Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2023**

Analysis I

Vorlesung

Abbildungen

Definition 2.1. Seien L und M Mengen. Eine *Abbildung* F von L nach M ist dadurch gegeben, dass jedem Element der Menge L genau ein Element der Menge M zugeordnet wird. Das zu $x \in L$ eindeutig bestimmte Element wird mit $F(x)$ bezeichnet. Die Abbildung drückt man als Ganzes häufig durch

$$F\colon L \longrightarrow M,\, x \longmapsto F(x),$$

aus.

Bei einer Abbildung $F\colon L \to M$ heißt L die *Definitionsmenge* (oder Definitionsbereich) der Abbildung und M die *Wertemenge* (oder *Wertevorrat* oder *Zielbereich*) der Abbildung. Zu einem Element $x \in L$ heißt das Element

$$F(x) \in M$$

der *Wert* von F an der *Stelle* x. Statt Stelle sagt man auch häufig *Argument*.

Zwei Abbildungen $F\colon L_1 \to M_1$ und $G\colon L_2 \to M_2$ sind gleich, wenn die Definitionsmengen und die Wertemengen übereinstimmen und wenn für alle $x \in L_1 = L_2$ die Gleichheit $F(x) = G(x)$ in $M_1 = M_2$ gilt. Die Gleichheit von Abbildungen wird also zurückgeführt auf die Gleichheit von Elementen in einer Menge. Abbildungen werden häufig auch *Funktionen* genannt. Wir werden den Begriff *Funktion* für solche Abbildungen reservieren, deren Wertemenge ein Zahlbereich wie die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist.

Zu jeder Menge L nennt man die Abbildung

$$L \longrightarrow L,\, x \longmapsto x,$$

also die Abbildung, die jedes Element auf sich selbst schickt, die *Identität* (auf L). Sie wird mit Id_L bezeichnet. Zu einer weiteren Menge M und einem fixierten Element $c \in M$ nennt man die Abbildung

$$L \longrightarrow M,\, x \longmapsto c,$$

die also jedem Element $x \in L$ den *konstanten Wert* c zuordnet, die *konstante Abbildung* (mit dem Wert c). Sie wird häufig wieder mit c bezeichnet.[1]

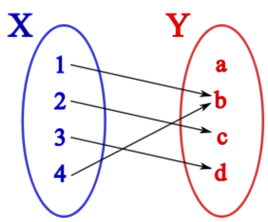
Für eine Abbildung gibt es mehrere Darstellungsmöglichkeiten, z.B. Wertetabelle, Balkendiagramm, Kuchendiagramm, Pfeildiagramm, den Graph der

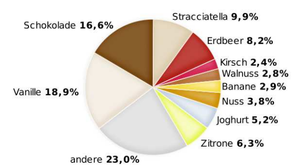
[1] Von Hilbert stammt die etwas überraschende Aussage, die Kunst der Bezeichnung in der Mathematik besteht darin, unterschiedliche Sachen mit denselben Symbolen zu bezeichnen.

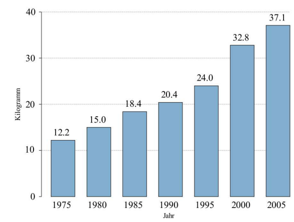
Abbildung. Dabei sind die Übergänge zwischen der formalen Definition einer Abbildung und den visuellen Realisierungen fließend. In der Mathematik wird eine Abbildung zumeist durch eine Abbildungsvorschrift beschrieben, die es erlaubt, die Werte der Abbildung zu berechnen.

Zu zwei Mengen L und M bezeichnet man die *Menge der Abbildungen* von L nach M mit

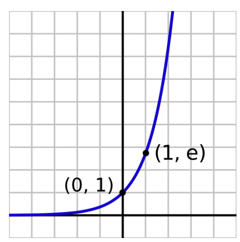
$$\text{Abb}\,(L, M) = \{f : L \to M \mid f \text{ Abbildung}\}.$$



