師範叢書

3

中等學校算學教學法

Arthur Schultze 著
蘇笠夫譯

商務印書館發行

師範叢書

中等學校算術教學法

Arthur Schultze 著
蘇笠夫譯

商務印書館發行

序

普通學生往往不喜歡算學，尤其中等學校的學生最利害．我記得在中學時代，十之八九的同學是在討厭算學，對於算學並不輕視，恐怕比其他課程還要看重些——因爲是三主科之一；也並不是不用功，恐怕大部份時間學生們在背誦定理，公式或演題．但是結果往往只是勉强敷衍了敎師，其實仍然莫名其妙．及至畢業後除去預備升學不得不加以溫習外，大多數的同學都把算學課本置之高閣，甚至稍與算學有關係的科學也不敢問津了．等到我畢業師大後即到各處中等學校去服務，隨時便注意學生對於算學的興味．據我攷查的結果，有的學生說算學太困難了，有的學生說算學太乾燥了，而眞正喜歡算學的學生實在是極少數．大致的情形仍然與我在中學時代的情况相彷彿．

但是爲什麼學生都這樣不喜歡算學呢？不見得算學本身就有討厭性吧．本書在第一章裏說的好，『如果用機械方式去學習，再沒有其他學科像算學這樣使學生費力而無味，結果竟毫無所得．另一方面說，如果敎授得法再沒有其他中學課程像算學能使學生發生濃厚的興味與獲得偉大的效果．』的確是這樣．所以我們可以肯定的說，中等學校的學生所以討厭算學與缺乏成績者，惟一的（至少是

主要的）原因便是教學不得其法．因此，我們這些中等學校的算學教師們如果是不願意再敷衍塞責，那末對於中等學校的算學教學法非要研究不可，非要改良不可．

但是在我國方面，關於中等學校的算學教學的著作可以說是極感缺乏，同時似乎大家也未曾注意到這些．在師大時我記得有一學期算學系的選修課程中訂有算學教授法兩小時，但到實行上課時，只因爲無人擔任竟爾取消了．師大算學系是專門造就中等學校算學師資的，倘且這樣忽略它，其餘可想而知了．有的人或許這樣想，認爲只要對於普通教學法或教學原理加以注意就足以應用在算學教學上．其實不然，因爲那些科目只是研究普遍的理論，概括的事實，對於具有特殊性質的算學是不能適用的．所以算學教學法有專門研究的必要，而且爲溝通理論與經驗起見，最好由算學教師們負起這個責任．

舒慈這本著作很能具體的把中等學校的算學教授的實際，清清楚楚的寫出來，最宜於應用．現在特爲譯出以供算學教師們或預備作算學教師者的參攷．並希望引起我國教育界對於算學教學的注意．可惜我個人學識淺薄，錯誤的地方在所難免，倘望大家指示！

本書關於普通算學教學法似乎太略，譯者另外補充了一些，至於其他部份只小有出入沒有大更動，特此聲明．

吾妻含英給我不少的幫助，特此誌謝．

二十二年四月蘇笠夫序於河南安陽洹上

省立第二高級中學校

原　序

作者在 1906 年上曾為紐約大學作過一年的講演，專門在討論「中等學校的算學教學法」，在這些講演中，大部份是具體的討論在實際教學時所發生的各種問題.這一本書的內容也是同樣的計劃，可惜因爲個人職務上的忙迫和身體的衰弱，不能把中等學校範圍內所有關於這一類的討論完全寫出來！但是關於重要與基本的題目的討論却非常詳盡，作者總希望對於沒有經驗的教師有所幫助，其實說來，對於這些新手如果只講些抽象的教育原理，不但無用而且是無意義.

這本書的主要目的是在使算學教學偏重訓練方面而減少敘述的方式.有好多教師很承認算學教學之所以有價值是在才能的訓練，而不只是算學事實的敘述.理論上雖然是這樣，但是一到了實際教學仍然是偏重敘述方面.學生仍然是只學些證明而不注意怎樣證法.所以這樣的原故，一部份是因爲外來的惡劣環境教師沒有方法去反抗不得不如此，一部份也是因爲有的教師根本不了解新式的算學教學法，他們多半是繼承他們的教師所用的舊方式.這是無疑義的在美國關於算學教學的兩本很著名的著作——一本係 David Eugene Smith 所作，一本係 J. W. Young 所作.——差不多各算學教師

們都得到它們極大的幫助，但是這兩本書倒不能答覆許多具體的問題，因為它們討論的範圍太廣大了．這本書討論的範圍雖然很狹小，却很詳盡很具體．所有關於小學教學方面，歷史方面，物質設備方面，算學學會方面，等等都一概放棄，即對於普通教學法也只討論其重要及最有用的部份．

這一本書極力主張算學教授應縮減敘述方面却積極指示如何訓練學生自己去解答問題而不是使他們只學習一些算學的事實，這是本書很時髦的一點．但是本書贊成犧牲算學裏倘有疑問的實用部份而不使之有礙真正算學的研究，這是本書不時髦的一點．著者固然認為有些實用工作極有用且富於興味，但不相信算學研究的眞正價值只在實際的利用．所以不承認只是測量戲院前廳的地板，或製出門窗的圖案，便是算學研究的眞正目的．

本書除去純粹教育的討論外，還有幾章專討論純算學的幾個節目，因為它們很影響教學，教師們也該熟悉的．這些節目主要的是關於證題法（第十一章），其次還有算學的基礎（第四章），等分圓周，與其他題目．如果只偏重教育方面，這些篇章也可以不看．

這本書也像其他的教育著作，當然免不掉有許多地方在富有經驗的教師看來未免是些老生常談．但是如果只為有經驗的教師去寫，對於後進的教師便等於無用，其實對於素無經驗的教師或將來預備作教師的人們，算學教育學的研究才關係重要呢．

Dr. Joseph Kahn 與 Mr. W. S. Schlauch 曾為詳細校對與指示，著者無任感激，特此誌謝．

著者舒滋 (Schultze)

6, 1912, 於紐約．

目錄

中等學校算學教學法

第一章

算學教學的效能所以低微的原因

中學教育的失敗

算學教學的現狀——近來有許多的人們都不滿意算學教學的結果，因而改革教法的運動盛極一時，而好些算學教師們更因之增加研究算學教育的興味．雖然現在教育學是進步了，算學教師也都努力了，但是普通所得的效果仍然不能令人滿意．據學校考試所得的皮相成績常常很有可觀，然而其實並不是這樣．學生並得不到算學的眞精神，往往不能應用他的算學知識到高深的工作或實用問題上．只要你有機會測驗普通學生所得的眞正算學教學的結果，你一定發現這種教育的效能是異常的低微．

改良算學教學的意見——算學教學的方法亟應該去改良，差不多這是普通的意見．但是討論到從前教學法缺點之所在，與改革辦

法，則意見紛歧莫衷一是.

"算學能戕賊人的本性，怎樣教授也無甚效果的，只因它有相當用途才忝列中學課程之一"——"它與人生太隔絕了，以至不能引起學生的興味"——"決沒有像這樣東西而能夠用以訓練才能的，因而算學教育並無價值可言，"等等. 這些理由都是不喜歡算學的人們所主張的，其實他們並不完全了解算學的眞正性質，他們居然願意把算學改換成他們所喜歡的科目，如經濟學，心理學等.

"算學教育之所以無效果，可以說完全是因爲教師沒有盡到他們的力量，同時他們也不能使學生盡量的工作，"這是校長或督學有時發表的意見.

還有些算學教師（幸已日見減少）這樣說:"學校的算學必須使之嚴刻化. 如果用科學的態度教授極限與不能通約量 (Incommensurable quantity)的意義，同時不隨隨便便的假定可以證明的事物，這樣每個畢業生再不至不了解算學，再聽不到 $\sqrt{a^2+b^2}$ 等于 $a+b$ 的謬論."

但除去這些門外漢或偏見者，差不多所有的算學教師們都在試驗着尋求方策去改進現狀，其中多數的主張教學純粹科學時要常常顧到實用方面. 他們認爲應該在教學時把純粹算學與實用部份相並而行，總使純粹算學發生實用，而儘量的縮減幾何與代數那些不能直接實用的部份.

這是無疑義的，普通都承認教材的排列應該先具體而後抽象，並且認爲許多只有很長歷史的算學材料却不見得有甚麼價值，在在

足以表現算學教育學有了很長足的進步．不過只根據這一個原則，縱然盡其量的應用，能否整理教材使徹底的得着進步，似乎是個疑問．況且按現在的環境，只靠着變更教材，能否得着進步，也是疑問；因爲教育效能的低微，並不只限於算學，其他學科也是一樣．普通學生在很短的時間便忘掉了許許多多他所學過的歷史，物理，經濟，有人曾這樣說過，他們實在得着的知識比較他們已經學過的知識總量與程度相差不可以道里計，並非虛語．所以算學教學之所以失敗，不能只歸罪教材的選擇不當，主要的應歸罪於各種學科教學上所共患的普遍病因．

換一句話說，作者認爲我們不要只歸罪局部的病因，必須整個的注意，因此只有分析所以使各科教學失敗的總源，庶幾能發現正當的改革辦法．

我們學校的缺點——雖然我們不能否認最近幾十年來教育上有長足的進步，但是仍有許多的事實表現出來，我們學校所得的效果並不償學生與教師雙方所費的時間與努力．一般空論的教育家似乎在贊譽現在的學校，然而所有公正的人們只要有機會去測驗畢業學生的眞正成績與着實的知識，總是要對於現在所稱道的學校懷疑．商人尋覓櫃夥時，總是感到從來沒有像現在這樣的困難去尋得一個妥當人，又能寫，又會算．中學的敎師們當招生時，看到好多的新生，雖然考查他們過去考試的成績很好，其實對於小學課程了解的太少了，同時敎授們對於中學教育也頗抱悲觀．再翻閱許多出版物中的批評，太多數也都是表示不滿意現在的學校．

有好些教育者總是想法譏誚這樣的議論，認為是可恥的誇大與吹牛．但是凡親身與學生或畢業生接觸過的人們，沒有人否認這些個論調．實在大多數的學生，不但忘掉了不必要的事實，而且竟忘掉那些最基本最切要的東西．可以說，這樣低微的效果，殊不足以酬償所費掉的時間與努力！

有的人們或許這樣設想，認為學生雖然所獲得的知識極為有限，也許是得到了才能以作補償．但是這一方面的獲得也微乎其微，而且這種獲得也多半是因為個人的自然發達，並不是埋首死讀的結果。無論誰個只要有機會考察青年在學校的工作，就可看出他們用理解力的地方很少．決不是大多數的學生沒有生就基本的智慧，乃是他們無機會去用它，他們似乎不曉得理解力是尋求答案的較好工具，至少比無思想的重述字句高明百倍．

最顯然的收獲要算是普通教養上訓練上的效果了．不過這也不是死讀與臨時用功而得的結果，乃是學校裏教育空氣所熏染的影響；其中懶惰學生與勤苦學生所得的幾乎是一樣．總之，我們無論在那一方面，總找不到一個中學生四年勤苦工作與努力所得到的相當效果！

如果我們只估計眞正的結果，並不把誤謬的考試成績作標準，我們很難說現在普通的中等學校是一架有效能的機關．着實說來一個中庸才智的學生只須在四年中每天受着二三小時的有效教育，便能獲得如中學畢業生一樣眞正的教育與訓練．但是這樣的學生，可不一定能够表現在考試上有十分好的成績．

中學教育的效能所以低微的原因

太注重外表的成績——學校教育的效能所以低微的原因自然是很多，不過其中最主要的一個，似乎是因爲學校太注重表現工作了。眞正的成績沒有可稱道的，往往只把'表現'當作主要的目的，只爲考試的成績不惜把課程堆積起來（拼命增加教授的數量），實行絕不宜于學生的獎勵，寧犧牲了好的教學法，都是因爲這種虛榮心從中作祟.

考試——我們都曉得太着重了考試定然發生很壞的影響，此地我們無須對於這一點十分的詳細討論. 歸納起來可以說，適宜的考試是必要的，但是如果把考試當作學校生活的中心，便會發生弊端，尤其是帶有競爭性的考試. 同時把考試看作工作的測驗標準，或看作學校效率的指示記號，並不可靠. 極端不好的考試成績，固足以表示教育的缺陷，即一種非常好的成績，也不見得就眞正表示一個學校的效率，甚或適得其反. 這樣好的成績反常常表示教學方法的誤謬與教師學生雙方的共同作弊. 總之，考試絕不是測驗學校效率的正當方法，這種事實早已爲各文明國所承認，因而在許多國家裏都在降低考試的價值，在美國有許多教授在反對濫用考試，但可惜行政人員往往反對此說，因而考試濫用的毒害仍得以苟延下去.

堆積的學習——現在有許多人盡量的在吞進知識的食物，以至不能消化，我們常常看到（一點也不稀奇）一個受過教育的人每月一定要讀幾種小說與好些雜誌，每星期要看一次戲劇，更常常的參

加音樂會，講演會，與藝術展覽，並且每天還要看幾份報紙，件件都迅速的作過，而結果樣樣都得不到深的印象．對於這些事體沒有時間去思索，沒有時間去探討，結果只得到表面的淺薄的知識．

有的人很希望使學校努力於培養深造方面，極力在防止淺薄的成績．但是所得的結果大謬而特謬，他們簡直是些個大罪人．只因爲他們渴望得到外表的成績，乃强迫着學生在已定的時間內作出過多的工作；這樣所獲得的結果當然只限於表面，雖多而不精．有的學校用六個月的工夫授完全部平面幾何，並且常以此矜誇．甚至在中學裏四年所學的課程，實際上普通成人或許八年還學不完．這樣‘貪多嚼不爛’的教育，只有壞的影響，只有害了學生！

我們常常看到一個中學生，每晚熟讀十頁至十五頁的歷史，四頁幾何，與其他等量的課程；並且這樣死填活塞的辦法繼續着一天又一天，一年又一年．試問能有幾個平常人能夠消化這些材料？恐怕大多數的學生對於這樣堆集的材料不能夠了解！這種工作非常機械，並不需要什麼智慧和理解，學生只是在背誦在記憶，甚且不知道尙有其他方法能求得知識也．

兩種學習法——學習新的東西普通有兩種方法．有的人如果打算學習一個新題目，便重複的念課本，一直等到每字每句都印在心裏，任一部份都可背誦出來爲止．有的人不是這樣，他念的時候少，只是對於所學的題目深深的去思索，他想法把未知與已知的關聯起來；想法去求解所有該題目中所包含的問題．因此他對於該題目所關係的各方面都能夠研究到，都得到深刻的認識．這樣研究式的學習

較記憶法遲緩，但是這樣學習的結果踏實而且對於所研究的題目能夠眞正的了解.第一種方法（記憶）用以學習初等的東西倒很相當，但對於較高深的題目便絕對的無效果，如學習乘法表(Multiplication table) 拼字，外國語初步，只可機械的記憶,不過如用以學習幾何，物理，哲學等科目便是極大的誤謬.

許許多多的學生只知道用第一種方法．他們並沒有把幼年的記憶法改良到研究的學習．但是應用他們背誦字句的能力，得着一些虛僞的知識，常常能欺騙過其他的人們和他們自己，居然都相信他們已竟把所學的都貫澈了．不過這樣知識不久即行忘掉那時即可證其虛僞．在最短的時間學習過多的東西，無論必要與否毫不加以選擇，結果沒有不完全忘掉的，另一方面看，如果一個人應用第二種方法去學習他對於所學的重要部份，一定得着很深的印像永遠不會忘的，縱然有時忘記也不難推求出來。他的那種深思默想，多方研究，定然在他腦筋裏形成一種很堅固的知識骨幹，其他的細微節目都像枝葉是的附着其上．換言之，他這樣求得的知識是有組織有系統的．

學校多半奬勵記憶而忽略推理——在前段業已指出來機械式的記憶對於學習最初步最基本的事實是最適當的方法．這一點正可以拿來解釋初年級的教學較高年級所以有效力的事實．在高深的課程裏面科目本身的性質便使得只靠記憶的學習是不生效果的．

不過我們中等學校不但奬勵記憶而且有時差不多是强迫着學生走入歧途，以至把記憶當作惟一的學習法，因爲只有用記憶他才可

以滿足學校的直接要求.

每天授給學生的課程使學生必須囫圇吞下毫無選擇的機會，更談不到怎樣去思想去推求去研究，他只有記憶只有背誦. 這樣的學習當然要變成機械的工作. 關於這一點雖然經許多的教育學者的嚴重抗議，但是大部份的課程仍然只是在講授. 在許多學科的教學仍然只着重知識而不在能力，縱然對於非用思想不可的學科也常常在講述. 因爲講述法比起研究的方式進行較快，且較易收到外表的成績故也. 如果把學生好好的填塞起來，當表現出何等的冠冕堂皇! 他們考試的結果又是何等的優良! 雖然後來的效果很有限，但又有誰能注意到? 當到學生很流暢的談些複雜的經濟問題似乎很澈底，其實還許用了好些他不懂得的字句，大家却都很滿足. 但經過相當的時期如果不給他一些暗示或參考，即對於極簡單的新問題他或許一點也解答不出.

在這樣的情形，我們怎能驚奇學生永遠不想法改變在小學所養成的習慣——機械式的記憶? 又怎能驚奇在較高級學校裏教學的效能降低，尤其是在中學裏?

過度應用記憶力與忽略推理力的養成，可以說這是只顧到外表的錯誤觀念所發生的惡果，而這種觀念却支配了極大多數的學校!

特殊學生——我們曉得尙有少數學生具有特殊的記憶力，對於一切的學科都可記住不忘. 雖然這些學生堆積了許許多多的未經消化的知識，但的確可憐! 因爲他們把較可寶貴的能力智慧都任其荒蕪，而沒有工夫來培養! 他們只爲應付環境，記憶變作了惟一適用

的工具．這樣學生很難變作思想家和發明家，他們根本就不會獨立的發生意見，只不過人云亦云而已！但在學校裏這些特殊學生大家都認為是最優秀的份子，他們的父兄和師友，都時時在獎譽在希望．

但是這些特殊學生後來結局很少的能够使希望他們的人滿意．他們往往不善於應付環境或成功偉大的學者．只因為他們皮相的成功多走入教育界，而他們總覺每個人都應該具有像他們自己那樣的記憶力．這樣的人們一旦得到較高的地位，常常主張或變本加厲的提倡塡塞式的教法．

另一方面說，具有很大能力的學生，有時却不長於記憶，因而他們的教師就認為是無希望的蠢物．從來有好些偉大人物當學生時雖被認作愚鈍者，其實只因為他們沒有鸚鵡性的聰明而已．

因此我們決不能把記憶力的大小認作測量學生能力的主要標準，在人生中較為有用的東西是知道許多事實的知識呢？還是智慧的能力呢？是人云亦云的能力呢？還是自己有獨立思想的能力呢？

普通情形對於算學教學的影響

我們對於各中小學實地觀察一下，就不會驚奇算學教學所得的結果這樣惡劣．有些學校中整個的空氣是在阻止眞正算學的精神以至無法實行適當的教學．有好些學校當局根本不認識，不了解與不需要好的算學教學法，同時對於虛僞的表面成績却十分重視．並且因為學生時間的缺乏，艱苦的考試準備，由歷來機械工作所得的機械才能，死板記憶的惟一學習法，以及種種惡劣習慣的養成，我們

何能責怪教師們違背了個人較好的主張而應用這種不相宜的方法．我們知道拋棄了正當的算學教學法而代以堆積填塞的教授，不但無用而且積極的還有害於學生，因爲把算學當作說明的學科是極端的討厭與有害心靈．

如果用機械方式去教學，沒有其他學科像算學這樣使學生費力而無味，結果竟毫無所得．另一方面說如果教學得法，再沒有其他中學課程像算學能使學生發生濃厚的興味，與獲得偉大的效果．實際上這種特點構成這種教學的主要價值之一，當我們決定算學教學的目的與方法時必須時時刻刻要顧到這一層．

第二章

算學的價值與算學教學的目的

無論教學那一種學科必須要明白該科的價值與特性，教學算學尤須注意這一點．因爲算學的性質與價值，與其他學科截然不同故也．

‘算學的價值在那裏？’這個問題可分作兩方面來答覆．一是在實用上的價值，一是在訓練上的價值．

I **在實用方面的價值**——算學在這一方面的價值極爲偉大．實在說起來，近代整個的物質文明，都間接的歸功於算學．這並非誇大之詞，我們試放開眼光考察一下，所有的現代新思想新生活，那一樣不是因爲科學進步的結果？那一樣不是受了專門技術改良的影響？至於科學之所以進步，技術之所以改良，都與算學有密切的關係，甚且以算學作基礎．

算學與科學——一種科學如果從僅僅說明性質的關係，進步到數量的計算，才能變成精確的科學，才能發生偉大的功用．所以康德說‘一種科學只要能應用算學，便會精確起來．’其例甚多，玆略舉一二．

在物理學中，光線屈折定律在未用數量計算只說到折光性質的時候，無甚價値；及數量定律發明以後，折光變成一種算學問題，人們才能利用牠製造眼鏡，顯微鏡等光學器具；光學才得進步到今日的程度.

同樣，因運動定律及萬有引力的發明，遂將天空的力學諸問題，變成算學的問題；而這一部分天文學因藉算學的精確，居然於短的期間達到完善的地位.

我們知道物理學與天文學，都是極精確的科學. 其與算學的關係，這樣密切. 其他科學，如化學，地質學，經濟學及生理學，也都需要算學的幫助；卽心理學如果承認威卜費諾(Weber Fechner)定律，也不能離開算學而獨立.

要想明白自然界的現象，在在需要算學的知識；所以打算研究科學，非以算學作工具不可. 決沒有這樣的一個人，毫無算學知識，而能够作一個精確的科學家.

算學與人生——現在世界上關於人生一切的事物，——生產，消費，分配，一切的一切，——都須利用靈巧的機器，專門的科學，精妙的技術來應付. 而這些學術之中，如工程學，建築學，航海學，測量學，機械力學，統計學……都多少要靠着算學的輔助. 所以美國佛斯教授 (Prof. Voss) 說: '現代的文化，凡是關於天然的現象的研究，與物質的利用，都建設基礎於算學的科學上.'

再拿國家來說: 其國內的工業，如果僅憑經驗的技術，而不用科學的方法；一定要在工商業競爭場中落後，以至于不能立足. 像

這樣的國家，非處於失敗的地位不可.

算學與日常生活——居家度日，最簡單的生活，也離不開算學. 量入爲出，存款放賬，買賣交易，都須運用算學. 還有許多的事情，似乎與算學無關，其實能多用些算學，必能將事物越發處理得妥當. 舉例爲證:

繩長爲一定，問作如何形狀，其包圍的面積最大?

一塊長方形硬紙，寬二尺，長三尺. 在四角剪去四片相等正方塊，餘紙摺起可作成長立方形無蓋盒一隻. 問剪去之方塊多大，盒子才能有最大的容量?

同一木材，擬作樑柱之用，應作何種形狀，最爲堅固?

這些問題並不是專門家的問題，乃是日常生活中所常遇到的一類問題. 遇到這些問題的時候，從應用算學知識的多寡，便可判別一個人處理事件的妥當與否?

II　在訓練方面的價值

概言——算學教學注重練習理解力而不注重記憶，在中等學校裏比任何其他學科都顯著，這是算學教學的主要價值. 因此教學算學的結果，只是要發展學生的能力，並不打算使學生記住許多事實(Facts). 一個算學家不是只知道許多算學的事實乃是要能理解的應用這些事實，能發見新的事實，並能重新尋求已經忘掉的事實.

欲測驗某某算學的程度或本領，是以能力 (Power)而非以知識(Knowledge)作標準. 如果獲得了能力緊跟着就獲得算學的知識，這是一種必然的結果. 所以算學教學在中等學校裏主要的是——應

該是——一種有系統的理智的訓練，決不應該僅僅授給些知識就算了事．

自然其他學科的教學幾乎也都有這樣需要，但是算學更比較顯然．算學工作中的論證是很特別，具有好些性質特別的適合用作訓練學生的心思．這些特性有如下述：

1. 單純．

2. 正確．

3. 結論確定．

4. 新穎．

5. 算學推理與處理事務推理的相似．

6. 算學工作中的推證．

單純——大家都曉得無論學習那一樣學問，訓練那一種能力，如果對於初學的人，所給的練習工作太繁重，不但無益，而且有害，訓練青年的腦筋當然也是這樣，簡單的練習常比繁難的較為合宜．算學中難易繁簡的排列極有次第，起始的時候極簡易，慢慢領導着學生按步就班的由簡而繁，由易而難作種種的練習．舉例來說：打算證明兩個三角形相等，學生便自然要想到那六對相當的部份；並且要試證其中的三對相等．這種推證無非根據題設，公理，或已經學過的定理．所用的方法，不外綜合法，分析法與間接法而已，這種根據是何等的簡單！已知的條件，所用的方法，與所求證的結論又是何等的顯明！學生應該牢記心頭的已知事件，何等的寥寥無幾！反過來看，作一篇論文所需要的事件是怎樣？已知的事實很複雜，

所用的方法，沒有一定的軌範，至於結論更無法確定了.

正確——個個教師都知道有好些學生的思想方面言語方面多不正確，有好些學生不能或者就不打算了解一種問題的正確意義，更有好些學生毫不思索的信口發言. 以這樣態度應付其他學科似乎還可敷衍，但是學習算學時便絕對不能這樣. 學習算學時僅僅逐字逐句的重來複去對於學生毫無補益. 學生必須思想要正確發言要正確才能學得好算學.

結論確定——任何算學那一部份的工作，其結論一定有所謂對與不對，並且很簡單的可以辨別出來何者爲對何者爲錯. 對於最後結論先生和學生的意見不會有所紛歧. 一個學生發見了幾何上的新理解或解出一個代數習題並且對於所得的結論已經證明，他就敢斷定其結果是對的，所以在算學中做成一件工作自己能覺到所得的結果是怎樣. 普通學生如能得到自己曾戰勝某種困難的感覺便會滿意快慰，而快慰更增加克勝困難的努力. 我們再拿研究哲學，政治學或經濟學時的情形比較一下. 耗費了許多時間與精神，但歸根得不到確定的結論，教師與學生的意見儘可不相同，甚或對於所得的結論始終不予以同意.

新穎——算學的推理工作對於學生完全是新穎的，決不能從舊日談過或聽過的東西抄襲出結論來. 至少其他學科不能像算學這樣需要學生的推理能力. 一個學生解答一個經濟學的題目，常常能從記憶中尋求材料. 因爲在報紙上，雜誌上，或書籍中常常可以看到些相同的討論. 所以只要能在這個題目上多參考一些，卽只長於記

憶的人或許被視作大思想家，其實他的思想並不見得新奇也．對於算學工作學生須自己想方法去證明或計算，不用一點創造力，很難塞責．

算學推理與處理事務推理的相似——現在一般人們都已承認算學的訓練對於科學的工作和嚴正論理的研究是極有價值，而不再有所懷疑，但同時却又認為算學的推理與處理事務的推理完全不相同，竟以為算學的訓練絕少實用的價值．

我們毫不遲疑的認為只靠着算學培養的才能來解決實際問題是不够用的；但在另一方面想，如果沒有一些算學的才能很難希望人生事業的成功．清楚秉正確的思想在日常處理事務上與在學習算學上是同樣的需要．

從事實業或商業的企業家，必須對於存在的場合與他的目的有很清楚的觀察和認識——換言之，他必須認清當時的情況，好像學生學習算學時必須認題設題斷一樣．正如同學習幾何時的學生，他必須尋求各種方法，拋去其不適用的，採取其比較的當的，以處理一切．總之無論在那一個步驟，時時要觀察當時的情況，選擇所用的方法，以及認明所希望的目的．反之，錯亂論據，胡猜亂想，其對於處理事務與學習算學一樣的無好結果．更有進者，許多商人，曾經證明他們的成功是由於思想精確，而思想的精確却是由學習算學中得來．

大部份算學的工作是在推理——研究算學比研究其他中學課程都需要理解力多，記憶力少，尤其是研究幾何為甚．在這樣課程裏

——假如教學得法——差不多處處都是推理作用．固然也有很少的地方需要記憶，但是極爲顯明用不着什麼特別記憶．例如，對頂角相等，距圓心等遠的弦相等，等等．自然的能够記住並用不着特別下工夫．就是複雜些的定理，也因爲常常應用的關係，不久也就熟習了．

代數表現出來的這種特性沒有像幾何這等顯明．但是如果對於它的純粹形式的或手作的(Manipulative)特點除預備將來的研究需要外不再擴大範圍，則代數需要記憶的地方也很少，——總比對於學習拉丁,歷史或法文時少的多．況且這些材料都是有論理的關係，卽使忘掉不難重新推求出來，——這一點普通在語言學或其他說明的學科上爲不可能．

III　**另外幾個功用**——總上所說，可見算學的特性在教學時最適於用來訓練學生的才能．同時算學教學在教育上還有幾個效用，現在簡略寫出來:

1. 發展注意集中的能力——注意集中是很重要的一種能力．但是青年人往往不能聚精會神的努力一件工作．算學作題却需要這種能力，決不是片斷的思想湊在一起所可解答的，擴大注意集中的能力，總算是學習算學的一種報酬．

2. 增加自信力——遇事固然不應該純持主觀見解，但也不可缺乏自信力．青年學子往往迷信書本上的言論，盲從他人的指導，對於自已的見解不敢信靠．許多人終其身引經據典，完全尊重他人的意見，事事不加以理解或判斷，泯沒個性，殊爲可惜！算學的訓練

能矯正這種毛病，因爲算學的論證顯明決不模稜兩可，方法或結果有錯誤的時候，學生便能自己覺察和判斷．

3. 養成優良的品性——算學教學能訓練學生使養成有系統有秩序的習慣，同時每當克勝難題所得的快慰又常能引起堅強的意志．並且在算學上對於一切問題都求出絕對眞確的結論，而且僅能得出一種來，毫無紛歧不同的地方．‘等量加等量，其和相等’‘勾方加股方等於弦方’等等，都是些古今中外不變更的眞理．所以惟有研究算學才能和眞理接觸，亦惟有常常接近眞理的人，才能擁護眞理，才能爲眞理而犧牲．

4. 培養學生創造的能力——眞正算學的工作具有啟發性，能發現自己本來不知道的事物，絕不像那乾燥的科學僅拘拘於準確而缺少思想的作用，因此沒有創造的人們而希望對於算學有所成就是不可能．解答一個幾何習題與發明一件東西，要經過很相似的手續，其主要不同的地方也不過是繁簡不同耳．對於學生說解答一個難題即不啻一種發明；所以在這種工作上如能有適當的教學確能培養學生創造的機能．

總結——設若某學生已開始得到算學工作的眞精神，對於算學已發生了興味，則其可以得著的結果可簡單述說如下：他的理智才能將得到合理的應用．他將要很清楚的認明學習時思想比記憶有效力些．他將要得到一般學習的良好態度，並得到自信力與創造力．他更要感到從來未曾得到的興味與快慰．

不用說，在好些情況下得不到這樣結果．但是所以如此的並不

是由於算學的本身，而是由於算學教學的眞精神被一般素來不懂算學特性的學校當局或執政者給抹殺了！

算學教學的根本原則——如接受以上的幾個觀點，結果一定要影響到算學的敎育學．在好些關於算學教育的結論中，有一個極關重要的原則，最好名之爲算學教學的根本原則，即：

算學教學的主要效用在於才能的訓練，至於增進算學上事實的知識僅僅其次焉耳，換言之，算學教學的眞正目的是在訓練能力而不在只求得知識．

第三章

教學方式與教學方法

在研究算學教學的當中，有兩方面的趨向，一方面注意教材的內容和排列；另一方面則注意教學的樣式和手段．要用專門名詞來區別這兩種不同的趨向，則前者稱之爲教學方法，後者稱之爲教學方式．如根據這種解釋我們儘可稱道某一種教學爲分析法同時却爲背誦式．這種方式與方法的區別並不是永遠容易劃分出來；決不能把所有的教學進行清清楚楚不相關連的分別開什麼屬於教材排列什麼是屬於教學的設計．但是畢竟是有區別的，至少在本章區別開比較相宜．

教學方式——普通的教學方式可舉出如下：考試式 (The examination mode)，背誦式(The recitation mode)，講演式 (The lecture mode)，啓發式(The genetic mode)，探討式(The heuristic mode)，個人式 (The individual mode)，與實驗式 (The laboratory mode)．我們述說這些方式時當然必須形容的很顯明很具體！實際上把任一方式極端的整個拿出來應用總是例外：普通這些方式互相爲用，絕少的教師(高明的)只用一種方式而盡棄其他．

考試式——在這種方式教師指定一定的工作平常總是教科書上的一段命學生去學習（或記憶）或是一些問題命學生去解答．上課的時間用來考問學生：教師用一種方法試驗學生因而查出學生是否已將工作完成．在這種方式裏教師就形同機械一般．他所給學生的幫助，刺擊，或感動，不比工人用以按時登記工作起止的時鐘或用以測量工作的標準更有效力些．其實，我們很可想像一種留聲機同樣的能夠把這一件事作得好，只要按照某一種教科書逐字逐句當着它讀下去它永遠是不發聲的，但是無論其他的任何語言說出來時，它便大聲喊出"錯了！次一個人！"我們很難想出這種方式的任何長處，好在現時用它的太少了．

一個具體的例，茲照樣採引下來．

"一個定理被指定了．下次學生們都須把那個定理的證法逐字逐句照着課本上的背誦．那些能够背誦的學生即須預備指定的下一個定理，那些背不過的仍須重讀原來的一個．這樣繼續下去不久每個學生預備一個各不相同的定理，課室的工作是這樣：入課室以後教師對於第一個學生作一種符號使之背誦他的定理，繼之第二個，依次下去．再用一種符號凡是背過的學生開始預備下次的定理，又一種符號出來其餘的學生都重複溫習原來的定理．教師自誇他能够使全級學生各各作業毫無一點雜聲亂語．"

背誦式——背誦式是由前一種方式修改來的．顧名思義便可知道這個方式的特點乃是學生背誦前次學過的課程，在課室的工作差不多只是背誦．

這個方式與考試式有共同的特點便是讓學生重述學過的東西．其不同的地方乃在這種背誦不只是爲教師的試驗而是藉着這種機會指示學生改正學生使之更明瞭更確實些．而且應用這個方式往往除背誦外還雜以預備工作或解釋下次指定的作業．

任何教師所用的教學方式如果其主要特點是預先指定工作命學生課外預備，在上課時實行演習或討論，都可歸到背誦方式一類去．按照這樣有彈性的定義，那末普通有價值的優良教學都可應用這個方式了．但是這個方式含有很嚴重的危險性，爲教師者必須時常隄防着。如不加以謹愼很有一種顯然的趨勢太傾向於考試方式；那末師生雙方的工作都要變作機械式的，並且學生很有機會養成鸚鵡式的學問．

講演式——在這種方式教師把教材用繼續的演說講解出來．同時學生（聽者）寫筆記，過後還可再加一番整理或研究的功夫．這種方式在德法兩國大學裏教授算學時常常來用，在美國大學裏也用它不過經過多方面的改良．縱然對於高深的課程我們也不能說未經改良的講演式是最好的方式，而在中等學校裏除去特別情况外幾乎無它用武之地了．

如果在高年級教學較高深的算學，很有一種需要去獲得算學的事實，而這些事實有時最宜於由書中去搜求或由教師直接授予．這一點可以說是講演式重要用途，在這種情況下應時常舉行某種直接試驗，如同使學生把剛才學過的回講一遍，以便考查學生是否懂得並且藉以改正學生的誤謬概念與補充未盡之處．

優點:

1. 這種方式對於時間很經濟，能於限定的時間，講授多量的教材.

2. 一級的人數過多，不便分別指導或用其他方法時則可利用講演式同時講給大家聽.

3. 如果教材的論理線索，不允許有所間斷時，可利用講演式一氣講完.

4. 如果目的只在教授某些算學事實，有時最宜於應用講演式.

缺點:

1. 學生只有被動的，注意力易於渙散.

2. 講演時許多的概念繼續不斷的講出來，學生當時能了解的不過僅僅一小部份;而大部份仍須課後複習，並且這樣得的印象很淺.

3. 教師與學生不能密切的接觸，很難明瞭各個學生是否了解，與各個的程度如何.

4. 在算學中學生如果對於主要之點不能了解，則其餘的部份也聯帶着不清楚.

總之，講演式太抹殺學生的自動力，只可在不得已的特別情況下利用它，現在它的用途已逐漸縮小，尤其在中等學校裏.

啓發式與探討式——把功課作爲全級的討論對象而以教師作指導，統統在一塊工作和思想，學生經教師允許或指出後即可發表意見，教師好像是主席或領袖，一方面用問題，暗示，或授意幫助着學生，一方面把論點引到所希望的結論同時斟酌所需要的時間務須

使意見一致始止．凡是新教材都是先這樣的在級上討論．

教師是這種工作的頭腦．教科書只可作一種參攷，但學生在課室內都須作筆記．課外作業是要整理教室的工作，完成細微的節目，還須作些計算的練習或實驗，這種方式即謂之啓發式．

爲試驗學生了解的程度與課外作業的勤惰，最好再採用背誦式以補這個方式的不足．這種方式與探討式都是與探討法並行的，它們的根本精神完全一致．不過探討式更需要背誦式的輔助，以其較注重學生個人獨立的工作，而啓發式則合全級爲一單位也．至於這樣方式的優點與缺點俟與探討法一併討論．

個人式

個別教學的需要——我們無須贅述理由就可斷然的說教學應該適合於各個人的，同時各個人的需要決不一致．凡是好的教師其教授目的一定儘量的顧到每個個人；但實際上分配好些個學生給一個教師，在教學進行上當然要發生障礙，很難得到圓滿的結果．有好些人經多次的試驗去計劃一種方式使各個學生獲得的認識比諸平常的方式較多．這些計劃中有的帶有普遍性同樣可應用在其他課程上；也有的只限於算學才可用．

算學的系統性特別顯著，簡直不能稍爲抹殺．假如昨天所學的歷史，地理，或文學未曾貫徹，對於今天的進行固然須受些阻礙但尙可勉强，如果對於算學，這樣簡直是不可能．在其他課程今天的成功可以挽救昨天的失敗；在算學如果學生對於某一點沒有關清楚

他便很難由其他部份再行挽救．因此學生對於主要各點必須貫澈後才能進行；如對於任何主要的難關未曾打破，便無法前進，結果只有失敗．我們曉得在課程進行的當中往往有的學生因故落後一步——因爲缺席，某種節目對於他個人特別困難，個人的工作速率趕不上全級進行的速率，等——那時敎師怎樣進行關係殊大．他如果按照最低的程度作標準，使其餘的人不能盡量發展，此刻良心上過不去，如果他按照普通的程度作標準，又感受兩重良心上的責備；一方面他知道妨害了那一些學生，如果課程進行稍爲遲緩他們儘可承受，這樣竟使他們費盡心力終久還是追不上而至於放棄；在另一方面，他又曉得有一些人儘可進行較快却被他拉住無法盡其量了．所以如果能實行個別敎學總能挽救以上所說的這種毛病，尤其對於那些只注意到及格而實際上不眞了解的學生．如果學生各人去學個別的課程，絕不至沒有成績．

這個方式的主要特質如下所述：

1. 指定工作的範圍——課本上定理或問題，或其他材料．

2. 學生分頭工作，其快慢任隨其能．

3. 課室內的敎學因工作的進行而加以變換．起始都在一起去研究，不久全級便因進行速度的不同形成一些小組，逐漸分化，到後來學生在一塊共同研究的人數很少很少．在可能範圍內對於各組加以解釋或幫助而對於各個人隨時因需要而實行個別指導．有的敎師允許學生間在某種限度互相幫忙，無論課內或課外；有的敎師在課內與通常無甚差異不過學生都不用什麼管理或注意．如果某學生對

於所討論各點均已貫澈，即可安然作其他工作．更有的教師對於課內教授完全放棄於上課時間只是巡行室內以備答覆學生的問題，而各學生均在自己研究中．

4. 把指定的工作分成相宜的段落，當學生自己感覺對於某一段業已貫澈即行請求受試驗，按其試驗結果命他對於該段的附屬工作加以研究，或竟繼續作第二段．

5. 當學生已完成例常認爲已達到該科畢業的課程，即可證明他該科畢業，該科課內便可不必注意他了．最快的學生可省去通常修業期間之一半．

由不同的教師經過許多的實驗，對於這個方式的批評如下：

優點：

1. 每個學生都得着公正的機會，特別是那些遲鈍的學生，不這樣多半須犧牲在全級進行的車輪下．

2. 每個學生都時時在工作．

3. 養成學生的自信力．

4. 學生能夠完成較貫澈始終的工作．

5. 學生能作出較多量的工作．

6. 對於愚鈍者不至强其所不能．

7. 學生對於他的工作可永久保持着興趣．

8. 學生對於教師容易發生好感，因爲他是需要的朋友，不是監工頭或訓練長．

缺點：

1. 課內教學的優點盡行失掉.

2. 急於進行的工作往往只限於皮毛的工作.

3. 如果一級有二十五至五十的人數，課間教師對於每個學生指導的時間最多不過二分鐘.

4. 如果教師願意明瞭學生的進行情形，必須索閱學生的筆記等物改正時又嫌過多了.

5. 學生各個進行速度既不一致而教師必須具有敏捷而靈活的頭腦去應付各種各樣的問題，更須銳利的眼光注意各個學生的需要. 這樣繁重工作未免太難爲了教師.

6. 學生時常藉故停止工作，未必有正當原因.

實驗式——這個方式是把大部份工作，在課室（實驗室）內去作，其中佈置一些器具，用以作圖或實驗，還要預備一些模特兒(model). 教師就像實驗的指導，學生個人或集成小團體去研究好像在物理實驗室一樣，其詳細情形在實驗法中還要討論.

總括這幾個方式的特點，可以說在背誦式學生須在課前工作，在講演式須在課後工作，在實驗式須在上課時間工作.

在舉出這些方式以後，自然要發生一種問題，即：到底應該用那一個方式才好？好的教師並不是應用任何一種固定的方式. 縱然對於同樣的教材在不同的環境須用不同的方式；又因爲實際上的進行方式常常混合好幾種方式來應用，簡直無法把它歸到任何一種方式裏去. 我們打算決定一種最有效的方式須攷察：所討論的題目是什麼性質，該級的特點在那裏，個人需要什麼，物質的環境怎樣，與

教室內的佈置如何．同時教師的性格與其算學和教育的程度都有關於教學，總之沒有教師能够選定一種方式永遠適用於何任題目或教材．教學方式也必須時時在改進，今年所認為最成功的方式，明年應用時或須另加一番改良．

最好方式如何測驗出來——方式不過是一種手段，某種方式在某一個環境是最好的，如果在這樣的環境它最能使學生走向教學的眞正目的，而教師須為這種進步的原動力．假如一種方式用來對於學生的進步不比沒有教師較為有效，那末這種方式在這樣環境下便無價值．

無論試驗任何一種方式的好壞，就看它在應用的時節是否能使教師把他的知識，他的經驗，他的統率能力，他的熱心，他的感動力，以及他的一切都整個的應用在全級上以及各個學生上．如果在上課時間終了後，有任一學生能說出來教師在課室內對於他沒有任何的幫助，沒有給他什麼東西只是考查他了，只是聽他背誦了，或是只讓他自己工作了，那末這個教師對於這個學生所用的方式便是完全失敗．因為算學的容易與簡單很能使學生自己了解，縱然沒有得到教師的帮助，甚或反被阻礙；但是再沒有其他學科當教學得法時所引起的興味與所給予學生的助力像對於算學這麼利害．所以為算學教師者務須時時在研究教學方式，善於應用才不至誤人子弟．

算學教授法

教學法也很有幾個：如綜合法(The synthetic method)，分析

法(The analytic method)，演繹法 (The deductive method)，歸納法(The inductive method)，探討法(The heuristic method)，實驗法 (The laboratory method). 茲分別討論如下：

綜合法與分析法——綜合法是由已知推到未知，分析法却由未知推到已知. 在幾何上綜合法是由假設推證終結，分析法却由終結推證假設. 綜合法的形式有如：A 眞所以 B 眞；B 眞所以 C 眞. 分析法的形式則如：證明 C 眞，須先證明 B 眞；證明 B 眞，須先證明 A 眞；但 A 已知其眞，所以 C 眞. 在初等算學中所謂綜合法與分析法的意義及性質儘可用具體的例子來說明.

例 1. 若 $a:b=c:d$,

求證 $ac+2b^2:bc=c^2+2bd:cd$

綜合證法. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

兩邊各加以 $\frac{2b}{c}$, $\frac{a}{b}+\frac{2b}{c}=\frac{c}{d}+\frac{2b}{c}$

簡約之, $\frac{ac+2b^2}{bc}=\frac{c^2+2bd}{cd}$,

即 $ac+2b^2:bc=c^2+2bd:cd$.

分析證法. $\frac{ac+2b^2}{bc}=\frac{c^2+2bd}{cd}$,

須 $(ac+2b^2)cd=(c^2+2bd)bc$;

$(ac+2b^2)cd=(c^2+2bd)bc$,

須 $ac^2d+2b^2cd=c^3b+2b^2cd$;

$ac^2d+2b^2cd=c^3b+2b^2cd$,

須 $ac^2d=c^3b$;

$ac^2d=c^3b$,

須 $ad=bc$;

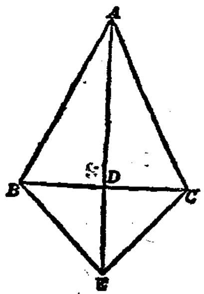
但 $ad=bc$, 卽$a:b=c:d$,

$\therefore\ ac+2b^2:bc=c^2+2bd:cd$.

可見綜合法比較簡明整齊，這種運算固然不能不承認它的結果．但兩邊各加以 $\frac{2b}{c}$ 未免突如其來，頗不易想出來．分析法累贅而笨拙，但其中一步一步的證法，很少令人懷疑的地方．綜合法須有一種特別的計劃，而分析法不過是一種自然的推證．如果學生打算另找新證法，或是已忘掉了證法再想追求的時候，惟有分析法最適用．

例 2. 連結同一底邊的兩個二等邊三角形的頂點之直線，必垂直於公底．

綜合證法．



1. $AB=AC$, $EB=EC$. (假設).

2. $AE=AE$. (同一直線).

3. $\triangle ABE=\triangle ACE$, (s.s.s.=s.s.s.)

4. $\angle BAD=\angle DAC$. (兩全等三角形其相當邊相等).

5. $\triangle ABC$ 爲等腰. (假設).

6. $AE\perp BC$. (等腰三角形其頂角之平分線必垂直於其底).

分析證法.

(1)求證 $\angle BDA=90^\circ$. 普通求證某角為一直角須證該角與其鄰補角相等，所以我們第一步須證：

(2)$\angle BDA=\angle CDA$. 欲證二角相等，常常證其為全等三角形的相當角，所以第三步須證：

(3)$\triangle BDA=\triangle CDA$.但是直接證明相等條件尚不夠,於是更須另外證明其他兩個三角形相等，以補足所需要之條件,所以須求證：

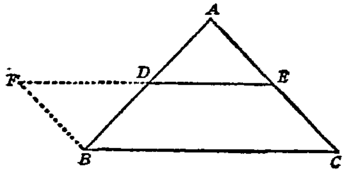
(4)$\triangle ABE=\triangle ACE$. 這個等式很容易證出來，故得結果 AE 垂直 BC.

例 3. 三角形兩邊中點之連結線，平行第三邊並且等於其半.

本題的綜合證法,在普通幾何課本上,都可看到,現在略去不寫.

分析法.

(1)普通證明此線段等於彼線段之半,往往把短線段二倍起來,再證其與長線段相等. 故此地須延長 ED 至 F，使等於其本身.



∴(2)須求證：$EF=BC$ 與 $EF \parallel BC$. 有好些方法可用來證明兩直線相等，又有好些方法可用來證明兩線平行，但證明兩線平行並且相等的方法普通僅有一個，即「平行四邊形的對邊平行並且相等.」

∴(3)須求證：$BCEF$ 為一平行四邊形. 證明四邊形為平行四邊形的方法也很多，但是我們對於 BC,EF 兩邊的關係知道的太少，只好找 BF 與 CE 的關係了.

∴(4)須求證(a) $BF \parallel CE$, (b) $BF=CE$.

(a)證明平行往往應用「內錯角相等則二線平行」定理.

∴(5)須求證 $\angle A=\angle DBF$. 證明二角相等往往應用「全等三角形之相當角相等.」

∴(6)須求證 $\triangle ADE=\triangle BFD$, 但這兩個三角形相等，一望而知. 故 $BF \parallel CE$.

(b)我們既知 $CE=AE$, 又由(6)求得 $AE=BF$, 故 $BF=CE$ 也不成問題，由是得 $DE=\frac{1}{2}BC$ 且平行 BC.

自然，對於證題的各種基本方法不熟習的人應用分析法似乎感覺困難與麻煩，但是在另一方面看，用分析法作題的時候，一層一層的推證都很明顯，往往用這樣證法容易得着解答. 至於綜合法雖然每層的推理我們不能不承認是眞確，但是它的順序突如其來，却找不出解說來. 在綜合法中，我們不知道爲什麼延長 ED 等於其本身，更不知道爲什麼要證明 $\triangle EAD=\triangle FBD$, 等等.

兩種方法的比較——綜合法只是證明每層都眞確，却不能解釋所以如此證明的理由，所以只能使人確信不疑的承認其爲眞實，而不能指示人以切實證題的道路，更不能告訴人爲什麼證明的層次這樣安排. 因此用這個方法不能發明新證法，對於已經忘掉的證明打算再追求出來，這個方法也毫無用武之地. 但是綜合法的確是簡單而整齊，如果沒有教育的要求，是極有價值的.

分析法適與綜合法相反，不整齊而且繁雜；但是對於每層所以如此證明的解釋非常詳盡，並且能用來開擴思路發明新法，或用來

追憶已經忘掉的證法，分析法確是惟一的方法．總之用分析法能够發現新法，用綜合法能够寫出來簡潔而整齊．

所以在學校裏指導學生的思路應該用分析法；教給寫的形式應該用綜合法，也可以說在記錄，著作中應用綜合法卽對於教科書至少也該偏重綜合法，但在教室內解說時却應該用分析法．

納歸法與演繹法

兩種方法的說明——歸納法是由個別推到普遍，由具體推到抽象，而演繹法却由普遍的理論應用到個別的情形，由抽象的形式應用到具體的事實．

任何一個推測式都是演繹推理的最好例子．如：

凡對頂角皆相等，

今$\angle A$與$\angle B$爲對頂角，故$\angle A=\angle B$．

又如：　凡人都是動物．

老子是人．

所以，老子是動物．

另一方面看：任何一個由經驗得來的結論，任何一個由實驗推知的定律，都應用歸納法．例如：

氣體受壓迫，它的溫度就增高，養氣這樣，輕氣也是這樣．我們更試驗其他氣體都是這樣，於是推知「凡氣體受壓迫則變熱」．

歸納推理並非絕對的眞確，僅是一種傾向，其確實的程度可由觀察或經驗的多少而定．所以它不能應用在算學的精密證明，但可

用來發現算學的事實，現在舉出幾個具體的例子來.

例如求1至n個自然數之和，我們先求 $n=1$ 至 $n=5$ 之和，再拿來與n比較，於是求得下表:

n	級數	和	和與n之比
1	1	1	1或 $2/2$
2	1+2	3	$3/2$或 $3/2$
3	1+2+3	6	2或 $4/2$
4	1+2+3+4	10	$5/2$或 $5/2$
5	1+2+3+4+5	15	3或 $6/2$

歸納以上的結果，可以推知n項之和與n之比約爲$\frac{n+1}{2}$，由是推知1至n n個自然數之和爲$\frac{n(n+1)}{2}$.

如用演繹法推求這個公式，可將$f(x)=x^2$代入下面的普遍的公式便得.

$$\sum_{1}^{n}[f(x)-f(x-1)]=f(n)-f(o)$$

同樣應用下表的結果，可以求出自然數平方之和，此地僅由其和與n之比不易找出關係來，但以其和與自然數n項的和相比，則知，$n=1,2,3,4,5$ 時其比爲$3/3$，$5/3$，$7/3$，$9/3$，$11/3$，由是推知$n=n$時其比爲$(2n+1)/3$. 故自然數平方n項的和或是

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

n	級　　數	和	和與 $\frac{n(n+1)}{2}$ 之比
1	1	1	1或 $\frac{3}{3}$
2	1+4	5	$\frac{5}{3}$或 $\frac{5}{3}$
3	1+4+9	14	$\frac{7}{3}$或 $\frac{7}{3}$
4	1+4+9+16	30	3或 $\frac{9}{3}$
5	1+4+9+16+25	55	$\frac{11}{3}$或 $\frac{11}{3}$

演繹與歸納的順序——按順序上說，歸納的意義，即係先具體而後抽象，先個別的例子而後推出一般的公式，演繹則恰恰顛倒其順序.

