x-2)}=\frac{N_1}{D_1}=0,$$

可見 $x=3$ 不是根.

【註】由解法手續所生不合的根,叫做假根.

注意能使 L. C. M. 爲零的根,未必是假根.

【例三】解 $\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x}-\frac{1}{x(x-1)}=0.$

【解】用分母的 L.C.M.$=x(x-1)$ 遍乘,得

$$x^2-2(x-1)-1=x^2-2x+1=(x-1)^2=0.\quad\therefore x=1,$$

這根能使 L.C.M.$=0$.

用上節的方法,得 $\frac{(x-1)^2}{x(x-1)}=\frac{x-1}{x}=\frac{N_1}{D_1}=0.$

所以 $x=1$ 不是假根.

【註】由上面兩題,可知由化整法所得的根 $x=a$,如能使 L. C. M. $=0$,但 L. C. M. 所含 $(x-a)$ 因式的次數,比化得整式所含因式的低,則 $x=a$ 不是假根,不然,就必定是假根.

(二)分段法.　有時宜化各項爲帶分式,使分式部是眞分式,幷分段加減.

【例四】解 $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+6}{x+7}=\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+5}{x+6}.$

【解】化這方程式為

$$1-\frac{1}{x+2}+1-\frac{1}{x+7}=1-\frac{1}{x+3}+1-\frac{1}{x+6},$$

即 $$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+6}.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7},$$

$$\frac{(x+3)-(x+2)}{(x+2)(x+3)}=\frac{(x+7)-(x+6)}{(x+6)(x+7)},$$

$$\frac{1}{x^2+5x+6}=\frac{1}{x^2+13x+42},$$

$$x^2+13x+42=x^2+5x+6,$$

$$8x=-36. \qquad \therefore x=-\frac{9}{2}.$$

(三)比例法. 這法只能用於少數特例.

【例五】解 $\dfrac{2x^3-3x^2+2x+2}{2x^3-3x^2-2x-2}=\dfrac{3x^3-3x^2+10x-6}{3x^3-3x^2-10x+6}$.

【解】由分合定理(§48)的逆定理,便得

$$\frac{2x^3-3x^2}{2x+2}=\frac{3x^3-3x^2}{10x-6}, \quad \frac{x^2(2x-3)}{2(x+1)}=\frac{3x^2(x-1)}{2(5x-3)}$$

可見 $x=0$ 是一對等根,除此外又有

$$(2x-3)(5x-3)=3(x+1)(x-1)$$

可解得 $$x=\frac{21\pm\sqrt{105}}{14}.$$

習題四十九

解下列各方程式(如用化整法,要注意假根):

1. $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+5x+4}-\dfrac{x-1}{x^2+3x-4}=0.$

2. $\frac{x^3+1}{x+1}-\frac{x^3-1}{x-1}=20.$

3. $\frac{x-8}{x-3}-\frac{x-9}{x-4}=\frac{x+7}{x+8}-\frac{x+2}{x+3}.$

4. $\frac{2x+14}{4x-7}+\frac{3x-4}{6x-1}=\frac{x+8}{x+4}.$

5. $\frac{x^3+2}{x-2}-\frac{x^3-2}{x+2}=4x+\frac{15}{x^2-4}.$

6. $\frac{1}{(x+1)(x-3)}+\frac{2}{(x-3)(x+2)}+\frac{3}{(x+2)(x+1)}=0.$

7. $\frac{x^2-a+ax}{x^2+a-ax}=\frac{2x^2+a}{2x^2-a}.$

8. $\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}=\frac{62}{63}\cdot\frac{1+x}{1-x}.$

9. $\frac{1}{x-1}+\frac{x(3x+1)}{1-x^4}=\frac{x-2}{x^2-1}.$

10. $\frac{3}{x}+\frac{6}{x-1}=\frac{x+5}{x^2-x}.$

11. $\frac{x^2+4x-6}{(2x-7)(x-2)}+\frac{x-3}{(x-1)(x-2)}+\frac{2x^2-4x+12}{(x-1)(2x-7)}=0.$

12. $\frac{2}{3(3x^2-x-2)}+\frac{1}{x-1}=\frac{1}{3x+2}.$

13. $\frac{x+2}{x+1}=\frac{2x+1}{2x-1}.$

14. $\frac{x^2-6}{x}-\frac{5x}{x^2-6}=4.$　提示　令 $\frac{5x}{x^2-6}=u.$

15. $\frac{ax+b}{a+bx}=\frac{cx+d}{c+dx},$　如 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,有什麼影響?

16. $\frac{a-x}{1-ax}=\frac{1-bx}{b-x}$,在什麼時候,這方程式沒有定解?

那時這等式是那一種等式?

17. 利用§24公式(V)來求下方程式的實根:

$$\frac{(x-a)^2}{(x-b)(x-c)}+\frac{(x-b)^2}{(x-c)(x-a)}+\frac{(x-c)^2}{(x-a)(x-b)}=3.$$

114. 極限的實例　極限是算學裏很重要的觀念,是代數學與解析學的分野.他的理論嚴密,算法微妙,初學難以了解,也非本書範圍所及.在此只能用淺顯的語言和實例來略作說明.

假設有一根鐵條,用火燒過,溫度增高,他也變長,所以長度便是溫度的函數,再將鐵條離開火候冷,他的長度,也漸漸縮短,回復原狀,我們可以說"長度縮短,以原來的長爲極限,"就是這變動的長度,同原來固定長度的差,可以微細到任何程度的意思.

說"這鐵條原來是多少長,"和說"他的長度以多少爲極限"的意思,很不相同,前面一句話,說他的長度是固定的,後面一句話,是說他的長度變動.時時變動的量,我們不好着手運算,如果他向一極限變去,就是這變量和一定量,漸漸接近,使他們的差別微細到任何程度,便可用極限代變量入算,如此才可"以常馭變."

還有一種不定情形,非用極限不能說明.譬如說自由墮體,是等加速度運動,他的速度,是時時變動的.在等速度運動的問題裏,可用時間除在這時間內經過的距離,便得速度,如對自由墮體運動,用這方法求得的,只是平均速度,眞速度乃是在一刹那間,動體所經距離被這短到不可思議時間所除的商.換句話說,就是時間短到若有若無時,平均速度所趨向的極限.時間未變遷,動體位置便未移動,速度如何,不得而知,所以只有用這理想的極限值,以應事實上的需要.

上面所說的一種情形,就是藉極限來救濟不定式$\frac{0}{0}$的窮.矛盾式$\frac{a}{0}$$(a\neq 0)$也可改作極限的理來解釋.假設分式$\frac{a}{x}$內,分母$x$爲變數,漸次趨向於零,$a$是常數,則$x$的值愈小,$\frac{a}{x}$的值愈大;$x$可小到任何程度,$\frac{a}{x}$便可大到任何程度.譬如說在$a=2$時,要

$$\frac{a}{x}>10^7,\qquad \text{只需}\quad x<\frac{2}{10^7}$$

便够了.所以變數$\frac{a}{x}$可以大過於任何大數,就叫做"$\frac{a}{x}$的值是無窮大,"用符號$\frac{a}{x}\to\infty$來表.

∞是一種變數情形的符號,不是普通的數,

性質自然不同,最重要的有:

(一)$0\times\infty$,$\infty-\infty$,0^{∞}未必是零,$\frac{\infty}{\infty}$,∞^{0}未必是1.

(二)如果 $\infty+a=\infty+b$ 或 $a\cdot\infty=b\cdot\infty$ 未必就有$a=b$.

現在再用一幾何例子說明$0\times\infty$的意義:圓內弦很短時,可同所對弧非常接近,但是直線段和曲線總不能密合,假設圓內接形邊數無窮的多,邊長便無限的短,這無窮多的無限短邊長總和所趨的極限,便叫圓周的長.

115. 極限定義記法和幾何說明　將上面各實例所表的觀念概括起來,得到抽象定義如下:

定義. **如變數 x 的變值,與一定數 a 的差,可小到任何程度,幷且自此以後,永遠如此,我們便說變數x以定數a為極限.**

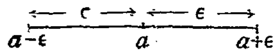
【註】差指自大量減去小量而言,可記為$|x-a|$.

記法. "x以a為極限"一句話也可說"x趨近於a,"記法是$x\to a$或$\lim x=a$.

如$x\to a$時函數$f(x)$的變值趨於b,可寫做

$$\lim_{x\to a} f(x)=b.$$

幾何說明. 在 §52 裏說過,一切的實數都可用直線上點來表示.變數的值不定,表他的點就在線上移動,如果 $x\to a$,就可以取一個任意小的正數 ϵ,使得這動點的位置,自相當的時間以後,移動的範圍,永遠不出 $a+\epsilon$, $a-\epsilon$ 以外,可見這動點的位置雖是不定,但我們可以使他和一定點接近,并且接近的程度,可以隨着我們的意思規定.



116. <u>不定式的求值法</u>　一般不定式的求值法,屬於微分學範圍.此處只講幾種能用代數方法處理的例子.在 §114 裏所說的,$\frac{0}{0}$, $0\times\infty$, $\infty-\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, 0^∞, ∞^0 都是不定式,現在只能研究前面的四種.

依以前的運算法則看來,不定式原是無值的,所以要另立一種規約如下:

函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 的時候,成爲不定式,我們便將 $x\to a$ 時, $f(x)$ 所趨近的極限,即 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$,當作不定式 $f(x)$ 的值.

所以不定式求值法,是一種極限算法,此處只能用淺顯的說法,不能照嚴密理論講.

【例一】求 $x=1$ 時 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的值.

【解】在 $x\neq 1$ 的時候, $f(x)=x+1$. (1)

無論 x 與 1 相差怎樣的微細,(1)都能成立.

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2.$$

我們便將 2 當做不定式 $f(1)=\dfrac{0}{0}$ 的值.

同理可有 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{(x+a)^p f(x)}{(x-a)^p F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(a)}{F(a)}$

式裏的 $f(x)$, $F(x)$ 不再有公因式 $x-a$.

【例二】求 $f(x)=(x+1)\cdot\dfrac{1}{x^3+1}$ 在 $x=-1$ 時的值.

【解】$x=-1$ 時, $f(x)=0\times\infty$ 是不定式.

但 $\displaystyle\lim_{x\to -1}(x+1)\cdot\frac{1}{x^3+1}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x^2-x+1}=\frac{1}{3},$

所以我們便設 $f(-1)=\dfrac{1}{3}$.

【例三】求 $x=1$ 時, $f(x)=\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2x-1}{x(x-1)}$ 的值.

【解】 $x=1$ 時, $f(x)=\infty-\infty$ 是不定式.

如 $x\neq 1$, 則 $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x(x-1)}=\dfrac{x-1}{x}$

$$\therefore \lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x}=0$$

所以在這種規約的下面, $x=1$ 是 $f(x)=0$ 的根(參看

§113 的例三).由此可以明白 §112 規定的用意.

