中學各科要覽

平面三角法

駱師曾 匡文濤編

平面三角法

編輯大意

一是書依據民國二十五年教育部頒布修正課程標準編輯,將平面三角法之知識整理之,以供高中畢業會考及大學入學考試之預備.

一是書爲便於記憶之書,可在最短期間,得最大之成效.

一是書正面載主要事項,以便學習,反面載問題之解答,以便練習後自行查對.

一是書篇幅雖少,形狀雖小,但各教科書之精華,皆已採取,頗便複習.

一近數年來各省市會考試題及大學入學試題,亦擇要列入,附加星號爲別,以清眉目而便研究.

平面三角法要覽

目次

	頁
角	1
三角函數相互之關係	3
三角恆等式之證明(其一)	5
三角恆等式之證明(其二)	7
三角恆等式之證明(其三)	9
餘角及特別角之三角函數	11
簡易測量問題(其一)	13
簡易測量問題(其二)	15
任意之角	17
三角函數值之變化	19
二角之三角函數之關係(其一)	21
二角之三角函數之關係(其二)	23
二角和之正弦餘弦	25
二角差之正弦餘弦	27
二角和及差之正切餘切	29
二倍角之正弦餘弦	31
二倍角之正切餘切	33
三倍角之三角函數	35
倍角之三角函數之問題	37
變正弦及餘弦之積爲和及差	39
變正弦之和及差爲積之形狀	41
分角之三角函數(其一)	43
分角之三角函數(其二)	45
正弦(或餘弦)之積與差之關係	47
恆等式問題(其一)	49
恆等式問題(其二)	51
對數之意義及公式	53
常用對數之意義及指標假數	55

頁
有眞數求對數之法……57
有對數求眞數之法……59
有角度求三角函數之對數……61
用對數解直角三角形之法……63
三角形邊角之關係(其一)……65
三角形邊角之關係(其二)……67
三角形邊角之關係(其三)……69
三角形邊角關係之應用問題……71
三角形半角與邊之關係……73
三角形之面積……75
三角形之外接圓……77
三角形之內切圓及傍切圓之半徑……79
三角形之中線及角之二等分線……81
任意三角形之解法(其一)……83
任意三角形之解法(其二)……85
任意三角形之解法(其三)……87
任意三角形之解法(其四)……89
任意三角形之解法(其五)……91

頁
測量問題(其一)……93
測量問題(其二)……95
測量問題(其三)……97
測量問題(其四)……99
反三角逆數(其一)……101
反三角逆數(其二)……103
反三角逆數(其三)……105
反三角逆數(其四)……107
三角方程式問題(其一)……109
三角方程式問題(其二)……111
三角方程式問題(其三)……113
三角方程式問題(其四)……115
三角方程式問題(其五)……117
三角方程程問題(其六)……119
三角方程式問題(其七)……121
消去法問題(其一)……123
消去法問題(其二)……125
消去法問題(其三)……127

角

測角法種類	角之單位	各單位間之關係	問題
六十分法	一直角九十等分之一曰一度，用此為角之單位. $1^\circ=60'$ $1'=60''$ (注意) ° ′ ″ 為度分秒之記號.	某角以弧度法測之，其測度為 θ 以六十分法測之，其測度為 D，則有次之關係： $\frac{\theta}{\pi}=\frac{D}{180^\circ}$. $\therefore\ \theta=\pi\times\frac{D}{180^\circ}$, $D=180^\circ\times\frac{\theta}{\pi}$.	(1) 0.65 直角為幾度? (2) $97^\circ5'15''$為幾直角? (3) 正三角形，正五角形，正六角形之一內角，各有幾度? (4) 某角之度數，以弧度法表之，則其數之二倍與原度數之和為 $23\frac{2}{7}$，問此角之度數如何?但 π 為 $\frac{22}{7}$. (5) 內角為等差級數，最小角為 120°，公差為 5°，問此為幾邊形?
弧度法	於任意之圓，取一中心角，使其所對之弧，等於半徑，是謂弧度，用此為角之單位. $1\text{ 弧度}=\frac{2\text{ 直角}}{\pi}$ $=57^\circ17'44.8''$.		

角之問題解答

(1) $90° \times 0.65 = 58.5°$,

$60' \times 0.5 = 30'$.

答 $58°30'$.

(2) $97°5'15'' \div 90°$

$= 349515'' \div 324000''$

$= 1.07875$.

答 1.07875 直角.

(3) $180° \div 3 = 60°$, 此乃正三角形之一角.

而正五角形之一角爲

$$180° - 360° \div 5 = 108°.$$

正六角形之一角爲

$$180° - 360° \div 6 = 120°.$$

(4) 令所求之度數爲 x 度.

此以弧度表之,則爲 $\frac{x}{180}\pi$.

由題意,得 $x + \frac{2x\pi}{180} = 23\frac{2}{7}$.

令 $\pi = \frac{22}{7}$.

則 $x\left(1 + \frac{1}{90} \times \frac{22}{7}\right) = 23\frac{2}{7}$.

$\therefore \quad x = 22\frac{1°}{2}$.

答 $22°30'$.

(5) 令此多角形爲 n 邊形,則

外角之和 $= 360°$,

最大外角 $= 180° - 120° = 60°$.

由等差級數之和之公式,得

$$\frac{n}{2}\{2 \times 60 - (n-1) \times 5°\} = 360°.$$

$\therefore \quad n = 16$ 或 9.

令 $n = 16$, 則最小外角爲

$$60° - 15 \times 5° = -15°.$$

是 16 不適用.

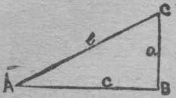
$\therefore \quad n = 9$.

答 九邊形.

三角函數相互之關係 (平面三角法3)

定義

次之六比,曰三角函數.



設 $B=90°$, 則

$\sin A=\dfrac{a}{b}=\dfrac{垂線}{斜邊}=\angle A$ 之正弦.

$\cos A=\dfrac{c}{b}=\dfrac{底邊}{斜邊}=\angle A$ 之餘弦.

$\tan A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{垂線}{底邊}=\angle A$ 之正切.

$\cot A=\dfrac{c}{a}=\dfrac{底邊}{垂線}=\angle A$ 之餘[illegible].

$\sec A=\dfrac{b}{c}=\dfrac{斜邊}{底邊}=\angle A$ 之正割.

$\operatorname{cosec} A=\dfrac{b}{a}=\dfrac{斜邊}{垂線}=\angle A$ 之餘割.

基本公式

倒數關係
$$\left\{\begin{array}{ll} \sin A\operatorname{cosec} A=1 & \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \cos A\sec A=1 & \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ \tan A\cot A=1 & \cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{array}\right.$$

相除關係
$$\left\{\begin{array}{ll} \tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A} & \cdots\cdots\cdots\cdots(4) \\ \cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A} & \cdots\cdots\cdots\cdots(5) \end{array}\right.$$

平方關係
$$\left\{\begin{array}{ll} \sin^2 A+\cos^2 A=1 & \cdots\cdots\cdots\cdots(6) \\ 1+\tan^2 A=\sec^2 A & \cdots\cdots(7) \\ 1+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^2 A & \cdots(8) \end{array}\right.$$

問題

(1) $\triangle ABC$, 其 $\angle B$ 爲直角, BC, AB 各爲 3, 4, 試求 A 之三角函數.

*(2) 已知 $\sin A=\dfrac{15}{17}$, 求 A 角其餘各函數.

*(3) 試以 $\tan A$ 表其餘諸函數.

(4) 設 $\cos A=\dfrac{12}{13}$, 試求 A 之其他三角函數.

(5) 設 $\tan A=2+\sqrt{3}$, 則 A 之其他三角函數如何?

(平面三角法4)　三角函數相互關係之問題解答

(1) $BC=3,\ AB=4,\ AC=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{AB}^2}=5.$

$$\therefore\quad \sin A=\tfrac{3}{5},\qquad \cos A=\tfrac{4}{5},$$
$$\tan A=\tfrac{3}{4},\qquad \cot A=\tfrac{4}{3},$$
$$\sec A=\tfrac{5}{4},\qquad \operatorname{cosec} A=\tfrac{5}{3}.$$

*(2) $\sin A=\dfrac{15}{17},\ \sin^2A+\cos^2A=1.$

$$\therefore\quad \cos A=\sqrt{1-\sin^2A}=\sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2}=\frac{8}{17}.$$
$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{15}{17}\times\frac{17}{8}=\frac{15}{8}.$$
$$\cot A=\frac{1}{\tan A}=\frac{8}{15}.$$
$$\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{17}{8}.$$
$$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}=\frac{17}{15}.$$

*(3) $\cot A=\dfrac{1}{\tan A}.$

$$\sec A=\sqrt{1+\tan^2A}.$$
$$\cos A=\frac{1}{\sec A}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2A}}.$$
$$\sin A=\tan A\cos A=\frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2A}}.$$
$$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}=\frac{\sqrt{1+\tan^2A}}{\tan A}.$$

(4) $\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{12}{13}\right)^2}=\dfrac{5}{13}.$

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{5}{13}\times\frac{13}{12}=\frac{5}{12}.$$
$$\cot A=\frac{1}{\tan A}=\frac{12}{5}.$$
$$\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{13}{12}.$$
$$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}=\frac{13}{5}.$$

(5) 與(3)同樣,得

$$\cot A=2-\sqrt{3},\qquad \sec A=\sqrt{6}+\sqrt{2},$$
$$\cos A=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\qquad \sin A=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$
$$\operatorname{cosec} A=\sqrt{6}-\sqrt{2}.$$

證法	問題

(1) 變複雜一邊之形等於他一邊之法.

例　試證明下式:

$$\tan^2 A+\cot^2 A-(\sin^2 A\tan^2 A+\cos^2 A\cot^2 A)=1.$$

(證)　$$\text{左邊}=\tan^2 A-\sin^2 A\tan^2 A+\cot^2 A-\cos^2 A\cot^2 A$$
$$=\tan^2 A(1-\sin^2 A)+\cot^2 A(1-\cos^2 A)$$
$$=\tan^2 A\cos^2 A+\cot^2 A\sin^2 A$$
$$=\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\cos^2 A+\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}\sin^2 A$$
$$=\sin^2 A+\cos^2 A$$
$$=1.$$

試證明次之恆等式:

(1) $$\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}+\frac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}=2\operatorname{cosec}\theta.$$

*(2) $$\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)\left(\frac{1+\sec x}{1+\operatorname{cosec} x}\right)=\tan x.$$

*(3) $$\cot^2 A-\cos^2 A=\cos^2 A\cot^2 A.$$

(4) $$(p\cos A+q\sin A)^2+(q\cos A-p\sin A)^2=p^2+q^2.$$

(5) $$2(\sin^6 A+\cos^6 A)-3(\sin^4 A+\cos^4 A)+1=0.$$

(6) $$\operatorname{cosec}\alpha\sec^2\alpha+\sin\alpha\tan^2\alpha-2\tan\alpha\sec\alpha=\operatorname{cosec}\alpha-\sin\alpha.$$

 三角恆等式證明之問題解答(其一)

(1) 左邊 $=\dfrac{(1+\sin\theta-\cos\theta)^2+(1+\sin\theta+\cos\theta)^2}{(1+\sin\theta)^2-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{2\{(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta\}}{1+2\sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{2(2+2\sin\theta)}{2\sin\theta+2\sin^2\theta}=\dfrac{2}{\sin\theta}=2\operatorname{cosec}\theta.$

*(2) 左邊 $=\left(\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)\left(\dfrac{1+\dfrac{1}{\cos x}}{1+\dfrac{1}{\sin x}}\right)$

$=\left(\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)\left(\dfrac{1+\cos x}{1+\sin x}\right)\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)=\tan x.$

*(3) 左邊 $=\dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A}-\cos^2 A=\dfrac{\cos^2 A-\sin^2 A\cos^2 A}{\sin^2 A}$

$=\dfrac{\cos^2 A(1-\sin^2 A)}{\sin^2 A}=\dfrac{\cos^2 A\cos^2 A}{\sin^2 A}$

$=\cos^2 A\cot^2 A.$

(4) 左邊 $=p^2\cos^2 A+q^2\sin^2 A+q^2\cos^2 A+p^2\sin^2 A$

$=p^2(\cos^2 A+\sin^2 A)+q^2(\sin^2 A+\cos^2 A)$

$=p^2+q^2.$

(5) 左邊 $=2(\sin^2 A+\cos^2 A)(\sin^4 A-\sin^2 A\cos^2 A+\cos^4 A)-3(\sin^4 A+\cos^4 A)+1$

$=2\{(\sin^2 A+\cos^2 A)^2-3\sin^2 A\cos^2 A\}-3\{(\sin^2 A+\cos^2 A)^2-2\sin^2 A\cos^2 A\}+1$

$=2(1-3\sin^2 A\cos^2 A)-3(1-2\sin^2 A\cos^2 A)+1$

$=2-6\sin^2 A\cos^2 A-3+6\sin^2 A\cos^2 A+1$

$=3-3=0.$

(6) 左邊 $=\dfrac{1}{\sin\alpha\cos^2\alpha}+\dfrac{\sin\alpha\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\dfrac{2\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{1-2\sin^2\alpha+\sin^4\alpha}{\sin\alpha\cos^2\alpha}=\dfrac{(1-\sin^2\alpha)^2}{\sin\alpha\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{\cos^4\alpha}{\sin\alpha\cos^2\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\sin\alpha}$

$=\dfrac{1}{\sin\alpha}-\sin\alpha=\operatorname{cosec}\alpha-\sin\alpha.$

三角恆等式之證明(其二)　(平面三角法7)

證法

(2) 分別變化兩邊之形而比較其結果之法.

例　$\sin^4 A+\cos^4 A=1-2\sin^2 A\cos^2 A$, 試證之.

(證)

$$\sin^4 A+\cos^4 A=\sin^4 A+(\cos^2 A)^2$$
$$=\sin^4 A+(1-\sin^2 A)^2$$
$$=\sin^4 A+1-2\sin^2 A+\sin^4 A$$
$$=1-2\sin^2 A+2\sin^4 A.$$

$$1-2\sin^2 A\cos^2 A=1-2\sin^2 A(1-\sin^2 A)$$
$$=1-2\sin^2 A+2\sin^4 A.$$

故原式之兩邊相等.

問題

試證明次之各等式:

*(1) $\sec A-\cos A=\sin A\tan A.$

(2) $(2-\cos^2 A)(1+2\cot^2 A)=(2+\cot^2 A)(2-\sin^2 A).$

(3) $(\sin A+\cos A)(\tan A+\cot A)=\sec A+\mathrm{cosec}\, A$

(4) $(1+\sin A+\cos A)^2=2(1+\sin A)(1+\cos A).$

(5) $(2-\cos^2 A)(1+2\cot^2 A)=(2+\cot^2 A)(2-\sin^2 A).$

(平面三角法8) 三角恆等式證明之問題解答(其二)

*(1) 左邊$=\dfrac{1}{\cos A}-\cos A=\dfrac{1-\cos^2 A}{\cos A}$

$=\dfrac{\sin^2 A}{\cos A}$.

右邊$=\sin A\left(\dfrac{\sin A}{\cos A}\right)=\dfrac{\sin^2 A}{\cos A}$.

故原式之兩邊相等.

(2) 左邊$=(2-\cos^2 A)(1+2\cot^2 A)$

$=(2-\cos^2 A)\left(1+\dfrac{2\cos^2 A}{\sin^2 A}\right)$

$=(1+\sin^2 A)\dfrac{\sin^2 A+2\cos^2 A}{\sin^2 A}$

$=\dfrac{(1+\sin^2 A)(1+\cos^2 A)}{\sin^2 A}$.

右邊$=\left(2+\dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A}\right)(1+\cos^2 A)$

$=\dfrac{2\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin^2 A}(1+\cos^2 A)$

$=\dfrac{(1+\sin^2 A)(1+\cos^2 A)}{\sin^2 A}$.

故原式之左右相等.

(3) 左邊$=(\sin A+\cos A)\left(\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\cos A}{\sin A}\right)$

$=(\sin A+\cos A)\dfrac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin A\cos A}=\dfrac{\sin A+\cos A}{\sin A\cos A}$.

右邊$=\dfrac{1}{\cos A}+\dfrac{1}{\sin A}=\dfrac{\sin A+\cos A}{\sin A\cos A}$.

$\therefore$ 左邊=右邊.

(4) 左邊$=1+\sin^2 A+\cos^2 A+2\sin A+2\cos A+2\sin A\cos A$

$=1+1+2\sin A+2\cos A+2\sin A\cos A$

$=2(1+\sin A+\cos A+\sin A\cos A)$.

右邊$=2(1+\sin A+\cos A+\sin A\cos A)$.

$\therefore$ 左邊=右邊.

(5) 左邊$=(2-\cos^2 A)(1+2\cot^2 A)$

$=(1+\sin^2 A)(2\operatorname{cosec}^2 A-1)=(1+\sin^2 A)\left(\dfrac{2}{\sin^2 A}-1\right)$

$=\dfrac{2}{\sin^2 A}+2-1-\sin^2 A=\dfrac{2}{\sin^2 A}+\cos^2 A$.

右邊$=(2+\cot^2 A)(2-\sin^2 A)=(1+\operatorname{cosec}^2 A)(1+\cos^2 A)$

$=1+\dfrac{1}{\sin^2 A}+\cos^2 A+\dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A}=\dfrac{2}{\sin^2 A}+\cos^2 A$.

$\therefore$ 左邊=右邊.

證　　法	問　　題

(3) 變公式之形作一新式,又變新式之形作一既知之恆等式之法.

例 1. $1+\sec^4 A-\tan^4 A=2\sec^2 A$, 試證之.

(證) 公式　$1+\tan^2 A=\sec^2 A$.

$\therefore\ 1-\sec^2 A=-\tan^2 A$.

$\therefore\ 1-2\sec^2 A+\sec^4 A=\tan^4 A$.

$\therefore\ 1+\sec^4 A-\tan^4 A=2\sec^2 A$.

例 2. $\operatorname{cosec} A-\cot A=\dfrac{1}{\operatorname{cosec} A+\cot A}$, 試證之.

(證) 欲證此恆等式,但證次式可也:

$(\operatorname{cosec} A-\cot A)(\operatorname{cosec} A+\cot A)=1$.

$\operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A=1$.

$\operatorname{cosec}^2 A=1+\cot^2 A$.

然此爲公式,故原式之兩邊相等.

試證次之恆等式:

(1) $\operatorname{cosec}^4 A+\cot^4 A$
$=1+2\operatorname{cosec}^2 A\cot^2 A$.

(2) $\tan^2 x\sin^2 x=\tan^2 x-\sin^2 x$.

(3) $\dfrac{\tan^2 A-\cot^2 A}{\sec A+\operatorname{cosec} A}=\sec A-\operatorname{cosec} A$.

(4) $\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=(\tan\theta+\sec\theta)^2$.

(平面三角法10 三角恆等式證明之問題解答(其三)

(1) $\operatorname{cosec}^4 A+\cot^4 A=1+2\operatorname{cosec}^2 A\cot^2 A.$

欲證上式,但證次式可也:

$$\operatorname{cosec}^4 A+\cot^4 A-2\operatorname{cosec}^2 A\cot^2 A=1.$$

$$(\operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A)^2=1.$$

$$(1+\cot^2 A-\cot^2 A)^2=1.$$

$$1=1.$$

此足證原式之左右相等.

(2) $\tan^2 x\sin^2 x=\tan^2 x-\sin^2 x.$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\sin^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\sin^2 x.$$

$$\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x-\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^2 x}.$$

$$\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}.$$

$$\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}.$$

∴ 原式成立.

(3) 將原式變形爲

$$\tan^2 A-\cot^2 A=\sec^2 A-\operatorname{cosec}^2 A.$$

$$(1+\tan^2 A)-(1+\cot^2 A)=\sec^2 A-\operatorname{cosec}^2 A.$$

$$\sec^2 A-\operatorname{cosec}^2 A=\sec^2 A-\operatorname{cosec}^2 A.$$

此足證明原式之左右相等.

(4) $\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=(\tan\theta+\sec\theta)^2.$

變其形爲

$$\frac{(1+\sin\theta)^2}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}=(\tan\theta+\sec\theta)^2.$$

$$\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}=(\tan\theta+\sec\theta)^2.$$

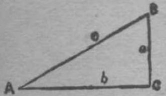
$$\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}=(\tan\theta+\sec\theta)^2.$$

$$\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2=(\sec\theta+\tan\theta)^2.$$

$$(\sec\theta+\tan\theta)^2=(\sec\theta+\tan\theta)^2.$$

∴ 原式成立.

餘角之公式



令 $C=90^\circ$, 則

$B=90^\circ-A$,

$\sin B=\dfrac{b}{c}$.

$\therefore\ \sin(90^\circ-A)=\dfrac{b}{c}$.

又 $\cos A=\dfrac{b}{c}$.

$\therefore\ \sin(90^\circ-A)=\cos A$.

又 $\cos(90^\circ-A)=\sin A$.

$\tan(90^\circ-A)=\cot A$.

$\cot(90^\circ-A)=\tan A$.

$\sec(90^\circ-A)=\operatorname{cosec} A$.

$\operatorname{cosec}(90^\circ-A)=\sec A$.

45°之三角函數

$\left.\begin{array}{r} C=90^\circ \\ A=45^\circ \end{array}\right\}$

設 $AC=1$, 則

$AB=\sqrt{2}$.

$\sin 45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$\cos 45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

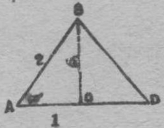
$\tan 45^\circ=1$.

$\cot 45^\circ=1$.

$\sec 45^\circ=\sqrt{2}$.

$\operatorname{cosec} 45^\circ=\sqrt{2}$.

60°, 30°之三角函數



$\triangle ABD$ 爲正三角形,

令 $AC=CD=1$, 則

$AB=2,\ BC=\sqrt{3}$.

$\angle BAC=60^\circ, \angle ABC=30^\circ$.

$\therefore\ \sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30^\circ$.

$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}=\sin 30^\circ$.

$\tan 60^\circ=\sqrt{3}=\cot 30^\circ$.

$\cot 60^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\tan 30^\circ$.

$\sec 60^\circ=2=\operatorname{cosec} 30^\circ$.

$\operatorname{cosec} 60^\circ=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\sec 30^\circ$.

問題

(1) 試求次式之值:

$(\sin 30^\circ+\sin 45^\circ)\times(\tan 60^\circ+\cot 30^\circ)-4\sec 45^\circ(\operatorname{cosec} 60^\circ-\sec 30^\circ)$.