譬如先求出關於三角形中對銳角之一邊的平方公式，（$a^2=b^2+c^2-2cp$）然後再以代入法應用到個別的實例上，即係演繹順序.反之如先計算許多這樣實在的例題，而後推出一般的定理，即係歸納順序.

又如用演繹法化簡$\sqrt{a+\sqrt{b}}$，須先研究到一般的公式

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

然後用代入法解答實在數目的例題.如用歸納法則須先計算許多數目的例題如 $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$， $\sqrt{9+\sqrt{56}}$ 等以後才來研究 $\sqrt{a+\sqrt{b}}$.

兩種方法的比較——用公式或定理解答算學的問題總是很簡明而實用，記憶關於三角形中線的公式，比較計算好些具體的實例，簡便良多，所以學校教師往往把演繹法看得很重要，有時甚至廢除

一切歸納工作，教科書也是這樣.

在另一方面看，欲使學生尤其是初學者瞭解一種抽象的理論，而不預先說明幾個具體的例子，這是一件很困難的事體！假如不舉例說明，試問有幾個學生能够確實瞭解關於從 n 物中取出 r 個的組合公式？又有幾個能够知道什麼是組合？抽象的概念，是由具體的實在經驗得來，並且能懂得具體的實例才配澈底瞭解抽象的一般理論.

進一步說，純粹的演繹法對於每種算學問題須用公式或定理，這些公式或定理一經忘掉——很容易忘掉——則學生解答問題時便束手無策！、有那個能記牢克頓 (Cardon's) 公式或更複雜的公式？所以應該訓練學生歸納式的解答方法，決不應該僅僅只靠着公式！他們如果能應用克頓氏的方法，並不需要把那公式牢記心頭.

以上的說法並不主張屏棄一切的演繹法，在某種場合演繹法仍極關重要，固然有時須用歸納法引導出來。因此所有關於基本性質的重要公式不能不記憶，例如二次方程求根公式，關於級數公式，二項式定理等等，都應該牢記心頭且善於利用之. 總之我們不能僅用其一而拋棄其他. 把以上的意思總起來說：

1. 只要有相當機會可用歸納法，則儘管應用.

2. 演繹法同樣的可用，但最好經過歸納說明以後.

3. 演繹法的記憶應限於最重要的部份.

探討法

什麼是探討法？——探討法的目的是在使學生站在發明者的地位，不是希望使他作成一種知識的承受器，不過所謂發明只是對於學生說，其實是早已發明過的東西，固然這樣發明無益於民生國計，但用來培養學生的創造力却非常有用。學生就好像是一個小孩子在蹣跚着橫過一塊空地，決不能當作他是一個斯坦雷（Stanley）可深入非洲的極處。教師站在他的前面；善言笑語的引誘着他往前走；要挑擇道路，總使他步步平坦，他失足的時候要把他架住，他跌倒的時候要把他扶起。當他業已這樣的走過了這塊空地，漸漸能够自己走過了，隨後他又得到較多的進步能走向任何空地去，這樣練習久了，簡直也可試探非洲內地去。在探討法中教師與教科書的功用是在把待要作的東西表現出來，把待解決的問題提出來而這些材料都需要學生眞正發明的精神，始能作出；同時還須在他可能的範圍並且結果須使他對於全課獲得一種好見解。有時教師須引導學生使他自己下定義，但須使之與流行的不相矛盾；此時教師可告訴他應用的符號與習常的名詞，如果他在需要的時候。這個方法曾主要的用於幾何教學，但對於算術與代數也有同樣的功用。

探討法的價值是在能循循善誘使學生去發明，但是應該如何的把教材發表出來才能合度，才能達到這種目的？的確很費斟酌，不然往往失掉這個方法的精神。茲具體舉例如下：

虛僞的探討法	眞正的探討法
$ABCD$ 是一個平行四邊形嗎？	$ABCD$ 是那一類的圖形？
平行四邊形的對角線是當眞互	你知道這樣的圖形的對角線有

相平分嗎？

因此，AE 是等於 EC 嗎？

什麽關係嗎？

那末在這圖形上什麽線相等？

以上的關係對於我們的問題有幫助嗎？

教學方式——探討法主要之點不是告訴學生什麽東西乃是引導着他使他自己探求，其方式當可變化．把相當的問題收集起來編成一種綱領或編入教科書中特別預備作探討工作，同時可採用背誦方式或個人方式．平常教科書也可用不過須把其中的教材啓發式的供給學生探討．在啓發式把全級整個的當成發明者，但不試驗着使每個學生研究去．假如我們目的在養成學生的單獨發明精神，並且上課時間是用來討論已經作過的東西和待研究的綱領，或提示待解答的問題，我們必須保持探討式的特點．

還有一點是教師應該注意的．探討的教法並不是讓教師們這樣說，“你要自己去想，”“你要利用你自己的腦筋，”當學生遇着困難去問他的時候．這樣的答復簡直是表現自己缺乏指導能力或是不打算去負責．探討教學決不是等於不教學．自然，應該按照環境給學生一種幫助，提問，暗示，或給作出解答的開始，但如把困難之點都明白的告訴學生這是極應該反對的．如果所謂困難只是一些零碎的節目或是並不關整個的理論，有時直接講給學生也未嘗不可，尤其當他以前的努力已喚起他的渴望求知心的時節，只此熱誠亦足以使他獲得這種知識．

怎樣去實行探討法——有許多人很願意去實行這種方法，只是

不知道怎樣着手，此地特爲提出來討論一下：我們記住在起始時，必須要慢慢的由普通教學法改爲探討法．開始切不要就把教科書拋開；探討法絕不是主張非拋開教課書不可．不過實行已久因無用而不要課本是可以的，但在起始時則不可，也可以說實行探討法的老手如不願採用課本是可以的，但新手則斷斷不應這樣．

爲教師者第一件事體要作的便是自己先培養探討的精神，因此最好的辦法無過於多讀較高深的算學書籍，與充實或擴大所教授科目的研究．

在上課時要採用一本好的課本，儘可標準着課本，同時須保持教學兩方面探討的自由，最好要照以下的進行方式以奠探討之基礎．

先在課室內提出新教材——不是肯定的授予而是一些待解答待研究的問題．目的使學生盡量的解答，將來實在得不到結論的你再來解答．過了上課時間課本即可用來作參攷，複習，同時要完成課內所提出的綱領，課內大部份時間在這樣進行；但於開始時可先評論前次的工作，（參攷書籍後得來的工作）．至於練習題目 (Drill Problem) 斟酌情形於課間或課外提出來．

優點：

1. 學生得自動的着想，不是被動的承受．

2. 學生可得到一種深切的了解，一個人僅聽他人的講解，很難領會其中的秘訣，如果自己演題或自修的時候，一定發現在聽講時所發現不出的問題．反過來說，如果自己想方法去解答問題，一俟有了圓滿結果，決不致於了解不清楚或容易忘掉．

3. 教師與學生的接觸機會較多.

4. 這種方法能使學生對於學習的興味，比較濃厚；我們知道無論教學那一種課程，不能引起興味便是失敗. 因爲興味對於學習上，是最有力量的刺激，如果感到興味，可以立刻把精神奮發起來，可打破一切困難，所得到的，只有快慰，沒有煩苦. 普通說來，教育的成功與否，要看能否引起學生的興味. 這是最正確的教育測量.

缺點:

1. 這種方法進行較緩尤其在起始的時候.

2. 有時希望學生發現或成功某種結果，是很困難.

3. 對於教師比較困難；因爲教師決不能僅靠着教科書，必須時常計劃着如何引導學生，同時對於不同的學生，不同的班級，怎樣分別對付.

實驗法——這個方法所以命名爲實驗法者因爲它有幾個特點:

1. 這個方法注重在"做"，——測量，作圖等實驗.

2. 大部份工作要在實驗室裏.

3. 指定工作表令學生實驗塡報所得之結果，如同物理實驗一樣，但不必全體同時去作.

這個方法是應用實驗去發現算學的事實，對於算學的量如面積，容積，角度；等都用實驗測量出來，對於算學上的關係也都用實驗的結果來說明. 例如欲使學生發現圓面積與其直徑的關係，可令學生把許多的紙片裁成圓形，然後把這些圓形紙片，與同樣紙料剪成單位面積的紙片，一一衡其重量. 同時把圓紙片的直徑測量出來，

分別列成一表，便可發現以下的關係：

$$圓面積 = 3\frac{1}{7}(半徑)^2.$$

實驗室及其設備——所謂算學實驗法當然是需要算學實驗室．每一個普通教室都可改作實驗室，但最好特別裝製一座房間其中須具有合宜的書桌，相當的黑板，繪圖的器具，與種種實驗所必要的設備，這樣才可助長實驗法的效能，較詳細一點說，其中設備可如下述，而其次序大概以重要的程度作標準．

1. 圖書要具有適於中學程度的著名的算學作品，一些流行的教科書，各種對數表，利息表，及其他各表．

2. 預備充分的黑板可供全級同時演算，方格黑板，大小球形的黑板，二面連結的黑板（二面角），以及其他各種黑板．

3. 算學的模特兒 (model)，購買或自己作．

4. 對數的滑尺(logarithmic slide rule)．

5. 測量器具．

6. 天秤，秤．

7. 鐘，擺．

8. 槓桿，滑車，楔，螺旋，鉗．

9. 寒暑表水銀風雨表(mercurial barometer)．

10. 測量液體比重的器具如驗乳器 (lactometer)．

優點：

1. 用來作發現工作的方法，自然是由具體推到抽象，實驗法偏重做的方面，所以是極端具體的方法，最能引起少年學生的興味與

快慰.

2. 實驗法能把算學的實用部份特別光大起來.

3. 實驗能給學生一些清楚的空間概念. 一個學生曾測驗過許多的角度，自然就曉得什麼是角度. 如果只用理論的說明，一定發現好些地方學生鬧不清楚.

缺點:

1. 使學生用實驗發現某種算學的事實，並不十分容易.

2. 實驗不是眞正的算學工作，很難使學生得到思想上的訓練，結果學生只認識了許多算學的事實，忽略了算學的推理工作.

3. 進行較慢.

第四章

算學的基礎

I. 幾何學的基本公理

幾何基礎——我們都曉得幾何學是注重推理的學科．每個論斷一定要有它所根據的前提．它所根據的前提，也當然有所根據；根據仍需要根據，這樣追求下去，將永遠永遠的沒有止境！所以凡是演繹的科學，尤其是幾何，一定需要一些不用證明即可承認的命題作根據，即是所謂公理．但由下節看來，公理有時只是些規約．——研究幾何的人們相約而承認的命題．至於它們的含意，是否為最明顯的普通常識，並不關係十分重要．但是公理最初的意義，却是：(1)認為不待證明的．(2)不能由其他公理推求出來的．

至於只涉及幾何的公理稱為公設．例如："過兩點僅可作一直線"．全部幾何都建設在這些公理，公設，定義上，所以它們都被稱作幾何基礎．

公理在哲學上的立場——關於公理的哲學問題最重要的一個便是：「公理是經驗的結果呢，還是完全與經驗無關呢?」

惟理論(The rational doctrine)普通的主張，認爲定然有些至理是一切經驗的基礎；如果沒有它們經驗便無從談起，換言之，有些知識確乎是超越一切經驗的，所謂先天的知識．但在另一方面，經驗派 (The empirical school) 則認爲所有的知識，都是由經驗中得來同時否認先天的知識之存在．

算學的公理曾引出許多哲學界的激烈辯論．而惟理派常常把幾何當作不靠經驗的知識——先天的知識——的最顯明的例證．他們認爲幾何能指示給我們好些與經驗無關的眞理．

這個爭辯從以下兩點的辯證，便可得出一個結論來．第一點，認爲幾何不能指示給我們與經驗無關的眞理．第二點，認爲幾何公理是經驗的事實．近代算學已經可以證明第一點近乎眞確，同時許多經驗派如赫穆 (Hume) 米爾 (Mill) 諸人却打算證明第二點．按照姜氏 (John Stuart Mill) 的意見，公設不但不正確而且不必要．它們皮相的確定，只是靠着它們在空間繼續表現出來的印像：我們看到兩條射線 (Diverging lines) 漸漸的離開，並且屢次得着同樣的經驗，從未發生過相反的情形，因而我們不能相信它們再有相遇的機會．但是這樣皮相的確定，只是歸納的結果，並不能即據以爲相反的情形爲不可能．

在另一方面，康德 (Kant) 却認爲公理是先天知識的鐵證．它們具有普遍而必要的確實性，從經驗裏絕對找不到的，並且相反的方面是不可想像的．我們誰能够想出一個三角形其內角之和大於 180°？

純粹哲學的空論來解決我們的問題，不如我們老老實實的作算學上的探討．現在簡略的討論於下：

非歐幾何(Non-Euclidean Geometry)與其公理

歐氏公設——在歐克利得幾何 (Euclid's Geometry) 中，除去顯然可以證出來的公設我們不必討論外，尚有兩個公設仍待研究：

1. 兩點可決定一直線．

2. 相交之二線不能同時平行第三線（參考註一）．

此外還默默的應用了第三個公設，卽所謂可移公設 (Axiom of free mobility)．

3. 幾何圖形可任意移動而不變更其形狀與大小．

可移公設很重要，因爲所有的關於相等的證明及量度，都需要它，但等到近代才發現了這個默默的假定．

第二個公設，卽常常稱爲歐克利得公設，表面看來，似乎可由更簡明的公設證明它．所以古來有許多許多的幾何學者，總試驗着由其他公理推證它，但是結果都歸失敗！經過幾世紀長的時間，仍然證不出來．這一點誠然在組織極完美的幾何學中表現出一個大缺陷！因此有些算學家把它當作幾何學上的汚點，或缺點．

洛巴斯楚斯開氏 (Lobatschewsky) 幾何——最後由高斯(Gauss)首先發端，由波來 (Bolyai) 及洛巴斯楚斯開繼其後，完成一種方法證明歐氏公設不能由其他公理推證出來．

這個方法可以說是大規模的間接法，假定過一定點可以作出好

幾個直線同時與一直線平行，但仍保留其他公理，推出許多的結論，簡直又作成一部幾何．假如這個假設是錯誤的，——即如果歐氏公設必須由其他公理推出來，——當然遲早要有矛盾現象發生．最出人意外的結果，竟完成一個系統毫無任何的矛盾！洛氏無意中作出一部新的幾何自成系統，與歐氏幾何同樣的相調和，同樣的合乎論理（參攷註二）．由此斷定，歐氏公設並不是可由其他公理推證出來，於是我們在論理上不能反對相交的兩線同時與一定直線平行的假設．

洛氏幾何要算作非歐幾何的第一本，但不久其他的非歐幾何也相繼出現．

瑞滿幾何(The Geometry of Riemann)．——此後二十五年，瑞滿又作成一種幾何，以很高深之公理的分析與空間的性質作根據．僅僅保留可移公設，其他兩個都在擯棄之列，瑞滿居然與洛氏同樣的另外發見一種非歐幾何，他所得的結果有好些地方與洛氏幾何完全一致，有的則適得其反（參攷註二）．瑞滿二度空間的幾何却與歐氏球面部份整個的相合．

洛氏幾何現在雖未發現某種矛盾現象，但如果更推廣下去也許有發現矛盾之可能．至於瑞滿之二度空間幾何，完全同於歐氏球面部份，決不至發現任何的矛盾．對於他的立體幾何也可以證得同樣的結論，可惜尚不能溝通洛氏幾何！現在我們有三種幾何，它們在論理上有同等的價值，不過在實用上不能相提並論．

現在對於幾何公理的看法——根據平行公理的不同便生出好些

很完整的論理系統，這一點足可證明我們沒有一定附和歐氏公設的必要．因此我們可以說，不靠經驗決沒有理由（或方法）取捨這三個平行公理．所以惟理主義者的看法，認爲公設是先天的事實，是與經驗無關的知識，違反它便不可想像等等，現在都難說得通．談到公理的眞正性質，我們可以說，凡是純粹幾何選擇公理與斟酌定義是一樣，卽：主要的只是制定一些規約演繹下去使不至發生矛盾現象而已，至少是與物質的經驗無關．所以許多算學家認爲公理卽規約．

普通我們都很自然的承受歐氏公理者，大部份是因爲它與實際經驗相吻合．所以我們可以說歐氏幾何一部份建設在經驗或歸納的事實上．

非歐幾何的價值——對於非歐幾何許多人認爲只是論理的奇異表現，違反一切的常識，並沒有什麼算學的或其他的任何價值．這種見解未免太抹殺一切，其實這些硏究也很有些用處，茲例舉如下：

1. 它能積極的證明歐氏公設不能由其他公理推引出來．在洛氏等算學家費盡許多心力證明以前，這個問題要像現在幾何上的化圓爲方 (Squaring of the circle)，物理上的永久自動 (Perpetual motion) 一樣．

2. 能使幾何的基礎知識尤其是公理的眞性質較前更加科學化．

3. 「幾何是否爲先天的知識?」這個問題是在哲學上爭辯不休的問題，因而得着比較圓滿的解決．

他種幾何——雖然好些幾何學者曾認爲幾何總不出此三種，但

不久又找出其他公理是默許了，如不承認它，即時又引出其他系統。這一部份發展的趨向把歐氏幾何也看作非歐幾何同樣的建築在論理的基礎，並不憑任何知覺的關係。直接觀察圖形似乎眞確的事物，如無嚴密的證明，不能驟然斷爲眞確。因爲觀察只是觀察，並不能當作證明。假如四個共線點 A,B,C,D 的相互位置，C 在 AD 中間 B 在 AC 中間，於是我們便能看出 B 也在 AD 中間。這種理由在嚴密的幾何中尙且不能承認。只好再想法證明，或認爲是一個公理，假如能與其他公理協和的時候。

現在我們可得好些很合論理的幾何，建築在無數的公理上，而不靠經驗的事實。它們所用的圖儘可與我們官感所熟知的不同，至於這些幾何所得的結果是否與屬於實在空間的幾何相同，並無嚴密的證明。換言之，這些系統雖然在論理上着眼是極完備，但不能實用，——至少打算保持它的極高度的嚴密性是不適用。我們可以說，如果只是論理符號的系統，而缺乏意義，決難實際的應用。

註一這兩個公設有另外不同的說法，例如：

（1）a.兩射線不能再相交。

b.兩直線不能圍繞住一塊空間。

（2）a.兩直線爲一截線所截，如果在截線同側兩內角互爲補角，則兩直線必然平行。

b.三角形內角之和等於 180°。

註二洛氏幾何與瑞滿幾何上的定理，很多的地方與歐氏幾何大不相同，有些定理極爲奇特。

洛氏定理舉例:

1. 三角形內角之和小於 180°.

2. 三角形的面積與其內角和與 180° 之差成比例.

3. 過一直線上兩點所作之兩垂線，偏向而馳（不平行）漸漸離開。

4. 無所謂相似圖形.

5. 空間是有限的，但很渺茫，等等.

瑞滿定理舉例:

1. 三角形內角之和大於 180°.

2. 三角形的面積與其內角和與 180° 之差成比例.

3. 過一直線上兩點所作之兩垂線偏向而馳(不平行)漸漸湊合.

4. 無所謂相似圖形.

5. 空間是有限的，但很渺茫，等等.

II. 代數的基本定律

什麼是代數的基本定律——在初等代數學中所用的文字只是代表普通的數目，因此我們很可把代數看作由算術推廣出來的科學，它所根據的定律當然同算術一樣. 我們要知道在算術運算中曾默默的假定了幾條定律，但是好多世紀來許許多多的人們雖然整天的在那裏加減乘除的運算，却未曾看出這些定律來，一直到十九世紀，英法算學家才由考察中發現它們的存在.

我們可由簡單的加法，便看出來有幾個這樣的定律，例如17＋8

$=25$. 此地 $25=20+5$; 於是我們可寫作 $17+8=20+5$. 但欲得出20, 我們必須把8分作兩份, 一爲3, 一爲5, 而加3於17. 以式表之如下:

$$17+8=17+(3+5)=(17+3)+5=20+5;$$

此處我們便應用了結合律:

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

同樣, 8乘以13, 則

$$8\times13=8\times(10+3)=8\times10+8\times3; \quad (\text{分配律})$$

或可先乘個位, 如:

$$\begin{aligned}8\times10+8\times3&=8\times3+8\times10 \quad (\text{交換律})\\&=24+80=(4+20)+80\\&=4+(20+80) \quad (\text{結合律})\\&=4+100=100+4 \quad (\text{交換律})\end{aligned}$$

由此我們看出來, 關於加法的基本定律爲:

交換律(Commutative law), $a+b=b+a$.

結合律(Associative law), $a+(b+c)=(a+b)+c$.

關於乘法的爲:

交換律, $ab=ba$.

結合律, $(ab)c=a(bc)$

分配律(Distributive law), $a(b+c)=ab+ac$.

所有算術上的運算, 不外應用這些定律, 與單位加法和乘法的算表(如九九算表)而已. 因此這些定律爲全部代數以至於全部算

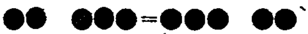
學的基礎，所以對於它們有許多的論證．有些算學家試驗着推證其中的定律而以其他定律或更較簡單的定律作根據．更有些算學家則試由普通的概念作出發點推證這些定律．

由這些算學家研究的結果，對於解釋這幾個定律有兩個學說：

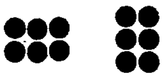
1. 實物論的見地．(The realistic view)

2. 形式論的見地．(The formal view)

實物論的見地——按實物論的見地，算學是關係到實在的事物．它的一部份是根據着經驗，而且數的起原本來是用作指明事物個數的．我們對於代數的基本定律多由官感推知．只要我們注意觀察下圖，便能够看出 $2+3=3+2$：



同樣用下圖可看出 $2\times3=3\times2$ 的關係：



自然我們不能看出 $245\times727=727\times245$，但是算學歸納法能使我們證明這些定律是普遍的眞確．因此我們可以說代數的基礎一部份是靠着經驗；同時它也可當作某種程度的歸納科學．

形式的見地——這種見地設想這些基本定律作爲算術及代數的基礎．這些定律可以說是些定義，與其說代數關係於實物，倒不如說是定義的演繹．任何一個算術問題如$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}$或$\frac{3}{7}+\frac{2}{7}$的解答並不關於任何實在的事物，只是在應用幾個基本定律而已．

在承受了這些定律以後，這些文字如 a,b,x 等只是適用這些定

律的符號而已，它們的意義一點也不因實用而確定或有所限制；其實它們並無意義可言。

因此代數也如同形式的幾何一樣，形成一種抽象的系統，多半只是靠着些假定的定義而已，並不靠着經驗．這種系統，如果它所靠的那幾個定律可以證明互相調協，卽謂之完成，反之其所根據的原理如不互相調協，定然發矛盾的結果．但是這一點尙未證明出來．

兩種見地的比較——實物論的見地不能把代數整個都放在論理的基礎上，這就是說這種見地失掉了論理的完整．但是算學至少要含有經驗的成分，因而便生出實用的代數來．

形式的見地能把代數放在極合論理的基礎上，但是它的結果不能直接應用．這種形式的與實用的兩種代數是否完全一致，亟待證明，不過正面的證明似乎太不容易．因爲僅僅靠着幾個假定的法則，定律，當然不能說明一切實物的關係．

但是實用是算學的生命．如果不是因爲實用的關係它便無從發生；便要很快的被忘記了．所以如果我們只求代數的構成，要絕對確切的論理的組織而不能應用，它便失去了價值．沒有一個人能够注意的學習一些無意義的符號，根據一些無意義的定律，而只得到一些無意義的結果．

結論——最近算學研究的傾向，是把算學分成兩部份（無論幾何與代數），一爲應用的算學，一爲形式的算學．後者已達到極端的嚴刻化和論理化，從而不靠一切的經驗，但同時也就喪失了實用．

在形式的科學裏，任何一種關係都是建築在極合論理而不關實物的假定上。希伯特平面 (Hilbert's planes) 與實在的平面殊少相同之點；形式的數 (Formal number) 並不代表實物的個數。但是這種極嚴格而合論理的部份却無疑問的作出一種重要工作，便是把關於算學的許多哲學問題闢淸楚了，不過如果沒應用的算學總是感到乾燥與無意義。

教育上的結論

在中等學校裏，沒有討論到關於算學的基礎的機會。學生必須對於許多算學的事實和學說明瞭以後，他才能够了解像這樣困難的部份，所以，有許多著作者想把這些材料貢獻給中學生，我們是不能贊成的。

但是這些事實間接的都影響到算學教學。最近關於算學基礎的研究，很顯然的證明普通幾何教科書殊非絕對的嚴格組織像前些年所想像的。在素來認爲沒有缺點的論理系統中，已然發現了許多的誤謬與默默的假定。討論算學基礎的結果將要喚醒一般拘拘板板的教師，平常他們只重複的注意他們所認爲幾何眞理的字句，自以爲是極完善而且嚴密的理論，現在看來，恐怕只是自己的理想罷了。

代數的基本定律對於初學者也無大價值；但是如果一定要講明時，應該用算術的實例來說明。在中學裏講授公理時必須要避免過於嚴正。我們編輯公理時也用不着絕對的完備。一個敍述縱然可以由其他公理推引出來，有時也可以當作一個公理看待；並且當必須

引用一個較深奧的公理時，爲易於教學起見，一種常識的解說也未嘗不可以用。

第五章

幾何學上的定義與其教授法

A. 站在論理的立場來討論定義

什麼是定義——關於"定義"的定義，說法不同，見解各異. 其中有一個，雖然最近論理的著作家很少採用，但在初等算學上却極有用. 卽「定義者卽指明一種事物或關係，與其最接近之屬類所以差異的特性」與一名詞下定義，我們必須說明它所屬於的最接近的屬類，及所以與同類差別的特性. 就平行四邊形來說，其最接近的屬類爲四邊形，而其所以與其同類差別的特性爲對邊平行. 所以平行四邊形的定義當爲"平行四邊形者是對邊平行的四邊形."

普通在定義中所發生的錯誤

1. 關於類屬的錯誤——在一個定義中所指明的類屬，必須是最切近的一類. 不然，便是錯誤. 例如五邊形的定義，如果認爲它是一平面形，以五條直線作界限，便是錯誤. 因爲它最接近的屬類不是平面形而是多邊形. 同樣，平行四邊形的定義決不能把它歸到多邊形一類去，把三角形認爲是平面的一部份，把平行六面體當作多面

體的一類，等等.

2.關於特性的錯誤——定義中所舉出來的特性應該多少合宜.特性少則定義中實在包括的屬類，比我們希望於定義的較大.例如"正方形爲四角相等的四邊形."便犯了特性過少的毛病.它所包括的屬類顯然不盡屬於正方形.反過來說，特性多則定義中實在包括的屬類比我們希望於定義的較小.例如"梯形爲對邊平行的四邊形."便犯了特性過多的毛病，它所包括的屬類，顯然不能把所有的梯形都包括起來.

定義中特性不可重複，重複則謂之費詞.例如"圓內接多邊形爲各項點在一圓周上且各邊爲該圓之弦的多邊形."便是犯了特性重複的毛病，因爲這兩種特性非不相關，乃是一而二二而一者也.這樣的定義有時還默默中含着定理.例如"平行四邊形爲一四邊形，其對邊相等並且平行."便無形中包含定理在內.

定義中特性最怕矛盾，如果發生矛盾，則定義中的事物變作烏有.例如"鈍角三角形者，其三角皆爲鈍角的三角形."三角爲鈍角，事屬可能，而鈍角三角形則屬烏有.定義中事物之有無虛實，不能一望而知，玆舉數例於下:

a.球面矩形者，四角都成直角的球面四邊形也.

b.平面上四角都等於直角的四邊形，謂之平面矩形.

c.球面上不相交的大圓謂之互相平行.

d.平面上不相交的直線謂之互相平行.

e.四邊形四角的平分線之公共交點，稱作該四邊形的內心.

f. 三角形三角的平分線之公共交點，稱作該三角形的內心.

這樣的例很多，如果沒有定理，我們很難斷定其有無. 設如用着內容空虛的定義，便會發生錯誤. 例如由 e 便可證出 "任意一四邊形皆可作其內切圓." 對於這一點我們不能不注意及之.

有些定義——如矩形，菱形，三稜體，等的定義——雖然犯了重複的毛病，但是在敎育上頗有相當的價値. 因爲它們能使學生立刻明瞭圖形的確切觀念. 並且僅僅屑微的錯誤，及學到相當程度，自然可以矯正過來. 又如正多面體的定義，差不多都如下述，"多面體之各面爲相等的正多邊形，並且其多面角相等者，謂之正多面體." 其實多面角相等完全可由 "各面爲相等的正多邊形" 一語推出來. 像這樣比較高深的幾何部份，只爲避免困難的證明，便故意犯重複病. 這種情形是否可以原諒，終是問題.

下定義時感覺困難的地方——有兩類名詞，最難得一明瞭的定義. 即極普通的名詞如幾何，代數，算學，函數等，與極基本的名詞如直線，平面，方向等二類. 前者須有相當算學程度的學生才可以了解它們的眞意義. 而後者我們却有討論的必要.

好像許多定理建築在幾個公理公設之上，而所有的定義則建築在幾個極端簡單的原名 (undefined terms) 上. 即無須下定義的名詞，如空間，界限，點，直線，位置，方向，平面等等. 有的簡直不能給它們下一個定義. 有的很難下定義. 因爲另找更簡單而明顯的名詞說明它們，的確困難. 所以大多數的被認爲原名而不下定義、但是有幾個在許多敎科書上都想法與他們以相當定義. 現在提出來

討論一下.

直線——最足以代表這一類名詞的，要算直線了. 差不多在各幾何教科書中都有它的定義，其實依最近的分析，已證其有缺點存在. 直線最普通的定義是“直線到處具有同一方向.”其中“方向”一字並不見得比直線含意更簡單而明瞭. 其次如“直線是兩點間最短之距離.”簡直不是定義，而是一種定理. 並且“距離”一字倘靠直線來解釋. 至如“直線可以兩點決定之.”更是難解. 對於根本不了解“決定”的初學者，當然是莫明其妙. 卽便他自己有他自己的解釋，也許他所想的又是一種線，也說不定. 例如極小圓周 (mininmum circle) 又何嘗不是為兩點所決定? 同樣所有的其他定義，也都含有缺點. 它們關係到移動，並且含有時間意義. 有的所用詞句晤昧不明，或全然毫無意義可言. 總之，從來在學校(中等學校)中教學用的直線定義，根本就沒有不含瑕疵的. 因此最妥當的辦法便是不給它下定義.

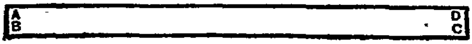
角——對於角下定義同樣感覺困難. 平常在角的定義中常用斜度，方向，旋轉等名詞. 它們的含意並不比“角”更顯明而且還用着機械或運動的意義. 自然旋轉很能說明什麼是角度，但不是形式的定義 (formal definition). 有的以兩線間所夾的空間來與角下定義. 但說到無限的空間對於初學者又是何等的奇特? 並且幾個無限空間的比較，就像這個無限二倍或三倍於其他無限，一定出了學生能够領會的範圍. 更有進者，角只是空間的界限，還不是那些空間的本身.

這些角的定義發生的缺點或不周密的地方，如果應用到平角，反角，或大於 360° 的角更較顯然．因此我們便看到這些定義（根據斜度，方向等等）完全是不適用．

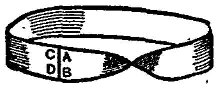
平面——同樣對於平面也沒有相當的定義存在．從來有好些算學家費了許多的心力，結果還是無用．最普通用的平面定義乃是定理，不過我們只可當作一個公理或公設姑且敷衍過去．

“平面是與兩點等距離點的軌跡” 其中 “軌跡” 一字須在後部幾何才可學到，怎能提前用它？“經過定直線上一定點垂直於定直線的所有垂線之總計便是平面” 而此地垂直又須平面來解釋，何能互爲定義？其次 “無論如何伸長的面而僅具二度 (dimension) 者，謂之平面．” 此處用到 “度，” 其意義又何等的暗昧？至如 “經過一定點的直線，在其他直線上滑動，便形成平面” 不但用了機械上的意義，並且對於這兩個線遇於無限遠時還容易發生問題．總之，欲求平面的確切定義而不可得．

面——普通我們常常以體之界作爲面的定義．自然有些面是這樣，但不盡然．例如下圖所示之面便不能認爲是某體之界．如果我



們把靠着固體的一面塗以顏色，其他一面仍係白色，則更顯然矣．



嚴格說來，我們不能以體界的意義定面之義．必須認爲固體逐漸變薄以至於極限，才可形成面．不過這種說明在中等學校裏教學的時候，用它極不相當．

B. 站在教育的立場來討論定義

形式的定義在教育上的價值——抽象的專門名詞很難給它們下一確切的定義，尤其是對於帶有哲學性的名詞．所以在這些定義中生出許多的錯誤或謬解．但是在初等算學中所用的一些定義都很簡單．很少的地方只因爲缺少正確定義的關係而至於發生誤解．直線與曲線，二項式與三項式，平行四邊形與梯形等等所以差異的地方，雖然對於這些名詞的定義，不很十分瞭解，也可完全領會．

在中等學校裏教學形式的定意之意義，不在使學生知道這些名詞而在藉以訓練學生的論理觀念．但在普通學校裏利用學習定義而訓練論理觀念者，頗不多見．許多人教授定義只是逐字逐句的講解而已．如果我們教學定義的目的，在訓練學生的論理觀念，必須使學生自己試下定義，不過這樣工作普通的學生未必都能作得到，卽使能作得到，也必須在他們對於所要定義的對象，已得着明瞭的觀念以後．因此學習一種名詞的形式定義，不是學習的發端而是學習的終結．所以這種學習不是爲的把名詞的意義教給學生，乃是爲的一種形式論理的練習．

這樣的工作當然是無疑意的具有一種價值；但是我們要知道並不是所有的定義都適於作這種練習，尤其是在學習初等幾何的當中，這種練習並不見得合適或必要．

一種定義不一定只是解說——論理的定義只是一種形容，所以從其他一切事物中區別出來一種事物．這種定義只可使我們能够認

識某一種事物，並可指明它同於某一類屬．但是這種認識不一定能說明這種事物的實在性質．我們可以承認以下的說法當作角的定義："角是由一點作出來的兩條射線形成的圖．"這個定義可以使我們認識像那個樣子的便是角，但不能使我們得着構成角度的實在概念．所以我們不能應用這種概念到以後的工作上．可見形式的定義只是純粹表面的形容，不能關係到它們的實在性質．

許多的學生對於定義的學習，養成了只是重複字句的習慣，而不能實在的了解其義意．無怪乎這些學生學習的結果只知道某種名詞之形式的定義，却沒有得着一個清楚的概念．所以名詞之性質的講解，的確比它的形式的定義更爲重要．因此凡是敎學新名詞的時候，應該詳爲解說並且應該多用具體的例子顯明其性質．

研究幾何時熟習基本的名詞爲惟一不可少的工作——形式的定義固然沒有多大的價值，但是也不能因此便對於一切的名詞的學習都可忽略過去．在另一方面說，爲將來的研究計，它却很關重要．有一些學生雖然很有論理的思致而竟不成功，多半因爲他們對於整個的清楚的空間概念得到很遲的緣故．更有些學生雖然一時也曾得到過，但很難的永久保持，不久就模糊了．這是一種普通的事實，有許多程度很高的學生對於"角"的概念不能了解，至少也是不清楚．就像米琴敎授 (Professor Minchin) 以這樣的算學家還說他把歐克利得幾何學到了六本以後，尙且不知道"角"的眞意義．

在一班中使每個學生都懂得"相似多邊形"的意義，我想總不算困難．但是經過幾星期以後，恐怕還有的學生認爲互相等角的多

邊形即為相似.

對於一個名詞只是詳細的解釋，並不能生出好多的效果，並不能使學生澈底的了解它，最好使學生在一種很合宜的情形下去作些證明的工作。無論如何要使他們對於圖形的性質在任何的場合都可一目瞭然，以至於這些名詞能够機械的喚起來正確的印像。

熟習這些名詞的最好方法,便是演習關於這些名詞的簡單問題.下節當舉例說明之。

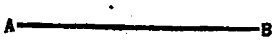
C. 怎樣教學開端的定義?

普通應注意之點——普通的學生開始學幾何應該比較學其他課程容易．因為他們很容易因新奇而感到興趣，並且決不至於因受從前的經驗而發生憎好的偏見。開始教學的時候，決不應當只注意字義，使學生重複的讀誦他所不了解的字句而戕賊其自然的興味！當然更不應該强迫着學生逐字逐句的背誦每一個定義！並且不要詳細討論那些不關重要的名詞以至惹出糾紛！所以教學這一部份應儘着用探討法使教學方式生動而有興趣，最好不令學生發生「幾何學只是些字句的研究」的印像！

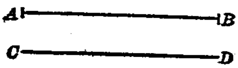
關於教學定義的困難，在教學初步時愈易顯出來，並且不好的開始能影響到以後的工作，我們必須特別注意.

面與線——在中等學校裏講授關於面，平面，線等等定義的時候，如果把下定義的困難都提出來便是錯誤．對於初學者我們只可這樣講：面是一種界限，就像窗面與空氣中間分界的所在，同時線

是面的界限．最好指明下圖，黑線 AB 並非幾何上的線，眞正幾何線只可想像於黑白兩色之間；因此在 AB 線上形成一幾何線，同時在線下還形成一幾何線．



我們對於直線不用詳爲下定義，只可認爲是線中的最簡單者，略可以緊張於兩點間的線作譬喻．但是要指示給學生有限直線與無限直線的區別，最好對於有限直線謂之線段，其兩端以記號表示出來．同時兩端沒有記號的，代表無限直線．例如下圖 AB 爲線段，CD 爲無限直線．



角——講到角時可以旋轉線來說明，不過最好用種種的器械實在的把一線的旋轉表示出來．例如用兩脚規，最好預備長短不同的好幾份，或預備不中用的鐘表旋轉其兩針，藉作表示角是由旋轉形成的，並且看出角的大小與邊的長短無關．這樣解釋可以把角的意義很清楚的表示出來，同時也很方便的說明平角，反角等．

怎樣使學生了解角的意義及與角有關係的名詞？——爲繼續研究較高深的算學計，不能不預先使學生熟習專門的名詞．但是使之熟習的方法，不能只是背誦便可成功．這一點在前一段業已說過．最簡單的練習應當 (a) 使學生實地畫出許多各種的圖形，如銳角，鈍角，鄰角等等．(b) 令學生把畫在黑板上的各種圖形，一一命出名來．然後再讓他們作些較複雜的工作．在這一步有三種練習題很可利用：

1. 數目的習題.

2. 作圖的習題.

3. 實驗的習題.

I. 關於角及與角有關係的名詞之數目的習題——如下邊提出來的習題大部份可用口來解答，同時教師應把圖畫在黑板上，並隨便附以數目. 如果教師向來沒有這樣教學的經驗，應該對於這種習題加以注意，以便在教室裏，如有必要時能够臨時想出這些問題來應用.

凡是比較困難的習題可以指出來使學生在課餘去作. 自然，不一定把下列所有的習題都一一解答出來，但在另一方面，感覺不足時，當然很容易的再增加一些. 爲教師者很可斟酌伸縮.

(a) 關於角的性質之習題.

（令學生答覆時，可用不同的單位，如度，直角，平角.）

1. 時鐘當一點，四點，六點三十分，等等的時候，求時分兩針所成的角.

2. 由一點北向作一線，東北向作一線，求兩線作成的角；又求南向與東南向作成的角；又求西北向與西南向作成的角，等等.

3. 時鐘的長針走 10 分當經過若干度? 走 15 分? 走 30 分? 走 45 分? 走一點，等等?

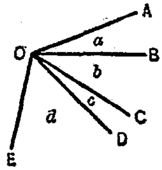
4. 如果車輪轉一週的四分之一，問其一輻條經過若干度? 六分之一? 又轉兩週，等等?

同樣的問題很多不便過於多舉例了.

(b) 關於角的加減與鄰角的習題.

5. 照下圖試用三個文字讀下列之角:

$\angle a, b, b+c,\ c+d,\ a+b+c,$ 等等.



6. 那一個角與 $\angle BOC$ 爲鄰角? 與 $\angle COD$? 與 $\angle AOB$? 與 $\angle DOE$?

7.

把下列各角，一一用數量代入；如 40°, n°, $\frac{1}{3}$ 直角，等等.	令學生把下列各角一一用數量解答出來.
1. a, b	1. AOC
2. b, c	2. BOD
3. a, b, c	3. AOD
4. AOC, a	4. b
5. AOD, a, c	5. b
6. AOE, a, b, d	6. c
7. AOE, a, d	7. BOD
8. AOC, BOD, b	8. AOD
9. AOD, c, COE	9. AOE
…………………………	……………
…………………………	……………

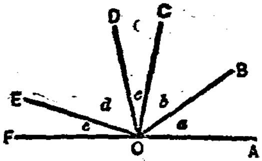
8. 如上圖設 $AOE=120^\circ$ 而 $a=b=c=d$, 求 a.

9. 如上圖設 $a=b=c=2d$ 而 $\angle BOD=80^\circ$ 求 d, 等等.

(c) 關於補角與平角的習題.

10. 求 60°，30°，10°，$\frac{1}{2}rt\angle$，m°，$(m+n)^\circ$ 各角的補角。

11, 如下圖，設 AOF 爲一平角，那一個角爲 $\angle a$，$\angle AOD$，$\angle(a+b)$，$\angle(a+b+c+d)$ 等角的補角？

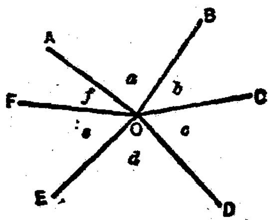


12.

把下列各角一一與以數量的價值：	求以數量表示下列各角：
1. a, b, c, d	1. e
2. a, b, c, e	2. d
3. AOD, d	3. e
4. AOC, c, e	4. d
5. AOC, b, BOD	5. FOD
或設 $a=b=c=d=e$	求 a
$a=b=c=d=2e$	e
………………	………………
…………………………	…………………………

(d) 關於餘角及直角的習題與 (c) 十分相似，不再贅述。

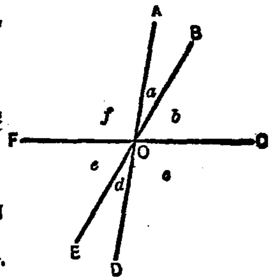
(e) 關於所有共頂點之角的習題。



13.

如右圖把下列的角都與以數量:	求下列各角:
a, b, c, d, e	f
a, b	反角 AOC
a, b, c, d	反角 AOE
反角 AOC, b	a
AOC, b, BOD, DOF	f
…………………	…………………

14. 如上圖，設 $a=b=c=d=e$, $f=20°$，求 a. 設 $a=b=c=d$, $\angle AOF=40°$，求 b，等等。



(f)關於對頂角的習題.（此地假定尚未學過對頂角定理.）

15. 設 AD, BE, CF 爲相交於 O 的三直線，指出 a, b, BOD, COE, $a+b$, $c+d$，等角的對頂角.

16. 如上圖與下列各角以數值:	求下列各角
1. a	1. AOE, d, BOD
2. AOC	2. c, DOF, f
3. a, b	3. c, d, e, f
4. a, c	4. b, d, e

5. f, d	5. b
6. AOC, COE	6. BOD

同樣可設四條或五條相交的直線.

(g)關於"平分"的習題.

17. 作互爲餘角的兩鄰角之平分線，然後假設其一角爲種種數值. 令學生求出這兩個平分線所成之角.

18. 由上題所得的結果，令學生歸納出來一個普遍的關係.

19. 把相餘二鄰角之一與以代數量（如$m°$）. 求證兩平分線作成之角永遠爲 45°.

20. 照 17, 18, 19 的樣子作成相當的題目，而以相補的關係代相餘的關係.

21. 用一銳角及其共軛角代替互爲餘角的兩角，作成與17,18,19相當的題目.

22. 用一雙對頂角代替互爲餘角的兩角,也可作成同樣的題目.

23. 作 ABD 與 CBE 兩直角同與 $\angle ABC$ 相鄰，設與 ABC 以種種數值，求 $\angle DBE$ 之值.

24. 由上題的結果，試推出(歸納)$\angle ABC$ 與 $\angle DBE$ 普遍的關係.

25. 使$\angle ABC=m°$，證明前題的結果.

II 作圖練習題——雖然學生在這一步工作時對於任何作圖尙無經驗，但是只授以不需要證明的簡單作圖以爲作圖題的基礎，並不困難. 以下習題根據兩種作圖，(a)平分一角，(b)作一角等於已

知角.

26. 平分一銳角，一鈍角，一反角，一平角.

27. 等分一角爲四等份，爲八等份.

28. 作已知角 A 之補角.

29. 作$\angle A$ 之補角的二分之一.

30. 作一直角.

31. 由一定直線的一定點作一垂線.

32. 作已知銳角的餘角.

33. 作一角等於已知銳角之半.

34. 作一角等於已知銳角的餘角之補角.

35. 作已知銳角之補角的餘角.

36. 設 A 與 B 爲已知角，作 $\angle(A+B)$，$\angle 2A$，$\angle 3A$，$\angle(180^\circ-A)$，$\angle(90^\circ+B)$，$\angle\frac{A}{2}$，$\angle(180^\circ-\frac{A}{2})$，$\angle 90^\circ+\frac{B}{2})$.

37. 作一角等於 90°，45°，$22^\circ 30'$，135°，270°，225°，$67^\circ 30'$.

38. 設 A,B 爲已知角，作一角等於 $45^\circ+A$，$\frac{A}{2}+B$，$\frac{A}{2}+\frac{B}{2}$，$\frac{A+B}{2}$，$2A+\frac{B}{2}$，$3A+45^\circ$，$4B-90^\circ$，$2A-3B$，等等.

39. 作一角令其補角等於 $2A$，$\frac{A}{2}$，$A+B$，$\frac{A}{2}+\frac{B}{2}$，等.

40. 作一角令其餘角等於$\frac{A}{2}$，$\frac{B}{4}$，$90^\circ-\frac{A}{2}$，等等.

41. 作以下各角之對頂角：A, $\frac{A}{2}$, $A+B$, $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}$, $180^\circ-A$, $360^\circ-3A$, 等等.

III實驗練習題——欲使學生對於角度得着極眞確的觀念，使學生用量角器實地作些測量工作，比任何其他工作都有效力．並且這樣器具的價值又很廉，每個學生都不致於購買不起，不過應該如何使用它略爲討論一下．在學生用量角器作題的時候，只可令學生不懷疑的去作，教師切不可太着重的指明出來，用它測量不是眞正的幾何工作．但在另一方面，又容易使學生認爲作一切的角度，即 135°，45° 等也沒有需用直尺圓規的必要，當他們感到用量角器極簡便的時候．因此普通用量角器只可作以下兩類的練習題：

a. 求作某種角度.

b. 測量角度.

42. 作一角等於 20°，75°，88°，145°，170°，280° 等等.

43. 作一三角形，令其底等於一定長，其二底角等 70°，40°.

44. 作一四邊形 $ABCD$，使 $AB=1$吋，$\angle B=80^\circ$，$BC=1\frac{1}{2}$吋，$\angle C=100^\circ$，$CD=1$ 吋.

45. 作一四邊形 $ABCD$，使 $\angle A=70^\circ$，$AB=1$吋，$\angle B=100^\circ$，$BC=2$ 吋，$\angle C=120^\circ$.

46. 作 $\triangle ABC$，使 $AB=2$ 吋，$\angle A=50^\circ$，$\angle B=70^\circ$ 再量 $\angle C$.

47. 在 $\triangle ABC$ 中量 $\angle C$，如果 $\angle A=50^\circ$，$\angle B=70^\circ$，當 AB 等於(a) 1 吋時，(b) $1\frac{1}{2}$ 吋時，(c) $2\frac{1}{2}$ 吋時.

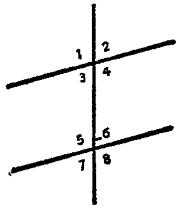
48. 作一四邊形 $ABCD$ 使 $A=100^\circ$，$B=90^\circ$，$C=75^\circ$.

$AB=2$ 吋，$BC=1$ 吋，再量$\angle D$.

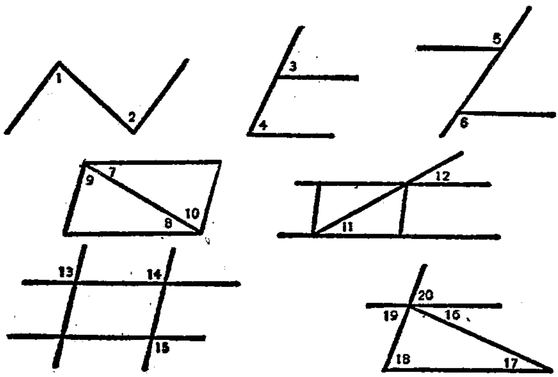
49. 試由 46，47 推出幾個普遍的定理.

更進一步的例證.

關於平行線與截線所作成的角——在下圖，學生應當對於各種成對的角，如１與５，３與６，等等，能够很快的認識它們互相的關係.

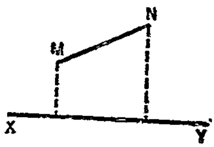


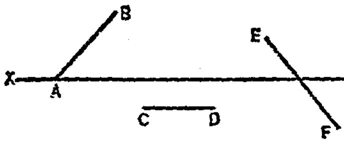
但是學生對於這一部份達到上述的熟習程度，還不够用. 他們還應當對於不完全的或更複雜的圖形上這些角的關係，也同樣的熟習認識，尤其對於下列諸圖更當注意. 在以下諸圖中學生應該對於１與２，３與４，５與６，等等，一目瞭然.



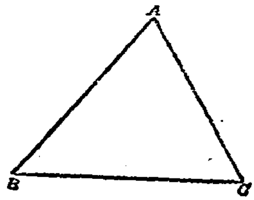
正射影——關於正射影如果只照下圖加以說明，並不够用.

