



De Agostinbo de Mendonça Falcão.



ASTRONOMIE,

PAR M. DE LA LANDE.

TOME SECONDE.

ARTS AND CRAFTS

THE GREAT BRITISH MUSEUM

1851

ASTRONOMIE,

PAR M. DE LA LANDE,

*Lecteur Royal en Mathématiques ; de l'Académie
Royale des Sciences de Paris ; de celles de Londres ,
de Pétersbourg , de Berlin , de Stockholm , de
Bologne , &c. Censeur Royal.*

SECONDE ÉDITION REVUE ET AUGMENTÉE.

TOME SECONDE.



A PARIS,

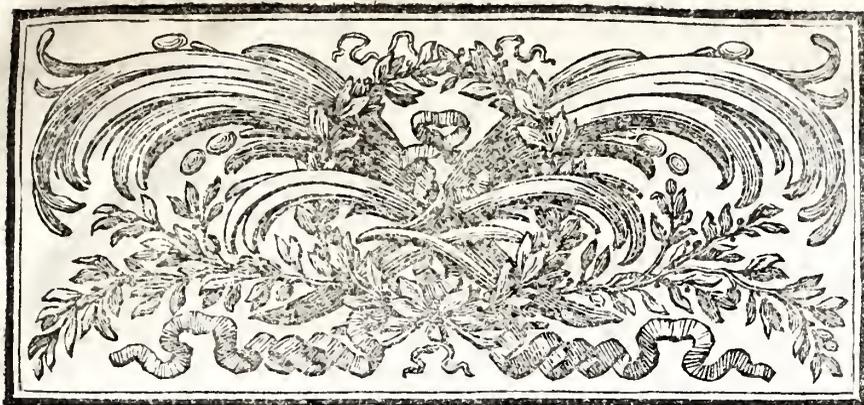
Chez la Veuve DESAINT, rue du Foin
Saint Jacques.

M. DCC. LXXI.

AVEC PRIVILEGE DU ROI.



Digitized by the Internet Archive
in 2016 with funding from
Getty Research Institute



ASTRONOMIE.

LIVRE SIXIÈME.

*DES LOIX DU MOUVEMENT
des six Planètes principales vues du
Soleil, & de leurs élémens; c'est-à-dire,
de la figure & de la situation de leurs
orbites.*



PUISQUE les planètes tournent autour du soleil, de même que la terre (1104); c'est au centre du soleil qu'on doit supposer un observateur pour lui faire voir les mouvemens les plus uniformes, & lui en faire connoître les circonstances & les mesures; c'est pour cela que M. de la Caille en commençant ses leçons élémentaires d'astronomie, suppose d'abord que son observateur soit placé précisément au centre du soleil, pour considérer de-là le mouvement régulier des planètes & des comètes parmi les étoiles, toujours fixes & immobiles; & il passe aussi-tôt à la recherche des loix des mouvemens planétaires: pour moi j'ai mieux

aimé considérer l'astronomie dans ses premiers élémens ; suivre les progrès lents & successifs de ceux qui l'ont perfectionnée, & ne parler des planètes vues du soleil, qu'après avoir montré que c'est autour de lui qu'elles tournent.

Utilité des
oppositions
& des con-
jonctions.

1201. Pour déterminer les mouvemens vus du soleil, il falloit un moyen d'avoir la longitude d'une planète, telle qu'on l'observeroit vue du soleil ; c'est ce qu'on a trouvé dans les *oppositions* des planètes supérieures, Mars, Jupiter & Saturne, & dans les *conjonctions inférieures* de Vénus & de Mercure (1152) ; en effet, quand une planète est opposée au soleil, le lieu de l'écliptique où elle répond, est sur une même ligne droite avec le soleil & la terre ; ainsi le lieu de la planète vu du soleil, ou le lieu vu de la terre, est absolument le même : si la terre est en *N* (*fig.* 56), & la planète en *A* opposée au soleil *S*, le point du ciel où aboutit la ligne *SNA*, marque le lieu héliocentrique (1140), aussi bien que le lieu géocentrique de la planète *A*.

Planche V.
Fig. 56.
Tome I.

Aussi les astronomes ont-ils soin d'observer assiduellement les oppositions des planètes, comme les circonstances les plus essentielles de leurs mouvemens ; parce qu'alors l'observation faite sur la terre, tient lieu d'une observation faite dans le soleil, & sert à reconnoître l'orbite que la planète décrit autour du soleil. C'est avec des longitudes héliocentriques ou vues du soleil que nous avons déterminé les moyens mouvemens des planètes (1153), & que nous allons déterminer encore les orbites planétaires, les circonstances & les inégalités de leurs mouvemens : on trouvera dans le XXIV^e livre la manière de calculer une opposition par le moyen des observations d'une planète ; & nous rapporterons à la fin de ce VI^e livre les oppositions ou les conjonctions observées le plus exactement, qui sont les plus propres à déterminer les élémens des orbites planétaires, & dont les astronomes se sont servi jusqu'à présent. Le moyen mouvement est le plus essentiel de tous les élé-

mens d'une planète; mais nous en avons déjà donné le détail dans le V^e livre, il nous reste à parler de la figure des orbites, des excentricités, des distances, des aphélie, des nœuds, des inclinaisons & des diamètres de chacune des six planètes principales.

DE LA FIGURE DES ORBITES PLANÉTAIRES.

I 202. APRÈS avoir trouvé combien de temps les planètes emploient à terminer leurs révolutions autour du soleil, il faut rechercher les circonstances de leur mouvement dans les différentes parties de chaque révolution, ou ces inégalités périodiques dont il a déjà été question pour le soleil dans le IV^e livre (869), & qui dépendent de la figure des orbites planétaires.

Le mouvement de chaque planète étant rapporté au soleil, ou observé dans les temps où les apparences sont les mêmes, vues de la terre & vues du soleil, est sujet à une inégalité (semblable à celle du mouvement apparent du soleil), c'est celle que les anciens appelloient *premiere inégalité* (^a); pour l'expliquer on se servoit ou d'un épicycle, ou d'un cercle excentrique (865, 1068); ces deux hypothèses étoient absolument équivalentes, comme nous l'avons fait voir.

I 203. Ptolomée fit choix de l'excentrique *NHBCP* (*fig. 24.*) pour exprimer cette *premiere inégalité*, ou l'équation des planètes dans leur orbite, il y trouvoit plus de clarté; & d'ailleurs il employoit ensuite l'épicycle pour représenter la *seconde inégalité*; son hypothèse a été expliquée (1068), elle consistoit à faire mouvoir la planète dans un cercle, de maniere que le mouvement fût égal, non pas vu du centre *E*, mais vu d'un autre

Fig. 24.

(^a) La seconde inégalité étoit relative au soleil ne pouvoit se celle de la parallaxe du grand-orbe déterminer qu'après avoir connu (1067, 1141), ou des stations & des celle qui avoit lieu dans les oppo- rétrogradations (1181), qui étant sitions.

4 ASTRONOMIE, LIV. VI.

point K , il ne donne ni démonstration, ni observation pour la justifier, & dans le fait, les anciens n'avoient pas, ce me semble, des raisons bien déterminantes pour mettre le centre d'égalité hors du centre du cercle décrit par la planète, nous nous contenterons donc d'expliquer son hypothèse, tel qu'il la donne, (liv. IX. c. 5.) pour faire connoître ensuite la manière dont Képler s'en servit pour découvrir l'ellipticité des orbites planétaires (1208).

Hypothèse
de Ptolomée
pour la pre-
mière inéga-
lité.

Fig. 64.

Point d'éga-
lité.

1204. Du centre B (fig. 64), soit décrit le cercle excentrique DEF , dont l'excentricité soit BA , en sorte que la terre ou l'œil du spectateur soient placés en A ; D sera l'apogée, F le périogée; si l'on prend au-dessus du centre B une ligne BC égale à BA , le point C sera celui autour duquel Ptolomée suppose que la planète décrit des angles égaux en temps égaux, ou le point d'où son mouvement paroîtroit uniforme, *Punctum æquantis*, le point d'égalité. Copernic rejetta cette hypothèse, (liv. IV. chap. 7. & liv. V. chap. 4.), parce qu'elle péchoit contre les principes de la physique de son temps, où l'on ne vouloit que des mouvemens uniformes, & où l'on admettoit encore les orbites folides que Tycho-Brahé renversa dans la suite par la considération des comètes.

Tentatives
de Tycho.

Tycho-Brahé voulant perfectionner cette hypothèse de Ptolomée, chercha si en rendant CB différente de BA , on ne parviendroit pas à mieux représenter les inégalités qu'il observoit dans les planètes, mais Képler fit voir dans la suite que tout cela étoit insuffisant; & ce fut ce qui le conduisit à trouver la véritable figure des orbites planétaires, comme nous allons l'expliquer. Riccioli a remarqué qu'avant Képler, Reinholdus à la fin des Théoriques de Purbachius avoit donné une figure ovale pour l'orbite lunaire, (*Almag. I. 149*); il n'en falloit pas davantage pour donner à Képler l'idée de rechercher si la figure des orbites planétaires étoit exactement circulaire; & Mars étoit, de toutes les planètes, la plus propre à cette recherche.

De la Figure des Orbites Planétaires. 5

1205. Nous avons vu (493) que les premières étincelles du génie de Képler parurent dans le livre qui a pour titre, *Mysterium Cosmographicum*, en 1596. Ce premier essai fut applaudi par *Mæstlinus* son ancien maître, & par Tycho-Brahé qui en 1597 lui en témoigna de la satisfaction, & lui inspira l'envie de s'appliquer aux observations & aux recherches d'astronomie. Képler, ayant eu en 1600 que Tycho avoit abandonné son isle (474), & s'étoit retiré en Bohême, vint le trouver pour converser avec lui, & lui demander sur-tout les résultats de ses observations sur les excentricités des planètes, sur lesquelles Tycho avoit déjà beaucoup travaillé, (Képler, *de stella Martis*, pag. 53).

Une heureuse circonstance fit alors la destinée de Képler; Tycho-Brahé, & Longomontanus qui demeurait avec lui, s'occupoient des observations de Mars, & dressaient une table de ses oppositions moyennes depuis 1580; cette planète étoit la plus propre de toutes à faire pénétrer ce grand homme dans les secrets de la physique céleste, & elle se présenta la première à lui comme par hasard; il aperçut des difficultés, il s'attacha à les vaincre, & c'est-là l'époque où il faut remonter pour connoître l'origine de notre physique céleste.

Circonstance heureuse pour Képler.

1206. Tycho avoit formé une hypothèse qui représentait, à quelques minutes près, toutes les observations de Mars, au moyen d'un excentrique, en plaçant le point *A* & le point *C* (fig. 64), à des distances différentes par rapport au centre *B*; Képler savoit déjà que l'excentrique pouvoit s'accorder, à cinq minutes près, avec les observations, & malgré cela l'hypothèse lui paroissoit peu vraisemblable; il s'occupait à discuter ces observations pour en tirer, s'il étoit possible, quelque chose de plus exact: ce fut alors que commencèrent les recherches qui se trouvent détaillées dans son grand ouvrage intitulé, (*Astronomia nova Αἰτιολογία, seu Physica cœlestis, tradita Commentariis de motibus Stellæ Martis, ex observationibus C. V. TYCHONIS-BRAHE; Præge,*

Fig. 64.

Ouvrage de Képler, de *Stella Martis*,

6 ASTRONOMIE, LIV. VI.

1609. *in-fol.* 337. pages.). Je vais donner un extrait de cet ouvrage célèbre, mais un astronome doit le lire en entier : parmi les superfluités, les longueurs, les tentatives inutiles qui y sont détaillées, on y voit une marche lumineuse & des traits de génie qui donnent la plus grande satisfaction.

1207. Le premier pas qu'il falloit faire dans cette carrière, étoit de trouver les distances de la terre au soleil, qui servent d'échelle & de terme de comparaison pour toutes les autres distances que l'on mesure dans le ciel. Pour avoir les distances de la terre en divers temps de l'année, il falloit trouver l'excentricité AB , (*fig. 64*) de l'orbite terrestre, c'est-à-dire, la distance entre le centre du soleil supposé en A , & le véritable centre du cercle DEF décrit par la terre. Les anciens avoient toujours cru, & Tycho-Brahé lui-même le croyoit, que pour l'orbite du soleil ou de la terre, le centre B étoit le point d'égalité autour duquel les mouvemens de la terre paroïtroient uniformes, & que la ligne totale AC , qui sert de base à l'équation du centre ou à l'angle CEA étoit au-dessous du centre B , ou de B en a ; c'étoit la première chose qu'il falloit discuter; & Képler reconnut bientôt la bisection de l'excentricité, c'est-à-dire, qu'il vit que le centre B du cercle décrit par la terre occupoit le milieu de l'excentricité totale CA , & qu'il étoit entre le point A où est le soleil & le point C , où il faudroit être pour appercevoir des mouvemens uniformes de la terre ou des angles égaux en temps égaux.

1208. Képler avoit essayé d'expliquer physiquement la cause de l'*Equant* (1204), la cause pour laquelle il y avoit un point C , (différent du centre B), autour duquel on avoit un mouvement régulier & uniforme, (*Myster. Cosmogr. c. 22*); c'est pourquoi il étoit porté d'avance à croire que la cause étoit générale, & que l'*Equant* devoit avoir lieu dans le mouvement de la terre autour du soleil, comme dans celui des autres planètes : Ptolomée & Copernic ne l'avoient point

Fig. 64.

Bisection de
l'excentricité.

employé, ils s'étoient contenté d'un simple excentrique, (865), mais Képler fut persuadé qu'ils avoient tort, sur-tout en 1598, lorsque Tycho lui eût écrit que l'orbe annuel, ou l'excentrique du soleil lui paroissoit n'être pas toujours de la même grandeur. En effet, quand Tycho supposoit le mouvement du soleil uniforme autour du centre B , & la terre en A , qu'ensuite il déterminoit l'excentricité par le moyen de l'équation de l'orbite AEC , qui lui faisoit trouver une excentricité AC , il prenoit le reste CD du diamètre total FD pour rayon du cercle, mais CD étoit différent du rayon BD qu'il avoit d'abord supposé; il devoit donc trouver les rayons de l'orbite solaire différens entre eux, & croire que le soleil n'étoit pas toujours à même distance par rapport au centre de l'excentrique; cela indiquoit à Képler que ce centre n'étoit pas le point autour duquel le mouvement régulier avoit lieu, (*de Stella Martis*, pag. 125). Ce fut pour s'en assurer que Képler rechercha par observation, quelle étoit la parallaxe annuelle de Mars (1141) dans deux positions de la terre diamétralement opposées, dans l'aphélie & le périhélie, ou à peu-près, en observant chaque fois Mars en quadrature vers le même point de son orbite.

Képler recherche l'excentricité du Soleil.

1209. Képler supposant d'abord, à l'exemple de Tycho, que l'orbite du soleil étoit un cercle dont le centre B étoit le point d'égalité, devoit nécessairement trouver ce cercle plus grand, ou plus petit, en le comparant aux autres planètes. Soit S le centre du soleil, (*fig. 65*), M le lieu de Mars dans son orbite, observé deux fois lorsque la terre étoit en D & en E , & Mars au même point M de son orbite, c'est-à-dire après la durée d'une révolution ou de plusieurs, (connue par les retours des oppositions); le point M étoit choisi de manière que les angles MCD & MCE étoient des angles droits; le point C étant celui autour duquel la terre devoit paroître se mouvoir uniformément. Tycho, à l'exemple de Ptolomée, supposoit que les mouvemens moyens du soleil décidoient seuls de la

Fig. 65.

Fig. 65.

seconde inégalité, qu'elle ne disparoïssoit que quand la planète étoit opposée au lieu moyen du soleil, & qu'elle étoit égale à égale distance entre la planète & le lieu moyen du soleil; ainsi CD & CE étant égales, comme Tycho-Brahé le pensoit, & les angles C étant droits, les angles DMC , CME , (que nous appellons les parallaxes annuelles de Mars), devoient être les mêmes, mais comme CE étoit véritablement plus grande que CD , parce que le point d'égalité n'est point en B , mais en C , l'angle CME se trouvoit être plus grand que l'angle CMD , & celui qui s'obstinoit à supposer toujours que le rayon BD du cercle étoit la base de cet angle-là, étoit réduit à dire que le rayon du cercle décrit par la terre, n'étoit pas toujours de la même grandeur; c'est ce que Tycho écrivoit à Képler, & ce qui persuada ce dernier qu'il falloit mettre en C , & non pas au centre B du cercle de la terre, le point d'égalité (1068, 1204. *Képler*, pag. 125).

1210. Képler soupçonna donc que cette variation dans la grandeur du rayon de l'excentrique de la terre, introduite par Tycho, provenoit de ce que le point d'égalité C , autour duquel on comptoit les angles de commutation, ne devoit pas être le centre du cercle. Pour s'en assurer il choisit deux observations, faites le 18 Mai 1585, & le 22 Janvier 1591; il les réduisit, (par le calcul des mouvemens de Mars, connus assez exactement pour un intervalle de quelques jours), au 30 Mai 1585, & 20 Janvier 1591, jours où la longitude de Mars calculée par Tycho, étoit également de $6^s 13^{\circ} 28'$, & où les angles de commutation MCD & MCE étoient l'un & l'autre de $64^{\circ} 23\frac{1}{2}'$; les longitudes de Mars, suivant l'observation, étoient $5^s 6^{\circ} 37'$ & $7^s 21^{\circ} 34'$; ainsi les parallaxes annuelles CMD , CME , ou les différences entre les longitudes héliocentriques calculées, & les longitudes géocentriques observées, étoient $36^{\circ} 51'$ dans la première, & $38^{\circ} 6'$ dans la seconde observation, (*Képler*, pag. 128). Ces parallaxes ainsi différentes de $1^{\circ} 15'$, quoique les anomalies

De la figure des Orbites planétaires: 9

malies de cominutation ou les angles MCT , & MCR , fussent égaux, prouvoient que la ligne CR étoit plus grande que CT , & CE plus grande que CD ; ainsi le point d'égalité, autour duquel les mouvemens de la terre sont sensiblement uniformes, & auquel se rapportoient les commutations égales MCE , MCD , suivant la méthode de Tycho, n'étoit pas le centre B de l'orbite terrestre, mais un point C placé de l'autre côté du centre.

1211. Képler trouva aussi, par le moyen des triangles TCM , KCM , ou des parallaxes de Mars que nous venons de rapporter, la distance BC de 1837 parties, dont le rayon BD étoit cent mille, (*Kepler*, pag. 130.) : or, Tycho avoit déterminé par beaucoup d'observations, que la distance totale CS du soleil au centre d'égalité, qui répond à l'équation du centre du soleil étoit de 3584; il vit donc bien que le centre du cercle décrit par la terre, étoit entre le soleil S & le point d'égalité C , puisqu'il venoit de trouver CB à peu-près égal à la moitié de CS .

C'étoit une découverte importante que d'avoir démontré ainsi la bisection de l'excentricité pour la terre, tandis que les anciens ne l'admettoient que pour les planètes supérieures; sans cela on ne pouvoit déterminer exactement les distances de la terre au soleil en différens temps de l'année, fondement essentiel de toutes les recherches suivantes.

Après avoir déterminé la position du centre d'égalité; (*Puncti æquantis*), pour l'orbite de la terre, Képler songea à le déterminer aussi pour l'orbite de Mars, c'est-à-dire à déterminer son excentricité: voici la méthode qu'il employoit; nous nous contenterons d'en donner une idée, le détail en seroit trop long; on pourra le voir dans l'ouvrage cité, où toutes ses tentatives, ses calculs, ses soupçons, ses erreurs, ses découvertes, sont expliqués fort au long.

1212. Soit B , (*fig. 66.*) le centre de l'excentrique de Mars, $HBAI$ la ligne des apsides, soit A le centre de Mars.

Fig. 66.

du soleil, & C le point autour duquel les mouvements de la planète seroient uniformes; F, G, D, E , quatre longitudes de Mars observées, lorsque cette planète étoit en opposition, & que la seconde inégalité étoit nulle; Képler se propose le problème suivant: trouver les angles FAH, FCH , tels que les quatre points F, G, D, E , soient dans un cercle, & que le centre B de ce cercle soit entre les points C & A , c'est-à-dire, l'angle BAD égal à l'angle CAD : Képler ne résolvoit le problème que par une double fausse position: il supposoit d'abord qu'on connoît la distance CA avec les angles FCH & FAH ; il calculoit par la Trigonométrie toutes les autres parties de la figure; pour savoir si à la fin du calcul les quatre angles formés en A se trouveroient égaux à 360° , & les trois points A, B, C , sur une même ligne; dans ce cas tout étoit connu; sinon il ne s'agissoit que de recommencer le calcul avec d'autres suppositions, (Képler; pag. 93).

Ses tenta-
tives.

I 2 I 3. Képler nous apprend, (pag. 95), qu'il fit de semblables calculs plus de 70 fois, avant de parvenir à reconnoître que le cercle ne pouvoit satisfaire seul aux observations. Après cela, dit-il, on ne s'étonnera pas que j'aie passé cinq ans à établir la théorie de Mars; & l'on me plaindra plutôt d'avoir supporté l'ennui d'un semblable travail: en effet, un seul exemple que rapporte Képler de cette méthode, remplit dix pages de calcul dans le volume *in-fol.* que nous venons de citer; il trouva par ce moyen un cercle qui approchoit assez des quatre observations.

L'hypothèse
circulaire
d'accord avec
les opposi-
tions.

I 2 I 4. Après avoir trouvé par-là toutes les dimensions de l'excentrique de Mars, Képler calcula dans cette hypothèse circulaire 12 oppositions de Mars observées par Tycho, & il n'en trouva aucune qui s'écartât de son calcul de plus de $1' \frac{3}{4}$. On s'étonnera, dit-il, qu'une hypothèse si bien d'accord avec les 12 oppositions, soit fautive; c'est cependant ce qu'il démontre ensuite, soit par les latitudes de Mars, soit par

les longitudes de cette planète observées dans d'autres situations : au reste, les observations de Tycho-Brahé étant nécessairement exposées à une erreur de 2', au jugement même de Képler, c'étoit véritablement les avoir représentées avec toute la perfection possible, que d'avoir évité des erreurs de 2', (Képler, pag. 110); ainsi les oppositions ne suffisoient pas pour reconnoître la figure de l'orbite de Mars. Le cercle excentrique par le moyen duquel Képler représentoit si bien les 12 oppositions, avoit pour excentricité totale $AC=18364$, mais AB étoit de 11332 & BC de 7232 seulement, en supposant la distance de la terre 100000.

1215. Cependant Képler étoit persuadé d'ailleurs que AB devoit être égal à BC , parce qu'il y entrevoit une cause physique; outre cela, l'hypothèse qui représentoit très-bien les longitudes de Mars en opposition, ne satisfaisoit ni aux latitudes observées en même temps, ni aux longitudes observées hors des oppositions, parce que les distances de Mars au soleil, comme AF , AE , étoient défectueuses dans l'hypothèse circulaire que Képler venoit d'examiner, quoique les angles ne le fussent pas; en supposant AB (*Excentricitas excentrici*), de 11332 & BC , (*Excentricitas æquantis*), de 7232. Les diamètres des épicycles dans la forme de Copernic & de Tycho, étoient suivant ses calculs de 3616 & 14948; celui-ci est égal à l'excentricité totale 18564 moins la moitié de la petite excentricité 7232, ou le milieu entre B & C , parce qu'il faut que les deux rayons d'épicycle fassent entre eux la plus grande excentricité possible. La parallaxe annuelle qui dépend de ces distances de Mars au soleil, étoit fautive, lorsque l'on faisoit $AB=BC$, comme paroissoient l'exiger ces autres observations, & l'erreur alloit quelquefois à 8', (pag. 114). Si Képler avoit regardé une erreur de 8' comme négligeable, il en seroit demeuré-là, ainsi qu'avoit fait Tycho-Brahé; mais persuadé que ces 8' d'erreur prouvoient la fausseté de l'hypothèse circulaire; il songea à s'assurer des distances de Mars au soleil,

Insuffisance
pour les dis-
tances.

& ce furent ces distances qui lui firent ensuite connoître que l'orbite de Mars n'étoit pas un cercle parfait (1219). Ces recherches forment la plus grande partie de son ouvrage *de Stella Martis* : nous ne faisons, pour ainsi dire, que l'histoire ou l'extrait de ce livre ; mais aussi ce livre seul contient le germe & les fondemens de toute l'astronomie ; notre objet ayant été de présenter la marche des Inventeurs & l'histoire de l'esprit humain ; nous suivons l'ouvrage où elles se trouvent totalement pour la partie & pour l'époque dont il s'agit.

1216. Képler avoit déterminé d'abord les distances de la terre au soleil (1211), il chercha ensuite les distances de Mars au soleil en trois points de son orbite ; avec ses longitudes vues du soleil, afin d'avoir non-seulement la figure, mais encore la grandeur de cette orbite ; nous allons rapporter sa méthode qui étoit très-bien imaginée, & très-propre à déterminer exactement ces distances. Keill attribue cette méthode à M. Halley, qui n'a vécu que long-temps après. (*Instit. astronom. pag. 515*).

Méthode
pour trouver
les distances
de Mars au
Soleil.

Planche VI.

Fig. 67.

Soit S , (*fig. 67.*) le centre du soleil, M celui de Mars, B, C , deux points de l'orbite terrestre où se soit trouvée la terre, lorsque Mars étoit au même point M de son orbite, & par conséquent à la même distance SM du soleil ; on connoît les deux positions de la terre, c'est-à-dire, ses longitudes & ses distances au soleil, il s'agit de trouver SM ; dans le triangle rectiligne BSC l'on connoît les deux côtés BS, SC , distances de la terre au soleil, & l'angle compris BSC , différence entre les deux longitudes de la terre en B & en C , l'on trouvera les angles BCS, CBS & le côté BC . L'angle MBS est la différence entre la longitude observée de Mars & celle du soleil, au temps de l'observation faite en B ; si l'on en retranche l'angle CBS que nous venons de trouver, on aura l'angle MBC ; si l'on ôte aussi l'angle BCS de l'angle MCS , on aura l'angle MCB ; ainsi dans le triangle MCB l'on connoît deux angles & le côté compris, on trouvera

aisément MB & MC ; enfin, dans le triangle MBS on connoît deux côtés MB , BS , avec l'angle compris MBS , on trouvera la distance MS , avec l'angle MSB qui étant ajouté à la longitude de la terre lorsqu'elle étoit en B , donnera la longitude héliocentrique de Mars, dans chacune des deux observations.

Képler avoit choisi cinq observations différentes qui comparées deux à deux, lui donnoient le même résultat pour la distance & pour la longitude héliocentrique de Mars, en un même point M de son orbite, (*de Stella Martis, cap. 28. pag. 157*).

1217. Képler, par un grand nombre d'observations de Tycho-Brahé, qu'il avoit discutées avec toute la constance & la sagacité possible, établit l'excentricité du soleil de 1800 pour un rayon de cent mille; par-là il étoit en état de trouver les distances de la terre au soleil SB , SC , pour un moment quelconque, aussi bien que l'angle CSB : mais pour en être encore plus assuré, il refit tous ses calculs dans différentes suppositions d'excentricité, & à chaque fois il prenoit cinq observations au lieu de trois, pour que l'accord de différens résultats lui fit mieux connoître le vrai; & c'est ainsi qu'après avoir discuté dans le plus grand détail une multitude d'observations, il s'arrêta à l'excentricité de 1800, & aux distances de Mars au soleil que nous rapporterons ci-après (1219). Les différentes parties de ces recherches se confirmoient réciproquement, & il ne pouvoit pas se faire que cinq positions de la terre donnassent toutes, deux à deux, le même résultat pour la distance SM de Mars au soleil, à moins que les distances SC & SB de la terre au soleil n'eussent été bien supposées.

1218. Cette méthode par laquelle Képler trouvoit les distances de Mars au soleil (1216), lui donnoit un moyen de trouver aussi l'excentricité de Mars: ayant déterminé deux distances de Mars, l'une aux environs de son aphélie, l'autre aux environs de son périhélie, il trouva la première de 166780, (en supposant tou-

jours de 100000 la distance moyenne du soleil à la terre), & l'autre de 138500; en sorte que la distance moyenne étoit de 152640 & l'excentricité de 14140, qu'il appelloit *Centrorum excentrici & Mundi distantia*, (Képler, pag. 209).

Les observations que Képler employa pour le périhélie, étoient du 1^r. Novembre 1589, du 26 Septembre 1591, & du 31 Juillet 1593. Lorsque ces observations ne se trouvoient pas avoir été faites précisément dans le même endroit de l'orbite de Mars, il y appliquoit les réductions nécessaires pour les faire toutes coïncider en un même point; mais ces réductions étant fort petites, il n'en résulloit aucune erreur.

1219. Képler détermina ainsi, par plusieurs Observations, trois distances de Mars au soleil AF, AE, AD , (fig. 66), indépendantes de toute supposition sur la théorie de Mars, il trouva aussi l'excentricité AB de 14140, par la comparaison des deux distances de Mars AH, AI , prises dans l'aphélie & dans le périhélie, indépendamment de toute hypothèse; enfin, il avoit déterminé la position de la ligne des apsides HI , par une méthode qui étoit également exacte, soit que l'orbite fût circulaire, soit qu'elle ne le fût pas: nous parlerons de cette méthode, art. 1280.

Supposant donc l'orbite circulaire on a le triangle ABF , dans lequel on connoît BF , avec l'excentricité AB & l'anomalie vraie BAF , il est aisé de trouver la distance vraie AF ; il en est de même des autres distances AE, AD . Voici les trois distances que Képler trouvoit dans cette supposition, (pag. 213.). 166605, 163883, 148539
Les distances observées. . . 166255, 163100, 147750
Ainsi l'erreur étoit. 350, 783, 789

1220. Les vraies distances de Mars au soleil étoient donc plus courtes que les distances calculées dans l'hypothèse circulaire, & cela d'autant plus qu'elles approchoient des côtés G & E de la figure. Cela prouvoit donc nécessairement que l'orbite étoit aplatie, ou rentrante

De la figure des Orbites planétaires. 15

par les côtés, c'est-à-dire, ovale, d'où suivoit évidemment la conclusion importante & fameuse que Képler en tira, & qui fut la première loi de Képler. *Itaque plane hoc est, orbita planetæ non est circulus, sed ingrediens ad latera utraque paulatim; iterumque ad circuli amplitudinem in perigeo exiens, cujusmodi figuram itineris ovalem appellant.* (cap. 44. pag. 213. in fine.).

Képler prouve que l'orbite de Mars est ovale.

Cette ovalité de l'orbite de Mars fit conclure bientôt à Képler que cette orbite étoit une véritable ellipse; car l'ellipse est de toutes les courbes alongées, ou ovales, la plus simple, & celle qui se présente la première; cela fut confirmé par l'examen des lieux de Mars observés dans toutes ses positions, qui se trouvèrent d'accord aussi bien que ses distances, avec les calculs faits dans l'ellipse ordinaire. Cette conclusion que Képler étendit ensuite à toutes les planètes dans ses tables Rudolphines, s'est trouvée dans toutes également exacte; elle s'est trouvée dans la suite être une conséquence nécessaire de l'attraction universelle, comme nous le dirons dans le XXII^e livre, en sorte qu'il a été reconnu pour règle générale, que les six planètes principales décrivent des ellipses dont le foyer est au centre du soleil.

Et ensuite que c'est une ellipse.

1221. Le reste du livre de Képler est employé à confirmer cette découverte par d'autres observations & par d'autres genres de preuves; à expliquer par des raisonnemens physiques la cause de cette ovalité, & à chercher les moyens de calculer l'équation dans une ellipse dont on connoîtroit l'anomalie moyenne. Nous ne suivrons pas l'auteur dans ces différentes tentatives, où l'on voit cependant briller le génie & l'imagination de l'auteur, mais il nous suffit d'avoir montré la route par laquelle il étoit arrivé à cette belle découverte.

On a dû remarquer avec quelle sagacité Képler avoit su diviser les questions, pour les résoudre chacune séparément, & choisir dans le nombre prodigieux d'observations que Tycho lui avoit fournies, celles qui décidoient un élément, c'est-à-dire, un des points de la question, indépendamment de tous les autres. Il avoit d'abord déterminé l'excentricité

Réflexions sur la marche de Képler.

de l'orbite terrestre (1209) par le moyen de deux observations de la longitude de Mars, faites dans le temps que cette planète étoit au même point de son orbite : cette excentricité le mettoit à portée de connoître les autres distances de la terre au soleil en différens points de son orbite. Connoissant les distances de la terre au soleil, il s'en étoit servi pour trouver celles de Mars au soleil, dans son aphélie & dans son périhélie ; ce qui donnoit directement l'excentricité de son orbite (1214) ; enfin, il compara trois autres distances de Mars au soleil, calculées dans un cercle dont l'excentricité étoit connue ; & les trouvant plus longues que les vraies distances observées, il en conclut que ces vraies distances appartenoient à une orbite plus étroite que le cercle (1220).

Képler avoit été long-temps à secouer le préjugé universel des orbes circulaires ; il s'accuse lui-même du temps considérable que lui avoit fait perdre cette fausse persuasion, fondée sur l'autorité générale de tous ceux qui l'avoient précédé, & sur les principes de cette métaphysique arbitraire dont on n'osoit s'écarter. *Primus meus error fuit viam planetæ perfectum esse circulum ; tantò nocentior temporis fur ; quantò erat ab autoritate omnium Philosophorum instructior ; & Metaphysicæ in specie convenientior, (cap. 40, p. 192).*

La découverte de Képler fut contestée & rejetée d'abord par beaucoup d'astronomes, comme l'avoit été le système de Copernic, & comme le fut ensuite l'attraction Newtonienne ; l'inertie de la matière semble donner aux hommes une certaine difficulté à s'élever à des idées nouvelles ; il n'y a que ceux qui ont de la jeunesse, du feu & de la curiosité, qui les examinent & les reçoivent, encore faut-il qu'ils n'ayent pas honte de s'instruire & de se réformer.

Après que l'orbite de Mars eût servi à trouver les dimensions de l'orbite terrestre, & la règle du mouvement planétaire, les mêmes élémens lui servirent à trouver ceux de toutes les autres planètes, il les trouva lui-même avec assez d'exactitude, au moyen des observations de Tycho ; & il s'en servit pour calculer ses tables Rudolphines.

1222. La méthode par laquelle Képler venoit de trouver les distances de Mars au soleil, soit dans l'aphélie, soit dans le périhélie (1216), lui servit à trouver les distances de toutes les autres planètes, & par conséquent l'excentricité de chacune, qui n'est autre chose que la moitié de la différence entre la plus grande & la plus petite distance; ces distances lui servirent à trouver la loi dont nous parlerons ci-après (1224), & cette règle a servi aux autres Astronomes pour trouver encore plus exactement ces distances; car les calculs en ont été faits plus d'une fois: les voici suivant les tables de M. Halley, & suivant mes nouveaux calculs, d'après les durées des révolutions qui sont dans la table de l'article 1161. Toutes ces distances supposent que celle du soleil soit de 100000, mais j'y ai ajouté des décimales, quand le calcul me les a données.

Tables des distances moyennes des Planètes au Soleil, suivant divers Auteurs.

PLANETES.	Distances moyen. suiv. Képler.	Suivant les Tab. carol. de Street.	Suivant M. Halley.	Selon mes Tables.	Logarithmes de ces distances.
Mercur.	38806	38710	38710	38709,88	9 5878218
Vénus.	72413	72333	72333	72333,24	9 8593379
La Terre.	100000	100000	100000	100000	0 0000000
Mars.	152349,5	152369	152369	152369,27	0 1828974
Jupiter.	520000	520110	520098	520097,91	0 7160851
Saturne.	951003,5	953800	954007	953936,83	0 9795196

1223 Les distances sont exprimées, suivant M. Halley, en parties, dont celle de la terre contient 100000; dans les miennes j'ai employé deux chiffres de plus pour une plus grande exactitude, c'est-à-dire, les dix millionnièmes de la distance moyenne du soleil; mais j'y ai ajouté les logarithmes par le moyen desquels j'ai trouvé les distances, qui supposent la distance moyenne du soleil égale à l'unité; car c'est sous cette forme-là qu'on les emploie souvent dans les calculs astronomiques. On trouvera les distances

de la lune dans le livre IX^e où il sera question des parallaxes.

Rapports
plus simples.

Les distances précédentes des planètes au soleil, en négligeant les quatre derniers chiffres, sont entre elles comme les nombres 4, 7, 10, 15, 52, 95 ; ce sont-là les nombres les plus simples qu'il y ait pour représenter les intervalles & les grandeurs des orbites planétaires, & nous nous en sommes déjà servi en expliquant la figure du système de Copernic (1082) : il est utile de se souvenir de ces six nombres dont on fait un fréquent usage dans l'astronomie. Les distances des planètes au soleil déterminées ainsi par Képler, au moyen des observations de Tycho, lui firent trouver la belle loi dont nous allons parler.

Les carrés des Temps périodiques sont comme les Cubes des distances.

1224. LA plus fameuse loi du mouvement des planètes découverte par Képler, est celle du rapport qu'il y a entre les grandeurs de leurs orbites, & le temps qu'elles emploient à les parcourir ; Jupiter est cinq fois plus éloigné du soleil que la terre, le contour de son orbite est cinq fois plus grand ; mais il met douze fois plus de temps que la terre à parcourir cette orbite qui est seulement cinq fois plus grande ; Képler chercha long-temps la cause de cette différence & la nature de ces rapports : il avoit d'abord voulu rapporter les distances des six planètes aux corps réguliers, le cube, le tétraèdre, l'octaèdre, le dodécaèdre, l'icosaèdre ; ensuite à l'harmonie des corps sonores : (Voy. *Mysterium Cosmographicum*, 1596, & *Harmonices Mundi*, 1619) ; mais il ne trouvoit aucun rapport satisfaisant entre les temps & les distances.

Ce fut le 8 Mars 1618 qu'il lui vint à l'esprit pour la première fois, de comparer les puissances des différens nombres, au lieu de comparer les nombres mêmes qui exprimoient les temps périodiques des planètes &

leurs distances ; il compara donc au hazard des carrés ; des cubes, &c. il essaya même les carrés des temps avec les cubes des distances ; mais trop de vivacité ou d'impatience l'égarâ dans quelque faute de calcul, il se trompa cette première fois ; il crut trouver que la règle n'avoit pas lieu, & rejetta cette proportion comme fausse & inutile. Ce ne fut que le 15 de Mai suivant qu'il revint à cette idée, en recommençant les mêmes essais & les mêmes comparaisons ; il calcula mieux, & il les trouva parfaitement d'accord ; alors enfin il reconnut qu'il y avoit réellement toujours un rapport égal & constant entre les carrés des temps périodiques de deux planètes quelconques, & les cubes de leurs distances moyennes au soleil : il fut si enchanté de cette découverte, qu'à peine il se fioit à ses calculs ; il crut se faire illusion & avoir supposé ce qu'il falloit chercher ; il n'osoit qu'à peine se persuader qu'il eût enfin trouvé une vérité cherchée pendant 17 ans : *Tantâ comprobatione & laboris mei septendecennalis in observationibus Braheanis, & meditationis hujus in unum conspirantium, ut somnare me & præsumere quæsitum inter principia primò crederem*, (Harmonices, liv. V. pag. 189). Qu'auroit-il dit, s'il eût pu prévoir les conséquences admirables qu'on a su tirer de cette loi ? comme nous le dirons dans le XXII^e livre.

Cette loi fut trouvée le 15 Mai 1618.

1225. La distance de la terre au soleil est à celle de Jupiter au soleil, comme 10 est à 52 ; leurs cubes sont par conséquent comme 10 à 1406, ou comme 1 est à 140,6 ; or, les durées de leurs révolutions sont de $365\frac{1}{4}$ & de $4332\frac{1}{3}$ jours, dont les carrés en négligeant les derniers chiffres, sont encore comme 1 est à $140\frac{2}{3}$; ainsi les carrés des temps périodiques sont entre eux comme 1 est à 140,6 ; donc, le rapport est le même de part & d'autre ; le carré du temps périodique de Jupiter est 140 fois plus grand que le carré du temps périodique de la terre, & le cube de la distance moyenne de Jupiter au soleil est 140 fois plus grand que le cube de la distance moyenne de la terre,

Exemple de cette loi.

c'est en quoi consiste l'égalité des rapports. Si l'on prend plus exactement les révolutions fyérales (1161) & les distances (1222), on aura 140,6874 pour le nombre exact qui exprime combien le carré de la révolution de Jupiter, & le cube de sa distance contiennent ceux de la terre. On verra dans le XVIII^e livre que cette loi se vérifie également quand on compare les distances des fatellites de Jupiter & de Saturne avec les durées de leurs révolutions, & l'on verra dans le livre XXII^e où nous traiterons de l'attraction, que de cette loi donnée par observation il s'ensuivoit nécessairement que la force centrale, ou la gravité des planètes vers le soleil étoit en raison inverse du carré de la distance, c'est-à-dire, la plus belle découverte de Newton, qui dut sans doute son origine à celle de Képler.

Je me suis servi de cette loi pour trouver les distances moyennes des planètes qui sont dans la table de l'article 1222; en divisant le carré du mouvement séculaire total du soleil, relativement aux étoiles, ou de 129597736'' par le carré du mouvement séculaire de chaque planète (1161), & prenant la racine cube du quotient: on doit employer les mouvement séculaires plutôt que les temps des révolutions, parce que c'est le mouvement qui est donné immédiatement par les observations, & duquel on déduit les périodes; & il est bon de remonter à la source des données, toutes les fois qu'on a de nouvelles conséquences à en tirer.

Les Aires sont proportionnelles au Temps.

1226. Cette loi générale du mouvement des planètes devenue si importante dans l'astronomie, savoir, que les aires sont proportionnelles au temps, est encore une des découvertes de Képler; & c'est ce qu'on appelle la troisieme loi de Képler; cependant il ne démontrait cette vérité que d'une manière incomplète; Newton a été le premier qui ait fait voir qu'elle étoit une

suite nécessaire & exacte des loix générales du mouvement.

Képler étoit persuadé que le mouvement circulaire des planètes étoit produit par une certaine force émanée du soleil, qui les forçoit à tourner autour de l'axe du soleil, comme il y tournoit lui-même. Il considéroit que puisque les planètes les plus éloignées tournoient plus lentement que les planètes les plus proches du soleil; il falloit que la force motrice fût plus petite à une plus grande distance, & cela le conduisit à établir non-seulement la force d'inertie, dont il a parlé le premier, mais encore la règle des aires proportionnelles aux temps.

1227. Képler démontre d'abord à la page 165 de sa nouvelle physique céleste, que le mouvement des planètes dans les apsides est proportionnel à leur distance au soleil, même dans l'hypothèse de Ptolomée (1204), c'est-à-dire, qu'en prenant un arc de l'excentrique vers l'aphélie, & un autre arc de même longueur vers le périhélie, la planète est plus long-temps dans l'arc aphélie, à proportion que la distance aphélie est plus grande; ou, ce qui revient au même, que les aires décrites dans le même temps sont égales.

