Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2020/2021**

Algebraische Zahlentheorie

Arbeitsblatt 21

Aufgaben

Aufgabe 21.1. Man gebe ein Beispiel für einen Integritätsbereich R und einer Gruppenoperation einer endlichen Gruppe G auf R derart, dass nicht jeder Zwischenring S, $R^G \subseteq S \subseteq R$, der Invariantenring zu einer Untergruppe von G ist.

Aufgabe 21.2. Es sei R ein Dedekindbereich mit Quotientenkörper K, $K \subseteq L$ eine Galoiserweiterung vom Grad n und sei S der ganze Abschluss von R in L. Interpretiere den Satz über die Galoiskorrespondenz für die normalen Zwischenringe zwischen R und S. Welche Gruppen wirken auf diesen Ringen und wie sehen die Invariantenringe aus?

Aufgabe 21.3.*

Es sei R eine Dedekindbereich mit Quotientenkörper $K = Q(R)$ und sei $K \subseteq L$ eine endliche Galoiserweiterung mit einer Galoisgruppe G. Es sei S der ganze Abschluss von R in L und es sei $f \in S$ ein Element derart, dass $f\sigma$, $\sigma \in G$, eine R-Basis von S ist. Es sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe mit den Nebenklassen

$$H_1 = H, H_2, \ldots, H_k \,.$$

Zeige, dass die Familie

$$f_j = \sum_{\sigma \in H_j} f\sigma$$

zu $j = 1, \ldots, k$ eine R-Basis des Invariantenringes S^H ist.

Aufgabe 21.4. Es sei G eine Gruppe, die auf einem kommutativen Ring R als Gruppe von Ringautomorphismen operiere. Zeige die folgende Aussagen.

(1) Für die Einheiten gilt

$$\left(R^G\right)^\times = R^G \cap R^\times .$$

(2) Wenn R ein Körper ist, so ist auch R^G ein Körper.

Aufgabe 21.5. Es sei R ein kommutativer Ring und G eine Gruppe, die auf R als Gruppe von Ringautomorphismen operiere. Zeige, dass die Operation genau dann trivial ist, wenn $R^G = R$ ist.

Aufgabe 21.6. Es sei S ein kommutativer Ring mit $2 \neq 0$ und $a \in S$. Zeige, dass die Gruppe $\mathbb{Z}/(2) \cong \{1, -1\}$ auf der quadratischen Erweiterung

$$R := S[X]/(X^2 - a)$$

als Gruppe von S-Algebrahomomorphismen operiert, indem -1 durch $X \mapsto -X$ wirkt. Bestimme den Fixring zu dieser Operation.

Aufgabe 21.7. Es sei G eine endliche Gruppe, die auf einem kommutativen Ring R als Gruppe von Ringautomorphismen operiere. Zeige, dass zu jedem $f \in R$ sowohl $\sum_{\sigma \in G} f\sigma$ als auch $\prod_{\sigma \in G} f\sigma$ zum Fixring R^G gehören.

Aufgabe 21.8. Es sei R ein kommutativer Ring, auf dem eine endliche Gruppe G als Gruppe von Ringautomorphismen operiere. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ und jedem $f \in R$ ist der Ausdruck
$$\psi_k(f) = \sum_{T \subseteq G,\, \#(T)=k} \prod_{\sigma \in T} f\sigma$$
invariant.
(2) Wenn R einen Körper der Charakteristik 0 enthält, so erzeugen die $\psi_k(f)$, $f \in R$, $k \in \mathbb{N}$, den Invariantenring.
(3) Teil (2) gilt nicht ohne die Voraussetzung an die Charakteristik.

Aufgabe 21.9. Es sei R ein Dedekindbereich, $Q(R) \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und S der ganze Abschluss von R in L. Zeige, dass die Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(L|K)$ in natürlicher Weise auf der Divisorengruppe $\operatorname{Div}(S)$ operiert.

Aufgabe 21.10. Es sei R ein Dedekindbereich, $Q(R) \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und S der ganze Abschluss von R in L. Zeige, dass die Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(L|K)$ in natürlicher Weise auf der Divisorenklassengruppe $\operatorname{KG}(S)$ operiert.

Aufgabe 21.11. Es sei K ein Körper. Zeige, dass auf $K[X,Y]/(XY)$ eine Gruppenoperation von $\mathbb{Z}/(2)$ gegeben ist, indem das nichttriviale Gruppenelement X und Y vertauscht. Bestimme den Fixring zu dieser Operation.

Aufgabe 21.12. Es sei $n \in \mathbb{N}_+$. Betrachte auf dem rationalen Funktionenkörper $\mathbb{C}(X)$ die Gruppe der $\mathbb{C}$-Körperautomorphismen, die durch $X \mapsto \zeta_n X$ erzeugt wird, wobei ζ_n eine primitive n-te Einheitswurzel bezeichnet. Bestimme den Fixkörper $\mathbb{C}(X)^{\mathbb{Z}/(n)}$.

Aufgabe 21.13. Es sei K ein Körper der positiven Charakteristik p. Wir betrachten die durch $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugte zyklische Gruppe und ihre natürliche Operation auf $K[X,Y]$. Zeige, dass der Invariantenring gleich

$$K[Y, X^p - XY^{p-1}]$$

ist.

Aufgabe 21.14. Es sei K ein unendlicher Körper. Wir betrachten auf dem Körper $K(X,Y)$ die Operation von $K^\times$, wobei $\lambda \in K^\times$ durch $X \mapsto \lambda X$, $Y \mapsto \lambda Y$ auf $K[X,Y]$ wirkt und diese Wirkung auf den Quotientenkörper fortgesetzt wird. Zeige, dass der Fixring zu dieser Operation gleich $K\left(\frac{X}{Y}\right)$ ist.

