Aus Wissen und Wissenschaft

GESAMMELTE ABHANDLUNGEN ÜBER DIE GESCHICHTE DER CHINESISCHEN MATHEMATIK

BAND IV—1

學藝彙刊 (52.)

中算史論叢

(四上)

李　儼　著

中華學藝社出版　　商務印書館發行

GESA LTE ABHANDLUNGEN ÜBER DIE GESCHICHTE DER CHINESISCHEN MATHEMATIK

BAND IV—1

中算史論叢

(四上)

李 儼 著

中華學藝社出版 1947 商務印書館發行

序

中算史論叢,前已出版三册,玆更將中算史論文之發表於各雜誌及日報者,詳加校訂,編成此册.就中一至八篇,曾由劉文海君校對,其第九篇「近代中算箸述記」則重行寫定後,并由孫文青先生詳校一過,特此誌謝.

第四册所收者,計有下列各篇:

中國的數理(文化建設月刊,創刊號,中國文化檢討專號,二十三年十月,第一四九至一五三頁);測圓海鏡批校(國立北平圖書館館刊,第八卷第二號,二十三年四月,第四九至七〇頁);測圓海鏡研究歷程考(學藝雜誌第十一卷第二號,第六號,第八號,第九號,第十號,二十年三月,八月,十月,十一月,十二月,第一至二六頁,第一至一五頁,第一至三六頁,第一至一〇頁,第一至一四頁;第十二卷第一號,第二號,第三號,第四號,二十一年二月,三月,四月,五月,第一一七至一三四頁,第八五至一〇一頁,第九九至一一一頁,第八三至九三頁);唐宋元明數學教育制度(科學雜誌第十

七卷第十號,二十二年十月,第一五四五至一五六五頁);清代數學教育制度(學藝雜誌第十三卷第四號,第五號,第六號,二十三年五月,六月,八月,第三七至五二頁,四九至五九頁,三九至四四頁).清季陝西數學教育史料(西安西京日報,陝西省立第一圖書館第一屆展覽會特刊,二十三年八月十三,十四,十五,十六,十七,十八,十九日);東方圖書館殘本數學舉要目錄(圖書館學季刊,第七卷第四號,二十二年十二月,第七二一至七二六頁);印度歷算與中國歷算之關係(學藝雜誌,第十三卷,第九號,第十號,二十三年十一月,十二月,第五七至七四頁,第五一至六四頁);近代中算著述記(圖書館學季刊第二卷第四號,十七年十二月,第六〇一頁至六四〇頁;第三卷第一,二號,第三號,第四號,十八年六月,九月,十二月,第一四九至二〇〇頁,第三六七至三八七頁,第六〇一至六一七頁)

中華民國二十六年三月十五日

李　儼記於西安

目次

中國的數理

中華民族爲古代文明民族之一,其一切政治學術,最初卽有相當進展.自然科學,如天文曆數,其發達情形,初不讓其他先進各民族.獨惜年代久遠,載籍不傳,事蹟無由確知.據古書傳說,原始中國的數理,可以獲知者,則爲結繩之應用,數字之創作,九九之傳說.結繩之制,史書記載詳明,卽今初開化民族,尙有應用之者.數字創作,證以鐘鼎甲骨之記載,則遠在殷周以前.其九九相乘之說,則周秦之際,諸子論說,時有附記,尙可徵信.此外古代建築,幾何圖案之應用,及天象星辰之觀測,並有藉於算數.而世本有『黃帝使羲和占日,常儀占月,臾區占星氣,伶倫造律呂,大撓作甲子,隸首作算數』之說,降及周代,文物制度,燦然大備.周公制禮,周官保氏曾:『教國子以六藝:一曰禮,二曰樂,三曰射,四曰御,五曰書,六曰數.』內則云:『六年教之數與方名,十年出就外傳,居宿於外,學書計.』是周代亦已注重數學教育,其文化之遠邁前古,非偶然也,

其古算書之流傳至今者,首推算經十書,其第一部之周髀算經,有周公商高問答之語,其說述天算學說,爲不朽名作.第二部之九章算術,爲世界有名之純粹算術書.周髀算經首論正三角形(即句股形)之性質,所述句三,股四,弦五,與畢達哥拉斯定理,同其意義,並由此應用於測天量地,於整數之外並及分數之推算,如二十四氣以九寸九分又六分之一進爲加減,是其例也.九章算術,以流傳長久,疊經删改註釋,其分章次序,尙無定論.但整數四則,分數四則,比例,差分,開方,與乎簡單之平面立體幾何形體之計算,以至聯立方程,並可於此中求得.算經十書之現存者,尙有孫子算經,張丘建算經,夏侯陽算經,五曹算經,五經算術,並海島算經,數術記遺,與上述之周髀,九章及唐代之緝古,共爲十種.孫子算經會論及不定方程.張丘建算經並知不定方程,有一問數答之例,次論及二次方程.此外開平立方不盡,則孫子算經,張丘建算經,及其細草,並以『加借算』求其奇零,與方程式理論,深相契合.

中國古代計算之工具爲算,亦稱籌.策.說文竹部曰:『算長六寸,計曆數者,』前漢書律曆志曰:『其算法用竹,徑一分,長六寸,二百七十一枚,而成六觚爲一

握.』漢朝之尺度,按漢書食貨志,稱:『王莽居攝,變漢制,以周錢有子母相權,於是更造大錢,徑寸二分,重十二銖,文曰大錢五十.』所謂『大錢五十』,卽『漢大泉五十』,今粗計得『大泉五十』直徑長二十七公釐,則六寸當爲一百三十五公釐,長不及半英尺.每枚徑一分,當二又四分之一公釐,積二百七十一枚,僅盈握也.此項長及半英尺之籌策,用以縱橫布算,自嫌笨重.是以隋書律曆志減其長爲三寸,甄鸞註數術記遺減其長爲四寸也.此種用籌計算之方法統稱籌算,此與筆算之將一切計算經過全記於紙上者,略有不同,故其計算步驟,亦顯有差異,其原理則初無二致.但籌算爲中國之特有算器,則世所公認也.

圓率之計算,以劉徽,祖冲之爲較早,魏劉徽於魏陳留王景元四年(公元263年)注九章算術,其求圓率以圓內容六邊形起算,謂:『割之彌細,所失彌少,割之又割,以至於不可割,則與圓周合體而無所失矣.』劉徽由此算得:圓徑一丈,圓周三丈一尺四寸一分六釐,此種學說爲後來論割圓者所宗尚.祖冲之(429—500年)字文遠,范陽薊人,宋孝武大明六年(462年)曾上書論曆.隋書稱:『祖冲之更開密法,以圓徑一億

爲一丈,圓周:盈數,三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒七忽,朒數,三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒六忽.正數在盈朒之間.密率,圓徑一百十三,圓周三百五十五.約率,圓徑七,周二十二,又設開差冪,開差立,兼以正圓參之,指要精密,算氏之最也.所著之書,名爲綴術,學官莫能究其深奥,是故廢而不理,』云云.其所謂密率,視德人鄂圖之發現,蓋先千一百餘年.其並時算書,則算經十書以外,漢隋以來,作者如林,記入隋書經籍志者,僅及其半.而市井流傳,私家記載,不入官書,年久失考者,尙居多數.敦煌石室發現之古算書殘卷,卽其一證.

有唐建都長安,貞觀之盛,國學之內,八千餘人,國學之盛,近古未有,其書,算各置博士,凡三千二百六十員.算學之中,並以九章,海島,孫子,五曹,張丘建,夏侯陽,周髀,五經算,綴術爲顓業.兼習記遺,三等數.流風所被,日本亦師法中國,舉行算學考試.所用算經,則爲孫子,五曹,九章,海島,六章,綴術,三開重差,周髀,九司.隋唐以來,東西交通頻繁.西域曆法隨佛法輸入,執掌中朝曆法,一如明末清初西洋人執掌曆法之例.唐德宗時夏官王楊景風於廣德二年(764年)註宿曜經,云:『今有迦葉氏,瞿曇氏,拘摩羅等三家天竺曆,並掌在太史閣

然今之用,多瞿曇氏曆,與本術相參供奉耳,』云云.而瞿曇悉達所譯之九執曆,並將西域寫算方法傳入中國。同時西域之大小數記法等,在國中亦獲相當影響.在唐以善算稱者又有王孝通,孝通於武德九年(626年)參校曆法,所著緝古算經,於立體幾何形體,詳加論列.並論及二次,三次,四次方程式,開宋元算家究治方程式論之先鋒.

算經十書在唐則爲九章,海島,孫子,五曹,張丘建,夏侯陽,周髀,五經算,綴術,緝古.就中綴術一書,至宋已經亡失,而以記遺爲代.古代算經叠經魏劉徽,周甄鸞,唐李淳風注釋之後,列入學官,成爲中算之權威著作。入宋而祕書省又傳刻此十書,由朝臣愼重校刊行世,宋元豐七年(1084年)祕書省及汀州學校所刻九章,周髀,五經,海島,孫子,張丘建,五曹,緝古,夏侯陽,記遺,其影寫本已經傳世.即孫子,張丘建,五曹,記遺,及殘本九章算術之宋刻宋印本,今尚流傳人間。而大觀年興復算學,註釋考正見行算經多至一百八十九卷,其盛況尚可想見也.

宋元之際,算士輩出,其所論述,超邁前古,爲中算之黃金時代.最著者爲秦九韶,李冶,楊輝,郭守敬,朱世

傑諸人.其所著書今尚十九留存.

宋元算學之發達,實有賴於天元術.天元術者立天元一以代未知數,一如代數術之例.惟代數術用筆計算,天元術則以籌計算.以籌計算,與以筆計算之將一切計算經過,全記於紙上者,略有不同.故其計算方位,應先確定.其初期如楚衍弟子賈憲『立成釋鎖開立方法』之置『實』,『方法』,『廉法』,及『下法』四層是也.楚衍於天聖元年(1023年)成崇元曆,賈憲爲衍弟子.楊輝引有『賈憲立成釋鎖平方法,及立方法』.又引『賈憲開方作法本原圖』,此卽近代所稱巴斯楷三角形.而四元玉鑑古法七乘方圖(1303年)所記亦與此同,蓋並先於歐人二百餘年也.其『實,方,廉,隅』方位之在多乘方者,則秦九韶,李治,朱世傑,列式大致相同.亦有『太在元下』,或『元在太下』者,而於乘除進退,初無二致也.李治敬齋古今黈稱:『予在東平,得一算經,大抵多明如積之術.以十九字志其上下層數.曰:仙,明,霄,漢,壘,層,高,上,天,人,地,下,低,減,落,逝,泉,暗,鬼.此蓋以人爲太極,而以天,地,各自爲元.而涉降之.』當時所設未知數,先爲天元,故稱天元術.其後遞增爲地,人,物,而成四元.平陽李德載,及李治在東平得

一算經,論及地元,劉大鑑撰乾坤括囊末有人元二問.至朱世傑於大德七年(1303年)撰四元玉鑑三卷,乃按天地人物立成四元.以元氣居中,立天元一於下,地元一於左,人元一於右,物元一於上.上升下降,左右進退,互通變化,以成開方之式,說見原書.天元術之演進,至此而極,至其正負開方有多至九乘方,即十次方程式者,其所取方法,自秦九韶以後,並與和湼氏法(1819年)一致,而時代實先五百餘年矣.故在世界數學史上,關於方程式論,中華實為先進.

天元術發展之外,一時數理,如秦九韶之大衍求一術(1247年),楊輝之縱橫圖說(1275年),郭守敬之弧矢割圓術(1280年),朱世傑之級數論(1303年),並推一時獨步.

降及明代,繼籌算興起者則為珠算.其法與籌算,筆算,並有差異.今以乘法為例,在筆算則一切算式,可全書於紙上,在籌算則以乘數,被乘數,分列上下,而以得數居中.在珠算則左右對列,得數列於中央.因此差異,其計算方式,亦有不同.故珠算多列歌訣,以助計算.如除法方面,則有『歸除』,及『撞歸』,『起一』之說.其說初起於元代.元丁巨算法,(1355年)中所記

甚詳.其時法式初創,尚不習用.故元安止齋詳明算法序,稱:『夫學者初學因歸則口授心會,至於撞歸,起一,時有差謬,……』也.明代論述珠算之最著者,則爲程大位於萬曆二十,二十一年(1592,1593年),所著之算法統宗.在前則柯尙遷於萬曆七年(1578年)所著數學通軌亦已論及.最近在日本發現之汪訒菴重訂指明算法二卷,其卷上有:算盤定式,九九上法,九九退法,九因合數,九歸歌,諸目.按夏源澤所著指明算法二卷,成於正統二年(1439年).汪訒菴所訂正者,如爲夏氏原書,則珠算之發明,又遠在明初吳敬九章比類算法(1450年)之前矣.

明代算書除算法統宗所引外,最近發現之寫本汾陽王文素算學寶鑑(1524)中,於引宋楊輝算法,元賈亨算法全能集,元安止齋詳明算法,明吳敬九章算法,明夏源澤指明算法外,又引有推用算法,捷用算法,捷奇易明算法,精明算法,九章袖中錦,金臺金來朋啓蒙算法,許榮孟仁九章(詳註)算法,馮敏好學縱橫指南算法,及張伯奇,金陵杜文高算書,并爲明人所著.

明之末葉,籌算衰歇,因有西洋筆算之輸入.明萬

曆十年(1582年)意教士利瑪竇(1552—1610年)航海東來,在澳門登陸,明年入肇慶,十七年(1589年)到韶州,二十二年二十七年間(1594—1599年)往來南北兩京,會與徐光啓(1562—1633年)共譯幾何原本前六卷(1606年),與李之藻(—1631年)共譯同文算指,圜容較義(1608年),測量法義.崇禎二年(1629年)以後,明廷以西洋人與徐光啓督修曆法,至此而西洋算法中之筆算,籌算,幾何,三角術,三角函數表,及割圜術,並輸入中國.

國外筆算輸入中國,實始於唐代.唐開元占經,『算法字樣』所謂:『有問咸記,無由輒錯,連算便眼.』新唐書卷二十八下,所謂.『其算皆以字書,不用籌策,』是也.入元雖有引用西域算法之處,以藏在祕閣,民間無由獲見.至明末同文算指前編卷上,稱:『茲以書代珠,始於一,究於九,隨其所得,而書識之,』是為西洋筆算正式輸入之始.同時幾何原本雖爲處女譯本,而文筆流利,譯名精雅,傳誦士林,稱爲傑作.至弧矢割圜之術,在元郭守敬雖有論及,所列三角函數表終不完全,至崇禎四年(1631年)呈進割圜八線表,而測量全義(1631年)又附小表,取用乃稱便利.上述各法,源

源輸入,中土人士耳目爲之一新.

入清而聖祖雅好算數,西教士南懷仁,張誠,安多,白晉,巴多明,杜德美之流,更番入宮教授.而湯若望又曾主持曆法,雖曾一度中挫,其流風固未少衰.各教士教授所得,疊經譯爲滿漢文,數經增訂,乃編成律曆淵源(1723年刻)頒行全國.而一時西士穆尼閣介紹之對數法,杜德美輸入之割圜術,與乎『西洋借根法』並爲國中所熟聞.王錫闡(1628—1682年),梅文鼎(1633—1721年)等,並以新行輸入之西算演爲通俗文字,兼與舊說相發明,四庫開館,又以永樂大典本七算經及王杰家藏本張丘建,緝古,並兩江總督採進本數術記遺並爲算經十書,與並時名作,並收入四庫全書,分藏七閣.

清初因西洋算學之輸入,與宋元算書之發現,引起學者治算之興會,乾嘉以後,作者如林,多所貢獻,王錫闡(1628—1682年),梅文鼎(1633—1721年)以外,陳世仁(1676—1722年),孔廣森(1752—1786年),焦循(1763—1820年),汪萊(1768—1813年),李銳(1768—1817年),羅士琳(—1853年),項名達(1789—1850年),董祐誠(1791—1823年),徐有壬(1800—1860年),戴煦(1805-1860

年，并有不朽傑作，留傳當世.就中羅士琳創作四元玉鑑細草二十四卷，積功一紀（1823—1835 年），又校正朝鮮重刊本算學啓蒙三卷（1839 年），於研求古算最爲致力.其他諸人，於幾何學，割圓術，曲線論，方程式論，級數論，對數術，縱橫圖，三角術，亦有詳細之研究.

清季西洋學說，再度輸入，時適李善蘭（1811—1882 年）[1]華蘅芳（1830—1902 年）以善算著名一時，分任譯事，譯文之善，世無其比.李與偉烈亞力共譯幾何原本後九卷（1856 年），棣麼甘代數學十三卷（1859 年），羅密士代微積拾級十八卷（1859 年）等書.華與傅蘭雅共譯華里司代數術二十五卷（1873 年），微積溯源八卷（1874 年），海麻士三角數理十二卷（1877 年），倫德代數難題十六卷（1883 年），棣麼甘決疑數學十卷等書.

清末朝野提倡興學，基督教會，天主教會，亦多附設學堂傳教.光緒十六年（1890 年）基督教教育會又組織有教科書委員會，編輯各項教科用書，算書亦其

(1) 據李慈銘越縵堂日記第三十九册第20—21頁：李善蘭光緒八年十月二十九日（9/xii/1882 卒，生於嘉慶十五年十二月八日（2/I/1811），年七十三.

一也.西士偉烈亞力,狄考文,潘慎文,求德生,傅蘭雅,所譯算書,曾經流傳一時.而商務印書館於光緒二十八年(1902年)始編算學教科圖書,其餘京師大學堂譯書局,江楚編譯官書局,科學書局,昌明書局,中國圖書公司,並有編撰.而光緒三十二年(1906年)學部組織圖書局,所編教科書,反無成就.蓋吾國算數發達,多出於民衆愛尙,官家主持,有時成效轉甚微也.

中華民國二十五年十二月廿五日校於西安.

測圓海鏡批校

識　　語

阮元 (1764—1849) 於知不足齋本測圓海鏡序 (1798) 稱元視學浙江,從文瀾四庫全書中鈔得一本,細草多譌,因爲元和李君尙之鋭 (1768—1817) 算核一過.此刻本流傳之大概也.

上海東方圖書館善本書子四八四測圓海鏡四册,一函,有孔廣森硃筆批校,書眉上有批校二十七條,其中一條歲在乙巳 (1785). 雖其所批僅及卷一,二,三,七四卷,廣森 (1752—1786) 次年卽卒去,此蓋其絕筆.批校此書在李鋭之先,亦中算史一段故實也.

向在東方圖書館閱及此書,曾錄出此項批校二十七條.一二八之變,東方圖書館被焚,藏書大部無存.其所藏中算書目錄,曾發表於北平圖書館館刊中,今并錄出此本批校,以爲研治中算故實參考之助.

以下原文及頁數,并照譯署同文館鉛印本測圓海鏡.

每條批校上列一圈爲誌.

中華民國二十二年五月十二日李儼識於鄭州.

測圓海鏡批校

孔廣森撰

目　　錄

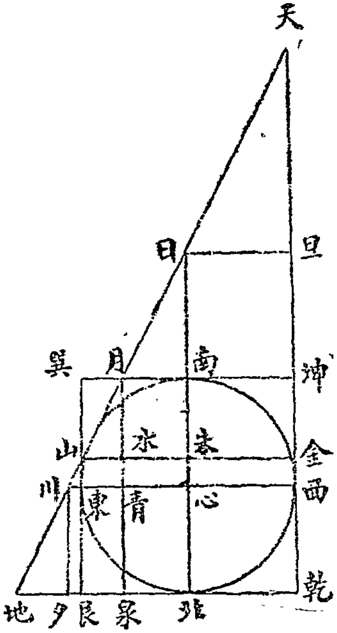
測圓海鏡細草卷第一

翰林學士知制誥同修國史欒城李冶撰

◎朱心青水長方積,與月水山勾股積等.

太虛勾股和,即圓徑內減虛弦,又爲虛弦虛黃方共,又爲皇極弦內去明股叀勾共.其差則大差勾內減個小差股也.勾弦共,即小差股也.其較則虛股內減個小黃方也.股弦共,即大差勾,其較則虛勾內減個小黃方也.弦較和爲大差弦上弦和較,又爲黃長弦上勾弦較,又爲兩個明勾.其較,則小差弦上黃方面也.三事和

圓城圖式



即大黃方,其較則爲兩個明弦上股弦較,又爲叀弦上兩個勾弦較,又爲明弦上小差與叀弦上大差共也.

⊙虛黃方,即太虛勾股內容圓之通弦也.亦是太虛弦和較.

邊黃內減底黃,即虛差.黃廣黃內減黃長黃即二虛差.高黃內減平黃,即虛差.蓋高黃即虛股,平黃即虛勾也.大差黃內減小差黃,即二虛差.蓋大差黃即二明勾,小差黃即二叀股也.明黃內減叀黃餘即虛差.叀弦上三差,合成一個虛黃方.

⊙凡單言黃者,即弦和較也.

以明叀二股共,爲明弦叀黃共,則高差虛黃共爲之較;爲明大小差虛大小差共則明叀二股共內去兩個虛雙差爲之較也.以明叀二勾共爲叀弦明黃共,則以平差虛黃較爲之較;爲叀大小差虛大小差共則明

東二勾共內減兩個東大小差爲之較也.

◉明東二勾小兩個虛雙大虛反減.

半之三事和內加半黃方,卽勾股共.若減之則弦也.半圓徑內加半虛黃卽虛和.減半虛黃卽虛弦也.又以半虛黃,加明和,卽高股.以半虛黃,加東和,卽平勾也.加明股則明弦,加東勾則東弦,減明勾則明黃,減東股則東黃也.以虛黃加明黃,卽虛股;以虛黃加東黃,則虛勾也.

◉凡三事和半之皆如下例.

高差平差共,又爲平勾高股差.以半徑減高股,卽高差.半徑內減平勾,卽平差.明勾內減東勾與平差同.明股內減東股,與高差同.股圓差內減極股,卽高差也.勾圓差減於極勾,卽平差也.正股內去邊弦,卽平差也.底弦內去正勾,卽高差也.大差勾內去極勾,卽平差也.極股內去小差股,卽高差也.極差內去東差,卽高差也.內去明差卽平差也.

◉正股卽通股,正勾卽通勾.

明段弦較較,卽虛股也.東段弦較共,卽虛勾也.

◉卽明勾較和東股較和也.

測圓海鏡細草卷第二

或問甲乙二人俱在坤地.乙東行一百九十二步而止,甲南行三百六十步望乙,與城參相直,問答同前.

◉弦較:即圓徑.

◉此法因弦較和乘弦較較之積.與四倍勾股積等.所以倍直積以弦較和除之,爲圓徑也.

或問甲乙二人同立於艮地.甲南行一百五十步而止,乙東行八十步望乙,與城參相直,問答同前.

◉弦較和即圓徑.

◉此法同上.

或問甲乙二人同立於巽地.乙西行四十八步而止,甲北行九十步望乙,與城參相直.問答同前.

◉三事和即城徑,此法以太虛勾股內容圓徑求三事和也,因通徑除故倍直積.

或問甲出東門四十八步而立.乙出南門四十八步見之,問答同前.

◉方五斜七乃古率,當用四十五度之割線爲密.

又法識別得二行併,即大弦也.立天元一爲半徑,置甲南行步加天元一得

丨元
‖‖≟〇

爲大股.又置乙東行步加天元得

丨元
‖〇〇

爲大勾也.勾股相乘得

丨
丅≟〇元
𝍧⊥〇〇〇

爲一個大直積,以天元除之得下式:

丨元
丅≟〇
𝍧⊥〇〇〇

爲三事

和也.(寄左.黃方除倍積得三事和,今以半黃方除直積亦爲三事和也.)然後併二行步,又併入勾股共,得:

‖元
┤‖⊥〇 爲同數,與左相消.得: 卜
丅≟〇
Ⅲ⊥〇〇〇 以平方開之,得一百二十步,倍之,得全徑也.合問.

◉前三事和以天元除之,則眞數無位可降.今不除將後三事和以天元乘之爲便也.

測圓海鏡細草卷第三

或問甲出西門南行四百八十步,乙出東門直行一十六步,望見甲.問答同前.

◉用勾股比例所以中小言之.

或問乙出南門東行七十二步而止.甲出西門南行四百八十步望乙,與城參相直.問答同前.

◉用勾股比例,所以大小言之.

或問乙出東門直行不知步數而止,甲出西門南行四百八十步望見乙,復就乙斜行五百四十四步,與乙相會.問答同前.

◉前小股如不除大勾,則以天元體與左相消亦同.

或問乙出南門不知步數而立.甲出西門南行四百八十步望乙,與城參相直.復就乙斜行二百五十五步與乙相會,問答同前.

◉各降一位始得眞數.

或問乙出南門直行一百三十五步而止,甲出西門南行四百八十步望乙,與城參相直.問答同前.

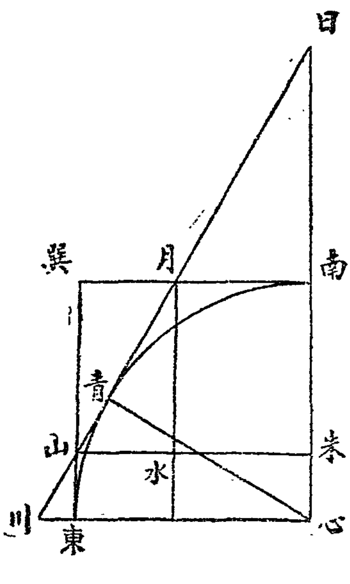
◉前小勾內帶大股分母,底勾亦帶大股分母,以二數相乘,故帶大股冪爲分母也.

◉各降二位始得眞數.

測圓海鏡細草卷第七

或問出南門東行七十二步有樹.出東門南行三十步見之.問答同前.

◉此圖垂線係廣森所加.借用靑字者,以川靑心形既以半徑爲股,則其勾卽上平形之川靑勾也.



◉明虛車爲切一象限所成連比例三勾股形.故日南,川東相乘,或月南,山東相乘;并與月水山畀相等.

試自心抵圓弦相切處,作心靑垂線.則靑山與山東同,月靑與月南同.故曰二行步相併爲月山虛弦也.月山既卽月南山東之併,而加以巽月勾,巽山股,則其三事和,非城徑乎.若以巽東半徑內減去巽月,則所餘

亦即南月，又減去山東.可見南月，山東之較，即巽山，巽月之較矣.

二元少一百〇二步，爲太虛勾股和；又減太虛弦一百〇二步，是爲二元少二百〇四步太虛之弦和較也.

又法二行步相乘爲實，二行步相併爲從，一步虛法，得半徑.

◉大差勾小差股相乘，與大差股小差勾相乘，等.大差股通勾弦較也，小差勾通股弦較也，故其相乘爲半段弦和較羃也.

又法條段同前.

◉森按：此題旣立天元一爲半徑，則以半徑自乘之小勾羃爲一率；半徑加南行之日心弦羃爲二率（即高弦）；半徑加東行之川心勾羃爲三率；日心自乘，川心自乘，併之得日川弦羃，爲四率.如是取等數，亦開三乘方，然較爲易瞭.

草曰：立天元一爲皇極弦上股弦差，……

◉二行差即極形之勾股較，叀弦即極形之股弦較，兩較相加即勾弦較月川與川心同，故日月弦乃極形之勾弦較也.旣知兩較，用古法相乘而倍之得其小黃方矣.明勾叀股和，即皇極形內之弦和較何也？自心抵圓徑相切處，作中垂線觀之，則川青與小分弦同，日朱與大分弦同，而朱心心青之和，乃其弦和較也.故此法以小黃方相乘，叀弦自乘，明弦自乘，三羃連乘爲一數，以明弦叀弦明勾叀股和連乘又自乘爲一數，而所得五乘之實爲相等.乙巳（1785）九月初七日森識.

草曰:別得人距樹卽高弦也,半圓徑卽高勾也.…

⊙日心與天日同,日朱與天旦同,故朱心爲股弦差,朱心卽山東也.

法曰:半甲不及步以自之爲冪,半甲不及步內減差以自之爲冪,二冪相併,內却減差冪爲平實;二之乙不及爲益從;三步半虛法;得甲南行.

⊙森按:立天元一爲城徑,以減於二不及,其餘 $\begin{array}{l}\text{𝍡𝍮𝍯}\\ \text{𝍠少元}\end{array}$ 爲太虛勾股和也.二云數相減太虛勾股較也.和自乘較自乘相減得十四萬一千一百二十步,少七百五十六元,多一平方爲八段月水山昇,寄左.乃命一元少乙不及步爲明勾,一元少甲不及步爲重股,以相乘得 $\begin{array}{l}\text{　　𝍠}\\ \text{𝍡𝍥𝍮少元}\\ \text{𝍢𝍬𝍡𝍯0}\end{array}$. 八因之,得二十八萬二千二百四十步,少三千〇二十四元.多八平方,與左,同數相消,得十四萬二千一百二十步,與二千二百六十八元,少七平方相等.

今設新法於後,

二云數相乘又四之爲法實,二云數相併又六之爲廉法,七步虛法,平方開之,得城徑.

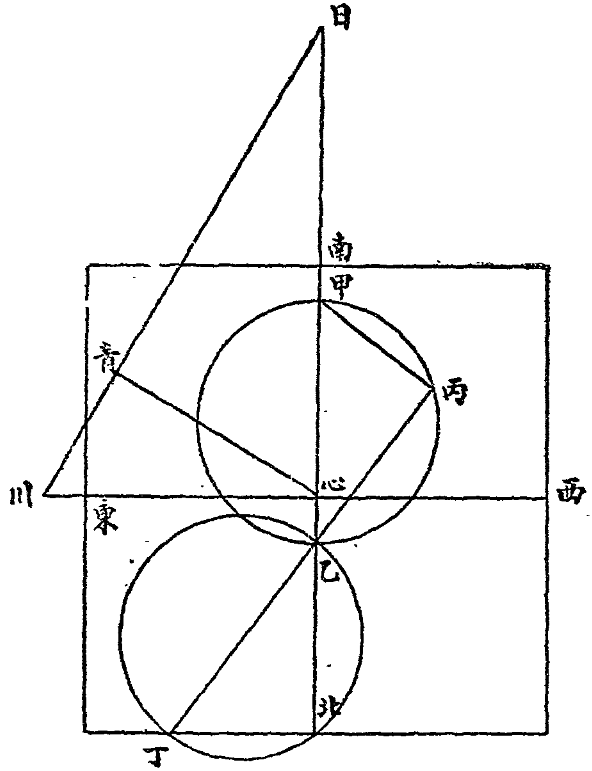
或問丙出南門直行,甲出東門直行,……

法曰:二少步相乘訖又自乘爲實,……

⊙此法太繁重,合以丙云步爲小股二云步相減得一百一十九步爲小弦,則甲云數卽小股弦和也.乃以小股乘股弦和爲實,三因小股內減小弦餘爲法,實如法而一,卽半徑.

草曰:別得云數共減於倍城徑,爲甲丙共行數,又

云數相減即皇極差,亦爲甲行不及丙行數.立天元一爲半城徑,以三之,……

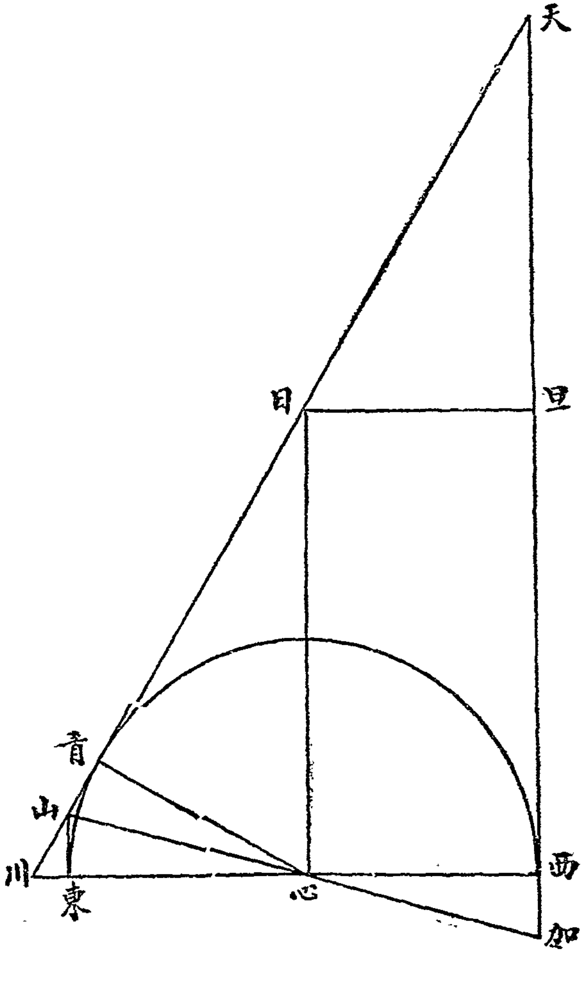


⊙乙北丁形,以通勾通股之較爲三事和,李圖所無,今補。

⊙南甲與川東同,甲北者川東與城徑之較也;南乙與日南同,乙北者日南與城徑之較也.甲乙又兩不及數之較也.何以知甲乙即乙北小股之弦.凡直角必立於圓半徑之上,試以甲乙乙丁.各爲圓界,作兩圓相切,則乙北丁形與乙丙甲形正相等,而甲北與丙丁whose同爲股弦之和也.故右法

以乙北股爲一率,乙丁弦爲二率,心青股爲三率,川心弦爲四率,卽可以取等數矣。

法曰:倍不及步在地,以不及步減通步以乘之爲實,以四之不及步爲法,得乙南行三十步.



◎此題殊謬,既知乙南行步與斜步之較,則通步內減較折半,即知南行三十步,何庸設法.

法曰:少步冪爲平實,四斜步內減二少步爲益從,五步常法,得乙南行.

◉青心與日旦同爲半徑,故日心與天日同爲弦,日青與天旦同爲股,如卷首圖:既知山青與山東等,則共步內減山青,即得天青爲與天西等者矣,所謂梯底是也,此梯底乘山東與半徑自乘等,試以東山心形易爲心西加形觀之,則西加小分底乘天西大分底,豈不與心西自乘相等耶?

◉明勾底勾相乘,亦與半徑自乘等,即此圓之理.

草曰:別得甲多步爲大勾內減明勾也,丙多步爲大股內少叀股也.……

◉天金股乘泉地勾,與山金勾乘日泉股等,故即黃方也.

草曰:別得甲爲大勾,乙爲明勾,丙爲大股,丁爲叀股也.……

◉月地自乘內減月泉股羃,故得泉地勾羃.天山自乘內減山金勾羃,故得天金股羃.天金泉地之相乘既與城徑自乘等,則兩羃相乘,必與城徑之三乘方等,故立法如此.

◉明日將有中州之行,自辰達午,草草閱此卷,就益友彭心泉先生政之.

測圓海鏡研究歷程考

目　次

1. 測圓海鏡研究歷程

勾股容圓之說,出於古九章勾股章,千年來無有附益其說者.宋元算說稱盛.宋鹿泉(今元氏)石信道鈐經有論測圓之說,測圓海鏡(1248)卷七,曾引其說.洞淵又有九容之說,其書有測圓一門.宋秦九韶數書九章(1247)卷八,遙度圓城題,元朱世傑四元玉鑑(1303)卷中,勾股測望門,幷有此類題問.但舍洞淵外,似未有人精研此道者.迨元欒城李治(1192—1279)老大以來,得洞淵九容之說,日夕玩繹,又爲衍之,遂累一

百七十問,成測圓海鏡十二卷(1248).治臨終自稱:「測圓海鏡一書,雖九九小道,吾常精思致力焉」.是測圓研究,至此始告完成.其書入明,有顧應祥(1483—1565)之測圓海鏡釋術十二卷(1550),測圓算術四卷(1553),幷因類相從,而略去原草,說者病之.而周述學(1558),柯尙遷(1578),程大位(1593)之徒,則僅釋九章容圓一問.西說輸入之後,徐光啓(1562—1633)嘗於勾股義稱:「測圓海鏡……余欲爲說其義,未遑也」,但自幾何原本譯傳(1607)之後,形學知識,普及中華,因開清人研求測圓海鏡之先聲.惟在清初,杜知耕於數學鑰(1681)卷六,楊作枚於勾股闡微卷一,梅文鼎(1633—1721)於勾股闡微卷二,僅解九章一問.梅文鼎曾改鮑祖述原圖,而鮑圖又出於勾股義,梅瑴成(1681—1763)於梅氏叢書輯要卷六十一,附錄一,赤水遺珍(C. 1761)內引測圓海鏡卷二,第十四題一問,用借根方解測圓海鏡立天元一之法,時瑴成尙未明立天元一之法也.乾隆三十七年(1772)淸廷下求書之詔,各省幷有獻書.其明年(1773)開四庫全書館.其入天文算法者,有:李潢(—1811)家藏本測圓海鏡十二卷,浙江第五次採進范懋柱天一閣藏本測圓海鏡分類釋

術十卷.休寧戴震(1724—1777)於四庫分校天文算法書,今四庫全書本測圓海鏡案語,似即出於戴氏也.孔廣森(1752—1786)少曾師事戴震,及官翰林,與窺中祕,得見王(孝通),秦(九韶),李(治)三家之書.今上海東方圖書館,善本書,子四八四測圓海鏡四册,有孔廣森硃筆批校二十七條,其中一條,歲在乙巳(1785),廣森次年即卒去,故批校僅及一,二,三,七,四卷.阮元(1764—1849)視學浙江,從文瀾閣中鈔得測圓鏡鏡一本,又得丁杰藏舊本,屬元和李銳(1768—1817)算校一過,嘉慶二年(1797)校成,明年(1798)刻入鮑廷博知不足齋叢書第二十集中.四庫校本,及李銳校本,於原書雖多所訂正,但尚不免脫略.李銳之後,提倡研治測圓海鏡者,有李善蘭(1811—1882).善蘭早歲得讀此書,然後知算學之精深,在同文館日,傳印測圓海鏡,世稱同文館集珍本(1876),又以此課諸生,故同文館算學課藝卷三(1880),專以測圓海鏡問題爲問.又自著測圓海鏡圖表一卷,爲古今算學叢書(1898)之一.測圓海鏡解一卷,以幾何方法證測圓海鏡卷一「識別雜記」數條,有鈔本傳世,後之論此者,有:

測圓海鏡識別詳解一卷,張楚鍾撰,求是齋叢書

本(1873).

測圓海鏡法筆二卷,李鏐撰,衍元海鑑本(1879).

代數勾股術卷四,張茂滉撰(1883).

海鏡窺豹一卷,王鑒撰(1894).

測圓海鏡通釋四卷,劉嶽雲撰(1896).

測圓海鏡術解七卷,黃巖,黃方慶撰,有稿本,見台州經籍志.

測圓海鏡識别圖解六卷,黃方慶撰,有稿本,見台州經籍志.

海鏡一隅一卷,吳誠撰,算學一隅本(1898).

九容公式王季同撰,古今算學叢書本(1898).

九容拾遺演代一册,王澤沛撰,原稿本.

測圓海鏡細草通釋十二卷,王澤沛撰,古今算學叢書本(1898).

測圓海鏡圖解二卷,葉耀光撰,古今算學叢書本(1898).

九容演代一卷,楊兆鋆撰,須曼精廬算學卷十四本(1898).

求志書院算學課藝一卷,劉彝程編(1896).

九章實義卷四,劉彝程編(1901).

測圓海鏡識別贅解二卷,黃泰生撰,馮徵校(1901).

海鏡各形比例泛積表論一卷,賀尹東編中西算學九種本(1902).

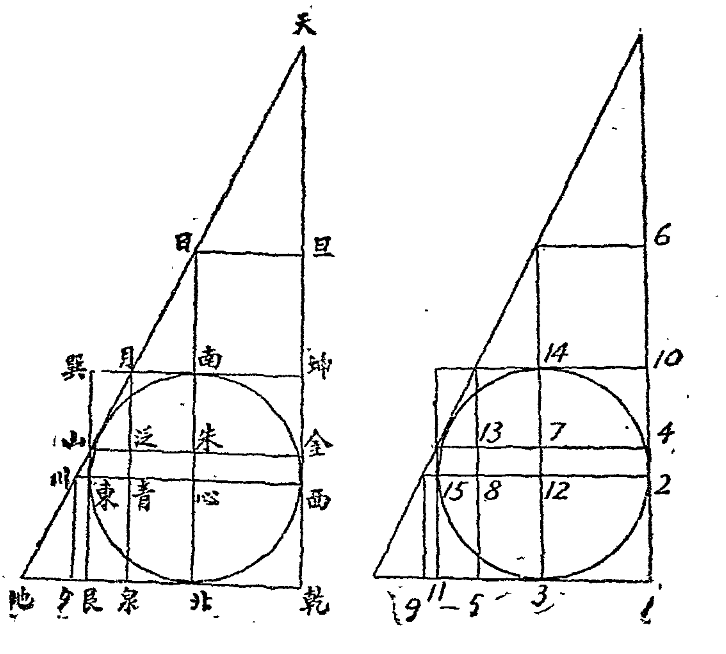
勾股題鏡一卷,張松溪撰(1907).

道光六年(1826)甘泉羅士琳(–1853)於勾股容三事拾遺三卷,自序稱:「李氏測圓海鏡一書,全以勾股容員為題,設問一百七十.孔氏少廣正負術之外篇,亦間以方邊為題,設問二十四;以中長為題,設問十,要皆極變之外,別尋新義.嗣繪亭先生〔名博啓,滿州正白旗人,乾隆年官監副〕,更取勾股形中所容之方邊員徑,垂綫,三事分配和較,擬法六十,惜其書未刊,久經寢沒,今所傳者,唯有方邊及垂綫求勾股弦一題.……竊沿五和五較諸目,仿測圓海鏡例,逐一立天元一以補之,質名曰勾股容三事拾遺」,書凡三卷.黃宗憲未見羅書,亦演數題,稱為「勾股容三事和較術補遺」,附於憫笑不計(1896)之內.是皆測圓之別徑也.

2. 李治測圓海鏡圖式,名義.

李治測圓海鏡十二卷(1248),「以勾股容圓為題,自圓心圓外縱橫取之,得大小十五形,皆無奇零」,如通△天地乾,天地為通弦,天乾為通股,乾地為通勾,而

所取之勾股弦,并爲 $8^2+15^2=17^2$ 之倍數,如通弦 $=40\times17$,通股 $=40\times15$,通勾 $=40\times8$ 是也.蓋九章算術卷九,勾股章,勾股容圓一問,亦取 $8^2+15^2=17^2$ 爲問也.但原書第二卷,弦上容圓題,半矮梯第三問,方五斜七問,用數均與設率不同.第十一卷第十一問:「草曰此問所求城徑,與諸問並同,其勾股則與前後諸率不同,今特爲此草者,欲使後學有以考較諸率當否也」,是其例也.而用數多用「其勾股數少,得見弦黃,而相爲率者」,如卷八,第十五問,註中所舉:



$3^2+4^2=5^2$, $5^2+12^2=13^2$, $7^2+24^2=25^2$,

$8^2+15^2=17^2$, $9^2+40^2=41^2$, 是也.

測圓海鏡卷一所舉十五形正數爲:

	弦 c,	勾 a,	股 b,
大或通△天地乾,	680,	320,	600,
邊△天川西,	544,	256,	480,
底△日地北,	425,	200,	375,
黄廣△天山金,	510,	240,	450,
黄長△月地泉,	272,	128,	240,
上高△天日旦,	255,	120,	225,
下高△日山朱,	255,	120,	225,
上平△月川青,	136,	64,	120,
下平△川地夕,	136,	64,	120,
大差△天月坤,	408.	192,	360,
小差△山地艮,	170,	80,	150,
(皇)極△日川心,	289,	136,	255,
(太)虛△月山泛,	102,	48,	90,
明△日月南,	153,	72,	135,
小或東△山川東,	34,	16,	30.

釋名

勾 $=a$, 股 $=b$, 弦 $=c$,

黃＝黃方＝內容圓徑＝圓 $=2r=D$.

五和五較:—

勾股和＝和 $=a+b=$ 弦黃和 $=(a+b-c)+c$.

勾股較＝較＝差＝中差 $=b-a=$ 雙差較

$=(c-a)-(c-b)$.

勾弦和＝勾弦共 $=a+c$.

勾弦較＝大差 $=c-a=$ 股黃差 $=b-(a+b-c)$.

股弦和＝股弦共 $=b+c$.

股弦較＝小差 $=c-b=$ 勾黃差 $=a-(a+b-c)$.

雙弦＝大差＋小差.

弦較和＝弦較共 $=c+(b-a)=$ 股較和

$=b+(c-a)=$ 勾和較 $=(b+c)-a$.

弦較較 $=c-(b-a)=$ 股和較 $=(c-a)-b$

＝勾較和 $=(c-b)+a$.

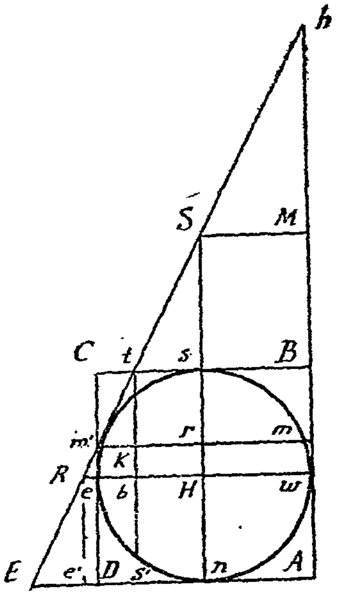
弦和和＝總和＝三事和 $=a+b+c=$ 勾和和

$=(c+b)+a=$ 股和和 $=(a+c)+b$.

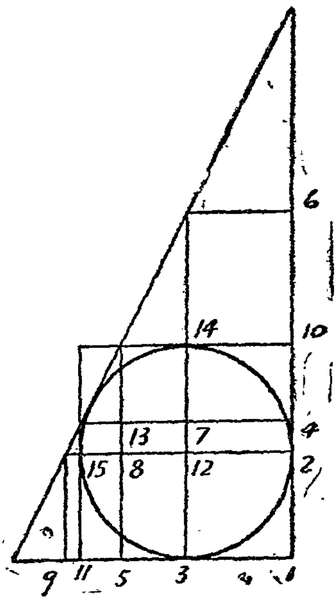
弦和較＝黃＝黃方＝圓徑 $=a+b-c=$ 勾較較

$=a-(c-b)=$ 股較較 $=b-(c-a)$.

圓域圖式,或如下(2),(3)之法記之亦可.



(2)



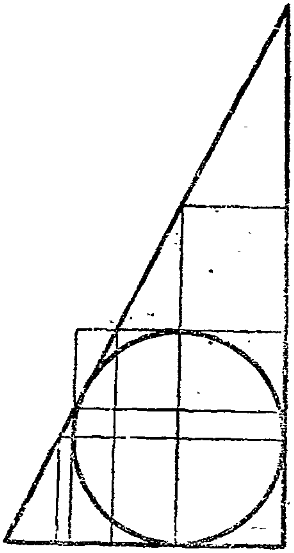
(3)

	弦 c,	勾 a,	股 b,
大或通 $\triangle_1$: hEA,	c_1,	a_1,	b_1,
邊 $\triangle_2$: hRw,	c_2,	a_2;	b_2,
底 $\triangle_3$: SEn,	c_3,	a_3,	b_3,
黃廣 $\triangle_4$: $hm'm$,	c_4,	a_4,	b_4,
黃長 $\triangle_5$: tEs',	c_5,	a_5,	b_5,
上高 $\triangle_6$: hSM,	c_6,	a_6,	b_6,

下高$\triangle_7$: $Sm'r$,	c_7,	a_7,	b_7,
上平$\triangle_8$: tRb,	c_8,	a_8,	b_8,
下平$\triangle_9$: REe',	c_9,	a_9,	b_9,
大差$\triangle_{10}$: htB,	c_{10},	a_{10},	b_{10},
小差$\triangle_{11}$: $m'ED$,	c_{11},	a_{11},	b_{11},
(皇)極$\triangle_{12}$: SRH,	c_{12},	a_{12},	b_{12},
(太)虛$\triangle_{13}$: $tm'K$,	c_{13},	a_{13},	b_{13},
明$\triangle_{14}$: Sts,	c_{14},	a_{14},	b_{14},
小或東$\triangle_{15}$: $m'Re$,	c_{15},	a_{15},	b_{15}.

3. 九容公式疏證

李治測圓海鏡自序稱:「老大以來,得洞淵九容之說,日夕玩繹,而嚮之病我者,使爆然落去,而無遺餘」.測圓海鏡卷二,正率一十四問,首十問爲:勾股容圓,勾上容圓,股上容圓,勾股上容圓,弦上容圓,勾外容圓,股外容圓,弦外容圓,勾外容圓半,股外容圓半.原書有法無草,其法如下:

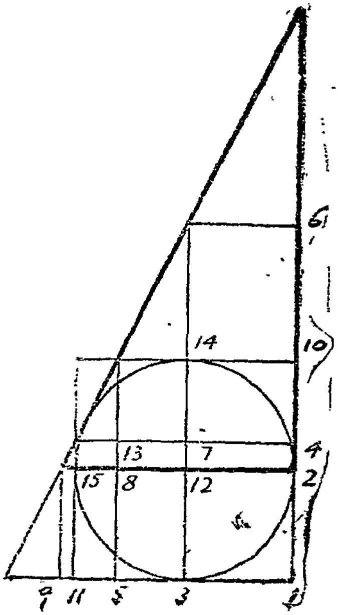


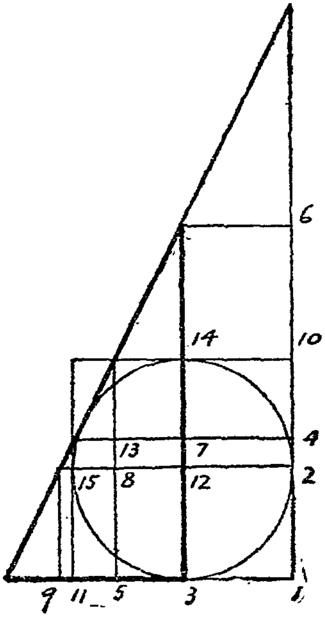
1. 勾股容圓.

$$\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1+c_1}=D.$$

2. 勾上容圓.

$$\frac{2a_2b_2}{b_2+c_2}=D$$



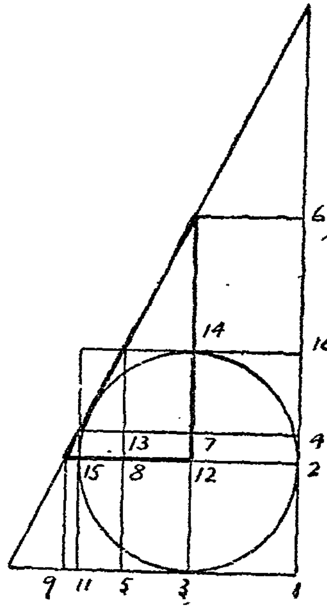


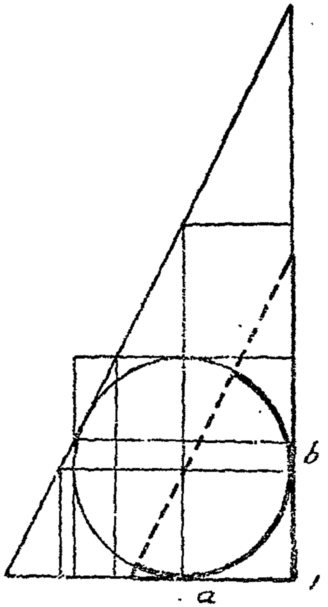
3. 股上容圓.

$$\frac{2a_8b_8}{a_8+c_8}=D.$$

4. 勾股上容圓.

$$\frac{2a_{12}b_{12}}{c_{12}}=D.$$



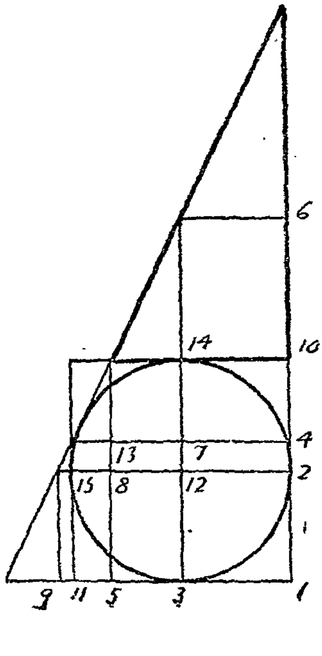


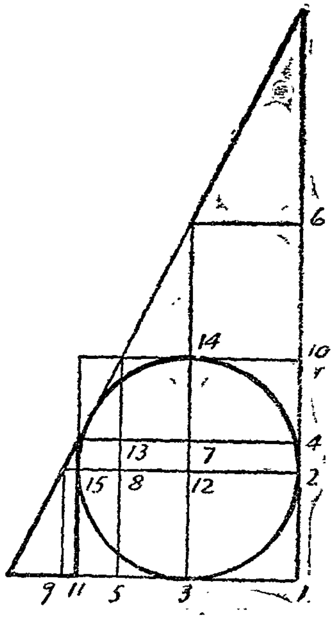
5. 弦上容圓.

$$\frac{2ab}{a+b}=D.$$

6. 勾外容圓.

$$\frac{2a_{10}b_{10}}{c_{10}+(b_{10}-a_{10})}=D.$$



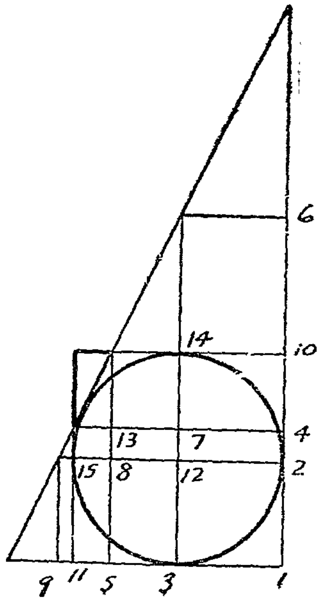


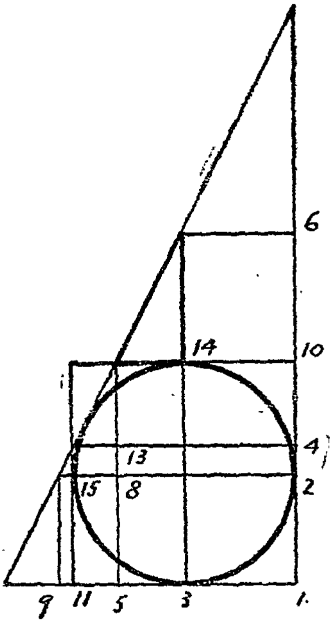
7. 股外容圓.

$$\frac{2a_{11}b_{11}}{c_{11}-(b_{11}-a_{11})}=D.$$

8. 弦外容圓.

$$\frac{2a_{13}b_{13}}{c_{13}-(a_{13}+b_{13})}=D.$$



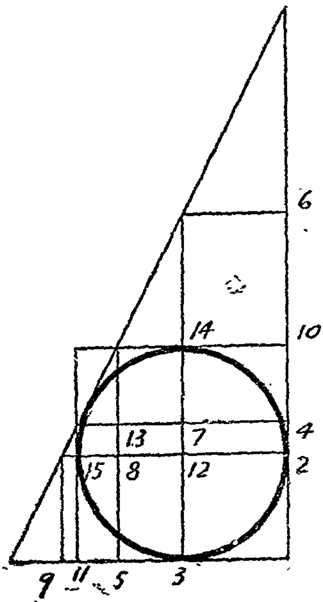


9. 勾外容圓半.

$$\frac{2a_{14}b_{14}}{c_{14}-a_{14}}=D.$$

10. 股外容圓半.

$$\frac{2a_{15}b_{15}}{c_{15}-b_{15}}=D.$$



李善蘭天算或問卷一稱:「洞淵九容之術,即測圓海鏡卷二中:勾上容圓,股上容圓;弦上容圓,勾股上容圓,勾外容圓,股外容圓,弦外容圓,勾外容半圓,股外容半圓,九題是也.勾股容圓係古法,非洞淵所創,故不在內」,劉嶽雲測圓海鏡通釋附刻算學叢話(C. 1898)稱:「李壬叔(善蘭)先生謂除勾股容圓不計,為九容.但弦上容圓,其用數既不相同,而圖式亦無此線,恐原書之意,未必爾也」.玆如李善蘭之說,以勾上容圓以後九題,為九容.