Soit E (fig. 68.) le point autour duquel le mouvement est supposé uniforme (1204), S le centre du soleil à même distance du centre C que le point E ; ayant tiré deux lignes MEO , NEP , l'arc MN & l'arc OP sont parcourus dans le même temps suivant cette hypothèse, puisque les angles en E sont égaux; si du point S on tire les lignes SO , SP , & les lignes SN , SM ; je dis qu'elles formeront des secteurs égaux OSP , NSM : en effet, $MN:OP::ER:EQ$, donc $MN.EQ=OP.ER$; mais $EQ=SR$ & $ER=SQ$; donc $MN.SR=OP.SQ$; donc le secteur SNM est égal au secteur OSP : donc dans l'hypothèse même des anciens si l'on prend deux arcs MN & OP , décrits par une planète dans des temps égaux, on aura au point S des aires égales.

Démonstration de Képler.

Fig. 68.

1228. De ce que la planète emploie plus de temps

dans son aphélie à parcourir un même arc, Képler conclut en général, (*page 168*), que plus la planète est éloignée du centre du soleil, plus elle est faiblement animée par la force motrice qui la fait tourner autour du soleil. Après cela il applique cette égalité des aires, (*cap. 40.*) au calcul de l'équation; enfin, il observe que les surfaces des secteurs doivent exprimer les anomalies moyennes: en effet, la demeure d'une planète dans chacun des arcs égaux de l'excentrique, étant toujours proportionnelle à la distance de la planète; si l'on peut avoir la somme de toutes les distances, on aura la somme de toutes les demeures, ou le temps employé à parcourir un arc quelconque, de quelque grandeur qu'il soit: or la somme de toutes les distances est visiblement la surface entière du secteur décrit par la planète; ainsi l'aire du secteur représentera l'anomalie moyenne, qui est proportionnelle au temps.

1229. Lorsque Képler, (*cap. 46 & 47. pag. 219 & 223*), passe à la considération des orbes elliptiques, il transporte à l'ellipse cette propriété qu'il n'avoit démontrée que pour le cercle excentrique, sans y employer de nouvelle démonstration; ainsi la loi des aires proportionnelles au temps n'étoit démontrée qu'imparfaitement, elle ne pouvoit passer jusqu'alors que comme une approximation commode, facile dans la pratique, & justifiée par l'accord du calcul avec l'observation.

Mais lorsqu'on considère les orbites planétaires comme formées par le concours de deux forces & de deux directions différentes, dont l'une est de sa nature uniforme & constante, dès-lors les aires deviennent nécessairement & rigoureusement proportionnelles aux temps, comme nous le démontrerons bientôt (1233).

1230. On prouve très-bien aujourd'hui, par l'observation des diamètres du soleil, que les aires sont proportionnelles aux temps vers les apsides, ou, ce qui revient au même, que le mouvement du soleil est d'autant plus lent qu'il est plus éloigné de la terre. Le diamètre du soleil est de 31' 31" en été, & de 32' 36" en hyver;

suivant mes observations ; cela prouve que la distance du soleil en hyver est à sa distance en été, comme $31' 31''$ est à $32' 36''$; car les grandeurs apparentes d'un objet éloigné sont en raison inverse de ses distances (1384) : le mouvement horaire du soleil en hyver est de $2' 33''$; or $32' 36'' : 31' 31'' :: 2' 33'' : 2' 28''$; ainsi le mouvement horaire du soleil devrait être de $2' 28''$ en été, si ce mouvement horaire étoit en lui-même constant & uniforme, & que ses différences ne dépendissent que de l'éloignement du soleil ; cependant, par l'observation, ce mouvement horaire ne se trouve que de $2' 23''$; il est plus petit qu'il ne devrait être dans cette supposition : donc, outre les $5''$ de différence qu'il doit y avoir entre les mouvemens horaires du soleil en été & en hyver à cause de ses différentes distances, il y a encore une différence réelle de $5''$, qui ne provient pas des distances, mais qui est un ralentissement véritable dans le mouvement apparent du soleil ; donc, le mouvement réel de la terre est effectivement plus lent dans l'aphélie que dans le périhélie. On voit même qu'il est en raison inverse des distances, puisque l'on trouve $2' 23''$, au lieu de $2' 28''$ qu'il y auroit, en supposant le mouvement uniforme, c'est-à-dire, $5''$ pour l'excès du mouvement horaire en hyver sur le mouvement en été, indépendamment des $5''$ qu'il doit y avoir ; à raison de la distance du soleil qui est moindre en hyver ; or $2' 23''$ est à $2' 28''$, comme $31' 31''$ est à $32' 36''$, c'est-à-dire, comme le diamètre en été est au diamètre en hyver, ou comme la distance en hyver est à la distance en été ; donc le mouvement du soleil en été est au mouvement qu'il paroît avoir s'il alloit toujours uniformément, en raison inverse de sa distance.

La loi des aires proportionnelles au temps ayant été démontrée par Képler pour le cas de l'aphélie & du périhélie, & se trouvant vérifiée d'ailleurs par un accord général entre les observations & le calcul tiré de cette loi, nous pourrions la regarder comme prouvée astronomiquement, n'ayant pas encore traité des causes qui doivent produire cette loi ; cependant nous allons

démontrer en peu de mots, 1°. que les planètes tournent autour du soleil en vertu d'une force centrale ou attractive, dirigée au foyer de l'ellipse; 2°. que cette force une fois supposée, il s'enfuit que les aires sont proportionnelles au temps; ce sera une connoissance élémentaire qui préparera le lecteur à la physique céleste, dont nous traiterons dans le XXII^e livre.

Première
loi du mou-
vement.

Fig. 69.

I 2 3 1. C'est la première loi du mouvement prouvée par l'expérience, & admise par tous les mathématiciens, qu'un corps ayant parcouru une ligne droite uniformément dans l'espace d'une minute, parcourroit une autre ligne droite sur la même direction dans la minute suivante, si rien ne s'y oppoisoit; ainsi la planète P (fig. 69), ayant été une seule fois uniformément de P en Q sur la ligne droite PQ , elle continueroit à se mouvoir de Q en F sur la même direction PQF , en parcourant un espace QF égal à PQ uniformément, & dans le même espace de temps: cependant les planètes décrivent des ellipses, & non pas des lignes droites, elles courbent sans cesse leur route du côté du soleil, & reviennent après une révolution reprendre la même route à la même distance du soleil; il y a donc dans le soleil une force capable de détourner à chaque instant une planète de la ligne droite qu'elle venoit de décrire l'instant précédent. Nous examinerons la mesure & la quantité de cette force dans le XXII^e livre, où nous traiterons de l'attraction; il nous suffit ici de faire voir que cette force centrale existe, puisque sans elle les planètes ne pourroient décrire que des lignes droites, & jamais ne reviendroient aux mêmes lieux, comme elles le font, en décrivant sans cesse une courbe qui environne le soleil.

Existence
d'une force
centrale.

Seconde
loi du mou-
vement.

I 2 3 2. La seconde loi du mouvement que je suppose encore connue & démontrée, parce qu'elle se trouve dans tous les livres de mécanique, ou de dynamique, est celle-ci: un corps poussé à la fois par deux forces différentes, dont les directions font un angle, & dont chacune pourroit lui faire parcourir en une minute un des côtés d'un parallélogramme, en décrira la diagonale dans la même minute. La planète arrivée en Q est poussée vers

le soleil, suivant la direction QS , avec une force qui seule feroit capable de lui faire parcourir en une minute la ligne droite QG , tandis qu'au même instant elle est sollicitée à parcourir en une minute une ligne QF égale à PQ , en vertu de la première loi du mouvement (1231); si sur les lignes QG & QF on forme un parallélogramme $GQFR$, la planète parcourra la diagonale QR dans la même minute. Il ne faut que ces trois principes pour démontrer que la loi des aires proportionnelles au temps, doit avoir lieu dans tous les cas; nous allons faire cette démonstration à peu près comme Newton, (*Philosophiæ natur. principia mathemat. l. I. sec. II. prop. 1*).

1233. Considérons une planète en un point quelconque Q de son orbite, venant de parcourir l'instant d'auparavant une très-petite portion PQ de cette orbite, que je considère comme une ligne droite; la planète parvenue de P en Q , & le rayon de son orbite ayant passé de SP en SQ , a décrit l'aire SPQ en une minute de temps; je dis que dans la minute suivante elle décrira une aire SQR égale à l'aire SPQ , ou un triangle égal en surface à SPQ , en sorte que l'aire décrite par le rayon vecteur, sera égale en temps égal. En effet, si la planète livrée à elle-même, eût continué à se mouvoir de Q en F , en vertu de la première loi du mouvement (1231), elle auroit décrit une aire QSF égale à l'aire PSQ , parce que ces deux triangles sont égaux, ayant des bases égales PQ & QF , & pour hauteur commune la perpendiculaire abaissée du point S sur la direction FQP , prolongée au-dehors: mais à cause de la force centrale qui attire la planète vers le soleil, ce sera l'aire QSR , (à la place de l'aire QSF), qui sera décrite par la planète; or, les triangles QSR , QSF , sont encore égaux, parce qu'ils ont la même base QS , & sont compris entre les mêmes parallèles FR & QS ; donc l'aire QSR est aussi égale à l'aire PSQ : ainsi il est démontré que la petite aire décrite dans la première minute, est égale à la petite aire décrite dans la minute suivante;

Démonstration de la loi des Aires proportionnelles.

Fig. 69.

& procédant ainsi de minute en minute dans toute la durée de la révolution, on démontreroit avec la même facilité que la même planète décrira éternellement la même aire dans le même temps, à quelque distance du soleil qu'elle parvienne, tant qu'il ne surviendra pas une force étrangère qui puisse troubler l'égalité entre QF & PQ , c'est-à-dire, entre la ligne qu'une planète vient de parcourir, & celle qu'elle tend à parcourir dans la minute suivante.

Ainsi la loi des aires proportionnelles aux temps est prouvée non-seulement par l'observation, c'est-à-dire, par l'accord général des calculs fondés sur cette loi, avec les observations, mais encore par la nature même des deux forces qui animent les planètes : nous allons donc passer au calcul du mouvement des planètes dans les orbites elliptiques, pour être en état d'assigner en tout temps le point de son orbite où une planète doit se trouver en vertu de la loi précédente.

On a appelé *Loi de Kepler* cette règle des aires proportionnelles aux temps, aussi bien que celles des articles 1220 & 1224, du nom de ce célèbre inventeur ; mais il n'eut pas la satisfaction de voir leur connexion & leur dépendance essentielle d'une autre loi plus générale, cela étoit réservé à Newton, dans la découverte de l'attraction universelle, comme on le verra dans le livre XXII.

THÉORIE DU MOUVEMENT ELLIPTIQUE des Planètes autour du Soleil.

Rayon
vecteur.

Fig. 70.

1234. DÉFINITIONS. Le *rayon vecteur* d'une planète est la ligne tirée du centre du soleil au centre de la planète, ou la distance de la planète au foyer de son ellipse. Soit $AMDP$ (Fig. 70.), l'orbite elliptique d'une planète décrite autour du foyer S , où est placé le soleil (1220), M le lieu actuel d'une planète pour

un instant donné, la ligne SM fera le rayon vecteur.

Fig. 70.
Aphélie.

La ligne des apsides, ^(a) ou le grand axe de l'ellipse marque l'aphélie & le périhélie de la planète (864) : l'APHÉLIE, ou l'apside supérieure, est le point de l'orbite où la planète est la plus éloignée du soleil ; tel est le sommet A du grand axe AP , le plus éloigné du foyer S . Le PÉRIHÉLIE, ou l'apside inférieure, est le point de l'orbite où la planète est la plus proche du soleil ; telle est l'extrémité inférieure P du grand axe AP , la plus voisine du foyer S où réside le soleil.

L'ANOMALIE en général est la distance d'une planète à son aphélie ; mais il y a plusieurs manières de mesurer cette distance.

L'ANOMALIE VRAIE est l'angle formé au foyer de l'ellipse par le rayon vecteur & par la ligne des apsides ; tel est l'angle ASM formé par le grand axe AS & par le rayon vecteur SM .

Anomalie vraie.

L'ANOMALIE EXCENTRIQUE est l'angle formé au centre de l'ellipse, par le grand axe & par le rayon d'un cercle circonscrit, mené à l'extrémité de l'ordonnée qui passe par le lieu vrai de la planète. Ainsi ayant décrit un cercle ANP sur le grand axe AP de l'orbite, comme diamètre, on tirera l'ordonnée RMN par le point M , où est supposée la planète, & à l'extrémité N de cette ordonnée on mènera le rayon CN , c'est celui qui déterminera l'anomalie excentrique AN ou ACN .

Anomalie excentrique.

L'ANOMALIE MOYENNE est la distance à l'aphélie, supposée proportionnelle au temps ; c'est celle qui augmente uniformément & également depuis l'aphélie jusqu'à la périhélie ; ainsi une planète qui emploieroit six mois à aller de A en P , auroit à la fin du premier mois 30 degrés d'anomalie moyenne, 60 degrés à la fin du second ; & ainsi de suite, en augmentant toujours proportionnellement au temps. Si l'on prend une ligne CX

Anomalie moyenne.

(a) Nous avons donné l'étymologie de ces noms (864). Il y a des auteurs qui écrivent *Apsides*, tels sont Riccioli, Sethward, &c. mais l'étymologie fait que l'on écrit plus communément *Apsides*.

Fig. 70.

pour marquer l'anomalie moyenne, en supposant que cette ligne tourne uniformément autour du centre C , la ligne CX sera d'abord plus avancée que la ligne CN ; parce que AN croit plus lentement vers l'aphélie où le mouvement de la planète est moindre que le mouvement moyen, & cet avancement augmentera tant que la vitesse de la planète sera moindre que sa vitesse moyenne; ensuite le point N se rapprochera du point X , jusqu'à ce qu'au périhélie P ils se réunissent ensemble; là les trois anomalies se confondent, & sont également de 180 degrés.

La différence entre l'anomalie vraie, & l'anomalie moyenne forme l'équation de l'orbite ou l'équation du centre.

1235. Puisque l'anomalie moyenne est proportionnelle au temps, & qu'elle est une portion du temps de la révolution, elle peut être mesurée par toute quantité qui aura un progrès uniforme: ainsi non-seulement l'arc AX , l'angle ACX , & le secteur ou l'aire circulaire ACX peuvent s'appeller *Anomalie moyenne*, mais encore le secteur elliptique, ou l'aire ASM , formée par le rayon vecteur SM , le grand axe SA & l'arc d'ellipse AM : en effet, les aires décrites par le rayon vecteur SM , étant proportionnelles aux temps (1226), le secteur AMS fera la sixième partie de la surface elliptique $AMDPA$ au bout du premier mois, (dans la supposition de l'article précédent) il en fera par conséquent le tiers au bout de deux mois, & toujours ainsi uniformément; en sorte que la surface, ou l'aire elliptique sera la quantité proportionnelle au temps, une fraction égale à la fraction du temps, ou à l'anomalie moyenne: ainsi l'on pourra dire à la fin du premier mois, que l'anomalie moyenne est 30 degrés, ou, en général, qu'elle est un douzième; car alors les 30 degrés sont la douzième partie du ciel, l'arc sera la douzième partie du cercle, le temps employé à le parcourir sera la douzième partie du temps de la révolution entière; & enfin l'aire AMS sera la douzième partie de l'aire entière de

l'ellipse ; mais ordinairement c'est en degrés que nous exprimons l'anomalie moyenne.

Fig. 70.

1236. Képler ayant trouvé que les planètes décrivoient des ellipses avec des aires proportionnelles au temps, il ne lui restoit plus que d'en conclure le vrai lieu d'une planète pour un temps donné. Lorsqu'on connoît la durée de la révolution de la planète, par exemple, celle de Mercure, qui est de 86 jours ; & qu'on demande le lieu de Mercure au bout de deux jours, c'est-à-dire, de la 43^e . partie de sa révolution, on fait dès lors que l'aire du secteur ASM compris entre l'aphélie & le rayon vecteur SM , est la 43^e . partie de la surface de l'ellipse ; cette portion du temps, ou cette portion de l'ellipse est proprement l'*anomalie moyenne*, que l'on peut aussi exprimer en degrés, en prenant la 43^e . partie des 360 degrés ou du cercle entier : car on a vu que nous pouvons appeller indifféremment *anomalie moyenne*, une portion du temps, une portion de l'ellipse, une portion de la circonférence du cercle ; c'est toujours une fraction qui est donnée, quand on cherche le lieu d'une planète, mais c'est en degrés que nous la prendrons ci-après, pour suivre la forme usitée dans les tables astronomiques, où toutes les anomalies & toutes les équations s'expriment en degrés, minutes & secondes.

On connoît toujours l'Anomalie moyenne.

1237. Lorsqu'on connoît l'anomalie moyenne, ou la surface du secteur AMS , il s'agit de trouver l'anomalie vraie, ou l'angle ASM de ce secteur. Képler sentit bien la difficulté de ce problème : *étant donnée l'anomalie moyenne, trouver l'anomalie vraie*, même dans un cercle, car la difficulté est à peu-près la même que dans l'ellipse ; il se contenta d'inviter les géomètres à en chercher la solution, sans espérer qu'on la pût trouver d'une manière directe, parce qu'elle suppose connu le rapport entre les arcs & leurs sinus, qui n'est donné que par approximation : voici comment il s'exprime au sujet de ce fameux problème, qui a toujours été appelé depuis *Problème de Képler*, parce qu'en effet il le proposa le premier, & en donna même une solution approchée.

Problème de Képler.

Fig. 70.

Hæc est mea sententia : quæ quominus habere videbitur geometricæ pulchritudinis, hoc magis adhortor geometras ut mihi solvant hoc problema : DATA areâ partis semicirculi, datoque puncto diametri, invenire arcum & angulum ad illud punctum : cujus anguli cruribus & quo arcu data area comprehenditur : vel aream semicirculi ex quocumque puncto diametri in datâ ratione secare. Mihi sufficit credere solvi à priori non posse propter arcus & sinus ἑτεροζέveisιν. (pag. 300). C'est par-là que Képler termine ses recherches ; le problème dont il désespéroit alors, est encore aujourd'hui désespéré, mais nous le résoudreons par approximation (1247).

1238. La première chose que nous ferons pour simplifier ces recherches, sera de renverser la question, & de supposer connue l'anomalie vraie pour en déduire l'anomalie moyenne ; cette méthode sera plus courte, souvent plus exacte, & tiendra toujours lieu dans la pratique, de la méthode directe, que nous expliquerons cependant à son tour, (1247). Cette méthode indirecte a été employée avec succès par M. l'Abbé de la Caille dans ses recherches sur le Soleil ; elle est fondée sur les deux théorèmes suivans, que nous allons démontrer d'une manière très-simple, en supposant quelques propositions des Sections Coniques, ou de la Trigonométrie, qui seront démontrées à leur place dans les livres XXI. & XXIII.

1239. LEMME. Dans une ellipse AMP, à laquelle on a circonscrit un cercle ANP ; CX étant la ligne de l'anomalie moyenne (1234), M le vrai lieu de la planète, RMN l'ordonnée qui passe par le lieu de la planète ; le secteur circulaire ANSA est toujours égal au secteur circulaire ACX de l'anomalie moyenne.

DÉMONSTRATION. Soit T le temps entier de la révolution de la planète, & t le temps qu'elle a employé à aller de A en M, on aura par la règle des aires proportionnelles aux temps, t est à T comme le secteur AMS est à la surface de l'ellipse : de même, puisque ACX est l'anomalie moyenne, on aura t est à T comme

ACX est à la surface du cercle ; donc AMS est à ACX comme la surface de l'ellipse est à la surface du cercle. Mais par la propriété de l'ellipse, (liv. XXI), AMS est à ANS , comme la surface de l'ellipse est à la surface du cercle ; nous avons donc deux proportions qui ont trois termes communs, savoir AMS , la surface de l'ellipse & la surface du cercle ; le terme qui paroît différent est donc nécessairement le même ; donc ACX & ANS sont égaux entre eux. C. Q. F. D.

1240. LA RACINE CARRÉE de la distance périhélie est à la racine carrée de la distance aphélie, comme la tangente de la moitié de l'anomalie vraie est à la tangente de la moitié de l'anomalie excentrique. Théorème premier.

DÉMONSTRATION. C'est une propriété des triangles rectangles, tels que RSM , dont on trouvera la démonstration dans le XXIII^e livre, que la tangente de la moitié de l'angle RSM est égale au côté opposé RM , divisé par la somme des deux autres côtés SR ; SM ; ainsi dans les triangles rectangles MSR & NCR on a cette proportion : $\text{tang. } \frac{1}{2} MSR : \text{tang. } \frac{1}{2} NCR :: \frac{RM}{SR+SM} : \frac{RN}{CR+CN}$; si l'on met à la place du rapport de RM à RN celui de CD à CA qui lui est égal par la propriété de l'ellipse, & à la place de $SR+SM$ la valeur $PR \cdot \frac{SA}{CA}$, (voy. liv. XXI) ; & enfin PR à la place de $CR+CN$, on changera la proportion en celle-ci : $\text{tang. } \frac{1}{2} MSR : \text{tang. } \frac{1}{2} NCR :: \frac{CD \cdot CA}{PR \cdot SA} : \frac{CA}{PR} :: CD : SA$; & nommant a le demi-axe de l'ellipse, & e l'excentricité CS , on aura $T. \frac{1}{2} MSR : \text{tang. } \frac{1}{2} NCR :: CD : SA :: \sqrt{a-a-ee} : a+e$; on divisera les deux derniers termes par $\sqrt{a+e}$, & l'on aura $T. \frac{1}{2} MSR : T. \frac{1}{2} NCR :: \sqrt{a-e} : \sqrt{a+e}$, :: $\sqrt{PS} : \sqrt{SA}$: donc la tangente de la moitié de l'anomalie vraie ASM est à la tangente de la moitié de l'anomalie excentrique ACN , comme la racine carrée de la distance périhélie PS est à celle de la distance aphélie AS . C. Q. F. D.

Fig. 70.
Théorème
second.

1241. LA DIFFÉRENCE entre l'anomalie excentrique & l'anomalie moyenne est égale au produit de l'excentricité par le sinus de l'anomalie excentrique.

DÉMONSTRATION. Le secteur circulaire $ANSA$ est égal au secteur de l'anomalie moyenne ACX (1239); si l'on ôte de tous deux la partie commune ACN , on aura le secteur NCX égal au triangle CNS . La surface du secteur circulaire NCX est égale au produit de CN par la moitié de l'arc NX ; la surface du triangle CNS est égale au produit de CN par la moitié de la hauteur SI , qui est une perpendiculaire abaissée du foyer S sur la base NC , prolongée au-delà du centre C ; ainsi les deux surfaces étant égales, & ayant un des produits CN qui est commun à toutes deux, les autres produits sont aussi égaux; donc l'arc NX est égal à la ligne droite ST ; mais dans le triangle STC , rectangle en T l'on a $ST = CS. \sin. TCS$, par les règles de la Trigonométrie rectiligne; donc $NX = CS. \sin. TCS = CS. \sin. ACN$; donc la différence NX entre l'anomalie excentrique AN & l'anomalie moyenne AX , est égale au produit de l'excentricité CS par le sinus de l'anomalie excentrique ACN . C. Q. F. D.

1242. C'est en minutes & secondes qu'on a coutume d'exprimer toutes les anomalies des planètes; ainsi pour trouver la différence en secondes entre l'anomalie moyenne & l'anomalie excentrique, il faut que l'excentricité soit aussi exprimée en secondes; si l'excentricité de la planète est exprimée en parties de même espèce que la distance moyenne, on dira la distance moyenne est à l'excentricité, comme le nombre de secondes que contient le rayon d'un cercle, 206264'' 8. ou environ 57° est au nombre de secondes que l'excentricité contient. Si cette excentricité est donnée en fraction de la distance moyenne de cette même planète; comme nous la donnerons à l'art. 1278, il suffira de la multiplier par les 206264'', qui font l'arc de 57° égal au rayon, pour avoir cette excentricité en secondes; le logarithme de ce nombre de secondes est

5,3144251,

5,3144251, l'on ajoutera ce logarithme constant avec celui de l'excentricité de la planète exprimée en parties ou en fraction de la distance moyenne (1278), & l'on aura le logarithme de cette excentricité en secondes.

Pour sentir la raison de cette multiplication par 57° ; ou par $206264''$, supposons que l'excentricité fût la deux cent millieme partie du rayon ou de la distance moyenne, il est évident que puisqu'il y a deux cent mille secondes dans un arc égal au rayon, l'excentricité vaudroit une seconde; supposons qu'elle fût la moitié du rayon, ou $\frac{1}{2}$; elle vaudroit la moitié de $206264''$, ou $103132''$, c'est-à-dire, qu'en multipliant cette excentricité $\frac{1}{2}$ par 206264 , on auroit le nombre de secondes que l'excentricité contient; & cela se comprendra de même de tous les autres cas; puisque l'unité est à la fraction qui exprime l'excentricité en parties du rayon, comme $206264''$ sont à l'excentricité réduite en secondes, il est évident qu'en multipliant la fraction, qui contient l'excentricité en parties du rayon, par $206264''$, on aura l'excentricité en secondes. Il en est de même de toutes les quantités qu'on trouve dans les calculs, exprimées en parties du rayon; lorsqu'on les veut avoir en secondes, on les multiplie par $206264''$, ou l'on ajoute à leur logarithme le logarithme constant 5,3144251. C'est le contraire si l'on a des arcs en secondes, & qu'on veuille les réduire en décimales du rayon; nous avons déjà fait usage de cette remarque (1133), nous le ferons encore plus souvent dans la suite, & nous en expliquerons le fondement plus en détail à la fin du livre XXI^e.

Exprimer
en secondes
les décimales
du Rayon.

1243. On verra bientôt l'application de ces deux théorèmes avec un exemple (art. 1244); mais pour plus de facilité, nous donnerons dans la table suivante pour chaque planète, les deux logarithmes constans qui servent pour les proportions contenues dans ces deux théorèmes: le premier pour l'anomalie excentrique est la moitié de la différence entre le logarithme de la distance aphélie & celui de la distance périhélie, il s'ajoute avec le logarithme de la tangente de la moitié

de l'anomalie vraie, pour avoir celui de la tangente de la moitié de l'anomalie excentrique. Le second logarithme est pour trouver l'anomalie moyenne : c'est la somme du logarithme de l'excentricité (1278) & du logarithme de 57° ; on ajoute ce logarithme constant avec celui du sinus de l'anomalie excentrique, pour avoir celui de la différence qu'il y a entre l'anomalie excentrique & l'anomalie moyenne : enfin, nous avons joint à la même table le logarithme de la moitié du petit axe, pour servir à trouver la distance (1245). Ce logarithme est la demi-somme de ceux de la distance aphélie & de la distance périhélie.

J'ai ajouté dans la table suivante les logarithmes constants pour l'orbite de la lune, en supposant sa moyenne distance égale à l'unité, & son excentricité $0,05505$, qui donne pour la plus grande équation $6^{\circ} 18' 18'' 4$ (1278) ; c'est ainsi que M. Halley supposoit la quantité moyenne de l'équation, comme on le verra dans le livre VII^e.

Logarithmes constants d'après les Tables de HALLEY.

PLANETES.	1 ^{er} . Logarithme constant pour l'anomalie excentrique.	2 ^{eme} . Logarithme constant pour l'anomalie moyenne.	Logarithme du demi-axe conjugué, pour la distance.
Mercure,	0 0907135	4 6280602	4 5784175
Vénus,	0 0030320	3 1583660	4 8593270
Le Soleil,	0 0072975	3 5397344	4 9999385
Mars,	0 0405055	4 2828983	5 1810105
Jupiter,	0 0209575	3 9976434	5 7155795
Saturne,	0 0247830	4 0703245	5 9788450
La Lune,	0 0239391	4 0551824	9 9993409

1244. EXEMPLE. Je suppose qu'on connoisse l'anomalie vraie de Mars $1^{\text{s}} 0^{\circ} 8' 40''$, & qu'on veuille la convertir en anomalie moyenne, le logarithme de la

distance aphélie , suivant les tables de M. Halley , est 5 , 221516 , le logarithme de la distance périhélie 5 , 140505 ; comme il est aisé de le trouver par les distances moyennes (1222) , & les excentricités (1278) ; la moitié de la différence de ces deux logarithmes est 0 , 0405055 , c'est le logarithme constant pour la première analogie. Les distances qui répondent aux deux logarithmes des tables sont 166539 & 138199 , la moitié de la somme de ces deux distances est 152369 , c'est le demi-axe de l'ellipse , ou la distance moyenne de Mars au soleil ; la moitié de la différence entre ces mêmes distances est 14170 , excentricité de Mars , suivant les tables de M. Halley , en parties dont la distance moyenne du soleil à la terre contiendrait 100000. Il faut d'abord convertir cette excentricité en fraction de la distance moyenne de Mars , prise pour unité , en disant : 152369 est à 1 , comme 14170 est à 0 , 0929979 ; dont le logarithme est 8 , 9684733 ; pour la réduire en secondes , on fait cette proportion ; 1 est à 0 , 0929979 , comme 57° 17' 44" 8 , arc égal au rayon , est à un quatrième terme qui se trouve 19182" , & dont le logarithme est 4 , 2828983

Logarithme de l'excentricité, 14170 . .	4, 1513699
Otez le logarithme du demi-axe, 152369 .	5, 1828966
	<hr style="width: 100%;"/>
	différence 8, 9684733
Ajoutez le logarithme de 57°	5, 3144251
Som. log. conf. pour la 2 ^e analogie (1243)	4, 2828984
Log. constant pour la première analogie , .	0, 0405055
L. T. de la demi-anom. vraie, 15° 4' 20"	9, 4302374
	<hr style="width: 100%;"/>
L. T. de la demi-anom. excent. 16 28 8,6	9, 4707429
Donc l'anomalie excent. est 32 56 17,2	
Logar. constant pour la seconde analogie ,	4, 2828983
Log. du sin. de l'an. excent. 32° 56' 17" 2	9, 7353855
	<hr style="width: 100%;"/>
Logarithme de 10430" , ou 2 53 50,0	4, 0182838
Ajoutez à l'anom. excent. 32 56 17,2	
Anomalie moyenne ,	<hr style="width: 100%;"/>
	35 50 7,2

Si l'anomalie vraie donnée surpasse six signes ou 180° , on prendra ce qui s'en manque pour aller à 360 degrés, ou à 12 signes, afin d'avoir la distance à l'aphélie par le plus court chemin, dont on fera le même usage que dans l'exemple précédent ; mais après avoir trouvé l'anomalie moyenne, on aura soin de reprendre aussi son supplément à 360 degrés pour avoir toujours cette anomalie moyenne comptée suivant l'ordre des signes.

C'est ainsi qu'on trouve l'anomalie moyenne, en supposant connue l'anomalie vraie ; mais c'est ordinairement l'anomalie moyenne qui est donnée, & c'est l'autre que l'on cherche ; dans ce cas, il faut voir à peu-près par les tables, quelle est l'équation de l'orbite qui a lieu au degré d'anomalie qui est donné ; on l'applique à l'anomalie moyenne pour avoir la vraie ; & cette anomalie vraie se convertit en moyenne par les règles précédentes. Si l'anomalie moyenne qui en résulte, est la même que celle qui étoit donnée, c'est une preuve que l'équation employée étoit exacte ; si l'on trouve une anomalie moyenne trop grande, on diminue l'anomalie vraie supposée, & l'on a ainsi, après deux ou trois suppositions, une anomalie moyenne exactement d'accord avec celle qui étoit donnée ; la différence entre celle-ci & l'anomalie vraie qui a servi à la trouver, est l'équation exacte que l'on cherchoit.

Distance
au Soleil, ou
rayon vecteur.

1245. LE RAYON VECTEUR, ou la distance d'une planète au soleil, lorsqu'on connoît l'anomalie vraie & l'anomalie excentrique, se trouve par le moyen de cette proportion : *Le sinus de l'anomalie vraie est au sinus de l'anomalie excentrique, comme la moitié du petit axe est au rayon vecteur.*

Fig. 70:

DÉMONSTRATION. Ayant tiré la ligne NQ (fig. 70) ; parallèle au rayon vecteur MS , on a par les triangles semblables cette proportion $SM : QN :: RM : RN :: CD : CK$ ou CN ; donc $SM : CD :: QN : CN :: \sin. QCN : \sin. CQN :: \sin. RCN : \sin. RSM$; donc $\sin. CSM : \sin. NCS :: CD : SM$. C. Q. F. D. Cette démonstration, qui est du P. Boscovich, est beaucoup

plus simple que celle de M. de la Caille, (*Leçons d'Astronomie*, art. 213). On trouvera ci-après une autre méthode pour déterminer le rayon vecteur dans l'hypothèse de Képler (1250).

1246. Pour faciliter l'usage de ce théorème, nous avons mis dans la table de l'art. 1243 les logarithmes de chaque demi-axe conjugué pour les planètes principales, en supposant l'excentricité, telle qu'elle est dans les tables M. Halley; on fait par la propriété ordinaire de l'ellipse, que CD ou $\sqrt{SD^2 - CS^2} = \sqrt{CP^2 - CS^2}$, ou ce qui revient au même, $\sqrt{CP+CS} \cdot \sqrt{CP-CS}$; c'est-à-dire, que CD est égal au produit des racines de la distance aphélie & de la distance périhélie; ainsi il est aisé de trouver ce demi-axe, quand on connoît le rapport de l'excentricité & du grand axe; après quoi l'on en conclut la distance, par la proportion précédente.

Valeur du
petit axe.

EXEMPLE. L'anomalie vraie supposée (art. 1244); est de $30^\circ 8' 40''$, l'anomalie excentrique $32^\circ 56' 17''$; on demande la distance de Mars au soleil, ou le rayon vecteur. On ajoutera ensemble le logarithme de la distance aphélie & le logarithme de la distance périhélie, on prendra la moitié de leur somme, & l'on aura le logarithme du demi-axe conjugué, de l'orbite de Mars,

	5, 1810105
Ajoutez le log. sin. anom. exc. $32^\circ 56' 17''$, 2	9, 7353855
	4, 9163960
Otez le log. sin. anom. vraie,	9, 7008609
Logarithme de la distance, 164261	5, 2155351

PROBLEME de Képler : connoissant l'Anomalie moyenne, trouver l'Anomalie vraie.

1247. JUSQU'ICI nous avons donné les règles nécessaires pour convertir l'anomalie vraie en anomalie moyenne, problème facile, & auquel nous avons

coutume de réduire le problème de Képler qui en est l'inverse ; néanmoins pour satisfaire aussi le lecteur sur les méthodes directes qu'on peut employer pour résoudre le problème de Képler par approximation , nous allons rapporter , d'après M. Cassini , (*Elem. d'astron. pag. 141*) , la solution suivante ; & l'on en trouvera dans le XXI^e livre une solution analytique par le moyen du calcul intégral.

Fig. 71.

Dans le cercle ANB , (fig. 71) , circonscrit à l'orbite AMB d'une planète , on a vu que AX étant pris pour anomalie moyenne , la différence NX entre l'anomalie moyenne & l'anomalie excentrique ACN est égale à la perpendiculaire ST (1241) ; si du point X on tire une ligne XY parallèle à NCT , ou perpendiculaire sur ST , la petite ligne SY fera la différence entre l'arc NX égal à ST , & le sinus de cet arc , qui est égal à YT ; cette différence entre l'arc & le sinus n'excède pas une demi-seconde , lorsque l'arc NX ne va pas au-delà d'un degré & demi , on peut alors la négliger entièrement , & considérer les lignes NC , XS comme parallèles entre elles : dans ce cas l'angle CXS est égal à l'angle NCX ; dans le triangle SCX on connoît deux côtés & l'angle compris , savoir , l'excentricité SC , le rayon du cercle , c'est-à-dire , CX , égal à la distance moyenne , ou au demi-axe de l'ellipse , & l'angle compris SCX qui est le supplément de l'anomalie moyenne donnée ACX ; on trouvera donc l'angle CXS , égal à NCX , qui retranché de l'anomalie moyenne ACX donnera l'anomalie excentrique ACN , dont le supplément est NCS : dans le triangle NCS on connoît encore les deux côtés SC , CN , & l'angle compris NCS , on trouvera donc l'angle NSC ou NSP . Enfin , on dira ; suivant la propriété de l'ellipse PN est à PM , ou le grand axe est au petit axe , comme la tangente de ce dernier angle NSP à la tangente de l'anomalie vraie MSP . *C. Q. F. T.* On pourroit aussi à la place des deux dernières opérations employer l'analogie de l'article 1240.

Cas où l'équation est petite.

1248. Si l'angle CXS ou l'arc NX qui en diffère très-peu est assez grand pour que son sinus égal à TY soit sensiblement moindre que l'arc, ou que NX , c'est-à-dire, si cet angle passe. $1^{\circ} 30'$, on prendra la différence de l'arc au sinus dans la table suivante, en décimales du rayon CA , & l'on aura SY ; on cherchera aussi le côté SX du triangle CSX , alors dans le triangle $XS Y$ rectangle en Y , on connoîtra SX & SY , en parties du rayon CA qui est toujours pris pour l'unité, on trouvera l'angle SXY qui retranché de SXC , donnera YXC égal à l'angle NCX , dont on avoit besoin dans le calcul précédent pour le retrancher de l'anomalie moyenne; le reste du calcul fera le même.

Fig. 71.
Cas où l'équation est fort grande.

On voit par la nécessité d'employer la différence entre un arc & son sinus, que ce problème dépend de la quadrature du cercle, & que cette méthode s'emploieroit difficilement si l'excentricité étoit assez grande, pour que l'arc NX devînt extrêmement grand, comme cela a lieu dans les comètes; mais on y supplée, soit par la méthode indirecte de l'article 1244, soit par d'autres moyens dont nous parlerons dans le livre XIX. La table suivante peut se calculer par deux méthodes différentes, que nous expliquerons dans le XXI^e livre. On trouvera cette table plus étendue dans M. Cassini, p. 145.

Différence entre les Arcs de cercles & leurs sinus en parties du rayon, & en secondes de degrés.

Deg.	Différence en décimales.	En secondes.	Deg.	Différence en décimales.	En secondes.
1	0 0000009	0' 0''	7	0 0003037	1' 3''
2	0 0000071	0 1	8	0 0004532	1 33
3	0 0000239	0 5	9	0 0006450	2 13
4	0 0000567	0 12	10	0 0008848	3 3
5	0 0001108	0 23	11	0 0011767	4 3
6	0 0001913	0 39	12	0 0015278	5 16
7	0 0003037	1 3	13	0 0019415	6 41

Fig. 71.

1249. EXEMPLE. Étant donnée dans l'orbe de Mercure l'excentricité 0, 20878, c'est-à-dire, de 20878 parties dont le demi-axe de l'orbe de Mercure est cent mille, on demande l'anomalie vraie qui répond à 60° d'anomalie moyenne : si du carré du grand axe on ôte le carré de l'excentricité, on aura le carré du demi petit axe CG , d'où l'on conclura $CG = 0,97796$, qu'on peut trouver encore plus facilement par la méthode de l'art. 1246. Dans le triangle XCS dont on connoît les deux côtés & l'angle compris $XCS = 120^\circ$, on cherchera l'angle X , en disant la somme des côtés CX & CS , ou la distance aphélie, est à leur différence, qui est la distance périhélie, comme la tangente de la moitié de l'anomalie moyenne est la tangente de $20^\circ 42' 8''$, qui retranchés de cette moitié donnent l'angle X de $9^\circ 17' 52''$, & le côté SX de 1, 11905 ; la quantité SY est 0,00071, suivant la table précédente ; or, $SX : SY :: R : \sin. 2' 11''$, ainsi l'on ôtera $2' 11''$ de l'angle N ; & l'on aura CXY égal à $NCX = 9^\circ 15' 41''$ (*), & retranchant ceci de l'anomalie moyenne, il restera pour l'angle ACN $50^\circ 44' 19''$, dont le supplément NCS est de $129^\circ 15' 41''$; ainsi dans le triangle NCS on dira la distance aphélie est à la distance périhélie, comme la tang. de $25^\circ 22' 9'' \frac{1}{2}$ est à la tang. d'un angle qui ajouté à $25^\circ 22' 9'' \frac{1}{2}$ donne $NSP = 42^\circ 36' 45'' \frac{1}{2}$. Pour en conclure l'anomalie vraie, on dira : PN est à PM , ou le demi-grand axe 1 est à la moitié du petit axe 0,97796, comme la tang. NSP est à la tang. de MSP , qui sera de $41^\circ 58' 38''$; c'est l'anomalie vraie qui répond à 60° d'anomalie moyenne ; la différence des deux anomalies est l'équation de l'orbite ou l'équation du centre, $18^\circ 1' 22''$ (*M. Cassini, pag. 148*).

Pour trouver le rayon vecteur.

1250. LA DISTANCE de la planète au soleil est aisée à trouver en même temps que l'anomalie vraie ; car dans les triangles PSN , PSM , en prenant SP

(*) Pour plus d'exaétitude, il faudroit prendre la quantité SY qui répond à $9^\circ 17' 52''$, au lieu que nous avons pris celle qui répond à $9^\circ 15' 41''$, mais la différence est insensible.

pou

pour rayon, les côtés SN & SM seront comme les sécantes des angles PSN , PSM , ou ce qui revient au même, en raison inverse des cosinus, donc le cosinus de l'anomalie vraie est au cosinus de l'angle PSN , comme le côté SN trouvé ci-devant est au rayon vecteur SM , qui est la distance de la planète au soleil.

1251. La méthode que je viens d'expliquer, a été donnée par M. Cassini dans les Mémoires de l'Académie pour 1719, & dans ses Elémens d'astronomie, pag. 141; je la trouve plus aisée à employer que la plupart des méthodes proposées jusqu'ici. On peut cependant consulter la méthode de M. Keill dans les transactions philosophiques de 1713; celle de M. de la Hire dans les mémoires de l'acad. de 1710; celle de Newton dans le premier livre de ses principes; celle de M. Herman; enfin, celle de M. T. Simpson, (Voyez *Essays on several curious and useful subjects*, London, 1740, pag. 41.); celle-ci est une des plus simples pour la pratique; mais il n'y en a aucune qui soit plus commode que la méthode indirecte expliquée ci-dessus, art. 1240. & suiv. dont nous donnerons de nouvelles applications, art. 1301 & suiv.

Hypothèse Elliptique simple.

1252. POUR simplifier les opérations qu'exige la théorie exacte de Képler, (1247), on a souvent employé ce que M. Cassini appelle *Hypothèse elliptique simple*, & qui abrège considérablement le calcul. Cette hypothèse consiste à supposer que les angles au foyer supérieur de l'ellipse croissent uniformément, & soient proportionnels au temps, c'est-à-dire, que l'angle AFL , (fig. 74.), croisse toujours également en temps égaux, quoique les anomalies vraies comme ASL , soient fort inégales; ainsi dans l'hypothèse elliptique simple, l'angle AFL se prend pour l'anomalie moyenne; cette hypothèse est une suite naturelle de celle de Ptolomée, qui supposoit autrefois que le point d'égalité & le centre des anomalies vraies étoient, l'un au-dessus, l'autre au-

Fig. 74.