【例四】求 $x=2$ 時,$f(x)=\frac{x+1}{x-2}\Big/\frac{x-1}{x-2}$的值.

【解】　$x\neq 2$ 時,$f(x)=\frac{x+1}{x-2}\cdot\frac{x-2}{x-1}=\frac{x+1}{x-1}$.

$$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-1}=3$$

我們就用 3 當作不定式$\frac{\infty}{\infty}$的值.

【例五】求 $x\to\infty$ 時,$f(x)=\frac{x^2-4}{2x^2+x}$的極限值.

【解】無論 x 是多大的數,都有 $f(x)=\left(1-\frac{4}{x^2}\right)\Big/\left(2+\frac{1}{x}\right)$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x^2}\right)\Big/\left(2+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}.$$

習題五十

1. 在方程式 $ax=b$ 裏,如果 $a\to 0$,而 $b\neq 0$,x 是有限值,能適合麼?怎樣才能解釋?

2. 由 §114 內所說 ∞ 的性質(一)說明性質(二).

3. $a^0=1$,$0^a=0$,有那兩種 a 值,是例外情形?

4. $\infty+\infty$ 是不定式麼?$\infty\times\infty$ 呢?∞^∞ 呢?

5. 解分式方程式$\frac{a}{x}=1$,可用 x 乘兩邊,便得 $x=a$.

但是按 §37 中的推論一,$x-a=x\left(1-\frac{a}{x}\right)=0$ 應當和 $x=0$,$1-\frac{a}{x}=0$兩個方程式同解,爲何在此未增入 $x=0$ 一

解?試用§114的理來說明.

試求下列各不定式的值(6—11):

6. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-10x+16}, x=2.$　　**7.** $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}, x=2.$

8. $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-10x+16}, x=2.$　　**9.** $\dfrac{x-1}{x^2-9}-\dfrac{x-2}{x(x-3)}, x=3.$

10. $\dfrac{x+1}{x^2-9}-\dfrac{x-2}{x(x-3)}, x=3.$

11. $\dfrac{x-1}{x^2-9}\bigg/\dfrac{x+2}{x(x-3)}, x=3.$

12. 求$x\to\infty$時,下列各式的極限:

$$\frac{3x^2-x+1}{2x^2+3x-4},\quad \frac{x^2+1}{x},\quad \frac{x}{x^2-1},\quad \frac{(2x^2-1)(x^3+x)}{(x^4+x^2-2)(x+3)},$$

$$\left(\frac{x}{x-1}-\frac{x}{x+1}\right)\bigg/\frac{3x+1}{x^2-11},$$

$$\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b^n}\ (m\gtreqqless n)$$

117. 聯立分式方程式　聯立分式方程式的解法如下:

(一)用§113的化整法,將原來的分式方程式,變為整式方程式.

(二)解所得的聯立整式方程式.

(三)所得解答,如不使原來分式裏的分母為零,便是合用的.

【例一】解聯立方程式　　$\dfrac{x-1}{y-2}-\dfrac{x-3}{y-4}=0$　　(1)

$$\frac{1}{xy-2x}+\frac{1}{4y-2y^2}-\frac{2}{xy}=0 \qquad (2)$$

【解】用化整法去分母,得 $x-y+1=0 \qquad (1)'$

$$x+2y-8=0 \qquad (2)'$$

便可解得 $x=2,\ y=3$. 這組數值,不使(1),(2)的分母爲零,所以不是增入的假根.

【例二】解聯立方程式 $\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{26}{5} \qquad (1)$

$$y^2-2x^2=1 \qquad (2)$$

【解】(1)可化爲 $4x^2-9y^2=(2x+3y)(2x-3y)=0$

用 $2x+3y=0,\ 2x-3y=0$ 各與(2)聯立,便解得

$$x,y=\frac{3i}{\sqrt{14}},\pm\frac{2i}{\sqrt{14}};\quad \frac{-3i}{\sqrt{14}},\pm\frac{2i}{\sqrt{14}}.$$

這四組都不使(1),(2)的分母爲零,所以合用.

118. 應用題 【例一】某項工程,甲獨做比乙獨做可早 6 日完工,兩人合做,4 日完工.問二人獨做日數?

【解】假設 $x=$ 甲獨做需要的日數,

則 $x+6=$ 乙獨做需要的日數.

$$\therefore\ \frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{4},$$

解得 $x=6$ 或 -2.

但是負數不合實際意義,所以甲獨做,要 6 日才能完工.

【例二】有內阻力 0.2 歐姆的電池幾個,用阻力是 0.4 歐姆的導線相接,聯接起來,和混合接法所得的電流相等.如果將混合接法裏的聯接電池數和幷接的互易,則

電流為原來的$\frac{2}{3}$,求電池個數.

【解】設聯接個數是x,并接個數是y,電動力是v,

則$$\frac{v}{\frac{0.4}{xy}+0.2}=\frac{v}{\frac{0.4}{x}+\frac{0.2}{y}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{v}{\frac{0.2}{y}+\frac{0.2}{x}}.$$

化簡前兩式,得 $$2xy+4=4y+2x \qquad (1)$$

化簡後兩式,得 $$y=4x \qquad (2)$$

代入(1)中,得 $$8x^2-18x+4=2(4x-1)(x-2)=0$$

$$\therefore\ x=2 \text{ 或 } \frac{1}{4}.$$

但分數不合實際意義,所以聯接的電池是2個一組,8組并接,一共電池16個.

119. <u>分式不等式</u> 分式不等式的解法和§99所講的高次不等式解法相同,舉例如下:

【例一】解$f(x)=\frac{x(x^2+x+1)}{x^2-2x-3}>0$.

【解】分子內x^2+x+1一因式,無論x的值是什麼數,他總是正的(§100),所以這分式的正負,只和分子內的x,分母$x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$有關,可以列表討論如下:

x		-1		0		3	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$

所以解答是

$-1<x<0$

和 $x>3$.

【例二】解 $\dfrac{4x^2-20x+18}{x^2-5x+4}<3$

【解】 $f(x)=\dfrac{4x^2-20x+18}{x^2-5x+4}-3=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-5x+4}$

$$=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-4)}<0.$$

x		1		2		3		4	
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$		$-$		$+$		$-$		$+$

所以解答是

$1<x<2$

同

$3<x<4$

【註】 x^2-5x+4 的正負不定,所以我們不能化本題爲 $4x^2-20x+18<3(x^2-5x+4)$ 或 $x^2-5x+6<0$.

習題五十一

解下面的各聯立方程式:(1—5題)

1. $\left.\begin{aligned}\frac{x+y}{1-xy}&=3\\ \frac{x-y}{1+xy}&=\frac{1}{3}\end{aligned}\right\}.$

2. $\left.\begin{aligned}xy&=2\\ \left(1-\frac{y}{x+y}\right)^2+\left(1+\frac{y}{x-y}\right)^2&=\frac{82}{9}\end{aligned}\right\}.$

3. $\left.\begin{array}{r} x+y+\dfrac{y^2}{x}=14 \\ x^2+y^2+\dfrac{y^4}{x^2}=84 \end{array}\right\}.$ 4. $\left.\begin{array}{r} \dfrac{xy}{ay+bx}=\dfrac{b}{a} \\ \dfrac{xy}{by+ax}=\dfrac{a}{b} \end{array}\right\}.$

5. 解 $P\equiv\dfrac{2x-y}{x+y-3}=0$, $Q\equiv\dfrac{x-y+1}{3x-2y+1}=0$. 結果能用麼?

【註】驗明 $\dfrac{3}{5P-1}-2+5Q\equiv0$,這組方程式是矛盾的.

6. 某火車開行 1 小時後,忽遇阻礙,停車半小時,乃加原速的 $\dfrac{1}{4}$ 開行,可以按時到站,如多行半小時後,方遇阻礙,停車半小時,須要加原速的 $\dfrac{1}{3}$,方能按時趕到.求車行的速度.

7. 題設的第一種情形同上題,如(1)加原速的 $\dfrac{1}{5}$,則要遲 5 分鐘,才能到站;或(2)加原速的 $\dfrac{1}{6}$,則要遲 9 分鐘,方能到站;求這兩種情形下,車行的速度.

8. 解下列的分式不等式:

(1) $\dfrac{2}{7(x-2)}>\dfrac{1}{4(x-1)}+\dfrac{x+9}{28(x^2+3)}$;

(2) $1+\dfrac{a^2}{(a-b)(x-a)}<\dfrac{b^2}{(a-b)(x-b)}$.

9. 試證不論 x 是什麼實數都有

$$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{x}{x^2+1}>\frac{1}{x-1}.$$

*120. 分式的極大極小 在此處所講的極大極小,是就廣義說法(看§101的註),換句話說,就

*自本節至§122和習題五十二,可以略去不授.

是當變數 x 在常數 a 的隣近變動時,函數 $f(x)$ 的變值中,以 $f(a)$ 爲最大或最小,就叫做極大或極小.

如分式化成既約分式後,分子分母都是二次式,便可應用§§72,100－101的理去求.

【例一】求 $f(x)=\dfrac{x^2+3x+5}{x^2+1}$ 的極大極小.

【解】設 $f(x)=\dfrac{x^2+3x+5}{x^2+1}=m$

去分母,再遷項合併,就是二次方程式

$$(1-m)x^2+3x+(5-m)=0$$

因爲 x 的變值,以實數爲限,所以應有

$$b^2-4ac=3^2-4(1-m)(5-m)$$

$$=-4m^2+24m-11=-4\left(m-\frac{1}{2}\right)\left(m-\frac{11}{2}\right)\geqq 0.$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\leqq m\leqq\frac{11}{2}$$

所以這分式的值應當在 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{11}{2}$ 的中間.就是說他的值,最大只能是 $\frac{11}{2}$,最小也要爲 $\frac{1}{2}$, $\frac{11}{2}$ 同 $\frac{1}{2}$ 便是極大極小值.

在這例裏的極大極小,即是最大最小.

【例二】求 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4x+3}$ 的極大極小.

【解】設 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4x+3}=m$,

依上題的方法,得 $(1-m)x^2+4mx+(1-3m)=0$.

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac=(2m)^2-(1-m)(1-3m)$$

$$=m^2+4m-1\geqq 0.$$

又因 $m^2+4m-1=0$ 的根是 $-2\pm\sqrt{5}$;所以應有(§100定理(三)) $m\geqq\sqrt{5}-2$(極小), $m\leqq-\sqrt{5}-2$(極大).

就這題可知極大未必是最大,極小未必最小,并且極大值還可以比極小值小些.因爲我們說 $\sqrt{5}-2$ 爲極小值,是說 $f(x)$ 的變值,在 $\sqrt{5}-2$ 隣近的,要算他最小,并不是在 $f(x)$ 的一切變值內,以爲他最小.