九容公式原書無草,四庫校本及李銳校本並未補草.黃泰生,馮徵或以代數解晰,或以幾何解晰,都未如李善蘭之確當.黃宗憲於憫笑不計(1896),「洞淵九容直解」內亦稱道之.李氏於天算或問卷一稱:「勾股容圓及九題,皆以勾股相乘倍之為實,而法則各異,要皆以容圓之大勾股為主.大勾股以三事和為法,得圓徑.勾上容圓之勾股,其三事和即大勾股之股弦和,故即以股弦和為法.股上容圓之勾股,其三事和即大勾股之勾股和,故即以勾弦和為法.此即連比例中率自乘,末率除之,得首率之理也.推之九題,莫不皆然」.試以測圓海鏡卷二,第二題,「有a_2, b_2, 求D」為例:

因
$$\frac{a_1}{a_1+b_1+c_1}=\frac{a_2}{a_2+b_2+c_2},$$

$$\frac{b_1}{b_1+c_1}=\frac{b_2}{b_2+c_2},$$

又因
$$b_1+c_1=a_2+b_2+c_2.$$

故
$$\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1+c_1}=\frac{2a_2b_2}{b_2+c_2}.$$

卽
$$\frac{2a_2b_2}{b_2+c_2}=D.$$

餘題類推.

4. 諸雜名目疏證.

張楚鍾於測圓海鏡識別詳解(1873)小引稱:「元欒城李氏測圓海鏡以勾股容圓立法,凡百七十問,皆以立天元一法馭之.卷端識別五百許條,猶通鑑綱目之有凡例,舍是則全書無從入手.儀徵阮文達公(元),屬元和李尙之(銳)校正全書,刻入知不足齋叢書中,顧於識別一卷,未詳釋也」.張楚鍾首將識別逐條綴以詳解.在前則孔廣森李善蘭,在後則黃方慶,黃泰生亦有詳解.顧識別雜記中尤以諸雜名目爲重,全書如積題草半由此出,因集各家註解,爲之疏證.其如積條目,則如下記十四事:

$$\frac{1}{2}D^2=(c_1-b_1)(c_1-a_1),\cdots\cdots\cdots(1)$$ 半段徑冪,

$$=a_{11}\times b_{10},\cdots\cdots\cdots(2)$$,, ,

$$=a_{10}\times b_{11},\cdots\cdots\cdots(3)$$,, ,

$$=a_1\times b_{13},\cdots\cdots\cdots(4)$$,, ,

$$=a_{13}\times b_1;\cdots\cdots\cdots(5)$$,, ;

$$r^2=b_2\times b_{15},\cdots\cdots\cdots(6)$$ 半徑冪,

$$=a_3\times a_{14};\cdots\cdots\cdots(7)$$,, ;

$$D^2=a_5\times b_4;\cdots\cdots\cdots(8)$$ 徑冪;

$$r^2=a_8\times b_6,\cdots\cdots\cdots(9)$$ 半徑冪,

$$=(b_{14}+c_{14})(a_{15}+c_{15}),\cdots\cdots\cdots(10)$$,, ,

$$=(a_{14}+c_{14})(b_{15}+c_{15});\cdots\cdots\cdots(11)$$,, ;

$$a_{12}b_{12}=c_6\times c_8;\cdots\cdots\cdots(12)$$ 皇極積;

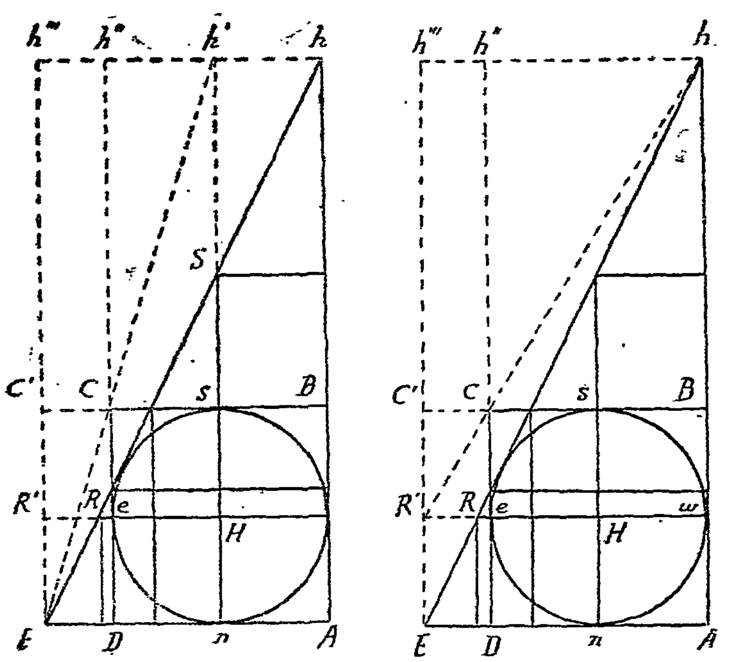
$$a_{13}b_{13}=2a_{14}\times b_{15},\cdots\cdots\cdots(13)$$ 太虛積,

$$=2a_{15}\times b_{14}.\cdots\cdots\cdots(14)$$,, .

(證): $\frac{1}{2}D^2=(c_1-b_1)(c_1-a_1)\cdots\cdots(1)$ 半段徑冪,

如 (1) 圖, 作 $nh'=b_1$, $hh'''=a_1$; 又作 $h'E$ 平分 $\square h'''n$, 則 $\triangle h'h'''E=\triangle h'nE$; 又引 DC 至 h'', BC 至 C', 則 $\square Ch'''=\square Cn$; 即 $\frac{1}{2}D^2=(c_1-b_1)(c_1-a_1)$.

又如 (2) 圖, 則 $\square Ch'''=\square Cw$.



(1) (2)

即 $\frac{1}{2}D^2=(c_1-b_1)(c_1-a_1)$. 證訖.

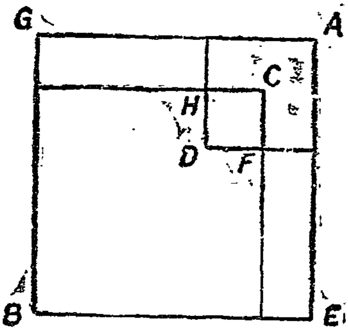
(見李善蘭測圓海鏡解)

(證): $\frac{1}{2}D^2=(c_1-b_1)(c_1-a_1)$…………………(1) 半段徑冪

如圖 $\square AB=c_1{}^2$, $\square BC=b_1{}^2$, $\square AD=a_1{}^2$,

$\square CD=(a_1+b_1-c_1)^2$,

則 $\square EF=\square GH=(c_1-b_1)(c_1-a_1)$,



因　　　$⩓EACG=a_1{}^2=\square AD$,

故　　　$2(c_1-b_1)(c_1-a_1)=(a_1+b_1-c_1)^2$.

卽　　　$\frac{1}{2}D^2=(c_1-b_1)(c_1-a_1)$.　　　證訖.

(見黃泰生測圓海鏡晝解卷一)

(證):　$\frac{1}{2}D^2=a_{11}\times b_{10}$ …………………………… (2) 半段徑冪.

因　　　$c_1-b_1=a_{11},\ c_1-a_1=b_{10}$

由 (1) 式, 得　$\frac{1}{2}D^2=a_{11}\times b_{10}$.　　　證訖.

(黃泰生)

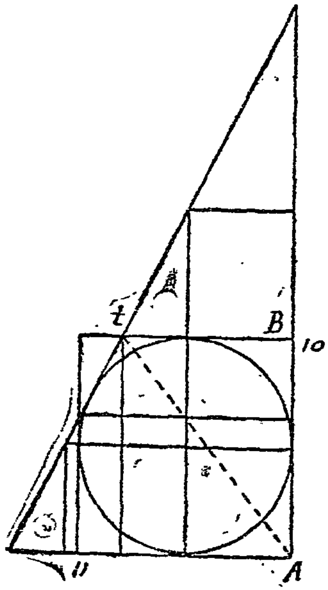
(證):　$\frac{1}{2}D^2=a_{10}\times b_{11}$ …………………………… (3) 半段徑冪.

如下 (1) 圖,聯 tA 線, 由 $\triangle AtB$, $a_{10}:D=\frac{1}{2}D:b_{11}$.

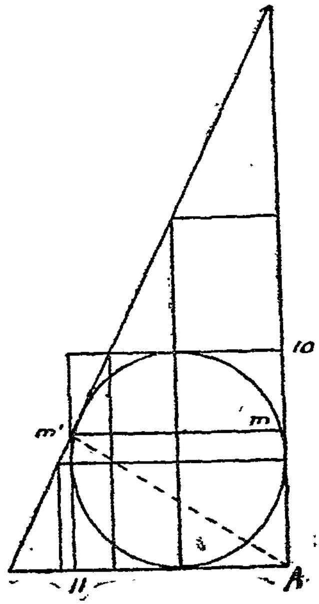
或如下 (2) 圖,聯 $m'A$ 線, 由 $\triangle Am'm$, $b_{11}:D=\frac{1}{2}D:a_{10}$.

即 $$\frac{1}{2}D^2=a_{10}\times b_{11}.$$ 證訖.

(見張楚鍾測圓海鏡識別詳解)



(1)



(2)

(證): $\frac{1}{2}D^2=a_1\times b_{13}$, ………………………………… (4) 半段徑冪.

如圖, 因 $$a_1=a_8+b_8+c_8,$$

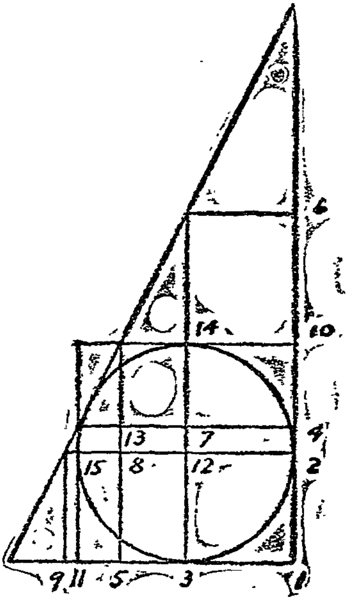
$$D=a_{13}+b_{13}+c_{13},$$

$$\frac{1}{2}D=b_8.$$

又因
$$\frac{b_8}{b_{13}}=\frac{a_8+b_8+c_8}{a_{13}+b_{13}+c_{13}},$$

即
$$\frac{1}{2}D^2=a_1\times b_{13}.$$
證訖。

（黃泰生）



（證）： $\frac{1}{2}D^2=a_{13}\times b_1$, ……………………………… (5) 半段徑冪.

如上圖，因
$$b_1=a_6+b_6+c_6,$$
$$D=a_{13}+b_{13}+c_{13},$$
$$\frac{1}{2}D=a_6,$$

又因 $$\frac{a_6}{a_{13}}=\frac{a_6+b_6+c_6}{a_{13}+b_{13}+c_{13}},$$

卽 $$\frac{1}{2}D^2=a_{13}\times b_1.$$ 證訖.

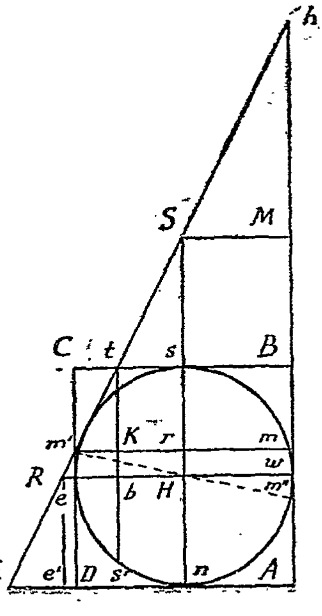
(黄泰生)

(證): $r^2=b_2\times b_{15}$……………………………………(6) 半徑冪.

如圖試以$\triangle m'He$易爲$\triangle m''Hw$觀之,則$m''w$小分底(b_{15})乘hw大分底(b_2)豈不與$Hw(r)$自乘相等耶?

卽 $$r^2=b_2\times b_{15}.$$ 證訖.

(見孔廣森測圓海鏡卷六眉批)



(證):

$$r^2=a_3\times a_{14},\cdots(7)$$ 半徑冪.

因

$$b_7=a_{14}+c_{14},$$

$$a_3=a_9+c_9,$$

$$r^2=a_9\times b_7,$$

又

$$\frac{b_7=a_{14}+c_{14}}{a_3=a_9+c_9}=\frac{a_{14}}{a_9},$$

卽

$r^2=a_3\times a_{14}$. 證訖.

(黃泰生)

(證):

$D^2=a_5\times b_4$, ……… (8) 徑冪.

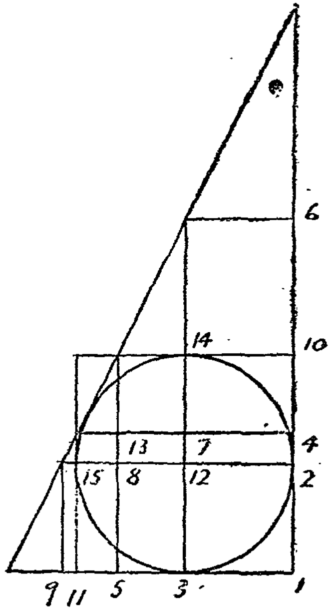
如前圖

$a_5:D=D:b_4$,

卽

$D^2=a_5\times b_4$. 證訖.

(張楚鍾)



(證):

$r^2=a_8\times b_6$,…………………………………………… (9) 半徑冪.

如前圖 $a_8:r=r:b_6$,

$r^2=a_8\times b_6$. 證訖.

(張楚鍾)

(證): $r^2=(b_{14}+c_{14})(a_{15}+c_{15})$,………(10) 半徑冪.

李冶測圓海鏡卷八,明叀後第十一問,會自證此式:

因 $$\frac{(b_{14}+c_{14})+(r+c_{13})-(a_{15}+c_{15})-(r+c_{13})}{2}=b_{12}-a_{12}$$

故 $\dfrac{(b_{14}+c_{14})-(a_{15}+c_{15})}{2}=b_{12}-a_{12}$,…………(a)

又因 $\dfrac{(b_{14}+c_{15}+r)+(c_{14}+a_{14}+r)-D}{2}=c_{12}-r$,

即 $\dfrac{(b_{14}+c_{14})+(a_{15}+c_{15})}{2}=c_{12}-r$, …………(b)

因 $a_{12}b_{12}=c_{12}\cdot r$,由$(b)^2-(a)^2$,得

$$r^2=(b_{14}+c_{14})(a_{15}+c_{15}).$$ 證訖.

(李治)

(證): $r^2=(a_{14}+c_{14})(b_{15}+c_{15})$…………(11)半徑冪.

如前圖,因 $b_{15}+c_{15}=a_8$, 又 $a_{14}+c_{14}=b_6$,

又 $r^2=a_8\times b_6$…………(9).

即 $r^2=(a_{14}+c_{14})(b_{15}+c_{15})$. 證訖.

(黃泰生)

(證): $a_{12}b_{12}=c_6\times c_8$,…………(12)皇極積.

如前圖,因 $c_6=c_7=b_{12}$, 又 $c_8=a_{12}$,

即 $a_{12}b_{12}=c_6\times c_8$. 證訖.

(張楚鍾)

(證): $a_{13}b_{13}=2a_{14}b_{15}$,…………(13) 太虛積.

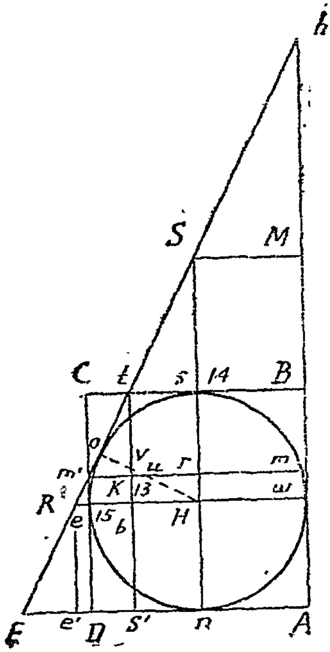
如下左圖 $a_{14}\times b_{15}=\square KH$

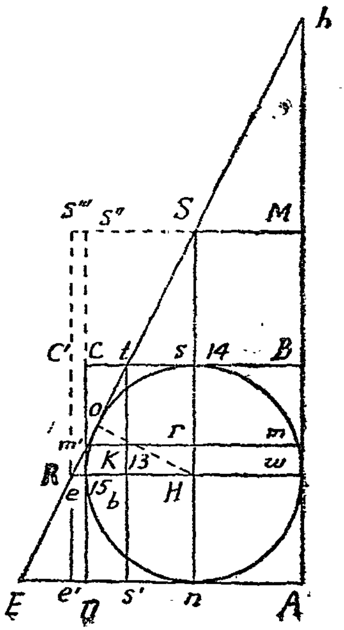
自 H 作 Ho 線直垂於 tR.

則 $$a_{14}b_{15}=\square KH$$
$$=\triangle urH+(\triangle vbH-\triangle uvK)$$
$$=\triangle uom'+\triangle vot-\triangle uvK$$
$$=(\triangle uom'-\triangle uvK)+\triangle vot$$
$$=\triangle Km't$$
$$=\frac{1}{2}a_{13}b_{13}.$$

卽 $$a_{13}b_{13}=2a_{14}b_{15}.$$ 證訖.

(李善蘭)





(證): $a_{13}b_{13}=2a_{15}\times b_{14}$,………………(14)太虛積.

如上右圖 $\triangle SRH=\triangle_7 SoH+\triangle_8 HoR$,

$=\triangle_7 Srm'=\triangle_8 tbR$,

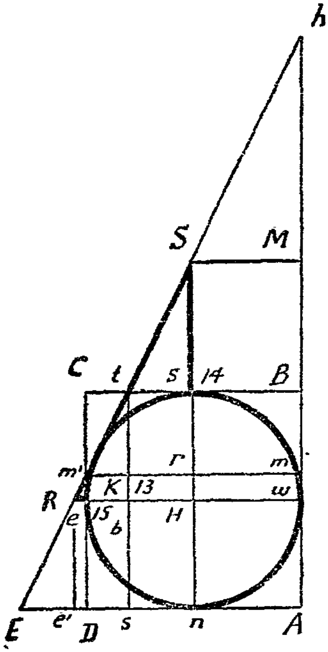
故 $\triangle_{13} tKm'=\square KH$,

或 $\triangle_{13} tm'C=\square CS'''$,

即 $a_{13}b_{13}=2a_{15}\times b_{14}$. 證訖.

(黃泰生)

5. 鈐經之測圓術.



石信道鹿泉(今元氏)人,撰鈐經,演天元之書也,見四元玉鑑後序.李治測圓海鏡卷七「明重前第二問」,嘗引鈐經解法.明程大位算法統宗卷十三,以鈐經爲宋元豐,紹興,淳熙以來刊刻算書之一.朱世傑四元玉鑑(1303)卷中,勾股測望第二問:「今有圓城,不知大小,各中開門,甲乙俱從城心而出,甲出南門一十五步而立;乙

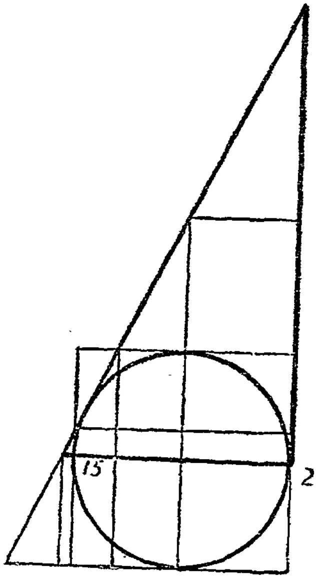
出東門四十步見甲,問城周幾何?答曰:一里」.此題蓋因「有 a_{15}, b_{14} 求 D」,與測圓海鏡卷七,第二問所引相類.李治稱:「此題既得 $x=c_{14}-a_{14}$ 後,鈐經以次式代之:

$$\frac{b_{14}\{b_{14}{}^2-(c_{14}-a_{14})^2\}}{(c_{14}-a_{14})^2}=D.$$

得 D」,是爲鈐經本法,四元玉鑑無草,是否與鈐經同法,尙不可知,惟鈐經在元尙有傳本,則無可疑也.

6. 數書九章之測圓術.

宋秦九韶數書九章(1247)卷八,遙度圓城題:「問有圓城不知周徑,四門中開,北門外三里(a)有喬木,出南門便折東行九里(b)乃見木,欲知城周徑各幾何,[圓周用古法].答曰:徑九里,周二十七里」,如秦九韶原術,令



$x=$ 城徑.

得 $$x^{10}+5ax^8+8a^2x^6-4a(b^2-a^2)x^4$$
$$-2b^2\times 8a^2x^2-2b^2\times 8a^2\times a=0,$$

按此題卽測圓海鏡卷三「邊股第四問」,「有 b_2, a_{15} 求 D」,清沈欽裴於數學九章札記卷三.令 $x=\sqrt{城徑}$,如測圓海鏡邊股及底勾第四問,得:

$$x^4(a+x^2)-4ab^2=0,$$

又兩邊同乘常數:$(2a+x^2)^2$,得:

$$x^{10}+5ax^8+8a^2x^6-4a(b^2-a^2)x^4$$
$$-2b^2\times 8a^2x^2-2b^2\times 8a^2\times a=0,$$

合問.秦氏原術紆曲特甚,沈氏亦強合題術,未如測圓海鏡法草之簡.蓋在秦氏之時,測圓術尚未普及也.

7. 洞淵之測圓術.

劉嶽雲(1849—1917)算學叢話稱:「依(測圓)海鏡理,出西門北門不得有行步,而卷十一後二問,出北門行十五步,出西門行八步.詳書意,蓋於本勾股形外展大其勾股,勾爲三百四十三,股爲六百二十三,其八與十五卽距城之數,爲小勾股率.書中引爲洞淵測圓門第十三題,然則洞淵之書,以圓內圓外互求,而九容乃其一端耳」.李冶於卷十一,第一十八問,又法,稱:「此問係是洞淵測圓門第十三,前答亦依洞淵細草,用勾外容圓術以如於弦較和.然其數煩碎,宛轉費力,今別草一法,其廉,從,與前不殊,而中間段絡,逕捷明白,方之前術,極爲省易,學者當自知也」.四庫全書本測圓海鏡

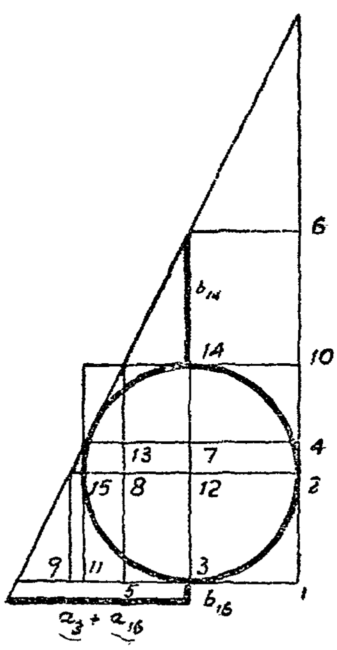
案稱:「洞淵疑爲古之精於算者,序中謂老大以來,得洞淵九容之說,而於此問又明其爲洞淵測圓門第十三題,前答亦依其細草.大抵是書之作,皆師其意而演之者也.今洞淵之爲人與書,雖不可考,而即此一草觀之,其取徑遙深,而惟變所適,亦可見文豹之一斑矣.至謂其數煩碎,宛轉費力,特爲初學難易而言,讀者宜善會也」.李冶測圓海鏡卷十一後二問與全書體例不同,疑幷出於洞淵.茲詳引於下,以見一斑.

測圓海鏡卷十一.雜糅一十八問.

第十七問.

或問出南門行一百三十五步有樹,出北門行一十五步,折而東行二百八步,望見樹,問(徑幾里)?答(曰:城徑二百四十步)同前.

法曰:以東行步乘南行步,得數又自乘爲實.以東行步自乘,乘南行步,又倍之,爲從.



東行步自乘於上,併南北二行步,以減於東行步,餘數自之爲冪,以減上,再寄位.又併南北二行步,以東行步乘而倍之,內減再寄,爲第一益廉.四之東行步於上,又併南北二行步,減於東行步,又四之,減上位,爲第二益廉.四步虛隅,開三乘方,得半徑.

草曰:立天元一爲半徑(即高勾也),置南行加天元,得

| 元
| ☰||||

爲高弦也.置大勾 ‖0Ⅲ,以高弦乘之,得 ‖0Ⅲ 元,復以

‖≐0≐0

高勾除之,得下式:

$$-4x^4-\{4(a_3+a_{16})-4[(a_3+a_{16})-(b_{14}+b_{16})]\}x^3$$

$$-\{2(a_3+a_{16})(b_{14}+b_{16})-\{(a_3+a_{16})^2-[(a_3+a_{16})-(b_{14}+b_{16})]^2\}\}x^2$$

$$+2b_{14}(a_3+a_{16})^2x+b_{14}{}^2(a_3+a_{16})^2=0.$$

令 $x=r,$

$$x+b_{14}=c_7.$$

因 $\dfrac{a_3+a_{16}}{c_3+c_{16}}=\dfrac{a_7=r}{c_7},$

$$(a_3+a_{16})(x+b_{14})\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\overline{c_3+c_{16}}=\text{大弦}.$$

$$(a_3+a_{16})^2+2b_{14}(a_3+a_{16})^2x^{-1}$$

𝍡〇𝍧太為	$+b_{14}^2(a_3+a_{16})^2x^{-2}$
𝍪𝍧〇𝍧〇	$=\overline{c_3+c_{16}}^2$ [寄位]
大弦也,令之自乘得	
𝍬𝍢𝍪𝍥𝍬太	
𝍠𝍩𝍥𝍰𝍠𝍪𝍧〇	
𝍦𝍯𝍧𝍬𝍧𝍮𝍣〇〇	
[寄位]. 又置二之天	又 $2x+b_{14}+b_{16}=$大股
元,加南北行併,得 𝍡	$\{(2x+b_{14}+b_{16})-(a_3+a_{16})\}^2$
元為大股,復用大勾	$=\{(b_3+b_{16})-(a_3+a_{16})\}^2.$
二百八減之 𝍠𝍬〇,	
得: 𝍡 元為較也,	
𝍤𝍰	
以自乘得:	
𝍣 為較冪,以	
𝍡𝍫𝍣 元	
𝍢𝍫𝍥𝍫	
減寄位,得:	$\{(a_3+a_{16})^2+2b_{14}(a_3+a_{16})^2x^{-1}$
𝍤 為二直積	$+b_{14}^2(a_3+a_{16})^2x^{-2}\}$
𝍡𝍫𝍡	$-\{(2x+b_{14}+b_{16})$
𝍢𝍰𝍧〇〇太	$-(a_3+a_{16})\}^2$

𝍠𝍩𝍥𝍰𝍠𝍪𝍧〇

𝍦𝍰𝍧𝍫𝍧𝍮𝍣〇〇

[寄左].再置大股𝍡元,以大勾

𝍠𝍫〇

𝍡〇𝍧 乘之,得𝍣𝍩𝍥元為直

𝍢𝍩𝍡〇〇

積,又倍之,得𝍰𝍢𝍪元為同數,

𝍮𝍡𝍫〇〇

與左相消,得 𝍨,翻

𝍥〇𝍨

𝍪𝍡𝍫〇𝍨

𝍠𝍩𝍥𝍰𝍠𝍪𝍧〇

𝍦𝍰𝍧𝍫𝍧𝍮𝍣〇〇

法開三乘方,得一百二十步,即城徑之半也,合問.

測圓海鏡卷十一.

$=2(a_3+a_{16})(b_3+b_{16})$.

[寄左]

再置 $2(a_3+a_{16})(2x+b_{14}+b_{16})$

$$=2(a_3+a_{16})(b_3+b_{16})$$

為同數,與左相消,得:

$$-4x^4-\{4(a_3+a_{16})-4[(a_3+a_{16})-(b_{14}+b_{16})]\}x^3$$
$$-|2(a_3+a_{16})(b_{14}+b_{16})-\{(a_3+a_{16})^2-[(a_3+a_{16})-(b_{14}+b_{16})]^2\}|x^2$$
$$+2b_{14}(a_3+a_{16})^2x$$
$$+b_{14}^2(a_3+a_{16})^2=0,$$

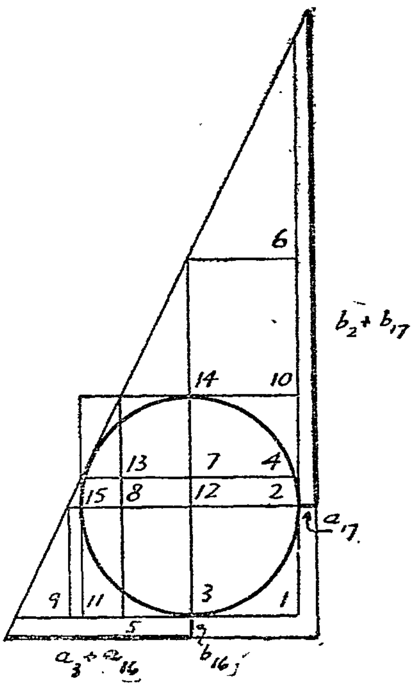
$x=r$, 合問.

雜糅一十八問.

第十八問.

或問出北門一十五步,折而東行二百八步,有樹,出西門八步,折而南行四百九十五步,見之,問答同前.

法曰:先置南行步,內減一東二西併步,餘二百七十一,爲前泛率;次併一南二北內減東行步,餘三百一十七,爲中泛率;次併東西步,以南行步乘之於上位,又以西行乘南北併,得數減上位,餘一十萬二千八百四十爲後泛率.乃以後泛率自乘,得一百五億七千六百六



萬五千六百爲三乘方實.以前中二泛相減餘四十六,以乘後泛數爲從.前中二泛相乘,得八萬五千九百〇七,加入二之後泛數,共得二十九萬一千五百八十七於上位,又(倍)東西併,以乘南北併,得二十二萬三百二十,加上位,通得五十一萬一千九百七,爲第一廉.(前中二)泛數,加入四之東西併,得一千四百五十二於上位,又以前中二泛相減,餘四十六,減上位,餘一千四百六爲第二廉,一步常法,得半徑.

$(b_2+b_{17})-[(a_3+a_{16})+2a_{17}]$

$=\alpha=$前泛率,

$(b_2+b_{17})+2b_{16}-(a_3+a_{16})=\beta$

$=$中泛率,

$(b_2+b_{17})(\overline{a_3+a_{16}}+a_{17})$

$\quad -a_{17}(\overline{b_2+b_{17}}+b_{16})=\gamma=$後

泛率.

$$
\begin{aligned}
&-x^4\\
&-\{[\overline{\alpha+\beta}+4(\overline{a_3+a_{16}}+a_{17})]\\
&\quad -(\beta-\alpha)\}x^3\\
&-\{(\alpha\beta+2\gamma)+2(\overline{a_3+a_{16}}+a_{17})\\
&\quad \cdot(\overline{b_2+b_{17}}+b_{16})\}x^2\\
&-\gamma(\beta-\alpha)x\\
&+\gamma^2\\
&=0,
\end{aligned}
$$

$x=r$.

令 $x=r$,

$x+\overline{a_3+a_{16}}+a_{17}=$大勾,

$x+\overline{b_2+b_{17}}+b_{16}=$大股,

草曰：立天元一爲半城徑，加入東行西行併得𝍠元，爲大勾也

𝍡𝍩𝍥

又置天元加入南行北行併得𝍠元，爲大股也．　𝍣𝍩〇

置西行八步，以大股乘之得下式　𝍧元，

𝍣〇𝍧〇

合以大勾除之，不除寄爲母，便以此爲股尖也．置南行四百九十五步，減天元，得卜元．用分母大勾乘之，

乘訖　𝍢𝍯𝍣

得下式：　卜，內減了股　𝍡𝍮𝍧元，

𝍠〇𝍥𝍯𝍡〇

$$a_{17}(x+\overline{b_2+b_{17}}+b_{16})$$

$$\cdot\frac{1}{x+\overline{a_3+a_{16}}+a_{17}}$$

$=$股尖(b_{17}).

实,餘 卞 爲小股也.

‖⊥丨元

丨〇‖≟Ⅲ〇

[內帶大勾分母]. 置小股,合以大勾乘了,復以大股除之爲小勾,今爲小股內已有大勾爲母,更不須乘,只以小股卞便爲小勾也.

‖⊥丨元

丨〇‖≟Ⅲ〇

[內帶大股爲母]. 小勾小股相乘得數爲一個小勾股相乘直積,內帶大勾股相乘直積爲分母也. 乃以半城徑[卽天元也]除之,爲一个弦較和也.

$$\{(b_2+b_{17}-x)(x+\overline{a_3+a_{16}}+a_{17})-a_{17}(x+\overline{b_2+b_{17}}+b_{16})\}\cdot\frac{1}{x+\overline{a_3+a_{16}}+a_{17}}=b_{10}$$

$=$小股. [內帶大勾分母]

或 $(-x^2+ax+\gamma)$

$$\cdot\frac{1}{x+\overline{a_3+a_{16}}+a_{17}}=b_{10};$$

$$b_{10}(x+\overline{a_3+a_{16}}+a_{17})\cdot\frac{1}{x+\overline{b_2+b_{17}}+b_{16}}=a_{10}=$$ 小勾.

或 $(-x^2+ax+\gamma)$

$$\cdot\frac{1}{x+\overline{b_2+b_{17}}+b_{16}}=a_{10}.$$

[內帶大股分母]

此法本取勾外容圓，合以弦較和除二積，爲勾外所容之圓(徑)。今用半天元圓徑，除一个積，則却得一个弦較和也。內依舊帶大積分母也。[寄左]。然後再置小股 ⊤，合用大積 元 乘之，緣內已帶大勾分母，今只用大股 | 元乘之，得：

因 (勾外容圓法)：

$$\frac{2a_{10}b_{10}}{c_{10}+\overline{b_{10}-a_{10}}}=D,$$

即 $\frac{a_{10}b_{10}}{r}=c_{10}+\overline{b_{10}-a_{10}}.$

$$x^{-1}\{-x^2+ax+\gamma\}^2 \cdot \frac{1}{(x+\overline{b_2+b_{17}}+b_{16})(x+\overline{a_3+a_{16}}+a_{17})}$$

$$=c_{10}+b_{10}-a_{10}.$$

[寄左]，內依舊帶大積分母。

$$2\{(b_2+b_{17}-x)(x+\overline{a_3+a_{16}}+a_{17})-a_{17}(x+\overline{b_2+b_{17}}+b_{16})\}$$

$$\{(x+\overline{b_2+b_{17}}+b_{16})-(x+\overline{a_3+a_{16}}+a_{17})\}$$

$$\cdot\frac{1}{(x+\overline{b_2+b_{17}}+b_{16})(x+\overline{a_3+a_{16}}+a_{17})}$$

$$=2(b_{10}-c_{10}).$$

為大積所乘小股於上;再置小勾合用大積乘之,緣內已帶大股分母,合只用大勾 𝍠 元,乘之得:

𝍡𝍩𝍦

𝍥̸

𝍣𝍬

𝍠𝍮𝍠𝍫𝍦𝍮元

𝍡𝍪𝍡𝍩𝍢𝍫𝍣〇

為大積所乘之小勾也.以此小勾減上小股,得:

𝍡𝍰𝍨,

𝍯𝍧𝍮𝍦𝍫

𝍢〇𝍡𝍫𝍣𝍰𝍮〇 太

即帶分小較也.又二因小較,得此下式:

𝍬𝍧𝍰̸

𝍠𝍬𝍧𝍫𝍢𝍯元

𝍮〇𝍬𝍥𝍰𝍧𝍪〇𝍥

或 $$(-x^2+ax+\gamma)(\alpha+\beta)\cdot\frac{1}{(x+\overline{b_2+b_{17}}+b_{16})(x+\overline{a_3+a_{16}}+a_{17})}=2(b_{10}-a_{10}).$$

因 $$(c_{10}+\overline{b_{10}-a_{10}})(c_{10}-\overline{b_{10}-a_{10}})=2a_{10}b_{10},$$

又(勾外容圓法):

$$\frac{2a_{10}b_{10}}{D}=c_{10}+\overline{b_{10}-a_{10}},$$

故 $$D=c_{10}-\overline{b_{10}-a_{10}}.$$

$$\{2x(x+\overline{a_3+a_{16}}+a_{17})(x+\overline{b_2+b_{17}}+b_{16})\}\cdot\frac{1}{(x+\overline{b_2+b_{17}}+b_{16})(x+\overline{a_3+a_{16}}+a_{17})}=c_{10}-\overline{b_{10}-a_{10}},$$

或 $$\{2x^3+[\overline{\alpha+\beta}+4(\overline{a_3+a_{16}}+a_{17})]x^2+2(\overline{a_3+a_{16}}+a_{17})(\overline{b_2+b_{17}}+b_{16})x\}\cdot\frac{1}{(x+\overline{b_2+b_{17}}+b_{16})(x+\overline{a_3+a_{16}}+a_{17})}=c_{10}-\overline{b_{10}-a_{10}},$$

[內依舊帶大積分母]

因 $$2(b_{10}-a_{10})+(c_{10}-\overline{b_{10}-a_{10}})=c_{10}+\overline{b_{10}-a_{10}},$$

$$\{2[(\overline{b_2+b_{17}}-x)(x+\overline{a_3+a_{16}}+a_{17})-a_{17}(x+\overline{b_2+b_{17}}+b_{16})].$$

$$[(x+\overline{b_2+b_{17}}+b_{16})-(x+\overline{a_3+a_{16}}+a_{17})]$$

$$+2x(x+\overline{a_3+a_{16}}+a_{17})(x+\overline{b_2+b_{17}}+b_{16})\}$$

為帶分二較也.又以大勾股直積:

丨

亍‖⊥

丨一0一T0太

乘二之天元半圓徑,得此下式:

‖,

丨☰𝍣〓

‖〓0☰‖0

0太

為一个帶分弦較較也.〔弦較較乘弦較和為二直積,既以圓徑除二直積,為弦較和,則是圓徑為弦較較也.今又為半天元圓徑除一積為弦較和,故倍天元半徑作一个弦較較也.〕遂將此弦較較,加入前

$$\cdot\frac{1}{(x+\overline{b_2+b_{17}}+b_{16})(x+\overline{a_3+a_{16}}+a_{17})}=c_{10}+\overline{b_{10}-a_{10}}$$

為同數,與寄左相消,得下式:

$$-x^4$$
$$-\{[\overline{\alpha+\beta}+4\overline{(a_3+a_{16}}+a_{17})]-(\beta-\alpha)\}x^3$$
$$-\{(\alpha\beta+2\gamma)+2\overline{(a_3+a_{16}}+a_{17})\overline{(b_2+b_{17}}+b_{16})\}x^2$$
$$-\gamma(\beta-\alpha)x$$
$$+\gamma^2$$
$$=0,$$

而

$(b_2+b_{17})-[(a_3+a_{16})+2a_{17}]=\alpha=$前泛率,

$(b_2+b_{17})+2b_{16}-(a_3+a_{16})=\beta=$中泛率,

$(b_2+b_{17})\overline{(a_3+a_{16}}+a_{17})-a_{17}\overline{(b_2+b_{17}}+b_{16})=\gamma=$後泛率,

二較得:	
𝍡,亦為一個弦較𝍰𝍥𝍫和也.	$x=r$,
	合問.
𝍢𝍯𝍣𝍮𝍥𝍰 元	
𝍮〇𝍫𝍥𝍰𝍣𝍪〇	
與寄左相消,得下式:	
𝍠̸	
𝍠𝍫〇𝍯̸	
𝍣𝍩𝍠𝍰〇𝍯̸	
𝍢𝍯𝍢〇𝍥𝍫〇̸	
𝍩〇𝍫𝍦𝍮〇𝍥𝍫𝍥〇〇	
開三乘方得一百二十步,卽半城徑也,合問.	

測圓海鏡卷十一,第十八問,又法為李治所作,可與洞淵之法相比較,茲引錄於後:

立天元為半徑副之.	令 $x=r=$半徑,
𝍠併東西行得:	
𝍠 元為通勾率;下併南北	$x+\overline{a_3+a_{16}}+a_{17}=$通勾率,

𝍡𝍩𝍥	$x+\overline{b_2+b_{17}}+b_{16}=$通股率;
行得:𝍠元,爲通股率;	
𝍤𝍩〇	$a_{17}(x+\overline{b_2+b_{17}}+b_{16})\cdot\frac{1}{x+\overline{a_3+a_{16}}+a_{17}}$
乃置西行八步,以通股乘之,得下: 𝍧元	$=b_{17}$
𝍣〇𝍧〇	=南小股.
合通勾除,不除,寄爲母,便以此爲南小股也.	$b_{16}(x+\overline{a_3+a_{16}}+a_{17})\cdot\frac{1}{x+\overline{b_2+b_{17}}+b_{16}}$
又置北行一十五步,以通勾乘之,得下:	$=a_{16}$
	=北小勾.
𝍠𝍫元	
𝍢𝍪𝍣〇	
合通股除,不除,寄爲母,便以此爲北小勾也.	
又置南行四百九十五步,內減天元,得:	$\{(\overline{b_2+b_{17}}-x)(x+\overline{a_3+a_{16}}+a_{17})-a_{17}(x+\overline{b_2+b_{17}}+b_{16})\}$
𝍠̸元	$\cdot\frac{1}{x+\overline{a_3+a_{16}}+a_{17}}=b_{10}$
𝍣𝍱𝍤	

用通勾乘之,得:

卜
𝍡𝍯𝍣 元
𝍠〇𝍥𝍰𝍡〇

內減了南小股餘下式:

卜
𝍡𝍯𝍠 元
𝍠〇𝍡𝍰𝍣〇

爲股圓差也,[內帶通勾分母].

又置東行二百八步,內減天元,得:

卜 元
𝍡〇𝍧

用通股乘之得:

卜
𝍢〇𝍨 元
𝍠〇𝍮〇𝍰〇

內減了北小勾,餘下式:

𝍠
𝍡一𝍧 元
𝍠〇𝍡𝍰𝍣〇

或,

$$(-x^2+ax+\gamma)\cdot\frac{1}{x+\overline{a_3+a_{16}}+a_{17}}$$

$$=b_{10}$$

=股圓差.

又

$$\{(a_3+a_{16}-x)\cdot(x+\overline{b_2+b_{17}}+b_{16})-b_{16}(x+\overline{a_3+a_{16}}+a_{17})\}\cdot\frac{1}{x+\overline{b_2+b_{17}}+b_{16}}=a_{11}.$$

或,

$$(-x^2-\beta x+\gamma)\cdot\frac{1}{x+\overline{b_2+b_{17}}+b_{16}}$$

爲勾圓差也,[內帶通股分母].

乃以二差相乘得下式:

丨,
||||丄
||≟丨≡|||亠
||||亠|||0丅≡0元
一0≡||丄0丅≣丅00

爲半段圓徑冪也,內帶通積爲母[寄左].

然後以通勾通股相乘得:

丨,

以天元冪乘之.亠||丄元
丨一0一丅0

之,得:丨,又倍之,得下式:

||
亠||丄　　一||||≡||
丨一0一丅0　||=0≡||0
0元　　0元

爲同數,與左相消,所得廉從一與前同,合問.

$=a_{11}$

=勾圓差.

$$(-x^2+\alpha x+\gamma)(-x^2-\beta x+\gamma)$$

$$\cdot\frac{1}{(x+\overline{a_3+a_{16}}+a_{17})(x+\overline{b_2+b_{17}}+b_{16})}$$

$$=a_{11}b_{10},$$

或 $\{x^4+(\beta-\alpha)x^3-(\alpha\beta+2\gamma)x^2-(\beta-\alpha)\gamma x+\gamma^2\}$

$$\cdot\frac{1}{(x+\overline{a_3+a_{16}}+a_{17})(x+\overline{b_2+b_{17}}+b_{16})}$$

$$=a_{11}b_{10}.$$

[寄左]

以

$$\{2x^2(x+\overline{a_3+a_{16}}+a_{17})\cdot(x+\overline{b_2+b_{17}}+b_{16})\}$$

$$\cdot\frac{1}{(x+\overline{a_3+a_{16}}+a_{17})(x+\overline{b_2+b_{17}}+b_{16})}$$

$$=2x^2.$$

而

$$2\{(\overline{b_2+b_{17}}+b_{16})-(\overline{a_3+a_{16}}+a_{17})\}=\alpha+\beta,$$

$$2\{(\overline{b_2+b_{17}}+b_{16})+(\overline{a_3+a_{16}}+a_{17})\}=$$

$$(\alpha+\beta)+4(\overline{a_3+a_{16}}+a_{17}).$$

或

$$\{2x^4+[\overline{\alpha+\beta}+4(\overline{a_3+a_{16}+a_{17}})]x^3+2(\overline{a_3+a_{16}+a_{17}})(\overline{b_2+b_{17}+b_{16}})x^2\}$$

$$\cdot\frac{1}{(x+\overline{a_3+a_{16}+a_{17}})(x+\overline{b_2+b_{17}+b_{16}})}=2r^2.$$

因 $a_{11}b_{10}=2r^2$,

故為同數,與左相消,得:

$$-x^4-\{[\overline{\alpha+\beta}+4(\overline{a_3+a_{16}+a_{17}})]-(\beta-\alpha)\}x^3-\{(\alpha\beta+2\gamma)+2(\overline{a_3+a_{16}+a_{17}})(\overline{b_2+b_{17}+b_{16}})\}x^2-\gamma(\beta-\alpha)x+\gamma^2=0,$$

而

$(b_2+b_{17})-(a_3+a_{16})-2a_{17}=\alpha$

= 前泛率,

$(b_2+b_{17})+2b_{16}-(a_3+a_{16})=\beta$

$=$ 中泛率,

$(b_2+b_{17})(\overline{a_3+a_{16}}+b_{17})$

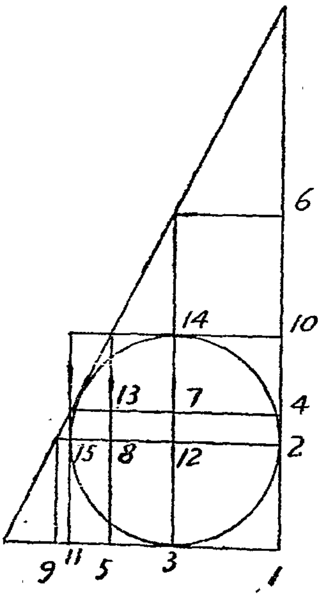
$-a_{17}(\overline{b_2+b_{17}}+b_{16})$

$=\gamma=$ 後泛率.

$x=r$,合問.

8. 李治之測圓術

李治(1192—1279)之測圓術,詳所著測圓海鏡十二卷(1248)中,卷一識別雜紀五百餘條中,諸雜名目疏證,及卷二九容公式疏證,已具詳前篇.原書十二卷,自來註家多因數解題,茲就第二卷至第十二卷原草,按法列式,期合原義.其四庫館校本,李銳校本未當之處,亦一一臚舉.而草中識別有不易辨者,亦間附補註,外加輪廓爲誌.讀者閱此一過,於李治測圓術之精義,可以了解無餘.此種傳譯,或較他種方法



爲便也.

測圓海鏡細艸卷第二

正率一十四問.

1. 有 a_1, b_1, 求 D.

(本法) 此爲勾股容圓也.

$$\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1+\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=D.$$

2. 有 a_2, b_2, 求 D.

(本法) 此爲勾上容圓也.

$$\frac{2a_2b_2}{b_2+\sqrt{a_2^2+b_2^2}}=D.$$

3. 有 a_3, b_3, 求 D.

(本法) 此爲股上容圓也.

$$\frac{2a_3b_3}{a_3+\sqrt{a_3^2+b_3^2}}=D.$$

4. 有 a_{12}, b_{12}, 求 D.

(本法) 此爲勾股上容圓也.

$$\frac{2a_{12}b_{12}}{\sqrt{a_{12}^2+b_{12}^2}}=D.$$

---

5. 有 a, b, 求 D.

(本法) 此爲弦上容圓也.

$$\frac{2ab}{a+b}=D.$$

6. 有 a_{10}, b_{10}, 求 D.

(本法) 此爲勾外容圓也.

$$\frac{2a_{10}b_{10}}{\sqrt{a_{10}^2+b_{10}^2}+(b_{10}-a_{10})}=D.$$

7. 有 a_{11}, b_{11}, 求 D.

(本法) 此爲股外容圓也.

$$\frac{2a_{11}b_{11}}{\sqrt{a_{11}^2+b_{11}^2}-(b_{11}-a_{11})}=D.$$

8. 有 a_{13}, b_{13}, 求 D.

(本法) 此爲弦外容圓也.

$$\frac{2a_{13}b_{13}}{\sqrt{a_{13}^2+b_{13}^2}-(a_{13}+b_{13})}=D.$$

9. 有 a_{14}, b_{14}, 求 D.

(本法) 此爲勾外容圓半也.

$$\frac{2a_{14}b_{14}}{\sqrt{a_{14}^2+b_{14}^2}-a_{14}}=D.$$

10. 有 a_{15}, b_{15}, 求 D,

(本法) 此為股外容圓半也.

$$\frac{2a_{15}b_{15}}{\sqrt{a_{15}^2+b_{15}^2}-b_{15}}=D.$$

11. *a*. 有 b_2, b_{15}, 求 D.

(本法) 此為半矮梯也.

$$\sqrt{b_2\cdot b_{15}}=r.$$

b. 有 a_3, a_{14}, 求 D.

$$\sqrt{4\cdot a_3\cdot a_{14}}=D.$$

c. 有 a_3, a_{14}, 求 D.

$$\sqrt{a_3\cdot a_{14}}=r.$$

12. 有 a_{11}, b_{10}, 求 D.

(本法) 此為兩差求黃方也.

識別 $a_{11}=a_1-D$, $b_{10}=b_1-D$,

$$\sqrt{2a_{11}\cdot b_{10}}=D.$$

13. 有 $a_{15}=b_{14}$, 求 D.

(本法) 以方五斜七求之.

$$\boxed{\begin{aligned} r+a_{15} : r &= 7:5 \\ a_{15} : r &= 2:5 \end{aligned}}$$

$$5a_{15}=D.$$

14. 有 a_3, b_2, 求 D.

(本法) 令 $x=r$.

$$b_2-x=b_{10}=\text{股圓差}.$$

$$a_3-x=a_{11}=\text{勾圓差}.$$

$$(b_2-x)(a_3-x)=a_{11}\cdot b_{10}=\frac{1}{2}(a_1+b_1-c_1)^2$$

$$=\frac{1}{2}D^2\cdots\cdots(A).$$ 寄左.

以 $$2x^2=\frac{1}{2}D^2\cdots\cdots(B)$$ 爲同數,與左相消.

$$(b_2-x)(a_3-x)=2x^2,$$

$$-x^2-(a_3+b_2)x+a_3b_2=0,$$

$$x=r.$$ 合問.

(又本法) 識別得: $a_3+b_2=c_1$.

令 $x=r$.

$$x+b_2=b_1,$$

$$x+a_3=a_1,$$

$$(x+a_3)(x+b_2)=a_1b_1,$$

$$(x+a_3)(x+b_2)\cdot\frac{1}{x}=a_1+b_1+c_1,$$

即 $$x+(a_3+b_2)+a_3b_2x^{-1}=a_1+b_1+c_1\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

以 $(x+a_3)+(x+b_2)+(a_3+b_2)=a_1+b_1+c_1$,

卽 $$2x+2(a_3+b_2)=a_1+b_1+c_1, \cdots\cdots(B)$$

為同數與左相消.

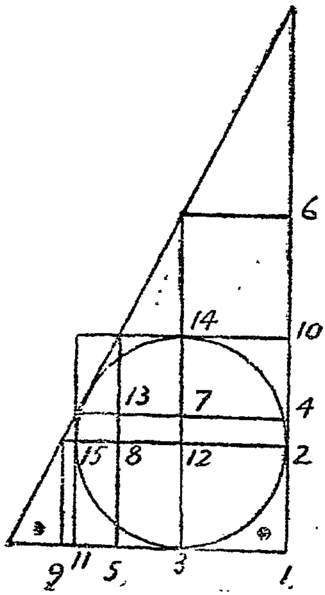
$$x+(a_3+b_2)+a_3b_2x^{-1}=2x+2(a_3+b_2),$$

$$-x^2-(a_3+b_2)x+a_3b_2=0,$$

$$x=r.$$ 合問.

測圓海鏡細草卷第三.

邊股 (b_2) 一十七問.



1. 有 b_2, c_4, 求 D.

(本法) 識別得: $$c_4-b_2=b_{15},$$

$$\sqrt{2(c_4-b_2)\cdot 2b_2}=D.$$ 合問.

2. 有 b_2, a_{11}, 求 D.

(本法) 令 $x=D$.

$$2b_2-x=2b_{10},$$

$$a_{11}(2b_2-x)=D^2, \cdots\cdots (A) \qquad 寄左.$$

以 $x^2=D^2, \cdots\cdots (B)$ 爲同數,與左相消.

得: $-x^2-a_{11}x+2a_{11}b_2=0,$

$$x=D. \qquad 合問.$$

(又本法) 令 $x=r$.

$$b_2-x=b_{10};$$

$$\frac{a_{11}}{2}(b_2-x)=r^2, \cdots\cdots (A) \qquad 寄左.$$

以 $x^2=r^2, \cdots\cdots (B)$ 爲同數,與左相消.

得: $-x^2-\frac{a_{11}}{2}x+\frac{a_{11}b_2}{2}=0,$

$$x=r, \qquad 2r=D \qquad 合問.$$

3. 有 b_2, b_{11}, 求 D.

(本法) 令 $x=r$.

$$b_{11}-x=b_{15}, = 半梯頭$$

$$b_2(b_{11}-x)=r^2, \cdots\cdots (A) \qquad 寄左.$$

以 $x^2=r^2, \cdots\cdots (B)$ 爲同數,與左相消.

得：$$-x^2-b_2x+b_2\cdot b_{11}=0,$$

$$x=r,\qquad 2r=D.$$ 合問.

4. 有 b_2, a_{15}, 求 D.

(本法) 令 $x=D$.

$$x+a_{15}=a_2=\text{中勾}$$

$$a_{15}\cdot b_2\cdot\frac{1}{x+a_{15}}=b_{15}=\text{小股}$$ 內寄中勾分母.

$$4b_2\cdot a_{15}\cdot b_2\cdot\frac{1}{x+a_{15}}=D^2\cdots(A)$$ 寄中勾分母,寄左.

$$(x+a_{15})x^2\cdot\left(\frac{1}{x+a_{15}}\right)=D^2\cdots(B)$$ (亦寄中勾分母), 爲同數,與左相消.

得：$$-x^3-a_{15}x^2+4a_{15}b_2{}^2=0,$$

$$x=D.$$ 合問.

---

5. 有 b_2, a_{14}, 求 D.

(本法) 令 $x=r$.

$$b_2-x=b_{10}=\text{小股}$$

$$x+a_{14}=a_{10}=\text{小勾}$$

$$x+b_2=b_1=\text{大股}$$

$$(x+b_2)(x+a_{14})\cdot\frac{1}{b_2-x}=a_1=\text{大勾}$$ 內寄小股分母,

$$\{(x+b_2)(x+a_{14})-(b_2-x)x\}\cdot\frac{1}{b_2-x}=a_3.$$

$$a_{14}\{(x+b_2)(x+a_{14})-(b_2-x)x\}\cdot\frac{1}{b_2-x}=r^2\cdots\cdots(A)$$

內寄小股分母,寄左.