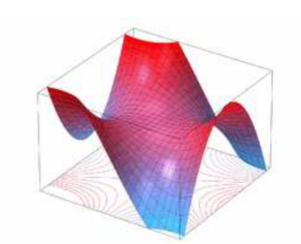


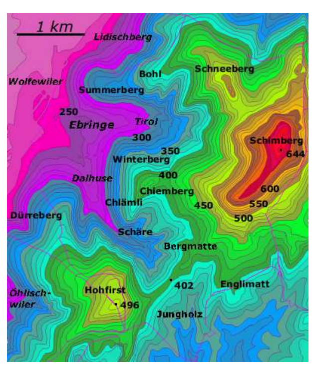


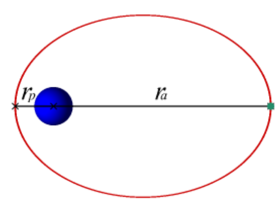
x	1	2	3	4	5	6
$\sigma(x)$	2	4	6	5	3	1



$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1







Injektive und surjektive Abbildungen

Definition 2.2. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F\colon L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Dann heißt F

• *injektiv*, wenn für je zwei verschiedene Elemente $x, x' \in L$ auch $F(x)$ und $F(x')$ verschieden sind.

• *surjektiv*, wenn es für jedes $y \in M$ mindestens ein Element $x \in L$ mit

$$F(x) = y$$

gibt.

• *bijektiv*, wenn F sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Diese Begriffe sind fundamental! Die Frage, ob eine Abbildung F diese Eigenschaften besitzt, kann man anhand der Gleichung

$$F(x) = y$$

(in den beiden Variablen x und y) erläutern. Die Surjektivität bedeutet, dass es zu jedem $y \in M$ mindestens eine Lösung $x \in L$ für diese Gleichung gibt, die Injektivität bedeutet, dass es zu jedem $y \in M$ maximal eine Lösung $x \in L$ für diese Gleichung gibt, und die Bijektivität bedeutet, dass es zu jedem $y \in M$ genau eine Lösung $x \in L$ für diese Gleichung gibt. Die Surjektivität entspricht also der Existenz von Lösungen, die Injektivität der Eindeutigkeit von Lösungen. Beide Fragestellungen durchziehen die Mathematik und können selbst wiederum häufig als die Surjektivität oder die Injektivität einer geeigneten Abbildung interpretiert werden.

Beim Nachweis der Injektivität einer Abbildung geht man häufig so vor, dass man zu zwei gegebenen Elementen x und x' aus der Voraussetzung $F(x) = F(x')$ erschließt, dass $x = x'$ ist. Dies ist oft einfacher zu zeigen, als aus $x \neq x'$ auf $F(x) \neq F(x')$ zu schließen.

Beispiel 2.3. Die Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^2,$$

ist weder injektiv noch surjektiv. Sie ist nicht injektiv, da die verschiedenen Zahlen 2 und -2 beide auf 4 abgebildet werden. Sie ist nicht surjektiv, da nur nichtnegative Elemente erreicht werden (eine negative Zahl hat keine reelle Quadratwurzel). Die Abbildung

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^2,$$

ist injektiv, aber nicht surjektiv. Die Injektivität folgt beispielsweise so: Wenn $x \neq y$ ist, so ist eine Zahl größer, sagen wir

$$x > y \geq 0.$$

Doch dann ist auch $x^2 > y^2$ und insbesondere $x^2 \neq y^2$. Die Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\, x \longmapsto x^2,$$

ist nicht injektiv, aber surjektiv, da jede nichtnegative reelle Zahl eine Quadratwurzel besitzt. Die Abbildung

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\, x \longmapsto x^2,$$

ist injektiv und surjektiv.

DEFINITION 2.4. Es sei $F: L \to M$ eine bijektive Abbildung. Dann heißt die Abbildung

$$G: M \longrightarrow L,$$

die jedes Element $y \in M$ auf das eindeutig bestimmte Element $x \in L$ mit $F(x) = y$ abbildet, die *Umkehrabbildung* zu F.

Hintereinanderschaltung von Abbildungen

DEFINITION 2.5. Es seien L, M und N Mengen und

$$F: L \longrightarrow M,\, x \longmapsto F(x),$$

und

$$G: M \longrightarrow N,\, y \longmapsto G(y),$$

Abbildungen. Dann heißt die Abbildung[2]

$$G \circ F: L \longrightarrow N,\, x \longmapsto G(F(x)),$$

die *Hintereinanderschaltung* der Abbildungen F und G.