分式函數未必就有極大極小.

【例三】分式 $f(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}$ 有沒有極大極小?

【解】設 $f(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}=m$,

則　$(1-m)x^2-2(1+m)x-(1-m)=0$,

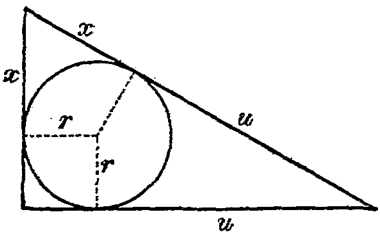
$$\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac=(1+m)^2+(1-m)^2=2(1+m^2)>0.$$

可見 m 的值,并無限制,沒有極大極小.

【註】極大極小的理論,須用微分學,才能闡發,此處只能約略說明,下節裏再用圖解說明意義.

在應用題裏,極大極小,多從狹義的說法,并須看結果能不能合實際意義.

【例四】定圓的外接直角三角形,在什麼時候,他的斜邊最短.



【解】假設已知圓的半徑是 r,切點分斜邊所成二部分的長各為 x 同 u,如右圖,則

斜邊長 $=x+u=m$　二股長各為 $r+x,\ r+u,$

面積 $=\frac{1}{2}(r+x)(r+u)$

又　　$=\frac{1}{2}r[(r+x)+(r+u)+(x+u)]$

$$\therefore\ u=\frac{r(x+r)}{(x-r)}$$

$$\therefore\ x+u=x+\frac{r(x+r)}{x-r}=m.$$

化為整方程式　$x^2-mx+r^2+mr=0$

$b^2-4ac=m^2-4(r^2+mr)\geqq 0$

$\therefore\ m\geqq 2r(\sqrt{2}+1)$(極小),　$m\leqq 2r(-\sqrt{2}+1)$(極大)

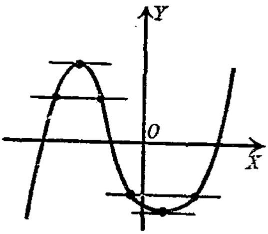
但負解答,不合實際意義,故只得極小值 $2r(\sqrt{2}+1)$

$m=2r(\sqrt{2}+1),\qquad x=-\frac{b}{2a}=\frac{m}{2}$

原設 $x+u=m,\qquad \therefore\ x=u$

所以這三角形是等腰的時候,斜邊最短.

121. <u>求分式極大極小通法</u> 在§101的註裏已經講過,如一曲線先升後降,便經過一極大點,先降後升,便經過一極小點.我們如果用一條與 OX 軸平行的直線,去割函數 $f(x)$ 的曲線,可在這種極大或極小點的兩邊得到兩交點,再將這割線移動,便可使這兩點漸漸相近到合為一點的時候,便得極大或極小點了.



就代數的理看來,便是解聯立方程式

$$y=f(x),\quad y=m$$

而去定出 m 的值,使消去 x 所得的整方程式有二級重根,這 m 值便是極大或極小.

無論 $f(x)$ 是整式或分式,這法都能應用.假如 $f(x)$ 原是整式,可直接用§80的方法,求 $f(x)=m$ 有重根的情形.如 $f(x)$ 是分式,則應先化 $f(x)=m$ 為整方程式再求.要判別極大與極小,可用鄰近的值代入,看結果比 m 大還是小.

【例】求函數 $f(x)=\dfrac{x^3+4}{x-1}$ 的極大極小.

【解】令 $f(x)=\frac{x^3+4}{x-1}=m,$ (1)

則有 $F(x)=x^3-mx+m+4=0.$ (2)

現在便要去求定m的值,使 $F(x)=0$有二級重根.

$$F_1x=3x^2-m=0 \qquad (3)$$

從(2),(3)消去x,使結式等於零,便可得m的極大或極小值,但是計算上,以消去m爲便.

由(3)解出$m=3x^2$代入(1)內,得

$$x^3-3x^3+3x^2+4=-(2x^3-3x^2-4)$$
$$=-(x-2)(2x^2+x+2)=0$$

但是$2x^2+x+2=0$沒有實根,所以只有 $x=2.$

代入(1)或(3),都得出 $m=12$,在這時

$$F(x)=x^3-12x+16=(x-2)^2(x+4)$$

如令$x=2+k$,代入(1)式,便有

$$f(2+k)=\frac{k^3+6k^2+12k+12}{k+1}.$$

$$f(2+k)-12=\frac{k^3+6k^2}{k+1}=\frac{k^2(k+6)}{k+1}.$$

可見k是正負值的眞分數時,$f(2+k)-12$都是正的,即是x的變值,在2的隣近時,都比$f(2)=12$大.所以$m=12$是極小值.

122. <u>分式的圖解</u>　要研究分式的圖解,我們在此處可以討論的有兩點:

(一)極大和極小.

(二)有沒有 x 的值,能夠使分式的值成∞,就是問分式的分母,有沒有不與分子共有的根.再看$x\to\infty$時,分式有沒有極限值.

【例一】求作$y=(x^2+3x+5)/(x^2+1)$的圖解

【解】在§120的例一裏,已經求得

$$y=m=\frac{1}{2}(\text{極小值}),\text{這時}\ x=-\frac{b}{2a}=\frac{-3}{2(1-m)}=-3,$$

$$y=M=\frac{11}{2}(\text{極大值}),\text{這時}\ x=\frac{-3}{2(1-m)}=\frac{1}{3}.$$

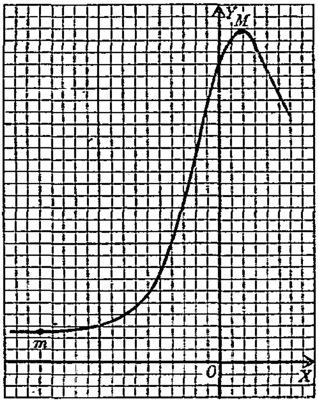
$x^2+3x+5=0$ 沒有實根,所以曲線不能和 OX 軸相交.

$x^2+1=0$也沒有實根,所以y的值不為∞.

按§100可知分母分子均常為正,所以分式值必為正,曲線只在OX上面.

$$\lim_{x\to\infty}y=\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=1.$$

x	$-\infty$		-3		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
y	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	5	$\nearrow$	$\frac{11}{2}$	$\searrow$	1



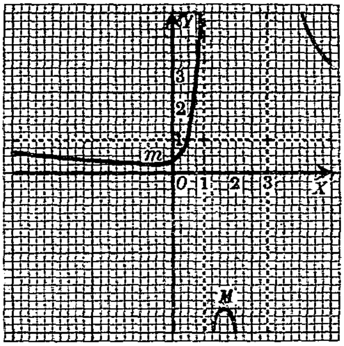
【例二】求作$y=\dfrac{x^2+1}{x^2-4x+3}$的曲線.

【解】由 §120 例二,知 $y=\sqrt{5}-2$ 是極小值,這時 $x=-\dfrac{b}{2a}$ $=-\dfrac{2m}{1-m}=-\dfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$,同理對於極大值 $y=-\sqrt{5}-2$,

有 $x=-\dfrac{2m}{1-m}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$.

$x^2+1=0$ 沒有實根,所以曲線不同 OX 軸相交,而 $x=1, 3$ 時,分母爲零,且

$$\lim_{x\to\infty} y=\frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=1.$$



x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$	0	1	$\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$	3	$-\infty$
y	$1\searrow$	$\sqrt{5}-2\nearrow$	$\frac{1}{3}\nearrow$	$+\infty \mid -\infty\nearrow$	$-\sqrt{5}-2\searrow$	$-\infty \mid +\infty\searrow$	1

習題五十二

作下列各函數的圖解:(1—6題)

1. $y=\dfrac{3-2x}{x^2-2x+7}$.　　**2.** $y=\dfrac{x^2-2x+1}{3x^2-7x+2}$.

3. $y=\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-6x+5}$.　　**4.** $y=\dfrac{2x^2-8}{3x-1}$.

5. $y=\dfrac{x^2-2x+1}{3x^2+2x+2}$.　　**6.** $y=\dfrac{x^3+4}{x-1}$.

7. 與定圓外切的等腰三角形,合於何種情形,才能有最小的面積?直角三角形呢?

第十章摘要

本章授下列各項:

分式的種類. 分式聯立方程.

分式算法. 分式不等式.

部份分式法. 分式極大極小.

分式方程解法. 分式圖解.

極限.

1. 分式運算法和分數的相同,分(一)化約(二)加減(三)乘除三種.

2. 部份分式的重要原理如下:

眞分式 A/PQ,而 P,Q 是互質式,則 A/PQ 可化爲唯一的一組部份分式 $B/P, C/Q$.

3. P,Q 是一二次式或他們的乘冪時,叫做最簡部份分式,這種情形的分法如下:

對於不重複的因式,相當項只有一項,分子是常數或一次式;對於是 n 次乘冪的因式,相當項應有 n 項.

各待定係數,可應用恆等式的理來求.

4. 分式方程式解法,是遷項到一邊,化爲旣約分式,再求分子 $N=0$ 的根.聯立方程式解法也是這樣.

5. 說變數 x 以常數 a 爲極限,就是 x 能變到和 a 接近,達於任何程度,并且自此以後,永遠是如此.

6. $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, ∞^0 未必是 1; $\infty\times\infty$, $\infty-\infty$, 0^∞ 未必是 0, 這些不定式的值,須用極限的理來求.

7. 分式不等式解法可以列表去研究.

8. 分式極大極小普通求法,要應用重根的理.

9. 分式圖解應當注意極大極小和極限值兩點.

第十一章

無理函數

123. 整式方根的特性 **定理. 既約分式 P/Q 的任何次乘方 $(P/Q)^n=P^n/Q^n$ 決不能爲整式.**

證 因爲 P, Q 是互質式,所以 P^n 和 Q^n 也爲互質式(§34 定理二推論二).故 P^n/Q^n 不是整式.

推論. 在一般情形,**整式方根不爲分式.**

奇數次整式的平方根不能爲整式,因爲任何整式的平方,都是偶次的.由上又知他不能爲分式.凡不能開盡的式子如 $\sqrt[n]{R}$,叫做**不盡根式.** 含有不盡根式的函數,叫做**無理函數.**

【註】 $\sqrt[n]{R}$ 叫做**根式**,如 R 是已知數值,便叫做**根數.** R 叫**被開方式**或**被開方數.** n 叫做**根指數**,也簡稱爲**指數.**

根數和根式性質相同,所以後面只就根式立論.

整數方面的應用. 既約分數 p/q 的任何次乘方 $(p/q)^n=p^n/q^n$ 決不能爲整數.

由此可知 $\sqrt{2}$ 不能等於分數 $\frac{m}{n}$,因爲我們總可化得 $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$. 又 $1^2<2<2^2$,可見 $\sqrt{2}$ 不能爲整數.所以 $\sqrt{2}$ 不能爲有理數.這種根數叫做不

盡根,是無理數的一種.