Aufgabe 21.15. Es sei G eine Gruppe, die auf einem kommutativen lokalen Ring als Gruppe von Ringautomorphismen operiere. Zeige, dass der Fixring R^G ebenfalls lokal ist.

Aufgabe 21.16. Es sei R ein kommutativer Ring, auf dem eine Gruppe G als Gruppe von Ringautomorphismen operiere. Es sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, das unter der Gruppenoperation invariant ist (es gelte also $f\sigma \in \mathfrak{a}$ für $f \in \mathfrak{a}$ und jedes $\sigma \in G$). Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Es gibt eine natürliche Operation von G auf dem Restklassenring $R/\mathfrak{a}$.
(2) Es gibt einen Ringhomomorphismus

$$\psi\colon\ R^G/\left(\mathfrak{a} \cap R^G\right) \longrightarrow (R/\mathfrak{a})^G .$$

(3) Die Abbildung ψ aus Teil (2) ist injektiv.
(4) Wenn G endlich ist und R einen Körper der Charakteristik 0 enthält, so ist ψ surjektiv.

Aufgabe 21.17. Es sei G eine endliche Gruppe, die auf einem kommutativen Ring R als Gruppe von Ringautomorphismen operiere mit dem Invariantenring $S = R^G$. Es sei $T \subseteq S$ ein multiplikatives System. Zeige, dass es eine natürliche Operation von G auf R_T gibt, und dass der zugehörige Invariantenring gleich S_T ist.

Aufgabe 21.18. Es sei G eine endliche Gruppe, die auf einem kommutativen Ring R als Gruppe von Ringautomorphismen operiere mit dem Invariantenring $S = R^G$. Es sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spek}(S)$ ein Primideal. Zeige, dass es eine natürliche Operation von G auf dem Faserring $(R/\mathfrak{p}R)_{S \setminus \mathfrak{p}}$ gibt. Zeige, dass der zugehörige Invariantenring den Restekörper $\kappa(\mathfrak{p})$ enthält. Zeige durch ein Beispiel, dass dabei der Restekörper echt kleiner sein kann.

Aufgabe 21.19. Es sei G eine Gruppe, die auf einem kommutativen Ring R als Gruppe von Ringautomorphismen operiere mit dem Invariantenring $S = R^G$. Zeige, dass G in natürlicher Weise auch auf dem Polynomring $R[X]$ operiert, und dass der zugehörige Invariantenring gleich $S[X]$ ist.

Aufgabe 21.20. Es sei G eine endliche Gruppe, die auf einem kommutativen Ring R als Gruppe von Ringautomorphismen operiere. Es sei $f \in R$. Zeige, dass das Polynom

$$P = \prod_{\sigma \in G} (X - f\sigma) \in R[X]$$

unter der natürlichen Operation von G auf dem Polynomring $R[X]$ invariant ist.

Betrachte unter diesem Aspekt nochmal Aufgabe 21.5 und Aufgabe 21.6.

Aufgabe 21.21. Es sei R eine Dedekindbereich mit Quotientenkörper $K = Q(R)$ und sei $K \subseteq L$ eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe G. Es sei S der ganze Abschluss von R in L. Es sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe mit dem Fixkörper M, $K \subseteq M \subseteq L$. Zeige, dass der Ganzheitsring T von R in M gleich dem Invariantenring S^H ist.

Aufgabe 21.22. Es sei $R \subseteq S$ eine Erweiterung von kommutativen Ringen. Zeige, dass die Automorphismengruppe $\operatorname{Aut}_R(S)$ in natürlicher Weise auf dem Modul der Kähler-Differentiale $\Omega_{S|R}$ R-linear operiert.

Aufgabe 21.23.*

Es sei K_5 der fünfte Kreisteilungskörper und R_5 der fünfte Kreisteilungsring. Bestimme die 3×3-Matrizen, die die Operation der Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(K_5|\mathbb{Q})$ auf dem Modul der Kähler-Differentiale bezüglich der Basis aus Beispiel 19.8 beschreiben.

Aufgabe 21.24. Es sei K_7 der fünfte Kreisteilungskörper und R_7 der fünfte Kreisteilungsring. Bestimme die 5×5-Matrizen, die die Operation der Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(K_7|\mathbb{Q})$ auf dem Modul der Kähler-Differentiale bezüglich der Basis aus Beispiel 19.8 beschreiben.

Aufgabe 21.25. Es sei G eine Gruppe und M eine Menge. Es sei $\operatorname{Perm}(M)$ die Gruppe der Permutationen auf M. Zeige folgende Aussagen.

(1) Wenn G auf M operiert, so ist die Abbildung

$$G \longrightarrow \operatorname{Perm}(M),\ g \longmapsto (x \mapsto gx),$$

ein Gruppenhomomorphismus.

(2) Wenn umgekehrt ein Gruppenhomomorphismus

$$\varphi\colon\ G \longrightarrow \operatorname{Perm}(M),$$

vorliegt, so wird durch

$$G \times M \longrightarrow M,\ (g,x) \longmapsto (\varphi(g))(x),$$

eine Gruppenoperation von G auf M definiert.

Aufgabe 21.26. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Betrachte die Gruppenoperation der n-ten Einheitswurzeln durch Multiplikation auf $\mathbb{C}$. Bestimme die Bahnen und die Isotropiegruppen dieser Operation. Kann man die Quotientenabbildung durch eine polynomiale Funktion realisieren?

Abbildungsverzeichnis