Fig. 74.

deffous du centre du cercle décrit par la planète (1068). Képler avoit reconnu combien l'on approchoit des observations par cette hypothèse, même en prenant l'orbite pour un cercle (1214). Boulliaud reconnut qu'en employant même l'ellipse, & supposant toujours le mouvement uniforme autour d'un des foyers, on représentoit assez bien les inégalités des planètes, & que le calcul en étoit fort simple en imaginant un cercle & un épicycle à la place de l'orbite elliptique, (*Astron. Philol.* 1645, pag. 46).

1253. Seth Ward, professeur d'astronomie à Oxford, publia en 1654 un examen de l'astronomie philolaïque, & en 1656, un ouvrage intitulé : *Astronomia geometrica*, in-8°, où il donne (à la p. 8), une autre manière fort simple de calculer l'équation dans une orbite elliptique, en supposant le mouvement uniforme autour d'un des foyers; en conséquence, les Anglois ont donné à l'hypothèse elliptique simple, le nom d'*Hypothèse de Ward*, c'est le nom que lui donnent Keill & M. le Monnier, (*Inst. astr.* pag. 510.), quoique Mercator & Ward lui-même aient cité Boulliaud, comme le premier auteur dans cette matière. Cette hypothèse a été employée par Street dans ses tables Carolines, mais avec une correction que Keill attribue à Boulliaud, par erreur; il paroît que Street la tenoit de Robert Anderson, (*Astronomia Carolina* 1710, pag. 40): on peut voir sur l'exactitude de ces méthodes, Mercator *phil. transf.* 1670, n°. 57. Suivant la méthode de Seth Ward on prolonge FL , de manière que FE soit égale au grand axe AP de l'ellipse, on aura $LE = LS$, parce que FL & LS équivalent aussi au grand axe par la propriété de l'ellipse; ainsi le triangle LSE est isocellé, l'angle E égal à l'angle LSE , & l'angle extérieur FLS double de l'angle E .

1254. Pour trouver l'anomalie vraie, & l'équation de l'orbite ou l'angle FLS ; on considère que suivant une proportion connue dans la Trigonométrie rectiligne, la demi-somme des côtés FE & FS est à leur demi-différence, comme la tangente du demi-supplément de

L'angle LFS est à la tangente de la demi-différence des angles E & FSE : mais la demi-somme de FE & FS est égale à AS , leur demi-différence égale à PS ; la demi-somme des angles FES , FSE , est égale à la moitié de l'angle externe AFL , ou à la moitié de l'anomalie moyenne ; la demi-différence de ces angles est aussi la demi-différence de l'angle FSE & de l'angle LSE (qui est égal à LES) ; c'est donc la demi-anomalie vraie ASL ; ainsi il suffira de faire cette proportion : *la distance aphélie est à la distance périhélie, comme la tangente de la moitié de l'anomalie moyenne est à la tangente de la moitié de l'anomalie vraie.*

La distance SL de la planète au soleil se trouve aussi par une simple proportion, au moyen du triangle SLF , en disant : le sinus de l'équation du centre SLF est au double FS de l'excentricité, comme le sinus de l'anomalie moyenne LFS est au rayon vecteur SL .

1255. Nous verrons dans le VII^e livre, que M. Halley fit de cette hypothèse elliptique simple un usage commode dans ses tables de la Lune, au moyen d'une petite correction. C'est la facilité du calcul de l'anomalie vraie dans l'hypothèse elliptique simple, qui la fit admettre par M. Halley dans ses tables de la Lune, en y employant l'équation nécessaire, qu'il appelle *Tabula pro expediendo calculo æquationis centri Lunæ* (1439) ; mais pour les autres planètes dont l'excentricité ne change point, M. Halley les avoit calculées rigoureusement dans l'hypothèse de Képler, & j'en ai fait de même dans mes tables. C'est le meilleur parti, sur-tout pour les planètes qui sont fort excentriques, telles que Mercure & Mars : en effet, si dans le cas proposé (art. 1249), on employoit l'hypothèse elliptique simple, on trouveroit l'équation du centre de $18^{\circ} 35' 44''$, plus grande de $34' 22''$ que dans l'hypothèse de Képler, car l'anomalie vraie seroit de $41^{\circ} 24' 16''$ ou le double de ce que nous avons trouvé dans la première proportion de l'article 1249.

Défaut
de l'hypothèse
elliptique simple.

Dans les calculs du soleil dont la plus grande équation ne va pas à 2° , la plus grande erreur de l'hypothèse

elliptique simple n'est que de $17''$, & c'est vers 45° de distance à l'apogée ou au périégée. Dans la lune, la différence peut aller à $1' 35''$; l'erreur se trouve en moins depuis l'apogée jusqu'à 90° d'anomalie, & depuis le périégée jusqu'à 270° , & le vrai lieu est plus avancé qu'il ne paroîtroit par l'hypothèse elliptique simple; c'est le contraire dans le second & le quatrième quart d'anomalie moyenne, ou l'hypothèse elliptique simple donne une trop grande anomalie. (M. Cassini, pag. 147).

Nous parlerons bientôt encore de l'imperfection de cette hypothèse, lorsqu'il s'agira de déterminer une orbite par trois observations, comme le fait M. Cassini dans les deux hypothèses (1309).

1256. Ce que nous avons expliqué jusqu'ici au sujet de l'équation de l'orbite, suffit pour reconnoître trois propriétés, que nous aurons souvent occasion de citer en parlant de l'équation: 1°. l'équation de l'orbite est nulle dans l'apside supérieure, (aphélie ou apogée), puisque vers ce point-là le lieu moyen & le lieu vrai sont confondus; mais en partant de l'apside, leur différence augmente rapidement, parce que la vitesse vraie étant la plus petite, diffère le plus de la vitesse moyenne: 2°. cette différence s'accumule chaque jour, tant que la vitesse vraie est moindre que la vitesse moyenne; lorsqu'elles sont égales, il se trouve un point vers trois signes & quelques degrés d'anomalie moyenne où la différence qui a augmenté jusqu'alors, est devenue la plus grande, & où l'équation cesse d'augmenter, étant presque la même pendant quelque temps, pour diminuer ensuite jusqu'à l'apside inférieure, (soit périhélie, soit périégée) où le lieu vrai & le lieu moyen se retrouvent d'accord une seconde fois: 3°. l'équation du centre est soustractive, se retranche du lieu moyen dans les six premiers signes pour avoir le lieu vrai, parce que la vitesse moyenne en partant de l'apside supérieure, est plus grande que la vitesse vraie, ainsi le lieu moyen est plus avancé; il faut donc ôter de la longitude moyenne la quantité de l'équation pour avoir le lieu vrai. Le contraire

arrive après l'apside inférieure : la vitesse vraie étant la plus grande, prévaut à son tour sur la moyenne, & le lieu vrai se trouve toujours le plus avancé dans la seconde moitié de l'ellipse, ou dans les six derniers signes de l'anomalie ; alors l'équation de l'orbite s'ajoute au lieu moyen pour avoir le lieu vrai, ou à l'anomalie moyenne pour avoir l'anomalie vraie. Tout cela paroîtra encore plus clair par l'inspection & l'usage des tables des équations du soleil, de la lune & des planètes, qui sont inférées dans cet ouvrage.

DE LA PLUS GRANDE ÉQUATION.

1257. La plus grande équation peut s'observer immédiatement, comme nous le dirons bientôt (1259); mais lorsque la grandeur & la figure de l'ellipse est donnée, c'est-à-dire, lorsqu'on connoît sa distance aphélie & sa distance périhélie, ou son excentricité (1218), on peut trouver par le calcul la plus grande équation, aussi bien que le degré d'anomalie moyenne où arrive cette plus grande équation; pour cela il suffit de trouver le point *M*, (fig. 72.), dans lequel arrive la vitesse moyenne. En effet, dès que la planète est arrivée au point où sa vitesse angulaire *DFM* (c'est-à-dire l'angle qu'elle parcourt vue du soleil) est égale à la vitesse moyenne, par exemple, de 59' 8" par jour si c'est la terre, la longitude moyenne cesse d'anticiper sur la longitude vraie; elle en diffère alors le plus qu'il est possible, parce que jusqu'à ce moment la vitesse réelle qui étoit plus petite, faisoit retarder tous les jours le lieu vrai sur le lieu moyen; mais dès que la vitesse vraie est devenue égale à la vitesse moyenne, elle est prête à la surpasser, elle va commencer à regagner ce qu'elle avoit perdu jusqu'alors, le lieu vrai se rapproche du lieu moyen, & l'équation de l'orbite diminue. Ainsi toute la difficulté consiste à trouver le point *M*, & l'anomalie *AFM* de la planète au moment où sa vitesse est égale à la vitesse angulaire moyenne : pour cela, ayant pris une ligne *FM*, moyenne proportionnelle entre les deux demi-

Fig. 72.

Trouver par le calcul la plus grande équation.

Fig. 72.

axes de l'orbite, on décrira du foyer F comme centre un cercle MN sur le rayon FM , & ce cercle aura une surface égale à celle de l'ellipse, comme nous le démontrerons en parlant des sections coniques dans le livre XXI. Supposons un corps qui décrive le cercle MN dans un temps égal à celui de la révolution de la planète dans son ellipse, sa vitesse angulaire sera constamment égale à la vitesse angulaire moyenne de la planète, par exemple, de $59' 8''$ pour le soleil; l'aire décrite dans le cercle sera toujours égale à l'aire décrite en même temps dans l'ellipse, puisque les aires totales sont égales & parcourues en temps égaux, les durées des révolutions étant les mêmes, & les aires partielles de l'ellipse proportionnelles aux parties du temps: par exemple, si le soleil décrit en un jour une aire DFR de son ellipse égale à la 365^e . partie de la surface elliptique, l'aire EFO décrite dans le cercle, sera aussi la 365^e . partie de l'aire du cercle, (qui est égal à l'ellipse); la vitesse vraie du soleil (ou l'angle DFR) sera donc égale à la vitesse moyenne en M , c'est-à-dire à l'angle DFO ; car ce sont deux secteurs égaux qui ont la même longueur FM , la même surface, & par conséquent le même angle; d'ailleurs les triangles égaux MED , MRO qui sont l'un en dehors du cercle, l'autre en dedans, font voir que le secteur elliptique est égal au secteur circulaire qui a le même angle en F ; donc pour trouver le point de la vitesse moyenne, il faut trouver l'intersection M de l'ellipse & du cercle qui lui est égal en surface. Ayant tiré du point M à l'autre foyer B de l'ellipse une ligne MB , l'on aura un triangle BFM , dans lequel on connoît les trois côtés, savoir BF qui est le double de l'excentricité, FM qui est la moyenne proportionnelle entre les deux demi-axes, & BM qui est la différence entre FM & le grand axe, (parce que les deux lignes FM & MB font entre elles la valeur du grand axe); ainsi résolvant le triangle BFM on cherchera l'angle F qui est l'anomalie vraie de la planète au temps de la plus grande équation.

1258. EXEMPLE. Soit le demi-axe $CA = 38710$, &

le demi-axe conjugué = 37883, comme dans l'orbite de Mercure, $CI = 7960$ $BF = 15920$, FM sera = 38294. On résoudra le triangle BFM ; la méthode la plus facile est celle-ci; de la demi-somme des trois côtés on ôte séparément chacun des trois côtés; de la somme des logarithmes des deux différences des côtés qui comprennent l'angle cherché, l'on ôte la somme des logarithmes de la demi-somme des trois côtés & de la différence du côté opposé à l'angle cherché, la moitié du reste est le logarithme de la tangente de la moitié de l'angle cherché. Dans le cas particulier du calcul de la plus grande équation, il se réduit à cette règle: de la distance aphélie, on ôte séparément la moyenne FM , & le 3^e. côté BM ; on a deux différences, dont on cherche les logarithmes & l'on retranche le plus petit du plus grand, de cette différence de logarithmes on ôte celle des logarithmes de la distance aphélie & de la distance périhélie, reste celui de la tangente de la moitié de l'anomalie vraie.

Dans notre exemple on trouvera l'angle BFM de $31^{\circ} 4' 52''$, c'est l'anomalie vraie au temps de la plus grande équation, d'où l'on peut conclure (1244) l'anomalie moyenne $104^{\circ} 45' 41''$, & leur différence qui est l'équation du centre, sera $23^{\circ} 40' 49''$; ce doit être la plus grande équation de l'orbe de Mercure; elle est ainsi dans mes tables, mais dans celles de M. Cassini, on la trouve beaucoup plus grande (1278).

1259. Après avoir indiqué la manière de calculer l'équation, nous parlerons de la manière de l'observer. Depuis l'instant où une planète part de son aphélie A , (fig. 72), jusqu'au temps où elle arrive au point M de sa plus grande équation, sa vitesse est moindre que ne seroit la vitesse moyenne, l'anomalie vraie plus petite que l'anomalie moyenne, en diffère de plus en plus; lorsque la planète ayant passé le périhélie P se trouve au point G à neuf signes d'anomalie sa distance vraie AFG à l'aphélie est également plus petite que sa distance moyenne, de la quantité de la plus

grande équation. Si l'on a deux longitudes vraies de la planète observées en G & en M , elles différeront entre elles de la quantité de l'angle GFM , qui est la somme des deux anomalies vraies; mais la somme des deux anomalies moyennes fera plus grande du double de l'équation, puisque chaque distance vraie est plus petite que la distance moyenne, de la quantité de la plus grande équation; il est aisé de calculer en tout temps la somme des deux anomalies moyennes, quoiqu'on ne connoisse pas le lieu de l'aphélie A , parce que la somme de deux anomalies moyennes est égale au mouvement moyen de la planète, dans cet intervalle de temps, & on le trouve aisément quand on connoît la durée de la révolution (1161) (^a); ainsi l'excès du mouvement moyen calculé, sur le mouvement vrai observé donne le double de la plus grande équation, pourvu que l'on ait fait ces deux observations en M & en G , c'est-à-dire, aux temps de la vitesse moyenne (1257). Ce sera le mouvement vrai qui sera le plus considérable, si l'on prend la première observation avant le périhélie & la seconde après, comme dans l'exemple suivant (1261). Cette méthode se trouve dans M. Cassini (*Elémens d'astron. p. 187.*) où elle n'est que la neuvième, quoique la plus exacte.

1260. Pour discerner les temps & les observations convenables à cette recherche, un Observateur isolé qui ne connoîtroit en aucune façon la situation de l'orbite de la planète, n'auroit qu'à rassembler un grand nombre de positions observées, les comparer deux à deux, & voir combien le mouvement vrai observé différerait du mouvement moyen calculé pour chaque intervalle; la plus grande de toutes les différences lui donneroit le double de la plus grande équation; car entre une moyenne distance & l'autre, le mouvement vrai diffère du mouvement moyen à raison de l'équa-

(^a) Pour plus d'exactitude, c'est la révolution anomalistique (1311) dont il faut se servir, mais dans les premières approximations, on se sert de la révolution tropique.

tion soustractive dans l'une & additive dans l'autre, donc si l'on a des observations faites dans tous les points de l'orbite, on en trouvera deux où le mouvement vrai sera moindre ou plus grand que le mouvement moyen, du double de la plus grande équation. Actuellement que l'on connoît, à très-peu près, les lieux des apsidés & des moyennes distances de toutes les planètes, on n'a qu'à choisir du premier coup les observations faites avant & après l'aphélie, vers le temps de la plus grande équation, comme dans l'exemple suivant.

I 2 6 I. EXEMPLE. Le 7 Octobre 1751, le vrai lieu du soleil observé par M. l'Abbé de la Caille, avant le périégée, en y faisant entrer 3 jours d'observations discutées & comparées entre elles, fut trouvé de $6^s 13^o 47' 13'' 7$
 Le 28 Mars 1752 cette long. vraie fut de 0 8 9 25 5

La différence de ces deux longitudes, ou le mouvement vrai du soleil est donc, $5 24 22 11, 8$

Mais dans cet intervalle le mouvement moyen avoit dû être par le calcul $5^s 20^o 31' 43'' 2$

Différence, double de la plus grande équat. $3 50 28 6$
 Dont la moitié est l'équation de l'orbite. $1 55 14 3$

Ce seroit-là exactement la plus grande équation de l'orbite, si dans les deux observations le soleil se fût trouvé exactement dans les points de sa plus grande équation; mais ayant calculé par les tables chacune de ces deux équations, on a trouvé qu'il s'en falloit de $18'' 6$, que la somme des deux équations qui avoient lieu le 7 Octobre & le 28 Mars, ne fût exactement le double de la plus grande équation; & il suffisoit pour cela d'en connoître à-peu-près la valeur, ainsi l'on ajoutera ces $18'' 6$ à la quantité trouvée, & l'on aura l'équation qui résulte de ces deux observations $1^o 55' 33''$, plus grande seulement de $11''\frac{1}{2}$ que l'équation à laquelle M. de la Caille s'est arrêté dans ses tables. (Voy. *mémoires acad.* 1757, pag. 123). Celle qu'il a trouvée pour 1684 par les observations de M. de la Hire, n'en differe pas sensiblement.

Fig. 72.

1262. Comme il est extrêmement rare d'avoir deux observations qui soient faites précisément dans les points *M* & *G* de la vitesse moyenne, on ne trouve guères dans un premier calcul la quantité exacte de la plus grande équation; mais après qu'on a trouvé à-peu-près l'équation & le lieu de l'apside (1279), on calcule pour les deux temps d'observations l'équation de l'orbite, & l'on calcule aussi la plus grande équation, (1257); on fait alors combien l'équation donnée par les observations, devoit différer de la plus grande; c'est ainsi que dans l'exemple précédent *M.* de la Caille avoit trouvé 18'', 6, qu'il falloit ajouter pour avoir la véritable quantité de la plus grande équation.

1263. On peut aussi trouver la plus grande équation sans connoître le lieu de l'apside, il n'y a qu'à prendre pour époque une longitude quelconque & lui comparer beaucoup d'autres longitudes pour avoir le mouvement vrai observé; on calculera pour chacun de ces intervalles le mouvement moyen par les tables; on aura des différences additives, & des différences soustractives, la plus grande différence additive & la plus grande soustractive étant ajoutées donneront le double de la plus grande équation de l'orbite, pourvu que l'on ait eu des observations faites sur un assez grand nombre de points pour que les deux points de la plus grande équation s'y soient trouvés. Nous nous servirons de cette méthode pour trouver le lieu de l'apside du 4^e. satelite de Jupiter, dans le livre XVIII^e.

1264. Quand on a trouvé par observation la plus grande équation, & qu'on veut en conclure l'excentricité, le plus commode est d'employer une règle de fausse position, ou de supposer d'abord connue l'excentricité que l'on cherche, pour en conclure la plus grande équation (1257). Si elle se trouve trop grande on diminuera l'excentricité supposée, & l'on recommencera le calcul; cette méthode de déterminer l'excentricité par le moyen de la plus grande équation est souvent plus commode que celle dont se sert Képler

pour trouver l'excentricité de Mars (1218); ou celle dont je me servirai pour Mercure (1267). Au reste nous verrons bientôt une méthode exacte pour trouver l'excentricité sans recourir à la plus grande équation (1301).

1265. La plus grande équation du soleil; ou de l'orbite de la terre est celle que l'on peut déterminer le plus souvent & le plus facilement, elle a été fixée à $1^{\circ} 55' 31'' \frac{1}{2}$ par M. de la Caille, qui a calculé un nombre immense d'observations.

Equation
du soleil.

Dans les tables de Flamsteed, achevées par M. le Monnier & publiées en 1746 dans ses institutions astronomiques, on la trouve de $1^{\circ} 56' 20''$; mais dans la dernière page de ce livre M. le Monnier déclare qu'il la réduit à $1^{\circ} 55' 30''$, ainsi il est en cela bien d'accord avec M. de la Caille. M. Mayer par des observations faites à Gottingen en 1756, & dont il m'envoya le résultat, la trouvoit de $1^{\circ} 55' 31''$, & dans ses tables publiées à Londres depuis peu, elle est de $1^{\circ} 55' 31'' 6$. M. Cassini après avoir comparé plusieurs observations des années 1717 & 1718, (*Elém. d'astr.* p. 192) & prenant un milieu entre les différentes déterminations qui en résultent, trouve l'équation du soleil de $1^{\circ} 55' 34''$. En voyant ainsi quatre témoignages aussi authentiques & aussi bien d'accord, on ne sauroit douter que l'équation du centre du soleil ne soit constamment d'environ $1^{\circ} 55' 32''$. Enfin M. de la Caille en 1759 & 1760, depuis la publication de ses tables, continua d'observer le soleil, & m'assura qu'il trouvoit encore $1^{\circ} 55' 32''$ pour la plus grande équation.

Elle est très-
bien connue.

Elle est 1°
 $55' \frac{1}{2}$.

1266. Il est vrai que les perturbations qu'éprouve le mouvement apparent du soleil par l'action des planètes, & qui peuvent aller à $50''$, ont fait paroître quelquefois l'équation du centre plus ou moins grande; puisque M. le Monnier qui l'avoit trouvée en 1740 & 1742 d'environ $1^{\circ} 55' 20''$ ou $25''$, la trouvoit en 1746 & 1747 de $1^{\circ} 56' 0''$ (*Mém. acad.* 1747, pag. 308); mais on peut voir encore ce que M. de la Caille objectoit à

ces différences, (*Mém. acad.* 1757, p. 142) prétendant qu'il suffisoit de corriger la seule observation du 28 Sept. 1746, pour rapprocher de l'égalité tous les résultats de M. le Monnier.

Elle est
constante.

Enfin les observations faites, il y a plus de 250 ans par Waltherus, prouvent que la plus grande équation du soleil ne va point en diminuant, puisqu'elles donnent $1^d 55' 40''$ suivant le calcul de M. de la Caille (*Mém. acad.* 1747, p. 144). Celle qu'il a adoptée dans ses tables est de $1^o 55' 31'' 6$, ce qui donne pour l'excentricité 0,01680207, ou pour la double excentricité 0,003360414 (865). En y employant les observations de M. de la Hire, faites vers l'année 1684, il a trouvé l'excentricité de 0,01685.

1267. Pour déterminer la plus grande équation des autres planètes, on n'a pas toujours deux longitudes héliocentriques observées dans les moyennes distances; on ne sauroit même les avoir pour Mercure; mais on détermine la plus grande équation, ainsi que le lieu de l'aphélie par les méthodes suivantes. La première méthode qui sert également pour Mercure & pour Vénus, consiste à observer la plus grande digression, lorsque la planète est dans ses apsides; on en conclut la distance aphélie ou périhélie; & comme la distance moyenne est connue (1222), on a l'excentricité. Le 25 Septembre 1753 à $22^h 47' 50''$ temps moyen. Mercure passant au méridien à Paris, sa longitude fut observée de $5^s 15^o 41' 14''$; Mercure étoit alors fort près de son périhélie, & en même-temps vers sa plus grande digression; le lieu du soleil calculé par les tables étoit à $6^s 3^o 27' 25''$, en sorte que l'élongation de Mercure étoit de $17^o 46' 11''$, c'est l'angle sous lequel paroïssoit alors la distance périhélie de Mercure vue de la terre; on pourroit trouver cette distance absolue par le moyen du triangle formé à la terre, au soleil & à Mercure, où l'on connoît la distance du soleil à la terre, l'angle au soleil qui étoit de $101^o 39'$, & qui pouvoit se conclure de la distance à la conjonction,

enfin l'angle à la terre ou l'élongation observée; il seroit facile de résoudre ce triangle pour connoître le côté opposé qui étoit la distance périhélie; & comparant cette distance périhélie avec la distance moyenne qui est supposé connue par la loi de Képler (1225), on auroit l'excentricité. Cependant comme dans cette observation & dans celles que j'ai pu rassembler, Mercure n'étoit pas exactement dans son périhélie & dans sa plus grande digression, il est plus commode pour savoir quelle est la distance SP qui satisfait à l'observation, de calculer l'élongation pour cet instant-là par des tables déjà à-peu-près exactes, en employant différentes valeurs pour l'excentricité; c'est ainsi que j'ai reconnu que l'excentricité 7960 est la plus propre à satisfaire à cette observation. La plus grande équation qui lui répond est $23^{\circ} 40' 49''$ (1257). Cette méthode suppose que le lieu de l'aphélie ait été à-peu-près déterminé par d'autres observations (1311), afin que l'erreur qu'on commettrait sur le lieu de l'aphélie n'affecte pas la distance au soleil, & l'élongation calculée; que l'on veut comparer à l'observation pour juger si l'excentricité supposée dans les tables est exacte; mais dans cette recherche il n'est besoin de connoître l'aphélie qu'à-peu-près; la distance de Mercure au soleil ne change alors que de $\frac{1}{46680}$ pour un degré d'erreur, sur le lieu de l'aphélie, or cette erreur est beaucoup plus grande que celle que nous pouvons commettre actuellement sur le lieu de l'aphélie de Mercure. Si l'on observe à une minute près la différence de la plus grande à la plus petite digression, on aura aussi la plus grande équation à une minute près; mais nous pouvons l'observer à un quart de minute.

Equation
de Mercure.

1268. La seconde méthode que j'ai employée pour connoître l'excentricité de Mercure, suppose qu'on connoisse déjà le lieu de l'aphélie, & son mouvement; par la méthode que j'expliquerai bientôt (1286): on prend deux longitudes observées dans les conjonctions de Mercure, on en retranche l'aphélie qui convient à

chacune pour avoir deux anomalies vraies, on les convertit en anomalies moyennes (1244), en supposant une excentricité déjà à peu-près connue; si la différence des anomalies moyennes trouvées est la même que celle que l'on connoît d'avance, on est sûr que l'excentricité supposée est exacte; sinon l'on en prend une autre; & par ces diverses tentatives, on s'assure de la véritable.

Je choisis pour exemple les passages de Mercure observés fort exactement en 1743 & en 1753; voici les temps moyens de ces deux conjonctions, les longitudes de Mercure sur son orbite, les lieux de l'aphélie que je supposois connus d'avance, & les anomalies vraies que j'en avois déduites.

	Longitude:	Aphélie:	Anom. vraie:
1743. 4 Nov. 22 ^h 26' 10"	1 ^s 12° 36' 21"	8 ^s 13° 25' 47"	4 ^s 29° 10' 34"
1753. 5 Mai 18 29 50	7 15 48 10	8 13 36 58	11 2 11 12

La différence des anomalies moyennes pour l'intervalle donné est connue d'avance par la durée de la révolution, & par le mouvement de l'aphélie, elle doit être 5^s 9° 42' 8"; or en convertissant les deux anomalies vraies données en anomalies moyennes avec l'excentricité 7960; on trouve en effet 5^s 9° 47' 44", & 10^s 19° 29' 52", qui diffèrent autant qu'elles doivent différer, ce qui m'apprend que l'excentricité 7960 satisfait à ces deux observations. On sent bien que si j'avois supposé d'autres quantités pour les lieux de l'aphélie, j'aurois trouvé une autre valeur pour l'excentricité; la différence entre ces deux observations n'est qu'une donnée, & elle ne peut déterminer qu'un élément, c'est-à-dire, l'excentricité si l'aphélie est connu, ou l'aphélie si l'excentricité est donnée.

Aussi la méthode que je viens d'expliquer serviroit à trouver le lieu de l'aphélie de Mercure, si l'on vouloit supposer l'excentricité connue par les digressions aphélie & périhélie (1267); car en convertissant les anomalies vraies en moyennes, avec différentes suppositions pour le lieu de l'aphélie, on trouveroit quel est

l'aphélie qui satisfait aux deux longitudes observées.

1269. M. Cassini en employant les passages de Mercure sur le soleil observés en 1661, 1690 & 1697, avoit trouvé la plus grande équation de Mercure dans l'hypothèse de Képler, de $24^{\circ} 3'$; je fis ensuite une pareille recherche au moyen des passages de 1740, 1743 & 1753, je ne trouvai que $23^{\circ} 27' 51''$ pour la plus grande équation, (*Mém. acad.* 1756; pag. 267): les passages de Mercure ne sont pas propres à ces recherches, à moins que l'on ne connoisse le lieu de l'aphélie; ils ne sont pas disposés sur trois points de l'orbite assez différens les uns des autres. D'ailleurs la théorie de Mercure est extrêmement difficile à établir, parce que les observations en sont rares, que son orbite est fort excentrique, & son mouvement vu de la terre trop lent: les tables Rudolphines qui dans le dernier siècle étoient les meilleures, s'écartoient encore de $14'$ du lieu observé, & celles de M. de la Hire de $5'$, (*Mém. acad.* 1706, pag. 99 & 101); ce qui fait une très-grande erreur par rapport au soleil (1315).

L'extrême différence qu'on trouvera ci-près (1278) entre les résultats de M. Halley & de M. Cassini, dont l'un fait la plus grande équation de $23^{\circ} 42' 36''$, & l'autre de $24^{\circ} 2' 58''$, prouvoit la nécessité qu'il y avoit d'observer encore Mercure avec soin, & d'employer les plus grandes digressions pour déterminer son excentricité (1267). M. de Thury dans les *Mém. de l'Acad.* pour 1753, pag. 321, dit qu'ayant fait plusieurs observations de Mercure dans ses plus grandes digressions, il a trouvé son équation de $23^{\circ} 50'$ environ, mais que cependant il ne s'arrêtoit pas encore à cette détermination: pour moi, qui l'ai déterminé depuis ce temps-là avec le plus grand soin par de nouvelles observations, je l'ai trouvé de $23^{\circ} 40' 49''$, plus petite de $2'$ que par les tables de Halley, & de $22'$ que par celles de Cassini; les deux méthodes que j'ai expliquées ci-dessus m'ont donné à peu-près le même résultat. (*Mém. de l'acad.* 1767).

1270. Les conjonctions inférieures de Vénus au

Equation
de Vénus.

soleil observées à Paris en 1715, 1716 & 1718, qui seront rapportées à la fin de ce livre, ont servi à M. Cassini, (*Elém. d'astron. pag. 562*), pour déterminer la plus grande équation de Vénus de 49' 8", & par les observations de 1715, 1718 & 1719, il trouve 49' 4"; M. Halley ne l'emploie que de 48' 0", la différence est assez légère & fait voir qu'il y a peu d'incertitude sur cet élément: en effet, les conjonctions inférieures de Vénus sont des observations extrêmement propres à une pareille recherche & par leur moyen l'on est venu à bout de connoître les mouvemens de Vénus avec assez de précision; n'ayant pas d'ailleurs d'observations récentes qui soient bien propres à ces recherches, je m'en suis tenu à faire l'équation de Vénus dans mes tables de 48' 30".

Elle est de
8 $\frac{1}{2}$ minutes.

Equation
de Mars,

1271. Les observations de Ptolomée calculées par M. Cassini, donnent la plus grande équation de Mars 10° 49' pour l'année 133 avant J. C. (*Elém. d'astron. pag. 472*), & trois observations de Flamsteed faites à Greenwich le 11 Déc. 1691, le 20 Févr. 1696, & le 8 Mai 1700, donnent 10° 39' 8"; on ne doit pas conclure de cette différence que l'équation de Mars ait diminué réellement, & que son orbite se soit rapprochée de la figure circulaire, parce que les observations de Ptolomée sont trop peu exactes pour les faire entrer en concurrence avec celles de Flamsteed.

Nouvelle dé-
termination.

Pour déterminer cet élément par des observations plus récentes & encore plus exactes, j'avois comparé entre elles les oppositions de Mars observées en 1743, 1751 & 1753, (*Mém. acad. 1755, pag. 222*); j'ai refait ces calculs de nouveau, & j'ai trouvé pour l'excentricité 14198,6 (art. 1304). J'ai comparé ensuite les oppositions de 1745, 1747 & 1749, qui m'ont donné l'excentricité 14217,6 (art. 1307). Il y a peu de différence entre ces résultats, & cet élément me paroît assez bien déterminé; le milieu est 14218,1, c'est cette excentricité 14218,1 trouvée par la méthode que j'expliquerai bientôt (1301), qui m'a fait trouver l'équation de 10° 40' 39"; elle surpasse de 37" celles des tables de Halley (1278).

Elle est de
10° 40' 39".

1272. Les oppositions de Jupiter observées en 1723, & 1728, donnent pour la différence du mouvement vrai $5^s 27' 46'' 40'''$; & comme dans l'intervalle de ces observations on a pour le moyen mouvement $5^s 16' 50' 15''$, la différence $10^{\circ} 56' 25''$ est le double de la plus grande équation (1259). Aussi M. Cassini en conclut que l'équation du centre est de $5^{\circ} 28' 12'' \frac{1}{2}$ (*Elém. d'ast. pag. 423*). Par l'opposition de 1716 comparée à celles qui ont suivi jusqu'en 1723, il trouve la plus grande équation $5^{\circ} 26' 42''$; par l'opposition de 1657, comparée avec celles de 1676 & 1677, $5^{\circ} 30' 43''$. Par les oppositions de 1719, 1721 & 1723, il trouve $5^{\circ} 31' 43''$; mais par les observations de Tycho faites vers l'an 1590, cette même équation n'est que de $5^{\circ} 28' 56''$ (*Ibid. pag. 427*).

Equation de Jupiter.

1273. Les observations de Ptolomée faites vers l'an 136 avant J. C. donnent la plus grande équation, encore plus petite, & suivant le calcul de M. Cassini de $5^{\circ} 12' 40''$. Suivant M. Wargentin $4^{\circ} 57' 27''$. Ces résultats semblent diminuer proportionnellement à mesure que l'on remonte aux anciennes observations. M. Cassini en avoit déjà fait la remarque (*pag. 429*), pour donner lieu d'examiner dans la suite s'il y auroit encore une semblable variation dans l'équation du centre de Jupiter.

On a soupçonné qu'elle étoit variable.

M. Jeurat ayant aussi comparé entre elles la plupart des oppositions de Jupiter, soit en les corrigeant par les équations provenues de l'attraction de Saturne, (*Connoiss. des mouv. cél. 1763*). (a), soit en négligeant cette correction, a trouvé pour l'équation du centre $5^{\circ} 12'$ au temps de Ptolomée, $5^{\circ} 16'$ au temps de Copernic, vers l'an 1525; $5^{\circ} 23' 15''$ par les observations de Tycho pour l'an 1590; $5^{\circ} 33' 20''$ pour le commencement du siècle; & $5^{\circ} 34' 24''$ pour 1750 (*Mém. acad. 1765, pag. 384*). Il a suivi pour ce tra-

(a) Il faut observer que dans les tables de ces équations, on a changé les signes des tables II & III, page 128, & qu'il faut lire + au lieu de — & — au lieu de +.

vail la méthode que j'avois déjà donnée, & qui se trouvera ci-après art. 1288. Enfin dans ses dernières recherches sur cette matière M. Jeurat trouve l'équation de l'orbite de Jupiter pour 1762 de $5^{\circ} 36' 29''$. (*Mém. acad.* 1765, pag. 438, & 1766, pag. 105). Dans les tables de Jupiter qu'il a jointes à celles des Satellites, par M. Bailly, & dont les fondemens sont expliqués dans les mémoires de 1766, il n'a pas eu égard aux équations produites par l'attraction de Saturne, & il trouve la plus grande équation pour l'an 135 de $5^{\circ} 12' 5''$; par les observations de 1520, 1526 & 1529, $5^{\circ} 13' 18''$; par celles de 1586, 1590 & 1592, $5^{\circ} 30' 30''$; par celles de 1676, 1678 & 1682, $5^{\circ} 27' 22''$; par celles de 1700, 1702 & 1704, $5^{\circ} 36' 2''$; par celles de 1735, 1738 & 1740, $5^{\circ} 30' 2''$, & par celles de 1759, 1761 & 1765, $5^{\circ} 36' 29''$, enforte qu'il juge que cette équation a des augmentations & des diminutions successives. Quoiqu'il en soit, l'équation actuelle sensiblement plus grande que celle des anciennes observations, indique une augmentation successive dans l'équation de Jupiter. Cependant M. Euler dans sa seconde pièce sur les inégalités de Jupiter & de Saturne, qui a remporté le prix de l'académie en 1752, trouve que l'équation de Jupiter doit diminuer de $58'' \frac{1}{2}$ par siècle, résultat contraire au précédent, mais M. de la Grange, dans le tome III^e des mémoires de l'académie de Turin, trouve au contraire une augmentation de $1' 2'' 63$ par siècle.

1274. M. Bailly ayant comparé entre elles diverses oppositions de Jupiter, également corrigées par les équations qui viennent de l'attraction de Saturne, a trouvé par un milieu entre divers résultats $5^{\circ} 12' 10''$ pour l'an 136; $5^{\circ} 31' 53''$ pour 1590; $5^{\circ} 31' 36''$ pour 1661; & $5^{\circ} 33' 23''$ pour 1762, enforte que l'augmentation de cette équation lui paroît d'environ $1' 47''$ par siècle. Enfin M. Wargentini, dont je suivrai les recherches pour cette partie, a trouvé la plus grande équation de Jupiter de $5^{\circ} 34' 1''$ pour 1760, avec un accroissement de $2' 15''$ par siècle.

Elle est de
 $5^{\circ} 34'$.

Mais il faut convenir que parmi les cinq observations anciennes que nous avons de Jupiter, & qui seront rapportées à la fin de ce livre; il en resté toujours une où l'erreur de nos tables est d'un demi-degré, & deux où elle est d'environ un quart de degré; or en supposant que les observations anciennes sont susceptibles de ces erreurs, comme cela me paroît évident, on pourroit s'en tenir à faire l'équation constante, pourvu qu'on fit le mouvement séculaire de $5^s 6^o 19' 5''$. Mais si l'on fait usage de l'équation séculaire (1171), on est obligé de rendre l'excentricité plus petite dans les siècles passés, pour ne pas mettre trop de différence entre la première & la seconde des observations rapportées par Ptoloméé.

1275. L'équation de Saturne a été calculée par M. Cassini, d'après le principe établi ci-dessus (1259), que la différence entre le mouvement vrai observé, & le mouvement moyen calculé pour l'intervalle entre deux oppositions, donne le double de la plus grande équation; quand ces deux oppositions sont exactement dans les points des moyennes distances. M. Cassini compare l'opposition de 1686 avec celle de 1701; l'intervalle de temps lui donne pour le mouvement moyen $6^s 9^o 36' 0''$; le mouvement vrai observé est de $5^s 26^o 34' 10''$, la différence est de $13^o 1' 50''$, dont la moitié est la plus grande équation de Saturne $6^o 30' 55''$.

Equation
de Saturne.

M. Cassini a aussi calculé un grand nombre d'oppositions depuis 1685 jusqu'en 1716, prises trois à trois, d'où il a conclu l'équation de Saturne de $6^o 31' 38''$, en employant l'hypothèse de Képler; cette équation qui approche beaucoup de celle qui avoit été trouvée par les oppositions de 1686 & de 1701 est à peu-près celle que M. Cassini emploie dans ses tables, (*Elémens d'astron. pag. 371*), & elle approche également de celle qui est dans les tables de Halley $6^o 32' 4''$.

1276. M. Euler dans la Pièce qui a remporté le prix de l'Académie en 1748, sur les inégalités de Saturne, pag. 109, suppose cette équation de $6^o 32' 10''$;

ensuite dans le supplément il observe qu'il pourroit y avoir une équation, dont la quantité iroit toujours en croissant, & qui feroit diminuer la plus grande équation de $1' 50''$ tous les cent ans, mais dont la quantité varie suivant la position de Jupiter par rapport à Saturne, dans l'espace de 29 ans.

M. Euler dans sa seconde Pièce sur le même sujet, qui a remporté le prix de l'Académie en 1752, trouve encore que l'équation de Saturne doit diminuer de $1' 48'' \frac{1}{2}$ tous les cent ans : c'est une chose remarquable, dit-il, que l'excentricité de Jupiter occasionne, à raison de son attraction, une excentricité dans Saturne, qui a un rapport constant avec celle de Jupiter, & qui donne un aphélie commun ; ainsi l'excentricité qu'on observe actuellement dans le mouvement de Saturne, est le résultat de l'excentricité qui lui étoit primitivement naturelle, & de celle qui vient de l'attraction de Jupiter dans une orbite excentrique. J'ai été obligé de prévenir le lecteur sur une partie de ce que j'aurois pu ne dire que dans le livre de l'attraction, mais il convenoit de joindre le suffrage de la théorie avec celui des observations, pour faire voir que l'équation de Saturne est difficile à déterminer, à cause des effets de l'attraction de Jupiter. Cependant elle ne diffère pas beaucoup de $6^{\circ} 32'$, quand on veut tenir compte des observations faites dans le dernier siècle.

1277. Les recherches que j'ai faites sur la théorie de Saturne, d'après l'inégalité singulière dont j'ai parlé (1167), m'ont fait reconnoître que pour satisfaire aux observations faites depuis 30 ou 40 ans, il falloit supposer l'équation de $6^{\circ} 23' 19''$, & c'est ainsi que je l'emploierai dans mes tables ; cette équation ne satisferoit pas aux observations plus anciennes ; mais il est impossible de les concilier avec les plus récentes, du moins en employant la même orbite ; & j'ai préféré des tables qui fussent exactes pour le temps où nous sommes.

1278. Pour mettre sous les yeux du lecteur le résultat des articles précédens sur la plus grande équation

de chaque planète , nous rapporterons les quantités assignées par quatre différens auteurs dans leurs tables astronomiques ; de même que les excentricités que l'on peut conclure , (1258 , 1264) , & que l'on conclut effectivement de ces plus grandes équations observées , quoiqu'on puisse les déterminer aussi sans le secours de la plus grande équation (1218 , 1267).

Les excentricités qui sont dans la table suivante ; supposent la distance moyenne du soleil à la terre 100000 , ainsi que les distances moyennes (1222) ; mais j'y ai ajouté des décimales , quand le calcul me les a données. Mais les logarithmes des excentricités supposent la distance moyenne de chaque planète égale à l'unité , parce qu'on les emploie ordinairement sous cette forme (1244). De toutes les excentricités de la dernière colonne , il n'y a que celle de Mercure & celle de Mars qui aient été calculées directement ; les autres ont été déduites de la plus grande équation observée , qui se trouvera dans la seconde table ; j'y ai joint par anticipation l'excentricité de la lune , telle que M. Mayer assure l'avoir trouvée par les observations. Celle qu'il faut supposer pour donner la plus grande équation , $6^{\circ} 18' 32''$, telle qu'elle est dans les tables de Mayer , est 0,055083 ; mais cette excentricité ne suffiroit pas pour retrouver les autres nombres de la table , parce que M. Mayer y a fait entrer une autre inégalité que celle de l'ellipse ordinaire ou de l'hypothèse de Képler. L'excentricité 0,05505 que Flamsteed , Halley & M. Clairaut ont employé , donne pour la plus grande équation $6^{\circ} 18' 18'' \frac{1}{4}$, & non pas $6^{\circ} 18' 32'$.



TABLE des excentricités suivant différens Auteurs.

PLANETES.	Excentricité suivant Képler.	Suivant M. Halley.	Log. de l'excent. en partie de la distan. moyenne.	Excentricité suiv. nos calculs.
Mercure.	8150	7970	9,3136351	7960
Vénus.	501	504,985	7,8439409	510,2
Le Soleil.	1800	1692,40	8,2285030	1680,207
Mars.	14115,5	14170	8,9684732	14218,1
Jupiter.	25074	25078,6	8,6832183	25277,3
Saturne.	54143,5	54381,5	8,7558994	53210
La Lune.				0,0547218

TABLE des plus grandes Equations des Orbites planétaires suivant différens Auteurs.