以 $$(b_2-x)x^2\cdot\left(\frac{1}{b_2-x}\right)=r^2\cdots\cdots(B)$$

(亦寄小股分母),爲同數,與左相消.

得: $$x^3-(b_2-2a_{14})x^2+a_{14}^2x+a_{14}^2b_2=0,$$

$x=r,\quad 2r=D.$ 合問.

(又本法) 識别得: $b_2+a_{14}=b_1-a_{13},$

$b_2-a_{14}=c_{10}.=$大差弦

令 $x=r.$

$$b_2-x=b_{10},$$

$$x+a_{14}=a_{10};$$

$$(b_2-x)(x+a_{14})=a_{10}b_{10},\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

因 $(c_{10}+b_{10}-a_{10})r=(c_{10}+b_{10}-a_{10})\dfrac{(c_{10}-b_{10}+a_{10})}{2}=a_{10}b_{10}$

以 $$\{(b_2-a_{14})+(b_2-x)-(a_{14}+x)\}x=a_{10}b_{10},\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得: $$-x^2+(b_2-a_{14})x-a_{14}b_2=0,$$

$$x=r.$$ 合問.

---

6. 有 b_2, c_{10}, 求 D.

(本法) 識別得: $$c_{10}-b_2=a_{14}.$$

令 $x=r.$

$$x+c_{10}-b_2=a_{10}=\text{小勾}$$

$$b_2-x=b_{10}=\text{小股}$$

$$x+b_2=b_1=\text{大股}$$

$$(x+c_{10}-b_2)(x+b_2)\cdot\frac{1}{b_2-x}=a_1=\text{大勾}$$ 內帶小股分母.

$$\{(x+c_{10}-b_2)(x+b_2)-2x(b_2-x)\}\cdot\frac{1}{b_2-x}=a_{11},$$

$$\{(x+c_{10}-b_2)(x+b_2)-2x(b_2-x)\}=a_{11}\cdot b_{10}=\frac{1}{2}(a_1+b_1-c_1)^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

以 $$2x^2=\frac{1}{2}(a_1+b_1-c_1)^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

為同數,與左相消.

得: $$x^2-\{b_2-(c_{10}-b_2)\}x+b_2(c_{10}-b_2)=0,$$

$$x=r,\qquad 2r=D.$$ 合問.

---

7. 有 b_2, c_2, 求 D.

(本法) 識别得: $c_2-b_2=a_8=$小勾

令 $x=r=b_8=$小股

$$x+b_2=b_1=\text{大股}$$

$$(x+b_2)(c_2-b_2)\cdot\frac{1}{x}=a_1=\text{大勾}$$

$$(x+b_2)(c_2-b_2)\cdot\frac{1}{x}-2x=a_{11}=\text{勾圓差}$$

$$\frac{b_2}{2}(c_2-b_2)x^{-1}+\frac{1}{2}(c_2-b_2)-x=\frac{a_{11}}{2},$$

$$b_2-x=b_{10},$$

因	$\frac{a_{11}}{2}\cdot b_{10}=r^2$

$$\left\{\frac{b_2}{2}(c_2-b_2)x^{-1}+\frac{1}{2}(c_2-b_2)-x\right\}(b_2-x)=r^2,\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

以 $x^2=r^2,\cdots\cdots(B)$

為同數,與左相消.

得: $$-\left\{b_2+\frac{c_2-b_2}{2}\right\}x^2+b_2{}^2\cdot\frac{c_2-b_2}{2}=0,$$

$x=r$, $2r=D$. 合問.

(又本法)
$$\frac{2\sqrt{(c_2-b_2)(c_2+b_2)\cdot b_2}}{c_2+b_2}=D,$$

合問,此蓋前勾上容圓法也.

---

8. 有 b_2, c_1 求 D.

(本法) 識別得: $c_1-b_2=r+(c_1-b_1)$.

令 $x=r$.

$$x+\overline{c_1-b_2}=a_1=\text{大勾}$$

$$x+b_2=b_1=\text{大股}$$

$$(x+\overline{c_1-b_2})^2=a_1^2,\cdots\cdots(A) \qquad \text{寄左.}$$

因	$(c_1+b_1)(c_1-b_1)=a_1^2.$

以 $(c_1+\overline{x+b_2})(\overline{c_1-b_2}-x)=a_1^2,\cdots\cdots(B)$

為同數,與左相消.

得: $$-2x^2-\{(c_1+b_2)(c_1-b_2)\}x$$
$$+\{(c_1+b_2)(c_1-b_2)-(c_1-b_2)^2\}=0,$$

$$x=r, \qquad 2x=D. \qquad \text{合問.}$$

(又本法) 令 $x=c_1-b_1$.

$$(c_1-b_2)-x=r,$$

$$4\{(c_1-b_2)-x\}^2=D^2,\cdots\cdots(A) \qquad \text{寄左.}$$

以 $2\{b_2-(\overline{c_1-b_2}-x)\}x=D^2,\cdots\cdots(B)$

爲同數,與左相消.

得: $2x^2-\{8(c_1-b_2)+2b_2-2(c_1-b_2)\}x+4(c_1-b_2)^2=0,$

$x=c_1-b_1.$ 合問.

---

9. 有 b_2, c_6, 求 D.

(本法) 識別得: $b_2-c_6=b_7=$ 小股率

令 $x=r=a_7=$ 小勾率

$x+b_2=b_1=$ 大股率

$$x(x+b_2)\cdot\frac{1}{b_2-c_6}=a_1=\text{大勾率}$$

內寄小股分母.

$$\{x(x+b_2)-2x(b_2-c_6)\}\cdot\frac{1}{b_2-c_6}=a_{11}=\text{小差}\quad\text{內寄小股分母.}$$

$$b_2-x=b_{10}=\text{大差}$$

$$2\{x(x+b_2)-2x(b_2-c_6)\}(b_2-x)\cdot\frac{1}{b_2-c_6}=D^2,\cdots\cdots(A)$$

內寄小股分母,寄左.

以 $$(2x)^2(b_2-c_6)\left(\frac{1}{b_2-c_6}\right)=D^2,\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得: $$-2x^2+2b_2\{b_2-2(b_2-c_6)\}=0,$$

$$x=r, \qquad 2r=D.$$ 合問.

10. 有 b_2, b_{14}, 求 D.

(本法) 令 $x=r=a_6=$ 勾率

$b_2-(x+b_{14})=b_6=$ 股率

$b_{14}=$ 小股

$b_{14}x\cdot\dfrac{1}{b_2-(x+b_{14})}=a_{14}=$ 小勾 內寄股率分母.

$b_{14}+2x=b_3=$ 大股

$(b_{14}+2x)x\cdot\dfrac{1}{b_2-(x+b_{14})}=a_3=$ 大勾 內寄股率分母.

$$(b_{14}+2x)x\cdot b_{14}x\cdot\frac{2}{\{b_2-(x+b_{14})\}^2}=a_3\cdot a_{14}=r^2,\cdots\cdots(A)$$

內帶股率冪爲分母,寄左.

以 $$x^2\{b_2-(x+b_{14})\}^2\cdot\frac{1}{\{b_2-(x+b_{14})\}^2}=r^2,\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得: $$x^2-2b_2x+\{(b_2-b_{14})^2-b_{14}^2\}=0,$$

$$x=r, \qquad 2r=D.$$ 合問.

11. 有 b_2, a_{10}, 求 D.

(本法) 令 $x=r.$

$$x+b_2=b_1=\text{大股}$$

$$b_2-x=b_{10}=\text{小股}$$

$$a_{10}=\text{小勾}$$

$$a_{10}(x+b_2)\cdot\frac{1}{b_2-x}=a_1=\text{大勾}$$ 內寄小股爲母.

$$\{a_{10}(x+b_2)-x(b_2-x\}\cdot\frac{1}{b_2-x}=a_3=\text{半个矮梯底}$$

$$a_{10}-x=a_{14}=\text{半个矮梯頭}$$

$$\{a_{10}(x+b_2)-x(b_2-x)\}(a_{10}-x)\cdot\frac{1}{b_2-x}=r^2,\cdots\cdots\cdots(A)$$

(內帶小股爲母)寄左.

以 $$x^2(b_2-x)\left(\frac{1}{b_2-x}\right)=r^2,\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲如積,與左相消.

得: $$-\{a_{10}(b_2-a_{10})+a_{10}b_2\}x+a_{10}{}^2b_{10}=0,$$

$$x=r,\qquad 2r=D.$$ 合問.

(又本法) 令 $x=r$

$$x+b_2=b_1=\text{大股}$$

$$b_2-x=b_{10}=\text{小股}=\text{股圓差}$$

$$a_{10}=\text{小勾}$$

$$a_{10}(x+b_2)\cdot\frac{1}{b_2-x}=a_1=\text{大勾}$$ 內寄小股爲母.

$$\{a_{10}(x+b_2)-2x(b_2-x)\}\cdot\frac{1}{b_2-x}=a_{11}=\text{勾圓差}$$

$$b_2-x=b_{10}=\text{股圓差}$$

$$\{a_{10}(x+b_2)-2x(b_2-x)\}=a_{11}\cdot b_{10}=2r^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

更無分母,寄左.

$$2x^2=2r^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲如積,與左相消.

得: $-(2b_2-a_{10})x+a_{10}b_2=0,$

$x=r.$ 合問.

---

12. 有 b_2, c_{15}, 求 D.

(本法) 令 $x=b_{15},$

$$x+c_{15}=a_8,$$

$$\frac{b_2-x}{2}=b_6,$$

因	$a_8\cdot b_6=r^2.$

$$(x+c_{15})\cdot\frac{b_2-x}{2}=r^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

又因	$b_2\cdot b_{15}=r^2.$

以 $b_2x=r^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$

爲同數,與左相消.

得: $$-0.5x^2-\frac{b_2+c_{15}}{2}x+\frac{b_2c_{15}}{2}=0,$$

$$x=b_{15},\ 2\sqrt{b_2b_{15}}=D.$$ 合問.

---

13. 有 b_2, c_{14}, 求 D.

(本法) 令 $$x=a_{14},$$

$$x+c_{14}=b_7,$$

$$b_2-\overline{x+c_{14}}=c_7,$$

$$2(b_2-\overline{x+c_{14}})=c_4,$$

因	$c_4-b_2=b_{15}$,	$b_2b_{15}=r^2$,	$\frac{c_4\cdot a_{14}}{c_{14}}=\frac{D}{2}$.

$$b_2\{2(b_2-\overline{x+c_{14}})-b_2\}c_{14}{}^2\cdot\left(\frac{1}{c_{14}{}^2}\right)=r^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

(帶明弦分母)寄左.

$$\left\{\frac{2(b_2-\overline{x+c_{14}})x}{2}\right\}^2\cdot\frac{1}{c_{14}{}^2}=r^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得: $$x^4-2(b_2-b_4)x^3+(b_2-c_{14})^2x^2+2b_2c_{14}{}^2x$$
$$+b_2\{b_2-2(b_2-c_{14})\}c_{14}{}^2=0,$$

$$x=a_{14}.$$

餘各依法入之 合問.

(又本法) 識別得: $b_2-c_{14}=b_7+c_{13}$,

$$=c_7+a_{14},$$

$$\overline{b_2-c_{14}}-r=a_{14}+b_{14},$$

$$a_{14}+b_{14}+c_{14}=b_1-D=b_{10},$$

$$a_{14}+b_{14}-c_{14}=(a+b-c)_{14},$$

$$2c_{14}+(a+b-c)_{14}=b_1-D=b_{10},$$

$$b_2-a_{14}=c_{10}.$$

令 $$x=a_{14},$$

$$\overline{b_2-c_{14}}-x=c_7,$$

$$b_2-(\overline{b_2-c_{14}}-x)=b_7, \text{ 或 } c_{14}+x=b_7,$$

$$(b_2-c_{14})-(x+c_{14})=c_{13} \text{ 或 } b_2-2c_{14}-x=c_{13},$$

$$(b_2-c_{14}-x)-x=b_{15} \text{ 或 } b_2-2c_{14}-2x=b_{15},$$

因	$\dfrac{c_7\cdot a_{14}}{c_{14}}=a_7=r, \quad b_2\cdot b_{15}=r^2.$

$$\{(b_2-c_{14}-x)x\}^2\cdot\frac{1}{c_{14}^{\ 2}}=r^2, \cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

內帶明弦冪分母,寄左.

以 $\{b_2(b_2-2c_{14}-2x)\}c_{14}^{\ 2}\left(\dfrac{1}{c_{14}^{\ 2}}\right)=r^2, \cdots\cdots\cdots\cdots(B)$

為同數與左相消.

得: $x^4-2(b_2-b_4)x^3+(b_2-c_{14})^2x^2+2b_2c_{14}{}^2x$

$+b_2\{b_2-2(b_2-c_{14})\}c_{14}{}^2=0,$ 如前式.

14. 有 b_2, c_6, 求 D.

(本法) 令 $x=r,$

$b_2(2c_6-b_2)=r^2,$…………(A) 寄左.

以 $x^2=r^2,$…………(B)爲同數,與左相消.

得: $-x^2+b_2(2c_6-b_2)=0,$

$x=r,\qquad 2r=D.$ 合問.

15. 有 b_2, c_8, 求 D.

(本法) 識別得 $c_8=a_{12}.$

令 $x=r,$

$x+c_8=a_2,$

$c_8-x=a_{15},$

因	$\dfrac{a_{15}\cdot b_2}{a_2}=b_{15},\qquad b_2\cdot b_{15}=r^2.$

$b_2(c_8-x)b_2\cdot\dfrac{1}{x+c_8}=r^2,$…………$(A)$

內帶邊勾分母寄左.

以 $$x^2(x+c_8)\left(\frac{1}{x+c_8}\right)=r^2, \cdots\cdots\cdots(B)$$

為同數,與左相消.

得: $$-x^3-c_8x^2-b_2{}^2x+b_2{}^2c_8=0,$$

$$x=r, \qquad 2r=D$$ 合問.

---

16. 有 $b_2, b_{14}+c_{14}$, 求 D.

(本法) 識別得: $b_2-(b_{14}+c_{14})=a_{10}$.

令 $$x=a_{14},$$

$$\{b_2-(b_{14}+c_{14})\}-x=r,$$

$$\{(b_2-\overline{b_{14}+c_{14}}-x)-x\}=a_{13},$$

或 $$b_2-\overline{b_{14}+c_{14}}-2x=a_{13},$$

$$\{(b_2-\overline{b_{14}+c_{14}}-x)+b_2\}=b_1,$$

或 $$2b_2-\overline{b_{14}+c_{14}}-x=b_1,$$

因 $$a_{13}b_1=\frac{1}{2}D^2.$$

$$\frac{(b_2-\overline{b_{14}+c_{14}}-2x)(2b_2-\overline{b_{14}+c_{14}}-x)}{2}=r^2, \cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

以 $$\{b_2-\overline{b_{14}+c_{14}}-x\}^2=r^2, \cdots\cdots\cdots(B)$$

為同數,與左相消.

得: $$-\frac{b_2+\overline{b_{14}+c_{14}}}{2}x+\left\{\frac{(b_2-\overline{b_{14}+c_{14}})(2b_2-\overline{b_{14}+c_{14}})}{2}\right.$$
$$\left.-(b_2-\overline{b_{14}+c_{14}})^2\right\}=0,$$
$$x=a_{14}.$$ 合問.

---

17. 有 b_2, $a_{15}+c_{15}$, 求 D.

(本法) 原誤.

(館案法) 識別得: $b_2=b_6+c_6=b_7+c_7$;

$$b_{15}=c_7-b_7,$$

$$b_{15}+c_{15}=a_8.$$

令 $$x=b_{15},$$

$$x^2\cdot\frac{1}{a_{15}+c_{15}}=c_{15}-a_{15},$$

內寄直勾弦和分母.

$$\{x^2+(a_{15}+c_{15})^2\}\cdot\frac{1}{a_{15}+c_{15}}=2c_{15},$$

$$\{x^2+(a_{15}+c_{15})^2+2x(a_{15}+c_{15})\}\cdot\frac{1}{a_{15}+c_{15}}=2(c_{15}+b_{15})=2a_8,$$

$$b_2-x=2b_6,$$

因	$2a_8\cdot 2b_6=D^2,\qquad 4b_2b_{15}=D^2.$

$$\{x^2+(c_{15}+c_{15})^2+2x(a_{15}+c_{15})\}(b_2-x)\cdot\frac{1}{a_{15}+c_{15}}=D^2,\cdots(A)$$ 寄左.

$$4b_2x(a_{15}+c_{15})\cdot\left(\frac{1}{a_{15}+c_{15}}\right)=D^2,\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得: $x^3-\{b_2-2(a_{15}+c_{15})\}x^2+[2b_2+(a_{15}+c_{15})](a_{15}+c_{15})x$

$$-b_2(a_{15}+c_{15})^2=0,$$

$$x=b_{15}.$$ 合問.

(李銳法) 識別得: $a_2+c_2-(a_{15}+c_{15})=a_4+c_4,$

$$b_2+b_{15}=c_4,$$

$$2r=a_4,$$

$$a_{15}+b_{15}+c_{15}=c_1-b_1.$$

令 $$x=b_{15},$$

$$(a_{15}+c_{15})b_2\cdot\frac{1}{x}=a_2+c_2,$$

或 $(a_{15}+c_{15})b_2x^{-1}=a_2+c_2.$

$$(a_{15}+c_{15})b_2x^{-1}-(a_{15}+c_{15})=a_4+c_4,$$

$$x+b_2=c_4.$$

$$(a_{15}+c_{15})b_2x^{-1}-(a_{15}+c_{15})-(x+b_2)=2r,$$

$$2b_2-\{(a_{15}+c_{15})b_2x^{-1}-(a_{15}+c_{15})-(x+b_2)\}=2(c_1-a_1),$$

$$x+a_{15}+c_{15}=c_1-b_1.$$

$$(x+a_{15}+c_{15})\{2b_2-[(a_{15}+c_{15})b_2x^{-1}-(a_{15}+c_{15})-(x+b_2)]\}$$

$$=D^2, \cdots\cdots(A) \qquad \text{寄左.}$$

$$4b_2x=D^2, \cdots\cdots(B) \qquad \text{爲同數與左相消.}$$

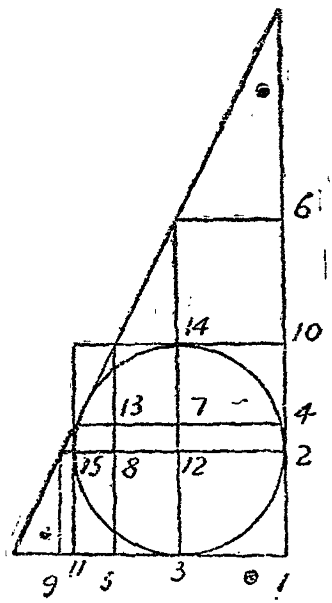
得: $$x^3-\{b_2-2(a_{15}+c_{15})\}x^2+[2b_2+(a_{15}+c_{15})](a_{15}+c_{15})x$$

$$-b_2(a_{15}+c_{15})^2=0,$$

$$x=b_{15} \qquad \text{合問.}$$

測圓海鏡細草卷第四

底勾(a_3)一十七問.



1. 有 a_3, c_5, 求 D.

(本法　識别得: $c_5-a_4=a_{14}$,

$$\sqrt{4(c_5-a_3)a_3}=D.$$ 合問.

---

2. 有 a_3, b_{10}, 求 D.

(本法) 令 $x=D$.

$$2a_3-x=2a_{11},$$

$$(2a_3-x)b_{10}=D^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

以 $x^2=D^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$

爲同數,與左相消.

得: $-x^2-b_{10}x+2a_3b_{10}=0.$

$$x=D.$$ 合問.

(又本法) 令 $x=r$.

$$a_3-x=a_{11},$$

$$(a_3-x)\frac{b_{10}}{2}=r^2,\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

以 $x^2=r^2,\cdots\cdots(B)$ 爲同數,與左相消.

得: $-x^2-\frac{b_{10}}{2}x+\frac{a_3b_{10}}{2}=0,$

$$x=r,\qquad 2r=D.$$ 合問.

---

3. 有 a_3, a_{10}. 求 D.

(本法)　令　$x=r.$

$a_3(a_{10}-x)=r^2, \cdots\cdots(A)$　寄左.

$x^2=r^2, \cdots\cdots(B)$ 爲同數,與左相消.

得:　$-x^2-a_3x+a_3\cdot a_{10}=0,$

$x=r, \qquad 2r=D.$　合問.

---

4. 有 a_3, b_{14}, 求 D.

(本法)　令　$x=D.$

$x+b_{14}=b_3=$股率

$a_3\cdot b_{14}\cdot\dfrac{1}{x+b_{14}}=a_{14}=$小勾　寄股率爲母.

$4a_3\cdot a_3\cdot b_{14}\dfrac{1}{x+b_{14}}=D^2, \cdots\cdots(A)$寄股率分母,寄左.

$(x+b_{14})x^2\left(\dfrac{1}{x+b_{14}}\right)=D^2, \cdots\cdots(B)$爲同數,與左相消.

得:　$-x^3-b_{14}x^2+4a_3{}^2b_{14}=0,$

$x=D.$　合問.

(李銳法)　令　$x=a_{14}=$小勾

$b_{14}=$小股

$a_3=$大勾

$a_3-x=a_5=$中勾

因 $\frac{a_5 \cdot b_{14}}{a_{14}} = b_5 = D$, 又 $a_3 a_{14} = r^2$.	

$$(a_3 - x)^2 \cdot b_{14}{}^2 \cdot \frac{1}{x^2} = D^2, \cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

$$4a_3 x = D^2, \cdots\cdots\cdots(B)$$ 爲同數,與左相消.

得: $$-4a_3 x^3 + b_{14}{}^2 x^2 - 2a_3 b_{14}{}^2 x + \overline{a_3 b_{14}}^2 = 0,$$

$$x = a_{14},$$

而 $$2\sqrt{a_3 a_{14}} = D.$$ 合問.

(李銳法) 令 $x = r$.

$$2x + b_{14} = b_3,$$

$$a_3 b_{14} \cdot \frac{1}{2x + b_{14}} = a_{14},$$

$$a_3 \cdot a_3 \cdot b_{14} \cdot \frac{1}{2x + b_{14}} = r^2, \cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄股率分母,寄左.

$$x^2(2x + b_{14})\left(\frac{1}{2x + b_{14}}\right) = r^2, \cdots\cdots\cdots(B)$$ 爲同數,與左相消.

得: $$-2x^3 - b_{14} x^2 + a_3{}^2 b_{14} = 0,$$

$$x = r, \qquad 2r = D.$$ 合問.

---

5. 有 a_3, b_{15}, 求 D.

(本法) 令 $x = r$.

$$a_3-x=a_{11}=\text{小勾}$$

$$x+b_{15}=b_{11}=\text{小股}$$

$$x+a_3=a_1=\text{大勾}$$

$$(x+a_3)(x+b_{15})\cdot\frac{1}{a_3-x}=b_1=\text{大股} \quad \text{内帶小勾分母.}$$

$$\{(x+a_3)(x+b_{15})-(a_3-x)x\}\cdot\frac{1}{a_3-x}=b_2,$$

$$b_{15}\{(x+a_3)(x+b_{15})-(a_3-x)x\}\cdot\frac{1}{a_3-x}=r^2,\cdots\cdots\cdots(A)$$

内有小勾分母,寄左.

以 $$(a_3-x)x^2\cdot\left(\frac{1}{a_3-x}\right)=r^2,\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得: $$x^3-(a_3-2b_{15})x^2+b_{15}{}^2x+a_3b_{15}{}^2=0,$$

$$x=r, \qquad 2r=D. \qquad \text{合問.}$$

(又本法) 識别得: $a_3+b_{15}=a_1-b_{13}$,

$$a_3-b_{15}=c_{11},$$

令 $$x=r.$$

$$a_3-x=a_{11},$$

$$x+b_{15}=b_{11},$$

$$(a_3-x)(x+b_{15})=a_{11}\cdot b_{11},\cdots\cdots\cdots(A) \qquad \text{寄左.}$$

館案: 因 $$a_{11}-c_9=c_8-b_8$$

$$a_{11}=c_8-b_8+a_8,$$

$$\frac{b_{11}}{r=b_8}=\frac{c_{11}-b_{11}+a_{11}}{c_8-b_8+a_8},$$

$$(c_{11}-b_1\ +a_{11})r=a_{11}b_{11}.$$

$$2x+b_{15}-a_3=b_{11}-a_{11},$$

$$2a_3-2b_{15}-2x=c_{11}-b_{11}+a_{11},$$

$$\{(2a_3-2b_{15}-2x)x\}=a_{11}b_{11}.\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得: $$x^2-(a_3-b_{15})x+a_3b_{15}=0,$$

$$x=r.$$ 合問.

---

6. 有 a_3, c_{11} 求 D.

(本法) 識別得: $$a_3-c_{11}=b_{15},$$

令 $$x=r.$$

$$x+b_{15}=b_{11}=\text{小股}$$

$$a_3-x=a_{11}=\text{小勾}$$

$$x+c_3=a_1=\text{大勾}$$

$$(x+a_3)(x+b_{15})\cdot\frac{1}{a_3-x}=b_1=\text{大股}$$ 內帶小勾分母,

因	$b_1-2r=b_{10}$, $\quad 2a_{11}\cdot b_{10}=(a_1+b_1-c_1)^2$.

$$2\{(a_3+x)(b_{15}+x)-2x(a_3-x)\}=(a_1+b_1-c_1)^2, \cdots\cdots (A)$$

更無分母,寄左.

$$(2x)^2=(a_1+b_1-c_1)^2, \cdots\cdots (B)$$

爲同數,與左相消.

得: $x^2-\{a_3-(a_3-c_{11})\}x+a_3\cdot(a_3-c_{11})=0$,

$x=r$, $\quad 2r=D$. 合問.

7\. 有 a_3, c_3 求 D.

$$c_3-a_3=b_7=\text{小股}$$

令 $x=r=$ 小勾

$$x+a_3=a_1=\text{大勾}$$

$$(x+a_3)(c_3-a_3)\cdot\frac{1}{x}=b_1=\text{大股}$$

$$(x+a_3)(c_3-a_3)\cdot\frac{1}{x}-2x=a_{10}=\text{股圓差}.$$

$$2\{(a_3+x)(c_3-a_3)x^{-1}-2x\}(a_3-x)=D^2\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

$$\overline{2x}^2=D^2\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得: $-\{2(c_3-a_3)+4a_3\}x^2+2\times 2a_3(c_3-a_3)=0$,

$x=r$, $\quad 2r=D$. 合問.

(又本法)
$$\frac{a_3\sqrt{(c_3-a_3)(c_3+a_3)}}{\frac{c_3+a_3}{2}}=D,$$

合問.[此用股上容圓求之,比前法較爲簡易.]

8. 有 a_3, c_1, 求 D.

(本法) 識别得: $c_1-a_3=r+(c_1-a_1)$.

令
$$x=r.$$
$$x+\overline{c_1-a_3}=b_1=\text{大股},$$
$$x+a_3=a_1=\text{大勾},$$
$$(x+\overline{c_1-a_3})^2=b_1^2,\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

以
$$(c_1+\overline{x+a_3})(\overline{c_1-a_3}-x)=b_1^2,\cdots\cdots(B)$$
爲同數,與左相消.

得:
$$-2x^2-\{(c_1+a_3)-(c_1-a_3)\}x$$
$$+\{(c_1+a_3)(c_1-a_3)-(c_1-a_3)^2\}=0,$$
$$x=r,\qquad 2r=D.$$ 合問.

(又本法) 令
$$x=c_1-a_1,$$
$$(c_1-a_3)-x=r,$$
$$\{(c_1-a_3)-x\}^2=r^2,\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

以
$$\frac{\{a_3-(\overline{c_1-a_3}-x)\}x}{2}=r^2,\cdots\cdots(B)$$
爲同數,與左相消.

得: $$0.5x^2-\left\{2(c_1-a_3)+\frac{a_3-(c_1-a_3)}{2}\right\}x-(c_1-a_3)^2=0,$$

$$x=c_1-a_1.$$ 合問.

---

9. 有 a_3, c_9, 求 D.

(本法) 識別得: $a_3-c_9=a_8=$勾率

令 $x=r=b_8=$股率

$x+a_3=a_1=$大勾

$x(x+a_3)\cdot\dfrac{1}{a_3-c_9}=b_1=$大股 內帶勾率分母.

$\{x(x+a_3)-2x(a_3-c_9)\}\cdot\dfrac{1}{a_3-c_9}=b_{10}=$大差 內帶勾率分母.

$a_3-x=a_{11}=$小差

$$(a_3-x)\{x(x+a_3)-2x(a_3-c_9)\}\cdot\frac{1}{a_3-c_9}$$

$=\dfrac{1}{2}(a_1+b_1-c_1)^2,$ ……(A) 內寄勾率爲母,寄左.

$$2x^2(a_3-c_9)\left(\frac{1}{a_3-c_9}\right)=\frac{1}{2}(a_1+b_1-c_1)^2.$$

…………………………(B) 爲同數,與左相消.

得: $$-x^2+a_3\{a_3-2(a_3-c_9)\}=0,$$

$x=r,\quad 2r=D.$ 合問.

---

10. 求 a_3, a_{15}, 求 D.

(本法) 令 $$x=r.$$

$$x+\overline{a_{15}-a_3}=a_9=\text{平勾率}$$

$$x=b_9=\text{平股率}$$

$$a_{15}=\text{小勾}$$

$$a_{15}x\cdot\frac{1}{x+a_{15}-a_3}=b_{15}=\text{小股}\qquad\text{內帶勾率爲母.}$$

$$(a_{15}+2x)x\cdot\frac{1}{x+a_{15}-a_3}=b_2=\text{大股}\qquad\text{內寄勾率爲母.}$$

$$(a_{15}+2x)x\cdot a_{15}x\cdot\frac{1}{(x+a_{15}-a_3)^2}=b_2b_{15}=r^2,\cdots\cdots\cdots(A)$$

內寄勾率爲母,寄左.

$$x^2(x+a_{15}-a_3)^2\cdot\frac{1}{(x+a_{15}-a_3)^2}=r^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得: $$x^2-2a_3x+\{(a_3-a_{15})^2-a_{15}{}^2\}=0,$$

$$x=r,\qquad 2r=D.\qquad\text{合問.}$$

---

11. 有 a_3, b_{11}, 求 D.

(本法) 令 $$x=r.$$

$$x+a_3=a_1=\text{大勾}$$

$$a_3-x=a_{11}=\text{小勾}$$

$$b_{11}=\text{小股}$$

$$b_{11}(x+a_3)\cdot\frac{1}{a_3-x}=b_1=\text{大股}$$

$$\{b_{11}(x+a_3)-x(a_3-x)\}\cdot\frac{1}{a_3-x}=b_2=\text{半個矮梯底},$$

內寄小勾爲母.

$$b_{11}-x=b_{15}=\text{半個矮梯頭},$$

$$\{b_{11}(a_3+x)-x(a_3-x)\}(b_{11}-x)\cdot\frac{1}{a_3-x}=r^2,\cdots\cdots(A)\text{寄左.}$$

以

$$x^2(a_3-x)\left(\frac{1}{a_3-x}\right)=r^2,\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得:

$$-\{b_{11}(a_3-b_{11})+a_3b_{11}\}x+a_3b_{11}{}^2=0,$$

$$x=r,\qquad 2r=D.$$

合問.

(又本法)　令　$x=r.$

$$x+a_3=a_1=\text{大勾}$$

$$a_3-x=a_{11}=\text{小勾}=\text{勾圓差}$$

$$b_{11}=\text{小股}$$

$$b_{11}(x+a_3)\cdot\frac{1}{(a_3-x)}=b_1=\text{大股}\quad\text{內寄小勾爲母.}$$

$$\{b_{11}(x+a_3)-2x(a_3-x)\}\frac{1}{a_3-x}=b_{10}=\text{股圓差.}$$

$$\{b_{11}(x+a_3)-2x(a_3-x)\}=a_{11}b_{10}=2r^2,\cdots\cdots(A)$$

更無分母,寄左.

$$2x^2=2r^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得: $$-(2a_3-b_{11})x+a_3b_{11}=0,$$

$$x=r.$$ 合問.

---

12. 有 a_3, c_{14}, 求 D.

(本法) 令 $$x=a_{14}.$$

$$x+c_{14}=b_7,$$

$$\frac{a_3-x}{2}=a_9,$$

$$(x+c_{14})\cdot\frac{a_3-x}{2}=r^2,\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

以 $$a_3x=r^2,\cdots\cdots(B)$$ 爲同數,與左相消.

得: $$-0.5x^2-\frac{a_3+c_{14}}{2}x+\frac{a_3\cdot c_{14}}{2}=0,$$

$$x=a_{14},\quad 2\sqrt{a_3\cdot a_{14}}=D.$$ 合問.

---

13. 有 a_3,c_{15}, 求 D.

(本法) 令 $$x=b_{15},$$

$$x+c_{15}=a_8,$$

$$a_3-\overline{x+c_{15}}=c_8,$$

$$2(a_3-\overline{x+c_{15}})=c_5,$$

$$a_8\{2(a_3-\overline{x+c_{15}}-a_3\}c_{15}{}^2\cdot\left(\frac{1}{c_{15}{}^2}\right)=r^2,\cdots\cdots\cdots(A)$$ 帶分,寄左.

以 $$\left\{\frac{2(a_3-\overline{x+c_{15}})x}{2}\right\}^2\cdot\frac{1}{c_{15}{}^2}=r^2,\cdots\cdots\cdots(B)$$

內帶重弦分母,為同數,與左相消.

得: $$x^4-2(a_3-c_{15})x^3+(a_3-c_{15})^2x^2$$
$$+2a_3c_{15}{}^2x-a_3\{2(a_3-c_{15})-a_3\}c_{15}{}^2=0,$$
$$x=b_{15}.$$ 合問.

餘各依數求之.

(又本法) 識別得: $a_3-c_{15}=a_8+c_{13}$,

$$=c_8+b_{15},$$

$$\overline{a_3-c_{15}}-r=a_{15}+b_{15},$$

$$a_{15}+b_{15}+c_{15}=a_1-D=a_{11},$$

$$a_{15}+b_{15}-c_{15}=(a+b-c)_{15},$$

$$2c_{15}+(a+b-c)_{15}=a_1-D=a_{11},$$

$$a_3-b_{15}=c_{11}.$$

令 $$x=b_{15},$$

$$\overline{a_3-c_{15}}-x=c_8,$$

$$a_3-(\overline{a_3-c_{15}}-x)=a_8,$$ 或 $c_{15}+x=a_8$,

$$(a_3-c_{15})-(x+c_{15})=c_{13},\ \text{或}\ a_3-2c_{15}-x=c_{13},$$

$$(a_3-2c_{15}-x)-x=a_{14},\ \text{或}\ a_3-2c_{15}-2x=a_{14},$$

因	$\dfrac{c_8\cdot b_{15}}{c_{15}}=b_8,$	$a_3\cdot a_{14}=r^2.$

$$\{(a_3-c_{15}-x)x\}^2\cdot\frac{1}{c_{15}{}^2}=r\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

內帶直弦冪分母,寄左.

$$\{a_3(a_3-2c_{15}-2x)\}c_{15}{}^2\cdot\left(\frac{1}{c_{15}{}^2}\right)=r^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得: $$x^4-2(a_3-c_{15})x^3+(a_3-c_{15})^2x^2+2a_3c_{15}{}^2x$$

$$-a_3\{a_3-2c_{15}\}c_{15}{}^2=0,$$ 廉從一一如上.

---

14. 有 a_3, c_9, 求 D.

(本法) 命 $x=r.$

$$a_3(2c_9-a_3)=r^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

以 $$x^2=r^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數與左相消.

得: $$-x^2+a_3(2c_9-a_3)=0,$$

$$x=r,\qquad 2r=D.$$ 合問.

15． 有 a_3, c_7, 求 D.

（本法） 識别得: $$c_7=b_{12},$$

令 $$x=r,$$

$$x+c_7=b_3,$$

$$c_7-x=b_{14},$$

$$\boxed{\text{因}\quad \frac{b_{14}\cdot a_3}{b_3}=a_{14},\qquad a_3\cdot a_{14}=r^2.}$$

$$a_3(c_7-x)a_3\cdot\frac{1}{c_7+x}=r^2;\cdots\cdots\cdots(A)$$

內帶底股分母,寄左.

以 $$x^2(x+c_7)\cdot\frac{1}{x+c_7}=r^2,\cdots\cdots\cdots(B)$$ 與左相消.

得 $$-x^3-c_7x^2-a_3{}^2x+a_3{}^2c_7=0,$$

$$x=r,\qquad 2r=D.$$ 合問.

16． 有 a_3 $a_{15}+c_{15}$, 求 D.

（本法） 識别得: $$a_3-(a_{15}+c_{15})=b_{11}.$$

令 $$x=b_{15};$$

$$\{a_3-(a_{15}+c_{15})\}-x=r.$$

$$\{(a_3-\overline{a_{15}+c_{15}}-x)-x\}=b_{13},$$

或 $$a_3-\overline{a_{15}+c_{15}}-2x=b_{13}.$$

$$\{(a_3-\overline{a_{15}+c_{15}}-x)+a_3\}=a_1,$$

或 $$2a_3-\overline{a_{15}+c_{15}}-x=a_1.$$

因 $$a_1b_{13}=\frac{1}{2}D^2.$$

$$\frac{(a_3-\overline{a_{15}+c_{15}}-2x)(2a_3-\overline{a_{15}+c_{15}}-x)}{2}=r^2,\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

以 $$\{a_3-\overline{a_{15}+c_{15}}-x\}^2=r^2\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

$$-\frac{a_3+\overline{a_{15}+c_{15}}}{2}x+\left\{\frac{(a_3-\overline{a_{15}+c_{15}})(2a_3-\overline{a_{15}+c_{15}})}{2}\right\}$$

$$-(a_3-\overline{a_{15}+c_{15}})^2=0,$$

$$x=b_{15}.$$ 合問.

17. 有 a_3, $b_{14}+c_{14}$, 求 D.

(本法) 原誤.

(館案法) 識別得: $a_3=a_8+c_8$,

$$a_{14}=c_8-a_8,$$

$$b_{14}+c_{14}=a_8,$$

令 $$x=a_{14}.$$

$$x^2\cdot\frac{1}{b_{14}+c_{14}}=c_{14}-b_{14},$$

內寄明股弦和分母.

$$\{x^2+(b_{14}+c_{14})^2\}\frac{1}{b_{14}+c_{14}}=2c_{14},$$

$$\{x^2+(b_{14}+c_{14})^2+2x(b_{14}+c_{14})\}\frac{1}{b_{14}+c_{14}}=2(c_{14}+b_{14})$$

$$=2b_7=2b_6,$$

$$a_3-x=2a_8,$$

因	$2a_8\cdot 2b_6=D^2,$	$4a_3a_{14}=D^2.$

$$\{x^2+(b_{14}+c_{14})^2+2x(b_{14}+c_{14})\}(a_3-x)\cdot\frac{1}{b_{14}+c_{14}}=D^2,\cdots\cdots(A)$$

寄左.

$$4a_3x(b_{14}+c_{14})\left(\frac{1}{b_{14}+c_{14}}\right)=D^2,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

$$-x^3-\{2(b_{14}+c_{14})-a_3\}x^2-[2a_3(b_{14}+c_{14})$$

$$+(b_{14}+c_{14})^2]x+a_3(b_{14}+c_{14})^2=0.$$

$$x=a_{14}.$$ 合問.

(李銳法)　識別得: $b_3+c_3-(b_{14}+c_{14})=b_5+c_5,$

$$a_3+a_{14}=c_5,$$

$$2r=b_5,$$

$$a_{14}+b_{14}+c_{14}=c_1-a_1.$$

令 $$x=a_{14}.$$

$$(b_{14}+c_{14})a_3\cdot\frac{1}{x}=b_3+c_3. \quad 或 \quad (b_{14}+c_{14})a_3x^{-1}=b_3+c_3,$$

$$(b_{14}+c_{14})a_3x^{-1}-(b_{14}+c_{14})=b_5+c_5,$$

$$a_3+x=c_5,$$

$$(b_{14}+c_{14})a_3x^{-1}-(b_{14}+c_{14})-(x+a_3)=2r,$$

$$2a_3-\{(b_{14}+c_{14})a_3x^{-1}-(b_{14}+c_{14})-(x+a_3)\}=2(c_1-b_1),$$

$$x+b_{14}+c_{14}=c_1-a_1,$$

$$(x+b_{14}+c_{14})\{2a_3-[(b_{14}+c_{14})a_3x^{-1}-(b_{14}+c_{14})$$
$$-(a_3+x)]\}=D^2,\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

$$4a_3x=D^2,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

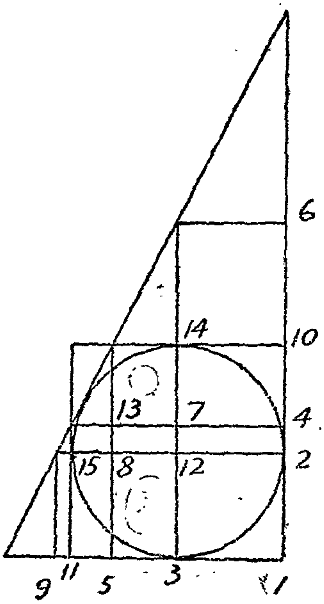
爲同數,與左相消.

得: $$-x^3-\{2(b_{14}+c_{14})-a_3\}x^2$$
$$-[2a_3+(b_{14}+c_{14})](b_{14}+c_{14})x+a_3(b_{14}+c_{14})^2=0$$

$$x=a_{14}.$$ 合問,

測圓海鏡細草卷第五

大股(b_1)一十八問.



1. 有b_1, b_{14}, 求D.

(本法) 令 $x=r=a_6=$勾率,

$b_1-(2x+b_{14})=a_6=$股率,

$b_1x\dfrac{1}{b_1-(2x+b_{14})}=a_1=$大勾, 内帶股率分母.

$$\{b_1x-2x(b_1-\overline{2x+b_{14}})\}\frac{1}{b_1-(2x+b_{14})}=c_1-b_1,$$

内有股率分母.

$$b_1-2x=c_1-a_1,$$

$$(b_1-2x)\{b_1x-2x(b_1-\overline{2x+b_{14}})\}\frac{1}{b_1-(2x+b_{14})}$$

$$=\frac{1}{2}(a_1+b_1-c_1)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

內寄股率分母,寄左.

$$2x^2(b_1-\overline{2x+b_{14}})\left\{\frac{1}{b_1-(2x+b_{14})}\right\}=\frac{1}{2}(a_1+b_1+c_1)^2\cdots\cdots(B)$$

為同數,與左相消.

得: $$-4x^2+(4b_1-2b_{14})x-b_1\{2(b_1-b_{14})-b_1\}=0,$$

$$x=r,\qquad 2r=D.$$ 合問.

---

2. 有 b_1, a_{14}, 求 D.

(本法) 識別得: $$a_{13}b_1=\frac{1}{2}D^2=a_1b_{13},$$

令 $$x=r.$$

$$x-a_{14}=a_{13},$$

$$b_1(x-a_{14})=\frac{1}{2}D^2,\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

以 $$2x^2=\frac{1}{2}D^2,\cdots\cdots(B)$$

為同數與左相消.

得: $$-2x^2+b_1x-a_{14}b_1=0.$$

$$x=r, \qquad 2r=D.$$ 合問.

---

3. 有 b_1, a_{15}, 求 D.

(本法) 令 $$x=r.$$

$$2x+a_{15}=a_2=\text{勾率}$$

$$b_1-x=b_2=\text{股率}=\text{半梯之底}$$

$$a_{15}(b_1-x)\cdot\frac{1}{2x+a_{15}}=b_{15}=\text{小股}=\text{半梯之頭}$$

內帶勾率分母.

$$(b_1-x)a_{15}(b_1-x)\cdot\frac{1}{2x+a_{15}}=r^2,\cdots\cdots\cdots(A)$$

內帶勾率分母,寄左.

以 $$x^2(2x+a_{15})\cdot\left(\frac{1}{2x+a_{15}}\right)=r^2,\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得: $$-2x^3-2a_{15}b_1x+a_{15}b_1{}^2=0,$$

$$x=r, \qquad 2r=D.$$ 合問.

---

4. 有 b_1, b_{15}, 求 D.

(本法) 令 $$x=r.$$

$$b_1-x=b_2=\text{半梯底}$$

$$b_{15}=\text{半梯頭}$$

$$b_{15}(b_1-x)=r^2, \cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

$$x^2=r^2, \cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得: $$-x^2-b_{15}x+b_1b_{15}=0,$$

$$x=r, \qquad 2r=D.$$ 合問.

---

5. 有 b_1, b_{11}, 求 D.

(本法) 令 $$x=r.$$

$$b_{11}-x=b_{15}=\text{半梯頭}$$

$$b_1-x=b_2=\text{半梯底}$$

$$(b_1-x)(b_{11}-x)=r^2, \cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

以 $$x^2=r^2, \cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得 $$-(b_1+b_{11})x+b_1b_{11}=0,$$

$$x=r, \qquad 2r=D.$$ 合問.

---

6. 有 b_1, a_{11}, 求 D.

(本法) 識別得:

$$c_1-b_1=a_{11}=\text{小差}.$$

令 $$x=D.$$

$$2a_{11}(b_1-x)=D^2, \cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

以 $x^2=D^2,\cdots\cdots\cdots(B)$ 與左相消.

得: $-x^2-2a_{11}x+2a_{11}b_1=0,$

$$x=D.$$ 合問.

---

7. 有 b_1, c_{10}, 求 D.

(本法) 識別得: $b_1-D=b_{10}=$小股

令 $$x=D.$$

$$b_1-x=b_{10}=\text{股圓差}=(\text{大差})$$

$$b_1c_{10}\frac{1}{b_1-x}=c_1=\text{大弦}$$ 內帶小股分母.

$$b_1(b_1-x)\frac{1}{b_1-x}=b_1=\text{大股}$$ 亦帶小股分母.

$$\{b_1c_{10}-b_1(b_1-x)\}\frac{1}{b_1-x}=c_1-b_1=\text{小差}$$

$$\{b_1c_{10}-b_1(c_1-x)\}=\frac{1}{2}(a_1+b_1-c_1)^2,$$ 更無分母.

$$2\{b_1c_{10}-b_1(b_1-x)\}=(a_1+b_1-c_1)^2,\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

以 $x^2=(a_1+b_1-c_1)^2,\cdots\cdots\cdots(B)$

為同數,與左相消.

得: $-x^2+2b_1x-(2b_1{}^2-2b_1c_{10})=0,$

$$x=D.$$ 合問.

(又本法) 識別得: $b_1-c_{10}=r+a_{14}$,

令 $$x=r.$$

$$\overline{b_1-c_{10}}-x=a_{14}=\text{半梯頭}$$

$$b_1-2x=b_{10}=\text{勾率}$$

$$b_1-c_{10}=a_{10}=\text{股率}$$

$$b_1(b_1-c_{10})\frac{1}{b_1-2x}=a_1=\text{大勾}\qquad\text{內寄股率分母}$$

$$\{b_1(b_1-c_{10})-x(b_1-2x)\}\frac{1}{b_1-2x}=a_3=\text{半梯底}$$

$$(\overline{b_1-c_{10}}-x)\{b_1(b_1-c_{10})-x(b_1-2x)\}\cdot\frac{1}{b_1-2x}=r^2,\cdots\cdots(A)$$

內寄股率分母,寄左.

以 $$x^2(b_1-2x)\cdot\left(\frac{1}{b_1-2x}\right)=r^2,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得: $$2(b_1-c_{10})x^2-2b_1(b_1-c_{10})x+b_1(b_1-c_{10})^2=0,$$

$$x=r,\qquad 2r=D.$$ 合問.

---

8. 有 b_1、c_4, 求 D.

(本法) 識別得: $b_1-c_4=b_{13}$,

令 $$x=D.$$

$$x-2(b_1-c_4)=2b_{15}=\text{梯頭}$$

$$2b_1-x=2b_2=\text{梯底}$$

$$(2b_1-x)\{x-2(b_1-c_4)\}=D^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

以 $$x^2=D^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$ 與左相消.

得: $$-2x^2+\{2(b_1-c_4)+2b_1\}x-2(b_1-c_4)\cdot 2b_1=0,$$

$$x=D.$$ 合問.

---

9. 有 b_1, c_2, 求 D.

(本法) 識別得: $$b_1-c_2=b_8-a_8,$$

$$=c_8-a_{11}.$$

令 $$x=r.$$

$$b_1-x=b_2=\text{中股}$$

$$c_2x\cdot\frac{1}{b_1-x}=c_8,$$ 內帶中股分母.

$$\{c_2x-(b_1-c_2)(b_1-x)\}\cdot\frac{1}{b_1-x}=a_{11}=\text{小差}$$ 內帶中股分母.

$$b_1-2x=b_{10}=\text{大差}$$

$$(b_1-2x)\{c_2x-(b_1-c_2)b_1-x)\}\cdot\frac{1}{b_1-x}=r^2,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

(內帶中股分母),寄左.

以 $$x^2(b_1-x)\cdot\left(\frac{1}{b_1-x}\right)=r^2,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得: $$x^3-2b_1x^2+\left\{\frac{b_1^2}{2}+b_1(b_1-c_2)\right\}x-\frac{b_1^2}{2}(b_1-c_2)=0,$$

$$x=r,\qquad 2r=D.$$ 合問.

---

10. 有 b_1, c_1, 求 D.

(本法) 識別得: $c_1-b_1=a_1-D=$勾圓差

$$x=a_1=\sqrt{(c_1+b_1)(c_1-b_1)},$$

$$a_1-(c_1-b_1)=D.$$ 合問.

---

11. 有 b_1, c_6, 求 D.

(本法) 識別得: $c_6=b_{12}$,

令 $x=r=a_6=$小勾率

$$x+c_6=b_3,$$

$$b_1-\overline{x+c_6}=b_6=\text{小股率}$$

$$b_1-x=b_2=\text{梯底}$$

$$(b_1-x)-2(b_1-\overline{x+c_6})=b_{15}=\text{梯頭}$$

或 $$b_1-2(b_1-c_6)+x=b_{15},$$

$$(b_1-x)\{b_1-2(b_1-c_6)+x\}=r^2,\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

$$x^2=r^2,\cdots\cdots(B)$$ 與左相消.

得: $$-2x^2+2(b_1-c_6)x-b_1\{2(b_1-c_6)-b_1\}=0.$$

$$x=r,\qquad 2r=D.$$ 合問.

---

12. 有 b_1+c_2, c_9-a_{11}, 求 D.

(本法) 識別得: $c_9-a_{11}=c_9-\overline{c_1-b_1}$,

$$=b_9-a_9,$$

$$=b_1-c_2.$$

$$\frac{(b_1+c_2)+(c_9-a_{11})}{2}=b_1=\text{大股}$$

$$\frac{(b_1+c_2)-(c_9-a_{11})}{2}=c_2=\text{小弦}$$

令 $$x=D.$$

$$b_1-\frac{x}{2}=b_2=\text{中股}$$

$$c_2=\text{中弦}$$

$$c_2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{b_1-\frac{x}{2}}=c_9,$$ 內寄中股分母.

$$\left\{c_2\frac{x}{2}-(c_9-a_{11})\left(b_1-\frac{x}{2}\right)\right\}\cdot\frac{1}{b_1-\frac{x}{2}}=a_{11},$$

或 $$\left\{c_2\frac{x}{2}-(b_1-c_2)\left(b_1-\frac{x}{2}\right)\right\}\cdot\frac{1}{b_1-\frac{x}{2}}=a_{11};$$

內帶中股分母.

$$2(b_1-x)=2b_{10},$$

$$2(b_1-x)\left\{c_2\cdot\frac{x}{2}-(b_1-c_2)\left(b_1-\frac{x}{2}\right)\right\}\cdot\frac{1}{b_1-\frac{x}{2}}=D^2,\cdots\cdots(A)$$

(內帶中股等母),寄左.

$$x^2\left(b_1-\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{b_1-\frac{x}{2}}\right)=D^2,\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得 $$0.5x^3-2b_1x^2+\left\{2b_1\cdot\frac{b_1}{2}+2b_1(b_1-c_2)\right\}x-2b_1^2(b_1-c_2)=0,$$

$$x=D.$$ 合問.

---

13. 有 b_1, c_{15}, 求 D.

(本法) 令 $$x=r.$$

$$b_1-2x=c_1-a_1.$$

因	$\dfrac{(c_1-a_1)^2+b_1^2}{2(c_1-a_1)}=c_1.$

$$\tfrac{1}{2}\{(b_1-2x)^2+b_1^2\}\frac{1}{b_1-2x}=c_1=\text{大弦}$$

內帶大差分母,別寄.

$$b_1c_{15}\cdot\frac{1}{c_1}=b_{15}=\text{半梯頭}$$

內帶大弦分母.

$$b_1 - x = b_2 = \text{半梯底}$$

$$(b_1 - x)b_1 c_{15} \cdot \frac{1}{c_1} = r^2, \qquad \text{有大弦分母.}$$

或 $$(b_1 - x)b_1 c_{15}(b_1 - 2x) \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}\{(b_1 - 2x)^2 + b_1{}^2\}} = r^2, \cdots\cdots\cdots(A)$$

寄左.

以 $$x^2 \cdot \tfrac{1}{2}\{(b_1 - 2x)^2 + b_1{}^2\} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}\{(b_1 - 2x)^2 + b_1{}^2\}} = r^2, \cdots\cdots(B)$$

為同數,與左相消.

得: $$2x^4 - 2b_1 x + (b_1{}^2 - 2b_1 c_{15})x^2 + 3b_1{}^2 c_{15} x - b_1 c_{15} b_1{}^2 = 0,$$

$$x = r. \qquad \text{合問.}$$

(又本法) 令 $$x = c_1 - a_1.$$

$$\frac{x^2 + b_1{}^2}{2x} = c_1 = \text{大弦}$$

或 $$0.5x + \frac{b_1{}^2}{2} = c_1,$$

$$b_1 = \text{大股}$$

$$b_1 \cdot c_{15} \cdot \frac{1}{c_1} = b_{15} = \text{半梯頭} \quad \text{內寄大弦分母.}$$

$$x + b_1 = 2b_2 = \text{全梯底}$$

$$2(x + b_1)b_1 c_{15} \cdot \frac{1}{c_1} = D^2, \cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

內寄大弦為母,寄左.

以 $$(b_1-x)^2\left(0.5x+\frac{b_1^2}{2}\right)\left(\frac{1}{c_1}\right)=D^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得: $$0.5x^4-b_1x^3+(b_1^2-2b_1c_{15})x^2$$
$$-(2b_1^2c_{15}+b_1^3)x+b_1^2\cdot\frac{b_1^2}{2}=0,$$
$$x=c_1-a_1,$$
$$b_1-x=D.$$ 合間.

---

14. 有 b_1, c_{14}, 求 D.

(本法) 令 $$x=r.$$
$$b_1-2x=c_1-a_1=\text{大差}$$

因 $\dfrac{b_1^2+(c_1-a_1)^2}{2(c_1-a_1)}=c_1$, 及 $\dfrac{b_1^2-(c_1-a_1)^2}{2(c_1-a_1)}=a.$

$$\frac{b_1^2+(b_1-2x)^2}{2}\cdot\frac{1}{b_1-2x}=c_1=\text{大弦}$$

或 $$(2x^2-2b_1x+b_1^2)\cdot\frac{1}{b_1-2x}=c_1.$$ 內帶大差分母.

$$\frac{b_1^2-(b_1-2x)^2}{2}\cdot\frac{1}{b_1-2x}=a_1=\text{大勾}$$

或 $$(-2x^2+2b_1x)\cdot\frac{1}{b_1-2x}=a_1.$$ 亦帶大差分母.