(2) 試求次式之值:

$\sin^2(A+45^\circ)\ \sin^2(45^\circ-A)$.

(3) 試證下式:

$\cot 60^\circ(1+\cos 30^\circ+\sin 30^\circ)=\cos 60^\circ+\sin 60^\circ$.

(4) 試化簡下式:

$\sin(90^\circ-A)\cot(90^\circ-A)$

(5) 試求下式中 x 之值:

$\sin 30^\circ=x\cot 60^\circ$.

(平面三角法12) 餘角及特別角之三角函數之問題解答

(1) $(\sin 30^\circ+\sin 45^\circ)(\tan 60^\circ+\cot 30^\circ)$

$$-4\sec 45^\circ(\operatorname{cosec} 60^\circ-\sec 30^\circ)$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{3}+\sqrt{3})-4\times\sqrt{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times 2\sqrt{3}-0$$

$$=\frac{(1+\sqrt{2})\times 2\sqrt{3}}{2}$$

$$=\sqrt{3}+\sqrt{6}.$$

(2) $\sin^2(A+45^\circ)+\sin^2(45^\circ-A)$

$$=\sin^2(A+45^\circ)+\cos^2\{90^\circ-(45^\circ-A)\}$$

$$=\sin^2(A+45^\circ)+\cos^2(45^\circ+A)$$

$$=\sin^2(A+45^\circ)+\cos^2(A+45^\circ)$$

$$=1.$$

(3) $\cot 60^\circ(1+\cos 30^\circ+\sin 30^\circ)$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 60^\circ+\sin 60^\circ$$

(4) $\sin(90^\circ-A)\cot(90^\circ-A)$

$$=\cos A\tan A$$

$$=\cos A\frac{\sin A}{\cos A}$$

$$=\sin A.$$

(5) $\sin 30^\circ=x\cot 60^\circ.$

$$\frac{1}{2}=x\times\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\quad x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

簡易測量問題(其一)　(平面三角法1[illegible])

例題

*(1) 有一水塔,從其正東之 A 點望其頂,得仰角爲 60°, 若自其正西之 B 點望之,則仰角爲 45°. 設 AB 之距離爲 100 尺,求水塔之高.

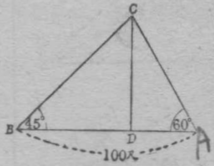
解法

設水塔高爲 $CD=x$ 尺,

因 $\angle B=45^\circ$,

故 $\angle BCD=45^\circ$.

$\therefore\ BD=x.$



又 $\tan A=\dfrac{x}{AD}$

$$=\tan 60^\circ=\sqrt{3}.$$

$$\therefore\ AD=\frac{x}{\sqrt{3}}=\frac{x\sqrt{3}}{3}.$$

$$\therefore\ x+\frac{x\sqrt{3}}{3}=BD+AD=AB=100.$$

$$x=\frac{300}{3+\sqrt{3}}=\frac{300}{4.372}=63.4.$$

答　水塔高 63.4 尺.

問題

*(1) 風箏之線長 200 公尺,其仰角爲 30°. 假設風箏之線爲直線,求風箏之高.

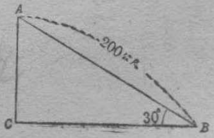
*(2) 有人立於距塔 60 尺處,測塔頂及塔頂上之旗桿頂,得仰角 30° 與 45°. 問塔高及旗桿長各若何?

*(3) 塔高 100 尺,從塔頂觀察塔北二物,其俯角爲 60° 及 45°. 求此二物之距離.

*(4) 自 a 尺高之山頂,測量與山腳同在地平面內一直線上之二點,其俯角爲 A 與 B, 求此二點間之距離.

簡易測量問題之解答(其一)

*(1) 設風箏高 $AC=x$ 尺，則



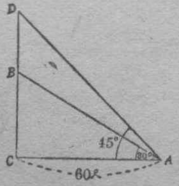
$$\sin 30^\circ=\frac{x}{200}.$$

$$\therefore\quad x=200\sin 30^\circ$$

$$=200\times\frac{1}{2}=100.$$

答　風箏高 100 尺.

*(2) 設塔高為 BC，旗桿長為 BD，測點為 A，則



$$BC=60\tan 30^\circ=\frac{60}{\sqrt{3}}$$

$$=20\sqrt{3}=34.64.$$

$$DC=60\tan 45^\circ=60\times 1$$

$$=60.$$

$$BD=60-34.64=25.36.$$

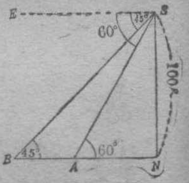
答　塔高 34.64 尺，旗桿長 25.36 尺.

*(3) 設二物之距離為 AB，S 為測點，則

$\angle ESA=\angle SAN=60^\circ$,

$\angle ESB=\angle SBA=45^\circ$,

$BN=SN=100$ 尺.



則　$\tan 60^\circ=\dfrac{100}{AN}$.

$$\therefore\quad AN=\frac{100}{\tan 60^\circ}=\frac{100}{\sqrt{3}}$$

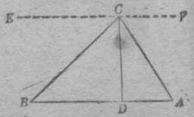
$$=\frac{100\sqrt{3}}{3}=57.73.$$

$$AB=100-57.73=42.27.$$

答　二物距離 42.27 尺.

*(4) 山高 $CD=a$ 尺，C 為測點，則

$\angle FCA=\angle A$，$\angle ECB=\angle B$，則



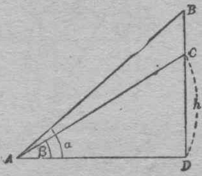
$$AD=\frac{a}{\tan A},$$

$$BD=\frac{a}{\tan B}.$$

$$\therefore\quad AB=AD+BD$$

$$=a\left(\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan B}\right).$$

例題	解法	問題
*(2) 於 h 尺高之屋頂上植一竿,於與屋同在一平原上之某點,觀測竿頂,得仰角 α,觀測屋頂,得仰角 β. 問竿長若干尺?	設 CD 爲屋高 h 尺, BC 爲竿長 x, A 爲測點.	*(1) 由塔底測得山頂之仰角爲 60°,在塔頂測得山頂之仰角爲 30°. 若塔高爲 50 尺,求山高.



則 $\tan\alpha=\dfrac{h+x}{AD}$,

$\tan\beta=\dfrac{h}{AD}$.

$\therefore\quad \dfrac{\tan\beta}{\tan\alpha}=\dfrac{h}{h+x}$.

$\therefore\quad h\tan\beta+x\tan\beta=h\tan\alpha$.

$\therefore\quad x=\dfrac{h(\tan\alpha-\tan\beta)}{\tan\beta}$

$\quad=h\left(\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}-1\right)$.

*(2) 在塔底 D 測得山尖之仰角爲 60°,又登高 40 尺之塔頂,測得其仰角爲 45°. 求山高 AB,與山尖 A 至 D 之距離.

(3) 在塔基仰望樹頂,得仰角 α. 登塔 h 尺再仰望之,得仰角 β. 求樹之高.

簡易測量問題之解答(其二)

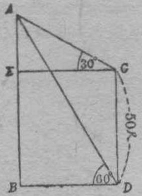
*(1) 設 CD 爲塔高，山高 $AB=x$ 尺，塔與山之距離 $BD=CE$，C，D 爲測點，則

$AE=x-50$,

$$BD=\frac{x}{\tan 60^\circ}=\frac{x}{\sqrt{3}},$$

$$CE=\frac{x-50}{\tan 30^\circ}=\frac{x-50}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$=x\sqrt{3}-50\sqrt{3}.$$



$$\therefore\quad \frac{x}{\sqrt{3}}=x\sqrt{3}-50\sqrt{3}.$$

$$\therefore\quad x=3x-50\times 3.$$

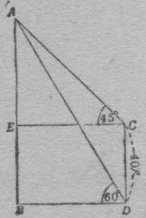
$$\therefore\quad x=75.$$

答　山高 75 尺.

*(2) 設 CD 爲塔，山高 $AB=x$ 尺，C，D 爲測點，則 $AE=x-40$,

$$BD=\frac{x}{\tan 60^\circ}=\frac{x}{\sqrt{3}},$$

$$CE=\frac{x-40}{\tan 45^\circ}=x-40.$$



$$\therefore\quad \frac{x}{\sqrt{3}}=x-40.\qquad x=x\sqrt{3}-40\sqrt{3}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{40\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=94.5\text{ 尺}.$$

$$\text{又}\quad AD=\frac{x}{\sin 60^\circ}=\frac{\frac{40\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{80}{\sqrt{3}-1}=109.3\text{尺}.$$

答　山高 94 尺 5 寸，AD 距離 109 尺 3 寸.

(3) 設 CD 爲樹高 x 尺，A，B 爲測點，則

$DE=x-h$, $BE=AC$,

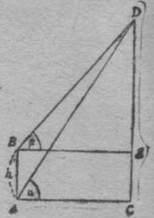
$$AC=\frac{CD}{\tan\alpha}=\frac{x}{\tan\alpha},$$

$$BE=AC=\frac{DE}{\tan\beta}=\frac{x-h}{\tan\beta}.$$

$$\therefore\quad \frac{x}{\tan\alpha}=\frac{x-h}{\tan\beta}.$$

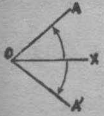
$$\therefore\quad x\tan\beta=(x-h)\tan\alpha.$$

$$\therefore\quad x=\frac{h\tan\alpha}{\tan\alpha-\tan\beta}.$$



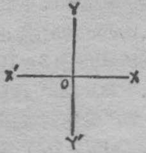
任意之角

角之正負



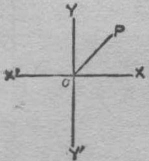
自始線OX,依時鐘針反對方向而旋轉者,其所成之角爲正角,反之爲負角.

象限



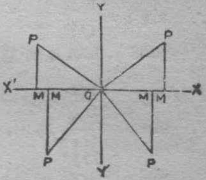
XX'與YY'互相垂直,則
XOY 之部分爲第一象限,
YOX' 之部分爲第二象限,
$X'OY'$ 之部分爲第三象限,
$Y'OX$ 之部分爲第四象限.

直線之正負



XX'與YY'互相垂直,OP在此平面上O之周圍旋轉,則與OX及OY同方向之直線爲正,與此反對方向之直線爲負,而旋轉線OP常定爲正.

任意角之三角函數



如上圖,從P點向XX'作垂線,其足爲M,設$\angle XOP$爲a,則

$$\sin a=\frac{PM}{OP},\qquad \cos a=\frac{OM}{OP},$$

$$\tan a=\frac{PM}{OM},\qquad \cot a=\frac{OM}{PM},$$

$$\sec a=\frac{OP}{OM},\qquad \operatorname{cosec} a=\frac{OP}{PM}.$$

問題

(1) 求各象限內三角函數之符號.

(2) 求次列三角函數之符號:
(a) $\sin 120^\circ$, (b) $\cos 295^\circ$, (c) $\tan 280^\circ$.

(3) 求次列三角函數之符號:
(a) $\sin(-70^\circ)$, (b) $\cos(-390^\circ)$, (c) $\tan(-780^\circ)$.

任意角之問題解答

(1) 如 17 頁之圖:

第一象限內,

PM 爲正, OM 爲正, OP 爲正.

$\therefore \quad \sin\alpha=\dfrac{PM}{OP}$ 爲正.

同樣 $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ 亦爲正.

第二象限內,

PM 爲正, OM 爲負, OP 爲正.

$\therefore \quad \sin\alpha=\dfrac{PM}{OP}$ 爲正,

$\cos\alpha=\dfrac{OM}{OP}$ 爲負,

$\tan\alpha=\dfrac{PM}{OM}$ 爲負.

今作一覽表示之如次:

象限＼函數	sin	cos	tan	cot	sec	cosec
I	+	+	+	+	+	+
II	+	−	−	−	−	+
III	−	−	+	+	−	−
IV	−	+	−	−	+	−

(2) (a) $120^\circ=90^\circ+30^\circ$, 是 120° 在第二象限內.

$\therefore \quad \sin 120^\circ$ 爲正.

(b) $295^\circ=90^\circ\times3+25^\circ$, 是 295° 在第四象限內.

$\therefore \quad \cos 295^\circ$ 爲正.

(c) $280^\circ=90^\circ\times3+10^\circ$, 是 280° 在第四象限內.

$\therefore \quad \tan 280^\circ$ 爲負.

(3) (a) -70° 爲第四象限之角.

$\therefore \quad \sin(-70^\circ)$ 爲負.

(b) $-390^\circ=-360^\circ-30^\circ$, 是 -390° 爲第四象限之角.

$\therefore \quad \cos(-390^\circ)$ 爲正.

(c) $-780^\circ=-360^\circ\times2-60^\circ$, 是 -780° 爲第四象限之角.

$\therefore \quad \tan(-780^\circ)$ 爲負.

(備考) $\sin(n\times360^\circ+A)=\sin A.$

$\cos(n\times360^\circ+A)=\cos A.$

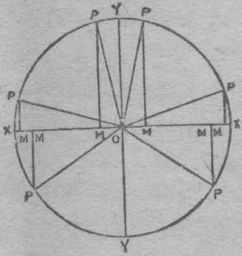
$\tan(n\times360^\circ+A)=\tan A.$

$\cot(n\times360^\circ+A)=\cot A.$

$\sec(n\times360^\circ+A)=\sec A.$

$\operatorname{cosec}(n\times360^\circ+A)=\operatorname{cosec} A.$

變化之狀態	問題



OP 有一定之長,在 O 之周圍依時鐘針反對之方向旋轉,自 OX 爲始,其三角函數之變化如次:
$\sin XOP=PM/OP$, 其 OP 雖常爲一定,然 PM 視 $\angle XOP$ 而增減, $\angle XOP=0°$, 則 PM 爲 0, $\angle XOP$ 漸近於 $90°$,從而 PM 亦漸增,至 $\angle XOP=90°$,則 PM 等於 OP; 故 $\sin XOP$ 在 $0°$ 時則爲 0, 由此漸增,至 $90°$ 時則爲 1, 以後次第減少,迨 $\angle XOP$ 至 $180°$ 時則爲 0, 又次第減小,至 $270°$ 時則爲 -1, 以後次第增大,至 $360°$ 時則爲 0. 今示其變化如下表:

	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限
$\sin A$	自 0 至 1	自 1 至 0	自 0 至 -1	自 -1 至 0
$\cos A$	自 1 至 0	自 0 至 -1	自 -1 至 0	自 0 至 1
$\tan A$	自 0 至 $+\infty$	自 $-\infty$ 至 0	自 0 至 $+\infty$	自 $-\infty$ 至 0
$\cot A$	自 $+\infty$ 至 0	自 0 至 $-\infty$	自 $+\infty$ 至 0	自 0 至 $-\infty$
$\sec A$	自 1 至 $+\infty$	自 $-\infty$ 至 -1	自 -1 至 $-\infty$	自 $+\infty$ 至 1
$\operatorname{cosec} A$	自 $+\infty$ 至 1	自 1 至 $+\infty$	自 $-\infty$ 至 -1	自 -1 至 $-\infty$

(1) 次列各度數, 試求其三角函數之值:
$0, 90°, 180°, 270°, 360°$.

(2) 試於自 $0°$ 至 $90°$ 之角, 求其適於次式之正角:
$2\sin^2 x+3\cos x-3=0$.

(3) 設 x 爲實數, 則次之方程式能成立否?
$\cos A=x+\dfrac{1}{x}$.

(平面三角法20) 三角函數值之變化之問題解答

(1)
$$\begin{cases} \sin 0^\circ = 0 \\ \cos 0^\circ = 1 \\ \tan 0^\circ = 0 \\ \cot 0^\circ = \infty \\ \sec 0^\circ = 1 \\ \operatorname{cosec} 0^\circ = \infty \end{cases} \quad \begin{cases} \sin 270^\circ = -1 \\ \cos 270^\circ = 0 \\ \tan 270^\circ = \infty \\ \cot 270^\circ = 0 \\ \sec 270^\circ = \infty \\ \operatorname{cosec} 270^\circ = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 90^\circ = 1 \\ \cos 90^\circ = 0 \\ \tan 90^\circ = \infty \\ \cot 90 = 0 \\ \sec 90^\circ = \infty \\ \operatorname{cosec} 90^\circ = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \sin 360^\circ = 0 \\ \cos 360^\circ = 1 \\ \tan 360^\circ = 0 \\ \cot 360^\circ = \infty \\ \sec 360^\circ = 1 \\ \operatorname{cosec} 360 = \infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 180^\circ = 0 \\ \cos 180^\circ = -1 \\ \tan 180^\circ = 0 \\ \cot 180^\circ = \infty \\ \sec 180^\circ = -1 \\ \operatorname{cosec} 180 = \infty \end{cases}$$

(2) $2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0,$

$2(1-\cos^2 x) + 3\cos x - 3 = 0,$

$2 - 2\cos^2 x + 3\cos x - 3 = 0,$

$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0,$

$(2\cos x - 1)(\cos x - 1) = 0.$

$\therefore \quad \cos x = \dfrac{1}{2}$ 或 $\cos x = 1.$

$x = 60^\circ$ 或 $x = 0^\circ.$

(3) $\cos A = x + \dfrac{1}{x}.$

$\therefore \quad x\cos A = x^2 + 1.$

$\therefore \quad x^2 - x\cos A + 1 = 0.$

今 x 爲實數,則其判別式當爲 0 或爲正.

$\therefore \quad \cos^2 A - 4 \times 1 \geqq 0.$

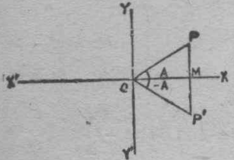
$\therefore \quad \cos^2 A \geqq 4.$

然 $\cos^2 A$ 永不能比 1 大.

$\therefore \quad \cos^2 A \geqq 4$ 不能成立.

故原方程式不能成立。

$(-A)$ 與 A



令 $\angle MOP = \angle MOP'$,

$OP = OP'$, $P'M = -PM$.

$\therefore\ \sin(-A) = \dfrac{P'M}{OP'} = \dfrac{-PM}{OP}$

$= -\sin A$.

$\therefore\ \sin(-A) = -\sin A$.

同理 $\cos(-A) = \cos A$.

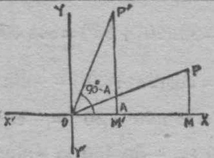
$\tan(-A) = -\tan A$.

$\cot(-A) = -\cot A$.

$\sec(-A) = \sec A$.

$\operatorname{cosec}(-A) = -\operatorname{cosec} A$.

$(90^\circ - A)$ 與 A



設 $\left.\begin{array}{l}\angle MOP = A,\\ \angle M'OP' = 90^\circ - A,\\ OP = OP',\end{array}\right\}$ 則

$P'M' = OM$, $OM' = PM$.

$\sin(90^\circ - A) = \dfrac{P'M'}{OP'} = \dfrac{OM}{OP} = \cos A$.

$\therefore\ \sin(90^\circ - A) = \cos A$.

同理 $\cos(90^\circ - A) = \sin A$.

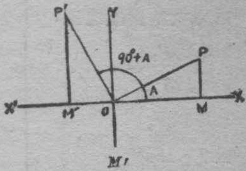
$\tan(90^\circ - A) = \cot A$.

$\cot(90^\circ - A) = \tan A$.

$\sec(90^\circ - A) = \operatorname{cosec} A$.

$\operatorname{cosec}(90^\circ - A) = \sec A$.

$(90^\circ + A)$ 與 A



設 $OP' = OP$, $\angle POP' = 90^\circ$,

則 $P'M' = OM$, $PM = OM'$.

$\sin(90^\circ + A) = \dfrac{P'M'}{OP'} = \dfrac{OM}{OP} = \cos A$.

$\therefore\ \sin(90^\circ + A) = \cos A$.

同理 $\cos(90^\circ + A) = -\sin A$.

$\tan(90^\circ + A) = -\cot A$.

$\cot(90^\circ + A) = -\tan A$.

$\sec(90^\circ + A) = -\operatorname{cosec} A$.

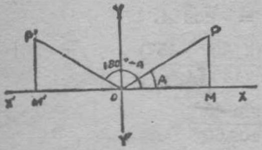
$\operatorname{cosec}(90^\circ + A) = \sec A$.

(平面三角法22) 二角之三角函數之關係問題解答(其一)

問題	解答
(1) 試求次之函數之值: $\sin 120^\circ$, $\cos 120^\circ$, $\tan 120^\circ$, $\sin(-150^\circ)$, $\cos(-150^\circ)$, $\tan(-150^\circ)$.	(1) $\sin 120^\circ=\sin(90^\circ+30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\cos 120^\circ=\cos(90^\circ+30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$. $\tan 120^\circ=\tan(90^\circ+30^\circ)=-\cot 30^\circ=-\sqrt{3}$. $\sin(-150^\circ)=-\sin 150^\circ=-\sin(90^\circ+60^\circ)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$. $\cos(-150^\circ)=-\cos 150^\circ=-\cos(90^\circ+60^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\tan(-150^\circ)=-\tan 150^\circ=-\tan(90^\circ+60^\circ)=\cot 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$.
(2) 設 $A+B+C=180^\circ$, 試證次式: $\cos\frac{B+C}{2}=\sin\frac{A}{2}$, $\tan\frac{B+C}{2}=\cot\frac{A}{2}$	(2) $A+B+C=180^\circ$, $\frac{A}{2}+\frac{B+C}{2}=90^\circ$, $\frac{B+C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}$. 則 $\cos\frac{B+C}{2}=\cos\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}$. $\therefore \cos\frac{B+C}{2}=\sin\frac{A}{2}$. 又 $\tan\frac{B+C}{2}=\tan\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)=\cot\frac{A}{2}$. $\therefore \tan\frac{B+C}{2}=\cot\frac{A}{2}$.