學生更當把各種各樣的線如 AB, CD, EF, GH 對於 XY 的正射影都作出來．同時還可把銳角三角形 ABC 各邊在其他邊上的正射影都作出來．其次對於鈍





角三角形也要有同樣的工作．



第六章

怎樣教學幾何的初步命題

初步命題——在幾何中最基本的命題如"平角皆相等"或"等角的餘角相等，" 常常被認爲是開端的初步命題．這些命題却有一種特性，使初學者不容易了解幾何之所以爲幾何，同時還發生一種懷疑的心理，反不如以後的命題宜於使人清楚瞭然．

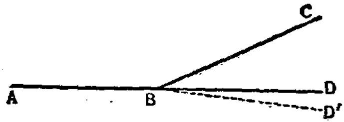
第一點，這些命題所關係的事實異常簡單明顯，以至於使初學者認爲無再證明的必要．如直角皆相等，由已知線上的一定點僅可作一直線垂直於已知線等等，這樣顯明的事實，無論用那一種證法，也不能再增加它們的確定．

第二點，越證明極端簡單的事實越發感覺困難．因此，無怪乎對於證明初步命題的證法往往需要一種特別的方式與普通幾何上所用的演繹法迥然不同．這樣證法對於初學者往往似乎是太支離與不合理，因而感到比所要證明的定理還令人難解．

普通這樣命題的證法——雖然在中等學校裏對於這些命題不能有絕對謹嚴的證明；但是仍有許多教科書不顧教育原理，一味的想法謹嚴的證明這些初步命題．有些著者對於學生是否可以完全了解

似乎認爲是次要的事件．更有些只顧論理謹嚴的先生們却這樣說：“我們一定要謹嚴的，絕對正確的來作論理的訓練，當從第一天做起，不然，學生一旦走入歧途養成思想不正確沒有系統的習慣，則從此恐怕再無挽回的希望．” 向這一方面努力的結果，當然把初步命題的證法弄得很複雜很費周折，有很多的教科書就是這樣．

例如證明鄰補角 (ABC,CBD) 之外邊 (BA,BD) 是在同一直線上，普通延長 AB 然後再證其延長線 (BD')，一定與其他外邊 (BD) 全合，有如下述：



因兩角(ABD, ABD') 都係平角所以相等．然後各減去 ABC 角則其所餘(CBD,CBD')當然相等．並且 CBD 與 CBD' 不但相等且有一公共邊 (BC)，故其他兩邊 (BD,BD') 必然重合，等等．

像這樣的證法還打算讓學生得着幾何的精神！我敢說大多數的學生在初學這樣定理的時候，只可想法牢牢的記住，一定很少很少的學生能够完全了解它們．

假如開始就讓那一對大的角 (ABD 與 ABD') 相等，那末 BD 與 BD' 的重合即可由此直接推證出來，其實與由後一對角(CBD 與 CBD') 還不是同樣的推證？這樣說來，到底爲什麼還用到三個方程式並且還應用什麼從等量中減去等量其餘相等？即這樣簡略的推證仍不能免除異議．爲什麼僅僅延長一個外邊？是否只用平角的定義不用任何其他的證明即可確定外邊是在同一直線上？

還有許多的書犯了同樣的毛病，把一種可以三兩行寫出來的證

明竟費一頁或更多的篇幅才可證出來，但同時還勞而無功。

凡是懂得些幾何基礎的人，定然相信在這初步工作要想絕對的正確爲不可能，而且有些地方從前認爲絕對沒有缺點的地方如果以現在算學的眼光來看仍不免發生誤謬。這一類的例子也很有，即如證明以下的命題：由定直線 AB 上之一定點 A 定能作一直線垂直 AB。往往假設 AB 圍繞着 A 點而旋轉使與原來的地位成一直線。這個假設似乎很簡單很不勉强，但是沒有論理的根據，而且現在極完美的幾何已否認這樣假設的可能。當然有許多人們這樣說："我們眼看着這樣旋轉是可能的，有什麼不可靠?" 但是"眼看"絕不能認爲是正確的算學證據。

這樣主張絕對謹嚴的書籍中還有一種缺點，就是往往默默承認了某種定理，而對於某種定理沒有方法使它比那些費了許多時間與精神求證的定理更明顯些。如果我們不能原諒「在已知線的一定點僅可作一條直線垂直於已知線」的假設但同樣的不能原諒「每個角只有一個平分線」的假設。因爲這種假設如其角爲平角時即完全與剛才垂直假設相同，其實是一而二二而一者也。

如果明哲的教師應用這種過於謹嚴的教科書，貽害於學生尚淺。但是不幸竟有些教師還想在這樣教科書外另找些材料，務使其達到絕對的正確，因此往往採用背誦方式。對於小的節目也務必使其眞確，一切的次序務必使其合理。因此學生常常只背誦一二次尚不成功，必須再三的重習非至完全能够熟背不可。這樣的教學還想得着好結果嗎?!

如果對於一切謹嚴化的證明都加以反對，當然是一種錯誤，不過在中等學校裏對於初學者不應該這樣的教學．我們須知道欲達到形式上的正確必須以培養思想的正確作出發點；如果思想一經正確則自然的得着形式的正確．

對於學生的影響

最初的錯誤印像——用這種過於謹嚴的證法，對於初學者當然要發生困難，因為學生對於這一步工作所涉及的概念完全是新穎的，所用的方法完全是從來沒有用過的．即使教學合法學生也不能完全不感困難．如果逼迫着學生非作些這樣過於論理化的工作不可，必然使學生由于不能了解而致于失敗．並且他們開始的失敗往往影響到他們對於該科目的志趣與前程．學生因而對於幾何到底是什麼易於得着一種錯誤印像．他們決不承認幾何能夠訓練思想發達創造與發明能力的，却當作它只包含着一些極精密而有計劃的體系，對於這些不幸的學生只有煩擾只有討厭．

缺乏興趣——普通一個學生決不願意學習一些他不能了解的東西，因此學生在一開始的時節便不喜歡以至於討厭這種科目．他在最初學習的時候因感到這種科目的新奇而發生的興趣不久也就降低了；而且這種興趣本可作為學習的原動力竟被整個的喪失了．

對於學習方式的影響——用過於謹嚴化的教學法教學幾何開始的定理其弊端之最大者要算是對於學生學習方式的影響．學生並不能看出嚴剎化的必要與意義．他只感到非把課本上的證明完全背誦

出來不能滿足；結果他只可想法記憶那些證明，似乎教學兩方面才能滿意．用這種方法學習學生自然要養成一種惡習對於學習幾何將永遠成爲一種極可怕的障礙．他漸漸的只應用機械的記憶而不靠推理的能力．這樣習慣一經養成將使一個學生對於一切算學的工作不能成功．

指導學生對於學習幾何的態度——這是很奇怪的一件事，在學習幾何的當中，學生很容易各趨極端．有的人非常的喜歡研究它，並且精於幾何工作；同時又一部份人極端的不喜歡研究它，簡直對於任何幾何的工作都做不好，但是這種學生多半仗着記憶和臨致用功還不至於十分露出馬脚來．在這兩種人中間的却寥寥無幾．使學生喜歡或討厭研究它在幾何初步學習的時候最有關係．所以爲教師者在開始的教學與指導應盡到十二分的力量．一俟學生能够了解幾何的眞意義與算學的美妙和簡明，他的學習前程定然能够使他們快慰多而煩惱少．有許多學生只以開始未得其門以至於這種學習完全變成苦惱的工作，得不着一點有益的結果．

教學初步命題的合理方法

定理——如果我們得不着一個簡明合宜的教科書，爲教師者應當另外編些簡明的教材儘可不爲教科書拘執住．對於很年青的學生最好不給他證明這樣簡明的定理，即認作公理也未嘗不可．

我們知道歐克利得曾假定所有的直角相等，我們又何妨在中等學校裏照樣假定它或假定相似的定理．

無論什麼時候，對於證法越簡單明顯越好，不要把這些證明所用的概念用專門術語去解釋以至於模糊不清．例如“直角爲平角之半所以相等，因等量之半仍相等也．”這樣相似的陳述對於初學者倒很相當並不用絕對的正確，其實他們對於極正確的理論反以爲無意義．

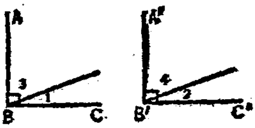
對於初步定理的證明此刻且不必拘拘於合乎法度的形式．最好等到學過關於相等三角形諸命題之後再教以合乎法度的形式，那時學生對於初步命題的證明已可了解，其所得結果定然圓滿．

不要對於這些初步的定理太詳爲解釋，過於延長時間了．教師對於這極簡單的題目講授越詳細，費時越長久，學生越懂得少，因爲這樣定然有些學生因而懷疑，以至本沒有困難的地方他也許懷疑起來．結果反倒引出麻煩來．

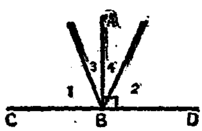
習題——打算使學生對於這些定理熟習了解，最好使他多多的應用它們（多作練習題）．但是去找許多這樣很好的習題很難，但倘可作出幾個來．舉例來說，打算使學生了解同角或等角的餘角相等的一個事實可用下列的習題．

1. 設ABC與$A'B'C'$都是直角，並且$\angle 1=\angle 2$，求證$\angle 3=\angle 4$．

2. 用同樣的圖形$AB\perp BC$，$A'B'\perp B'C'$，並且$\angle 3=\angle 4$；求證$\angle 1=\angle 2$．



第一二題用圖



第三四題用圖

3. 設 $AB \perp CD$ 並且 $\angle 1 = \angle 2$，求證 $\angle 3 = \angle 4$.

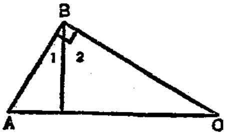
4. 用同圖設 $AB \perp CD$ 並且 $\angle 3 = \angle 4$，求證 $\angle 1 = \angle 2$.

5. 如 $\angle ABC$ 爲一直角，並且 A 爲 $\angle 1$ 之餘角，求證 $\angle A = \angle 2$.

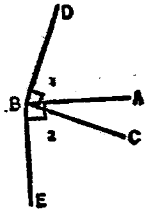
6. 設 DBC 與 ABE 皆爲直角，求證 $\angle 1 = \angle 2$.

7. 設 ABC 爲一平角，$\angle 1 = \angle 2$，並且 $\angle 3$, $\angle 4$ 皆爲直角，求證 $\angle 5 = \angle 6$.

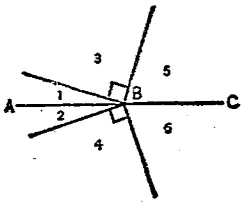
8. 設 AB 與 CD 爲直線並且 2 與 6 皆爲直角，求證 $\angle 3 = \angle 5$.



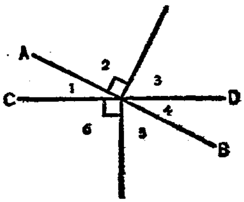
第五題用圖



第六題用圖



第七題用圖



第八題用圖

同樣可作出關於等角的補角，等等的習題．此地如果延長同角的兩邊作成該角的補角，則與習題 6 相當的習題便可引出對頂角定理．

第 七 章

幾何上的練習題

概 論

呆板的命題與啓發式的練習——以上各章可以當作教學證明的幾何(demonstrative Geo.)之準備部份．我們既已承受了如第二章所說算學教學的目的，此地要開始詳細討論如何教學幾何的時候，我們當然必須認定什麼是我們的主要教材．到底主要的部份應該是些教科書上的呆板命題呢？還是些啓發式的練習題呢？我們主要的目的是在學習許多的證明與作圖？還是在培養能夠解決新穎習題的能力？

從前幾何的教學完全是在學習課本上的證明，同時凡是需要思想的練習往往是付諸缺如．現在許多學校要犧牲一部份時間去作啓發式的練習工作．但其中所持的態度仍難以說是完全合乎教育原理．

第一種錯誤見解，便是所謂謹嚴主張．以爲初學者非了解若干形式的（formal）命題之後，是不能夠自己思想的．爲貫徹這種見

解，有的所謂標準教本簡直在開首的四五十頁沒有任何的練習題，因而有些教師按着教本盡力在自己講解，以至經過好幾個月之久！還有的更甚於此，竟至先把平面部份授完後，等到再回頭溫習時，才拿出練習題來．同樣，有的教科書在牠的序上便聲明所有練習題在初次學時可以完全去掉，因此十分普通的習題都被當作一種補助品，或當作一種有用而嫌過多的附加物，與其餘部份無甚關連．

作者以為對於練習題的這種見解，是完全錯誤．把練習題當作無關輕重的補助品，正足以證明是對於這種工作——我們可以說是算學教學的主要部份——的眞功用不了解．

幾何的教學過程主要的應該是想法解決問題，練習解決問題；至於書本上的有規則的證明不過是這種過程中的副產物而已．

創作式的練習當作幾何教學的重要工作的理由．

1. 僅有創作的思想大可代表眞正幾何的工作——如果我們承認算學家之所以為算學家，是在能力而不在知識．並且正當研究算學的方法，是需要思想，而不需要記憶．於是練習工作之重要，與只是學習一些現成的證明之無益，顯然明甚．

我們都知道從沒有人希望訓練一個棋手，只令他學習許多局式的記錄而已，並不給他練習的機會．模型的學習，對於具有相當技能的遊戲者，再給以實地練習的機會，或可有用．不特此也，無論我們人類的那一種活動，如溜冰，棒球，游泳，航行，等當學習時，都是同樣的道理．我們學習必須由“做”作起．我們怎能單獨把學習幾何當作例外；只是希望學生追踪他人的意見，而不讓他們

由練習推理中去學習推理？

2. 學習幾何初步時作練習題總比學習複雜的模型較爲相當——解答一種簡單練習題，總比了解一個繁雜的證明如通常教科書上第一頁的定理，容易的多。練習工作能給初學者一種極好的幾何概念，且不至養成機械式的學習。從前以爲初學者非學習若干課本的模型以後，不能作練習題的說法，作者決難相信。好些簡單練習題的解答，能使學者對於模型的證明，得以清楚的了解，並增大其價值。

3. 練習能增加學者的興趣——因爲普通的青年，都喜歡"做"，都喜歡成功一件事物。即便發現一點算學的事實，也比較死讀許多頁的書，更有興味，更覺滿意。

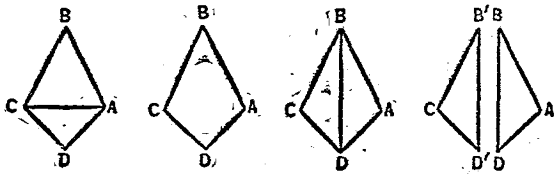
4. 練習題比較教科書上的命題容易按照難易的程度排列起來——打算把課本上的命題這樣的排列，使最易者在最前，其餘也都照着難易的程度而列其等次，這一件事差不多是不可能。論理的次序定然要——多少因爲作書者的看法——錯亂了教育的次序。但練習題的排列，却可完全依照教育的主意而定。在有規則的命題中間插入許多練習題聯貫起來，能夠使其次序較爲自然。並且因此學生有時能夠發現一些證明是超出他們才能以外的。

如果只是照着課本教學，試問能有多少學生能夠發現三邊相等而三角形爲全同形的證明？但如用一組的練習題，與平常放在牠前面一個命題，即二等邊三角形之底角必等，引到這個命題時，則發現其證法，又有何難？應用二等邊三角形其底角必等的命題，去證明角度相等的練習作過之後，我們可給出以下各問：

1. 如 ABC 與 ADC 爲同底之兩個二等邊三角形，則$\angle BAD=\angle BCD$.

2. 如在 $ABCD$ 四邊形中，$AB=BC$，與 $AD=DC$；則 $\angle A=\angle C$.

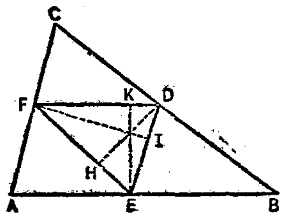
3. 如 BD 爲三角形 ABD，DBC之公共邊，$AB=BC$，與 $AD=DC$；則$\angle A=\angle C$.



4. 如在 ABD 與$CB'D'$三角形中，$AD=CD'$，$AB=B'C$ 及 $BD=B'D'$；則 $\angle A=\angle C$.

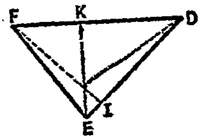
5. 如三角形 ABD 及$B'CD'$的三邊各各相等，則兩三角形相等.

同樣三角形的三高線相會於一點，可以由三角形的三個垂直平分線相會於一點．推求出來如下：在證明三角形 ABC 的三邊之垂直平分線FI，DH及 EK 相會於一點之後，作 FD，DE 及 EF，由是可發以下各問：



1. FI，EK 及 DH，與$\triangle FDE$有什麽關係?

2. 你能說出 $\triangle FDE$ 的三個高線的互相關係嗎？



3. 如果任何三角形 FDE 爲已知，你能夠作出另外一個三角形，使原來三角形之三高線恰爲求作三角形之三個垂直平分線嗎？

4. 於是你能曉得任何三角形的三高線有什麼關係嗎？

如果把命題分析成幾個練習題，我們發現一個命題的證法，並非什麼難事，以上兩例即其明證，同時如將命題論理的排列着，絕不能像這樣的緊接關連。第二個命題可緊接着放在第一個命題的後邊，如同一種練習題一樣，無妨後來又提出當作命題來講，這樣的重複不但無害，反而有益。

結論

幾何教授的最普通的毛病，是在以課本中證明的知識當作學習的主要目的.

幾何的學習不過是一種解決練習題的過程，與一些解決問題的普通方法而已。至於課本上很規則的命題，很可當作練習題看待，不過其中所述的事實，須用些記憶與普通練習題不同罷了。

練習題雖然不是爲的記憶，却是爲的使學生對於幾何事實的熟習，因而能作更複雜的推理.

學生對於這種科目的能力與進步，只可以他們解題的能力作標準，並不關乎背誦已知事實的能力。

怎樣教授練習題

教師方面之需要準備者——如果我們認為教學創造的練習題，便是幾何教學的主要目的．因而知道一個良好教師所應該具備的是解答習題的充分能力，且快且不費力，並且需要各種解題方法的充分知識．一個人他的算學產業只是知道些算學的知識，縱然是高深算學，也是不配作算學教師的．一個人他自己不能夠發現這樣簡單的事物，一定更不能引導他人作那發現的工作．

為教師者應該會創造幾何的習題，以便應付特別用途，或在課室內的特別情形下的需要．他更應該會臨時作些口述的問題．這種能力，可由思維與實習得來．並且在以後各章有些具體的指示，很可用以對於生手之幫助．

進行的方式——關於這一點的討論，對於有經驗的教師，似乎不必．但對於無經驗者，却有許多幫助．在許多的例證，都應依照下列手續進行．(a)口述的練習．(b)黑板演習．(c)個別演習．口述的練習儘可由教師臨時實行．此時的教師，手持粉筆，以備在黑板畫出需要的圖形，可以繼續的發問．這種口述工作，最宜於容易的題目．如係精練熟手，定能激起學生的興趣，而且引起一班的爭勝心．

此地所謂黑板演習者，即係同時有好幾個學生在黑板上作題之意也．其演習材料，可由教科書中或已經預備出來的一些紙片（每片上一題）得來．這種黑板練習能夠在較短的時間，使一班作出較

多的題目來．但不能如同口述練習一樣的起興趣與競爭．然用作改正最普遍犯的誤謬時，確比個別演習適用的多．並且這種演習，常常能使個別演習時容易些，其所得結果較好些．

練習題的創造——只是討論關於教學練習題的普通概論，是無大用的．具體的指示，是非常適用．下章卽盡力於此，現在我們要討論並且舉出僅僅關於對頂角相等的練習．

在本書第六章業已提到如何的應用初步命題來發現對頂角相等的證法．這種方法，有時對於學生仍嫌太難．而應用數目的例題還可以使之變容易些．在圖上指定一角爲若干度，遂令學生求其他一角之數值．自然不能應用對頂角相等作理由．經過幾個這樣的練習題以後，再指定一角爲文字值如 $n°$，仍照樣作下去，於是一雙對頂角遂可證明其相等矣．

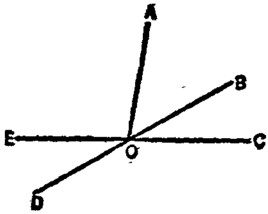


圖 1.

創造關於證明對頂角相等的練習題，差不多取出以前學過任何一個習題來，插入一角或數角的對頂角，便可改變成功．

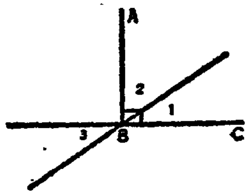


圖 2.

如圖(1)，我們不這樣的問"何角爲 $\angle AOB$ 與 $\angle BOC$ 之和？"可將 $\angle BOC$的對頂角作出來而問以"何角爲 $\angle AOB$ 與 $\angle DOE$ 之和？"同樣問以 AOC 角與 DOE 角之差．又如圖(2)，使 $AB \perp BC$ 不令求出 $\angle 1$ 的

餘角，而代以求 $\angle 3$ 的餘角．如圖（3），（三直線相交於 O）把 $\angle 2$ 的對頂角作出來，而間以1，5與3角之和，代替了1，2與3角之和．

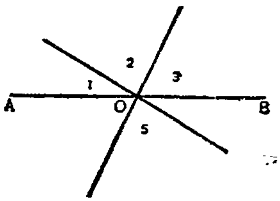


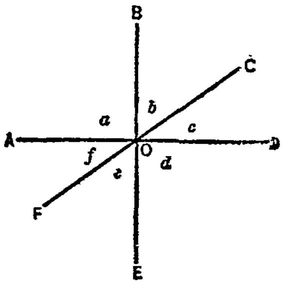
圖 3.

每一個這樣的習題，都可變到數目的問題．最後我們可指定1與3角的數値，而問以5角之値．

創造這一類的練習題，總是很簡單的事體．下段習題中，有好些是由這種方法得來的．

習題

設三直線 AD, BE 與 CF 相交於 O，作成 a，b，c，d，e 與 f 的角度．



1. 設 $\angle b=40^\circ$，　$\angle c=35^\circ$，求 $\angle AOE$．

2. 設 $\angle FOB=130^\circ$，$\angle c=40^\circ$，求 $\angle a$．

3. 設 $\angle FOB=130^\circ$，$\angle f=38^\circ$，求 $\angle d$．

4. 設 $\angle f=60^\circ$，　$\angle b=25^\circ$，求 $\angle d$．

5. 設 b 角與 f 角互爲餘角，求 $\angle d$．

6. 設 $\angle AOC=140^\circ$，$\angle COE=120^\circ$，求 $\angle BOD$．

7. 設$\angle AOC=150^\circ$，$\angle COE=130^\circ$，求$\angle a$.

8. 設$\angle FOB=140^\circ$，$\angle AOC=125^\circ$，求$\angle d$.

9. 設$\angle AOE+\angle BOC=140^\circ$，$\angle c=40^\circ$，求$\angle e$.

10. 設$\angle f=\angle b$，$\angle d=100^\circ$，求$\angle c$.

11. 設$\angle b=\angle c$，$\angle AOE=80^\circ$，求$\angle f$.

12. 設$\angle AOC=\angle BOD$，$\angle e=40^\circ$，求$\angle a$.

13. 設$\angle a=2(\angle c)$，$\angle e=60^\circ$，求$\angle c$.

14. 設$\angle AOC=\angle COE$，$\angle BOD=100^\circ$，求$\angle f$.

只要我們記住，所有以上各題僅有兩個不相關的未知量，這是很顯然的，兩個方程式關連着兩個不相關的角，當能把上圖中所有角都求出來，因此我們可任意造出許許多多的習題，以至於無限。又如

15. 設$\angle a-\angle b=15^\circ$，$\angle c=\angle d$，求$\angle c$.

16. 設$\angle a=2(\angle b)$，$\angle c+\angle e-\angle d=20^\circ$，求$\angle b$.

17. 設$\angle a-\angle b=10^\circ$，$\angle d-\angle c=20^\circ$，求$\angle c$.

我們要知道在以上各題中，不但所求的角可以求出來，而且所有該圖中的角都可一一求出。因此習題的數目，仍可增加不少．我們還可把以上各題中角的數値，易以文字値，如 m°，n°．其範圍豈不又推廣一些?

最後每個這樣的數目題皆可變作一個定理，由此可更得出較難的習題例如1，2，3，4，6，與7可變作下列定理:

18. 求證$\angle b+\angle c=\angle AOE$.

19. 求證$\angle FOB-\angle c=\angle a$.

20. 求證$\angle FOB-\angle f=\angle d$.

21. 求證$\angle f+\angle b+\angle d=180°$.

22. 求證$\angle AOC+\angle BOD+\angle COE=360°$.

23. 求證$\angle COE-\angle a=180°-\angle AOC$, 如此類推，還可寫出幾個定理如下：

24. 設$\angle f=\angle e$, 求證$\angle b=\angle c$.

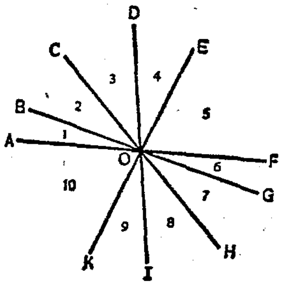
25. 設$\angle FOB=\angle FOD$, 求證$\angle f=\angle e$.

26. 設$\angle a-\angle b=\angle d-\angle c$, 求證$\angle b=\angle e$.

27. 求證$\angle AOC+\angle COE-\angle EOA=2(\angle a)$.

28. 求證反角 AOE+ 反角 BOF+ 反角 $COA=720°$.

如果用有五個或更多的直線相交於一點的圖形，同類的習題可以推廣出來．但是現在已竟是寫出來的不少了，如同樣的再寫出許多，未免過繁．所以只寫出幾個關於由五線作成的圖形的習題．此地設五線會於 O，而作成1，2，3，4，5，6，7，8，9 與10等角．



29. 求證$\angle 1+\angle 3+\angle 5+\angle 7+\angle 9=180°$.

30. 求證 $\angle AOC+\angle BOD+\angle COE+\angle DOF+\angle EOG=360°$.

31. 求證 $\angle AOD+\angle BOE+\angle COF+\angle DOG+\angle EOH=540°$.

32. 用 AOE, BOF 等角作出同樣的命題.

33. 設$\angle AOC=\angle BOD$，求證$\angle 6=\angle 8$.

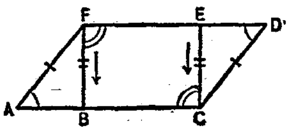
34. 設 $\angle AOC=\angle BOD=\angle COE=\angle DOF=\angle EOG$，則各角均相等.

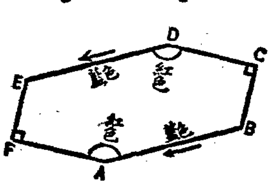
35. 設 $\angle AOD=\angle BOE=\angle COF=\angle DOG=\angle EOH$，則$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\cdots\cdots$

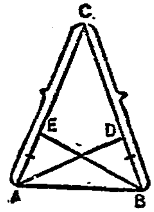
表現幾何事實（關係）之圖示法

我們既然是教授學生去思想，在初步的時候，就應當盡量的排除其他困難。即便是很能推理的學生，有時只因爲忘掉了題設，或證明的前部，以至於不能繼續下去。但如果應用圖示法，這樣的遺忘差不多是不可能。題設可以用顏色表示出來。一樣的顏色表示等線或等角，矢形表示平行線。一個着色的方形表示直角。例如下圖兩條藍線表示 AB 等於 DE，兩個紅色圓弧表示$\angle A$ 等於 $\angle D$，兩個矢形表示 AB 平行 DE，而兩個小正方形則表示直角.

至於證明出來的結果，我們可用白色粉筆表示，等線以橫劃表示，等角以數目相等的弧表示，平行用矢形表示，等等.如右圖上之符號，假作白粉筆所畫，以表示爲業已證得的部份：$AF=CD$，$BF=CE$，$\angle A=\angle D$，$\angle BFE=\angle ECB$，$BF \parallel CE$，如有線重疊時則用括號.如下圖即表示$AE=BD$，$AC=BC$.

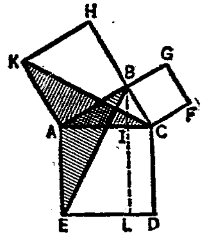




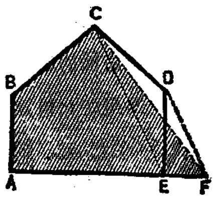


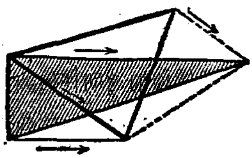
如果有色粉筆不能利用時，白色的橫劃等符號，也可用來表示題設，但是爲便於初學者打算，還是把題設與題斷分別的表示出來爲有用。

爲的對於學生指明某個三角形或多邊形時，可用密線遮蓋住，或加重其周界，以表示之，如$\triangle AEB$與$\triangle ACK$便是。



如果我們把某種圖形改變爲其他一個圖形時，最好把原來的面積周界加粗，而同時用密線遮蓋所得的結果圖形，如下所示：





還有一種作法已知線用細線表示，作圖用的線用虛線表示，結果線則用粗線表示之。有複雜的作圖中爲分別各種不同的線，常用各種色筆以顯明之。

一時把關於這種方法都毫無遺漏的說出來，這是不可能。好在富有方法的教師可以隨便的擴大，並且改良以上所指示的幾點。

第 八 章

三角形相等

關於相等三角形的前兩個命題

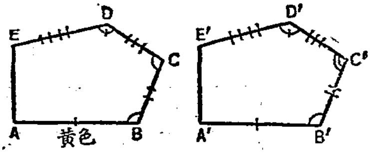
疊合法能否避免——疊合證法向來不受學生的歡迎差不多這是普遍的現象，同時用牠的地方又很少，因此有時發生這樣的問題，到底能否想法另外作成一種證明的統系，而不用這種討厭的方法？如果我們承認無論證明任何圖形的相等，第一個證法除根據相等定義以外別無辦法；同時相等的定義又包含着疊合的意義，則疊合法顯然不能避免，除非把相等的定義也從新改變了．所以關於證明三角形相等，弧相等，橢圓形相等，的第一個命題必須要根據疊合法．

疊合法的教學法——打算使學生了解關於三角形相等的證明，而只是用重複背誦的方法，確乎無甚價值．最好給學生一些具體的例證，使他們得着些根本的進程方式．即先疊合其已知相等的部份，再繼續着搜求其他部份的疊合．茲舉例如下，以便說明一切．

在五邊形 $ABCDE$ 與 $A'B'C'D'E'$中，設 $AB=A'B'$，$BC=B'C'$，

$CD=C'D'$, $DE=D'E'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$, 及 $\angle D=\angle D'$.

作一有色的圖如 $ABCDE$, 此地設係黃色. 而以橫劃表示各相等部份, 當學生疊合 AB 於 $A'B'$ 上的時候, 使他在 $A'B'$ 上畫一黃色線段, 以表示實際的重合. 其他部份也同樣的這樣作. 這樣的作過幾個習題之後, 學生自然要曉得疊合的意義. 從而能够應用到兩個三角形的命題上. (a. s. a. = a. s. a. 與 s. a. s. = s. a. s.)



但是我們決不希望對於這些證明的探討太費時間了. 並且反來覆去的重複與一些不關重要的討論, 致令學者生厭. 寧可對於這個題目快些應付過去, 即縱然不至每個學生都能够完全嫻熟的程度.

根據相等三角形所作出來的練習

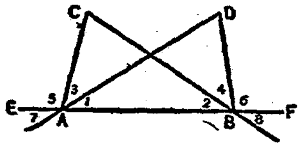
概論——等到全級了解了關於三角形相等的前兩個命題以後, 就可開始口述的練習. 敎師可將圖形畫在黑板上, 並且把題設用顏色表示出來. 相等三角形可用作證明線角相等的事實, 我們應該由此引證出來. 但學生作過許多練習題以後, 定然熟習了這種事實. 如打算多作一些練習, 同時黑板演習是需要的, 所有練習的重要結果, 應該得着這樣的知識:

證題法 I. 證明線段或角的相等往往利用相等的三角形

敎師不能着重這個原理與牠的應用, 以至於過度, 這種知識比起

課本的規則命題，殊較重要．無論什麼時候，學生如果打算證明線段或角度的相等，應該以下邊這個問題作分析的開始，——首由教師發問其後則由學生自己這樣的問："普通證明線段或角度相等的方法是什麼？"此外僅有幾個這樣關係重要的原則，例如證明平行，直線不相等，線段成比例，面積相等，以及其他少數的幾個方法．關於這些原則與牠們的應用等的知識可以當作學習幾何的重要目的．然而只根據一種方法去對付所有課本上的定理，却是一種誤謬．

創造習題的方法——創造許多個關於三角形相等的練習題，還算是較爲簡單的一件事體．在安置兩個三角形成某種關係的地位，如 ABC 與 ABD，再決定用那一種方法我們可以得到兩邊夾一角的相等，或兩角夾一邊的相等．



角度可題設其相等，如設爲等角的餘角，等角的補角，對頂角，各爲等角之和，等等．線段可假設其相等，或應用等量之和或差的公理，等等．

由上圖可藉以練習應用$(a.s.a.=a.s.a.)$的定理，此地 AB 爲公用，因此我們必須找出各種的方法使$\angle 1=\angle 2$，$\angle CAB=\angle DBA$．另外如上圖７，８兩角命爲１，２角的對頂角，我們可得着下列各種題設．

1. $\angle 1=\angle 2$，$\angle CAB=\angle DBA$.
2. $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$.
3. $CA\perp AB$，$DB\perp AB$，$\angle 1=\angle 2$.

4. $CA \perp AB$, $DB \perp AB$, $\angle 3 = \angle 4$.

5. $CA \perp AB$, $DB \perp AB$, $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$.

6. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 5 = \angle 6$.

7. $\angle EAD = \angle CBF$, $\angle 3 = \angle 4$.

8. $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 5 = \angle 6$.

9. $\angle 1 = \angle 8$, $\angle CAB = \angle ABD$.

10. $\angle 1 = \angle 8$, $\angle 3 = \angle 4$.

11. $\angle 7 = \angle 2$, $\angle 5 = \angle 6$.

12. $\angle 7 = \angle 8$, $\angle CAD = \angle CBD$.

13. $AC \perp AB$, $DB \perp AB$, $\angle 7 = \angle 2$.

同樣我們可用下列習題藉以熟習($s.a.s. = s.a.s.$)

14. $AC = DB$, $\angle CAB = \angle DBA$.

15. $AC = DB$, $\angle 5 = \angle 6$.

16. $AD = BC$, $\angle 1 = \angle 8$.

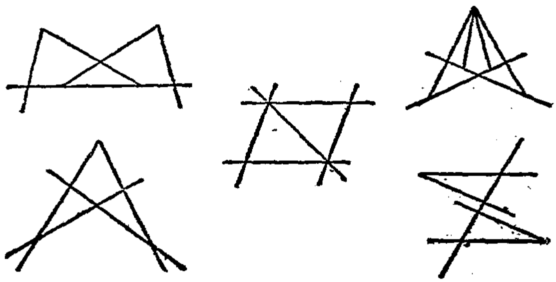
17. $AD = BC$, $\angle 7 = \angle 8$.

18. $AC = DB$, $AC \perp AB$, $DB \perp BA$.

這樣練習題的界限如增加上3，4兩角或 CAB, DBA 兩角的對頂角的關係，猶可擴大。我們只要把題斷變更一下，更可多得些個這樣的練習題，在一個習題裏，求證 C 角與 D 角相等。在另一個習題則求證 $AC = BD$，餘類推。

由此看來，一個圖形便可供給我們許多的定理，而且造出這樣的圖形還不見得困難。所以總不至於感到材料缺乏。

有幾個這樣的圖寫在下面，下段還有許多.



習題一覽——任何一本教本很難包括這許多關於這類的習題．只因這個題目異常重要，所以下面寫出來的習題一覽，未免舖張些.

自然不一定讓每個人把這些個習題都一一作過，但同時黑板演習時必須多預備幾個問題．像作這些個練習題時，有時很可預備些紙片，每片上一個習題，以便很快的就可把問題分散出去.

關於相等三角形的習題，可分作以下六種:

1. 數值的.

2. 不遮疊着的三角形.

3. 遮疊着的三角形.

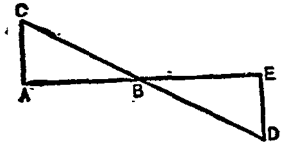
4. 學生必須在好幾對相等三角形中選擇一番.

5. 須構造三角形.

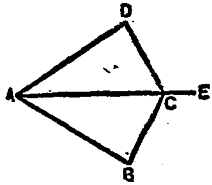
6. 在證明裏需要好幾對相等的三角形.

1. 數目的練習題——假如一級的學生多半是些很年幼的青年，開始必須用些數目的習題，此地僅給出幾個來，如果嫌不足時，把

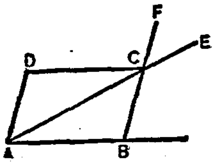
以下各題中任何等線或等角給以數值，可多得出好些.



1. 設 $AB=8$ 吋，$BE=8$ 吋，$\angle A=80°$，又 $\angle E=80°$，求證 $\triangle ABC=\triangle BDE$.



2. 設 $\angle DAC=30°$，$\angle DCE=130°$，$\angle CAB=30°$，$\angle ACB=50°$，求證$\triangle ABC=\triangle ACD$.

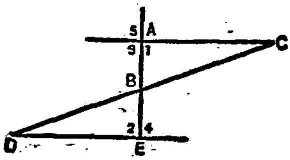


3. 設$\angle DAC=40°$，$\angle FCE=40°$，$\angle DCA=30°$，$\angle CAB=30°$，求證$\triangle ABC=\triangle ACD$.

2. 不遮疊的三角形

4. 設 $AB=BE$，$\angle 1=\angle 2$，求證$\triangle ABC=\triangle BDE$.

5. 設 $AB=BE$，$AC\perp AE$，$DE\perp AE$，求證$\triangle ABC=\triangle BDE$.



6. 設$AB=BE$，$CB=BD$，求證$\triangle ABC=\triangle BDE$.

7. 設$AB=BE$，$\angle 3=\angle 4$，求證$BC=BD$.

8. 設$AB=BE$，$\angle 5=\angle 2$，求證$\angle C=\angle D$.

9. 設$AD=DC$，$\angle 1=\angle 2$，求證$AB=BC$.

10. 設$AD=DC$，$\angle 5=\angle 6$，求證$\angle A=\angle C$。

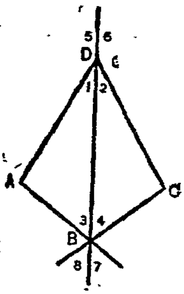
11. 設$\angle 3=\angle 4$，$\angle 5=\angle 6$，求證 $AD=DC$。

12. 設$AB=BC$，$\angle 4=\angle 6$，求證$AD=DC$。

13. 設$\angle 5=\angle 6$，$\angle 7=\angle 8$，求證$\angle A=\angle C$。

14. 設 $AB=BD$，$BC=BE$，求證 $CA=ED$。

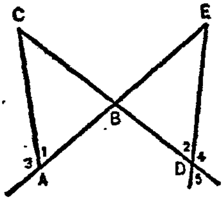
15. 設 $AB=BD$，$CA\perp AB$，$ED\perp BD$，求證$\angle C=\angle E$。



16. 設 $AB=BD$，$\angle 3=\angle 4$，求證 $CA=ED$。

17. 設 $AE=DC$，$BE=CB$，求證 $\angle 1=\angle 2$。

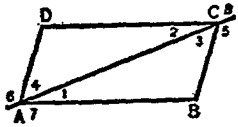
18. 設 $AB=BD$，$\angle 1=\angle 5$，求證$BC=BE$。



19. 設$\angle 1=\angle 2$，$\angle 5=\angle 6$，求證$AB=CD$。

20. 設$\angle DAB=\angle BCD$，$\angle 1=\angle 2$，求證$AD=BC$。

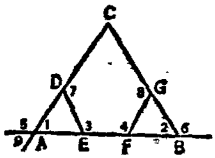
21. 設$AD=BC$，$\angle 6=\angle 5$，求證$\angle B=\angle D$。



22. 設$\angle 5=\angle 6$，$\angle 7=\angle 8$，求證$AD=BC$。

23. 設$\angle 6=\angle 5$，$\angle DAB=\angle DCB$，求證$AB=DC$。

24. 設三等分AB，$\angle 1=\angle 2$，$DE\perp AB$，$GF\perp AB$，求證 $DE=GF$。



25. 設 $AE=FB$，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，求證 $AD=BG$。

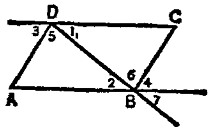
26. 設 $\angle 5=\angle 6$，$\angle 7=\angle 8$，$AD=GB$，求證 $AE=BF$。

27. 設 $AD=BG$，$AF=EB$，$\angle 1=\angle 2$，求證 $DE=GF$。

28. 設 $AF=EB$，$AD=BG$，$\angle 2=\angle 9$，求證 $ED=FG$。

29. 設 $AD\perp DB$，$BC\perp BD$，$\angle 1=\angle 2$，
求證 $\angle A=\angle C$。

30. 設 $AD\perp DB$，$BC\perp BD$，$DA=BC$，
求證 $AB=DC$。



31. 設 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，
求證 $DA=CB$。

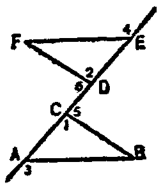
32. 設 $\angle 3=\angle 4$，$\angle 5=\angle 6$，
求證 $AB=DC$。

33. 設 $\angle 1=\angle 7$，$\angle 5=\angle 6$，求證 $DA=BC$。

34. 設 $AD=CE$，$FD=BC$，$\angle 1=\angle 2$，求證 $\angle B=\angle F$。

35. 設 $AD=CE$，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，求證 $AB=EF$。

36. 設 $AD=CE$，$FD=BC$，$\angle 5=\angle 6$，求證
$\angle B=\angle F$。

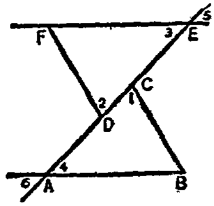


37. 設 $AD=CE$，$FD\perp AE$，$BC\perp AE$，$\angle 3=$
$\angle 4$，求證 $FD=BC$。

38. 設 $AD=CE$，$AB=FE$，$\angle 3=\angle 4$，求證
$\angle B=\angle F$。

39. 設 $AD=CE$，$AB=FE$，$\angle 3=\angle 4$，求證 $\angle B=\angle F$。

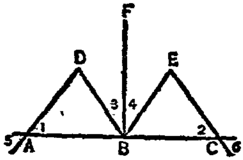
40. 設 $AD=CE$, $AB=FE$, $\angle 5=\angle 6$, 求證 $BC=FD$.



41. 設 $AD=CE$, $FD\perp AE$, $BC\perp AE$, $\angle 4=\angle 5$, 求證 $AB=FE$.

42. 設 $AD=CE$, $FD\perp AE$, $BC\perp AE$, $FD=BC$, 求證 $\angle B=\angle F$.

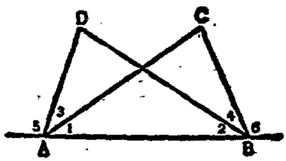
43. 設 $FB\perp AC$, $\angle 3=\angle 4$, B 爲 AC 之中點, $\angle 1=\angle 2$, 求證 $\angle D=\angle E$.



44. 設 $FB\perp AC$, $\angle 3=\angle 4$, $AB=BC$, $\angle 5=\angle 6$, 求證 $AD=CE$.

45. 設 $AD\perp DB$, $FB\perp AC$, $CE\perp EB$, $\angle 3=\angle 4$, $BD=BE$, 求證 $AB=BC$.

3. 遮疊着的三角形——下列習題都包含着遮疊着的三角形，並且每個圖中同時有好幾個相等的三角形.學生必須選擇一對三角形，使其中恰含有我們打算證其相等的角或邊.



46. 設 $AD\perp AB$, $CB\perp AB$, $AD=BC$, 則 $\triangle ABD=\triangle ABC$.

47. 設 $AD\perp AB$, $CB\perp AB$, $\angle 3=\angle 4$, 則 $AC=DB$.

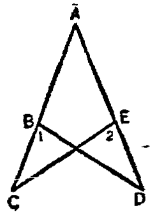
48. 設 $\angle 5=\angle 6$, $AD=CB$, 則 $\angle 1=\angle 2$.

49. 設 $\angle 5=\angle 6$, $\angle 1=\angle 2$, 則 $AC=DB$.

50. 設 $\angle 5=\angle 6$, $\angle 3=\angle 4$, 則 $AC=DB$.

51. 設$\angle 5=\angle 6$，AC 平分 $\angle DAB$，BD 平分 $\angle ABC$，則$AC=BD$。

52. 設$AB=AE$，$BC=ED$，則$\triangle ABD=\triangle ACE$。

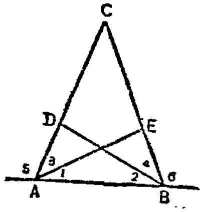


53. 設$AB=AE$，$\angle 1=\angle 2$，則$CE=BD$。

54. 設$AC=AD$，$BC=ED$，則$CE=BD$。

55. 設B為AC之中點，E為AD之中點，$AB=AE$，則$\angle ABD=\angle AEC$。

56. 設$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，則$\triangle ADB=\triangle AEB$。



57. 設$\angle DAB=\angle EBA$，$\angle 3=\angle 4$，則$\triangle ADB=\triangle AEB$。

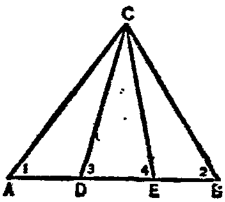
58. 設$\angle 5=\angle 6$，$\angle 1=\angle 2$，則$\triangle ADB=\triangle AEB$。

59. 設$\angle 5=\angle 6$，$AD=BE$，則$\angle 1=\angle 2$。

60. 設$\angle 5=\angle 6$，AE 平分 $\angle DAB$，BD 平分 $\angle ABE$，則 $AE=BD$。

61. 設$AC=BC$，D為AC之中點，E為BC之中點，則 $\angle 3=\angle 4$。

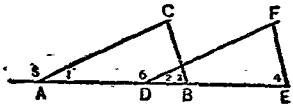
62. 設$AD=EB$，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，則$\triangle AEC=\triangle DBC$。



63. 設$AD=EB$，$CD=CE$，$\angle 3=\angle 4$，則$\triangle AEC=\triangle DBC$。

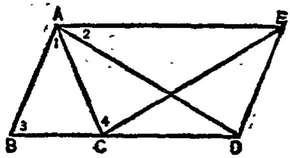
64. 設 $AD=BE$，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，則 $BC=FE$.

65. 設 $AD=BE$，$\angle 5=\angle 6$，$\angle 3=\angle 4$，則 $AC=DF$.



66. 設 $AD=BE$，$AC=DF$，$\angle 5=\angle 6$，則 $\angle C=\angle F$.

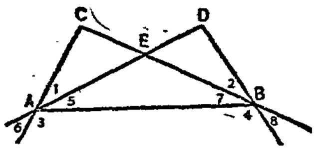
67. 設 BCD 為一直線，$AB=AC$，$AD=AE$，$\angle 1=\angle 2$，則 $BD=CE$.



68. 設 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，$AB=AC$，BCD 為一直線，則 $AD=AE$.

4. 必須試驗着選擇適當的三角形——在以下各題中，打算證明其相等部份，可假定為兩個不同三角形的相當部份，於是學生必須試驗着找出適宜的三角形.

69. 設 $AE=BE$，$\angle 1=\angle 2$，則 $\angle C=\angle D$.



70. 設 $\angle 5=\angle 7$，$\angle 1=\angle 2$，則 $\angle C=\angle D$.

71. 設 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，則 $\angle C=\angle D$.

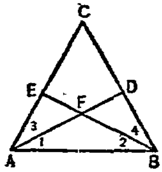
72. 設 $DA=CB$，$CE=DE$，則 $\angle C=\angle D$.

73. 設 $\angle 6=\angle 5$，$\angle 7=\angle 8$，$\angle 3=\angle 4$，則 $\angle C=\angle D$.

74. 設 $\angle EAB=\angle DBA$，$\angle 3=\angle 4$，則 $AD=BE$.

75. 設 $AC=BC$，$\angle 3=\angle 4$，則 $AD=BE$.

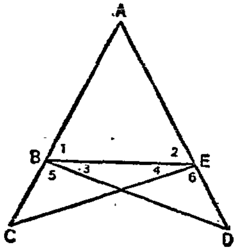
76. 設$\angle EAB=\angle DBA$，$\angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 4$，則$AD=BE$.



77. 設$CA=CB$，AD與BE爲中線，則$AD=BE$.

78. 設$\angle 1=\angle 2$，$DB\perp AB$，$CE\perp AE$，則$\angle C=\angle D$.

79. 設$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，則$EC=BD$.



80. 設$AB=AE$，$\angle 5=\angle 6$，則$EC=BD$.

81. 設$\angle 1=\angle 2$，$\angle 5=\angle 6$，則$\angle C=D$.

82. 設$AB=AE$，$BC=ED$，則$\angle C=\angle D$.

83. 設$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 5$，$\angle 4=\angle 6$，則$BD=EC$.

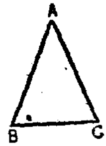
84. 設$\angle C=\angle D$，$CB=ED$，$AB=AE$，則$CE=BD$.

5. 必須另作新三角形——這種進行的方式可以這樣的說：

證題法II. 如果我們打算證明的線或角不是相等三角形的部份，我們必須作輔助線使成爲相等三角形的部份.

這是一個重要的原則，以下幾章用它的時候很多. 在這個地方作這一類的練習題，較爲困難，但是等到學過平行線及其餘關於相等三角形的命題以後，再作這類習題時，却是很簡單的事體. 在下邊四個習題僅有一題具有這個階段的學生，可以解決.

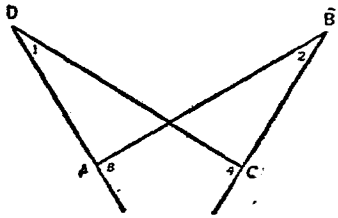
85. 設$AB=AC$，則$\angle B=\angle C$.



86. 設在四邊形$ABCD$中，$AB=CD$，$BC=DA$，則$\angle A=\angle C$.

87. 設在四邊形$ABCD$中，$\angle A$與$\angle C$爲直角，$AB=DC$，則$BC=DA$.

88. 設$AB=CD$,$\angle 1=\angle 2$,則$\angle 3=\angle 4$.



所有以前的習題都是把題設與題斷分別的寫出來，但學生應該逐步的練習着能够懂得形式複雜的習題．例如：

89. 如果四邊形的對角線平分其所連頂角之角，則將分此四邊形爲兩個相等三角形.

90. 如果從二等邊三角形底邊之兩端在兩股上量出相等的線段，然後再由其末端作線連至所對的頂點，則這樣作的線必相等.

相等三角形的習題之重要——在學習幾何的當中，很難再找出比這個題目更應當注意的地方，即是對於學生沒有比應用相等三角形更爲重要．因爲第一，在平面幾何中這個方法比任何方法都較有用處．第二，沒有其他任何題目像這樣的能够如此十足而容易的把幾何工作的真精神介紹給學生.

有好些學生雖然學完了全本幾何，並且經過了考試，但是還未

能了解幾何工作的眞正意義．其實本章就是重要關鍵，學過此處學生就應該完全明瞭幾何的眞意義，與這種學習所需要的什麼樣的才能．

因此敎師應對於這個題目多加發揮，並且非等到凡有普通推理能力的學生都完全了解了不往前進行．

敘述幾何證明的適宜方法

因爲以上的習題大多數不能用口述的，那末勢必得寫出來，於是各種敘述幾何證明的正當方法就必須加以研究了．

符號與詞句——雖然現在符號的用途在幾何中漸漸擴大而普遍，但仍有少數敎師與課本不大採用符號，他們認爲敎學英文是幾何敎學的主要目的之一也．

我們知道困難集中是完全不合乎敎學法．應用符號可使幾何的敎學變爲簡易；因此我們應該儘量的採用它們．我們第一個目的當然是敎學幾何，同時能够培養學生語言的能力，固然不算不重要，但不過次要者耳．能成功第一目的，絕對是完成第二個目的必不可少的預備．

意義不確定而有變換的符號——算學的符號是一種國際語言，無論是那一國的算學家，都能够曉得．這一種事實可以說是算學符號的一種特色．可惜其中有少數幾個符號的意義未能絕對的統一，最普通的幾個例子，便是相等 (Equality) 相似 (Similarity) 等量 (Equivalence) 的幾符號．此地不但符號不同而所用言詞也不一致．

在美洲面積相等叫等量 (Equivalence) 而以⊙表示之，同時在歐洲大陸則叫作相等，而以＝表示之．可以重合的圖形在美國叫作相等 (＝)，但在大部份的歐洲則叫作全同 (Congruent ≅)． 在歐洲普通用的相似符號(∼)而在美洲則很少採用．

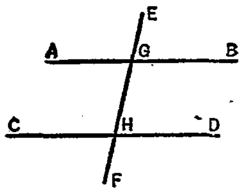
在幾何中最大的紛擾要算關於"相等"的用途．美洲的用法，未免是局部的，而且不合乎論理，因爲它給此字的意義在幾何中與在其他算學中，迥乎不同．這樣的用法在幾何中的相等指着大小與形狀而言，但同時在算術與代數中，却談不到形狀意義，"等量加等量其和必等" 則僅對於代數意義說是眞的，當應用到幾何的圖形上，就發生誤謬了．並且⊙符號書寫上也太不方便，這樣說來還是改用＝∼≅樣的符號，與他們相當的詞句，較爲得計．

還有一種限於局部的符號，用於比例的∷應當取消．這樣符號的眞正意義是相等，當改用＝爲是．只爲的可讀作"如"("*as*")的關係，很可不必另外引導出來一個新的符號．如果我們只因爲符號所代表的詞句不同，卽異其形狀，那末我們關於"減"(－)至少須用半打以上不同的符號．有如對於相等(＝)一樣等等．

尙有其他符號，在不同算學的部份上，另有不同的意義，例如≡．在數論中它代表數的相合 (Congruence of Numbers)，在代數中則代表全同 (identity) 之意．

題設的敍述——有兩種不同的方法敍述題設．美國的方法，是把已知的部份寫得很淸楚，使學者不用看着圖，便可明瞭．並且根據題設，便可作出圖來．在歐洲大陸則合圖形與敍述兩部份而成爲

題設．凡是在圖上表現的極端清楚的事物，除非是定理中必不可少的條件，是不寫出來的．舉例來說，在美國的教本上，要這樣說：設二平行線 AB 與 CD 與截線 EF 交於 G，H 二點．同時在德國的書上，定然這樣的敘述：



題設　$AB \parallel CD$

德國的論據以為圖形已表現出來 EF 是一條截線交 AB 於 G，交 CD 於 H，並且也不必說 AB 與 CD 為直線，因為兩個字母就是永遠代表直線的．

依科學的眼光看來，我們沒有理由反對美國的方法，但是站在教育的立場來說，歐洲的方法是可人意的，因為這種方法能够使學生着重在題設中必不可少的條件，不至為很少價值而迂濶的敘述所分心．這樣，學生可更懂得貫澈．舉例來說：如打算讓他由定理寫出逆定理時，從簡單的題設較比繁長的題設，容易得多．

自然這樣簡單的程度不能太過了，以至於發生疑問．我們不能只以形像便斷定某線與某線在一直線上，某線與某線為垂線．

證明的敘述——這個題目（相等三角形）最宜於教學敘述證明的合宜方式，並且從此以後很可盡力的想法使敘述的形式要眞確，就像要思想眞確一樣．

下邊這個證明的形式，對於素無經驗的教師很有用．但是這個證明尙不屬於本章，乃係後章的範圍，特此聲明一句．

定理——過平行四邊形對角線中點而以兩邊為限的直線必為對

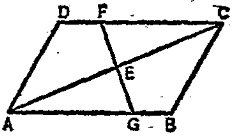
角線所平分.