因	$\dfrac{c_{14}\cdot a_1}{c_1}=a_{14}$, 及 $a_1-r=a_3$.

$$c_{14}(-2x^2+2b_1x)\cdot\frac{1}{c_1}\cdot\left[\frac{1}{b_1-2x}\right]=a_{14}=\text{半梯頭}$$

內帶大弦爲母,寄上位.

其大勾內元有大差分母不用.

$$\{(-2x^2+2b_1x)-x(b_1-2x)\}\cdot\frac{1}{b_1-2x}=a_3,$$

或 $$b_1x\frac{1}{b_1-2x}=a_3=\text{半梯底}$$

$$b_1xc_{14}(-2x^2+2b_1x)\cdot\frac{1}{c_1}\cdot\frac{1}{b_1-2x}\cdot\left[\frac{1}{b_1-2x}\right]=r^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

內帶大差及大弦爲母,寄左.

$$x^2(2x^2-2b_1x+b_1^2)(b_1-2x)\cdot\frac{1}{c_1}\cdot\frac{1}{b_1-2x}\cdot\left[\frac{1}{b_1-2x}\right]=r^2,\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得: $$-4x^3+6b_1x^2-(4b_1^2-2b_1c_{14})x+(b_1^3-2b_1^2c_{14})=0,$$

$x=r$. 合問.

(又本法) 識別得: $a_{14}+b_{14}+c_{14}=c_1-a_1$,

令 $$x=c_1-a_1=\text{大差}$$

$$\frac{x^2+b_1{}^2}{2}\cdot\frac{1}{x}=c_1,$$ 寄大差分母.

$$\frac{b_1{}^2-x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}=a_1,$$ 寄大差分母.

因 $\frac{a_1c_{14}}{c_1}=a_{14}$, 及 $\frac{b_1c_{14}}{c_1}=b_{14}$.

或 $$(2x^2-2b_1x+b_1{}^2)\cdot\frac{1}{b_1-2x}=c_1.$$ 內帶大差分母.

$$\frac{b_1{}^2-(b_1-2x)^2}{2}\cdot\frac{1}{b_1-2x}=a_1=\text{大勾}$$

$$c_{14}\frac{x^2+b_1{}^2}{2}\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\cdot\frac{1}{c_1}=c_{14},$$

(其大勾內元有大差分母不用)

三位相併得下:

$$\left\{c_{14}\cdot\frac{b_1{}^2-x^2}{2}+b_1c_{14}x+c_{14}\frac{x^2+b_1{}^2}{2}\right\}\left[\frac{1}{x}\right]\cdot\frac{1}{c_1}=c_1-a_1\cdots\cdots(A)$$

寄左.

$$x\left(\frac{x^2+b_1{}^2}{2}\right)\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\cdot\frac{1}{c_1}=c_1-a_1\cdots\cdots\cdots(B)$$

為同數,與左相消.

得: $$-0.5x^3-\left(\frac{b_1{}^2}{2}-b_1c_{14}\right)x+b_1{}^2c_{14}=0,$$

$x=c_1-a_1$, $b-x=D$. 合問

15. 有 b_1, c_9, 求 D.

(本法) 令 $x=r=b_9=$小股.

因 $$\boxed{\frac{b_1c_9}{b_9}=c_1.}$$

$$b_1c_9x^{-1}=c_1,$$

$$b_1-2x=c_1-a_1,$$

$$b_1c_9x^{-1}-(b_1-2x)=a_1,$$

$$(b_1c_9x^{-1}-\overline{b_1-2x})-2x=b_1c_9x^{-1}-b_1=c_1-b_1.$$

因 $$\left(\frac{c_1-a_1}{2}\right)(c_1-b_1)=r^2.$$

$\frac{1}{2}(b_1-2x)(b_1c_9x^{-1}-b_1)=r^2,\cdots\cdots(A)$ 寄左.

以 $x^2=r^2,\cdots\cdots(B)$ 與左相消.

得: $$-x^3+b_1x^2-\left(b_1c_9+\frac{b_1^2}{2}\right)x+b_1\cdot\frac{b_1c_9}{2}=0.$$

$x=r.$ 合問.

16. 有 b_1, c_{12}, 求 D.

(本法) 令 $x=b_{12}=c_6.$

$$x+c_{12}=c_2.$$

$x(x+c_{12})\frac{1}{c_{12}}=b_2=$邊股=半梯底 寄斜步分母.

$$\{b_1c_{12}-x(x+c_{12})\}\frac{1}{c_{12}}=b_1-b_2=r,$$ 寄斜步分母.

$$\{b_1c_{12}-x(x+c_{12})\}^2\frac{1}{{c_{12}}^2}=r^2\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

內帶斜步冪為母,寄左.

又 $$c_{12}-x=c_{15},$$

$$x(c_{12}-x)\frac{1}{c_{12}}=b_{15}=\text{半梯頭}$$

斜步不除,寄為母.

$$x(c_{12}+x)x(c_{12}-x)\cdot\left(\frac{1}{{c_{12}}^2}\right)=r^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

為同數,與左相消.

得: $$2x^4+2c_{12}x^3-2b_1c_{12}x^2-2b_1{c_{12}}^2x+\overline{b_1c_{12}}^2=0,$$

$$x=b_{12},$$

$$a_{12}=\sqrt{{c_{12}}^2-x^2},\qquad \frac{2a_{12}\cdot b_{12}}{c_{12}}=D.$$ 合問.

---

17. 有 b_1, $a_{15}+b_{14}$, 求 D.

(本法) 識別得: $a_{15}+b_{14}+D=a_{12}+b_{12}$,

$$=c_8+c_7\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

$$2(c_8+c_7)-c_1=a_{12}+b_{12}-c_{12}\cdots\cdots(b)$$

$$=c_{13},$$

合 $$x=c_1-a_1.$$

$$\frac{b_1^2-x^2}{2x}=a_1,\quad \frac{x^2+b_1^2}{2x}=c_1,\quad b_1=b_1.$$

$$\left(\frac{b_1^2}{2}x^{-1}-0.5x\right)+b_1=a_1+b_1.$$

$$b_1-x=a_1+b_1-c_1=D.$$

$$(a_{15}+b_{14})+(b_1-x)=c_8+c_7,\cdots\cdots\cdots\cdots(a)'$$

$$2\{(a_{15}+b_{14})+(b_1-x)\}-\left(\frac{b_1^2}{2}x^{-1}-0.5x\right)=a_{12}+b_{12}-c_{12},\cdots(b)'$$

因	$\frac{(a_1+b_1)(a_{12}+b_{12}-c_{12})}{a_{12}+b_{12}}=a_1+b_1-c_1.$

$$\left(\frac{b_1^2}{2}x-0.5x+b_1\right)\left\{2(a_{15}+b_{14})+2(b_1-x)-\left(\frac{b_1^2}{2}x^{-1}-0.5x\right)\right\}$$

$$\cdot\frac{1}{a_{15}+b_{14}+b_1-x}=a_1+b_1-c_1,\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

內寄小和爲母,寄左.

以 $(b_1-x)(\overline{a_{15}+b_{14}}+\overline{b_1-x})\cdot\frac{1}{a_{15}+b_{14}+b_1-x}=a_1+b_1-c_1,$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得: $0.25x^4-1\frac{1}{2}b_1x^3+(a_{15}+b_{14})b_1x^2$

$$+\frac{b_1^2}{2}(2\cdot\overline{a_{15}+b_{14}}+b_1)x-\left(\frac{b_1^2}{2}\right)^2=0,$$

$x=c_1-a_1,\qquad b_1-x=D.$ 合問.

18. 有 b_1, c_{13}, 求 D.

(本法) 識別得: $D-c_{13}=a_{13}+b_{13}$.

令 $$x=r.$$

$$b_1-2x=c_1-a_1=\text{大差}$$

$$\tfrac{1}{2}\{b_1^2+(b_1-2x)^2\}\cdot\frac{1}{b_1-2x}=c_1,$$ 內帶大差爲分母.

$$\tfrac{1}{2}\{b_1^2-(b_1-2x)^2\}\cdot\frac{1}{b_1-2x}=a_1,$$ 帶大差分母,

$$\left\{\frac{b_1^2-(b_1-2x)^2}{2}+b_1(b_1-2x)\right\}\cdot\frac{1}{b_1-2x}=a_1+b_1.$$ 帶大差分母.

因	$c_{13}(a_1+b_1)=c_1(a_{13}+b_{13})$.

$$c_{13}\left\{\frac{b_1^2-(b_1-2x)^2}{2}+b_1(b_1-2x)\right\}\cdot\frac{1}{b_1-2x}=c_{13}(a_1+b_1)\cdots\cdots(A)$$

寄左.

以 $$(2x-c_{13})\cdot\frac{b_1^2-(b_1-2x)^2}{2}\cdot\frac{1}{b_1-2x}=c_1(a_{13}+b_{13})\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得: $$4x^3-4b_1x^2+(2b_1^2+2b_1c_{13})x-2b_1^2c_{13}=0,$$

$$x=r.$$ 合問.

(又本法) 識別得: $a_{13}+b_{13}+c_{13}=D$.

令 $$x=D.$$

$$b_1-x=c_1-a_1=\text{大差}.$$

$$\tfrac{1}{2}\{b_1^2+(b_1-x)^2\}\frac{1}{b_1-x}=c_1,\qquad \text{内寄大差分母}.$$

$$\tfrac{1}{2}\{b_1^2-(b_1-x)^2\}\frac{1}{b_1-x}=a_1.\qquad \text{内寄大差分母}.$$

因	$\dfrac{a_1c_{13}}{c_1}=a_{13}$,	及	$\dfrac{b_1c_{13}}{c_1}=b_{13}$.

$$c_{13}\cdot\frac{b_1^2-(b_1-x)^2}{2}\left[\frac{1}{b_1-x}\right]\cdot\frac{1}{c_1}=a_{13},\qquad \text{寄大弦分母}.$$

$$b_1c_{13}(b_1-x)\left[\frac{1}{b_1-x}\right]\cdot\frac{1}{c_1}=b_{13},\qquad \text{只寄大弦分母}.$$

$$c_{13}\cdot\frac{b_1^2+(b_1-x)^2}{2}\left[\frac{1}{b_1-x}\right]\cdot\frac{1}{c_1}=c_{13},\qquad \text{''}$$

$$(2b_1^2c_{13}-b_1c_{13}x)\left[\frac{1}{b_1-x}\right]\cdot\frac{1}{c_1}=a_{13}+b_{13}+c_{13}\cdots\cdots(A)$$

内寄大弦分母,寄左.

$$x\frac{b_1^2+(b_1-x)^2}{2}\cdot\left[\frac{1}{b_1-x}\right]\cdot\frac{1}{c_1}=a_{13}+b_{13}+c_{13}\cdots\cdots(B)$$

為同數,與左相消.

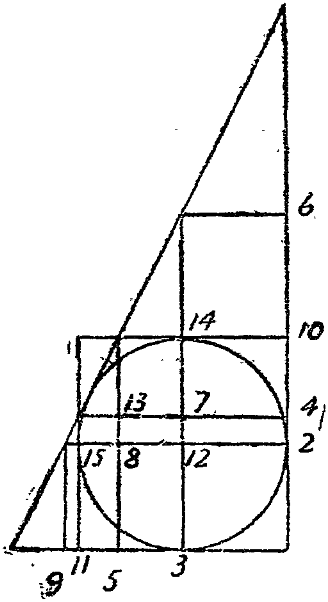
得: $$0.5x^3-b_1x^2+(b_1^2+b_1c_{13})x-2b_1^2c_{13}=0.$$

$$x=D.\qquad \text{合問}.$$

—— ——

測圓海鏡細草卷第六

大勾(a_1)-- 十八問.



1. 有 a_1, a_{15}, 求 D.

(本法) 令 $x = r = b_9 =$ 股率

$$a_1 - (2x + a_{15}) = a_9 = \text{勾率}$$

$$a_1 x \frac{1}{a_1 - (2x + a_{15})} = b^2 = \text{大股}\quad \text{內帶勾率分母.}$$

$$\{a_1 x - 2x(a_1 - \overline{2x + a_{15}})\} \cdot \frac{1}{a_1 - (2x + a_{15})} = c_1 - a_1,$$

內有勾率分母.

$$a_1-2x=c_1-b_1,$$

$$(a_1-2x)\{a_1x-2x(a_1-\overline{2x+a_{15}})\}\cdot\frac{1}{a_1-(2x+a_{15})}$$

$$=\tfrac{1}{2}(a_1+b_1-c_1)^2\cdots\cdots\cdots(A)$$ 內有勾率分母,寄左.

$$2x^2(a_1-\overline{2x+a_{15}})\left\{\frac{1}{a_1-(2x+a_{15})}\right\}$$

$$=\tfrac{1}{2}(a_1+b_1-c_1)^2\cdots\cdots\cdots(B)$$ 爲同數,與左相消.

得: $-4x^2+(4a_1-2a_{15})x-a_1(a_1-2b_{15})=0,$

$$x=r,\qquad 2r=D.$$ 合問.

---

2. 有 a_1, b_{15}, 求 D.

(本法) 識別得: $a_1\cdot b_{13}=\tfrac{1}{2}D^2.$

令 $x=r.$

$$x-b_{15}=b_{13},$$

$$a_1(x-b_{15})=\tfrac{1}{2}D^2,\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

以 $2x^2=\tfrac{1}{2}D^2,\cdots\cdots\cdots(B)$

爲同數,與左相消.

得: $-2x^2+a_1x-a_1b_{15}=0,$

$$x=r,\qquad 2r=D.$$ 合問.

---

3. 有 a_1, b_{14}, 求 D.

(本法) 令 $x=r.$

$$2x+b_{14}=b_3=\text{股率}$$

$$a_1-x=a_3=\text{勾率}$$

$$b_{14}(a_1-x)\cdot\frac{1}{2x+b_{14}}=a_{14}=\text{小勾}=\text{半梯之頭}.$$

內帶股率分母.

$$(a_1-x)b_{14}(a_1-x)\frac{1}{2x+b_{14}}=r^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

內帶股率分母,寄左.

以 $$x^2(2x+b_{14})\left(\frac{1}{2x+b_{14}}\right)=r^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得: $$-2x^3-2a_1b_{14}x+a_1{}^2b_{14}=0,$$

$x=r,\qquad 2r=D.$ 合問.

---

4. 有 a_1, a_{14}, 求 D.

(本法) 令 $x=r.$

$$a_1-x=a_3=\text{梯底}$$

$$a_{14}=\text{梯頭}$$

$a_{14}(a_1-x)=r^2,\cdots\cdots\cdots(A)$ 寄左.

以 $x^2=r^2,\cdots\cdots\cdots(B)$ 爲同數,與左相消.

得: $$-x^2-a_{14}x+a_1a_{14}=0.$$

$x=r,\qquad 2r=D.$ 合問

---

5. 有a_1, a_{10}, 求D.

(本法) 令 $x=r$.

$$a_{10}-x=a_{14}=\text{梯頭}$$

$$a_1-x=a_3=\text{梯底}$$

$$(a_1-x)(a_{10}-x)=r^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

以 $$x^2=r^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$ 與左相消.

得: $$-(a_1+a_{10})x+a_1a_{10}=0,$$

$$x=r,\qquad 2r=D.$$

6. 有a_1, b_{10}, 求D.

(本法) 令 $x=D$.

$$x+b_{10}=b_1=\text{股},$$

$$a_1+b_{10}=c_1=\text{弦}.$$

$$2a_1(x+b_{10})=2a_1b_1,\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

因 $$(a_1+b_1+c_1)(a_1+b_1-c_1)=2a_1b_1.$$

$$(a_1+\overline{x+b_{10}}+\overline{a_1+b_{10}})x=2a_1b_1,\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得: $$-x^2-2b_{10}x+2a_1b_{10}=0,$$

$$x=D.$$ 合問

7. 有 a_1, c_{11}, 求 D.

(本法) 令 $$x=D.$$

$$a_1-x=a_{11}=\text{勾圓差}$$

$$a_1c_{11}\cdot\frac{1}{a_1-x}=c_1=\text{大弦}\quad\text{內帶小勾分母}$$

$$a_1(a_1-x)\cdot\frac{1}{a_1-x}=a_1=\text{大勾}$$

$$\{a_1c_{11}-a_1(a_1-x)\}\frac{1}{a_1-x}=c_1-a_1=\text{大差}$$

$$\{a_1c_{11}-a_1(a_1-x)\}=\tfrac{1}{2}(a_1+b_1-c_1)^2,\quad\text{更無分母.}$$

$$2\{a_1c_{11}-a_1(a_1-x)\}=(a_1+b_1-c_1)^2,\cdots\cdots(A)\qquad\text{寄左.}$$

以 $$x^2=(a_1+b_1-c_1)^2,\cdots\cdots(B)\ \text{與左相消.}$$

得: $$-x^2+2a_1x-(2a_1{}^2-2a_1c_{16})=0,$$

$$x=D.\qquad\text{合問.}$$

(又本法) 識別得: $a_1-c_{11}=x+b_{15}$,

令 $$x=r.$$

$$\overline{a_1-c_{11}}-x=b_{15}=\text{半梯頭}$$

$$a_1-2x=a_{15}=\text{勾率}$$

$$b_1-c_{11}=b_{11}=\text{股率}$$

$$a_1(b_1-c_{11})\frac{1}{a_1-2x}=b_1=\text{大股}\quad\text{內寄勾率分母.}$$

$$\{a_1(b_1-c_{11})-x(a_1-2x)\}\frac{1}{a_1-2x}=b_2=\text{半梯底}$$

$$\overline{(a_1-c_{11}-x)}\{a_1(b_1-c_{11})-x(a_1-2x)\}\frac{1}{a_1-2x}=r^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

內寄勾率分母,寄左.

以 $$x^2(a_1-2x)\left(\frac{1}{a_1-2x}\right)=r^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得: $$2(a_1-c_{11})x^2-2a_1(a_1-c_{11})x+a_1(a_1-c_{11})^2=0,$$

$$x=r,\qquad 2r=D.$$ 合問.

---

8. 有 a_1, c_5, 求 D.

(本法) 識別得: $a_1-c_5=a_{13}$,

令 $$x=D.$$

$$x-2(a_1-c_5)=2a_{14}=\text{梯頭}$$

$$2a_1-x=2a_3=\text{梯底}$$

$$(2a_1-x)\{x-2(a_1-c_5)\}=D^2,$$ 寄左.

以 $$x^2=D^2,$$ 與左相消.

得: $$-2x^2+\{2(a_1-c_5)+2a_1\}x-2(a_1-c_5)2a_1=0,$$

$$x=D.$$ 合問.

---

9. 有 a_1, c_3, 求 D.

(本法) 識别得: $c_3-a_1=b_7-a_7,$

$$=b_{10}-c_7.$$

令 $$x=r.$$

$$a_1-x=a_3=\text{中勾}$$

$$c_3x\frac{1}{a_1-x}=c_7, \qquad \text{內寄中勾爲母.}$$

$$\{c_3x+(c_3-a_1)(a_1-x)\}\frac{1}{a_1-x}=b_{10}=\text{大差}$$

內帶中勾分母.

$$a_1-2x=a_{11}=\text{小差.}$$

$$(a_1-2x)\{c_3x+(c_3-a_1)(a_1-x)\}\frac{1}{a_1-x}=r^2, \cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

內有中勾分母,寄左.

$$x^2(a_1-x)\left(\frac{1}{a_1-x}\right)=r^2, \cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數與左相消.

得: $$x^3-2a_1x^2+\left\{\frac{a_1^2}{2}+a_1(c_3-a_1)\right\}x+\frac{a_1^2}{2}(c_3-a_1)=0,$$

$$x=r, \qquad 2r=D. \qquad \text{合問.}$$

---

10. 有 a_1, c_1 求 D.

(本法) 識別得: $c_1-a_1=b_1-D=$股圓差.

令 $$x=D.$$

$$a_1-x=a_{11},$$

$$2(c_1-a_1)(a_1-x)=D^2,\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

以 $$x^2=D^2,\cdots\cdots\cdots(B)$$ 與左相消.

得: $$-x^2-2(c_1-a_1)x+2a_1(c_1-a_1)=0,$$

$$x=D.$$ 合問.

11. 有 a_1, c_9, 求 D.

(本法) 識別得: $c_9=a_{12}$,

令 $$x=r=b_9=\text{小股率}$$

$$x+c_9=a_2.$$

$$a_1-\overline{x+c_9}=a_9=\text{小勾率}$$

$$a_1-x=a_3=\text{梯底}$$

$$(a_1-x)-2(a_1-\overline{x+c_9})=a_{14}=\text{梯頭}$$

或 $$a_1-2(a_1-c_9)+x=a_{14},$$

$$(a_1-x)\{a_1-2(a_1-c_9)+x\}=r^2,\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

以 $$x^2=r^2,\cdots\cdots\cdots(B)$$ 與左相消.

得: $$-2x^2+2(a_1-c_9)x-a_1\{2(a_1-c_9)-a_1\}=0.$$

$$x=r,\qquad 2r=D.$$ 合問.

12． 有a_1+c_3, $b_{10}-c_6$, 求D.

(本法) 識別得:
$$b_{10}-c_6=\overline{c_1-a_1}-c_6,$$
$$=b_7-a_7,$$
$$=c_3-a_1,$$
$$\frac{(a_1+c_3)+(c_3-a_1)}{2}=c_3,$$
$$\frac{(a_1+c_3)-(c_3-a_1)}{2}=a_1.$$

令
$$x=D.$$
$$a_1-\frac{x}{2}=a_3=\text{中勾}$$
$$c_3=\text{中弦}$$
$$c_3\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{a_1-\frac{x}{2}}=c_6 \qquad \text{內帶中勾分母.}$$
$$\left\{c_3\cdot\frac{x}{2}+(b_{10}-c_6)\left(a_1-\frac{x}{2}\right)\right\}\frac{1}{a_1-\frac{x}{2}}=b_{10},$$

或
$$\left\{c_3\cdot\frac{x}{2}+(c_3-a_1)\left(a_1-\frac{x}{2}\right)\right\}\cdot\frac{1}{a_1-\frac{x}{2}}=b_{10};$$
$$2(a_1-x)=2a_{11},$$
$$2(a_1-x)\left\{c_3\cdot\frac{x}{2}+(c_3-a_1)\left(a_1-\frac{x}{2}\right)\right\}\cdot\frac{1}{a_1-\frac{x}{2}}=D^2,\cdots\cdots(A)$$

內帶中勾分母,寄左.

$$x^2\left(a_1-\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{a-\frac{x}{2}}\right)=D^2, \cdots\cdots (B)$$

與左相消.

得: $$0.5x^3-2a_1x^2+\left\{2a_1\cdot\frac{a_1}{2}-2a_1(c_3-a_1)\right\}$$
$$+2a_1^2(c_3-a_1)=0,$$

$$x=D.$$ 合問.

---

13. 有 a_1, c_{14}, 求 D.

(本法) 令 $$x=r.$$

$$a-2x=c_1-b_1.$$

因	$\dfrac{(c_1-b_1)^2+a_1^2}{2(c_1-b_1)}=c_1.$

$$\tfrac{1}{2}\{(a_1-2x)^2+a_1^2\}\cdot\frac{1}{a_1-2x}=c_1$$ =大弦 內帶小差分母.

$$a_1c_{14}\cdot\frac{1}{c_1}=a_{14}$$ =半梯頭 內帶大弦分母.

$$a_1-x=a_3$$ =半梯底

$$(a_1-x)a_1c_{14}\cdot\frac{1}{c_1}=r^2,$$ 有大弦分母.

或 $$(a_1-x)a_1c_{14}(a_1-2x)\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}\{(a_1-2x)^2+a_1^2\}}=r^2, \cdots\cdots (A)$$

內只帶本大弦分母,寄左

以　$x^2\cdot\frac{1}{2}\{(a_1-2x)^2+a_1^2\}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}\{(a_1-2x)^2+a_1^2\}}=r^2,\cdots\cdots(B)$

爲同數消左.

得: $2x^4-2a_1x^3+(a_1^2-2a_1c_{14})x^2+3a_1^2c_{14}x-a_1c_{14}\cdot a_1^2=0,$

$x=r.$　合問.

---

14. 有 a_1, c_{15}, 求 D.

(本法) 令　$x=D.$

$$a_1-x=c_1-b_1=\text{小差}$$

因 $\frac{a_1^2+(c_1-b_1)^2}{2(c_1-b_1)}=c_1$, 及 $\frac{a_1^2-(c_1-b_1)^2}{2(c_1-b_1)}=b_1.$

$$\frac{a_1^2+(a_1-x)^2}{2}\cdot\frac{1}{a_1-x}=c_1=\text{大弦}.$$

或　$\left(a_1^2-a_1x+\frac{x^2}{2}\right)\cdot\frac{1}{a_1-x}=c_1.$ 內帶小差分母.

$$\frac{a_1^2-(a_1-x)^2}{2}\cdot\frac{1}{a_1-x}=b_1=\text{大股}$$

或　$\left(a_1x-\frac{x^2}{2}\right)\cdot\frac{1}{a_1-x}=b_1.$ 內帶小差分母.

因 $2\cdot\frac{c_{15}\cdot b_1}{c_1}=2b_{15}$, 及 $2\left(b_1-\frac{D}{2}\right)=2b_2.$

$$2c_{15}\left(a_1x-\frac{x^2}{2}\right)\cdot\frac{1}{c_1}\cdot\left[\frac{1}{a_1-x}\right]=2b_{15}=\text{兩小股}.$$

內寄大弦爲母,權寄.

$$2\left\{\left(a_1x-\frac{x^2}{2}\right)-\frac{x}{2}(a_1-x)\right\}\frac{1}{a_1-x}=2b_2,$$

或 $$a_1x\cdot\frac{1}{a_1-x}=2b_2=\text{兩邊股}.$$

內亦有小差分母

$$2a_1xc_{15}\left(a_1x-\frac{x^2}{2}\right)\cdot\frac{1}{c_1}\cdot\frac{1}{a_1-x}\cdot\left[\frac{1}{a_1-x}\right]=D^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

內寄大弦及小差分母,寄左.

$$x^2\left(a_1{}^2-ax+\frac{x^2}{2}\right)(a_1-x)\cdot\frac{1}{c_1}\cdot\frac{1}{a_1-x}\left[\frac{1}{a_1-x}\right]=D^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

為同數,與左相消.

得: $$0.5x^3+1.5a_1x^2-(2a_1-a_1c_{15})x+(a_1{}^3-2a_1{}^2c_{15})=0.$$

$$x=D.$$ 合問.

(又本法) 識別得: $a_{15}+b_{15}+c_{15}=c_1-b_1$.

令 $$x=c_1-b_1=\text{勾圓差}$$

$$\frac{a_1{}^2+x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}=c_1,$$ 寄小差分母.

$$\frac{a_1{}^2-x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}=b_1,$$ 寄小差分母

因 $\dfrac{b_1\cdot c_{15}}{c_1}=b_{15}$, 及 $\dfrac{a_1\cdot c_{15}}{c_1}=a_{15}$.

$$c_{15}\frac{a_1{}^2-x^2}{2}\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\cdot\frac{1}{c_1}=b_{15},$$ 寄大弦分母.

$$a_1c_{15}x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\cdot\frac{1}{c_1}=a_{15},$$ 寄大弦分母.

$$c_{15}\frac{a_1{}^2+x^2}{2}\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\cdot\frac{1}{c_1}=c_{15},$$,,

三位相併得下:

$$\left\{c_{15}\frac{a_1{}^2-x^2}{2}+a_1c_{15}x+c_{15}\frac{a_1{}^2+x^2}{2}\right\}\left[\frac{1}{x}\right]\frac{1}{c_1}=c_1-b_1,\cdots\cdots(A)$$

寄左.

$$x\left(\frac{a_1{}^2+x}{2}\right)\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\frac{1}{c_1}=c_1-b_1,\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得:
$$-0.5x^3-\left(\frac{a_1{}^2}{2}-a_1c_{15}\right)x+a_1{}^2c_{15}=0,$$

$$x=c_1-b_1,\qquad a_1-x=D.$$ 合問.

15. 有 a_1, c_7, 求 D.

(本法) 令 $x=r=a_7=$小勾

因	$\frac{a_1c_7}{a_7}=c_1.$

$$a_1c_7x^{-1}=c_1,$$

$$a_1-2x=c_1-b_1,$$

$$a_1c_7x^{-1}-(a_1-2x)=b_1,$$

$$(a_1c_7x^{-1}-\overline{a_1-2x})-2x=a_1c_7x^{-1}-a_1=c_1-a_1.$$

因 $$\left(\frac{c_1-a_1}{2}\right)(c_1-b_1)=r^2.$$

$$\tfrac{1}{2}(a_1-2x)(a_1c_7x^{-1}-a_1)=r^2,\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

以 $$x^2=r^2,\cdots\cdots\cdots(B)$$ 與左相消.

得: $$-x^3+a_1x^2-\left(a_1c_7+\frac{a_1^2}{2}\right)x+a_1\cdot\frac{a_1c_7}{2}=0.$$

$$x=r,\quad\therefore\ 2r=D.$$ 合問.

16. 有 a_1, c_{11}, 求 D.

(本法) 令 $$x=a_{12}.$$

$$x+c_{12}=c_3,$$

$$x(x+c_{12})\cdot\frac{1}{c_{12}}=a_3=$$ 底勾 = 半梯底

寄斜步分母

$$\{a_1c_{12}-x(x+c_{12})\}\frac{1}{c_{12}}=a_1-a_3=r.$$

$$\{a_1c_{12}-x(x+c_{12})\}^2\frac{1}{c_{12}^2}=r^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

內帶斜步(冪)分母,寄左.

又 $$c_{12}-x=c_{14},$$

$$x(c_{12}-x)\frac{1}{c_{12}}=a_{14}=\text{半梯頭 寄斜步爲母},$$

$$x(c_{12}+x)x(c_{12}-x)\frac{1}{c_{12}}=r^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得: $$2x^4+2c_{12}x^3-2a_1c_{12}x^2-2a_1c_{12}{}^2x+\overline{a_1c_{12}{}^2}=0,$$

$$x=a_{12},$$

$$b_{12}=\sqrt{c_{12}{}^2-a_{12}{}^2},\qquad \frac{2a_{12}b_{12}}{2}=D.\qquad \text{合問.}$$

---

17. 有 a_1, $a_{15}+b_{14}$, 求 D.

(本法) 令 $$x=c_1-b_1.$$

$$\frac{a_1{}^2-x^2}{2x}=b_1,\qquad \frac{x^2+a_1{}^2}{2x}=c_1,\qquad b_1=b_1.$$

$$a_1+\left(\frac{a_1{}^2}{2}x^{-1}-0.5x\right)=a_1+b_1,$$

$$a_1-x=a_1+b_1-c_1=D.$$

$$(a_{15}+b_{14})+(a_1-x)=a_{12}+b_{12},$$

$$=c_8+c_7,$$

$$2\{(a_{15}+b_{14})+(a_1-x)\}=c_4+c_5.$$

$$2\{(a_{15}+b_{14})+(a_1-x)\}-\left(\frac{a_1{}^2}{2}x^{-1}-0.5x\right)=a_{12}+b_{12}-c_{12}=c_{13},$$

因 $\dfrac{(a_1+b_1)(a_{12}+b_{12}-c_{12})}{a_{12}+b_{12}}=a_1+b_1-c_1.$

$$\left(a_1+\frac{{a_1}^2}{2}x^{-1}-0.5x\right)\left\{2(a_{15}+b_{14})+2(a_1-x)\right\}$$

$$-\left(\frac{{a_1}^2}{2}x^{-1}-0.5x\right)\cdot\frac{1}{\overline{a_{15}+b_{14}}+\overline{a_1-x}}=a_1+b_1-c_1.$$

………………(A)內寄小和爲母,寄左.

以 $(a_1-x)(\overline{a_{15}+b_{14}}-\overline{a_1-x})\cdot\dfrac{1}{\overline{a_{15}+b_{14}}+\overline{a_1-x}}=a_1+b_1-c_1,$

………………(B) 爲同數,與左相消.

得: $0.25x^4-1\tfrac{1}{2}a_1x^3+(a_{15}+b_{14})a_1x^2$

$$+\frac{{a_1}^2}{2}(2\cdot\overline{a_{15}+b_{14}}+a_1)x-\left(\frac{{a_1}^2}{2}\right)^2=0,$$

$x=c_1-b_1,\quad a_1-x=D.$ 合問.

18. 有 a_1, c_{13}, 求 D.

(本法 識別得: $D-c_{13}=a_{13}+b_{13}.$

$$x=r.$$

令 $a_1-2x=c_1-b_1=$小差

$\tfrac{1}{2}\{{a_1}^2+(a_1-2x)^2\}\cdot\dfrac{1}{a_1-2x}=c_1,$ 內帶小差分母.

$\tfrac{1}{2}\{{a_1}^2-(a_1-2x)^2\}\cdot\dfrac{1}{a_1-2x}=b_1.$ 內亦帶小差爲母.

$$\left\{a_1(a_1-2x)+\frac{a_1{}^2-(a_1-2x)^2}{2}\right\}\frac{1}{a_1-2x}=a_1+b_1$$ 帶小差母.

因	$c_{13}(a_1+b_1)=c_1(a_{13}+b_{13})$.

$$c_{13}\left\{a_1(a_1-2x)+\frac{a_1{}^2-(a_1-2x)^2}{2}\right\}\frac{1}{a_1-2x}=c_{13}(a_1+b_1),\cdots\cdots\cdots(A)$$

寄左.

$$(2x-c_{13})\frac{a_1{}^2+(a_1-2x)^2}{2}\cdot\frac{1}{a_1-2x}=c_1(a_{13}+b_{13}),\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得: $4x^3-4a_1x^2+(2a_1{}^2+2a_1c_{13})x-2a_1{}^2c_{13}=0,$

$x=r.$ 合問.

(又本法) 識别得: $a_{13}+b_{13}+c_{13}=D.$

令 $x=D.$

$a_1-x=c_1-b_1=$小差

$\frac{1}{2}\{a_1{}^2+(a_1-x)^2\}\frac{1}{a_1-x}=c_1,$ 內寄小差分母.

$\frac{1}{2}\{a_1{}^2-(a_1-x)^2\}\frac{1}{a_1-x}=b_1,$ 內寄小差分母.

因 $\dfrac{b_1c_{13}}{c_1}=b_{13}$, 及 $\dfrac{a_1c_{13}}{c_1}=a_{13}$.

$$c_{13}\left\{\frac{a_1{}^2-(a_1-x)^2}{2}\right\}\left[\frac{1}{a_1-x}\right]\cdot\frac{1}{c_1}=b_{13},$$ 寄大弦分母.

$$a_1c_{13}(a_1-x)\left[\frac{1}{a_1-x}\right]\cdot\frac{1}{c_1}=a_{13},$$ 只寄大弦分母.

$$c_{13}\left\{\frac{a_1{}^2+(a_1-x)^2}{2}\right\}\left[\frac{1}{a_1-x}\right]\cdot\frac{1}{c_1}=c_{13},$$ „

三位相併,得:

$$(2a_1{}^2c_{13}-a_1c_{13}x)\left[\frac{1}{a_1-x}\right]\cdot\frac{1}{c_1}=a_{13}+b_{13}+c_{13},\cdots\cdots\cdots(A)$$

內有大弦分母,寄左.

$$x\cdot\frac{a_1{}^2+(a_1-x)^2}{2}\left[\frac{1}{a_1-x}\right]\cdot\frac{1}{c_1}=a_{13}+b_{13}+c_{13}\cdots\cdots\cdots(B)$$

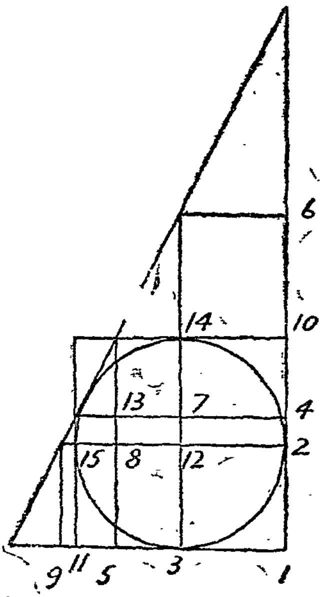
爲同數,與左相消.

得: $$0.5x^3-a_1x^2+(a_1{}^2+a_1c_{13})x-2a_1{}^2c_{13}=0,$$

$$x=D.$$ 合問.

測圓海鏡細草卷第七

明東(a_{14})前一十八問



1. 有 a_{14}, b_{15}, 求 D.

(本法) 識別得:

$$a_{14}+b_{15}=c_{13},$$

$$a_{14}-b_{15}=b_{13}-a_{13},$$

$$2a_{14}=c_{13}+(b_{13}-a_{13}),$$

$$2b_{15}=c_{13}-(b_{13}-a_{13}),$$

$$a_{14}b_{15}=\frac{1}{2}a_{13}b_{13},$$

$$D-2a_{14}=2a_{13},$$

$$D-2b_{15}=2b_{13},$$

$$\underline{a_{13}+b_{13}+c_{13}=D,}$$ 合問.

(又本法) 令 $x=D$,

$$=a_{13}+b_{13}+c_{13},$$

$$x-2(a_{14}+b_{15})=a_{13}+b_{13}-c_{13}$$

$$x\{x-2(a_{14}+b_{15})\}=(a_{13}+b_{13}-c_{13})(a_{13}+b_{13}-c_{13})$$

$$=2a_{13}b_{15},\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

又 $$2a_{14}2b_{15}=2a_{13}b_{13},$$

則 $$x\{x-2(a_{14}+b_{15})\}=2a_{14}2b_{15},\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得: $$-x^2+2(a_{14}+b_{15})x+2a_{14}2b_{15}=0,$$

$$x=D.$$ 合問.

(又本法) 令 $x=r$,

$$x+a_{14}=a_{10},$$

$$x+b_{15}=b_{11},$$

因 $$a_{10}b_{11}=\frac{D^2}{2}$$

$$(x+a_{14})(x+b_{15})=\frac{(2r)^2}{2},\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

$$2x^2=2r^2,\cdots\cdots\cdots(B)$$ 與左相消.

得: $$-x^2+(a_{14}+b_{15})x+a_{14}b_{15}=0,$$

$$x=r,$$ 合問.

(又本法) 令 $x=r,$

$$x-a_{14}=a_{13},$$

$$x-b_{15}=b_{13},$$

$$(x-a_{14})(x-b_{15})=2a_{13}b_{13},$$

因 $(a_{14}-b_{15})^2=(b_{13}-a_{13})^2$

故 $2(x-a_{14})(x-b_{15})+(a_{14}-b_{15})^2=c_{13}{}^2,\cdots\cdots\cdots(A)$ 寄左.

又 $(a_{14}+b_{15})^2=c_{13}{}^2,\cdots\cdots\cdots(B)$

為同數,與左相消.

得: $-2x^2+2(a_{14}+b_{15})x+\{(a_{14}+b_{15})^2$

$-[2a_{14}b_{15}+(a_{14}-b_{15})^2]\}=0,$

$x=r,$ 合問.

(又本法) 令 $x=a_{13},$

$$a_{14}-b_{15}=b_{13}-a_{13},$$

$$(a_{14}-b_{15})+x=b_{13},$$

$x\{(a_{14}-b_{15})+x\}=a_{13}b_{13},\cdots\cdots\cdots(A)$ 寄左.

$2a_{14}b_{15}=a_{13}b_{13},\cdots\cdots\cdots(B)$ 與左相消.

得: $-x^2-(a_{14}-b_{14})x+2a_{14}b_{15}=0,$

$$x=a_{13},$$

$$3a_{14}b_{15}\div a_{13}=b_{13},$$

$$(a_{14}+b_{15})+(a_{13}+b_{13})=D.$$ 合問.

(又本法) 令 $x=a_{13}+b_{13},$

$$x+(a_{14}+b_{15})=a_{13}+b_{13}+c_{13},$$

$$x-(a_{14}+b_{15})=a_{13}+b_{13}-c_{13},$$

$$\{x+(a_{14}+b_{15})\}\{x-(a_{14}+b_{15})\}=2a_{13}b_{13}\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

$$2a_{14}2b_{15}=2a_{13}b_{13},\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得: $-x^2+(a_{14}+b_{15})^2+2a_{14}2b_{15}=0,$

$$x=a_{13}+b_{13},$$

$$(a_{14}+b_{15})+(a_{13}+b_{13})=D.$$ 合問.

2. 有 a_{15}, b_{14} 求 D.

(本法) 識别得: $c_{12}-(a_{15}+b_{14})=a_{13}+b_{13},$

$$b_{14}-a_{15}=c_6-c_8,$$

因	$b_{14}+r-a_{15}-r=b_{12}-a_{12}$

$$b_{14}-a_{15}=c_{12}-c_{11},$$

$$=c_{10}-c_{12},$$

令 $x=c_{14}-a_{14};$

$$\frac{b_{14}^2}{x}=c_{14}+a_{14},$$

$$\frac{b_{14}^2}{x}-x=2a_{14},$$

$$\left(\frac{b_{14}^2}{x}-x\right)b_{14}=2a_{14}b_{14},$$

按句外容圓半法, $\frac{2a_{14}b_{14}}{c_{14}-a_{14}}=D.$

又以 $\frac{1}{x}\left(\frac{b_{14}^2}{x}-x\right)b_{14}=D,$

$$\frac{b_{14}^2-x^2}{x^2}\cdot b_{14}=D,\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$ 爲泛寄.

因 $\triangle_{14}$, $\triangle_{15}$ 相似:

$$\frac{2a_{15}b_{14}}{2a_{14}}=b_{15},$$

$$2a_{15}\cdot 2a_{15}b_{14}\cdot\frac{1}{2a_{14}}=2a_{15}\cdot b_{15},\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

$$b_{14}-x=b_{14}-(c_{14}-a_{14}),$$

$$(b_{14}-x)^2=(a_{14}+b_{14}-c_{14})^2,$$

$$=2(c_{14}-a_{14})(c_{14}-b_{14}),$$

$$\frac{(b_{14}-x)^2}{x}=2(c_{14}-b_{14}),$$

因 $\triangle_{14}$, $\triangle_{15}$ 相似:

$$\frac{2(c_{14}-b_{14})b_{15}}{2b_{14}}=c_{15}-b_{15},$$

或 $$\frac{(b_{14}-x)^2}{x}\cdot\frac{a_{15}}{2a_{14}}=c_{15}-b_{15},\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$

按股外容圓半法 $\frac{2a_{15}b_{15}}{c_{15}-b_{15}}=D.$

由(a),(b)得: $$\frac{2a_{15}\cdot 2a_{15}\cdot b_{14}}{\frac{(b_{14}-x)^2\cdot a_{15}}{x}}=D,$$

或 $$\frac{4a_{15}b_{14}x}{(b_{14}-x)^2}=D,\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$ 寄左.

與泛寄相消得: $$\frac{4a_{15}x}{(b_{14}-x)^2}=\frac{b_{14}{}^2-x^2}{x},$$

或 $-x^4+2(b_{14}-2a_{15})x^3-2b_{14}{}^3x+b^4{}_{14}=0.$*

$$x=c_{14}-a_{14}.$$

既得 $x=c_{14}-a_{14}$, 李治稱鈴經一書,以下式:

$$\frac{1}{x}\left(\frac{b_{14}{}^2}{x}-x\right)b_{14}=D,$$

代入,得: $$\frac{b_{14}\{b_{14}{}^2-(c_{14}-a_{14})^2\}}{(c_{14}-a_{14})^2}=D.$$ 合問.

---

* 原草由(a),(b)得(B)不消去a_{15},又(A),(B)相消不消去b_{14}.是以原法;原草須以(a_{15},b_{14})遍乘各項,其數較繁,今就簡得此式.

李治以爲此祇是「句外容圓半法」:

$$\frac{2a_{14}b_{14}}{c_{14}-a_{14}}=D,$$

公式左邊分母子同乘 $c_{14}-a_{14}$ 耳.

(又本法) 令
$$x=r,$$
$$x+b_{14}=b_{12},$$
$$x+a_{15}=a_{12},$$

因
$$\frac{a_{12}b_{12}}{r}=c_{12},$$

$$\left\{\frac{(x+b_{14})(x+a_{15})}{x}\right\}^2=c_{12}^2\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

又因
$$a_{12}^2+b_{12}^2=c_{12}^2,$$

即
$$(x+a_{15})^2+(x+b_{15})^2=c_{12}^2,\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得:
$$-x^4+\{(a_{15}+b_{14})^2-(a_{15}-b_{14})^2\}x^2$$
$$+2a_{15}b_{14}(a_{15}+b_{14})x+\overline{a_{15}b_{14}}^2=0,$$
$$x=r,$$
$$2x=D.$$ 合問.

(又本法) 如前令
$$x=r,$$
$$a_{12}=x+a_{15}=\text{勾率},$$

$$b_{12}=x+b_{14}=\text{股率},$$

$$b_{14}=\text{小股},$$

$$\frac{b_{14}a_{12}}{b_{12}}=a_{14},$$

$$\frac{b_{14}(x+a_{15})}{x+b_{14}}=a_{14},$$

又

$$b_3=2x+b_{14},=\text{大股},$$

$$\frac{b_3a_{12}}{b_{12}}=a_3,$$

$$\frac{(2x+b_{14})(x+a_{15})}{x+b_{14}}=a_3,$$

因　$a_3a_{14}=r^2,$

$$\frac{1}{(x+b_{14})^2}(2x+b_{14})(x+a_{15})b_{14}(x+a_{15})=r^2\cdots\cdots\cdots(A)$$

內帶股率冪爲母，寄左.

$$x^2=r^2\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得:

$$-x^4+\{(a_{15}+b_{14})^2-(a_{15}-b_{14})^2\}x$$
$$+2a_{15}b_{14}(a_{15}+b_{14})x+\overline{a_{15}b_{14}}^2=0,$$

$$x=r,$$

$$2x=D,$$　　合問

(又本法) 令 $$x=c_{12},$$

因	$b_{14}-a_{15}=b_{14}+r-r-a_{15}=b_{12}-a_{12},$

故 $$c_{12}{}^2-(b_{14}-a_{15})^2=2a_{12}b_{12},$$

又 $$\frac{2a_{12}b_{12}}{c_{12}}=D,$$

即 $$\frac{x^2-(b_{14}-a_{15})^2}{x}=x-(b_{14}-a_{15})^2x^{-1},$$

$$=D,$$

$$\{x-(b_{14}-a_{15})^2x^{-1}+2a_{15}\}^2=\overline{2a_{12}{}^2},$$

$$\{x-(b_{14}-a_{15})^2x^{-1}+2b_{15}\}^2=\overline{2b_{12}{}^2},$$

因 $$\overline{2a_{12}{}^2}+\overline{2b_{12}{}^2}=\overline{2c_{12}{}^2},$$

故 $$\{x-(b_{14}-a_{15})^2x^{-1}+2a_{15}\}^2+\{x-(b_{14}-a_{15})^2x^{-1}+2b_{14}\}^2$$

$$=4c_{12}{}^2,\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

$$4x^2=4c_{12}{}^2,\cdots\cdots\cdots(B)$$

為同數,與左相消.

得 $$-4(b_{14}+a_{15})(b_{14}-a_{15})^2x+2(b_{14}-a_{15})^4=0,$$

$$x=c_{12}.$$

又令 $$x'=r,$$

$$(x'+a_{15})^2+(x'+b_{14})^2=c_{12}{}^2,$$

$$-2x'^2-(2a_{15}+2b_{14})x'+c_{12}{}^2-(a_{15}{}^2+b_{14}{}^2)=0,$$

得: $$x'=r.$$ 合問.

(又本法) 令 $$x=c_{12}-b_{12}=c_{15},$$

因 $$b_{14}-a_{15}=b_{12}-a_{12},$$

故 $$\begin{aligned} x+(b_{14}-a_{15}) &= c_{12}-a_{12}, \\ &= c_{14}, \\ 2x\{x+(b_{14}-a_{15})\} &= 2(c_{12}-b_{12})(c_{12}-a_{12}), \\ &= (a_{12}+b_{12}-c_{12})^2, \\ &= c_{13}{}^2, \cdots\cdots\cdots\cdots (a) \end{aligned}$$ 爲泛寄.

因 $$\frac{a_{15}c_{14}}{c_{15}}=a_{14},$$

故 $$\frac{a_{15}\{x+(b_{14}-a_{15})\}}{x}=a_{14},$$

又因 $$\frac{b_{14}c_{15}}{c_{14}}=b_{15},$$

即 $$\frac{b_{14}x}{c_{14}}=b_{15},$$

及 $$\frac{a_{14}c_{14}}{c_{14}}=a_{14},$$

即 $$\frac{(a_{15}+a_{15}\cdot\overline{b_{14}-a_{15}}\cdot x^{-1})(x+b_{14}-a_{15})}{c_{14}}=a_{14},$$

因 $$a_{14}+b_{15}=c_{13},$$

卽 $$\frac{1}{c_{14}{}^{2}}\{(a_{15}+a_{15}\cdot\overline{b_{14}-a_{15}}\cdot x^{-1})(x+\overline{b_{14}-a_{15}})+b_{14}x\}^{2}=c_{13}{}^{2}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$ 內帶明弦冪分母,寄左.

由(a),(b)得: $$\{(a_{15}+a_{15}\cdot\overline{b_{14}-a_{15}}\cdot x^{-1})(x+\overline{b_{14}-a_{15}})+b_{14}x\}^{2}$$
$$=(x+b_{14}-a_{15})^{2}\cdot 2x(x+b_{14}-a_{15})$$

或 $$\{(b_{14}+a_{15})x+2a_{15}(b_{14}-a_{15})+a_{15}(b_{14}-a_{15})^{2}x^{-1}\}^{2}$$
$$=2x^{4}+6(b_{14}-a_{15})x^{3}+6(b_{14}-a_{15})^{2}x^{2+2}+2(b_{14}-a_{15})^{3}x,$$

卽 $$-2x^{6}-6nx^{5}-\{6n^{2}-(b_{14}+a_{15})^{2}\{x^{4}-\{2n\cdot n^{2}$$
$$-2(b_{14}+a_{15})t\}x^{3}+\{2(b_{14}+a_{15})s+t^{2}\}x^{2}+2stx+s^{2}=0,$$

而 $$b_{14}-a_{15}=n=\text{行差},$$
$$(b_{14}-a_{15})^{2}=n=\text{差冪},$$
$$a_{15}n^{2}=s=\text{泛率},$$
$$2a_{15}n=t=\text{小泛},$$
$$x=c_{12}-b_{12}=c_{15},$$
$$\sqrt{n^{2}-a_{15}{}^{2}}=b_{15},$$

由「股外容圓半法」得: $\dfrac{2a_{15}b_{15}}{c_{15}-b_{15}}=D.$ 合問.

3. 有 a_{15}, a_{14} 求 D.

(本法) 因 $$a_{14}=c_{8}-a_{8},$$

令 $$x=r=b_8=\text{平股},$$

$$x+a_{15}-a_{14}=a_8=\text{平勾},$$

因 $$\boxed{x+a_{16}=c_8,}$$

$$(x+a_{15}-a_{14})^2+x^2=c_8{}^2,\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

$$(x+a_{15})^2=c_8{}^2,\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得 $$x^2-2a_{14}x+(a_{15}-a_{14})^2-a_{15}{}^2=0,$$

$$x=r,$$

$$2x=D.$$ 合問.

---

4. 有 b_{14} b_{15}, 求 D.

(本法) 識别得, $$b_{15}=c_7-b_7,$$

令 $$x=a_7=r,$$

$$x+b_{14}=c_7.$$

$$x+b_{14}-b_{15}=b_7,$$

$$x^2+(x+b_{14}-b_{15})^2=c_7{}^2,\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

$$(x+b_{14})^2=c_7{}^2\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得 $$-x^2+2b_{15}x+[b_{14}{}^2-(b_{14}-b_{15})^2]=0,$$

$$x=r,$$

$$2x=D,$$ 合問.

5. 有a_{14}, c_8, 求D.

(本法) 識別得: $a_{14}=c_8-a_8,$

$$b_8=r=股,$$

令

$$x=r,$$

$$(c_8-a_{14})^2+x^2=c_8^2.$$

$$-x^2+c_8^2-(c_8-a_{14})^2=0,$$

$$x=r,$$

$$2x=D.$$ 合問.

6. 有b_{14}; c_7, 求D.

(本法) 識別得: $b_{14}=c_7-b_7,$

$$c_7=弦,$$

$$a_7=r=句,$$

令

$$x=r,$$

$$x^2+(c_7-a_{14})^2=c_7^2, \cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$ 寄左.

$$c_7^2=c_7^2, \cdots\cdots\cdots\cdots (B)$$

爲同數,與左相消.

得: $-x^2+[c_7^2-(c_7-b_{14})^2]=0,$

$$x=r,$$

$$2x=D.$$ 合問.

---

7. 有 b_{15}, c_{13} 求 D.

(本法) 識別得: $$c_{13}-b_{15}=a_{14},$$

因[弦外容圓] $$\frac{2a_{13}b_{13}}{c_{13}-(a_{13}+d_{13})}=D,$$

及 $$2a_{14}b_{15}=a_{13}b_{13},$$

故 $$4a_{14}b_{15}=2a_{13}b_{13},$$

$$2a_{13}b_{13}+c_{13}{}^2=(a_{13}+b_{13})^2,$$

即 $$\sqrt{4(c_{13}-b_{15})b_{15}+c_{13}{}^2}=a_{13}+b_{13},$$

$$a_{13}+b_{13}+c_{13}=D.$$ 合問.

---

8. 有 a_{14}, c_{13}, 求 D.

(本法) 據草識別得: $$c_{13}a_{14}=b_{15},$$

$$a_{14}-b_{15}=b_{13}-a_{13},$$

因 $$2a_{14}b_{15}=a_{13}b_{13},$$

$$a_{13}{}^2+a_{13}(b_{13}-a_{13})+2a_{14}b_{15}=0,$$

即 $$a_{13}{}^2+a_{13}(b_{13}-a_{13})+2a_{14}(c_{13}-a_{14})=0,$$

故 $$x^2+\{a_{14}-(c_{13}-a_{14})\}x+2a_{14}(c_{13}-a_{14})=0,$$

$$x=a_{13},$$

$$a_{14}-b_{15}+a_{13}=b_{13},$$

$$a_{13}+b_{13}+c_{13}=D.$$ 合問.

據法:則因 $$2a_{14}b_{15}=a_{13}b_{13},$$

$$c_{13}-a_{14}=b_{15},$$

如上題 $$c_{13}{}^2-2a_{13}b_{13}=c_{13}{}^2-2a_{14}\cdot 2b_{15},$$

$$=c_{13}{}^2-2a_{14}\cdot 2(c_{13}-a_{14}),$$

$$=(b_{13}-a_{13})^2,$$

$$\sqrt{c_{13}{}^2-4a_{14}(c_{13}-a_{14})}=b_{13}-a_{13}.$$

$$x^2+(b_{13}-a_{13})x+2a_{14}(c_{13}-a_{14})=0,$$

$$x=a_{13},$$

$$a_{13}+(b_{13}-a_{13})=b_{13},$$

$$a_{13}+b_{13}+c_{13}=D.$$ 合問.