二角之三角函數之關係(其二)　(平面三角法23)

$(180°-A)$ 與 A



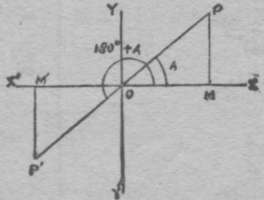
設 $\angle POM=A$, $\angle P'OM=180°-A$,
$OP'=OP$, $\angle P'M'O=\angle PMO=R\angle$.
則 $P'M'=PM$, $OM'=-OM$.

$$\sin(180°-A)=\frac{P'M'}{OP'}=\frac{PM}{OP}=\sin A.$$

$\therefore\ \sin(180°-A)=\sin A.$

同理
$$\cos(180°-A)=-\cos A.$$
$$\tan(180°-A)=-\tan A.$$
$$\cot(180°-A)=-\cot A.$$
$$\sec(180°-A)=-\sec A.$$
$$\operatorname{cosec}(180°-A)=\operatorname{cosec} A.$$

$(180°+A)$ 與 A



設 $\angle POM=A$, $\angle P'OM=180°+A$,
$OP'=OP$, $\angle P'M'O=\angle PMO=R\angle$.
則 $P'M'=-PM$, $OM'=-OM$.

$$\therefore\ \sin(180°+A)=\frac{P'M'}{OP'}=\frac{-PM}{OP}=-\sin A.$$

同理
$$\cos(180°+A)=-\cos A.$$
$$\tan(180°+A)=\tan A.$$
$$\cot(180°+A)=\cot A.$$
$$\sec(180°+A)=-\sec A.$$
$$\operatorname{cosec}(180°+A)=-\operatorname{cosec} A.$$

問　題

*(1) 試簡單下式:
$$\sin(90°+x)\times\sin(180°+x)+\cos(90°+x)\times\cos(180°+x).$$

(2) 試將次式簡單之:
$$\frac{\sin(180°+A)}{\tan(180°-A)}\times\frac{\cos(360°-A)}{\sin(-A)}.$$

(3) 試求 $\tan 225°$ 與 $\cos(-4005°)$ 之值.

(4) 試化次之函數爲最簡之式:
$\sin(270°-A)$.

(5) 試求次式之值:
$$\frac{\sin 225°}{\cos 240°}.$$

*(1) 原式$=\cos x(-\sin x)+(-\sin x)(-\cos x)$

$$=-\sin x\cos x+\sin x\cos x=0.$$

(2) $\dfrac{\sin(180^\circ+A)}{\tan(180^\circ-A)}\times\dfrac{\cos(360^\circ-A)}{\sin(-A)}$

$$=\frac{-\sin A}{-\tan A}\times\frac{\cos(-A)}{-\sin A}$$

$$=\frac{\sin A\cos A}{-\tan A\sin A}=-\frac{\cos A}{\tan A}$$

$$=-\frac{\cos A}{\dfrac{\sin A}{\cos A}}=-\frac{\cos^2 A}{\sin A}.$$

(3) $\tan 225^\circ=\tan(180^\circ+45^\circ)=\tan 45^\circ=1.$

$\cos(-4005^\circ)=\cos 4005^\circ$

$$=\cos(360^\circ\times 11+45^\circ)$$

$$=\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(4) $\sin(270^\circ-A)=\sin\{180^\circ+(90^\circ-A)\}$

$$=-\sin(90^\circ-A)$$

$$=-\cos A.$$

(5) $\dfrac{\sin 225^\circ}{\cos 240^\circ}=\dfrac{\sin(180^\circ+45^\circ)}{\cos(180^\circ+60^\circ)}$

$$=\frac{-\sin 45^\circ}{-\cos 60^\circ}$$

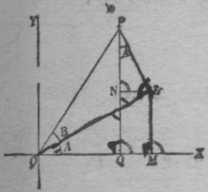
$$=\frac{\sin 45^\circ}{\cos 60^\circ}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\dfrac{1}{2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{2}.$$

和之公式之證明



設 $\angle XOL=A,\ \angle LOP=B,\ \angle XOP=A+B,$

$\angle PLO=\angle LMO=\angle PQO=\angle LNP=R\angle.$

則 $\angle LPN=A.$

$$\sin(A+B)=\frac{QP}{OP}=\frac{QN+NP}{OP}=\frac{ML+NP}{OP}$$

$$=\frac{ML}{OP}+\frac{NP}{OP}=\frac{ML}{OL}\cdot\frac{OL}{OP}+\frac{NP}{LP}\cdot\frac{LP}{OP}.$$

$\therefore\ \sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ (公式).

又 $$\cos(A+B)=\frac{OQ}{OP}=\frac{OM-QM}{OP}=\frac{OM-NL}{OP}=\frac{OM}{OP}-\frac{NL}{OP}$$

$$=\frac{OM}{OL}\cdot\frac{OL}{OP}-\frac{NL}{LP}\cdot\frac{LP}{OP}.$$

$\therefore\ \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$ (公式).

(注意) A, B 爲任意之角，上列二公式亦能成立.

問題

*(1) 試求 $\sin 75^\circ$ 之值.

(2) 試求 $\cos 105^\circ$ 之值.

*(3) 已知 $\sin A=\frac{3}{5}$, $\cos B=\frac{3}{4}$, 求 $\sin(A+B)$. 但 A, B 皆爲銳角.

(4) 試求適於次式中 x 之值：

$$\cos 75^\circ=x\sin 105^\circ.$$

 二角和之正弦餘弦之問題解答

*(1) $\sin 75° = \sin(45° + 30°)$

$$= \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30°$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

(2) $\cos 105° = \cos(60° + 45°)$

$$= \cos 60° \cos 45° - \sin 60° \sin 45°$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

*(3) $\cos A = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$,

$\sin B = \sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{9+4\sqrt{7}}{20}.$$

(4) $\cos 75° = \cos(45° + 30°)$

$$= \cos 45° \cos 30° - \sin 45° \sin 30°$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

$\sin 105° = \sin(60° + 45°)$

$$= \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45°$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

$\therefore \quad \sqrt{6}-\sqrt{2} = (\sqrt{6}+\sqrt{2})x.$

$\therefore \quad x = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{4}$

$$= \frac{8-2\sqrt{12}}{4} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4} = 2-\sqrt{3}.$$

差之公式之證明	問題
$\sin(A-B)=\sin\{A+(-B)\}$ $=\sin A\cos(-B)+\cos A\sin(-B)$ $=\sin A\cos B-\cos A\sin B.$ $\therefore\ \sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$ (公式). $\cos(A-B)=\cos\{A+(-B)\}$ $=\cos A\cos(-B)-\sin A\sin(-B)$ $=\cos A\cos B+\sin A\sin B.$ $\therefore\ \cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$ (公式).	(1) 試證次之公式: $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$ $=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$ $=\cos^2\beta-\cos^2\alpha.$ (2) 試證次之公式: $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$ $=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$ $=\cos^2\beta-\sin^2\alpha.$ *(3) 試求 $\sin 15^\circ$ 之值. (4) 設 $\sin A=\frac{11}{61}$, $\sin B=\frac{9}{41}$. 則 $\cos(A-B)$ 之值如何?

 二角差之正弦餘弦之問題解答

(1) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

$$=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$$
$$\times(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)$$
$$=\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta$$
$$=\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\sin^2\alpha)\sin^2\beta$$
$$=\sin^2\alpha-\sin^2\beta.$$

又 $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$

$$=(1-\cos^2\alpha)-(1-\cos^2\beta)=\cos^2\beta-\cos^2\alpha.$$

(2) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

$$=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$$
$$\times(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$$
$$=\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta$$
$$=\cos^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\cos^2\alpha)\sin^2\beta$$
$$=\cos^2\alpha-\sin^2\beta.$$

又 $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$

$$=(1-\sin^2\alpha)-(1-\cos^2\beta)=\cos^2\beta-\sin^2\alpha.$$

*(3) $\sin 15°=\sin(60°-45°)$

$$=\sin 60°\cos 45°-\cos 60°\sin 45°$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

(4) $\cos A=\pm\sqrt{1-\left(\frac{11}{61}\right)^2}=\pm\frac{60}{61}.$

$$\cos B=\pm\sqrt{1-\left(\frac{9}{41}\right)^2}=\pm\frac{40}{41}.$$

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$
$$=\pm\frac{60}{61}\times\frac{40}{41}+\frac{11}{61}\times\frac{9}{41}$$
$$=\pm\frac{2400}{2501}+\frac{99}{2501}$$
$$=\frac{2499}{2501}\text{ 或 }-\frac{2301}{2501}.$$

二角和及差之正切餘切

公式

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.$$

$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}.$$

$$\cot(A+B)=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}.$$

$$\cot(A-B)=\frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}.$$

證明

$$\tan(A\pm B)=\frac{\sin(A\pm B)}{\cos(A\pm B)}$$

$$=\frac{\sin A\cos B\pm\cos A\sin B}{\cos A\cos B\mp\sin A\sin B}$$

$$=\frac{(\sin A\cos B\pm\cos A\sin B)\div\cos A\cos B}{(\cos A\cos B\mp\sin A\sin B)\div\cos A\cos B}$$

$$=\frac{\tan A\pm\tan B}{1\mp\tan A\tan B}.$$

$$\cot(A\pm B)=\frac{\cos(A\pm B)}{\sin(A\pm B)}$$

$$=\frac{\cos A\cos B\mp\sin A\sin B}{\sin A\cos B\pm\cos A\sin B}$$

$$=\frac{(\cos A\cos B\mp\sin A\sin B)\div\sin A\sin B}{(\sin A\cos B\pm\cos A\sin B)\div\sin A\sin B}$$

$$=\frac{\cot A\cot B\mp 1}{\cot B\pm\cot A}.$$

問題

(1) 試求 $\tan 15^\circ$ 之值.

(2) 試求 $\cot 15^\circ$ 之值.

(3) 設 $\left.\begin{aligned}\tan x&=\tfrac{1}{2}\\ \tan y&=\tfrac{1}{3}\end{aligned}\right\}$, 則 $(x+y)$ 之一值爲 45°, 試證之.

(4) 試證次式:

$$\frac{1}{1+\tan A\tan 2A}=\frac{1}{\sec 2A}$$

(5) 試證 $\tan A+\tan(45^\circ-A)+\tan A\tan(45^\circ-A)=1.$

二角和及差之正切餘切之問題解答

(1) $\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ)$

$$= \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$

(2) $\cot 15^\circ = \frac{1}{\tan 15^\circ} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$

$$= \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = 2 + \sqrt{3}.$$

(3) $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = \frac{5}{5} = 1.$$

$\therefore\ \tan(x + y) = 1.$

$\therefore\ (x + y)$ 之一值爲 45°.

(4) $1 + \tan A \tan 2A = 1 + \frac{\sin A \sin 2A}{\cos A \cos 2A}$

$$= \frac{\cos A \cos 2A + \sin A \sin 2A}{\cos A \cos 2A}$$

$$= \frac{\cos(2A - A)}{\cos A \cos 2A} = \frac{\cos A}{\cos A \cos 2A}$$

$$= \sec 2A.$$

$$\therefore\ \frac{1}{1 + \tan A \tan 2A} = \frac{1}{\sec 2A}.$$

(5) 左邊 $= \tan A + \tan(45^\circ - A)(1 + \tan A)$

$$= \tan A + \frac{\tan 45^\circ - \tan A}{1 + \tan 45^\circ \tan A}(1 + \tan A)$$

$$= \tan A + \frac{1 - \tan A}{1 + \tan A}(1 + \tan A)$$

$$= \tan A + 1 - \tan A = 1.$$

二倍角之正弦餘弦

公式	公式之證明	問題
$\sin 2A = 2\sin A\cos A.$ $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ $= 1 - 2\sin^2 A$ $= 2\cos^2 A - 1.$	$\sin 2A = \sin(A+A)$ $= \sin A\cos A + \cos A\sin A$ $= 2\sin A\cos A.$ $\cos 2A = \cos(A+A)$ $= \cos A\cos A - \sin A\sin A$ $= \cos^2 A - \sin^2 A$ $= 1 - \sin^2 A - \sin^2 A$ $= 1 - 2\sin^2 A$ $= \cos^2 A - (1 - \cos^2 A)$ $= 2\cos^2 A - 1.$	(1) 設 $\sin A = \frac{1}{3}$, 試求 $\cos 2A$ 之值. (2) 設 $\sin A = \frac{3}{5}$, 試求 $\sin 2A$ 及 $\cos 2A$ 之值. (3) 試證 $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$. (4) 試證 $\cos A = \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}$. (5) $\sin x + \cos x = a$, $\sin 2x = a$, 上二式同時成立之條件如何? (6) 試證 $\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$.

(平面三角法32) 二倍角之正弦餘弦之問題解答

(1) $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$

$$= 1 - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.$$

(2) $\sin A = \frac{3}{5}.$

$$\cos A = \pm\sqrt{(1 - \sin^2 A)} = \pm\frac{4}{5}.$$

$$\therefore \quad \sin 2A = 2\sin A\cos A$$

$$= 2 \times \frac{3}{5} \times \left(\pm\frac{4}{5}\right) = \pm\frac{24}{25}.$$

$$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A = 1 - 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$= 1 - 2 \times \frac{9}{25} = 1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25}.$$

(3) $\sin A = \sin 2\left(\frac{A}{2}\right) = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}.$

(4) $\cos A = \cos 2\left(\frac{A}{2}\right) = \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}.$

(5) $\sin x + \cos x = a.$

$$\therefore \quad \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = a^2$$

$$1 + \sin 2x = a^2.$$

$$1 + b = a^2.$$

∴ 所求之條件為

$$1 + b = a^2.$$

(6) 右邊 $= \dfrac{1 - \dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}{1 + \dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}} = \dfrac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A + \sin^2 A}$

$$= \cos^2 A - \sin^2 A = \cos 2A.$$

二倍角之正切餘切

公式	公式之證明	問題
$\tan 2A=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$. $\cot 2A=\dfrac{\cot^2 A-1}{2\cot A}$.	$\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$. 令 $A=B$, 則上式變爲 $\tan 2A=\dfrac{\tan A+\tan A}{1-\tan A\tan A}$. $\therefore\ \tan 2A=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$. 同樣,得 $\cot 2A=\dfrac{\cot^2 A-1}{2\cot A}$.	(1) 試證次式: $\tan A=\dfrac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$ (2) 設 $\tan A=\dfrac{1}{3}$, 則 $\tan 2A$ 之值如何? (3) 試證次式: $4+\tan A\tan 2A=\dfrac{1}{\cos 2A}+3$. (4) 設 $\tan A=2$, 則 $\sin 2A$ 之值如何? (5) 試證 $\cot A-2\cot 2A=\tan A$.

 二倍角之正切餘切之問題解答

(1) $\tan A=\tan 2\left(\frac{A}{2}\right)$

$$=\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}.$$

(2) $\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}=\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}$

$$=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}}=\frac{2}{3}\times\frac{9}{8}=\frac{3}{4}.$$

(3) $4+\tan A\tan 2A=\frac{1}{\cos 2A}+3.$

$$\therefore\quad 1+\tan A\tan 2A=\frac{1}{\cos 2A}.$$

$$\frac{\cos A\cos 2A+\sin A\sin 2A}{\cos A\cos 2A}=\frac{1}{\cos 2A}.$$

$$\frac{\cos(2A-A)}{\cos A\cos 2A}=\frac{1}{\cos 2A}.$$

$$\frac{\cos A}{\cos A\cos 2A}=\frac{1}{\cos 2A}.$$

$$\frac{1}{\cos 2A}=\frac{1}{\cos 2A}.$$

卽已證明.

(4) $\sin 2A=2\sin A\cos A$

$$=\frac{2\sin A}{\cos A}\cos^2 A=\frac{2\tan A}{\sec^2 A}$$

$$=\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}=\frac{2\times 2}{1+2^2}=\frac{4}{5}.$$

(5) $\cot A-2\cot 2A=\cot A-\frac{2(\cot^2 A-1)}{2\cot A}$

$$=\frac{\cot^2 A-\cot^2 A+1}{\cot A}$$

$$=\frac{1}{\cot A}=\tan A.$$

公式

$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a.$

$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a.$

$\tan 3a = \dfrac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}.$

$\cot 3a = \dfrac{3\cot a - \cot^3 a}{1 - 3\cot^2 a}.$

公式之證明

$$\begin{aligned}\sin 3a &= \sin(a+2a) = \sin a\cos 2a + \cos a \sin 2a\\ &= \sin a(1-2\sin^2 a) + \cos a(2\sin a\cos a)\\ &= \sin a - 2\sin^3 a + 2\sin a\cos^2 a\\ &= \sin a - 2\sin^3 a + 2\sin a(1-\sin^2 a)\\ &= 3\sin a - 4\sin^3 a.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 3a &= \cos(a+2a) = \cos a\cos 2a - \sin a\sin 2a\\ &= \cos a(2\cos^2 a - 1) - \sin a(2\sin a\cos a)\\ &= 2\cos^3 a - \cos a - 2\sin^2 a\cos a\\ &= 2\cos^3 a - \cos a - 2(1-\cos^2 a)\cos a\\ &= 4\cos^3 a - 3\cos a.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan 3a &= \tan(2a+a) = \frac{\tan 2a + \tan a}{1 - \tan 2a\tan a}\\ &= \frac{\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a} + \tan a}{1 - \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}\tan a} = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}.\end{aligned}$$

$\cot 3a$ 可依 $\tan 3a$ 同法證之.

問題

(1) 設 $\sin\theta = \dfrac{2}{5}$, 則 $\sin 3\theta$ 之值如何?

(2) 試計算 $\sin 18^\circ$ 之值,以求 $\cos 18^\circ$.

(3) $\sin^3 a = \dfrac{3\sin a - \sin 3a}{4}$,

$\cos^3 a = \dfrac{3\cos a + \cos 3a}{4}$.

(4) 試證次式:

$$\cos^3 a\sin 3a + \sin^3 a\cos 3a = \frac{3}{4\operatorname{cosec} 4a}.$$

 三倍角之三角函數之問題解答

(1) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$$= 3\times\frac{2}{5} - 4\times\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{6}{5} - \frac{32}{125} = \frac{118}{125}.$$

(2) $18^\circ\times 5 = 90^\circ,\ 18^\circ\times 2 + 18^\circ\times 3 = 90^\circ,$

$18^\circ\times 2 = 90^\circ - 18^\circ\times 3.$

$\therefore\ \sin(18^\circ\times 2) = \sin(90^\circ - 18^\circ\times 3).$

$2\sin 18^\circ\cos 18^\circ = \cos(18^\circ\times 3).$

$2\sin 18^\circ\cos 18^\circ = 4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ$

$\therefore\ 2\sin 18^\circ = 4\cos^2 18^\circ - 3.$

$2\sin 18^\circ = 4(1-\sin^2 18^\circ) - 3.$

$4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1 = 0.$

$\therefore\ \sin 18^\circ = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}.$

其負值不適用.

$\therefore\ \sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}.$

$\cos 18^\circ = \sqrt{1-\sin^2 18^\circ} = \sqrt{1-\dfrac{6-2\sqrt{5}}{16}}$

$= \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$

(3) 由公式,得

$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a.$

$\therefore\ \sin^3 a = \dfrac{3\sin a - \sin 3a}{4}.$

又 $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a.$

$\therefore\ \cos^3 a = \dfrac{3\cos a + \cos 3a}{4}.$

(4) $\cos^3 a\sin 3a + \sin^3 a\cos 3a$

$= \cos^3 a(3\sin a - 4\sin^3 a)$

$\quad + \sin^3 a(4\cos^3 a - 3\cos a)$

$= 3\sin a\cos a(\cos^2 a - \sin^2 a)$

$= \dfrac{3}{2}\sin 2a\cos 2a$

$= \dfrac{3\sin 4a}{4} = \dfrac{3}{4\operatorname{cosec} 4a}.$

種　　類	問　　　題
二倍角	(1) 試證 $\sin 2A=\dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$. (2) 試證 $\cos 2\theta \sec^2\theta=1-\tan^2\theta$. (3) 試證 $\cos^4\theta-\sin^4\theta=\cos 2\theta$. (4) 試證 $\dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}=\cos 2A$.
三倍角	(5) 試證 $\dfrac{\cos 3A+\sin 3A}{\cos A-\sin A}=1+2\sin 2A$. (6) 試證 $\dfrac{\sin 3A}{\sin A}-\dfrac{\cos 3A}{\cos A}=2$.

倍角之三角函數問題之解答

(1) $\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}=\frac{2\tan A}{\sec^2 A}=\frac{2\sin A}{\cos A}\times\cos^2 A$

$=2\sin A\cos A=\sin 2A.$

(2) $\cos 2\theta\sec^2\theta=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\times\frac{1}{\cos^2\theta}$

$=\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=1-\tan^2\theta.$

(3) $\cos^4\theta-\sin^4\theta=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta.$

(4) $\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}=\frac{1-\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}{1+\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}=\frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\cos^2 A+\sin^2 A}$

$=\cos^2 A-\sin^2 A=\cos 2A.$

(5) $\frac{\cos 3A+\sin 3A}{\cos A-\sin A}$

$=\frac{4\cos^3 A-3\cos A+3\sin A-4\sin^3 A}{\cos A-\sin A}$

$=\frac{4(\cos^3 A-\sin^3 A)-3(\cos A-\sin A)}{\cos A-\sin A}$

$=4(\cos^2 A+\cos A\sin A+\sin^2 A)-3$

$=4(1+\sin A\cos A)-3$

$=1+2\sin 2A.$

(6) $\frac{\sin 3A}{\sin A}-\frac{\cos 3A}{\cos A}$

$=3-4\sin^2 A-4\cos^2 A+3$

$=6-4(\sin^2 A+\cos^2 A)=2.$

變正弦及餘弦之積爲和及差

公式	公式之證明	問題
$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$. $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$. $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$. $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$.	$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$, $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$. 此二式相加,則得第一公式,相減則得第二公式. 其餘二公式亦可以 $\cos(\alpha+\beta)$ 與 $\cos(\alpha-\beta)$ 加減得之.	(1) 試證次式: $\cos(A+B)\cos(A-B)$ $-\cos(B+C)\cos(B-C)$ $+\cos(A+C)\cos(A-C)$ $=\cos 2A$. (2) 試變 $4\sin A\sin B\sin C$ 爲四正弦之和之形狀. (3) 試變 $\sin 20^\circ\cos 5^\circ$ 爲和之形狀. (4) 試證次式: $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\frac{1}{8}$. (5) 試求次式之值: $8\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ$.