Es gilt also

$$(G \circ F)(x) := G(F(x)),$$

wobei die linke Seite durch die rechte Seite definiert wird. Wenn die beiden Abbildungen durch funktionale Ausdrücke gegeben sind, so wird die Hintereinanderschaltung dadurch realisiert, dass man den ersten Ausdruck anstelle der Variablen in den zweiten Ausdruck einsetzt (und nach Möglichkeit vereinfacht).

Zu einer bijektiven Abbildung $\varphi: M \to N$ ist die Umkehrabbildung $\varphi^{-1}: N \to M$ durch die beiden Bedingungen

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{Id}_N$$

und

$$\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{Id}_M$$

charakterisiert.

LEMMA 2.6. *Es seien L, M, N und P Mengen und es seien*

$$F: L \longrightarrow M,\, x \longmapsto F(x),$$

$$G: M \longrightarrow N,\, y \longmapsto G(y),$$

und

$$H: N \longrightarrow P,\, z \longmapsto H(z),$$

Abbildungen. Dann ist

$$H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F.$$

[2]Man beachte, dass in der Bezeichnung die „verkehrte“ Reihenfolge verwendet wird, da ja F zuerst ausgeführt wird. Dies beruht darauf, dass das Argument rechts geschrieben wird.

Beweis. Zwei Abbildungen $\alpha, \beta\colon L \to P$ sind genau dann gleich, wenn für jedes $x \in L$ die Gleichheit $\alpha(x) = \beta(x)$ gilt. Sei also $x \in L$. Dann ist

$$\begin{aligned}(H \circ (G \circ F))(x) &= H((G \circ F)(x)) \\ &= H(G(F(x))) \\ &= (H \circ G)(F(x)) \\ &= ((H \circ G) \circ F)(x).\end{aligned}$$

□

Graph, Bild und Urbild einer Abbildung

Definition 2.7. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F\colon L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Dann nennt man

$$\Gamma = \Gamma_F = \{(x, F(x)) \mid x \in L\} \subseteq L \times M$$

den *Graphen* der Abbildung F.

Ein Graph ist ein mengentheoretisches Konzept. Ob man ihn „graphisch“ veranschaulichen kann, hängt davon ab, ob man die Produktmenge $L \times M$ veranschaulichen kann.

Definition 2.8. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F\colon L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zu einer Teilmenge $S \subseteq L$ heißt

$$F(S) = \{y \in M \mid \text{es gibt ein } x \in S \text{ mit } F(x) = y\}$$

das *Bild von* S unter F. Für $S = L$ heißt

$$F(L) = \operatorname{bild} F$$

das *Bild der Abbildung*.

Definition 2.9. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F\colon L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zu einer Teilmenge $T \subseteq M$ heißt

$$F^{-1}(T) = \{x \in L \mid F(x) \in T\}$$

das *Urbild von* T unter F. Für eine einelementige Teilmenge $T = \{y\}$ heißt

$$F^{-1}(\{y\})$$

das *Urbild von* y.

Verknüpfungen

Definition 2.10. Eine *Verknüpfung* $\circ$ auf einer Menge M ist eine Abbildung

$$\circ\colon\ M \times M \longrightarrow M,\ (x, y) \longmapsto \circ(x, y) = x \circ y.$$

Eine Verknüpfung macht also aus einem Paar

$$(x, y)\ \in\ M \times M$$

ein einziges Element

$$x \circ y\ \in\ M.$$

Eine Vielzahl von mathematischen Konstruktionen fällt unter diesen Begriff: Die Addition, die Differenz, die Multiplikation, die Division von Zahlen, die Verknüpfung von Abbildungen, der Durchschnitt oder die Vereinigung von Mengen, etc. Als Verknüpfungssymbol kommt eine ganze Reihe in Frage, z.B. $\circ, \cdot, +, -, \oplus, \clubsuit, \heartsuit$ u.s.w. Je nach dem gewählten Symbol spricht man statt Verknüpfung auch von *Multiplikation* oder *Addition*, ohne dass man damit eine inhaltliche Bedeutung verbinden sollte. Wichtige strukturelle Eigenschaften einer Verknüpfung werden in den folgenden Definitionen aufgelistet.