	Boulliaud, 1645.	M. de la Hire, 1702.	M. Halley, 1719.	M. Cassini, 1740.	Suivant nos Tables.
Mercure,	24° 17' 20"	24° 16' 52"	23° 42' 36"	24° 2' 58"	23° 40' 49"
Vénus,	0 54 36	0 50 0	0 48 0	0 49 6	0 48 30
Le Soleil,	2 2 41	1 55 42	1 56 20	1 55 51	1 55 31,6
Mars,	10 36 12	10 40 40	10 40 2	10 39 19	10 40 39
Jupiter,	5 34 0	5 36 54	5 31 36	5 31 17	5 34 1
Saturne,	6 37 10	6 30 00	6 32 4	6 31 40	6 23 19
La Lune,					6 18 32

MÉTHODES POUR TROUVER le lieu de l'Aphélie d'une Planète.

Première
méthode.

1279. IL y a trois méthodes pour déterminer le lieu de l'aphélie d'une planète, la première & la plus simple de toutes sert principalement pour le soleil, elle peut servir aussi quelquefois pour les planètes, en

voici l'explication. Lorsqu'on a plusieurs observations d'une planète, faites en différens points de son orbite, il faut chercher celles qui donnent deux points diamétralement opposés; & si les temps de ces observations different exactement d'une demi-révolution, on fera sûr que ces deux observations sont l'une dans l'aphélie, & l'autre dans le périhélie; ainsi en comparant deux à deux un grand nombre d'observations, on ne pourra manquer de tomber sur celles qui indiqueront la place des apfides.

Soit l'aphélie d'une planète en A (*fig. 73*), & le périhélie en P , la partie ABP de l'ellipse est égale à la partie ACP , elles sont parcourues l'une & l'autre dans l'espace du temps de la demi-révolution, par exemple, en $182^j 15^h 7' 40''$, s'il s'agit du soleil (1312). Nous prenons ici la révolution anomalistique, c'est-à-dire, par rapport à l'apogée; mais dans une première approximation l'on se contenteroit de la révolution tropique (1161), en supposant l'aphélie immobile pendant une demi-révolution.

Fig. 73.

Si l'on prend un autre point quelconque D avec le point E qui lui est opposé, la partie $DACE$ de l'ellipse exigera plus de temps que la partie $DBPE$, parce que la première renferme l'aphélie, c'est-à-dire, l'endroit où le mouvement de la planète est le plus lent, tandis qu'au contraire la partie DBE , dans laquelle se trouve le périhélie, doit être parcourue d'un mouvement plus rapide & en moins de temps.

Ainsi les points A & P des deux apfides sont les seuls qui étant diamétralement opposés par rapport au foyer de l'ellipse, fassent aussi deux intervalles de temps égaux; on fera donc assuré de connoître le lieu des apfides, si l'on trouve deux longitudes qui étant diamétralement opposées comme A & P , répondent aussi à des temps éloignés d'une demi-révolution, c'est-à-dire, de la moitié du temps qu'il faut à la planète pour revenir à son apside, & il suffira de chercher dans le nombre

Méthode
de Képler.

des observations d'une planète, les deux qui satisferont à la fois à cette double condition.

1280. Cette maniere de déterminer le lieu de l'aphélie d'une planète fut employée pour la première fois par Képler dans le XLII^e. Chapitre de son livre de *Stella Martis*, pag. 208, où il s'exprime en ces termes : *Perpende itaque quòd si Mars à puncto apogæi eundo dimidium temporis restitutorii insumat, sine hujus temporis, omninò confectis 180 gradibus, sit futurus in puncto perigæi. At si jam hoc spatium temporis auspicetur uno die postquam in apogæo fuit, incipiet igitur cursum à 26' 13" ab apogæo, finietque in 180° 38' 2", itaque dimidio temporis plus dimidio itineris curret per 11' 49" : contrarium si die uno ante apogæum inciperet.* M. l'Abbé de la Caille avoit trouvé cette méthode, & il en fit l'objet d'un mémoire qu'il lut à l'académie le 16 Juin 1742 ; il y appliqua des observations qu'il fit ensuite en 1743 (*Mem. acad.* 1742, pag. 139). Il a ensuite employé cette méthode dans sa théorie du soleil (*Mem. acad.* 1757, pag. 121), en annonçant qu'il l'avoit trouvée très-bien expliquée dans le livre de M. Manfredi de *Gnomone meridiano Bononiensi*, imprimé en 1736 ; enfin je l'ai retrouvée moi-même dans Képler, où l'on rencontre en général une grande partie des belles idées qui ont été mises en œuvre par ceux qui l'ont suivi ; au reste il faut convenir que cette méthode est si naturelle, & découle si naturellement de la loi du mouvement elliptique, qu'il n'est pas surprenant que trois personnes l'aient imaginée séparément.

1281. Pour faire usage de cette méthode, il est bon de connoître la proposition suivante ; elle sert à trouver une quantité qui ajoutée au temps de l'observation, donne celui du passage par l'aphélie. *La différence des vitesses, aphélie & périhélie, est à la vitesse périhélie, comme la différence entre l'intervalle de temps des deux observations, & la demi-révolution anomalistique, est au temps que la planète emploiera pour arriver à son aphélie.*

Soit a le mouvement diurne dans l'aphélie, p le mouvement

Démonstration de cette proportion.

Fig. 73.

mouvement diurne dans le périhélie ; c la différence trouvée par observation entre le temps par DPE ; (fig. 73), & la demi-révolution anomalistique ; t la quantité cherchée , ou le temps qui répond à l'arc AD ; alors on aura cette proportion , $p : a :: t : \frac{ta}{p}$, c'est-à-dire, la vitesse périhélie est à la vitesse aphélie , comme le temps par AD est au temps par PE . Si à la demi-révolution anomalistique de A en P , on ajoute le temps par AD , & qu'on ôte le temps par PE , on aura $t - \frac{ta}{p}$ pour la différence entre l'intervalle observé & la demi-révolution anomalistique ; différence que nous avons appelée c ; ainsi $t - \frac{ta}{p} = c$, ou $tp - ta = pc$, ce qui se réduit à cette proportion , $p - a : p :: c : t$, & par conséquent à la règle que nous voulions démontrer.

1282. EXEMPLE. Le lieu du soleil observé au Cap de Bonne-Espérance par M. de la Caille le 30 Juin 1751, à $0^h 2' 55''$ de temps moyen au Cap, ou le 29 à $22^h 58' 40''$ de temps moyen réduit au méridien de Paris, étoit de $3^s 8^o 9' 2'' 3$; & le 29 Décembre à $22^h 58' 45''$, il étoit de $9^s 8^o 30' 5'' 0$, l'apogée ayant dû avancer dans cet intervalle de $32'' 7$, il faut les ajouter à la première longitude pour la réduire, par rapport à l'apogée, au même état que si l'apogée étoit immobile, & l'on aura $3^s 8^o 9' 35'' 0$, dont l'opposite devoit être $9^s 8^o 9' 35''$, moins avancé de $20' 30''$ que le vrai lieu observé : le 30 de Juin il faut au soleil $8^h 36' 10''$ pour parcourir cette quantité ; ainsi le 30 Juin à $7^h 34' 50''$, le soleil dut être exactement à l'opposite du lieu qui fut observé ensuite le 29 Décembre ; l'intervalle de temps moyen entre ces deux moments est de $182j 15^h 23' 55''$, plus long de $16' 13''$ que la demi-révolution anomalistique supposée par M. de la Caille de $182j 15^h 7' 42''$, ce qui prouve que le soleil n'étoit pas encore à son apogée dans la première observation. Si l'on fait cette proportion qui vient d'être démontrée (1281) : l'excès de la vitesse du soleil

Epoque du
Soleil.

périgée sur la vitesse du soleil apogée, qui est de $4'$; est à la vitesse périgée $61' 12''$, comme $16' 13''$ de temps que nous voulons avoir de moins sur l'intervalle des deux observations, font à $4^h 8' 7''$, on aura ce qu'il faut au soleil le 30 Juin pour avancer d'une quantité suffisante; on ajoutera cette quantité au 30 Juin $7^h 34' 50''$, & l'on aura le moment du passage du soleil par l'apogée le 30 Juin 1751 à $11^h 42' 57''$ temps moyen à Paris. La longitude du soleil pour cet instant là est aisée à conclure de l'observation, elle se trouve de $3^s 8^o 39' 56''$; c'est le lieu de l'apogée du soleil qui résulte de ce calcul; c'est en même temps le vrai lieu & le lieu moyen du soleil le 30 Juin 1751, $11^h 42' 57''$, temps moyen à Paris: d'où l'on tire la longitude moyenne (1325) pour le dernier jour de l'année 1749 à midi moyen à Paris, $9^s 10^o 0' 46'' 5$; celle que M. de la Caille a adoptée dans ses tables; est $9^s 10^o 0' 43'' 4$; & la longitude de l'apogée $3^s 8^o 38' 4''$, (*Mém. acad.* 1757, pag. 121). Il a aussi déterminé le lieu de l'apogée pour 1496 de $3^s 3^o 58'$ (*Mém.* 1749, pag. 56, 1757, pag. 140), & pour 1684 de $3^s 7^o 28'$, par les observations de M. de la Hire, ce qui peut en faire connoître le mouvement (1311).

1283. Il est bon d'avertir que si les nombres précédens ne sont pas tout-à-fait les mêmes dans la règle donnée par M. de la Caille, (*Mém. acad.* 1757, pag. 141. *Leçons d'astron. art.* 706), c'est parce que j'ai employé, conformément à la démonstration de l'art. 1281, la vitesse périgée, & non pas la vitesse apogée, dans le second terme de la proportion. Quand on emploie la vitesse apogée, on trouve pour quatrième terme le temps qu'il faut ajouter à l'observation faite vers le périgée; ainsi dans l'exemple précédent on dira, $4'$ font à $57' 12''$ vitesse apogée, comme $16' 13''$ font à $3^h 51' 56''$; ajoutant cette quantité à la date de l'observation périgée, 29 Décembre, $22^h 58' 45''$, on a le 30 Décembre $2^h 50' 41''$ pour le temps du passage au périgée, donc ôtant le 30 Juin $11^h 42' 57''$,

trouvé ci-dessus pour le temps du passage à l'apogée, il reste $182j\ 15^h\ 7'\ 44''$; cette quantité ne diffère pas sensiblement de la demi-révolution anomalistique établie par M. de la Caille, de $182j\ 15^h\ 7'\ 42''$ dans les *Mém. de l'acad.* pour 1757, pag. 141, & de $182j\ 15^h\ 7'\ 53''$ dans ses *Leçons élém. d'ast.* p. 1761. art. 708, pag. 242; mais qui selon moi est de $182j\ 15^h\ 7'\ 40''\frac{1}{4}$ (1312). Au contraire si l'on suivoit le précepte & l'exemple qu'il donne dans les deux endroits cités, on ajouteroit $3^h\ 51'\ 56''$ à l'observation du 30 Juin, & $4^h\ 8'\ 6''$ à celle du 29 Décembre, on trouveroit pour le temps de l'apogée, 30 Juin, $11^h\ 26'\ 46''$, & pour celui du périhélie, 30 Décemb. $3^h\ 6'\ 51''$ l'intervalle est de $182j\ 15^h\ 40'\ 5''$, trop grand de $32'\ 20''$, qui est le double de la différence entre $3^h\ 51'\ 56''$ & $4^h\ 8'\ 6''$. Cette différence prouve assez l'exactitude de la règle que nous venons de substituer à celle de M. de la Caille.

1284. On peut aussi trouver le lieu de l'aphélie par des observations éloignées seulement d'un quart de cercle : lorsqu'on connoît l'équation du centre, & qu'on s'en est bien assuré par des observations faites dans les moyennes distances, (art. 1257 & suiv.). Il suffit de prendre deux observations qui soient faites l'une vers l'aphélie, l'autre dans la moyenne distance ou à peu près, pour connoître exactement le lieu de l'aphélie. On calculera pour chacune de ces observations l'équation du centre, en supposant le lieu de l'aphélie tel qu'on le connoît, & l'on prendra la différence de ces deux équations, si les deux observations sont du même côté de l'aphélie, ou la somme si l'une étoit avant l'aphélie & l'autre après; la différence ou la somme de ces deux équations sera la quantité dont le vrai mouvement doit différer du mouvement moyen, qui est toujours supposé connu dans l'intervalle des deux observations; si ce vrai mouvement calculé diffère trop du mouvement moyen, c'est-à-dire, s'il en diffère plus que le mouvement vrai observé, ce sera une preuve

Seconde
méthode pour
corriger l'aphélie.

qu'on a supposé le lieu de l'aphélie trop près de l'observation faite dans la moyenne distance.

Fig. 73.

1285. En effet, soit une planète en B , (fig. 73.) dans sa moyenne distance, ayant comme Jupiter $5^{\circ}\frac{1}{2}$ d'équation du centre, & en D à 6° de son aphélie supposé connu à peu-près, ayant un demi-degré d'équation du centre, la différence de ces deux équations est 5° ; c'est la quantité dont le mouvement moyen doit surpasser le mouvement vrai dans l'intervalle de deux observations. Je suppose que les deux points B & D soient éloignés l'un de l'autre exactement du quart de la révolution de Jupiter en temps, (environ trois ans), en sorte que le moyen mouvement soit de 90° ; le mouvement vrai doit être, suivant le calcul précédent, de 85° , c'est-à-dire, plus petit de 5° que le mouvement moyen, & je suppose que par l'observation on l'eût trouvé de 86° , plus petit seulement de 4° que le mouvement moyen, c'est-à-dire, moins différent du moyen mouvement que suivant le calcul; alors je raisonne ainsi: en éloignant dans mon calcul l'aphélie A de l'observation faite en B , l'équation en D se trouvera plus grande, étant plus loin de l'aphélie; mais l'équation en B ne changera pas sensiblement, parce que vers les moyennes distances l'équation ne varie presque point; ainsi la différence des deux équations en D & en B , deviendra moindre qu'elle n'étoit dans la première supposition, & elle approchera davantage de l'observation, suivant laquelle on vient de supposer qu'il n'y avoit que 4° de différence entre le vrai & le moyen mouvement, au lieu de 5° qu'on avoit trouvés par le calcul.

Ainsi cette différence entre le vrai & le moyen mouvement, trouvée trop grande par le calcul, m'apprend que le lieu de l'aphélie supposé dans ce calcul, étoit trop voisin de l'observation B ; on peut l'en éloigner de quelques minutes pour voir ce qui en résultera sur la différence du mouvement vrai au mouvement moyen, & par une ou deux tentatives trouver enfin le lieu de l'apside A , qu'il faut employer pour

que la différence calculée soit d'accord avec la différence observée.

1286. La troisième méthode pour trouver le lieu de l'aphélie d'une planète, a lieu pour Mercure ou pour Vénus, (1317) c'est celle que j'ai donnée dans les Mémoires de l'acad. pour 1766, à l'occasion de ma théorie de Mercure, & qui m'a fait trouver soit pour les temps les plus anciens, soit pour le temps où nous sommes, le lieu de l'aphélie de Mercure. Je suppose qu'on ait observé la plus grande digression de Mercure dans le temps qu'il est à ses moyennes distances du soleil, & que la distance ou le rayon vecteur change rapidement; si l'on connoît déjà la moyenne distance & l'excentricité, l'on calculera facilement à quel endroit il faut placer l'aphélie, pour que le rayon sur lequel se trouve la planète, soit précisément de la longueur convenable à la digression observée.

Troisième
méthode.

Soit C (fig. 73) le lieu de Mercure dans sa moyenne distance, vu de la terre T sur le rayon TC qui touche l'orbite, la plus grande digression étant alors l'angle STC , & la distance à l'aphélie ASC . Si dans les tables dont nous nous servons le lieu de l'aphélie étoit mal indiqué, en sorte que l'aphélie y fut marqué en D , en faisant avancer le point D en A la ligne SC arriveroit en SG , & l'élongation de Mercure seroit égale à l'angle STG , plus grande par conséquent que l'élongation STC ; si donc on a trouvé par le calcul des tables une élongation trop petite, il n'y a qu'à rapprocher l'aphélie du lieu de l'observation en laissant toujours Mercure à la même longitude ou sur la même ligne SFG , ou si l'on veut en conservant la même longitude moyenne. Ainsi dans le cas où l'on veut augmenter l'élongation pour accorder les tables avec l'observation, il faut augmenter le lieu de l'aphélie, si l'anomalie est moindre que 6 signes, le diminuer si Mercure est dans les six derniers signes de son anomalie. Un degré d'erreur dans le lieu de l'aphélie change de $\frac{1}{110}$ la distance au soleil; & comme la plus grande di-

Fig. 73.

gression est alors d'environ 21° , il en résulteroit $5'$ d'erreur sur cette digression ; or certainement on peut l'observer à 15 ou 20 secondes près, donc alors on doit connoître le lieu de l'aphélie de Mercure à 3 ou 4 minutes près, par le moyen de la plus grande digression observée entre 3 & 4 signes, ou entre 8 & 9 signes d'anomalie moyenne.

Le 24 Mai 1764 à $8^h 7' 50''$ temps moyen, j'observai la longitude de Mercure $2^s 26^{\circ} 50' 35''$, il étoit alors dans sa plus grande digression à $22^{\circ} 51' 12''$ du soleil, notre rayon visuel touchoit son orbite à la moyenne distance vers $9^s 8^{\circ}$ d'anomalie ; je calculai cette longitude par les tables de M. Halley, & je la trouvai trop grande de $1' 14''$; mais en augmentant dans ces tables la longitude de l'aphélie de $14' \frac{1}{2}$ sans changer la longitude de Mercure, l'anomalie devenoit plus petite aussi bien que le rayon vecteur, l'élongation de Mercure devenoit aussi moindre, & la longitude de Mercure se trouvoit d'accord avec l'observation (*Mém. acad. 1766, pag. 458*) delà il s'ensuit que la longitude de l'aphélie étoit trop petite dans les tables de M. Halley, aussi je l'ai augmentée de $10'$ dans mes tables, & je l'ai supposée de $8^s 13^{\circ} 49' 30''$ pour 1764. Ayant calculé de la même manière les 16 observations anciennes de Mercure qui sont rapportées dans l'almageste de Ptolomée, j'ai reconnu qu'il y avoit plusieurs degrés à ôter du lieu de l'aphélie que les tables donnoient pour ces temps-là ; ainsi le 25 Avril 261 ans avant J. C. à $4^h 31'$, temps moyen au méridien de Paris, la longitude de Mercure fut observée de $1^s 23^{\circ} 40'$ que je réduis à $1^s 23^{\circ} 8'$, a cause de l'erreur des tables & du catalogue de Ptolomée (918) ; le lieu du soleil devoit être alors $10^s 29^{\circ} 49'$, & l'élongation $23^{\circ} 19'$; tandis que par les tables de M. Halley, elle n'auroit été que de $22^{\circ} 23'$, c'est-à-dire plus petite de $56'$; en augmentant de $18''$ le mouvement annuel de l'aphélie de Mercure, & le supposant à $7^s 4^{\circ} 8'$ de longitude pour ce temps-là, l'erreur n'est plus que de $11'$, ce qui

est peu sensible pour ces anciennes observations (*Mém. acad.* 1766, pag. 498).

1287. La quatrième méthode pour déterminer l'aphélie ne suppose point qu'on ait une des plus grandes digressions, ni des longitudes observées précisément dans les apfides ; mais elle exige trois conjonctions ou oppositions, c'est-à-dire, trois longitudes héliocentriques, & elle donne tout à la fois l'excentricité, l'aphélie, & l'époque de la longitude moyenne, ce fera l'objet des articles suivans ; nous l'expliquerons d'abord pour les cas les plus simples, ensuite nous la donnerons d'une manière plus générale (1293).

Quatrième
méthode.

Méthode pour corriger à la fois les trois élémens d'une Orbite.

1288. N O U S avons vu séparément, (1259, 1279 ; 1284), les méthodes que l'on peut suivre pour trouver l'équation & les apfides d'une planète ; nous allons rassembler l'esprit de ces méthodes & en tirer une méthode pour trouver par trois observations les trois élémens d'une orbite, savoir l'excentricité, le lieu de l'aphélie, & l'époque ou lieu moyen qui en résulte nécessairement (1282) ; je suppose trois observations réduites, comme on le verra ci-après (1296), & je suppose aussi les élémens à peu-près connus.

Pour bien faire sentir l'esprit de cette méthode, je rappellerai ici trois choses qui doivent être familières à tous ceux qui s'occupent du calcul astronomique ; 1^o, l'équation de l'orbite est la plus grande qui soit possible vers trois signes & quelques degrés d'anomalie moyenne, alors elle est à son *maximum*, elle augmente à peine en passant d'un degré à l'autre (1256), en sorte que l'anomalie moyenne peut être alors plus ou moins grande, sans que l'équation en soit affectée ; ainsi dans ces cas-là on pourroit se tromper sur le lieu de l'aphélie, sans qu'il en résultât aucune erreur sur

l'équation, ni sur la longitude calculée : 2° , l'équation de l'orbite, ou la différence entre la longitude moyenne & la longitude vraie, est additive depuis le périhélie jusqu'à l'aphélie, c'est-à-dire, dans les six derniers signes d'anomalie; on l'ajoute alors à la longitude moyenne pour avoir la longitude vraie; elle est soustractive depuis l'aphélie jusqu'au périhélie, c'est-à-dire, qu'on retranche l'équation de la longitude moyenne pour avoir la longitude vraie : 3° , le mouvement moyen d'une planète dans l'espace d'une ou de deux révolutions, est assez bien connu pour qu'on puisse toujours le supposer exact; car les moyens mouvemens se déterminent par la comparaison des observations les plus anciennes; ainsi il ne peut y avoir d'erreur sensible dans l'espace de quelques années; d'où il résulte que si l'erreur de l'époque, ou de la longitude moyenne d'une planète est connue pour un des points de son orbite, elle est également connue, ou plutôt elle est la même dans tous les autres points, elle ne fait que se combiner avec les erreurs qui proviennent des autres élémens, sans que cette erreur de l'époque, prise en elle-même, soit différente.

Si l'on avoit deux observations faites précisément dans les moyennes distances, c'est-à-dire, à trois signes d'anomalie moyenne, & à neuf signes, il seroit aisé de corriger par ces deux observations, 1° , l'époque des moyens mouvemens, 2° , l'équation du centre : en effet, si l'équation du centre est bonne, c'est-à-dire, si celle qu'on a employée dans le calcul des tables est exacte, il n'y aura entre le calcul & l'observation, d'autre différence que celle de l'époque des moyens mouvemens, puisque le lieu de l'aphélie n'influe point dans le calcul des longitudes prises vers les moyennes distances : s'il n'y a d'autre erreur que celle de l'époque, elle sera égale dans les deux observations, car nous supposons le moyen mouvement exactement connu; ainsi l'erreur des tables étant trouvée égale à 3° & à 9° d'anomalie, ce sera une preuve que l'équation du centre est

est exacte ; mais que l'erreur des deux calculs vient uniquement de l'époque de la longitude qui est mal établie.

Si l'équation du centre est aussi défectueuse, l'erreur fera plus ou moins grande, parce qu'à 3^s d'anomalie l'équation du centre se retranche de la longitude moyenne pour avoir la véritable, mais à 9^s elle s'ajoute ; ainsi dans l'une des deux observations l'erreur de l'équation du centre augmentera celle de l'époque, & dans l'autre observation elle la diminuera ; par ce moyen l'erreur totale fera plus grande dans une observation que dans l'autre, & cela du double de l'erreur qu'il y a eu dans l'équation du centre.

Si, par exemple, l'erreur de l'époque est — 5', c'est-à-dire, qu'il y ait dans l'époque des tables 5 minutes de trop, & que l'erreur de la plus grande équation soit — 2', alors ces deux erreurs s'accumuleront à 9^s d'anomalie moyenne, parce que l'équation y est additive ; en sorte qu'on aura ajouté 2' de trop, à raison de l'équation qui est trop grande, & 5' de trop, à raison de l'époque qui est trop avancée ; la longitude calculée aura donc 7' de trop. Au contraire vers 3^s d'anomalie on n'aura que 3' de trop, c'est-à-dire, que l'erreur des tables ne fera que de 3', parce que l'équation qui est trop grande de 2', étant soustractive, dans ce cas-là on aura ôté 2' de trop ; & l'époque ayant 5' de plus qu'il ne faut, il ne restera que 3' d'erreur.

La différence entre ces deux erreurs des tables 7' & 3' est donc 4', & cette différence partagée en deux parties donnera 2', erreur de l'équation du centre. En général, supposons que l'on ait deux longitudes vraies observées, vues du soleil, c'est-à-dire, en conjonction ou en opposition dans les moyennes distances d'une planète ; qu'on ait calculé pour les mêmes instans les deux longitudes héliocentriques par les tables astronomiques, & qu'on ait trouvé p & m pour les erreurs des tables.

1289. Soit e l'erreur des tables, quant à l'époque

En jettant les yeux sur la table de l'équation de l'orbite d'une planète, on voit combien elle varie pour chaque degré d'anomalie moyenne aux environs de l'aphélie ; par exemple, il y a $1' 59''$ pour le soleil, car si l'anomalie moyenne augmente d'un degré en partant de l'aphélie, l'équation augmente de $1' 59''$; si l'on trouvoit donc l'erreur des tables vers ce point-là de $1' 59''$ en plus, on jugeroit que l'aphélie est trop avancé d'un degré ; car, puisque la longitude des tables est trop grande, c'est une preuve qu'on n'a pas retranché assez pour l'équation, si elle est soustractive ou que la planète ait déjà passé son aphélie ; c'est-à-dire, que l'anomalie moyenne étoit trop petite, & par conséquent le lieu de l'aphélie trop avancé. Si la planète étoit en-deçà de son aphélie, & qu'elle ne l'eût pas atteint ; ce seroit la même chose, avec cette différence que l'erreur en plus prouveroit une équation additive trop grande, & une anomalie moyenne trop petite, d'où résulteroit également un lieu de l'aphélie trop avancé.

1291. Soit γ l'erreur sur le lieu de l'aphélie qu'on se propose de déterminer, & n l'erreur des tables dans l'observation faite aux environs de l'aphélie, en supposant, comme je l'ai dit, qu'on ait déjà corrigé dans ces tables l'équation du centre & l'époque ; soit e la plus grande équation du centre, je dis que l'erreur n , divisée par e , & multipliée par 57° , qui est l'arc égal au rayon, (dont le logarithme est $5,31442$) donnera la correction de l'aphélie, qu'il faudra ajouter à celui des tables, si la longitude calculée est plus petite que la longitude observée, c'est-à-dire, si n est une quantité positive.

Correction
de l'aphélie.

En effet, l'équation du centre pour un degré quelconque d'anomalie est à peu-près $e \sin. \text{anom.}$, comme on le verra (liv. XXI^e. 3343) ; si cette anomalie est une petite quantité de minutes ou de secondes, exprimée par γ , les petits arcs étant sensiblement égaux à leurs sinus, lorsqu'on les réduit en décimales du rayon en les divisant par l'arc égal au rayon (1242), on

aura $\frac{e\gamma}{57^\circ}$ pour l'équation du centre; on divise par 57° ; parce que γ doit être exprimé en décimales du rayon, & pour cet effet il faut le diviser par le rayon lui-même qui soit homogène avec γ , alors $\frac{\gamma}{57^\circ}$ devient une fraction du rayon.

Puisque l'équation du centre est $\frac{e\gamma}{57^\circ}$, cette quantité fera égale à l'erreur n des tables, donc $\gamma = \frac{n57^\circ}{e}$. Je suppose ici que la planète soit précisément dans son aphélie, & que l'erreur de l'aphélie γ soit l'anomalie elle-même toute entière, mais il est aisé d'appercevoir que ce seroit la même chose quand il y auroit 2 ou 3^o de différence, c'est-à-dire, quoique la planète fût éloignée de quelques degrés de son apside. Par exemple pour le soleil, si au lieu de le supposer exactement dans l'apogée, je suppose l'apogée trop peu avancé, d'un degré, l'anomalie du soleil sera d'un degré, au lieu d'être zéro, l'équation qui devoit être nulle fera 1' 59" soustractive, & la longitude trop petite d'autant, l'erreur des tables sera donc \mp 1' 59". Je suppose ensuite que l'anomalie fût réellement de deux degrés, & que par la même erreur on la supposât de trois degrés, en faisant la longitude de l'apogée trop petite d'un degré; il y auroit toujours 1' 59" d'erreur dans l'équation & dans la longitude calculée, parce que l'équation augmente de 1' 59" pour chaque degré d'anomalie aux environs de l'apogée, soit dans le troisième degré, soit dans le premier; c'est-à-dire, quoique la planète soit éloignée de son aphélie de plusieurs degrés.

Variation
de l'équation
près de l'aphé-
lie.

1292. On peut se passer aisément des formules précédentes, en examinant dans la table de l'équation du centre, ainsi que nous l'avons dit, quelle est la quantité dont l'équation varie pour un degré d'anomalie moyenne, on trouve 19' 38" pour Mercure, 50" pour Vénus; 10' 0" pour Mars, 5' 30" pour Jupiter, 6' 16" pour Saturne; d'où il est aisé de conclure, par une simple proportion, quel est le changement qu'on

doit faire au lieu de l'aphélie, quand on connoît l'erreur des tables qu'il s'agit de corriger, & qui dépend toute entière de cette longitude de l'aphélie.

La méthode que je viens d'expliquer pour déterminer les élémens de l'orbite d'une planète, suppose que les trois observations soient faites exactement dans les trois points indiqués, & elle suppose en même temps que les corrections soient très-petites; cependant en supposant même les observations faites à plusieurs degrés de l'aphélie & des moyennes distances, on parviendroit encore, avec quelques essais ou quelques tâtonnemens, à trouver les mêmes corrections.

Mais pour procéder d'une manière plus lumineuse & plus exacte, je vais expliquer la méthode rigoureuse, quoiqu'indirecte, par laquelle on peut trouver les trois élémens d'une orbite par trois observations, avec toute la précision qu'on voudra, sans être assujetti à des observations faites précisément dans les apsides, ou dans les moyennes distances.

Méthode plus générale pour déterminer exactement par trois observations l'orbite d'une Planète.

1293. DANS les méthodes précédentes, (1257; 1279, 1287), nous avons considéré séparément la plus grande équation & le lieu de l'aphélie, ou nous avons supposé des observations faites exactement dans les points de la plus grande équation, & dans ceux des apsides; nous allons donner une méthode qui est plus générale, par laquelle on peut avec trois longitudes héliocentriques quelconques, déterminer rigoureusement le lieu de l'aphélie, l'excentricité & l'époque de la longitude moyenne; ce sont les trois principaux élémens de l'orbite d'une planète. Les méthodes les plus ingénieuses, les plus géométriques, les plus directes qu'on ait données jusqu'ici, ne sont point comparables pour la facilité à la méthode indirecte, ou de fausse position,

Elémens
qu'il faut dé-
terminer.

que nous allons expliquer ; ainsi elle nous tiendra lieu de toutes les autres.

Méthodes
directes de
plusieurs
Auteurs.

1294. On peut voir, si l'on en est curieux, plusieurs méthodes pour parvenir au même but, dans les mémoires de 1723, & dans les élémens d'astronomie de M. Cassini, pag. 172 ; la huitième ressemble un peu à celle que nous allons expliquer ; mais elle est encore un peu plus indirecte à cause de l'usage qu'on y fait de l'hypothèse elliptique simple dans quelques-unes des approximations. M. Halley avoit résolu le problème par une construction géométrique, où il employoit l'intersection de deux hyperboles, (*Philos. transf. n^o. 128, 1676*). M. de la Hire publia une solution de ce problème dans le Journal des Sav. (*Mars 1677*) ; par une méthode très-belle dont il donna ensuite la démonstration dans son grand traité des sections coniques : liv. VIII^e. pr. 25. M. Newton en donna depuis une autre solution, au moins aussi belle que la précédente, (*Phil. nat. princ. math. lib. I. prop. 21.*) Voici le problème qu'il se propose : *Trajectoriam circa datum umbilicum describere quæ transibit per puncta data & rectas positione datas continget*, mais il cite la solution de M. de la Hire, en disant qu'elle n'est pas fort différente de la sienne ; celle de Newton se trouve dans Keill, & dans les institutions astronomiques de M. le Monnier, pag. 545. M. Niccolic dans les mém. de 1746, pag. 291, donna une autre méthode fondée sur de nouvelles propriétés des sections coniques, dans laquelle il déterminant l'espèce & la position d'une orbite planétaire, connoissant la position & le rapport de trois rayons vecteurs de cette orbite, & il en donna le calcul de deux manières différentes. Toutes ces méthodes étoient utiles pour le cas où Képler s'étoit trouvé, après avoir fixé trois distances de Mars au Soleil, par une multitude d'observations & de calculs (1219), mais comme dans la pratique ordinaire de l'astronomie, on ne connoît ni la longueur des rayons vecteurs, ni la position de la directrice de l'ellipse ; je vais détailler une autre

Pour déterminer l'orbite d'une Planète. 79

méthode employée par M. de la Caille, (*Mém. acad.* 1750, pag. 20), qui ne suppose que les trois longitudes observées & les temps des observations, elle est beaucoup plus commode & plus facile à employer, & & je vais l'expliquer encore plus clairement & avec des calculs plus exacts que je n'avois fait dans les mémoires de 1755, pag. 218 & suiv.

1295. La révolution d'une planète est la première chose que l'on doit connoître (1153); ainsi le moyen mouvement d'une planète est donné dans l'intervalle de deux observations; le mouvement de l'aphélie doit être aussi connu, par des observations éloignées auxquelles on aura appliqué la méthode expliquée ci-dessus (1279 & suiv.) parce que trois observations ne peuvent déterminer qu'une ellipse fixe & immobile; mais dans l'intervalle des trois observations qu'on emploie, il ne peut pas y avoir une erreur considérable sur le mouvement de l'aphélie

Le moyen mouvement supposé connu.

Les trois observations doivent être, autant qu'il est possible, éloignées d'un quart de révolution, c'est-à-dire, deux aux environs des apsides, & l'autre aux environs de la moyenne distance, ou deux aux moyennes distances, & une à l'apside; car quoique la méthode ne soit pas assujettie à cette condition, le résultat n'en fera que plus concluant & plus sûr, si l'on a cette attention. Elles peuvent aussi être éloignées de plusieurs révolutions entières pourvu que l'on connoisse assez bien le mouvement de la planète, & celui de son aphélie pendant tout l'intervalle qu'on aura pris.

On suppose dans la méthode suivante, que l'on connoît déjà, du moins grossièrement, l'excentricité & le lieu de l'aphélie; on ne peut manquer de les connoître quand il s'agit des planètes; d'ailleurs on a vu ci-devant (1259, 1279), la manière de les trouver, en supposant même qu'on n'en eût aucune idée.

1296. Les trois longitudes héliocentriques dont on fait choix pour déterminer les élémens d'une orbite planétaire, doivent être réduites au plan de l'orbite, & non

Conditions nécessaires dans les observations.

à l'écliptique (1134); je fais cette remarque afin d'avertir que les astronomes publient toujours les résultats des longitudes observées réduites à l'écliptique; ainsi il est nécessaire, dans le cas dont nous parlons, d'y faire une réduction pour les rapporter au plan de l'orbite, c'est-à-dire, d'y ajouter la réduction ordinaire (1130), si c'est dans le premier ou le troisième quart de l'argument de latitude, & de la soustraire, si c'est dans le second & le quatrième quart; au contraire de ce qui a lieu dans les calculs faits avec les tables, où il s'agit de réduire à l'écliptique une longitude qui est d'abord comptée sur l'orbite.

Ces trois longitudes qui sont destinées à déterminer les trois principaux éléments de l'orbite, doivent encore être corrigées des inégalités que peuvent y causer les attractions planétaires, suivant les calculs de M. Clairaut, *Mém. acad.* 1754, ou ceux que j'ai donnés dans les mémoires de 1758, 1760, 1761, & dont on trouvera la méthode dans le XXII^e livre, de l'attraction; si par ces méthodes on a trouvé que Jupiter avance de 30'' le lieu de Mars par son action sur cette planète, il faudra ôter 30'' du lieu de Mars observé, pour avoir la longitude, dégagée de cette inégalité étrangère à l'orbite, & n'avoir plus à calculer que les inégalités de l'orbite elliptique dont il s'agit de trouver les éléments.

Ces observations doivent être aussi dégagées de l'aberration, qui augmente toujours les longitudes des planètes dans leurs oppositions, (•Liv. XVII. 2850).

Quant à la situation des trois points où l'on choisit ces observations, la plus convenable est d'avoir trois points de l'orbite, qui soient à peu-près à 90° l'un de l'autre, & placés de manière qu'il y ait deux des observations faites vers les apses, ou deux vers les moyennes distances: si l'on a deux observations vers les apses, le lieu de l'apside sera mieux déterminé; si l'on a deux observations vers les moyennes distances, & seulement une vers l'apside, l'équation de l'orbite se trouvera avec plus de précision, parce qu'elle fera

sera déterminée par le double de sa valeur ; mais le lieu de l'apside sera déterminé dans ce cas-là avec une précision moindre de moitié que dans le premier cas.

Je diviserai le procédé de cette méthode en trois parties ; dans la première je supposerai qu'on connoît l'excentricité , & je chercherai le lieu de l'aphélie ; dans la seconde je changerai d'excentricité pour avoir un autre lieu de l'aphélie ; dans la troisième je chercherai par le moyen d'une troisième observation , quelle est de ces deux excentricités celle qu'on doit préférer.

1297. Dès que l'on connoît la durée de la révolution d'une planète , on fait exactement combien il y a de temps , ou combien il y a de degrés d'anomalie moyenne entre deux instans quelconques où cette planète aura été observée : par exemple , si ces deux instans sont éloignés du quart de la durée de cette révolution anomalistique , il y aura toujours un quart de cercle pour la différence des anomalies moyennes , car il ne faut pas perdre de vue que les temps & les anomalies moyennes marchent toujours uniformément , & sont toujours proportionnels , comme nous l'avons dit plusieurs fois (1234).

Pour trouver le lieu de l'aphélie.

Si l'on est toujours en état de connoître la différence ou la somme de deux anomalies moyennes , il n'en est pas ainsi de ces anomalies elles-mêmes ; car pour connoître chacune de ces anomalies moyennes , il faudroit connoître & le lieu de l'aphélie , qui est le point d'où elles se comptent , & l'excentricité qui sert à trouver l'anomalie moyenne , par le moyen de l'anomalie vraie , supposée à peu-près connue (1244). Cette considération fournit le moyen de reconnoître par deux observations si le lieu de l'aphélie d'une planète qui se trouve dans les tables , est exact , en supposant qu'on connoisse l'excentricité ; car ayant les deux longitudes observées on aura (en retranchant le lieu de l'aphélie) , deux anomalies vraies supposées , on cherchera l'anomalie moyenne qui répond à chacune par le moyen des deux proportions connues (1240 & 1241) , & de l'excentricité supposée connue ; si ces deux anomalies moyennes diffèrent entre

Première hypothèse de l'excentricité.

elles autant que l'exige l'intervalle des deux observations, elles sont exactes l'une & l'autre, & par conséquent le lieu de l'aphélie est bien connu & a été bien supposé.

Si des deux observations que l'on a choisies, l'une est avant l'aphélie & l'autre après, ce sera la somme des deux distances à l'aphélie que l'on prendra pour la comparer avec le moyen mouvement calculé pour l'intervalle des deux observations; mais pour plus d'exactitude; on doit faire en sorte qu'une de ces observations soit près de l'apside, & que l'autre en soit éloignée, ou de 90° (1284), ou de 180° (1279).

Diverses
suppositions
de l'aphélie.

1298. Si les deux anomalies vraies supposées ne donnent pas la différence d'anomalie moyenne, telle qu'elle doit être, c'est-à-dire, si elles ne donnent pas le même intervalle de temps que l'on a par observation, c'est une preuve qu'elles ne sont pas bonnes; c'est par cette épreuve qu'on appercevra si le lieu de l'aphélie qu'on a supposé ou d'après les tables, ou par une simple conjecture, n'est pas exact; dans ce cas on y supposera quelques minutes de plus ou de moins, on recommencera le même calcul; & l'on verra ainsi par l'événement de différentes suppositions, quelle est celle qu'il faut adopter, & quel est le lieu de l'aphélie qu'il faut prendre, pour représenter l'intervalle de ces deux premières observations (avec l'excentricité qui est connue, ou employée dans cette première hypothèse). Ainsi j'appelle *première hypothèse* une excentricité supposée, avec le lieu de l'aphélie qui lui correspond en satisfaisant à l'intervalle des deux observations; pour parvenir à cette hypothèse on est obligé de passer par diverses suppositions pour le lieu de l'aphélie.

1299. Pour que le lieu de l'aphélie trouvé dans la première hypothèse fût bien déterminé, il faudroit nécessairement que l'excentricité fût exacte; car pour réduire l'anomalie vraie en anomalie moyenne, on fait nécessairement usage de l'excentricité, comme on le voit dans les deux analogies ci-dessus, (1240 & 1241).

Si l'on suppose une autre excentricité, & qu'on refasse les mêmes calculs, on aura pour seconde hypothèse un résultat différent pour le lieu de l'aphélie, en employant toujours les deux mêmes observations; on pourroit faire ainsi une table de différentes excentricités, & à côté de chacune on écriroit le lieu de l'aphélie qui répond à chaque hypothèse d'excentricité.

Seconde hypothèse d'excentricité.

1300. Pour savoir maintenant quelle est la véritable excentricité que l'on doit choisir, ou celle de toutes nos hypothèses qui est la bonne, nous emploierons une troisième observation que je suppose éloignée d'environ 90° d'une des précédentes, sur laquelle on fera la remarque suivante. L'intervalle de temps entre l'observation aphélie, & l'observation faite 90° avant ou après l'aphélie, étant connu, on aura la différence entre les deux anomalies moyennes; mais si l'on se trompoit sur l'excentricité, ou ce qui revient au même, sur l'équation du centre, toute l'erreur tomberoit sur l'anomalie qui est à 90° de l'aphélie, parce que l'équation y est fort grande, & cette erreur seroit nulle dans l'aphélie où l'équation du centre est nulle, ou du moins fort petite; ainsi la différence entre l'anomalie moyenne vers l'aphélie & l'anomalie moyenne à 90° de-là, seroit affectée de toute l'erreur commise sur l'équation de l'orbite; c'est ainsi que l'équation se trouvera déterminée.

Pour trouver l'excentricité.

On prendra donc l'excentricité de la première hypothèse avec le lieu de l'aphélie connu, ainsi qu'il a été déterminé pour cette première excentricité (1298), on formera deux anomalies vraies avec les deux longitudes vraies, dont une soit fort éloignée de l'autre, on les convertira en anomalies moyennes, & si la différence de ces deux anomalies moyennes n'est pas exactement ce que l'on fait qu'elle doit être, on choisira une autre excentricité avec la position de l'aphélie qui lui répond, c'est-à-dire, la seconde hypothèse, on verra laquelle des deux satisfait mieux au second intervalle, & par une simple règle de trois on trouvera quelle est celle qui satisfait à l'intervalle d'anomalie moyenne qui

est entre ces deux observations; & quelle est la longitude de l'aphélie correspondante; cette excentricité avec le lieu de l'aphélie qui lui répond, seront conformes aux trois observations, & le problème sera résolu.

