Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Vorlesung 28

Eine projektive Varietät X über einem Körper K ist nach Definition (realisierbar als) eine abgeschlossene Untervarietät $X \subseteq \mathbb{P}_K^n$. Hierbei konkurrieren zwei Sichtweisen:

Einerseits (und dies nennt man den *extrinsischen Standpunkt*) erlaubt die Realisierung von X als Teilmenge eines projektiven Raumes, Konzepte, Strukturen, Eigenschaften des umgebenden Raumes durch Einschränkung auf X zu verwenden, man kann das Schnittverhalten von X mit anderen Untervarietäten Y untersuchen, man kann nach Beziehungen zum offenen Komplement $\mathbb{P}_K^n \setminus X$ Ausschau halten. Ferner nimmt jede Visualisierung von X Bezug auf einen umgebenden Raum.

Andererseits (und dies nennt man den *intrinsischen Standpunkt*) kann man sich fragen, welche Eigenschaften von X der Varietät selbst inhärent und unabhängig von einer gewissen Realisierung zukommen. Die Varietät X ist typischerweise isomorph zu einer „anderen" Varietät X', die als eine abgeschlossene Teilmenge $X' \subseteq \mathbb{P}_K^{n'}$ gegeben ist. Welche Eigenschaften von X bzw. X' sind unabhängig von den jeweiligen Einbettungen?

Die beiden Standpunkte überschneiden sich, wenn man folgende Fragen betrachtet: Wie viele Einbettungen für ein gegebenes X gibt es? Kann man sich eine Übersicht über alle möglichen Einbettungen von X in einen projektiven Raum verschaffen? Gibt es eine beste Einbettung, wo etwa die Dimension des umgebenden Raumes klein ist oder wo die Beziehung zu ihm besonders übersichtlich ist. Gibt es eine besonders natürliche Einbettung, die mit charakteristischen Objekten auf X zusammenhängt?

Betrachten wir beispielsweise die abgeschlossene projektive Kurve

$$C = V\left(Y^2 - XZ\right) \subset \mathbb{P}_K^2.$$

Dies ist eine Kurve vom Grad 2, ihr Durchschnitt mit einer jeden Geraden besteht aus zwei Punkten (gezählt mit Vielfachheiten). Die Abbildung

$$\mathbb{P}_K^1 \longrightarrow \mathbb{P}_K^2,\ (s,t) \longmapsto \left(s^2,\ st,\ t^2\right),$$

induziert einen Isomorphismus $\mathbb{P}_K^1 \to C \subset \mathbb{P}_K^2$, d.h. die Kurve ist isomorph zur projektiven Geraden und somit eine „unnötig gekrümmte" Version der projektiven Geraden. Allerdings sind Kurven vom Grad zwei (Quadriken, Kegelschnitte) natürliche Objekte in der Ebene, und, von der projektiven Geraden aus gesehen, bilden die Elemente s^2, st, t^2 eine Basis der zweiten homogenen Stufe $K[s,t]_2$ des homogenen Koordinatenringes $K[s,t]$ der projektiven Geraden. Diese treten wiederum als globale Schnitte der invertierbaren Garbe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}(2)$ auf. In der Tat werden wir sehen, dass die verschiedenen Einbettungen von X in einen projektiven Raum mit globalen Schnitten auf invertierbaren Garben auf X zusammenhängen.

Invertierbare Garben und Morphismen in den projektiven Raum

Lemma 28.1. *Es sei X ein Schema über einem kommutativen Ring R, es sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X und es seien*

$$s_0, s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L}).$$

Es sei $U \subseteq X$ die Vereinigung der offenen Mengen X_{s_i}. Dann ist durch

$$U \longrightarrow \mathbb{P}^n_R,\, x \longmapsto (s_0(x),\, s_1(x),\, \ldots,\, s_n(x)),$$

ein Morphismus gegeben.