題設　$ABCD$ 爲一▱.

　　AC 爲 E 所平分.

　　FG 爲一直線.

求證　$EF=EG$.



證:　在△ AGE 與 EFC 中	
$AE=EC$.	題設
$\angle EAG=\angle ECF$.	平行線的內錯角.
$\angle AEG=\angle CEF$.	對頂角.
$\therefore \triangle AGE=\triangle FEC$.	(a.s.a.=a.s.a.)
$\therefore FE=EG$.	等△的相當部份.　完

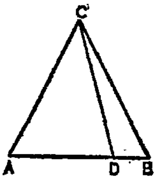
相等三角形之末後三個命題

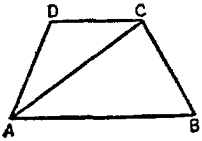
關於這三個定理應該注意之點——如何使學生發現與分析關於互相等邊的三角形 (s.s.s.=s.s.s.) 命題的方法，業已在前章討論過.

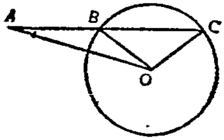
對於兩三角形，如有兩副相當角及在一相當角的對邊，彼此各相等時，則彼此相等的定理(s.a.a.=s.a.a.)在許多教本上，是被擯棄的. 但是如果以練習作題爲幾何工作的主要目的時，我們便不能完全去掉它，無論它是怎樣的容易，也未嘗不可以學習它.

兩三角形有兩邊及一非夾角相等則兩三角形相等之定理，有時眞確，不過須加一點限制. 因爲學生往往應用它認爲是普遍的眞確，所以我們必須與他們證明它有時確是錯誤. 舉例如下：我們能够根

據這個定理證明從二等邊三角形的頂點可任作一線平分該三角形爲兩個相等的三角形，或證等腰梯形的對角線可平分爲兩個相等的三角形．同樣在下圖中可證得$\triangle ABO=\triangle ACO$．







雖然三角形具有兩邊及一非夾角相等亦未嘗不可相等，只要其他兩非夾角不互爲補角．還有較簡單的條件乃：其相等之角須係對較大之邊．不過這樣條件便失掉了普遍性．

許多教科書上只是把它的特別情形作成直角三角形的定理，即謂如直角三角形的斜邊與一股分別等於他直角三角形的斜邊與相當股時，則此兩個三角形相等．打算使學生發現這個定理的證明時，我們最好以下邊這個練習題引導出來：兩等邊三角形中其對底線的高線，把該三角形分爲兩個相等的三角形．

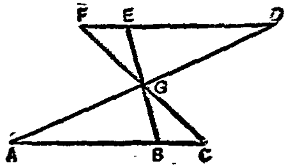
習題——因爲在前段裏，對於如何創造習題的方法，業已詳細的說明．此地我們用不着再舉出極簡單的問題來例證這三個定理了，但是我們很可找出一些較困難的習題特別爲志氣遠大的學生預備着，於是可以下法證之．

證題法 III．如果不能證明求證的兩個三角形相等，可先證明其他一對或數對三角形相等．然後由他們相當部份相等的關係便可

使我們完成原來三角形相等的證明.

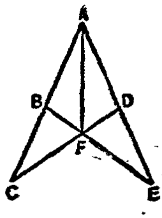
這個原則，極關重要. 學生應該徹底的了解它.

6. 需要證明好幾對三角形相等的練習題



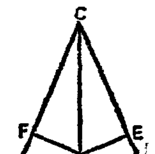
91. 設 $AG=GD$, $CG=GF$, 各線均爲直線，則 $BG=GE$.

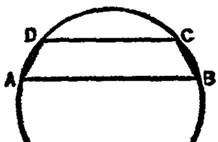
92. 設在多邊形 $ABCDEF$ 內，$AB=DE$, $BC=EF$, $DC=FA$, $AB \parallel DE$, 則 $\angle F=\angle C$.

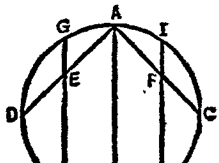


93. 設 $AB=AD$, $AC=AE$, 則 $\angle BAF=\angle DAF$.

94. 設 $\angle A=\angle B$, $AF=BE$, 則 $AD=DB$.



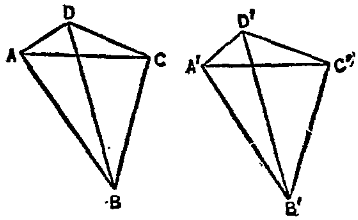




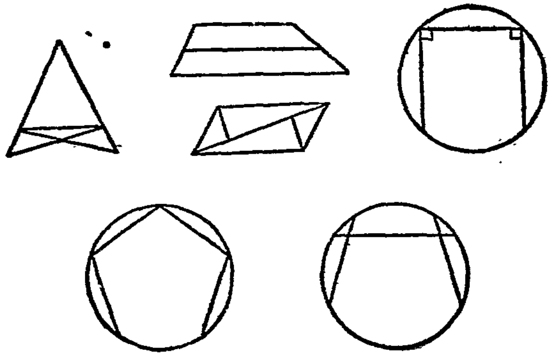
95. 設 $AB \parallel CD$, 則 $AD=BC$.

96. 設 $AD=AC$, $DE=CF$, $GH \parallel AB \parallel IK$, AB 爲一直線，則 $GH=IK$.

97. 設在 $ABCD$ 四邊形與 $A'B'C'D'$ 中，$AB=A'B'$，$BC=B'C'$，$CD=C'D'$，$DA=D'A'$，及 $AC=A'C'$，則 $BD=B'D'$.



還有幾個圖形很可利用另創造這類新習題.

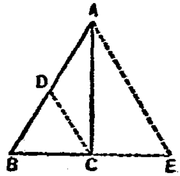


證明兩線垂直的方法

證題法 IV. 普通證某角爲直角往往證明它與其鄰補角相等

例如求證 ABC 爲一直角三角形，如果中線 CD 等於 BA 之半，我們延長 BC 使等於本身之長至 E，於是證明 $\triangle ABC=\triangle AEC$. 因 CD 爲 AB 與 AE 中點之連結線，遂知 $CD=\frac{1}{2}AE$，由是即證得其結果矣. 這種證法所引用的定理此時學生尚且不知，但是下列諸

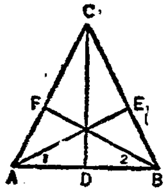
題，他們的知識很可足用。



98. 二等邊三角形，對於底邊之中線，垂直於其底。

99. 二等邊三角形頂角之分角線，垂直於底邊。

100. 設在 $ABCD$ 四邊形內，$AB=BC$，$\angle A=\angle C$，則$AC\perp BD$。



101. 設$\angle A=\angle B$，$\angle 1=\angle 2$，則$CD\perp AB$。

102. 設 $AE=BF$，$\angle 1=\angle 2$，則$CD\perp AB$。

103. CD 爲 AB 的垂線，設若 $\angle A=\angle B$，AE 與 BF 是中線的時候。

104. CD 爲 AB 之垂線，如果$\angle 1=\angle 2$，AE 與 BF 是高線的時候。

第九章

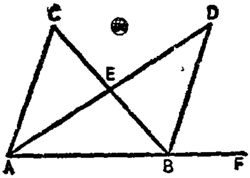
平行線

關於平行線的命題

平行線的定義——這個定義大多數是這樣：在同一平面內二直線無論如何的延長，永遠不相交，則謂之平行．同時有人想出各種方法試驗着作出其他定義，以便使後來定理的證明，變爲簡單．其中有兩個常見的說法，認爲同方向或到處等距離的線謂之平行線．這兩個定義固然能够使證明平行定理簡單了不少，但是依科學的眼光看，未免發生問題．第一個用了意義更含糊的“方向”二字．第二個却很顯然的犯了贅冗(Redundent) 的毛病．不過還有人起而辯護這種定義，以爲能够使平行定理證法簡單．

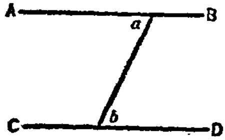
基礎定理的證法——無論對於應有盡有的平行命題怎樣排列，總會發生一個或數個的困難證明．許多美國的教本，先提出垂直截線的命題，倒是能够使普通的定理證法較爲簡單．但是困難之點仍未免除，不過是被移在截線命題之後罷了．並且還因而得出來不少無關緊要的定理．

如果定要一個嚴密的證明，似乎還沒有比歐克里得的方法較進步的．的確歐氏預先假定了一個不容易證明的定理．即三角形之外角，大於其任何的一個內對角．但是這個定理並不難證明，只要我們先作一個練習題，使兩直線 AD 與 CB 互相平分．而這樣的作成兩個三角形．我們可以證出 $\angle EBD=\angle C$．再作 ABF 直線，我們問 $\angle C$ 與 $\angle CBF$ 那個較大．然後去掉 AD 與 BD 線，再問 $\angle CBF$ 是否仍大於 $\angle C$．於是最後作出一個新圖形，($\triangle ABC$ 與 AB 的延長線)再重新求它的證明．



經過許多的練習，等到學生都把這個命題完全得到了明確的印象之後，則具有相等內錯角的兩線平行的事實，就自然很容易利用數目的問題發現出來．設一截線與兩條相交的線作成了內錯角 a 與 b，而問以 $\angle a=50^\circ$，$\angle b=60^\circ$ 是否可能？

或 $\angle a=50^\circ$，$\angle b=50^\circ$？再應用右圖，問以



如 $a=60^\circ$，$b=50^\circ$；

或 $a=40^\circ$，$b=50^\circ$；

或 $a=50^\circ$，$b=50^\circ$；

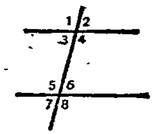
在這樣三個條件之下，當延長 AB 與 CD 時，（即向右方延長）是否相交？請指出在以下兩種條件裏那一種條件之下，延長 BA 與 DC（即向左方延長）可以相交？

如 $a=60^\circ$，$b=50^\circ$；　或 $a=50^\circ$，$b=50^\circ$　延長線都能相交嗎？

如果(a) $a=50°$，$b=50°$，(b) $a=60°$，$b=60°$.(可看 Schultz Sevenoak's Geometry)

那末在這種特別數值的角度兩線平行，則打算證明這種結果是普遍的眞確時，當然也是一件容易的事體.

習題——關於上邊這個命題的練習題，最容易的恐怕要算數目的習題了．在這個完全的圖上，對於任何兩個不相關的角度，指定數值而問以兩線是否平行．然後使學生證明兩線平行，如果假定兩角相等，或相補時；例如 $\angle 2=\angle 6$，$\angle 7=\angle 3$，$\angle 1=\angle 8$，$\angle 7=\angle 3$，$\angle 3$ 爲 $\angle 5$ 的補角，$\angle 7$ 爲 $\angle 4$ 的補角，餘類推.



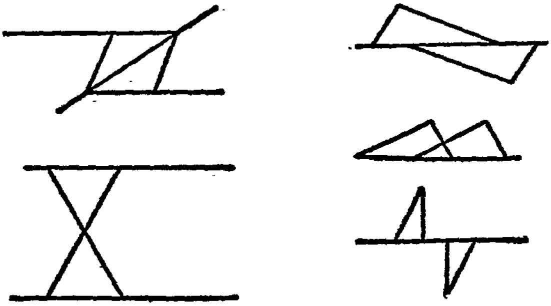
無論在那一種情形之下，學生必須要求出內錯角的相等．於是這種工作的主要結果，應該歸納出來一種法則.

證題法 V. 證明兩線平行往往須證其內錯角相等.

這個原則十分重要．可以說，凡是求證兩線平行的定理之分析，應以下問開始"求證兩線平行的最普通的方法是什麼?"

自然有時要用同位角或同側內角的關係，但以本原則爲最重要.

作簡單習題時，我們常用對頂角，等角的補角，等量的和，等等，以證明內錯角之相等．但在複雜的習題中，我們則利用相等三角形，以完成這種工作．下邊這幾個圖，很可利用它們，來作出關於平行的練習題.



逆定理

普通定律——我們進行討論平行定理的逆定理時，有幾點對於逆定理的普通關係，應行注意．普通的說，顚倒一個定理的題設與題斷，即可得出它的逆定理．如果這樣的代表一個定理，

設 A 爲 B，則 a 爲 b．

逆定理當爲

設 a 爲 b，則 A 爲 B．

有許多定理的逆定理，並不眞確．由下列命題的逆定理，便可證明出來．

1. 一個有法多邊形，可作出來它的外接圓．
2. 等底等高的平行四邊形相等．
3. 菱形的對角線互相垂直．
4. 氣體受壓迫則生熱．

逆定理，對定理，與對定理的逆定理的相互關係——如果以

下列代表一個定理

設 A 為 B，則 a 為 b.

它的對定理應為

設 A 非 B，則 a 非 b.

則對定理的逆定理應為

設 a 非 b，則 A 非 B.

這四個定理有一種這樣的關係，如果其中之一個是眞確，則在其餘之中亦必有一個眞確.

在這樣的排列，它們以對角線關連起來. 即

設定理眞確，則逆對定理亦必眞確.

設對定理眞確，則逆定理亦必眞確.

設逆對定理眞確，則定理亦必眞確.

這種關連用間接法很容易證出來.

這些事體如再用具體的例子說明一下，則更明顯. 設 a 與 b 為 AB, CD 與一截線所作成的內錯角.

I 定理	II 逆定理
設 $\angle a = \angle b$	設 $AB \parallel CD$
則 $AB \parallel CD$	則 $\angle a = \angle b$
III 對定理	IV 逆對定理
設 $\angle a \neq \angle b$.	設 AB 不 $\parallel CD$

則 AB 不 $\parallel CD$ | 則 $\angle a \neq \angle b$

要證明這四個定理，我們只須證明下列幾對中的一對足矣．I 與 II，或 I 與 III，或 II 與 IV，或 III 與 IV．

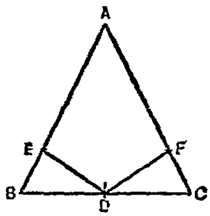
很顯然的明瞭這些關係以後，對於幾何工作當然要有很大的幫助．例如我們求證逆定理太困難時，則可求證逆對定理以代之，餘類推．

數個逆定理的情形——如果一個定理的題設包括着好幾個條件時，每個條件都可與題斷交換，因而可得出好幾個逆定理．其中有的眞確，有的不眞確，舉例如下：

設在三角形 ABC 內

1. $AB=AC$,
2. $BD=DC$,
3. $DE\perp AB$, $DF\perp AC$,

則 $DE=DF$.



每個題設中的條件可以與題斷交換而得出三個逆定理，其中第一二兩個眞確，第三個則否．

逆定理的定律——如下列三定理眞確，則它們的逆定理亦必眞確．

1. 設 $A>B$，則 $a>b$.
2. 設 $A=B$，則 $a=b$.
3. 設 $A<B$，則 $a<b$.

這種關係的理由，很容易用間接法說明．自然把第一與第三的

題斷交換一下，這種關係仍然存在.

因此在我們業已證出等弦距離圓心亦相等，距離圓心愈遠者弦愈小，並且距離圓心愈近者弦愈大的關係以後，——則這些定理的逆定理不用證卽可斷其眞確.

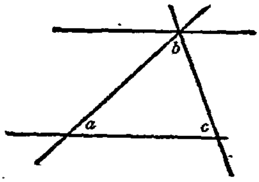
這個定律的敎育價值——雖然以上這些普遍論理的概念，是幾何工作中很有用的工具，並且對於敎師也很有價值. 但是在敎學具體定理以前，敎學這些普遍論理的命題，是一種錯誤. 學生不能够了解這些普遍的事實，除非等到他對於許多例證明瞭以後，他決不能懂得這樣抽象的定理. 是以對於學者不要給他這樣的敎材，但等到第二遍複習時，可以講給學生，並且這樣當作輔助的材料，倒比列入正課中還好些.

平行定理的逆定理——如果設出平行線後，就可用以證出角度相等的關係，第一個證明這類的定理，未免稍難，如果學生均係幼年，最好先敎學其對定理，卽：如內錯角不等，則兩線不平行. 按論理說逆定理很可不用證明，但對於初學者應再證明一下爲是，而且這樣證明，也很簡單. 這樣安排雖然增加了幾個命題，但去掉一些困難.

關於平行定理的逆定理，很容易作出來，現在分類寫出來.

1. 數目的習題是宜於口述的——如題設兩平行線爲一截線所截對於任何一個角度，指定一個數目或文字的值，再求其他各角的數值. 作兩截線使交於平行線中之一線上的一點，於是對於某兩個不相關的角度指定數值，讓學生求其他各角. 再作出來兩個平行的截

線，某種角度的分角線，一個截線的垂線，等等。



2. 簡單的普通習題——用以上一類的圖形，讓學生求證某種角度相等，某角與某角互成補角，或除角，某角等於其他二角之和．換一句話說，把上段所有關於數値所代表的事實，現在變成一種普遍的形式．

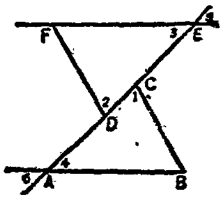
3. 爲後來的題目使學生準備的練習題——前圖能使學生求出 a, b, c 三角的和，並且可以把三角形三內角之和的定理引導出來．同樣他可以求出關於三角形外角的命題，以至關於平行四邊形對角，四邊形內角之和等等的命題．

4. 關於三角形相等的問題——須應用相等三角形的習題，現在又可增加不少．因爲我們又得出角相等的一種新方法．在第八章習題一覽前的圖和習題 34—38，39—42 的圖，可以用來創作許多的習題．假定某些對平行線再求證其他線或角的相等，如下圖我們可這樣說：

設 $AB \parallel EF$, $AB=EF$,

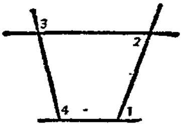
$EC=DA$,

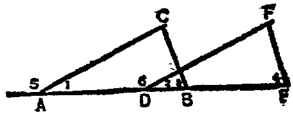
則 $BC=DF$ 等等．



5. 平行命題與其逆定理的連合——我們可以利用某種角的相等，證明某種線平行，再因此證明其他線或角相等．或者我們開始證明平行而得出某種角相等，與某種三角形相等，最終證明其他線平行．

以下兩習題例示這兩種方法：





1. 設$\angle 1=\angle 2$，　則$\angle 3=\angle 4$.

2. 設 $AC \parallel DF$，$AC=DF$，$AD=BE$，則 $CB \parallel EF$.

三角形三角之和——在前幾段作題法中的各種副產品物中，有三角形三角之和的定理，三角形外角的定理，與平行四邊形的命題等.

所以學生當分析三角形內角之和的定理時，將不致感覺困難．但是根據這個定理所作的練習題，須稍為討論一下.

創作關於 ABC 的 A, B, C 三個角度的練習題時，我們必須知道這三個量常常用一個方程式連合起來，即 $A+B+C=180^\circ$. 因此如再有兩個不相關的方程式，我們便可求出其他的角度.

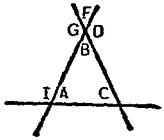
在下圖中如果 A, B, C 為已知，則所有的角均可求出來．由此可知設如給出兩個連結不相關角度的方程式，那末圖上所有的十二個角度都可求得.

因此我們可把圖中任何兩角指定數值，求所有的十二個角．或我們設 $\angle A=\angle F$ 與 $\angle C=22^\circ$，或者我們設$\angle A=90^\circ$，與 $\angle G+\angle C=140^\circ$ 等等.

再作更困難的習題時，我們可用更覺複雜的方程式．有如

$A+5B=240^\circ$，$C-B=30^\circ$.

或 $G-A+C=130^\circ$，　$2D-I=100^\circ$.



自然根據這個命題，還可作出好多好多的完全不同的練習題，但是那樣就未免討論的過多了.

第十章

第一篇裏的各種論題

二等邊三角形——歐克利得證明二等邊三角形底角相等的時候，是把該三角形仍放在它的本身上使每個股重合於其他股上．這種方法本來是很聰明而簡單的證明，但是對於幼年學生不甚妥當．最好還是讓學生應用普通的基本方法，卽相等三角形的方法．

在通常的命題排列，學生在這個階段作成兩個相等三角形的惟一的方法，便是平分頂角．但是學生有時預先看不出這樣的結果來，我們可讓他用中線或高線分原來的圖形爲兩個三角形，或者能夠使他自己發現爲什麼只有平分線可以用．

關於這個命題的證明，學生必須記住的一點：便是惟有頂角的分角線，可作成兩個相等的三角形．

假設的作圖——什麼是假設的作圖？——在前段我們討論的證明裏，曾用到分角線，但是此處尙沒有學過分角線的作圖法．引用一個線或其他圖形在未曾學過這樣作圖法的時候，就叫作假設的作圖．歐氏從未作過假設的作圖，而近代的著作却多少的要用着它們．

有好些批評者攻擊這樣假設的作圖，尤其對於在二等邊三角形

裏引用分角線，似乎更易受某一流著作者的批評．他們尚未覺察到此外更有好些這種情形，幾乎在所有的教科書上，都可找得到．

假設的作圖在理論上的看法——依論理的眼光，到底用假設的作圖，是否正當呢？當我們尚未能够正確的作分角線以前，就引用一個角度的分角線，是否合乎論理呢？無數的批評者認爲這樣的引用是不合論理的說法是正當的嗎？

答復這些問題，我們至少可以說，這樣作的線到底是否正確的分角線，是無關重要的．一個證明並不完全靠着圖形的正確．我們只要承認分角線是的確存在的，我們便可得到絕對正確的證明．同時這種證法的確實在，並不靠着我們正確作這圖的能力．

這樣引用未經我們確實求出的數量，在算學的科學上是一件極常有的事．我們可以求出一個方程式根的關係，不但我們未經求出這些根，而且有時我們簡直絕對的就求不出這些根來．我們可以談到一種東西的重心之坐標，即或我們尚且不知道該重心的位置也無妨．如果在我們沒有方法求出某種數量以前，我們便屏去不用，那末就發生不出來高等算學了．

的確我們在一個假設的作圖裏，設想了些事物．不過是假定一線或其他圖形的存在而已．有如一個角度的分角線．

但是我們須證明一個分角線的存在，是一件事，我們須求出作這樣線的完全方法，又另是一件事，其中有很大的區別．還不是須要證出上邊所說的作圖法是可能，只是說總有一個分角線在那個地方．例如一個證明裏，需要七個點把一個圓周分成七個相等的部分

時，很可用這樣的七個點，不爲不合論理．因爲雖然不能用很準確的方法求出這樣的七個點來，但是證明確有這樣的七個點存在，却是很容易．並且論理的證法，並不靠着作出一個正確圖形的能力．

由此可知假設的圖形之缺點，不像那些批評者所說的那麼利害，並且差不多在初等幾何，各種的場合，這個缺點可以完全去掉．就以上邊這個定理說吧，想證明永遠存在着一個分角線，是一件很容易的事體．但是普通教師都認爲無此必要．

假設的作圖在教育上的看法——假設的作圖只是在論理的反對，我們認爲還不至於絕對廢止這種方法．在另一方面看，引用假設的作圖無疑義的把初等幾何簡單了許多．現在編輯這種科學的方法，所以比歐克利得極較簡單的原因，就是因爲應用了這種方法．所以在教授初等幾何時，很可用它．

這倒是實在，有些學生因爲他們從未作過垂線或平行線或分角線，或許對於這樣線的引用，感到不滿，因而發出疑問，不知道如何得出這樣線來．但用前段的說法向學生講，是不但無用，且適加紛擾．最好在學證明的幾何以前，先作一些作圖的練習，便可去掉這些困難．

前定理的應用——在應用二等邊三角形命題的習題中，有兩類可以提出來．即計算某種角度的數值，與求證等線等角．

因爲關於二等邊三角形的三內角有兩個方程式．另外再有一個方程式便可求出所有的角度．所以只要指定完全圖形中十二個角度的任一角的數值，我們即可求出其他的一切角度．同樣如果 $A-C$

$=20^\circ$，$2A+3B-C=120^\circ$，等任一方程式亦可用來求出所有的角.

本命題與其逆定理，可以用來求證線相等與角相等，而且有的情形這種方法比相等三角形還有用. 按論理的說法，這個方法不過是相等三角形的特別情形，按實用說，它又是一種新方法. 學生最好還要熟習.

證題法VI. 證明角度相等有時須用二等邊三角形命題.

簡單的作圖法

直尺與兩脚規——在初等平面幾何裏所有的作圖器具，只限於兩種. 一為直尺，一為兩脚規. 實際說來，僅有兩脚規才算是一種器具. 因為直尺不過是一直線的模特耳 (Model)， 用它可以由其他已經作出的直線抄襲下來而已. 此外如果在黑板上作橢圓或拋物線，還用一種器具，也不過是造成了的這樣形狀的一塊板而已. 因為完全的直線運動 (Perfect rectilinear motion)，在力學上有一種價值，所以為完成這種目的，想法創造器具，費了很長的時間. 瓦特 (Watt) 的平行四邊形，在他汽機上用的，生出來很近似的直線運動，但是裴賽里 (Peaucellier) 的連接桿，方是正確的完成這種運動的第一個器具.

我們要記住所以只限制用尺及兩脚規的意思，是因為這種器具的簡單，純粹是一種慣例，並不是幾何圖形必有的本質.

對於幾何作圖還曾經作過只用兩脚規的試驗，或只用直尺. 但用後法只是有限的作圖題可以解決. 另一方面馬斯慶氏 (Mascheroni)在1797年業已證明，凡是能夠只用直尺及兩脚規能作的問題，都可只用兩脚規來作．後來龐賽來（Poncelet）又證出來只用一個固定的圓，與一直尺可作同樣的圖形．

教育上的論點——最合式的辦法，是把那些簡單的作圖——如作分角線，垂線，平行線等——列在這門課程的前部，並且越往前越好，因為這樣可減少假設的作圖，而且這些簡單的作圖，能使初學者發生興味．其中有幾個作圖是根據第三個相等三角形的命題（$s.s.s.=s.s.s.$），所以它們必須放在這個命題的後面．這是一種錯誤把它們放在第一篇之末，甚至還有些作者放在第二篇．這些作圖的學理並不很困難，尤其當我們給出許多應用以後．

有一點是值得我們特別注意的，就是處處需要正確的語言和畫法．雖然一個定理所用的圖不關於該定理的確實，而作圖題的圖却是很主要的部份．况且隨手作圖有時可使我們思想鬆懈．學生能夠很流暢的說出，以O作中心畫一弧，同時畫一弧延長它可過O點．但是一到正確作圖的時候，這樣的事體便不可能．所以——至少在開始的時候——所有的作圖應該用直尺及兩脚規．

語法的正確，為描寫作圖的實在與簡單計是必要的．最好讓學生很正確的知道一些在這種工作常用的模範短句．“以A為圓心以CD之長為半徑畫弧”“在AB上取$AC=MN$”“由A作$AB \parallel MN$”“過O作$AB \parallel CD$”等等．

對於一個新線等的命名，也須注意．——如果它早晚須命之以名．——只要一經引用即刻命之以名．不要這樣的說：“過A作一

垂線垂直於 MN 而命此線爲 AB" 但須"過 A 作 $AB \perp MN$" 方好.

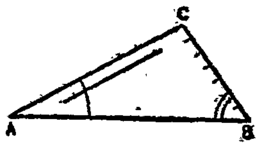
不要詳細的叙述以前已經學過的作圖法，例如須用着學過的作 A 角的分角線的時候，只說"平分 A 角"足矣. 但是在開始的時節，我們可令學生詳細的叙述這樣的作圖法. 又如一個作圖須要把長方形 $ABCD$ 改成正方形，而這個作法業已學過，那末僅可這樣叙述："改 $ABCD$ 爲一正方形".

在複雜的例題裏，用圖標出來已知線，作圖用的線，與求作的線，而示以不同的顏色，或以細線虛線與粗線表示.

不等的線與角

命題的證法——第一個關於線段不相等的命題，是比較三角形兩邊之和與第三邊之長短. 這個命題很簡單，我們很不必再來解釋. 第二個命題是：在一個三角形內對着大邊的角度亦大. 這個比較難於分析，作者用紙摺疊，常常使學生發現了證法.

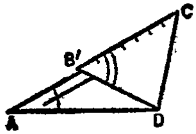
把一塊紙片，切成三角形，並且把紙的兩邊標以記號，其邊的長我們設想是不相等. 同時這兩個邊標以不同的記號，我們即想法發現兩邊所對於角度相關的大小，而作以下各問題：



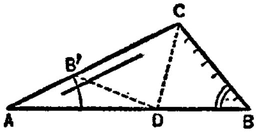
那個是指明某一角大於其他一角的惟一定理？答. 三角形的外角……

誰能夠摺疊這一塊紙使 B 變作一個三角形的外角，同時 A 爲

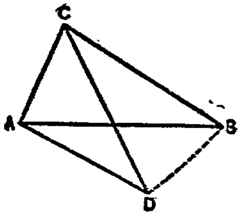
其內對角？

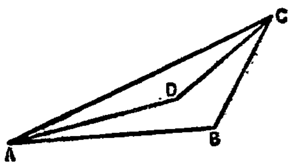


令全級學生照樣的切成三角形的紙片並且試驗去摺疊，等一等，或者就有學生得着解答，摺成如右的圖．此刻學生可以看出來這個命題的眞確．所剩下的工作不過把這種觀念譯成幾何的名詞而已．我們展開那個紙片就可看出 CD 爲 $\angle C$ 的分角線，又求出 B' 的位置及 $\triangle BDC$ 與 $\triangle B'DC$ 的相等，等等．



第三個，是關於兩個三角形有兩副相當邊相等，其所夾角不等的命題．這個命題有許多的證法，多半是須用重疊那兩個相等的邊．舉例如下：有一種證法，並不難發現，就是把兩個三角形放成如下圖的位置．如果我們打算求證 $AB>AD$，自然要比較 $\angle ADB$ 與 $\angle ABD$ 的大小．但二等邊三角形 CDB 的底角是相等的，我們於是很容易完成這個證明．這個證法有一個缺點在許多的情形要顯露出來，就是對於不同的圖形須變更證法．例如右圖：

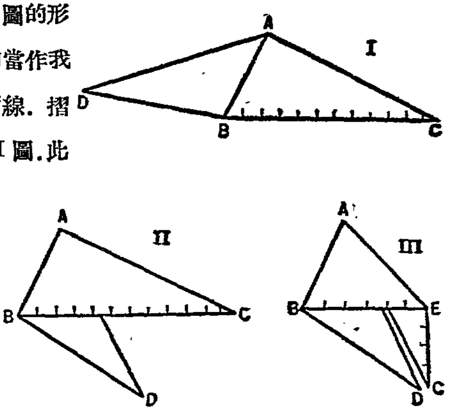




在教科書裏所平常見的證法，却免掉這個缺點．不過分析的時候，稍感困難．但是也可用摺疊紙片

來發現證法.

把紙片切成像 I 圖的形狀，而 BC 與 DB 卽當作我們求證其不相等的兩線. 摺疊這個紙片，如同 II 圖. 此刻再讓學生摺疊使 BD 成爲一個三角形之一邊，同時使 BC 成爲其他的兩個邊. 這樣卽可求出 III 圖，因而發現完全的證法.



這些命題的逆定理，如用 146 頁上的定律，可不用什麼證明. 但是我們不要太注意了這樣事實，最妥當的方法，便是要記住在這樣的情形只需要間接證法.

這些命題的簡單應用——分析一個須求證兩線不相等的習題，我們應該用問題來起始: "我們有什麼方法來證明線的不相等呢?" 我們可以說已經提到有三個方法代以(1)，(2)與(3). 如果不知道角的關係可用(1). 如果我們所欲比較的線是在同一個三角形裏，並可求出角的關係，則用(2). 如果所欲比較的線是在不同的兩個三角形裏，並且還可求出角的關係，則可用(3).

自然這種關係並不是絕對一定的，不過是幾何上的一種傾向，或

者說是一種特性。這種工作學生不用思想或創造力仍是不成功的。

在未實際證明這樣的習題以前，最好讓學生在好些的場合中判斷應該用那一個方法，似乎可以得出結果來．但是要記住有時候須用着兩個或三個方法才能達到目的。

已知條件可以圖示表現出來，例如用一種色常代表大角或大邊，同時用另一種色代表小角或小邊．有幾個習題，很可供適當方法之選擇．茲舉出如下：

1. 設 AB 與 CD 爲相交之二線，則 $AB+CD<AD+CB$.

2. 在$\triangle ABC$內，設 $Ab=BC$，而且 D 在 AB 上，求證 $DC>DA$.

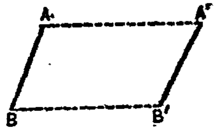
3. 設一平行四邊形之兩邊不等，則其對角線所作成的角亦必不等.

4. 在已知線的垂直平分線外之一點與已知線兩端的距離一定不等.

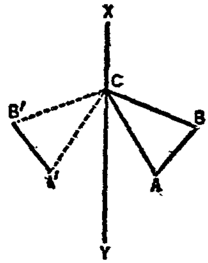
關於逆定理的應用與本定理的應用，大部份相似，所以我們不必再詳爲討論。

關於不等線段的較難習題——這一段的方法對於教師很有幫助．但普通說來，不適於中等學校的教室工作．這些方法有一種特別價值，便是同樣的可應用在作題法上．所謂難題往往是因爲我們求比較的線不在一塊，即不在一個或兩個三角形裏。在這種情形必須想法移動某部份以便把某線或某角湊在一處去．幾何中這樣的移動圖形，是很平常，其中最重要的，便是：

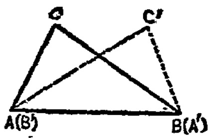
1. 平行移動——一個圖形如果移動時各點的軌跡都平行且相



等，則謂之平行移動(Translation)．如此可平行移動 AB 至 $A'B'$ 的位置，自然 $A'B'$ 一定平行且等於 AB.

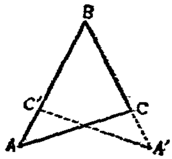


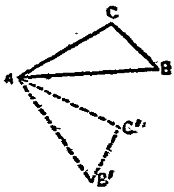
2. 圍繞一個軸的旋轉——如 $\triangle ABC$ 圍繞 XY 軸來轉動，則將落於 $A'B'C$ 的位置．ABC 與 $A'B'C$ 爲對於 XY 軸對稱．



上法還有一種特殊的情形，當旋轉後使圖形中之一線如 AB 重合在 BA 上．如果我們把 AB 放置在 BA 上之後，使 A 佔 B 原來的位置，同時 B 佔 A 原來的位置，於是 $\triangle ABC$ 將佔在 $A'B'C'$ 的位置．同樣我們可放置 ABC 角於 CBA 角則結果三角形爲 $A'B'C'$.

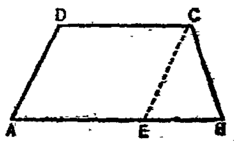
3. 圍繞一點的旋轉——如右圖所示$\triangle ABC$ 圍繞 A 點而旋轉 60° 的角．





這些方法的用處由以下四個命題的提綱可以說明之．

1. 設在梯形 $ABCD$ 內 $DA>CB$，則$\angle B>\angle A$.

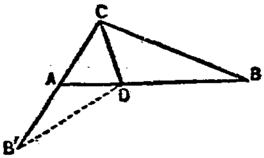


平行移動 DA 到 CE 的位置，（即作

$CE \parallel AD$）則 $CE>CB$，$\therefore \angle B > \angle CEB$，$\therefore \angle B > \angle A$.

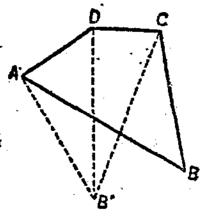
2. 設在 $\triangle ABC$ 中，$BC>AC$，CD 平分$\angle C$，求證$DB>AD$.

旋轉$\triangle CDB$，而以 CD 爲軸，落於 $\triangle CDB'$ 的位置，求證 $DB'>AD$.我們必須比較$\angle B'$與$\angle B'AD$或（因$\angle B=\angle B'$）$\angle B$與$\angle B'AD$.很顯然的可看出來，後者爲$\triangle ABC$的外角，當然較大．於是這個證法很容易求出來．



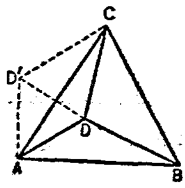
3. 設在四邊形$ABCD$內，$AB>CD$，$BC>DA$，求證$\angle D>\angle B$.

因爲已知不相等的線，都不相鄰，所以我們須旋轉$\triangle ABC$ 使AC（圖中未畫出）重合 CA，$\triangle ABC$ 落於 $A'B'C$ 的位置．連結 $B'D$ 我們得$\triangle AB'D$ 與 $\triangle B'DC$，每個都含着兩個不相等的線．把不相等的角加起來，我們求得 $\angle D>\angle B'$，或$\angle D>\angle B$.



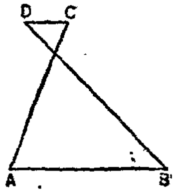
4. 設 D 爲等邊三角形 ABC 內之一點，可使 $\angle ADB>\angle ADC$ 則 $DC>DB$.

圍繞 A 旋轉$\triangle ADB$ 到$\triangle AD'C$ 的位置．現在我們須比較 CD 與 CD'，因而想起來連結 DD'，而比較$\angle CD'D$與$\angle CDD'$，又因 $\triangle ADD'$ 爲二等邊三角形，故題斷很易求得．



習題

1. 設$AB \parallel CD$, $DB>CA$, 則$\angle A>\angle B$.



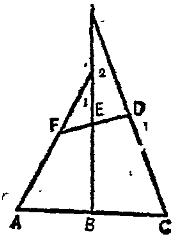
2. 設在$\triangle ABC$中, CD爲其中線, $BC>CA$, 則$\angle ACD>\angle BCD$. (圍繞D旋轉$\triangle DAC$成180°的角, 或平行移動CA.)

3. 設在四邊形$ABCD$內, $AB>DC$, $AD=BC$, 則$\angle C>\angle A$, 與$\angle B>\angle D$.

4. 設在四邊形$ABCD$內, $AB>CD$, $\angle B=\angle D$, 則$BC>DA$.

5. 設E爲在平行四邊形$ABCD$內之一點, 與四頂角連結起來, 而$EA>EC$, $ED>EB$, 則$\angle CEB>\angle DEA$.

6. 用同圖設$EA>EC$, $ED=EB$, 則$\angle CEB>\angle DEA$.



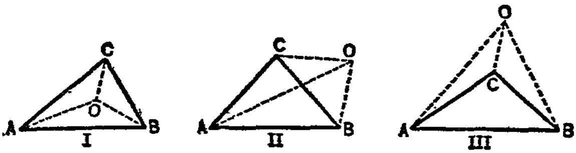
7. 設由正方形$ABCD$內之一點E與A, B, C連結之, 並$AE>CE$, 則$\angle BEC>\angle BEA$.

8. 如右圖所示, 設$AB=BC$, $EF=ED$, 並且$DC>FA$, 則$\angle 1>\angle 2$. (參照193頁4.)

多邊形

幾何的正負量——在近年來有些著作家在算學的教育學上, 很鄭重的認爲(斷言)多邊形與角標字母時, 應照着反鐘針方向才好, 並且認爲這是很重要的事情. 所以這樣的理由, 就是爲的近世幾何,

近世幾何關係到幾何量的代數價值，就是其中引用了負線，負角與負面積．而用這種標字法却能把許多的敍述變簡單了．初等歐克里得幾何常常因爲圖形不同便須改變它的敍述．換一句話說，就是必須分別出來幾種"場合．"而近世幾何却能用一種敍述把所有的場合都包括了．現用具體的例子來說明，我們可連結任一點 O 到 $\triangle ABC$ 的頂點，然後求 $\triangle ABC$ 與 $\triangle OAB$，$\triangle OBC$，$\triangle OCA$ 的關係，初等幾何必須分成七種場合．其中三個可用下圖表示出來．



在這些圖裏我們求得：

I.　$\triangle ABC=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA$.

II.　$\triangle ABC=\triangle OAB-\triangle OBC+\triangle OCA$.

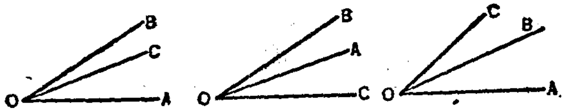
III.　$\triangle ABC=\triangle OAB-\triangle OBC-\triangle OCA$.

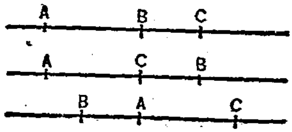
在近世幾何裏順着鐘針方向排列代表三角形的字母，代表一個負面積，因而 $\triangle OBC$ 在 II, III 裏便是負量，在 III 裏的 $\triangle OCA$ 亦然，所以我們無論對於什麼的圖形都是：

$$\triangle ABC=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA.$$

同樣順着反鐘針方向讀的角當作正，順着鐘針方向便作爲負．我們照着下圖，無論 A, B, C 的位置是如何，都可很普遍的這樣敍述：

$\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC.$





如用方向線時，我們談到在一直線上的三點 A,B,C 都可得以下結論：

$AB+BC=AC.$

或 $AB+BC+CA=0.$

這些敍述並不關 AB, BC 的位置.

對於高等幾何這樣的規約，有很大的用處，這是不能否認的．然是否我們應該在中學裏也固執着這種規約，仍不能斷定．能夠讀近世幾何的在中等學校裏的學生沒有千分之一，而這些少數學生當用到時很快的就可領會這種觀念．可見這些規約的用途，並不能作爲引用它們的理由．

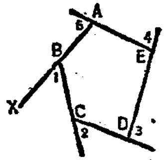
"但是這些事體是這樣的簡單，學生們永遠用不着特別費力．"他們作如此主張者這樣告訴我們．有些情形倒是這樣，但有的地方它不過是附加物，並且十分的不必要，而憑空加重學生的負擔．在較複雜的圖來看，就像三角形裏有它的三個高線，連結垂足的三直線．如果學生仍在誦述困難證明的程度，而强令讀角度的字母時，必須按着反鐘針方向的次序，這是無疑義的又與他增加了許多困難．

這種困難眞是憑空附加上的．它對於證明並未作了什麼，却把學生有限的精神分去不少．所以一定到處堅持着近世幾何的規約，似乎是一種誤謬．在很簡單的例題上，如對於三角形或是四邊形的標字法，按着反鐘針方向來寫，這是沒有什麼害處．在這樣情形，很可以這樣寫，不過多半是因爲求一致的緣故．

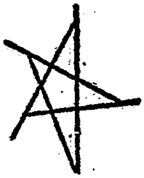
總而言之，在很簡單的例題我們沒有什麼可以反對用反鐘針方向的符號，但是對於它整個的重要，有些教育家把它抬的過高．

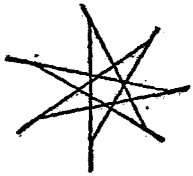
關於兩個定理的論點——多邊形內角之和如果以直角計算，有時所表現的很模稜，以至容易使學生發生疑問，無論其和爲 $2n-4$ 或 $2(n-2)$ 倍的直角．如將直角改用平角，或代數式 $2(n-2)$ 來表示，可免掉這個困難．當證明這個命題時，有些學生易於加以三角形而代替了三角形之內角．我們可以試驗學生了解的程度，把多邊形內一點，與各頂連結之，再看他們是否仍把三角形加起來．

證明關於外角之和的命題，很可用一種具體的方法，放一枝鉛筆於 BX 的位置旋轉如∠1 的角度，再移至第二個角頂的地方，再旋轉如∠2 的角度，依此類推，這是很顯然的當這個鉛筆再轉到原來位置時，剛剛旋轉了 360° 的角度，就是外角之和等於 4 直角．



這個方法還可應用到星形多邊形的外角，第一圖形的結果，爲 $2\times360°$．第二圖形的結果爲 $3\times360°$．於是再求這樣的星形多邊形內角之和，當然是很容易的．





關於多邊形的習題——口述演習使學生練習這樣命題簡單的應用爲最相宜．求各種多邊形之角之和，而以直角，或平角，或度數計算；或已知其角之和爲若干直角，平角，或度數，而求其邊數；求等角多邊形之各角，等．

對於較難的習題，最好指示給學生應用關於外角的命題常常比應用內角的命題便利．例如求一個多邊形的邊數，它的每個內角爲170°，如果根據$\frac{n-2}{n}=\frac{170}{180}$，而求代數的解決是不甚便利，但是利用其外角爲10°的關係，於是由這樣的角數即其邊數的關係便可求出其邊數爲36。

第十一章

證題法

證明幾何的基本方法——分析幾何定理的基本概念，在第三章業已說過．我們已經曉得每一個分析開始，都要考察各種可以求出解答來的方法．因此，對於所謂證題法的知識，當然極關重要．每個命題公理或定義都可以用來當作一種方法．但是最關重要的却是基本方法，有如求線段相等，直線平行，等的方法．

對於這些方法貫澈的明瞭，是善於證題必要的條件．因而使學生熟習它們，可以說是幾何教學的重要目的之一．

除去以上業已講過的六個方法，還有兩個現在把它們提出來：

證題法 VII．求證一線爲他線之二倍，我們往往把小者二倍起來而證其二倍之長與大者相等，或有時平分大者而證其 $\frac{1}{2}$ 與小者相等．同樣可證明角度這樣的關係．

證題法 VIII．求證兩線 a, b 之和等於第三線 c 往往作出 a, b 之和而證其與 c 相等，或作出 c, a 之差而證其與 b 相等．

證題開始的時候，第一個問題，便是："用什麼方法得出來這個題斷呢？" 如果沒有普通的方法可用，我們必須回頭想到已經學

過的命題，公理或定義。

每個敎科書上的命題與每個練習題，都應該這樣的證法，即分析是也。如敎學這個命題，"設四邊形之對邊相等，則爲平行四邊形." 我們應當問什麼是證明平行的普通方法。解答這個問題後，便須求證角相等，我們應當再問證明角相等的普通方法，餘類推。

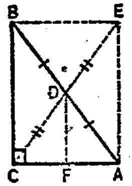
分析——關於分析已如前段所述。學生在這個階段時，應該對於簡單分析的實用，澈底的熟習，此時雖然敎師尙不感覺必須把分析一字解釋淸楚，或是詳細討論它的特性．在未學完第一篇以前，便應該這樣作過。所有以前關於這種方法的討論，應該總計起來，並且對於較難定理的應用，也應該練習。

在完成一個分析，我們應當盡量的按照個人的安排，考究到每個方法．這樣就把原來的定理，分成許多另樣的定理。應用其中任何一個，都可得出一個解答.同樣的分法可用在每一個新的問題上。並且很容易看出來，有的情形同時得出好些證法來．普通說來，在這許多證明當中，有些是比較簡單的，至於怎樣把它選用，要看學生的技能了。

在分析開始，當然，無論何時原來的問題須改成其他的問題，學生應該考査圖形並已知的事實，因而他可發現那些線相等，什麼角的數值爲已知，等等，此時再把這些已知事實在圖上表示出來。

並不是每個定理都可用絕對相同無須變更的分析法可以能證出的；凡較難的分析都需要一種天才．但是這樣分析法的學習，對於資質稍差的學生，如同對於聰明一樣的增加他們的能力。

有幾個例證很可用來作參考。



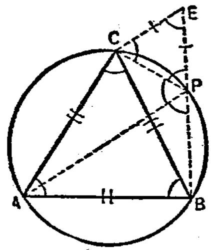
1. 定理——直角三角形 AB 弦上之中線等於弦之一半。

分析——按照上法中的一個或(a) 2 倍 CD，或(b)平分 BA。

(a)延長 CD 至 E 等於其本身之長。於是求證 $CE=AB$。

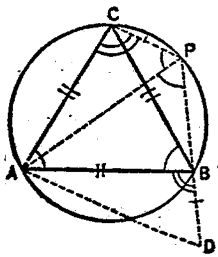
考查圖形：$AD=DB$，$CD=DE$，遂知 $AEBC$ 爲一平行四邊形。而$\angle C=90°$，故 $AEBC$ 爲一長方形。由相等三角形或關於長方形對角線的命題，便可證得 $AB=CE$。

(b)因 D 爲 AB 的中點，我們必須證 $CD=DA$。證明線相等的方法，常常用一對相等的三角形。但沒有可用的三角形時，則另作一對，於是作 $DF \parallel BC$，再求其相等部分。



2. 設 $\triangle ABC$ 爲一等邊三角形內接於一圓，而 P 爲 BC 弧上之一點，則 $PA=PB+PC$。

分析——我們證明這個題斷，有兩種方法：



I. 作 PB 與 PC 之和。

II. 作 PA 與 PC 之差。

I. 作 PB 與 PC 之和又有兩方面：

(a)延長 BP，

(b)延長 PB.

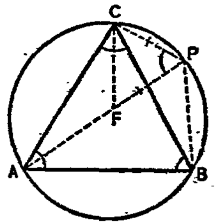
(a)延長 BP 至 E，使 $PE=PC$，即可求證 $BE=PA$. 考查這個圖形，已知下列角度均爲 60°: A, ACB, ABC, APB, APC, CPE, $PC=PE$，於是 $\angle E=\angle ECP=60^\circ$. $\therefore CE=CP$.

證明線相等常用一對相等三角形，此處 $\triangle CAP$ 與 $\triangle CBE$ 很容易證其相等.

(b)延長 PB 至 D，使 $BP=CP$，求證 $PA=PD$.

此地我們不能求得相等的三角形，但是只要注意的考察這個圖，我們也能求出一種解答，不過比 I(a)較難而已.

打量這個圖形，並把 60° 的角用一弧標出來。因$\angle APD=60^\circ$，$\triangle APD$ 必須爲等邊，如果本定理眞確的時候. 所以如果我們能證得 $AD=AP$，此定理即可成立.

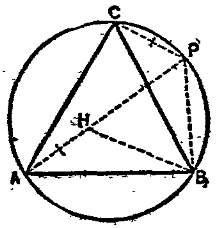


AD 與 AP 相等， 可由 $\triangle ACP$ 與 $\triangle ABD$ 相等推出來.

II. PA 與 PC 之差可以作出來，也有兩個方法:

(a)由 P 端取出 PC 之長.

(b)由 A 端取出 PC 之長.



(a)在 PA 上取 $PF=PC$ 於是試證: $AF=PB$.

考察該圖:

$\angle A=\angle ABC=\angle BCA=\angle APC=\angle BPA$

$=60°$. 因 $PC=PF$, $\angle PCF=\angle PFC=60°$, 故 $CF=CP$.

求證 $AF=PB$ 的方法，須用三角形 AFC 與 BPC。而這兩個三角形，很容易證其相等。

(b)在 AP 上取 $AH=CP$，求證：$HP=PB$. 我們找不到兩個相等的三角形，而以 HP 與 PB 爲其相當邊。於是試求證 PHB 爲等邊三角形，或 $HB=PB$。但這個關係可由相等三角形 ABH 與 CBP 求出來。

間接證法——一個命題否認其他一個，就叫作它的矛盾，例如某命題爲：

設 A 爲 B 則 a 爲 b,

其矛盾則爲：

設 A 爲 B，則 a 非 b.