1301. EXEMPLE. Je suppose trois oppositions de Mars observées en 1743, 1751 & 1753, c'est-à-dire, les longitudes de Mars sur son orbite, vues du soleil pour les temps moyens, comme il suit, en appliquant aux trois longitudes sur l'écliptique les réductions $-17''$, $-50''$, $+13''$. On peut voir le détail de ces observations dans les mémoires de 1755.

Temps moyen des Observ.	Longit. dans l'orbite.	Différ. d'anom. moy.
1743. 15 Fév. 19 ^h 17' 40''	4 ^s 27° 16' 15''	6 ^s 21° 30' 45''
1751. 14 Sept. 8 28 0	11 21 34 10	
1753. 16 Nov. 10 28 33	1 24 47 37	1 26 6 50

En prenant les lieux de l'aphélie dans les tables de M. Halley, 5^s 1° 23' 37'', 5^s 1° 33' 37'', 5^s 1° 36' 9'', je forme trois anomalies vraies 11^s 25° 52' 38'', 6^s 20° 0' 33'', 8^s 23° 11' 28'', je convertis les deux premières anomalies vraies en anomalies moyennes, après avoir pris ce qui s'en manque pour aller à 360 degrés, & cela en faisant les deux hypothèses suivantes pour l'excentricité, c'est-à-dire, en la supposant d'abord de 1417 parties, ensuite de 1427, la distance moyenne du soleil étant toujours de 10000.

PREMIERE HYPOTHÈSE : je prends l'excentricité telle qu'elle est dans les tables de M. Halley 1417, la moyenne distance étant de 15236, 9 suivant le même auteur; je la réduis à ce qu'elle seroit si la moyenne distance de Mars étoit l'unité, & supposant aussi l'aphélie tel qu'il est dans ces tables, les deux anomalies vraies donnent, au moyen des analogies rapportées ci-dessus, (1240, 1241), deux anomalies moyennes qui font 11^s 25° 3' 15'' 1 & 6^s 16° 35' 21'', 6 dont la différence 6^s 21° 32' 6'' 5 est trop grande de 1'

Déterminer l'orbite d'une Planète. 85

21" 5 ; car suivant les tables, & à raison du temps écoulé entre les deux observations, la différence doit être de $6^s 21^o 30' 45''$, en prenant dans les tables de M. Halley, soit le moyen mouvement de Mars, soit celui de son aphélie.

En continuant la même hypothèse d'excentricité je fais une autre supposition pour l'aphélie ; j'augmenté de dix minutes les lieux de l'aphélie employés dans la première supposition, je forme par conséquent deux anomalies vraies moindres de 10' que les précédentes ; je les convertis en anomalies moyennes ; je trouve $11^s 24^o 51' 15'' 5$, & $6^s 16^o 27' 0'' 9$, dont la différence est de $6^s 21^o 35' 45'' 4$, c'est-à-dire, trop grande de 5' 0". Ainsi pour avoir changé l'aphélie de 10' l'erreur qui étoit de 1' 21" 5, est devenue 5' 0" ; c'est-à-dire, a augmenté de 3' 38" 5 ; on dira 3' 38" 5 : 10' 0" :: 1' 21" 5 : 3' 43" 8, ainsi pour rendre nulle cette erreur de 1' 21" 5 ; il auroit fallu diminuer de 3' 43" 8 les lieux de l'aphélie, au lieu de les augmenter de 10' : par ce calcul nous sommes donc assurés que l'excentricité tirée des tables de M. Halley, & employée dans cette première hypothèse, avec un lieu de l'aphélie diminué de 3' 43" 8 ou en nombres ronds 3' 44", satisfera à l'intervalle des deux observations. Il faut actuellement faire la même opération avec une autre excentricité, c'est-à-dire, former une seconde hypothèse.

SECONDE HYPOTHÈSE : je prends une excentricité 1427 plus grande que celle de M. Halley de 10 parties, en conservant le grand axe toujours le même, en sorte que les log. constans soient 0,0407930 & 4,2859524, & supposant l'aphélie tel qu'il est dans ses tables, je convertis les deux anomalies vraies en anomalies moyennes, (1240, 1241), ce qui donne $11^s 25^o 2' 52'' 7$, & $6^s 16^o 34' 0'' 5$, dont la différence $6^s 21^o 31' 7'' 8$, est plus grande de 22" 8 que celle qui doit avoir lieu suivant les tables, qui sont exactes à cet égard, puisque la révolution est exactement connue. Je forme donc une

seconde supposition en augmentant le lieu de l'aphélie de $10'$; il en résulte deux autres anomalies vraies, qui doivent aussi se convertir en anomalies moyennes ; le calcul étant fait on aura $11^{\circ} 24' 50'' 53''$, 9 & $6^{\circ} 16' 25' 40''$, 1 dont la différence est plus grande de $4' 1'' 2$, qu'elle ne doit être suivant les tables.

1302. Ainsi en augmentant de $10'$ le lieu de l'aphélie dans cette seconde hypothèse d'excentricité, l'erreur de l'anomalie moyenne qui étoit de $22'' 8$ est venue à $4' 1'' 2$, c'est-à-dire, a augmenté de $3' 38'' 4$, donc pour la faire diminuer de $22'' 8$ & la réduire à rien, on dira $3' 38'' 4 : 10' :: 22'' 8 : 1' 2'' 6$, & l'on aura la quantité qu'il falloit ôter de l'aphélie des tables pour concilier les deux premières observations, avec le moyen mouvement des tables, dans l'hypothèse de 1427 d'excentricité.

Il faut choisir entre les deux hypothèses.

C'est donc l'aphélie des tables de M. Halley diminué de $3' 43'' 8$ avec 1417 d'excentricité, ou diminué de $1' 2'' 6$ avec 1427, qui satisfait aux deux premières observations ; il faut par le moyen de la troisième observation choisir entre ces deux hypothèses d'excentricité, ou trouver une excentricité qui soit plus ou moins grande que celles-là ; en y joignant le lieu de l'aphélie corrigé à proportion, elle représentera non-seulement les deux premières, mais encore la troisième observation.

Dernière hypothèse.

1303. L'intervalle de temps qu'il y a entre la seconde & la troisième observation, donne pour différence d'anomalie moyenne $56^{\circ} 6' 50''$, suivant les tables de M. Halley : l'on convertira en anomalies moyennes les anomalies vraies dans la seconde & dans la troisième observation avec 1417 d'excentricité, l'aphélie des tables étant diminué de $3' 43'' 8$, & avec 1427, l'aphélie étant diminué de $1' 2'' 6$, on aura pour la première hypothèse la demi-anomalie vraie $48^{\circ} 22' 24'' 1$, & pour la seconde $48^{\circ} 23' 44'' 7$, les anomalies moyennes sont dans la première $107^{\circ} 13' 43'' 4$, & $163^{\circ} 21' 31'' 4$ dont la différence est trop grande de $58''$, & pour la seconde hypothèse $107^{\circ} 20' 42'' 3$ & $163^{\circ} 25' 7'' 6$

Déterminer l'orbite d'une Planète. 87

dont la différence est plus petite que $56^{\circ} 6' 50''$ de $2' 24'' 7$; ainsi ajoutant ces deux différences qui sont en sens contraires, on voit que le changement de 10 parties dans l'excentricité, produit $3' 22'' 7$ de variation dans le mouvement d'anomalie moyenne pour cet intervalle de temps; on trouvera par une proportion que $58''$, qui est l'erreur de la première hypothèse, donnera 2, 86, il faudra donc ajouter 2, 86 à l'excentricité 1417 de la première hypothèse (1301), & l'on aura 1419, 86 excentricité qui représentera également la troisième observation, pourvu qu'on y joigne l'aphélie qui doit lui correspondre; or on trouvera la correction du lieu de l'aphélie en disant $3' 22'' 7 : 2' 41''$, $2 : : 58'' - 0 : 46'' 1$; car puisque la première hypothèse d'excentricité 1417 avec le lieu de l'aphélie diminué de $3' 43'' 8$ a donné $58''$ de trop, & que la seconde hypothèse d'excentricité 1427 avec le lieu de l'aphélie diminué de $1' 2'' 6$, (c'est-à-dire, de $2' 41'' 2$ moins que dans la première hypothèse), a donné $2' 24'' 7$ de moins qu'il ne falloit pour la différence d'anomalie moyenne, en sorte que l'erreur a changé de $3' 22'' 7$, il est clair que pour corriger les $58''$ de la première hypothèse, il faut diminuer l'aphélie de $46'' 1$ de moins que dans la première hypothèse ou il y avoit $3' 43'' 8$; ainsi l'on corrigera l'aphélie des tables seulement de $2' 57'' 7$.

On peut encore faire cette proportion d'une autre manière; & chercher quel est le lieu de l'aphélie qui doit convenir à la nouvelle excentricité 1419, 86; car si avec la première supposition d'excentricité 1417, il faut ôter $3' 43'' 8$ de l'aphélie des tables, & si avec la seconde supposition d'excentricité 1427, il faut ôter $1' 2'' 6$, c'est-à-dire, $2' 41'' 2$ de moins; on peut dire $10 : 2' 41'' 2 :: 2, 86 : 46'' 1$ correction de l'aphélie qui répond à 2, 86 de variation dans l'excentricité; on a donc $3' 43'' 8$, moins $46'' 1$ ou $2' 57'' 7$, comme par l'autre méthode, pour la correction de l'aphélie qui doit répondre à l'excentricité 1419, 86; & qui conjointe

ment avec cette excentricité représentera le premier intervalle aussi bien que le second ; ou la première différence d'anomalie moyenne , aussi bien que la seconde.

Démonstration de son exactitude.

I 304. Je dis en premier lieu que cette excentricité $1419, 86$, avec le lieu de l'aphélie diminué de $2' 57'' 7$ représentera le premier intervalle ; en effet, nous avons trouvé que 1417 d'excentricité avec $3' 43'' 8$ de diminution dans l'aphélie , aussi bien que 1427 avec $1' 2'' 6$ de diminution dans l'aphélie , représentoient également l'intervalle connu , ou la différence d'anomalie moyenne des deux premières observations ; ainsi toute autre excentricité entre ces deux-là , avec une diminution de l'aphélie proportionnée , représentera également cet intervalle ; donc l'excentricité $1419, 86$, avec $2' 57'' 7$ de diminution dans l'aphélie , satisfera à la différence des deux premières observations.

Je dis en second lieu qu'ils satisferont aussi au second intervalle ou à la différence d'anomalie moyenne entre la seconde & la troisième observation : car dans la première hypothèse 1417 , on trouve $58''$ de plus pour cette différence , & dans la seconde hypothèse qui est de 1427 , on trouve $2' 20'' 7$ de moins que l'on ne doit trouver ; donc à proportion on trouvera exactement ce qu'il faut trouver , en employant $1419, 86$. Tout cela sera plus sensible encore pour ceux qui liront ce qui précède la plume à la main en faisant les calculs dont nous avons donné la marche & les résultats. Au reste il n'est pas toujours nécessaire de faire tous les calculs avec la précision des dixièmes de secondes ; comme nous venons de les indiquer , parce qu'il n'est guère possible d'être assuré des longitudes observées ; même à 4 ou 5 secondes près.

On a donc enfin & l'excentricité , & la correction à faire dans le lieu de l'aphélie pour représenter exactement les deux différences d'anomalie moyenne , dans les trois observations données. Si l'on recommence en effet le calcul avec ces élémens , c'est-à-dire , avec l'excentricité $1419, 86$, qui donne pour logarithmes constants

ans

tans 00405878 & 42837740, & avec les trois longitudes de l'aphélie $5^s 1^o 30' 39''$, 3 ; $5^s 1^o 30' 39''$, 3 ; & $5^s 1^o 33' 11''$, 3 ; on trouvera pour les anomalies moyennes qui répondent aux trois momens d'observations, $11^s 25^o 6' 42''$, $6^s 16^o 37' 27''$ & $8^s 12^o 44' 17''$; elles diffèrent entr'elles des mêmes quantités que les trois anomalies moyennes qu'on avoit formées, avec les élémens tirés des tables (1301), c'est-à-dire, de $6^s 21^o 30' 45''$ & de $1^s 26^o 6' 50''$. De ces trois anomalies, il y en a deux qui ne sont pas loin des apfides, & une qui approche plus des moyennes distances ; il seroit également bon que des trois observations choisies, celle du milieu fût faite dans une des apfides de l'orbite de la planète, & les deux autres dans les moyennes distances 90^o avant & après celle du milieu : nous n'avons pu observer aucune de ces conditions dans l'exemple précédent ; car on n'a pas toujours des observations faites dans des positions choisies, & celles de Mars sont des plus rares ; mais on verra du moins par cet exemple que la méthode est générale, & ne suppose que trois observations vers les points principaux de l'orbite, c'est-à-dire, près des apfides & des moyennes distances.

1305. On abrégeroit sensiblement les calculs précédens, si l'on avoit une table de l'équation de Mars pour deux excentricités différentes, à chaque degré d'anomalie ; car au lieu de convertir les anomalies vraies en moyennes, on y appliqueroit l'équation prise dans la table avec la partie proportionnelle répondante à l'excentricité de l'hypothèse actuelle, & l'on auroit à la fin du calcul la plus grande équation de cette hypothèse, sans faire le calcul de l'art. 1258. C'est ainsi que je me suis fait des tables d'équation pour toutes les planètes ; & chacun pourra s'en faire de pareilles, en réunissant mes tables d'équation avec celles qui sont dans M. Halley, & mettant au-dessus de chacune l'excentricité qui lui répond, suivant qu'on les voit à l'article 1278.

1306. Lorsqu'on connoît l'excentricité & le lieu

Longitude
moyenne.

de l'aphélie, il ne reste plus à connoître qu'une longitude moyenne ; pour cela on prendra une des trois anomalies moyennes trouvées ci-devant (1304), par exemple $11^s 25^o 6' 42''$; on y ajoutera le lieu de l'aphélie des tables diminué de $2' 58''$, suivant le dernier résultat, c'est-à-dire, $5^s 1^o 20' 39''$, & l'on aura la longitude héliocentrique moyenne de Mars dans son orbite au temps de la première observation $4^s 26^o 27' 21''$, plus grande de $9''$ que par les tables de Halley, d'où l'on peut conclure toutes les autres longitudes moyennes, (857). Nous parlerons bientôt plus au long des époques des longitudes moyennes (1325).

1307. En employant les oppositions observées en 1745, 1747, 1749, j'ai trouvé qu'il faudroit supposer l'excentricité 14217,61, la correction de l'aphélie $- 3' 18''$, la correction de l'époque $+ 1' 26''$; si l'on prend un milieu entre les deux résultats, on aura la correction de l'époque $+ 47''$ vers l'année 1748, ce qui donne l'époque pour 1750, $0^s 21^o 59' 17''$; la correction de l'aphélie $- 3' 8''$, l'excentricité 14218,1 à laquelle répond la plus grande équation $10^o 42' 13''$ qui surpasse de $2' 11''$ celle des tables de M. Halley.

1308. Telle est la quatrième méthode que j'avois annoncée (1287), pour déterminer l'aphélie d'une planète ; c'est la plus générale de toutes ; & Mercure est la seule planète à laquelle nous ne puissions pas l'appliquer, parce que nous n'avons pas des conjonctions de cette planète qui soient dans trois points de son orbite assez éloignés les uns des autres : il faut recourir pour Mercure à la méthode de l'art. 1286, ou bien supposer que l'on connoisse l'équation du centre par la méthode de l'art. 1267, & chercher l'aphélie par une méthode analogue à celle que j'ai employée pour trouver l'équation de Mercure (1268), après que je m'étois assuré du lieu de l'aphélie par une autre méthode (1286) ; car deux passages de Mercure ne peuvent déterminer que l'un des élémens, ou l'équation, ou le lieu de l'aphélie, & tous les passages de Mercure se réduisent à deux points de son orbite.

On trouve cependant dans les mémoires de l'académie pour 1753, un mémoire de M. Cassini, & dans ceux de 1756, un mémoire de moi, sur cette matiere: nous avons essayé l'un & l'autre de déterminer les élémens de Mercure par le moyen de ses passages sur le soleil; nous manquions alors d'autres observations; mais j'y ai suppléé depuis ce temps-là comme on le peut voir dans les mémoires de 1766.

1309. J'ai employé dans tous les calculs précédens l'hypothèse de Képler, pour déterminer les orbites des planètes; on trouvera dans les *Elémens de M. Cassini* une méthode pour les trouver aussi dans l'hypothèse elliptique simple (1252), c'est l'hypothèse employée par Boulliaud, Wardus & Street; mais quoique M. Cassini fasse un usage fréquent de l'hypothèse elliptique simple; à cause de la facilité qu'elle offre dans les calculs, cependant il avoue, & il démontre même que l'hypothèse de Képler doit avoir une entiere préférence sur l'hypothèse elliptique simple. Ayant fait le calcul du lieu de l'aphélie de Mars dans les deux hypothèses différentes par le moyen de trois observations de 1691, 1696 & 1700, dont une étoit voisine de l'aphélie, M. Cassini trouve le lieu de l'aphélie dans l'hypothèse elliptique simple $5^s 0^o 39' 0''$, & dans l'hypothèse de Képler $5^s 0^o 31' 34''$, avec une différence de $7' 26''$ seulement; en effet les deux hypothèses ne diffèrent point entr'elles quand on prend une observation dans l'aphélie & les deux autres dans les moyennes distances. Mais ayant ensuite choisi trois autres observations de 1694, 1698 & 1702, en des points différens de l'orbite de Mars, M. Cassini trouve $5^s 1^o 28' 23''$ dans l'hypothèse elliptique simple, & $5^s 0^o 39' 2''$ dans l'hypothèse de Képler; on voit que l'hypothèse elliptique simple donne un résultat différent de $49' 23''$ de celui de l'aphélie qu'elle avoit donnée dans le premier calcul, & que ceux de l'hypothèse de Képler ne diffèrent que de $7\frac{1}{2}'$; & même de $5'$ seulement si l'on a égard au mouvement de l'aphélie; cette dernière différence est assez petite pour être attribuée

Défaut de l'hypothèse elliptique simple.

au défaut d'accord entre les différentes observations ; mais la différence de 49' qu'il y a entre les deux résultats de l'hypothèse elliptique simple , ne fauroit être attribuée qu'à l'imperfection de cette hypothèse. Il en est de même de l'excentricité, M. Cassini , en supposant le grand axe de 100000 , la trouve dans l'hypothèse de Képler 9287 & 9292 , suivant qu'il emploie les trois premières ou les trois dernières observations , la différence n'est que de 5 parties ; mais dans l'hypothèse elliptique simple il trouve 9246 & 9115 , résultats qui diffèrent de 131 parties ; & prouvent encore la discordance de cette dernière hypothèse quand on l'applique à différents points de l'orbite ; aussi M. Cassini conclut formellement que l'hypothèse de Képler mérite la préférence , (*Elém. d'astron. pag. 475* , & nous n'avons parlé de l'hypothèse elliptique simple que pour donner une idée de la facilité qu'elle offre , dans les occasions où l'on n'a pas besoin de beaucoup d'exacritude ; ou dans les orbites peu excentriques , comme celles de Vénus & de la terre.

*TROUVER LE MOUVEMENT DES APSIDES
ET LA RÉVOLUTION ANOMALISTIQUE
d'une Planète , par les observations.*

1310. LA méthode que nous avons donnée pour déterminer l'orbite d'une planète (1293) , étant appliquée aux anciennes observations , fait trouver le lieu de l'aphélie dans les temps plus reculés ; & quoique les observations anciennes ne soient pas fort exactes , elles font cependant connoître que les aphélies des planètes ne sont pas fixes dans le ciel. La théorie de l'attraction , (liv. XXII^e.) nous servira de même à prouver le mouvement des apsides ; mais ce mouvement est assez lent pour qu'on ait pu long-temps le négliger dans l'astronomie , & supposer les apsides immobiles , mais ce mouvement n'est pas douteux actuellement , les

observations de Mars le prouvent sur-tout d'une manière incontestable.

1311. La révolution d'une planète, par rapport à son apside, le temps qu'elle emploie à y revenir, ou l'intervalle d'un passage par son aphélie au passage suivant, s'appelle la RÉVOLUTION ANOMALISTIQUE, (1279) parce que l'anomalie recommence à chaque passage dans l'apside : cette révolution anomalistique est toujours un peu plus longue que la révolution par rapport aux équinoxes, parce que le mouvement des apsides se fait suivant l'ordre des signes; pour en déterminer la quantité, nous commencerons par la révolution anomalistique du soleil, ou plutôt de la terre, qui est une des plus faciles à déterminer.

Si le lieu de l'apside de la terre étoit exactement fixe dans le ciel, la révolution anomalistique seroit égale à la révolution sidérale, dont on a vu la détermination (1160); mais puisque l'apogée du soleil a un petit mouvement selon l'ordre des signes, comme les observations paroissent le prouver, aussi bien que la théorie de l'attraction, il faut, pour connoître sa révolution anomalistique, comparer deux passages du soleil par son apogée, & non pas deux retours à une même étoile, ni deux passages par l'équinoxe (82, 884).

1312. L'APOGÉE DU SOLEIL, suivant Ptolomée étoit à $2^{\circ} 5^{\circ} \frac{1}{2}$ (865); par les observations de Waltherus faites à Nuremberg, rapportées & calculées par M. de la Caille (*Mém. acad.* 1749, pag. 60), il étoit le 1 Janvier 1496 à $3^{\circ} 3^{\circ} 57' 57''$. Mais le 1 Janvier 1750, il étoit à $3^{\circ} 8^{\circ} 38'$; donc le mouvement de l'apogée du soleil est de $4^{\circ} 40'$ en 254 ans, ce qui fait $1' 6''$ par année (*Mém. acad.* 1757, pag. 141).

Suivant ces observations de Waltherus, le soleil avoit passé par son périégée le 16 Décembre 1487 à $6^{\text{h}} 5'$ de temps moyen; il y a passé encore le 30 Décembre 1751 à $3^{\text{h}} 9'$, suivant les observations de M. de la Caille; l'intervalle est de 96428j 21^h 4', ce qui donne pour chaque révolution anomalistique 365j 6^h 15' 42'' (*Leçons*

Mouvement
de l'apogée du
soleil.

d'*astron. art.* 708). Ayant comparé ainsi les observations de Waltherus, celles de Tycho-Brahé, & celles de Co-cheou-king faites à la Chine en 1278 & 1279 (418), que le P. Gaubil a rapportées dans son histoire de l'Astronomie Chinoise, tom. II, pag. 107, & dont M. de l'Isle avoit une copie manuscrite encore plus détaillée, M. de la Caille a trouvé la révolution anomalistique, ou la différence entre deux passages consécutifs du soleil par son apogée, $365^j 6^h 15' 24''$, plus grande que la durée de l'année tropique (588), de $26' 35''$; & le mouvement de l'apogée $1^{\circ} 49' 10''$ par siècle, ou $65'' \frac{1}{2}$ par année relativement à l'équinoxe; (*Mém.* 1757, pag. 141). Suivant mes calculs, je trouve la révolution anomalistique de $365^j 6^h 15' 20'' 5$, parce que je suppose le mouvement séculaire du soleil de $46' 10''$ au lieu de $45' 55'' 6$ que suppose M. de la Caille dans ses tables.

Il est $65''$
par année.

1313. Pour voir ce qui résulte de la comparaison des autres observations par rapport au mouvement de l'apogée du soleil, on pourra jeter les yeux sur les positions suivantes de l'apogée déterminées par différens Astronomes, à côté desquelles on voit ce qui en résulte pour le mouvement annuel, par comparaison avec le lieu de l'apogée observé en 1738, (*M. Cassini, pag.* 197):

Hipparque, 140 ans avant J. C.	$2^s 5^{\circ} 30' \dots 1' 3''$
Ptolomée, 140 ans après J. C.	$2 5 30 1 14$
Albatagnius en 883,	$2 22 17 1 7 \frac{1}{2}$
Arzachel en 1076,	$2 17 50 1 51 \frac{1}{2}$
Alphonse en 1252,	$2 28 40 1 10$
Waltherus en 1503,	$3 4 9 1 4$
Copernic en 1515,	$3 6 40 0 25$
Tycho en 1588,	$3 5 30 1 6$
Képler en 1588,	$3 5 32 1 6 \frac{1}{2}$
M. Cassini en 1738,	$3 8 19 8'' \dots$

Il suppose dans ses tables ce mouvement de $1^{\circ} 42' 55''$ par siècle, ou de $1' 2''$ par année, se fondant principalement sur les observations d'Hipparque; M. le Monnier le suppose de $63''$ dans ses Institutions astronomiques; & M. Mayer de $66''$ dans ses nouvelles tables; tout cela diffère peu de la dernière détermination que nous adoptons ici, avec M. de la Caille, & qui est de $65'' \frac{1}{2}$. Le lieu de l'apogée pour 1750 est de $3^{\circ} 8' 38'' 4''$, plus avancé de $30''$ seulement que dans les tables de Mayer.

1314. Les aphélie des autres planètes ont aussi leur mouvement, mais il n'est pas connu avec autant d'exactitude, à cause du peu d'observations anciennes que nous avons sur les planètes; d'ailleurs ce mouvement est si peu sensible, qu'on ne peut le déterminer avec précision, si ce n'est celui de Mars; on en jugera par la différence qu'il y a entre les tables de M. Cassini & celles de M. Halley pour cette partie; différence dont il y a une table ci-après (1331).

Aphélie
des autres
planètes.

Il y a même des Auteurs qui ont totalement négligé ce mouvement des aphélie comme inappréciable, & ont supposé que les apsidés étoient fixes parmi les étoiles fixes, sans autre changement de longitude que celui de $50''$ par an, qui vient de la précession des équinoxes; Street dans ses tables Carolines, faisoit cette supposition; on n'étoit point alors assez avancé dans l'astronomie pour déterminer des quantités aussi petites.

Pour faire sentir le degré de certitude qu'il peut y avoir dans de pareilles déterminations, je vais indiquer en peu de mots quelles sont les observations sur lesquelles M. Cassini a établi ses déterminations du mouvement des aphélie, ainsi qu'il les rapporte lui-même dans ses *Elémens d'astronomie*, & j'y ajouterai quelques recherches particulières que j'ai faites sur la même matière.

1315. L'APHÉLIE DE MERCURE est déterminé dans M. Cassini par les passages sur le soleil de 1661, 1690 & 1697, suivant lesquels il trouve que le 9 Nov. 1690,

Aphélie
de Mercure.

à $18^h 6'$, l'aphélie de Mercure étoit à $8^s 12^o 22' 25''$; il trouve qu'en supposant le mouvement de l'aphélie de $1' 20''$ par année, il représente assez bien les passages de 1631, 1672, 1723 & 1736. Mais j'ai déjà remarqué que tous ces passages arrivent vers les mêmes points de l'orbite, car celui de 1661 étoit le seul qu'on eût observé dans la partie opposée, c'est-à-dire, dans le nœud descendant qui est vers $10^s 20^o$ d'anomalie moyenne; ainsi l'on ne pouvoit guère s'assurer que ce mouvement de l'aphélie satisferoit également aux observations faites dans d'autres points de l'orbite: M. Cassini observe lui-même, (*pag.* 612), que deux hypothèses qui diffèrent entre elles de $1^o 30'$ pour le lieu de l'aphélie, & de $52'$ pour la plus grande équation, ne laissent pas de représenter toutes les deux avec une égale précision ces sept observations; ce qui prouve qu'elles n'étoient pas faites dans des points de l'orbite de Mercure, assez différens les uns des autres, pour bien déterminer le lieu de l'aphélie; on ne doit donc pas être surpris que M. Halley ait représenté également bien les mêmes observations, en réduisant à $52'' \frac{1}{2}$ au lieu de $1' 20''$ le mouvement annuel de l'aphélie de Mercure. Suivant les recherches que j'ai données sur cette matière dans les mémoires de l'académie pour 1756, *pag.* 266, j'ai trouvé le lieu de l'aphélie de Mercure, le 6 Mai 1753, de $8^o 13' 55''$, plus avancé de $9'$ seulement que suivant les tables de M. Cassini, ou de $26'$ plus avancé que suivant M. Halley, ce qui sembloit prouver que le mouvement annuel de l'aphélie de Mercure étoit un peu plus grand que dans les tables de Halley; mais pour s'en assurer il falloit discuter des observations faites dans d'autres points de son orbite, & sur-tout dans les apsidés & les moyennes distances (1267, 1286).

Son mouvement est de plus de 70 secondes par année.

1316. On trouve dans Ptolomée quatorze observations de Mercure, faites dans les plus grandes digressions, & qui seront rapportées à la fin de ce VI^e. liv. Je les ai toutes discutées avec le plus grand soin, & quoiqu'il y en ait deux qu'on ne peut absolument concilier

cilier avec les autres, & quatre qui font trop près des apfides, il me paroît prouvé par les huit autres que le mouvement féculaire de l'aphélie est de $1^{\circ} 57' 40''$ ou environ $1' 10''$ par an; c'est-à-dire, plus grand de 18 fécondes que dans les tables de M. Halley, (1286).

Ce mouvement de l'aphélie de Mercure que j'ai déduit des observations anciennes ne s'accorde pas parfaitement avec les observations du 17^e siècle: le 13 Décembre 1683 à 19^h 39' temps moyen réduit au méridien de Paris, M. Halley trouva la distance de Mercure à l'épi de la Vierge $44^{\circ} 26' 10''$; en y ajoutant $3' 0''$ pour l'effet de la réfraction, on a une distance plus grande de $2' 13''$ que par mes tables, d'où il fuit qu'il faudroit ajouter $29'$ au lieu de l'aphélie qu'elles donnent pour ce temps-là, ce qui nous rapprocheroit de l'aphélie des tables de Halley. Le 4 Mai 1673 à 7^h 53' 25'' Hevelius mefura la distance de Mercure à β du Taureau $12^{\circ} 21' 50''$; en y ajoutant $4' 7''$ pour la réfraction l'on a une distance vraie plus grande de $3' 12''$ que par mes tables. Le 21 Mai 1672 à 8^h 9' 18'' Hevelius mefura la distance de Mercure à β du Taureau de $24^{\circ} 50' 35''$; en y ajoutant $3' 44''$ pour l'effet de la réfraction, on trouve une distance d'ou réfulte une longitude plus grande de $1' 37''$ que par mes tables; ces réfultats semblent indiquer également que j'ai fait le mouvement de l'aphélie trop confidérable; j'ai préféré le réfultat des anciennes observations; mais j'ai cru devoir avertir de cette différence, pour qu'on difcute à loifir les observations d'Hevelius qui pourront éclaircir encore cette queftion. En attendant je fuppose l'aphélie de Mercure en 1750 à $8^{\circ} 13' 33' 3''$ avec un mouvement annuel de $1' 10''$.

1317. L'APHÉLIE DE VÉNUS est presque auffi difficile à déterminer par les anciennes observations que celui de Mercure; & dans les différentes déterminations qu'en donne M. Caffini, il s'y trouve des différences de près de 15 deg. Mais il y a une circonfiance de

Aphélie
de Vénus.

plus qui fait paroître les erreurs beaucoup plus importantes qu'elles ne sont, c'est que l'excentricité de Vénus étant fort petite, une erreur d'un degré sur l'aphélie ne produit pas une minute sur la longitude, comme on s'en apperçoit en jettant les yeux sur la table de l'équation de l'orbite de Vénus qui pour un degré d'anomalie n'est que de 50''; ainsi l'erreur peut paroître fort grande sur le lieu de l'aphélie, sans qu'il en résulte sur le lieu observé de la planète une différence sensible.

Les observations de Vénus faites dans les années 136; 138, 140, donnent 8^s 21° 27' ou 8^s 21° 29' pour le lieu de son aphélie, que M. Cassini estime être le résultat le moins défectueux que fournissent les anciennes observations; (*Elém. d'astr. pag. 544, 564*). Il trouve le lieu de cet aphélie par les conjonctions inférieures de 1715, 1716 & 1718, de 10^s 6° 50'; ainsi dans l'espace de 1578 années le mouvement de l'aphélie auroit été de 45° 21' à raison de 1' 42'' 50''' par année.

En employant de même le lieu de l'aphélie de Vénus déterminé par les observations des années 1592, 1594 & 1601, à 10^s 1° 54' 12'' comparé avec le précédent, on trouve 40° 25' 37'' de mouvement pour 1460 ans ou 1' 39'' $\frac{1}{2}$ par année. M. Cassini compare aussi le lieu de l'aphélie pour 1716 avec celui de 1596, & le mouvement de 4° 56' en 120 ans donne 2' 28'' par année. Mais il n'est pas étonnant que sur un intervalle aussi court, dans lequel la différence n'est que de 4° 56', il y ait une incertitude d'un quart ou d'un tiers de ce mouvement total.

Horoccius, après l'observation du passage de 1639 examinant la théorie de Vénus, fixoit son aphélie à 10^s 5° 0'; si l'on compare cette position à celle de 1716; 10^s 6° 50', on trouve par ces 77 années le mouvement annuel de 1' 26'' (*Elém. d'astr. pag. 564*), & c'est ainsi que M. Cassini l'emploie dans ses tables.

1318. J'ai employé pour cette recherche la même méthode que pour l'aphélie de Mercure (1286). Vénus étant dans sa plus grande digression vers le 7 Août

Mouvement des aphélie des Planètes. 99

1769, j'ai observé sa longitude plusieurs jours de suite, par exemple, le 7 Août à 20^h 52' 57" temps moyen; elle étoit de 3^s 0° 19' 54" plus petite de 25" que par les tables de Halley, qui supposoient l'aphélie de Vénus à 10^s 7° 36' 57". Ces 25" d'erreur exigeroient une augmentation de 1° 15' dans le lieu de l'aphélie de Vénus, ainsi l'époque de cet aphélie pour 1769 seroit par ces observations de 10^s 8° 51' 24"; tandis que par les tables de M. Halley, elle est de 10^s 7° 36' 24" & par celles de M. Cassini, 10^s 8° 5' 14". Cette position de l'aphélie est assez conforme aux observations faites la même année dans le mois d'Avril, aux environs de la plus grande digression, & diminue beaucoup l'erreur des tables.

La digression que j'ai observée à la fin de Juillet 1767, donne à peu-près le même résultat: le 31 Juillet 1767 à 2^h 58' 51" de temps moyen la longitude observée étoit 5^s 23° 6' 45", & l'anomalie de Vénus de 30°. Les tables de M. Halley qui marquoient l'aphélie à 10^s 7° 35' pour ce temps-là donnoient une longitude trop grande de 24"; mais en supposant 10^s 9° 5', c'est-à-dire, 1° 30' de plus, on trouve les tables d'accord avec l'observation, ainsi cette correction de l'aphélie approche beaucoup de celle de 1° 15' que je trouve par la digression de 1769. Chacune de ces digressions a été déterminée par un milieu entre plusieurs observations; je supposerai donc l'aphélie de Vénus au commencement de 1768 à 10^s 8° 58', plus avancé de 54' que dans M. Cassini, & plus avancé de 1° 22' $\frac{1}{2}$ que dans M. Halley.

En comparant cette position de l'aphélie avec celle que Képler donne dans ses tables Rudolphines 10^s 1° 4' pour 1592, je trouve le mouvement de l'aphélie de Vénus 2' 41" $\frac{1}{2}$ par année & 2' 28" en le comparant avec la longitude que M. Cassini trouvoit pour 1596 par les observations de Tycho, 10^s 1° 54'. Ce mouvement de l'aphélie dans Vénus paroît beaucoup plus grand que dans toutes les autres planètes, & c'est la

Son mou-
vement.

raison pour laquelle il semble que M. Cassini l'ait rejeté (pag. 564) ; mais il pourroit arriver que la petitesse de son excentricité rendît plus considérable le mouvement de son aphélie. (Voy. cependant la piece de M. Euler qui a remporté le prix de 1756, art. 61 & 99, & celle de 1748, pag. 52). Dans les tables de M. Halley ce mouvement n'est que de $56'' \frac{1}{2}$, dans celles de M. Cassini $1' 26''$. Pour moi je le supposerai de $2' 30''$.

Aphélie de Mars.

I 319. L'APHÉLIE DE MARS est plus aisé à déterminer, aussi nous voyons que son mouvement est presque le même dans les tables de M. Cassini & de M. Halley, $1' 12''$ dans les premières, $1' 10''$ dans les secondes. Les trois oppositions de Mars observées par Ptolomée, donnent pour le lieu de l'aphélie, 135 ans après J. C. $3^s 29^o 24'$. Par les observations faites à Greenwich en 1691, 1696 & 1700, qui sont très-bien d'accord avec celles qu'on faisoit dans le même temps à Paris, & dont la première & la troisième sont à pareilles distances de l'aphélie, M. Cassini trouve $5^s 0^o 31' 34''$ pour 1696; ainsi dans l'espace de 1561 ans l'aphélie a avancé chaque année de $1' 11'' 47''' 20''''$, (*Elém. d'astr. pag. 478*).

Son mouvement annuel de $70''$.

I 320. Dans mes recherches sur l'orbite de Mars j'ai trouvé le lieu de l'aphélie vers 1748 à $5^s 1^o 26' 10''$, ou moins avancé de $3' 8''$ seulement, que suivant les tables de M. Halley (1307), ce qui prouve que le mouvement annuel de l'aphélie de Mars est assez exactement conforme à ces tables ou de $1' 10''$. Cependant l'époque pour 1748 étant $5^s 1^o 26' 10''$, & celle de Képler pour 1592, $4^s 28^o 49' 50''$ la différence $2^o 56' 20''$ répartie sur 156 ans, donne pour le mouvement annuel $60''$ seulement. Je crois donc qu'en prenant un milieu entre ces trois déterminaisons, on peut le supposer de $1' 7''$ par année, ou $1^o 51' 40''$ par siècle.

Aphélie de Jupiter.

I 321. L'APHÉLIE DE JUPITER calculé par les observations de Ptolomée, se trouve pour l'an 136 de $5^s 14^o 38'$ suivant M. Cassini; mais par les observations de

1588, 1590 & 1592, faites par Tycho, il trouve pour l'année 1590, $6^s 6^o 31'$; & Képler le place pour la même année à $6^s 6^o 44'$. Les déterminations de M. Cassini, pour 136 & 1590 donnent $54''$ par année pour le mouvement de l'aphélie de Jupiter. Par les oppositions de 1719, 1721 & 1723, la longitude de l'aphélie pour l'année 1720, est $6^s 9^o 47'$; cette longitude comparée avec celles de Ptolomée, donne $57'' 2$ par année. Mais les observations de Tycho comparées à celles de ce siècle, donnent le mouvement annuel de $1' 30''$. (*Elem. d'astron. pag. 429*).

Ces différences faisoient soupçonner à M. Cassini, que peut-être le mouvement de l'aphélie étoit accéléré, ou du moins sujet à quelques irrégularités, en même temps que son excentricité est sujette à augmenter (1273), mais peut-être aussi ces différences viennent des inégalités périodiques de Jupiter, produites par l'action de Saturne, dont on n'a pu tenir compte dans toutes ces recherches, & qui sont même encore très-peu connues; au reste, M. Cassini adopte dans ses tables le mouvement annuel de l'aphélie de $57'' 24'''$ d'après les anciennes observations, & M. Halley le suppose de $72''$.

M. Jeaurat ayant comparé entre elles les observations de Tycho, & les dernières qui ont été faites à Paris en 1750, 1761 & 1765, trouve qu'en 1590 l'aphélie étoit à $6^s 7^o 49' 19''$, & en 1762, $6^s 10^o 36' 41''$ d'où il résulteroit $58'' 4$ pour le mouvement annuel de l'aphélie. (*Mém. 1765, pag. 384 & 438*); mais dans ses tables imprimées avec celles de M. Bailly pour les satellites de Jupiter, & dont les fondemens se trouvent dans les mémoires de 1766, il suppose le mouvement de l'aphélie de $79'' 27$ par année, & le lieu de l'aphélie, comme dans les tables de M. Cassini, $6^s 10^o 24' 7''$ pour 1760.

D'un autre côté, M. Euler dans sa seconde pièce sur les inégalités de Jupiter & de Saturne, couronnée en 1752, trouve que l'aphélie de Jupiter doit avancer de

Son mouvement est incertain.

55'' par an, en vertu de l'attraction de Saturne : tous ces différens sentimens font voir la nécessité d'y appliquer encore les observations qu'on pourra faire dans la fuite, pour développer mieux les différentes inégalités de Jupiter & le mouvement de son aphélie.

1322. Le mouvement de l'aphélie de Jupiter, suivant M. Cassini est de 57'' 42 par année ; suivant la théorie que M. de la Grange a adoptée dans le troisième volume de Turin, ce mouvement est de 57'' 20 en vertu de l'attraction de Saturne ; il est sujet encore à une accélération, mais elle est peu sensible. M. Bailly a suivi ces deux déterminations, & dans les calculs qu'il a lus à l'académie le 19 Mars 1769 sur cette matiere, il s'en est tenu à 57'', mais M. Wargentin a préféré 62'' ; comme le mouvement qui satisfait le mieux aux observations, & c'est celui que j'ai adopté dans les tables qui sont dans cette astronomie ; l'époque pour 1750 est 6^s 10° 22' 31'' plus avancée de 7' 58'' que par les tables de M. Cassini, mais moins avancé de 11' 15'' que dans les tables de Halley.

Aphélie de Saturne.

L'APHÉLIE DE SATURNE déterminé par M. Cassini au moyen des trois oppositions des années 127, 133 & 136, se trouve pour l'an 132 à 7^s 24° 14' 29'' : les oppositions de 1686 & de 1694, le donnent en Avril 1694 à 8^s 28° 58', ce qui fait pour le mouvement annuel 1' 20''. (*Elem. d'astron. pag. 373.*)

Par quatre comparaisons différentes des oppositions de Saturne, observées par Tycho depuis 1582 jusqu'en 1599, M. Cassini trouve l'aphélie de Saturne à 8^s 25° 40' 51'' pour le 19 Decem. 1590, moins avancé seulement de 5' 23'' que suivant les tables Rudolphines de Képler, ce lieu comparé à celui de 1694, 8^s 28° 58', donne le mouvement de 3° 17' pour 103 ans, & le mouvement annuel de 1' 55''. Mais ces observations de Tycho comparées avec celles de Ptolomée, donnent seulement 1' 18''. (*ibid. pag. 374.*)

Les observations de 1701, 1708 & 1716 donnent le

lieu du périhélie $2^{\circ} 28' 25''$ pour le 12 Décembre 1708; cette position comparée à celle de 1590, donne pour le mouvement annuel $1' 23'' \frac{1}{2}$.