---

9. 有 $D-a_{14}=A_{14}, D-b_{15}=B_{15}$, 求 D,

(本法) 識別得: $$D-a_{14}=r+a_{13},$$

$$D-b_{15}=r+b_{13},$$

$$(D-b_{15})+(D-a_{14})=b_{13}+a_{13}+D,$$

$$(D-b_{15})-(D-a_{14})=b_{13}-a_{13},$$

又令 $$x=b_{15},$$

$$\frac{D-b_{15}-x}{2}=b_{13},$$

$$\left(\frac{D-b_{15}-x}{2}\right)-\{(D-b_{15})-(D-a_{14})\}=a_{13},$$

因 $$a_{13}^2+b_{13}^2=c_{13}^2,$$

故 $$\left\{\left[\frac{D-b_{15}-x}{2}\right]-[(D-b_{15})-(D-a_{14})]\right\}^2$$

$$+\left[\frac{D-b_{15}-x}{2}\right]^2=c_{13}^2,$$

或 $$0.5x^2-(D-a_{14})x+\{(D-a_{14})^2+0.5(D-b_{15})^2$$

$$-(D-a_{14})(D-b_{15})\}=c_{13}^2,\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

又因 $x+\{(D-b_{15})-(D-a_{14})\}=a_{14},$

及 $$a_{14}+b_{15}=c_{13},$$

故 $\{2x+[(D-b_{15})-(D-a_{14})]\}^2=c_{13}^2,$

或 $$4x^2+4\{(D-b_{15})-(D-a_{14})\}x+\{(D-b_{15})^2+(D-a_{14})^2$$

$$-2(D-a_{14})(D-b_{15})\}=c_{13}^2,\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得 $$-3.5x^2-\{4(D-b_{15})-3(D-a_{14})\}^{*}x+\{(D-a_{14})(D-b_{15})$$

$$-0.5(D-b_{15})^2\}=0,$$

或 $-3.5x^2-(4B_{15}-3A_{14})x+(A_{14}B_{15}-0.5B_{15}^2)=0.$ 合問.

---

* 儼按原法內 x 之係數作 $2(D-a_{14})$,乃與數偶合,館校本,及李銳校本,并未加校正.

10. 有 $D-b_{14}=B_{14}$, $D-a_{15}=A_{15}$, 求 D.

(本法) 識別得: $(D-a_{15})-(D-b_{14})=b_{14}-a_{15}$,

$$=(b_{14}+r)-(a_{15}+r),$$

$$=b_{12}-a_{12},$$

令 $$x=r,$$

$$3x-(D-b_{14})=b_{12},$$

$$3x-(D-a_{15})=a_{12},$$

如圖 $$\frac{a_{12}b_{12}}{r}=c_{12},$$

$$\frac{(3x-A_{15})^2(3x-B_{14})^2}{x^2}=c_{12}^2,\cdots\cdots(A)\text{ 寄左.}$$

$$(3x-A_{15})^2+(3x-B_{14})^2=c_{12}^2,\cdots\cdots(B)$$

為同數,與左相消.

得 $$63x^4-48(A_{15}+B_{14})x^3+\{18\overline{A_{15}B_{14}}+\overline{3(A_{15}+B_{14})}^2$$
$$-(A_{15}^2+B_{14}^2)\}x^2-6(A_{15}+B_{14})A_{15}B_{14}x+\overline{A_{15}B_{14}}^2=0,$$

$$x=r,$$

$$2x=D.$$ 合問.

---

11. 有 $a_{15}+b_{14}$, c_{12}, 又 $a_{15}<b_{14}$, 求 D.

(本法) 識別得 $D+a_{15}+b_{14}=a_{12}+b_{12}$, $=$皇極和,

令 $$x=D,$$

因 $(a_{12}+b_{12})^2-c_{12}{}^2=2a_{12}b_{12}$,

$$(x+a_{15}+b_{14})^2-c_{12}{}^2=2a_{12}b_{12}\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

$$c_{12}x=2a_{12}b_{12},\cdots\cdots\cdots(B)$$ 與左相消.

得 $$x^2+\{2(a_{15}+b_{14})-c_{12}\}x-(c_{12}{}^2-\overline{a_{15}+b_{14}}^2)=0,$$

$$x=D.$$ 合問.

12. 有 a_{15} 柰 b_{14}, c_{13}, 又 $b_{14}>a_{15}$, 求 D.

(本法) 識別得: $a_{15}+b_{14}+D=a_{12}+b_{12}$, =皇極和,

$$a_{12}+b_{12}-c_{13}=c_{12},$$

$$a_{15}+b_{14}-c_{13}=c_{12}-D,$$ =旁差,

令 $$x=D,$$

$$a_{15}+b_{14}+x=a_{12}+b_{12},$$

$$(a_{15}+b_{14}+x)^2-(a_{15}+b_{14}+x-c_{13})^2=2a_{12}b_{12}.\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

如前題 $$c_{12}x=2a_{12}b_{12},$$

卽 $$(\overline{a_{12}+b_{12}-c_{13}}+x)x=2a_{12}b_{12},\cdots\cdots\cdots(B)$$

與左相消.

得: $$-x^2+\{2c_{13}+(c_{13}-\overline{a_{12}+b_{12}})\}x+\{(\overline{a_{15}+b_{14}}-c_{13})^2-(a_{15}+b_{14})^2\}=0,$$

$$x=D.$$ 合問.

1[illegible]. 有 $b_{15}+c_{13}$, $c_{13}-b_{15}$, $a_{14}>b_{15}$, 求 D.

(本法) 識別得: $(b_{15}+c_{13})-b_{15}=c_{13}$,

因
$$r=r,$$
$$a_{14}+a_{13}=b_{13}+b_{15},$$
$$a_{14}-b_{15}=b_{13}-a_{13},$$
$$(c_{13}-b_{15})-b_{15}=b_{13}-a_{13},$$
$$(c_{13}-b_{15})-b_{15}=b_{13}-a_{13},$$
$$c_{13}-b_{15}=a_{14},$$

令
$$x=b_{15},$$

因
$$2a_{14}b_{15}=a_{13}b_{13},$$

故
$$4(c_{13}-b_{15})x=2a_{13}b_{13}, \cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$
寄左.

因
$$2(c_{13}-b_{15})=c_{13}+(b_{13}-a_{13}),$$

及 $\{(b_{15}+c_{13})-b_{15}\}-\{(c_{13}-b_{15})-b_{15}\}=c_{13}-(b_{13}-a_{13})$,

即 $(b_{15}+c_{13})-(c_{13}-b_{15})=c_{13}-(b_{13}-a_{13})$,

故 $2(c_{13}-b_{15})\{(b_{15}+c_{13})-(c_{13}-b_{15})\}=2a_{13}b_{13}, \cdots\cdots\cdots\cdots(B)$

為同數,與左相消.

得:
$$x=\frac{2(c_{13}-b_{15})\{(b_{15}+c_{13})-(c_{13}-b_{15})\}}{4(c_{13}-b_{15})}$$
$$=b_{15}$$
合問.

(又本法)　識別得　$b_{15}+c_{13}=2b_{15}+a_{14}$,

$$c_{13}-b_{15}=a_{14},$$

$$(b_{15}+c_{13})+(c_{13}-b_{15})=2c_{13},$$

$$(b_{15}+c_{13})-(c_{13}-b_{15})=2b_{13}.$$

14.　有 $a_{14}+c_{13}+b_{15}$, $a_{14}+c_{13}+b_{15}-a_{14}$, 求 D.

(本法)　識別得　$a_{14}+c_{13}+b_{15}=2c_{13}$,

$$(a_{14}+c_{13}+b_{15})-a_{14}=c_{13}+b_{15},$$

$$\{(a_{14}+c_{13}+b_{15})-a_{14}\}-\frac{a_{14}+c_{13}+b_{15}}{2}=b_{15},$$

$$c_{13}-b_{15}=a_{14},$$

如前題本法　$a_{14}-b_{15}=b_{13}-a_{13}$.*

15.　有 $D-b_{15}$, c_4, 求 D.

(本法)　令　$x=b_{15}$,

$$2c_4-2x=2b_4,$$

$$2b_4\cdot 2x=D^2,$$

即　$(2c_4-2x)\cdot 2x=D^2,$ …………(A)　寄左.

$\{(D-b_{15})+x\}^2=D^2,$ …………(B)　與左相消.

---

* 儼按此題本法,及前題又本法無草.

得 $$5x^2-\{4c_4-2(D-b_{15})\}x+(D-b_{15})^2=0,$$

$$x=b_{15},$$

$$(D-b_{15})+b_{15}=D.$$ 合問.

---

16. 有 $D-a_{14}$, c_5 求 D.

(本法) 令 $$x=a_{14},$$

$$2c_5-2x=2a_3,$$

$$2a_3\cdot 2a_{14}=D^2,$$

$$(2c_5-2x)2x=D^2, \cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

$$\{(D-a_{14})+x\}^2=D^2, \cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得 $$5x^2-\{4c_5-2(D-a_{14})\}x+(D-a_{14})^2=0,$$

$$x=a_{14},$$

$$(D-a_{14})+a_{14}=D.$$ 合問

---

17. 有 a_1-a_{14}, b_1-b_{15}, 求 D.

(本法) 識別得: $$a_{14}+a_{13}=r,$$

$$b_{15}+b_{13}=r,$$

$$(a_1-a_{14})+(b_1-b_{15})=a_1+b_1-c_{13},$$

$$(b_1-b_{15})-(a_1-a_{14})=2(b_7-a_8),$$

$$(a_1-a_{14})-r=a_5=(\text{全徑上})\text{句方差},$$

$$(b_1-b_{15})-r=b_4=(\text{全徑上})\text{股方差},$$

而 $$\frac{a_1-a_{14}-r}{2}=a_9=(\text{半徑上句方差},$$

$$\frac{b_1-b_{15}-r}{2}=b_6=(\text{半徑上})\text{股方差},$$

令 $$x=D,$$

$$(a_1-a_{14})-\frac{x}{2}=a_5=(\text{全徑上})\text{句方差},$$

$$(b_1-b_{15})-\frac{x}{2}=b_4=(\text{全徑上})\text{股方差},$$

因 $$a_5\cdot b_4=D^2,$$

$$\left\{(a_1-a_{14})-\frac{x}{2}\right\}-\left\{(b_1-b_{15})-\frac{x}{2}\right\}=D^2,\cdots\cdots(A)\quad\text{寄左.}$$

$$x^2=D^2,\cdots\cdots(B)\quad\text{與左相消.}$$

得 $$-0.75x^2-\left\{\frac{(a_1-a_{14})+(b_1-b_{15})}{2}\right\}x+(a_1-a_{14})(b_1-b_{15})=0,$$

$$x=D.\qquad\text{合問.}$$

18. 有 a_1+a_{14}, b_1+b_{15}, 求 D.

(本法) 識別得: $a_1+a_{14}-r=c_5$,

$$b_1+b_{15}-r=c_4,$$

令 $$x=D=b_5=a_4,$$

$$\left(a_1+a_{14}-\frac{x}{2}\right)^2-x^2=a_5{}^2=(\text{全徑上})\text{句方差冪},$$

$$\left(b_1+b_{15}-\frac{x}{2}\right)^2-x^2=b_4{}^2=(\text{全徑上股方差冪},$$

因 $$a_5{}^2b_4{}^2=(D^2)^2,$$

故 $$\left\{\left(a_1+a_{14}-\frac{x}{2}\right)^2-x^2\right\}\left\{\left(b_1+b_{15}-\frac{x}{2}\right)^2-x^2\right\}$$

$$=(D^2)^2, \cdots\cdots\cdots\cdots(A) \quad \text{寄左.}$$

$$(x^2)^2=(D^2)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(B) \quad \text{與左相消.}$$

得 $$-0.4375x^4+0.75[(a_1+a_{14})+(b_1+b_{15})]x^3$$

$$-\{0.75[(a_1+a_{14})^2+(b_1+b_{15})^2]$$

$$-[(a_1+a_{14})(b_1+b_{15})]\}x^2$$

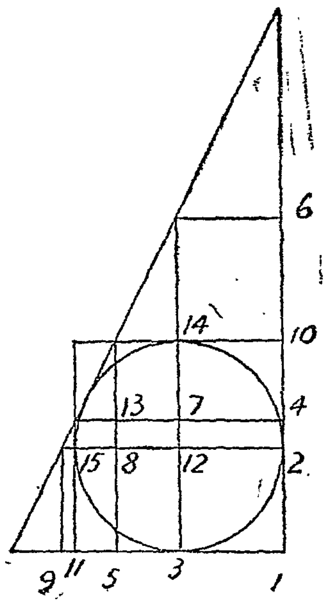
$$-\{(b_1+b_{15})(a_1+a_{14})^2+(a_1+a_{14})(b_1+b_{15})^2\}x$$

$$+(a_1+a_{14})^2(b_1+b_{15})^2=0,$$

$$x=D. \quad \text{合問.}$$

測圓海鏡細草卷第八.

明叀後一十六問.



1. 有$a_{14}+b_{14}$, $a_{15}+b_{15}$, c_{12}. 求D.

(本法) 識別得: $(a_{14}+b_{14})+(a_{15}+b_{15})$

$$=c_{12}-(a_{13}+b_{13}-c_{13}),$$

$$=(a_{12}+b_{12})-(a_{13}+b_{13}),$$

$$(a_{14}+b_{14})-(a_{15}+b_{15})=a_7-a_8,$$

$$=(b_{12}-a_{10})+(b_{13}-a_{13}),$$

$$=(b_1-a_1)-(b_{12}-a_{12}),$$

令 $$x=a_8,$$

$$x+(a_{14}+b_{14})-(a_{15}+b_{15})=b_7,$$

$$2x+(a_{14}+b_{14})-(a_{15}+b_{15})=c_{12},\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

$$c_{12}=c_{12},\cdots\cdots\cdots(B)$$ 與左相消.

得 $$x=a_8.$$

因 $$r^2=a_8\cdot b_7,$$

代入,得: $$r=\sqrt{x\{x+(a_{14}+b_{14})-(a_{15}+b_{15})\}}.$$ 合問.

(又本法) $$c_{12}-\{(a_{14}+b_{14})+(a_{15}+b_{15})\}=a_{13}+b_{13}-c_{13},$$

$$\frac{a_{13}+b_{13}-c_{13}}{2}=\text{泛率}=s,$$

由前本法識別得:

$$\left\{\frac{a_{13}+b_{13}-c_{13}}{2}+(a_{14}+b_{14})\right\}=b_7,$$

$$\left\{\frac{a_{13}+b_{13}-c_{13}}{2}+(a_{15}+b_{15})\right\}=a_8,$$

$$r=\sqrt{a_8b_7},$$

$$=\sqrt{\{s+(a_{14}+b_{14})\}\{s+ a_{15}+b_{15})\}}.$$ 合問.

2. 有 $a_{14}+b_{14}$, $a_{15}+b_{15}$, c_{13}, 求 D.

(本法) 令 $$x=c_{15},$$

$$\frac{1}{a_{15}+b_{15}}\cdot(a_{14}+b_{14})x=c_{14},$$ 內帶直和分母.

因 $$c_{14}+c_{13}=b_{12},$$

$$\frac{1}{a_{15}+b_{15}}\{(a_{14}+b_{14})x+(a_{15}+b_{15})c_{13}\}=b_{12},$$

內帶直和分母.

$$\frac{1}{(a_{15}+b_{15})^2}\{(a_{14}+b_{14})x+(a_{15}+b_{15})c_{13}\}^2=b_{12}{}^2,$$

內寄直和冪爲分母.

因 $$c_{15}+c_{13}=a_{12},$$

$$\frac{1}{(a_{15}+b_{15})^2}(x+c_{13})^2(a_{15}+b_{15})^2=a_{12}{}^2,$$

加,得: $$[\{(a_{14}+b_{14})x+(a_{15}+b_{15})c_{13}\}^2$$

$$+\{(x+c_{13})(a_{15}+b_{15})\}^2]\frac{1}{(a_{15}+b_{15})^2}=a_{12}{}^2+b_{12}{}^2,$$

$$=(b_{12}-a_{12})^2+2a_{12}b_{12},$$

內有直和冪分母,寄左.

因 $$c_{14}+c_{15}+c_{13}=c_{12}$$

故 $$[(a_{14}+b_{14})x+(a_{15}+b_{15})x+(a_{15}+b_{15})c_{13}]^2\cdot\frac{1}{(a_{15}+b_{15})^2}$$

$$=c_{12}^2$$ 爲同數,與左相消.

得: $$-\{[(a_{14}+b_{14})+(a_{15}+b_{15})]^2-[(a_{14}+b_{14})^2$$

$$+(a_{15}+b_{15})^2]\}x^2+c_{13}^2(a_{15}+b_{15})^2=0,$$

$$x=c_{15}.$$

(又本法) 令 $$x=c_{15}.$$

依前術,求得: $$\frac{1}{a_{15}+b_{15}}\cdot(a_{14}+b_{14})x=c_{14}=c_{12}-a_{12},$$

內帶重和分母.

$$c_{15}=c_{12}-b_{12},$$

因	$2(c_{12}-a_{12})(c_{12}-b_{12})=c_{13}^2,$

$$2(a_{14}+b_{14})x^2\frac{1}{a_{15}+b_{15}}=c_{13}^2\cdots\cdots(A)$$

內有重和分母,寄左.

$c_{13}^2=c_{13}^2,\cdots\cdots(B)$ 爲同數,與左相消.

得: $$-2(a_{14}+b_{14})x^2+(a_{15}+b_{15})c_{13}^2=0,$$

$$x=c_{15}.$$ 合問

---

3. 有 $(\overline{c_{12}-a_{12}}+\overline{c_{12}-b_{12}})=\alpha$, $\{(a_{15}+b_{15})+(a_{14}+b_{14}-c_{14})\}=\beta$, 求 D.

(本法) 識别得: $\{(c_{12}-a_{12})+(c_{12}-b_{12})\}=c_{14}+c_{15}$.

因	$r+a_{15}-c_{15}=c_{13}$,
卽	$a_{15}+b_{15}-c_{15}=c_{13}-b_{13}$.
又因	$r+b_{14}-c_{14}=c_{13}$,
卽	$a_{14}+b_{14}-c_{14}=c_{13}-a_{13}$.

故 $\{(a_{15}+b_{15}-c_{15})+(a_{14}+b_{14}-c_{14})\}=(c_{13}-b_{13})+(c_{13}-a_{13})$.

又 $\{(c_{12}-a_{12})+(c_{12}-b_{12})\}+\{(a_{14}+b_{14}-c_{14})+(a_{13}+b_{13}-c_{13})\}$

$$=(a_{14}+b_{14})+(a_{15}+b_{15}),$$

$$\{(c_{12}-a_{12})+(c_{12}-b_{12})\}-\{(a_{14}+b_{14}-c_{14})+(a_{13}+b_{13}-c_{13})\}$$

$$=\{(c_{14}-a_{14})+(c_{14}-b_{14})\}$$

$$+\{(c_{15}-a_{15})+(c_{15}-b_{15})\},$$

令 $$x=a_{13}+b_{13}-c_{13},$$

$$(a_{15}+b_{15}-c_{15})+(a_{14}+b_{14}-c_{14})+x=c_{13},$$

$$2c_{13}+x=a_{13}+b_{13}+c_{13}=D.$$

又 $$c_{13}+\{(c_{12}-a_{12})+(c_{12}-b_{12})\}=c_{12}$$

$$c_{12}D=2a_{12}b_{12},$$

卽 $$\{2(\beta+x)+x\}\{\beta+x+\alpha\}=2a_{12}b_{12},$$

或 $$(3x+2\beta)(x+\overline{\alpha+\beta})=2a_{12}b_{12}\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

又因 $$c_{12}+c_{13}=a_{12}+b_{12},$$

$$(a_{12}+b_{12})^2-c_{12}{}^2=2a_{12}b_{12},$$

故 $\{(\beta+x+\alpha)+(\beta+x)\}^2-(\beta+x+\alpha)^2=2a_{12}b_{12}\cdots(B)$

爲同數,與左相消.

得: $$(x+\beta)(3x+2\alpha+3\beta)=(3x+2\beta)(x+\alpha+\beta),$$

或 $$3x^2+(2\alpha+6\beta)x+\beta(2x+3\beta)$$

$$=3x^2+(3\alpha+5\beta)x+2\beta(\alpha+\beta),$$

$$(\alpha-\beta)x-\beta^2=0,$$

$$x=a_{13}+b_{13}-c_{13}.$$ 合問.

---

4. 有 c_{15}, c_{14}, 求 D.

(本法) 由卷第八, 2 題(又本法)知: $c_{13}{}^2=2c_{14}\cdot c_{15}$

故 $$c_{13}=\sqrt{2c_{14}\cdot c_{15}},$$

$$c_{15}+c_{13}=a_{12},$$

$$c_{14}+c_{13}=b_{12},$$

餘各依法求之.

卽由 $\frac{2a_{12}b_{12}}{c_{12}}=D$,之「勾股上容圓」公式,代入可得 D 也.

此題無草

---

5. 有 $b_{14}+c_{14}$, $b_{15}+c_{15}$. 求 D.

(本法) 識別得: $b_{15}+c_{15}=a_8$.

$$\boxed{\text{因}\quad (b_{14}-a_{14})+(c_{14}+a_{14}+b_{15}+c_{15})=(b_{14}-a_{14})+c_{12}}$$

$$(b_{14}+c_{14})+(b_{15}+c_{15})=(b_{14}-a_{14})+c_{12}.$$

$$\boxed{\text{又因}\,(b_{14}-a_{14})+(\overline{c_{14}+a_{14}}-\overline{b_{15}+c_{15}})=(b_{14}-a_{14})+b_6-a_8}$$

$$(b_{14}+c_{14}-(b_{15}+c_{15})=(b_{14}-a_{14})+(b_6-a_8)$$

$$a_8-a_{15}=a_{13}.$$

令 $$x=a_{15}.$$

因 $$\frac{a_{15}(b_{14}+c_{14})}{b_{15}+c_{15}=a_8}=a_{14},$$

卽 $$\frac{(b_{14}+c_{14})x}{b_{15}+c_{15}}=a_{14},$$

又因 $$a_8-a_{15}=a_{13},$$

卽 $$b_{15}+c_{15}-x=a_{13}.$$

又因 $$a_{13}+a_{14}=r,$$

卽 $$2\left\{\frac{b_{14}+c_{14}}{b_{15}+c_{15}}x+(b_{15}+c_{15})-x\right\}^2=\frac{D^2}{2}\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

因 $$a_{15}+\overline{b_{15}+c_{15}}=a_1-D,$$

卽 $$x+(b_{15}+c_{15})=a_{11},$$

入因 $$a_{14}+b_{14}+c_{14}=b_1-D,$$

即 $$\frac{b_{14}+c_{14}}{b_{15}+c_{15}}x+b_{14}+c_{14}=b_{10}.$$

又因 $$a_{11}\cdot b_{10}=\frac{D^2}{2},$$

即 $$\left\{x+(b_{15}+c_{15})\right\}\left\{\frac{(b_{14}+c_{14})}{b_{15}+c_{15}}x+(b_{14}+c_{14})\right\}=\frac{D^2}{2},\cdots\cdots(B)$$

為同數,與左相消.

得: $$\left\{2\left[\frac{(b_{14}+c_{14})-(b_{15}+c_{15})}{b_{15}+c_{15}}\right]^2-\frac{b_{14}+c_{14}}{b_{15}+c_{15}}\right\}x^2+\left\{2(b_{14}+c_{14})\right.$$

$$\left.-4(b_{15}+c_{15})\right\}^*x-\{(b_{14}+c_{14})(b_{15}+c_{15})-2(b_{15}+c_{15})^2\}=0,$$

餘皆依數求之. 合問.

6. 有 $a_{14}+c_{14}$, $a_{15}+c_{15}$, 求 D.

(本法) 識別得: $(a_{14}+c_{14})+(a_{15}+c_{15})=c_{12}-(b_{15}-a_{15})$,

$$(a_{14}+c_{14})-(a_{15}+c_{15})=(b_{15}-a_{15})+(b_6-b_8)$$

$$b_7-b_{14}=b_{13}.$$

令: $$x=b_{14}.$$

原法從法幷誤.疑原文脫落.館案,及李銳案并未合.

玆依題意列式如左.

因 $$\frac{b_{14}(a_{15}+c_{15})}{a_{14}+c_{14}=b_7}=b_{15},$$

即 $$\frac{(a_{15}+c_{15})x}{a_{14}+c_{14}}=b_{15},$$

又因 $$b_7-b_{14}=b_{13},$$

即 $$\frac{(a_{14}+c_{14}-x)(a_{14}+c_{14})}{a_{14}+c_{14}}=b_{13},$$

又因 $$b_{13}+b_{15}=r,$$

即 $$\left\{(a_{15}+c_{15})x+(a_{14}+c_{14}-x)(a_{14}+c_{14})\right\}\frac{1}{a_{14}+c_{14}}=r.$$

$$\left\{-[(a_{14}+c_{14})-(a_{15}+c_{15})]x+(a_{14}+c_{14})^2\right\}^2\frac{1}{(a_{14}+c_{14})^2=b_7^2}$$

$=r^2$,……(A) 內帶高股冪爲分母,寄左.

因 $$b_{15}+\overline{a_{15}+c_{15}}=a_1-D,$$

即 $$\left\{(a_{15}+c_{15})x+(a_{15}+c_{15})(a_{14}+c_{14})\right\}\cdot\frac{1}{a_{14}+c_{14}}=a_{11},$$

及 $$b_{14}+\overline{a_{14}+c_{14}}=b_1-D,$$

即 $$\{x+(a_{14}+c_{14})\}=b_{10}.$$

又因 $$\frac{a_{11}\cdot b_{10}}{2}=r^2,$$

即 $$\frac{1}{2}\{(a_{15}+c_{15})x+(a_{15}+c_{15})(a_{14}+c_{14})\}\cdot\{x+\overline{a_{14}+c_{14}}\}(a_{14}+c_{14})$$

$\cdot\dfrac{1}{(a_{14}+c_{14})^2=b_7^2}=r^2$,…………(B)爲同數,與左相消.

得:
$$\{[(a_{14}+c_{14})-(a_{15}+c_{15})]^2-\tfrac{1}{2}[a_{14}+c_{14})(c_{15}+c_{15})]\}x^2$$
$$-\{2(a_{14}+c_{14})^2[(a_{14}+c_{14})-(a_{15}+c_{15})]$$
$$+\tfrac{1}{2}[2(a_{15}+c_{15})(a_{14}+c_{14})^2]\}x$$
$$+(a_{14}+c_{14})^4-\tfrac{1}{2}(a_{15}+c_{15})(a_{14}+c_{14})^3=0,$$
$$x=b_{14}.$$
合問.

7. 有 a_1+c_1; $a_{15}+c_{15}$, 求 D.

(本法) 令
$$x=b_{15}$$
$$\frac{(a_1+c_1)x}{a_{15}+c_{15}}=b_1,$$
$$x+a_{15}+c_{15}=a_{11},$$

因 $b_1+a_{11}=c_1,$

$$\frac{(a_1+c_1)x}{a_{15}+c_{15}}+(x+\overline{a_{15}+c_{15}})=c_1,$$
$$(a_1+c_1)-\frac{a_1+c_1}{a_{15}+c_{15}}x-(x+\overline{a_{15}+c_{15}})=a_1,$$

因 $a_1-a_{11}=D,$

$$(a_1+c_1)-\frac{a_1+c_1}{a_{15}+c_{15}}x-2(x+\overline{a_{15}+c_{15}})=D,$$

或
$$\left(-\frac{a_1+c_1}{a_{15}+a_{15}}-2\right)x+S=D,$$

而 $$S=\{(a_1+c_1)-2(a_{15}+c_{15})\}=泛率$$

因	$b_1-D=b_{10}$,

$$\left(2\frac{a_1+c_1}{a_{15}+c_{15}}+2\right)x-S=b_{10}$$

因	$a_{11}\cdot a_{10}=2r^2$,

$$(x+\overline{a_{15}+c_{15}})\left\{\left(2\cdot\frac{a_1+c_1}{a_{15}+c_{15}}+2\right)x-S\right\}=2r^2 \cdots\cdots(A)\ 寄左.$$

又因	$\dfrac{D^2}{2}=2r^2$,

$$\frac{1}{2}\left\{S-\left(\frac{a_1+c_1}{a_{15}+c_{15}}+2\right)\right\}^2=2r^2,\cdots\cdots(B)$$

與左相消.

得: $$\frac{1}{2}\left(\frac{a_1+c_1}{a_{15}+c_{15}}\right)^2x^2-\left\{\frac{(a_1+c_1)^2}{a_{15}+c_{15}}+(a_1+c_1)\right\}^*x$$

$$+\left\{\frac{S^2}{2}+(a_{15}+c_{15})S\right\}=0,$$

$$S=\{(a_1+c_1)-2(a_{15}+c_{15})\}=泛率.$$

$x=b_{15}$. 合問.

---

* 原法從法僅載數字,於例不合,應改正之。

8. 有 a_1+c_1, $a_{14}+c_{14}$, 求 D.

(本法) 令 $$x=b_{14}.$$

$$\frac{(a_1+c_1)x}{a_{14}+c_{14}}=b_1,$$ 而 $a_{14}+c_{14}=b_7$. 內帶高股爲母.

$$x+a_{14}+c_{14}=c_1-a_1$$

$$=b_{10},$$

$$\{x+(a_{14}+c_{14})\}(a_{14}+c_{14})\cdot\frac{1}{a_{14}+c_{14}}=b_{10},$$

因 $$b_1-(c_1-a_1)=D,$$

故 $$\{[(a_1+c_1)-(a_{14}+c_{14})]x-(a_{14}+c_{14})^2\}\cdot\frac{1}{a_{14}+c_{14}}=D,$$

即 $$\{[(a_1+c_1)-(a_{14}+c_{14})]x-(a_{14}+c_{14})^2\}^2\cdot\frac{1}{(a_{14}+c_{14})^2=b_7^2}$$

$=D^2$,……(A) 內帶高股冪分母寄左.

又因 $$(a_1+c_1)-(c_1-a_1)=2a_1,$$

即 $$\{(a_1+c_1)(a_{14}+c_{14})-[x+(a_{14}+c_{14})](a_{14}+c_{14})\}$$

$$\frac{1}{a_{14}+c_{14}}=2a_1,$$

因 $$2a_1-2D=2(c_1-b_1)=2a_{11},$$

即　$$\{-[2(a_1+c_1)-(a_{14}+c_{14})]x+(a_{14}+c_{14})[(a_1+c_1)+(a_{14}+c_{14})]\}\cdot\frac{1}{a_{14}+c_{14}}$$

$$=2a_{11},$$

因　$$\boxed{2a_{11}\cdot b_{10}=D^2,}$$

即　$$\{-[2(a_1+c_1)-(a_{14}+c_{14})]x+(a_{14}+c_{14})[(a_1+c_1)+(a_{14}+c_{14}]\}$$

$$\{x+(a_{14}+c_{14})\}(a_{14}+c_{14})\cdot\frac{1}{(a_{14}+c_{14})^2=b_7{}^2}$$

$=D^2,\cdots\cdots(B)$ 爲同數,與左相消.

即　$$\{-(2a-\beta)x+\beta(a+\beta)\}(x+\beta)\beta$$

$$=(a-\beta)^2x^2-2\beta^2(a-\beta)x+\beta^4,$$

得:　$$-a^2x^2+a\beta^2x+a\beta^3=0$$

$$x=b_{14}.$$

而　$a_1+c_1=a=$前數.

$a_{14}+c_{14}=\beta=$後數.　　　合問.

---

9. 有 b_1+c_1, $b_{15}+c_{15}$, 求 D.

(本法) 識別得:　$b_{15}+c_{15}=a_8$.

令:　$$x=a_{15}.$$

$$b_1+c_1=\alpha=\text{前數},$$

$$b_{15}+c_{15}=\beta=\text{後數},$$

$$\frac{(b_1+c_1)a_{15}}{b_{15}+c_{15}}=\frac{\alpha x}{\beta}=a_1$$

$$a_{15}+b_{15}+c_{15}=x+\beta=a_1-D,$$

$$=c_1-b=a_{11},$$

因	$a_1-(a_1-D)=D,$

$$\frac{\alpha x}{\beta}-(x+\beta)=\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)x-\beta,$$

$$=D,$$

$$\left\{\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)x-\beta\right\}^2=D^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(A)\qquad \text{寄左.}$$

又因	$(b_1+c_1)-(a_{15}+b_{15}+c_{15})=2b_1,$

$$(b_1+c_1)-\{x+\overline{b_{15}+c_{15}}\}=2b_1,$$

又因 $$2b_1-2D=2(c_1-a_1)=2b_{10},$$

即 $$[\alpha-(x+\beta)]-2\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)x-\beta\right]=-\left(\frac{2\alpha}{\beta}-1\right)x+(\alpha+\beta),$$

$$=2b_{10},$$

又因 $$2a_{11}\cdot b_{10}=D^2,$$

$$(x+\beta)\left\{-\left(\frac{2\alpha}{\beta}-1\right)x+(\alpha+\beta)\right\}=D^2,\cdots\cdots\cdots(B)\ \text{與左相消.}$$

得: $-\{\overline{\gamma-1}^2+2\gamma-1\}x^2-\alpha x+\alpha\beta=0,$

$$x=a_{15}.$$

而 $$b_1+c_1=\alpha=\text{前數},$$

$$b_{15}+c_{15}=\beta=\text{後數},$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\gamma=\text{泛率},$$ 合問.

---

10. 有 b_1+c_1, $b_{14}+c_{14}$, 求 D.

(本法) 識別得: $(b_1+c_1)-(b_{14}+c_{14})=a_1+b_1+a_{14}$.

蓋因 $a_1+(b_1+c_1)-(b_{14}+c_{14})-a_1$ $=a_1+b_1+c_1-(a_1+b_{14}+c_{14})=a_1+b_1+a_{14},$

令: $$x=a_{14}.$$

$$b_1+c_1=\alpha=\text{前數},$$

$$b_{14}+c_{14}=\beta=\text{後數},$$

$$\frac{\alpha x}{\beta}=a_1,$$

$$\alpha-\beta-x=a_1+b_1,$$

$$\left\{(\alpha-\beta-x)\beta-\alpha x\right\}\cdot\frac{1}{\beta}=b_1,$$

因 $a_{14}+b_{14}+c_{14}=c_1-a_1=b_{10},$

$$(x+\beta)\beta\cdot\frac{1}{\beta}=c_1-a_1,$$

又因 $$b_1-(c_1-a_1)=b_1-b_{10}=D,$$

故 $$\tfrac{1}{2}\{(\alpha-\beta-x)\beta-\alpha x-(x+\beta)\beta\}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{D}{2}=r,$$

即 $$\{\tfrac{1}{2}[(\alpha-\beta)\beta-\beta^2]-\tfrac{1}{2}[\alpha+2\beta]x\}\frac{1}{\beta}=r,$$

或 $$\left\{S-\tfrac{1}{2}\,\alpha+2\beta)x\right\}^2\cdot\frac{1}{\beta^2}=r^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

而 $$S=\tfrac{1}{2}[(\alpha-\beta)\beta-\beta^2]=$$泛率.

又因 $$a_1-r=a_3,$$

$$a_3a_{14}=r^2,$$

故 $$[\alpha x+\tfrac{1}{2}(\alpha+2\beta)x-S]\frac{x}{\beta}=r^2,$$

故 $$\{(\alpha+t)x^2-Sx\}\beta\cdot\frac{1}{\beta^2}=r^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

為同數與左相消.

而 $$t=\tfrac{1}{2}(\alpha+2\beta)=$$次率

即 $$(S-tx)^2=(\alpha+t)\beta x^2-S\beta x.$$

得: $$\{t^2-(\alpha+t)\beta\}x^2-(2St-S\beta)x+S^2=0,$$

$$x=a_{14},$$

而 $$b_1+c_1=\alpha=\text{前數},$$

$$b_{14}+c_{14}=\beta=\text{後數},$$

$$\tfrac{1}{2}[(\alpha-\beta)\beta-\beta^2]=S=\text{泛率},$$

$$\tfrac{1}{2}(\alpha+2\beta)=t=\text{次率},$$ 合問.

---

11. 有 $b_{14}+c_{14}$, $a_{15}+c_{15}$, $\overline{b_{14}+a_{15}}-c_{13}$=傍差,求 D.

(本法) 識別:

因 $$\frac{(b_{14}+c_{14})-(r+c_{13})-(a_{15}+c_{15})-(r+c_{13})}{2}=b_{12}-a_{12},$$

故 $$\frac{(b_{14}+c_{14})-(a_{15}+c_{15})}{2}=b_{12}-a_{12},\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

同理 $$\frac{(b_{14}+c_{15}+r)+(c_{14}+a_{15}+r)-D}{2}=c_{12}-r,$$

即 $$\frac{(b_{14}+c_{14})+(a_{15}+c_{15})}{2}=c_{12}-r,\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

又因 $\overline{b_{14}+r}+\overline{a_{15}+r}-c_{13}=c_{12}$,參觀卷第七,12題識別.

故 $$\overline{b_{14}+a_{15}}-c_{13}=c_{12}-D,\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

由 (1), (3), 得:

$$(b_{14}+c_{14})+(a_{15}+c_{15})-2\{(b_{14}+a_{15})-c_{13}\}$$

$$=D.$$ 合問.

或因 $a_{12}b_{12}=rc_{12},$

由 $(2)^2-(1)^2$, 得:

$$(b_{14}+c_{14})(a_{15}+c_{15})=r^2. \qquad \text{合問.}$$

12. 有$\overline{b_8-a_8}+\overline{b_7-a_7}=$角差,$\overline{b_{14}+a_{15}}-c_{13}=$傍差 求$D$.

(本法) 令 $x=a_8,$

$$x+\{(b_8-a_8)+(b_7-a_7)\}=b_7,$$

或 $x+\alpha=b_7,$

而 $(b_8-a_8)+(b_7-a_7)=\alpha=$前數,

因 $a_8+b_7=c_{12},$

故 $2x+\alpha=c_{12},$

由前題(3)式, $\overline{b_{14}+a_{15}}-c_{13}=c_{12}-D,$

故 $$\frac{2x+\alpha-\beta}{2}=r,$$

而 $\overline{b_{14}+a_{15}}-c_{13}=\beta=$後數.

卽 $$\left(x+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=r^2, \cdots\cdots\cdots\cdots(A) \quad \text{寄左.}$$

又 $a_8b_7=r^2,$

卽 $$(x+\alpha)x=r^2, \cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得: $$\beta x-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=0$$

$$x=a_8.$$

而 $$(b_8-a_8)+(b_7-a_7)=\alpha=\text{前數},$$

$$\overline{b_{14}+a_{15}}-c_{13}=\beta=\text{後數}. \qquad \text{合同.}$$

---

13. 有 $b_7-a_8=\alpha=$ 角差, $(b_{14}-a_{14})+b_{15}-a_{15})=\beta=$ 次差, $c_{12}-D=\alpha=$ 傍差, 求 D.

(本法) 識別:

因	$b_7-a_8=(b_{14}+r-b_{15})-(a_{14}-r-a_{15}),$
卽	$b_7-a_8=(b_{14}+a_{14})-(b_{15}+a_{15}),$

故 $$\frac{(b_7-a_8)+\{(b_{14}-a_{14})+(a_{15}-a_{15})\}}{2}=b_{12}-a_{12}, \cdots\cdots(1)$$

$$\frac{(b_7-a_8)-\{(b_{14}-a_{14})+(b_{15}-a_{15})\}}{2}=b_{13}-a_{13}, \cdots\cdots(2)$$

$$(b_7-a_8)+(b_{12}-a_{12})=b_1-a_1 \cdots\cdots\cdots(3)$$

因	$c_{12}-D=(b_{14}-a_{14})-(b_{15}-a_{15}),$

$$(b_7-a_8)+(c_{12}-D)=2(b_7-a_7), \cdots\cdots(4)$$

$$(b_7-a_8)-(c_{12}-D)=2(b_8-a_8), \cdots\cdots(5)$$

由 (3)−(5), (3)−(4) 得:

$$(b_{12}-a_{12})+(c_{12}-D)=b_{10}-a_{10}, \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

$$(b_{12}-a_{12})-(c_{12}-D)=b_{11}-a_{11}, \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

令 $$x=a_{11},$$

因 $$b_1-a_1=b_{10}-a_{11},$$

故 $$x+b_1-a_1=x+\alpha+\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$=b_{10},$$

因 $$a_{11}\cdot b_{10}=\frac{D^2}{2},$$

即 $$x\left(x+\alpha+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=r^2, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$ 寄左.

因 $$b_{16}-(b_{10}-a_{10})=a_{10},$$

$$a_{11}+(b_{11}-a_{11})=b_{11},$$

$$\left(x+\alpha+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\frac{\alpha+\beta}{2}-\gamma=x+\alpha-\gamma=a_{10},$$

$$x+\frac{\alpha+\beta}{2}-\gamma=x+\frac{\alpha+\beta}{2}-\gamma=b_{11},$$

因 $$a_{10}\cdot b_{11}=\frac{D^2}{2}$$

即 $$(x+a-\gamma)\left(x+\frac{a+\beta}{2}-\gamma\right)=x^2, \quad\cdots\cdots\cdots(\beta)$$

爲同數,與左相消.

得: $$-2\gamma x+(a-\gamma)\left(\frac{a+\beta}{2}-\gamma\right)=0,$$

$$x=a_{11},$$

而 $$b_7-a_8=a=\text{角差}=\text{前數},$$

$$(b_{14}-a_{14})+(b_{15}-a_{15})=\beta=\text{次差}=\text{次數}$$

$$\frac{a+\beta}{2}=\text{平率},$$

$$c_{12}-D=\gamma=\text{傍差}=\text{旁率}.$$ 合問.

(又本法) 識別得: $c_{13}-(b_{13}-a_{13})=2b_{15}$.

令 $$x=a_8,$$

如前題(2)式

$$\frac{(b_7-a_8)-\{(b_{14}-a_{14})+(b_{15}-a_{15})\}}{2}=b_{13}-a_{13},$$

$$\frac{a-\beta}{2}=b_{13}-a_{13},$$

因 $$\overline{b_{13}-a_{13}}+b_{15}=a_{14},$$

令 $$\frac{\gamma}{2}+\frac{a-\beta}{2}=a_{14}=S=\text{泛率},$$

$$a_{14}+a_8=c_8$$

$$c_8{}^2-a_8{}^2=b_8{}^2=r^2,$$

$$(S+x)^2-x^2=r^2,$$

$$2Sx+S^2=r^2, \cdots\cdots\cdots\cdots(A) \quad 寄左.$$

因	$(b_7-a_8)+a_8=b_7,$
	$b_7:r=r:a_8,$

$$(a+x)x=r^2, \cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

$$-x^2-(a-2S)x+S^2=0,$$

$$x=a_8. \quad 合問.$$

(又本法)

如前　令	$x=a_8,$
又因	$b_7+b_{15}=c_7,$
	$c_7{}^2-b_7{}^2=a_7{}^2=r^2,$

則 $$\left(a+x+\frac{\gamma}{2}\right)^2-(a+x)^2=r^2, \cdots\cdots\cdots\cdots(A) \quad 寄左.$$

又 $$(a+x)x=r^2, \cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

$$-x^2-(a-\gamma)x+\left\{\left(a+\frac{\gamma}{2}\right)^2-a^2\right\}^*=0,$$

$$x=a_8.$$

* 此題實數館案本及李銳本并未合原法。

14. 有$(b_6-a_6)+(b_8-a_8)=\alpha=$角差，$(b_{14}-a_{14})+(b_1$

$-a_{15})=\beta=$次差，求D.

（本法） 識別：如前

$$\frac{\{(b_6-a_6)+(b_8-a_8)\}+\{(b_{14}-a_{14})+(b_{15}-a_{15})\}}{2}=b_{12}-a_{1}$$

令： $x=a_8$.

因 $(b_7-a_8)+a_8=b_7,$

$b_7+a_8=c_{12}.$

$$(\alpha+x+x)^2-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2=2a_{12}b_{12},$$

因 $\frac{2a_{12}b_{12}}{c_{12}}=D,$

故 $$(2x+\alpha)^2-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\Big\}^2\cdot\frac{1}{c^2_{12}}=D^2,\ \cdots\cdots\cdots(A)$$

內有極弦冪分母，寄左

又 $$4(x+\alpha)x(2x+\alpha)^2\cdot\frac{1}{c_{12}{}^2}=D^2,\ \cdots\cdots\cdots(B)$$

為同數，與左相消

得： $$\left|(4\alpha^2+\overline{4\alpha}^2-\left\{\overline{4\alpha}^2+8\left[\alpha^2-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right]\right\}\right|x^2$$

$$+\left|4\alpha\cdot\alpha^2-2x4\alpha\left[\alpha^2-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right]\right|^{*}x$$

$$-\left|\alpha^2-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right|^2=0,$$

$$x=a_8.$$ 合問.

15. 有 $a_{14}+b_{14}=\alpha$, $a_{15}+b_{15}=\beta$, 求 D.

(本法) 按原書本法,意旨含混.館案所謂:「其中有偶爾思省未至者」,此類是也.今爲讀者明瞭起見,爲說明其義.按測圓海鏡各個正三角形各邊幷爲正三角形 $8^2+15^2=17^2$ 之倍數.例如明勾股形 $\overline{9\times8}^2+\overline{9\times15}^2=\overline{9\times17}^2$, 爲9之倍數.重勾股形 $\overline{2\times8}^2+\overline{2\times15}^2=\overline{2\times17}^2$, 爲2之倍數,是也.復次測圓海鏡所舉正三角形,三邊幷爲整數,其和,較亦爲整數,如

	和, $a+b$,	較, $b-a$,
$3^2+4^2=5^2$,	7,	1,
$5^2+12^2=13^2$,	17,	7,
$7^2+24^2=25^2$,	31,	17,
$8^2+15^2=17^2$,	23,	7,

* 以上係原法;或可簡書如下式:

$$\{2(\alpha+\beta)^2-4\alpha^2\}x^2+\{2\alpha(\alpha+\beta)^2-4\alpha^3\}x-\{\alpha^2+\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\}^2=0,$$

$$9^2+40^2=41,\qquad 49,\qquad 31,$$

是也.

如已知 $a_{14}+b_{14}=2\times 49$, 今假定 稱爲擊和,

$a_{15}+b_{15}=5\times 49$, 又假定 稱爲明和,

則可求得 $\dfrac{a_{14}+b_{14}}{a_{15}+b_{15}}=\dfrac{2}{5}$, 而 $5-2=3$, 稱爲泛率,

又 $\overline{a_{15}+b_{15}}-\overline{a_{14}+b_{14}}=3\times 49$, 稱爲泛實,

$\dfrac{\overline{a_{15}+b_{15}}-\overline{a_{14}+b_{14}}}{3}=49$ 卽 $a+b$, 稱爲和率,

由表中可知 $b-a$, 稱爲差率,

由和率,差率各和較折半,可得: a, 稱爲勾率,

及 b, 稱爲股率,

而 2. 稱爲擊壘率,

又 5, 稱爲壘率,

$1\times 2,5$ 各乘 a,b 卽得假定之明,擊勾股數矣.

(又本法) 如 $\dfrac{a_{14}+b_{14}}{a_{15}+b_{15}}=\dfrac{\alpha}{\beta}=n.$

識別得: $c_{14}-b_{14}=\frac{1}{2}(a_{13}+b_{13}-c_{13})$,

$a_{15}-a_{15}=\frac{1}{2}(a_{13}+b_{13}-c_{13})$.

$\dfrac{c_{14}-a_{14}}{c_{14}-b_{14}}-n,$

$$\frac{c_{15}-a_{15}}{c_{15}-b_{15}}=n.$$

令 $$x=c_{15}-b_{15}, \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$nx=c_{15}-a_{15}, \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$=c_{14}-b_{14}, \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$=\tfrac{1}{2}(a_{13}+b_{13}-c_{13}),$$

$$n^2x=c_{14}-a_{14}, \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(1)+(2)+(3)+(4) 得:

$$(n^2+2n+1)x=(c_{14}-a_{14})+(c_{14}-b_{14})+(c_{15}-a_{15})$$
$$+(c_{15}-b_{15}), \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (a)$$

$$(a_{14}+b_{14})+(a_{15}+b_{15})=(a_{14}+b_{14})+(a_{15}+b_{15}), \cdots\cdots(b)$$

(b)−(a)得:

$$(a_{14}+b_{14})+(a_{15}+b_{15})-(n^2+2n+1)x=2\{(c_{13}-a_{13})+(c_{13}-b_{13})\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(c)$$

$$3\times 2=3(a_{13}+b_{13}-c_{13}), \cdots\cdots\cdots\cdots(d)$$

(c)+(d)得:

$$(a_{14}+b_{14})+(a_{15}+b_{15})-(n^2-4n+1)x=a_{13}+b_{13}+c_{13}$$
$$=D$$

$$\{\overline{\alpha+\beta}-(n^2-4n+1)x\}^2=D^2, \cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

又 $$(a_{15}+b_{15})+nx=(a_{15}+b_{15})+\tfrac{1}{2}(a_{13}+b_{13}-c_{13}),$$

或 $$nx+\beta=a_8,$$

$$(a_{14}+b_{14})+nx=(a_{14}+b_{14}+\tfrac{1}{2}c_{13}+b_{13}-c_{13})$$

或 $$nx+\alpha=b_6,$$

$$4(nx+\alpha)(nx+\beta)=D^2, \cdots\cdots(B)$$ 爲同數與左相消.

得 $$-\{4n^2-(n^2-4n+1)^2\}x^2-\{2(n^2-4n+1)(\alpha+\beta)$$
$$+4n(\alpha+\beta)\}x+\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}=0.$$

或 $$-\{4n^2-(n^2-4n+1)^2\}x^2-2(n-1)^2(\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)^2=0,$$

$$x=c_{15}-b_{15}.$$ 合問.

---

16. 有 $a_{14}+a_{15}=\alpha$, $b_{14}+b_{15}=\beta$, 求 D.

(本法) 識別得:

$$\frac{b_{14}+b_{15}}{a_{14}+a_{15}}=\frac{nb}{na},$$ 而 $n=$ 畾率.

$$\frac{a_{14}+a_{15}}{n}=a,$$ 而 $a=$ 勾率,

$$\frac{b_{14}+b_{15}}{n}=b,$$ $b=$ 股率.

如 $a+b=$ 和率, 則: $n(a+b)=\overline{a_{14}+b_{14}}+\overline{a_{15}+b_{15}},$

$b-a=$ 較率, $n(b-a)=\overline{b_{14}-a_{14}}+\overline{b_{15}-a_{15}},$

$c=$ 弦率, $nc=c_{14}+c_{15},$

$a+b-c=$ 黃率, $n(a+b-c)=\overline{a_{14}+b_{14}-c_{14}}+\overline{a_{15}+b_{15}-c_{15}},$

$c-a=$ 大差率, $n(c-a)=\overline{c_{14}-a_{14}}+\overline{c_{15}-a_{15}},$

$c-b=$ 小差率. $n(c-b)=\overline{c_{14}-b_{14}}+\overline{c_{15}-b_{15}}.$

令: $$x=\frac{1}{2}(a_{13}+b_{13}-c_{13}),$$

$$=c_{14}-b_{14},$$

$$=c_{15}-a_{15},$$

$$n(c-a)-x=\overline{c_{14}-a_{14}}+\overline{c_{15}-a_{15}}-(c_{15}-a_{15})=c_{14}-a_{14},$$

$$n(c-b)-x=\overline{c_{14}-b_{14}}+\overline{c_{15}-b_{15}}-(c_{14}-b_{14})=c_{15}-b_{15}.$$

$$\{n(c-a)-x\}\{n(c-b)-x\}=\{\tfrac{1}{2}(a_{13}+b_{13}-c_{13})\}^2,\cdots\cdots(A)$$寄左.

$$x^2=\{\tfrac{1}{2}(a_{13}+b_{13}-c_{13})\}^2,\cdots\cdots(B)$$

與寄左相消.

得: $$\{(c-a)+(c-b)\}x+n(c-a)(c-b)=0,$$

$$x=\tfrac{1}{2}(a_{13}+b_{13}-c_{13}).$$

既得 $x=\frac{1}{2}(a_{13}+b_{13}-c_{13})$,

則 $$2x+n(a+b-c)=a_{14}+b_{15},$$

$$=a_{12}+b_{12}-c_{12},$$

$$=c_{13},$$

$$nc-2x=b_{14}+a_{15},$$

$$(nc-2x)-\{2x+n(a+b-c)\}=(b_{14}-a_{14})-(b_{15})=$$旁差,

$$nc-\{(nc-2x)-[2x+n(a+b-c)]\}=(c_{14}-b_{14}+a_{14})$$
$$+(c_{15}+b_{15}-a_{15}),$$

或 $$4x+n(a+b-c)=a_{13}+b_{13},$$

$$6x+2n(a+b-c)=a_{13}+b_{13}+c_{13},$$

$$=D.$$ 合問.

(又本法)

如前令 $x=\frac{1}{2}(a_{13}+b_{13}-c_{13})$,

$$=c_{14}-b_{14},$$

$$=c_{15}-a_{15},$$

$$n(a+b)=\overline{a_{14}+b_{14}}+\overline{a_{15}+b_{15}}.$$

求得 x 後,以:

$$2x+n(a+b)=\overline{c_{14}+a_{14}}+\overline{c_{15}+b_{15}}=c_{12},\cdots\cdots(1)$$

$$(nc-2x)-\{2x+n(a+b-c)\}=\overline{b_{14}-a_{14}}-\overline{b_{15}-a_{15}}$$

$$=c_{12}-D=\text{旁差},\cdots\cdots(2)$$

(1)−(2)得:

$$6x+2n(a+b-c)=c-(c-D)$$

$$=D$$ 合問.

(又本法) 原書於此又本法僅言:

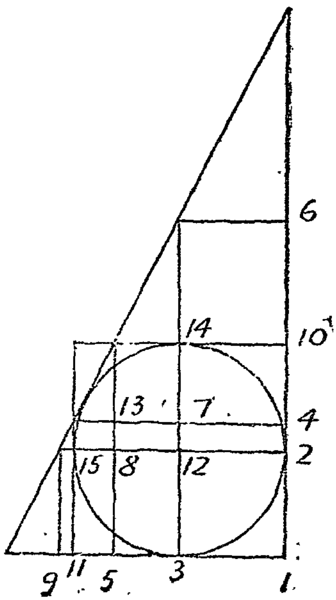
$(c-b)\times a$	$=a_{15}$,	及 $(c-a)\times a$	$=a_{14}$,
$(c-b)\times b$	$=b_{15}$,	$(c-a)\times b$	$=b_{14}$,
$(c-b)\times(b-a)$	$=b_{15}-a_{15}$,	$(c-a)\times(b-a)$	$=b_{14}-a_{14}$,
$(c-b)\times(a+b)$	$=a_{15}+b_{15}$,	$(c-a)\times(a+b)$	$=a_{14}+b_{14}$,
$(c-b)\times c$	$=c_{15}$	$(c-a)\times c$	$=c_{14}$,
$(c-b)\times(a+b-c)$		$(c-a)\times(a+b-c)$	
$=a_{15}+b_{15}\cdot c_{15}$,		$=a_{14}+b_{14}-c_{14}$.	

既得明 Δ_{14}, 轚 Δ_{15} 各數,餘皆可知.

按前本法所求得之勾率,股率,弦率卽原勾股形 $8^2+15^2=17^2$ 之勾股,弦.而轚 Δ_{15} 適爲原勾股形 $8^2+15^2=17^2$,中 $c-b=17-15=2$ 之倍數,又明 Δ_{14} 適爲原勾股形 $8^2+15^2=17^2$, 中 $c-a=17-8=9$ 之倍數,故前以小差率 $c-b=2$ 因之,卽轚段各數也.後以大差率 $c-a=9$ 因之,卽明段各數也.

測圓海鏡細草卷第九上

大斜四問



1. 有 $a_{12}+b_{12}+c_{12}$, $b_{12}-a_{12}$ 求 D.