不直接證明本定理爲眞確，而反過來證明它的矛盾爲虛僞，這樣的方法名之爲間接證法。更爲具體的說法，我們解釋此法如下：

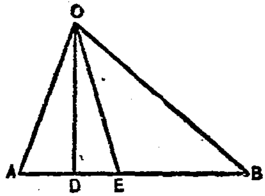
如果 A 不是 B，便是 C，再不然是 D，再無其他可能的結果。同時我們打算證明在某種特別假設之下，A 一定是 B。我們可以直接證明或證明其終斷 A 爲 C，或 A 爲 D 時，均發生矛盾。這些所謂矛盾是對於假設，或以前證過的定理或公理而言。

關於間接證法的應用，並無普遍的規律。只可以這樣說：如果其他方法失敗，學生便可試驗這個方法。普通它可以對於逆定理證明時可用，而當如第十章所說逆定理的定律之情形，更是可用。

如同解答問題似的證明一個定理——有許多定理可以當作問題

來作。當證明關於在三角形內對着銳角的邊上之正方形的命題，我們不用證法而代以求三角形對着銳角的邊之長，而其兩邊當作等於 b 與 c 再設出來合宜的正射影。在學習第一篇時，這種方法可應用到關於角的關係的定理。

具體的例釋如下：



設 CE 平分 $\angle C$，$CD \perp AB$，

則 $\angle DCE=\frac{1}{2}(A-B)$。

在初學者的級上，設

$$A=m^\circ,\quad B=n^\circ.$$

則 $\angle ACB=(180^\circ-m^\circ-n^\circ)$

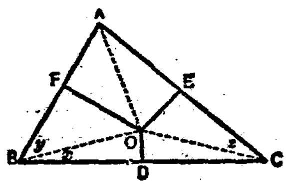
$$\angle ACE=\left(90-\frac{m}{2}-\frac{n}{2}\right)^\circ$$

但 $\angle ACD=(90-m)^\circ$

$$\therefore \angle DCE=\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{2}\right)^\circ=\frac{1}{2}(A-B)$$

一個關係到聯立方程式的例題便是這樣的定理：設 O 爲 $\triangle ABC$ 垂直平分線的交點，則 $\angle OBC$ 爲 $\angle A$ 之餘角。

設 $\angle OBC=x$，$\angle OBA=y$，$\angle OCA=z$。



則 $2x+2y+2z=180^\circ$，

$x+y=B$，

$y+z=A$，

$x+z=C$，

解之得 $x=90^\circ-A$，或 x 爲 A 的餘角。

第十二章

圓

圓與圓周——大多數初等教科書裏，一講到關於圓的定義，就淸淸楚楚的把圓與圓周分別出來，以爲前者是指着面積，而後者是線．這樣的分別，依論理的眼光看，是很合適．但是除初等幾何外，普通多不是這樣的淸楚． 在日常生活或高等算學裏， 周線是用圓(circle) 字來表示的，就是初等教科書上，也不是澈底的保持着這個區別，也往往說一圓通過三個點，或兩圓的交點等等．

這樣分別着，並無大的妨害，如果是保持着前後一致．但在另一方面看，很顯然的違反習慣．因爲言語的事體是着重習慣而不根據論理的．所以最好以圓表示周線，而以圓周代表周線之長．

如果是容納這種分別的意見爲合乎論理計，應先下圓周的定義，而以圓周爲界的面積則以圓稱之．

初步命題——關於圓的初步命題，如同圓的半徑相等，直徑平分圓周，等等，因太簡單了而發生特別的困難，如同我們已經在第五章討論的初步命題一樣．所要注意的地方也相同，我們現在只提出兩點：不要對於這些定理討論的時間太久了，並且只可把那必不

可少的提出來講.

舉例來說一個命題，只因爲終斷太明顯了，正確的圖太難畫了，以至不易證明，便是："一直線不能與圓周交於兩點以上的點."許多書把它當作第一個命題，並且給出來一個很複雜的間接證法，其實把它移後是最合宜的，很可當作如下所說的定理之系，"經過任何不在同一直線的三點可作一圓."由這個命題很容易推出一直線不能與一圓交於兩點以上的點.

有幾個關於圓的基本命題，必須根據重疊法．並且這個方法的必要，將越發明顯，如果我們還記得每對於新樣圖形，重疊法是證明相等的惟一方法，如在第八章所說．學生如果尙記着已知的部份定然先使疊合，這樣證法或不至感覺困難．因而證明等圓心角所對的弧亦等，我們須疊合圓心角等.

定理的分析——如果學生業已了解了分析之基本概念，如第一編所討論的；同時教師也很着重證明弧，弦等相等的新樣方法，則所有關於圓的證明，都可不費周折的發現出來．此地似乎還可舉出幾個例子來，大多數學生不但應當能夠答覆，而且應當還會發問，發出有條理的問題.

1. 在等圓中較大的弦對着較大的弧.

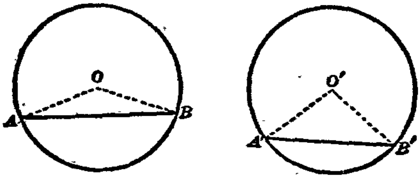
問——我們知道的證明弧不相等的惟一方法是什麼?

答——不相等的圓心角.

問——我們必須要證什麼?

答——$\angle O > \angle O'$

問——我們知道什麼方法去證角度的不相等？



答——外角的命題，關於一個三角形含有兩個不等邊的命題，還有關於兩個三角形的命題。

問——此地我們能夠單獨用那一種方法呢，爲什麼？

答——最後一個，因爲這兩個角是分在兩個不同的三角形中。

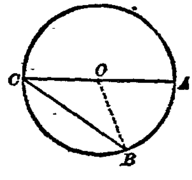
問——於是我們必須關於 $\triangle OAB$ 與 $\triangle O'B'A'$ 有什麼要證的？

很明顯的可以看出來，這兩個三角形滿足我們的條件。

2. 求證圓周角以所截的弧之半度之，最好不先由普遍的命題入手，而僅及這一種情形，角之一邊爲圓的直徑。通常學生不用幫助，便可求得結果，不然，我們可作如下各問：

問——什麼角以 AB 弧度之？

答——$\angle AOB$.

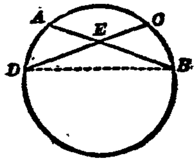


問——我們於是須證明$\angle C$與$\angle AOB$有什麼關係？

答——$\angle C=\frac{1}{2}\angle AOB$.

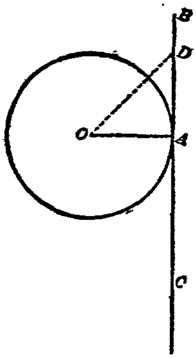
這個證明很容易的求出來。

3. 如果學生對於某種弧度量某種角的命題發生困難，一時發現不出證法，我們先以數目的問題引導他們：例：設 $\overset{\frown}{AD}=40°$，$\overset{\frown}{CB}=50°$，求$\angle AED$。



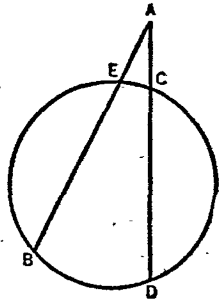
經過這樣幾個例題之後，學生必然發現了普遍的命題.

4. 如下圖所示，關係到一個切線，學生有時對於我們證明 D 不在圓周上，感覺奇怪. "我們很能夠看出來 D 不在圓周上，為什麼還去證明呢?"



我們要知道十分的普遍，"看"不是證法，我們很容易在這個例子上顯明出來. 只是"看"在某種境況之下，很難以判別這個問題. 設此圓半徑十分的長，以至於幾英里，同時 AD 很短，如一英寸，那末沒有人夠只靠着眼睛去斷定 D 是否在圓周外. 但是證法便可解此疑問.

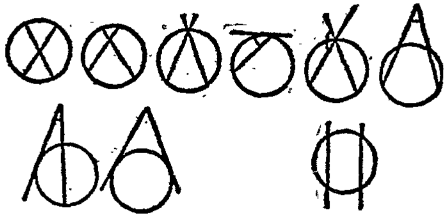
某種定理的推廣——關於用弧度量角的定理，可以推廣如下：



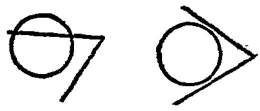
設 A 為這樣的角，由 AB 照着反鐘針方向旋轉而形成的，由原來的位置 AB 到終止的位置 AD，於是該移動線與圓的交點經過 BD 時，為反鐘針方向，而經過 EC 却為順鐘針方向. 如果我們把移動點，按着反鐘針方向經過的弧當作正量，把移動點按着順鐘針方向所經過的弧當作負量，我們便可把所有關於這一類的定理總括如下：一個角為它所截弧的代

數和之半所度。

因此幾何正負量的概念，在近世幾何中應用最廣，能夠使我們把好些個不同的定理就如下圖所示，總括到一個定理裏去。



如第五圖所示的命題，普通在教科書裏找不到；最後一圖表示如果角爲零度，即兩線平行，則兩弧的代數和亦爲零。



如果我們再推廣弧的定義，以至於有所謂虛弧，這個命題仍然眞確。即使該角的一邊或兩邊，並不與圓相交也無妨。因此即使該角頂隨便在整個的平面內移動，同時它的邊也隨便旋轉，這個命題都無妨其爲眞確。它並不在任何一點的地方驟然有所改變，而是在此整個的平面裏繼續着的。這種原理常常被稱謂繼續原理（Principle of Continuity）。

習題

第二篇裏的證題法應該多多練習，一直等到學生都能了解爲止。其中極關重要的爲：

1. 證明弧相等常常利用：

　(a)相等的圓心角，

　(b)相等的弦。

2.證明弦相等常利用下法:

(a)相等的弧,

(b)距離圓心相等.

3.證明弧與弦的不相等,則應用相類的方法.教師應該分別把這類方法提出來,並用許多定理或有時用問題來試用它.這種事體太簡單了,不值得再詳細的討論.

用弧度量角的定理,應該拿出許多數目的習題來作例證.這一類簡單的習題,很容易創造出來.有些圖我們可以利用,如內接四邊形,外切三角形,內接五邊形,指定出來一些角或弧的數值,而求其他角或弧的數值.

對於第二篇裏的較難習題,有時必須求證四點爲共圓點,即同在一圓周上.爲此目的有兩個定理可以用.四邊形 $ABCD$ 的頂點爲共圓點,如果

(a)$\angle ADB=\angle ACB$,或

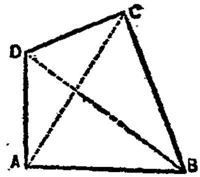
(b)$\angle A$ 爲$\angle C$ 的補角.

每個定理可以用間接法證明.

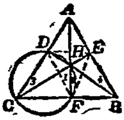
有些習題很容易用共圓點證出來,但用其他方法則殊感困難.有如下例所示:

1.設在四邊形 $ABCD$ 中,(看右圖)$\angle ADB=\angle ACB$, 則$\angle DCA=\angle DBA$.

2.用同樣圖形設$\angle B+\angle D=180°$,則$\angle BAC=\angle BDC$.



3. 連結一個三角形內三高線的垂足而成的每個角，恰爲相當高線所平分.



4. 設由圓周上任一點作其內接三角形三邊上的垂線，（有必要時可延長）則這樣的三垂足必在一直線上.

第十三章

極限

極限的謹嚴論法

在初等幾何裏，沒有那一部份比極限學說更易惹動人那麼擴大的熱烈的來討論．我們知道有些人主張幾何教學得出不好的結果，都是因為缺乏了嚴密性，而這些人是最得意現在所討論的題目，這些人佔有絕大的勢力，甚至於無人敢來駁辯，一直到現代才變了局勢．

曾引起討論的定理可分作兩類：

1. 包括着所謂不能通約 (incommensurable) 之場合的定理．

2. 圓周長與圓面積的計算（在立體幾何內的求圓錐圓柱與圓球的面積與體積）

第一類包着不能通約的數之概念，而這種概念到十九世紀才得着科學基礎．其他一類含有曲線度量的問題，這種問題我們平常的度量法顯然不能用．並且牽扯到旁的問題，幾乎就是形而上學的困難問題．

對於這些事體根本沒有嚴密的論斷可以適合中等學校的，而承認在嚴密化的學校教科書上所提出來的論斷為真實的嚴密，的確是一種謬見．謹嚴論者的影響與他們這樣的論證，以為只有無知教師才避開嚴密的方法，却是有很大的力量．使教師們與著作者都把極限論弄得一個比一個的複雜．

常常作出極高深的定義使學生感到無意義，隨後又有八個或十個抽象的定理關係到變數的乘積，商等等，最後便是對於相等變數的極限相等的複雜而無從捉摸的證法．

照着這樣嚴密的方式，這個題目在完全學程裏講過去了．十分的確，有些學生能夠背誦這些字句，但沒有百分之一的人對於他的工作有一種清楚概念．用這個方法教學這個題目的絕對無效果，差不多所有的專門教授們都可試驗出來，只要他有機會在高等學程裏用到極限．

可慶的很，鐘擺改變了方向，漸漸的得了定案，都認為這種論調是一種錯誤了．

極限的合理論法

不能通約的場合——這是無疑義的在我們現在的境況裏，寧可關於極限的證法都去掉，也比較那號稱謹嚴的證明好些．

但是有一件事體是可能的，就是把這個題目看得十分具體，使學生對於這個問題的性質與困難得着一種了解．現在用一個例題來說明．我們就拿第一個命題說，普通習慣的安排都是需要極限的，

該定理即"圓心角以所截弧之半度之". 平常這個命題是當作關於圓心角與所截之弧成比例的定理之系，但是主定理是永遠用不着，我們很可取消它，而對於系則可照着以下的證法.

因爲相等的角所截的弧也相等，每一個等於 1° 的圓心角截圓周的 $\frac{1}{360}$. 因此我們把圓周作爲 360°，即得出一個 1° 的角截 1° 的弧.

$\therefore$ 一個 $\left(\frac{1}{20}\right)^\circ$ 的角截 $\left(\frac{1}{20}\right)^\circ$ 的弧，

$\therefore$ 一個 $\left(\frac{37}{20}\right)^\circ$ 的角截 $\left(\frac{37}{20}\right)^\circ$ 的弧，

或普遍來說：

一個 $\left(\frac{1}{m}\right)^\circ$ 的角截 $\left(\frac{1}{m}\right)^\circ$ 的弧，

$\therefore$ 一個 $\left(\frac{n}{m}\right)^\circ$ 的角截 $\left(\frac{n}{m}\right)^\circ$ 的弧.

故所有的圓心角只要可以用普通的數——眞分數或分數——都用它所截的弧度之。

這種證明是否普遍的問題，即是否任何的圓心角都用所截的弧來度量? 很容易使學生答以肯定的承認. 此地不能通約數的問題要自然的引出來. 學生很容易看出某種數如 $\sqrt{2}$ 不能爲分數，因爲如 $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$（此處 $\frac{m}{n}$ 爲不可約）則 $2=\frac{mm}{nn}$，但此爲不可能，以 m 與 n 無公約數也.

還可指出來一些數不能等於普通分數，如 $\sqrt{7}$，$\sqrt[3]{5}$，3.14159… 或 π，於是不能通約數因而引導出來.

如果把我們的問題——幾何圓心角的定理是否在什麼樣的情形都可證出來，——現在再提出來，我們很容易收到一種相反的回答。此時我們告訴學生說，這個定理對於不能通約數之場合也可證明，不過在學校的課程裏似覺太難；或者我們試驗着把這種不能通約數之場合弄得很近似，其法便是談到這樣數的近似值如 $\sqrt{2}$ 的近似值，即爲 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142等等，很顯然的這個定理對於近似值是眞確的，所以這兩個數——角的數量與弧的度量——依次的不能差到 .1, .01, .001, .0001, 等等．或者可以說這種差誤不能比任何我們能夠想到的數較大．

我們業已證得在角與弧的度量裏，不能有什麼差別，於是所謂謹嚴的證法與它的機械工作也不過得如此的結果．

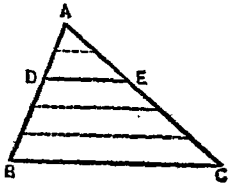
如果我們還打算再謹嚴些，並認爲以上的方法比流行的方法似欠周到．我們也可以作成如同平常書上的證法一樣嚴密，而對於不可通約數相等的定義須這樣：兩個不可通約數相等，假如所有它們相當的近似值都相等．這樣，實際上就可去掉不可通約的場合．

上法的主要性質乃是這樣．如從純粹算術的一方面，它漸近於不可通約的場合因而顧不到極限，以及可通約的與不可通約的線等等．這樣當然不能像通常的那種方式確確實實屬於幾何的範圍．但只因我們已經把整個的比及比例的學說放在算術的基礎上，自然沒有正當理由來反對這樣困難的比的特殊場合．純粹幾何的不可通約量之概念，對於學生異常困難，因爲他以前從未作過關於這些幾何的事體．他並不知道關於兩個線段的公量，同時關於兩線段沒有公

約量等等的幾何觀念也概不清楚.

爲明白這種算術設計的用途，我們無妨再提出來一個定理，一個線如平行三角形之一邊，則分其他二邊成比例.

如下圖設想 $AD=\frac{2}{5}AB$, 即設分 AB 爲五個相等部份，而 AD 有其二，設由分點作 BC 的平行線，則很顯然的 AE 爲 AC 的$\frac{2}{5}$.



或設$\frac{AD}{AB}=\frac{2}{5}$,

則$\frac{AE}{AC}=\frac{2}{5}$.

所以如果 AD 可以用$\frac{n}{m}AB$ 的形式表示出來，那末這個定理就證出來，此地$\frac{n}{m}$須爲普通的分數.

我們指出來僅有有理數能夠寫成$\frac{n}{m}$的形式，而對於不能通約的場合仍如前所述. 如討論關於不可通約的場合這樣的證法總是比例常的方法稍繁雜一些. 不過去掉了一種難懂的東西“公量.” 同時對於不可通約的場合這種方法是無疑問的較爲合宜，因爲這樣可避免了可通約的與不可通約的線，變數，與極限等等.

曲線的長度——前段所提到的定理能夠不用“極限”與類似的名詞便可很合適的教學過去. 但關於曲線的長却不能避開極限的觀念. 解決這一點，在中等學校裏所發生教育的困難，最好在證明的時候不要太認眞了.

因此最好對於這些命題，如圓周爲其內接多邊形的極限，等等，一點也不加以證明．因爲對於算學沒有緻密思想的腦筋看這些命題就是些公理．其實尙需要好多的訓練，或能認出我們對於這種困難的命題，必須經過一番證明方可．不到百分之一的學生能夠對於這個定理淸楚的了解，如果只學習它的證明，或是一組的證明．一個圓周爲多邊形之極限等等的事實，是這樣顯明，可以說當我們最初學習到極限定義的時候，很可拿它作個例子來解極限的意義．

有一種事實是我們大家都經驗過的，就是有些問題僅僅對於有某種程度的人們才認爲是問題．最爲簡單的事體，要算是"重"的問題，這本來是最基本的事實無庸加以解說的，但必須經過相當的進步後，我們才曉得關於重的問題尙需要解決也．平常人去解釋如何某種房子現出紅色來，並不感到困難．他一定告訴我們某房子就是紅的．只等到與他講到反射作用時，他才覺着其中尙有感覺等問題．在這種情形我們必須先讓學生知道其中尙有問題以後，我們再來想法解答這種問題．關於曲線的長度恰恰就是這種同樣的情形．年幼的學生想像曲線之長的時候，總是想到曲的繩線是可伸直的．他覺着並沒有什麼困難，但經過相當的學習便使他認爲尙有問題存在，並且還是困難問題．

普通的指示——如果教師不得不教學極限，與其他關於這個概念的事體時，下列幾個指示很有幫助：

1. 把極限的定義寫成代數形式使變數爲 x 常數爲其他字母．

2. 對於相近的定義，卽可滿足．學生並不熟習函數的概念與互

相倚賴的兩個變數．只讓他想像一個變數就够困難的．不要棄掉一個定義只因爲它不能概括所有的場合，而這些場合或許將來在專門課程裏才發見．專門學校的教師似乎不應這樣，但是對於他們寧可使學生善於思想較比只使他們知道一些正確定義更爲重要得多．在算學裏這是常常有的事，某種定義在最初講時，必須用一種初步形式．要用一種定義是最適合你自己的目的，卽教學初步幾何的目的．卽使將來專門教師再爲校正也無妨．舉例說吧，如果一個教師感覺這樣的短句"一個變數不能達到他的極限，"對於自己工作有幫助，他就可以用它．所有在初等幾何裏的極限，都有此特性，並且在初學時用它最利便．固然此外還有的極限不在學校幾何範圍，並無此特性，但也無甚重要．

3. 提到極限的性質，須多多舉出幾個具體的例子，循環小數，如 .999………；無限級數，如 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots$；代數函數，如 $\left(\frac{1}{2^n}\right)n=\infty$；等等，都是很好的例子．

還可舉出幾個運動的例子，此外如圓周與圓面積爲某種多邊形的周邊及面積的極限等等都可用．

4. 不要在開始教學時，就把一種普遍的定理如關係變數的乘積，變數除常數之商，等等來討論．

5. 不要教學這種幾何的證法平常用來證這樣的定理，"如有極限的兩個變數永遠相等，則其極限亦必相等．"這種證法不能確定，而且很難使學生了解．

6. 不要對於這個題目討論的太多了，討論的越多則學生越感紛擾．

第十四章

幾何第三篇

關於比例的定理

比及比例——近代學校教本上把比當作分數來解釋，求比與求商是完全一致的問題．但是這樣在許多例題上便含有無理數的概念，我們知道在某一個時期只曉得用有理數而無理數却當作不可能，因而把比當作商數的定義認爲是不完全．所以歐克里得及其他古幾何學者都不用比的算術的定義，就是現在仍有些著作家排斥它，因爲它不是幾何的，它破壞了幾何的論理系統，它引導出來線乘以線等等．

雖然我們也可承認算術的定義，不甚合乎科學．但是它的教育的價値却十分偉大，以至於在中等學校裏沒有問題的應該這樣教學．同時只要曾讀過歐氏定義的人定然感到他對於青年學生不合適．

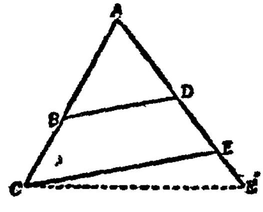
這種算術的說法引導出來兩線的乘積固不甚妥當，但是這種事實並無多大妨害，因爲所有的困難未嘗不可以移開，只要把兩線的乘積認作是數値的乘積就無問題了．對於比及比例的教學詳細的討論

起來，未免太費周折；此地僅有一點應該注意．學生須知道所謂比者不過是兩數量的比較而已，例如 $a:b=7:1$ 即 a 爲 b 七倍的意思．當學生很能够機械式的應用比及比例的時候，有時他們就忘掉了比例到底是什麼了．數目的例子，常常可以減少這種困難．因此我們證明 $AB:BC=AD:DE$ 時，可以這樣問：設 $AB=3\,(BC)$ 則 AD 與 DE 有什麼關係？當然這種例證並不限於這樣簡單的題目，但每個關於比例的命題都可這樣的作．

對於某種定理的討論—— 1. 關於一線平行三角形之一邊而分其他兩邊成比例的命題，是最關重要．它的證法如同對於新樣圖形成立比例關係的證法一樣，必須關係到不可通約的場合，不過這一個可以避開，如果已經學過成比例的面積．

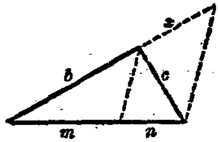
有一點很值得注意，就是這個定理不論所作的平行線與邊相遇於邊內或邊的延長線上都是眞確的，不過前者我們得內分點而後者則得外分點而已．

2. 打算證明前定理的逆定理平常是作一線過 B 平行 CE．但如作一線過 C 而平行 BD，則這個證法還可簡單些．



3. 在分析關於一個三角形的分角線的命題，即 $m:n=b:c$，使學生發現出來作分角線似乎不容易．但是這個事體可變簡易些，如果我們把它當成一個問題，使求作 mn 與 b 的第四率這樣便必須作出需要的圖來，於是只剩下證明 x 與 c 的相等，那末

它便不會發生困難了.



4. 其相當的命題是關於外角分角線的並不甚重要，除非學習調和分(harmonic division)時用它. 如果是要教學它，很可用前命題的極相類似的方法，使學生證明出來. 如果用相當的標字，對於這兩個定理僅僅用一種證法便足矣.

5. 為的證明關於相似三角形的定理，常常應用一種證明線段相等的新方法，就是，把兩個線段作成兩個比例的相當項，同時其他項皆相等. 例如　$a:b=x:c$,

$a:b=y:c$,　則 $x=y$.

如果能夠利用這個方法，那末就有些定理失掉一大部份困難. 例如：證明「如果兩個三角形的相當邊成比例，則此三角形相似.」即其一例.

6. 對於幾個關於線份的命題，其線份由兩個相交的弦，或兩個相交的割線，或一個割線與一切線作成的，我們可以指出來第二三個命題，都不過是第一個的特殊情形. 這樣的割線可以當作外分的弦而切線代表割線的極限，不過這種割線與其外線份(external segment) 完全重合而已.

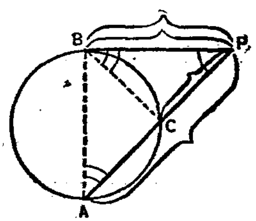
關於比例線段的習題

簡單的習題——相似三角形在證明線成比例裏所佔的地位，如同相等三角形對於證明線相等一樣的重要，因此我們可以這樣說，

在好多情形下證明線成比例是用相似三角形. 因爲比例篇的大部份關係到線的成比例，並且大多數線段之長的計算靠着成比例的線段，所以這件事體非常重要. 至於詳細的進行方式，現在寫在下邊：

1. 使學生標記出來成比例的四個線段. 一個括號常用來表示每個線段，如果同一個線段在這個比例裏用過兩次，則作兩個括號. 如求證 $PA:PB=PB:PC$ 我們應該應用下圖的標記.

2. 選擇兩個三角形使每個三角形中含有兩個已知線. 在很少的場合中這種選擇工作須用好幾種方法才能完成，並且學生或許就錯選了一對三角形. 在這樣的情形既證不出該兩個三角形相似，就勢必另外再去選擇. 但是這種情形極少. 在上圖中很顯然的那兩個三角形爲 PAB 與 PBC.



3. 證明兩個三角形相似. 大多數的情形是應用等角來證，凡是等角可以標記出來如上圖所示.

4. 寫比例式時選擇各題斷的第一項作爲第一項. 縱然所得的比例式中，其項的次序與題斷不完全一致，還可用交換法完成起來. 當求相當邊時我們應該注意角的標記，例如上圖中 PA 在較大的三角形裏爲兩個標記的角所夾，於是 PB 在較小的三角形裏佔有相似的地位，故爲 PA 的相當邊. 又大三角形的 PB 與小三角形的 PC 爲相當，因爲它們都是對着同標記的角故也.

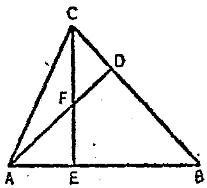
5. 如果我們必須要證明兩線的乘積等於其他兩線的乘積，其進

行方式完全如上所說，只是我們必須由所得的比例式中，把外項相乘與內項相乘等起來。

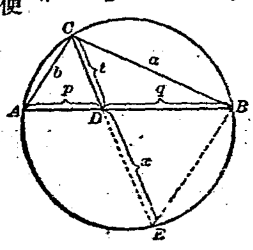
習題的創造——這樣的練習題應該多多給出幾個使學生解答，一直等到他們很熟習了這個方法爲止。如果教科書上的習題不夠用，我們很容易的創造出來。

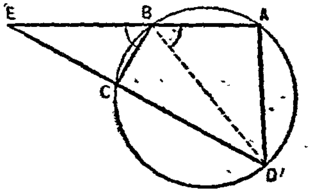
第一，跟在這樣的定理以後，一定有些例常的比例命題，學生最應該根據這個方法一一解答出來，是很有益的工作。爲不讓學生借助教科書，最好在初學的時節，用口述法來作練習。這樣的命題很不少，如關於相交的弦，相交的割線，一個切線與一弦，直角三角形，高線與外接圓直徑的乘積。

第二，找一些合宜的圖形把其中可以能夠成比例的關係寫出來，便可得出好多的習題。例如下圖，設高線 AD,CE 相交於 F，我們就可得出四個相似三角形，即 AFE, ABD, CBE, 與 CFD。我們取出六種組合，便可得出六對相似三角形（1～2　1～3　1～4　2～3　2～4 與 3～4），而每對三角形又可寫作 3 種比例式，於是我們只作一圖便可得出18種比例式，自然也就是18個兩線的乘積等於其他18個兩線的乘積了。



同樣如右圖設 $\angle ACD=\angle ECB$，我們可得出三個相似三角形 (ACD, EBD 與 ECB)，結果得出 9 個比例式。又如下圖所示，設

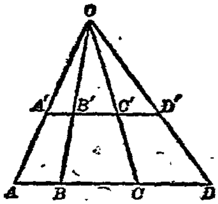




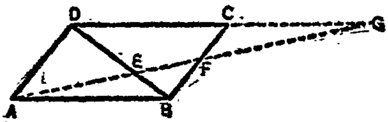
$\angle EBC=\angle ABD$則有三個三角形為相似(EBC, EDA與DBA)，於是也得出9種比例式.

∵在直角三角形中作出弦上的高線，這樣的圖形，也可作出9種比例式，等等.

困難習題——關於四線成比例的較難習題往往不能夠求得兩個相似三角形，使每個含着已知線段．遇着這樣情形，我們必須再找出一個第三比來，而同時可證明該比等於已知的兩個比．換一句話說，這些定理可以分解兩個前類的定理.



因此設$AB\parallel A'B'$求證$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$，用上法顯然要失敗，因為並找不到兩個三角形每個含有兩個已知線段也．但很容易的可以證出來每個已知之比均等於$\frac{OB}{O'B'}$.

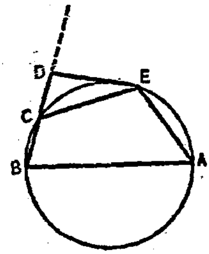


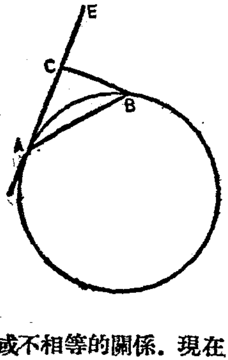
又如$ABCD$為一平行四邊形，求證$\frac{EF}{EA}=\frac{EA}{EG}$，我們發生同樣困難．但$\frac{BE}{ED}$很容易證其與已知之比相等.

數値的習題——在教學每個關於比例的命題時，都應該用數值習題去例證．這種工作使學生對於命題中關係的事實得以熟習，並使學生對於這樣命題的意義得以確實，同時我們又可得出許多簡單而具體的材料，在實用問題中常常用得着．（參看第十八章）

每個這樣的比例習題，可以伴着一個數目的問題，以顯示比例的應用．因此，等到你證出梯形的對角線彼此相分而成比例，隨可指定其中之線段的數值而求第四項，或指定內項的數值並設第四項2倍第一項再令求出第一項．

這一類的習題並不困難，假如把它們所根據的比例都給出來：如果沒有已知的比例式，必須另外求解，這樣就稍爲困難．舉例來說：一個三角形的兩邊爲10與12，對於10的高線等於8，求在12上的高線．此處學生必須先求比例式．更爲困難的習題，就是還須要作出一二個必要的三角形，方可成功．例如設 $DC=3$，$EC=5$，$EA=6$，$ED\perp DB$，而 AB 爲直徑，求 AB．又較比更爲困難的便是：設 AC 爲切線，$BC\perp AE$，$AC=4$，$AB=6$，求該圓之直徑．





線段中間的度量關係

關係線段中間的度量之命題——在我們未學比例以前，我們僅僅找出來線段相等，或不相等的關係．現在根據比例更能夠計算線段的數值．從這一點我們得着一些應用的問題，就像求高與求距離，都是不無興味的問題．

這一類的定理都是作成一種關係線長的方程式，最顯著的即派

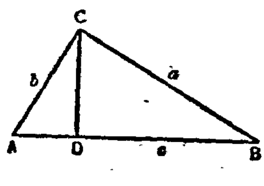
塔各拉斯定理，中線定理，分角線定理，等等．從前的人把這樣的命題當作正方形長方形面積的關係，現在我們都把它們當作線長的數值之關係，而以代數式表示出來．如 $t^2=ab-pq$ 在歐克里得認爲是一個正方形等於兩個長方形之差，而現代著作家則不惜把代數應用到幾何上，認爲上邊所敘述的，不過是簡單的代數方程式，其中含有五個數量 t, a, b, p, 與 q.

派塔各拉斯定理——這類命題最著名的便是關係直角三角形三邊之長的定理($a^2+b^2=c^2$)．該定理曾於公元前 550 年爲派塔各拉斯所發明．這定理差不多在全本幾何裏是應用最廣的一個，其實似乎是惟有它常常被應用．它的重要爲一般人所承認，也不怪有好些人試驗着發現新方法去證明它，到現在已經知道的要超過 100 之數．

對於初學者代數的論法要算是最好，證明每個腰各爲中比，並且從此推出每個腰上的正方形之數值，等等．

歐氏證法當然是純粹屬於幾何的，利用兩個相等的三角形，現在——主要因爲它的歷史價值——仍然有許多教科書來採用．有一個證法最有趣就是把在股上的正方形割開恰恰湊成在弦上的正方形．

有一個證法因其簡單，還有說一說的必要，但是放在教科書中往往不甚合適，其證法如下：



設 $\triangle ABC \backsim Kc^2$

則 $\triangle ADC \backsim Kb^2$

$\triangle BCD \backsim Ka^2$

於是很顯然的 $Ka^2+Kb^2=Kc^2$ 卽 $a^2+b^2=c^2$.

關於這類定理的分析——用歸納的順序去發明這一類的定理與它們的證法是很簡單的事體．例如打算發現關於三角形對銳角的邊的平方之定理，我們可作出一串數目或代數的練習題，由派塔各拉斯定理開始而終於所求的定理，其過程如下：

1. 把直角三角形的兩邊設以數目或文字值， 然後求第三邊的數值.

2. 把二等邊三角形的底邊與一股設以數目或文字值而後求高.

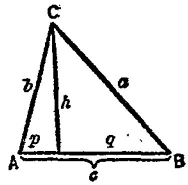
3. 設二等邊三角形的高與一邊爲已知，求其餘之一邊.

4. 設等邊三角形之邊爲已知，求其高線.

5. 設等邊三角形之高爲已知，求其邊.

6. 如右圖，設 $h\perp c$, $b=10$, $h=8$, $a=17$, 求 c.

7. 用同圖，設 $b=10$, $h=8$, $c=14$, 求 a.



8. 仍用該圖，用 b, h 與 c 表出 a.

9. 仍用原圖，設 $a=10$, $b=37$, $q=16$, 求 p.

10. 仍用該圖，以 a, b 與 q 表出 p.

11. 仍用該圖，設 $b=15$, $p=q$, 與 $c=25$, 求 a.

12. 仍用該圖，以 b, c, p 把 a 表示出來.

這樣，學生就可達到所求的命題，並且另外可以得到證明這類命題的普通妙法（捷徑）.—— 一種事體比僅僅學習一個呆板證法重要的多.

這種工作如採用簡單的符號，則更覺便利．我們應該盡量的想法用一個字來代表線段，如三角形的三邊以 a, b, c 表示，其高線用 h_a, h_b, h_c 表示，三個中線用 $m_a,\ m_b,\ m_c$，表示．但如在一證明裏含有許多三角形時，不要用二個文字表示三角形的符號，僅有羅馬數字如 $I,\ II,\ III$，等可用．

方向線的用途——三角形之邊的平方的命題又給我們一種例題，表現出來用方向線如何能使我們用一種敘述概括幾種場合，不然這些場合便能形成了不同的命題．

如果我們把 b 邊在 c 的射影 p 當作是正，假設它與 c 同方向的時候．反之，則爲負．這樣任何三角形一邊 a 的平方，可以用下式表示出來．

$$a^2=b^2+c^2-2cp.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

設如對 a 邊的角爲 $90°$ 則此式第三項消失，如對 a 的角爲鈍角，則 p 爲負，同時第三項爲正．

這樣普通公式的有用，特別顯著在某種角度性質不詳的例題裏．如果沒有這個普通公式，那末只知三邊而在求 p 的時候，必須對於某角的性質特別的攷查一下，然後才能決定應用那一個公式．但這個普通公式什麼時候都可用，並且從 p 的結果值，便可斷定對 a 的角爲銳角，爲直角，抑或爲鈍角．

公式的用途——學生應當徹底的了解怎樣的利用一個公式，不但在公式中分別表出來的量可以求出來，而且無論在式內包含着的任何量只要其他的量爲已知，也同樣可求．因此這公式：$a^2=b^2+c^2$

$-2cp$(1)不但可用以求 a，而且可用以求 b 與 c，尤能求 p，當已知 a, b 與 c 時．有的教師由上式推出一個演理，即公式

$$p=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\cdots\cdots(2)$$

於是讓學生記住(2)，並應用它解答習題．但是這樣的作法，不甚妥當．實際上計算 p 的數値，應用(1)與(2)同樣的簡單，所以我們又何必讓學生對於這不必要的公式費這些無用的記憶呢？而且這樣用法使學生很容易誤會到一個公式僅可利用它來求其中分別表示出來的數量．這樣誤會對於將來高等算學工作上，頗有妨礙．這樣誤會在學生當中並不是不常見，舉例說吧．在學立體幾何時，學生業已推出關於已知有法四面體的邊 a(edge) 求其高 H 的公式 $\left(H=\frac{a}{3}\sqrt{6}\right)$，我們可向學生提出相對的問題即求以 H 表示 a 的公式，就有許多學生從新開始幾何的推究，並不會想法應用已成的公式．這樣方法的缺點越發的顯明，當相對的問題是很難的時候，就像已知有法四面體的體積爲 V，而求其邊．

學生應該覺悟到所有這類的問題，均可用代數的解法，如果我們能夠把兩種數量寫成代數的關係時，同時這兩個問題，即：設體積爲已知求其稜與稜爲已知求其體積，在幾何上是一樣．

不必要的演理——前段所陳述的理由對於以下的命題，同樣的有效，如中線定理，三角形一角的分角線命題，等，推求費記憶的演理給出一種公式分別的把中線，分角線，等等表示出來，是無甚價値的．在所有的這種情形，學生只應記住一個公式關係基本的定理，並且對於數目的問題把已知量代到這個公式去便得．因此對於

中線命題與它的應用我們只可用一個公式，即

$$2a^2+2b^2=4m_c^2+c^2.$$

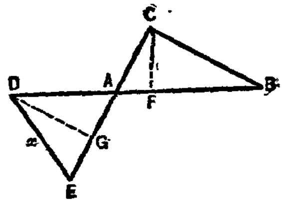
而且對於其他定理也是這樣，有一種例外，違反這種法則的爲求高公式.

$$h_c=\frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

此地，我們雖然在一個具體的數字例題裏可先求 p 的數值然後再求 h，但是這樣計算的困難，確不如應用這個公式較爲簡單．而且高線在高深算學工作裏時常需要，那末記憶這種公式，似乎還值得．

射影——根據上述命題的數目例題，因爲能夠應用到實用問題上，因而常常能發生一種趣味．而大部份這類問題却都用到"射影"，但這種射影的應用似乎尙有許多教師不甚認識．有時我們相信有一些問題必須靠着三角法來解答，但只要能夠合適的應用射影，也很可用純幾何的方法解出來．

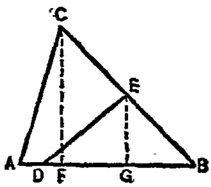
例如下圖，兩線 DB 與 EC 相遇於 A，而 AB, BC, CA, AE 與 AD 均爲已知，求 DE,則由三角法先求出$\angle BAC$, $\angle DAE$ 之對頂角也，並可由 $\triangle ADE$ 中求出 DE 或 x.



在幾何中，我們不用去求角，只求角之一邊在其他一邊的射影則可．如在右圖，我們求 AC, 在 AB 上之射影 AF. 因爲相似直角三角形的關係，我們知道 AG 爲在 $\triangle ADE$ 中之相當射影，於是很容易由 $\triangle ADE$ 中求出 DE 或 x.

時常用三角法求出角度，只是當作一種手段，爲的藉用它計算線段而已，而這樣工作往往用幾何的射影解決，更覺便利．這樣的射影簡直可用以代替角或三角函數的作用．

再舉一例：設 BE, BD 與 $\triangle ABC$ 的三邊均爲已知，求 DE．我們要照三角法的方法，一定先解$\triangle ABC$得$\angle B$, 然後再由 $\triangle DEB$ 求 DE. 此地求$\angle B$ 只是一種過渡的結果．在幾何中我們儘可借用射影 FB 代替$\angle B$ 的三角函數，再由相似直角三角形求出相當的射影 GB,最後由$\triangle DEB$ 乃求得 DE.



這種方法可以用來解答一些重要的命題，例如中線的命題．求以 a, b 與 c, 表出 m_c, 先可求得 b 在 c 上的射影 p,再由$\triangle(b, m_c, \frac{c}{2})$ 便可求出 m_c.

很顯然的我們可用這個方法求一線 (m) 之長，而 m 並不必平分 c, 僅知其所分線段成一定之比即可．設如 m 分 c 爲 $k:l$, 則立可證出：

$$m^2=\frac{ka^2+lb^2}{k+l}-\frac{klc^2}{(k+l)^2}.$$

角與射影的關係——在許多的場合，只靠一線與其射影的數值，並不一定藉以求出其夾角之數值；並且反之亦然，只知角的數值也同樣不能使我們計算射影．但有幾個例外教師們却應該知道．如果兩線所夾的角爲 30°, 45°, 60° 或它們的餘角時，一般中學生便可知道怎樣去求其中一線在其他一線上的射影．我們還可計算對於某

些角的射影，不過須等於用直尺及圓規能够作出的有法多邊形的中心角，如 15°，24°，18°，$22^\circ30'$ 等方可．還有好些角這樣的計算也可成功，只要它們的度數是 3 的倍數，如 6°，9°，12° 等．

其中最易推算的一類，即係已知某線等於 a，求其射影 p，如 a，p 所夾之角爲 $22^\circ30'$ 時，其公式如下：

$$p=\frac{a}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

習題的創造——創造這類的習題我們可以隨意指定某種線的數值例如三角形的邊而令求其他線段的數值，如中線，分角線，等等．只是數目複雜的計算，有時令學生感覺困難．不過可想法使之簡單，尤其使能得有理的結果，則下列公式頗爲可用．

直角三角形——設 m 與 n 爲正整數並互爲質數 (Relative Prime)，同時 $m>n$ 則直角三角形的三邊用下式可得出有理值來：

$$a=m^2-n^2,\quad b=2mn,\quad c=m^2+n^2.$$

因而可得出 3, 4, 5；5, 12, 13；15, 8, 17；7, 24, 25；21, 20, 29；等等．

5, 4 與 3 是最著名的三數可用來作一直角的．如果我們有一直角三角形其中兩邊之比等於這三個數中兩數之比，則很容易的把第三數求出來．如設 $c=55$，$a=44$，則不用計算即可推出 $b=33$．

含有 60° 角的三角形——設在 $\triangle ABC$ 中 $\angle A=60^\circ$，而對 $\angle A$ 之邊爲 a，則用下式可得出有理的三邊之數值：

$$b=m^2-n^2.\qquad c=(2m-n)n.$$

$$a=m^2-mn+n^2.$$

因而我們求出 5, 8, 7；8, 15, 13；9, 24, 21；11, 35, 31；等等．

設 $A=120°$，我們可將 b 値易以 $m(2n-m)$，同時 a，c 之式可不動。

中線——設 m, n, p 與 q 爲正整數，a, b, c 爲三角形之三邊，則下式可用來作三角形，使其 m_c 爲有理：

$$x=mp+(2m+n)q.$$

$$y=(m+n)p+nq.$$

$$z=np+2(m+n)q.$$

同樣可作一些公式使三角形有兩個或三個有理中線，高線，分角線，或面積，或角錐體而具有理體積等等.

讀者如欲對於這種問題加以研究，可參攷高等代數中關於不定方程式的章篇.

第十五章

作圖法

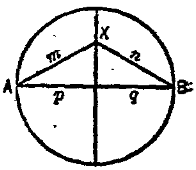
軌跡的科學論點——定義——所謂某線爲一點的軌跡，須滿足兩種條件，普通如下所述：

1. 該線上每一點必須滿足已知條件.

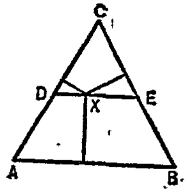
2. 在該線外無有一點能夠滿足已知條件.

第二個條件並不是迂闊而不必要的一句話，毫無一點實用的，而是定義中的必要的部份. 如果去掉它，我們不免有時將軌跡的一部份當作全部， 或有時我們所認爲是軌跡的地方， 而其實並不存在. 下列兩例題，可證明這兩點：

1. 如果我們表示 X 到兩定點 A, B 的距離爲 m 與 n,而 m, n 在 AB 上的射影爲 p 與 q,則在 AB 垂直平分線上之任一點滿足下式，$m^2:n^2=p:q$. 如果我們對於以外的點不加以考查，我們或認此垂直平分線爲 X 的軌跡，而滿足上邊的條件 ($m^2:n^2=p:q$)，我們就求不出來其他有興味的部份，即以 AB 爲直徑的圓.



2. 如 ABC 爲一等邊三角形，而 DE 爲連結其兩邊中點之直線，則 DE 上之任一點滿足以下條件：由 X 到三邊上所作之垂線和等於三角形之高線．如果我們對於 DE 以外之點不加以攷查，我們就許認爲 DE 爲一種軌跡，其實它不是軌跡，因爲在 $\triangle ABC$ 內所有的點都能滿足上邊的條件也．如我們再加上負距離則全面上任意一點均可滿足上邊的條件也．



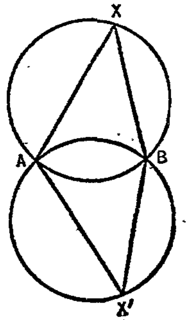
證明軌跡的又一種方法，就是求證這樣的條件：

1. 凡是滿足某種條件的任一點都在該線上．

2. 該線中沒有一點不能滿足某種條件的．

同樣第二條決不能去掉，不然不但該線包含所有滿足某種條件的點，而且還許包有另外的點．這樣我們不免以某線當作軌跡，其實僅有一部份才係眞軌跡．

例如設 A, B 爲兩個定點，能夠滿足這個條件，$\angle AXB=45^\circ$ 的任一 X 點必在 AXB 與 $AX'B$ 兩圓上．這便是錯誤，如認爲此軌跡是兩圓的全部．因在此兩圓中尙有許多點不能滿足該條件也，即在劣弧上所有的點．



所以——只要我們承認一線包含着無數的點，並且把定義當作滿足某種條件所有的那些點的全體．——每個軌跡的證明，必須包有兩個定理的證法．並且這兩個定理，成本定理與逆定理，或本定理與對定理的關係．一種

具體的例子，可把這一點弄清楚一些．所謂一線的垂直平分線爲與該線兩端等距離點之軌跡一語，隱含着四個定理：

I 本定理	II 逆定理
在該線上之任一點爲等距離．	凡是等距離之點都在該線上．
III 對定理	IV 逆對定理
在該線外之任一點爲不等距離．	凡不等距離之點都在該線外．

如果所有上邊的四個定理爲眞確，則該軌跡爲眞實的軌跡．反之亦然．但是我們業已由前章提過，如果這樣四個定理中，任何相鄰的兩個爲眞確，則所有四個定理都爲眞確．即證明軌跡時，我們只須證明 *I* 與 *II*,或 *I* 與 *III*,或*II* 與 *IV*,或 *III* 與 *IV*. 前兩種組合,已竟討論過，其餘兩個都不大常用．

我們很容易的看出來上邊的事實，是極普通的．假如我們取消後邊兩個組合，我們可以說每個軌跡有兩種證法，而値得注意的一點，就是對於不同的習題， 這兩種方法須挑選着用， 以便避難就易．當挑選的時候，我們不用注意它們的第一部份，因爲第一部份完全一致， 但是我們必須要看逆定理與對定理， 到底那一個容易證．

例如求證一角的分角線爲與兩邊等距離點的軌跡，我們必須證明與兩邊等距離之點，都在分角線上，或者證明凡不在分角線上之點與兩邊距離都不等，此處應用第一種方法，即求證逆定理較爲容

易。

另一方面說，如三角形之底爲一定線，其頂角等於已知角，當求證三角形頂點的軌跡爲圓周之一部的當中，則對定理較逆定理容易許多。

應用軌跡可使證法變簡——如果一種軌跡業已證明，則成功四個定理，這種事實對於證明定理有時非常有用。設如我們業已證得：“在一線中之垂直平面爲與該線兩端等距離點之軌跡”。現在我們打算證明這樣的定理，“不在一直線上的三點，而各與該線兩端等距離，便可固定該線的垂直平分面”。普通學生對於這個定理，定然要另外證明，並看不出它與剛才所提到的軌跡之關係。很顯然的應用上面軌跡的道理，這樣三點中的任一點必然都在垂直平分面上，並且過這三點僅可作一個平面，所以這個平面，即垂直平分面也。

幾個困難的軌跡——最普通用的軌跡，差不多在所有的教科書上，都可發現出來；其他有的很容易可以作出來，尤其關於能够滿足某種條件的某種圓心的軌跡，例如切一線於一定點，切一圓於一定點，切一圓而具定長的半徑等等。還有線的比例分法，由某點分射出去的一些線，而終於其他一線，因而發生許多軌跡。

有幾個困難的軌跡，對於求解困難習題，很有用，我們不可太忽略了它們。

設 A 與 B 爲兩個定點，而 x 與 y 爲 A, B 到第三點 X 的距離。

1. 設 x^2+y^2 爲一恆數，則 X 的軌跡爲一圓，它的圓心爲 AB 之

中點.（用中線定理證明）

2. 設 x^2-y^2 爲一恆數，則X的軌跡爲一直線，垂直 AB 而過 AB 於C,使 $\overline{AC}^2-\overline{CB}^2=x^2-y^2$.

3. 設$\frac{x}{y}$爲一恆數，則X的軌跡爲一圓，其直徑之兩端，乃係按 $x:y$ 分 AB 所得之內外兩分點.

設 m 與 n 爲由X到 $\angle ABC$ 兩邊上之垂線.

4. 設 $m+n$ 爲一恆數，則X的軌跡爲一長方形的周邊.

設 $m-n$ 爲一恆數，其軌跡爲原長方形各邊的延長線.

5. 設$\frac{m}{n}$爲一恆數，則X的軌跡爲過B的直線.

軌跡的敎育論點——什麽時候敎學軌跡——前面已竟說了好多關於軌跡的重要，及怎樣在學校裏對於這個題目的發揮尙嫌不足. 在高等算學中十分表現出來軌跡的重要，以至有些著作家很受了這個影響，他們似乎把軌跡當作幾何進程中的最重要的題目，並且主張學這種題目時，開始就用嚴密的方式.

這個題目固屬重要，但是不應該因此而把其他的題目太不注意了，尤其不應該當學生的心思尙未達到這種緻密的程度，就盡量的提出來作塡塞式的講授.

在初學第一篇的時候，就把這個題目確切的表現出來，實在不甚妥當，但是等到講過一線的垂直平分線，或角的分角線，"軌跡"一語也只可用一種暫時的講法. 可以這樣簡單的敘述，軌跡只是一種"地方"即係一種線，某種點非在其上不可，最好等到第二篇之末，再來確切的硏究. 自然按科學的說法有幾種極簡單的問題，有

如已知三邊作一三角形的作圖，是根據着軌跡，但是這樣問題縱然在開始時即可討論的很圓滿，也並不用軌跡．

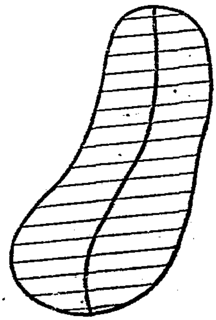
軌跡的教學法——對於學生只與他們講些形式的定義，自然不如舉出好些例題來作解釋，可以給他們一種較清楚的概念．從力學上得來一些簡易例題，可藉以指示在某種條件下，一種點必須移動於某線或一種面上，因而我們可以問：

"當車輪在一直路上轉動時，它的中心一定在什麽地方？"

"如果軌跡爲一種地方，或是線，某一點必須居其上，則前問題中到底車輪中心的軌跡是什麽？"

"什麽是一種伸張線一端的軌跡，如果其他一端爲固定，並且兩端都在棹面上？如果只有動的一端在棹上？"

同樣，我們可求出一本書來開張時其一角的軌跡，移動的電車上一點的軌跡，火車頭在轉車盤上旋轉時，其任何一點的軌跡，等等．



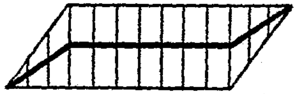
另一類的習題，可以用來使學生對於實在的軌跡得一種較清楚的概念（即描跡法是也）．使學生——完全經驗的——實地作出好些滿足一定條件的點，並連結起來這些點，便可求出軌跡來．因而他可以把任何閉口曲線形內一組平行線中點的軌跡實地找出來．

實際上所有在初等幾何裏的軌跡，都可以應用這種方法．

另外幾個例題能够適用描跡法如下所述：

所有切於已知圓的定長切線之端的軌跡.