Il suivroit de tout cela, dit M. Cassini, *pag.* 374. que le mouvement de l'aphélie auroit été plus prompt dans le dernier siècle, ou que la situation du périhélie ne seroit pas exactement opposée à celle de l'aphélie, en sorte qu'il y auroit quelque équation à employer pour le vrai lieu de Saturne dans ces deux points opposés de son orbe, ce qui y formeroit une espèce de libration: en effet, il trouve le périhélie de 1708 moins avancé d'une degré qu'il ne devoit l'être par rapport à l'aphélie de 1694; mais les irrégularités de Saturne sont si grandes, qu'on ne doit pas être surpris de cette différence, car il suffit de six minutes d'inégalité pour produire un degré sur le lieu de l'aphélie; ainsi l'on ne doit pas espérer une précision plus grande que celle d'un degré pour le lieu de l'aphélie, & de $5''$ sur le mouvement annuel de l'aphélie de Saturne. M. Euler dans sa premiere piece sur Saturne; *pag.* 108. adopte le mouvement de l'aphélie, tel qu'il se trouve dans les tables de M. Cassini; c'est-à-dire, $1' 18''$ par an, & se contente d'ajouter 28 minutes aux époques des longitudes de l'aphélie: dans sa seconde piece il trouve que l'aphélie apparent de Saturne doit avancer chaque année de $1' 8''$ seulement; on ne peut rien statuer sur ce mouvement de l'aphélie jusqu'à ce qu'on connoisse la loi & la mesure des nouvelles inégalités; dont j'ai parlé ci-devant (1167).

Son mouvement est incertain.

1324. Dans les nouvelles tables de Saturne qu'on trouvera dans ce livre, où j'ai eu pour objet de satisfaire principalement aux observations faites depuis 30 ou 40 ans, j'ai trouvé que l'aphélie de Saturne devoit être pour 1769, à $9^{\circ} 0' 22''$; à l'égard de son mouvement, je l'ai estimé par la comparaison avec le lieu de l'aphélie qui paroît satisfaire aux observations de Tycho-Brahé, faites vers la fin du XVI^e siècle; car s'il étoit au commencement de 1591 à $8^{\circ} 25' 41''$, & en 1769 à $9^{\circ} 0' 22''$ le progrès est de $4^{\circ} 41'$ en 178 ans, & le mouvement an-

nuel de $1' 34'' 7$; il seroit un peu moindre en employant l'époque de Képler; je le supposerai de $1' 30''$ par année ou $2^{\circ} 30'$ par siècle.

Trouver les époques de la longitude moyenne des Planètes.

1325. AYANT déterminé par les méthodes précédentes (1279, 1286, 1293) le lieu de l'aphélie d'une planète, ou en général celui de l'apside, (car cette méthode convient aussi à l'apogée du soleil & de la lune), on aura par la même une longitude moyenne (1306); d'ailleurs le jour où la planète est dans son apside, sa longitude vraie, sa longitude moyenne & la longitude de son apside sont exactement la même chose; on les connoît donc toutes trois lorsqu'on connoît le lieu de l'aphélie.

Epoque déduite de l'observation.

EXEMPLE. La première des trois observations de Mars (1301) fut faite le 15 Février 1743, à $19^h 17' 40''$, temps moyen, & la longitude moyenne pour le moment de cette observation a été trouvée (1306) de $4^s 26^{\circ} 27' 21''$; de ce moment-là jusqu'au premier Janvier 1744 à midi moyen, Mars a dû parcourir $15^s 17^{\circ} 16' 53''$, à raison du mouvement annuel qu'on a vu ci-devant (1162); si l'on ajoute ce mouvement à la longitude moyenne observée, on aura la longitude moyenne pour le commencement de l'année 1744, $10^s 13^{\circ} 44' 14''$ déduite de l'observation, c'est ce que nous appellons l'époque des moyens mouvemens pour 1744.

Epoques des tables pour le 31 Décembre.

1326. Les époques employées dans nos tables astronomiques sont pour le premier Janvier à midi de temps moyen, à Paris, lorsqu'il s'agit des années bissextiles; mais dans les années communes on choisit le midi du jour précédent qui est celui du 31. Décembre: par exemple, on trouve l'époque du soleil pour 1750, par le moyen de l'observation des équinoxes (884),
de

de $9^{\text{s}} 10^{\circ} 0' 43'' 4$, c'est la longitude moyenne du soleil le 31 Décembre 1749 à midi moyen ; on a introduit cette méthode dans la vue de simplifier l'usage de la table des moyens mouvemens pour les jours du mois ; car dans cette table au moyen de la disposition précédente, il suffit de retrancher un jour dans les deux premiers mois des années biffextilles pour s'en servir en tout temps, au lieu qu'il faudroit faire cette correction sur dix mois, si toutes les époques étoient calculées pour le premier Janvier. En effet dans les tables des moyens mouvemens pour chaque jour du mois, on a coutume de mettre au premier Janvier le mouvement d'un jour, par exemple, $59' 8''$ si c'est pour le soleil ; cela suppose que l'époque est fixée pour la veille ; si elle est pour le midi même du premier Janvier, il n'y a rien à ajouter à l'époque pour avoir la longitude moyenne le premier de Janvier, il faudra donc ôter un jour de la date proposée ou $59' 8''$ du mouvement indiqué par la table, & ainsi des autres jours, jusqu'au premier de Mars ; alors le jour intercalaire ajouté au mois de Février, fait que tous les moyens mouvemens des jours suivans sont devenus plus petits de $59' 8''$, & il n'y a plus aucune correction à y faire, au lieu qu'il faudroit y ajouter le mouvement d'un jour pendant tout le reste de l'année, si les mouvemens avoient été justes pendant les deux premiers mois.

Quand on a l'époque d'une année commune, il faut y ajouter le mouvement moyen pour 365 jours ; & l'on a l'époque de l'année commune qui la suit : si l'on suppose que l'époque de 1750 étoit de $9^{\text{s}} 10^{\circ} 0' 43'' 4$, & qu'on y ajoute $11^{\text{s}} 29^{\circ} 45' 40'' 5$, mouvement du soleil pour 365 jours, on aura $9^{\text{s}} 9^{\circ} 46' 23'' 9$, époque pour 1751 ; mais si l'année suivante est biffextile, il faut ajouter un jour de plus, c'est-à-dire, le mouvement pour 366 jours ; ainsi à l'époque de 1751 on ajoutera $0^{\text{s}} 0^{\circ} 44' 48'' 8$, & l'on aura $9^{\text{s}} 10^{\circ} 31' 12'' 7$ pour l'époque de l'année biffextille 1752 ; la rai-

son de cette différence vient de ce que cette dernière époque commence un jour plus tard que celle des années communes.

Epoques
pour les siècles
éloignés.

I 3 27. On trouveroit aussi par le moyen de la méthode précédente que l'époque des longitudes moyennes du soleil pour l'année commune 1700 est de $9^{\circ} 10' 7'' 19'' 6$, en ôtant de la précédente le mouvement pour 52 années. Si l'on ôte encore le mouvement séculaire, qui est de $45' 55'' 6$ au-delà des cent révolutions complètes, pour 100 années Juliennes dont 25 sont bissextiles, l'on devroit avoir l'époque de 1600 ; mais comme l'année 1700 étoit commune, & que l'année 1600 étoit bissextile, suivant la règle du calendrier Grégorien que nous expliquerons dans le VIII^e. livre, la longitude ou l'époque de 1700 qui est pour le 31 Décembre précédent, se trouve diminuée d'un jour, & rapprochée de 1600 (1326) ; il faut donc ajouter le mouvement d'un jour à l'époque de 1600 trouvée par la règle précédente, afin d'avoir cette longitude pour le premier de Janvier à midi, (& non pour le 31 de Décembre précédent), on aura par ce moyen l'époque de 1600, $9^{\circ} 10' 20' 32''$; en général, quand on voudra conclure l'époque d'une année séculaire bissextile plus éloignée, de celle d'une année séculaire commune, il faudra en ôter le mouvement séculaire, & y ajouter le mouvement diurne.

De même pour avoir l'époque de l'année séculaire commune 1800, par le moyen de l'année séculaire commune 1700, il ne suffit pas d'y ajouter le mouvement séculaire $45' 55'' 6$, parce que ce mouvement suppose 25 bissextiles, & qu'il n'y en a que 24 dans ces cent ans ; mais il faut retrancher le mouvement d'un jour, ou ce qui revient au même ajouter $11^{\circ} 29' 46' 47'' 3$ à la première longitude ; c'est ainsi qu'on trouvera l'époque du soleil pour 1800 par celle de 1700, en y ajoutant ce mouvement séculaire diminué d'un jour, & l'on aura $9^{\circ} 9' 54' 6'' 9$ pour l'époque de 1800.

1328. L'époque d'une année séculaire commune ; telle que 1700, en y ajoutant le mouvement pour 4 années Juliennes, dont une soit biffextile, c'est-à-dire, 1' 50" 2 donne l'époque de 1704. Si vous commencez à compter d'une époque de biffextile, comme 1704, pour trouver celle de 1708, ce sera encore la même chose, parce que dans les deux cas il y a un jour de plus que 4 années communes ; mais pour sentir l'égalité de ces deux cas, il faut deux considérations différentes. Dans le premier cas l'époque de 1700 étoit pour le 31 Décembre précédent, celle de 1704 pour le premier Janvier ; ainsi quoique les 4 années 1700, 1701, 1702, 1703, aient été communes, il y a cependant un jour de plus entre les époques de 1700 & de 1704, à cause de la différente maniere de les compter (1326). Dans le second cas, l'époque de 1704 & celle de 1708, sont bien toutes deux pour le premier Janvier ; mais il y a un jour de plus dans le cours de l'année biffextile 1704 ; ainsi l'intervalle des époques augmente aussi d'un jour, & il se trouve le même qu'entre celles de 1700 & de 1704.

En général, quand on prend le mouvement pour 4, 8, 12, &c. ou un nombre d'années divisible par 4, soit que l'on commence par une époque commune, 1700, 1701, 1702, 1703, 1800, ou par une époque biffextile, on trouve toujours exactement l'époque demandée ; c'est pourquoi nous avons pris le mouvement de 52 années juste pour trouver l'époque de 1700, par le moyen de celle de 1752 (1327), quoique l'une fût commune, & l'autre biffextile ; mais s'il arrivoit que le calendrier eût souffert une ou deux interruptions dans l'intervalle, comme si on alloit de 1700 à 1800, ou de 1699 à 1799, il faudroit diminuer le mouvement de la valeur d'un jour. Dans le cas où l'on va de 1700 à 1800, cette dernière étant une année commune, & son époque étant pour le 31 Décembre aussi bien que celle de 1700, tandis que l'année 1700 a été diminuée d'un jour, la différence des deux époques doit être

nécessairement plus petite d'un jour ; ainsi il faut ôter le mouvement diurne du mouvement séculaire. Dans le cas où l'on iroit de 1699 à 1799 , il faudroit encore ôter le mouvement d'un jour , parce que l'année 1700 a souffert une diminution d'un jour , & que les cent ans compris entre 1699 & 1799 , n'ont que 24 biffextiles. Ainsi quoique l'année 1800 soit commune , on aura exactement les longitudes des années suivantes en ajoutant à celle de 1800 le mouvement pour un an , deux ans , &c. pris dans la table qui est immédiatement après les époques.

Epoques
pour le Calen-
drier Julien.

Pour passer de l'époque de 1600 à celle de 1500 ; il ne suffit pas d'ôter le mouvement séculaire , il faut ensuite ajouter le mouvement de dix jours , parce qu'en 1500 on suivoit le Calendrier Julien , ou vieux style ; & en 1600 l'on avoit pris le nouveau style. Le Calendrier Grégorien ayant supprimé dix jours de l'année 1582 , comme nous le dirons dans le VIII^e livre , l'intervalle de 1500 à 1600 est moindre de dix jours que celui de cent années Juliennes , ou de 36525 jours auquel répond le mouvement séculaire ; on ôte donc dix jours de trop quand on retranche le mouvement séculaire ; ainsi il faut ajouter le mouvement qui répond à ces dix jours : par exemple , l'époque du soleil pour 1600 est $9^s 10^o 20' 32'' 3$; si l'on en ôte $45' 55'' 6$, mouvement séculaire du soleil , & qu'on ajoute ensuite $9^o 51' 23'' 3$, mouvement pour dix jours , on aura $9^s 19^o 26' 0''$, époque de 1500 , plus petite de $26''$ seulement que dans les tables de M. Cassini.

Epoques
avant 1500.

1329. Lorsqu'on connoît une fois l'époque de 1500 ; il n'y a plus aucune variété dans le calendrier , il suffit d'en ôter le mouvement séculaire $45' 55'' 6$, pour avoir l'époque de 1400 ; & continuant toujours la même soustraction , on parvient aux époques des années séculaires qui ont précédé. J'ai prolongé les tables qui sont dans ce livre , en suivant le même progrès , jusqu'à l'an 800 avant J. C. parce que les anciennes observations Caldéennes vont jusqu'à ce siècle-là , & que les

astronomes en font encore quelque usage. Nous n'avons aucun besoin des temps plus éloignés : au-delà de 800 ans avant J. C., l'astronomie ni l'histoire ne fournissent rien qui soit susceptible d'un calcul astronomique.

Le calendrier Julien se prolonge ainsi d'une manière uniforme jusqu'à une époque plus ancienne de 800 ans que l'établissement même du calendrier, fait par Jules César ; dans ces temps reculés il n'y avoit aucune forme constante de calendrier (278) ; ainsi il a bien fallu convenir d'une échelle commune pour mesurer soit les siècles qui ont précédé, soit ceux qui ont suivi l'ère chrétienne. La forme du calendrier Julien est simple, uniforme, commode ; elle a été suivie pendant près de 1000 ans dans l'histoire de l'Europe, elle a été employée par des chronologistes & des astronomes habiles, elle est observée dans les tables de M. Cassini, & je m'en servirai, à son exemple quand je parlerai des anciennes observations, quoique Ptolomée se soit servi des années de Nabonassar ou de la mort d'Alexandre, comme nous le dirons dans le VIII^e livre.

1330. En remontant ainsi par une soustraction continue du mouvement séculaire, on parvient à l'année 100 de J. C., ensuite à l'année 0, & de-là à l'année 100 avant J. C. ; ainsi de l'année 100 de notre ère à l'année 100 avant J. C. il y a 200 ans de distance. Suivant la manière de compter employée par la plupart des chronologistes, il faudroit retrancher un an de la somme des années avant & après J. C. par exemple, l'équinoxe observé par Hipparque l'an 602 de Nabonassar, tombe au 24 Mars de l'année 146 avant J. C. suivant les chronologistes ; si on veut le comparer avec celui de 1765, on aura 1911 pour la somme des années, & cependant il n'y a réellement que 1910 ans d'intervalle, parce que l'année où est né J. C. doit s'appeler *zero*, comme dans M. Cassini, (*Elém. d'astron. pag. 216.*), & non pas l'année 1 avant J. C. ; par ce moyen l'on doit dire que l'équinoxe, dont nous venons de parler, se rapporte à l'année 145 avant J. C. & non pas à l'année 146.

M. Cassini
compte une
année de
moins que les
autres.

EPOQUES des moyens Mouvements des cinq Planètes principales, & de leurs Aphélie pour 1750; avec les Mouvements séculaires, suivant MM. CASSINI & HALLEY, & suivant les nouvelles Tables de cet Ouvrage.

Époques de 1750.

	M. CASSINI.	M. HALLEY.	Différence.	Suivant nos Tables
Mercure,	8° 13' 19" 5"	8° 13' 7" 45"	—11' 20"	8° 13' 9" 50"
Vénus,	1 16 19 21	1 16 19 23	+ 0 2	1 16 19 4
Mars,	0 21 58 43	0 21 58 30	— 0 13	0 21 59 17
Jupiter,	0 4 0 59	0 4 5 17	+ 4 18	0 4 2 26
Saturne,	7 20 41 56	7 20 26 24	—15 32	7 20 38 53

Mouvement séculaire des Planètes.

	M. CASSINI.	M. HALLEY.	Différence.	
Mercure,	2° 14' 16" 54"	2° 14' 2' 13"	—14' 41"	2° 14' 12" 10"
Vénus,	6 19 11 2	6 19 11 52	+ 0 50	6 19 12 12
Mars,	2 1 41 56	2 1 42 20	+ 0 24	2 1 42 10
Jupiter,	5 6 21 30	5 6 28 11	+ 6 41	5 6 27 30
Saturne,	4 23 29 28	4 23 6 0	—23 28	4 23 14 30

Aphélie pour 1750.

	M. CASSINI.	M. HALLEY.	Différence.	
Mercure,	8° 13' 41' 18"	8° 13' 27' 12"	—14 6'	8° 13' 33' 3"
Vénus,	10 7 38 0	10 7 18 31	—19 29	10 8 13 0
Mars,	5 1 36 9	5 1 31 38	— 4 31	5 1 28 24
Jupiter,	6 10 14 33	6 10 33 46	+19 13	6 10 22 31
Saturne,	8 29 13 31	8 29 39 58	+26 27	8 29 53 30

Mouvement séculaire des Aphélie.

	M. CASSINI.	M. HALLEY.	Différence.	
Mercure,	0° 2' 13' 20"	0° 1' 27' 37"	—45' 43"	0° 1' 57' 40"
Vénus,	0 2 23 20	0 1 34 13	—49 7	0 4 10 0
Mars,	0 1 59 38	0 1 56 40	— 2 58	0 1 51 40
Jupiter,	0 1 35 42	0 2 0 0	+24 18	0 1 43 20
Saturne,	0 2 9 44	0 2 13 20	+ 3 36	0 2 23 20

Epoques de la longit. moy. des Planètes. III

Ainsi nous avons expliqué la maniere de déduire d'une seule époque toutes les autres, & de trouver une époque par observation, avec les autres élémens d'une planète, & nous avons donné les résultats de ces méthodes, tels qu'ils sont consignés dans les tables des divers astronomes, avec la différence qu'il y a entre ces mêmes tables. Voici l'époque du soleil qui manquoit à la table précédente.

Epoque du soleil pour 1750 suiv. M. Cassini.	9	10	0	35	
Suivant les tables de Flamsteed.	9	10	0	21
Suivant les dernières tables de Mayer.	. . .	9	10	0	34''7
Suivant les tables de M. de la Caille.	. . .	9	10	0	43,4

1331. Lorsqu'on connoît les époques de la longitude moyenne par observation (1325), ou par les calculs précédens ; on peut avoir la longitude moyenne à tout autre jour de l'année, en y ajoutant le mouvement diurne (1161), autant de fois qu'il y a de jours écoulés depuis l'époque. Supposons qu'on ait trouvé pour 1760 l'époque du soleil ou sa longitude moyenne le premier Janvier à midi moyen. $9^{\circ} 10' 34'' 53''$, & qu'on veuille avoir la longitude moyenne pour le 31 Janvier à midi moyen, on ajoutera le mouvement diurne pris 30 fois, ou $29^{\circ} 34' 10''$, avec l'époque de la longitude moyenne, & l'on aura la longitude moyenne le 31 Janvier ; tel est le fondement de l'usage que nous ferons des moyens mouvemens, en expliquant nos tables.

On pourroit avec les nombres de la table précédente & les règles du calcul des équations (1244), trouver en tout temps le lieu d'une planète sur son orbite vu du soleil ; mais pour abrégér les calculs, je joindrai à cet ouvrage de nouvelles tables astronomiques des cinq planètes, aussi étendues, mais plus exactes que celles de M. Halley & de M. Cassini. Je ne les avois point données dans la première édition de ce livre n'ayant pas eu le temps pour lors de constater divers élémens dont j'avois montré l'incertitude ; mais je les ai presque

tous vérifiés depuis quelques années, comme on l'a vu dans le cours de ce VI^e. livre.

NŒUDS ET INCLINAISONS DES PLANÈTES.

1332. ON a vu dans le livre précédent ce que c'est que les nœuds des planètes (1122, 1137), aussi bien que les inclinaisons de leurs orbites, & l'effet qui en résulte par rapport à nous; il s'agit actuellement d'indiquer les méthodes astronomiques de trouver la situation de ces nœuds & la quantité de ces inclinaisons.

Première
méthode pour
trouver le
nœud.

Lorsqu'une planète n'a aucune latitude vue de la terre elle n'en fauroit avoir vue du soleil, elle est alors dans son nœud (1122), puisqu'elle est dans le plan de l'écliptique; il suffit donc d'observer la longitude géocentrique de la planète, au temps où elle n'a point de latitude, on en conclura sa longitude vue du soleil (1147), & ce fera le lieu du nœud.

Fig. 56.

1333. EXEMPLE. Le 14 Mai 1747, à 10^h 50' 43"; de temps vrai, Mars étant fort près de son nœud descendant, M. de la Caille observa la longitude de cette planète 7^s 6' 15' 10" réduite à l'écliptique, & sa latitude boréale de 54"; la longitude du soleil pour le même instant, déduite des observations faites ce jour-là, & qu'on pouvoit se contenter de prendre dans les tables, étoit de 1^s 23° 38' 10"; ainsi l'angle à la terre, ou l'angle d'élongation *LTS* (fig. 56), étoit de 162° 37' 0": la parallaxe de l'orbe annuel, ou l'angle à la planète *TLS* étoit alors, suivant les tables de M. Cassini, de 11° 11' 57"; ainsi ajoutant cette quantité à la longitude géocentrique observée 7^s 6' 15' 10", on a la longitude héliocentrique de Mars 7^s 17° 27' 7"; de-là il suit que l'angle de commutation, qui est la différence entre cette longitude & celle de la terre, ou l'angle *LST* étoit de 6° 11' 3"; en faisant la proportion de l'art. 1145, on trouvera que 54" de latitude géocentrique

géocentrique répondoient à $19'' \frac{1}{2}$ de latitude héliocentrique. M. de la Caille résout ensuite un triangle PAL , (fig. 54), rectangle en L , dont l'angle A est de $1^\circ 51'$, égal à l'inclinaison de l'orbite de Mars AP sur l'écliptique AL (on la trouvera par l'art. 1357), & le petit côté PL de $19'' \frac{1}{2}$ latitude héliocentrique de Mars; il a l'autre côté AL (3686) de $604''$ ou de $10' 4''$, c'est la distance de Mars à son nœud vû du soleil; donc le nœud descendant de Mars vu du soleil étoit alors à $7^s 17^\circ 37' 11''$ (Mém. acad. 1747, pag. 146).

Fig. 54.

1334. Il faut remarquer dans le calcul précédent qu'en observant plusieurs jours de suite la latitude de Mars, on en pourroit conclure le temps où il avoit été sans latitude, éviter la résolution du dernier triangle, & ne supposer point du tout la connoissance de l'inclinaison.

1335. On peut aussi employer à la recherche du lieu du nœud, des observations faites à égales distances des nœuds, lorsque la latitude héliocentrique d'une planète s'est trouvée de la même quantité, car le milieu entre les longitudes héliocentriques trouvées dans les deux cas, fera le lieu du nœud, en le supposant fixe dans l'intervalle des deux observations.

Seconde méthode.

EXEMPLE. Le 13 Mars 1693, à $17^h 50'$, le vrai lieu de Saturne vu de la terre, étoit à $8^s 22^\circ 56' 30''$, & sa latitude boréale $1^\circ 24' 50''$; le 3 Mai 1699, à $15^h 50'$, la longitude étoit de $11^s 1^\circ 0' 50''$, & sa latitude australe $1^\circ 22' 20''$. En réduisant au soleil ces deux latitudes observées (1145), on a pour les latitudes héliocentriques de Saturne $1^\circ 24' 10''$, & $1^\circ 24' 28''$, que M. Cassini suppose égales, parce qu'une différence de $18''$ n'étoit pas sensible dans les hauteurs méridiennes prises avec les quarts-de-cercles de ce temps-là, mais nous aurons égard à cette différence (1336): les longitudes héliocentriques de Saturne calculées pour les mêmes temps (1147), étoient de $8^s 17^\circ 4' 37''$ & $10^s 25^\circ 16' 49''$, dont le milieu est $9^s 21^\circ 10' 43''$,

c'est la longitude du nœud qui résulte, suivant M. Cassini, de ces deux observations (*Elémens d'astron.* pag. 389).

Corrections
à employer
dans cette mé-
thode.

I 336. Dans l'intervalle de ces deux observations qui est de plus de six années, le lieu du nœud avoit changé d'environ $3' 4''$, ce qui fait sur la latitude une différence de $7''$, dont la latitude étoit plus petite qu'elle n'eût été si le nœud avoit resté immobile, & qu'il faut, pour une plus grande précision, ajouter à la seconde latitude héliocentrique, parce qu'elle eût été plus grande au même point du ciel, si le nœud de Saturne eût été moins avancé de $3' 4''$ dans la seconde observation; au moyen de cette seconde correction, la latitude se seroit trouvée de $1^{\circ} 24' 35''$ pour le 3 Mai 1699, plus grande de $27''$ que la première latitude, ces $27''$ font $11' 32''$, dont il faut diminuer la longitude héliocentrique de Saturne, qui suivant des calculs plus exacts devoit être le 13 Mars 1693, de $10^{\circ} 25' 22' 6''$; par ce moyen l'on a la longitude où il se seroit trouvé en 1699, s'il avoit eu la même latitude $1^{\circ} 24' 10''$ que dans la première observation; cette longitude fera donc de $10^{\circ} 25' 10' 34''$, c'est la longitude à laquelle se seroit trouvé Saturne en 1699 avec une latitude de $1^{\circ} 24' 10''$ égale à celle de 1693 en supposant que le nœud eût été immobile; or la première longitude devoit être de $8^{\circ} 17' 16' 6''$, la différence est $2^{\circ} 7' 54' 28''$, dont la moitié $33^{\circ} 57' 14''$, est la distance de Saturne à son nœud en 1693, qui ajoutée à sa longitude $8^{\circ} 17' 16' 6''$, donne celle du nœud $9^{\circ} 21' 13' 20''$. Nous nous en servons encore pour trouver l'inclinaison de l'orbite (1360). Ainsi le lieu du nœud sera de $9^{\circ} 21' 13' 20''$ pour le 13 Mars 1693, temps de la première observation, plus avancé de $2' \frac{1}{2}$ que suivant le calcul de M. Cassini.

Après avoir indiqué les méthodes qui servent à trouver le lieu du nœud, nous allons exposer ce que l'on fait actuellement de plus exact sur la position des nœuds de chaque planète, & sur le mouvement de ces nœuds;

Nœuds & Inclinaisons des Planètes. 115

On verra par la conformité des résultats trouvés dans l'un & l'autre nœud, soit ascendant, soit descendant, que ces nœuds sont en effet directement opposés & situés par conséquent sur une ligne droite qui passe par le centre du soleil, comme nous l'avons supposé (1117).

1337. LE NŒUD DE MERCURE ne fauroit se déterminer par des observations meilleures que celles de ses passages sur le soleil dans lesquels sa latitude est presque nulle, & nous en avons un assez grand nombre pour y parvenir avec quelque précision : je les ai tous discutés, (*Mém. acad. 1756, pag. 259. & suiv.*), & j'en ai tiré une table des époques de la longitude du nœud, calculée en supposant le mouvement séculaire de $1^{\circ} 15'$, tel que le donne l'observation de 1723, comparée à celle de 1753, enforte que ce mouvement est moindre de $8' 20''$ que le mouvement des étoiles, ou la précession en longitude (917).

Nœud de
Mercure.

Années.	Epoques calculées.	Epoques observées.
1697.	$1^{\text{s}} 14^{\circ} 41' 30''$	$1^{\text{s}} 14^{\circ} 41' 6''$
1723.	1 15 1 0	1 15 1 0
1736.	1 15 10 45	1 15 12 59
1740.	1 15 13 45	1 15 14 45
1743.	1 15 16 0	1 15 16 25
1753.	1 15 23 30	1 15 23 30

On accorderoit encore mieux les différentes observations, si l'on diminoit le diamètre du soleil dans les passages de Mercure sur son disque, ainsi que nous le dirons dans le livre XI^e (2159).

Son mouve-
ment annuel
de $45''$.

Ce mouvement du nœud de Mercure, est donc rétrograde par rapport aux étoiles fixes, d'environ $5''$ par an, je l'avois fixé de même par les seules observations, mais il s'est trouvé parfaitement d'accord avec celui que m'a donné la théorie de l'attraction, discutée ensuite avec soin dans les *Mém. de l'acad.* pour 1758 & 1761, par la méthode qui sera expliquée dans le

XXII^e. livre (3523), & dont on trouvera le résultat ci-après (1347).

1338. Ainsi le mouvement séculaire du nœud de Mercure, que M. Halley a fait de $1^{\circ} 23'$, & M. Cassini de $1^{\circ} 24' 40''$, est certainement beaucoup moindre : M. le Gentil en comparant le lieu du nœud qu'il avoit déterminé en 1753, à $1^{\text{s}} 15^{\circ} 24' 14''$ avec celui que M. Halley avoit fixé en 1677, à $1^{\text{s}} 14^{\circ} 21' 3''$, trouvoit le mouvement du nœud de $50'' 21$ centièmes (*Mém. acad.* 1753, pag. 277). Mais M. de l'Isle a cru qu'on devoit le réduire à $37''$, ce qui supposeroit $13''$ par an pour la rétrocession des nœuds ; car en calculant avec soin les observations faites par Tycho le 22 & le 23 Janvier 1586, M. de l'Isle a trouvé le nœud de Mercure pour ce temps-là, à $1^{\text{s}} 13^{\circ} 5' 8''$, moins avancé de $7' \frac{1}{4}$, que par les tables de M. Halley ; cela prouve du moins que le mouvement du nœud de Mercure est plus lent que M. Halley & M. Cassini ne le supposent ; & il m'a paru toujours impossible que l'action de Vénus & de la terre n'y produisît pas quelque altération. Il est évident qu'une planète attirée, sans cesse vers un plan différent de celui de son orbite, doit s'en rapprocher continuellement, c'est-à-dire, y arriver toujours un peu plutôt à chaque révolution, comme nous l'expliquerons (3516). J'ai supposé dans mes tables ce mouvement de $45''$ par an, & l'époque pour 1750, $1^{\text{s}} 15^{\circ} 21' 15''$.

Nœud de
Vénus.

1339. LE NŒUD DE VÉNUS, suivant les calculs que j'ai faits du passage de cette planète avec la plus grande exactitude, étoit le 3 Juin 1769, à $2^{\text{s}} 14^{\circ} 36' 20''$, comme on le verra dans le livre XI^e ; il n'y a pas une demi-minute d'erreur à craindre dans cette position ; les tables de M. Halley donnoient $2' 36''$ de moins, & celles de M. Cassini, $2' 25''$ de plus ; la différence est peu considérable. M. Hornsby ayant calculé avec soin le lieu du nœud par l'observation d'Horoccius, faite au mois de Décembre 1639, (2040) le trouve à $2^{\text{s}} 13^{\circ} 27' 50''$, le mouvement seroit donc en 129 ans $\frac{1}{2}$ de

68' 30", ou de 31" 7 par année, c'est-à-dire, de 18" $\frac{1}{2}$ par rapport aux étoiles fixes, quantité qui est assez d'accord avec celle de 20" 4, que j'ai tirée des calculs de l'attraction (1347, 3516), & qui me paroît d'une exactitude décisive. M. Cassini avoit déterminé le lieu du nœud par l'observation de Vénus sur le Soleil, le 24 Novem. 1639, à 2^s 13° 28' 22", détermination qu'il jugeoit aussi la plus exacte; cette observation comparée avec le lieu du nœud observé en 1761, à 2^s 14° 31' 30", l'on en tire pour le mouvement du nœud 31" $\frac{1}{4}$ par année, ou 19" par rapport aux étoiles.

1340. M. Cassini emploie aussi à cette recherche une ancienne observation, c'est celle de Timocharès, faite le 11 Oct. 271 avant J. C. dans laquelle Vénus éclipsa l'étoile α de l'aile australe de la Vierge; il trouve le lieu du nœud de Vénus par cette observation, de 1^s 24° 2', comparant cette observation avec le lieu du nœud observé en 1698, à 2^s 14° 1' 45", on a le mouvement de 36" $\frac{1}{2}$ par année, ou de 14" par rapport aux étoiles fixes. L'observation de 1639, par laquelle M. Cassini trouve 2^s 13° 28' 22", comparée avec la position du nœud observée par M. Cassini le 4 Sept. 1698, à 2^s 14° 1' 45", donne 2" $\frac{1}{2}$ de plus pour le mouvement annuel par rapport aux étoiles, ou 34" par rapport aux équinoxes; celles de 1705, de 1710 & de 1731 en différoient très-peu, enforte que M. Cassini s'en est tenu dans ses tables à un mouvement annuel de 34" par rapport aux équinoxes; mais si l'on avoit égard au changement de latitude de l'étoile α (2741); il pourroit en résulter quelque différence dans le lieu du nœud conclu pour le temps de Timocharès.

Son mouvement est de 31".

M. de la Caille, (*Mém. de l'acad.* 1746, pag. 181), rapporte une observation qu'il fit du passage de Vénus par son nœud descendant; le 21 Décembre 1746, à 10^h 37' $\frac{1}{2}$ de temps moyen, Vénus avoit 10^s 3° 52' 17" de longitude géocentrique, & sa latitude étoit nulle; il trouve le nœud à 2^s 14° 23' 10"; il compare cette observation avec celle de M. de la Hire qui détermina

le passage de Vénus par son nœud le 31 Oct. 1692 à 0^h $12' \frac{1}{4}$ du soir, temps moyen, d'où il conclut que Vénus avoit fait à l'égard de son nœud 88 révolutions complètes en 19773^j 10^h $25' 15''$, ce qui donne pour chacune 224^j 16^h $45' 17''$, & le mouvement annuel du nœud de $38''$, au lieu de 30 que donne la théorie; ces observations sont moins décisives & moins éloignées entre elles que celles de 1639 & de 1761, qui donnent à peu-près le même mouvement que la théorie de l'attraction, & je m'en tiendrai à $31''$, pour le mouvement annuel du nœud de Vénus; avec l'époque pour 1750, 2^s 14^o $26' 18''$.

Nœud de
Mars,

1341. LE NŒUD DE MARS peut se déterminer de plusieurs manières; M. Cassini se sert des observations de Tycho, suivant lesquelles le nœud de Mars étoit le 28. Oct. 1595, à 1^s 16^o $24' 33''$. Le 13 Novem. 1721 M. Cassini trouve qu'il étoit à 1^s 17^o $29' 49''$, ce qui donne pour le mouvement séculaire $51' 47''$, ainsi le mouvement annuel du nœud de Mars seroit de $31'' 07$. (*Elém. d'astron. pag. 490*).

Par la comparaison de la même observation de Tycho avec celles qui furent faites en 1700 à Paris & à Greenwich, lorsque Mars étoit dans son nœud descendant; on trouve le mouvement annuel de $34 \frac{1}{4}$ & de $38'' \frac{1}{4}$, suivant qu'on emploie les observations de Flamsteed, ou celles de M. Cassini.

1342. Si l'on compare les observations de 1721 avec la détermination de Ptolomée, (*Almag. liv. XIII. c. 1.*), qui place le terme boréal de l'orbite de Mars à la fin du Cancer ou le nœud ascendant à la fin du Bélier, on voit que dans l'intervalle de 1582 ans le mouvement du nœud a été de 17^o $30'$ & de $66' 22''$ par siècle, c'est-à-dire, pour chaque année, de $39'' 8$, ce qui seroit parfaitement d'accord avec mes calculs faits d'après la théorie, qui donnent $10'' \frac{1}{2}$ pour le mouvement du nœud par rapport aux étoiles, ou $39'' 8$ par rapport aux équinoxes. Mais M. Cassini ayant préféré les observations de Tycho, comparées aux siennes & à celles de Flamsteed,

Son mouve-
ment est de
 $30''$.

s'en est tenu dans ses tables à faire le mouvement annuel du nœud de Mars $34''$. M. Halley dans ses tables le fait de $38''$. M. de la Caille, (*Mém. acad.* 1747, pag. 146), trouve le nœud de Mars à $1^s 17^o 37' 11''$, moins avancé de $7' \frac{1}{3}$, que suivant les tables de M. Cassini, & de $17' \frac{2}{3}$ que suivant celles de M. Halley. Dans les mémoires de 1754, il rapporte des observations faites à l'Isle de France en 1753, par lesquelles il trouva le nœud de Mars à $1^s 17^o 42' 5''$ le 4 Novembre 1753, cette détermination ne diffère que de $35''$ de la précédente, quand on les réduit à une même époque. J'ai aussi observé Mars au mois de Novembre 1768, dans le temps qu'il étoit près de son nœud, & j'en ai conclu l'époque de 1769, $1^s 17^o 44' 23''$ moins avancée de $24'$ que dans les tables de Halley. Les observations que j'ai calculées & discutées avec soin, (*Mém. acad.* 1755, pag. 212. & *suiv.*), soient aussi très-propres à vérifier cet élément avec beaucoup d'exaëtitude : en attendant j'ai pris un milieu entre les déterminations précédentes, & je supposerai le nœud de Mars en 1750 à $1^s 17^o 36' \frac{1}{2}$ & le mouvement annuel de $39'' 8$.

1343. LE NŒUD DE JUPITER est déterminé par M. Cassini pour 1705 à $3^s 7^o 37' 50''$, par un milieu entre plusieurs observations faites à Paris depuis 1692 jusqu'en 1730 ; mais à l'égard du mouvement de ce nœud nous sommes encore dans une fort grande incertitude à ce sujet. Suivant Ptolomée, le nœud étoit de son temps au commencement du Cancer, cela donne le mouvement annuel de $17''$. Képler le supposoit dans ses tables Rudolphines de $4''$ seulement : ce même mouvement, lorsqu'on emploie la conjonction de Jupiter avec l'étoile du Cancer appelée l'Ane austral, arrivée le 3 Septembre 240 ans avant J. C., paroît à M. Cassini de $24'' 9'''$; mais cette observation calculée d'une autre manière par M. le Gentil, ne donne que $10''$. Par l'observation du 26 Septembre 508, rapportée par Boulliaud, dans laquelle Jupiter se trouva en conjonction avec Régulus, M. Cassini trouve $15'' 30'''$;

Nœud de
Jupiter.

au contraire Boulliaud en calculant d'une autre manière la même observation, c'est-à-dire, en supposant que la latitude boréale de Jupiter étoit plus grande d'un doigt, ou de $2' 30''$, trouve ce mouvement $24'' 37'''$: M. Cassini s'en tient dans ses tables à $24''$, tandis que M. Halley l'emploie de $50''$, & que par la théorie de l'attraction, je trouve ce mouvement de $57'' \frac{1}{2}$.

M. le Gentil, dans les mémoires de l'académie pour 1758, ayant calculé diverses observations propres à déterminer le nœud de Jupiter trouve pour 1633, $3^s 6^o 4' 50''$; pour 1716, $3^s 7^o 37' 30''$; pour 1753, $3^s 8^o 16' 17''$ & $3^s 8^o 21' 25''$. Ces observations sont de Gassendi, de Halley, & de M. le Gentil lui-même; en comparant la dernière observation ou la position de 1753 avec l'observation de M. Halley faite en 1716, il trouve $66''$ par année pour le mouvement du nœud; le même résultat se trouve encore en comparant l'observation de 1753 avec l'observation que Gassendi fit en 1633: ce mouvement ne s'éloigne pas beaucoup de celui que la théorie m'a donné de $57'' \frac{1}{2}$; mais il semble qu'on ne sauroit l'accorder avec les anciennes observations; il faudroit supposer une distance de plus d'un degré entre Jupiter & l'étoile pour le moment où, suivant l'observation Caldéenne, Jupiter cacheoit entièrement l'étoile.

Son mouvement paroît d'une minute.

Difficulté sur cette détermination.

1344. Y a-t-il de la méprise dans le passage de Ptolomée? y a-t-il une accélération réelle dans le mouvement du nœud, ou bien le changement de latitude des étoiles (2741), & leurs dérangemens particuliers ont-ils été assez considérables pour influer beaucoup dans le calcul des anciennes observations; c'est ce que je n'entreprends pas de décider; il suffit de voir que ce mouvement est certainement d'environ $1'$ par an, depuis le dernier siècle. Je supposerai donc son mouvement de $60''$ par année, & sa longitude en 1750, $3^s 8^o 16'$ en prenant un milieu entre les deux déterminations dont j'ai parlé.

Nœud de Saturne.

1345. LE NŒUD DE SATURNE vers l'an 136 au rapport

râpport de Ptolomée (*Liv. 13 ch. 1*) étoit au commencement du Cancer ; M. Cassini l'a trouvé en 1700 à $3^s 21^{\circ} 13' 30''$, le progrès est de $21^{\circ} 13' 30''$ en 1560 années : ainsi le mouvement annuel seroit de $48'' \frac{1}{2}$ par ces observations. (*Elémens d'astronomie pag. 397*).

Les Caldéens observerent le premier Mars 228 ans avant J. C. que Saturne étoit deux doigts au-dessous de l'étoile qui est dans l'épaule australe de la Vierge appelée γ par Bayer : deux doigts répondent environ à $5'$, ainsi la latitude de l'étoile étant supposée constamment de $2^{\circ} 48' 55''$, celle de Saturne étoit de $2^{\circ} 43' 55''$; d'où M. Cassini conclut que la latitude vue du soleil étoit de $2^{\circ} 27' 1''$, la distance de Saturne à son nœud $77^{\circ} 21'$, & par conséquent le lieu du nœud à $2^s 21^{\circ}$; ce qui donne le mouvement pour chaque année $56'' 26'''$. Il le suppose, en effet de $57''$ dans ses tables ; mais la grande distance de Saturne à son nœud rend le résultat de cette ancienne observation peu concluant. Boulliaud dans son astronomie Philolaïque (*pag. 253*), rapporte une occultation de Saturne par la lune arrivée l'an 503, d'où il conclut que le nœud de Saturne étoit alors à $3^s 12^{\circ} 36' 21''$. Si l'on compare cette position avec celle que j'ai trouvée par des observations exactes pour 1769, $3^s 21^{\circ} 40' 47''$, on a le mouvement annuel de $25'' 8$, & Boulliaud trouvoit lui-même $26''$ pour ce mouvement.

Tycho-Brahé observa Saturne fort près de son nœud le 29 Décemb. 1592. M. Cassini (*Elém. d'ast. pag. 400*) ayant calculé cette observation, trouve le nœud ascendant à $3^s 20^{\circ} 21' 5''$; cette observation étant comparée à celles de la fin du dernier siècle qui donnent le nœud de Saturne pour 1700, à $3^s 21^{\circ} 13' 30''$, il en résulte pour le nœud un mouvement annuel de $29'' 24'''$ seulement. Sur quoi il faut observer que M. Cassini ayant trouvé $1' 5''$ de différence entre les déclinaisons conclues le 29 Déc. 1592 de différentes observations, il en résulte $24'$ d'incertitude pour le lieu du nœud con-

Incertitude
sur son mou-
vement.

clu des observations de ce jour-là ; ce qui changeroit de $14''$ le mouvement annuel. Il faut aussi observer que la position déterminée pour 1700 par M. Cassini est le milieu de cinq observations dont une diffère de l'autre d'un degré & 9 minutes sur la position du nœud, différence qui produiroit $39''$ sur le mouvement annuel du nœud. Aussi la position du nœud de Saturne & son mouvement, sont de tous les élémens des planètes ceux sur lesquels M. Halley diffère le plus de M. Cassini ; il y a dans les tables de M. Cassini $41'$ de plus pour le lieu du nœud en 1750, & $65' 11''$ de plus pour le mouvement séculaire, que dans celles de M. Halley. Pour moi rejettant la première des cinq déterminations de M. Cassini, & réduisant les quatre autres à l'année 1700, je trouve pour l'époque du nœud $3^s 21^o 14' 7''$, $3^s 21^o 3' 14''$, $3^s 21^o 9' 34''$, $3^s 21^o 18' 24''$, dont le milieu est $3^s 21^o 11' 20''$ pour 1700 ; comparant cette position avec celle que j'ai observée en 1769, je trouve pour le mouvement annuel du nœud $25'' 6$, à-peu-près comme par l'observation de l'an 503.