(平面三角法40) 變正弦及餘弦之積爲和及差之問題解答

(1) $\cos(A+B)\cos(A-B)-\cos(B+C)\cos(B-C)+\cos(A+C)\cos(A-C)$

$=\frac{1}{2}(\cos 2B+\cos 2A)-\frac{1}{2}(\cos 2C+\cos 2B)+\frac{1}{2}(\cos 2C+\cos 2A)=\frac{1}{2}(2\cos 2A)=\cos 2A.$

(2) $4\sin A\sin B\sin C=2\sin A\cdot 2\sin B\sin C=2\sin A\{\cos(B-C)-\cos(B+C)\}$

$=2\sin A\cos(B-C)-2\sin A\cos(B+C)$

$=\sin(A+B-C)+\sin(A-B+C)-\{\sin(A+B+C)+\sin(A-B-C)\}$

$=\sin(A+B-C)+\sin(A-B+C)+\sin(-A-B-C)+\sin(-A+B+C).$

(3) $\sin 20^\circ\cos 5^\circ=\frac{1}{2}(\sin 25^\circ+\sin 15^\circ)=\dfrac{\sin 25^\circ}{2}+\dfrac{\sin 15^\circ}{2}.$

(4) $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\frac{1}{2}(\cos 60^\circ+\cos 20^\circ)\cos 80^\circ=\frac{1}{4}\cos 80^\circ+\frac{1}{4}(\cos 100^\circ+\cos 60^\circ)$

$=\frac{1}{4}(\cos 80^\circ+\cos 100^\circ+\frac{1}{2})=\frac{1}{4}(\cos 80^\circ-\cos 80^\circ+\frac{1}{2})=\frac{1}{8}.$

(5) $8\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ=8(\sin 20^\circ\sin 40^\circ)\sin 80^\circ=4(\cos 20^\circ-\cos 60^\circ)\sin 80^\circ$

$=4\cos 20^\circ\sin 80^\circ-4\cos 60^\circ\sin 80^\circ=2(\sin 100^\circ+\sin 60^\circ)-4\times\frac{1}{2}\sin 80^\circ$

$=2\sin 100^\circ+2\sin 60^\circ-2\sin 80^\circ=2\sin 100^\circ+\sqrt{3}-2\sin 80^\circ$

$=2(\sin 100^\circ-\sin 80^\circ)+\sqrt{3}=2(\sin 80^\circ-\sin 80^\circ)+\sqrt{3}=\sqrt{3}.$

公式	公式之證明	問題
$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. $\cos\beta-\cos\alpha=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.	$\sin(A+B)+\sin(A-B)$ $=2\sin A\cos B$. 令 $A+B=\alpha,\ A-B=\beta$, 則 $A=\frac{\alpha+\beta}{2},\ B=\frac{\alpha-\beta}{2}$. $\therefore\ \sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. 其他三式,亦可同法證明之.	*(1) 試證 $\sin 60^\circ+\sin 30^\circ$ $=2\sin 45^\circ\cos 15^\circ$. *(2) 試求 $\sin 75^\circ+\sin 15^\circ$ 之值. (3) 試將 $\frac{\cos 50^\circ-\cos 70^\circ}{\sin 70^\circ-\sin 50^\circ}$ 簡單之. (4) 試化 $\cos x+\cos(120^\circ-x)$ $+\cos(120^\circ+x)$ 爲最簡之式. (5) 設 x, y, z 爲等差級數,則次式能成立,試證之: $\sin x-\sin z$ $=2\sin(y-z)\cos y$. (6) 試求次式之極大極小: $\sin x+\cos x$.

 變正弦及餘弦之和或差爲積之形狀之問題解答

*(1) $\sin 60^\circ+\sin 30^\circ=2\sin\dfrac{60^\circ+30^\circ}{2}\cos\dfrac{60^\circ-30^\circ}{2}$

$=2\sin 45^\circ\cos 15^\circ.$

*(2) $\sin 75^\circ+\sin 15^\circ$

$=2\sin\frac{1}{2}(75^\circ+15^\circ)\cos\frac{1}{2}(75^\circ-15^\circ)$

$=2\sin 45^\circ\cos 30^\circ$

$=2\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{6}.$

(3) $\dfrac{2\sin 60^\circ\sin 10^\circ}{2\cos 60^\circ\sin 10^\circ}=\tan 60^\circ=\sqrt{3}.$

(4) $\cos x+\cos(120^\circ+x)+\cos(120^\circ-x)$

$=\cos x+2\cos 120^\circ\cos x$

$=\cos x+2(-\cos 60^\circ)\cos x$

$=\cos x+2\times(-\frac{1}{2})\cos x$

$=\cos x-\cos x=0.$

(5) 因 $x+z=2y.$

$\therefore\ x-z=2(y-z).$

$\sin x-\sin z=2\cos\dfrac{x+z}{2}\sin\dfrac{x-z}{2}$

$=2\cos y\sin(y-z).$

(6) $\sin x+\cos x=\sin x+\sin(90^\circ-x)$

$=2\sin 45^\circ\cos(x-45^\circ)$

$=\sqrt{2}\cos(x-45^\circ).$

$\cos(x-45^\circ)$ 之極大爲 1,

$\cos(x-45^\circ)$ 之極小爲 $-1.$

$\therefore$ 所求之極大爲 $\sqrt{2}$,

極小爲 $-\sqrt{2}.$

分角之三角函數(已知 $\cos A$, 求 $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$) (平面三角法43)

公式	證明	問題
$\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$. $\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$. $\tan\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$.	$\cos 2A=1-2\sin^2 A=2\cos^2 A-1$. $\therefore\ \cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}=2\cos^2\frac{A}{2}-1$. $\therefore\ \sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}$, $\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$. 同法, $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$.	(1) 已知 $\cos 72^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, 試計算 $\sin 36^\circ$. (2) 知已 $\cos 315^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$, 試求 $\cos 157.5^\circ$ 之値. *(3) 試求 $\tan 22^\circ 30'$ 之値. (4) $\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin A}{1+\cos A}=\frac{1-\cos A}{\sin A}$, 試證明之.

 分角之三角函數(已知 $\cos A$, 求 $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$)之問題解答

(1) $\sin 36^\circ$ 爲正,

$$\sin 36^\circ=\sqrt{\frac{1-\cos 72^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

(2) $$\cos 157.5^\circ=-\sqrt{\frac{1+\cos 315^\circ}{2}}=-\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{2}}$$

$$=-\sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}}=-\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}$$

$$=-\frac{\sqrt{18+6\sqrt{3}}}{6}.$$

*(3) $$\tan 22^\circ 30'=\sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{1+\cos 45^\circ}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}}=\sqrt{2}-1$$

(4) $$\frac{\sin A}{1+\cos A}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\tan\frac{A}{2}.$$

又 $$\frac{1-\cos A}{\sin A}=\frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\tan\frac{A}{2}.$$

分角之三角函數（已知 $\sin A$，求 $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$）　（平面三角法 45）

公式	證明	問題
$\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A})$. $\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{1+\sin A}\mp\sqrt{1-\sin A})$.	$\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)^2$ $=\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$. $\therefore\ \left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)^2=1+\sin A$. $\therefore\ \sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}$.　(1) 同法， $\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1-\sin A}$.　(2) (1)±(2)，則 $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A})$. $\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{1+\sin A}\mp\sqrt{1-\sin A})$. 設知 $\angle A$，則此公式之符號可由 (1) 與 (2) 決定	(1) 設 $\sin 100^\circ=s$，試以 s 表 $\sin 50^\circ$ 及 $\cos 50^\circ$. (2) 已知 $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$，試計算 $\sin 15^\circ$. (3) $\tan A=\frac{3}{4}$，試計算 $\sin\frac{A}{2}$.

(平面三角法 46)　分角之三角函數(已知 $\sin A$, 求 $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$)之問題解答

(1)　由公式,得

$$\sin 50^\circ+\cos 50^\circ=\sqrt{1+\sin 100^\circ},$$

$$\sin 50^\circ-\cos 50^\circ=\sqrt{1-\sin 100^\circ}.$$

$$(\because\ \sin 50^\circ>\cos 50^\circ.)$$

$$\therefore\ \sin 50^\circ=\tfrac{1}{2}(\sqrt{1+\sin 100^\circ}+\sqrt{1-\sin 100^\circ}).$$

$$\therefore\ \sin 50^\circ=\tfrac{1}{2}(\sqrt{1+s}+\sqrt{1-s}),$$

又 $\cos 50^\circ=\tfrac{1}{2}(\sqrt{1+s}-\sqrt{1-s})$.

(2)　$\cos\dfrac{30^\circ}{2}=\cos 15^\circ$, $\sin\dfrac{30^\circ}{2}=\sin 15^\circ$ 俱爲正,

且 $\cos 15^\circ>\sin 15^\circ$, 故由公式,得

$$\cos 15^\circ+\sin 15^\circ=\sqrt{1+\sin 30^\circ},$$

$$\cos 15^\circ-\sin 15^\circ=\sqrt{1-\sin 30^\circ}.$$

相減,得

$$2\sin 15^\circ=\sqrt{1+\sin 30^\circ}-\sqrt{1-\sin 30^\circ}$$

$$=\sqrt{1+\frac{1}{2}}-\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}.$$

$$\therefore\ \sin 15^\circ=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

(3)　$1+\tan^2 A=\sec^2 A.$

$$\therefore\ \sec A=\sqrt{1+\tan^2 A}=\pm\sqrt{\frac{25}{16}}=\pm\frac{5}{4}.$$

$$\therefore\ \cos A=\pm\frac{4}{5}.$$

$$\therefore\ \sin A=\tan A\cos A=\frac{3}{4}\left(\pm\frac{4}{5}\right)=\pm\frac{3}{5}.$$

$$\therefore\ \sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A})$$

$$=\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{1+\frac{3}{5}}\pm\sqrt{1-\frac{3}{5}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}\ \text{或}\ \pm\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

正弦(或餘弦)之積與差之關係 (平面三角法47)

公式

$\sin(A+B)\sin(A-B)$

$=\sin^2 A-\sin^2 B$

$=\cos^2 B-\cos^2 A.$

$\cos(A+B)\cos(A-B)$

$=\cos^2 A-\sin^2 B$

$=\cos^2 B-\sin^2 A.$

證明

$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B,$

$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B.$

$\therefore\ \sin(A+B)\sin(A-B)$

$=\sin^2 A\cos^2 B-\cos^2 A\sin^2 B$

$=\sin^2 A(1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 A)\sin^2 B$

$=\sin^2 A-\sin^2 B$

$=1-\cos^2 A-(1-\cos^2 B)$

$=\cos^2 B-\cos^2 A.$

第二公式,亦可同法證明之.

問題

(1) 試證 $\cos^2 A-\cos^2 3A=\sin 4A\sin 2A.$

(2) 試證下式:

$\cos^2 A+\cos^2(A-2B)-1=\cos 2(A-B)\cos 2B.$

(3) 試證 $\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A-\sin^2 B}=\tan(A+B)\tan(A-B).$

(4) 試簡單 $\sin^2 100^\circ-\sin^2 50^\circ.$

(5) 設 $\tan^2 x=\tan(\alpha+x)\tan(\alpha-x)$

試證 $\sin 2x=\sqrt{2}\sin\alpha.$

正弦(或餘弦)之積與差之關係之問題解答

(1) $\cos^2 A - \cos^2 3A$

$= \sin(3A + A)\sin(3A - A)$

$= \sin 4A \sin 2A.$

(2) $\cos^2 A + \cos^2(A - 2B) - 1$

$= \cos^2 A - \{1 - \cos^2(A - 2B)\}$

$= \cos^2 A - \sin^2(A - 2B)$

$= \cos(A + A - 2B)\cos(A - A + 2B)$

$= \cos 2(A - B)\cos 2B.$

(3) $$\frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A - \sin^2 B} = \frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\cos(A+B)\cos(A-B)}$$

$$= \tan(A + B)\tan(A - B).$$

(4) $\sin^2 100° - \sin^2 50$

$= \sin(100° + 50°)\sin(100° - 50°)$

$= \sin 150° \sin 50° = \sin 30° \sin 50°$

$= \frac{1}{2} \sin 50°.$

(5) $$\tan^2 x = \frac{\sin(a+x)\sin(a-x)}{\cos(a+x)\cos(a-x)} = \frac{\sin^2 a - \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 a}.$$

故 $\sin^2 x(\cos^2 x - \sin^2 a) = \cos^2 x(\sin^2 a - \sin^2 x).$

$\therefore$ $2 \sin^2 x \cos^2 x = \sin^2 a(\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin^2 a.$

$\therefore$ $4 \sin^2 x \cos^2 x = 2 \sin^2 a.$

$\therefore$ $2 \sin x \cos x = \sqrt{2} \sin a.$

$\therefore$ $\sin 2x = \sqrt{2} \sin a.$

解答之例	問題
例題）設 A, B, C 爲三角形之三角，試證次式：$$\sin A-\sin B+\sin C=4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$ 解答）$$\sin A-\sin B+\sin C=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}+\sin(A+B)$$ $$=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$ $$=2\cos\frac{A+B}{2}\left(\sin\frac{A-B}{2}+\sin\frac{A+B}{2}\right)$$ $$=2\cos\frac{A+B}{2}\left(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right)$$ $$=4\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$ $$=4\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}.$$	(1) 設 $A+B+C=2\pi$，試證次式：$$\sin A+\sin B+\sin C$$ $$=4\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}\sin\frac{A+B}{2}.$$ (2) 試證次之等式：$$\tan\frac{A+B}{2}-\tan\frac{A-B}{2}$$ $$=\frac{2\sin B}{\cos A+\cos B}.$$

恆等式問題之解答（其一）

(1) $\sin A+\sin B+\sin C$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin(A+B)$$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\left(2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right)$$

$$=4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{A+C}{2}.$$

(2) $\tan\frac{A+B}{2}-\tan\frac{A-B}{2}$

$$=\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}-\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$=\frac{\sin B}{\frac{1}{2}(\cos A+\cos B)}$$

$$=\frac{2\sin B}{\cos A+\cos B}.$$

例題	證明	問題
試證下式： $1+\tan a\tan\frac{a}{2}=\sec a.$	$\tan a=\dfrac{2\tan\frac{a}{2}}{1-\tan^2\frac{a}{2}}.$ $\therefore\ 1+\tan a\tan\frac{a}{2}=1+\dfrac{2\tan\frac{a}{2}}{1-\tan^2\frac{a}{2}}\tan\frac{a}{2}$ $=1+\dfrac{2\tan^2\frac{a}{2}}{1-\tan^2\frac{a}{2}}=\dfrac{1-\tan^2\frac{a}{2}+2\tan^2\frac{a}{2}}{1-\tan^2\frac{a}{2}}$ $=\dfrac{1+\tan^2\frac{a}{2}}{1-\tan^2\frac{a}{2}}=\left(1+\dfrac{\sin^2\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2}}\right)\Bigg/\left(1-\dfrac{\sin^2\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2}}\right)$ $=\dfrac{\cos^2\frac{a}{2}+\sin^2\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2}-\sin^2\frac{a}{2}}=\dfrac{1}{\cos a}=\sec a.$	試證次之恆等式： (1) $\dfrac{\sin 3A-\sin 2A}{\sin 3A+\sin 2A}=\cot\dfrac{5A}{2}\tan\dfrac{A}{2}.$ (2) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}.$ (3) $1+\tan(A+B)\tan(A-B)=\dfrac{1-2\sin^2 B}{\cos^2 A-\sin^2 A}.$

恆等式問題之解答 (其二)

(1) $$\frac{\sin 3A-\sin 2A}{\sin 3A+\sin 2A}=\frac{2\cos\frac{3A+2A}{2}\sin\frac{3A-2A}{2}}{2\sin\frac{3A+2A}{2}\cos\frac{3A-2A}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{5A}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{5A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\cot\frac{5A}{2}\tan\frac{A}{2}.$$

(2) $$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\tan\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

(3) $$1+\tan(A+B)\tan(A-B)$$

$$=1+\frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\cos(A+B)\cos(A-B)}$$

$$=1+\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A-\sin^2 B}$$

$$=\frac{\cos^2 A-\sin^2 B+\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A-\sin^2 B}$$

$$=\frac{1-2\sin^2 B}{\cos^2 A-\sin^2 B}.$$

對數之意義及公式

意義	公式	證明	問題
設 $a^x=y$，改記爲 $\log_a y=x$，此 x 謂之以 a 爲底 y 之對數. 例如 $3^5=243$，記爲 $\log_3 243=5$，此 5 稱爲以 3 爲底 243 之對數.	(1) $\log_a 1=0$. (2) $\log_a a=1$. (3) $\log_a mn=\log_a m+\log_a n$. (4) $\log_a \frac{m}{n}=\log_a m-\log_a n$. (5) $\log_a m^p=p\log_a m$. (6) $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$. (注意) $\log m=\log_{10} m$.	(1) $a^0=1$, ∴ $\log_a 1=0$. (2) $a^1=a$, ∴ $\log_a a=1$. 令 $\log_a m=x$, $\log_a n=y$, 則 $m=a^x$, $n=a^y$. (3) $mn=a^x a^y=a^{x+y}$. ∴ $\log_a mn=x+y=\log_a m+\log_a n$. (4) $\frac{m}{n}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$. ∴ $\log_a \frac{m}{n}=x-y=\log_a m-\log_a n$. (5) $m=a^x$, ∴ $m^p=a^{px}$. ∴ $\log_a m^p=px=p\log_a m$. (6) 令 $\log_a m=x$, $\log_b m=y$. 則 $a^x=m=b^y$. ∴ $a^{\frac{x}{y}}=b$, $b^{\frac{y}{x}}=a$. ∴ $\log_a b=\frac{x}{y}$. 又 $\log_b a=\frac{y}{x}$. ∴ $\log_b a=1/\log_a b$.	(1) 試求 $\log_2 32$. (2) 設 $\log(x^2y^2)=a$, $\log\frac{x}{y}=b$, 試求 $\log x$, $\log y$. (3) 試證下式: $\log_a m\times\frac{1}{\log_a b}=\log_b m$. (4) 設 $\log_8 9=a$, $\log_3 5=b$, 試證 $\log_{10}2=\frac{2}{3ab+2}$.

(1)　$\log_2 32=\log_2 2^5=5\log_2 2=5\times 1=5.$

(2)　$\log(x^2y^2)=a$ ··························· (1)

$\log\dfrac{x}{y}=b$ ··························· (2)

從 (1),　$\log x^2+\log y^2=a.$

$2\log x+2\log y=a.$

$\log x+\log y=\dfrac{a}{2}$ ··············· (3)

從 (2),　$\log x-\log y=b$ ················· (4)

$\dfrac{(3)+(4)}{2}$,　$\log x=\dfrac{a+2b}{4}.$

$\dfrac{(3)-(4)}{2}$,　$\log y=\dfrac{a-2b}{4}.$

(3)　$\log_a m=x,$

$\log_b m=y,$

$a^x=m=b^y.$

$a^{\frac{x}{y}}=b$

$\log_a a^{\frac{x}{y}}=\log_a b.$

$\dfrac{x}{y}=\log_a b.$

$\dfrac{x}{\log_a b}=y.$

$\therefore\ \dfrac{\log_a m}{\log_a b}=\log_b m.$

(4)　由 $\log_8 9=a$, 得 $8^a=9$, 卽 $2^{3a}=3^2$.

由 $\log_3 5=b$, 得 $3^b=5$,　$\therefore\ 3^{2b}=5^2.$

$\therefore\ 5^2=(2^{3a})^b=2^{3ab}.$　$\therefore\ 2^2\times 5^2=2^2\times 2^{3ab}.$

$\therefore\ 10^2=2^{3ab+2}.$

兩邊各取以 10 爲底之對數, 得

$$2=(3ab+2)\log_{10}2$$

$$\therefore\ \log_{10}2=\frac{2}{3ab+2}.$$

意　　義	同數字列於同順序之數之對數	問　　題
常用對數者,即以 10 爲底之對數也. 但其底 10, 通常不必書出. $10^0=1,\quad \log 1=0;$ $10^1=10,\quad \log 10=1;$ $10^2=100,\quad \log 100=2;$ $10^3=1000,\quad \log 1000=3;$ $10^4=10000,\quad \log 10000=4;$ $0.1\ =\frac{1}{10}=10^{-1},\quad \log 0.1=-1;$ $0.01\ =\frac{1}{100}=10^{-2},\quad \log 0.01=-2;$ $0.001=\frac{1}{1000}=10^{-3},\quad \log 0.001=-3.$	$\log(N\times 10^p)=\log N+\log 10^p=\log N+p,$ $\log\frac{N}{10^p}=\log N-\log 10^p=\log N-p.$ 例如　$\log 4.215=0.62480.$ $\log 421.5=\log(4.215\times 100)$ $=\log 4.215+\log 100$ $=0.62480+2$ $=2.62480.$ $\log 0.04215=\log(4.215\div 100)$ $=\log 4.215-\log 100$ $=0.62480-2$ $=\bar{2}.62480.$ 同數字列於同順序之數之對數, 其小數部分(假數)相同,所異者惟整數部分(指標)耳.	(1) 問某數對數之指標與其數之關係? (2) 問 2^{11} 爲幾位之數?但 $\log 2=0.30103.$ (3) 問$\left(\frac{1}{7}\right)^{12}$自小數點以後幾位始有有效數字?但 $\log 7=0.84510.$

 常用對數之意義及指標假數之問題解答

(1) 例如

$$\log 4.215 = 0.62480.$$
$$\log 42.15 = 1.62480.$$
$$\log 421.5 = 2.62480.$$
$$\log 4215 = 3.62480.$$
$$\log 42150 = 4.62480.$$
$$\log 0.4215 = \bar{1}.62480.$$
$$\log 0.04215 = \bar{2}.62480.$$

數之整數部分爲一位，則其指標爲 0，二位則爲 1，三位爲 2，四位爲 3，卽比整數部分之位數少 1. 又無整數部分者，其最初之有效數字在小數點右一位則爲 $\bar{1}$，右二位則爲 $\bar{2}$，卽自小數點至最初有效數字之位數，與指標相等.

(2)
$$\log 2^{11} = 11 \log 2$$
$$= 11 \times 0.30103$$
$$= 3.31133.$$

其指標爲 3，故爲整數四位之數.

(3)
$$\log\left(\frac{1}{7}\right)^{12} = 12 \log\left(\frac{1}{7}\right)$$
$$= 12(\log 1 - \log 7)$$
$$= -12 \log 7$$
$$= -12 \times 0.84510$$
$$= -10.14120$$
$$= \overline{11}.8588.$$

(注意) 假數常爲正.

其指標爲 $\overline{11}$，故 $\left(\frac{1}{7}\right)^{12}$ 之最初有效數字在小數點以後 11 位.

眞數爲表中所有者

例. 求 485.4 之對數.

由表,得

$\log 4.854=0.68610.$

$\log 485.4$ 之指標爲 2.

$\therefore \log 485.4=2.68610.$

眞數爲表中所無者

例. 求 48.543 之對數.

因差甚小時,眞數之差與其對數之差爲比例.

$\log 48.54=1.68610,$

$\log 48.55=1.68619.$

其眞數之差爲 0.01,

其對數之差爲 0.00009.