從一定點 A 所作垂直於由另一定點 B 所作的一些線上的垂足之軌跡.



切於已知圓上以定長作半徑的圓心之軌跡.

在已知多邊形內例如平行四邊形所有平行於已知線的線段的中點之軌跡. 此地之線段乃以多邊形周邊為界.

在一二寸為邊的正方形內，與其周邊距離 $\frac{1}{2}$ 寸之點的軌跡，等等.

我們可以用這樣的方法來發現軌跡之所在. 自然只靠作圖是不够用，學生必須測定所求軌跡是何種線，並須去證明他的結果. 但描跡很可引他到結果的路上，如果幾個點不足使學生發現軌跡的性質，即可讓他增加點數，這樣，如果他作圖正確，他總可以看出所求的軌跡是那一種線.

除去普通教科書中最常見而學生也最希望去記憶的六七個軌跡命題外，還有一些其他的命題可以提出來，為的使學生對於這種工作多得些經驗.

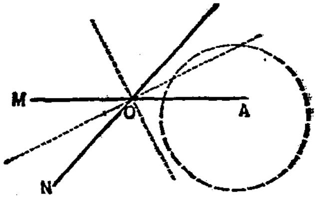
軌跡的應用——軌跡可以用來尋得滿足兩種條件的點，（在立體幾何中有時三個條件）並且這種方法的最大優點，乃是能够使我們分別的只注意其中的一個條件，而可不用顧到其他的一個.

例如求一點 X 與已知兩線 M，N 為等距離，並且距離一定點 A

爲一定長 d,我們必須當作下列兩個條件:

1. X 與 M, N 爲等距離點.

2. X 與 A 的距離等於 d.



每個條件可得一軌跡，最好用圖示法把這些軌跡分別開，並且與圖中其他線亦當加以分別．於是我們畫第一種軌跡的線用一種顏色，對於組成第二種軌跡的線另用一種顏色．如果不能用色筆時，則可應用長虛線與短虛線．這樣兩種顏色可以免去兩種軌跡的紛雜．在許多情形下，作圖中的"討論"應該有的，即我們應當測定出來在什麼情形沒有解答，在什麼情形是一種或多種的解答，等等．

把已知的部份放在一起並不用分析

概論——最簡單的作圖法，就是只須把已知部份放置一起即可成功，並不用事前的計劃．求作已知其兩邊及一夾角之三角形，便是這樣的簡單，以至並不需要特別的分析．我們僅僅作出一件已知部份，再把第二部分放置在所需要的地方，餘類推．這一類的作圖決不發生困難，只要注意一點：這種作圖的困難平常都是因爲不知道先作那一部份．

已知弦與一股作一直角三角形，先作直角或一股總比先作弦容易．已知四邊與一角作一四邊形是一種很簡單的事體，如果我們先作其已知角，或該角的鄰邊，但如由其他邊作起，則殊感困難．如

已知兩邊及其一對角求作一三角形，我們應當先作其已知角或其鄰邊，但不要先作對邊，等等.

三角形的基本作圖法——在前段所討論的方法之最好例題，爲三角形的基本作圖法，而這些用符號表示，則有（邊.邊.邊）（邊.角.邊）（角.邊.角）（邊.角.角）（邊.邊.角），它們特別的重要，因爲許許多多的作圖題，最後是靠着三角形的作圖法，也就是靠着這六個作圖題之一.

這是極方便的用一種符號應用到所有三角形的作圖法. 關於這一點，以前也提到過，指明來說，代表三角形的部份常如下所示:

邊	代以 a, b, c
相對角頂	代以 A, B, C
相當角	代以 α, β, γ
相當高	代以 h_a, h_b, h_c
相當的分角線	代以 t_a, t_b, t_c
外接圓的半徑	代以 R
內接圓的半徑	代以 r
三角形的面積	代以 F
三角形周邊之半	代以 s

這是很値得注意的一件事，凡是三角形不相關的三部份爲已知，則該三角形可以作出. 因此，如已知部份爲三邊，或是兩邊與其夾角，或是三個中線，則三角形可以作出來，因這些已知部份不相關也. 但僅知三角不相三角形無從作出，因三角爲相關，其實僅代表兩

個獨立的部份也．所以包含三個已知角的三角形，其數無限．其他還有幾個例子，關於相關的部份如下：b, h_a, C；a, A, R；$A, s-a, r$.

同樣一個四邊形須已知5個，n邊的多邊形須知道 $2n-3$ 個不相關的部份．我們還有一點要知道的，一個作圖題並不叫作不定(indeterminate)，如果僅僅因爲它有好幾個解答．所謂不定的作圖題須同時有無限的解答，而僅有定數解答的作圖題，仍謂之有定的作圖題也．

一種作圖題毫無解答，則叫作不可能問題．所有的問題，如果已知部份爲相關，則爲不定的，但其已知的部份，如與已知關係矛盾，則這些問題又變成了不可能問題．例如我們永遠作不出一個三角形，其三角之和不爲 $180°$.

簡單問題的幾何分析

概論——所有的作圖題，如果不能應用把已知部份放置一塊的直接方法，同時又不能利用軌跡，那末就惟有用分析法了．有許多不同的作圖題的分析的方式，但大多數是太抽象，對於初學者未免費力．本書作者極力的把這種分析描寫的具體與淺鮮，但不免因此失掉了它的普遍性．

1. 草創一圖使與所求的圖大概相類，但自然不必同長同寬同度才算合格．

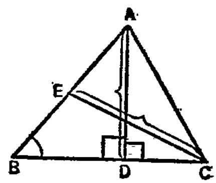
2. 測定(a)所有的線段，(b)所有的角，這些線或角都是直接題設或由已知條件很容易推出來的，然後再標以記號．

3. 攷察所有草圖中的三角形，以便發現能够作出的一個.

4. 把這個三角形當作根基，隨後依次測定其他的部份.

5. 如果找不到可作根基的三角形時，我們可作輔助線以湊成這樣的一個三角形.

一個具體的示範：——打算清楚的了解這些法則的意義與底蘊，我們最好拿出一個具體的例題來. 卽：求作一三角形已知 β, h_a, 與 m_c.



1. 草擬一類似所求的圖，我們可任意作一三角形 ABC, AD 爲從 A 所作高線，CE 爲由 C 所作中線.

2. 設 $\triangle ABC$ 卽所求的三角形我們就應該知道：

$a.$ $AD(=h_a)$，$CE(=m_c)$，

$b.$ $\angle B(=\beta)$，$\angle ADC(=90^\circ)$，$\angle ADB(=90^\circ)$.

3. 一經攷察各個三角形我們知道 $\triangle ADB$ 中有一邊與兩個角爲已知，於是可以作出 $\triangle ADB$ 來.

4. 等到作出 $\triangle ADB$ 後，我們卽可測定 E, AB 的中點，還有 C，因 CE 之長爲已知也.

分析中各部份的討論

1. 草擬一個類似的圖形——很顯然的，普通學生當遇到複雜的作圖，並不會有一種極清晰的概念，對於某部份爲已知，某部份爲所求，還有它們互相的關係，非等到他看到一個草擬的圖形，不會

瞭然的．每個建築家或工程師，當解決實際問題時，最初也是先作一種粗糙的稿樣，以便看出各種的關係，一直等到這種問題得了解決，他才作出一種正確可用的圖形來．同樣學習幾何的學生，也應該先作出一個稿樣，使他明瞭問題的眞實性質，自然這樣的稿樣，不會與所求的長寬相等，因爲如果這樣，又何必另想法再作呢？

2. 測定已知部份——作這一部工作，就是使學生有系統的攷察對於圖中所有的線與角，並使他測定某些部份爲已知．這樣的作，他或者測定到對於作圖不必要的部份．但是最妥當的辦法，總是使學生對於這種工作系統化，因爲這樣可以增加尋得解答的機會．

測定不是直接題設的部份，却係一種很重要的事體．但是這個題目比較繁雜，另外還要特別的討論它．

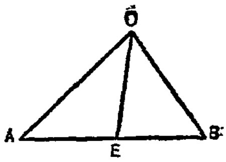
3. 發現能够作成的三角形——把三角形看作我們作圖的根基，自然是人爲的限制．因爲須要開始作的，也可以是一點，或一正方形，或一圓，或其他圖形．但是在大多數的情形，是用三角形當作作圖的中心．一種有系統的測量圖中所有的三角形，總能使學生發現出來一個合宜的三角形，當作根基．

4. 把三角形當作作圖的根基 —— 等到把起始的三角形作出以後，再求作其餘部份，總是一件簡單的事體．不過有幾點指示對於複雜的作圖很有幫助．

a. 安排正式所作的圖，應盡量的使之與分析時的圖形佔相似的位置，這樣便可免去許多的困難．

b. 對於所作圖形用的字母，要與分析時的草圖一致．因爲學

生很稀少的把分析整個的寫給教師看，尚不至因爲這樣寫法發生誤會．如果你希望你的學生把分析寫出來，則可用 A', B', C' 等等代替 A, B, C 等等．

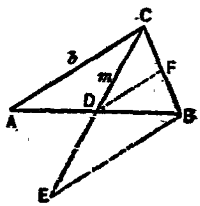


c. 有許多的場合，學生對於完成作圖的方法很有選擇的機會．在這樣的情形，應該選一種最容易證明的作圖法．

有例可證，假想學生在求作一個三角形而已知部份爲 m_a, m_b, m_c. 必須先作出 $\triangle OAB$ 使 $OA=\frac{2}{3}m_a$, $OB=\frac{2}{3}m_b$, $OE=\frac{1}{3}m_c$. 他完成這個作圖時，當延長 EO 使等於其長之2倍，或延長 AO 與 BO 使等於其半，然後再連結到 A 與 B. 第一種方法較比第二種方法容易證明，故可選擇第一種．

5. 作輔助線——我們如果找不到任何能够作出來的三角形，我們必須作輔助線以湊成一個這樣的三角形．

關於這種作輔助線的手續較爲複雜，留作另一節來討論．此地僅將其較簡單的示範寫出幾個來．



求作一三角形而已知者爲 a, b 與 m_c. 設 ABC 即所求的圖形，我們應該知道 $CB(=a)$, $CA(=b)$, 與 $CD(=m_c)$. 此地並沒有可以作出來的三角形．但如我們延長 CD 至 E 使等於其本身長，並連 EB, 我們便可作出 $\triangle CEB$, 因已知其三邊也．

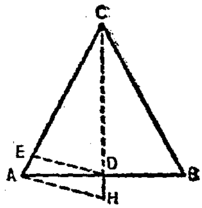
或者我們平分 CB, 並連其中點 F 到 D, 則我們可作 $\triangle CDF$, 因

$CD=m_c$, $CF=\frac{a}{2}$, $DF=\frac{b}{2}$.

或者我們可延長 AC 等於其本身長至 G,並作 GB,於是$\triangle BCG$ 可以作出，因$CG=b$, $CB=a$, $BG=2m_c$.

如果兩個線段(或角)之和或差爲已知，平常在分析中必須作出其和或差．設 $a+b$ 爲已知，則延長 a 至等於 b 的長度，或延長 b 至等於 a 的長度．設 $a\sim b$ 爲已知，則可在 a 上取一段等於 b, 或在 b 上取一段等於 a.

例如求作一等邊三角形已知其邊與其高之差，我們可在 CA 上取 $CE=CD$, 並作 DE. 這樣$\triangle AED$ 可以作出來，因爲我們已知一邊 (EA) 與其各角也．



或者我們在 CD 上取 $CH=CA$, 並作 AH, 則$\triangle ADH$可以作出來．

關於應用這樣方法的例題或習題還很多，學者可參攷 Schultze Sevenoak's Geometry.

困難作圖題的幾何分析

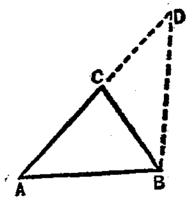
前節所說的法則，很可解答在中等學校裏所發生的習題的絕大部份，也可以說應有盡有了．不過教師還應當對於這個題目更有深切的研究，所以此地再作進一步的討論．現在所要提出來的就是上面提過的分析中之第二點，與第五點的擴大，即:

a. 在草圖中測定線或角的方法．

b. 作輔助線以完成根基的三角形的方法．

測定一圖中的已知部份的方法——在一種分析中，發現圖中所有間接推知的部份，學生必須對於幾何裏學過的命題很熟習．他至少須曉得平行四邊形的對角線互相平分，三角形三內角之和爲180°，內接四邊形兩對角互爲補角，菱形的對角線互相垂直，等等．例如在三角形中 $\alpha+\beta$ 爲已知，則 γ 可以求出，如果在一二等邊三角形中其一內角或外角爲已知，則所有的內外角都可推求出來．

除去這些很顯著的幾何事實外，還有在某種圖形裏存在的一些關係，對於分析上也很關重要．其最關重要的幾個如下：



1. 設在△ABC中延長 AC 至 D，使 $CD=CB$，

則在△ABD 中：

$AB=c$，　$AD=a+b$，

$\angle A=\alpha$，　$\angle D\frac{\gamma}{2}$．

$\angle ABD=90^\circ+\frac{\beta-\alpha}{2}$．

從 B 所作之高線 $=h_b$．

所以，在 c，$a+b$，α，γ，$\beta-\alpha$ 與 h_b 中知道任何三個不相關的部份，△ABD就可作出來．並且其餘的三部份也可以測定．

在包含 $a+b$ 的分析中，最好延長 BC 等於 CA 之長，這樣便可想法作一三角形，使其中含有 $a+b$，c，β，$90^\circ+\frac{\alpha-\beta}{2}$，$\frac{\gamma}{2}$ 與 h_a．

習題

求作一△ABC，已知：

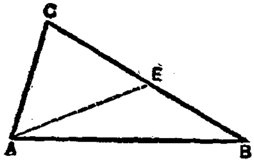
1. $a+b$，α，γ．
2. $a+b$，c，α．
3. $a+b$，c，γ．
4. $a+b$，c，h_b．

5. $a+b$, c, $\alpha-\beta$.　　8. $a+b$, γ, $\alpha-\beta$.

6. $a+b$, β, γ.　　9. $a+b$, γ, h_b.

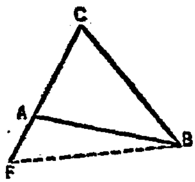
7. $a+b$, α, h_b.　　10. h_b, $\alpha-\beta$, γ.

11. $a+b$, $\alpha-\beta$, h_a.



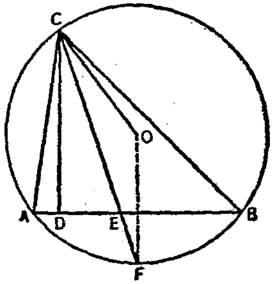
2. 設在 $\triangle ABC$ 中我們在 CB 上取 $CE=CA$, 則在 $\triangle ABE$ 中, $AB=C$, $BE=a-b$. $\angle B=\beta$, $\angle BAE=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$. $\angle AEB=90^\circ+\dfrac{\gamma}{2}$. 由 A所作之高$=h_a$.

如在 c, $a-b$, β, $\alpha-\beta$, γ, 與h_a部份中已知任何的三個不相關的部份, 則 $\triangle AEB$ 與其餘部份都可作出來.



如延長 CA 至 F 使 $CF=CB$, 則 $\triangle ABF$ 可以測定, 只要下列部份中已知其任何三個不相關的部份: c, $a-b$, α, $\alpha-\beta$, γ, 與 h_b.

關於這個圖的習題可以求得, 只以負號代替前習題中的正號便得.



3. 設在$\triangle ABC$中高線CD或h_c, 分角線CE或t_c與外接圓的半經CO或R都已作出, 則$\angle DCE=\angle ECO=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$. $\triangle CDE$可以作出, 只要曉得 h_c 與 t_c, 或h_c與$\alpha-\beta$, 或t_c與$\alpha-\beta$.

我們值得記着, AB 的垂直平分線過

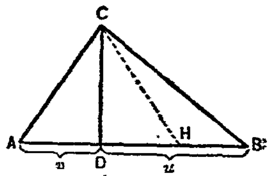
O 點而平分 $\widehat{AB}$ 於F，並且延長 CE 也過 F 點。

習題

求作 $\triangle ABC$，設已知：

12. h_c, $\alpha-\beta$, a.
13. h_c, $\alpha-\beta$, R.
14. h_c, $\alpha-\beta$, m_c.
15. t_c, $\alpha-\beta$, b.
16. t_c, $\alpha-\beta$, γ.
17. t_c, $\alpha-\beta$, R.
18. t_c, $\alpha-\beta$, m_c.
19. t_c, h_c, a.
20. t_c, h_c, α.
21. h_c, t_c, R.
22. h_c, t_c, m_c.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，設



CD 或 h_c 為 c 上的高線，
BD 或 u 為 a 在 c 上的射影。
AD 或 v 為 b 在 c 上的射影。

並使 $DH=AD$.

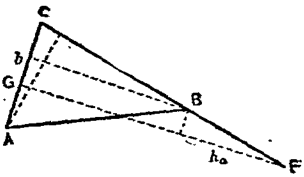
則在 $\triangle BCH$ 內，$BC=a$, $HB=u-v$, $CH=b$, $\angle B=\beta$, $\angle CHB=180^\circ-\alpha$, $\angle HCB=\alpha-\beta$, 並且由 C 所作之高線$=h_c$; 所以如果 a, b, $u-v$, h_c, α, β, $\alpha-\beta$, 中有任何不相關的三個為已知，則$\triangle CAB$可以作出來。

習題

求作 $\triangle ABC$，如已知：

23. $\alpha-\beta$, a, b.
24. $\alpha-\beta$, $u-v$, a.
25. $\alpha-\beta$, $u-v$, h_c.
26. α, β, $u-v$.

5. 設在 $\triangle ABC$，延長 CB 至 F，使 $BF=b$，並且作 $FG\perp CA$，則在 $\triangle CFG$ 中，$CF=a+b$，$FG=h_a+h_b$，$\angle C=\gamma$，$\angle CGF=90°$。同樣，可求一個含有 $a-b$，h_b-h_c 與 $\angle C$ 的直角三角形。



習題

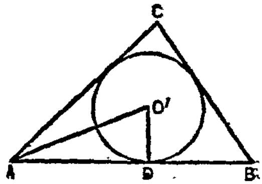
求作 $\triangle ABC$，已知：

27. h_a+h_b，b，γ.　　29. h_a-h_b，a，γ.

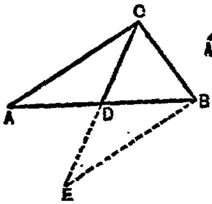
28. h_a+h_b，a，b.　　30. h_a-h_b，a，b.

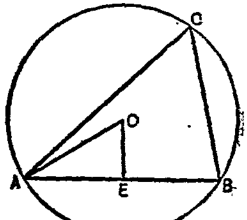
另外還有幾個例題，現在簡單述之：

6. 設 O' 爲 $\triangle ABC$ 的內心，D 爲切點，則 $O'D=r$，$AD=s-a$，$\angle O'AD=\frac{\alpha}{2}$.



7. 設 O 爲 $\triangle ABC$ 的外心，$OE\perp AB$，則 $AE=\frac{c}{2}$.
$\angle AOE=\gamma$，並且 $OA=R$.





8. 設延長 $\triangle ABC$ 的中線 CD 至 E 等於其自身之長，則在 $\triangle CEB$ 中 $CB=a$，$BE=b$，$CE=2m_c$，$\angle CBE=180°-\gamma$，由 E，C 所作高線等於 h_a 與 h_b.

習題

求作 $\triangle ABC$, 已知:

31. m_c, a, γ.

32. $s-a$, α, β.

33. $b+c$, a, r.

34. R, α, m_a.

35. m_c, a, h_b.

作輔助線的方法——有的作圖題裏找不到能夠作出來的三角形，通常都是因爲已知的部份沒有連結在一塊．所以我們必須把它們移置在一起，以便作成一個根基似的三角形．這樣，我們就須研究移置的方法了．這種移置方法中之最有用的有三個．這些方法業已在前面關於不等量的章篇裏提過，現在述之如下：

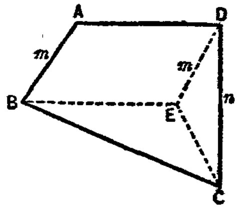
I. 平行移動．

II. 圍繞一點的旋轉．

III. 圍繞一線的旋轉．

這些方法的應用，最好用具體的例子來說明．

I 平行移動



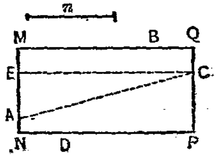
1. 求作一四邊形 $ABCD$, 已知其四角 $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ 與兩個對邊 $(AB=m,\ CD=n)$.

分析——設如 $ABCD$ 爲所求的四邊形，我們業已知道它的四個角與 AB, CD 二邊．此地沒有能作出的三角形，我們遂平行移動 AB 到 DE 的位置，即我們使 DE 等於並且平行於 AB. 因 $\angle ADE=180^\circ-\alpha$, 我們曉得 $\triangle DEC$ 中的兩邊與一夾角，即 ED

$=m$, $DC=n$, 及$\angle EDC=\delta-(180^\circ-\alpha)=\alpha+\delta-180^\circ$. 於是$\triangle EDC$當能作出.

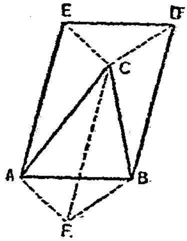
2. 求作一長方形，使每邊經過已知的四個定點 A,B,C,D. 並且有一邊須等於已知長 n.

分析——設 $MNPQ$ 爲所求的長方形，我們業已知道 $MQ=n$. 與所有連結兩已知點的線. 此地除去連結A, B,C,D 能夠作成三角形外，再沒有能夠作出來的三角形了. 但平行移動 MQ 到 EC 的位置，則$EC(=n)$, $\angle AEC(=90^\circ)$, 而 AC 爲已知，所以 $\triangle ACE$ 便能夠作出來.



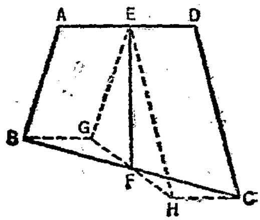
3. 在$\triangle ABC$的底邊 AB 上，求作一平行四邊形$ABDE$, 使 CE 與 CD 等於兩條已知線.

分析——設 $ABDE$ 爲所求的平行四邊形，我們可作出 $\triangle ECD$, 因知其三邊也. 但是我們還須把它放置於適當的位置上，所以須平行移動 $\triangle ECD$ 到 $\triangle ABF$ 的位置上，此地當然可以作出來，再使 AE 與 BD 平行 FC, 我們又把它移到所需要的位置上.



4. 求作一四邊形已知其四邊，與兩對邊中點的連線.

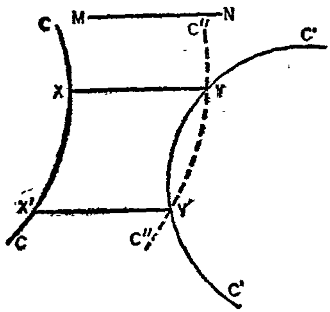
分析——設$ABCD$爲所求的四邊形，我們業已知道 AB, BF, FC, CD, DE, EA, 與 EF. 這些部份並不能作成一三角形，



我們作 EG 使等於並且平行於 AB，同時作 EH 使等於且平行於 DC。因為 $\triangle BGF$ 與 $\triangle CHF$ 相等，GFH 為一直線而 $GF=FH$，所以 $\triangle GEH$ 便可作出，因已知其兩邊及第三邊的中線故也。

5. 求作一線使平行並且相等於一已知線 MN，同時使其兩端分別在曲線 C 與曲線 C' 上。

平行移動曲線 C 到 C'' 的位置使兩曲線的距離為 MN，則由 C'' 中一點任作一線平行 MN 終止於 C，必等於 MN。所以從 C' 與 C'' 的交點可作一平行 MN 之線，即所求之線 XY。



此地曲線可代以直線，三角形的或其他圖形周邊，圓周等等。這樣說來，這個例題概括着許多具體的例題。

習題

1. 求作一梯形，已知其四邊。

2. 求作一梯形，已知其兩對角線及平行的兩邊。

3. 求作一四邊形，已知其四邊與其兩對邊延長線作成的角。

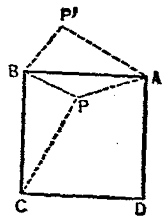
4. 求作一四邊形，已知其兩對邊，對角線，與對角線作成的角。

5. 求作一四邊形 $ABCD$，已知其 A，B 二角，對角線 AC 與 BD，與對角線作成的角。

II 圍繞一點的旋轉

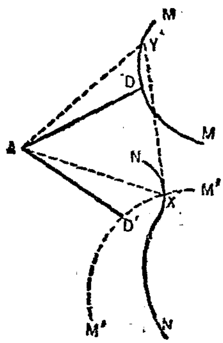
1. 求作一正方形 $ABCD$，已知由正方形內一點 P 到 A,B,C 的距離.

分析——設 $ABCD$ 爲所求的正方形，我們應該已知 PA, PB, 與 PC，及 A, B, C 與 D 四角. 圍繞 B 旋轉 $\triangle BPC$ 至 $90°$ 的角度，則$\angle P'BP=90°$, $BP'=BP$. 因而可以作出$\triangle BP'P$，並且因 $P'A=PC$ 故 $\triangle P'PA$ 也可作出來，等等.



2. 求作一二等邊三角形 ABC，使頂角 A 等於已知角 α，A 的位置爲固定，並且 B 與 C 各分在兩個已知曲線 M 與 N 上.

解答——繞 A 旋轉 M 過 α 的角度. 用這樣旋轉法使由 A 至 M 任一線 AD 到 AD' 的位置，而兩線作成 α 角. 或者這樣說，任何由 A 到 M 與 M' 兩線如其夾角爲 α 則必相等. 設 M' 與 N 的交點爲 X，再作 AX 與 AY 使$\angle XAY=\alpha$，則 $\triangle AXY$ 爲所求的三角形.



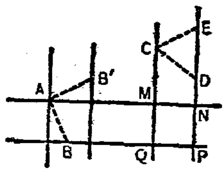
下面作圖題乃合平行移動與旋轉而並用.

3. 求作一正方形 $MNPQ$，使其兩對邊經過兩個已知點 A 與 B，同時其他兩對邊經過兩個已知點 C 與 D.

分析——因爲找不到可以作出來的三角形，只得旋轉 AB, AN,

與 BP 圍繞着 A 轉過 $90°$ 的角.

設 B' 爲 B 的新位置，我們的問題應該是求作四個平行線經過 $A, B, C,$ 與 D,使第一對線的距離等於第二對線的距離．乃將 AB' 平行移動至 CE 的位置，便可成功這個工作．這樣兩對平行線即完全重合，所以我們可作出△CED.



習題

1. 求作一有法六邊形 $ABCDEF$,已知由形內一點到 $A, B,$ 與 C 的距離.

2. 求正方形 $ABCD$ 的面積，如果由形內一點到 A, B 與 C 的距離依次等於 2, 3 與 4.（旋轉兩個三角形）

3. 求作一二等邊直角三角形，使直角頂固定於一處，其他兩角頂則分居於圓周上.

4. 求作一等邊三角形，使其角頂分居於三個平行線上.

5. 求作一等邊三角形，使其角頂分居於三個同心圓周上.

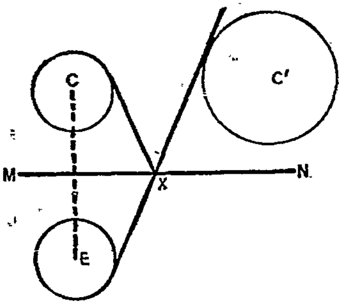
6. 已知四邊形 $ABCD$ 與二等邊三角形 MNP,同時 $MP=NP$. 求作△EFG∼△PMN,使 E 重合於 A, F 居於 BC 上，G 居於 CD 上.

III　圍繞一線的旋轉（繞軸轉動）

1. 設兩圓 C 與 C' 在 MN 線的同側，在 MN 上求作一點 X, 使由 X 往 C 與 C' 所作的兩切線（內切）與 MN 作成相等的角.

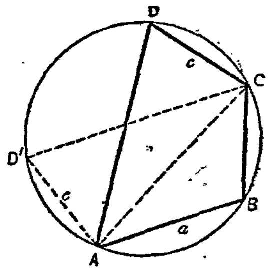
解——以 MN 爲軸旋轉該圓使 C 到 E 的位置．作 C', E 的內

公切線．這個切線交 MN 於 X.



這種繞一線旋轉的特別場合，乃是旋轉圖形以後，使線的兩端恰交換位置，卽線之一端 A 恰落到原來 B 的位置，而 B 則到 A 的位置上．（同樣對於角）

2. 在一已知圓內求作一內接四邊形，已知其兩對邊 AB 與 CD（或 a 與 c）與其他兩邊的和（$AD+BC$ 或 s）．設 $ABCD$ 爲所求的四邊形．因爲沒有已知的兩邊在一塊，我們旋轉 $\triangle DCA$ 使 A 與 C 交換位置，並且 D 到 D' 的位置上．則 $\triangle D'AB$ 可以容易的作出來，隨後 $\triangle D'BC$ 也可求得，因已知其底邊 $D'B$，對角，並且與其他兩邊的和．



這樣既可作出 $ABCD'$，我們再求 $ABCD$ 當然是很容易的一件事．

習題

1. 求作四邊形 $ABCD$，設其四邊爲已知，並且 $\angle ADB=\angle CDB$.

2. 在 MN 線的同側設已知 P, Q 兩點，在 MN 上求一點 X，使 $PX+QX$ 爲最小．

3. 求作一正方形．使相對兩角頂分居於兩個已知圓周上，並且其他兩角頂乃在一直線上．

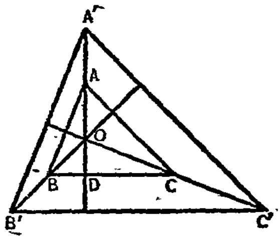
4. 在一已知圓內求作一內接四邊形，使一邊二倍於其對邊，並且其他兩邊等於兩已知線．

特別計劃

相似法——如果所求的圖，僅僅包含着一個已知線，我們最初可不管這個線，却作出一個圖形與所求的相似，然後再改變它的大小，總使恰恰把那已知線適用上．

1. 求作一三角形已知其三角與 h_a 的上段．

作圖——作任何一三角形 ABC，使所含的角等於已知角，並作其高線．延長 OA 至 A'，使 OA' 等於已知的上段，於是用了幾個相似△，作成△$A'B'C'$.

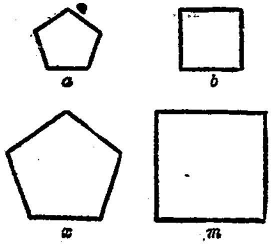


這個方法常常能使我們解決一個作圖題，如果我們能夠解出其相對的作圖．因此如果我們能夠作正方形的外接半圓，我們就能夠作內接正方形於半圓內．如果我們能夠把等邊三角形改作一正方形，我們便能把正方形改作爲等邊三角形，等等．

2. 求改作正方形爲一有法五邊形．

作圖——作任何一個有法五邊形並改作一正方形．設此五邊形

之一邊爲 a,正方形之一邊爲 b,已知正方形之一邊爲 m，所求之一邊爲 x.



很顯然的

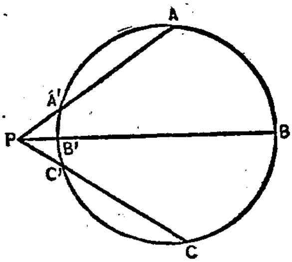
$b^2:m^2=a^2:x^2$,

或 $b:m=a:x$

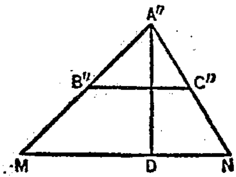
是卽 x 爲 $b,m,$與 a 的第四比奌.

3. 求作一三角形，已知其三高線(h_a, h_b, h_c).

解——因 $ah_a=bh_b=ch_c$, 我們因而很容易的找出三線與 a, b, c 成比例. 由任一點 P 作三割線 PA, PB, PC 使等於 h_a, h_b, h_c,則這些割線的外部 PA', PB', PC' 與 a, b, c 成比例.



所以三邊各等於 PA', PB', PC' 的三角形 $A''B''C''$ 與所求的△相似. 如延長由 A'' 所作的高線至 D, 使 $A''D=h_a$,並作 MN 平行 $B''C''$. 則 $\triangle MNA''$ 卽所求的三角形.



習題

求作一三角形，已知:

1. α, β, m_a.

2. α, β, $b-h_a$.

3. α, β, m_b-h_b

4. 求作一三角形已知其各角與內心到外心的距離.

5. 把正方形改作一等邊三角形.

6. 把一正方形改作一三角形與已知三角形相似.

7. 在一已知四邊形$ABCD$中，作一內接菱形，使其邊與$ABCD$的對角線平行.

8. 作半圓的內接正方形.

9. 在一已知圓內作一內接長方形與已知長方形相似.

10. 在一已知三角形內，作一內接平行四邊形與已知平行四邊形相似.

代數的分析

有許多的作圖題可以用代數的分析求解答. 但是這種方式在初等工作中不如純幾何的方法有興味，因為它不大用創造力，並且這樣的作圖常常不大美觀與清楚. 不過有時教師不得不在一個短時間內解答一個問題時，這一種方法未嘗不是一種好的工具.

在代數的分析中求解答時常常引用一個或數個未知量——線段或角度. 而這些未知量與已知量却常常可以用方程式關連起來，該式的解答就可把未知量用已知量的代數式表示出來. 把這個代數式作出圖形，即得所求的結果.

為的應用這個方法，學生應當熟習對於下列幾個基本代數式的作圖:

$\frac{ab}{c}$, $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{ab}$, $a\sqrt{7}$, $\sqrt{a^2-b^2}$, 等等，此地a, b, c

均爲已知線段.

還有好些複雜的代數式可以寫成基本的形式，如

$$\frac{abc}{de}=\frac{a\cdot\frac{bc}{d}}{e}.\qquad \frac{ab+cd}{e}=\frac{ab}{e}+\frac{cd}{e}.$$

$$\frac{a^2-b^2}{c}=\frac{(a+b)\ (c-b)}{c}.\ \sqrt{a^2-bc}=\sqrt{a^2-(\sqrt{bc})^2}.$$

$$a\sqrt[4]{3}=\sqrt{a.\sqrt{a(3a)}}.\ \sqrt[4]{a^4+b^4}=\sqrt{a\sqrt{a^2+\left(\frac{b^2}{a}\right)^2}}\ \ldots\ldots$$

這種方法的普通性質可以舉出兩個例子來說明，如果讀者願意再往深處研究，可參攷 Schultze and Sevenoak's Geometry.

1. 求分一線 AB 成內外比. (extreme and mean ratio)

設 $AB=a$，其所分之大份爲 x.

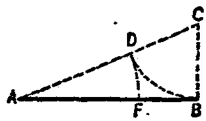
則　$a:x=x:a-x$　　$x^2+ax=a^2$

$$x^2+ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$x+\frac{a}{2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}\qquad \therefore x=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2}$$

依此式作圖如下:

作 $CB\perp AB$ 並使等於 $\frac{a}{2}$

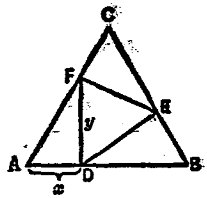


則　$AC=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$

在 CA 上取 $CD=CB$(或 $\frac{a}{2}$)

則 $AD=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2}$ 或 x. 故在 AB 上取 $AF=AD$ 即得.

2. 在一已知等邊三角形內求內接另一等邊三角形，使其面積等於已知三角形面積之半.



設ABC爲已知三角形，如在三邊上取 $AD=BE=CF$，則$\triangle DEF$ 仍爲一等邊三角形.現在要求出 AD 之長，設 $AB=a$，$AD=x$，$FD=y$. 於是其面積的關係爲

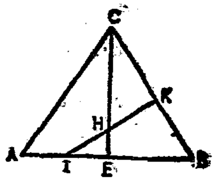
$$a^2:y^2=2:1 \qquad 或 y^2=\frac{a^2}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

因爲y 在$\triangle ADF$內所對的角爲 60°，我們又得

$$y^2=x^2+(a-x)^2-x(a-x) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\therefore \quad \frac{a^2}{2}=3x^2-3ax+a^2$$

$$\therefore \quad x=\frac{a}{2}\pm\frac{a}{6}\sqrt{3}$$



依此式作圖，可作高線 CE，在 CE 上取 $EH=\frac{a}{6}$，過H 作 $IK\perp CB$，則 $AI=x$.

第十六章

作圖不能——有法多邊形

不可能的作圖

普通原則——並不是每個可以提出來的作圖題，都能夠用直尺與圓規作出的，而決定某種作圖題是否能夠用這種簡單器具解答出來，倒是很有興味的一個問題．在某種場合答覆這種問題是極端的困難，同時有的應用幾個普通定理使它變為較簡單的問題．並且只用純幾何的研究，尚不能得着圓滿解決；我們必須要借重代數方式的分析．

由這樣分析得來的一個代數的結果式是否可以作出圖來，我們可以由下面的命題來決定：

所有的有理式，與所有僅含平方根的式子（或是可以變成這樣式子的式子），都可作出圖來，其餘均屬不可能．

因此，如 $a\sqrt[4]{2}=\sqrt{a(a\sqrt{2})}$ 可以作出圖來

但 $\sqrt[3]{abc}$ 則不可．

因為未知量常常是一個方程式的根，所以最好我們測定出來什

麼樣的方程式，其根能作圖．這個問題也就得到解決，我們可以這樣說：

所有一次或二次方程式的根都能夠作圖，反之所有高次的不能約方程式 (irreducible equation of higher degree) 除去一種著名的例外外概不能作圖．

這個例外包含着某種2^n次的方程式，是能夠作圖的，俟下段再來討論．

因此三次或七次的不能約方程式的根便無法作圖．這些個定理的應用由下段便可看出來．

三個著名的問題——不能只用直尺與圓規作出來的三個作圖題，由來著名於算學界，玆提出如下：

1. 立方的二倍．(所謂戴廉問題 Delian problem.)

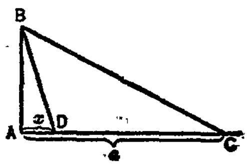
2. 任意角的三等分法．

3. 化圓爲方．（即求作一正方形令等於一圓亦即求π.）

I. 戴廉問題須引用下面的方程式：

$$x^3-2=0.$$

這個方程式爲不能約，又不是2^n次，所以它的根不能夠作圖，即戴廉問題不能只用直尺及圓規解答的．



II. 關於分任意角爲三等份的問題，可以討論如下：

設B爲求分的任意角，$\angle ABD$或α爲$\angle B$的$\frac{1}{3}$，$AB=1$，$AC\perp AB$；那末我

們只要能夠作出 AD 或 x,便能夠作出 α 來.

此地 $\tan B=a$,　$\tan\alpha=x$.

但 $\tan B=\tan 3\alpha=\dfrac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$.

或 $a=\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$,

即 $x^3-3ax^2-3x+a=0$……………(1)

這個方程式爲不能約，因爲如果左邊在普通的形式能夠分解因數，則無論 a 爲任何數也定然能夠分解因數．但以好些的數值代 a，它不能分解因數，例如 $a=2$.

所以這個方程式爲不能約，並且不是 2^n 次，所以這個問題不能只用直尺及圓規作出的.

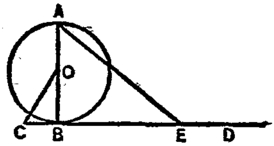
III. 化圓爲方的不可能，不能只用這樣簡單的方法來證明，因爲絕求不出任何的代數方程式，其係數爲有理數，而使其根爲 π．所以此地並不必試驗着證明這個題目，讀者可參攷克廉氏的著作 (Klein's book)．因爲 π 爲超越數 (transcendental number)，並不僅是代數的無理數也．縱然我們除用直線及圓外還可應用其他的代數曲線，對於這個作圖仍然是無辦法.

這三個問題如不限於只用直尺及圓規尚可有辦法

化圓爲方機械的方法，近來已爲俄國工程師 (Abdant Abakanowicz) 用所謂求積器 (integraph) 完成了.

π 的近似作圖法——π 的近似値可以只用直尺及圓規求出來．最好的一種方法是在 1685 年爲傑秀 (Jesuit Kochanski) 所發現.

結果求出 π 的數值爲 3.141533. 即其錯誤比普通作圖所不可免的錯誤還小了許多，其作法如下．作直徑 AB，再由 B 作切線 CD，再作 $\angle BOC=30°$，$CE=3(OB)$，則 EA 近似的等於半圓周．



有法多邊形

圓周的分法——分一圓周爲 n 等份，如 n 爲質數的問題古來只限於 $n=2, 3$ 或 5 時得着解決；後來老實沒有進步．一直到1796年高斯 (Gauss) ——19歲時——才發現 $n=17$ 時的解法，並且證明如果 n 能寫成 2^k+1 的形狀，同時爲質數時，這個問題可以解出來，並且再無其他情形能夠得到解決．

高斯的發明曾引起了當時算學家的興味，不但是因爲他對於曾經過了兩千年沒有進步的題目使之進步，並且因爲他指示出來一種幾何問題與一種代數問題的關係，即方程式 $z^n=1$.

設 z 爲一複素數 (complex number)，則 $z^n-1=0$ 之根，用圖解表示出來，可藉以測定 n 邊有法多邊形之各角頂．

因知該方程式有一根爲 1,其左邊當可除以 $z-1$,於是得

$$z^{n-1}+z^{n-2}+z^{n-3}+\cdots\cdots\cdots\cdots+z+1=0$$

高斯已證得這種樣式的方程式之根可以作出圖來，只要 $n-1$ 爲 2 的乘方同時 n 須爲質數，這樣的高次方程式具有能作圖的根，即前段所謂著名的例外高次方程式也．

打算使 2^k+1 爲質數，必須使 k 爲 2 的乘方如 2^t. 因此所有的質數，表示能夠作出的多邊形的邊數，必須能夠寫成這樣的形式 $2^{2^t}+1=n$. 如 $t=5,6,7$ 則 n 爲非質數；如 $t=8$,或大於 8 的數，而 n 是否爲質數又不得而知. 所以就我們所知，所有能作出的多邊形，其邊數爲質數的場合即爲 $t=0,1,2,3,4$. 相當這樣所作的多邊形之邊數爲：3, 5, 17, 257, 65537.

在這一組的多邊形中，只有前兩個有些實用的價值. 十七邊多邊形的作法已竟複雜到這樣，縱然應用很正確的作圖，其所不可免的錯誤已使其結果在實用上無甚價值. 最後兩個從未完成過，雖然有一算學家曾犧牲了他的十年功夫，對於最後一個的研究.

如 n 爲非質數，高斯曾證得一個多邊形可以作出來，只要 n 等於在 3, 5, 17, 257, 65537 中任選兩個數之乘積，但如等於這些數的乘方時則不可能. 例如打算分一圓周爲八十五等份，我們只須解以下之不定方程式

$$\frac{1}{85}=\frac{x}{5}-\frac{y}{17}.$$

因 $x=3,\ y=10$ 爲其一組根，故得 $\frac{1}{85}=\frac{3}{5}-\frac{10}{17}$.

由是可知我們只須由圓周的 $\frac{3}{5}$ 內減去 $\frac{10}{17}$ 便可求得圓周之 $\frac{1}{85}$.

同樣可作一多邊形，其邊數爲 $3\times5\times17=255$, 我們只須解下面方程式

$$\frac{1}{255}=\frac{x}{3}-\frac{y}{85}.$$

解之得 $\frac{1}{255}=\frac{1}{3}-\frac{28}{85}$, 等等.

又因爲弧可以二等分開，所以如果由上法得來的 n 再乘以 2 的乘方如 2^m 這種作圖也都可能. 因此如 $n\leqq 20$ 則 $n=3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20$ 時相當的多邊形均可作出來，但如 $n=7, 9, 11, 13, 14, 18, 19$ 時則不可能.

具體的例. ——爲的更具體的表現有法多邊形的作圖與二項方程式的求解之關係，茲舉出下面的兩個作圖題:

1. 在單位圓中求作一內接有法五邊形,

設 XX' 爲實數軸, YY' 爲虛數軸, O 爲單位圓, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 爲所求五邊形的頂.

用習常的虛數圖示法，這是很容易看出來 $OR_1, OR_2, OR_3, OR_4, OR_5$ 爲下式的根:

$$z^5-1=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

因爲 $OR_1=1$, 我們除(1)以 $z-1$, 遂得

$$z^4+z^3+z^2+z+1=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

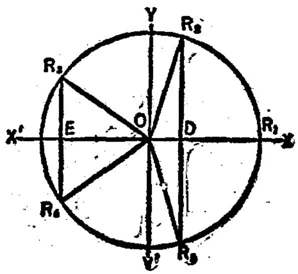
(2)式爲標準的逆係數方程式(reciprocal equation)除以 z^2,

$$z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0.$$

茲設 $z+\frac{1}{z}=x$, 則原式爲

$$x^2+x=1,$$

$$\therefore x=-\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{1+(\tfrac{1}{2})^2}$$



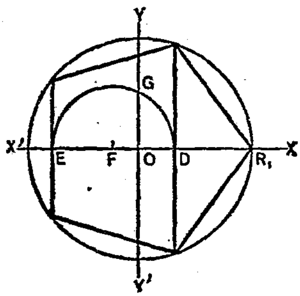
但 x 或 $z+\dfrac{1}{z}$ 能以幾何的意義來解釋.

如 $z=OR_2,\ \dfrac{1}{z}=\dfrac{z^5}{z}=z^4=OR_5$.

又由圖示加法(graphic addition)得出 OR_2 的實在部份或 OD 等於 $\dfrac{1}{2}(OR_2+OR_5)$ 或 $OD=\dfrac{1}{2}(z+\dfrac{1}{z})=\dfrac{x}{2}$.

同樣如 $z=OR_3$,　則 $OE=\dfrac{x}{2}$.

所以 $\dfrac{x}{2}$ 的二值代表四個所求點的實在部份(橫坐標). 但 $\dfrac{x}{2}=\pm\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{4})^2}-\frac{1}{4}$. 於是我們求得下面的作圖法:



在 OX' 上取 $OF=\frac{1}{4}$. 在 OY 上取 $OG=\frac{1}{2}$. 以 F 爲中心以 FG 爲半徑作圓, 遇 XX' 於 E 與 D. 由 E,D 各作垂線, 遂可求得五邊形之各頂.

2. 求作一七邊有法多邊形.

如同前例一樣的作圖我們求得

$$z^7-1=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$$

$$z^3+z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

以 $x=z+\frac{1}{z}$ 代入，遂得一三次方程式

$$x^3+x^2-2x-1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

設此方程式爲能約時，它至少須含有一個一次的因數，也就是有一個有理根．但(3)不能這樣，因爲 x^3 的係數爲1；而同時 $+1$ 或 -1 不能滿足它，故不能有整根．所以(3)爲不能約，其根也可以說(1)的根，當然不能作出圖來．

所以只用直尺及圓規求作一有法七邊形爲不可能．

能作的角——上面的討論還答覆了什麼角度是只用直尺及圓規便能作出來的問題．相當上面所說的多邊形的中心角都可作出來，其和或差自然也可以作．因而 $n=9$ 時便求得一角 $\alpha=40°$，$n=15$ 時之相當角 $\alpha=24°$，等等．有一種關係我們須要知道，並且有時很有用，便是：能作出的角其度數須爲整數而最小者爲3．因此便可推知一個整度數的角其度數如爲3的倍數便能作出來，如非3的倍數便不可能．例如27°，39°，54°與87°都能夠作，而11°，25°，37°，都屬不可能之列．此地所謂3°之角也很易求，只須繼續着平分24°卽得．

第十七章

關於立體幾何教學應注意的幾點

立體幾何教學的目的與困難

立體幾何的特點——在現下中等學校裏的一般境況，與這個學科教學時間的限制，立體幾何似乎不能如平面部份那樣的注重發明方式和訓練學生的思想．在立體幾何中創作純粹證明的習題較難而解答時也常常比平面部份困難；同時書中應該教學的材料相對的較多，而使學生只學習許多的證明以至於永遠自己不會發明的危險也比較在學平面部份時大些．

另一方面說，很簡單的問題差不多在學習過程中都可隨時提出來．其中各定理較易於應用並且常常引用到代數工作使學生得以習用一個公式的各方面．而且立體幾何的學習能增加學生的空間想像力，並能使他們了解代表空間物體的圖形．

總之這種學習比起平面幾何來，可以說如站在利用的方面其優點較大，但是如站在純粹的訓練心性方面其優點較小．依照這種見解，所以教科書中犧牲了大部份的篇幅，學校裏佔了大部份的時間，

都用在度量工作上或用以學習直接間接的關於度量的定理上．在現時的境況這樣的安排似乎是最妥當，但是在許多的場合可以減少一些定理，更可把那些絕不必要而困難的定理取消，如關於兩線的公共垂線的定理是，同時對於那些困難而又不能去掉的定理不要太詳細的討論，如關於三角錐體相等的定理是．

困難——按照這樣的範圍去教學立體幾何對於學生不致發生大的困難．比起平面幾何或許稍多需要一些時間與學習，但絕不需要較多的智慧．

不過有一種困難我們開始教學時必須想法克服它，就是有些學生不能了解立體圖形的一點．有些學生很能夠論理的去推證，但不能清楚的想像代表空間形狀的圖形．現在有兩種方法可以免去這種困難，即利用模型與合法的作圖．

模型

模型的功用是用以幫助學生在初學的時候了解立體圖形的，並且使他往後對於很複雜的圖形也能了解，不然他對於這樣圖形或者始終鬧不清楚．但是不要應用模型而忘却了圖形．等到學生能夠了解圖形以後，模型就可以不用或只對於極困難的場合再用．反之學生就要失掉了這種教學的一個重要的目的，即發展學生的空間想像與了解立體圖形的能力．不過凡是難以描寫或畫出的事物如有法多面體，直平行六面體與長方平行六面體的區別，等等，應該利用模型來說明．

模型的種類——用紙片，線，鐵絲，等物所作的模型旣簡單而又經濟，但用時如同價值很昂貴的模型無甚差異．一個用馬芩薯作成的三角柱體切成三個錐體用來教學却與那昂貴的模型一樣有效力．許多關於線與面的命題可以用一對鉛筆，一本書，一塊紙片來作證明．

有一種東西很昂貴却十分有用就是一個球形的黑板，不過也可找一種代替品，如足球．

令學生自己作模型很可使學生懂得清楚些這是無疑義的．一個學生如果用紙片作過十二面體他至少對於這個立體的概念比以前倍加清楚．

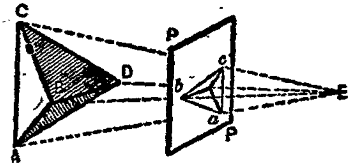
在另一方面說，浪費許多學生的黃金時光去造好些模型是否値得實在是個疑問．這些時間大部份却用作訓練手工，並不關於算學的推理．有些學校常常展覽學生作的模型與算學的作品最有害無益．這樣展覽不但容易令人誤會了算學工作的測量標準；而且與普通教育的展覽一樣——欺瞞．

圖

照像或圖畫——有些教科書中利用模型的照像來教學，其清楚差不多要等於模型．但如繼續着用這樣的照像與繼續着用模型，是同樣的有流弊．所以最好用一種蔭影的圖，旣可以看得很明顯並且學生自己還可照樣作出來，這樣比較妥當．不過照像有時可用在極困難的場合．

透視或射影 (perspective or projection)——在本書範圍內我

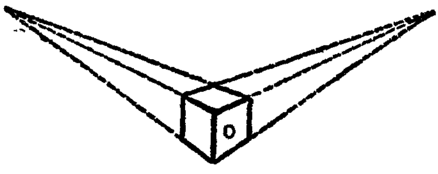
們不能詳細的解釋透視與射影．現在只可稍爲說明一下．



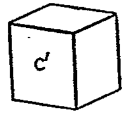
由 E（觀察者的眼睛所在地點）觀察 A 點，我們只須將 E 與 A 聯起便可得到 A 點在 PP 面上的一種影像．則 AE 與 PP 的交點 a，卽所求之影像，那末 $abcd$ 卽爲角錐體 $ABCD$ 在 PP 上之影像．

如果眼睛所在地（E）是在有限的距離內，其所得之圖卽爲透視；如果設想（E）在無限的（或很遠）遠處，則 EA, EB, EC,…… 射線均相平行，這樣所得之圖則謂之射影．再以 EA, EB,……垂直或斜交於 PP，而定其爲直射影或斜射影．

透視所生出來的圖形好像我們的眼看見那樣的物體，或者說同物體的照像一樣，下圖卽立方體的透視圖 C．其所有的垂直稜仍表現出來是鉛直線；其餘相平行的稜却漸漸湊聚於一點．



一個物體的正射影卽一種圖形就像我們的眼在很遠很遠的地方看見的，或是當作那物體比較的很小很小（C'）．其平行稜有平行的射影，而平行線之長與其射影成比例．所以射影可用來度量一個立體的三度（長，寬，厚），這在透視裏却是很困難的問題．



要照表面的見地立體幾何上的圖形似乎應該用透視圖，但是所有對於這個問題詳細思考過的人都會一致的主張用射影圖，主要的理由如下：

1. 那些認定透視較優的見解——就如同眼睛看見物體一般——完全是虛想，其實學生離開十尺左右所見的小小模形與其射影的差別很小很小以至於眼睛都分辨不出來.