124. 多項式開方 (一)待定係數法. 假設

$$\sqrt[n]{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}$$

$$=b_0x^k+b_1x^{k-1}+\cdots\cdots+b_k$$

兩邊乘n次方,再比較係數,得到nk個聯立方程式,但只含$k+1$個待定係數$b_0,b_1,\cdots b_k$.如果這組聯立方程式有解(就是任取$k+1$方程式所得的解,能合於其餘各方程式),便得結果.

由此可知要結果是一整式,必須(1) $nk=m$ (k爲整數),即n能整除m;(2)方程組能有解.

【例一】求$R\equiv 4x^4-4x^3+13x^2-6x+9$的平方根.

【解】設$\sqrt{4x^4-4x^3+13x^2-6x+9}\equiv b_0x^2+b_1x+b_2$.

$$\therefore 4x^4-4x^3+13x^2-6x+9\equiv(b_0x^2+b_1x+b_2)^2 \qquad (1)$$

展開(1)式右邊,比較係數,便得聯立方程式

$b_0^2=4,\ 2b_0b_1=-4,\ b_1^2+2b_0b_2=13,\ 2b_1b_2=-6, b_2^2=9$

取第二和首,末三個方程式,求得 $b_0=\pm2$, $b_1=\mp1$, $b_2=\pm3$,是同時合於其他兩方程式的解.

$$\therefore \sqrt{4x^4-4x^3+13x^2-6x+9}=\pm(2x^2-x+3).$$

如果上說的二層條件不能合,就只能求出一差近式來,使得那式的乘方同原式相差一部

分高次項.這差近式可求到任意幾項.

【註】在能開方得整式時,原式和結果,可列為降冪或升冪式.但在不能開得整式的情形,必須列成升冪式再求(和習題七丙第4題參較).

【例二】求$1+x$的平方根的差近式到第三項.

【解】設 $\sqrt{1+x}\equiv p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots\cdots,$

則 $1+x\equiv p_0^2+2p_0p_1x+(p_1^2+2p_0p_2)x^2+\cdots\cdots,$

比較係數,得 $1=p_0^2,\quad 1=2p_0p_1,\quad 0=p_1^2+2p_0p_2,$

便可解出 $p_0=\pm1,\quad p_1=\pm\frac{1}{2},\quad p_2=\mp\frac{1}{8}.$

即$\sqrt{1+x}$的差近式求到3項是$\pm\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\right)$,他的平方和原式,相差兩高次項.由這解法,可知求到k項時,有k個待定係數,可用k個聯立方程式來定.故差近式的乘方,有k項和原式相同,相差只是從$k+1$次到k^2次的高次項.可見如x的值很小,差近式的值,便是根式的差近值,并且項數愈多,值愈相近.我們可以說,**如這些差近值趨於極限,這極限便是根式眞值.**即

$$\lim_{n\to\infty}\Sigma p_nx^n=\sqrt[m]{f(x)}$$

【註】$\lim\limits_{n\to\infty}\Sigma p_nx^n=p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots+p_nx^n+\cdots$ 叫做**無窮連級數**.在本書第十三十七兩章,略有研究.

(二)天元算法. 這法也稱和涅氏法,其實和

初中代數學裏所講的相同,不過布式互異.

【例三】用天元算法求 $R=\sqrt{4x^4-4x^3+13x^2-6x+9}$.

【解】

$$
\begin{array}{r|lll}
2x^2 & 1 & 0 & -(4x^4-4x^3+13x^2-6x+9)\cdots\cdots(I) \\
 & & 2x^2 & 4x^4 \\
\cline{2-4}
 & 1 & 2x^2 & \\
 & & 2x^2 & \\
\hline
-x & 1 & 4x^2 & 4x^3-13x^2+6x-9\cdots\cdots(II) \\
 & & -x & -4x^3\quad+x^2 \\
\cline{2-4}
 & 1 & 4x^2-x & \\
 & & -x & \\
\hline
3 & 1 & 4x^2-2x & -12x^2+6x-9\cdots\cdots(III) \\
 & & +3 & 12x^2-6x+9 \\
\hline
 & 1 & 4x^2-2x+3 & 0
\end{array}
$$

【說明】 $\because R^2-(4x^4-4x^3+13x^2-6x+9)=0 \qquad (I)$

視 (I) 爲 R 的函數,其中缺少一次項,而將括號內式,視作常數項.

先由觀察看出 R 的最高次項是 $2x^2$. 用綜合除法將 (I) 的根減去 $2x^2$ (參看§79例二),得新方程式

$$R'^2+4x^2R'+(4x^3-13x^2+6x-9)=0 \qquad (II)$$

R' 的最高次項是一次.又 $R'=-(4x^3-13x^2+6x-9)/(4x^2+R')$,可見一次項是 $\frac{-4x^3}{4x^2}=-x$. 再將 (II) 的根減去 $-x$,得

$$R''^2+(4x^2-2x)R''-(12x^2-6x+9)=0 \qquad (III)$$

由同理可知這第三項是$\dfrac{-(-12x^2)}{4x^2}=3$. 再從$(III)$的根減3,得最後方程式,有一根為零.所以$(I)$的根是$2x^2-x+3$.

【例四】用天元算法求$\sqrt[3]{1+x}$的差近根到第2項.

【解】

$$\begin{array}{r|llll l}
1 & 1 & 0 & 0 & -(1+x) & \\
 & & 1 & 1 & 1 & \\
\cline{2-5}
 & 1 & 1 & 1 & & \\
 & & 1 & 2 & & \\
\cline{2-5}
 & 1 & 2 & 3 & & \\
 & & 1 & & & \\
\cline{2-5}
\frac{1}{3}x & 1 & 3 & 3 & -x & \dfrac{-(-x)}{3}=\dfrac{1}{3}x \\
 & & \frac{1}{3}x & x+\frac{1}{9}x^2 & x+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{27}x^3 & \\
\cline{2-5}
 & 1 & 3+\frac{1}{3}x & 3+x+\frac{1}{9}x^2 & \frac{1}{3}x^2+\frac{1}{27}x^3 &
\end{array}$$

$$\therefore \quad \sqrt[3]{1+x}=1+\frac{1}{3}x+\cdots$$

注意末項的餘式$\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{27}x^3\equiv\left(1+\dfrac{1}{3}x\right)^3-(1+x)$

就是差近式立方和原式的差誤.

【註】這法對高次方程的應用,在高等代數裏再講.

【例五】求95.7263的平方根到2位小數.

【解】

$$
\begin{array}{r|lll}
9 & 1 & 0 & -95.7263 \\
 & & 9 & 81 \\
\cline{2-4}
 & 1 & 9 & \\
 & & 9 & \\
\hline
0.7 & 1 & 18 & -14.7263 \\
 & & 0.7 & 13.09 \\
\cline{2-4}
 & 1 & 18.7 & \\
 & & 0.7 & \\
\hline
00.8 & 1 & 19.4 & -1.6363 \\
 & & 0.08 & 1.5584 \\
\cline{2-4}
 & 1 & 19.48 & -0.0779
\end{array}
$$

$$\frac{-(-14.7263)}{18}=0.7^{+}$$

$$\frac{-(-1.6363)}{19.4}=0.08^{+}$$

$\therefore\ \sqrt{95.7263}=9.78^{+}$

習題五十三

用兩法求1—4題的平方根,或差近値到第3項:

1. $x^2-2x^4+6x^3-6x+x^6+9$.

2. $4x^2-20x+13+\dfrac{30}{x}+\dfrac{9}{x^2}$.

3. $1-2x$. **4.** $4-x+3x^2$.

用兩法求5—8題的立方根,或差近値到第2項:

5. $a^6-6a^4b^4+12a^2b^8-8b^{12}$.

6. $x^6+6x^5+15x^4-20x^3+15x^2-6x+1$.

7. $1+3x$. **8.** $1-x+x^2$.

9. 求下列各方根到 2 位小數:

$\sqrt{23.1361}$， $\sqrt{0.3204}$， $\sqrt{9.0240}$， $\sqrt{55.5}$， $\sqrt{4.03}$，

$\sqrt[3]{27.543608}$， $\sqrt[3]{0.507}$， $\sqrt[3]{50.7}$.

10. 求定 a, b, 使 $x^4+6x^3+11x^2+ax+b$ 成一完全平方.

125. <u>根式化約律</u> 由指數定律(§10)和推演律(§11)可以推得化約根式的公式如下:

1. $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}$

2. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$， 3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$，

4. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$， 5. $\sqrt[n]{a/b}=\sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}$.

式內 m, n, k 是正整數,如 n 是偶數,則 $a>0, b>0$.

【註】等到分指數,負指數意義確定以後,根式化約律便可包含在推廣的指數意義以內.

【例一】 $\sqrt[5]{(\sqrt{32x^{10}})^3}=\sqrt[5]{\sqrt{32^3x^{30}}}=\sqrt[10]{(2^5)^3x^{30}}$

$=\sqrt{2^3}x^3=2\sqrt{2}\,x^3$.

【例二】 $\sqrt[3]{8c^4/d^2e^3}=\sqrt[3]{2^3c^4}/\sqrt[3]{d^2e^3}=2c.\sqrt[3]{c}/e\cdot\sqrt[3]{d^2}$.

126. <u>最簡根式和同類根式</u> 將被開方式化成最簡形狀的整式,便叫做最簡根式,由上述各律得到化簡法則如下:

(一)被開方式內各因式指數和根指數,如有

$H.C.F.$,便應約去.

【例一】 $\sqrt[8]{16x^2y^6}=\sqrt[8]{2^4x^2y^6}=\sqrt[4]{2^2xy^3}=\sqrt[4]{4xy^3}$

(二)設$\sqrt[n]{R}$內R有因式F^m,而$m=nk+r$, $r>n$,可移F^k到根號外面,F^r仍留在根號內.

【例二】 $\sqrt[3]{16x^5y^6}=\sqrt[3]{2^4x^5y^6}=2xy^2\sqrt[3]{2x^2}$

【註】$2xy^2$叫做根式的係數.

(三)如被開方式是分式,可用最簡的式同乘分子分母,以除去分母的根號.

【例三】 $\sqrt[5]{\frac{a^6b}{4c^3}}=\sqrt[5]{\frac{a^6b\cdot2^3c^2}{2^2c^3\cdot2^3c^2}}=\frac{\sqrt[5]{8a^6bc^2}}{\sqrt[5]{2^5c^5}}=\frac{a}{2c}\sqrt[5]{8abc^2}$.

只有係數不同的最簡根式,叫做同類根式.同類根式的和差,還是一同類根式,係數是原係數的和差.

【例】化簡$\sqrt{16a^2b}-\sqrt{a^4b^3}+\sqrt{8}-2\sqrt{1/2}$.