令 $\log 48.543-\log 48.54=x$, 則

$0.01:0.003=0.00009:x.$

$$\therefore\ x=\frac{0.003\times 0.00009}{0.01}=0.000027.$$

$$\therefore\ \log 48.543=1.68610+0.000027=1.68613.$$

(注意) 對數表中 *P. P.* 之部分,即表示上述計算(比例)之結果.

問　題

(1) 試求 $\log 1050.9$.

(2) 試求 $\log 600$.

(3) 試求 $\log\sqrt{262}$.

(4) 試求 $\log[(\sqrt{386})^3\times 47]$.

(5) 試求 $\log 15764$.

(6) 試求 $\log\dfrac{(2.013)^2\times(0.0593)^{\frac{3}{2}}}{(0.9124)^4}$.

有眞數求對數之問題解答

(1) 由表,得 $\log 1.0509=0.0215614.$

$\therefore \quad \log 1050.9=3.0215614.$

(2) 由表,得 $\log 6 \quad =0.77815.$

$\therefore \quad \log 600=2.77815.$

(3) $\log\sqrt{262}=\frac{1}{2}\log 262$

$=\frac{1}{2}\times 2.41830$

$=1.20915.$

(4) $\log\{(\sqrt{386})^3\times 47\}$

$=\frac{3}{2}\log 386+\log 47$

$=\frac{3}{2}\times 2.58659+1.67210$

$=5.55198.$

(5) $\log 15760=4.19756,$

$\log 15770=4.19783$

$10:4=27:x.$

$x=\frac{27\times 4}{10}=10.8.$

$\therefore \quad \log 15764=4.19767.$

(注意) 27 爲 783 與 756 之差.

4 爲 15764 與 15760 之差.

10.8 謂之比例分,係由比例式求出.

(6) $\log\frac{(2.013)^2\times(0.0593)^{\frac{3}{2}}}{(0.9124)^4}$

$=2\log 2.013+\frac{3}{2}\log 0.0593-4\log 0.9124$

$=2\times 0.30384+\frac{3}{2}\times\bar{2}.77305-4\times\bar{1}.96019$

$=0.60768+\bar{2}.15958-\bar{1}.84076=\bar{2}.92650.$

有對數求眞數之法

對數爲表中所有者

例 1. 有 $\log x=5.85739$, 試求適合於此式中 x 之眞數.

由表,得

$$3.85739=\log 7201.$$

$$\therefore\ 5.85739=\log 720100.$$

$$\therefore\ x=720100.$$

例 2. $\log x=\bar{1}.85739.$

$$\therefore\ x=0.7201.$$

對數爲表中所無者

例. $\log x=3.09188$, 求 x.

$$3.09188$$

$$3.09167=\log 1235$$

$$3.09202=\log 1236$$

$$\begin{array}{lr} 35 & 1 \\ 21 & x \end{array}$$

$$\therefore\ 35:21=1:x.$$

$$\therefore\ x=\frac{21}{35}=\frac{3}{5}=0.6.$$

$$\therefore\ x=1235.6.$$

問　題

(1) 有 $\log x=\bar{2}.81291$, 試求其適合於上式中 x 之眞數.

(2) 有 $\log x=4.18632$, 試求其適合於上式中 x 之眞數.

(3) 試用對數求 0.318 的立方

(4) 求 0.3663265 的立方根.

有對數求眞數之問題解答

(1) 由表,得 $\log 6.5=0.81291$.

$$\therefore \quad x=0.065.$$

(2) $$\log x=4.18632$$

由表, $\log 15350=4.18611$

$\log 15360=4.18639$

10	28
x	21

$$10:x=28:21.$$

$$x=\frac{21\times 10}{28}=7.5.$$

$$\therefore \quad x=15350+7.5$$
$$=15357.5.$$

(3) 設 $x=0.318^3$, 則

$$\log x=3\log 0.318=3\times\bar{1}.50243$$
$$=\bar{2}.50729=\log 0.032157$$

$$\therefore \quad 0.318^3=0.032157.$$

(4) 設 $x=\sqrt[3]{0.3663265}$, 則

$$\log x=\frac{1}{3}\log 0.3663265=\frac{1}{3}\times\bar{1}.56387$$
$$=(-3+2.56387)\div 3=\bar{1}.85462$$
$$=\log 0.71552.$$

故所求之立方根爲 0.71552.

度數爲表中所有者

例. $\log\sin 15°40'$.

由表,求得 9.43143.

然實際之對數,當於此減 10.

$\therefore \quad \log\sin 15°40' = \bar{1}.43143.$

(注意) 通常皆不減 10 而記之如次:

$$L\sin 15°40' = 9.43143.$$

度數爲表中所無者

例. $\log\sin 15°41'20''$.

檢表

$$\log\sin 15°41' = \bar{1}.43188$$
$$\log\sin 15°42' = \bar{1}.43233$$

$$\begin{array}{rr} 1' & 0.00045 \\ 20'' & x \end{array}$$

$$60'' : 20'' = 45 : x.$$

$$\therefore \quad x = \frac{45 \times 20}{60} = 15.$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \log\sin 15°41'20'' &= \bar{1}.43188 + 0.00015 \\ &= \bar{1}.43203. \end{aligned}$$

問題

(1) $\log\sin A$ 及 $\log\cos A$ 之指標如何?

(2) 比例部分當加減時,所宜注意者若何?

(3) 試求 $\log\sin 25°34'45''$.

(4) 試求 $\log\cos 25°34'45''$.

有角度求其三角函數之對數之問題解答

(1) $\sin A$ 及 $\cos A$ 不能比 1 大,故其對數之指標常不為正,即為負或為 0.

(2) 正弦及正切,其比例部分宜加於小角之對數.
餘弦及餘切,其比例部分宜自小角之對數減之.

(3) $\log\sin 25°34'=\bar{1}.63504$

$\underline{\log\sin 25°35'=\bar{1}.63531}$

$60''\qquad 27$

$45''\qquad x$

$60'':45''=27:x.$

$$\therefore\quad x=\frac{27\times 45}{60}=20.25.$$

$$\therefore\quad \log\sin 25°34'45''=\bar{1}.63504+0.00020$$
$$=\bar{1}.63524.$$

(4) $\log\cos 25°34'=\bar{1}.95525$

$\underline{\log\cos 25°35'=\bar{1}.95519}$

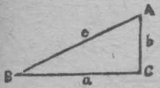
$60''\qquad 6$

$45''\qquad x$

$60'':45''=6:x.$

$$\therefore\quad x=\frac{6\times 45}{60}=4.5.$$

$$\therefore\quad \log\cos 25°34'45''=\bar{1}.95525-0.000045.$$
$$=\bar{1}.95520.$$

種類	解法	問題
C 為直角,有 a, b 二邊者.  	$\tan A=\dfrac{a}{a}$. $\therefore \log\tan A=\log a-\log b$. $\therefore$ 求得 A 後,即可由 $B=90°-A$ 求得 B. 由 $\dfrac{a}{c}=\sin A$. $\therefore \log c=\log a-\log\sin A$. 從此即可求得 c 邊.	(1) 有三角 ABC, 其 $\angle C=90°$, $AC=5$ 尺, $BC=2$ 丈, 試求 $\angle A$. (2) 有三角形 ABC, 其 $\angle C=90°$, $AC=12$ 寸. $\angle A=25°$, 試求 c 邊. (3) 設直角三角形直角之二等分線,分斜邊為 4.319 公分與 5.238 公分之二部分,則此三角形之角如何?
有斜邊 c 及其他一邊 a 者.	$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(c+a)(c-a)}$. $\therefore \log b=\dfrac{1}{2}\{\log(c+a)+\log(c-a)\}$.	
有一角 A 及一邊 b 者.	$\dfrac{b}{c}=\cos A$. $\therefore \log c=\log b-\log\cos A$. 從此即可求得 c 邊.	

(1) $\tan A=\frac{a}{b}$

$=\frac{20}{5}=4$ 尺.

$$\log\tan A=\log 4=0.60206$$

$$\log\tan 75^\circ\ 57'=0.60162$$

$$\log\tan 75^\circ\ 58'=0.60215$$

$1'$	53
x''	44

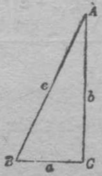
$$60'':x''=53:44.$$

$$\therefore\quad x=\frac{44\times 60}{53}=49.8.$$

$$\therefore\quad \angle A=75^\circ 57' 49.8''.$$

(2) $\frac{b}{c}=\cos A,$

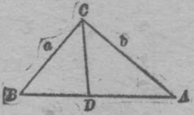
$$c=\frac{b}{\cos A}.$$



$$\begin{aligned}\log c&=\log b-\log\cos A\\&=\log 12-\log\cos 25^\circ\\&=1.07918-\bar{1}.95728\\&=1.12190.\end{aligned}$$

檢表,知　$c=13.24.$　　答　13.24 寸.

(3) 如圖,$\angle C$ 爲直角,CD 爲直角之二等分線,$AD=5.238$ 公分,$BD=4.319$ 公分.依幾何學定理,



$$\frac{a}{4.319}=\frac{b}{5.238}.$$

$$\therefore\quad \tan A=\frac{a}{b}=\frac{4.319}{5.238}.$$

故　$\log\tan A=\log 4.319-\log 5.238$

$$=0.63538-0.71917$$

$$=\bar{1}.91621=\log 39^\circ\ 30'\ 26''.$$

$$\therefore\quad A=39^\circ\ 30'\ 26',$$

$$B=90^\circ-39^\circ\ 30'\ 26''=50^\circ\ 29'\ 3$$

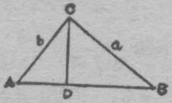
三角形邊角之關係(其一)

公式

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

但 a, b, c 表三角形之三邊, A, B, C 表對於 a, b, c 之內角.

證明



$$CD=a \sin B,$$

$$CD=b \sin A.$$

$$\therefore\ a \sin B=b \sin A.$$

$$\therefore\ \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

同法, $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}.$

$$\therefore\ \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

問題

(1) 設 $\triangle ABC$, 其 $2a^2-3b^2=4bc$, 則 $2\sin^2 A-3\sin^2 B=4\sin B\sin C$; 試證之.

(2) 於 $\triangle ABC$, 試證次式:
$a(\sin^2 B+\sin^2 C)=\sin A(b\sin B+c\sin C)$.

(3) 於 $\triangle ABC$, 其 $\dfrac{A}{2}=\dfrac{B}{3}=\dfrac{C}{4}$, 則 $\dfrac{a+c}{2b}=\cos\dfrac{A}{2}$, 試證之.

*(4) 設三角形三角正弦之比爲 4:5:6, 而其最小角所對之邊爲 2 尺, 求其他二邊爲若干尺?

三角形邊角關係之問題解答(其一)

(1) 令 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=d$, 則

$$a=d\sin A,$$
$$b=d\sin B,$$
$$c=d\sin C.$$

以上各式代入 $2a^2-3b^2=4bc$, 則

$$2(d\sin A)^2-3(d\sin B)^2=4(d\sin B)(d\sin C).$$

$$\therefore\quad 2\sin^2A-3\sin^2B=4\sin B\sin C.$$

(2) 左邊 $=a(\sin^2B+\sin^2C)$

$=d\sin A(\sin^2B+\sin^2C)$.

右邊 $=\sin A(d\sin^2B+d\sin^2C)$

$=d\sin A(\sin^2B+\sin^2C)$.

∴ 兩邊相等.

(3) $\dfrac{A}{2}=\dfrac{B}{3}=\dfrac{C}{4}=\dfrac{A+B+C}{2+3+4}=\dfrac{180^\circ}{9}=20^\circ.$

$\therefore\quad A=40^\circ,\ B=60^\circ,\ C=80^\circ.$

令 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=d$, 則

$$\frac{a+c}{2b}=\frac{d\sin A+d\sin C}{2d\sin B}=\frac{\sin A+\sin C}{2\sin B}$$
$$=\frac{\sin 40^\circ+\sin 80^\circ}{2\sin 60^\circ}=\frac{2\sin 60^\circ\cos 20^\circ}{2\sin 60^\circ}$$
$$=\cos 20^\circ=\cos\frac{A}{2}.$$

*(4) 依 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$, 則

$$\frac{2}{4}=\frac{b}{5}=\frac{c}{6}.$$

$$\therefore\quad b=\frac{10}{4}=2.5,\ c=\frac{12}{4}=3.$$

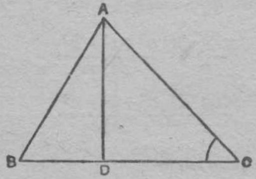
答 2.5 尺, 3 尺

三角形邊角之關係(其二)

公式

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,　$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$,　$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

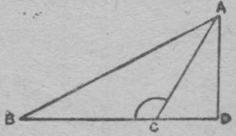
證明



$C<90^\circ$, 由幾何學定理,得

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2BC\cdot CD.$$

$$c^2=b^2+a^2-2ab\cos C.$$

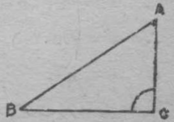


$C>90^\circ$, 由幾何學定理,得

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2+2BC\cdot CD.$$

$$c^2=b^2+a^2+2ab\cos(180^\circ-C).$$

$$\therefore\ c^2=b^2+a^2-2ab\cos C.$$



設 $C=90^\circ$, 則 $\cos C=0$.

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2.$$

$$\therefore\ c^2=b^2+a^2.$$

$$\therefore\ c^2=b^2+a^2-2ab\cos C.$$

問題

*(1) 於 $\triangle ABC$, 其 $A=60^\circ$, $b=8$, $c=5$, 則 a 如何?

(2) 於 $\triangle ABC$, 試證次之公式:

$a=b\cos C+c\cos B$,　$b=c\cos A+a\cos C$,　$c=a\cos B+b\cos A$.

(3) 於 $\triangle ABC$, 試證 $\dfrac{\cos A}{a}+\dfrac{\cos B}{b}+\dfrac{\cos C}{c}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$.

 三角形邊角關係之問題解答(其二)

*(1) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$

$\therefore\ a^2=8^2+5^2-2\times5\times8\cos60^\circ$

$\therefore\ a^2=64+25-80\times\frac{1}{2}.$

$\therefore\ a^2=49.$

$\therefore\ a=\pm7.$

但 a 爲三角形之一邊,宜爲正數.

$\therefore\ a=7.$ 答 $a=7.$

(2) $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$

$$\therefore\ b^2+c^2=c^2+b^2+2a^2-2ca\cos B-2ab\cos C.$$

$\therefore\ 2a^2=2ab\cos C+2ca\cos B.$

$\therefore\ a=b\cos C+c\cos B.$

同法,可證其他二式.

(3) 由公式, $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, 得

$$\frac{\cos A}{a}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2abc}.$$

同法, $$\frac{\cos B}{b}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2abc},$$

$$\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}.$$

將此三式各邊相加,得

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

公式	證明	問題
$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.	由公式, $a^2=b^2+c^2-2b^2\cos A$, 得 $2bc\cos A=b^2+c^2-a^2$. $\therefore\quad \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. 同法,可證其他二式.	*(1) 已知三角形之三邊爲 $a=2$, $b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{}$[illegible] 求三角之値. (2) 於 $\triangle ABC$, 已知 $a=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\ b=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 試求 $\angle B$. (3) 於 $\triangle ABC$, 試以 a, b, c 表次式: $\dfrac{b^2}{a}\cos A+\dfrac{c^2}{b}\cos B+\dfrac{a^2}{c}\cos C$.

*(1) $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{2+2-4}{2\times 2}=0.$

$\therefore\quad A=90°.$

$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{4+2-2}{2\times 2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

$\therefore\quad B=45°.$

$C=180°-90°-45°=45°.$

(2) $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{2\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-\sqrt{2}\sqrt{3}}$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{2}(3-\sqrt{3})}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$\therefore\quad B=45°.$

(3) $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$

$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac},$

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$

$$\therefore\ 原式=\frac{b^2}{a}\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2}{b}\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$+\frac{a^2}{c}\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$=\frac{a^4+b^4+c^4}{2abc}.$$

解答之例	問題

解答之例

(例題) 設三角形之三角為 A, B, C, 其對邊為 a, b, c, 則有次之關係,試證之:

$$a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0.$$

(解答) 左邊 $=a\sin B\cos C-a\cos B\sin C$
$+b\sin C\cos A-b\cos C\sin A$
$+c\sin A\cos B-c\cos A\sin B.$

但 $\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}, & \therefore\ a\sin B=b\sin A \\ \dfrac{b}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}, & \therefore\ b\sin C=c\sin B \\ \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}, & \therefore\ a\sin C=c\sin A \end{array}\right\}$

$\therefore$ 左邊 $=a\sin B\cos C-a\cos B\sin C$
$+b\sin C\cos A-a\sin B\cos C$
$+a\sin C\cos B-b\sin C\cos A$
$=0.$

問題

(1) 於 $\triangle ABC$, 試證次式:

$$\frac{a+b}{a-b}=\tan\frac{A+B}{2}\cot\frac{A-B}{2}.$$

(2) 於 $\triangle ABC$, 其 $a\neq b$, 若有次之關係式, 則 C 為直角,試證之:

$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}.$$

(3) 於 $\triangle ABC$, 試證次式:

$$\frac{a}{2\sin A}=\frac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}.$$

(4) 於 $\triangle ABC$, 試證次式:

$$b\sin B-c\sin C=a\sin(B-C).$$

(1) 令 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$ (公式), 則

$a=k\sin A,\ b=k\sin B,\ c=k\sin C.$

$$\therefore\ \frac{a+b}{a-b}=\frac{k\sin A+k\sin B}{k\sin A-k\sin B}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}$$

$$=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}$$

$$=\tan\frac{A+B}{2}\cot\frac{A-B}{2}.$$

(2) 由前題,

$$\frac{a+b}{a-b}=\tan\frac{A+B}{2}\cot\frac{A-B}{2}.$$

$$\therefore\ \frac{a-b}{a+b}=\cot\frac{A+B}{2}\tan\frac{A-B}{2}.$$

但 $\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}$ (假設).

$$\therefore\ \cot\frac{A+B}{2}=1,\quad\therefore\ \frac{A+B}{2}=45^\circ.$$

$$\therefore\ A+B=90^\circ.\quad\therefore\ C=90^\circ,$$

(3) 由公式, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$, 得

$$\frac{a}{2\sin A}=\frac{a\cos A}{2\sin A\cos A}=\frac{b\cos B}{2\sin B\cos B}$$

$$=\frac{c\cos C}{2\sin C\cos C}.$$

$$\therefore\ \frac{a}{2\sin A}=\frac{a\cos A}{\sin 2A}=\frac{b\cos B}{\sin 2B}=\frac{c\cos C}{\sin 2C}.$$

$$\therefore\ \frac{a}{2\sin A}=\frac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}.$$

(4) $b\sin B-c\sin C=k\sin^2 B-k\sin^2 C$

$=k(\sin^2 B-\sin^2 C)=k\sin(B+C)\sin(B-C)$

$=k\sin A\sin(B-C)=a\sin(B-C).$

公式	證明	問題
$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$. $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$. $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$. 但 $s=\frac{a+b+c}{2}$.	$\cos 2A=1-2\sin^2 A$. $\therefore\ \cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}$. $\therefore\ \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}$ $=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}}$ $=\sqrt{\frac{(2s-2c)(2s-2b)}{4bc}}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$. 又 $\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}-1$. $\therefore\ \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}$ $=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}}$ $=\sqrt{\frac{2s(2s-2a)}{4bc}}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$. 又 $\tan\frac{A}{2}=\sin\frac{A}{2}\Big/\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$.	(1) 於 $\triangle ABC$, 試證次之等式: $1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\frac{2c}{a+b+c}$. (2) 於 $\triangle ABC$, 試證 $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{b+c-a}{a+b+c}$. (3) 於三角形,試簡單次式: $(b-c)\cot\frac{A}{2}+(c-a)\cot\frac{B}{2}$ $+(a-b)\cot\frac{C}{2}$.

三角形半角與邊之關係問題之解答

(1) $1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1-\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\times\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}=1-\frac{s-c}{s}=\frac{c}{s}=\frac{2c}{2s}=\frac{2c}{a+b+c}.$

(2) **依前題，** $1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{2a}{a+b+c}.$

$$\therefore\ \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=1-\frac{2a}{a+b+c}=\frac{b+c-a}{a+b+c}.$$

(3) $(b-c)\cot\frac{A}{2}+(c-a)\cot\frac{B}{2}+(a-b)\cot\frac{C}{2}$

$$=(b-c)\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}+(c-a)\sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-a)(s-c)}}+(a-b)\sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}$$

$$=\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}\{(b-c)(s-a)+(c-a)(s-b)+(a-b)(s-c)\}$$

$$=\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}\times 0$$

$=0.$

三角形之面積

公式

令 $\triangle ABC$ 之面積爲 S, 則

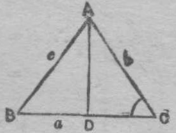
$$S=\tfrac{1}{2}ab\sin C.$$

$$S=\tfrac{1}{2}bc\sin A.$$

$$S=\tfrac{1}{2}ac\sin B.$$

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

證明



$$S=\tfrac{1}{2}BC\cdot AD=\tfrac{1}{2}a\cdot AD=\tfrac{1}{2}ab\cdot\sin C.$$

餘二式亦可同法證明之.

又
$$\begin{aligned}S&=\tfrac{1}{2}ab\sin C\\&=\tfrac{1}{2}ab\,2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\\&=ab\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}\\&=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.\end{aligned}$$

問題

*(1) 於 $\triangle ABC$, $b=20$ 吋, $c=15$ 吋, $A=60^\circ$, 求面積.

(2) 試證 $\triangle ABC$ 之面積爲 $\dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}$.

(3) $\triangle$ 之三邊爲 17 寸, 25 寸, 28 寸, 則其面積如何?

(4) 於 $\triangle ABC$, 試證次式:

$$S=s^2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}.$$

三角形面積問題之解答

*(1) $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 由公式,

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 20\times 15\times\frac{\sqrt{3}}{2}=75\sqrt{3}.$$

答 $75\sqrt{3}$ 平方吋.

