

Lineare Algebra und analytische Geometrie II**Arbeitsblatt 52****Übungsaufgaben**

AUFGABE 52.1.*

Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass die offenen Kugeln $U(x, \epsilon)$ offen sind.

AUFGABE 52.2. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass die abgeschlossenen Kugeln $B(x, \epsilon)$ abgeschlossen sind.

AUFGABE 52.3. Es sei X ein Hausdorffraum und es sei $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, die die induzierte Topologie trage. Es sei Y kompakt. Zeige, dass Y abgeschlossen in X ist.

AUFGABE 52.4. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass folgende Eigenschaften gelten.

- (1) Die leere Menge \emptyset und die Gesamtmenge M sind offen.
- (2) Es sei I eine beliebige Indexmenge und seien $U_i, i \in I$, offene Mengen. Dann ist auch die Vereinigung

$$\bigcup_{i \in I} U_i$$

offen.

- (3) Es sei I eine endliche Indexmenge und seien $U_i, i \in I$, offene Mengen. Dann ist auch der Durchschnitt

$$\bigcap_{i \in I} U_i$$

offen.

AUFGABE 52.5. Es seien L und M metrische Räume und $m \in M$. Zeige, dass die konstante Abbildung

$$f: L \longrightarrow M, x \longmapsto m,$$

stetig ist.

AUFGABE 52.6. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass die Identität

$$M \longrightarrow M, x \longmapsto x,$$

stetig ist.

AUFGABE 52.7. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge mit der induzierten Metrik. Zeige, dass die Inklusion $T \subseteq M$ stetig ist.

AUFGABE 52.8. Sei V ein normierter \mathbb{K} -Vektorraum und

$$\varphi_w: V \longrightarrow V, v \longmapsto v + w,$$

die Verschiebung um den Vektor $w \in V$. Zeige, dass φ_w stetig ist.

AUFGABE 52.9. Sei (M, d) ein metrischer Raum und sei

$$f: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $x \in M$ ein Punkt mit $f(x) > 0$. Zeige, dass dann auch $f(y) > 0$ für alle y aus einer offenen Ballumgebung von x gilt.

AUFGABE 52.10. Sei (M, d) ein metrischer Raum und seien $a < b < c$ reelle Zahlen. Es seien

$$f: [a, b] \longrightarrow M$$

und

$$g: [b, c] \longrightarrow M$$

stetige Abbildungen mit $f(b) = g(b)$. Zeige, dass dann die Abbildung

$$h: [a, c] \longrightarrow M$$

mit

$$h(t) = f(t) \text{ für } t \leq b \text{ und } h(t) = g(t) \text{ für } t > b$$

ebenfalls stetig ist.

AUFGABE 52.11. Zeige, dass die Addition

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y) \longmapsto x + y,$$

und die Multiplikation

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y) \longmapsto x \cdot y,$$

stetig sind.

AUFGABE 52.12. Zeige, dass eine polynomiale Funktion

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n),$$

stetig ist.

AUFGABE 52.13. Zeige, dass eine reelle Quadrik, also eine durch ein reelles Polynom vom Grad zwei gegebene Nullstellenmenge (siehe die 43. Vorlesung), eine abgeschlossene Teilmenge des \mathbb{R}^n ist.

Wie sieht das für polynomiale Nullstellengebilde von höherem Grad aus?

AUFGABE 52.14. Es seien L, M, N metrische Räume und seien

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen. Es sei f stetig in $x \in L$ und es sei g stetig in $f(x) \in M$. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung

$$g \circ f : L \longrightarrow N, x \longmapsto g(f(x)),$$

stetig in x ist.

AUFGABE 52.15. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto |z|,$$

stetig ist.

AUFGABE 52.16. Zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \max(x, y),$$

stetig ist.