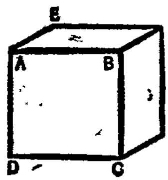
2. 透視圖比較射影圖難畫的多，如果用透視作圖學生勢必畫出來很不像樣子. 他們或許常常大談其平行線會於一點呢. 如果學生眞正學過立體幾何作圖，當然沒有問題，但實際上並非這樣，普通學生都沒有學習這樣作圖的機會，而他們平常作圖只不過靠着他們的藝術直覺與他們的一種能力——把曾經看過的東西回想着畫出來的能力——而已.

3. 平行線的射影也是平行的. 這一點對於作圖很有幫助，並且可以避免證明時的紛擾.

4. 平行線的長與其射影成比例.

5. 射影畫差不多在工藝與工程上是惟一的有用作圖法.

斜射影——求作一個稜長一寸之立方體的斜射影可作一正方形 $ABCD$，使其每邊長一寸，再作與 $ABCD$ 垂直的各稜如 AE，令等於 ε (假定的分數 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{2}{3}$)寸，同時對於水平線 AB 使之傾斜 α (假定的角約 30°) 度.

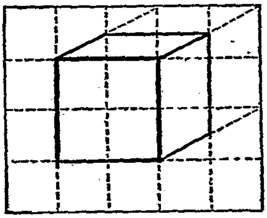


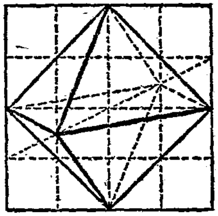
斜射影比較正射影容易作圖，但易於誤會曲

解，同時正射影（參看217，218等頁）很近似我們眼見的物體.

對於很複雜的作圖，用斜射影較爲妥當；但爲簡單的作圖如平面，立方體，球，等則正射影較爲妥當．個人應該盡量的試用正射影——工程師的作圖法，同時教科書也應該採用這樣的作圖.

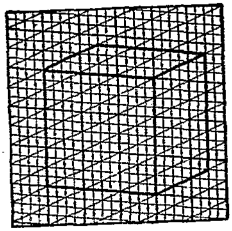
方格紙的應用——斜射影的作圖如用平常的方格紙則殊覺省力，如下所示的立方體與八面體的作圖即係一例.（此地我們假定$\alpha=tan^{-1}\frac{1}{2}$，$\varepsilon=\frac{1}{2}\sqrt{5}$）

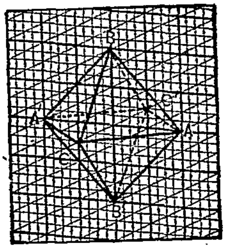




爲的化簡正射影的作圖，作者曾計劃了一種方格紙叫作三分格紙 (trimetric paper)，能夠使學生立刻畫出任何已知其長度的線之正射影，只須與三個主軸平行，再作出很少的幾個其他任何線——無論是直線或曲線——的正射影．這樣作圖則任何立體的正射影都可很容易的作出來.

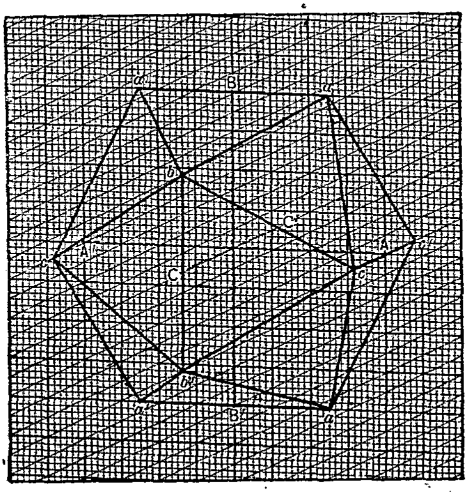
所有這一章裏的立體圖都是用三分格紙作出來的．在下列三圖中的第一個表示一個立方體其邊等於$\frac{4}{4}$寸（$\frac{1}{4}$爲該紙的單位）．這個立方體可藉以說明這種紙的用途到某種限度，尤其關於三主軸的方向與長度.



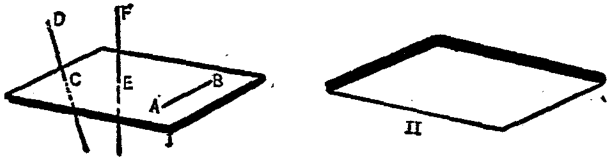


第二圖表示一個有法八面體，其軸等於一($\frac{4}{4}$)寸.（作出其三個軸 AA', BB', CC' 各等於四個單位並且互相平分.）

第三圖爲一有法十二面體的射影，其軸 AA', BB', CC' 各等於2寸. 其邊 aa', bb', cc' 平行於其相當軸，而等於這些軸的 $\frac{5}{8}$.



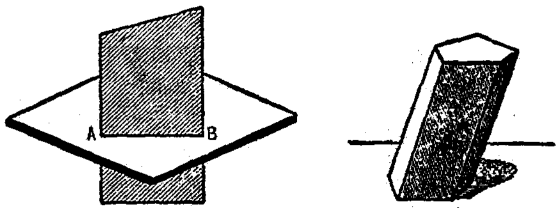
作圖時應注意之幾點——1. 在表示一個平面常常作出一個似乎實在而有厚的平面，如 I 與 II. 同時這兩個射影有同樣的外線 (outlines)，不過 I 是由上看，II 是由下看的.



2. 在面內的線可用其在面界以內的射影來表示，如 AB. 與面相交的線，其射影可伸到面界以外去，如 CD. 至於與 I 面垂直的線，則可令與紙的下邊垂直. 如 EF.

3. 凡是看不着的線不畫出來或是用虛線來表示.

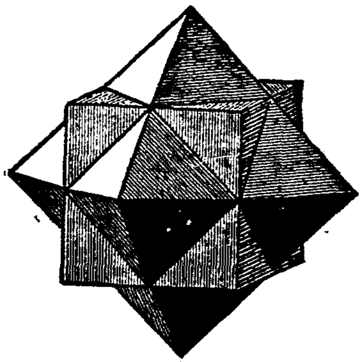
4. 相交的面有時這樣的表顯得更清楚些，就是想法使其交線 AB 不令伸出其中一面的邊界外.

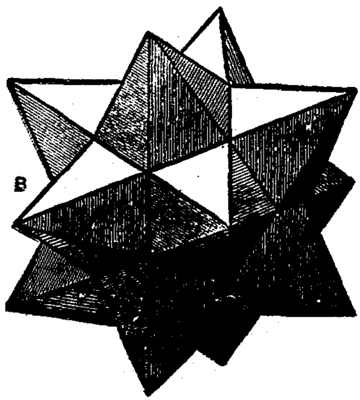


5. 表示離我們眼近的線可用粗線而較遠的則用細線.

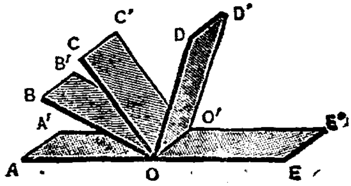
6. 表示不同的面在不同的位置用蔭影法.（平常都是假設光線由左邊射來.）

7.打算作一種複雜的圖其中包含一些個二面角，可先作一個相當的平面圖，然後再把每一邊作成一面.例如求作兩個互補的兩面角



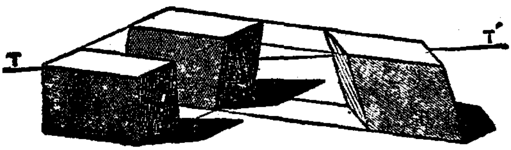


與其平分面，可先作一相當的平面圖 $OABCDE$. 然後作一任意(短)線 OO',並作 AA', BB', CC' 等線使等於而且平行於 OO'.



8. 有些圖形如果襯以該物體所在的棹面與其在棹面上的蔭影，則更覺清楚可觀。

如下圖，TT' 即當作棹面的一邊.



第十八章

實用問題

初等算學的實用與在科學上的應用——現在關於改良算學敎學的著作或言論中，一大部份是關係到在中等學校課程裏容納實用算學的問題．我們業已承認關於日常生活，或關於工藝與科學的事體的實際問題，可以挽救現在中等學校裏算學敎學的惡劣效果．算學敎學不能引起與維持住學生的興趣，學生對於所學過的東西盡行忘掉，與學生不能應用已知的東西，都可以說主要的是因爲學生始終未曾看出代數或幾何的實用價値來．

可惜幾幾乎所有的改革者都集中他們的力量在這一點上，同時，忽略了其他重要之點．我們不能否認這種趨勢的本身是正當的，如果加上一種適宜的限制．算學只仗着它的實用才能存在，而且設若它只是一些符號的集合，論理的聯絡着，而與實際無關，則無須在學校中再來敎學它，但是對於這種主張還有種種不同程度的見解，在同此主張的兩極端是相距這樣遠，以至其實行的結果要看我們遵從的是中和還是極端的見解而大異．

中和的見解——初等算學並沒有太多純粹的實用，不過也有一

些罷了．這些實用的學習當然無疑義的增加學生對於該科的興味；有時還可使學生對於某種題目懂得更清楚些，並且對於某些學生確乎是有實用價值的．反過來說，我們千萬不能忘掉算學的主要價值是在訓練才能，所以我們不能只因爲某種題目不能直接應用，便把它的主要功用也一概抹殺．我們切不要只爲達到實用的價值，就把一種具有推理特性的題目，置之不顧．不過那些很適於實用或藉以引到實用上的題目，應該受人偏愛，與應該排列在純理論的問題的前面而已．

因此我們不能棄掉指數律或幾何問題的分析，只因爲它們缺少實用的價值．但是如果我們必須在幾種不是絕對爲整個學理必需的題目裏分別去取的時候，我們應該以能否實用爲標準，而不應該只照傳統的說法．因而我們很可避免分解因數的困難場合，而代以圖解法，因爲這是在初等算學裏最有實用價值的一章也．我們可放棄歐克里得求 $H.C.F.$ 的方法，而代以比例，因爲這是在物理與幾何中所必要的一部分也．我們寧可犧牲我們的時間在三角法的求高與距離的方法，却不必對於測角術反覆的研究．我們把數目代入隨便的算式內，就不如代入到有實用價值的公式內，等等．

極端的見解——這種見解認爲算學教學的主要價值是在實用，而對於它的訓練功用，却認爲無足輕重．現在算學教學的失敗，可以說是因爲純粹算學 (pure mathematics) 的難解性．普通青年學生很難了解它，並且不發生興趣，只有實用價值的題目可以使青年學生發生興味．因此提議以應用問題作爲算學教學的主要目的，純

粹理論的問題與定理，只有對於解答實用問題必須引用時，才來講它們.

評判任何的問題與學理，只可以其實用的大小來作標準．於是這個問題，“求作一三角形，已知其周邊，一角與由已知角所作的高線.” 就無甚可取，因爲它與中學生所能學到的任何幾何的實用部份，均無甚關連，故也.

反對把算學當作一種實利科目的理由——很顯然的關於實用問題的事體還有很多很多的討論，不便一一舉出，而在可以提出來反對前段所說的極端見解的理由中，可以寫出來幾條如下：

1. 認爲學生不能順利的學習純粹算學，而對於理論的問題與定理不能發生興味的種種假設，可以說是完全誤謬．普通才能的學生只要有正當的準備，在適宜的境況，得着合法的教學，不但能够容易的了解，而且對於這門科目還要發生很大的興味．但是在某種學校的境況下，根本不會產生良好的教學，我們對於這種境況應該試驗着去改良則可，但不能因而棄掉了最好而最有興味的科目.

2. 假如所有中學的算學都具有實用性，所提到的改革或不至於太影響到幾何代數本質的教學．但這些科目實用的範圍很有限，還有許多所謂實用，還不是實在的實用．在一個歷史上著名的代數問題中，乃用支母山 (Chimborazo) 的高計算亨利 (Henry) 石球的數，或是以在支加哥 (Chicago) 歷年降生的兒童數，計算 A 的年齡，並不能算作代數的眞正實用，因爲沒有一個人竟這樣的去計算支母山的高，或在支加哥降生兒童的數.

眞正代數的實用常常是由物理上採取，但可惜普通學生的物理知識很有限，如果時常採用這一類的問題，代數教師還須兼授物理.

至於幾何純正的實用更屬有限．關於嘎特式的門窗與戲院正廳的地板的例題，有時很易於發生興味，但是它們只關係到幾何的一小部份，並且也很少眞正的幾何實用．因爲製圖的，配裝玻璃的，或是木匠，應用這些樣式到工作上多半是靠着經驗，而無甚學理的根據.

因此實用問題確能够增加興味，但是把它當作教學算學的基本原則，實在感覺範圍太狹小.

3. 我們知道相當部份之實用工作是發生興味的，但堆集許多同類的實用問題或定理，作來却未免厭煩．得着一點統計的事實，感覺有興味，如聽到無盡的同樣的事實，則與讀閱世界曆書一樣的乾燥．少許關於戲園正廳的地板之例題是動人的，但連着好些頁這樣例題，也就無味了.

4. 把算學的實用放置在它的教育價值以上，完全是對於該科的教育價值根本未曾了解，或是見解錯誤.

5. 把一個問題或其他題目的實用作爲評判它們的惟一標準，這是定然不曉得更有其他堪作評判標準的存在．如應用一種問題藉以解釋一種新方法或新概念，其最宜於解釋這些方法與概念者，便是最好的一個．例如我們打算對於作圖題的分析加以解釋，我們最好應用求作一三角形已知其周界，一角，與高線的作圖題，當然比一

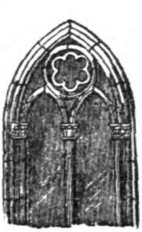
種只有實用而與分析無甚關係的問題，較爲合宜.

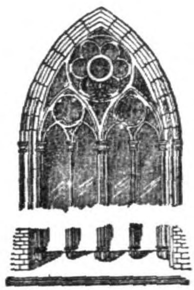
6. 如果我們使算學變成一種實用的科目，很少顧到它在教育上的價值，它不但失掉了它的美麗與威嚴，而且很難保持住現在的境况而抵抗反對它的敵人，也許在我們學校的課程裏早已不見它的踪影了.

結論——實用問題引用的合度，並且不妨害幾何與代數的本質，很可對於算學上有幫助. 但是在這種改革聲中，我們不要對於它希望過高，因爲它並不是一種萬靈藥可以治療一切病症的. 並且太熱烈的擁護它，也許發生一種危險以至有害於原來的目的.

實用問題的來源——在許多教科書與雜誌上可以尋得好多的實用問題. 關於工程，物理，商業，生活等等. 關於這種來源的書目可以在學校科學與算學 (School Science and Mathematics) 卷八與卷十一去查. 其中最有用而最常見的例題，多屬於下面的樣式:

1. 幾何作圖——大多數實用作圖題是關於建築的樣式與裝飾的圖案. 這樣的圖樣的所在，如劇場正廳的地板，油布，嘠特式的門窗，等等.





繪地圖也可以用來作爲實用問題，我們可以求作一圖表示一個學校房子的坐落，與三個村鎮 A, B, C 等距離.

此外如等分或計算地畝的面積，也屬於實用問題的範圍.

2. 幾何的計算——在前段所提到的圖樣可以利用來作出許多的數目問題，例如求在油布圖案上八邊形的邊，計算在峨特式門窗上的圓周與其半徑. 許多的習題可藉着工程或建築上所用的形狀來計算面積與體積，如水管，汽鍋，水池，拱，等等.

關於高與距離的問題，與在三角法上的一樣，如果已知的角爲 $30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°$（理論的說，只要是 $3°$ 的倍數，或其一半，四分之一，等等）都可求出解答來. 求距離的最簡單的方式，要算應用由測量兩角等於 $60°$ 的等邊三角形. 我們還可用直角三角形，其中包含着一角等於 $30°$ 或 $45°$ 等. 此地可引用仰角，俯角，航海的術語，就像在三角法上一樣，然而這一類較困難的問題，對於平常學生太感覺困難了.

我們可以問，一塔的高度，該塔是建立在水平面上，設在某定點塔頂的仰角爲 $30°$，再移近 80 呎，則其仰角爲 $45°$.

3. 代數的實用問題，普通在大多數的代數教科書中都可發現出來. 物理與商業的問題，作成一種來源. 把舊式的石球一類問題用統計的事實改變了它們的外表，又作成另一類的來源. 尤其圖解法更給我們許多的實用問題.

第 十 九 章

代數的學程

The Curriculum in Algebra

緒論

站在教育的立場來比較幾何與代數——爲初等代數選擇教材，必須十分的注意該科的教育效能，但這些效能與幾何的並不絕對一致．代數同樣需要思想的正確，比幾何同樣或更甚的需要細微的正確．它可以完全順次排列着，並且開始的幾章可以作到比幾何的開始還要簡單．至於答案的一致，學生課程的明確，與其中許多題目能實用到科學或其他問題上，與幾何完全相同．

另一方面說，代數並不需要那麼多的推理作用，並且其所用的推理也不如在幾何上所用的那麼嚴密．僅僅敍述的地方總不能像幾何縮小到最低限度，而且在代數裏有些題目非需要一種練習不可．所以並不像在幾何上絕對的需要那麼機巧與創作的思想，但是事實的知識（須記憶的地方）却比在幾何上較爲重要．況且代數很偏於機械的使用法，學生儘可實行移項，指數相加，與其他工作，但對於其中的運算與符號並不一定要有一種清楚的概念也．

我們看出來代數具有普通算學的多數優點，而同時却有一些劣點，因而代數學程應該安排出來，想法去掉或減少這些缺點，才好.

什麼時候教學代數 —— 在美國大多數的學校裏都是先學習代數而後學習幾何，但近來這種安排已受了攻擊；有時把它當作算學教育所以失敗的主要原因. 有些改革者主張在學習代數以前學習幾何，同時却有許多人主張這兩種課程同時並進.

第一種主張，據各國許多學校經驗證明出來只有在某種情形下是可以實行的. 談到第二種主張此地須聲明並不是說在中學第一二學年教學3小時代數，2小時幾何，乃是把這兩種課程完全混合起來. 按照這種主張無論幾何或代數的任一種新方法，當需要學習時才提出來，並無預定的先後也. 譬如平方根應該連同派塔各拉斯定理(Pythagorean theorem)學習，相似三角形與比例一塊，等等. 所以代數的事實總想法用幾何來陪證，反之亦然.

贊成這個主張的不但是美國，而且還有其他國家，特別是意大利，當然這個主張有許多可取之處. 它總比通常方法容易引起興味來，在工作的某種階段，它很可指示給學生學習某種題目的需要，又較宜於訓練學生應用他所得的知識，而且還可避免學習幾何時很快的忘掉了代數.

另一方面說，在許許多多的學校裏都有很多的理由來反對這樣混合的教學法. 最主要的，便認為這兩種科目完全混合起來為不可能. 這個計劃仍在試驗時期，總是缺乏完善，實行這種計劃的教科書往往只混合了一兩個題目，其他僅僅交換着教學而已. 而且有大

多數的中學生在第一年級時不能如同學習代數的一樣的應付幾何，尤其是那些學生剛經過機械式的學習，由算術驟轉學幾何未免太感受困難，但如果接着學代數——與算術相似——當有十分的把握.

所以同時教學代數與幾何，是否如贊成這種教法者所稱道的那麼美滿，似乎尙有疑問．但是這種計劃很有試驗的價值，而負有試驗責任的學校應該澈底的公正的試驗一下！

應該學習什麼代數

概論——有好些初等代數的節目是在將來研究上絕對需要的，我們是否採用它們作教材的問題，簡直是沒有討論的餘地．但是對於其他一些節目的去取，倒是有討論的必要．在前幾年尙沒有適當去取的標準只是盲從傳統的見解而已.

近來發生了一種很可注意並且很普遍的傾向，便是去掉那些傳統的材料，同時換成有教育或實用價值的教材．這些改革的普遍傾向，可以簡單擇要如下：

1. 縮減敍述的部份到最低限度；取消一切無用的，抽象的與太艱深的部份.

2. 着重所有需要新穎思想的節目.

3. 着重所有的節目可常應用到幾何，物理，工程，商業，等各科裏去.

減少純粹的形式工作——代數是不能學好的，如果不學習一些形式的運算並且也不熟練相當的技術．打算澈底的研究代數裏較高

深的幾章，學生必須熟習那四種基本運算；並且必須有一種技術去分解因數，求解方程式等. 但在另一方面，這些事體未免太被人重視了，最近的過去，曾有一種傾向過于着重這些技術工作，並且一年比一年的利害，教科書的著作者都爭先恐後的試驗着把所有能夠教學的事物一一搜羅起來.

所以發生這種傾向有二. 第一，代數多半為學生考試而教學的，因此總試驗着盡量把每個例題都作成一種需要記憶的方式，遂使這種學習差不多都成爲死板的法則，與機械的應用. 第二，曾有這樣的主張，認爲這樣形式的方法，如求多項式的立方根，具有偉大的鍛練腦筋的價值，因而技術的獲得，應當作爲學習代數的目的，至少也是主要目的之一.

不過任何一個人只要他對於學校的情形熟習，定然曉得學習這些形式的事體所得的結果，往往使它們的鍛鍊效能無從施展出來. 因此，縱然教師在教學如多項式開立方等法則的時候，便着重其推理的地方，但不久學生仍然實行一種純粹機械式的技術. 他們只是把這種方法牢牢記住，一旦忘掉，就很難得再想出來. 並且在代數裏這種純粹形式的工作異常的多，即使減少三分之一或一半，也不至顯露出來減掉了由它們發生的教育價值.

很可慶幸的現在研究算學的人們，都開始認識了過於着重技術工作的學習是無用的. 在美，法，德，英諸國都有很顯然的傾向去減少這種純技術的工作.

我們不能製定去取的標準，對於各種學校都適用，但是關於可

以去掉或縮減的節目——在許多的場合應該去掉——現在可以提出來：

1. 移却括號的複雜場合.（兩重括弧便可夠用）

2. 其指數爲文字的乘冪的乘除.（如果第一次教學這個節目時）

3. 多項式與多項式的乘除中之複雜者.

4. 求 $H.C.F.$ 的歐克里得的方法 (Euclidean Method). 在初等代數中這個方法僅僅可以用來簡約一個分數爲最簡式. 但是沒有實用的例題能够用着一種分數其項爲三次或四次式.

5. 同樣求 $L.C.M.$ 的歐氏方法. 只用來作分式加法，但是分母爲三次函數的分式在初等代數裏無甚重要.

6. 其分母爲二次或三次式的分式之加法.

7. 一部份的因式分解.

8. 複雜的繁分式.

9. 聯立一次方程式的比較解法. (Method of Comparison.)

10. 多項式的立方或高次方.

11. 多項式的立方根.

12. 數的立方根.

13. 困難的聯立二次方程式，尤其對於那些需用學生很難發現的方法才能解出的.（如對稱方程式—— Symmetric equations)

14. 幾乎所有的簡捷法或特別計劃.

15. 大部份的代數學說(Theory of Algebra).

在較高深的章篇中我們可以減去：

16. 循環級數 (Recurring Series).

17. 大部份的不等式.

18. 斯他拇氏定理 (Sturm's Theorem).

19. 等根 (Multiple roots).

所謂縮減在代數裏的形式工作，絕不是便認爲其餘的部份也都不必熟練．寧可相反的解釋，基本的代數運算應該澈底的學習，並且應該使學生重複的溫習以至於完全熟練了．算學不與那種人爲難的，如果他不把以前的課程熟習以後，決不另學新的題目，同時如缺乏這種精神，只是希望研究高深的，縱然不是不可能，但進行上必極困難．

減消學說——所有學說的部份凡是出乎學生了解的範圍，或於論理上不甚相當都可消去．每個有經驗的敎師都知道能懂得較困難學說的學生是如何的少數，如關於負數或分數爲指數的基本定律的證明，等等．卽關於很簡單的事體，如分式的乘除（$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$，與$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$），也往往不能讓學生完全了解．

而且在敎科書上發現有些證明在論理上不甚相當，如關於證明乘法中正負號的法則，與以負數或分數爲指數的二項式定理．

減消簡捷法與特別計劃——對於特別聰明的學生最有趣味的一種問題，便是能够發明簡捷法去解答問題，而這種問題如用普通解法，不但費事而且笨拙．例如依普通方法求解下面方程式是很繁難．

$$\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-5}{x-6}.$$

但應用一種特別的計劃，即可得出很簡易的解法．

先把每個分式化作帶分式，如

$\frac{x-1}{x-2}=1+\frac{1}{x-2}$，則原方程式化作

$$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}=\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-6}.$$

通分得
$$\frac{-1}{x^2-5x+6}=\frac{-1}{x^2-11x+30},$$

即
$$x^2-5x+6=x^2-11x+30,$$

$$\therefore x=4.$$

上面的例題，方法是極簡單而計劃是很顯明的，但在初等代數裏很有許多的方法，複雜而繁難，而它們的用處卻僅僅在其結果．這一類的例子，有如解聯立方程式的代替法：

$x=vy$，或 $x=u+v$，$y=u-v$，等等．

關於簡捷法最好的例子當推變根數爲無限連分數的方法．普通求$\sqrt{22}$的方法如下：

$$\sqrt{22}=4+\frac{\sqrt{22}-4}{1}$$

$$a=\frac{1}{\sqrt{22}-4}=\frac{\sqrt{22}+4}{6}=1+\frac{\sqrt{22}-2}{6},$$

$$b=\frac{6}{\sqrt{22}-2}=\frac{\sqrt{22}+4}{6}=2+\frac{\sqrt{22}-4}{3},$$

$$c=\frac{3}{\sqrt{22}-4}=\frac{\sqrt{22}+4}{2}=4+\frac{\sqrt{22}-4}{2},$$

$$d=\frac{2}{\sqrt{22}-4}=\frac{\sqrt{22}+4}{3}=2+\frac{\sqrt{22}-2}{3},$$

$$e=\frac{3}{\sqrt{22}-2}=\frac{\sqrt{22}+2}{6}=1+\frac{\sqrt{22}-4}{6},$$

$$f=\frac{6}{\sqrt{22}-4}=\frac{\sqrt{22}+4}{1}=8+\frac{\sqrt{22}-4}{1},$$

$$\sqrt{22}=4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{1+\cdots\cdots}}}}}}}.$$

如用簡捷法求整數（第一個A值）與依次分母(C)的方法如下:

A	B	C
4	6	1
2	3	2
4	2	4
4	3	2
2	6	1
4	1	8

第一個A值爲$\sqrt{22}$內最大的整數，即4.第一個B值等於$22-A^2=6$, C值卽等於在$\frac{A+\sqrt{22}}{B}$內所含的最大整數.

A,B各行之值，除第一行外均可由下式推求:

$$A_{n+1}=C_nB_n-A_n,$$

$$B_{n+1}=\frac{N-A^2_{n+1}}{B_n},$$

至　$B=1$時卽爲一週期.

這樣巧捷的方法還有許多. 如果有好些同類的例題爲實用關係必須一一解答的時候，它們是有相當的價值. 並且作教師者熟習這種方法也有許多方便，但是對於學生說往往沒有什麼價值.

學生的記憶未免負責過重了，而在許多情形下往往更使他們演成一種機械式的技術. 極少數的學生能夠發明這種捷徑，而由這種發明裏——決不是由這樣死的知識裏——得着一種愉快與心靈的裨益.

在學校裏所以引用出來這種方法，常常是爲的使學生預備應某種考試，並沒有顧忌到這樣引用的教育利害.

着重培養推理能力的節目 —— 在這章起始的時候我們業已指明出來學習初等代數易流於機械式的危險. 所以我們應該試驗着對於任何題目都想法擴大推理的範圍，並着重那些需要新穎思想的地方. 這些題目裏最合乎這樣條件的，當然要屬文字問題 (Reading Problem)，但是任何其他的節目也很可與學生思想的機會. 縮減一些個場合，倒可使學生得一種機會用自己的才能去發明種種的方法，用以解答那些平常只用一種方法解答的問題. 對於分解因數與解聯立二次方程式，都可這樣作.

着重實用的節目 —— 在代數舊式學程裏，大部份是隨意編製而無所謂方針，在美國與歐洲好多的改革者主張在所有發生疑問的

場合，最好把一個題目的實用度，當作它重要程度的主要標準．如果應用這個原則，同時還不至犧牲了代數的緊要學習而只着重了尙有疑問的實用價值，這是應該贊許的．

應該特别着重的節目，可述明如下：

1. 數値的代入．

2. 方程式與應用問題．

3. 圖解．

4. 比例．

5. 對數．

6. 所有能引起函數觀念的節目．

關於函數觀念歐洲著作者最爲重視，而在美國總未這樣的注意，一部份因爲圖解法發達的太晚所致．

教學代數的方針——前段的討論主要是關於教科書的課程，當然在教室裏教師的着力點也該有一種方針．由前段推出的原則，與其他意見可以總括如下：

1. 着重所有需要新穎思想的部份．

2. 着重所有能够實用或間接實用的節目；但不要犧牲了眞正代數的本質，而偏於不實在的實用．

3. 盡量的縮減所有僅僅屬於專門研究，同時在高深課程裏還不需要的事體．消滅所有的簡捷法與特別計劃．

4. 消滅所有學生不能了解或於論理上不甚妥當的學說．如果需要時可先從特例下手，同時須指示給學生我們曾作了一種假設．

5. 使學生重複研究與實地練習，務須貫澈那些極關重要或是常常實用的方法.

6. 着重歸納法，盡量的用具體的例來引起普遍的法則. 因而在討論$a^m \times a^n$以前，求 $2^3 \times 2^5$；在發現 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots\cdots + a_n = 0$ 的根的關係以前，先求 $x^3 - 4x^2 + 5x - 7 = 0$的根的關係.

7. 不關十分重要的例題，應當盡力用推理的而不用記憶的解法.

第二十章

代數的主要部份

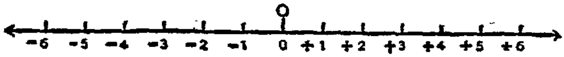
代數中的第一課——從前盛行一時的方法，代數起始只是表列着一些定義必須要學生記憶的，可幸現在已改革了．現在最普通的起始先給學生一種能引起他們興味與思維的題目，例如應用問題或負數．第一課先討論簡單問題當然是很相宜的辦法，我們須注意此地教學這個題目主要的原因是在練習用文字代替數目，因此，應該只限於很簡單的問題．同樣起始教學負數也很相宜，因其新奇與簡單很能引起學生的興味也．

負數——平常負數的定義即為小於 0 的數，這個定義由教育的看法是極相當，不過由論理上是不通的．因為"小於"的定義往往這樣說：如 $a-b$ 為負，則 a 小於 b．那末負數既根據"小於"而得定義，而同時"小於"又根據負數說明，這當然是個循環．

學生不難曉得負數的概念只要這個題目根據實用的例子具體的表現出來．這是不可能的事體從五個物件中減去 7 個．如果我們指的是基數 (Cardinal number)，則小數減去大數為不可能；但如用來作度量的數並且所度量的東西能夠有反對的方向，減法便永遠可

能．屬於這類的數量如：得與失，經緯度，紀元前與紀元後，向上與向下的運動，相反的力量，溫度等．

為將來課程計最重要的比證便是數尺 (number scale)，如下圖所示．用這種記號作一些例題不但使學生清楚的懂得負數，而且



能使他作任何二數的加法，從任何數減去正數，等運算，雖然對於這些運算所根據的定律尚未學習過．

為區別數量或運算符號，乃引用一種負數的特別符號，如(－4)．這兩種符號的區別本係人為的，在某些例題中，打算決定我們用的符號屬於那一種，確實困難．學生尋求這個區別很難並且無味，同時極少的這樣教師或教科書，着重這個區別一直保持到高深的課程．

數目的代入——數目的代入是初等代數裏最重要的節目．這是算術與代數的自然連合，並可藉以了解在較高深課程裏的代數符號．一個學生如不能計算包含文字的代數式(其文字之數值為已知)，他決不眞懂得其中代數的運算．在另一方面說，一個學生如已熟習了數目代入法，就可曉得公式的意義與用法，這顯然是它的實用價值．

數目的代入不但應當在起始學習，而且在全學程裏都可應用只要能夠．學生往往忘掉了符號的眞意義，而鬧出錯來，這些錯如果他們把文字看作數值便不會鬧出的．

如果一個學生認爲$\frac{1}{a}+\frac{5}{a}=\frac{6}{2a}$，則可使之求$\frac{1}{4}+\frac{5}{4}$，如果他仍答以$\frac{6}{8}$，再問以一元的$\frac{1}{4}$與$\frac{5}{4}$共爲多少，當可提醒他．好些學生認爲$\frac{x+1}{x}=\frac{1+1}{1}$，但不至認爲$\frac{100+1}{100}=2$，有的認爲$\sqrt{a^2+b^2}=a+b$，但不至於認爲$\sqrt{9+1}=3+1$，等等．因而數目代入是最好的方法用以證明他們所發生的錯誤．

有時學生很能解答代數問題，但等到作同類的數目問題時，反倒發生誤謬．有的學生已知$a^3\times a^4=a^7$，但却認爲$2^3\times 2^4=4^7$．這樣錯誤是指示出來學生對於他們用的代數符號並未眞正了解；換一句話說，他只是機械式的運用符號，其實尙未清楚符號的意義．

數目代入的例題是如此的重要，這樣的習題無妨其多．如果敎科書裏的材料不夠用，敎師很可臨時作一些這樣習題，使其答案僅用一種公式便可容易求知，但所用公式須限於學生不知道的．例如使學生用不同的數目代入$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$式中，敎師可立刻驗算其結果，因原式等於$(a-b)^3$也．構造這一類的公式是一件很簡單的事體；有幾個寫在下面：

$$a^4-8a^3b+24a^2b^2-32ab^3+16b^4=(a-2b)^4.$$

$$\frac{a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2}{a^2+b^2+c^2+2ab-ac-bc}=a+b+c.$$

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}=a+b+c.$$

學生還應該練習把數目代到公式裏去．這樣公式可由物理上，幾何上，或關於商業上的公式中選出來．有些很簡易的例題還可令學生創作，例如求已知其長寬的墻壁的面積之公式．

驗算——數目代入對於驗算代數例題的答案是最應用而且最合宜的方法．代數運算的結果不能正確除非對於其問題與答案中所包含的文字無論用什麼數代入都有同樣的結果；另一方面說，如果數目代入的結果其問題與答案相符合，則這樣解答多半可靠．

通常我們都選擇小的數目，但必須避免代入後發生 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{4}{0}$ 的結局．如果我們把所有的文字都使之等於１，往往得出一種很簡單的試驗，不過所有１的乘方都相等，所以這個方法不能驗算指數部份，是一缺點．例如驗算下式的運算

$$(2a^2-3ab-2b^2)(2a-3b)=4a^3-12a^2b+5ab^2+6b^3,$$

此地設 $a=b=1$，則

$$(-3)\times(-1)=+3.$$

即可斷定這個運算多半是不錯．

數目代入不只試驗出結果是否正確，並且對於錯誤的結果，還可指出來所以發生錯誤的地方，現在用一個數學幻術，示例於下：

	驗算：　設 $x=y=2$．
設 $x=y$．	$2=2$．
則 $17x=17y$，	$34=34$．
且 $13x=13y$，	$26=26$．
∴ $17x-13x=17y-13y$．	$8=8$．
即 $17x-17y=13x-13y$．	$0=0$．
$17(x-y)=13(x-y)$，	$0=0$．
∴ $17=13$，	$17=13$．

由是我們看出來，從第六步推到最後一步是錯誤的.

證驗代數結果的方法還有幾個，現在簡單的述明如下：任何一種運算都可由其逆算來驗證，例如用加法驗算減法，除法驗證乘法，乘法驗證因數分解，等等.

同次式 (homogeneous expressions) 的乘積，商，乘方，方根仍爲同次式，並且對稱式也有相當的關係，均可用作驗算.

把方程式的根代到原來方程式的兩邊，便可驗算出來.

加法與減法

加法——正數加負數，或負數加負數的問題中就包含着加法定義的推廣. 所以加法的定律其實卽是定義，並非定理.

在中等學校裏，用一些具體的例題推出這些定律，雖然不能算作科學的方法，但在教育方面說却十分正當.

減法——科學的說法，減者卽加的逆法，或者我們用下面方程式來作它的定義: $(a-b)+b=a$.

對於青年學生，所謂減者便是從一羣事物中取出若干事物之意，因此我們最好由此意義開始慢慢的引到科學的定義. 由正數或負數中減去正數，很可用賠賺作例，南北方向的移動作例，或是用數尺的幾何證明，等來解釋. 如打算例示減去負數，如$(-5)-(-3)$，可把 -5 寫作 5 個負單位 $-1, -1, -1, -1, -1$，讓學生取去 (用板擦) -3，卽: 3 個負單位. 其結果當爲 -2，卽 $(-5)-(-3)=-2$.

同樣下列各數之和爲 2.

如取去 -2, 其結果爲 4, 即

$$2-(-2)=4, \quad \text{等等.}$$

$$\begin{array}{c|c} +1 & -1 \\ +1 & -1 \\ +1 & -1 \\ +1 & \\ +1 & \end{array}$$

集合的符號——我們應當指示給學生在前些個關於脫去括號的例題只是加減法的一種新樣式而已. 我們由 $6a+2b$ 中減 $3a-5b$ 時, 把後式放在前式下面或寫作 $(6a+2b)-(3a-5b)$ 僅僅是一種排列事體.

求解這類很複雜的習題未免太耗費時間. 雙重括號（一括號在另一括號內）學生們要常常應用在物理, 幾何, 或三角法上. 無論是先由外而內或先由內而外解除括號均無關重要. 不過由外而內不必變換如後法那麼多次的符號, 但易於出錯. 至於同時解除好幾個括號的捷便法之研究是無甚價值的.

乘法

乘法符號的法則——一個負數乘以正整數的積, 可以直接由乘法的定義——乘即連加——推求出來. 但是這個定義便失掉了意義, 如果乘數易以負數, 因爲連加 -7 次一語與把一本書讀了 -7 次同樣的無意義. 因此, 在舊教科書中常常不與乘數爲負的乘法下一定義而打算證明 $a\times(-b)=-ab$, 決沒有用處. 但有一種證法是這樣:

因　　$(-4)\times(3)=-12,$

而　　$ab=ba,$

$$\therefore \quad 3\times(-4)=(-4)\times 3=-12.$$

就是：乘以負數時，可乘其絕對值而易其積的符號，但是所謂“正”與“負”純粹是相對的．因而我們可把3當作負而12當作正，即 $(-3)(-4)=12.$

這個證法假定 $4\times(-3)=(-3)\times 4$，即假定交換律對於未經定義的運算已可適用．另有一種證法有時可以用，即：

$$(-5)\times(-4)=(-5)(3-7)=(-5)(3)-(-5)(7)$$
$$=-15-(-35)=20.$$

此地却假定以負數為乘數或以正數為乘數的乘積都適用相同的定律（分配律）．

較嚴格的書引用這樣的乘法定義：乘法是一種運算在求一數使此數對於某因數（被乘數），與另一因數（乘數）對於1有同樣的關係．此地除去“關係”二字不易捉摸外，這個定義對於初學者是太困難了．

合乎教育的辦法最好起始舉出些實用的例題，而後再引導出來一種定義使適合這樣例題的結果．我們可設想一船向北航駛每天速率為 $2°$，並且今天剛過赤道；則五天以後此船將達到北緯 $10°$，或 $2\times 5=10$．五天以前，此船當在南緯 $10°$，或 $2\times(-5)=-10$．如船走向南方則得 $(-2)\times(5)=-10$，與 $(-2)\times(-5)=10$．

或者我們想作天秤的兩端因增加或減少一些相等的重量而發生的影響，或想作氣球升起的力量由增加或減少氣體或穩重物所發生的變化，等等．

從這些例題中最好把乘數爲負數的乘法的定義當作重複的減法，即$(-4)\times(-3)=-(-4)-(-4)-(-4)$.

如果這樣敎法，當不至感受什麼困難.

無例外定律(Law of No Exception)——在前段裏我們已竟看到以負數作乘數的乘法，需要把原來的定義推廣.這樣的修改定義在代數中是常常發現的.在學校目的一方面說，因應用才作出這樣事體是正當的辦法，但是我們也應當知道按科學的說法，代數之所以爲代數並非建立在應用上只是某些定律而已.所以應用不能解釋任何代數上的事體.

指導着我們怎樣推廣定義的科學原則叫作無例外定律，或保持相等形式的原則 (Principle of the Permanence of Equivalent Forms).這種定律可述明如下:

"在算學的構造裏，把前邊業已提過的兩種數由已經定義過的運算(+,−,×,等)組合起來，每一種組合仍然須具有一種意義，縱然那時原來的運算定義已包括不了這樣的組合，而這種意義總能把舊定律仍保持有效"(Schubert).

因此乘法定義必須這樣推廣使我們對於負數的運算完全如對於正數一致，換一句話說:關於a, b, c等的運算，無論a, b, c等代表正數或負數，務須前後貫澈下去.因此，乃需要尋求一種定義，使之適合乘法的基本定律，如交換律，結合律，與分配律.

同樣推廣任何一種運算的定義必須與該運算的基本定律相適合.以下講乘方定義時也可例示這一點.

設 n 爲整數時a^n的原來定義，要變成毫無意義如果把 n 當作負數或分數．因而求證 $a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$ 爲不可能．我們必須推廣這個定義，而且原來定義中並沒有什麼來强迫我們必須有一定的規程．這是不合論理的以$\frac{a^n}{n}$作爲 $a^{\frac{1}{n}}$ 的定義，因爲這樣必至對於分指數與整指數的定律完全不同，這樣便極不相當．因此我們便不能作出帶有指數的計算，除非已知 n 爲整數或分數．爲避免這種紛雜計我們必須制定一種關於分指數的定義使對於基本定律如同正整數作指數時一樣．（基本定律是：$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$，$a^m\div a^n=a^{m-n}$，$(a^m)^n=a^{mn}$，$(ab)^m=a^mb^m$.）

由此我們求出一種合宜的定義：$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$與 $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.

因數分解

什麼時候學習因數分解——因爲每種分解因數的方式是根據乘法得來的，學生已很可發現一種因數分解的方法，如果他已學習到其相當的乘法．如果已學到這樣的乘法如 $(x+a)(x+b)$，學生就可很容易的發現 $a^2+3a-10$ 的因數．所以最好在講到乘法時應接連着提出相當的因數分解．但是這並不是說因數分解的方法以後就不必集合在一塊來研究了．第二次把因數分解的各種情形關連起來講，將使這些重要法則深深的印在學生的腦海，還可藉以比較各法，以便對於某種場合應用某種適當的方法，更可使學生溫習時較易．所以作者認爲混合因數分解與乘法的計劃似乎不應實行到這種程度以至有碍於該兩法的系統．

因數分解的那些種場合應該學習——對於許多學生因數分解要算是初等代數裏最困難的一章．因數分解的學習有時使學生喪氣的這麼利害以至對於這個節目的興味全然失掉了，甚至他們因而討厭代數，這樣學習的效率不問可知．因此我們必須試驗着表現因數分解盡量的簡單，同時要去掉在將來課程上不必要的各種場合．

在最近以前許多教科書的著者，與好些教師却恰恰走到相反的方向．不是只提出少數的場合使學生熟習，而是凡能夠拉來的材料都盡量拿來教學．經過長期的練習與記憶，當學習後學生仍不會作較為困難的習題，並且不久把所學的統統忘掉．因而他們費了許多時間而所得結果却微乎其小．

絕對需要的場合如下各類：

1. $ax+ay+az$.

2. ax^2+bx+c，與其特殊場合

   $a^2\pm 2ab+b^2$,

   x^2+px+q.

3. a^2-b^2.

其次再學習

4. $a^3\pm b^3$.

5. 集項分解法．

6. 剩餘定理(The Remainder Theorems)．

應行縮減的場合——其他應行縮減的場合很可由下列五種場合應行縮減的討論類推，這五種場合是關於 $a^n\pm b^n$ 的，亦即：

1. a^n-b^n 可以 $a-b$ 除盡，如 n 爲偶數.

2. a^n-b^n 可以 $a+b$ 除盡，如 n 爲偶數.

3. a^n+b^n 不能以 $a+b$ 除盡，如 n 爲偶數.

4. a^n-b^n 可以 $a-b$ 除盡，如 n 爲奇數.

5. a^n+b^n 可以 $a+b$ 除盡，如 n 爲奇數.

第一點我們絕不該直接由 $a^n\pm b^n$ 中分解出$(a+b)$ 或 $(a-b)$的因數來，除非 n 爲質數.

我們不該這樣分解如

$$a^{15}+b^{15}=(a+b)(a^{14}-\cdots\cdots\cdots)$$

$$a^6-b^6=(a-b)(a^5+\cdots\cdots\cdots\cdots).$$

只須：

$$a^{15}+b^{15}=(a^5)^3+(b^5)^3=(a^5+b^5)(a^{10}-\cdots\cdots\cdots)$$

$$a^6-b^6=(a^3)^2-(b^3)^2=(a^3-b^3)(a^3+b^3)$$

換一句話說，我們應該試把已知的兩乘羃先化作兩個平方，或化作兩個立方，再不然，再化作兩個五次方，等；就是：我們總想法化成的乘方其指數爲質數.

但偶數的質數僅爲 2,所以我們對於偶指數的乘方只須記住下面兩件事實：

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$a^2+b^2\ \text{無因式}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

因此前三種場合便應行消滅，這樣簡直無異於把學生引入歧途.

由 $a^{12}-b^{12}$ 分解出 $(a-b)$ 爲分解因數的最壞方法. 如 n 爲偶數絕

對應該當作兩個平方的差．如

$a^{12}-b^{12}=(a^6-b^6)(a^6+b^6)$，

並非　$(a-b)(a^{11}+\cdots\cdots\cdots\cdots)$

關於奇數乘羃這些公式同樣不應當用，除非 n 爲質數，即：

$a^3\pm b^3$，　$a^5\pm b^5$，　$a^7\pm b^7$，　$a^{11}\pm b^{11}$，等等．

在這些二項式裏 $a^3\pm b^3$ 常常要另外討論，並且在提出 $a^n\pm b^n$ 以前，因任何人都很難的贊成分解 $a^7\pm b^7$ 或更高次的因數，這樣說來，學生學習這五種複雜——因其相似，所以很容易混亂——的法則，只爲了分解 $a^5\pm b^5$ 的因數．

凡是打算教學關於二項式 $a^n\pm b^n$ 的例題最好不要教學 $a^5\pm b^5$ 以外的公式；這樣就不必記憶上面所提出的五種法則也可應付裕如了．

分解 ax^2+bx+c ——有一個必要的場合，而其分解法却有種種的不同，即二次三項式 ax^2+bx+c 的因式分解是也．在較高深的課程裏常常這樣 $ax^2+bx+c=a\ (x-r_1)(x-r_2)$，此地 r_1 與 r_2 爲 $ax^2+bx+c=0$ 的二根．對於初學者這個方法可用具體的例子來說明：

$$\begin{aligned}x^2-3x-4&=x^2-3x+\left(\tfrac{3}{2}\right)^2-\left(4+\tfrac{9}{4}\right)\\&=\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2-\left(\tfrac{5}{2}\right)^2\\&=\left(x-\tfrac{3}{2}+\tfrac{5}{2}\right)\left(x-\tfrac{3}{2}-\tfrac{5}{2}\right)\\&=(x+1)(x-4)\end{aligned}$$

不過就是這樣也有好多例題對於初學者仍感困難．

另外一種方法乃是把每個二次三項式寫成一種特別樣式 x^2+px+q，如下例所示：

$$3x^2-10x+3=\frac{9x^2-30x+9}{3}$$

$$=\frac{(3x)^2-10(3x)+9}{3}=\frac{(3x+9)(3x-1)}{3},\text{等等.}$$

不過這個方法須用分式，而學生此刻尚未學到分式．而且須引用較大的數目，無怪乎在好多的場合這個教學得不到好的結果．

還有一種方法有些教育家很稱贊它，其法即把 x 的係數想法分成兩部份，使其乘積等於 ac，例如求分解

$$6x^2-95x+75,$$

先求兩個數其和為 -95 其積為 450．這兩數設已求得為 -5 與 -90，那末，

$$\begin{aligned}6x^2-95x+75&=6x^2-90x-5x+75\\&=6x(x-15)-5(x-15)\\&=(6x-5)(x-15).\end{aligned}$$

這個方法有兩種不妥當的地方．有時須計算很大的數目，而且學生往往不能了解其所以然．

最自然的方法，而且由經驗上得到是很好的成績，乃是把這種運算看作乘法的逆算．這個方法平常謂之十字乘積法(Cross-Product Method)，有的著作者稱之謂猜試法 (Method of Guessing)，不過他似乎忘掉了其他方法也常常利用猜試也．

如果我們把已知的式子已去掉其單項因式，十字乘積法更較為

簡單，這樣我須記住每個所求的二項因式都不能再有單項因式．如分解

$$72x^2-145x+72$$

我們分解 $72x^2$ 有好些不同的方法，但很顯然的這些所劈的兩個因式中不能有公因式，如果不然我們就可在結果中兩個二項式之一發現了單項因式．所以我們僅可分解爲 $72x\cdot x$ 或 $9x\cdot 8x$．同樣末項也僅可分解爲 72×1 與 8×9．

於是我們僅有兩種可能的分解：

$$\begin{array}{ll} 72x-1 & \qquad 9x+8 \\ x-72 & \qquad 8x-9 \end{array}$$

第一種組合很顯然的所得的中項太大，而第二種却恰爲 -145．所以

$$72x^2-145x+72=(9x-8)(8x-9).$$

幾個困難的場合——使學生一時學習許許多多的方法是不合教育原理的，但是教師應該熟習所有較重要的方法，以便臨時應變，有一種很有興味的方法並且可用以求解許多不這樣便極感困難的例題．這種方法乃根據對稱與循環對稱 (Symetry and Cyclo-Symetry) 而得．

一種函數對於 x, y 爲對稱，如果交換這兩個字母後該函數仍不改變，例如 $3x^2-5xy+3y^2$．一種函數對於 x, y, z 爲對稱，如果該函數對於其任何兩個字母爲對稱．例如

$$x^2+y^2+z^2,\ a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2.$$

一種函數對於 x, y, z 爲循環對稱，如 x 易以 y, y 易以 z, z 易以 x, 我們仍得出原來函數，例如

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2, \qquad a^2b+b^2c+c^2a.$$

每個對稱函數均爲循環對稱，但反之不然.

第一，二，三各次對稱函數的普遍寫法爲

1. $a(x+y+z)$

2. $a(x^2+y^2+z^2)+b(xy+yz+zx)$

3. $a(x^3+y^3+z^3)+b(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+x^2z+xz^2)+cxyz.$

分解對稱式與循環對稱式的因數可由下例說明：

1. 分解 $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$

因爲使 $x=y$ 則此函數等於零，故可以 $x-y$ 除盡，但該函數爲循環對稱，所以也可以 $y-z$, $z-x$ 除盡. 又因已知函數爲三次同次式，則其所有的文字因數只 $(x-y)$, $(y-z)$, $(z-x)$ 而已，所未知者僅數目的因數. 設 k 爲此數目因數，則

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=k(x-y)(y-z)(z-x),$$

代 x, y, z 以數值，如：

$x=2$, $y=1$ $z=0$; 則 $4-2+0=k(-2)$, 卽 $k=-1$.

$$\therefore\ x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=-(x-y)(y-z)(z-x).$$

2. 分解 $x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3$.

設 $x=y$, 這個函數等於零，因而可以 $(x-y)$ 除盡. 因該函數爲循環對稱，故 $y-z$ 與 $z-x$ 也都是它的因數.