(2) $S=\frac{1}{2}bc\sin A.$

但由公式

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

得

$$\left.\begin{aligned}b&=\frac{a\sin B}{\sin A}\\ c&=\frac{a\sin C}{\sin A}\end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ S&=\tfrac{1}{2}bc\sin A\\ &=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sin B}{\sin A}\cdot\frac{a\sin C}{\sin A}\cdot\sin A\\ &=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}\\ &=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}.\end{aligned}$$

(3) $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$

$$s=\frac{17+25+28}{2}=35.$$

$$\begin{aligned}\therefore\ S&=\sqrt{35(35-17)(35-25)(35-28)}\\ &=\sqrt{35\times 18\times 10\times 7}\\ &=\sqrt{5\times 7\times 2\times 3^2\times 2\times 5\times 7}\\ &=5\times 7\times 2\times 3\\ &=210.\end{aligned}$$

答 210 平方寸.

$$\begin{aligned}&s^2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\\ &=s^2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)(s-c)(s-a)(s-a)(s-b)}{s(s-a)s(s-b)s(s-c)}}\\ &=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\\ &=S.\end{aligned}$$

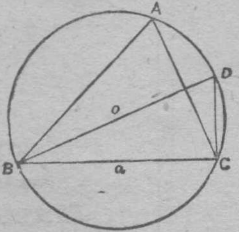
三角形之外接圓

公式

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}.$$

其 R 爲 $\triangle ABC$ 外接圓之半徑.

證明



令 BD 爲 $\triangle ABC$ 外接圓之直徑,則

$$\angle BDC=\angle BAC=A,$$

$$\angle BCD=R\angle.$$

$$\therefore\ \frac{BC}{BD}=\sin BDC.$$

$$\therefore\ \frac{a}{2R}=\sin A.\quad \therefore\ R=\frac{a}{2\sin A}.$$

同法,可證 $R=\dfrac{b}{2\sin B}=\dfrac{c}{2\sin C}.$

問題

(1) a, b, c 爲 $\triangle ABC$ 之三邊, S 爲其面積, R 爲其外接圓之半徑,則 $R=\dfrac{abc}{4S}$,試證之.

(2) $\triangle ABC$ 之一角爲 $30°$, 其對邊爲 5 寸,則其外接圓之半徑若干?

(3) 於 $\triangle ABC$, 試證次式:

$$a\cos A+b\cos B+c\cos C=4R\sin A\sin B\sin C$$

 三角形之外接圓問題之解答

(1) $R=\dfrac{a}{2\sin A}$

$=\dfrac{abc}{2bc\sin A}$

$=\dfrac{abc}{4\times\frac{1}{2}bc\sin A}$

$=\dfrac{abc}{4S}.$

(2) $R=\dfrac{a}{2\sin A}$

$=\dfrac{a}{2\sin 30^\circ}$

$=\dfrac{5}{2\times\frac{1}{2}}=5.$

(3) 由公式,得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$, 則

$a=2R\sin A,$

$b=2R\sin B,$

$c=2R\sin C.$

$\therefore\ a\cos A+b\cos B+c\cos C$

$=2R(\sin A\cos A+\sin B\cos B+\sin C\cos C)$

$=R(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$

$=R\{2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C\}$

$=R\{2\sin C\cos(A-B)+2\sin C\cos C\}$

$=2R\sin C\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$

$=2R\sin C\cdot 2\sin A\sin B$

$=4R\sin A\sin B\sin C.$

三角形之內切圓及傍切圓之半徑 (平面三角法79)

公式

$r=\dfrac{S}{s}$,

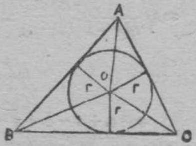
$r_1=\dfrac{S}{s-a}$,

$r_2=\dfrac{S}{s-b}$,

$r_3=\dfrac{S}{s-c}$.

但 r 爲內切圓之半徑, r_1, r_2, r_3 爲傍切圓之半徑.

證明



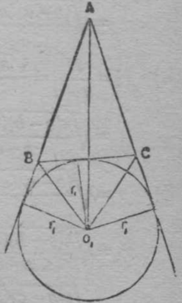
設 $\triangle ABC=S,\ a+b+c=2s$,

則 $\triangle ABC=\triangle ABO+\triangle BCO+\triangle CAO$.

$$\therefore\ S=\tfrac{1}{2}cr+\tfrac{1}{2}ar+\tfrac{1}{2}br$$
$$=\tfrac{1}{2}r(a+b+c)=sr.$$
$$r=\frac{S}{s}.$$

又 $\triangle ABC=\triangle O_1AB+\triangle O_1CA-\triangle O_1BC$.

$$\therefore\ S=\tfrac{1}{2}cr_1+\tfrac{1}{2}br_1-\tfrac{1}{2}ar_1$$
$$=\tfrac{1}{2}r_1(b+c-a)$$
$$=\tfrac{1}{2}r_1(2s-2a)$$
$$=r_1(s-a).$$
$$\therefore\ r_1=\frac{S}{s-a}.$$



其他二公式,亦可同法證明之.

問題

試證下列各式:

(1) $r=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$. (2) $r_1=\sqrt{\dfrac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$. (3) $\sqrt{rr_1r_2r_3}=S$. (4) $\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_3}=\dfrac{1}{r}$.

 三角形之內切圓及傍切圓半徑問題之解答

(1) $r=\frac{S}{s}=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$

$=\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2}}$

$=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$

(2) $r_1=\frac{S}{s-a}=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s-a}$

$=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}.$

(3) $r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$

$r_1=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}},$

$r_2=\sqrt{\frac{s(s-c)(s-a)}{s-b}},$

$r_3=\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)}{s-c}}.$

$\sqrt{rr_1r_2r_3}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=S.$

(4) $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}$

$=\sqrt{\frac{s-a}{s(s-b)(s-c)}}+\sqrt{\frac{s-b}{s(s-a)(s-c)}}$

$+\sqrt{\frac{s-c}{s(s-a)(s-b)}}$

$=\frac{s-a+s-b+s-c}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$

$=\frac{3s-(a+b+c)}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$

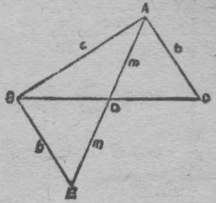
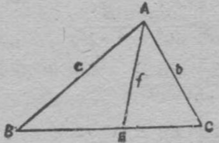
$=\frac{3s-2s}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$

$=\frac{s}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$

$=\sqrt{\frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}}$

$=\frac{1}{r}.$

三角形之中線及角之二等分線 (平面三角法81)

公式	證明	問題
設$\triangle ABC$中線AD之長為m,則 $m=\frac{1}{2}\sqrt{(b^2+c^2+2bc\cos A)}$.	引長AD至E,使$DE=AD$,於$\triangle ABE$中, $\overline{AE}^2=\overline{AB}^2+\overline{BE}^2-2AB\cdot BE\cos ABE.$ $\therefore (2m)^2=c^2+b^2-2cb\cos(180^\circ-A)$ $=c^2+b^2+2bc\cos A.$ $\therefore m=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A}.$  	(1) 於$\triangle ABC$,試引$\angle A$之中線AD,以證次式: $\tan ADB=\frac{2bc\sin A}{b^2-c^2}$.
設$\triangle ABC$中$\angle A$之二等分線AE之長為f,則 $f=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$.	$\triangle ABC=\triangle ABE+\triangle ACE.$ $\therefore \frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}cf\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}bf\sin\frac{A}{2}.$ $\therefore 2bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=f(c+b)\sin\frac{A}{2}.$ $\therefore f=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}.$  	(2) 於$\triangle ABC$,其A外角之二等分線AE之長為f,則 $f=\frac{2bc}{b-c}\sin\frac{A}{2}$, 試證之.

(平面三角法 82) 三角形之中線及角之二等分線問題之解答

(1) 設 $\angle ADB=\phi$, 就 $\triangle ABD$ 考之,則

$$\frac{\sin BAD}{\sin ADB}=\frac{a}{2c},\ \text{卽}\ \frac{\sin(\phi+B)}{\sin\phi}=\frac{a}{2c}.$$

$$\therefore\ \frac{\sin\phi\cos B+\cos\phi\sin B}{\sin\phi}=\frac{a}{2c}.$$

$$\therefore\ \cos B+\sin B\cot\phi=\frac{a}{2c}.$$

$$\therefore\ \cot\phi=\frac{\frac{a}{2c}-\cos B}{\sin B}.$$

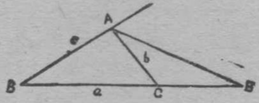
$$\therefore\ \tan\phi=\frac{2c\sin B}{a-2c\cos B}$$

$$=\frac{2ac\sin B}{a^2-(a^2+c^2-b^2)}$$

$$=\frac{2ac\sin B}{b^2-c^2}.$$

$$\therefore\ \tan ADB=\frac{2ac\sin B}{b^2-c^2}.$$

(2) $\triangle ABC=\triangle ABE-\triangle ACE.$



$$\text{卽}\ \tfrac{1}{2}bc\sin A=\tfrac{1}{2}cf\sin\left(90^\circ+\frac{A}{2}\right)$$

$$-\tfrac{1}{2}bf\sin\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right).$$

$$\therefore\ bc\sin A$$

$$=cf\sin\left(90^\circ+\frac{A}{2}\right)-bf\sin\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right).$$

$$\therefore\ 2bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=f(c-b)\cos\frac{A}{2}.$$

$$\therefore\ f=\frac{2bc}{b-c}\sin\frac{A}{2}.$$

種類	解法	問題
已知一邊及二角者. 設已知 a, B, C.	從 $A=180^\circ-(B+C)$, 求得 A. 因 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$. $\therefore\ b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}$. 故可從 $\log b=\log a+\log\sin B-\log\sin A$, 求得 b. 又因 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$. $\therefore\ c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}$. 故可從 $\log c=\log a+\log\sin C-\log\sin A$, 求得 c.	於 $\triangle ABC$, 其 $a=485$ 尺, $B=78^\circ$, $C=66^\circ$, 試求 b, c.

$A=180°-(B+C)=180°-(78°+66°)=36°.$

$\log a=\log 485$ 尺 $=2.68574,$

$\log\sin A=\log\sin 36°=\bar{1}.76922,$

$\log\sin B=\log\sin 78°=\bar{1}.99040,$

$\log\sin C=\log\sin 66°=\bar{1}.96073.$

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}.$$

$\therefore\ \log b=\log a+\log\sin B-\log\sin A$

$=2.68574+\bar{1}.99040-\bar{1}.76922$

$=2.90692.$

$\log 807.0=2.90687$

$\log 807.1=2.90693$

0.1	6
x	5

$\therefore\ 0.1:x=6:5.$

$\therefore\ x=0.1\times\frac{5}{6}=0.08.$

$\therefore\ b=807+0.08=807.08$ 尺.

次， $$c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

$\therefore\ \log c=\log a+\log\sin C-\log\sin A$

$=2.68574+\bar{1}.96073-\bar{1}.76922$

$=2.87725.$

$\log 753.7=2.87720$

$\log 753.8=2.87726$

0.1	6
x	5

$\therefore\ 6:5=0.1:x.$

$\therefore\ x=0.1\times\frac{5}{6}=0.08.$

$\therefore\ c=753.7+0.08=753.78$ 尺.

任意三角形之解法(其二)　

種　　類	解　　法	問　　題
已知二邊及其夾角者. 設已知 a, b, C.	由 $\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$, 得 $\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$ $=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\cot\frac{C}{2}}$. 故可由　$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$, 求得 $\frac{A-B}{2}$. 以此與 $90°-\frac{C}{2}=\frac{A+B}{2}$ 加減,可得 A 及 B. 從 $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$, 可求得 c.	於 $\triangle ABC$, 其 $A=65°$, $b=281.4$ 寸, $c=208$ 寸, 試求 B, C 及 a.

$$\log(b-c)=\log 73.4=1.86570,$$

$$\log(b+c)=\log 489.4=2.68966,$$

$$\log\cot\frac{A}{2}=\log\cot 32^\circ 30'=0.19581.$$

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}=\frac{73.4}{489.4}\cot 32^\circ 30'.$$

$$\log\tan\frac{B-C}{2}=\log 73.4-\log 489.4+\log\cot 32^\circ 30'$$

$$=1.86570-2.68966+0.19581$$

$$=\bar{1}.37185.$$

$$\bar{1}.37193\cdots\cdots 13^\circ 15'$$

$$\underline{\bar{1}.37137\cdots\cdots 13\quad 14'}$$

$$56 \qquad\qquad 1'$$

$$8 \qquad\qquad x$$

$$\therefore\ x=60''\times\frac{8}{56}=9''.$$

$$\therefore\ \frac{B-C}{2}=13^\circ 15'-9''=13^\circ 14' 51''.$$

又 $$\frac{B+C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}=57^\circ 30'.$$

$$B=\frac{B+C}{2}+\frac{B-C}{2}=\underline{70^\circ 44' 51''},$$

$$C=\frac{B+C}{2}-\frac{B-C}{2}=\underline{44^\circ 15' 9''}.$$

$$\log c=\log 208=2.31806,$$

$$\log\sin A=\log\sin 65^\circ=\bar{1}.95728,$$

$$\log\sin C=\log\sin 44^\circ 15' 9''=\bar{1}.84375.$$

$$\log a=\log c+\log\sin A-\log\sin C$$

$$=2.31806+\bar{1}.95728-\bar{1}.84375$$

$$=2.43159.$$

$$\therefore\ a=270.14\ \text{寸}.$$

任意三角形之解法(其三)　(平面三角法87)

種類	解法	問題
已知二邊及其一邊之對角者. 設已知 a, b, A.	$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$. $\therefore\ \sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$ .... (1) 又　$C=180^\circ-(A+B)$ ....(2) $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin A}$. $\therefore\ c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}$ ....(3) 從 (1) 求得 B, 卽 $\log\sin B=\log b+\log\sin A-\log a$. 由是從 (2), 卽可得 C. 從 (3) 求得 c, 卽 $\log c=\log a+\log\sin C-\log\sin A$. (討論) $A\geqq 90^\circ$ 時 $\begin{cases} a\leqq b, \text{則問題爲不能,} \\ a>b, \text{則只有一解.} \end{cases}$ $A<90^\circ$ 時 $\begin{cases} a<b\sin A, \text{則無解,} \\ a=b\sin A, \text{則只有一解,} \\ b>a>b\sin A, \text{則有二解,} \\ a\geqq b, \text{則只有一解.} \end{cases}$	於 $\triangle ABC$, 其 $a=4945.2$ 寸, $b=5876.2$ 寸, $A=47^\circ\,26'$, 試求其餘一邊及二角.

$$\log\sin B=\log b+\log\sin A-\log a,$$

$$C=180^\circ-(A+B),$$

$$\log c=\log a+\log\sin C-\log\sin A.$$

$$\begin{array}{rl|l}
\log b=\log 5876.2 & =3.76910 & \\
\log\sin A=\log\sin 47^\circ 26' & =\bar{1}.86717 & \\
-\log a=-\log 4945.2 & =\bar{4}.30581 & \\
\hline
\log\sin B & =\bar{1}.94208 & 或 \\
\therefore\ B= & 61^\circ 3' 43'' & 118^\circ 56' 17'' \\
A= & 47^\circ 26' & 47^\circ 26' \\
\hline
A+B= & 108^\circ 29' 43'' & 166^\circ 22' 17'' \\
A+B+C= & 180^\circ & 180^\circ \\
\hline
C= & 71^\circ 30' 17'' & 13^\circ 37' 43''
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl|r}
\log a=\log 4945.2 & =3.69419 & 或\quad 3.69419 \\
\log\sin C=\log\sin 71^\circ 30' 17'' & =\bar{1}.97697 & (13^\circ 37' 43'')\bar{1}.37222 \\
-\log\sin A=-\log\sin 47^\circ 26' & =0.13283 & 0.13283 \\
\hline
\log c & =3.80399 & 3.19924 \\
\therefore\ c & =6367.9 & 1582.1
\end{array}$$

答 $\begin{cases} B=61^\circ 3' 43'' \text{ 或 } 118^\circ 56' 17'', \\ C=71^\circ 30' 17'' \text{ 或 } 13^\circ 37' 43'', \\ c=6367.9 \text{ 寸或 } 1582.1 \text{ 寸}. \end{cases}$

種　類	解　法	問　題
知三邊卽 a, b, c 以求三角卽 A, B, C.	令 $$2s=a+b+c,$$ 則 $$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$$ $$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}.$$ 而 $$C=180^\circ-(A+B).$$ $$\therefore\ \log\tan\frac{A}{2}=\tfrac{1}{2}\{\log(s-b)+\log(s-c)-\log s-\log(s-a)\},$$ $$\log\tan\frac{B}{2}=\tfrac{1}{2}\{\log(s-c)+\log(s-a)-\log s-\log(s-b)\}.$$ 由是卽可求得 A, B, C.	有 $\triangle ABC$, 其 $a=275.3$ 尺, $b=189.2$ 尺, $c=301.5$ 尺, 試求 A, B, C.

 任意三角形解法問題之解答(其四)

$$a=275.3 \qquad s=383,$$
$$b=189.2 \qquad s-a=107.7,$$
$$c=301.5 \qquad s-b=193.8,$$
$$2s=766 \qquad s-c=\ 81.5.$$

$$\log(s-b)=2.28735$$
$$\log(s-c)=1.91116$$
$$-\log s=\bar{3}.41680$$
$$-\log(s-a)=\bar{3}.96778$$
$$2\log\tan\frac{A}{2}=\bar{1}.58309$$
$$\log\tan\frac{A}{2}=\bar{1}.79154$$
$$\therefore\ \frac{A}{2}=31^\circ 44.93'.$$
$$\therefore\ \underline{A=63^\circ 29' 52''}.$$

$$\log(s-c)=1.91116$$
$$\log(s-a)=2.03222$$
$$-\log s=\bar{3}.41680$$
$$-\log(s-b)=\bar{3}.71265$$
$$2\log\tan\frac{B}{2}=\bar{1}.07283$$
$$\log\tan\frac{B}{2}=\bar{1}.53642.$$
$$\therefore\ \frac{B}{2}=18^\circ 58.66'.$$
$$\therefore\ \underline{B=37^\circ 57' 19''}.$$

$$A=63^\circ 29' 52''$$
$$B=37^\circ 57' 19''$$
$$A+B=101^\circ 27' 11''$$
$$A+B+C=180^\circ$$
$$\underline{C=78^\circ 32' 49''}.$$

例題	解法	問題
知一邊及其對角與他二邊之和,解此三角形,卽知 a, A, $b+c$ 以求其餘之各件.	$\because\ \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b+c}{\sin B+\sin C}$. $\therefore\ \dfrac{a}{b+c}=\dfrac{\sin A}{\sin B+\sin C}=\dfrac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$. 卽 $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}$. $\therefore\ \cos\dfrac{B-C}{2}=\dfrac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{a}$. 從此求得 $\dfrac{B-C}{2}$. 又 $\dfrac{B+C}{2}=90^\circ-\dfrac{A}{2}$, 以此與 $\dfrac{B-C}{2}$ 加減,卽得 B, C. 由是依一邊與二角之解法解之,卽得所求.	(1) 知二邊 a, b 及二角之差 $A-B$, 試解此三角形. (2) 知一角 B, 一邊 a 及他二邊之和 $b+c$, 試解此三角形. (3) 知二邊之和 $a+b$ 及二角 A, B,試解此三角形.

 任意三角形解法問題之解答(其五)

(1) 由公式 $\tan\frac{1}{2}(A+B)=\frac{a+b}{a-b}\tan\frac{1}{2}(A-B)$,

求得 $\frac{1}{2}(A+B)$,以此與 $\frac{1}{2}(A-B)$ 加減,卽得 A, B.

又由 $C=180°-(A+B)$, 求得 C.

由此,可求得 $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$ 或 $c=\frac{b\sin C}{\sin B}$.

(2) 因知 a 及 $b+c$, 而知

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c),$$

$$s-a=\frac{1}{2}(b+c-a).$$

故可由 $\tan\frac{C}{2}=\frac{s-a}{s}\cot\frac{B}{2}$,

求得 C.

又由 $A=180°-(B+C)$,

求得 A.

然後可由 $b=\frac{a}{\sin A}\sin B$,

求得 b.

(3) 由公式 $\tan\frac{1}{2}(A+B)=\frac{a+b}{a-b}\tan\frac{1}{2}(A-B)$, 得

$$a-b=(a+b)\cot(A+B)\tan\frac{1}{2}(A-B).$$

由此可得 $a-b$, 以此與 $a+b$ 加減,卽得 a, b.

又由 $C=180°-(A+B)$, 可求得 C.

又由 $c=\frac{a}{\sin A}\sin C$, 可求得 c.

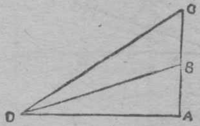
例　題

1. 以長 b 之竿，立於高 a 之臺上，試求此竿與臺視角相等之地點，但 $b>a$.

解　法

設 BC 爲竿，AB 爲臺，D 爲觀測點，則

$$AB=a,\ BC=b,$$
$$\angle ADB=\angle BDC.$$



令 $DA=x$，$\angle ADB=y$，

則
$$\tan y=\frac{a}{x}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$\tan 2y=\frac{a+b}{x}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

以 (1) 代入 (2)，則

$$\frac{2\dfrac{a}{x}}{1-\dfrac{a^2}{x^2}}=\frac{a+b}{x}.$$

解之，取其正號，則　$x=a\sqrt{\dfrac{a+b}{b-a}}.$

即凡距臺底 $a\sqrt{\dfrac{a+b}{b-a}}$ 之點皆是.

問　題

(1) 有塔及塔尖，於距塔基 a 尺之同水平面上一點視之，含相等之角.若已知塔高爲 h 尺，則塔尖之高爲 $\left(\dfrac{a^2+h^2}{a^2-h^2}\right)h$ 尺，試證之.

(2) 在水平線 ABC 上有高塔 PC，由 A 點測之爲 α 度，B 點測之爲 β 度，而 AB 之長爲 a，則

$$PC=a\sin\alpha\sin\beta\csc(\beta-\alpha),$$

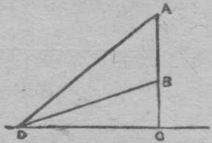
試證之.

*(3) 有人自河岸測對岸之樹梢，得仰角 $60°$. 由是退後 30 尺再測之，得仰角 $45°$，問河闊幾何?

測量問題之解答(其一)

(1) 設 AB 爲塔尖, BC 爲塔, D 爲觀測點,

$CD=a$, $BC=h$.