【解】原式$=4a\sqrt{b}-a^2b\sqrt{b}+2\sqrt{2}-\sqrt{2}$

$=a(4-ab)\sqrt{b}+\sqrt{2}$.

【注意】**不同類根式的和差,不能合併化簡.**(看§128)

【註】兩不同類根式中,至少有一個是不盡根式.

127. <u>同次的根式</u> 根指數相等的根式,叫做同次根式,由§125即得化任何根式為同次的

法則 先照上節法則(一)化簡根式,再用各

式根指數的 *L. C. M.* 做公共根指數,各被開方式按 §125 公式(1)乘方.

【例】化 $\sqrt[6]{a^5}$,$\sqrt[8]{b^6}$ 爲同次根式.

【解】$\sqrt[8]{b^6}=\sqrt[4]{b^3}$. 6 同 4 的 *L. C. M.* $=12$.

$$\therefore \sqrt[6]{a^5}=\sqrt[12]{(a^5)^2}=\sqrt[12]{a^{10}},\ \sqrt[4]{b^3}=\sqrt[12]{(b^3)^3}=\sqrt[12]{b^9}.$$

應用 (一)根式的乘除 按 §125 公式 4,5,可知必須化爲同次根式,才能乘除.

【例一】$\sqrt[3]{a^2b^4c^8}\cdot\sqrt{a^3b^5c^7}=bc^2\cdot\sqrt[3]{a^2bc^2}\cdot ab^2c^3\sqrt{abc}$

$=ab^3c^5\cdot\sqrt[6]{a^4b^2c^4}\cdot\sqrt[6]{a^3b^3c^3}=ab^3c^5\cdot\sqrt[6]{a^7b^5c^7}$

$=a^2b^3c^6\cdot\sqrt[6]{ab^5c}$.

【例二】$6\sqrt{xy}/2\cdot\sqrt[4]{xy}=3\cdot\sqrt[4]{x^2y^2}/\sqrt[4]{xy}=3\cdot\sqrt[4]{xy}$.

(二)根數的比較

【例三】$3\sqrt{2}=\sqrt{18}=\sqrt[6]{(6.3)^3},\ 2\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{24}=\sqrt[6]{(6.4)^2}$

$\therefore 3\sqrt{2}>2\sqrt[3]{3}$.

128. <u>不同類根式特性</u> 本節所說的根式,以二次的爲限一則因爲應用較廣,二則因爲一般的討論太繁,不便於初學.

定理一. 兩個不同類二次根式的乘積,仍爲一不盡根式.

證 假設最簡二次根式 $A\sqrt{P}$, $B\sqrt{Q}$ 是不同類的,則 P, Q 各分成的兩組質因式,本組中沒

有重複的.因爲如有重複因式,按 §126(二)可移到係數 A, B 內去.又因這兩個根式不同類,所以一組因式內,至少有一個和他組內一切因式,都不相同,可見 P, Q 中至少有一個單獨質因式,便不成平方數.就是 $AB\sqrt{PQ}$ 還是一不盡根式.

定理二. 不同類二次根式,不能由加減併成一項,

證 如 $A\sqrt{P}+B\sqrt{Q}\equiv C\sqrt{R}$,則由推演律有

$$A^2P+B^2Q+2AB\sqrt{PQ}\equiv C^2R,$$

$$AB\sqrt{PQ}\equiv \frac{1}{2}(C^2R-A^2P-B^2Q)$$

便和定理一矛盾.

定理三. 如 $A+\sqrt{P}\equiv B+\sqrt{Q}$ 則必有

$$A\equiv B,\qquad P\equiv Q.$$

證 $\because\ A-B\equiv\sqrt{P}-\sqrt{Q}.$

上面的關係,只有在 $A\equiv B,\ P\equiv Q$ 時,才不致和定理二相背.

129. <u>最簡整無理式的和,差同積</u> 只含有一重根號各項的代數和,叫做最簡整無理式.

【例】 $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ 是最簡整無理式,$\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}$ 便不是.

【註】最簡整無理式的商,總可化成最簡整無理式

(§132), $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ 在一種簡單條件下面,也可化成(§130).

法則． **最簡整無理式的和差,只能合併內中的同類根式;他們的積,可按多項式乘法求積,再合併同類根式各項.**

【例一】 $(2\sqrt{6}-\sqrt{5})(3\sqrt{3}+2\sqrt{10})$

$$=6\sqrt{6.3}+4\sqrt{6.10}-3\sqrt{3.5}-2\sqrt{5.10}$$

$$=18\sqrt{2}+8\sqrt{15}-3\sqrt{15}-10\sqrt{2}=8\sqrt{2}+5\sqrt{15}.$$

【例二】 $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{4})^2=2+2\sqrt{2}\sqrt[3]{4}+(\sqrt[3]{4})^2$

$$=2+4\sqrt[6]{2}+2\sqrt[3]{2}.$$

$\because 2\sqrt{2}\sqrt[3]{4}=2\sqrt[6]{2^3 4^2}=4\sqrt[6]{2}, (\sqrt[3]{4})^2=\sqrt[3]{(2^2)^2}=2\sqrt[3]{2}.$

【例三】 $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30})$

$$=(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}$$

$$=[(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2]\sqrt{6}=(2+2\sqrt{6}$$

$$+3-5)\sqrt{6}=12.$$

習題五十四

化下面各題成最簡根式或最簡整無理式:

1. $\sqrt[3]{3/2}$.　　**2.** $\sqrt[3]{-27^2}$.　　**3.** $(\sqrt[3]{-27})^2$.

4. $\sqrt[2]{25a^2b^3c^{4n}}$.　　**5.** $\sqrt{(x^2-y^2)(x-y)}$.

6. $\sqrt{(a+b)/(a-b)}$.　　**7.** $\sqrt[3]{(x^2-x+1)/9(x+1)^2}$.

8. $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[4]{5}$.　　**9.** $\sqrt[6]{3}/\sqrt[4]{5}$.

10. $2\sqrt{35}\cdot\sqrt{65}/\sqrt{91}$.　　**11.** $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6n]{a}$.

12. $\sqrt[6]{\frac{a}{b}}\Big/\sqrt[9]{\frac{b}{a}}$.　　**13.** $\sqrt{ab^3}\cdot\sqrt[3]{b^2c^4}/\sqrt[4]{c^5a}$.

14. $\sqrt{(\sqrt{2})^3\cdot\sqrt[3]{2}}$　　**15.** $\sqrt[2m]{\sqrt[n]{a^m}}$.

16. $\sqrt[6]{\sqrt[5]{(ab^2/c^3)^2}}$.　　**17.** $\sqrt{50}-\sqrt{18}-\sqrt{\frac{1}{8}}$.

18. $\sqrt{(x^3-y^3)(x-y)}-\sqrt{x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4}$.

19. $\sqrt{50}-\sqrt{4\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{-24}\div\sqrt[3]{7\frac{1}{9}}$.

20. $\sqrt{a/bc}+\sqrt{b/ca}+\sqrt{c/ab}$.

21. $(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{5}-\sqrt{2})$.

22. $(1+\sqrt{3})^3$.

23. $(\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}+1)(\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}+1)$.

24. $(1-\sqrt{2})^2(3-2\sqrt{2})$.

25. $2(2+\sqrt{3})^2+3(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})+2(2-\sqrt{3})^2$.

26. $\sqrt{5+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{2}}$.

27. $(1-\sqrt[3]{2})(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$.

130. $a+2\sqrt{b}$的平方根　因爲

$$(\sqrt{x}\pm\sqrt{y})^2=x+y\pm2\sqrt{xy},$$

所以如果$\sqrt{a\pm2\sqrt{b}}$能化爲最簡整無理式$\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$，則按§128定理三，$x+y=a$, $xy=b$，即x, y是$u^2-au+b=0$的根.

$$\therefore\quad x=\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-4b}),y=\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-4b}).$$

原設$\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$是最簡整無理式,則x,y必爲有理式.故必a^2-4b是整方式.

【註】這種題目,往往易由觀察解出,不必用公式求.

【例一】求$\sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

【解】$\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{11-2\sqrt{18}}\qquad 18=2.9,\ 11=2+9$

$$=\sqrt{9-2\sqrt{2.9}+2}=\sqrt{9}-\sqrt{2}=3-\sqrt{2}.$$

【又解】用公式卽得 $\sqrt{a^2-4b}=\sqrt{11^2-4.18}=\sqrt{49}=7$

$$x=\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-4b})=\frac{1}{2}(11+7)=9,\ y=\frac{1}{2}(11-7)=2.$$

$$\therefore\quad \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{9}-\sqrt{2}=3-\sqrt{2}.$$

【例二】求$\sqrt{13/12+\sqrt{5/6}}$.

【解】$13/12+\sqrt{5/6}=\frac{13}{12}+\frac{\sqrt{30}}{6}=\frac{1}{12}(13+2\sqrt{30})$.

$$\sqrt{13+2\sqrt{30}}=\sqrt{10+2\sqrt{10.3}+3}=(\sqrt{10}+\sqrt{3}).$$

$$\therefore\sqrt{13/12+\sqrt{5/6}}=\frac{1}{\sqrt{12}}\sqrt{13+2\sqrt{30}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$(\sqrt{10}+\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{6}(\sqrt{10}+\sqrt{3})=\frac{\sqrt{30}}{6}+\frac{1}{2}.$$

131. <u>雜數平方根</u> §128定理三和§71雜數特性二相仿,所以求雜數平方根的方法也同上節相類.設 $\sqrt{a+bi}=u,$

則u為 $$u^2-(a+bi)=0$$
的根,所以也是雜數(§40註§71註二).

令 $\sqrt{a+bi}=x\pm yi$ x, y是實數,

則 $$a+bi=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi.$$

$$\therefore x^2-y^2=a, \quad 2xy=b.$$

又 $$(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+4x^2y^2=a^2+b^2$$

卽 $x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}$(根號前只取正號)

$$\therefore x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)},$$

$$y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)}.$$

再依$2xy=b$的關係,定根號前的相當符號.

【註】雜數的高次方根,須用三角方法,才能求出(§230)

【例】求$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i$的平方根.

【解】設$\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i}=x+yi$,

則 $$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i=x^2-y^2+2xyi.$$

$$\therefore \quad x^2-y^2=-\frac{1}{2}, \quad xy=\frac{1}{4}\sqrt{3}, \quad \text{而} \quad x^2+y^2=1.$$

$$\therefore \quad x^2=\frac{1}{4}, \quad y^2=\frac{3}{4} \quad \text{卽} \quad x=\pm\frac{1}{2}, y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

但 $xy=\frac{1}{4}\sqrt{3}$所以$x, y=\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

$$\therefore \quad \sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i}=\pm\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

132. <u>有理化因式</u>　如兩個無理式的乘積成一有理式,這兩式便互稱爲**有理化因式**.