(本法) 令 $$x=a_{12}.$$

$$x+(b_{12}-a_{12})=b_{12},$$

$$2x+(b_{12}-a_{12})=a_{12}+b_{12},$$

$$(a_{12}+b_{12}+c_{12})-(2x+b_{12}-a_{12})=c_{12},$$

$$\{(a_{12}+b_{12}+c_{12})-(2x+b_{12}-a_{12})\}^2=c_{12}^2,\cdots\cdots(A)\ \text{寄左.}$$

$$(b_{12}-a_{12})^2+2(x+\overline{b_{12}-a_{12}})x=c_{12}^2,\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得: $$2x^2-\{4(\overline{a_{12}+b_{12}+c_{12}}-\overline{b_{12}-a_{12}})+2(b_{12}-a_{12})\}x$$
$$+[\{(\overline{a_{12}+b_{12}+c_{12}}-\overline{b_{12}-a_{12}})\}^2-(b_{12}-a_{12})^2]=0,$$

$$x=a_{12},\qquad \frac{2a_{12}b_{12}}{c_{12}}=D.\ \text{合問.}$$

(又本法) 令 $$x=a_{12}+b_{12}-c_{12}$$
$$=c_{13},$$

$$x+(a_{12}+b_{12}+c_{12})=2(a_{12}+b_{12}),$$

$$(a_{12}+b_{12}+c_{12})-x=2c_{12},$$

$$2[\{x+(a_{12}+b_{12}+c_{12})\}^2-\{(a_{12}+b_{12}+c_{12})-x\}^2]$$
$$=16a_{12}\cdot b_{12},\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A)\ \text{寄左.}$$

$$x+(a_{12}+b_{12}+c_{12})+2(b_{12}-a_{12})=4b_{12},$$

$$x+(a_{12}+b_{12}+c_{12})-2(b_{12}-a_{12})=4a_{12},$$

$$\{x+(a_{12}+b_{12}+c_{12})+2(b_{12}-a_{12})\}\{x+(a_{12}+b_{12}+c_{12})$$
$$-2(b_{12}-a_{12})\}=16a_{12}b_{12},\cdots\cdots\cdots(A)$$

爲同數,與左相消.

得: $x^2-6(a_{12}+b_{12}+c_{12})x+\{(a_{12}+b_{12}+c_{12})^2-4(b_{12}-a_{12})^2\}^*=0.$

$x=a_{12}+b_{12}-c_{12}$, 餘各依法求之. 合問.

2. 有 c_1, b_1-a_1, 求 D.

(本法) 命 $x=a_1,$

$$x+b_1-a_1=b_1,$$

$$2x(x+b_1-a_1)=2a_1b_1,\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

$$(c_1+\overline{b_1-a_1})(c_1-\overline{b_1-a_1})=2a_1b_1.\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消

得: $$-2x^2-2(b_1-a_1)x+(c_1+\overline{b_1-a_1})(c_1-\overline{b_1-a_1})=0,$$

$x=a_1.$ 合問.

3. 有 c_1, $a_{10}+b_{11}$, 求 D.

(本法) 識別得: $a_{10}+b_{11}=D+c_{13},$

$$c_1+a_{10}+b_{11}=a_1+b_1+c_{13}.$$

命 $x=D,$

* 原法有誤,茲正之。

$$a_{10}+b_{11}-x=c_{13},$$

$$D-c_{13}=a_{13}+b_{13},$$

即 $$2x-\overline{a_{10}+b_{11}}=a_{13}+b_{13}.$$

$$c_1(2x-\overline{a_{10}+b_{11}})=c_1(a_{13}+b_{13}),\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

又 $$x+c_1=a_1+b_1,$$

$$(a_1+b_1)c_{13}=c_1(a_{13}+b_{13}),$$

即 $$(x+c_1)(a_{10}+b_{11}-x)=c_1(a_{13}+b_{13}),\cdots\cdots(B)$$

得同數與左相消.

得: $$-x^2-\{2c_1+c_1-(a_{10}+b_{11})\}x+2c_1(a_{10}+b_{11})=0,$$

$$x=D.$$ 合問.

---

4. 有 c_1, a_2+b_3, 求 D.

(本法) 識別得: $$a_2+b_3=D+\overline{a_{12}+b_{12}},$$

$$a_2+b_3=a_1+b_1-c_{12},$$

因	$c_1=a_1+b_1-D,$

$$(a_2+b_3)-c_1=D-c_{12}.$$

令 $$x=D.$$

$$a_2+b_3-x=a_{12}+b_{12},$$

$$c_1-(a_2+b_3)+x=c_{12}$$

$(a_2+b_3+x)^2-\{c_1-(a_2+b_3)+x\}^2=2a_{12}b_{12}$ ……(A) 寄左.

又 $$c_{12}D=2a_{12}b_{12},$$

卽 $$\{c_1-(a_2+b_3)+x\}x=2a_{12}b_{12},\ \text{……………}(B)$$

爲同數與左相消.

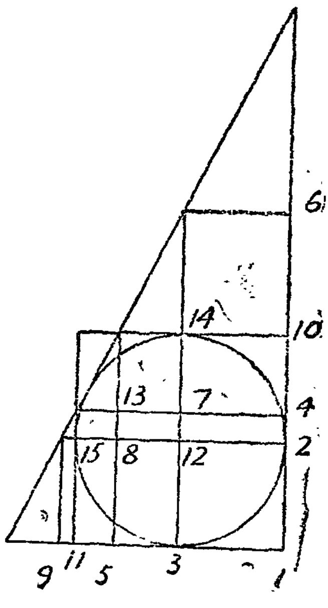
得: $$-x^2-\{2c_1+\overline{c_1-(a_2+b_3)}\}x$$

$$+\{(a_2+b_3)^2-\overline{c_1-(a_2+b_3)}^2\}=0,$$

$$x=D.$$ 合問

測圓海鏡細草卷第九下

大和(a_1+b_1)八問.



1. 有 a_1+b_1, a_2, b_3, 求 D.

(本法) 令 $x=D$.

$$a_2-0.5x=c_8=a_{12},$$

$$b_3-0.5x=c_7=b_{12},$$

$$a_2+b_3-x=\overline{c_7+c_{15}}+\overline{c_8-c_{15}},$$

$$=c_{12}+c_{13},$$

$$2(a_2+b_3-x)=2(c_7+c_8),$$

$$=c_1+c_{13},$$

$$(a_1+b_1)-2(a_2+b_3-x)=(a_1+b_1)-(c_1+c_{13}),$$

$$=a_{13}+b_{13},$$

$$x-[(a_1+b_1)-2(a_2+b_3-x)]=D-(a_{13}+b_{13}),$$

$$=c_{13},$$

$$(a_2+b_3-x)-\{x-[(a_1+b_1)-2(a_2+b_3-x)]\}=(c_{12}+c_{13})-c_{13},$$

$$=c_{12},$$

$\{(a_2+b_3)-[2(a_2+b_3)-(a_1+b_1)]\}^2=c_{12}^2,$…………$(A)$ 寄左.

又 $(a_2-0.5x)^2+(b_2-0.5x)^2=c_{12}^2,$…………………$(B)$ 爲同數, 與左相消.

得: $0.5x^2-(a_2+b_2)x+(a_2^2+b_2^2)$

$$-\{(a_2+b_3)-[2(a_2+b_3)-(a_1+b_1)]\}^2=0,$$

$$x=D.$$ 合問.

2. 有 c_1+b_1, $c_{13}+(b_{13}-a_{13})$, $c_{13}-(b_{13}-a_{13})$, 求 D.

(本法) 識別得:
$$c_{13}+(b_{13}-a_{13})=2a_{14},$$
$$c_{13}-(b_{13}-a_{13})=2b_{15}.$$

令
$$x=a_{13}.$$

$$x+\frac{c_{13}+b_{13}-a_{13}}{2}=r,$$

$$2x+c_{13}+b_{13}-a_{13}=D,$$
$$=a_{13}+b_{13}+c_{13},$$

$$\frac{\{c_{13}+(b_{13}-a_{13})\}+\{c_{13}-(b_{13}-a_{13})\}}{2}=c_{13},$$

$$\frac{\{c_{13}+(b_{13}-a_{13})\}-\{c_{13}-(b_{13}-a_{13})\}}{2}=b_{13}-a_{13},$$

$$x+\frac{\{c_{13}+(b_{13}-a_{13})\}-\{c_{13}-(b_{13}-a_{13})\}}{2}=b_{13},$$

$$2x+\frac{\{c_{13}+(b_{13}-a_{13})\}-\{c_{13}-(b_{13}-a_{13})\}}{2}=a_{13}+b_{13},$$

因
$$(a_{13}+b_{13}+c_{13})-(a_1+b_1)=c_1,$$

即
$$2x+c_{13}+\overline{b_{13}-a_{13}}-(a_1+b_1)=c_1,$$

$$\left\{2x+c_{13}+\overline{b_{13}-a_{13}}-(a_1+b_1)\right\}$$
$$\times\left\{2x+\frac{[c_{13}+(b_{13}-a_{13})]-[c_{13}-(b_{13}-a_{13})]}{2}\right\}$$
$$=c_1(a_{13}+b_{13})\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

又 $(a_1+b_1)\left\{\frac{[c_{13}+(b_{13}-a_{13})]+[c_{13}-(b_{13}-a_{13})]}{2}\right\}$

$=c_{13}(a_1+b_1),\cdots\cdots\cdots(B)$ 爲同數與左相消.

得: $-4x^2+\left|2\{(a_1+b_1)-[c_{13}+(b_{13}-a_{13})]\}-2(b_{13}-a_{13})\right|x$

$+\left|(a_1+b_1)\left\{\frac{[c_{13}+(b_{13}-a_{13})]+[c_{13}-(b_{13}-a_{13})]}{2}\right\}\right.$

$-\{[c_{13}+(b_{13}-a_{13})]-(a_1+b_1)\}(b_{13}-a_{13})=0,$

$$x=a_{13},$$

而 $2(a_{13}+a_{14})=D.$ 合問.

3. 有 $a_1+b_1, a_{11}+b_{11}$ $a_{10}+b_{10}$, 求 D.

(本法) 識別得: $b_1-(a_{10}+b_{10})=a_{13},\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$a_1-(a_{11}+b_{11})=b_{13},\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$(a_{10}+b_{10})+(a_{11}+b_{11})=c_1+c_{13},\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

$(a_{10}+b_{10})-(a_{11}+b_{11})=(b_1-a_1)+(b_{13}-a_{13}),\cdots(4)$

$\frac{(a_{10}+b_{10})+(a_{11}+b_{11})}{2}=c_{12}+c_{13},$

$=a_{12}+b_{12}.$

令 $x=c_{13}.$

由(1),(2)得:

$(a_1+b_1)-\{(a_{10}+b_{10})+(a_{11}+b_{11})\}=a_{13}+b_{13},$

由(3)得:

$$(a_{10}+b_{10})+(a_{11}+b_{11})-x=c_1,$$

則
$$\{(a_{10}+b_{10})+(a_{11}+b_{11})-x\}\{(a_1+b_1)-(a_{10}+b_{10})-(a_{11}+b_{11})\}=c_1(a_{13}+b_{13})\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

又　$x(a_1+b_1)=c_{13}(a_1+b_1)\cdots\cdots(B)$ 爲同數,與左相消.

得:
$$-\{(a_1+b_1)-[(a_{10}+b_{10})+(a_{11}+b_{11})]+(a_1+b_1)\}x+\{(a_{10}+b_{10})+(a_{11}+b_{11})\}\{(a_1+b_1)-[(a_{10}+b_{10})+(a_{11}+b_{11})]=0,$$

$$x=c_{13},$$

$$x+a_{13}+b_{13}=D.$$ 合問.

(又本法) 令　$x=b_{13}-a_{13},$

由前(1),(2)得:

$$(a_1+b_1)-\{(a_{10}+b_{10})+(a_{11}+b_{11})\}=a_{13}+b_{13},$$

由(4)得:

$$(a_{10}+b_{10})-(a_{11}+b_{11})-x=b_1-a_1,$$

則
$$\{(a_1+b_1)-[(a_{10}+b_{10})+(a_{11}+b_{11})]\}\{(a_{10}+b_{10})-(a_{11}+b_{11})-x\}=(a_{13}+b_{13})(b_1-a_1),(A)$$

又　$x(a_1+b_1)=(b_{13}-a_{13})(a_1+b_1)$,$(B)$ 爲同數,與左相消.

得: $-\{(a_1+b_1)-[(a_{10}+b_{10})+(a_{11}+b_{11})]+(a_1+b_1)\}x$

$$+\{(a_1+b_1)-[(a_{10}+b_{10})+(a_{11}+b_{11})]\}\{(a_{10}+b_{10})-(a_{11}+b_{11})\}$$

$$=0,$$

$$x=b_{13}-a_{13},$$

因

$$\frac{a_{13}+b_{13}+x}{2}=b_{13},$$

$$\frac{a_{13}+b_{13}-x}{2}=c_{13},$$

$$c_{13}=\sqrt{a_{13}^2+b_{13}^2},$$

$$a_{13}+b_{13}+c_{13}=D.$$ 合問.

4.　有 $a_1+b_1=\alpha$, $c_{10}-a_{10}=\beta$, $c_{11}-b_{11}=\gamma$, 求 D.

(本法) 識別得: $c_{11}-b_{11}+2b_{11}=c_{11}+b_{11}=a_1$,

$$c_{10}-a_{10}+2a_{10}=c_{10}+a_{10}=b_1.$$

令

$$x=b_{11},$$

$$x+c_{11}-b_{11}=c_{11},$$

$$x+c_{11}=2x+c_{11}-b_{11}=a_1,$$

$$(a_1+b_1)-(2x+c_{11}-b_{11})=b_1,$$

$$\frac{\{(a_1+b_1)-(2x+c_{11}-b_{11})\}-(c_{10}-a_{10})}{2}=a_{10},$$

$$c_{10}-a_{10}+\frac{\{(a_1+b_1)-(2x+c_{11}-b_{11})\}-(c_{10}-a_{10})}{2}$$

$$=c_{10},$$

因 $$\frac{b_1c_{11}}{b_{11}}=c_1,$$

故 $$\{a_1+b_1-(2x+c_{11}-b_{11})\}\{x+c_{11}-b_{11}\}x^{-1}$$

$$=c_1,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$ 泛寄.

又因 $$\frac{a_1c_{10}}{a_{10}}=c_1.$$ 內寄大差句.

故 $$(2x+c_{11}-b_{11})\left\{c_{10}-a_{10}+\frac{[(a_1+b_1)-(2x+c_{11}-b_{11})]-(c_{10}-a_{10})}{2}\right\}\frac{1}{a_{10}}$$

$$=c_1,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$ 寄左.

以大差句,a_{10},乘泛寄,為同數;與左相消,得:

$$4x^3-\left\{(\alpha-\beta-\gamma)-(3\gamma-\alpha)+\left[2\left(\beta+\frac{\alpha-\beta-\gamma}{2}\right)\right]-\gamma\right\}x^2$$

$$+\left\{(\alpha-3\gamma)\frac{\alpha-\beta-\gamma}{2}-(\alpha-\gamma)\gamma-\left[\beta+\frac{\alpha-\beta-\gamma}{2}\right]\gamma\right\}x$$

$$+(\alpha-\gamma)\gamma\cdot\frac{\alpha-\beta-\gamma}{2}=0,$$

$$x=b_{11}.$$ 合問.

5．有 a_1+b_1, c_6+c_8. c_6-c_8, 求 D.

(本法) 識別得:
$$b_1-c_6=b_2-b_{14},$$
$$a_1-c_8=a_2-a_{14},$$
$$c_6+c_8=c_1-c_{12},$$
$$=a_{12}+b_{12},$$
$$c_6-c_8=b_{12}-a_{12}.$$
$$\overline{c_6+c_8}+\overline{c_6-c_8}=c_4,$$
$$\overline{c_6+c_8}-\overline{c_6-c_8}=c_5,$$
$$\overline{a_1+b_1}-\overline{c_6+c_8}=c_{12}+D.$$

令
$$x=D.$$
$$\overline{a_1+b_1}-\overline{c_6+c_8}-x=c_{12},$$
$$\frac{\overline{c_6+c_8}^2-\overline{c_6-c_8}^2}{2}=2a_{12}b_{12},\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

$$(\overline{a_1+b_1}-\overline{c_6+c_8}-x)x=2a_{12}b_{12},\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數,與左相消.

得:
$$x^2-(\overline{a_1+b_1}-\overline{c_6+c_8})x+\frac{\overline{c_6+c_8}^2-\overline{c_6-c_8}^2}{2}=0,$$
$$x=D.$$ 合問.

6．有 a_1+b_1, c_{10}, c_{11}, 求 D.

(本法) 識別得: $a_1+b_1-c_{10}=a_1+a_{10}$,

$$a_1+b_1-c_{11}=b_1+b_{11},$$

$$c_{10}+c_{11}=c_1-c_{13},$$

$$\overline{a_1+b_1}-\overline{c_{10}+c_{11}}=a_{10}+b_{11},$$

$$=D+c_{13}.$$

令 $$x=D.$$

$$\overline{a_1+b_1}-\overline{c_{10}+c_{11}}-x=c_{13},$$

因	$a_{13}+b_{13}+c_{13}=D,$

故 $$x-\{\overline{a_1+b_1}-\overline{c_{10}+c_{11}}-x\}=a_{13}+b_{13},$$

又因	$a_1+b_1-c_1=D,$

故 $$a_1+b_1-x=c_1$$

$$(a_1+b_1-x)\{2x-[(a_1+b_1)-(c_{10}+c_{11})]\}$$

$$=c_1(a_{13}+b_{13})\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

$$(\overline{a_1+b_1}-\overline{c_{10}+c_{11}}-x)(a_1+b_1)=c_{13}(a_1+b_1),\cdots\cdots(B)$$

與左相消.

得 $$-2x^2+\{3(a_1+b_1)+(a_1+b_1)-(c_{10}+c_{11})\}x$$

$$-2(a_1+b_1)\{(a_1+b_1)-(c_{10}+c_{11})\}=0,$$

$$x=D.$$ 合問.

7. 有 a_1+b_1, c_4, c_5, 求 D.

(本法) 識别得:

$$c_4=c_{10}+c_{13}$$

$$=b_2+b_{15},$$

$$c_5=c_{11}+c_{13},$$

$$=a_3+a_{14},$$

$$b_1-c_4=b_{13},$$

$$a_1-c_5=a_{13},$$

故

$$(a_1+b_1)-(c_4+c_5)=a_{13}+b_{13},$$

$$D-(a_{13}+b_{13})=c_{13},$$

$$c_4+c_5=c_1+c_{13}.$$

令

$$x=c_{13}.$$

$$(c_4+c_5)-x=c_1,$$

$$(a_4+c_5-x)\{(a_1+b_1)-(c_4+c_5)\}=c_1(a_{13}+b_{13}),\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

$$(a_1+b_1)x=c_{13}(a_1+b_1),\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲同數與左相消.

得

$$-\{(a_1+b_1)-(c_4+c_5)+(a_1+b_1)\}x+(c_4+c_5)$$

$$\cdot\{(a_1+b_1)-(c_4+c_5)\}=0.$$

$$x=c_{13}.$$ 合問.

8. 有 a_1+b_1, c_2, c_3, 求 D.

(本法) 識別得: $b_1-c_2=r-a_8$,

$$=c_8-(a-D),$$

$$c_3-a_1=b_7-r,$$

$$=(b_1-D)-c_7,$$

$$c_2+c_3=c_1+c_{12},$$

$$c_2-c_3=b_{12}-a_{12},$$

$$(c_2+c_3)-(a_1+b_1)=c_{12}-D.$$

令 $$x=c_{12}.$$

$$x^2-(c_2-c_3)^2=2a_{12}b_{12}.\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

$$x-\{(c_2+c_3)-(a_1+b_1)\}=a_1+b_1-c_1,$$

$$=D.$$

$$x\{x-[(c_2+c_3)-(a_1+b_1)]\}=2a_{12}b_{12},\cdots\cdots(B)$$ 與左相消.

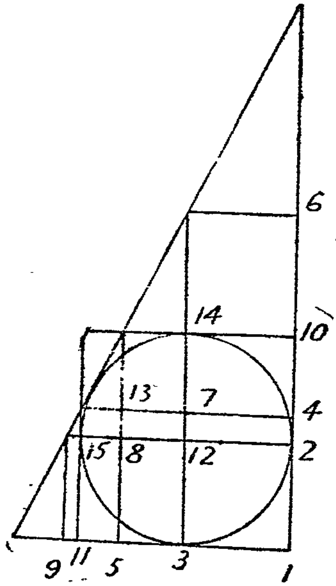
得 $$[(c_2+c_3)-(a_1+b_1)]x-(c_2-c_3)^2=0$$

$$x=c_{12},$$

$$c_{12}-[(c_2+c_3)-(a_1+b_1)]=D.$$ 合問.

測圓海鏡細草卷第十

三事和$(a_1+b_1+c_1)$八問



1. 有 $a_1+b_1+c_1$, c_1-b_1, 求 D

(本法) 令
$$x=b_1-a_1.$$

$$x+2(c_1-b_1)=(c_1-b_1)+(c_1-a_1),$$

$$x+2(c_1-b_1)+(a_1+b_1+c_1)=3c_1,$$

$$2(a_1+b_1+c_1)-\{x+2(c_1-b_1)\}=3(a_1+b_1),$$

$$(a_1+b_1+c_1)-2x-4(c_1-b_1)=3(a_1+b_1)-3c_1,$$

$$=3(a_1+b_1-c_1),$$

$$\{(a_1+b_1+c_1)-4(c_1-b_1)-2x\}^2=9(a_1+b_1-c_1)^2, \cdots (A)$$ 寄左.

$$x+(c_1-b_1)=c_1-a_1.$$

$$(c_1-b_1)\{x+(c_1-b_1)\}=(c_1-b_1)(c_1-a_1),$$

$$=\tfrac{1}{2}(a_1+b_1-c_1)^2,$$

$$18(c_1-b_1)\{x+(c_1-b_1)\}=9(a_1+b_1-c_1)^2,\cdots\cdots(B)$$

與左相消.

得 $$4x^2-\{[4(a_1+b_1+c_1)-16(c_1-b_1)]+18(c_1-b_1)\}x$$

$$+[(a_1+b_1+c_1)-4(c_1-b_1)]^2-18(c_1-b_1)^2=0,$$

$$x=b_1-a_1.$$ 合問.

2. 有 $a_1+b_1+c_1$, c_1-a_1, 求 D.

(本法) 令: $$x=b_1-a_1.$$

$$2(c_1-a_1)-x=(c_1-b_1)+(c_1-a_1),$$

$$2(c_1-a_1)+(a_1+b_1+c_1)-x=3c_1,$$

$$2(a_1+b_1+c_1)-\{2(c_1-a_1)-x\}=3(a_1+b_1),$$

$$(a_1+b_1+c_1)-4(c_1-a_1)+2x=3(a_1+b_1)-3c_1,$$

$$=3(a_1+b_1-c_1).$$

$$\{(a_1+b_1+c_1)-4(c_1-a_1)+2x\}=9(a_1+b_1+c_1)^2,\cdots\cdots(A)$$ 寄左

$$(c_1-a_1)-x=c_1-b_1,$$

$$2(c_1-a_1)\{(c_1-a_1)-x\}=(a_1+b_1-c_1)^2,$$

$$18(c_1-a_1)\{(c_1-a_1)-x\}=9(a_1+b_1-c_1)^2,\cdots\cdots(B)$$

與左相消.

得: $-4x^2-\{18(c_1-a_1)+4s\}x+\{18(c_1-a_1)^2-S^2\}=0,$

$$x=b_1-a_1.$$

$$2(a_1+b_1+c_1)-2(c_1-a_1)=\beta=\text{後數},$$

$$2(c_1-a_1)+(a_1+b_1+c_1)=\alpha=\text{前數},$$

$$\alpha-\beta=S=\text{泛率}. \qquad \text{合問.}$$

---

3. 有 $a_1+b_1+c_1$, b_1-a_1, 求 D.

(本法) 令 $x=c_1$.

$$(a_1+b_1+c_1)-x=a_1+b_1$$

$$(a_1+b_1+c_1)-x-(b_1-a_1)=2a_1,$$

$$\{(a_1+b_1+c_1)-x-(b_1-a_1)\}^2=4a_1^2,$$

$$\{(a_1+b_1+c_1)-x+(b_1-a_1)\}^2=4b_1^2.$$

$$\{(a_1+b_1+c_1)-x-(b_1-a_1)\}^2+\{(a_1+b_1+c_1)-x+(b_1-a_1)\}^2$$
$$=4c_1^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(A) \qquad \text{寄左.}$$

$$4x^2=4c_1^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(B) \qquad \text{與左相消.}$$

得: $-2x^2-4(a_1+b_1+c_1)x+\{(a_1+b_1+c_1)-(b_1-a_1)\}^2$
$+\{(a_1+b_1+c_1)+(b_1-a_1)\}^2=0.$

$$x=c_1. \qquad \text{合問.}$$

---

4. 有 $a_1+b_1+c_1$, $(c_1-a_1)+(c_1-b_1)$, 求 D.

(本法)$\frac{1}{3}\{(a_1+b_1+c_1)+(c_1-a_1)+(c_1-b_1)\}=c_1,$

$$a_1+b_1+c_1-c_1=a_1+b_1,$$

$$a_1+b_1-c_1=D.$$ 合問.

---

5. 有 $a_1+b_1+c_1=\alpha, \overline{c_1-b_1}+\overline{c_1-a_1}+\overline{b_1-a_1}=\beta$, 求 D.

(本法) 識別得: $\overline{c_1-b_1}+\overline{c_1-a_1}+\overline{b_1-a_1}=2(c_1-a_1),$

令 $$x=c_1-b_1.$$

$$x+\tfrac{1}{2}\{(c_1-b_1)+(c_1-a_1)+(b_1-a_1)\}+(a_1+b_1+c_1)=3c_1.$$

$$\{x+\tfrac{1}{2}[(c_1-b_1)+(c_1-a_1)+(b_1-a_1)]+(a_1+b_1+c_1)\}^2$$

$$=9(b_1-a_1)^2+18a_1b_1,\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄起.

$$(a_1+b_1+c_1)^2+\{(c_1-b_1)+(c_1-a_1)+(b_1-a_1)\}x$$

$$=4(b_1-a_1)^2+12a_1b_1,$$

$$1.5(a_1+b_1+c_1)^2+1.5\{(c_1-b_1)+(c_1-a_1)+(b_1-a_1)\}x$$

$$=6(b_1-a_1)^2+18a_1b_1,\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

$(A)-(B)$得:

$$(x+\alpha+0.5\beta)^2-1.5\alpha^2-1.5\beta x=3(b_1-a_1)^2,\cdots(C)$$ 寄左.

又因 $$0.5\beta-x=b_1-a_1,$$

$$3(0.5\beta-x)^2=3(b_1-a_1)^2\cdots(D)$$

與左相消,

得: $2x-(2\alpha+2.5\beta)x+\{3(0.5\beta)^2-[(\alpha+0.5\beta)^2-1.5\alpha^2]\}$*

$$=0,$$

$$x=c_1-b_1.$$ 合問.

---

6. 有 $a_1+b_1+c_1=\alpha$, $(a_{14}+b_{14}-c_{14})+(a_{15}+b_{15}-c_{15})=\beta$, 求 D.

(本法) 識別: $(a_{14}+b_{14}-c_{14})+(a_{15}+b_{15}-c_{15})$

$$=(c_{13}-a_{13})+(c_{13}-b_{13}).$$

令 $$x=a_{13}+b_{13}-c_{13}.$$

$$2(a_{14}+b_{14}-c_{14})+2(a_{15}+b_{15}-c_{15})+3x$$

$$=a_{13}+b_{13}+c_{13},$$

$$=D,$$

$$(a_1+b_1+c_1)+\{2(a_{14}+b_{14}-c_{14})+2(a_{15}+b_{15}-c_{15})\}+3x$$

$$=2(a_1+b_1),$$

$$(a_1+b_1+c_1)-\{2(a_{14}+b_{14}-c_{14})+2(a_{15}+b_{15}-c_{15})\}-3x$$

$$=2c_1,$$

$$\{2(a_{14}+b_{14}-c_{14})+2(a_{15}+b_{15}-c_{15})\}+3x+x$$

$$=2(a_{13}+b_{13}),$$

$$\{2(a_{14}+b_{14}-c_{14})+2(a_{15}+b_{15}-c_{15})\}+3x-x$$

---

* 原法於數偶合,玆正之,

$$=2c_{13},$$

因 $\quad 2(a_1+b_1)2c_{13}=2(a_{13}+b_{13})\cdot 2c_1.$

$(\alpha+2\beta+3x)(2\beta+2x)=2(a_1+b_1)2c_{13}\cdots\cdots(A)$ 寄左.

$(2\beta+4x)(\alpha-2\beta-3x)=2(a_{13}+b_{13})2c_1,\cdots(B)$ 與左相消.

得 $\quad -18x^2+\{[(\alpha-2\beta)4-6\beta]-[(\alpha+2\beta)2+6\beta]\}x$

$$-\{[(\alpha+2\beta)2\beta]-[(\alpha-2\beta)2\beta]\}=0,$$

或 $\quad -18x^2+(2\alpha-24\beta)x-8\beta^2=0,$

$$x=a_{13}+b_{13}-c_{13}.$$ 合問.

---

7. 有 $a_1+b_1+c_1$, c_{12} 求 D.

(本法) 令 $\quad x=c_1.$

$$x-c_{12}=a_{12}+b_{12},$$

$$c_{12}{}^2-(x-c_{12})^2=2a_{12}b_{12},$$

因 $\quad \dfrac{2a_{12}b_{12}}{c_{12}}=D,$

$\{c_{12}{}^2-(x-c_{12})^2\}\dfrac{1}{c_{12}}=D,\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$ 寄左.

又因 $\quad (a_1+b_1+c_1)-2c_1=a_1+b_1-c_1,$

$$=D,$$

$$\{(a_1+b_1+c_1)-2x\}=D,\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$ 與左相消.

得: $$-x^2+c_{12}(a_1+b_1+c_1)=0,$$

$$x=c_1.$$ 合問.

---

8. 有 $a_1+b_1+c_1$, c_{13}, 求 D.

(本法) 識別得. $$\frac{c_1-c_{13}}{2}=c_{12},$$

$$\frac{c_1+c_{13}}{2}=a_{12}+b_{12},$$

令 $$x=\frac{c_1}{2},$$

$$\left(\frac{2x+c_{13}}{2}\right)^2-\left(\frac{2x-c_{13}}{2}\right)^2=2a_{12}b_{12},$$

$$\left\{\left(\frac{2x+c_{13}}{2}\right)^2-\left(\frac{2x-c_{13}}{2}\right)^2\right\}\frac{1}{c_{12}}=D,\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

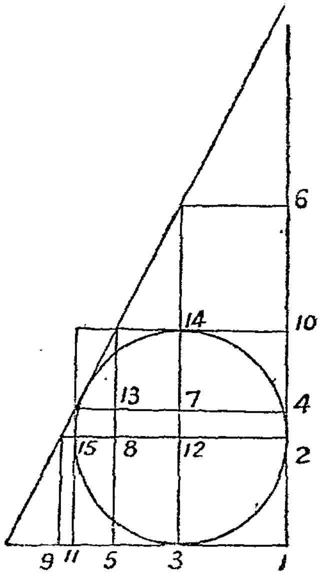
$$\{(a_1+b_1+c_1)-4x\}=D,\cdots\cdots\cdots(B)$$ 與左相消.

得 $$-4x^2+(a_1+b_1+c_1)x-\frac{c_{13}}{2}(a_1+b_1+c_1)=0,$$

$$x=\frac{c_1}{2}.$$ 合問.

測圓海鏡細草卷第十一

雜糅一十八問



1. 有 c_2 c_3, 求 D.

(本法) 識別得: $$c_2=c_6+c_{12},$$

$$c_3=c_{12}+c_9,$$

$$c_2+c_3=c_1+c_{12},$$

$$c_2-c_3=b_{12}-a_{12}=c_6-c_9,$$

$$c_1-2c_{12}=c_{13},$$

$$2c_{12}-c_2=c_{15}.$$

$$2c_{12}-c_3=c_{14},$$

$$c_{12}+(b_{12}-a_{12})=c_{10},$$

$$c_{12}-(b_{12}-a_{12})=c_{11},$$

令　　$$x=c_8.$$

$$x+c_2-c_3=c_6.$$

$$\{x+(c_2-c_3)\}^2+x^2=c_{12}^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(\cdots A)$$ 寄左.

$$\overline{c_3-x}^{\,2}=c_{12}^2;\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$ 與左相消.

得:　　$$-x^2-\{2(c_2-c_3)+2c_3\}x+c_3{}^2-(c_2-c_3)^2=0,$$

$$x=c_8.$$ 合問.

2. 有 c_4, c_5, 求 D.

(本法) 識別得:　　$$c_4=2c_6,$$

$$c_5=2c_8,$$

$$c_4+c_5=c_1+c_{13}=2(c_6+c_8),$$

$$c_4-c_5=2(b_{12}-a_{12})=2(c_6-c_8),$$

$$\frac{c_4+c_5}{2}=a_{12}+b_{12}.$$

令　　$$x=c_{13}.$$

$$\frac{c_4+c_5}{2}-x=c_{12},$$

$$\left(\frac{c_4+c_5}{2}-x\right)^2=c_{12}^2,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

$$\left(\frac{c_4}{2}\right)^2+\left(\frac{c_5}{2}\right)^2=c_{12}{}^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$ 與左相消.

得: $$x^2-(c_4+c_5)x+\left\{\left(\frac{c_4+c_5}{2}\right)^2-\left(\frac{c_4}{2}\right)^2-\left(\frac{c_5}{2}\right)^2\right\}=0,$$

$$x=c_{13}.$$ 合問.

3. 有 b_{11}, c_4, 求 D.

(本法) $$b_{11}-r=\frac{c_4-b_4}{2}$$

令 $$x=r.$$

$$2(b_{11}-x)=c_4-b_4,$$

$$c_4-2(b_{11}-x)=b_4,$$

$$\{c_4-2(b_{11}-x)\}^2+(2x)^2=c_4{}^2\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

$$c_4{}^2=c_4{}^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$ 與左相消.

得: $$8x^2+4(c_4-2b_{11})x-\{c_4{}^2-(c_4-2b_{11})^2\}=0,$$

$$x=r.$$ 合問.

4. 有 a_{10} c_5, 求 D.

(本法) 識別得: $$a_{10}-r=\frac{c_5-a_5}{2}.$$

令 $$x=r.$$

$$2(a_{10}-x)=c_5-a_5,$$

$$c_5-2(a_{10}-x)=a_5,$$

$$\{c_5-2(a_{10}-x)\}^2+(2x)^2=c_5^2, \cdots\cdots\cdots\cdots(A) \quad \text{寄左.}$$

$$c_5^2=c_5^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(B)\text{與左相消.}$$

得: $$8x^2+4(c_5-2a_{10})x-\{c_5^2-(c_5-2a_{10})^2\}=0,$$

$$x=r. \quad \text{合問.}$$

5. 有 a_{10} b_{11}, 求 D.

(本法) 識別得: $$a_{10}\cdot b_{11}=a_{11}\cdot b_{10}.$$

令 $$x=D.$$

因 $$a_{11}\cdot b_{10}=\frac{D^2}{2},$$

故 $$2a_{10}\cdot b_{11}=D^2, \cdots\cdots\cdots\cdots(A) \quad \text{寄左.}$$

入 $$x^2=D^2, \cdots\cdots\cdots\cdots(B)\text{與左相消.}$$

得: $$-x^2+2a_{10}b_{11}=0,$$

$$x=D. \quad \text{合問.}$$

(又本法) 識別得: $$D-a_{10}=a_{13},$$

$$D-b_{11}=b_{13},$$

$$a_{10}+b_{11}=D+c_{13},$$

$$a_{10}-b_{11}=b_{13}-a_{13}.$$

以下原誤,今不錄.

6．有 b_6, a_8 求 D.

(本法) 識別得:　$b_6+a_8=c_{12}$,

$$\boxed{b_6-a_8=\{b_1-b_{12}-r\}-\{a_1-a_{12}-r\},}$$

$$b_6-a_8=b_1-a_1)-(b_{12}-a_{12},^{*}$$

因　$b_6a_8=r^2$,

$$r=\sqrt{b_6\cdot a_8}.$$　合問.

(又本法) 令　$x=r$,

則　$x+b_6=b$,

$x+a_8=a$,

按[弦上容圓法],

$$(x+b_6)(x+a_8)\cdot\frac{1}{x}=a+b,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

$$(x+b_6)+(x+a_8)=a+b,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$ 與左相消.

得　$-x^2+a_8b_6=0$,

$$x=r.$$　合問.

7．有 b_4, a_5, 求 D.

(本法) 令　$x=D$.

* 按此處識別所舉 與題無關，可省去.

$b_4 =$(全徑上)股方差,

$a_5 =$(全徑上)句方差,

$a_5 b_4 = D^2, \cdots\cdots\cdots\cdots (A)$ 寄左.

$x^2 = D^2, \cdots\cdots\cdots\cdots (B)$ 與左相消.

得 $-x^2 + a_5 b_4 = 0,$

$x = D.$ 合問.

8. 有 $b_{10} - a_{10}$, $b_{11} - a_{11}$, 求 D.

(本法) 因

$$\boxed{\begin{aligned} c_{10} - (b_{10} - a_{10}) &= D, \\ c_{11} + (b_{11} - a_{11}) &= D, \end{aligned}}$$

識別得 $(b_{10} - a_{10}) + (b_{11} - a_{11}) = c_{10} - c_{11},$

$$\frac{(b_{10} - a_{10}) - (b_{11} - a_{11})}{2} = c_{12} - D,$$

因

$$\boxed{\begin{aligned} c_{12} + (b_{12} - a_{12}) &= c_{10}, \\ c_{12} - (b_{12} - a_{12}) &= c_{11}, \end{aligned}}$$

$$\frac{(b_{10} - a_{10}) + (b_{11} - a_{11})}{2} = b_{12} - a_{12}.$$

令 $x = D.$

$$x + \frac{(b_{10} - a_{10}) - (b_{11} - a_{11})}{2} = c_{12},$$

$$\frac{(b_{10}-a_{10})+(b_{11}-a_{11})}{2}=b_{12}-a_{12},$$

因 $(c+\overline{b-a})(c-\overline{b-a})=2ab.$

故 $$\left\{x+\frac{(b_{10}-a_{10})-(b_{11}-a_{11})}{2}+\frac{(b_{10}-a_{10})-(b_{11}-a_{11})}{2}\right\}$$

$$\left\{x+\frac{(b_{10}-a_{10})-(b_{11}-a_{11})}{2}-\frac{(b_{10}-a_{10})-(b_{11}-a_{11})}{2}\right\}$$

$$=2a_{12}b_{12},\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

$$\left\{x+\frac{(b_{10}-a_{10})-(b_{11}-a_{11})}{2}\right\}x=2a_{12}b_{12},\cdots\cdots(B)$$ 與左相消.

得: $$-\frac{(b_{10}-a_{10})-(b_{11}-a_{11})}{2}x+(b_{10}-a_{10})(b_{11}-a_{11})=0,$$

$$x=D.$$ 合問.

---

9. 有 c_{13}, $a_{10}-b_{11}$, 求 D.

(本法) 識別得: $a_{10}-b_{11}=b_{13}-a_{13},$

令 $x=a_{13},$

$$x+c_{13}=b_{11},$$

$$a_{10}-b_{11}+x+c_{13}=a_{10},$$

因 $$a_{10}\cdot b_{11}=\tfrac{1}{2}D^2,$$

卽 $$(\overline{a_{10}-b_{11}}+\overline{x+c_{13}})(x+c_{13})=\tfrac{1}{2}D^2,\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

$$x+\overline{a_{10}-b_{11}}=b_{13},$$

$$x+(x+\overline{a_{10}-b_{11}})=a_{13}+b_{13},$$

$$x+(x+\overline{a_{10}-b_{11}})+c_{13}=a_{13}+b_{13}+c_{13},$$

$$=D,$$

$$\tfrac{1}{2}(2x+\overline{a_{10}-b_{11}}+c_{13})^2=\tfrac{1}{2}D^2,\cdots\cdots\cdots(B)$$ 與左相消.

得: $x^2+\{2(\overline{a_{10}-b_{11}}+c_{13})-(\overline{a_{10}-b_{11}}+2c_{13})\}^*x$

$$-\{(\overline{a_{10}-b_{11}}+c_{13})c_{13}-\tfrac{1}{2}(\overline{a_{10}-b_{11}}+c_{13})^2\}=0,$$

$$x=a_{13},$$ 合問.

10. 有 $a_{12}+b_{12}$, $a_{13}+b_{13}$, 求 D.

(本法) 識別得: $a_{12}+b_{12}=c_{12}+(a_{12}+b_{12}-c_{12})$,

$$a_{13}+b_{13}=c_{13}+(a_{13}+b_{13}-c_{13}),$$

令 $$x=a_{12}+b_{12}-c_{12}.$$

$$a_{12}+b_{12}-x=c_{12},$$

$$a_{13}+b_{13}-x=a_{13}+b_{13}-c_{13},$$

則 $(a_{12}+b_{12}-x)(a_{13}+b_{13}-x)=c_{12}(a_{13}+b_{13}-c_{13}),\cdots(A)$ 寄左.

又 $$x^2=c_{13}(a_{12}+b_{12}-c_{12}),\cdots(B)$$

與左相消.

得: $-\{(a_{12}+b_{12})+(a_{13}+b_{13})\}x+(a_{12}+b_{12})(a_{13}+b_{13})=0.$

---

* 按此節有脫文,或作

$$x^2+(a_{10}-b_{11})x-\{(\overline{a_{10}-b_{11}}+c_{13})c_{13}-\tfrac{1}{2}(\overline{a_{10}-b_{11}}+c_{13})^2\}=0$$

亦可,

$$\underline{x=a_{12}+b_{12}-c_{12}.}$$ 合問.

11. 有c_1, $\frac{b_1}{a_1}=2.4$, 求 D.

(本法) 令 $$x=a_1,$$

$$2.4x=b_1,$$

$$x^2+(2.4x)^2=c_1^2, \cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

$$c_1^2=c_1^2, \cdots\cdots\cdots(B)$$ 與左相消.

得: $$-6.76x^2+c_1^2=0,$$

$$x=a_1,$$

$$\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1+c_1}=D.$$ 合問.

12. 有 $(a_{10}+b_{10}-c_{10})-(a_{11}+b_{11}-c_{11})=\alpha$, $(a_{12}+b_{12}-c_{12})-(a_{13}+b_{13}-c_{13})=\beta$, 求 D.

(本法) 識別得:

$$a_{10}+b_{10}-c_{10}=2a_{14},$$

$$a_{11}+b_{11}-c_{11}=2b_{15},$$

$$(a_{10}+b_{10}-c_{10})-(a_{11}+b_{11}-c_{11})=2(b_{13}-a_{13}),$$

$$\boxed{(a_{12}+b_{12}-c_{12})-(a_{13}+b_{13}-c_{13})=c_{13}-(a_{13}+b_{13}-c_{13}),}$$

$$(a_{12}+b_{12}-c_{12})-(a_{13}+b_{13}-c_{13})=\overline{c_{13}-b_{13}}+\overline{c_{13}-a_{13}},$$

$$\frac{(a_{10}+b_{10}-c_{10})-(a_{11}+b_{11}-c_{11})}{2}=b_{13}-a_{13},$$

$$(a_{12}+b_{12}-c_{12})-(a_{13}+b_{13}-c_{13})$$

$$-\frac{(a_{10}+b_{10}-c_{10})-(a_{11}+b_{11}-c_{11})}{2}=2(c_{13}-b_{13}),$$

$$\tfrac{1}{2}\Big\{(a_{12}+b_{12}-c_{12})-(a_{13}+b_{13}-c_{13})$$

$$-\frac{(a_{10}+b_{10}-c_{10})-(a_{11}+b_{11}-c_{11})}{2}\Big\}=c_{13}-b_{13},$$

$$(a_{12}+b_{12}-c_{12})-(a_{13}+b_{13}-c_{13})-\tfrac{1}{2}\Big\{(a_{12}+b_{12}-c_{12})$$

$$-(a_{13}+b_{13}-c_{13})-\frac{(a_{10}+b_{10}-c_{10})-(a_{11}+b_{11}-c_{11})}{2}\Big\}$$

$$=c_{13}-a_{13},$$

令 $$x=a_{13}+b_{13}-c_{13}.$$

故 $$x+\tfrac{1}{2}\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)=a_{13},$$

$$x+\tfrac{1}{2}\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)=b_{13},$$

$$+)\quad x+\beta=c_{13},$$

$$3x+2\beta=a_{13}+b_{13}+c_{13},$$

$$=D,$$

因 $$D-2a_{13}=2a_{14}$$

$$=a_{10}+b_{10}-c_{10},$$

$$(3x+2\beta)-2\left\{x+\tfrac{1}{2}\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\right\}=x+\beta+\frac{\alpha}{2},$$

$$=a_{10}+b_{10}-c_{10},$$

又 $$D-2b_{13}=2b_{15},$$

$$=a_{11}+b_{11}-c_{11},$$

$$(3x+2\beta)-2\left\{x+\tfrac{1}{2}\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)\right\}=x+\beta-\frac{\alpha}{2},$$

$$=a_{11}+b_{11}-c_{11},$$

因 $$\tfrac{1}{2}(a_{10}+b_{10}-c_{10})(a_{11}+b_{11}-c_{11})=2a_{14}b_{15},$$

$$=a_{13}\cdot b_{13},$$

$$\tfrac{1}{2}\left(x+\beta+\frac{\alpha}{2}\right)\left(x+\beta-\frac{\alpha}{2}\right)=\tfrac{1}{2}(a_{10}+b_{10}-c_{10})(a_{11}+b_{11}-c_{11}),$$

$=a_{13}\cdot b_{13},\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$ 寄左.

又 $\left(x+\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)\left(x+\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha}{4}\right)=a_{13}\cdot b_{13},\cdots\cdots\cdots(B)$與左相消.

得: $$-0.5x^2+\tfrac{1}{2}\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)=0,$$

$x=a_{13}+b_{13}-c_{13}=D.$ 合問.

13. 有 $c_{12}-\{c_{10}-(b_{10}-a_{10})\}=\alpha=$旁差, $\{c_{11}+(b_{11}-a_{10})\}-c_{13}=\beta, b_{12}-a_{12}=\gamma$, 求 D.

(本法) 識別得: $c_{10}-(b_{10}-a_{10})=D,$

$$c_{11}+(b_{11}-a_{11})=D,$$

$$c_{12}-\{c_{10}-(b_{10}-a_{10})\}+\{c_{11}+(b_{11}-a_{11})\}-c_{13}$$

$$=c_{14}+c_{15},$$

$$=a_{12}+b_{12}-2c_{13},$$

$$\{c_{11}+(b_{11}-a_{11})\}-c_{13}=a_{13}+b_{13},$$

$$c_{12}-\{c_{10}-(b_{10}-a_{10})\}=c_{12}-D$$

令 $$x=c_{13}.$$

$$\{[c_{11}+(b_{11}-a_{11})]-c_{13}\}+x=a_{13}+b_{13}+c_{13},$$

$$=D,$$

$$\{c_{12}-[c_{10}-(b_{10}-a_{10})]\}+\{[c_{11}+(b_{11}-a_{11})]-c_{13}\}+x,$$

$$=c_{12},$$

卽 $$\alpha+\beta+x=c_{12},$$

$$2(\alpha+\beta+x)^2=2c_{12}^2,$$

$$2(\alpha+\beta+x)^2-\gamma^2=(a_{12}+b_{12})^2,\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

$$2x+\alpha+\beta=2c_{13}+(a_{12}+b_{12}-2c_{13}),$$

$$=a_{12}+b_{12},$$

$$(2x+\alpha+\beta)^2=(a_{12}+b_{12})^2,\cdots\cdots(B)$$ 與左相消.

得: $$-2x^2+\{(\alpha+\beta)^2-\gamma^2\}=0,$$

$$x=c_{13},$$

$$x+\beta=D.$$ 合問.

14. 有 $c_8-(c_1-b_1)=\alpha$, $(c_1-a_1)-c_6=\beta$. 求 D.

(本法) 識別得:

$$\{c_8-(c_1-b_1)\}+\{(c_1-a_1)-c_6\}=b_6-a_8,$$

$$\overline{b_6-a_8}+\overline{b_{12}-a_{12}}=b_1-a_1.$$

$$\overline{b_6-a_8}-\overline{b_{13}-a_{13}}=b_{12}-a_{13},$$

$$\{(c_1-a_1)-c_6\}-\{c_8-(c_1-b_1)\}=c_{12}-D,$$

$$r-\{c_8-(c_1-b_1)\}=a_8,$$

$$r+\{(c_1-a_1)-c_6\}=b_6,$$

$$2\{c_8-(c_1-b_1)\}+(c_1-b_1)=a_{10},$$

$$=\{c_8-(c_1-b_1)\}+c_8,$$

$$(c_1-a_1)-2\{(c_1-a_1)-c_6\}=b_{11},$$

$$=c_6-\{(c_1-a_1)-c_6\}$$

令 $$x=a_8$$

$$x+\{c_8-(c_1-b_1)\}+\{(c_1-a_1)-c_6\}=x+(b_6-a_8),$$

$$=b_6=b_7.$$

$$\boxed{a_8+b_7=c_{12},}$$

$$x+x+\{c_8-(c_1-b_1)\}+\{(c_1-a_1)-c_6\}=c_{12},$$

$$2x+\{c_8-(c_1-b_1)\}+\{(c_1-a_1)-c_6\}$$

$$-\{(c_1-a_1)-c_6\}+\{c_8-(c_1-b_1)\}=D$$

$$2x+2[c_8-(c_1-b_1)]=D,$$

$$\{x+[c_8-(c_1-b_1)]\}^2=r^2, \cdots\cdots(A)$$ 寄左

因 $a_8 \cdot b_6=r^2,$

以 $\{x+[c_8-(c_1-b_1)]+[(c_1-a_1)-c_6]\}x=r^2, \cdots(B)$

與左相消.

得: $$-(\beta-\alpha)x+\alpha^2=0,$$

$$x=a_8.$$ 合問.

(又本法) 令 $$x=r.$$

$$x-\{c_8-(c_1-b_1)\}=a_8,$$

$$x+\{(c_1-a_1)-c_6\}=b_6$$

$\{x-[c_8-(c_1-b_1)]\}\{x+[(c_1-a_1)-c_6]\}=r^2, \cdots\cdots(A)$寄左.

$x^2=r^2, \cdots(B)$ 與左相消.

$$(\beta-\alpha)x-\alpha\beta=0,$$

$$x=r.$$ 合問.

---

15. 有 $a_1+c_1=\alpha$, $\overline{c_1-a_1}+\overline{c_1-b_1}=\beta$, 求 D.

(本法) 令 $$x=c_1-b_1.$$

$$\tfrac{1}{2}\{\overline{a_1+c_1}-[x+\overline{c_1-a_1}+\overline{c_1-b_1}]\}=a_1+b_1-c_1,$$

$$=D,$$

$$\{\tfrac{1}{2}(\alpha-x-\beta)\}^2=D^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

$$\overline{c_1-a_1}+\overline{c_1-b_1}-x=\overline{c_1-a_1},$$

$$2x\{\overline{c_1-a_1}+\overline{c_1-b_1}-x\}=D^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$ 與左相消.

得: $$-0.25x^2+\left(\frac{\alpha-\beta}{2}+2\beta\right)x-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=0,$$

$$x=c_1-b_1.$$ 合問.

---

16. 有 $a_{12}+b_{12}+c_{12}=\alpha$, $a_{13}+b_{13}-c_{13}=\beta$, 求 D.

(本法) 識別得: $a_{12}+b_{12}+c_{12}=c_1.$

令 $$x=D.$$

$$=a_{13}+b_{13}+c_{13},$$

$$\boxed{\frac{(a_{13}+b_{13}+c_{13})-3(a_{13}+b_{13}-c_{13})}{2}=(c_{13}-a_{13})+(c_{13}-b_{13}),}$$

$$\frac{x-3\beta}{2}=(c_{13}-a_{13})+(c_{13}-b_{13}),$$

$$(0.5x-1.5\beta)+2\beta=a_{13}+b_{13},$$

$$x-(0.5x+0.5\beta)=c_{13}.$$

$$\boxed{\begin{aligned}&(a_{12}+b_{12}+c_{12})+(a_{13}+b_{13}+c_{13})\\&\qquad=c_1+D,\\&\qquad=a_1+b_1,\end{aligned}}$$

$$x+a=a_1+b_1,$$

$$(x+a)(0.5x+0.5\beta)=(a_1+b_1)c_{13}, \cdots\cdots(A)$$ 寄左.

$$(0.5x+0.5\beta)a=(a_{13}+b_{13})c_1, \cdots(B)$$ 與左相消.

$$0.5x^2-0.5\beta x-a\beta=0,$$

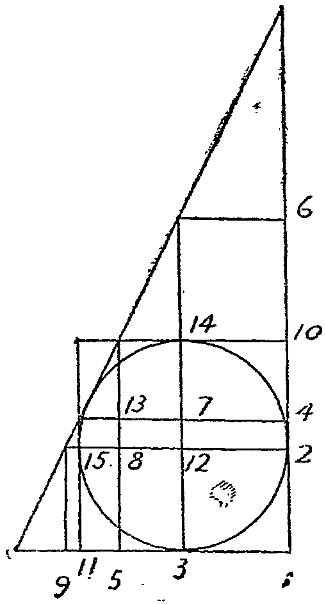
$$x=D.$$ 合問

17. 已見本篇第7節，「洞淵之測圓術」內，茲不復錄.

18. 已見本篇第7節，「洞淵之測圓術」內，茲不復錄.

測圓海鏡細草卷第十二

之分一十四問



1. 有 c_1+b_1, $a_1=\frac{8}{15}b_1$. 求 D.

(本法) 命 $$x=c_1-b_1,$$

$$(c_1+b_1)x=a_1^2,$$

$$\overline{15}^2(c_1+b_1)x=225a_1^2,\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

$$(c_1+b_1)-x=2b_1,$$

$$4(c_1+b_1)-4x=8b_1,$$

$$=15a_1,$$

$$\{4(c_1+b_1)-4x\}^2=225a_1^2,\cdots\cdots\cdots(B)$$ 與左相消.

得: $$16x^2-257(c_1+b_1)x+16(c_1+b_1)^2=0,$$

$$x=c_1-b_1,$$

$$\frac{x+(c_1+b_1)}{2}=c_1,$$

$$\frac{x-(c_1+b_1)}{2}=b_1,$$

$$\sqrt{c_1^2-b_1^2}=a_1,$$

$$\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1+c_1}=D.$$ 合問.

---

2. 有 c_1+a_1, $a_1=\frac{8}{15}b_1$. 求 D.

(本法 命 $$x=c_1-a_1,$$

$$(c_1+a_1)x=b_1^2,$$

$$16^2(c_1+a_1)x=256b_1^2,\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

$$(c_1+a_1)-x=2a_1,$$

$$15(c_1+a_1)-15x=2\times 15a_1,$$

$$=16b_1,$$

$$\{15(c_1+a_1)-15x\}^2=256b_1^2,\cdots\cdots\cdots(B)$$ 與左相消.

得: $$225x^2-706(c_1+a_1)x+225(c_1+a_1)^2=0,$$

$$x=c_1-a_1,$$

$$\frac{(c_1+a_1)-x}{2}=a_1,$$

$$\frac{(c_1+a_1)+x}{2}=c_1,$$

$$\sqrt{c_1^2-a_1^2}=b_1,$$

$$\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1+c_1}=D.$$ 合問.

3. 有 b_1-a_1, $\left(1-\frac{5}{9}\right)(3D)^*=a_1$, 求 D.

(本法) 令 周, $3D=9x$,

徑, $D=3x$,

勾, $a_1=4x$,

* 假定 $\pi=3$ 入算,故城周為 $3D$.

$$x=a_1-D=\text{小差}$$

$$x+(b_1-a_1)=b_1-D=\text{大差},$$

$$2\{x+(b_1-a_1)\}x=D^2, \cdots\cdots\cdots\cdots(A) \qquad \text{寄左.}$$

$$(3x)^2=D^2, \cdots\cdots\cdots\cdots(B)\text{與左相消.}$$

得:
$$-7x+2(b_1-a_1)=0,$$

$$x=\frac{D}{3},$$

$$3x=D. \qquad \text{合問.}$$

4. 有 $b_2-a_3=b_1-a_1, \frac{5}{6}D=a_3$, 求 D.