又因已知函數爲四次同次式，所以一定另外尙有一次因式而且

爲循環對稱與同次，這樣的因式當可以 $k(x+y+z)$ 代表. 所以

$$x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3=k(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$$

設 $x=2,\ y=1,\ z=0$, 則

$$2-8+0=k(-6),\ 即\ k=1.$$

所以原式 $=(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$.

3. 分解 $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$

同樣我們可求出其因數中有 $(x-y)(y-z)(z-x)$，其餘因式必爲二次並且是循環對稱，即爲下面的樣式

$$k(x^2+y^2+z^2)+l(xy+yz+zx),$$

此地 k 與 l 爲未知數. 於是

$$(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5=(x-y)(y-z)(z-x)[k(x^2+y^2+z^2)+l(xy+yz+zx)].$$

命 $x=2,\ y=1,\ z=0$, 則

$$5k+2l=15\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

再命 $x=1,\ y=0,\ z=-1$, 則

$$2k-l=15\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解(1)與(2)，得 $k=5,\ l=-5$, 所以

$$(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5=5(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$$

下表寫出幾個這樣的例題與其答案；其他還有許多可在較詳盡的代數裏參攷.

1. $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x)$.

2. $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(y+z)(z+x)$.

3. $xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x)=-(x-y)(y-z)(z-x)$.

4. $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$

$$=-(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z).$$

5. $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$

$$=(x+y)(x-y)(y+z)(y-z)(z+x)(z-x).$$

6. $x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)$

$$=-(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$$

7. $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$

$$=5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx).$$

8. $(x+y)(y+z)(z+x)+xyz=(x+y+z)(xy+yz+zx)$.

方程式與問題

恆等式與方程式——很顯然的在 $a+a=2a$ 與 $a+7=2a$ 中間有很大的區別．前者，叫作恆等式，a 為任何值均可成立；後者，叫作方程式，僅當 a 為某值時方能成立．恆等式有時也稱之為恆等的方程式，論述一種可證明的算學事實；它是一種定理．方程式須要求根，因而是一種問題．總之，方程式必須求解，恆等式必須求證．

用觀察法去推斷一種等式為恆等式還是方程式，並不是常常可能的，但如應用平常解題的方法這個事實尙易判別出來．如果能夠

把所有的項都消掉，即該等式化作 $0=0$，則該等式必為恆等式．因此，打算斷定下面的等式是否為恆等式，可進行如下：

$$\frac{1}{x}-\frac{x+3}{6x}=\frac{x+3}{6x}-\frac{1}{3}.$$

去分母，　$6-x-3=x+3-2x.$

移項，　$-x-x+2x=-6+3+3.$

即　$0=0.$

由此便可斷定該等式為恆等式．

如果不是每項都消掉，這個等式便為方程式，有時還發現一種等式其未知量如為有限值便不能滿足，例如

$$x+3=x+4.$$

但是 $\infty+3=\infty+4$，所以其根為無限大．

如果在一種方程式中，所有包含未知量的項都被消去，同時其餘各項不能消去，則其根必為無限大．不過在實用問題裏，無限根便是表示這種問題無解答．

對於兩個方程式包含着兩個未知數，如 x 與 y，也有同樣的說法．如果我們消去一未知量，其結果方程式為恆等式，則已知之兩方程式互為因果．這樣的方程式謂之相依 (dependent)，其中未知量之一可任意給以數值均無不可．例如：由下式用比較法消去 y，

$$\begin{cases} y=\dfrac{2x+3}{x^3-7x-6}+\dfrac{x+1}{x^2-x-6} \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \\ y(x^2-2x-3)=x+2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

則得

$$\frac{2x+3}{x^3-7x-6}+\frac{x+1}{x^2-x-6}=\frac{x+2}{x^2-2x-3}\cdots\cdots(3)$$

(3)的解答爲 $0=0$, 所以(1)與(2)爲相依.

如果消去後的方程式歸結成 $0\cdot x=a$ 的形狀，則任何有限數値都不能滿足原來方程式. 這樣的方程式叫作矛盾方程式. 下組方程式即其一例:

$$\begin{cases}3x+6y=7\\3x+6y=8\end{cases}$$

以上這幾點對於中學生無多大價値，但敎師須曉得它們，因爲在課室裏有時也許發生這樣的問題.

相等方程式——假設在下面的方程式內我們並不知道所謂最小公分母，而兩邊乘以 $2(x-1)(x+1)$，我們即得如下之解答:

$$\frac{4}{x-1}=\frac{3x+2}{2x-2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$8(x+1)=(3x+2)(x+1),$$

或 $8x+8=3x^2+5x+2.$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$\therefore\ 3x^2-3x-6=0.$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

$x^2-x-2=0.$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

$\therefore\ x=-1,\quad x=2.$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

但僅有一種根，即 $x=2$ 能滿足(1)，於是遂發生一種問題，就是怎麼憑空發生出來一個錯誤的答案 $x=-1$?

自然我們假定已知方程式(1)爲眞確，因而我們必須證明逐步的方程式 (2, 3, 4 等) 爲眞確. 因爲上例中每步變化都根據某種公

理，並找不出錯誤所在．不過我們並不是求證一種定理只是求能滿足(1)的根而已；即我們必須證明如(5)爲眞確則(1)爲眞確，或者我們檢查由(5)到(4)，由(4)到(3)等各步是否合理．由(2)到(1)是根據這樣的公理：等量除等量其商必等．這個公理不過以零爲除數時則不眞確．因此這一步便不眞確如

$2(x+1)(x-1)=0$，卽 $x=-1$，或 $x=+1$.

所以 $x=-1$ 的值，固能滿足(2)但不定滿足(1)．

一個方程式兩邊乘以含有未知量的式子，常常因以引導出來一種外來根(extraneous root)．

例如 $x-3=4$ 只有一根，$x=7$.

但 $(x-3)(x-5)=4(x-5)$ 則有兩根，

$x=7$，與 $x=5$.

方程式之有同根者謂之相等方程式．在求解一方程式必須證明每個方程式都與前一個相等．不過在初等代數裏解方程式時，引出不相等的方程式的機會很少．只有兩種這樣的場合如下：

乘分方程式兩邊以分母的倍數，但非最低次數，這樣便引出外來根．

平方方程式的兩邊往往發生外來根；例如

設 $x-4=2$……………………………(1)

則 $x^2-8x+16=4$ ………………(2)

(1)式僅有一根卽 $x=6$，而(2)式則有兩根，$x=2$ 與 $x=6$.

因此凡解根號方程式常引出外來根，所以對於根號方程式的根

都須檢驗.

二次方程式——關於解二次方程式的最重要的方法要算是公式法. 這個方法根據着配方 (Completing the Square) 求得公式, 學生如果忘掉公式時也須由配方推求出來. 不過配方不甚適於解較複雜數目或文字的方程式, 並且其中包含着很多不必要的工作. 所以這個方法雖然很適用, 但不應過於擴張了.

應用關於 $x^2+px+q=0$ 的求根公式須計算很複雜的分數如果 x^2 的係數不爲 1 時, 所以最好簡直學習或應用關於 $ax^2+bx+c=0$ 的求根公式:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

這個公式應該很熟習的記住而且應用到好些數目或文字的習題.

還有値得我們十分注意的方法便是因數分解求根法. 有些著作者因爲這種方法的簡單很加贊許, 如同對於上法一樣的看待. 如果用因數分解法可解每個方程式, 則公式儘可完全不用, 這樣, 自然是最好的計劃. 但是學生如果求解所有的例題必須學習那個公式, 如果等到學過因數分解法以後再用公式法常常感到麻煩與不必要. 反過來說, 如果使學生先學習配方法然後再學因數分解法便感到很大的興味與快慰. 他們發現了原先需要許多周折的例題乃能很簡單而輕快的解決. 但是我們切不要忘記了在實用的例題中其係數是由度量而來, 因此實用的例題往往不能應用因數分解法.

因數分解法除去簡單外尙有兩種優點, 卽: 第一它可應用到高

次方程式，有時把一個方程式所有的根都很敏捷的求出來，爲其他方法所不及.

用公式求解 $x^6-9x^3+8=0$，得 $x^3=8$，$x^3=1$. 學生因而斷定 $x=2$，$x=1$. 但因數分解法很顯然的看出有六個根，因爲

$$x^6-9x^3+8=(x-2)(x^2+2x+4)(x-1)(x^2+x+1)$$

第二，這個方法可顯示給我們用含有 x 的式子除方程式的兩邊移掉一個或多個根. 例如方程式 $x^2-a^2=(x-a)(a+b-x)$，兩邊除以 $(x-a)$，我們即可曉得由 $x-a=0$ 求出一根，其他一根則由 $x+a=a+b-x$ 中求出.

實用問題——實用問題在初等代數中要算是最重要的節目. 可惜好多學生對於這種問題感到極端困難，以至討厭了這個節目. 解題的能力需要兩事，即：思想的能力，與關於這種工作的技術. 好些學生很能夠論理的推斷而竟失敗，惟一的原因就是他們未曾注意到技術方面. 所以我們應該慢慢的有步驟的引導學生學習解答這種問題的方法.

解答每一個問題，都需要一種翻譯能力把普通語言譯作代數符號，所以在研究解題以前，很應當有系統的作些這樣翻譯工作. 先使學生用代數符號把一些如下所示的句子寫出來：

a 與 b 平方的和.

a 與 b 立方的積.

m 與 n 之差的立方.

隨後再給出一些關係到問題的翻譯，如：

a 比10多幾何?

寫出三個連續數，其最小者爲 x.

A 年20歲，問 x 年後其年齡爲何?

求 700 的百分之 x.

在可能範圍內總想法把所有以後在問題中常發現的量與其關係都在此地提到以作準備.第二步便是試驗着寫出方程式來，但不必求解.最初關係到的方程式應極簡單以至可以逐字的翻譯出來，例如:

a 的二倍等於10.

$$2\times a=10.$$

450 的百分之五爲何數?

$$x=\frac{5}{100}\times 450.$$

經過一些練習以後，實用問題便可提出來，——最初只關係到一個未知數並且可以直接翻譯出來的問題；然後再提出含有兩個未知數的問題，其中一語用來說明兩個未知量的關係，同時其他一語便可用來作成方程式.

同樣我們應該對於以後各章的例題試驗着完全分起等次來總避免着困難的堆積，不過究竟如何排列法只可在教科書上去參攷.

我們的確知道沒有方法可把每一個問題都歸納到某種樣式裏去，但是學習一些有系統的簡單問題，就可得到一種作題的技術，在許多場合很能幫助他解答普通的實用問題.

圖解

為什麼要教學圖解——所以把圖解列到中學課程裏的理由可總括之如下:

1. 圖解法是比較具體很可用以防止把代數完全變成已知法則的機械應用.

2. 圖解在現代用途極廣，普通在報紙上，雜誌上，與書籍上都常常採用，對於這些圖解的熟習要算是一種普通常識.

3. 這樣表示變數的方式在其他科學中也有很大的功用. 為研究物理，力學，化學，氣象學，經濟學，等等，必須懂得圖解.

4. 好些算學的事實，用圖解可以呈現到眼裏來，不這樣或許不容易看出，例如關於各種方程式的根數，矛盾方程式或相依方程式的性質，等等.

5. 圖解能使學生解出許多的例題，不用它或許一點也作不上來；如求解高次方程與超越方程 (Transcendental equation)，等等.

6. 學生對於高等算學中的重要觀念之一（即函數）可藉以得到明確的了解.

7. 圖解能引起學生興味並且也很容易了解.

初步例題——教學圖解的基本概念是極簡單，而這樣的教材又非常的多. 此地僅擇要說幾點:

1. 把工作分成如下各類:

a. 用圖表示一種已知的數目表；如氣候圖解，人口圖解，等.

b. 圖解一種由學生計算求得的數目表；例如由 0 磅到 6 磅鐵的價值.

c. 圖解一種物理或幾何的公式；如 $C=\frac{44}{7}R$

d. 代數圖解.

e. 圖解問題.

2. 只是作圖仍不夠用；必須再加以解釋. 因而在溫度的圖上，學生應該求在已知時候的溫度，求相當已知溫度的時候，極大與極小，溫度增加速度最快的時候，等等.

3. 應該使學生知道如果所關係的兩種量成比例，則其圖爲經過原點的直線；因此推出作這樣圖的敏捷方法.

4. 打算得到好的結果必須利用方格紙 (cross-section paper). 在教室內可預備方格黑板.

5. 爲作統計圖不要太費多的時間.

函數圖解——學生只是作些函數的圖並用以解方程式尙嫌不足；還可應用這些圖解答其他關於函數與方程式的問題. 因此學生應求出極大與極小；他們應曉得可用同一的圖求解 $f(x)=0$，與 $f(x)=5$；他們還應知道爲什麼 $x^3-6x^2+11x-6=0$ 有三個根，而 $x^3-6x^2+11x-6=40$ 僅有一根，等等.

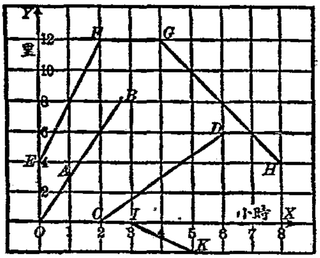
在討論聯立方程式時，圖解可用以解釋爲什麼聯立一次方程式僅有一組根，而高次的則有好幾組. 又可使學生明白爲什麼矛盾一次方程式沒有有限根，而相依方程式則有無數的根.

圖解問題法——在代數裏普通求解問題常常把問題的條件寫成方程式. 但用圖解法有好些問題可以直接解決並無須用方程式.

前段業已說過兩個變數成比例則其圖爲一直線，這一種關係在

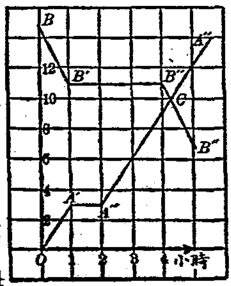
圖解裏常常可以利用．設 x 與 y 為一點的坐標，下面的變數常可用直線來表示：$x=$ 時間，$y=$ 等速度，的運動物體所經過的距離；$x=$ 時間，$y=$ 一人的工作量；$x=$ 容積，$y=$ 物體的重量；$x=$ 時間，$y=$ 經過水管內以等速率流的水量，等等．

用圖表示一個人每時行走三里的移動，我們只須指定一點，如 (1, 3) 或 A，再連此點與原點．每小時縱坐標的增加等於行走的速率，即每時3里．同樣，CD 代表另一人的行動，他遲二小時才動身而每小時行 $1\frac{1}{2}$ 里．EF, GH 表示第三人的行止他由4里處動身，以每小時行4里的速度進行，過兩小時後休息二小時，其後乃以每小時2里的速度向起身處返行．IK 表示第四人的行動，他比第一人遲3小時動身而以每小時1里的速度反向而行．

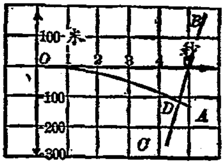


例題1．A 與 B 各從相距15里的兩鎮動身相向而行．A 每小時行三里，但在途中休息了一小時；B 每小時行4里而休息了三小時，問幾時後他們相遇？

作 $OA'A''A'''$ 與 $BB'B''B'''$．其交點 C 的橫坐標即所求之時間．即 A, B 相遇須 $4\frac{2}{7}$ 時．



例題 2. 一塊石頭墜入井中，其入水聲達到井上須 5 秒後. 設聲浪之速度姑作每秒 360 米，而 $g=10$ 米，則井深當爲若干?

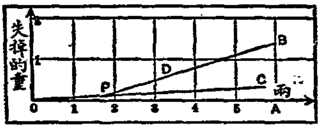


（物體 t 秒墜下 $\frac{g}{2}t^2$ 米）

作墜下物體之圖 ODA，使距離爲負，以表示向下運動. 因聲浪係向上運動，其圖 CB 乃由連結 $(4,-360)$ 與 $(5,\ 0)$ 而得. 於是其交點 D 之縱坐標即所求之數.

求得井深 $=110$ 米達.

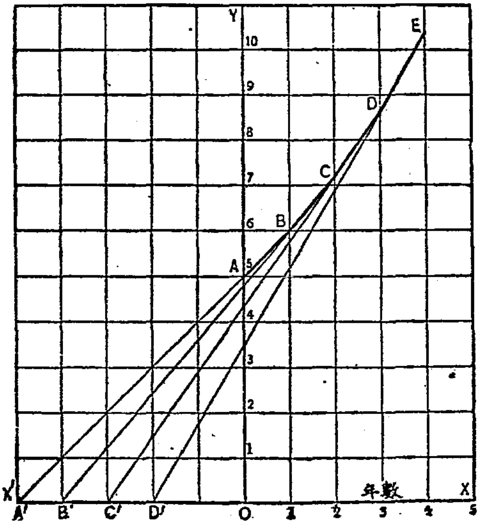
例題 3. 重六兩之金鋅合金在水中秤之減去 $1\frac{1}{2}$ 兩. 設鋅減少其重量之 $\frac{1}{3}$，而金減少其重量之 $\frac{1}{19}$，問該合金中有多少金?



設 OA 表示該合金的重量，AB 表示在水中失掉的重量. 過 O 作 OC 使其斜度爲 $\frac{1}{19}$（即連結 O 與 $(19,1)$，或 O 與 $(5,\frac{5}{19})$. 過 B 作 BD，使其斜度爲 $\frac{1}{3}$. 則 OC 與 BD 的交點 P 之橫坐標，即表示我們所求之重量 $(1\frac{4}{5}$ 兩$)$.

例題 4. 求本金 5 元，複利率 20%，4 年之本利和.

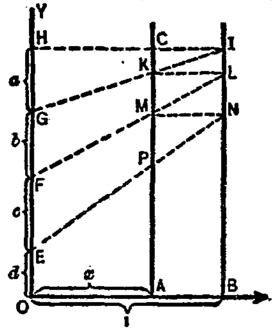
以橫坐標的單位數表示年數，以縱坐標的單位數表示元數. 設 OA 表示 5 元. 在 OX' 上取 $OA'=\frac{100}{20}=5$. 作 $A'A$ 且延長之到 B，則 B 的縱坐標表示一年後的本利和. 作 BB' 且延長至 C，則 C 表示二年後的本利和，等等. E 的縱坐標，即 10.30 即所求之元數.



注意自然不需要作出 $A'A$, $B'B$ 等. 只把直尺這樣的放置使 BA 的延長線過 A', 等等. 折線 $ABCDE$ 表示本利和總比公式 $a(1+r)^n$ 較好，因後者須 n 爲整數也.

純粹圖解法——普通作一種函數圖解並不是純粹圖解法，因多少尙需算術的工作，即計算坐標的數値也. 不過這些數値也可用作圖法求得，因而便成爲純粹圖解法. 用圖表示一種有理整函數的値可以三次方程式作例，如 ax^3+bx^2+cx+d 當 x 爲已知數値時其函數之値可求之如下.

在 OY 上取 $OE=d$, $EF=c$, $FG=b$, $GH=a$, 並使 $OA=x$, $OB=1$ 作 AC 與 BI 平行 OY.



作$HI \parallel OX$，並設GI遇AC於K.

作$KL \parallel OX$，並設LF遇AC於M.

作$MN \parallel OX$，並設NE遇AC於P.

則$AP=ax^3+bx^2+cx+d$.

這種作圖的證法，可述之如下：

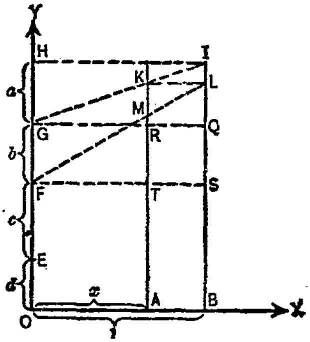
作GQ與FS平行OX，依次交AC於R, T. 而$QI=a$.

$RK:a=x:1$，或$RK=ax$.

於是　$SL=b+ax$.

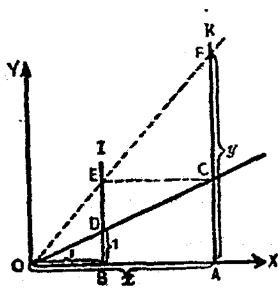
但　$TM:SL=x:1$, $TM=x(LS)$.

或　$TM=ax^2+bx$　等等.



對於某種基本函數前面的圖解法變爲極簡單. 例如$y=x^2$，我們可作出y（或AF），如果x（或OA）爲已知，其法如下：

作OB與BD各等於1（縱橫坐標的單位可以不同），設OD的延長線交AK於C. 作$CE \parallel OX$，則OE的延長線交AK於所求之點F.（此地也可以比例法證之，即$OB:BE=OA:AF$或$1:x=x:y$）



這樣求$f(x)$的方法如只須求少

數的數值很可利用，反之所作圖形太複雜恐怕把學生鬧糊塗了。

還有一種方法用以求某些縱坐標之值較爲簡單些，乃係利用某種標準圖形，遂可藉以求解任何二次方程式或三次方程式等等．例如求解各種二次方程式都可藉用拋物曲線 $y=x^2$ 與一直線．此地曲線 $y=x^2$ 始終不變，無論我們是打算求解那一種二次方程式，因此可以把它印出來或複寫出來．

這種方法根據的原理可以由下面兩個例題表示：

求解　$ax^2+bx+c=0$　　(1)

$$\left.\begin{array}{ll}\text{設} & y=x^2 \\ \text{則} & ay+bx+c+0\end{array}\right\}\quad\begin{array}{l}(2)\\(3)\end{array}$$

由(2)與(3)求 x 乃得(1)的根．但(2)爲標準曲線，而(3)則爲一直線．

例如求解方程式：

$$11x^2+30x-165=0 \qquad (1)$$

設　$y=x^2$　　(2)

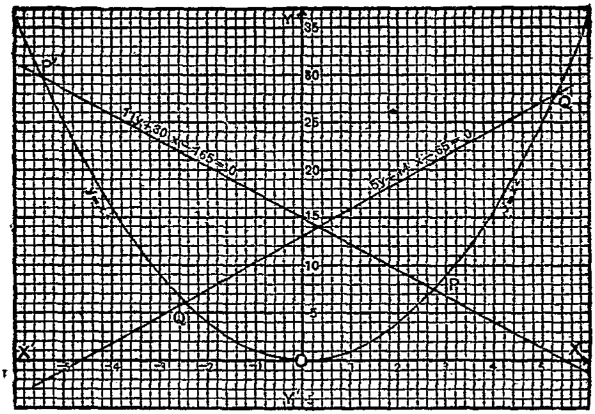
則　$11y+30x-165=0$　　(3)

在(3)式，如 $x=0$，則 $y=15$；如 $y=0$，則 $x=5\frac{1}{2}$．連結 $(0,15)$ 與 $(5\frac{1}{2},0)$ 二點的直線即(3)式的圖形，交(2)式的圖形於 P 及 P'，遂得　　$x=2.7$，或 $x=-5.5$．

同樣，求解方程式：

$$5x^2-14x-65=0.$$

設　$y=x^2$　　(1)



則 $5y-14x-65=0$.　　(2)

量 Q 及 Q' 的橫坐標，求得

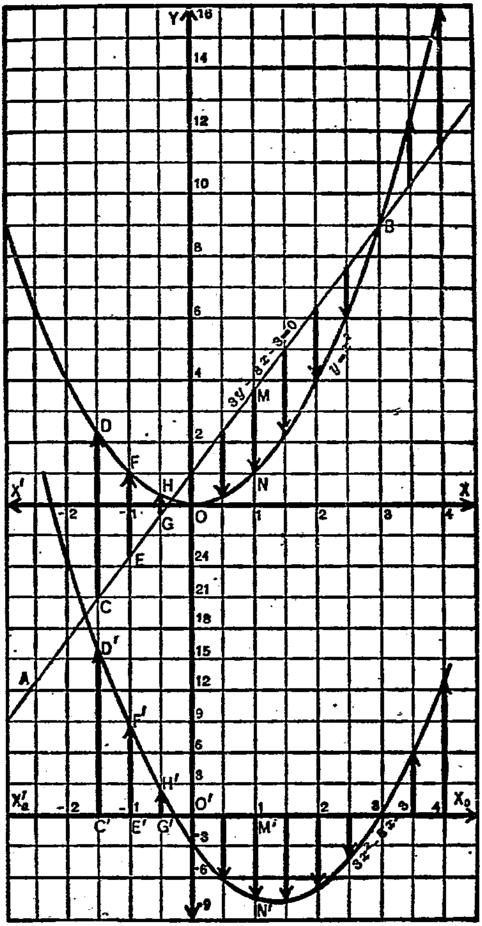
$x=5.3$, 或 $x=-2.5$.

作 ax^2+bx+c 的圖形可用同樣的方法，玆說明如下圖．作標準曲線 $y=x^2$ (DOB)，與 $ay+bx+c$ 的直線圖．

（在圖中，$a=3$, $b=-8$, $c=-3$.）

作一新軸 X_0X_0'，並使在新 Y 軸上之值 a 倍（3倍）原來軸上的值．使 $C'D'=CD$, $E'F'=EF$, $G'H'=GH$, $M'N'=MN$, 等，則 $D'E'H'N'$……即所求之圖．

同理，可解不完全或完全的三次方程 (incomplete and complete cubics)，用三次拋物線 $y=x^3$ 與直線，或用二次拋物線 $y=x^2$


Y
X′
X
O
X'_0
X_0
O′
A
B
C
D
E
F
G
H
M
N
C′
D′
E′
F′
G′
H′
M′
N′
$3y-3x-3=0$
16
14
12
10
8
6
4
2
24
21
18
15
12
9
6
3
-3
-6
-9

與圓把它們的圖形作出來. 用這些方法也能解四次方程式與作出它們的圖形，同時還可求出二次，三次，四次等方程式的虛根. 如打算詳細研究這些問題可參攷圖解代數(Graphic Algebra).

無理數與複數(Irrational and Complex Numbers)

什麼是無理數——在算術中，最先發明的數當然是那些所謂自然數 1, 2, 3,……它們常常被當作是基數，即代表在某羣中事物個數的符號，只用這樣的數僅有加法和乘法是永遠可能的運算. 爲的使除法也變作永遠可能的運算，必須把分數引用出來，同樣爲完成減法，負數便不能不用了.

我們打算使開方變作永遠可能的運算，才把無理數引導出來. 只用有理數，$\sqrt{2}$ 即不可解. 因爲設 $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$，而 m 與 n 無公因數，則 $2=\frac{m^2}{n^2}$，這是當然不可能的結果. 所以從前有一個時期無理數認爲是不可解.

我們認爲無理數與有理數同樣的實在，這件事實用幾何的看法，殊爲明顯. 在幾何裏每一個有理數都能用直線上的一點來表示，但是在該直線上的任一點却不能都代表一有理數.

例如 OB 等於一直角三角形的弦而其他兩邊都等於 1，則 B 點即表示一無理數，故無理數也是實數的一種.

無理數的定義——如果我們用方程式：

$$\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2.$$

與無理數下定義，便犯了一種錯誤，即用了未經定義的符號×．因爲乘號僅於其因數爲實數時才具有一種意義，但用來連結兩個無理數時其意義非等到無理數有了定義以後不能規定．

現在最流行的一種定義，此地不便詳細解釋，係特底凱(Dedekind) 堪桃 (Cantor) 等所發明．把無理數當作是一種符號把所有的有理數形成兩類，這一類的每一數與其他一類的每一數顯然區別開．

這是很顯然的在中學裏不能教學這些材料，縱然想方法證明$\sqrt{2}$爲一種符號把下面具體的數分成兩類即

1　1.4　1.41　1.414 ……………

2　1.5　1.42　1.415 ……………

或類似的討論均無甚價值，因爲學生不了解爲什麼我們爲無理數下定義却單單靠着有理數．

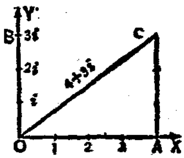
我們只好指示給他們下面等式是在根據着假定．

$$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}.$$

虛數——爲的使開方變作永遠可能的運算把無理數引導出來是必需的但尙嫌不足．爲研究$\sqrt{-1}$或$\sqrt{-4}$的意義，更不得不發現虛數．負數與無理數發現以後的好久，對於虛數尙不承認是一種數．所以這樣的主要原因就是一個問題如果寫成方程式係一種虛根的二次方程便無解答．假如代數只限於二次方程式，那末在實用上就沒有因緣把虛數引用出來．但是在用克丹 (Cardan) 法求解三次方程式時，如所有的根均爲實根 (irreducible case)，其所得答案則成

虛數形式．從前亞基默得 (Archimedes) 曾說過這樣的問題："用一平面把一球切下一部份使等於原體積的三分之一，" 如寫成方程式係三次方程其根則成虛數形式．所以爲求得實在解答我們必須能夠運算虛數．

虛數也如同其他數一樣的實在，從前流行的一種認爲虛數非數的見解未免錯誤．虛數的存在在高等算學好些節目裏都表現出來．在初等證明最好用幾何的表示．我們很容易證出虛數或複數是用 OX 線外的點來表示．



例如 B 點 (或 OB 線) 表示 $3i$, OC 表示 $4+3i$.

如果我們應用有理數，無理數與複數，則所有代數上的運算都永遠可能．於是再不需要引用其他種類的數，除非我們改變了全部科學所根據的法則．

怎樣教學虛數——初學者有時認爲 $(\sqrt{-1})^2$ 應等於 ± 1, 因爲他們這樣求得: $(\sqrt{-1})^2=\sqrt{(-1)^2}=\sqrt{1}=\pm 1$. 但是很顯然的 $(\sqrt{-1})^2=-1$, 因爲根的定義係由 $(\sqrt[n]{a})^n=a$ 而來．其誤謬的解答 $+1$ 乃係錯用了 $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ 的定律，縱然在實數範圍內，這個定律也只可適用於數的絕對值，例如 $(\sqrt{5})^2=5$, 只能等於 5, 但由上面定律則 $(\sqrt{5})^2=\sqrt{25}=\pm 5$, 其答案 -5 當然是錯誤．同樣 $(\sqrt[4]{1})^8=1^2=+1$, 如按上面的定律將得錯誤答案 ± 1, 與 $\pm i$.

關於虛數的乘法也有同樣的困難，例如

$$\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=i\sqrt{2}\times i\sqrt{3}=i^2\sqrt{6}=-\sqrt{6}.$$

此地學生往往計算如下:

$$\sqrt{-3}\times\sqrt{-2}=\sqrt{(-2)(-3)}=\sqrt{6}.$$

這樣困難乃由於符號的人爲限制．如 $\sqrt{-3}$ 依其原意應爲 $\pm\sqrt{-3}$，同樣 $\sqrt{-2}$ 應爲 $\pm\sqrt{-2}$，這樣，它們的乘積將爲 $\pm\sqrt{-6}$．乃經人爲限制後，其答案只得出 $-\sqrt{6}$，並且這是很值得注意的只有把 $\sqrt{-a}$ 寫作 $\sqrt{-1}\sqrt{a}$ 或 $i\sqrt{a}$ 才可求得這樣的結果．$a+ib$ 爲複數的普通樣式．如果學生曉得所有的虛數必須在作加減乘等運算以前都寫成普通樣式，他定然發現在實用上作雜數的運算都需要這樣．

對數

關於學理方面——所以把對數列在學校課程裏，主要是因爲它的實用價值，因而關於學理的學習似不應太過．如果只限於最基本的命題，則對數的學理亦頗簡易，因爲所有的命題都是由定義直接推求的結果，所謂定義卽 $x=log_b n$，設 $b^x=n$．因而所提到問題或定理都應寫作指數形式．舉例來說，求 $log\ 1$，我們必須把 $x=log_b 1$ 的方程改寫成 $b^x=1$ 的形式，則其解答自易．

求證 $log_b(mn)=x+y$，設 $x=log_b m$，$y=log_b n$，我們必須把題設與題斷都寫成指數形式則證法自明；卽:

題設 $x=log_b m$, 卽, $b^x=m$.

$y=log_b n$, 卽, $b^y=n$.

題斷 $x+y=log_b mn$, 卽, $b^{x+y}=mn$.

同樣把 $\log_3 5$ 用普通對數表出來，我們須把方程式 $x=\log_3 5$ 寫作 $3^x=5$.這個指數方程用普通方法解之得　$x=\frac{\log 5}{\log 3}$.

如需要更簡單的例證，我們可把上面的定理更爲具體的表示．如

$$\log 2=.30103,\quad 即\ 10^{.30103}=2.$$
$$\log 3=.47712,\quad 即\ 10^{.47712}=3.$$
$$\therefore 10^{.77815}=6.$$
$$\log 6=.77815.$$

對數的計算——雖然計算器械的發達多少減低了對數實用的重要，但這個節目仍不失爲初等代數中最主要的一個．所以必須使學生對於對數的實用很熟習以至他能夠計算的又快又精確．

不過我們切不要計算數目到極端精密，四位表對於許多的實用目的已竟夠用，雖然有時也用到五位表．但是六位或更多位的表在學校裏決用不着，因爲它們只有時用在很特別的情形．

在用任何一種表我們應該注意不要計算數目的精確超過表能較對的程度．我們此地不必談那些太顯然的誤謬如求 6 位而用五位表，只是要注意假定表上所給的數均爲絕對正確時所發生的誤謬．限制五位的對數其意爲不注意其餘的位，即其中所含有的錯誤可等於末位的 $\frac{1}{2}$．加減對數生出一種可能錯誤可等於所有錯誤之和．乘以 6 即等於 6 倍其錯誤之意，等等．例如求下式的對數．

$$x=\frac{1414\times 27^5}{.072\cdot\sqrt[3]{102}}$$

茲舉出可能的錯誤如下.

可能的錯誤

$\log\ 1414$……………………末位的$\frac{1}{2}$.

$5\log\ 27$……………………末位的$\frac{5}{2}$.

$\log\ .072$……………………末位的$\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{3}\log\ 102$……………………末位的$\frac{1}{6}$.

$\therefore \log x$……………………末位的$3\frac{2}{3}$.

縱然我們並不施以加減，只用表也是要發生錯誤的，例如，設

$$\log x = 1.59120.$$

用五位表求得　$x = 39.01\frac{2}{11}$　或 39.0118.

此地分子 2 是可能生出$\frac{1}{2}$的錯誤，而分母爲相隣兩對數之差可含有$\frac{2}{2}$的錯誤. 所以$\frac{2}{11}$的眞價値或可爲$\frac{2.5}{10} = .25$，或可爲$\frac{1.5}{12} = .13$. 因此x的末位(8)根本不可靠，其實前一位(1)也只是近似値.

在第一個例題裏，如$\log x$的値可含有末位的幾位之錯誤，而試求x至四位以上的確値當然是無效.

滑尺 (Slide rule) ——滑尺是一種很簡單的器具利用它可很快的計算乘，除，乘方，求根，等等. 其原理乃根據對數的性質，因此爲說明這種性質用這樣器具是最明顯不過的. 爲教師者凡能借到滑尺萬不可對於學生解釋對數性質時忽略了應用這樣精小而奇怪的機械!

第二十一章

三角法的教學法

概論

特性——一種學科定然具有一種特性.三角法當然也不能例外.我們在教學它的時候必須要注意它的特性.因此我們在討論這個題目以前,對於三角法與其他算學(幾何,代數)不同之點,不能不加以分析.現在簡單的把它提出來:

優點:

1. 三角法實用的價值極爲偉大,它能夠應用到實際的與有趣味的各種問題,其實在中等學校裏站在實用的觀點上,它確乎超過任何其他算學學科(如代數,幾何).它的應用範圍尚不限於學校工作,且能應用到所有精密的科學上,以至被認爲實用算學的主幹.西蒙(Simon)曾說過:"不但測量家,航海家,眼科學家,機械工程師,電機工程師時時需要它,而且因爲它的形式具有易化性(flexibility)還宜當作分析入門."

2. 三角法的學習很可利用來作學生正確化精密化的訓練,尤其

因為實用的關係能使學生注意他平常忽略的節目，如關於數目計算的方法即其一例.

3.三角法比較容易並且有很多的地方能夠引起青年學生的興趣.

劣點:

1.三角法在教育訓練上的價值較小.

2.三角法需要記憶的地方較多於幾何，代數.

教材——以上所說的特性當然可以作我們教學進程上選擇教材的原則，尤其主要的我們應該:

1.着重三角法那些能夠應用到實際問題的部份，或間接能夠應用的部份.

2.儘量的縮減那些需要記憶的部份，或為中學生不能應用的地方.

根據第一條原則，則關於直角三角形的解法，任意三角形的解法,高與距離的計算,等等,當然要佔重要的地位.根據第二條原則，有些需要記憶的公式或必須要縮減到最低限度，同時有些節目簡直可以取消.例如三角函數中的正矢餘矢可以永遠不提，而正割餘割也很少的應用，假如在高等算學課本中也不需要它們，我們也儘可取消.在歐洲各國中等學校裏，正割餘割差不多是用不着.三角法中的表上很難發現它們的存在，而且在高等算學教科書裏也只有很少的地方應用它們.有些德國著作家甚至對於餘切，也認為無用.

縱使必須學習正割，餘割，餘切的時候，只須知道這些函數不

遞是其他三種函數的倒數而已．因而如果在求 $cot(A+B)$，可先求 $tan(A+B)$； 如果打算把 $sec\frac{A}{2}$ 寫成 $cos\,A$ 的關係，可先把 $cos\frac{A}{2}$ 寫作 $cos\,A$ 的關係，等等．所以凡關於正割，餘割，餘切的分公式 (explicit formula) 都不必詳爲研究．

還有其他節目只可在數量上減少，例如關於大於 90° 角的種種討論卽歸此類．我們知道大於360°的角對於中學生沒有什麼實用的價値，卽在180°與360°中間的角，應用的地方也很少．因此如果使學生牢記住六個或更多的公式用作由 90° 以上諸角的函數變到銳角的函數，似乎是小題大作．

普通教科書關於三角函數恆等式的證明，與方程式的解法，往往過於着重，以至於失當．

假如規定的教學時間很有餘暇，另外倘可多添些教材的時候，與其想法證明很複雜的恒等式如：

$$\frac{sin(x+2y)-2sin(x+y)+sin\,x}{cos\,(x+2y)-2cos\,(x+y)+cos\,x}=tan(x+y)$$

我們寧可對於棣威耳氏(Moivre)定理與複數圖解的關係，多加以發揮較爲有用．

三角法的主要部份

三角函數的定義——普通三角函數下定義所用的方法，不外下列三種：

1. 當作正負坐標的商（或比）．

2. 用線段表示（中國所謂八線法）.

3. 當作直角三角形各邊的商（或比）.

第一法是最普遍的一種即對於各象限的角都同樣的成立，因此許多教科書在開始第一章就把它提出來．但在另一方面着想，正負線與坐標等的觀念，並不容易了解，講授時往往發生困難，我們在開始的時候仍以避免講它為是．我們知道在第一象限的函數對於初學者頗佔重要的地位，第一步無妨只講關於銳角的函數.

用線表示函數也很普遍，尤其適於說明角與函數如何變化的關係，但是同樣也不該在開始的時候去討論.

因為直角三角形的解法，可以說是實用三角法的主要部份，所以用直角三角形各邊之比作為函數的定義，極為相當．並且這種說法又極簡單，最宜于初學者．一俟學生應用這些知識練習了許多問題，並且對於這些比值完全熟習了，然後再下一般的定義.

還有一點要注意，即同時教學兩種定義是不合乎教育原理的.

直角三角形的解法——差不多這是初等三角法上的最主要的一部份，如果能夠澈底的了解它，即可對於中學範圍內的大部份的三角應用問題都可得到相當的解決．因此我總想法先講這一部份.

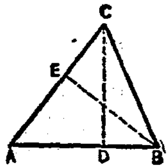
對於直角三角形的解法分為五種場合似乎不必，因為所有的場合都可用同樣的方法，並用不着加以區別，不過都是把兩個已知的量與所求的量寫成方程式再求解這個方程式而已．例如，我們此地仍用普通的符號，設 $\angle C=90^\circ$，如已知 A 與 c 求 b 即可把 A, b, c 連成一方程式　$\cos A=\frac{b}{c}$.

$$\therefore\ b=c\ \cos A.$$

這樣不用對數的解法可先提出來講，第一好在同一時間集中注意於一個問題上以免困難。第二庶可免去認爲三角法的工作絕對與對數有關的誤會。況且現在計算器這樣的普遍，不用對數的三角形解法更比較重要起來。

等到學生對於直角三角形的解法完全清楚以後，即可把應用的問題如求高，求距離等提出來。並且還可應用這種方法解答關於其他圖形的問題，不過須限於能夠分解成爲直角三角形的圖形如二等邊三角形，有法多邊形，普通三角形等等。因此我們能夠解很複雜的圖形，只要我們記住在這種場合必須分解原來圖形成一組直角三角形，並且使這些三角形互有關係，解出第一個，第二個也因之而解。

例1. 設如在$\triangle ABC$中AB(或c)$\angle A$與$\angle B$爲已知，求其高CD.



此地我們必須首先作一直角三角形使含有c及其隣角之一如$\angle A$(或$\angle B$)。所以須作$BE\perp AC$然後解$\triangle ABE$，我們求得$BE=c\ \sin A$，因而可解$\triangle ECB$，又因$C=180^\circ-(A+B)$所以

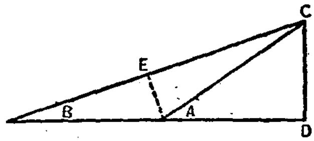
$$BC=\frac{BE}{\sin C}=\frac{c\ \sin A}{\sin(180^\circ-A-B)}.$$

最後解$\triangle CDB$遂求得所求之高，

$$CD=BC\ \sin B=\frac{c\sin A\sin B}{\sin\ (A+B)}.$$

同樣我們可用直角三角形的解法解答下述問題.

例 2. 設 C 與 A,B 兩點在同一鉛直面 (vertical plane) 內,並知$\angle A$ 及$\angle B$ 和 AB 的距離. 求 C 在 AB 上之高度 CD.



第一步當然先作一直角三角形使含有 AB 及$\angle B$. 因之作$AE\perp BC$, 於是求得 $AE=AB\ \sin B$. 又因 $\angle ECA=\angle A-\angle B$, 我們遂可解$\triangle AEC$, 得

$$AC=\frac{AE}{\sin(A-B)}=\frac{AB\sin B}{\sin(A-B)}.$$

最後由$\triangle ACD$得

$$CD=AC\sin B=\frac{AB\sin A\sin B}{\sin(A-B)}.$$

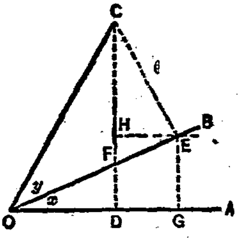
解以上的問題, 最好把最後結果以代數式表示出來, 然後再以數目代入該式. 如果起始便把數目代入不但以 $20°\ 4'\ 16''$ 代B之笨拙, 而且往往費些無用的計算, 例如在上例中計算 AE, AC 的數值便是不必要.

我們再舉出一個關於由一組直角三角形來解複雜的圖形的例題, 如和角定理的分析便是:

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y.$$

我們爲求 $\sin(x+y)$, 可把此值用一線段表示出來, 即, 可命 $OC=1$, 作 $CD\perp OA$, 則 CD 即所求之線段. 談到角度我們須知道並不是已知其本身的數值而是設想其三角函數爲已知.

第一步須先作一三角形使含有 OC 與其隣角 y，其函數爲已知．因之作 $CE \perp OB$．在直角三角形 OCE 中，$CE=\sin y$，$OE=\cos y$．我們再把圖形分析一下，檢查所有已知其函數的角度．遂得 $\angle CFB=\angle OFD=90^\circ-x$，又 $\angle FCE=90^\circ-\angle CFB=x$．

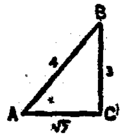


爲的作一直角三角形使含有 CE，我們必須關連上 $\angle FCE$，因爲這是它惟一的隣角故也．因而作出 $EH \perp CD$，又求得 $CH=\cos x\sin y$，$EH=\sin x\cos y$．同樣 OE 必須與 $\angle x$ 關連起來，作 $EG \perp OA$，可求出 OG 與 EG 之值．此地很顯然的 $CD=CH+EG$，由此可得所證的定理．

已知某函數求其他函數——關於這一步工作，往往應用關係諸函數的基本公式，而其應用的方法尤須靠着直角三角形，如下例所示．固然這些結果只限於 90° 以下的角，但如果給以相當的符號便可應用到各個象限的角．

例 1．　已知 $\sin A=\frac{3}{4}$，求 A 之其他函數．

設在直角三角形 ABC 中，使 $BC=3$，$AB=4$，則 A 等於已知角．此地很顯然的 $AC=\sqrt{7}$．因而所有 A 的函數都可直接由圖求得．



例 2．　已知 $\tan A=2$，求 A 的其他函數．

此地我們可使 $BC=2$，$AC=1$，則 $AB=\sqrt{5}$，於是所有 A 的函數當可由圖求得．

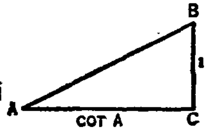
例3.　已知　$\sec A=\dfrac{m}{n}$，求A的其他函數.

此處可使 $AB=m$, $AC=n$, 則 $BC=\sqrt{m^2-n^2}$.

例4.　已知 $\csc A=m$, 求 $\cos A$.

設 $AB=m$, $BC=1$. 因而$AC=\sqrt{m^2-1}$, 於是$\cos A=\dfrac{\sqrt{m^2-1}}{m}$

例5.　以 $\cot A$ 表示其他函數.



設 $AC=\cot A$, $BC=1$. 於是

$AB=\sqrt{\cot^2 A+1}$，因之由圖便可求出其他函數.

證明恆等式的方法——如果原來的恆等式只含有一種角度的函數，最容易的證法便是把它用直角三角形的三邊表示出來，然後再用證明代數恆等式的方法去證明. 這種方法寫出來似乎很繁雜，但對於初學者頗不感困難.

例如求證　$\dfrac{\sin A}{1+\cos A}+\dfrac{1+\cos A}{\sin A}=2\csc A$,

我們把式內的函數都用兩線之商表示出來，即得

$$\frac{\frac{a}{c}}{1+\frac{b}{c}}+\frac{1+\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}=2\frac{c}{a}.$$

化簡得，　$$\frac{a}{a+b}+\frac{c+b}{a}=\frac{2c}{a},$$

$$a^2+c^2+2cb+b^2=2c^2+2cb,$$

即　$$a^2+b^2=c^2.$$

但此式我們已知其爲眞確，故原恆等式必爲眞確.

所有關於三角函數之基本公式如 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$, $\dfrac{\sin A}{\cos A}=\tan A$, 等都可用上法證明.

上法如果設直角三角形之一邊最好常用作分母者爲 1,則更較簡單.

例如在上例中設 $c=1$, 則恆等式爲

$$\frac{a}{1+b}+\frac{1+a}{a}=\frac{2}{a},$$

簡約之得 $$a^2+b^2=1.$$

還有一種方法常常比較省事，但需要一種計劃，即是把所有式中的函數都想法寫成兩種函數(平常爲 $\sin$ 與 $\cos$)．設如仍得不出結果來，則可再變成一種函數.

用這種方法證明前例當如下:

$$\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=\frac{2}{\sin A},$$

即 $$\sin^2 A+(1+\cos A)^2=2(1+\cos A),$$

即 $$\sin^2 A+\cos^2 A=1.$$

如果恆等式所包含的函數不盡是一種角的函數，同時含有 $\frac{A}{2}$, $2A$, $3A$ 等角的函數，則第一步必須把所有函數都變成一種角的函數.

例如求證 $$2\sin x+\sin 2x=\frac{2\sin^3 x}{1-\cos x},$$

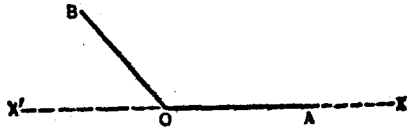
此地 $\sin 2x$ 必須以 x 的函數表示出來，即須以 $2\sin x\cos x$ 代 $\sin 2x$，此後即可照前面的例題證法.

同樣求證 $\tan\frac{x}{2}+\cot\frac{x}{2}=2\csc x$，

我們必須把 $\csc x$ 寫成 $\frac{x}{2}$ 的函數或把 $\tan\frac{x}{2}$ 與 $\cot\frac{x}{2}$ 變成 x 的函數.

大於 90° 角的函數——把大於 90° 角的函數變成銳角的函數，通常須記憶許多公式.

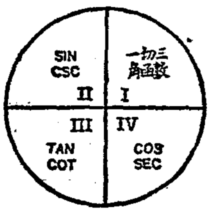
如果我們應用通常角的定義，把 $\angle AOB$ 當作由旋轉線依鐘針反對的方向而形成，則 OB 作爲終端半徑 (terminal radius)，再以 OA 的延長線 XX' 當作坐標軸，我們應用以下的定理即可把所有的函數寫作銳角的函數：



任意角的函數＝±終端半徑與 X 軸所成銳角的同樣函數.

此地±號並不是表示同時都可用，只是二者選用其一的意思. 選用法可照下圖所示，圖中把四個象限中的正函數都指出來，其餘函數均爲負. 又因每象限中的正函數互爲倒數，因此只須記住以下各函數爲正，便夠用了：在第二象限爲正弦，第三象限爲正切，第四象限爲餘弦.

正函數圖



如果學生對於用線表示函數的方法有清楚的概念，即以上的三部份也不必記.

例如把 $\cos 245°$ 寫作銳角的函數；此地 $245°$ 在第三象限，故其餘弦為負．而終端半徑與 x 軸所作之銳角為 $245°-180°=65°$，因此可知 $\cos 245°=-\cos 65°$．

逆三角函數——逆函數對於中學生比較的不十分重要．對於 $\sin^{-1}m$，$\tan^{-1}n$，等符號最好稱之為"角"，因為這樣稱呼可增加對於該符號的了解．例如讀

$\sin^{-1}\frac{3}{4}$ 為"其正弦等於 $\frac{3}{4}$ 的角"．

$\tan^{-1}x$ 為"其正切等於 x 的角"．

這樣能使學生解許多簡易問題並不須任何的特別方法，即如求下式：$\sin^{-1}\frac{1}{2}$，$\cos^{-1}\frac{1}{2}\sqrt{3}$，$\sin(\tan^{-1}1)$，$\sec(\tan^{-1}n)$，等等．

如果求解較複雜的問題，最好用一個符號代表該函數的角．例如求 $\tan(2\tan^{-1}n)$，$\cdots\cdots(1)$

設 $\tan^{-1}n=A$ $\cdots\cdots(2)$

則 $\tan A=n$．

$$\therefore\quad \tan(2\tan^{-1}n)=\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}=\frac{2n}{1-n^2}.$$

像(2)這樣代法作這類問題時最相當．

茲再舉出幾個關於含有兩種角的例題，試求

$$\tan\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}+\tan^{-1}\frac{1}{3}\right).$$

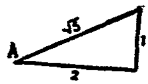
設 $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}=A$，則 $\sin A=\frac{1}{\sqrt{5}}$，

$$tan^{-1}\frac{1}{3}=B, \quad 則 \quad tan\,B=\frac{1}{3}.$$

$$tan\left(sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}+tan^{-1}\frac{1}{3}\right)=tan(A+B)$$

$$=\frac{tan\,A+tan\,B}{1-tan A\,tan B}.$$

但 $\quad sin\,A=\frac{1}{\sqrt{5}},$



$\therefore \quad tan\,A=\frac{1}{2},$

所以 $\quad tan\,(A+B)=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1.$

如果求證一個定理，可簡約其等式之一邊或兩邊．例如求證 $sin\,(sin^{-1}x+sin^{-1}y)=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$ 最好把 $sin(sin^{-1}x+sin^{-1}y)$ 如上法簡約之．

如果恆等式兩邊都是些三角逆函數，我們可求兩邊的正切（或其他函數）．例如求證

$$tan^{-1}\frac{3}{4}+tan^{-1}\frac{3}{5}=\frac{\pi}{4}+tan^{-1}\frac{8}{19}$$

可求兩邊的正切，即求證

$$tan\left(tan^{-1}\frac{3}{4}+tan^{-1}\frac{3}{5}\right)=tan\left(\frac{\pi}{4}+tan^{-1}\frac{8}{19}\right).$$

兩邊簡約以後均等於$\frac{27}{11}$，故原恆等式成立．

借書日期	還書日期

中華民國二十三年八月初版
中華民國二十四年三月再版

(85875)
師範叢書 中等學校算學教學法一冊
The Teaching of Mathematics in Secondary Schools
每冊定價大洋玖角
外埠酌加運費匯費
原著者 Arthur Schultze
譯述者 蘇笠夫
發行人 王雲五 上海河南路
印刷所 商務印書館 上海河南路
發行所 商務印書館 上海及各埠

一四八八上