Beweis. Wir betrachten zunächst die Situation auf $X_i = X_{s_i}$. Es ist

$$\mathcal{O}_X|_U \longrightarrow \mathcal{L}|_U,\, 1 \longmapsto s_i,$$

nach Lemma 13.22 ein Isomorphismus von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Dabei entsprechen unter diesem Isomorphismus die s_k den Funktionen

$$f_{ki} \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X).$$

Dabei gilt

$$f_{ki} = \frac{s_k}{s_i},$$

und dieser Quotient ist wohldefiniert. Diese Funktionen f_{ki}, $k \neq i$, definieren wiederum nach Korollar 10.13 einen Morphismus

$$\varphi_i \colon X_i \longrightarrow D_+(x_i) \cong \mathbb{A}^n_R \subseteq \mathbb{P}^n_R.$$

Insgesamt liegt das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X_i & & \xrightarrow{\varphi_i} & & D_+(x_i) \cong \mathbb{A}^n_R \arrow[dr] & \\
& X_i \cap X_j \arrow[ul] \arrow[dl] \arrow[r] & & D_+(x_i) \cap D_+(x_j) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbb{P}^n_K \\
X_j & & \xrightarrow{\varphi_j} & & D_+(x_j) \cong \mathbb{A}^n_R \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

vor, da links so verklebt wird wie im projektiven Raum rechts. Somit setzen sich diese Morphismen zu einem Morphismus auf der Vereinigung der X_i zusammen. $\square$

Definition 28.2. Es sei X ein Schema über einem kommutativen Ring R, es sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X und es seien $s_0, s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ globale Schnitte auf X. Dann nennt man den nach Lemma 28.1 auf $U = \bigcup_{i=0}^n X_{s_i}$ definierten Morphismus

$$U \longrightarrow \mathbb{P}^n_R,\, x \longmapsto (s_0(x),\, s_1(x),\, \ldots,\, s_n(x)),$$

den durch die *Schnitte* $s_0, \ldots, s_n$ *gegebenen* oder den durch das *lineare System* $s_0, \ldots, s_n$ *gegebenen Morphismus*. Er wird mit $\varphi_{s_0,\ldots,s_n}$ oder mit $\varphi_{\mathcal{L};s_0,\ldots,s_n}$ bezeichnet.

Definition 28.3. Es sei X ein Schema über einem kommutativen Ring R und es sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X. Man nennt einen R-Untermodul $T \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L})$ ein *lineares System* auf X.

Wegen Aufgabe 28.9 hängt der durch eine Familie von Schnitten gegebene Morphismus in erster Linie von dem davon erzeugten Untermodul ab (insbesondere, wenn die Schnitte linear unabhängig sind, was man oft ohnehin fordert). Bei $T = \Gamma(X, \mathcal{L})$ spricht man von einem *vollen linearen System*. Ein lineares System hat eine geometrische Bedeutung. Jeder Schnitt $s \in T$ definiert den Invertierbarkeitsort X_s und das Nullstellengebilde $Z(s) := X \setminus X_s$. Bei $s \neq 0$ ist $Z(s)$ eine abgeschlossene Teilmenge von X der Kodimension 1, eine Hyperfläche von X (man denke an integres X). Die Familie $Z(s)$, $s \in T$, $s \neq 0$, ist somit eine Familie von Hyperflächen, die dem linearen System zugeordnet ist (oft nennt man dieses System das lineare System). Wenn X normal ist, so kann man die $Z(s)$ als eine Familie von zueinander linear äquialenten Divisoren auffassen.

Beispiel 28.4. Auf der projektiven Geraden

$$\mathbb{P}^1_R = \operatorname{Proj}(R[X,Y])$$

über einem kommutativen Ring R und das (volle) lineare System $(X, Y) \subseteq \Gamma\left(\mathbb{P}^1_R, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_R}(1)\right)$ ist der zugehörige Morphismus die Identität.

Beispiel 28.5. Auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_R = \operatorname{Proj}(R[X,Y])$ über einem kommutativen Ring R und das (volle) lineare System $(X^2, XY, Y^2) \subseteq \Gamma\left(\mathbb{P}^1_R, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_R}(2)\right)$ ist der zugehörige Morphismus ausgeschrieben gleich

$$\mathbb{P}^1_R \longrightarrow \mathbb{P}^2_R,\ (x,y) \longmapsto (x^2, xy, y^2).$$

Dem Punkt auf der projektiven Geraden mit den homogenen Koordinaten (x, y) wird also der Punkt in der projektiven Ebene mit den homogenen Koordinaten $(x^2, xy, y^2) = (u, v, w)$ zugeordnet. Das Bild erfüllt die Gleichung $uw = v^2$, d.h. das Bild liegt in der ebenen Kurve

$$V_+(uw - v^2) \subseteq \mathbb{P}^2_R.$$

In der Tat liegt eine Isomorphie $\mathbb{P}^1_R \cong V_+(uw - v^2)$ vor.