(本法) 令
$$D=6x,$$

$$r=3x,$$

$$a_3=5x,$$

$$5x-3x=2x=c_1-b_1,=\text{小差},$$

$$2x+(b_2-a_3)=c_1-a_1,=\text{大差},$$

$$2\{2x+(b_2-a_3)\}(2x)=D^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(A) \qquad \text{寄左.}$$

$$(6x)^2=D^2,\cdots\cdots\cdots\cdots(B)\text{與左相消.}$$

得:
$$-\left\{6^2-2\left(5-\frac{6}{2}\right)\left(5-\frac{6}{2}\right)\right\}x+2\left(5-\frac{6}{2}\right)(b_2-a_3)=0,$$

$$x=\frac{D}{6},$$

$$6x=D. \qquad \text{合問.}$$

5. 有 a_1+b_1, $\frac{16}{40}b_1=D$, 或 $\frac{n}{m}b_1=D$, 求 D.

(本法) 令 $$16x=D,$$

$$40x=b_1,$$

$$(a_1+b_1)-40x=a_1,$$

$$(a_1+b_1)-40x-16x=a_1-D=\text{小差},$$

$$40x-16x=b_1-D=\text{大差},$$

$$2\{40x-16x\}\{(a_1+b_1)-40x-16x\}=D^2,\cdots\cdots(A)\quad \text{寄左.}$$

$$\overline{16x}^2=D^2,\cdots\cdots(B)$$

與左相消.

得: $$-\{2(40-16)(40+16)+\overline{16}^2\}x+2(40-16)(a_1+b_1)=0,$$

或 $$-\{2(m-n)(m+n)+n^2\}x+2(m-n)(a_1+b_1)$$

$$16x=D, \text{ 或 } nx=D.$$ 合問.

---

6. 有 $a_{12}=\frac{8}{15}b_{12}$, 或 $a_{12}=\frac{n}{m}b_{12}$, $c_{12}-b_{12}$, $c_{12}-a_{12}$, 求 D

(本法) 令 $$8x=a_{12},$$

$$15x=b_{12},$$

則 $$2\times 8x\times 15x=2a_{12}b_{12},\cdots\cdots\cdots(A)\quad \text{寄左.}$$

又 $$2(c_{12}-b_{12})(c_{12}-a_{12})=\overline{a_{12}+b_{12}-c_{12}}^2,$$

$$\overline{c_{12}-b_{12}}+\overline{c_{12}-a_{12}}+\sqrt{2(c_{12}-b_{12})(c_{12}-a_{12})}=c_{12},$$

$$\{\overline{c_{12}-b_{12}}+\overline{c_{12}-a_{12}}+\sqrt{2(c_{12}-b_{12})(c_{12}-a_{12})}\}^2$$

$$-\{(c_{12}-a_{12})-(c_{12}-b_{12})\}^2$$

$$=2a_{12}b_{12}\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$ 與左相消.

得 $-2\times 8x\times 15x+\{\overline{c_{12}-b_{12}}+\overline{c_{12}-a_{12}}+\sqrt{2(c_{12}-b_{12})(c_{12}-a_{12})}\}^2$

$$-\{(c_{12}-a_{12})-(c_{12}-b_{12})\}^2=0,$$

或 $-2mnx+\{\overline{c_{12}-b_{12}}+\overline{c_{12}-a_{12}}+\sqrt{2(c_{12}-b_{12})(c_{12}-a_{12})}\}^2$

$$-\{(c_{12}-a_{12})-(c_{12}-b_{12})\}^2=0,$$

$$x=\frac{a_{12}}{8}=\frac{b_{12}}{15},$$

$$\frac{2a_{12}b_{12}}{c_{12}}=D.$$ 合問.

7. 有 $c_{12}=\frac{c_1}{2}$, $D=\frac{b_2}{2}$, $a_3=\frac{5}{6}D$, 求 D.

本法) 令 $6x=D,$

$$5x=a_3,$$

$$12x=b_2,$$

$$3x+12x=r+b_2=b_1,$$

$$\overline{15x}^2=b_1^2,$$

$$3x+5x=r+a_3=a_1,$$

$$\overline{8x}^2=a_1^2,$$

$$\overline{8x}^2+\overline{15x}^2=c_1^2,\cdots\cdots\cdots(A)$$ 寄左.

$$\overline{2c_{12}}^2=c_1^2,\cdots\cdots\cdots(B)$$ 與左相消.

得: $$-(\overline{8}^2+\overline{15}^2)x^2+\overline{2c_{12}}^2=0,$$

$$x=\frac{D}{6},$$

$$6x=D.$$ 合問.

---

8. 有 $a_3+b_2+c_1=2c_1$, $b_2=\frac{12}{17}c_1$, $a_3=\frac{5}{17}c_1$, 求 D.

(本法) 識別得: $$b_2-a_3=\frac{7}{17}c_1,$$

$$=b_1-a_1.$$

餘各依法求之.

此題無草.

9. 有 $a_3+\frac{5}{6}b_2=600$, $b_2+\frac{3}{5}a_3=600$, 求 D.

(本法) 因 $$a_3+\frac{5}{6}b_2=600,$$

$$b_2+\frac{3}{5}a_3=600,$$

故 $$5b_2+6a_3=3600,$$ 原右行.

以方程入之, $$-)\underline{5b_2+3a_3=3000,}$$ 原左行.

左行直減右行 $$0+3a_3=600,$$ 今右行.

得: $a_3=200.$

又 $5b_2+3a_3=3000,$ 原左行.

$-)\quad 0+3a_3=\ 600,$ 今右行.

減之 $5b_2+\ 0=2400,$

又得: $b_2=480.$

旣得, $a_3=200,\ b_2=480,$

令 $x=D.$

$$0.5x+b_2=b_1,$$

$$0.5x+a_3=a_1,$$

$$0.25x^2+b_2x+b_2^2=b_1^2,$$

$$+)0.25x^2+a_3x+a_3^2=a_1^2,$$

加之 $0.5x^2+(a_3+b_2)x+a_3^2+b_2^2=a_1^2+b_1^2,$

$=c_1^2,\cdots\cdots\cdots(A)$ 寄左.

$(a_3+b_2)^2=c_1^2,\cdots\cdots\cdots(B)$ 與左相消.

得: $-0.5x^2-(a_3+b_2)x+(a_3+b_2)^2-(a_3^2+b_2^2)=0,$

$x=D.$ 合問

10. 有 $a_{11}+\frac{1}{3}b_{10}=200,\quad b_{10}-\frac{3}{4}a_{11}=300,$ 求 $D.$

(本法) 因 $a_{11}+\frac{1}{3}b_{10}=200,$

$$b_{10}-\frac{3}{4}a_{11}=300,$$

故 $\qquad b_{10}+3a_{11}=600,\qquad$ 原右行.

以方程入之 $\quad +)\ 4b_{10}-3a_{11}=1200,\qquad$ 原左行.

左行直加右行 $\quad 5b_{10}+0=1800,\qquad$ 今右行.

得: $\qquad b_{10}=360,$

又 $\qquad b_{10}+3a_{11}=600,\qquad$ 原右行.

$-)\ b_{10}\qquad =360,\qquad$ 今右行.

$$3a_{11}=240,$$

又得: $\qquad a_{11}=80,$

$D=\sqrt{2a_{11}\cdot b_{10}}.\qquad$ 合問.

---

11. 有 $b_1-D=\frac{3}{5}b_1$, 或 $b_1-D=\frac{n}{m}b_1$, $a_1-D=\frac{1}{4}a_1$, 或 $a_1-D=\frac{q}{p}a_1$, $(b_1-D)-(a_1-D)$, 求 D.

(本法) 令 $\qquad x=a_1-D.$

$$4x=a_1,$$

$$4x+(b_1-D)-(a_1-D)=b_1$$

$$3\{4x+(b_1-D)-(a_1-D)\}=3b_1,$$

$$=5(b_1-D).$$

$$3\{4x+(b_1-D)-(a_1-D)\}-5x=5\{(b_1-D)-(a_1-D)\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A)\qquad\text{寄左.}$$

$$5\{(b_1-D)-(a_1-D)\}=5\{(b_1-D)-(a_1-D)\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B)\quad\text{與左相消.}$$

得: $(3\times4-5)x-2\{(b_1-D)-(a_1-D)\}=0,$

或 $(np-m)x-2\{(b_1-D)-(a_1-D)\}=0,$

$$x=a_1-D.\qquad\text{合問.}$$

---

12. 有 $b_1-D=\frac{3}{5}b_1$, 或 $b_1-D=\frac{n}{m}b_1$, $a_1-D=\frac{1}{4}a_1$, 或 $a_1-D=\frac{q}{p}a_1$, $\frac{b_1}{5}-\frac{a_1}{4}$, 或 $\frac{b_1}{m}-\frac{a_1}{p}$, 求 D.

(本法) 令 $x=\frac{a_1}{4}$,

$$=a_1-D,$$

$$x+\left(\frac{b_1}{5}-\frac{a_1}{4}\right)=\frac{b_1}{5},$$

因	$b_1-D=\frac{3}{5}b_1,$

$$(5-3)\left\{x+\left(\frac{b_1}{5}-\frac{a_1}{4}\right)\right\}=D,\cdots\cdots(A)\qquad\text{寄左.}$$

又因	$a_1-D=\frac{a_1}{4},$

$$(4-1)\{x\}=D, \cdots\cdots(B)$$ 與左相消.

得: $$-\{(4-1)-(5-3)\}x+(5-3)\left(\frac{b_1}{5}-\frac{a_1}{4}\right)=0,$$

或 $$-\{(p-q)-(m-n)\}x+(m-n)\left(\frac{b_1}{m}-\frac{a_1}{p}\right)=0,$$

$$x=a_1-D.$$ 合問.

---

13. 有 $b_{14}=\left(1-\frac{15}{24}\right)b_{10}=\frac{9}{24}$, b_{10} 或 $b_{14}=\frac{n}{m}b_{10}$, $a_{15}=\left(1-\frac{4}{5}\right)a_{11}=\frac{1}{5}a_{11}$, 或 $a_{15}=\frac{q}{p}a_{11}$, $b_{14}-a_{15}$, $b_{10}-a_{11}$, 求 D.

(本法) $$x=\frac{1}{5}a_{11},$$

$$=a_{15},$$

$$5x+(b_{10}-a_{11})=b_{10},$$

因 $$2a_{11}b_{10}=D^2,$$

$$5x\times 2\{5x+(b_{10}-a_{11})\}=D^2,$$

或 $$5\times 2\{5x+(b_{10}-a_{11})\}=\frac{D^2}{x},$$

命 $$9\times 5\times 2\{5x+(b_{10}-a_{11})\}=9D^2, \cdots\cdots\cdots(A)$$

$\boxed{\text{其中亦省去一個}\frac{1}{x}}$ 寄左.

又 $$x+(b_{14}-a_{15})=b_{14},$$

$$24\{x+(b_{14}-a_{15})\}=24b_{14}=9b_{10},$$

因 $$2a_{11}\cdot b_{10}=D^2,$$

$$2\times5\times24\{x+(b_{14}-a_{15})\}=9D^2,\cdots\cdots\cdots(B)$$

其中亦省去一個 $\frac{1}{x}$ 與左相消.

得: $$-(9\times5-24\times1)x+\{2(b_{14}-a_{15})-(b_{10}-a_{11})\}=0,$$

或 $$-\{(np-mq)x+\{m(b_{14}-a_{15})-n(b_{10}-a_{11})\}=0,$$

$$x=\frac{1}{5}a_{11},$$

$$=a_{15},$$

餘各依法求之. 合問.

---

14. 有 $a_1+b_1+c_1$, $\frac{b_1}{a_{14}}=8\frac{1}{3}$, 或 $\frac{b_1}{a_{14}}=\frac{n}{m}$, $\frac{a_1}{b_{15}}=10\frac{2}{3}$, 或 $\frac{a_1}{b_{15}}=\frac{q}{m}$, $a_{14}-a_{13}$, $b_{13}-b_{15}$, 求 D.

(本法) 識別得: $$\frac{(a_{14}-a_{13})+(b_{13}-b_{15})}{2}=a_{14}-b_{15}$$

$$=b_{13}-a_{13},$$

$$(b_{13}-b_{15})-(a_{14}-a_{13})=a_{13}+b_{13}-c_{13},$$

$$(a_{14}-a_{13})+2a_{13}=r,$$

$$(b_{13}-b_{15})+2b_{15}=r,$$

令 $$x=b_{15},$$

$$x+\frac{(a_{14}-a_{13})+(b_{13}-b_{15})}{2}=a_{14},$$

$$\frac{n}{m}\left\{x+\frac{(a_{14}-a_{13})+(b_{13}-b_{15})}{2}\right\}=b_1,$$

$$\frac{q}{m}x=a_1,$$

$$\left\{n\left[x+\frac{(a_{14}-a_{13})+(b_{13}-b_{15})}{2}\right]+qx\right\}$$

$$=a_1+b_1,\cdots\cdots(A)\quad \boxed{\text{內寄分母}\frac{1}{m}}$$ 寄左.

$$4x+2(b_{13}-b_{15})=a_{13}+b_{13}+c_{13},$$

$$=D,$$

$$\{4x+2(b_{13}-b_{15})\}+\{a_1+b_1+c_1\}=2(a_1+b_1),$$

$$\tfrac{1}{2}[\{4x+2(b_{13}-b_{15})\}+\{a_1+b_1+c_1\}]=a_1+b_1,$$

$$\frac{m}{2}[\{4x+2(b_{13}-b_{15})\}+\{a_1+b_1+c_1\}]$$

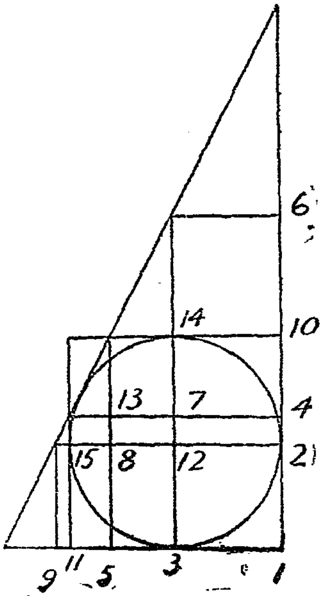
$$=a_1+b_1,\cdots\cdots(B)\quad \boxed{\text{內亦寄分母}\frac{1}{m}}$$ 與左相消.

得: $$(n+q-2m)x+\frac{m}{2}\{2(b_{13}-b_{15})+(a_1+b_1+c_1)\}$$

$$-\left| n\cdot\frac{(a_{14}-a_{13})+(b_{13}-b_{15})}{2} \right|^{*}=0,$$

$$x=b_{15},$$

$$4x+2(b_{13}-b_{15})=D$$ 合問.



* 按原法有脫文,館校本及李銳校本,均未爲補正.

唐宋元明數學教育制度

目　　次

1. 古代數學教育制度

本篇所述吾國數學教育制度,限於唐宋元明四代.但為明瞭吾國教育傳統思想起見,於古代教育制度,亦略為說述,其詳細考證,再詳另篇.

考吾國古代小學有六歲及八歲學書計之說,詳具載籍.

(1) 內則云:「六年教之數,與方名;十年出就外傅,居宿於外,學書計」.

(2) 白虎通云:「八歲毀齒,始有識知,入學學書

計」.

（3）周禮保氏,教民六藝:六曰九數.

（4）前漢書食貨志云:「八歲入小學,學六甲,五方,書計之事」.

（5）魏王粲(177-217)儒吏論云「古者八歲入小學,學六甲,五方,書計之事」.見隋虞世南北堂書鈔卷八十三引;及宋太平御覽卷第六百十三學部七引,蓋并因前漢書食貨志之說也.

（6）唐徐堅(659-729)初學記云:「古者子生六歲,而教數與方名,十歲入小學,學六甲,書計之事」.則似本於內則之說也.

（7）宋王應麟困學紀聞卷五儀禮條,釋內則之說稱:「六年教之數與方名.數者,一至十也.方名,漢書(食貨志),所謂五方也.九年教數日漢志所謂六甲也.十年學書計,六書,九數也.計者數之詳,十百千萬億也.漢志六甲,五方,書計,皆以八歲學之,與此不同」

內則漢志六歲八歲之說,雖有異同,而古代教育家,曾着意於數學教育,則無疑義.其後吾國數學代有傳人,未始非得力於古代數學教育也.

2. 隋代數學教育制度

古代數學教育僅限於小學,至隋乃隸於國學,其可考者不過數條:

(1) 唐元宗御撰唐六典卷二十一,稱:「魏晉已來,多在史官不列於國學.隋置算學博士一人,從九品下」.

(2) 隋書百官志,稱:「算學博士二人,算助教二人,學生八十人.幷隸於國學」.

(3) 舊唐書卷四十四職官三,稱:「隋始置算學博士二人於國庠」.

隋享祚不永,其算學制度,或未詳備.但已具體而微,下開唐宋之盛.

3. 唐代數學教育制度

唐代數學教育制度,曡見於記載:

(1) 大唐新語稱:「隋煬帝置明經進士二科,國家因隋制增置秀才,明法,明字,明算,幷前爲六科」.[1]

(2) 唐杜佑通典稱「唐貢士之制,有秀才,有明

(1) 日知錄卷十一,「明經」條,註引.

經,有進士,有明法,有明書,有明算.每歲仲冬郡縣館監課試」.[1]

（3）新唐書卷四十四,選舉志上,稱:「其科之目,有秀才,有明經,有進士,有明法,有明字,有明算.……有道舉,有童子」.

（4）通考稱:「唐制取士之科:其科之目,有秀才,有明經,有進士,有俊士,有明法,有明字,有明算,有一史,有三史,有開元禮,有道舉,有童子」

（5）舊唐書卷四,及新唐書卷四十八,幷稱:「唐初廢算學.顯慶丙辰(656)復置」.

其學校組織,有博士,有助教,有學生.

（1）唐六典卷二十一,稱:「算學博士二人,從九品下」.其自註稱:〔隋置算學博士一人,從九品下,皇朝增置二人〕.唐六典卷二十一又稱:「算學博士二人,學生三十人,典學二人」.

（2）舊唐書職官志,稱:「算學博士二人〔從九品下〕,學生三十人」.

（3）新唐書百官志,稱:「算學博士二人,從九品下.助教一人」.

(1) 宋祝穆事文類聚前集(1246)卷二十六引.

（4）新唐書選舉志稱：「算學生三十人」.

其束修之禮,各館并具.

（1）唐六典卷二十一,稱:「其束修之禮,督課試舉,如三館博士之法」.(1)

（2）新唐書百官志,稱:「凡六學束修之禮,督課試舉,皆如國子學」.

（3）宋王溥建隆三年(962)唐會要卷三十五,學校條,稱:「神龍二年(706)九月(2),勅學生在學,各以長幼爲序,初入學皆行束修之禮於師.……俊士及律,書,算學,州縣各絹一疋」.

其學制共以七年,分科教授.

（1）唐六典卷二十一,稱:「算學博士,掌教文武官八品以下,及庶人子之爲生者.二分其經以爲之業.習九章,海島,孫子,五曹,張丘建,夏侯陽,周髀十有五人.習綴術,緝古十有五人.其記遺,三等數亦兼習之.孫子,五曹共限一年業成.九章,海島共三年.張丘建,夏侯陽

(1) 唐六典卷二十一稱:「國子博士掌教文武官三品以上,……其生初入,置束帛一,篚酒一壺,脩一案,號爲束脩之禮」.

(2) 嘯園叢書本唐王定保唐摭言卷一,「兩監」條,作:「龍朔二年(662)九月」.

各一年.周髀,五經算共一年.綴術四年.緝古一年(應作三年).(1)

(2)舊唐書職官志,稱:「博士掌教文武八品以下,及庶人子爲生者.二分其經以爲之業.習九章海島.孫子,五曹,張丘建,夏侯陽,周髀,十五人.習綴術,緝古十五人.其記遺,三等(數)亦兼習之」.

(3)新唐書百官志,稱:「算學博士二人從九品下,助教一人,掌教八品以下,及庶人子爲生者.二分其經以爲業.九章,海島,孫子,五曹,張丘建.夏侯陽,周髀,五經算;綴術,緝古爲顓業.兼習記遺,三等數」.

(4)新唐書選舉志,又稱:「凡算學:孫子,五曹共限一歲.九章,海島共三歲.張丘建,夏侯陽各一歲.周髀,五經算共一歲.綴術四歲,緝古三歲,記遺,三等數皆兼習之」.

(5)元胡省三註資治通鑑卷二百五十三,乾符四年條:「上好騎射,劍槊,法算」,稱:「唐國子監有算學博士,掌教九章,海島,孫子,五曹,張丘(建,夏侯)陽,周髀,

(1) 廣雅書局本唐六典作一年.

宋孫逢吉職官分紀卷二十一,「算學博士」條,引六典則作三年.

五經算.綴術,緝古爲專業.皆法算也」.

其考試亦主分科舉行.

(1) 唐六典卷二,稱:「其明算,則九章三帖,海島,孫子,五曹,張丘建,夏侯陽,周髀,五經等七部各一帖.其綴術六帖,緝古四帖.[1]〔錄大義本條爲問答者.明數造術,辯明術理然後通.記遺,三等數讀令精熟.試十得九爲第.其試綴術,緝古者,綴術七條,緝古三條.諸及第人並錄奏,仍關各送吏部.書,算於從九品下敍排〕.

(2) 新唐書選舉志稱:「凡算學錄大義本條爲問答.明數造術,詳明術理,然後爲通.試九章,三條,海島,孫子,五曹,張丘建,夏侯陽,周髀,五經算各一條.十通六.記遺,三等數,帖讀,十得九爲第.試綴術,緝古,錄大義爲問答者;明數造術,詳明術理,無注者合數造術,不失義理,然後爲通.綴術七條,緝古三條,十通六.記遺,三等數,帖讀,十得九爲第.落經者雖通六不第」.

(3) 唐會要卷三十五,學校條,稱:「其試者通計一年所受之業口問大義,得八以上爲上,得六以上爲中,得五以上爲下」.

---

(1) 按唐六典卷四本文亦作綴術六帖,緝古四帖,則綴術七帖,緝古三帖,當爲天寶後制度矣.

其興廢之制,疊見於舊唐書,新唐書,唐會要.而以唐會要所記爲尤詳,但亦互有異同之處.[1]

（1）舊唐書高宗紀,及禮儀志并稱:「顯慶二年(657)廢書算律學」

（2）新唐書百官志,稱:「顯慶三年(658)又廢.龍朔二年(662)二月復置律及書算學三年(663)以書隸蘭臺,算隸祕閣局,律隸詳刑寺.

（3）唐會要卷六十五,廣文館條,稱「顯慶三年(658)九月四日詔以書算學業明經,事唯小道,各擅專門有乖故實,并令省廢.至龍朔二年(662)五月十七日,復置律學,書,算學官一員,(龍朔)三年二月十日書學隸蘭臺,算學隸祕書局,律學隸詳刑寺」.

唐初貞觀(627-649)國學之盛,近古未有.天寶(742-755)以後,學校益廢,生徒流散,貞元前後(約800)六館已亡其三.而講學之會,尙且連襟成帷.元和二年(807)始定員額,西京書算館各十人,東都算館二人而已,及其末年國子,太學,廣文,四門,及書,算,律等七館學生尙爲二百人也.

---

(1) 其舊唐書,新唐書,唐會要互有異同之處,作⊙點爲誌.

(1) 貞觀政要卷第七,(1)崇儒學第二十七,稱:「貞觀二年(628)……是歲大收天下儒士,賜帛給傳〔去聲,驛傳也〕.令詣京師〔令平聲,後同〕.擢以不次,布在廊廟者甚衆,學生通一大經已上,咸得署吏〔署吏職入仕也〕.國學增築學舍四百餘間.國子,太學,四門,廣文,亦增置生員.其書算各置博士學生,以備衆藝.〔唐制,國子,太學,廣文,四門,律,書,算,凡七學,皆置博士.國子掌教三品以上及國公子孫,從二品以上曾孫爲生者.太學掌教五品以上,及郡縣公子孫.從三品曾孫爲生者.廣文館掌領國子學生業進士者.四門館掌教七品以上侯伯子男爲生,及庶人子爲俊士生者.律學,書學,算學,掌教八品以下,及庶人子爲俊士生者.又有五經博士掌以其經教國子〕.太宗又數幸國學〔數音朔〕,令祭酒司業〔……〕,博士講論畢,各賜以束帛.四方儒生負書而至者,蓋以千數.俄而吐蕃及高昌,高麗,新羅等諸夷酋長〔音掌〕,亦遣子弟請入於學.於是國學之內,鼓篋升講筵者〔篋方竹器,所以盛書籍者〕,幾至萬人〔幾平聲〕,儒學之興,古昔未有也.〔按儒林傳,貞觀十四年召天下惇師老德以爲學官,數臨幸,觀釋策,廣學舍千

(1) 據四部叢刊續編本,貞觀政要.

二百區,益生員至三千二百,自屯營飛騎,皆給博士受經.能通經者,聽入貢限.四方秀艾,坌集京師.於是新羅,高昌,百濟,吐蕃,高麗等羣酋長,并遣子弟入學,鼓笥踵堂者,凡八千餘人.雖三代之盛,所未聞也〕.

(2) 唐會要卷三十五,學校條,稱:「貞觀以後,太宗數幸國學,太學遂增學舍一千二百間.國學,太學,四門,亦增生員.其書,算等各置博士,凡三千二百六十員,……於是國學之內,八千餘人.國學之盛,近古未有」.[1]

(3) 姚鉉廣文粹卷二十六,貞元中(約800)人李觀,「請修太學書」,稱:「在昔學有六館,居類(其)業.生有三千,盛侔於古.近季禍難,……具六館之目.其曰:國子,太學,四門,書,律,算等,今存者三,亡者三……」.[2]

(4) 唐文粹卷七十七,貞元十四年(798)歐陽詹「太學張博士講禮記」,稱「……國子師長,序公侯子孫自其館.太學師長,序卿大夫子孫自其館.四門師長,序八方俊造自其館.廣文師長序天下秀彥自其館.其餘法家,墨家,書家,算家,術業以明,亦自其館.沒階雲

(1) 按鄭樵通志卷五十九「選舉二」稱:「貞觀五年,……三千三百六十員」.

(2) 見四部叢刊影元翻宋小字本唐文粹第五册,卷二十六,第6頁.

來,即席鱗差.攢弁如星,連襟成帷.……貞元十四年(798)五月二十七日記」.[1]

(5)唐會要卷六十五,東都國子監條,稱「(元和)二年(807)十二月國子監奏兩京諸館學生總六百五十員.請每館定額如後……算館十人……」.

(6)唐摭言卷一,「西監」條稱:「元和二年(807)十二月西京學生五百五十員,……律館,算館各十員」.

唐會要,唐摭言幷稱:「其年十二月勅東都國子監量置學生一百員;國子館十五員,太學館十五員,四門館五十員,廣文館八員,律館五員,書館三員,算館二員」.

(7)唐文粹卷二十五,韓愈「請上尊號表」稱:「臣某言臣得所管國子,太學,廣文,四門,及書,算,律等七館學生沈周封等二百人狀稱:……」.[2]

(8)資治通鑑卷二百四十一,元和十四年(819),稱:「己丑羣臣上尊號曰元和聖文神武法天應運皇

(1) 見四部叢刊影元翻宋小字本唐文粹第十三册,卷七十七,第1頁.

(2) 見四部叢刊影元翻宋小字本唐文粹第五册卷二十五,第1頁.

帝,赦天下」.按上文韓愈「請上尊號表」無年月,當在此年.

其俸錢亦代有增減.

(1)唐會要稱:「開元二十四年(736)百官料錢……國子書算博士及助教……各一貫九百十七文」.(1)

(2)唐會要卷九十一稱:「大歷十二年(777)四月二十八日……每月料錢……國子書算博士及助教……各一千九百一十七文」.(2)

(3)唐會要卷九十一稱:「建中二年(781)正月四日……國子書算及律助教各三十千文(疑作三千文)」.

(4)新唐書食貨志稱:「唐世俸錢會昌後(841-)不復增減.今著其數.太師太傅太保錢二百萬.……書,算,律學博士……四千,……,書算助教……三千」.

唐祚至天祐二年(905)而斬.會昌以後(841-)史書尚記書算博士,助教俸錢,則終唐之世數學教育制度,尚未嘗廢,宋敏求長安志卷七(1076)并稱「務本坊半以西國子監,……領國子監,太學四門律,書,算,六學」.

(1) 元胡省三資治通鑑註引.

(2) 據北平國立北平圖書館藏鈔本唐會要.

4. 唐代日本數學教育制度

隋唐數學教育,影響日本至鉅.該國於設置算博士,算生之外,兼主分科考試.制度一如中國.

(1) 日本細川潤序遠藤利貞原版日本數學史,稱「欽明之朝(554)百濟貢曆博士.推古之朝(602)百濟僧觀勒獻曆及天文書.星曆之學,與數學相須爲用,則漢士數學入我邦,蓋以此時爲始.天智置算博士,及算生二十人.天武(693)建占星臺.文武(702)更置天文博士,曆博士,及天文曆生各十人,算生三十人,此爲極盛時代」.

(2) 大寶(701-703),養老(707-713)間之令義解,稱:「凡算經:孫子,五曹,九章,海島,六章,綴術,三開,重差,周髀,九司,各爲一經.學生二分其經,以爲之業.凡算學生,辯明術理,然後爲通.試九章三條,海島,周髀,五曹,九司,孫子,三開,重差,各一條.試九全通爲甲,通六爲乙.若落九章,雖通六猶爲不第.其試綴術,六章者,准前綴術六條,六章三條〔若以九章與綴術,及六章與海島等六經,願受試者亦同,令聽也〕.試九全通爲甲,通六爲乙,

若落經者〔六章總不通者也〕,雖通六猶爲不第」.(1)

(3)類聚符宣抄第九載康保四年(967)算道狀,稱「算道請因修前例,幷他道准得業生令,課試學生從八位上日下部宿禰保賴狀

讀書:

九章一部, 海島一卷 周髀一部,

五曹一部, 九司一部, 孫子一部,

三開一部.

主計助正六位上,兼行博士,越前權大目大藏宿禰具傳弟子.

右保賴在學年久,徒蘊強立之才,攻堅日新,……准得業生,令遂執業.

康保四年十月二十七日

主計助正六位上,兼行博士,越前權大目大藏宿禰具傳,

正五位下行主計頭,兼博士

小槻宿禰糸平」.(2)

(1) 澤田吾一,日本數學史講話,第22頁引.

(2) 日本數學史講話,第71—72頁引.

至日本當時何故以九司,三開,重差,六章,代中國之張丘建,夏侯陽,緝古,則以文獻無徵,無可考矣.

復次則日本國見在書目爲寬平時代(889–897)藤原佐世奉勅撰本.其記算法書籍,有下列各種:

「九章九卷〔劉徽注〕. ……〔祖中注〕. ……〔徐氏撰〕. ……術義九,〔祖中注〕. ……十一義一. 九章圖一. ……乘除私記九. ……妙言七. ……私記九. 九法筆術一. 六章六卷〔高氏撰〕. ……圖一. 六章私記四. 九司五卷. ……算術一. 三開三卷. ……圖一. 海島二. ……一〔徐氏注〕. ……二〔祖仲注〕. ……圖一. 綴術六. 夏侯陽算經三. 新集算例一. 五經算一. 張丘建三. 元嘉算術一. 孫子算經三. 五曹算經五〔甄鸞撰〕. 要用算例一. 中星歷一. 歷例一. 注疏一. 歷注二. 婆羅門陰陽算歷一. 記遺一. 五行算二」.(1)

5. 唐李淳風注十部算經

(1) 見古逸叢書之十九,遵義黎氏校刊.

後周甄鸞(535–577時人)曾撰註九章,孫子,五曹,張丘建,夏侯陽,周髀,五經,記遺,三等數,海島諸算經,入唐李淳風再加註釋.唐初曾以李淳風所註十部算經,付國學行用.但事在唐高祖(618–626)時,或在唐高宗顯慶元年(656),或永隆元年(680),則復傳聞異辭.[1]

(1) 舊唐書卷七十九,李淳風傳,及新唐書卷二百零四,李淳風傳,幷稱「唐初太史監侯王思辯表稱:五曹,孫子十部算經,理多踳駁,李淳風復與國子監算學博士梁述,太學助教王眞儒等受詔註五曹,孫子十部算經,書成,唐高祖令國學行用」.

(2) 册府元龜卷八百六十九總錄部,一百一十九,稱「顯慶元年(656)左僕射于志甯等奏以十部算經,付國學行用」.

(3) 唐會要卷六十五.廣文館條,稱:「顯慶元年十二月十九日尙書左僕射于志甯奏置.令習李淳風等注釋五曹,孫子等十部算經,分爲二十卷行用」.[2]

(4) 唐會要卷三十六,稱:「永隆元年(680)十二月太史令李淳風進註釋(五曹),孫子等十部(算)經分爲

(1) 其互有異同之處,作⊙點爲誌.

(2) 據北平國立北平圖書館藏鈔本.

二十卷」[1]

但所稱五曹,孫子等十部算經二十卷,按一切經音義,唐會要,舊唐書,新唐書,崇文總目,直齋書錄解題,通志藝文略,玉海,通考,宋史,所記卷數,互有異同.

(1) 九章

九章算經□□,李淳風釋. (一切經音義)

九章算經九卷,李淳風註. (新唐書)

九章算經要略一卷,李淳風註. (新唐書)

九章算經要略一卷,李淳風註釋. (崇文總目)

九章算術九卷,李淳風撰. (通志藝文略)

九章算經要訣一卷,李淳風撰. (通志藝文略)

九章算經九卷,魏劉徽唐李淳風註. (宋史)

(玉海,通考同)

九章算經要略九卷,李淳風註. (宋史)

(2) 海島

海島算經一卷,李淳風註. (新唐書)

海島算經一卷,李淳風撰. (通志藝文略)

(3) 孫子

(3) 見宋王應麟玉海卷四十四引,又據國立北平圖書館藏鈔本校過.

甄鸞孫子算經三卷,李淳風註. (新唐書)

(通志藝文略同)

孫子算經三卷,李淳風註. (崇文總目)

孫子算經一卷,李淳風註. (宋史)

(4) 五曹

(五曹)孫子等十部算經二十卷,李淳風註釋.

(唐會要)

五曹,孫子等十部算經二十卷,李淳風註.

(舊唐書)

(通志藝文略同)

五曹算經五卷,李淳風註. (玉海)

甄鸞五曹算術二卷,李淳風註. (宋史)

(5) 張丘建

張丘建算經三卷,李淳風註. (新唐書)

(通志藝文略同)

甄鸞註,劉孝孫細草,張丘建算經三卷李淳風等註釋. (直齋書錄解題

(6) 夏侯陽.

····································

(7) 周髀

周髀算經二卷,李淳風註.　新唐書

周髀算經二卷,李淳風撰.　(通志藝文略)

趙君卿註,甄鸞重述,周髀算經二卷

(崇文總目)

(玉海,通考同)

(8) 五經

五經算術二卷,李淳風.　(新唐書

崇文總目同)

王孝通五經算法一卷,李淳風註.　(宋史)

(9) 綴術

祖冲之綴術五卷,李淳風註.　(舊唐書)

祖冲之綴術五卷,李淳風釋.　(新唐書)

(10) 緝古

緝古算術四卷,李淳風註.　(舊唐書)

王孝通緝古算術四卷,李淳風註.　(新唐書)

6. 宋代數學教育制度

北宋數學教育制度沿革,見於宋史者,有元豐算學條例,元祐異議,崇甯國子監算學敕令,大觀算學諸大事.事在元豐七年(1084),元祐元年(1086),崇甯三年

(1104),崇甯五年(1106),大觀三年(1109),大觀四年(1110),宣和二年(1120).而宋孫逢吉職官分紀卷二十一亦稱:「國朝國子監掌國子,太學,武學,算學五學之政」.[1] 宋本數術記遺後附「算學源流」,記及「崇甯國子監算學令,崇甯國子監算學格,崇甯國子監算學對修中書省格」今附錄於後:

(1) 算學源流[2]

(甲) 崇甯國子監算學令

諸學生習九章,周髀義,及算問〔謂假設疑數〕兼通海島,孫子,五曹,張丘建夏侯陽算法并曆算三式天文書.

諸試以通粗併計.兩粗當一通.算義算問以所對優長通及三分以上爲合格.曆算卽算前一季五星昏曉宿度,或日月交食,仍算定時刻早晚,及所食分數.三式卽射覆及豫占三日陰陽風雨.天文卽豫定一月或一季分野災祥,并以依經備草合問爲通.

(乙) 崇甯國子監算學格

(1) 見四庫全書珍本初集本,職官分紀.

(2) 見宋本數術記遺後附「算學源流」第 4—6 頁.

官屬

博士四員〔內二員分講九章,周髀;二員分習曆算,三式,天文〕.

學正〔舉行學規〕一員.

職事人

學錄〔佐學正糾不如規者〕一人.

學諭〔以所習業傳諭諸生〕一人.

司計〔掌飲食支用〕一人.

直學〔掌文籍及謹學生出入〕二人.

司書〔掌書籍〕一人.

齋長〔糾齋中不如規者〕,齋諭〔掌佐齋長道諭諸生〕,齋各一人.

學生

上舍三十人.

內舍八十人.

外舍一百五十人.

補試〔命官公試同〕

九章義三道.

算問二道,

私試〔孟月〕

補上內舍〔第一場〕

九章周髀義三道.

算問二道.

私試〔仲月〕

補上內舍〔第二場〕

曆算一道.

私試〔季月〕

補上內舍〔第三場〕

三式或天文一道.

(丙) 崇寧國子監算學對修中書省格

秋試奏到算學升補上舍等第推恩下項

上舍上等通仕郎.

上舍中等登仕郎.

上舍下等將仕郎.」

(2) 宋史[1]

宋神宗元豐七年(1084),詔選命官通算學者,

(1) 見宋史卷十九,本紀第十九;卷二十,本紀第二十;卷二十二,本紀第二十二;卷一百零五,禮志第五十八,禮八;卷一百五十七,選舉志第一百一十,選舉三;又卷一百六十四,職官第一百十七,職官四.參看宋洪邁慶元二年(1196)容齋三筆卷十三,「大觀算學」條.

通於吏部就試,其合格者上等除博士,中次爲學諭.

宋哲宗元祐元年(1086),初議者謂:本監雖準朝旨造算學,元未興工,其試選學官,亦未有應格,竊慮徒有煩費,乞罷修建.

宋徽宗崇甯三年(1104)六月壬子置書,畫,算學.遂將元豐算學條例,修成敕令.學生以二百一十人爲額,許命官及庶人爲之.其業以九章,周髀,及假設疑數爲算問,仍兼海島,孫子,五曹,張丘建,夏侯(陽)算法,并歷算,三式,天文書,爲本科.

崇甯五年(1106)正月丁巳罷書,畫,算,醫四學.以算學附於國子監.十一月從薛昂請復置算學.

大觀三年(1109)太常寺考究,以黃帝爲先師,風后等八人配饗.自常先,力牧至周王朴以上從祀凡七十人.

大觀四年(1110)三月,以算學併入太史局,後入祕書省.

宣和二年(1120)罷算學,并罷官吏.

四庫本宋李攸宋朝事實卷九所舉北宋算學事實與宋史上記各條相同.館案以爲宋史採自宋朝事實.其次則宋會要卷一百三十二,崇儒五,算學條.所記與宋史,宋朝事實,互有詳略.

(3) 宋會要[1]

元祐元年(1086)六月二十八日看詳編修國子監太學條例所狀……准朝旨踏逐到武學東大街北其地堪修算學,乞令工部下所屬檢計修造.奉聖旨依今看詳上件,算學已准朝旨蓋造,卽未曾興工.其試選學官未有人應格.切慮將來建學之後,養士設科,徒有煩費,實於國事無補,今欲乞賜詳酌寢罷.詔罷修建.

崇甯五年(1106)四月十二日詔書,畫,算,醫四學幷罷.

崇甯六年(1107)十一月都省劄子……今將元豐算學條例,重加删潤,修成勅令.幷對修看詳一部,以崇甯國子監算學敕令格式爲名,乞賜施行.從之.……

(1) 據大興徐松輯大典本,宋會要,吳興劉承幹編定.今藏北平國立北平圖書館.幷已影印行世.

大觀三年(1109)三月十八日禮部狀據太常寺申算學以文宣王爲先師.……十一月七日太常寺奉詔天文算學,合奉安先師,并配饗從祀繪像未盡典禮.可否禮官考古稽禮,考究以聞者.臣等竊詳……今算學所習天文,歷算,三式,法算四科,其術皆本於(黃)帝,臣等稽之載籍,合之典禮,謂尊黃帝爲先師……王朴已上七十人,今欲擬從祀.

大觀四年(1110)三月二日詔算學生併入太史局.學官及人吏等并罷.……

政和三年(1113)三月二十三日大司成劉嗣明奏.承前算學內舍算學生武仲宣於去年三上封章,乞留算學等.奉聖旨令國子監依元豐六年九月十六日指揮施行.本監申伏覩舊算學見今空閒,舍屋具存,別無官司拘占相度,欲乞依舊爲算學從之.六月二十八日算學奏承朝旨復置算學.今檢會崇甯國子監算學條(疑作敕)令乞下諸路提舉學事司行下諸州縣等……諸學生本科所習外占一小經.遇太學私試間月一赴.欲占大經者聽補試〔命官公試

同〕.九章義三道,算問二道.算學,命官公試:一入上等轉一官〔……〕,三入中等循一資〔……〕,五入下等占射差遣〔……〕.算學升補上舍:上等通仕郎,上舍中等登仕郎,上舍下等將仕郎.學生習九章,周髀,及算問〔謂假令疑數〕,兼通海島,孫子,五曹,張丘建,(夏)侯陽算法.私試:孟月〔季月同〕:九章二道,周髀一道.算問二道.仲月周髀義二道.九章義一道,算問一道.陞補上內舍:第一場九章義三道,第二場周髀義三道,第三場算問五道,從之.

宣和二年(1120)七月二十一日詔:算學,元豐中雖存有司之請,未嘗興建.又所議置官,不過傳授二員.今張官置吏,考選而任使之,大略與兩學同.既失先帝本旨.賜第之後,不復責以所學,何取於教養.可幷罷官吏.……

宣和二年詔語於科舉末流之弊,曾深切言之,南渡以來,此學遂廢.

(1) 宋鮑澣之九章序,稱:「本朝崇甯,亦立於學官.故前世算數之學,相望有人.自衣冠南渡以來,此學既廢.非獨好之者寡,而九章算經亦幾

泯沒無傳矣」.

7. 宋刊算經十書

唐立算學,李淳風因註十部算經.宋代再置算學.同時因而刊刻算經十書,用備研習.宋會要,稱:「奉聖旨,今國子監依元豐六年九月十六日指揮施行」,宋史,稱:「元豐七年,詔選命官通算學者,通於吏部就試」,宋本周髀,孫子,五曹,緝古,夏侯陽,九章諸算經有:「元豐七年九月口日」,字樣,而緝古,夏侯陽,九章諸算經,又有宰輔大臣官銜姓名一幅,司馬光以下并列名其上.并有三行,書:「元豐七年九月二十八日,進呈奉,御寶批宣依已校定鏤板」字樣.復次則:

宋王應麟玉海卷四十四.稱:

「孫子算經三卷 元豐間祕書監趙彥若等校定.
五曹算經五卷 元豐間祕書監趙彥若等校定.
緝古算經一卷 元豐間祕書監趙彥若等校定.
海島算經一卷 元豐間祕書監趙彥若等校定.」

宋馬端臨文獻通考卷二百一十九,稱:

「夏侯陽算經一卷 無註 元豐京監本」.

宋陳振孫:直齋書錄解題亦稱:

「(夏侯陽)算經三卷　無註　元豐京監本」.

靖康二年(1127)金人入汴,祕閣三館書籍,監本印板,并取而去,府庫蓄積,爲之一空,祕閣圖書,狼籍泥土中.(1)

玉海稱:「紹興九年(1139)九月七日,詔下諸郡索國子監元頒善本,校對鏤版.十五年(1145)閏十一月博士王之望請:羣經義疏,未有版者,令臨安府雕造.二十一年(1151)五月詔令國子監訪尋五經三館舊監本,刻版.上曰:其他闕書亦令次第雕版雖重有所費,亦不惜也」.而於算經之重刻尙未暇顧及.直至嘉定五,六年(1212, 1213)汀州守括蒼鮑澣之始重刊元豐監本.

明程大位算法統宗卷末「算經源流」條,稱:「宋元豐七年(1084)刊(算經)十書入祕書省,又刻於汀州學校.

黃帝九章　周髀算經　五經算法　海島算經　孫子算經　張丘建算經　五曹算法　緝古算法　夏侯陽算法　算術拾遺」.

所謂「又刻於汀州學校」者:除算術拾遺外,并鮑

(1) 參考宋史欽宗本紀,宣和錄,繫年要錄,三朝北盟會編卷七十三.

澣之重刊元豐監本也.就中九章一書,據宋楊輝詳解九章算法序,則慶元六年(1200)之夏鮑澣之在都城,與太史局同知算造楊忠輔德之論曆,因從其家得古本九章.嘉定五年(1212)因數術記遺不立於崇寧學官,因於汀州七寶山三茅寧壽觀道藏中錄得,非從監本重雕.至周髀算經亦有鮑澣之序題:「嘉定六年癸酉(1213)十一月一日丁卯冬至,承議郎權知汀州軍州兼管內勸農事主管坑冶括蒼鮑澣之仲祺謹書」.考弘治汀州府誌職官門知澣之以嘉定六年以朝奉郎知本州,八年(1215)除刑部郎官離任.算經之刊,當在其始事時.(1)

王國維五代兩宋監本考卷中,稱:

北宋監本

周髀算經二卷　　九章算術九卷　　孫子算經三卷
數術記遺一卷　　海島算經一卷　　五曹算經五卷
夏侯陽算經三卷　張丘建算經三卷　五經算術二卷
緝古算經一卷

「祕書省

(1) 見中華民國二十二年十二月七日大公報圖書副刊第六期內趙萬里芸盦郡書題記.

某某算經一部×× 共×册

元豐七年九月　日校定,降授宣德郎祕書省校書郎

臣葉祖洽上進

校定承議郎行祕書省校書郎臣王仲脩

校定朝奉郎行祕書省校書郎臣錢長卿

奉議郎守祕書丞臣韓宗古

朝請郎試祕書少監臣孫覺

降授朝散郎試祕書監臣趙彥若」

影宋本(周髀算經),五曹算經,孫子算經,夏侯陽算經,五曹算經,(緝古算經),後,均有此九(八)行.

「元豐七年九月二十八日

進呈奉

御寶批宜依已校定鏤板

朝奉郎祕書丞上騎都尉賜緋魚袋臣韓治

朝散郎試祕書少監上騎都尉賜緋魚袋臣顧臨

朝議大夫守祕書少監上護軍賜紫金魚袋臣劉攽

中大夫守尚書右丞護軍東平郡開國侯食邑二千三

百戶賜紫金魚袋臣呂大防

通議大夫守尚書左丞上柱國平原郡開國公食邑二

千八百戶食實封伍百戶臣李淸臣

正議大夫守中書侍郎上柱國馮翊郡開國公食邑二千三百戶食實封伍百戶臣張璪

正議大夫守門下侍郎上柱國南陽郡開國公食邑二千一百戶食實封壹阡戶臣韓維

金紫光祿大夫守尙書右僕射兼中書侍郎上柱國東平郡開國公食邑六千二百戶食實封壹阡玖伯戶臣呂公著

正議大夫守尙書左僕射兼門下侍郎上柱國河內郡開國公食邑四千一百戶食實封壹仟伍伯戶臣司馬光」.

影宋本夏侯陽算經後有此十一(十二)行.(1)

證以王應麟,馬端臨,陳振孫,及宋刻算經,則元豐七年趙彥若校定算經之可考者,有:周髀,孫子,五曹緝古,海島,夏侯陽,九章,張丘建,至程大位所稱五經算法,算術拾遺,元豐時是否有刻本尙待考證.

復次則宋會要,稱:「(政和)六年(1116)四月十九日詔通仕郎武仲宣,自大觀初興復算學,後來註釋考正見行算經一百八十九卷,特與循一資」,(2)見行算經

(1) 王國維五代兩宋監本考卷中第42頁以下.

(2) 據大興徐松輯大典本宋會要卷一百三十二引永樂大典卷二萬二千.吳興劉承幹編定,今藏北平國立北平圖書館.

一百八十九卷中必包括算經十書,惜其詳不可得聞矣.

8. 元明數學教育制度

元以外族入主中華但在通制條格官書中,學令,選舉各目尙記肄業算學條文.入明則洪武初年科舉兼試算學.宣德嘉靖以後不復及矣.

(1) 明太祖實錄:洪武三年(1370)八月.京師及各行省開鄉試.……中式者後十日復以五事試之.曰:騎,射,書,算,律.騎,觀其馳驅便捷;射,觀其中之多寡.書,通於六義.算.通於九法[(1)]

(2) 日知錄卷十一,「經義論策」條註,稱「(洪武)二十五年(1392)二月甲子,儒學生員,兼習射與書算,俟其科貢,兼考之.後廢.

(3) 禮部志稿卷七十稱:「正統十五年(1450)監察御史朱裳奏言……太祖高皇帝首立學校,令各治一經.以禮樂書算分科立教」.[(2)]

(4) 皇明太學志卷七,「講肄」條按,稱:「原洪

(1) 日知錄卷十一,「經義論策」條引.

(2) 見四庫全書珍本初集本,禮部志稿.

武二十五年(1392)所頒數法,凡生員每日務要習學算法.必由乘,因,加,歸,除,減,精通九章之數.昔之善教者,經義治事,貴在兼通,曾謂律令數學,切於日用,可忽而不之學乎」.[1]

(5)日知錄卷十一,「經義論策」條註稱:「宣德四年(1429)九月乙卯,北京國子監助教王仙言,近年生員,止記誦文字,以備科貢.其於字學算法,略不曉習.改入國監,歷事諸司,字畫麤拙,算數不通,何以居官蒞政.乞令天下儒學生員,并習書算,上從之」.

(1) 見皇明太學志十一卷.嘉靖三十六年(1557)郭鎜序.

清代數學教育制度

目　　次

1. 清初數學教育制度上

明末曾由耶穌會士主修歷法,未竟,而明社已屋.清世祖初仍由湯若望(Schall Von Bell, Jean Adam, 日耳曼人, 1591—1666)輩繼續修補.於順治二年(1645)成新法歷書一百卷,及其末年(1659—1661)楊光先等肆力反對新法,朝廷無人精通歷算,可備徵詢.聖祖初即位,便興大獄,演成流血慘劇,其後楊光先亦得罪而去.[1]聖祖有鑒於此,乃銳意學習歷算,由西教士教授,

(1) 見李儼,明清之際西算輸入中國年表,中算史論叢(一),第149—193頁,民國二十年(1931)上海(商務).

幷編數理精蘊等書,而國學中亦設算學館,其制度散見大清會典,清文獻通考等書.

嘉慶二十三年(1818)續修大清會典卷六十一,「國子監」條稱:

「國子監……掌國學之政令,凡貢士,監生,學生之隸於監者,皆教之.

監生之別有四:曰恩監生〔……又八旗官學生,漢算學生,算學肄業生,每屆三年,欽派大臣,考取恩監生一次〕.曰廕監生,…….學生之別有二,曰八旗官學生〔……〕,曰算學生〔滿洲,蒙古,漢軍算學生於官學生內考取;漢算學生:舉人,貢生,監生,廩增附生,俊秀,幷准考取〕……」.

嘉慶二十三年(1818)續修大清會典卷六十一,又稱:

「算學:管理大臣,滿洲一人「由特簡」(助教漢一人),(1)教習漢二人,掌教算法.〔額設算學生,滿洲十二人,蒙古六人,月給銀一兩六錢;漢軍六人,月給銀一兩;漢六人,月給銀一兩五錢.凡線,面,體,三部各限一年通

(1) 光緒二十五年(1899)欽定大清會典卷七十六,多括弧內一句.

曉.七政共限二年通曉.每季小試,歲終大試,會同欽天監考試.五年期滿,管算學大臣,會同欽天監考取.凡滿洲,蒙古,漢軍充補各旗天文生漢人若舉人引見以博士用,貢監生童亦以天文生補用.其有通習經史者照官學生例,俟考取監生時,咨送國子監,一例考驗,文理明通者,即爲監生).」(1)

清文獻通考職官考,稱:

「八旗官學,分教八旗子弟;算學館,分教算學生」.(2)

清文獻通考卷七十九,稱:

「國子監·算法館,助教漢人一人」.

淸文獻通考卷八十三,稱:

「算法館,助教漢人一人,分教算學生.……算法館,與俄羅斯學助教,俱於六堂官助教內遴委兼司之」.

光緒二十五年(1899)欽定大淸會典,稱:

「六堂:教貢生監生之所,分爲(甲)率性,(乙)修道,(丙)誠心,(丁)正義,(戊)崇志,(己)廣業等六堂.每堂酌設助教,學正,學錄;掌分教肄業之事.董以學官,率以齋

(1) 原文見嘉慶二十三年(1818)續修大清會典卷六十一,并參看光緒二十五年(1899)欽定大淸會典卷七十六.

(2) 見黃炎培,中國教育史要(萬有文庫本)引.

長,皆月課,以時講貫其義」.

2. 清初數學教育制度下

清初數學教育制度之有年代可考者,按清文獻通考,會典事例,東華錄,自康熙九年(1670)迄道光三年(1823),倘可輯得若干條.

「康熙九年(1670)(九月戊午),諭:天文關係重大,必選擇得人,令其專心習學,方能通曉精微.可選取官學生,與漢天文生一同學習.有精通者,俟欽天監員缺,考試補用.尋(禮部)議於官學生內.每旗選取十名,交欽天監分科學習,有精通者,俟滿漢博士缺補用(從之)」,見清文獻通考.(1)

「康熙五十二年(1713)初設算學館,選八旗世家子弟,學習算法.以大臣官員,精於數學者司其事.特命皇子親王董之」,見清文獻通考(2)

「雍正三年(1725)命何國宗將算法館行走,明白

(1) 見席裕福,皇朝政典類纂卷二百十七,「學校五,太學,算學生」引文獻通考,光緒二十九年(1903)上海(圖書集成局).其括弧內文字,乃據東華錄「康熙十」校補.

(2) 参看席裕福,皇朝政典類纂卷二百十七,「學校五,太學,算學生」引會典事例.

測量人員,帶去測量河道」.見東華錄「雍正七」.

「雍正三年(1725)聖祖仁皇帝御製律歷淵源百卷,刊刻告成,內歷象考成四十二卷,律呂正義五卷,數理精蘊五十三卷.世宗憲皇帝御製序文頒行天下.令監官欽遵考成推算,以康熙二十三年甲子為元」.見會典事例卷八百三十.

「雍正十二年(1734)奏准康熙五十二年設算學館於暢春園之蒙養齋.簡大臣官員精於數學者,司其事,特命皇子親王董之.選八旗世家子弟學習算法.又簡滿漢大臣翰林官,纂修數理精蘊及律呂正義諸書.至雍正元年(1723)告成,御製序文鐫版頒行.自明季司天失職,過差罕稽,至此而推步測驗,罔不協應.際此理數大備之時,正當淵源傳授,垂諸億萬斯年,應於八旗官學增設算學.教習十六人,教授官學生算法,每旗官學資質明敏者三十餘人,定以未時起,申時止,學習算法」.見會典事例卷八百二十九,「國子監,算學」.