【註】無論怎樣複雜的無理式,都有相當的有理化因式,但這種普遍的理太繁,在本書不能討論,普通只要知道二項根式的化法,便可應用到許多問題上去.

二項根式的有理化因式,以下列的三個恆等式爲根據:

$$(1)\ A^n-B^n=(A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}A+\cdots+A^{n-r-1}B^r+\cdots+B^{n-1}).$$

$$(2)\ A^n-B^n=(A+B)(A^{n-1}-A^{n-2}B+\cdots-B^{n-1})\qquad n=2k.$$

$$(3)\ A^n+B^n=(A+B)(A^{n-1}-A^{n-2}B+\cdots+B^{n-1})\qquad n=2k+1.$$

法則　**先化二項成同次根式$\sqrt[n]{P}\pm\sqrt[n]{Q}$,再依下表得有理化因式.**

<table>
<tr><th colspan="2">原　　式</th><th>有理化因式</th><th>化得的有理式</th></tr>
<tr><td colspan="2">$\sqrt[n]{P}-\sqrt[n]{Q}$</td><td>$\sqrt[n]{P^{n-1}}+\sqrt[n]{P^{n-2}}\cdot\sqrt[n]{Q}+\cdots+\sqrt[n]{Q^{n-1}}$</td><td rowspan="2">$P-Q$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\sqrt[n]{P}+\sqrt[n]{Q}$</td><td>$n=2k$</td><td>$\sqrt[n]{P^{n-1}}-\sqrt[n]{P^{n-2}}\cdot\sqrt[n]{Q}+\cdots-\sqrt[n]{Q^{n-1}}$</td></tr>
<tr><td>$n=2k+1$</td><td>$\sqrt[n]{P^{n-1}}-\sqrt[n]{P^{n-2}}\cdot\sqrt[n]{Q}+\cdots+\sqrt[n]{Q^{n-1}}$</td><td>$P+Q$</td></tr>
</table>

(特例)　$(\sqrt{P}+\sqrt{Q})(\sqrt{P}-\sqrt{Q})=P-Q.$

【例一】化二項根式$\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}$為有理式.

【解】$\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}=\sqrt[6]{a^2}+\sqrt[6]{b^3}$

$$(\sqrt[6]{a^2}+\sqrt[6]{b^3})(\sqrt[6]{(a^2)^5}-\sqrt[6]{(a^2)^4}\sqrt[6]{b^3}+\sqrt[6]{(a^2)^3}\cdot\sqrt[6]{(b^3)^2}$$
$$-\sqrt[6]{(a^2)^2}\sqrt[6]{(b^3)^3}+\sqrt[6]{a^2}\cdot\sqrt[6]{(b^3)^4}-\sqrt[6]{(b^3)^5})=a^2-b^3.$$

【例二】化$\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}$為有理式.

【解】$(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$

$$=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{c^2})=a+b-c+2\sqrt{ab}.$$

$$[(a+b-c)+2\sqrt{ab}][(a+b-c)-2\sqrt{ab}]=(a+b-c)^2-4ab.$$

【例三】求$1+\sqrt{a}+\sqrt{b}+2\sqrt{ab}$的有理化因式.

【解】$1+\sqrt{a}+\sqrt{b}+2\sqrt{ab}=1+\sqrt{b}+\sqrt{a}(1+2\sqrt{b})$(1)

$$1+\sqrt{b}-\sqrt{a}(1+2\sqrt{b})\text{(2)}$$

$$(1+\sqrt{b})^2-a(1+2\sqrt{b})^2$$
$$=1-a+b-4ab+2\sqrt{b}(1-2a)\text{(3)}$$
$$1-a+b-4ab-2\sqrt{b}(1-2a)\text{(4)}$$

$$(1-a+b-4ab)^2-4b(1-2a)^2$$

所以原式的有理化因式是

$$[1+\sqrt{b}-\sqrt{a}(1+2\sqrt{b})][1-a+b-4ab-2\sqrt{b}(1+2a)]$$

但(3)是(1)和(2)的積,又將(3)中$\sqrt{b}$換為$-\sqrt{b}$便得(4).所以這化根因式也可寫做

$$(1+\sqrt{a}+\sqrt{b}-2\sqrt{ab})(1+\sqrt{a}-\sqrt{b}+2\sqrt{ab})(1+\sqrt{a}-\sqrt{b}+2\sqrt{ab}).$$

133. <u>最簡整無理式的除法</u>　**法則．用分母的有理化因式同乘分子分母,便得最簡整無理式．**

【例一】化$\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$成最簡整無理式

【解】原式$=\dfrac{(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})}{(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})}$

$$=\frac{(x+y)+2\sqrt{x^2-y^2}+(x-y)}{(x+y)-(x-y)}$$

$$=2[x+\sqrt{x^2-y^2}]/2y=[x+\sqrt{x^2-y^2}]/y.$$

【例二】化$(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})/(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})$爲最簡整無理式．

【解】原式$=\dfrac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}$

$$=\frac{1-(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{2})^2-3}=\frac{1-(5+2\sqrt{6})}{(3-2\sqrt{2})-3}$$

$$=-2(2+\sqrt{6})/(-2\sqrt{2})=\frac{1}{2}(2\sqrt{2}+\sqrt{6}\sqrt{2})$$

$$=\sqrt{2}+\sqrt{3}.$$

134. <u>共軛雜數．雜數的除法</u>　$A+Bi$與$A-Bi$二雜數中,實部虛部皆同,只有虛部前的聯接號相異,便稱爲**共軛雜數．**

【例】$b^2-4ac<0$時,$ax^2+bx+c=0$的兩個雜根,

$x_1=\dfrac{1}{2a}(-b-\sqrt{b^2-4ac})$, $x_2=\dfrac{1}{2a}(-b+\sqrt{b^2-4ac})$是

共軛雜數.

因爲 $$(A+Bi)+(A-Bi)=2A,$$

$$(A+Bi)(A-Bi)=A^2+B^2,$$

所以兩共軛雜數的和同積,都是實數.

雜數除法法則. **用分母的共軛雜數,同乘分子分母,便將這商數化爲一雜數.**

【例】 $\dfrac{5+7i}{2-4i}=\dfrac{(5+7i)}{(2-4i)}\cdot\dfrac{(2+4i)}{(2+4i)}=\dfrac{-18+34i}{20}=-\dfrac{9}{10}+\dfrac{17}{10}i.$

習題五十五

求下列各無理式的平方根(1—5題):

1. $9-\sqrt{56}.$ **2.** $1+\dfrac{2\sqrt{6}}{5}.$ **3.** $8\sqrt{2}+2\sqrt{30}.$

4. $2(a+\sqrt{a^2-b^2}).$ **5.** $b-2\sqrt{ab-a^2}.$

化簡(6—7):

6. $\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}.$ **7.** $2\sqrt{[3+\sqrt{\{5-\sqrt{(13+4\sqrt{3})}\}}]}.$

求下列各題的有理化因式(8—12):

8. $a-\sqrt[5]{b^2}.$ **9.** $1+\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}.$ **10.** $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1.$

11. $\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{3}.$ **12.** $\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}-\sqrt{u}.$

化下列各題爲最簡整無理式(13—19):

13. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}.$ **14.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}.$

15. $\dfrac{a+1+\sqrt{a^2-1}}{a+1-\sqrt{a^2-1}}.$ **16.** $\dfrac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x+y}}.$

17. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$.

18. $\dfrac{\sqrt{(4+\sqrt{15})^3}+\sqrt{(4-\sqrt{15})^3}}{\sqrt{(6+\sqrt{35})^3}-\sqrt{(6-\sqrt{35})^3}}$.

19. $(a+\sqrt{b})\Big/\left[\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{(a^2-b)}}{2}}+\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{(a^2-b)}}{2}}\right]^2$.

20. $x=\sqrt{\dfrac{m-\sqrt{(m^2-4)}}{2m}}$,則 $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}=?$

21. $2a=x+\dfrac{1}{x}$, $2b=y+\dfrac{1}{y}$,則 $2[ab-\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}]=?$

化下列各題成 $A+Bi$ 的形狀(22—28):

22. $\dfrac{1+2i}{2-3i}-\dfrac{2+3i}{1-2i}$.　　23. $\dfrac{3+2i}{2-i}+\dfrac{3-2i}{2+i}$.

24. $\sqrt{2i}$.　　25. $\sqrt{5-12i}$.　　26. $\sqrt{-1+4\sqrt{5}i}$.

27. $\sqrt{4ab+2(a^2-b^2)i}$　　28. $(\sqrt{9+40i}+\sqrt{9-40i})^2$.

29. 設 $\dfrac{a+bi}{c+di}=x+yi$,求 x 和 y.

30. 如兩雜數的和積都是實數,則這兩數必是共軛.

135. 無理方程式　凡一無理方程式,都要化成有理方程式,方能求解,就是要用有理化因式乘過.由此可知常有假根發生,待下節再討論.

實際上有理化因式,往往很繁,不便乘入,所以常用下面的法則去化.

法則.(一)將欲化的根式,放在等號一邊,其餘各項,都放在他一邊.

(二)兩邊自乘等次方,化去這根式.

(三)如果原方程式內,含有幾個根式,可照上法逐漸化去.

(四)解最後的有理方程式,各根都要代入驗算,以辨是不是假根.

【例一】求解 $\sqrt{2x+8}=2-2\sqrt{x+5}$.

【解】兩邊自乘化簡,得　$4\sqrt{x+5}=x+8$.

再自乘化簡,有 $x^2=16$,　$\therefore x=4$ 或 -4.

【核算】$\sqrt{2(-4)+8}+2\sqrt{-4+5}=2$

$\sqrt{2.4+8}+2\sqrt{4+5}=4+6=10\neq 2$.

所以 -4 是原方程式的根,4 是假根.

求有理化因式的布算如下:

$$\begin{array}{r}
\sqrt{2x+8}+2\sqrt{x+5}-2 \\
\sqrt{2x+8}-2\sqrt{x+5}+2 \\
\hline
(\sqrt{2x+8})^2-(2\sqrt{x+5}-2)^2=2[4\sqrt{x+5}-(x+8)] \\
4\sqrt{x+5}+(x+8) \\
\hline
16(x+5)-(x+8)^2 \\
=-x^2+16.
\end{array}$$

可見有理化因式是

$(\sqrt{2x+8}+2\sqrt{x+5}+2)(\sqrt{2x+8}-2\sqrt{x+5}-2)$

$(\sqrt{2x+8}-2\sqrt{x+5}+2)$.

而假根 4 是　$\sqrt{2x+8}-2\sqrt{x+5}+2=0$

的根.(但 -4 也恰巧是他的根).

我們要注意這種手續,和用有理化因式是完全一樣的;但因爲有理化因式,隱而不露,以致我們常忽視假根的潛入.