Definition 28.6. Es sei X ein Schema über einem kommutativen Ring R und es sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X. Ein lineares System $T \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L})$ heißt *basispunktfrei*, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ ein $s \in T$ mit $x \in X_s$ gibt.

Dies wird hauptsächlich für Schemata über einem Körper verwendet. Man sagt dann auch, dass die Schnitte $s_0, s_1, \ldots, s_n$ basispunktfrei sind, wenn das von ihnen erzeugte lineare System basispunktfrei ist.

Lemma 28.7. *Es sei X ein Schema über einem kommutativen Ring R, es sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X und es seien $s_0, s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ globale Schnitte auf X. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) *Es ist $X = \bigcup_{i=0}^{n} X_{s_i}$.*
(2) *Der durch das lineare System $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ definierte Morphismus nach $\mathbb{P}^n_R$ ist auf ganz X definiert.*
(3) *Das lineare System $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ ist basispunktfrei.*

Beweis. Siehe Aufgabe 28.14. □

Satz 28.8. *Es sei X ein Schema über einem kommutativen Ring R. Dann entsprechen sich die folgenden Konzepte.*

(1) *Eine invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ auf X zusammen mit basispunktfreien Schnitten*
$$s_0, s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L}).$$
(2) *Ein Morphismus*
$$\varphi\colon X \longrightarrow \mathbb{P}^n_R$$
über Spek (R).

Dabei wird den Schnitten der zugehörige Morphismus $\varphi_{s_0,s_1,\ldots,s_n}$ und dem Morphismus φ die invertierbare Garbe $\varphi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(1))$ zusammen mit den Schnitten $\varphi^*(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, zugeordnet.

Beweis. Es sei zuerst die invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ mit den Schnitten $s_0, s_1, \ldots, s_n$ gegeben. Es ist zu zeigen, dass
$$\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(1) \cong \mathcal{L}$$
ist. Auf dem projektiven Raum gibt es $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}$-Modulhomomorphismen
$$\Psi_i\colon \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(1),\ 1 \longmapsto x_i,$$
die eingeschränkt auf $D_+(x_i)$ Isomorphismen sind. Dies induziert $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismen
$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(1),\ 1 \longmapsto \varphi^*(x_i),$$
und Isomorphismen
$$\mathcal{O}_X|_{X_{s_i}} \longrightarrow \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(1)|_{X_{s_i}},$$
die in Verbindung mit den $\mathcal{O}_X$-Isomorphismen
$$\mathcal{O}_X|_{X_{s_i}} \longrightarrow \mathcal{L}|_{X_{s_i}},\ 1 \longmapsto s_i,$$
zu $\mathcal{O}_X$-Isomorphismen
$$\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(1)|_{X_{s_i}} \longrightarrow \mathcal{L}|_{X_{s_i}}$$

führen, bei denen sich $\varphi^*(x_i)$ und s_i entsprechen. Die Einschränkungen dieser Isomorphismen auf $X_{s_i s_j}$ stimmen überein, daher gibt es nach Korollar 4.10 einen globalen Isomorphismus

$$\varphi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(1) \longrightarrow \mathcal{L}.$$

Wenn umgekehrt ein Morphismus $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^n_K$ gegeben ist, so definiert dies Schnitte $s_i = \varphi^*(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, und dies wiederum den dadurch festgelegten Morphismus φ'. Es ist zu zeigen, dass diese beiden Morphismen übereinstimmen. Ein Morphismus ist lokal festgelegt. Unter der Einschränkung

$$\varphi^{-1}(D_+(x_i)) \longrightarrow D_+(x_i) \cong \mathbb{A}^n_K$$

werden aber die zugehörigen Variablen $\frac{x_k}{x_i}$ auf $\frac{s_k}{s_i}$ zurückgezogen, und mit diesen Brüchen wird φ' definiert. $\square$

Lemma 28.9. *Es sei X ein Schema über einem kommutativen Ring R, es sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X und es seien $s_0, s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ globale Schnitte auf X und $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^n_R$ der zugehörige Morphismus. Dann ist das Urbild der Hyperebene*

$$V_+(a_0 X_0 + a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n) \subset \mathbb{P}^n_R$$

(mit $a_i \in R$, nicht alle gleich 0) unter φ gleich der Nullstellenmenge

$$Z(a_0 s_0 + a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n) = X \setminus X_{a_0 s_0 + a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n}$$

des zurückgezogenen Schnittes $a_0 s_0 + a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n$.