Definition 2.11. Eine Verknüpfung

$$\circ\colon\ M \times M \longrightarrow M,\ (x, y) \longmapsto x \circ y,$$

auf einer Menge M heißt *kommutativ*, wenn für alle $x, y\ \in\ M$ die Gleichheit

$$x \circ y\ =\ y \circ x$$

gilt.

Definition 2.12. Eine Verknüpfung

$$\circ\colon\ M \times M \longrightarrow M,\ (x, y) \longmapsto x \circ y,$$

auf einer Menge M heißt *assoziativ*, wenn für alle $x, y, z\ \in\ M$ die Gleichheit

$$(x \circ y) \circ z\ =\ x \circ (y \circ z)$$

gilt.

Definition 2.13. Es sei eine Menge M mit einer Verknüpfung

$$\circ\colon\ M \times M \longrightarrow M,\ (x, y) \longmapsto x \circ y,$$

gegeben. Dann heißt ein Element $e\ \in\ M$ *neutrales Element* der Verknüpfung, wenn für alle $x\ \in\ M$ die Gleichheit $x \circ e\ =\ x\ =\ e \circ x$ gilt.

Im kommutativen Fall muss man natürlich für das neutrale Element nur eine Reihenfolge betrachten.

Definition 2.14. Es sei eine Menge M mit einer Verknüpfung

$$\circ\colon\ M \times M \longrightarrow M,\ (x,y) \longmapsto x \circ y,$$

und einem neutralen Element $e \in M$ gegeben. Dann heißt zu einem Element $x \in M$ ein Element $y \in M$ *inverses Element*, wenn die Gleichheit

$$x \circ y = e = y \circ x$$

gilt.

Beispiel 2.15. Es sei L eine Menge und

$$M = \text{Abb}\,(L,L)$$

die Menge aller Abbildungen von L in sich. Durch die Hintereinanderschaltung von Abbildungen liegt eine Verknüpfung auf M vor, die aufgrund von Lemma 2.6 assoziativ ist. Dagegen ist sie nicht kommutativ. Die Identität auf L ist das neutrale Element. Eine Abbildung $f\colon L \to L$ besitzt genau dann ein inverses Element, wenn sie bijektiv ist; das inverse Element ist einfach die Umkehrabbildung.

Beginnend mit der nächsten Vorlesung beschäftigen wir uns mit den reellen Zahlen, bei denen es die Addition und die Multiplikation als Verknüpfungen gibt. Erstaunlicherweise erfüllen diese beiden Verknüpfungen (bei der Multiplikation muss man die 0 herausnehmen) für sich genommen eine wichtige algebraische Struktur: Es handelt sich um Gruppen.

Definition 2.16. Eine Menge G mit einem ausgezeichneten Element $e \in G$ und mit einer Verknüpfung

$$G \times G \longrightarrow G,\ (g,h) \longmapsto g \circ h,$$

heißt *Gruppe*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind.

(1) Die Verknüpfung ist *assoziativ*, d.h. für alle $f,g,h \in G$ gilt
$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$
(2) Das Element e ist ein *neutrales Element*, d.h. für alle $g \in G$ gilt
$$g \circ e = g = e \circ g.$$
(3) Zu jedem $g \in G$ gibt es ein *inverses Element*, d.h. es gibt ein $h \in G$ mit
$$h \circ g = g \circ h = e.$$

Solche abstrakte Strukturen führen ein Doppelleben: Einerseits sind sie wirklich nur die gegebene formale Struktur, die Elemente sind nur irgendwelche Elemente einer irgendwie gegebenen Menge, die Verknüpfung ist irgendeine Verknüpfung, unter der man sich nichts Bestimmtes vorstellen soll. Die gewählten Symbole sind willkürlich und ohne Bedeutung. Andererseits erhalten solche abstrakte Strukturen dadurch ihr Leben, dass konkrete mathematische Strukturen darunter subsummiert werden können. Die konkreten

Strukturen sind *Beispiele* oder *Modelle* für die abstrakte Struktur (und sie sind mathematikhistorisch auch die Motivation, abstraktere Strukturen einzuführen). Beide Ebenen sind wichtig, man sollte sie aber stets auseinander halten.

Abbildungsverzeichnis