AUFGABE 52.17. Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

die durch

$$f(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0, \\ 0, & \text{falls } y \leq 0, \\ y/x, & \text{falls } x \geq y > 0, \\ x/y, & \text{falls } y > x > 0, \end{cases}$$

definiert ist. Zeige, dass die Einschränkung von f auf jeder zur x -Achse oder zur y -Achse parallelen Geraden stetig ist, dass aber f selbst nicht stetig ist.

AUFGABE 52.18. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine nichtleere Teilmenge. Zeige, dass durch

$$d_T(x) := \inf(d(x, y), y \in T)$$

eine wohldefinierte, stetige Funktion $M \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist.

AUFGABE 52.19. Sei (M, d) ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M . Zeige, dass die Folge in M genau dann im Sinne der Metrik konvergiert, wenn sie im Sinne der Topologie konvergiert.

AUFGABE 52.20. Es seien X und Y topologische Räume und es sei

$$\varphi: X \longrightarrow Y$$

eine stetige Abbildung. Es sei X kompakt. Zeige, dass das Bild $\varphi(X) \subseteq Y$ ebenfalls kompakt ist.

AUFGABE 52.21.*

Zeige, dass das offene Einheitsintervall $]0, 1[$ und das abgeschlossene Einheitsintervall $[0, 1]$ nicht homöomorph sind.

AUFGABE 52.22. Zeige, dass die Abbildung

$$[0, 2\pi[\longrightarrow S^1, t \longmapsto (\cos t, \sin t)$$

zwischen dem halboffenen Intervall $[0, 2\pi[$ und dem Einheitskreis

$$S^1 = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \|P\| = 1\}$$

stetig und bijektiv ist, dass die Umkehrabbildung aber nicht stetig ist.

Zu einer beliebigen Menge M kann man durch

$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y, \\ 1, & \text{falls } x \neq y, \end{cases}$$

eine Metrik definieren, die die *diskrete Metrik* heißt.

AUFGABE 52.23. Es sei $X = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik und $Y = \mathbb{R}^n$ mit der diskreten Metrik. Es sei

$$f: Y \longrightarrow X$$

die Identität. Zeige, dass f stetig ist, die Umkehrabbildung f^{-1} aber nicht.

AUFGABE 52.24. Sei X eine nichtleere Menge versehen mit der diskreten Metrik. Zeige, dass eine stetige Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow X$$

konstant ist.

AUFGABE 52.25. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $= \mathbb{C}$. Es sei $H \subset \mathbb{K}^{n+1}$ ein n -dimensionaler affiner Unterraum, der den Nullpunkt nicht enthält, und es sei \tilde{H} der dazu parallele Unterraum durch den Nullpunkt. Es sei $U \subseteq H$ eine in $H \cong \mathbb{K}^n$ offene Menge (in der metrischen Topologie) und es sei V die Vereinigung aller Geraden durch den Nullpunkt und durch einen Punkt von U . Zeige, dass der Durchschnitt von V mit $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \tilde{H}$ offen ist.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 52.26. (2 Punkte)

Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum im euklidischen Raum \mathbb{R}^n . Zeige, dass V abgeschlossen im \mathbb{R}^n ist.

AUFGABE 52.27. (4 Punkte)

Es sei V ein euklidischer Raum. Zeige, dass die Norm

$$V \longrightarrow \mathbb{R}, v \longmapsto \|v\|,$$

eine stetige Abbildung ist.

AUFGABE 52.28. (4 Punkte)

Es sei

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

stetig und additiv, d.h. es gelte $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass φ dann \mathbb{R} -linear ist.

AUFGABE 52.29. (5 Punkte)

Im Nullpunkt $0 \in \mathbb{R}^3$ befinde sich die Pupille eines Auges (oder eine Linse) und die durch $x = -1$ bestimmte Ebene sei die Netzhaut $N \cong \mathbb{R}^2$ (oder eine Fotoplatte). Bestimme die Abbildung

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

die das Sehen (oder Fotografieren) beschreibt (d.h. einem Punkt des Halbraumes wird durch den Lichtstrahl ein Punkt der Netzhaut zugeordnet). Ist diese Abbildung stetig, ist sie linear?