【例二】求解 $\sqrt{2x+7}+\sqrt{2-x}=\sqrt{3x+4}+\sqrt{5-2x}$.

【解】兩邊自乘,再化簡,得

$$\sqrt{2x+7}\cdot\sqrt{2-x}=\sqrt{3x+4}\cdot\sqrt{5-2x},$$

再自乘化簡,有　$2(2x^2-5x-3)=0$,

$$\therefore\quad x=3\quad 或\quad -\frac{1}{2}.$$

【核算】$\sqrt{2.3+7}+\sqrt{2-3}=\sqrt{3.3+4}+\sqrt{5-2.3}=\sqrt{13}+i$,

且 $\sqrt{2\left(-\frac{1}{2}\right)+7}+\sqrt{2-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{3\left(-\frac{1}{2}\right)+4}$

$$+\sqrt{5-2\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{6}+\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

所以 $x=3$, $-\frac{1}{2}$ 都是原方程式的根.

我們容易照上法求得有理化因式爲

$(\sqrt{2x+7}+\sqrt{2-x}+\sqrt{3x+4}+\sqrt{5-2x})(\sqrt{2x+7}\sqrt{2-x}$

$+\sqrt{3x+4}\sqrt{5-2x})$.

【例三】求解 $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+5}+9=0$.

【解】移項得 $\sqrt{x-4}=-\sqrt{x+5}-9$,

兩邊自乘,再化簡　$\sqrt{x+5}=-5$,

再自乘　$x+5=25$　$\therefore x=20$.

【核算】　$\sqrt{20-4}+\sqrt{20+5}+9=4+5+9\neq 0$

便知20是假根,所以原方程式無根.

照上題的方法,可求得有理化因式

$(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+5}-9)(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+5}+9)$

$(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+5}-9)$

假根20便是 $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+5}-9=0$ 的根.

136. 解法的討論　無理方程既然要化爲有理的再解,所以假根的引入,往往不能避免.這一層須看使化根因式爲零所成方程式有無和原方程式不同的根而定.我們可注意下列的兩點:

(一)無理方程式不一定有根,(如上節例三)這種無根情形與矛盾式或不定式又不相同,因爲不能用無窮大或極限來解釋.

(二)化成有理化方程式再求得的解,未必一定含有假根,如上節例二,所以必須核算.

假根雖有他法推斷,但不如核算法易解.

習題五十六

1. $x+\sqrt{x-4}=6.$　　**2.** $x+\sqrt{25-x^2}=7.$

3. $\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1}=1.$　　**4.** $\sqrt{2x+3}-\sqrt{4x-7}=2.$

5. $\sqrt{mx+n^2}-\sqrt{nx+m^2}=m-n.$

6. $\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}=m$.

7. $\dfrac{21}{\sqrt{2x+1}}-2\sqrt{x}-\sqrt{2x+1}=0$.

8. $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$.

9. $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x-2}=2$.

10. $\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{x-b}=\sqrt[4]{a-b}$.

11. $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}-2\sqrt{x+11}=0$.

*137. 特別的解法 (一)代換法. 只含有一個根式$\sqrt[n]{P}$的方程式,P是x的有理函數.如令$\sqrt[n]{P}=u$,可將原方程式變成u的有理方程式.可先解這方程式,再求x.這法實在就是先將原方程式的一邊分解成較簡的無理因式然後一一再解.所以在代換的一步裏,決不至引入假根.

【例一】解 $4x^2+x+2x\sqrt{3x^2+x}=9$.

【解】令 $\sqrt{3x^2+x}=u$,則原方程式變為

$$u^2+2xu+x^2-9=[u+x+3][u+x-3]=0.$$

(一) $$u+x+3=\sqrt{3x^2+x}+x+3=0, \tag{1}$$

化成有理方程式,得 $f(x)\equiv 2x^2-5x-9=0$

他的兩根$\frac{1}{4}(5\pm\sqrt{97})$都不能合於(1),所以是假根.

這兩個假根,不必解出,便可斷定,因為

*自本節至§140和57,58兩習題,均可酌量略去.

$2f(-3)=2[2.3^2+5.3-9]>0, D=(-5)^2-4.2(-9)>0,$

又 $-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{5}{4}>-3$, 所以兩根都比 -3 大(§104 內(三)(3)). 即 $x+3>0$, 又 $\sqrt{3x^2+x}$ 總是正值,可見這兩根必定不能合於(1).

(二) $$u+x-3=\sqrt{3x^2+x}+x-3=0 \qquad (2)$$

化成有理方程式 $F(x)=2x^2+7x-9=0$

兩根是 1 和 $-\dfrac{9}{2}$,代入(2)都能適合.

又(2)的左邊的有理化因式是 $\sqrt{3x^2+x}-(x-3)$. 而 $1-3<0, -\dfrac{9}{2}-3<0$, 可見這兩根不能使這有理化因式為零.所以不用代入,這就可知道他們幷非假根.

【例二】求解 $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}+\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}=\dfrac{10}{3}$.

【解】令 $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}=u$, 則原方程式變為

$$u+\frac{1}{u}=\frac{10}{3} \quad 或 \quad 3u^2-10u+3=(3u-1)(u-3)=0.$$

$$\therefore u=\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}=\frac{1}{3} \quad 即 \quad 3\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}=0 \quad (1)$$

化為有理式再解,得 $x=-\dfrac{11}{8}$.

又 $u=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}=3$ 即 $\sqrt{x+1}-3\sqrt{x-2}=0$ (2)

化為有理式,解得 $x=\dfrac{19}{8}$.

分解因式的手續,決不引入假根,而(1)(2)內左邊式

子的有理化因式 $3\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}$,$\sqrt{x+1}+3\sqrt{x-2}$ 對於任何實數,都是兩正數的和,不能爲零.所以不必代入核算,就能斷定 $-\frac{11}{8}$, $\frac{19}{8}$ 能合原方程式.

(二)加減法. 這法只能應用於方程式

$$\sqrt{P}\pm\sqrt{Q}=R \tag{1}$$

用(1)除恆等式 $P-Q\equiv T$

得

$$\sqrt{P}\mp\sqrt{Q}=\frac{T}{R} \tag{2}$$

$\frac{(1)+(2)}{2}$

$$\sqrt{P}=\frac{1}{2}\left(R+\frac{T}{R}\right) \tag{3}$$

$\frac{(1)-(2)}{2}$

$$\sqrt{Q}=\pm\frac{1}{2}\left(R-\frac{T}{R}\right) \tag{4}$$

在(3)(4)中任用一方程式,可解得 x.

我們應該注意(1),(2)是同解式,故由他們加減而解出的(3),(4)也和(1),(2)同解.并且自相同解.所以可得兩層推論.

(一)這步同解變易手續,決不引入假根.

(二)只須解(3)或(4)中一個,不必兩個方程式,都要去解.

方程式 $\sqrt{P_1}\pm\sqrt{Q_1}=\sqrt{P_2}\pm\sqrt{Q_2}$

在合於恆等式 $P_1-Q_1\equiv P_2-Q_2$

的時候,也可用這法先化簡再解.

【例三】求解 $\sqrt{x^2+2x-2}+\sqrt{x^2+3}=3$ (1)

【解】用原方程式除恆等式 $(x^2+2x-2)-(x^2+3)\equiv 2x-5$

得 $$\sqrt{x^2+2x-2}-\sqrt{x^2+3}=\frac{2x-5}{3} \qquad (2)$$

$\frac{(1)+(2)}{2}$ $$\sqrt{x^2+2x-2}=\frac{1}{3}(x+2) \qquad (3)$$

將(3)化爲有理方程式 $4x^2+7x-11=0$

得 $x=1$ 和 $x=-\frac{11}{4}$. 但 $-\frac{11}{4}+2<0$, 所以 $-\frac{11}{4}$ 決不能適合(3),必是假根,又 1 決不使(3)的有理化因式

$\sqrt{x^2+2x-2}+\frac{1}{3}(x+2)$

爲零,所以(1)必是(3)的根,也就是原方程式的根.

138. 聯立無理方程式 【例一】解聯立方程式

$$x+\sqrt{x^2-y^2}=8 \qquad (1)$$

$$x-y=1 \qquad (2)$$

【解】由(2)解得 $y=x-1$,代入(1)

$$x+\sqrt{x^2-(x-1)^2}=x+\sqrt{2x-1}=8 \qquad (3)$$

解(3),得 $x=13$(假根),5(合用).

$\therefore\ x=5,\ y=5-1=4$ 是(1)(2)的解

【註】$x=13, y=12$ 是 $x-\sqrt{x^2-y^2}=8,\ x-y=1$ 的解.

【例二】解聯立方程式 $\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=\sqrt{2}$ (1)

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=1 \qquad (2)$$

【解】將(1)化成有理方程式 $y^2=2x-1$ (3)

代入(2),得 $\sqrt{x^2+2x-1}+\sqrt{x^2-2x+1}$

$$=\sqrt{x^2+2x-1}\pm(x-1)=1 \qquad (4)$$

$$\therefore \sqrt{x^2+2x-1}=2-x \quad (5) \text{或} \sqrt{x^2+2x-1}=x \quad (6)$$

由(5)與(3)得 $x=\frac{5}{6}, y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ (假根)

由(6)與(3)得 $x=\frac{1}{2}, y=0$ (合用)

兩組假根是(1)和$\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}=1$的解

各部份核算,學生可以自己試做.

【註】在 x 的值未求出以前,$\sqrt{x^2-2x+1}$ 是 $x-1$,還是 $1-x$,我們不能斷定.等到求得 $x=\frac{5}{6}$或$\frac{1}{2}$,便知應當取 $1-x$,但是$x=\frac{5}{6}$ 是由取 $x-1$ 解得的,所以不用代入,也可知道這兩組解是假根.

又核算的時候,應當作 $\sqrt{\frac{5}{6}-\sqrt{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ $=\frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ 不能作為 $\frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2}-\sqrt{3})$. 由這層道理便可知

$$\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=\sqrt{2},\ \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=1$$

沒有解.

習題五十七

1. $3x^2+15x-2\sqrt{x^2+5x+1}=2$.

2. $\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{x}}=2\frac{1}{6}$.　　**3.** $9x^2-(7x+18\sqrt{x})=80$.

4. $\sqrt[4]{3x^2+13}+\sqrt{3x^2+13}=6$.

5. $\sqrt{3x+4}+\sqrt{3x-5}=9$.

6. $\sqrt{x^2-3x+4}-\sqrt{x^2-5x+7}=1$.

7. $\sqrt{7x-5}+\sqrt{4x-1}=\sqrt{7x-4}+\sqrt{4x-2}$.

8. $\sqrt[3]{x+a}+\sqrt[3]{x+b}+\sqrt[3]{x+c}=0$.