Beweis. Dies folgt aus Lemma Anhang 4.3. $\square$

Zur getwisteten Strukturgarbe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(1)$ gehört über die Familie aller globalen Schnitte $\neq 0$ die Familie aller Hyperebenen im projektiven Raum. Ebenso gehört zu einer invertierbaren Garbe auf einem Schema über die Familie ihrer globalen Schnite $\neq 0$ die Familie ihrer Nullstellengebilde. Unter der in Satz 28.8 beschriebenen Korrespondenz sind die Urbilder der Hyperebenen gleich den Nullstellengebilden. Wenn φ durch eine abgeschlossene Untervarietät faktorisiert, also $X \to Y \subseteq \mathbb{P}^n_R$ vorliegt, so sind auch die Nullstellengebilde Urbilder von Durchschnitten $Y \cap H$ mit einer Hyperebene H. In Beispiel 28.5 etwa stimmt die Familie der Nullstellengebilde zum vollen linearen System aus $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_R}(2)$ mit der Familie der Durchschnitte $V_+(uw - v^2) \cap H$, H Gerade, überein.

Sehr ample Garben

Definition 28.10. Es sei X ein Schema über einem kommutativen Ring R und sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X. Man nennt $\mathcal{L}$ *sehr ampel*, wenn es eine Einbettung $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^n_R$ (für ein gewisses n) derart gibt, dass

$$\varphi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(1)) \cong \mathcal{L}$$

ist.

Lemma 28.11. *Es sei X ein Schema über einem kommutativen Ring R und sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X. Dann ist $\mathcal{L}$ genau dann sehr ampel, wenn es basispunktfreie globale Schnitte*

$$s_0, s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$$

derart gibt, dass der zugehörige Morphismus $\varphi_{s_0,s_1,\ldots,s_n}$ eine Einbettung ist.

Beweis. Dies folgt aus Satz 28.8. $\square$

Beispiel 28.12. Auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}^n_R$ über einem kommutativen Ring R sind die invertierbaren Garben $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(k)$ für $k \geq 1$ sehr ampel. Es ist

$$\Gamma\big(\mathbb{P}^n_R, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(k)\big) = R[X_0, X_1, \ldots, X_n]_k$$

und wir betrachten das durch sämtliche Monome aus $R[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ vom Grad k erzeugte lineare System und den zugehörigen Morphismus

$$\varphi\colon \mathbb{P}^n_R \longrightarrow \mathbb{P}^m_R,$$

wobei m die Anzahl dieser Monome weniger 1 bezeichne. Auf $D_+(X_0) = (\mathbb{P}^n_R)_{X_0^k}$ ist die Abbildung durch

$$\mathbb{A}^n_R \longrightarrow D_+(Y_\nu) \subseteq \mathbb{P}^m_R, \left(\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_n}{X_0}\right) \longmapsto \left(\frac{X^\mu}{X_0^k}, \mu \text{ Monom vom Grad } k \text{ in } n+1 \text{ Variablen}\right)$$

gegeben (und entsprechend auf den anderen $D_+(X_i)$). Auf der Ebene der Polynomringe ist dies der Einsetzungshomomorphismus

$$R[S_\mu, \mu \in I_k] \longrightarrow R[T_1, \ldots, T_n], \, S_\mu \longmapsto T^\mu,$$

wobei I_k die Indexmenge aller Monome in n Variablen vom Grad $\leq k$ (!) bezeichnet. Diese Abbildung ist surjektiv und somit liegt eine abgeschlossene Einbettung vor.

Bei $k \leq 0$ und $n \geq 1$ sind die $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(k)$ nicht sehr ampel.

Definition 28.13. Es sei X ein Schema über einem kommutativen Ring R und sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X. Man nennt $\mathcal{L}$ *ampel*, wenn $\mathcal{L}^n$ für ein $n \geq 1$ sehr ampel ist.

Abbildungsverzeichnis