Dans l'opposition de Saturne observée en 1755, cette planète étoit voisine de son nœud : la latitude héliocentrique de Saturne n'étoit le 18 Juillet 1755 que de $10' 34''$, & sa longitude héliocentrique sur son orbite, étoit alors de $9^s 25^o 35' 52''$; une latitude de $10' 34''$ suppose la distance au nœud de $4^o 2' 17''$, comme il est aisé de le trouver par la résolution d'un triangle sphérique rectangle. (1333), dont un côté est de $10' 34''$, & l'angle opposé de $2^o 30' 36''$ inclinaison de l'orbite de Saturne ; ainsi je trouve le lieu du nœud, suivant cette observation, à $3^s 21^o 33' 35''$; les tables de M. Cassini donnoient $32' 44''$ de plus, & celles de M. Halley $11' 50''$ de moins.

Nœud en
1769.

I 346. Ayant observé moi-même avec soin l'opposition de 1769, j'ai trouvé qu'il falloit ajouter $15'$ à la longitude qui est dans les tables de M. Halley, & supposer pour 1769 $3^s 21^o 40' 47''$; il seroit à souhaiter que nous eussions pour les siècles passés une détermi-

nation aussi exacte. Quoi qu'il en soit, le nœud en 1600, suivant les tables Rudolphines, étoit à $3^s 21^o 0'$, plus avancé de $34'$ que M. Cassini ne le trouve par l'observation de 1592; mais Képler ayant discuté plusieurs observations différentes dans la construction de ses tables, l'on doit avoir quelque confiance à sa détermination; en y comparant mon observation de 1769, je trouve le mouvement annuel de $17''\frac{1}{2}$. En comparant l'observation de 1593 avec la mienne, je trouve $27''$ par année; cependant les calculs de l'attraction m'ont donné $41''6$, ainsi nous devons avouer qu'il est bien difficile de décider quant à présent cette question; les grandes inégalités que j'ai découvertes dans le mouvement de Saturne (1167), font que je n'ose me fier à la théorie seule, & en me rapprochant des observations, je supposerai $30''$ par année; & l'époque du nœud pour 1750, $3^s 21^o 31' 17''$.

1347. Pour rassembler sous un seul point de vue toutes les recherches précédentes sur les nœuds des planètes, j'ai mis dans les tables suivantes les longitudes des nœuds, & leur mouvement suivant les tables de M. Cassini & de M. Halley, & suivant la théorie de l'attraction (1347. *Mém. acad.* 1768 & 1761), enfin leur position & leur mouvement suivant moi; le signe — marque un mouvement rétrograde par rapport aux étoiles fixes; la troisième colonne de la seconde table est le mouvement annuel par rapport aux étoiles fixes suivant la théorie; la quatrième contient ce mouvement par rapport aux équinoxes, c'est-à-dire, la somme ou la différence entre $50''3$ & les nombres de la colonne précédente.

Ce mouvement paroît de $30''$.

TABLE de la longitude du Nœud de chaque Planète pour 1750, & de son Mouvement séculaire suivant les Tables de M. CASSINI & de M. HALLEY.

	Suivant M. CASSINI.		Suivant M. HALLEY.		Selon nos Tables.
	Nœud en 1750.	Mouv. séculaire.	Nœud en 1750.	Mouv. séculaire.	Nœud en 1750.
Mercure,	1 ^s 15° 25' 20"	1° 24' 40"	1 ^s 15° 21' 58"	1° 23' 20"	1 15 21 15
Vénus,	2 14 27 45	0 56 40	2 14 23 42	0 51 40	2 14 26 18
Mars,	1 17 45 45	0 56 40	1 17 56 21	1 3 20	1 17 36 30
Jupiter,	3 7 49 57	0 40 9	3 8 15 49	1 23 20	3 8 16 0
Saturne,	3 22 1 4	1 35 11	3 21 20 5	0 30 0	3 21 31 17

TABLE du mouvement annuel des Nœuds de chaque Planète par rapport aux Etoiles fixes, suivant la théorie de l'Attraction, & suivant les Tables de M. Cassini & de M. Halley; avec le mouvement par rapport aux équinoxes, suivant la théorie (3522).

	Suivant les Tables de M. Cassini.	Suivant les Tables de M. Halley.	Suivant la Théorie.	Mouvement par rapport aux équinoxes.	Suivant nos Tables.
Mercure,	0	0	— 5" 0	45" 3	45"
Vénus,	— 17	— 19	— 20 4	29 9	31
Mars,	— 17	— 12	— 10 5	39 8	39, 8
Jupiter,	— 27	0	+ 7 2	57 5	60
Saturne,	+ 6	— 32	— 8 7	41 6	30

Remarques sur la théorie de ce mouvement.

I 348. Le calcul du mouvement des nœuds que j'ai déduit du principe de l'attraction, se trouve détaillé dans les mémoires de l'académie pour 1758 & 1761; j'en donnerai un abrégé dans le livre XXII^e. (3525); en parlant de l'attraction. Le mouvement du nœud d'une planète est le résultat du mouvement que toutes les autres y produisent; car il n'est aucune d'elles qui n'influe plus ou moins sur le nœud des autres planètes: mais comme la théorie fait trouver ce mouvement du

nœud, sur l'orbite de la planète qui le produit, il est nécessaire de réduire à l'écliptique tous ces mouvemens qui se font sur des orbites différentes, pour en composer un seul mouvement sur l'écliptique; c'est cette réduction qui rend direct le mouvement de Jupiter; car il est naturellement rétrograde sur l'orbite de Saturne qui en est la cause principale; mais il devient direct, quand on le rapporte à l'écliptique.

1349. Soit CB (fig. 75) l'écliptique, CA l'orbite de Jupiter, BA l'orbite de Saturne; la longitude du nœud C de Jupiter en 1760 est de $3^s 8^{\circ} 25'$, suivant les tables de M. Halley; la longitude du nœud B de Saturne, est de $3^s 21^{\circ} 23'$, la différence CB est de $12^{\circ} 58'$. L'inclinaison C de l'orbite de Jupiter est de $1^{\circ} 19'$, & l'inclinaison B de l'orbite de Saturne est de $2^{\circ} 30'$. En résolvant le triangle ABC , on trouve AC de $26^{\circ} 41'$, & l'angle A ou l'inclinaison de l'orbite de Jupiter sur celle de Saturne $1^{\circ} 15'$. Par l'effet naturel de l'attraction de Saturne sur Jupiter, le point d'intersection A de l'orbite de Jupiter sur celle de Saturne; doit rétrograder dans le sens contraire au mouvement de Jupiter, comme on le verra dans la théorie de l'attraction, mais l'angle des deux orbites ne change point par le mouvement du nœud; ainsi le nœud ira de A en a , & l'orbite de Jupiter AC passera dans la situation ac , sans que l'angle A éprouve aucun changement, les cercles AC & ac resteront paralleles, dans leurs parties voisines de Aa , & leur intersection D sera éloignée du point A de 90° . Ainsi le triangle ABC se changera en un triangle abc , les angles A & B étant constans; & le nœud C de l'orbite de Jupiter sur l'écliptique passera en c ; il aura donc un mouvement direct Cc , quoique le mouvement Aa ait été rétrograde; ainsi quoique l'action des planètes les unes sur les autres produise dans les nœuds un mouvement rétrograde sur l'orbite de la planète troublante ou de la planète qui par son attraction produit ce mouvement, cependant le mouvement des nœuds sur l'écliptique devient quelque-

Fig. 75.

fois direct ou suivant l'ordre des signes, comme dans le cas du nœud de Jupiter dont je viens de parler.

Dans quel cas le mouvement devient direct.

1350. En général lorsque la planète troublante a son angle d'inclinaison B plus grand que l'angle C de la planète troublée, le mouvement du nœud de celle-ci est direct sur l'écliptique; au contraire si l'angle B de la planète troublante sur l'écliptique est plus petit que l'angle C , comme dans la fig. 76, le point A tombe à droite du point C ; c'est-à-dire, de l'autre côté de C par rapport au point B , comme on le voit dans la figure; le mouvement du nœud A étant rétrograde, le mouvement Cc sur l'écliptique CB le devient également. *Ainsi quand la planète troublante a son angle d'inclinaison plus petit que celui de la planète troublée, elle ne produit en général dans le nœud de celle-ci qu'un mouvement rétrograde.*

Fig. 76.

Le terme de ce mouvement où la plus grande valeur de BC arrive lorsque $\sin AC = \sqrt{1 - \frac{\text{tang} \cdot A^2}{\text{tang} \cdot C^2}}$, comme nous le démontrerons dans le livre XVIII^e. à l'occasion des fatellites de Jupiter où les mêmes règles nous serviront.

1351. Si l'on range les planètes suivant l'ordre de leurs inclinaisons, en consultant la table de l'art. 1376, & qu'on mette la première, celle qui a le plus petit angle d'inclinaison, on aura l'ordre suivant: Jupiter, Mars, Saturne, Vénus & Mercure; alors on sera sûr que la première fera rétrograder sur l'écliptique les nœuds de toutes les autres; la seconde fera rétrograder le nœud des trois suivantes, mais donnera un mouvement direct au nœud de celle qui la précède; la troisième produira un mouvement direct sur les deux premières, & rétrograde sur les deux dernières; la quatrième rendra direct le nœud des trois premières, & rétrograde le nœud de la dernière; la dernière ne pourra produire qu'un mouvement direct sur toutes les autres planètes.

1352. Quand on a trouvé par les règles de l'art.

traction (3522) le mouvement Aa (fig. 75) du nœud de Jupiter sur l'orbite AB de Saturne, il faut en conclure le mouvement Cc sur l'écliptique. Pour cela on emploiera les formules différentielles du XXIII^e. livre. Dans un triangle ABC dont les deux angles A & B sont constans (1349), la différentielle Cc ou la petite augmentation du côté BC est égale à la différentielle Aa du côté AB , multipliée par $\frac{\sin. A. \cos. AC.}{\sin. C.}$ (3842). En employant les valeurs de ces trois quantités (1349) on trouvera que si le mouvement Aa est de $8'' 56$ par année, comme le donnent les calculs de l'attraction, le mouvement Cc sur l'écliptique ne fera que de $7'' 26$. Dans la fig. 76, on auroit exactement la même équation $Cc = \frac{Aa. \sin. A. \cos. AC.}{\sin. C.}$. C'est ainsi qu'il faut réduire à l'écliptique le mouvement du nœud de chaque planète produit par l'attraction de chacune des autres planètes. Nous avons placé ici ces réflexions, parce qu'elles sont nécessaires aux Astronomes, indépendamment du calcul de l'attraction : elles avoient échappé à M. Bradley lorsqu'il croyoit que le mouvement direct du nœud du 4^e. satellite étoit contraire aux loix de l'attraction, comme nous le dirons dans le XVIII^e livre (2967); ce sont ces considérations qui m'ont fait découvrir la cause des changemens singuliers qui ont lieu dans les inclinaisons des satellites, & que personne avant moi n'avoit même soupçonnée (2944).

1353. Le mouvement du nœud d'une planète sur l'orbite d'une autre planète produit un mouvement de l'axe de l'orbite troublée autour de l'axe de l'orbite de la planète troublante; par exemple, quand on dit que Saturne par son action sur Jupiter fait rétrograder les nœuds de l'orbite de Jupiter, cela revient au même que si l'on disoit l'axe de l'orbite, ou la ligne qui passe par les poles de l'orbite de Jupiter & qui est perpendiculaire au plan de cette orbite, tourne autour de l'axe de l'orbite de Saturne, & le pole de l'orbite de Jupiter décrit autour du pole de l'orbite de Saturne

Mouvement
d'un pole au-
tour d'un axe.

un petit cercle dont le rayon est de $1^{\circ} 15'$, c'est-à-dire, égal à la quantité de l'inclinaison mutuelle de ces deux orbites l'une sur l'autre.

Fig. 77.

Pour faire comprendre le rapport ou plutôt l'identité de ces deux choses; soit *Fig. 77* le centre commun de deux orbites ANB , CND , dont les plans sont inclinés d'un degré l'un sur l'autre; PSO & ESL , les axes de ces mêmes orbites qui leur sont perpendiculaires; P le pôle de l'orbite ANB , E le pôle de l'orbite CND , EP la distance de ces pôles, égale à l'inclinaison des deux orbites; ou à la quantité dont le point B est éloigné du point D . Si l'on tire par les deux pôles P & E un cercle $PEBD$, il rencontrera les deux orbites à 90° des nœuds N , M , de chacune; l'arc BD égal à l'arc PE marquera la plus grande distance ou l'inclinaison des deux orbites, parce que les arcs PB & ED sont chacun de 90° , aussi bien que les arcs NB , MB , ND , MD . Mais si le nœud N change de position, les points B & D de la plus grande distance changeront de la même quantité, parce qu'ils sont toujours nécessairement à 90° des nœuds N & M ; donc le cercle $PEBD$ changera également; & le pôle E avancera de la même quantité dans le petit cercle ER . On peut le voir d'une manière plus sensible en faisant un demi-cercle de carton qui ait à son centre une aiguille perpendiculaire à son plan; on l'inclinera sur un autre cercle tracé sur la table, qui ait aussi une aiguille à son centre; & en faisant tourner le premier sur le second sans changer leur inclinaison & sans que leurs centres se quittent, on verra l'axe du premier décrire un cône autour de l'axe du second; ou le pôle du premier décrire un cercle autour du pôle du second; ainsi le mouvement du nœud d'un cercle sur un autre cercle suppose le mouvement circulaire du pôle de l'un autour du pôle de l'autre. Nous ferons plusieurs fois usage de cette proposition, dans les livres XVI^e & XVII^e. (2707, 2731, 2862).

Inégalité
des mouve-
mens des
nœuds.

1354. Le mouvement du nœud d'une planète sur l'écliptique

l'écliptique se réduit donc au mouvement du pôle de l'orbite de cette planète autour du pôle de l'écliptique ; mais ce mouvement ne sera pas uniforme, parce qu'il est l'assemblage des mouvemens particuliers que chacune des autres planètes produit sur le nœud de celle-ci, lesquels mouvemens ont chacun des modifications différentes parce qu'ils dépendent de la situation des nœuds, & de la quantité des inclinaisons. Aussi les mouvemens des nœuds des planètes déduits de l'attraction (1347) ne sont exacts que pour un petit nombre de siècles.

1355. L'INCLINAISON d'une planète est l'angle que le plan de son orbite fait avec le plan de l'écliptique (1123) ; la latitude héliocentrique (1138) de cette planète, lorsqu'elle est à 90° de ses nœuds, est égale à cette inclinaison, parce que la planète est alors aussi éloignée qu'elle puisse être du plan de l'écliptique.

Déterminer les inclinaisons.

1356. Ainsi pour trouver l'inclinaison d'une orbite il suffit d'observer la latitude de la planète lorsqu'elle est à 90° des nœuds, & de réduire cette latitude observée ou géocentrique, à la latitude héliocentrique ; mais comme cette dernière réduction suppose connue la parallaxe du grand orbe, on cherche à éviter cette condition par la méthode suivante.

1357. On choisit le temps où le soleil est dans le nœud de la planète, c'est-à-dire, nous paroît à la même longitude, que la planète quand elle est dans son nœud, parce qu'alors la terre passe en T sur la ligne des nœuds NST (*fig. 78*), ce qui rend la détermination de l'inclinaison fort simple. Supposons que la planète se trouve pour lors au point A de son orbite, de manière qu'ayant abaissé la perpendiculaire AB sur le plan de l'écliptique, ou de l'orbite de la terre prolongé jusques vers la planète, la ligne TB qui marque son lieu réduit à l'écliptique soit perpendiculaire à la ligne TSN dans laquelle se trouvent le nœud & le soleil ; l'angle d'élongation BTS étant de 90° ; alors les lignes AT & BT sont perpendiculaires à la commune section TN ;

Première méthode.

Fig. 78.

Fig. 78.

l'une dans le plan de l'orbite, & l'autre dans le plan de l'écliptique; elles font donc entr'elles le même angle que les deux plans, c'est-à-dire, un angle égal à l'inclinaison que l'on cherche (1121): or l'angle ATB n'est autre chose que la latitude même de la planète vue de la terre (1123); donc *la latitude observée sera elle-même l'inclinaison de l'orbite*. Au reste il est rare de rencontrer ces deux circonstances ensemble, c'est-à-dire, le soleil dans le nœud, & la planète à 90° du soleil; d'ailleurs cette dernière condition ne se rencontre que dans les planètes supérieures, ainsi nous avons besoin d'une règle plus générale pour la détermination des inclinaisons.

Seconde
méthode.

1358. Je suppose qu'on ait observé la latitude d'une planète, vue de la terre, quelle qu'elle soit, pourvu que le soleil soit dans le nœud ou à-peu-près; soit P la planète en un point quelconque P de son orbite; la terre étant toujours en T dans la ligne des nœuds TSN ; on abaisse la perpendiculaire PL de l'orbite de la planète sur le plan de l'écliptique, on tire des points P & L les perpendiculaires PR & LR sur la commune section des deux plans; l'angle PRL de ces deux perpendiculaires fera égal à l'angle des deux plans; c'est-à-dire, à l'inclinaison de l'orbite sur le plan de l'écliptique (1121); l'angle LTP fera égal à la latitude géocentrique de la planète, l'angle RTL égal à l'élongation de la planète (1142); alors la propriété ordinaire des triangles rectilignes tels que RTL & PTL rectangles en R & en L donnera les deux proportions suivantes.

$$\begin{array}{l} TL : RL :: R : \sin. RTL \\ TL : PL :: R : \text{tang. } LTP \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{donc } RL : PL :: \sin. \\ \text{RTL : tang. } LTP \end{array} \right\}$$

Mais dans le triangle PRL rectangle en L on a cette autre proportion $RL : PL :: R : \text{tang. } PRL$; donc en comparant la 3^e. proportion avec cette dernière, on aura $\sin. RTL : \text{tang. } LTP :: R : \text{tang. } PRL$, c'est-à-dire, que le sinus de l'élongation est au rayon comme

la tangente de la latitude géocentrique observée est à la tangente de l'inclinaison.

Règle pour avoir l'inclinaison.

1359. EXEMPLE. Le 12 Janvier 1747 à 6^h 6' 33" du matin, M. de la Caille observa la longitude de Saturne, 6^s 26° 12' 52", & sa latitude boréale 2° 29' 18", le soleil étoit alors à 9^s 21° 47', c'est-à-dire, dans le nœud de Saturne, ou du moins il n'en étoit éloigné que de 12 minutes selon les tables de M. Cassini, ce qui ne peut produire aucune erreur sensible dans le résultat. En appliquant à cette observation l'analogie précédente, on trouve l'inclinaison de l'orbite de Saturne 2° 29' 45", au lieu de 2° 30' 10" que donne M. Halley. (*Mém. acad.* 1747, pag. 135).

1360. Lorsqu'on détermine le lieu du nœud d'une planète par le moyen de deux latitudes égales (1335), soit que ces latitudes soient prises avant & après le passage d'une planète par ses limites, ou qu'elles soient prises avant & après le passage par le nœud, les mêmes observations peuvent déterminer à la fois non-seulement le nœud, mais encore l'inclinaison de l'orbite.

Troisième méthode.

EXEMPLE. Le 13 Mars 1693 à 17^h 50' M. Cassini observa la longitude de Saturne 8^s 22° 56' 30", & sa latitude géocentrique boréale 1° 24' 50" (*Elém. d'astron.* pag. 388 & 396); les conclusions qu'il tire de cette observation dans les deux endroits de son ouvrage que je viens de citer n'étant pas les mêmes, j'ai refait les calculs, & j'ai trouvé le lieu héliocentrique de Saturne 8^s 17° 16' 6", en corrigeant les tables par les observations. Le lieu du soleil étoit 11^s 24° 23' 18", & par conséquent l'élongation 88° 33' 12", & la commutation 82° 52' 48", donc en suivant la proportion démontrée (1145), on trouve que la latitude héliocentrique de Saturne étoit de 1° 24' 12" 4. Cette observation comparée avec celle du 3 Mai 1699 donne, suivant mon calcul (1336), 9^s 21° 13' 20" pour le lieu du nœud: retranchant de ce lieu celui de Saturne vu du soleil 8^s 17° 16' 6", on a la distance de Saturne à son nœud

Fig. 54.

descendant, $33^{\circ} 57' 14''$ vue du soleil, qui est l'arc LA de l'écliptique (fig. 54) : ainsi dans le triangle sphérique PAL rectangle en L , on connoît les côtés LA & PL , on fera cette proportion : le sinus de la distance au nœud est au sinus total, comme la tangente de la latitude est à la tangente de l'angle A , l'on aura l'inclinaison véritable de l'orbite de Saturne $2^{\circ} 30' 50'' 6$.

Inconvé-
nient de cette
méthode.

1361. Cette méthode qui détermine à la fois l'inclinaison & le nœud d'une planète par deux observations de latitudes égales, est moins exacte que celle où l'on détermine les deux choses séparément, en employant une observation faite dans le nœud pour déterminer le nœud, & une observation faite dans une des limites pour avoir l'inclinaison de l'orbite. En effet si les deux observations correspondantes sont près du nœud, elles déterminent mal l'inclinaison de l'orbite ; puisqu'alors la latitude est petite & qu'on ne doit pas déterminer une quantité plus grande par le moyen de celle qui est moindre ; au contraire si ces deux observations sont trop près des limites, elles sont peu propres à déterminer le lieu du nœud ; par exemple, à 30° du nœud la latitude d'une planète n'est que la moitié de son inclinaison ; si l'on se trompe de $10''$ dans la latitude observée, on sera en erreur de $20''$ sur l'inclinaison cherchée ; ainsi cette observation fera moins favorable de moitié que si l'on avoit observé la planète dans ses limites. D'un autre côté le changement de latitude d'un jour à l'autre n'étant alors que les $\frac{27}{100}$ de celui qu'elle éprouve dans les nœuds, on aura un huitième moins d'exactitude pour le lieu du nœud que si l'on eût observé la planète dans son nœud. Si l'on prend les deux latitudes correspondantes & égales à 45° des nœuds, la latitude n'étant alors que les $\frac{7}{10}$ de l'inclinaison, une erreur de $7''$ sur l'observation des latitudes que l'on compare, en produira 10 sur l'inclinaison que l'on veut en conclure, & en même temps l'erreur que l'on com-

mettra sur le lieu du nœud sera plus grande dans le rapport de 10 à 7, que celle qu'on auroit pu commettre en observant la planète dans le nœud.

1362. Pour bien sentir la loi de ces différens avantages il faut considérer que la latitude augmente comme le sinus de la distance au nœud, parce que dans un triangle sphérique tel que PAL (*fig. 54*), on a cette proportion $\sin. PL : \sin. PA :: \sin. A : 1$, or les deux derniers termes étant constans, le sinus de PL & celui de PA seront toujours dans le même rapport entre eux; ainsi la latitude PL qui à cause de sa petitesse est proportionnelle à son sinus croîtra comme le sinus de la distance au nœud PA ; mais on verra dans le livre XXI^e (3307) que la petite variation d'un sinus est à celle de l'arc, comme le cosinus de l'arc est au rayon, c'est-à-dire, qu'à 30 degrés du nœud, le cosinus étant les $\frac{e7}{100}$ du rayon, la variation du sinus n'est que les $\frac{e7}{100}$ de celle de l'arc, ou de celle que ce même sinus éprouvoit dans sa naissance, (quand l'arc & le sinus étoient l'un & l'autre très-petits & croissoient également); ainsi puisque PL croît comme le sinus de la distance au nœud, & que la variation de ce sinus est proportionnelle au cosinus, la petite augmentation qu'éprouve la latitude d'un degré à l'autre sera aussi proportionnelle au cosinus de l'argument de latitude; & comme l'on observe la position du nœud par le moyen de la latitude, avec d'autant plus de précision que la latitude augmente alors plus rapidement, l'avantage ou la précision que l'on trouve à déterminer le lieu du nœud par le moyen de la latitude, est aussi proportionnel au cosinus de l'argument de latitude; ainsi à 60° du nœud l'avantage est réduit à la moitié, tandis qu'à 30° il n'y avoit de perdu que les $\frac{13}{100}$ ou le quart de l'avantage qu'on avoit eu dans le nœud.

1363. A l'égard de l'avantage qu'on trouve à déterminer l'inclinaison par le moyen d'une latitude observée, il est proportionnel au sinus même de la distance au nœud, parce que la latitude observée suit le même rapport; si d'une latitude d'un degré l'on veut conclure une

Mesure de
l'avantage que
l'on trouve,

Fig. 54.

inclinaison qui est de deux, comme cela arrive quand on a observé à 30 degrés du nœud, on s'expose dans le résultat à une erreur double de celle de l'observation même, c'est-à-dire, qu'on n'a que la moitié de l'avantage qu'on devoit se procurer. Aussi dans les différentes déterminations que je rapporterai bien-tôt des inclinaisons planétaires, j'aurai toujours soin de marquer quelle étoit la distance au nœud, pour faire juger du degré de précision dont elles seront susceptibles.

1364. J'ai dit que plus la latitude augmentoit rapidement, plus il y avoit de précision & d'avantage à déterminer le lieu du nœud par son moyen; l'on peut s'en assurer par le même raisonnement qui a servi à prouver que l'équinoxe se déterminoit avec plus d'exactitude quand la déclinaison du soleil augmentoit avec vitesse (883).

Cas où l'effet
de l'inclinaison
se multi-
plie.

1365. Dans le choix des oppositions ou des conjonctions que l'on prend pour déterminer l'inclinaison d'une planète supérieure, on choisit celles où la latitude géocentrique est la plus grande qui soit possible, afin que l'erreur commise sur cette inclinaison devienne la plus petite; c'est ce que l'on fait pour tout autre élément; on choisit les cas où son effet est le plus grand, le plus multiplié, le plus sensible. L'inclinaison de l'orbite de Vénus quoiqu'elle ne soit que de $3^{\circ} 23'$, produit dans certains cas pour nous une latitude géocentrique de $8^{\circ} \frac{2}{3}$, comme cela arriva dans la conjonction inférieure de Vénus observé le 2 Sept. 1700; il est évident que si l'on a $10''$ d'erreur à craindre dans une latitude observée, il vaut mieux que ce soit dans cette circonstance où il n'en résulte que $4''$ d'erreur sur l'inclinaison; il faut convenir cependant que si l'on s'étoit trompé de $10''$ dans cette observation, quoiqu'il n'en résultât que $4''$ sur l'inclinaison, il n'en seroit pas moins vrai qu'on auroit encore $10''$ d'erreur à craindre une autre fois dans une pareille situation.

Inclinaison
de Mercure.

1366. L'INCLINAISON DE MERCURE a été déterminée par M. Cassini, au moyen de l'observation du

21 Mai 1715, faite à 10^h 39' du matin; M. Maraldi déterminâ le lieu de Mercure à 1^s 8° 36' 0" & sa latitude méridionale à 2° 23' 55"; cette planète étoit alors à 10^s 29° 14' 55", vue du soleil, & par conséquent éloignée de 75° 42' de son nœud supposé à 1^s 14° 57'; le lieu du soleil étoit à 1^s 29° 38' 14", d'où M. Cassini conclut que la latitude héliocentrique étoit de 6° 41' 40", & l'inclinaison de l'orbite 6° 54' 12". (*Elémens d'astronomie*; pag. 616).

1367. Le 16 Juillet 1731 à 10^h 32' 47" du matin; M. Cassini déterminâ le lieu de Mercure à 3^s 3° 2' 35" avec 2° 2' 20" de latitude méridionale; sa distance au nœud calculée par les tables étoit de 49° 16'; d'où il suit que sa latitude héliocentrique étoit de 5° 15' 30" & l'inclinaison de l'orbite 6° 55' 30"; mais cette observation m'a paru défectueuse par l'examen que j'en ai fait, en travaillant à la théorie de Mercure. Les observations de Mercure étant rares, on ne doit pas être étonné de trouver dans cette détermination quelques minutes d'incertitude.

1368. M. le Gentil observa Mercure dans le méridien le 5 Octobre 1750, & il en conclut sa longitude de 217° 18' 19" & sa latitude australe 2° 50' 23", le lieu du soleil étoit pour lors à 6^s 12° 8' 52"^{1/2}, l'angle de commutation 78° 31' 23"^{1/2} la latitude héliocentrique 6° 31' 23", d'où il conclut l'inclinaison de 7° 1' 0".

M. de Thury, le 6 Mai 1751, observa Mercure dans le méridien à 1^h 0' 47"^{1/6}, M. le Gentil observoit en même temps la hauteur méridienne, & il en conclut la longitude de Mercure 2^s 0° 50' 36" & la latitude boréale 1° 51' 15"; le lieu du soleil étoit alors 1^s 15° 33' 14"^{1/4} & l'angle de commutation 108° 31' 23", d'où il résulte que l'inclinaison de Mercure étoit de 6° 59' 30"^{1/2} (*Mém. acad. 1753, pag. 277*). M. Halley la suppose de 6° 59' 20", & M. Cassini de 7° 0' 0", je la supposerai également en nombres ronds de 7° 0".

Elle est de 7° 0'.

1369. L'INCLINAISON DE VÉNUS sur l'écliptique est facile à déterminer exactement, lorsqu'on observe

Inclinaison de Vénus.

ses conjonctions inférieures dans le temps de ses plus grandes latitudes, c'est-à-dire, quand elle est à 90° de ses nœuds; car alors on n'a aucun besoin de connoître la position exacte du nœud; & sa distance à la terre étant trois fois plus petite que sa distance au soleil, les erreurs qu'on peut commettre sur sa latitude deviennent trois fois moindres sur l'inclinaison (1365). Le 2 Septembre 1700 la latitude de Vénus fut observée à Paris de $8^\circ 40' 15''$ vers le midi, elle étoit à $11^s 10^\circ 20' 20''$ de longitude vue du soleil, & par conséquent à $86^\circ 22'$ de son nœud; d'où M. Cassini conclut que sa latitude héliocentrique étoit de $3^\circ 22' 38''$, & l'inclinaison de son orbite $3^\circ 23' 5''$. Le 28 Août 1716 à $23^h 45' 37''$ & $7^h 10'$ après sa conjonction qui étoit arrivée à $11^s 5^\circ 49' 2''$, la latitude de Vénus fut observée de $8^\circ 35' 24''$, Vénus étant alors à $11^s 6^\circ 17' 45''$ de longitude vue du soleil, & à $82^\circ 8'$ de son nœud; d'où il résulte que sa latitude héliocentrique étoit de $3^\circ 21' 16''$, & l'inclinaison de son orbite $3^\circ 23' 10''$. (*Elém. d'astron. pag. 574*); ainsi cet élément est connu avec exactitude; M. Cassini & M. Halley sont d'accord à supposer cette inclinaison de $3^\circ 23' 20''$, dans leurs tables, M. de la Hire la supposoit de 3 degrés $23' 5''$.

Elle est de
 $3^\circ 23'$ un tiers.

Inclinaison
de Mars.

1370. L'INCLINAISON DE MARS a été déterminée par une observation de Flamsteed du 3 Mars 1694; calculée par M. Cassini, (*Elém. d'astron. pag. 492*); Mars étant à 89° de son nœud, & sa latitude observée $3^\circ 30' 0''$, l'inclinaison fut trouvée $1^\circ 50' 52''$. M. le Gentil ayant calculé cette observation sur d'autres éléments trouve l'inclinaison,

1 51 14

Par une autre observation de Flamsteed du 27 Mars 1694, à $78^\circ 31'$ du nœud M. Cassini trouve,

1 50 50

M. le Gentil ayant calculé cette même observation (*Mém. acad. 1757, pag. 275*) trouve cette inclinaison,

1 51 12
Suivant

- Suivant une observation faite à Paris le 2
Novembre 1695, à $56^{\circ} 9'$ du nœud,
(*Elém. d'astron. pag. 494*), $1^{\circ} 50' 50''$
- Par M. le Gentil, en calculant l'opposition
du 8 Août 1687 observée à Paris, à
 90° du nœud, la latitude étant de 6°
 $50' 40''$, $1 50 50$
- Suivant l'opposition observée le 25 Août
1593 par Tycho-Brahé, l'inclinaison de
Mars est de $1 50 33$
- M. le Gentil par la conjonction de Mars
avec ϵ des Gémeaux au mois de Mars
1756, (*Mém. acad. 1757, pag. 259*),
Mars étant à 85° de son nœud, trouve
par un milieu entre six observations qui
ne différoient pas de $9''$, que cette in-
clinaison est de $1 51 20$
- Par la hauteur méridienne de Mars obser-
vée le 11 Février 1756, à $70^{\circ} 45'$ du
nœud, $1 51 12\frac{1}{2}$
- Par la hauteur méridienne observée le 29
Janvier 1754, à $56^{\circ} 12'$ du nœud,
(*Ibid. p. 260*) $1 51 31$
- Par l'opposition du 14 Septembre 1751,
à $56^{\circ} 52'$ du nœud, (*page 262*) 1°
 $51' 52''$, mais ensuite page 274 elle n'est
marquée que $1 50 53$

1371. M. le Gentil y a aussi employé les obser-
vations de Boulliaud, tirées d'un manuscrit latin dont Elle est de
M. le Monnier étoit dépositaire, & dont il y a une $1^{\circ} 51'$
copie au dépôt de la marine; mais ces observations n'é-
tant fondées que sur des distances estimées sans aucun
instrument, leur résultat n'ajouterait rien à la certitude
qui naît des observations précédentes; le milieu entre
les résultats que donne M. le Gentil (*pag. 277*), comme
Tome II. S

tirés de ses propres observations est $1^{\circ} 51' 4''$; M. Halley la suppose dans ses tables de $1^{\circ} 51' 0''$, & M. Cassini $1^{\circ} 50' 54''$. Les observations paroissent donc prouver assez bien que l'inclinaison de Mars est de $1^{\circ} 51' 0''$. Nous parlerons bientôt de la diminution qu'elle éprouve (1379).

Inclinaison
de Jupiter.

1372. L'INCLINAISON DE JUPITER suivant l'observation faite à Greenwich le 21 Déc. 1690 par Flamsteed, à 86° du nœud, calculée par M. Cassini, (pag. 444) est de $1^{\circ} 19' 23''$.

L'observation faite par Hévélius le 28 Mars 1661, à $88^{\circ}\frac{1}{2}$ du nœud, donne pour l'inclinaison, 1 20 25

L'observation faite à Paris le 2 Avril 1673, à $84^{\circ} 0'$ du nœud, suivant M. Cassini (pag. 445) donne 1 19 52

Celle du 16 Sept. 1690, à 87° du nœud, 1 19 41

Celle du 2 Oct. 1702, à 88° du nœud, 1 19 4

Celle du 8 Oct. 1714, à 83° du nœud, 1 18 53

Celle du 20 Mars 1720, à 83° du nœud, 1 20 14

Celle du 13 Oct. 1726, à $77^{\circ}\frac{1}{2}$ du nœud, 1 19 20

Enforte que par un milieu M. Cassini estime cette inclinaison de $1^{\circ} 19' 38''$; celle de ses tables est $1^{\circ} 19' 30''$.

M. le Gentil détermine l'inclinaison de Jupiter (*Mém. acad.* 1758, pag. 44) par une conjonction de Jupiter avec l'étoile θ de la Vierge, observée par Flamsteed & Picard en 1673, à 84° du nœud (*Philos. transact.* 1673, n^o. 94). 1 18 28

Et par l'opposition de 1750, à $67^{\circ}\frac{1}{2}$ du nœud (pag. 46). 1 19 20

Elle est de $1^{\circ} 19' 10''$. 1373. J'ai observé avec soin l'opposition de Jupiter le 6 Avril 1768, dans sa plus grande latitude, & j'en ai conclu l'inclinaison de son orbite $1^{\circ} 19' 4''$, à $6''$ près comme dans M. Halley (*Mém. acad.* 1768). L'incli-

naison dans les tables de M. de la Hire est $1^{\circ} 19' 20''$ dans celles de M. Cassini $1^{\circ} 19' 30''$, & dans celles de M. Halley $1^{\circ} 19' 10''$, je la supposerai dans mes tables de cette même quantité.

I 374. L'INCLINAISON DE SATURNE est déterminée dans M. Cassini (*pag.* 394) par une observation du 20 Avril 1688, faite à $11^h 23'$. Saturne fut observé à $6^s 20^{\circ} 57' 30''$ de longitude, avec une latitude boréale de $2^{\circ} 47' 50''$; d'où M. Cassini conclut que sa latitude héliocentrique étoit de $2^{\circ} 30' 48''$. Saturne étoit presque dans ses limites, & l'inclinaison se trouve par cette observation de $2^{\circ} 30' 50''$

^m Inclinaison de Saturne.

L'observation du 14 Avril 1688 donne; $2 30 37$

Le 25 Décemb. 1703 à $6^h 51'$ du soir Saturne fut observé à $0^s 15^{\circ} 52' 30''$ de longitude, avec $2^{\circ} 34' 10''$ de latitude australe; d'où M. Cassini conclut que sa latitude héliocentrique, égale pour lors à l'inclinaison de son orbite, étoit $2^{\circ} 30' 0''$.

Le 13 Mars 1693 & le 3 Mai 1699, la latitude de Saturne ayant été observée à 34° du nœud, M. Cassini en conclut l'inclinaison de $2^{\circ} 30' 44''$, mais suivant mon calcul (1360) $2^{\circ} 30' 51''$

Elle est de $2^{\circ} 30' 20''$.

M. de la Caille en 1747 l'a trouvée (1359) de $2 29 45$

Le milieu entre ces cinq déterminations est de $2 30 24$

M. Halley la suppose de $2^{\circ} 30' 10''$, & je m'en tiendrai à $2^{\circ} 30' 20''$ dans mes tables.

I 375. Suivant les calculs que M. Euler a faits de l'attraction de Jupiter sur Saturne, dans la pièce qui a remporté le prix de l'académie en 1748, *pag.* 77, cette attraction peut à peine produire $5''$ de variation dans l'inclinaison de Saturne; ainsi cette inégalité périodique est absolument négligeable: j'ai trouvé qu'il en est de même des autres planètes; leurs inclinaisons n'ont presque aucune inégalité périodique, dont nous ayons besoin de tenir compte dans nos calculs.

Les Inclinaisons n'ont aucune inégalité périodique.

1376. Pour rassembler sous un même point de vue les résultats précédens, & faire juger de la différence ou de l'incertitude qu'il peut y avoir dans les inclinaisons des orbites planétaires, nous allons rapporter celles qui sont établies dans les tables de M. Cassini & de M. Halley, & celles que nous avons adoptées dans nos tables; on verra que la plus grande différence est pour l'inclinaison de Mercure, & cependant elle n'est que de 40'' entre M. Cassini & M. Halley. Nous avons mis dans la même table la plus grande réduction, parce qu'elle est une suite nécessaire de l'inclinaison, étant égale à la moitié du sinus versé de l'inclinaison (1133).

TABLE de l'inclinaison des Orbites & de la plus grande réduction à l'écliptique.

	KÉPLER.	HALLEY.		CASSINI.		Suivant mes Tables.
	Inclinaison.	Inclinaison.	Réduct.	Inclinaison.	Réduct.	Inclinaison.
Mercure,	6° 54' 0''	6° 59' 20''	12' 49''	7° 00' 00''	12' 52''	7 0 0
Vénus,	3 22 0	3 23 20	3 0	3 23 20	3 0	3 23 20
Mars,	1 50 30	1 51 0	0 54	1 50 54	0 54	1 51 0
Jupiter,	1 19 20	1 19 10	0 27	1 19 30	0 29	1 19 10
Saturne,	2 32 0	2 30 10	1 38	2 30 36	1 39	2 30 20

Nouvelle
équation pour
les inclinaisons.

1377. Les calculs de l'attraction, par lesquels j'ai recherché les mouvemens des nœuds des planètes produits par leurs attractions réciproques, m'ont fait découvrir en 1761 une chose qu'on n'avoit pas encore soupçonnée, c'est que leurs inclinaisons sur l'écliptique ne sauroient être constantes: j'ai trouvé, par exemple, que l'action de Vénus diminue l'angle d'inclinaison de Mercure de 8'' par siècle; de même l'action de Jupiter

diminue de 3" l'inclinaison de Mercure, augmente de 10" celle de Vénus, diminue de 25" celle de Mars, & augmente de 9" celle de Saturne.

1378. On verra dans le XXII^e. livre (3517) que l'attraction de chaque planète fait rétrograder sur son orbite les nœuds de toutes les autres planètes; comme je l'ai déjà dit (1348); l'effet de ce mouvement est de déplacer toutes les orbites, & il ne peut manquer d'en résulter un changement dans leurs inclinaisons sur l'écliptique. Soit CB l'écliptique, (*fig. 75*), AB l'orbite de Saturne, AC celle de Jupiter, Aa le mouvement du nœud de Jupiter sur l'orbite de Saturne; ce mouvement du nœud se fait sans aucun changement de l'angle A , c'est-à-dire, de l'inclinaison mutuelle des deux orbites; le triangle ABC se change en un triangle aBc ; les angles A & B demeurent constans, mais l'angle C ne l'est pas, & l'angle c est plus ou moins grand que l'angle C . Suivant les formules différentielles qu'on trouvera dans le XXIII^e. livre (3849), la variation de l'angle C est égale à celle du côté AB multipliée par le sinus de l'angle B , & par le sinus du côté BC , c'est-à-dire, que $dC = dAB \cdot \sin. B \cdot \sin. BC$: par exemple, le mouvement du nœud de Mars par l'action de Jupiter étant de 14" 2 par année, sur l'orbite de Jupiter, (*Mém. 1758, pag. 261, 1761, pag. 404*), l'angle B inclinaison de Jupiter $1^{\circ} 19'$, & la distance BC de leurs nœuds $50^{\circ} 22'$, on trouvera pour le changement de l'angle C , 0" 248, ou 24" 8 par siècle.

1379. Les actions de Vénus & de Saturne produisent encore 6" de diminution dans l'inclinaison de l'orbite de Mars; en sorte que cet angle diminue de 31" par siècle, & depuis le temps de Tycho-Brahé il doit y avoir 53" de diminution dans l'inclinaison de l'orbite de Mars; si les observations anciennes étoient assez exactes, on verroit cette différence dans la table que j'ai donnée ci-devant des inclinaisons des planètes (1376); mais une minute de différence est peu sensible dans les observations de Tycho: cet effet qui se

Fig. 75.

continue de siècle en siècle, apportera dans la suite une grande différence dans les inclinaisons des orbites, & il y a déjà plus de 8 minutes depuis le temps de Ptolomée, quantité qu'on ne doit pas négliger dans la comparaison des différentes observations, mais que les calculs de l'attraction pouvoient seuls indiquer, du moins quant à présent.