9. $\sqrt{x^2+x+1-\sqrt{2x^3+x^2+2x}}=\sqrt{\frac{1}{2}(2x^2+x+2)}-\sqrt{\frac{x}{2}}$

有定解麼?

10. $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=2\sqrt{xy},\\ x+y=20.\end{cases}$

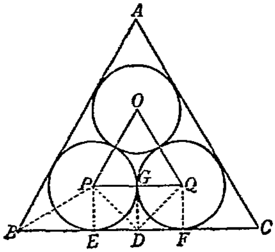
11. $\begin{cases}\sqrt{x+y}+2\sqrt{x-y}=\dfrac{2(x-1)}{\sqrt{x-y}},\\ (x-y)/\sqrt{xy}\quad=6/\sqrt{7}.\end{cases}$

12. $\sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{y^2-b^2}+\dfrac{y^2-b^2}{a^2-x^2}}+\sqrt{\dfrac{a^2+x^2}{y^2+b^2}+\dfrac{y^2+b^2}{a^2+x^2}}=4$,

$xy=ab$.

139. 應用題　【例一】三個圓相內切,又他們的三條外公切線成功一個等邊三角形,邊長是 a.求這三個圓的半徑.

【解】假設 O,P,Q 的半徑各爲 x,y,z. P,Q 和 BC 的切點爲 E,F. 又 P,Q 的切點是 G, 過 G 的公切線,和 BC 相交於 D, 按幾何的理,便得



$BP=2\cdot EP$ $\therefore BE=\sqrt{BP^2-EP^2}=\sqrt{(2y)^2-y^2}=\sqrt{3}\,y.$

同理 $CF=\sqrt{3}\,z.$

又 $\angle PDQ=rt.\angle$, $DG\perp PQ$, $GD=\sqrt{PG\cdot GQ}=\sqrt{yz}$

而 $ED=DF=DG$ $\therefore$ $EF=2\sqrt{yz}$

由題意得方程式 $\sqrt{3}(y+z)+2\sqrt{yz}=a$ (1)

同理有 $\sqrt{3}(z+x)+2\sqrt{zx}=a$ (2)

$\sqrt{3}(x+y)+2\sqrt{xy}=a$ (3)

從(2)減去(1)得

$$\sqrt{3}(x-y)+2\sqrt{z}(\sqrt{x}-\sqrt{y})$$
$$=(\sqrt{x}-\sqrt{y})[\sqrt{3}(\sqrt{x}+\sqrt{y})+2\sqrt{z}]=0$$

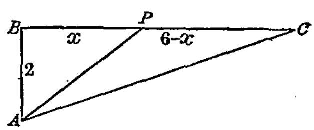
但 $\sqrt{3}(\sqrt{x}+\sqrt{y})+2\sqrt{z}>0$ $\therefore \sqrt{x}-\sqrt{y}=0$

即 $x=y$. 同理 $y=z$. 可見這三個圓都相等.

代入(1)內 $2\sqrt{3}\,y+2y=a$

$$\therefore\quad x=y=z=a/(2\sqrt{3}+2)=\frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)a$$

【例二】一人在船 A 中,從船到岸的距離 AB 是 2 市里,他要到隔 B 點 6 市里的地方 C 去.船行的速度是每小時 4 市里,步行的速度是每小時 5 市里.問他應向隔 B 點多少遠的地方登岸,才能以最快的時間達到 C 點.



【解】假設所求的登岸點 P, 隔 B 點 x 市里,則這人划過距離 $AP(=\sqrt{x^2+4})$所需的

時間是$\sqrt{x^2+4}/4$,步行走過 $PC(=6-x)$ 所需時間是 $(6-x)/5$

$$\therefore\quad t=f(x)\equiv\frac{\sqrt{x^2+4}}{4}+\frac{6-x}{5}$$

化成有理方程式

$$9x^2+2(96-80t)x-(400t^2-960t+476)=0$$

$$D=(96-80t)^2+9(400t^2-960t+476)$$

$$=500(2t-3)(10t-9)>0$$

$\therefore\ t>\frac{3}{2}$ 就是$t=\frac{3}{2}$是最短的時間

【解】 $\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{x^2+4}}{4}+\frac{6-x}{5}$ 即得$x=2\frac{2}{3}$市里.

140. 無理函數的圖解 無理函數圖解的討論,如極大極小等問題,多需微分學的理,方能解決.所以本書只能研究幾個簡易的特例.

【例一】 $\sqrt{y}=\sqrt{2}-\sqrt{x}$. (1)

【解】(一) x必是正數,不然$\sqrt{x}$就是虛數,不能圖表.

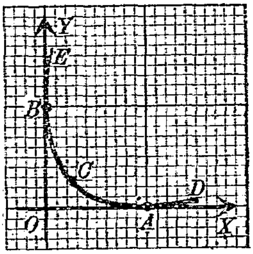
(二)$\sqrt{y}$是正值,所以$\sqrt{2}>\sqrt{x}$,即是$2>x$.

(三)同理可知應有 $2>y>0$.

(四) x變小,y就變大;并且y變大,x必定變小.

x	2	1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\sqrt{2}-1$	0
y	0	$\sqrt{2}-1$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	2

依表畫得曲線ACB



如果化(1)爲有理方程式

$$4xy-(2-x-y)^2=0$$

即 $(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{2})$

$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{2})$

$(\sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{2})$

$(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{2})=0$

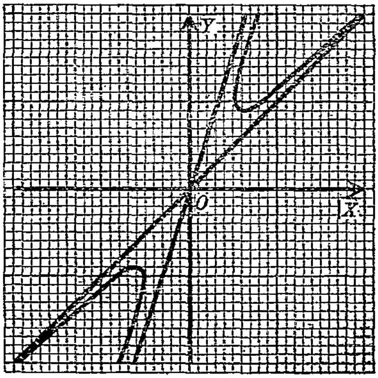
則圖出曲線是拋物線$DACBE$.而

AD, BE的相當方程式各爲$\sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{2}=0$,

$\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{2}=0$.

$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{2}=0$有沒有相當的曲線呢?

【例二】$y=2x\pm\sqrt{x^2-1}$



【解】(一)$x\geqq 1$或$x\leqq -1$

(二)化成有理方程式

$3x^2-4yx+(y^2+1)=0$(1)

要$D\geqq 0$,必$y\geqq\sqrt{3}$(極小)或

$y\leqq-\sqrt{3}$(極大).這時

$x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

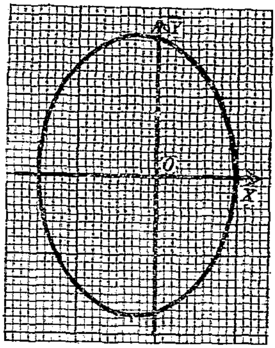
(三)在$x\to\infty, y\to\infty$時,(1)

和$3x^2-4yx+y^2=(3x-y)$

$(x-y)=0$相近.就是曲線和直線$3x-y=0$, $x-y=0$在愈遠的地方,愈相接近.這兩條直線,叫做曲線的幾近線.

x	-4	-3	-2	-1	$+1$	2	3	4
y	$-8\pm\sqrt{15}$	$-6\pm\sqrt{8}$	$-4\pm\sqrt{3}$	-2	$+2$	$4\pm\sqrt{3}$	$6\pm\sqrt{8}$	$8\pm\sqrt{15}$

【例三】 $y=\pm\sqrt{3-x-2x^2}$.



【解】(一) $y=\pm\sqrt{(1-x)(3+2x)}$

$$\therefore\quad -\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 1$$

(二)令 $f(x)\equiv 2x^2+x-3+y^2=0$,

要 x 是實數,則必

$$D=1^2+4\cdot 2(3-y^2)\geqslant 0$$

$$\therefore\quad \frac{5}{2\sqrt{2}}\geqslant y\geqslant -\frac{5}{2\sqrt{2}}$$

即 $\frac{5}{2\sqrt{2}}$, $-\frac{5}{2\sqrt{2}}$ 各爲極大極小值,所以 x, y 的值都有限制.

又 $y=\pm\frac{5}{4\sqrt{2}}$ 時, $x=-\frac{1}{4}$,這是 $f(x)=0$ 的重根.

學生可用§121的方法求極大極小,看結果同不同.

x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{4}$	0	1
y	0	$\pm\sqrt{2}$	$\pm\frac{5}{2\sqrt{2}}$	$\pm\sqrt{3}$	0

習題五十八

1. 已知直角三角形內接圓半徑 r,和斜邊上的高 h,求他的三邊.

2. 已知直角三角形斜邊爲 c,問何時內接圓最大?

作下列各方程式的圖解.

3. $y=x\pm\sqrt{x-4}$.　　**4.** $y=x\pm\sqrt{2-2x^2}$.

5. $y=\pm\sqrt{x^2+4}$.　　**6.** $y=\frac{1}{2}x\pm\sqrt{x^2-4}$.

7. $y=-3x\pm\sqrt{2x^2+x-3}$.

8. $y=\sqrt{(x+1)(x-1)(x-2)}$.

9. $y=\pm\sqrt{x-3}/(x-3)$.

第十一章摘要

本章授下列各項.

多項式開方.　　有理化因式.

同類根式,同次根式.　　共軛雜數.

最簡整無理式.　　無理方程式.

1. 一般無理式不能化爲整式或分式.

2. 多項式開方有(一)待定係數法(二)天元法.

3. 根式化約律可從指數定律和推演律求出.

4. 只有同類根式能加減;根式相乘必先化爲同次的.

5. 根式重要特性:如 $A+\sqrt{P}\equiv B+\sqrt{Q}$,

則 $A\equiv B, P\equiv Q$.

6. $\sqrt{a\pm2\sqrt{b}}$ 在 a^2-4b 是平方數時,可化爲 $\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$

7. 雜數平方根也是雜數,可用待定係數法求.

8. 最簡整無理式相除,可用分母有理化因式,同乘

分母分子.

9. 雜數相除,可用分母的共軛雜數同乘分母分子.

10. 無理方程式要先化成有理方程式再解,所以往往有假根,結果必須代入核算.

11. 無理方程式特殊解法有(一)代換法(二)加減法.

12. 無理方程圖解,要注意 x, y 值有無限制,其他極大極小各點,也要討論.

(第二冊完)

中 西 名 詞 對 照 表

(一) 中 西 對 照

十一畫

十二畫

十三畫

十四畫

十五畫

十六畫

十七畫

二十二畫

(二) 西中對照

中1385(全)25,9.

中1621(全)25,12.

註冊商標

民國二十六年二月發行
民國二十六年二月初版

修正課程標準適用
高中甲組代數學（全四冊）
◎價　貳圓五角

編者　余介石
發行者　中華書局有限公司　代表人路錫三
印刷者　上海澳門路　中華書局印刷所
總發行處　上海福州路　中華書局發行所
分發行處　各埠中華書局