今令 $AB=x$, 則

$AC=x+h$,

$$\tan ADC=\frac{AC}{CD}=\frac{2\tan BDC}{1-\tan^2 BDC}$$

$$=2\frac{CB}{CD}\Big/\left\{1-\left(\frac{CB}{CD}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{2h}{a}\Big/\left\{1-\left(\frac{h}{a}\right)^2\right\}=\frac{2ah}{a^2-h^2}.$$

$$\therefore\ \frac{x+h}{a}=\frac{2ah}{a^2-h^2},\qquad x=\left(\frac{a^2+h^2}{a^2-h^2}\right)h.$$

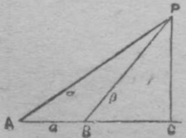
(2) 令 $PC=x$, 則

由 $\triangle APC$, 得

$AC=x\cot\alpha$.

由 $\triangle BPC$, 得

$BC=x\cot\beta$.



但 $AC-BC=AB=a$.

$$\therefore\ a=x(\cot\alpha-\cot\beta)=x\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\right)$$

$$=x\frac{\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{x\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\therefore\ x=a\sin\alpha\sin\beta\csc(\beta-\alpha).$$

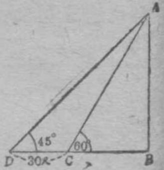
*(3) 因 $\angle D=45°$, 故 $AB=BD$.

如前題解法,

$30=AB\cdot\cot 45°-\cot 60°)$

$$=BD\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}BD.$$



$$\therefore\ BD=\frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{30\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2}$$

$$=15\times 3+15\sqrt{3}=70.98.$$

$$CB=BD-DC=40.98.$$

答 約 41 尺.

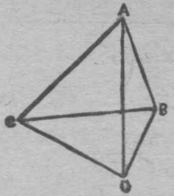
測量問題(其二)

例題

2. 有人立於高 h 尺之絕壁頂上,望西方見一船成俯角 α,迨一時後,見同船在南方成俯角 β.問船之速度如何?

解法

絕壁 $AB=h$ 尺,船之位置,前在 C 點,後在 D 點,則



$$\angle ACB=\alpha,$$

$$\angle ADB=\beta,$$

且 $$\angle CBD=R\angle.$$

由是 $$CB=h\cot\alpha,$$

$$DB=h\cot\beta.$$

而 $$\overline{DC}^2=\overline{CB}^2+\overline{BD}^2.$$

$$\therefore\ DC=\sqrt{h^2(\cot^2\alpha+\cot^2\beta)}$$

$$=h\sqrt{\cot^2\alpha+\cot^2\beta}.$$

此卽一時間船所行之距離,卽船之速度.

問題

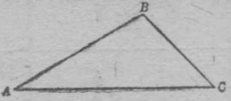
*(1) 有兩機器腳踏車,同時自某處出發,其速率爲每小時 40 里及 30 里,兩車所取之路線均爲直線,其交角爲30°,問二小時後,兩車相距若干里?

(2) 有船向東航行,見一燈臺在東北東,嗣後進行4浬,此臺在北北東,試求最初之測點與燈臺之距離.

(3) 有船向正北進行,見與航路成 α 角之直線上有二燈臺,其後船轉航路向北西之方向進行 a 浬,見一燈臺在船之正東,一燈臺在北東.試求二燈臺之距離.

(平面三角法96)　測量問題之解答(其二)

*(1) 設 A 爲出發點,二小時後各行至 B, C, 則



$\angle A=30°$,
$AC=80$ 里,
$AB=60$ 里.

$$\frac{1}{2}(B+C)=\frac{180°-30°}{2}=75°.$$

故 $$\frac{AC+AB}{AC-AB}=\frac{\tan\frac{1}{2}(B+C)}{\tan\frac{1}{2}(B-C)}.$$

$$\therefore\ \frac{140}{20}=\frac{\tan 75°}{\tan\frac{1}{2}(B-C)}=\frac{3.7321}{\tan\frac{1}{2}(B-C)}.$$

$$\therefore\ \tan\tfrac{1}{2}(B-C)=\frac{3.7321}{7}=0.5332=\tan 28°.$$

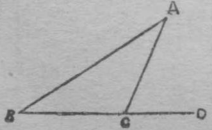
故 $$\angle C=75°-28°=47°.$$

由 $$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}.$$

$$\therefore\ BC=\frac{AB\sin A}{\sin C}=\frac{60\sin 30°}{\sin 47°}=\frac{30}{0.7314}=40.$$

答　相距約 40 里.

(2) A 爲燈臺, B, C 爲前後之測點,則



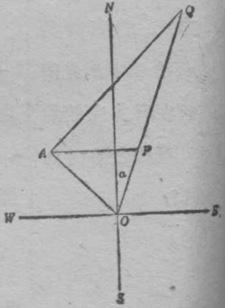
$\angle ABD=22°\ 30'$,
$\angle ACD=67°\ 30'$,
$BC=4$ 浬.
今令 $AB=x$ 浬,則

$$x=\frac{4\sin(180°-67°\ 30')}{\sin(67°30'-22°\ 30')}=\frac{4\cos 22°\ 30'}{\sin 45°}$$

$$=\frac{4\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}\Big/\frac{1}{\sqrt{2}}=2\sqrt{(4+2\sqrt{2})}.$$

答　$2\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$ 浬.

(3) O, A 爲船前後之二位置, P, Q 爲二燈臺之位置.



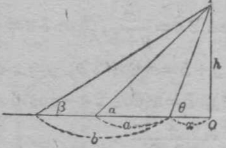
則方位 AQ 爲北東, AP 爲正東.
$\angle QAP=45°$,
$\angle PAO=45°$,
$\angle AOW=45°$,
又 $\angle NOP=\alpha$.
$\therefore \angle APQ=45°+45°+\alpha$
$=90°+\alpha$.

由 $\triangle APQ$, 得

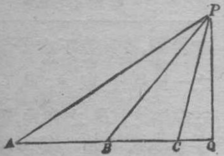
$$\begin{cases}\dfrac{PQ}{\sin QAP}=\dfrac{AQ}{\sin QPA},\\ AQ=OA\tan AOQ.\end{cases}$$

$$\therefore\ \frac{PQ}{\sin 45°}=\frac{a\tan(45°+\alpha)}{\sin(90°+\alpha)}.$$

$$\therefore\ PQ=\frac{a\tan(45°+\alpha)\sin 45°}{\sin(90°+\alpha)}=\frac{a\tan(45°+\alpha)}{\sqrt{2}\cos\alpha}$$

例題	解法	問題
3. 水平面上有一向北方傾斜之塔，自其正南方距塔基 a, b 之二點測之，則得塔之高度為 α 及 β，而塔之傾度為 θ，其垂直高為 h，則 $\tan\theta=\dfrac{b-a}{b\cot\alpha-a\cot\beta}$, $h=\dfrac{b-a}{\cot\beta-\cot\alpha}$, 試證之.	 從塔頂 P 向地面上引垂線 PQ，以 h 代之.從塔基至 Q 之距離，以 x 代之,則 $x+a=$(從一測點至 Q 之距離), $x+b=$(從他測點至 Q 之距離). 由是 $\cot\theta=\dfrac{x}{h}$, $\cot\alpha=\dfrac{x+a}{h}$, $\cot\beta=\dfrac{x+b}{h}$. $\therefore\quad h=\dfrac{b-a}{\cot\beta-\cot\alpha}$. 而 $x=h\cot\alpha-a=\dfrac{(b-a)\cot\alpha}{\cot\beta-\cot\alpha}-a$ $=\dfrac{b\cot\alpha-a\cot\beta}{\cot\beta-\cot\alpha}$. $\therefore\quad\tan\theta=\dfrac{h}{x}=\dfrac{b-a}{b\cot\alpha-a\cot\beta}$.	有目標,於其直下水平面之一直線上,取 A, B, C 三點測之，B 之仰角,為 A 仰角之二倍，C 之仰角,為 A 仰角之三倍,而 $AB=a$, $BC=b$, 則目標之高為 $\dfrac{a}{2b}\sqrt{\{(a+b)(3b-a)\}}$, 試證之.

P 為目標, PQ 為自 P 至含 A, B, C 之水平面上所作之垂線.



令 $PQ=x,\ CQ=y,\ \angle PAQ=\theta.$

則 $\angle PBQ=2\theta,\quad \angle PCQ=3\theta.$

由是 $\tan\theta=\dfrac{x}{y+a+b},\ \tan 2\theta=\dfrac{x}{y+b},\ \tan 3\theta=\dfrac{x}{y}.$

$\therefore\quad y+a+b=x\cot\theta,\ y+b=x\cot 2\theta,\ y=x\cot 3\theta.$

$\therefore\quad a=x(\cot\theta-\cot 2\theta),\ b=x(\cot 2\theta-\cot 3\theta).$

$$\therefore\quad a=x\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}\right)=\frac{x\sin(2\theta-\theta)}{\sin\theta\sin 2\theta}=\frac{x}{\sin 2\theta}.$$

$$\therefore\quad b=x\left(\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}-\frac{\cos 3\theta}{\sin 3\theta}\right)=\frac{x\sin(3\theta-2\theta)}{\sin 2\theta\sin 3\theta}=\frac{x\sin\theta}{\sin 2\theta\sin 3\theta}=\frac{x}{\sin 2\theta(3-4\sin^2\theta)}$$

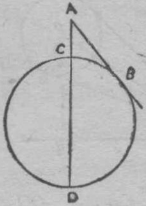
故 $$\sin 2\theta=\frac{x}{a},\ 3-4\sin^2\theta=\frac{x}{b\sin 2\theta}=\frac{a}{b}.$$

$$\therefore\quad 3-2(1-\cos 2\theta)=\frac{a}{b}.\quad\therefore\quad \cos 2\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-1\right).$$

由是 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}-1\right)^2=1.$$

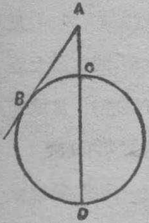
$$\therefore\quad \frac{x^2}{a^2}=1-\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}-1\right)^2=\frac{4b^2-(a-b)^2}{4b^2}=\frac{3b^2+2ab-a^2}{4b^2}=\frac{(3b-a)(a+b)}{4b^2}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{a}{2b}\sqrt{\{(a+b)(3b-a)\}}.$$

例題	解法	問題
4. 地球之半徑為 r, 則高 h 之點至視水平面之距離等於 $\sqrt{2rh}$.	 CD 為地球之徑, A 為高 h 之一點, 自 A 向地球作一切線 AB, 則 $AB=\sqrt{AC\cdot AD}=\sqrt{h(2r+h)}$ $=\sqrt{2rh+h^2}$. 但 h 比 $2r$ 為極小, 故 h^2 對於 $2rh$ 更小, 可置之不論. $\therefore\ AB=\sqrt{2rh}$.	(1) 於地上得望見高 h 尺丘陵之頂, 則其最大之距離有幾哩? 但地球之半徑為 3960 哩. (2) 從地上一定點, 望空中直徑 6 尺之輕氣球, 其視角為 30°, 其中心之仰角為 45°. 求此輕氣球之中心距地面鉛直之高.

測量問題之解答(其四)

(1) AC 爲丘陵之高 h 尺, CD 爲地球之直徑, AB



爲望見 A 之最大距離命爲 x, 則 AB 爲切於地球 A 點之切線.

$$\therefore \quad \overline{AB}^2=AD\cdot AC.$$

$$\therefore \quad AB=\sqrt{\{AC(CD+AC)\}}.$$

比 AC 比 CD 爲極小, 故 $CD+AC$ 可視作 CD, 由是

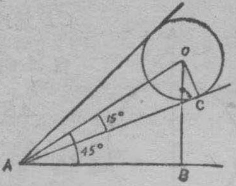
$$AB=\sqrt{(AC\cdot CD)}.$$

$$\therefore \quad x=\sqrt{2hr}=\sqrt{2\cdot\frac{h}{5280}\cdot 3960} \text{ (因 1 哩=5280 呎)}$$

$$=\sqrt{\frac{3h}{2}}.$$

故最大距離爲 $\sqrt{\frac{3h}{2}}$ 哩.

(2) O 爲輕氣球之中心,其直下相當於地上之一點 B.



而 A 爲測點, C 在平面 OAB 之內,卽過 A 切於輕氣球之直線之切點, OC 爲輕氣球之半徑卽 3 尺, $\angle OAC$ 爲望輕氣球視角之半分卽 15°.

由是 $$OA=\frac{OC}{\sin OAC}=\frac{3}{\sin 15^\circ}.$$

而 $$\angle OAB=45^\circ.$$

$$\therefore \quad OB=OA\sin OAB=\frac{3}{\sin 15^\circ}\times\sin 45^\circ$$

$$=\frac{3}{\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=3(\sqrt{3}+1)$$

$$=8.196.$$

答: 8.196 尺.

定義

反函數

正弦爲 a 時,則 a 稱爲其角之反正弦,以 $\sin^{-1}a$ 記之,或記爲 $\mathrm{arc}\sin a$,其他之函數準此.

例如 $\sin\theta=\frac{1}{2}$ 與 $\theta=\sin^{-1}\frac{1}{2}$,所表者爲同一之關係.

解答之例

(例題) $2\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{2y}{1-y^2}$,試證之.

(解答) 令 $\tan^{-1}y=A$, 則

$$\tan A=y.$$

又 $$2\tan^{-1}y=2A.$$

而 $$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

$$=\frac{2y}{1-y^2}.$$

$$\therefore\quad \tan^{-1}\frac{2y}{1-y^2}=2A.$$

由是

$$2\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{2y}{1-y^2}.$$

問題

試證下列各式:

(1) $\tan^{-1}m+\tan^{-1}n=\tan^{-1}\frac{m+n}{1-mn}$.

(2) $\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{47}$.

*(3) 試求 $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}$ 之值.

(4) $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=45°$.

*(5) 求證 $\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{1}{x}=90°$.

 反三角函數問題之解答(其一)

(1) 令 $\tan^{-1}m=A$, $\tan^{-1}n=B$, 則

$\tan A=m$, $\tan B=n$.

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{m+n}{1-mn}.$$

但 $A+B=\tan^{-1}m+\tan^{-1}n$.

$$\therefore\quad \tan^{-1}m+\tan^{-1}n=\tan^{-1}\frac{m+n}{1-mn}.$$

(2) 題之兩邊,應用前題,則

$$左邊=\tan^{-1}\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{7}\times\frac{1}{8}}=\tan^{-1}\frac{3}{11}.$$

$$右邊=\tan^{-1}\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{47}}{1-\frac{1}{4}\times\frac{1}{47}}=\tan^{-1}\frac{3}{11}.$$

是左右互相等,卽爲本題之證.

*(3) 應用1題,則

$$\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=\tan^{-1}1=45^\circ.$$

(4) 由前題(1),得

$$\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{5}=\tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}}=\tan^{-1}\frac{7}{9}.$$

由是 $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8}$

$$=\tan^{-1}\frac{7}{9}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\tan^{-1}\frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}\times\frac{1}{8}}$$

$$=\tan^{-1}1=45^\circ.$$

*(5) 由1題,得 $\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{1}{x}=\tan^{-1}\frac{x+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{x}}$

$$=\tan^{-1}\frac{x^2+1}{0}=\tan^{-1}\infty=90^\circ.$$

反三角函數問題(其二)

例題

1. $\sin^{-1}a=\cos^{-1}\sqrt{(1-a^2)}$

$$=\tan^{-1}\frac{a}{\sqrt{(1-a^2)}}$$

$$=\cot^{-1}\frac{\sqrt{(1-a^2)}}{a}$$

$$=\sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{(1-a^2)}}$$

$$=\csc^{-1}\frac{1}{a},$$

試證之.

證法

令 $\sin^{-1}a=t$, 則 $a=\sin t$.

由是 $\sqrt{(1-a^2)}=\cos t$.

$\therefore\ t=\cos^{-1}\sqrt{(1-a^2)}$.

又從 $a=\sin t$, 得

$\frac{a}{\sqrt{(1-a^2)}}=\tan t$. $\therefore\ t=\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{(1-a^2)}}$.

又從 $\frac{\sqrt{(1-a^2)}}{a}=\cot t$, $\frac{1}{\sqrt{(1-a^2)}}=\sec t$,

$\frac{1}{a}==\csc t$.

$$\therefore\ t=\cot^{-1}\frac{\sqrt{(1-a^2)}}{a}=\sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{(1-a^2)}}$$

$$=\csc^{-1}\frac{1}{a}.$$

問題

試證次之各式:

(1) $\sin^{-1}\frac{12}{13}=\cot^{-1}\frac{5}{12}$.

(2) $\sin^{-1}a+\sin^{-1}b$

$$=\sin^{-1}\{a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}\}.$$

(3) $\cos^{-1}\frac{9}{\sqrt{82}}+\cos^{-1}\frac{5}{\sqrt{41}}$

$$=45^\circ.$$

 反三角函數問題之解答(其二)

(1) $\sin^{-1}a=\cot^{-1}\frac{\sqrt{(1-a^2)}}{a}$.

而 $a=\frac{12}{13}$, 以此代入上式,

則 $\sin^{-1}\frac{12}{13}=\cot^{-1}\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}\Big/\frac{12}{13}=\cot^{-1}\frac{5}{12}$.

(2) 令 $\sin^{-1}a=A$, $\sin^{-1}b=B$,

則 $a=\sin A$, $b=\sin B$.

由是 $\sqrt{1-a^2}=\cos A$, $\sqrt{1-b^2}=\cos B$.

但 $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A$.

由是 $A+B=\sin^{-1}(\sin A\cos B+\sin B\cos A)$.

以上之各值代入,則得

$$\sin^{-1}a+\sin^{-1}b=\sin^{-1}(a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}).$$

(3) 令 $\cos^{-1}\frac{9}{\sqrt{82}}=A$, $\cos^{-1}\frac{5}{\sqrt{41}}=B$.

則 $\frac{9}{\sqrt{82}}=\cos A$, $\frac{5}{\sqrt{41}}=\cos B$.

由是 $\frac{1}{\sqrt{82}}=\sin A$, $\frac{4}{\sqrt{41}}=\sin B$.

但 $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

由是 $A+B=\cos^{-1}(\cos A\cos B-\sin A\sin B)$

故以上之各值代入,則得

$$\cos^{-1}\frac{9}{\sqrt{82}}+\cos^{-1}\frac{5}{\sqrt{41}}$$

$$=\cos^{-1}\left(\frac{9}{\sqrt{82}}\times\frac{5}{\sqrt{41}}-\frac{1}{\sqrt{82}}\times\frac{4}{\sqrt{41}}\right)$$

$$=\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}=45°.$$

例題	證明	問題
$3\tan^{-1}a=\tan^{-1}\frac{3a-a^3}{1-3a^2}$, 試證之.	令 $\tan^{-1}a=A$, 則 $a=\tan A$. 因 $\tan 3A=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$. $\therefore\ 3A=\tan^{-1}\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$. 以上之值代入,即得 $3\tan^{-1}a=\tan^{-1}\frac{3a-a^3}{1-3a^2}$.	試證次之二式: (1) $2\cot^{-1}a=\cot^{-1}\frac{a^2-1}{2a}$. (2) $3\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{20}=\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}\frac{1}{1985}$.

 反三角函數問題之解答(其三)

(1) 令 $\cot^{-1}a=A,$

則 $a=\cot A.$

但 $\cot 2A=\dfrac{\cot^2 A-1}{2\cot A}.$

由是 $2A=\cot^{-1}\dfrac{\cot^2 A-1}{2\cot A}.$

以上之值代入此式,即得

$$2\cot^{-1}a=\cot^{-1}\frac{a^2-1}{2a}.$$

(2) 令 $\tan^{-1}\dfrac{1}{4}=A,\quad \tan^{-1}\dfrac{1}{20}=B$

則 $\tan 3A=\dfrac{3\tan A-\tan^3 A}{1+3\tan^2 A}=\dfrac{\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4^3}}{1-\dfrac{3}{4^2}}=\dfrac{47}{52}.$

又 $\tan(3A+B)=\dfrac{\tan 3A+\tan B}{1-\tan 3A\tan B}$

$$=\frac{\dfrac{47}{52}+\dfrac{1}{20}}{1-\dfrac{47}{52\times 20}}=\frac{992}{993}.$$

令 $C=\tan^{-1}\dfrac{1}{1985},$

則 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-C\right)=\dfrac{1-\dfrac{1}{1985}}{1+\dfrac{1}{1985}}=\dfrac{1984}{1986}=\dfrac{992}{993}.$

$\therefore\ 3A+B=\dfrac{\pi}{4}-C.$

由是卽得本題之證.

例題	證明	問題

例題

3. $\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{x}{x+a}}=\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{x}{a}}$,

試證之.

證明

令 $\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{x}{x+a}}=A$,

則 $\sin A=\sqrt{\dfrac{x}{x+a}}$,

$$\sin^2 A=\frac{x}{x+a}.$$

由是 $\cos^2 A=1-\sin^2 A$

$$=1-\frac{x}{x+a}=\frac{a}{x+a}.$$

$$\tan^2 A=\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\frac{x}{a}.$$

$$\therefore\ A=\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}.$$

即 $\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{x}{x+a}}=\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{x}{a}}$.

問題

(1) 設 $\sec\theta-\csc\theta=\dfrac{4}{3}$,

則 $\theta=\dfrac{1}{2}\sin^{-1}\dfrac{3}{4}$,

試證之.

(2) 設 $\sin(\pi\cos\theta)=\cos(\pi\sin\theta)$,

則 $\theta=\pm\dfrac{1}{2}\sin^{-1}\dfrac{3}{4}$,

試證之.

(1) 因 $\sec\theta-\csc\theta=\frac{4}{3}$,

故 $\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{\sin\theta}=\frac{4}{3}$.

$\therefore\ \sin\theta-\cos\theta=\frac{4}{3}\sin\theta\cos\theta=\frac{2}{3}\sin 2\theta$.

兩邊自乘,則得

$$1-\sin 2\theta=\frac{4}{9}\sin^2 2\theta.$$

解此二次方程式,得

$$\sin 2\theta=\frac{3}{4}\ 或\ -3.$$

但 -3 不適用.

$$\therefore\ \sin 2\theta=\frac{3}{4}.$$

由是 $2\theta=\sin^{-1}\frac{3}{4}$.

$$\therefore\ \theta=\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}.$$

(2) 因 $\sin(\pi\cos\theta)=\cos(\pi\sin\theta)$,

即 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\pi\cos\theta\right)=\cos(\pi\sin\theta)$.