「乾隆三年(1738)停止教授八旗官學算法,專設算學.先是雍正十二年(1734)八旗官學增設算學,教習十六人,教授官學生算法.至是……所有官學生習算法之例,概行停止,尋議令欽天監附近專立算學,額

設教習二人,滿漢學生各十二人,蒙古漢軍學生各六人.卽以向來八旗教習算法,由舉人筆帖式,貢監生員出身補教習.……漢人無論舉貢生童,或世業子弟願入算學者聽,俟考試錄取.……功課中:線,面,體,三部各限一年」.見清文獻通考卷六七七,「學校考五,太學三」.

「乾隆三年奏准:設立官學,教養八旗子弟,專以讀書,繙譯爲業,以備將來錄用.至算法一藝,理數精微,非童稚所能驟通.況以一時之暫,教授三十餘人,勢難遍及.按算法乃欽天監專司,其如何教習錄取之處,應令酌量辦理,其官學生習算法,概行停止.

「又奏准:算學生每月膏火,照學官生例在各旗咨領,至漢算學生旅食京師,非漢軍在京有家產可比,較漢軍官學生,加銀五錢,由監於戶部領發.

「又奏准算學設漢教習二人,卽於奏停八旗官學內教習算學充補.月廩等項照八旗官學漢教習例.五年期滿,果能盡心訓課,著有成效者,該管大臣奏交吏部議敍.舉人筆帖式充補者,交與欽天監,以靈臺郎補用.貢監生員充補者,以挈壺正補用.官學生,算學生充補者,以博士補用.將來教習員缺於奏停教習拔補

完日,令該管大員,會同欽天監,於學內教習有成之人,考選充補.

「又奏准於欽天監附近地方專立算學一所,額設學生:滿洲漢人各十二人,蒙古漢軍各六人.滿洲蒙古漢軍即於八旗官學內,擇其從前會學算法,資性相近願學者,不拘旗分選取.漢人無論舉貢生童,或世業子弟,取同鄉京官印結,具呈國子監,會同管理算學大臣考試,秉公錄取.

「又奏准算法中:線,面,體,三部各限一年通曉.七政共限二年.每季小試,歲終大試,由算學會同欽天監考試,勤敏者奬勵,惰者黜退別補.

「又議准欽天監天文生,向以本旗考取生監補用,今應將五年期滿算學生,學有成效者,由該管大員會同欽天監秉公考取,擬定名次,咨吏部註册,俟各本旗天文生員缺挨補.至考取生監停其補用.再天文生每旗滿洲二人,漢軍一人,并無蒙古.今算學生既有蒙古六人,爲數無多,應與滿洲算學生一同考送吏部,按定名次,歸各該旗補用.漢算學生五年期滿,一同考取舉人引見,以博士用.貢監生以天文生補用」.以上并見會典事例卷八百二十九.

「乾隆四年(1739)奏准算學隸國子監管轄,應稱國子監算學.所有考校一應文移案卷,卽用監印鈐蓋.

「又奏准算學教習之飯食衣服,由監行文支給」.以上見會典事例卷八百二十九.

「乾隆四年(1739)定算學事宜文移案卷,俱歸國子監管轄,稱國子監算學,其教習之飯食衣服由監行文支給」.見淸文獻通考卷六十七,「學校考五;太學三」.

「乾隆六年(1741)議准滿洲蒙古漢軍算學生,向例與官學生一同考試監生,惟有童生考取漢算學生者,不得與考,嗣後漢算學生,有通習經史者,照官學生例,俟考試監生,咨送國子監,一例考驗,果文理明通,授爲監生,准應鄉試」.見會典事例卷八百二十九.

「乾隆十年(1745)奏准以欽天監天文生二十四人撥歸國子監,算學肄業,無庸別給膏火.其一切教法及應試考取,均照算學生例.倘教習不敷,卽選學業有成之算學生,協同分教,已補者卽食本俸,未補者仍領學生膏火」.見淸文獻通考卷六十七.

「乾隆十年奏准欽天監肄業生二十四人,撥歸算學肄業,無庸別給膏火.儻教習不敷,卽選學業有成之算學生,協同分教.已補者卽食本俸,未補者仍食學

生膏火.一應教習應試考取天文生,均照學生例」.見會典事例卷八百二十九.

「乾隆十二年(1747)奏准算學額設教習二人,協同分教三人,嗣後教習未滿五年,分教未經實授,遇有陞敍,如實心訓課勤慎稱職之人,均仍留教習,俟滿五年,奏明交部議敍」.見會典則例卷八百二十九.(1)

「乾隆二十五年(1760)議准考試庫使,將滿洲官學生,合例應考者,造册送吏部考試,算學生以四年奏准,照官學辦理之例,一體送考」.見會典事例卷八百二十九.

「乾隆三十五年(1770)定漢算學生得由童生考取監生,應鄉試.向例只滿洲,蒙古,漢軍算學生,得與官學生一同考取監生入場,至是議准得由童生考取監生應鄉試」.見清文獻通考卷六十七.

清初教學制度興革,已詳前諸條.算學制度在當日雖無多貢獻.但嘉道以來尚未全廢.考乾隆五十年(1784)湯大選任欽天監正,兼管國子監算學館,嘉慶十三年(1808)福文高任欽天監正,道光三年(1823)李拱辰任欽天監正,幷兼管國子監算學館,卽其證也.

(1) 清文獻通考卷六十七,記述此條,大致相同.

3. 教會學校之數學教育

基督教會所辦教育事業,始於道光十九年(1839),實以蒲倫博士(Dr. R. S. Brown)設學於澳門為嚆矢.此項學校,最初由教門公會(Denomination boards)獨立教會所創設,今多數小學及中學,尙由此等機關辦理.(1)道光二十五年(1845)美國聖公會主教文氏立學校於上海,後名約翰書院.同治十年(1871)又立學校於武昌,後名文華書院,并於光緒末年正式成立大學;同治三年(1864)美國長老會狄考文,(Rev. Calvin W. Mateer)設文會館於山東登州,同治五年(1866)英國浸禮會設廣德書院於青州,後二校合併為廣文學堂,設於濰縣.到民國六年(1917)又與濟南醫學校,青州神學校,合併為齊魯大學.美國美以美會於光緒十四年(1888)立匯文書院於北京,十九年(1893)公理會設潞河書院於通縣,後兩校合組為燕京大學.美國監理公會林樂知於光緒七年(1881)創設中西書院於上海,該會於光緒二十三年(1897)又設中西書院於蘇州.

(1) 中國基督教教育事業,第18頁,民國十一年(1922)上海(商務).

到二十七年(1901)與蘇州博習書院合併成東吳大學.美國長老會自光緒十一年(1885)卽在廣州,澳門諸地建設學校,其格致書院於光緒二十七年(1901)改嶺南學堂,至光緒三十年(1904)又改嶺南大學.(1)同治十三年(1874)英總領事麥君華陀及傅蘭雅(Dr. John Fryer)創辦格致書院於上海.(2)有格致書院課程附課題(1895)行世.

天主教在中國,於每教區設立天主教啓蒙學校(Écoles de Catechumeun),道光三十年(1850)開辦徐匯公學(College de St. Ignace de Zi-Ka-Woi),又有聖芳濟學校(College de Francis Xavier),光緒二十九年(1903)因京師譯學館以戊戌(1898)政變停辦,由蔡元培等商請耶穌會創辦震旦大學(Université L'aurore)於上海.(3)

(1) 何炳松三十五年來中國之大學教育,最近三十五年之中國教育上卷,第93—94頁,民國二十一年(1932)九月,上海(商務)初版,并參看民國二十三年(1934)二月二十日申報第四張(十五),「全國私立大學沿革」條.

(2) 見格致彙編第五年,秋季號.

(3) 參看:中國基督教教育事業,第18頁,民國十一年(1922)上海(商務).

何炳松,三十五年來中國之大學教育,最近三十五年之中國教育上卷,第93—94頁,上海(商務)..

民國二十三年(1934)二月二十日申報第四張(十五)「全國私立大學沿革」條.

是時學校初立,教科書籍缺乏,英美法各教士辦學者因自編教科書,以應此需要.大致有下列各種:

(甲) 耶穌教士編譯本。

(1) 心算初學六卷,登州哈師娘撰.

(2) 心算啓蒙一卷,美國那夏禮撰,1886年上海美華書館鉛印本.

(3) 西算啓蒙無卷數,1885年譯印本.

(4) 數學啓蒙二卷,英偉烈亞力 (Alexander Wylie, 1815—1887)撰.1853年偉烈亞力序刻本

(5) 筆算數學三册,美狄考文 (Rev. Calvin W. Mateer),鄒立文(字憲章,平度人)同撰.1892年狄考文序,益智書局印本.

(6) 代數備旨十三卷,美狄考文撰;鄒立文,生福維(字範五,平度人)同譯.1891年美華書館鉛印本.

(7) 代數備旨下卷十一章,美狄考文遺著,范震亞據遺稿校.1902年會文編輯社石印本.

(8) 形學備旨十卷,美狄考文,鄒立文,劉永錫同譯.1884年美華書館鉛印本.

(9) 八綫備旨四卷,美羅密士 (Loomis) 原撰,美潘愼文(Rev. A. P. Parker)選譯,謝洪賚校錄,1893年

潘慎文序於蘇州博習書院,1894年美華書館鉛印本.

(10) 代形合參三卷,美羅密士原撰,美潘慎文選譯,謝洪賚校錄.1893年美華書館鉛印本.

(11) 圓錐曲線無卷數,美路密司撰,美求德生選譯,劉維師筆述.1893年美華書館鉛印本.

(12) 格致須知初二集,英傅蘭雅輯.

內容: 算法須知,華蘅芳撰,1887年印本.

量法須知,英,傅蘭雅撰,1887年印本.

代數須知,英,傅蘭雅撰,1887年印本.

三角須知,英,傅蘭雅撰,1888年印本.

微積須知,英,傅蘭雅撰,1888年印本.

曲線須知,英,傅蘭雅撰,1888年印本.

餘無算不錄.

(乙) 天主教士編譯本.

(13) 課算指南無卷數.天主教啓蒙學校用書,今已絕版.

(14) 課算指南教授法無卷數.同上用書,今已絕版.

(15) 數學問答無卷數,佘賓王(P. F. Scherer, S. J.) 撰.1901年匯塾課本,上海土山灣書館鉛印本.

(16) 量法問答無卷數,佘賓王撰,同上書館鉛印本.

(17) 代數問答無卷數,佘賓王撰,1903年同上書館鉛印本.

(18) 代數學無卷數, Carlo Bourlet 撰,陸翔譯.1928年同上書館二次印本.

(19) 幾何學,平面,無卷數, Carlo Bourlet 撰,戴連江譯.1913年同上書館鉛印本.

同時新教育事業,多有西教士插足其間,如同文館館長卽爲丁韙良博士(Dr. W. A. P. Martin).又光緒二十四年(1898)間美人李佳白,狄考文建議設立總學堂,爲京師大學堂設立之先聲.而天津北洋大學,及上海南洋公學初立之時,幷得西人之助云.

4. 清末數學教育制度上

清初數學教育制度,初未養成數學人才.但數理精蘊等書,於學界尙有若干貢獻.降及中葉,初無此項數學教育之可言.自鴉片戰役以後,知非振興教育,不足以圖存.因於同治初年(1862)設立同文等館,施行西洋教育制度.但是時目標,僅知養成外交人才,而於

科學基礎之數學教育,尙未加注意.且其初期,學制系統,尙未建立,科舉亦未廢止.雖各項學校相繼成立,而收效未著.但其歷史尙可得言者,今臚陳如後:

（1）同文館,廣方言館之設立.

同治元年(1862)八月,總理各國事務衙門,奏設同文館於北京,內閣先於乾隆二十二年(1757)設有俄羅斯文館,至是併入.(1)是爲中國新教育設學堂之始.

「同治二年(1863)上海設廣方言館,廣東設同文館,均江蘇巡撫李鴻章所奏請」,見京師同文館學友會報告書.(2)

「廣方言館同治二年(1863)設於上海城內,八年移入江南製造局.學生正課四十名,附課四十名」,見江南製造局記卷二.

「同治初總理衙門設同文館,幷設印書處,以印譯籍.吳人馮桂芬倡議上海,廣東城應倣設」,說詳顯

(1) 黃炎培,中國教育史要(萬有文庫本),引京師同文館學友會第一次報告書.報告書,民國五年(1916)三月京華書局代印.

(2) 黃炎培,中國教育史要引.幷參看陳寶泉中國近代學制變遷史,第3頁.

志堂稿.「蘇撫李鴻章從其議,遂就上海敬業書院地址,建廣方言館,教西語西學,以譯書爲學者畢業之證」見墨餘錄.[1]

「上海李鴻章奏請飭廣東倣照同文館,設立學館,學習外國語言文字等語,已諭令廣東將軍等查照辦理」,見邸鈔.[2]

「同治二年(1863)諭,前已立同文館,現據李鴻章奏,上海已設立外國語言文字學館,廣東事同一律,應仿照辦理」.見東華續錄.

以上爲同文館,廣方言館設置情形.查同文館,廣方言館開設之初,僅以研究外國語言文字爲目標,後乃加課算學.且得名算師李善蘭(1811—1882)[3]爲教授,方定成如現在高中數學課程.

同治五年(1866)恭親王奏稱製造機器,必須講求天文,算學.議於同文館內添設算學館,以講求天文算

(1) 見鄭鶴聲,鄭鶴春,中國文獻學概要,第164頁,上海(商務),引.

(2) 據皇朝政典類纂卷二百三十引:「諭摺彙存」.

(3) 據李慈銘越縵堂日記第三十九册,第20—21頁:李善蘭光緒八年十月二十九日(9/XII/1882)卒,生於嘉慶十五年十二月八日(2/I/1811),年七十三.

學.[1] 此議當即實行.

同治五年(1866)八月「允郭嵩燾請,召生員鄒伯奇,李善蘭,赴同文館差委」,見東華續錄卷五十八,「同治」.

「同治五年,北京同文館於英,法,俄文三館以外,設天文,算學,化學,格致,公法各科」見畢桂芬,京師同文館學友會第一次報告書,序.[2]

「同治五年創設天文算學等科,以七年為期」,見前書.

據「京師同文館規」,[3] 分年課級,共須八年.

首年:認字寫字,淺解辭句,講解淺書.

二年講解淺書,練習句法,繙譯條子.

三年講各國地圖,讀各國史略,繙譯選編.

四年:數理啓蒙,代數學,繙譯公文.

---

(1) 原文見皇朝經世文三編卷一,未註年月.舒新城,近代中國教育史料第一册,第 8 頁,民國十七年(1928)三月上海(中華),定為同治五年,甚合,陳寶泉,中國近代學制變遷史謂此事在同治六年,待考.

(2) 黃炎培,中國教育史要引.

(3) 見舒新城,近代中國教育史料.第一册,第 9—11 頁,引皇朝蓄艾文編卷十四.陳翊林最近三十年中國教育史,第 47 頁,上海(太平洋),以為中學教育溯源於同文館,

五年:講求格物,幾何原本,平三角,弧三角,練習譯書.

六年:講求機器,微分積分,航海測算,練習譯書.

七年:講求化學,天文,測算,萬國公法,練習譯書.

八年:天文測算,地理,金石,富國策,練習譯書.

同文館加課天算之後,三十年間(自同治五年至光緒二十一年,1866—1895)未有改制,至光緒二十一年(1895)始由陳其璋奏請加以整頓.陳疏稱.

「伏思都中同文館爲講求西學而設,學生不下百餘人,歲費亦需鉅萬兩.而所學者祇算術,天文,及各國語言文字.在外洋祇稱爲小中學塾,不得稱爲大學堂.且自始至終,亦逐漸加功,仍屬有名無實,門類不分,精粗不辨,欲不爲外洋所竊笑也難矣」.見皇朝蓄艾文編卷十四.(1)

至廣方言館章程計分九條一辨志,二習經,三習

(1) 何炳松,三十五年來中國之大學教育,最近三十五年之中國教育,第56—58頁(1931),以爲「京師同文館規」所定八年課級和考試章程,恐怕都是陳(其璋)氏奏請整頓的結果,自註又稱:「近來有人以爲上面的(京師同文)館規,分年課級,和考試章程,都是同文館初設時所定,恐誤」。錄此備考。

史,四講習小學,五課文,六習算,七考校日記,八求實用,九學生分上下兩班.[1]

「其功課:國文,英文,法文,算學,輿地」,見江南製造局記卷二.

而習算細目,則見於李文忠奏議.據奏議稱:「李鴻章奏於上海設廣方言館,其課程午後卽學算術.無論筆算,珠算.先從加減乘除入手.中學熟習算經十書」.[2]又有廣方言館算學課藝(1896)行世.

(2)技術專修等學校之設立.

同治五年(1866)左宗棠奏設船廠於福建馬尾,并設隨廠學堂於船塢東北,學堂分爲兩部.一爲前堂,習法文,簡稱爲前學,練習造船技術.一爲後堂,習英文,簡稱爲後學,練習駕駛技術,總稱船政學堂,爲我國最早之技術專修學校.[3]

光緒六年(1880)李鴻章奏准建設北洋水師學堂

(1) 陳寶泉,中國近代學制變遷史,第6頁.

(2) 陳寶泉,中國近代學制變遷史,第9—10頁.

(3) 見陳翊林,最近三十年中國教育史,第48頁.

近代中國教育思想史第43—44頁.

陳寶泉中國近代學制變遷史,第10頁.

左文襄公奏稿卷十八.

於天津,內分駕駛,管輪,兩科.教授英文,幾何,代數,平弧三角,八線,級數,重學,天文,推步,地輿,測量.(1)

光緒十一年(1885)李鴻章奏設武備學堂於天津.十二年(1886)張之洞奏設陸軍學堂於廣東,十三年(1887)創設廣東水師學堂於廣東,二十一年(1895)創設湖北武備學堂,南京陸軍學堂.(2)

(3)小學校之創立.

光緒四年(1878)上海張煥綸創辦正蒙書院,爲最早之小學.該院有學生百餘人,分大中小各班,分設國文,輿地,經史,時務,格致,數學,歌詩等科,其後改梅溪學校.(3)

光緒二十二年(1896)上海設滬南三等學堂,與

(1) 見最近三十年中國教育史第48頁,及近代中國教育思想史第43—44頁.李文忠公全集奏稿卷四.

(2) 何炳松,三十五年來中國之大學教育,最近三十五年之中國教育,第60—61頁(1931).

湖北通志卷六十「學校志六,學堂」據「檔册」纂:「武備學堂在黃土坡,光緒二十二年(1896)總督張之洞,巡撫譚繼詢奏設」.

(3) 黃炎培,中國教育史要引梅溪學校五十週年紀念刊.

陳翊林,最近三十年中國教育史,第45—46頁.

正蒙書院同爲私立小學.[1]

光緒二十三年(1897)盛宣懷「奏陳開辦南洋公學情形疏」稱:「師道立則善人多,故西國學堂必探原於師範.蒙養正則聖功始,故西學學程必植基於小學,……上年(1896)二月間考選成才之士四十名,先設師範院,……復選年十歲內外至十七八歲止,聰穎幼童一百二十名,設一外院學堂,令師範分班教之,……今年復將二等學堂先行開辦,名曰南洋公學中院,以次續開頭等學堂,名曰南洋公學上院」.其章程內稱:南洋公學分四院:「一曰,師範院,卽師範學堂也;二曰外院,卽日本師範學校附屬之小學院也;三曰中院,卽二等學堂也;四曰上院,卽頭等學堂也」.[2] 外院課程有國文,算術,英文,輿地,史學,體操六門,每週授課四十二小時,此爲中國師範學校及附設公立小學校之始.[3] 并由師範院自編蒙學課本,以供外院學生應用,開中

(1) 吳研因,翁之達:三十五年來中國之小學教育,最近三十五年之中國教育,第1—2頁(1931).

(2) 舒新城,近代中國教育史料,第一册,第35—40頁(1928).

(3) 陳翊林,最近三十年中國教育史.第46頁.

國小學教科書之新紀元.[1]

南洋公學外院開辦之翌年,即光緒二十四年(1898)六月十七日,孫家鼐議覆五城,建立中學堂,小學堂疏,稱:

「查京師大學堂……附小學堂,額數八十名,……小學堂皆大員子弟.……此外就近願學者,均未議及,欲於五城添立小學堂,中學堂,俾土著之人,與外省在京之舉貢生監,及京官子弟一體入學.……」

此爲政府對於小學教育計畫,見於公牘之發端.[2]

同時小學校之可考者,更有:

「光緒二十四年(1898)無錫俞復等創立三等(公)學堂.

光緒二十五年(1899)吳縣陸基設立崇辨蒙學.

光緒二十六年(1900)天津有蒙養東塾.

光緒二十六年左右,北京有八旗奉直小學堂,齊

(1) 吳研因,翁之達,三十五年來中國之小學教育,最近三十五年之中國教育,第1—2頁(1931).

(2) 見吳研因,翁之達前文,及舒新城,近代中國教育史料第二册,第1—2頁.

東有遜業小學堂」.[1]

(4) 普通學校之設立.

學制系統未建立前之學校,除上述教會設立之學校,及同文館,廣方言館,技術專修學校,及海陸軍專校,幷小學校之外,又有普通學校,亦應時設立.

其在廣東,則光緒二十四年(1898)軍機大臣總理衙門「遵籌京師大學堂摺」,稱近年張之洞在廣東設廣雅書院,等語.其在前則學海堂於同治五年(1866)加增算學一門,孔繼藩曾於此習算經十書.[2]

其在兩湖,則「自強學堂在(武昌)三佛閣大朝街口,光緒十九年(1893)總督張之洞,巡撫譚繼洵建.分方言,格致,算學,商務,四門課士.三十年(1904)移算學於兩湖書院,裁去格致,商務二門,專課方言.分英,法,德俄,東,五國文言,各延教習分門教授,遷東廠口正街」[3].兩湖書院則有兩湖書院課程(1900刻)行世.

---

(1) 見吳研因,翁之達前文.而清議報全編卷二十一「戊戌(1898)政變記」光緒二十四年(1893)七月初三日條,有「王照繼開八旗奉直小學堂,皆著成效」之語,則八旗奉直小學堂之立在光緒二十四年前矣.

(2) 見陳澧續補本學海堂志.

(3) 湖北通志卷六十,「學校志六,學堂」據「檔册」.

光緒二十一年(1895)湖南湘鄉紳士,呈准該省巡撫,就劉襄勤公所創辦東山精舍,仿湖北自強學堂成法,分科造士,爲算學,格致,方言,商務四齋,并定章程二十四條,其第四條,稱:「入舍肄業者算學爲先,目前經費不敷,祇能先聘算學山長,蓋三角,八線,幾何,代數,實爲西學根本,不獨製造須探源於算術也.……」,又第六條稱:「算學當循序精進,初學一年.習幾何,代數,平三角,少廣.第二年則習曲線,微分,積分.第三年則習弧三角,及微積分之深義,立體之幾何」[1].

光緒二十三年(1897)秋,湖南時務學堂創立,由王先謙主辦,延梁啓超主講.以一年爲學習期,前六月爲溥通學,第七月至第十二月於溥通學之外,分公法,掌故,格算諸門.[2]其格算門教授算學,採用下列各書.

第七月:學算筆談(1882)

筆算數學(1892)

以上學算顯淺易入之書.

(1) 舒新城,近代中國教育史料第一册,第16—21頁,引.

(2) 舒新城,近代中國教育史料第一册,第40—61頁(1928).

第八月:幾何原本(1857)

形學備旨(1884)

二書宜參互讀.

代數術(1873)

代數備旨(1891)

二書宜參互讀.

第九月:幾何原本　形學備旨

代數術　代數備旨

第十月:同上.

第十一月:幾何原本　形學備旨

代數術　代數難題(1883)

第十二月:幾何原本

代數難題

代微積拾級(1859)　微積溯源(1874)

光緒二十二年(1896)陝西有味經學舍.(1)

光緒二十三年(1897)陝西味經刊書處傳刻下列各書:

九數通考補借根方八册,梅氏籌算二册,平三角

(1) 黃炎培:中國教育史要(萬有文庫本)引戊戌政變記卷七.

舉要二册,白芙堂算學二十一種四册,代數術六册,張秉樞,代微積拾級補草二册.微積溯源六册,泛倍數衍一册,學算筆談六册,學計韻言一册,課餘叢鈔四册.(1)

以上所述湖北自強學堂,湖南兩湖書院,東山精舍,陝西味經學舍,及與此同時之廣州實學館,後改博學館,江陰南菁書院,陽湖龍城書院等,雖亦取法「京師同文館規」,而課程分配不均,或幷未嘗授課,僅可稱爲書院式之學校.至光緒二十一年(1895)天津海關道盛宣懷奏辦天津中西學堂,分頭等二等,各四年畢業,其中二等學堂與中學相彷彿,是爲吾國創辦中學校之始,亦爲建立學制系統學校之先驅.盛稟於光緒二十一年(1895)八月十二日由北洋大臣王文韶轉奏,十四日奉諭照准,王奏幷稱爲北洋西學學堂(2),故邸鈔稱:

「光緒二十一年(1895)北洋大臣直隸總督王文韶奏請創辦北洋西學學堂,以伍廷芳總辦頭等學堂,

(1) 見光緒二十七年(1901)味經官書局書目.

(2) 李世承,三十五年來中國之中學教育,最近三十五年之中國教育,上卷,第37頁,上海(商務);舒新城,近代中國教育史料第二册,第23—35頁,上海(中華).

蔡紹基總辦二等學堂,并延美國駐津副領事丁家立爲總教習」.見邸鈔.[1]

其功課之關於算學者:

二等學堂:第一年,數學,

第二年,數學,并量法啓蒙,

第三年,代數學,

第四年,平面量地法.

頭等學堂:第一年,幾何,三角句股學,

第二年,微分學,

第三年,無算學課

第四年,無算學課.

5. 清末數學教育制度下

清末維新事業,以光緒二十四年(1898)爲開端,是年四月二十三日下定國是之詔,五月初八日議開京師大學堂,同月命孫庭鼐管理大學堂事務,又命各省州縣府開設中西學堂.庚子(1900)變後,國人始知非變法不足圖存,光緒二十六年(1900)上諭京內外

(1) 席裕福,皇朝政典類纂卷二百二十七引「諭摺彙存」.

官條陳時政.光緒二十七年(1901)湖廣總督張之洞,兩江總督劉坤一曾三疏奏變法自強,時學制尚未立,科舉尚未廢也,至光緒二十八年,二十九年(1902—1903)始定學堂章程,光緒三十一年(1905)始廢科舉.[1]清代教育制度,至此始入正軌.

(1)維新興學.

維新興學始於光緒二十四年(1898),其事實見於東華錄者:

「光緒二十四年(1898)五月清帝諭催各省辦高等,中等學校及小學,義學,社學」,見光緒東華錄卷一四四.

「同年同月開辦京師大學堂,派孫家鼐管理,」見光緒東華錄卷一四五.

庚子(1900)拳禍作,大學停辦,至二十七年(1901)十二月辦學之議復興.

「光緒二十七年(1901),以庚子(1900)變後,下詔廣設大中小及蒙學堂」,見光緒東華錄卷一六九.

「光緒二十七年十二月(1902)特派張百熙爲管學大臣,管理學堂事務」,見光緒東華錄卷一七一.

(1) 光緒政要卷三十一,光緒三十一年八月.

「光緒二十九年十二月(1904)改管學大臣爲學務大臣」,見光緒東華錄卷一八四,及大清教育新法令第一編「諭旨」.

「光緒三十一年十一月(1905)設立學部」,見光緒東華錄卷一九七,及大清教育新法令第一編「諭旨」.

以上爲維新興學沿革,至其初期算學教學課程,則光緒二十七年(1901)五月張之洞,劉坤一,「會奏變法自強第一疏」,設文武學堂條,稱:

八歲以上入蒙學.

十二歲以上入小學校,學粗淺算法至開立方止,三年畢業.

十五歲以上入高等小學校,學較深算法,至代數幾何止,三年畢業.

十八歲以上入中學校,學精深算法,至弧三角,三年畢業.

……………………………………

奉硃批着照所擬章程,切實辦理,仍隨時考核,期收得人之效.[1]

* * * *

(1) 見舒新城,近代中國教育史料第一册,第77—90頁.皇朝政典類纂卷二百十七,引「邸鈔」.

（2）京師大學堂等之創立.

京師大學堂最初倡於光緒二十二年(1896)李端芬之奏請,[1]其見於官書者,則光緒東華錄卷一四五,稱:「光緒二十四年(1898)五月開辦京師大學堂,派孫家鼐管理」,但亦虛有其名.或因光緒二十八年(1902)奏辦京師大學堂情形疏中有「查大學堂開辦約有二年」之語,以爲大學開辦應在光緒二十六年(1900)以後.[2]今據邸鈔稱:

「光緒二十七年十二月初一日(10/I/1902)諭,已有旨飭辦京師大學堂,幷派張百熙爲管學大臣,所有從前設立之同文館,毋庸隸外務部,著卽歸入大學堂,一倂責成張百熙管理事務,卽認眞整頓,以副委任」,見邸鈔.[3]

光緒二十八年(1902)正月張百熙「奏辦京師大學堂」摺,稱:「查大學堂開辦約有二年,學生從未足額,一切因陋就簡」,是前此虛有其名,至此方趨實際.

---

(1) 見何炳松三十五年來中國之大學教育.最近三十五年來之中國教育,第74—76頁.

(2) 見何炳松前文.

(3) 見皇朝政典類纂卷二百三十引「邸鈔」.

光緒二十七,八年間(1901—1902)各省紛紛設立大學堂,如陝西就味經.崇實兩書院合併為宏道大學堂,「政藝叢書(光緒癸卯,1903)政書通輯卷五.陝學沈奏辦高等學堂情形摺」.

山西有晉省大學堂之設立,「政藝叢書,(光緒壬寅,1902)政書通輯卷六,管學大臣張遵旨覆陳學堂事宜」,并將教案賠款所辦的中西大學堂歸併山西大學堂,作為西學專齋「同上政書通輯卷五,山西巡撫摺」.

河南有河南大學堂的籌辦,「同上內政通記卷三,學務文牘輯要」.

湖北就兩湖書院改為兩湖大學堂,「同上」.

湖南就求志書院改為湖南大學堂,「同上政書通輯卷四,湘撫奏陳改設學堂,并派人出洋游學摺」.

廣東就廣雅書院改為廣東大學堂,「同上政書通輯卷五,粵督陶奏設廣東大學堂請廢科舉摺」.

江蘇就江陰南菁書院改為江蘇全省南菁高等學堂,「同上,政書通輯卷一江蘇南菁書院遵改學堂試辦章程」.

浙江亦把求是書院改爲浙江大學堂.[1]

至宣統年除京師大學堂,山西大學堂外,各省紛紛改爲高等學堂,可知者有江南,福建,廣東,湖南,山東,陝西各高等學堂.

是時學校雖相繼成立,而教課尙未嘗統一,光緒二十七年(1902)袁世凱山東試辦大學堂暫行章程摺稿,二十八年(1901)漕運總督奏設試辦江北大學堂,及二十八年(1902)袁世凱等設直隸師範暨小學堂暫行章程,其參差不齊之處,一望而知.

(1)山東試辦大學堂暫行章程摺稿.袁世凱光緒二十七年(1901)奏上.

備齋:一年首季　　一年次季

數學「加減乘除至比例」　　數學「全」

二年首季　　二年次季

代數　　代數「全」

正齋:一年首季　　一年次季

形學「中五卷」　　形學「全」圓錐曲線

二年首季　　二年次季

(1) 見何炳松,三十五年來中國之大學教育,最近三十年來之中國教育,第77—78頁.

八線　句股	同上季
三年首季	三年次季
代形合參	微積學
四年首季	四年次季
不授算學	代數根原

(2) 漕運總督,光緒二十八年 (1902) 奏設試辦江北大學堂章程.(1)

第一年首季	第一年次季
算學「加減乘除至比例」	算學「全」
第二年首季	第二年次季
代數「上半本」	代數「全」幾何「一,二兩本」
第三年首季	第三年次季
幾何「三,四兩本」平三角	弧三角

(3) 光緒二十八年 (1902) 袁世凱籌設直隸師範暨小學堂暫行章程.(2)

小學堂

第一年　筆算「分數,整數,小數加減乘除」

第二年　筆算「比例,百分,開平方,開立方」

---

(1) 見江北高等學堂試辦章程木刻本.

(2) 見皇朝政典類纂卷二百二十九引.

第三年　代數　幾何「平積」

第四年　幾何「平積」

師範學堂

第一齋　「半年畢業」

算學:　筆算「整數,分數,小數加減乘除」

珠算「加減乘除」

第二齋　「一年畢業」

算學:　筆算「整數,分數,小數加減乘除,比例,百分,開平方,開立方」

珠算「加減乘除」

第三齋　「二年畢業」

第一年

算學:　筆算「整數,分數,小數加減乘除,比例,百分,開平方,開立方,」

珠算「加減乘除」

第二年

算學:　代數,　珠算「熟習」

第四齋　「三年畢業」

第一年

算學:　筆算「整數,分數,小數加減乘除,比例,百

分,開平方,開立方」

珠算「加減乘除」

第二年

算學: 代數 珠算「熟習」

第三年

算學: 代數 幾何「平積」

* * * *

(3) 欽定學堂章程.

「光緒二十八年(1902)正月張百熙訂呈大學堂章程,七月訂呈高等,中,小學堂章程,先後頒布」.見光緒東華錄卷一七二,是稱欽定學堂章程.其系統如下圖.

其算學教授制度則

蒙學堂 六七歲入學 四年畢業

第一年 不授算術

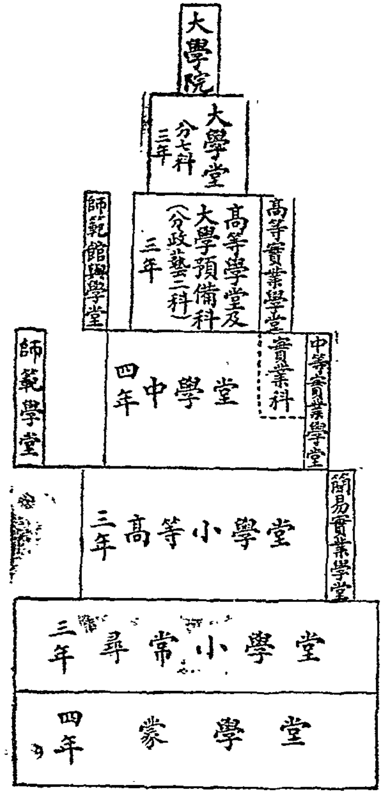
第二年 不授算術

第三年 算術(1週4時)[1] 數目之名

第四年 算術(1週4時)加減法

尋常小學堂 十歲入學 三年畢業

(1) 原文一週十二日,即兩星期,此按一星期折合.



第一年　算術(1週3.5時).加減乘除.

第二年　算術(1週1.5時).加減乘除,繁數.

第三年　算術(1週4時).同上.

高等小學堂　十三歲入學　三年畢業

第一年　算術(1週4時).度量衡及時刻之計算.

第二年　算術(1週4時).分數,小數.

第三年　算術(1週5時).比例.

中學堂　十六歲入學　四年畢業

第一年　平面幾何(1週6時).直線.

第二年　平面幾何(1週6時),面積,比例.

第三年　立體幾何,代數(1週6時).代數……加減乘除,分數.

第四年　代數(1週3時).方程.

高等學堂,及大學預備科(政科)　二十歲入學,三年畢業

第一年　代數,三角(1週3時).代數……級數,對數.

第二年　解析幾何,三角(1週3時).

第三年　曲線(1週3時).

同上(藝科)

第一年　代數,三角(1週6時).代數……級數,對數.

第二年　解析幾何,測量,曲線(1週5時).

第三年　微分,積分(1週6時).

仕學館　三年畢業

第一年　算術(1週3時)加減乘除,比例,開方.

第二年　平面幾何(1週3時).

第三年　立體幾何,代數(1週4時)

師範館　四年畢業

第一年　算術(1週3時).加減乘除,分數,比例,開方.

第二年　算術,幾何(1週4時).算術……賬簿用法,算表成式.幾何……面積比例.

第三年　代數,立體幾何(1週4時).代數……加減乘除,分數,方程.

第四年　代數,算學及幾何之次序方法(1週6時),代數……級數,對數.

*　*　*　*

(4) 奏定學堂章程.[1]

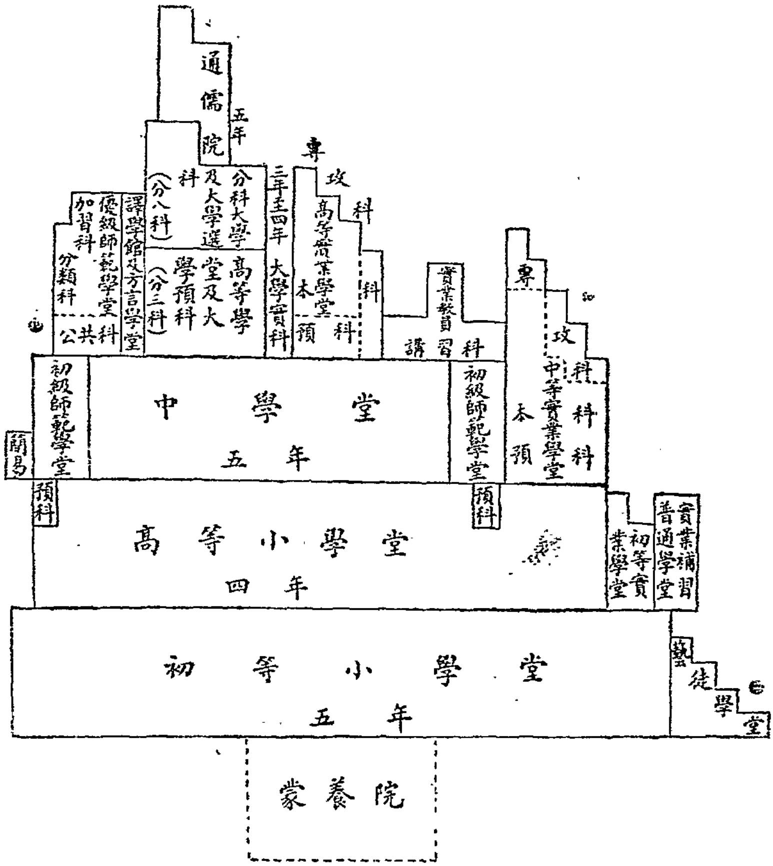
光緒二十八年(1902)學制雖經欽定,却未實行,至光緒二十九年(1903)又經張之洞,榮慶,與張百熙三人會同重訂,是爲奏定學堂章程.光緒東華錄卷一八四稱:

「光緒二十九年(1903)十一月張百熙,榮慶,張之

(1) 見刻本奏定學堂章程.

洞奏重訂學堂章程附學務綱要」.

是也.此章程改中學爲五年,全體系統增加一年,共二十一學年,如下圖:



其算學教授制度,則

初等小學堂　七歲入學　五年畢業

第一年　算術(1週6時).數目之名　實物計數　二十以下之算數　書法　記數法　加減.

第二年　算術(1週6時).百以下之算數　書法記數法　加減乘除.

第三年　算術(1週6時).常用之加減乘除.

第四年　算術(1週6時).通用之加減乘除.

小數之書法　記數法　珠算之加減

第五年　算術(1週6時).通用之加減乘除

簡易之小數　珠算之加減乘除.

高等小學堂　十一歲入學　四年畢業

第一年　算術(1週3時)　加減乘除　度量衡貨幣及時之計算　簡易之小數.

第二年　算術(1週3時)　分數　比例　百分數　珠算之加減乘除.

第三年　算術(1週3時)　小數　分數　簡易之比例　珠算之加減乘除.

第四年　算術(1週3時)　比例　百分算求積　日用簿記　珠算之加減乘除.

中學堂　十五入學　五年畢業

第一年　算術(1週4時).

第二年　算術,代數,幾何,簿記(1週4時).

第三年　代數,幾何(1週4時).

第四年　代數,幾何(1週4時).

第五年　幾何,三角(1週4時).

初級師範學堂　五年畢業

第一年　算術(1週3時).

第二年　算術,幾何,簿記(1週3時).

第三年　幾何,代數(1週3時).

第四年　幾何,代數(1週3時).

第五年　代數,兼講教授算學之次序法則(1週3時).

優級師範學堂　公共科　一年畢業

第一年　算術,幾何,代數,三角法(1週3時).

分類科(第三類,算學理化)三年畢業

第一年　代數學　幾何學　三角法　微分積分初步(1週6時).

第二年　代數學　解析幾何學　微分(1週6時).

第三年　微分　積分(1週6時).

高等學堂　分三科甲,爲預備入文法科,乙,爲預

備入工科,丙,爲預備入醫科.

	甲科 每週	乙科 每週	丙科 每週
第一年	不授算學	代數.解析幾何(5)	代數,解析幾何 (4)
第二年	代數,解析幾何(2)	解析幾何,三角(4)	解析幾何,微分積分(2)
第三年	不授算學	微分,積分 (6)	不授算學

大學堂　分六門:一算學門,二星學門,三物理學門,四化學門,五動植學門,六地質學門.

算學門科目

主課	第一年每週	第二年每週	第三年每週
微分積分	(6)	(0)	(0)
幾何學	(4)	(2)	(2)
代數	(2)	(0)	(0)
算學演習	不定	不定	不定
力學	(0)	(3)	(3)
整數論	(0)	(3)	(3)
部分微分,方程式論	(0)	(4)	(0)
代數學及整數論	(2)	(4)	(4)
補助課			
理論物理學初步	(3)	(0)	(0)
同上演習	不定	(0)	(0)
物理學實驗	(0)	定	(0)
共計	(20)時	(16)	(12)

(5) 宣統二年改制.

宣統二年(1910)十一月又改學制將初等小學高等小學幷定爲四年畢業,比較光緒二十九年制度則宣統二年制初等小學算術時間減少,高等小學算術時間加多,宣統二年十二月二十六日(26/I/1911)學部具奏酌改中學堂爲文實兩科奉旨依議[1],是爲清代數學教育制度施行之尾聲,其算學教授制度,則

初等小學堂

第一年　算術(1週4時)數名　實物計算二十以下之數法　書法　加減乘除.

第二年　算術(1週4時)　百以下之數法書法　加減乘除.

第三年　算術(1週5時)　通常之加減乘除.

第四年　算術(1週5時)　簡易小數及諸等數.

高等小學堂

第一年　算術(1週4時)　整數,小數及諸等數之加減乘除.

第二年　算術(1週4時)　諸等數,分數加減乘除,求積應用問題.

(1) 見學部具奏酌改中學堂文實兩科課程摺.

第三年　算術(1週4時)　分數四則　百分數　利息　珠算加減乘除.

第四年　算術(1週5時)　比例　珠算　簿記.

中學堂文科

第一年(上)　算術(1週4時)　(下)算術(1週4時)

第二年(上)　算術(1週4時)　(下)算術(1週4時)

第三年(上)　代數(1週4時)　(下)代數(1週2時)

幾何(1週2時)　幾何(1週2時)

第四年(上)　代數(1週2時)　(下)代數(1週0時)

幾何(1週2時)　幾何(1週1時)

三角(1週0時)　三角(1週2時)

第五年(上)　三角(1週1時)　三角(1週1時)

以上通習

中學堂實科

第一年(上)　算術(1週6時)　(下)算術(1週6時)

第二年(上)　代數(1週6時)　(下)代數(1週3時)

幾何(1週0時)　幾何(1週3時)

第三年(上)　代數(1週3時)　(下)代數(1週2時)

幾何(1週4時)　幾何(1週4時)

三角(1週0時)　三角(1週2時)

第四年(上)	代數(1週2時)	(下)代數(1週2時)
	幾何(1週3時)	幾何(1週3時)
	三角(1週2時)	三角(1週2時)
第二年(上)	三角(1週2時)	(下)三角(1週2時)

6. 數學應用書籍

(1) 譯書事業.

國中繙譯西洋算學圖書,始於明清之際,[1] 清季則有李善蘭(1811—1882),華蘅芳(1833—1902).李與偉烈亞力(Alexander Wylie, 1815—1887)共譯幾何原本後九卷(1856),棣麼甘(Augustus De Morgan, 1806—1871)代數學(Elements of Algebra, 1835)十三卷(1859),羅密士(Elias Loomis, 1811—1899)代微積拾級(Analyticae geometry and Calculus, 1850)十八卷(1839),奈端(Isaac Newton, 1642—1727)數理(Principia)若干卷,與艾約瑟(Joseph Edkins)共譯曲線說三卷,一名圓錐曲線說(1866).至同治六年(1867)江南製造局設翻譯館,旁為刻書處,[2] 華蘅芳於此中與傅蘭雅(John Fryer)共譯

(1) 參看李儼,明清之際西算輸入中國年表,中算史論叢(一),第149—193頁,1931,上海(商務).

(2) 見江南製造局記卷二,及瀛濡雜志.

英華里司(?)代數術二十五卷(1873),微積溯源八卷(1874),英海麻士(Hymers?)三角數理十二卷(1877),英倫德(Thomas Lund)代數難題解法十六卷(1883),棣麼甘(Augustus De Morgan)決疑數學十卷,英白爾尼合數術十一卷(1888).李華所譯各書幷當時耶穌教士,天主教士所編譯各書,同爲學制未立前各學校所採用.

清末學生留學國外者日多,亦間有譯述,故日本澤田吾一,田中矢德,上野清,森外三郎,菊池大麓(1855-1917),白井義督,三輪桓一,原濱吉,樺正董,遠藤又藏,松岡文太郎,奥平浪太郎,宮崎繁太郎,三本清二,渡邊政吉,竹貫登代多等十餘人著述譯本,及宓爾(Milne),查理斯密(Charles Smith),費烈伯及史德朗(A. W. Phillips and W. M. Strong),克濟氏(John Casey),突罕德(Issac Todhunter),溫特渥斯(G. A. Wentwork),翰卜林斯密士(Hamblin Smith),駱賓生(Robinson),E. W Hobson, Mansfield, Merriman,諸人之譯本,幷流行於國中.

(2)教科書之採用.

清末興學之始,初未顧及教科用書問題,故其初

期尙採用舊有算經十書,幾何原本,數理精蘊,及李華幷西教士譯著各書,其中以筆算數學(1892),代數備旨(1891),形學備旨(1884),代形合參(1893),代微積拾級(1859)等書應用最廣,且有編爲細草,‥編者又不止一人,亦足以見其流傳之廣,如:

筆算數學全草六册,南洋公學張貢九撰,科學編輯書局寄售(有第二次改良本).

筆算數學詳草三册,金匱顧鼎銘撰,科學編輯書局寄售(有第三次改良本).

筆算數學題草圖解八册,朱世增撰,孟芳圖書館藏.

代數備旨全草六册,徐錫麟撰,1903年特別書局編印本.

代數備旨詳草,科學編輯書局本.

形學備旨全草,壽孝天撰,會文學社印本.

形學備旨習題詳草,科學編輯書局本.

形學備旨習題解證八卷,徐樹勳撰,1902年刻本.

八線備旨習題詳草八卷,劉鵬振撰,1906年紹興石印本.

代形合參解法四卷,王世撰.1907年石印本.

代微積拾級詳草.文明書局本.

代微積拾級補草二册.張秉樞撰,陝西味經官書局刻本.

此種採用舊書趨向,卽日本維新初期亦復如是,吾國所譯代數術(1873),代微積拾級(1895),數學啓蒙(1853),有由日本重版,或譯成日文者.[1]

光緒二十五年(1899)迄光緒二十九年(1903)學校採用之數學書,據光緒二十五年出版之東西學書錄,前有蔡元培序,其算學第十二,列舉下開各書,計:

心算啓蒙一卷,美那夏禮撰,美華書館印本(1886).

*筆算數學四卷,美狄考文(Calvin W. Mateer),鄒立文譯,益智書會本(1872).

西算啓蒙一册,無著撰人(1885).

數學啓蒙二卷,英偉烈亞力(Alexander Wylie)譯(1853).

數學理九卷附一卷,英棣麼甘撰,英傅蘭雅(John Freyer),趙元益同譯,製造局印本(1819.

算法天生法指南五卷,日本會田安明撰.

(1) 參看小倉金之助,數學教育史,昭和七年(1932),東京岩波書店.

*幾何原本,舊譯六卷,新譯九卷,共十五卷.金陵書局印本(1878).

算學奇題,算學奇論無卷數.格致彙編本.

*形學備旨十卷,美狄考文,劉永錫譯.益智書會本(1884).

代數須知一卷,傅蘭雅撰,格致須知本(1887).

*代數術二十五卷,英華里司(?)撰,英傅蘭雅,華蘅芳譯.製造局印本(1873).

*代數備旨六卷,美狄考文,鄒立文生福維譯.益智書會本(1891).

*代數難題解法十六卷,英倫德撰,英傅蘭雅,華蘅芳譯.製造局印本(1883).

決疑數學十卷,英傅蘭雅,華蘅芳譯.周氏刻本(1896).

*代微積拾級十八卷,美羅密士撰,英偉烈亞力,李善蘭同譯.墨海書局本(1859).

代形合參三卷附一卷,美羅密士撰,美潘愼文(Rev. A. P. Parker)謝洪賚譯.美華書館印本(1893).

三角須知一卷,英傅蘭雅撰,格致須知本(1888).

三角數理十二卷,英海麻士撰,英傅蘭雅,華蘅芳

譯.製造局印本(1878).

八線備旨四卷,美羅密士撰,美潘愼文,謝洪賚譯.美華書館印本(1893).

八線簡表一册,賈步緯校,製造局印本(1874).

對數表四册,賈步緯校,製造局印本(1885).

八線對數簡表一册,賈步緯校,製造局印本(1902).

新排對數表一册,美路密司撰,美,赫士 (W. M. Hayes),朱葆琛譯.益智書會本(1893).

曲線須知一卷,英傅蘭雅撰(1888).

圓錐曲線說三卷,英艾約瑟 (Joseph Edkins) 李善蘭譯,製造局印本.

圓錐曲線說一卷,美路密司撰,美求德生劉維師譯.美華書館印本(1893

算法圓理括囊一卷,日本加悅傳一郎撰.白芙堂叢書本(1852).

微積須知一卷,英傅蘭雅,華蘅芳撰,格致須知本(1888).

*微積溯原八卷,英華里司撰,英傅蘭雅華蘅芳譯.製造局印本(1874).

合數術十一卷,英白爾尼撰.英傅蘭雅華蘅芳譯.

刻本(1888).

算器圖說一卷,英傅蘭雅譯,格致彙編本.

新式算器圖說一卷,英傅蘭雅譯,格致彙編本.

量法須知一卷,英傅蘭雅撰,格致須知本.

算式集要四卷,英哈司韋撰,英傅蘭雅,江衡譯.製造局印本(1877).

以上所引爲當日標準用書,故光緒二十九年(1803)梁啓超撰西學書目表亦舉其中狄考文筆算數學至赫士新排對數表凡二十二種以示學者,其時務學堂於光緒二十三年(1897)亦採用其中算書,今附星點爲誌,以見一般.

學制系統未定以前,教科圖書初未編輯,卽有若干專科學堂或高等學堂,採用西文原本亦屬少數,且是時授課亦漫無標準,光緒二十七年(1901)五月張之洞,劉坤一,「會奏變法自強第一疏」雖曾一度說明,恐亦影響甚微,至光緒二十八年(1902),二十九年(1903)學制系統確立之後,外間對於教授算法標準方能確知教科書籍,需求尤切,下列各書局并於是時編印教科用書:

上海商務印書館　科學會編輯所　新學會社

文明書局 羣學社 科學書局 益智書會 普及書局 廣智書局 會文學社 科學編譯書局 北京理學社 直隸學務處 天津官報局 中國圖書公司 昌明公司

而以商務印書館爲尤著,該館於光緒二十三年(1897)創設於上海.莊兪於「三十五年來之商務印書館」一文,稱:

「我國自甲午(1894)戰後,上下奮興圖存,光緒二十八年(1902)七月頒佈學堂章程,是爲中國規定學制之始,有志教育之士,亟亟興學,無如學校驟盛,教科書殊感缺乏,遂有蒙學課本諸書之試編,但不按學制,不詳教法,於具體工具,猶多遺憾.本館編譯所首先按照學期制度,編輯修身,國文,算術,歷史,地理,格致諸種.每種每學期一册,復按課另編教授法,定名爲最新教科書,此實開中國學校用書之新紀錄,當時張元濟,高夢旦,蔣維喬,莊兪,杜亞泉諸君圍坐一桌,構思屬筆,每一課成,互相研究,互相删改,必至多數以爲可而後止,最新國文第一册初版發行,三日而罄,其需要情形,可以想見,自此擴大編纂小學以外凡中學,師範,女子各

教科書,絡繹出版,教學之風為之一變」.(1)

莊俞於「元年教育之回顧」一文又稱「商務書館小學教科書之編輯,實始於光緒乙巳(1905)丙午(1906)間」(2)丁致聘據「商務印書館創編教科書之經過」,「商務印書館鈔稿」稱:「光緒二十八年(1902)上海商務印書館添設編輯所,首先出版最新初等小學國文教科書,後分別編輯初等小學,高等小學,各科教科書兩套,十六種,為我國整套小學教科書之始,又編中學校用書十三種」.(3) 蔣維喬於「高公夢旦傳」稱「(光緒)癸卯(1903)之春編輯小學教科書,由徐巂(果人)任算學科」.(4) 蔣維喬又於「編輯小學教科書之回憶」,稱:「壬寅,癸卯間(1902—1903),

初等小學用有:徐　巂(果人)算術教科書　五册

杜就田(綜大)珠算入門　二册

高等小學用有:張景良,　算術　三册

黃啓明,　珠算　四册」.(5)

---

(1) 見莊俞,賀聖鼐,最近三十五年之中國教育(1929).

(2) 見教育雜誌彙編第四卷第十號.

(3) 見丁致聘,中國近七十年教育紀事,第11頁.

(4) 見東方雜誌第三十三卷,第十八號(1936).

(5) 見出版週刊新一百五十六號,第9—11頁,商務,并參看第一次中國教育年鑑.

截至宣統二年(1910),該館編譯初等小學,高等小學,中學,高等學堂,用書計有四十三種,[1] 而光緒三十一年(1905)所出版之最新初等小學筆算教科書,最新高等小學筆算教科書,書內一切算式已改排橫行矣.

而當時算學教科書受教育機關審定或採用,其見於記載者,則光緒三十一年(1905)江蘇督學唐景崇采輯中學堂暫用課本之書目[2]內稱:

「中學算學科

筆算教本二册　日本澤田吾一撰　崔朝慶譯　商務印書館本

代數備旨　美華書館本

形學備旨　美華書館本

參考書:

普通珠算課本一册　蔣仲懷編輯　商務印書館本

九數通考

(1) 見宣統二年(1910)商務印書館書目提要.

(2) 江蘇學政唐文宗審定中學堂暫用課本之書目,上海時中書局印本.

代數備旨全草　山陰徐錫麟編訂

形學備旨全草　會稽壽孝天衍補　會文學社

代數通藝錄　萬本書局

代數術

幾何原本」

而學部所審定者,據光緒三十二年(1906)四月學部定本學部第一次審定初等小學暫用書目,(1)內稱:

「初等小學

最新初等小學筆算教科書五册　陽湖徐嶲編　學生用　商務印書館本.

最新初等小學筆算教科書教授法五册　陽湖徐嶲編　教員用　商務印書館本.

而第七至第十學期教員可參用:

蒙學珠算教科書一册　文明書局編　文明書局本

初等小學珠算入門二册　山陰杜就田編　商務印書館本

一,二學期教員則可參用:

(1) 見學部第一次審定初等小學暫用書目.

心算教授法一册　直隸學務處編　直隸學務處本」。

3
404026
(6)