故解答含於次式之中:

$$\frac{\pi}{2}-\pi\cos\theta=2n\pi\pm\pi\sin\theta.$$

$$\therefore\ \cos\theta\pm\sin\theta=\frac{1}{2}-2n.$$

兩邊自乘,得

$$1\pm\sin 2\theta=\left(\frac{1}{2}-2n\right)^2.$$

若 n 為任何整數(正或負),則 $\sin 2\theta$ 之絕對值大於 1, 故 n 不可不為零.

$$\therefore\ 1\pm\sin 2\theta=\frac{1}{4}.$$

$$\therefore\ \sin 2\theta=\pm\frac{3}{4}.$$

由是 $2\theta=\pm\sin^{-1}\frac{3}{4}$.

$$\therefore\ \theta=\pm\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}.$$

解答之例	問題

解答之例

(例題) 試解 $2\sin^2 x=3\cos x.$

(解答) 由原題之方程式,得

$$1-\cos^2 x=\frac{3}{2}\cos x.$$

$$\therefore\ \cos^2 x+\frac{3}{2}\cos x=1.$$

解此二次方程式,得

$$\cos x=\frac{1}{2}\ \text{或}\ -2.$$

但 -2 不適用,因無論如何, $\cos x$ 之絕對值不能大於 1 故也.

$$\therefore\ \cos x=\frac{1}{2}.$$

由是 $$x=\frac{\pi}{3}.$$

故一般爲 $$x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}.$$

問題

*(1) 設 $\sin x=\cos x$, 求 x.

(2) 試於 0° 與 180° 之間,求適合於下式中 x 之一切值:

$$2\cos^2 x+3\sin x=3.$$

(3) 試解次之方程式:

$$\sin^2 x+\cos 2x=\cos x.$$

*(4) 設 $\cos^2 x-\sin^2 x=\sin x$, 求 x.

 三角方程式問題之解答(其一)

*(1) 因 $$\sin x=\cos x,$$

故 $$\sin^2 x=\cos^2 x=1-\sin^2 x.$$

$$\therefore\quad 2\sin^2 x=1.\qquad \sin x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

故一般為 $$x=2n\pi+45°.$$

(2) $$2\cos^2 x+3\sin x=3.$$

由此式,得

$$2(1-\sin^2 x)+3\sin x=3.$$

$$2\sin^2 x-3\sin x+1=0$$

$$(2\sin x-1)(\sin x-1)=0.$$

$$\therefore\quad \sin x=\frac{1}{2}\quad 或\quad \sin x=1.$$

故一般為 $$x=n\times180°+(-1)^n 30°$$

及 $$x=n\times180°+(-1)^n 90°.$$

由是在 0° 與 180° 之間之角為

$$30°,\quad 150°,\quad 90°.$$

(3) $$\sin^2 x+\cos 2x=\cos x.$$

由此式,得

$$1-\cos^2 x+2\cos^2 x-1=\cos x.$$

即 $$\cos^2 x-\cos x=0.$$

$$\cos x(\cos x-1)=0.$$

$$\therefore\quad \cos x=0\quad 或\quad \cos x=1.$$

故一般為

$$x=2n\times180°\pm90°\quad 及\quad x=2n\times180°.$$

即 $$2n\times180°+90°\quad 或\quad 2n\times180°.$$

*(4) 由原式,得

$$1-\sin^2 x-\sin^2 x=\sin x.$$

即 $$2\sin^2 x+\sin x-1=0.$$

$$(2\sin x-1)(\sin x+1)=0.$$

$$\therefore\quad \sin x=\frac{1}{2}\quad 或\quad \sin x=-1.$$

故一般為

$$x=2n\pi+30°\quad 及\quad x=2n\pi+270°.$$

例題

1. 有方程式

$$\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x=\frac{7}{4},$$

試求其適合於此方程式中 x 之值,但 $x<90^\circ$.

解法

變原式為

$$1-\cos^2 x+\sqrt{3}\cos x-\frac{7}{4}=0,$$

或 $$4\cos^2 x-4\sqrt{3}\cos x+3=0,$$

即 $$(2\cos x-\sqrt{3})^2=0.$$

由是 $$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore\quad x=30^\circ.$$

問題

(1) 有方程式

$$4\sin^2\theta-2(\sqrt{3}+1)\sin\theta+\sqrt{3}=0,$$

試求其 θ 之適當之值.

但 $\theta<90^\circ$.

(2) 試解方程式

$$\sin x+\cos x=1.$$

*(3) 解下之方程式:

$$2\sin x+\cot x=1+2\cos x.$$

(1) $4\sin^2\theta-2(\sqrt{3}+1)\sin\theta+\sqrt{3}=0.$

將此式析因式,得

$$(2\sin\theta-1)(2\sin\theta-\sqrt{3})=0.$$

$$\therefore\quad 2\sin\theta-1=0$$

及 $$2\sin\theta-\sqrt{3}=0.$$

由是 $$\sin\theta=\frac{1}{2},\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故 $$\theta=30^\circ,\ \theta=60^\circ.$$

(2) $\sin x+\cos x=1.$

將此式平方之,

$$\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=1.$$

即 $$\sin 2x+1=1.$$

$$\therefore\quad \sin 2x=0.$$

$$\therefore\quad 2x=n\pi.$$

由是 $$x=\frac{n\pi}{2}.$$

*(3) 由原式,得

$$2\sin x+\frac{\cos x}{\sin x}=1+2\cos x.$$

$$2\sin^2 x+\cos x=\sin x+2\sin x\cos x.$$

$$\cos x-2\sin x\cos x-\sin x+2\sin^2 x=0.$$

$$\cos x(1-2\sin x)-\sin x(1-2\sin x)=0.$$

$$(\cos x-\sin x)(1-2\sin x)=0.$$

$$\therefore\quad \cos x-\sin x=0,\ 1-2\sin x=0.$$

由是 $\tan x=1$ 及 $\sin x=\frac{1}{2}.$

故 $x=2n\pi+45^\circ$ 及 $x=2n\pi+30^\circ.$

例題

2. 試解方程式

$$\cos 2x = \cos x + \sin x.$$

解法

由題,得

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos x + \sin x.$$

$$\therefore\ (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) = \cos x + \sin x.$$

由是

$$\cos x + \sin x = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\cos x - \sin x = 1 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

由 (1), 得 $\tan x = -1.$

$$\therefore\ x = n\pi - \frac{\pi}{4}.$$

由 (2), 得 $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

$$\therefore\ \cos x \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4},$$

即 $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}.$

$$\therefore\ x + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}.$$

由是 $x = 2n\pi$ 或 $2n\pi - \frac{\pi}{2}.$

問題

(1) 試解方程式

$$\sin 2\theta - \cos 2\theta - \sin\theta + \cos\theta = 0.$$

(2) 有方程式

$$5\sin x = \cos 2x + 2,$$

試求 x 適當之值

(平面三角法114) 三角方程式問題之解答(其三)

(1) $\sin 2\theta-\cos 2\theta-\sin\theta+\cos\theta=0.$

由此式,得

$$(\sin 2\theta-\sin\theta)+(\cos\theta-\cos 2\theta)=0,$$

即 $$2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}=0.$$

由是 $$\sin\frac{\theta}{2}=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

及 $$\cos\frac{3\theta}{2}+\sin\frac{3\theta}{2}=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由 (1), 得 $\frac{\theta}{2}=n\cdot 180^\circ$ 或 $\theta=n\cdot 360^\circ.$

由 (2), 得 $\tan\frac{3\theta}{2}=-1.$

由是 $$\frac{3\theta}{2}=n\cdot 180^\circ-45^\circ,$$

即 $$\theta=n\cdot 120^\circ-30^\circ=(4n-1)30^\circ$$

(2) $5\sin x=\cos 2x+2.$

變此式爲

$$5\sin x=1-2\sin^2 x+2,$$

即 $$2\sin^2 x+5\sin x-3=0.$$

分解爲

$$(2\sin x-1)(\sin x+3)=0.$$

由是 $$\sin x=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}.$$

但 $\sin x+3=0$ 不能成立。

例題	解法	問題
3. 試解次之方程式 $2\cos x\cos 3x=-1.$	由原式,得 $\cos 4x+\cos 2x+1=0.$ $2\cos^2 2x+\cos 2x=0.$ 由是 $\cos 2x(2\cos 2x+1)=0.$ 即 $\cos 2x=0$ ....(1) 及 $\cos 2x=-\frac{1}{2}$ ....(2) 從 (1), 得 $2x=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}.$ $\therefore\ x=n\pi\pm\frac{\pi}{4}.$ 從 (2), 得 $2x=2n\pi\pm\frac{2}{3}\pi.$ $\therefore\ x=n\pi\pm\frac{1}{3}\pi.$	(1) $\cos^3 x\sin 3x+\sin^3 x\cos 3x=\frac{3\sqrt{3}}{8},$ 試解之. (2) $\cos x+\cos 7x=\cos 4x$, 試解之.

 三角方程式問題之解答(其四)

(1) 將 $\cos^3 x \sin 3x + \sin^3 x \cos 3x = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

變爲 $\cos^3 x(3\sin x - 4\sin^3 x)$

$$+\sin^3 x(4\cos^3 x - 3\cos x) = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

或 $3\cos^3 x \sin x - 3\sin^3 x \cos x = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}.$

$$\cos x \sin x(\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

$$\sin 2x \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$\sin 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

由是 $4x = n\pi + (-1)^n \dfrac{\pi}{3}.$

$$x = \frac{n}{4}\pi + (-1)^n \frac{\pi}{12}.$$

(2) 將 $\cos x + \cos 7x = \cos 4x$

變爲 $2\cos 3x \cos 4x = \cos 4x.$

故 $\cos 4x = 0$ ……………………(1)

$2\cos 3x = 1$ ……………………(2)

從 (1), 得 $4x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}.$

$$\therefore \quad x = (2n+1)\frac{\pi}{8}.$$

從 (2), 得 $3x = 2n\pi \pm \dfrac{\pi}{3}.$

$$\therefore \quad x = (6n \pm 1)\frac{\pi}{9}.$$

例題

4. 解次之方程式

$$\cos x-\cos 2x=\sin 3x.$$

解法

由原式,得

$$2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}=2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}.$$

$$\therefore\quad \sin\frac{3x}{2}=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

及

$$\sin\frac{x}{2}=\cos\frac{3x}{2}\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

從(1),得 $\frac{3x}{2}=n\pi.\quad\therefore\quad x=\frac{2}{3}n\pi.$

從(2),得 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)=\cos\frac{3x}{2}.$

$$\therefore\quad \frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}=2n\pi\pm\frac{3x}{2}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{\pi}{4}(1-4n)$$

及

$$x=\frac{\pi}{2}(4n-1).$$

問題

(1) $\cos nx+\cos(n-2)x=\cos x$, 試解之.

(2) $3\sec^4 x+8=10\sec^2 x$, 試解之.

 三角方程式問題之解答(其五)

(1) 將 $\cos nx+\cos(n-2)x=\cos x$

變爲 $2\cos(n-1)x\cos x=\cos x.$

$\therefore\quad \cos x=0$ ……………………(1)

或 $\cos(n-1)x=\frac{1}{2}$ ……………………(2)

從(1),得 $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}.$

從(2),得 $(n-1)x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}.$

(2) $3\sec^4 x+8=10\sec^2 x.$

移項, $3\sec^4 x-10\sec^2 x+8=0.$

析因式,得 $(3\sec^2 x-4)(\sec^2 x-2)=0,$

即 $\sec^2 x=2$ 或 $\frac{4}{3}.$

$\therefore\quad \sec x=\sqrt{2}$ 或 $\frac{2}{\sqrt{3}}.$

$\therefore\quad x=\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{6}.$

故一般爲 $x=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$ 或 $2n\pi\pm\frac{\pi}{6}.$

例題

5. $\cot^{-1}x+\cot^{-1}(n^2-x+1)=\cot^{-1}(n-1)$,

試解之.

解法

公式　$\cot(a_1+a_2)=\dfrac{\cot a_1\cot a_2-1}{\cot a_1+\cot a_2}$.

令　$\cot a_1=x$, $\cot a_2=n^2-x+1$.

則　$a_1+a_2=\cot^{-1}\dfrac{x(n^2-x+1)-1}{x+(n^2-x+1)}$.

卽　$\cot^{-1}x+\cot^{-1}(n^2-x+1)$

$$=\cot^{-1}\frac{n^2x-x^2+x-1}{n^2+1}.$$

依題之等式,得

$$\frac{n^2x-x^2+x-1}{n^2+1}=n-1.$$

由是　$n^2x-x^2+x-1=n^3-n^2+n-1$.

解之,得

$$x=n \text{ 及 } x=n^2-n+1.$$

問題

(1) $\tan^{-1}x+\dfrac{1}{2}\sec^{-1}5x=45°$,

求其適當之 x 之值.

(2) $3\tan^{-1}\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}-\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$

$=\tan^{-1}\dfrac{1}{3}$,

試求其 x 之值.

三角方程式問題之解答(其六)

(1) 令 $\frac{1}{2}\sec^{-1}5x=A,$

則 $\sec^{-1}5x=2A.$

從而 $5x=\sec 2A,$

或 $\cos 2A=\frac{1}{5x}.$

由是 $\tan A=\sqrt{\frac{5x-1}{5x+1}}.$

依題,得 $\tan^{-1}x+\tan^{-1}\sqrt{\frac{5x-1}{5x+1}}=45°.$

$$\therefore\ \frac{x+\sqrt{\frac{5x-1}{5x+1}}}{1-x\sqrt{\frac{5x-1}{5x+1}}}=\tan 45°=1.$$

或 $x+\sqrt{\frac{5x-1}{5x+1}}=1-x\sqrt{\frac{5x-1}{5x+1}}.$

解之,得 $x=\pm\frac{1}{3}.$

(2) 令 $\tan^{-1}\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\theta$, 則

$$\tan\theta=\frac{1}{2+\sqrt{3}}.$$

$$\therefore\ \tan 3\theta=\left\{\frac{3}{2+\sqrt{3}}-\frac{1}{(2+\sqrt{3})^3}\right\}\Big/\left\{1-\frac{3}{(2+\sqrt{3})^2}\right\}$$

$$=\frac{3(2+\sqrt{3})^2-1}{(2+\sqrt{3})^3-3(2+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{20+12\sqrt{3}}{20+12\sqrt{3}}=1.$$

$$\therefore\ 3\theta=\tan^{-1}1.$$

故原題之方程式如次:

$$\tan^{-1}1-\tan^{-1}\frac{1}{3}=\tan^{-1}\frac{1}{x}.$$

求兩邊之正切,則

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\Big/\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{x}.$$

$$\therefore\ \frac{1}{x}=\frac{1}{2}.\qquad \therefore\ x=2.$$

例題	解法	問題
6. $x+y=a$, $\sin x+\sin y=b$, 試解之.	變題之第二方程式爲 $2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=b.$ $\therefore\quad \cos\frac{x-y}{2}=\frac{b}{2\sin\frac{x+y}{2}}=\frac{b}{2\sin\frac{a}{2}}.$ 從此,求得 $\frac{x-y}{2}$. 令 $\frac{x-y}{2}=\theta$ ……………………(1) 從題之第一式,得 $\frac{x+y}{2}=\frac{a}{2}$ ……………………(2) 由 (1), (2), 得 $x=\frac{a}{2}+\theta,\ y=\frac{a}{2}-\theta.$	(1) $x+y=90°$, $\sin x+\cos y=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 試解之. (2) $x+y=a$, $\sin x+\sin y=b$, 試解之.

(1) $$\begin{cases} x+y=90^\circ, \\ \sin x+\cos y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

$$\because \quad x+y=90^\circ.$$

$$\therefore \quad \cos y=\sin x.$$

由是題之第二方程式為

$$2\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 或 } \sin x=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$\therefore \quad x=\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

同樣 $$y=\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

(2) $$\begin{cases} x+y=a, \\ \sin x\sin y=b. \end{cases}$$

以 2 乘第二方程式之兩邊，其正弦之積之二倍

以餘弦之差代之,則得

$$\cos(x-y)-\cos(x+y)=2b.$$

以第一式代入,得

$$\cos(x-y)=\cos a+2b.$$

從此求得 $x-y$.

與第一方程式聯合解之,即得 x 及 y.

解答之例	問題

解答之例

(例題) $\begin{cases} \sin\theta+\cos\theta=a, \\ \sin 2\theta+\cos 2\theta=b. \end{cases}$

試消去 θ.

(解答) 將第一式平方之,

$$1+\sin 2\theta=a^2. \quad \therefore \quad \sin 2\theta=a^2-1.$$

代入第二方程式而變化之,

$$\cos 2\theta=b-a^2+1.$$

$$\therefore \quad (a^2-1)^2+(b-a^2+1)^2=1.$$

$$2a^4-2a^2b-4a^2+b^2+2b+1=0.$$

問題

試消去下二題中之 θ:

(1) $\begin{cases} x=\sin\theta+\cos\theta, \\ y=\tan\theta+\cot\theta. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \tan\theta+\sin\theta=m, \\ \tan\theta-\sin\theta=n. \end{cases}$

消去法問題之解答(其一)

(1)
$$x=\sin\theta+\cos\theta \cdots\cdots(1)$$
$$y=\tan\theta+\cot\theta \cdots\cdots(2)$$

將 (1) 平方之,
$$x^2=1+2\sin\theta\cos\theta.$$
$$\therefore\quad \sin\theta\cos\theta=\frac{x^2-1}{2} \cdots\cdots(3)$$

從 (2), $$y=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta} \cdots\cdots(4)$$

以 (3) 代入 (4),
$$y=\frac{2}{x^2-1}.$$
$$\therefore\quad x^2y-y=2.$$

(2)
$$\tan\theta+\sin\theta=m \cdots\cdots(1)$$
$$\tan\theta-\sin\theta=n \cdots\cdots(2)$$

(1)+(2), 則
$$2\tan\theta=m+n.$$

(1)-(2), 則
$$2\sin\theta=m-n.$$
$$\therefore\quad \tan^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\left(\frac{m+n}{2}\right)^2=\frac{(m+n)^2}{4}.$$

或 $$\frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}=\frac{(m+n)^2}{4}.$$

由是 $$\frac{\left(\frac{m-n}{2}\right)^2}{1-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2}=\frac{(m+n)^2}{4}.$$
$$\therefore\quad 16mn-m^4+2m^2n^2-n^4=0$$

例題

1. $\cot\theta+\tan\theta=x$,

$\csc\theta-\sin\theta=y$,

試消去 θ.

解法

從第一式，$$\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=x\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

從第二式，$$\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}=y\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2) ÷ (1), 則

$$\cos^3\theta=\frac{y}{x},$$

或 $$\cos^2\theta=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

[illegible]代入以 (2), 則

$$y=\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}} \text{ 或 } \sin^2\theta=\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}}.$$

由是 $$\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1.$$

或 $$x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}+1=x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}.$$

問題

(1) $x=3\cos\theta+\cos 3\theta$,

$y=3\sin\theta-\sin 3\theta$,

試消去 θ.

(2) $x=\sec\phi-\cos\phi$,

$y=\csc\phi-\sin\phi$,

試消去 ϕ.

消去法問題之解答(其二)

(1)
$$x=3\cos\theta+\cos 3\theta \cdots\cdots(1)$$
$$y=3\sin\theta-\sin 3\theta \cdots\cdots(2)$$

從 (1),
$$x=3\cos\theta+4\cos^3\theta-3\cos\theta=4\cos^3\theta.$$
$$\therefore \left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{2}{3}}=\cos^2\theta \cdots\cdots(3)$$

從 (2),
$$y=3\sin\theta-3\sin\theta+4\sin^3\theta=4\sin^3\theta.$$
$$\therefore \left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2}{3}}=\sin^2\theta \cdots\cdots(4)$$

(3)+(4), 則
$$\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2}{3}}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1.$$
$$\therefore x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{2}{3}}.$$

(2)
$$x=\sec\phi-\cos\phi \cdots\cdots(1)$$
$$y=\csc\phi-\sin\phi \cdots\cdots(2)$$

從 (1), $x=\dfrac{1}{\cos\phi}-\cos\phi.$

或 $x=\dfrac{1-\cos^2\phi}{\cos\phi}=\dfrac{\sin^2\phi}{\cos\phi} \cdots\cdots(3)$

從 (2), $y=\dfrac{1}{\sin\phi}-\sin\phi.$

或 $y=\dfrac{1-\sin^2\phi}{\sin\phi}=\dfrac{\cos^2\phi}{\sin\phi} \cdots\cdots(4)$

(3)×(4), 則
$$xy=\sin\phi\cos\phi.$$

又由 (3), (4),
$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=\frac{\sin^{\frac{4}{3}}\phi}{\cos^{\frac{2}{3}}\phi}+\frac{\cos^{\frac{4}{3}}\phi}{\sin^{\frac{2}{3}}\phi}=\frac{\sin^2\phi+\cos^2\phi}{\cos^{\frac{2}{3}}\phi\sin^{\frac{2}{3}}\phi}.$$

由是 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1/x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}.$

或 $x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})=1.$

例題	解法	問題
2. $m\sec x=1+\tan x$, $n\sec x=1-\tan x$, 試消去 x.	將原題之二式平方之, $m^2\sec^2x=(1+\tan x)^2 \cdots\cdots(1)$ $n^2\sec^2x=(1-\tan x)^2 \cdots\cdots(2)$ (1)+(2), 則 $(m^2+n^2)\sec^2x=(1+\tan x)^2+(1-\tan x)^2$ $=2(1+\tan^2x)$ $=2\sec^2x$. $\therefore\ m^2+n^2=2$.	(1) $x=a\sin\alpha\cos\beta$, $y=b\sin\alpha\sin\beta$, $z=c\cos\alpha$, 試從上三式消去 α, β. (2) $3-\cos 4\theta=x+y$, $4\sin 2\theta=x-y$, 試消去 θ.

) 變原三式之形爲

$$\frac{x}{a}=\sin\alpha\cos\beta,$$

$$\frac{y}{b}=\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\frac{z}{c}=\cos\alpha.$$

各各平方,且邊邊相加,得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

或 $b^2c^2x^2+c^2a^2y^2+a^2b^2z^2=a^2b^2c^2.$

(2) $$3-\cos 4\theta=x+y \cdots\cdots(1)$$

$$4\sin 2\theta=x-y \cdots\cdots(2)$$

從(1), $\cos 4\theta=3-(x+y)$,

或 $2\cos^2 2\theta-1=3-(x+y)$.

$$\therefore\ 16\cos^2 2\theta=32-8(x+y) \cdots\cdots(3)$$

將(2)平方之,

$$16\sin^2 2\theta=(x-y)^2 \cdots\cdots(4)$$

(3)+(4),

$$16=32-8(x+y)+(x-y)^2.$$

$$\therefore\ (x-y)^2-8(x+y)+16=0.$$