Distinguer
l'augmenta-
tion ou la di-
minution.

Fig. 75.

I 380. Pour savoir si l'inclinaison d'une planète doit augmenter, ou diminuer, c'est la situation des nœuds qu'il faut considérer. Soit AB (fig. 75), l'orbite de la planète troublante, & AC l'orbite de la planète troublée, dont le nœud passe de A en a ; puisque l'inclinaison mutuelle des deux orbites n'est point changée, l'angle A & l'angle a sont égaux, & vers ce point-là les cercles AC , ac sont parallèles; de-là il suit qu'ils vont se rencontrer en un point D , éloigné de 90° du point A ; car deux grands cercles de la sphère, pris à 90° de leur intersection commune, deviennent sensiblement parallèles, du moins sur un petit espace: or dans le triangle DCc on voit évidemment que l'angle DcC est plus petit que l'angle DCE , c'est-à-dire, que dans ce cas-là l'inclinaison diminue, d'ou il est aisé de déduire la règle suivante.

Règle.

I 381. *TOUTES LES FOIS que le nœud de la planète troublante est plus avancé que celui de la planète troublée; l'inclinaison de celle-ci est diminuée, pourvu que l'excès ne soit pas de 180 degrés.* Cette règle est aisée à apercevoir en figurant les positions de différentes orbites les unes par rapport aux autres. Par conséquent, si l'on dispose les planètes dans l'ordre de la longitude de leurs nœuds ascendants, en commençant par celle dont le nœud est le moins avancé, nous aurons l'ordre suivant; Mercure, Mars, Vénus, Jupiter & Saturne; cela nous indiquera, conformément à la règle, que Mercure contribue à augmenter les inclinaisons de toutes les planètes; & que Saturne les diminue toutes; Mars diminue l'inclinaison de Mercure, mais il augmente celles de Vénus, de Jupiter & de Saturne, dont les

noeuds sont plus avancés, & ainsi des autres. J'espère donner bientôt sur cette matiere des détails plus circonstanciés dans les mémoires de l'académie; ce sont ces considérations que personne n'avoit encore faites qui m'ont donné l'explication des inégalités observées dans les inclinaisons du second & du troisieme satellite, inégalités si singulieres, qu'avant moi l'on n'en soupçonnoit pas même la raison; M. Bailly a donné un mémoire sur ces inégalités dans le volume de 1766, pag. 346, d'après les principes que je viens d'expliquer, mais qui étoient déjà consignés dans la premiere édition de ce livre. (voyez l'art. 2944).

1382. Après avoir rapporté les élémens de chaque planète suivant M. Cassini & M. Halley, & d'après de nouvelles déterminations, il ne sera pas inutile de mettre tout à la fois sous les yeux du lecteur la comparaison & la différence de ces trois différens recueils de tables, pour faire juger de l'incertitude qu'il peut y avoir dans les divers élémens des tables astronomiques. Si je veux savoir, par exemple, de combien l'équation du centre de Mercure est différente dans les tables de M. Cassini & de M. Halley, je trouve que dans la colonne de Mercure, & à côté du mot *Equation* il y a — 20' 22"; cela signifie qu'il faut ôter 20' 22" de la plus grande équation prise dans les tables de M. Cassini, pour avoir celle des tables de M. Halley: On trouve après cela une autre comparaison des tables de M. Halley avec les miennes, où l'on trouvera ce qu'il faut ôter des élémens pris dans les tables de Halley pour avoir ceux auxquels nous nous sommes arrêtés dans les articles précédens.

TABLE de ce qu'il faut ôter des Nombres contenus dans les Tables de M. CASSINI, ou y ajouter pour avoir ceux des Tables de M. HALLEY.

Elémens des Tables.	Mercur.	Vénus.	Mars.	Jupiter.	Saturne.
Longitude moy. 1750.	— 11' 20"	+ 0' 21"	— 0' 13"	+ 4' 18"	— 15' 32"
Longitude de l'Aphélie.	— 14 6	— 19 29	— 4 31	+ 19 13	+ 26 27
Longitude du Nœud.	— 3 22	— 4 3	+ 10 36	+ 25 51	— 41 0
Mouvement séculaire.	— 14 41	+ 0 50	+ 0 24	+ 6 41	— 23 28
Mouv. de l'Aphélie.	— 45 43	— 49 7	— 2 58	+ 24 18	+ 3 36
Mouv. du Nœud.	— 1 20	— 5 0	+ 6 40	+ 43 11	— 65 11
Equation.	— 20 22	— 1 6	+ 0 43	+ 0 19	+ 0 24
Inclinaison.	— 0 40	0 0	+ 0 6	— 0 20	— 0 26

TABLE de ce qu'il faut ôter des nombres contenus dans les Tables de M. Halley, ou y ajouter, pour avoir ceux de nos nouvelles Tables.

Elémens des Tables.	Mercur.	Vénus.	Mars.	Jupiter.	Saturne.
Longitude moy. 1750.	+ 2 5	— 0 19	+ 0 47	— 2 1	+ 12 29
Long. de l'Aphélie 1750.	+ 5 51	+ 54 29	— 3 14	— 11 15	+ 13 32
Long. du Nœud 1750.	— 0 43	+ 2 36	— 19 51	+ 0 11	+ 11 12
Mouv. sécul. de la Planète.	+ 9 57	+ 0 20	— 0 10	— 0 41	+ 8 30
Mouv. sécul. de l'Aphélie.	+ 30 3	+ 155 47	— 5 0	— 16 40	+ 10 0
Mouv. sécul. du Nœud.	— 8 20	0 0	+ 3 0	+ 16 40	+ 20 0
Equation.	— 1 47	+ 0 30	+ 0 37	+ 2 25	— 8 45
Inclinaison de l'Orbite.	+ 0 40	0 0	0 0	0 0	+ 0 10

DES DIAMETRES APPARENS DES PLANETES.

1383. LE DIAMÈTRE apparent d'une planète est l'angle sous lequel il nous paroît, exprimé en minutes & en secondes; c'est l'angle dont il est la corde ou la sous-tendante, en prenant pour rayon la distance de la planète à la terre. Soit *T* la terre, (*fig. 79*), où est situé

situé l'observateur ; AB le diamètre d'une planète , TA & TB les rayons visuels menés de la terre aux deux bords , ou aux deux limbes opposés du disque de la planète ; l'angle ATB est le diamètre apparent de la planète.

Les diamètres des planètes se déterminent & s'observent avec des micromètres (2358) ; mais on y peut aussi employer le temps ou la durée de leur passage. En effet , si l'on observe dans une lunette le moment où le premier bord du soleil se trouve dans le méridien , ou sur un fil perpendiculaire à la direction de son mouvement , & qu'ensuite le second bord y arrive deux minutes plus tard ; ces deux minutes de temps indiqueront que le diamètre du soleil est de $30'$, en supposant qu'il soit dans l'équateur ; on a vu (892) la différence qui a lieu si le soleil n'est pas dans l'équateur , & nous verrons dans le livre suivant cette méthode appliquée au diamètre de la lune.

1384. *LES DIAMÈTRES apparens d'une planète sont en raison inverse de sa distance.* Si la planète AB , étoit située en CD , de manière que la distance TD fût la moitié de la première distance TB , l'angle CTD sous lequel elle paroîtroit , seroit double de l'angle ATB ou ETD sous lequel elle paroïssoit auparavant ; prenons AB ou CD pour rayons ; alors , suivant les règles de la Trigonométrie ordinaire TB fera la cotangente de l'angle ATB , & TD fera la cotangente de l'angle CTD : or les cotangentes sont en raison inverse des tangentes , donc $TB : TD :: \text{tang. } CTD : \text{tang. } ETD$; mais les petits angles sont proportionnels à leurs tangentes ; donc $CTD : ETD :: TB : TD$; c'est-à-dire , que le diamètre apparent dans le second cas , est au diamètre apparent dans le premier , comme la première distance est à la seconde.

Variation
des diamètres
apparens.

1385. Les diamètres apparens des planètes servent à trouver leurs véritables diamètres ou leurs grandeurs réelles , quand on connoît leurs distances : dans le triangle TAB qui est rectangle en B , on a cette proportion :

Trouver
le vrai dia-
mètre.

$R : \sin. ATB :: TA : AB$; ainsi l'on trouvera le véritable diamètre AB en multipliant la distance TA par le sinus de l'angle ATB , qui est le diamètre apparent de la planète.

On a vu ci-dessus (1216) la manière de trouver les distances des planètes ; on verra encore (1634) la manière de les calculer par le moyen de la parallaxe : nous n'avons à parler ici que des diamètres apparens des différentes planètes , tels qu'on les a trouvés par les observations les plus récentes & les plus exactes.

Diamètre
du Soleil.

1386. Avant la découverte des lunettes l'éclat de lumière que répandent les planètes faisoit juger leurs diamètres beaucoup plus grands qu'ils ne sont, & surtout ceux des étoiles fixes ; cependant les anciens ne s'étoient pas trompés de beaucoup en supposant le diamètre du soleil d'un demi-degré ; au reste , il ne s'agissoit alors que d'avoir un nombre rond approchant de la vérité. Aristarque & Archimède supposoient déjà le diamètre apparent du soleil de 30' en tout temps. Du temps de Ptolomée , on n'avoit encore remarqué aucune différence entre l'hiver & l'été ; cet auteur faisoit le diamètre du soleil & celui de la lune apogée de 31' 20" (*Almag. V. 14*). On peut voir dans le P. Riccioli (*Almag. nov. tom. I, pag. 119, & Ast. ref. pag. 38*) une table des sentimens de différens auteurs sur cette matière. Il nous suffit de dire que Copernic supposoit les diamètres du soleil de 31' 48" , & 33' 54" . Tycho avoit trouvé un peu moins de 30' dans l'apogée , 32' & quelques secondes dans le périégée (*Progymn. pag. 471*). Képler regardoit comme une chose certaine que ces diamètres étoient de 30' & 31' (*Astron. pars optica. 1604, pag. 343*).

Malgré la découverte des lunettes d'approche qui devoit donner une grande facilité pour avoir exactement ces mesures , nous voyons que Képler ne faisoit encore le diamètre du soleil dans l'apogée que de 30' , (*Epit. astr. cop. pag. 476 & 827*) ; Hévélius dans une dissertation de *Saturni facie* imprimée en 1656 , suppo-

soit le diamètre du soleil dans l'apogée de 31' 12", & dans le périégée de 32' 36". Le Pere Scheiner en 1625 & quelques autres Astronomes crurent avoir le diamètre avec beaucoup d'exacritude en recevant l'image du soleil par un trou imperceptible, & la mesurant à une très-grande distance; mais ils trouvèrent le diamètre du soleil beaucoup trop grand, quelquefois même il parut de 55 à 56' (*Astr. ref. pag. 39*), c'étoit un effet de la *diffraction* ou *inflexion* de la lumière observée par le Pere Grimaldi, & ensuite par Newton, (*Opt. part. 3*) qui rendoit dans ces cas-là l'image très-grande & très-mal terminée; le Pere Riccioli fit voir alors qu'on devoit se servir d'un trou plus large, & retrancher le diamètre du trou de la largeur de l'image solaire; c'est ainsi qu'il trouva par le gnomon de S. Pétrone, les diamètres du soleil de 31' 0" 32' 4". M. Cassini dans le même temps les trouvoit de 31' 8" & 32' 10". (*Astr. ref. pag. 38*).

Erreur du
P. Scheiner.

1387. Depuis la découverte des micromètres (2358) il n'y a eu qu'une incertitude de peu de secondes dans la mesure du diamètre solaire, comme on le verra dans la table suivante; mais ce petit nombre de secondes étoit devenu une chose importante à constater.

Flamsteed en 1673, comme on le voit dans les œuvres d'Horoccus *pag. 488*, faisoit le diamètre apogée de

31' 40"

Diamètre
apogée sui-
vant divers
Auteurs.

M. Cassini en 1684 à la fin de ses observations astronomiques *pag. 48*, faisoit le diamètre moyen de 32' 12", ce qui donne pour le diamètre apogée,

31 40

M. de la Hire dans ses tables astronomiques en 1702.

31 38

M. Halley dans ses tables astron. en 1719;

31 38

M. Auzout & M. Picard, (*Hist. cél. pag. 10*)

31 37

M. Cassini dans ses tables astronomiques 1740;

31 36

M. de la Caille dans ses tables du soleil 1758,

31 34 $\frac{2}{3}$

M. le Gentil dans les Mém. de l'acad.	
1752, pag. 459,	31' 34''
M. de Louville, Mém. de l'acad. 1724;	31' 33''
M. Cassini, Elémens d'astr. 1740, pag. 127,	31' 32'' $\frac{1}{2}$
M. Mouton, (<i>Observat. Diametrorum Lugd.</i> an. 1670, Mém. acad. 1752, pag. 445).	31' 31'' $\frac{1}{2}$
Par mes observations (<i>Mém. ac.</i> 1760, pag. 48).	31' 30'' $\frac{1}{2}$
Suivant M. Short avec un grand télescope,	31' 28''

Le diamètre périégée surpasse de 64'' 8 le diamètre apogée ; & comme il n'y a point d'incertitude là-dessus ; je me suis contenté de rapporter dans la table précédente le plus petit des diamètres du soleil, celui qui s'observe le 30 Juin jour de l'apogée du soleil, d'où il est aisé de conclure le diamètre périégée en ajoutant 1' 5'' au premier.

Le diamètre du soleil étant en raison inverse de sa distance, & sa distance apogée étant de 10168 parties dont la moyenne est 10000, si l'on connoît sa distance ou son rayon vecteur pour un temps quelconque par la méthode des articles 1245 ou 1250, on aura aussi son diamètre en faisant cette proportion : la distance actuelle du soleil est à sa distance apogée 10168, comme le diamètre apogée 31' 30'' $\frac{1}{2}$, est au diamètre apparent pour un temps quelconque.

1388. Les différences que l'on vient de voir entre les différens auteurs me paroissent exiger une nouvelle discussion, cet élément est un des plus importans de l'astronomie, puisque c'est au diamètre du soleil que nous rapportons sans cesse toutes les mesures des petits arcs célestes ; j'y ai donc employé la plus grande lunette qui eût encore servi à cette recherche ; un heliomètre de 18 pieds ; & j'ai trouvé par des mesures répétées une multitude de fois, que le diamètre du soleil apogée est de 31' 30'' $\frac{1}{2}$, (2529).

M. Short m'a dit depuis en Angleterre qu'il n'avoit trouvé ce diamètre que de 31' 28'', avec un micromè-

Diamètre
du Soleil, 31'
30'' & demie.

tre objectif & achromatique d'une très-grande perfection, appliqué à un télescope de deux pieds; il pourroit se faire que le cercle d'aberration & de couleur qui environne toujours l'image des objets au foyer d'une lunette se fût trouvé encore plus grand de 2'' ou 3'' dans mon héliomètre, quoique très-bon; c'étoit le sentiment de Newton qui supposoit qu'il y avoit une aberration sensible dans les meilleures lunettes, & les passages de Vénus en fournissent encore un indice, comme on le verra dans le XI^e. livre (2159). Cependant je supposerai toujours le diamètre du soleil de 31' 30'' $\frac{1}{2}$ dans son apogée; mais pour réduire des observations faites avec de petites lunettes ou des lunettes qui ne sont pas absolument parfaites, il seroit bon de supposer le diamètre de 5'' plus grand; c'est-à-dire, comme dans les tables de M. Cassini.

1389. LE DIAMÈTRE DE LA LUNE varie depuis 29' 25'' jusqu'à 33' 34'' environ, ainsi son diamètre moyen est de 31' 30''. C'est-à-dire; qu'il égale seulement le plus petit diamètre du soleil, ou celui qu'il paroît avoir dans sa plus grande distance; mais le diamètre moyen de la lune est vu à une distance 380 fois plus petite que la distance moyenne du soleil, & il ne seroit pas de 5'' s'il étoit vu à la distance du soleil; nous parlerons plus au long du diamètre de la lune (1503).

Diamètre
de la Lune.

1390. Avant la découverte des lunettes d'approche trouvées en 1609, on avoit une idée fort défectueuse des diamètres apparens des planètes: la lumière dont elles sont environnées, faisoit juger ces diamètres beaucoup plus grands qu'ils ne sont réellement; Tycho donnoit $3\frac{1}{4}$ au diamètre de Vénus dans sa moyenne distance à la terre, ce qui seroit $12\frac{1}{3}$ dans le temps de ses conjonctions inférieures; suivant les tables de Képler, on auroit 6' 51'', au lieu de 59'' que nous trouvons actuellement (*Horoc. Venus in sole, c. 16*). On trouvera la table de tous les sentimens des anciens astronomes à ce sujet dans le Pere Riccioli, (*Astron. reform. pag. 359*).

La découverte des lunettes fut seule suffisante pour donner une plus juste idée des diamètres apparens, même avant l'usage des micromètres : le P. Riccioli avec le P. Grimaldi, trouverent les diamètres des planètes vers 1650 de la manière suivante : Mercure dans ses moyennes distances $13'' 48'''$, Vénus $1' 4'' 12'''$, Mars $22''$, Jupiter $49'' 46'''$, Saturne sans son anneau $26'' 40'''$ & l'anneau $57''$, (*Astron. reform. pag. 356*) tous ces diamètres sont pour les moyennes distances à la terre.

Le P. Riccioli avoit déterminé les diamètres de Jupiter & de Saturne par leurs appulses aux étoiles fixes, (*Astron. reform. pag. 355*), & il ne trouvoit que $4''$ de plus, que M. Huygens ne trouva ensuite par le moyen de son micromètre ; (*Systema saturnium 1659 in fine*) ; mais le P. Riccioli s'étoit trompé sur le diamètre de Vénus, qu'il trouvoit beaucoup trop grand, parce que ses lunettes ne dépouilloient pas assez cette planète de son excès de lumière. Hévélius avoit trouvé le diamètre de Vénus & de Jupiter, à peu-près tels que M. Huygens les trouva ensuite avec son micromètre : il les comparoit avec les taches de la lune, dont il avoit examiné la proportion avec le diamètre entier de cet astre, (*Selenog. pag. 449, 477, 547*) ; ces diamètres étoient encore trop grands ; & il est évident que l'usage des micromètres, (2358) a mis dans cette matière une bien plus grande exactitude ; mais à l'égard de Mercure & de Vénus, ce sont leurs passages sur le soleil qui nous ont fait connoître la véritable quantité de leurs diamètres (2156).

Diamètre
de Mercure.

1391. LE DIAMÈTRE DE MERCURE dans son passage sur le soleil que j'observai à Meudon en 1753 ; mesuré plusieurs fois avec un héliomètre de 18 pieds, me parut de $11'' 8$, c'est-à-dire, 11 secondes & 8 dixièmes, (*Mém. acad. 1754, pag. 599*) ; la distance de Mercure à la terre étoit alors à la distance moyenne du soleil à la terre, comme 55674 est à 101007 ; ainsi l'on fera cette proportion, $1010 : 557 :: 11'' 8 : 6'' 5$,

Diamètres apparens des Planètes. 151

& l'on aura 6" 5 pour le diamètre de Mercure au temps où sa distance est égale à la distance moyenne du soleil. En 1723 lorsque Mercure passa sur le soleil, M. Bradley avec une lunette de 120 pieds, trouva que ce diamètre étoit pour lors $10''\frac{3}{4}$ ce qui fait $7''\frac{34}{100}$ pour la distance moyenne, (*Inst. astron. pag. 556. Philos. transf. 1723, n^o. 386*), ainsi par un milieu je le supposerai de 6" 9. On verra dans le livre XI^e. la manière dont on s'y prend pour le déterminer par la durée de son entrée sur le soleil.

LE DIAMÈTRE DE VÉNUS sur le soleil observé le 6 Juin 1761, m'a paru être de $57''\frac{8}{10}$, (2157) la distance de Vénus à la terre étoit alors à la distance moyenne du soleil, comme 2890 est à 10000; ainsi le diamètre de Vénus à la distance moyenne du soleil paroîtroit de $16''\frac{7}{10}$. J'ai conclu exactement le même diamètre de quatre observations de M. Short, faites dans d'autres temps, avec un micromètre objectif, appliqué à un télescope de deux pieds (*Mém acad. 1762, pag. 258*).

Diamètre
de Vénus.

1392. LE DIAMÈTRE DE MARS paroissoit à M. Picard le 29 Septembre 1672 de $25''$ environ, c'étoit un mois après l'opposition durant laquelle il avoit paru de $30''$; c'est ainsi qu'il le raconte lui-même parmi les observations faites en divers endroits du royaume imprimées à la suite du voyage d'Uranibourg, en 1680; pag. 34. M. le Monnier dit cependant que le 5 Sept. 1672 le diamètre de Mars mesuré par M. Picard avec une lunette de 20 pieds garnie d'un micromètre, avoit paru de $26''$ tout au plus, (*Inst. astr. pag. 556*); mais parce que Flamsteed avoit mesuré le diamètre de Mars à peu-près dans le même temps, & qu'il lui avoit paru tantôt de $2''$, & tantôt de $7''$ plus grand, il le suppose de $27''\frac{1}{2}$, dont il ôte encore $5''$ à cause de la dilatation de la lumière. Pour moi n'ayant pas trouvé que l'effet de la dilatation fût sensible dans Vénus même, & voulant m'en tenir aux propres paroles de M. Picard; je supposerai que le diamètre de Mars paroissoit de $30''$ en 1672 le jour de l'opposition, c'est-à-dire, le 8 Sept.

Diamètre
de Mars.

n. style, la distance de Mars à la terre étoit alors de 0,3815; ainsi le diamètre réduit à la distance du soleil à la terre seroit $11'' 38$ ou $11'' 4$.

Il y a dans les transfections philosophiques, une occultation de Mars par la lune observée en 1676 qui seroit propre à déterminer le diamètre de Mars, si les observations étoient plus complètes & mieux d'accord; car il n'y auroit guère de meilleur moyen que celui d'observer l'émergence de Mars, quand il sort du disque obscur de la lune, mais ces phénomènes sont fort rares. On trouve une occultation de Saturne par la lune dans l'histoire céleste de M. le Monnier, pag 238, qui seroit propre à vérifier aussi le diamètre de Saturne.

Diamètre
de Jupiter.

I 393. LE DIAMÈTRE DE JUPITER observé par M. Pound avec une lunette de 123 pieds de M. Huygens; en 1719, parut toujours plus petit que $40''$, jamais au-dessous de 38 , & plus souvent $39''$ (*Newton Princip. mathem. l. III, phænom. 1*). Par les durées des passages du premier & du troisième satellite & par le passage de l'ombre du premier sur le disque de Jupiter, qui furent observés avec la même lunette, Newton conclut ce diamètre de $37'' \frac{1}{4}$ pour la distance moyenne de Jupiter au soleil ou à la terre. Si nous prenons avec lui $37'' \frac{1}{4}$, & que nous fassions cette proportion; $1000 : 5201 :: 37 \frac{1}{4} : 193'' 74$, nous aurons $3' 13'' \frac{3}{4}$ pour le diamètre que Jupiter auroit s'il étoit aussi près de nous que le soleil; mais il s'agit ici du diamètre de l'équateur, car on verra que Jupiter est applati vers les pôles d'environ une quatorzième partie (3221).

Diamètre
de Saturne.

LE DIAMÈTRE DE SATURNE observé par M. Pound en 1719 avec la même lunette de 123 pieds Anglois, parut de $18''$, & le diamètre de l'anneau (3225) parut de $42''$; en les réduisant à la distance moyenne de Saturne au soleil & à la terre (*Newton Princip. l. III. Phænom. 2*). Newton réduisoit à $16''$ le diamètre de Saturne à cause de l'irradiation, mais je ne crois pas devoir ici en tenir compte. La distance moyenne de Saturne au soleil est à celle du soleil à la terre, comme 1000 est à 9539, (1222),

{ 1222) ainsi le diamètre de Saturne est $2' 51''$, 71 à la distance moyenne du soleil , & celui de l'anneau seroit de $6' 40'' 65$, réduit à la moyenne distance du soleil à la terre.

Les diamètres que je viens d'assigner aux planètes ; se trouvent un peu différemment dans M. Huygens , (*Systema Saturnium*) ; mais les observations sur lesquelles il se fondeoit , ne sont pas à beaucoup près , aussi exactes que celles dont je viens de parler : il donnoit , par exemple , $9' 4''$ au diamètre de l'anneau de Saturne , $5' 35''$ au diamètre de Jupiter ; $21'' \frac{3}{4}$ à celui de Vénus ; ces quantités sont visiblement trop grandes.

1394. LE DIAMÈTRE DE LA TERRE vu du soleil , égal au double de la parallaxe horisontale de cet astre , est d'environ $18''$: nous en traiterons en particulier dans le IX^e. livre de cet ouvrage (1742). A l'égard du diamètre réel de la terre en lieues , il sera déterminé dans le XV^e. livre , où nous parlerons de la grandeur & de la figure de la terre , on verra qu'il est de 2865 lieues , chacune de 25 au degré ou de 2283 toises (2652).

Diamètre de la Terre.

1395. J'ai dit que suivant Newton , tous ces diamètres observés avec les plus grandes lunettes , sont encore affectés d'une certaine *irradiation* , ou dilatation de lumière qui les environne comme une frange , & les fait paroître trop grands ; en conséquence plusieurs astronomes ont cru que pour avoir les vrais diamètres des planètes , il falloit ôter $2''$ de celui de Saturne , $5''$ de celui de Mars , tandis qu'il falloit ajouter $1''$ ou $2''$ aux diamètres de Mercure & de Vénus observés sur le soleil , à cause d'un semblable débordement de la lumière solaire qui devoit faire paroître ces planètes plus petites. M. le Monnier (*Instit. astron. pag. 554*). Le P. Hell dans le recueil d'observations de Vénus qui est à la suite de ses éphémérides pour 1762 , pag. 24 , paroît croire à cette irradiation , dont il donne plusieurs explications ; mais il convient que les obser-

L'irradiation est insensible.

variations qui sembloient l'indiquer, n'étoient pas assez concluantes.

Pour moi ayant comparé avec grand soin le diamètre de Vénus observé sur le soleil en 1761, & ce diamètre observé dans sa plus grande lumière avant & après le passage de Vénus sur le soleil, je les ai rapportés tous à une même distance, (*Mém. acad.* 1762) & je n'y ai trouvé aucune différence; l'éclipse annulaire de 1764 a prouvé la même chose par rapport à la lune, je crois donc que le phénomène de l'irradiation est insensible, pour les planètes, que leur lumière n'est pas assez forte pour produire ce phénomène, & que quand on se sert des mêmes lunettes, il est inutile d'en tenir compte.

Différence
des lunettes.

On croit cependant avec quelque fondement que le diamètre du soleil avec de grandes lunettes paroît plus petit qu'avec les petites lunettes, ainsi M. de la Caille a toujours pensé que le diamètre du soleil étoit de 31' 34" mesuré avec des lunettes de 6 pieds, tandis que je l'ai trouvé de 31' 30" $\frac{1}{2}$ avec un héliomètre de 18 pieds (1388); peut-être cette différence provient-elle de la difficulté qu'il y a de mesurer exactement ce diamètre avec un micromètre ordinaire comme celui de M. de la Caille, & avec une lunette qui n'a que 6 pieds; mais si cette différence est réelle il faudra l'attribuer à une couronne lumineuse formée par l'aberration des rayons qui dans les lunettes ne se réunissent pas exactement au même point. (2289) V. aussi M. le Gentil; *Mém. acad.* 1755, pag. 437; mais cette différence étant toujours la même pour le soleil, vu dans la même lunette, il est inutile d'y avoir égard; si ce n'est dans les passages de Vénus & Mercure, où son effet disparoît comme je l'expliquerai dans le livre XI^e. à l'occasion de ses passages (2159).

On m'objectera peut-être que quand une planète paroît sur le soleil, l'irradiation du soleil qui l'environne de tout côté devroit retrecir en apparence la partie obscure ou le diamètre de la planète; & ce diamètre devroit paroître plus petit de la même quantité que

celui du soleil paroît trop grand ; mais comme j'ai déterminé les diamètres de Vénus & de Mercure par la durée du temps qu'ils employent à sortir de dessus le soleil, j'ai évité l'effet de cette irradiation, comme je le prouverai dans le livre XI^e. A l'égard de la lune dont le diamètre a été mesuré sur le soleil en 1748 ; & n'a pas paru plus petit que quand la lune est éclairée, peut-être quelques secondes auront pu échapper à l'exactitude de cette observation pour laquelle on n'a eu que le peu de minutes que dura l'éclipse annulaire de 1748, & peut-être aussi que ce débordement de lumière n'a lieu qu'à la circonférence extérieure du soleil.

1396. Les diamètres apparens de toutes les planètes réduits à une même distance, nous donnent le moyen de trouver les diamètres absolus & de les comparer tous ou au diamètre du soleil ou à celui de la terre ; il est vrai que pour les comparer au diamètre de la terre, il faut supposer qu'on connoisse la parallaxe du soleil, c'est-à-dire, l'angle sous lequel paroît, vu du soleil, le demi-diamètre de la terre ; mais les observations du passage de Vénus, nous ont fait connoître avec assez de précision que ce diamètre est de 18'' (1742) ; comme ces comparaisons ne sont qu'une pure curiosité & qu'on aime assez à rapporter tout à la terre, nous donnerons les grosseurs totales des planètes par rapport à la terre, en supposant que son demi-diamètre vu du soleil paroît de 9''.

Pour trouver les volumes ou les grosseurs des planètes par rapport à la terre, quand on connoît le rapport de leurs diamètres, il suffit de prendre le cube du diamètre, ou de tripler son logarithme, parce que l'on fait par les élémens de géométrie que les sphères sont comme les cubes de leurs diamètres. Par exemple le diamètre de la terre est de 18'', celui de Mercure est de 6'' 9 à la même distance. Si l'on divise 6'' 9 par 18'' l'on aura 0,3889 ; c'est le diamètre de Mercure, en supposant que celui de la terre est 1. Le cube de cette fraction décimale donnera 0,05881 qui

vaut à peu-près $\frac{1}{17}$; ce qui nous apprend que la grosseur de Mercure est la dix-septième partie de celle de la terre.

Différence
entre la grosseur
& la
masse.

1397. Le volume ou la grosseur d'une planète n'est pas la même chose que sa masse ou la quantité de matière qu'elle renferme; celle-ci dépend de la densité dont nous parlerons dans le XXII^e. livre (3403), & qu'en attendant j'ai mise dans la table suivante: La densité multipliée par le volume, donne la masse, le poids, la quantité de matière, ou la force attractive; c'est ce que j'ai renfermé de même dans la table suivante.

On observera au sujet de cette table que les quatre densités marquées par des étoiles, sont les seules qu'on puisse déterminer par un calcul immédiat, les autres sont établies par une espèce de conjecture (3410).

1398. Les distances en lieues ne sont certaines qu'à un trentième près, parce qu'elles dépendent de la parallaxe du soleil sur laquelle on a peut-être un tiers de seconde d'incertitude; nous discuterons cette matière dans les livres IX^e. & XI^e. (1742, 2149).

J'ai supposé la masse de la lune $\frac{1}{75}$ de celle de la terre: comme M. Bernoulli l'a déduit de son effet sur le flux & le reflux de la mer. Voy. liv. XXII^e. (3412); au lieu de $\frac{1}{40}$ que Newton avoit trouvé. La masse du soleil est plus grande que celle de Newton, l. 3, pr. 8, qui est 169282, parce que j'ai supposé la parallaxe plus petite que Newton, c'est-à-dire, de 9" au lieu de 10" $\frac{1}{2}$; avec d'autres élémens plus exacts que les siens.

Nous parlerons du diamètre de la lune dans le VII^e. livre (1503), & de ceux des étoiles fixes dans le XVI^e. livre (2784).

On trouve dans la même table les vitesses que les corps pesans doivent avoir dans la première seconde, à la surface de chaque planète, en supposant que les corps décrivent sur la terre 15 pieds 1 pouce 2 lignes 95 ou 15 pieds 1038 en une seconde sous l'équateur; c'est la mesure de la pesanteur dans chaque pla-

nète, elle est proportionnelle à la masse divisée par le carré du rayon (3411).

Les distances des planètes à la terre en lieues qui sont dans les dernières colonnes de la table ne sont autre chose que la somme & la différence de la distance moyenne de la terre, & de chaque planète au soleil (1222), réduites en lieues à raison de 2865, pour le diamètre de la terre, j'ai négligé les valeurs des derniers chiffres qui dans ces sortes de calculs sont tout-à-fait inappréciables, exceptés pour la lune (1719).

De ces distances il seroit facile de conclure la vitesse de chaque planète, par exemple, la circonférence de l'orbite terrestre supposée circulaire doit avoir 206280000 lieues; ainsi la vitesse de la terre dans son orbite est de 564754 lieues par jour, 23531 par heure; 392 par minute & $6\frac{1}{2}$ par seconde. A l'égard de la vitesse diurne du mouvement de rotation, elle n'est que de 238 toises par seconde sous l'équateur, à peu-près comme celle d'un boulet de canon de 24 livres, qu'on estime de 250 toises dans la première seconde.

TABLE des diametres apparens des Planètes, vus à la distance moyenne du Soleil à la terre ; & de leurs diametres vrais en supposant la parallaxe du Soleil de 9" (Voyez Liv. IX.) avec leurs volumes, leurs densités, leurs masses & leurs distances.

PLANETES.	Diametres en minutes & secondes.	Diametres en lieues.	Diametres par rapport à la terre.
Le Soleil,	32' 2",0	305918	Cent & sept diam.de la terre ou 106,778
La Terre,	18,0	2865 1,000
La Lune,	4,915	782	Un tiers, ou $\frac{11}{33}$ du diam.de la terre 0,3141
Mercure,	7,0	888	Un tiers, ou $\frac{7}{21}$ ou 0,3889
Vénus,	16,7	2658	Treize quatorziemes 0,9278
Mars,	11,4	1814	Cinq huitiemes, ou 0,6333
Jupiter,	3 13,7	30832	Dix diametres & trois quarts, 10,761
Saturne,	2 51,7	27329	Neuf diametres & demi, 9,539
Anneau de S.	6 40,6	63771	Vingt-deux diam. de la terre, 22,25

	Groffeur ou volume par rapport à la terre, à peu-près.	Plus exactement & en décimales.	Densité par rapport à la terre.
Le Soleil,	Douze cent mille fois plus gros,	12 17480	0,25285 *
La Lune,	La quarante-neuvieme,	0,02036	0,68706 *
Mercure,	Un dix-septieme,	0,05881	2,0377
Vénus,	Quatre cinquiemes de la terre,	0,7986	1,2749
Mars,	Le quart de la terre,	0,2540	0,7292
Jupiter,	1246 fois plus gros que la terre,	1246	0,23147 *
Saturne,	868 fois plus gros que la terre,	867,95	0,09032 *

	Masse par rapport à la terre.	Vitesse des graves à leur surface pour chaque seconde.	Distances à la terre en lieues.	
			La plus petite.	La plus grande.
Le Soleil,	307831	407 ^{pi} . 69	32278 900	33382000
La Terre,	1	15 10
La Lune,	0,01399	2 83	77577	91454
Mercure,	0,1198	11 96	20122000	45539000
Vénus,	1,01818	17 82	9083000	56578000
Mars,	0,1852	6 97	17193000	82854000
Jupiter,	288,44	37 66	137920000	203581000
Saturne,	78,39	13 01	280352000	346012000

OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES
anciennes & Modernes du Soleil, & des cinq
Planètes principales.

1399. LES observations font le fondement de toutes les théories, elles en font la vérification & la preuve; ainsi je ne puis terminer mieux ce VI^e. livre qu'en y rassemblant une collection des meilleures observations anciennes & modernes, extraites des auteurs qui en ont fait le calcul & l'application; j'y ai ajouté les observations les plus récentes & les plus décisives pour chaque planète, comme un point fixe d'où l'on pourra partir pour établir des théories; & construire de nouvelles tables.

Les anciennes observations se trouvent rassemblées & discutées dans les ouvrages suivant: Longomontani *Astronomia Danica*, 1640. Bullialdi, *Astronomia Philolaïca*, 1645: Riccioli, *Astronomia Reformata*, 1665: Wing, *Astronomia Britannica*, 1669. *Historia Cœlestis*; Tychoonis Brahe, 1672. M. Cassini, *Elémens d'Astronomie*, 1740. J'en ai moi-même examiné & calculé un grand nombre; mais il sera toujours bon de remonter aux sources, parce que mon intention n'étoit pas de former ici un recueil complet d'observations astronomiques.

A l'égard des observations modernes, on pourra consulter le grand ouvrage d'Hévélius intitulé, *Machina Cœlestis*, (livre très-rare); celui de Flamsteed, *Historia Cœlestis Britannica*; les mémoires de l'académie; &c. S'il étoit possible de publier toutes celles que M. de l'Isle a rassemblées dans ses manuscrits, & qui sont actuellement au dépôt de la marine à Versailles, on y trouveroit la plus grande collection d'observations astronomiques qui ait jamais existé; mais le plus grand inconvénient, c'est que la plupart de ces observations ne peuvent se réduire que par de longs calculs.

Des obser-
vations de
Mercure.

Je rassemble ici principalement des observations de Mercure, parce qu'elles sont rares & difficiles à faire sur-tout à Paris. Copernic éprouvoit la même difficulté dans le nord; il ne put jamais faire une seule observation de Mercure, ce qu'il attribuoit aux vapeurs de la Vistule & à la longueur des crépuscules en été. On trouve dans l'astronomie réformée beaucoup d'observations de Riccioli qui n'ont jamais été calculées, & dont on pourroit se servir pour la théorie de cette planète; on en peut dire autant de celles qui sont dans Hévélius, (*Mach. cœlest.*), & Flamsteed, (*Hist. cœlest.*); dont j'ai fait usage pour calculer mes tables de Mercure, de même que de celles de M. Halley (V. *les Mém. de 1766, pag. 450 & 503*).

J'ai aussi trouvé dans les manuscrits de M. de l'Isle la notice de beaucoup d'observations de M. de la Hire & de plusieurs autres astronomes, observations qui n'ont point été publiées: telles sont celles que Margraf fit en 1639 & 1640, dans l'Isle de Vaaz au Brésil, qui sont au dépôt; mais l'original est resté à Cadix, avec les manuscrits de M. de Louville & beaucoup d'autres que M. Godin y avoit emportés, & que l'on croit être entre les mains de D. *Antonio de Ulloa*.

On pourroit y ajouter plusieurs observations que M. de l'Isle a faites à Pétersbourg, où pendant 20 ans il s'est occupé des observations astronomiques; j'y ai suppléé par les miennes, qui sont les plus récentes, & qui m'ont donné les élémens actuels de l'orbite de Mercure (1267, 1286). Parmi les observations de Mercure & de Vénus, que j'ai tirées de l'*Astronomia Danica*, il y en a auxquelles Longomontanus a fait des corrections pour la réfraction & la parallaxe, comme il le dit *pag. 408*, & elles sont marquées *vraies*; mais comme il supposoit la parallaxe du soleil de 2' 40'', & les autres à proportion, il pourroit y avoir près de 2' d'erreur en certains cas, qu'il faudroit corriger dans ces observations, si l'on se proposoit d'y mettre ce degré de précision.

OBSERVATIONS

OBSERVATIONS DU SOLEIL.

Av. J. C.	Temps moy. à Paris.				
161	27 Sept.	4 ^h	}	Equinoxes observés par Hipparque.	
158	26 Sept.	16			
157	26 Sept.	22			
145	23 Mars	22			10'
145	26 Sept.	16			
142	26 Sept.	4			
134	22 Mars	10			15
127	23 Mars	4			15
					Voy. Ptolomée, <i>Almag.</i> <i>Mém. Acad.</i> 1757, p. 423. <i>M. Cassini, El. d'Astr.</i> p. 211.
1278	13 Déc.	18 ^h	7'	folst. d'hiv.	} <i>Hist. de l'Ast. Chin.</i> <i>pag.</i> 107. <i>Mém. Ac.</i> 1757, <i>pag.</i> 140, 141.
1279	14 Juin	8	46 $\frac{1}{2}$	folst. d'été.	
1279	13 Déc.	23	52	folst. d'hiv.	
1280	12 Déc.	5	50	folst. d'hiv.	
1487	12 Déc.	12	1	folst. d'hiv.	} <i>Mém. Acad.</i> 1749, <i>pag.</i> 53, 1757, <i>pag.</i> 139, 140.
1488	11 Juin	20	40 $\frac{1}{2}$	folst. d'été	
1488	12 Déc.	11	47 $\frac{1}{2}$	folst. d'hiv.	
1503	12 Juin	12	8	folst. d'été	
1503	12 Déc.	9	45 $\frac{1}{2}$	folst. d'hiv.	

OBSERVATIONS de Waltherus calculées par M. de la Caille, (*Mém. Acad.* 1749, p. 60).

Années.	Temps moy. à Paris.		Longitude du Soleil.
1475	15 Sept.	23 ^h 17'	6 ^s 1° 51' 24"
1476	15 Mars	23 33	0 5 4 55
1476	12 Sept.	23 18	5 29 40 6
1477	10 Mars	23 33	11 29 54 0
1477	16 Sept.	23 17	6 3 16 48
1478	11 Mars	23 33	0 0 35 37
1478	12 Sept.	23 18	5 29 6 54
1487	17 Sept.	23 17	6 2 54 24
1488	16 Mars	23 31	0 6 7 48
1488	13 Sept.	23 17	6 0 43 31
1488	14 Sept.	23 17	6 1 42 52
1488	17 Sept.	23 16	6 4 38 37
1489	12 Mars	23 32	0 1 58 30

Années.	Temps moyen à Paris.			Longit. du Soleil.		
1489	14	Mars	23 ^h 31'	0 ^s	3° 57'	46''
1489	18	Mars	23 30	0	7 54	20
1491	12	Mars	23 32	0	1 28	26
1491	14	Sept.	23 17	6	0 59	12
1498	17	Sept.	23 16	6	4 13	24
1498	18	Sept.	23 16	6	5 13	
1499	13	Mars	23 32	0	2 32	37
1501	16	Mars	23 31	0	5 58	20
1501	14	Sept.	23 17	6	1 34	15
1501	18	Sept.	23 15	6	5 28	50

EQUINOXES observés par Tycho, (Mém. Acad. 1757, pag. 424. M. Cassini, pag. 228).

Temps moyen à Paris.							
1584	10	Mars	0 ^h 46' 42''	1587	13	Sept.	5 ^h 37' 16''
1584	12	Sept.	11 11 16	1588	10	Mars	0 16 42
1585	10	Mars	6 51 42	1588	12	Sept.	10 35 16
1585	12	Sept.	17 3 16	1589	10	Mars	5 5 42
1586	10	Mars	12 41 42	1589	12	Sept.	16 49 16
1586	12	Sept.	23 6 16	1590	10	Mars	11 15 12
1587	10	Mars	17 55 42	1590	12	Sept.	22 52 16

On trouvera dans M. Cassini, pag. 209, une suite d'équinoxes observés depuis 1672 jusqu'en 1739, à l'Observatoire Royal de Paris.

TABLE de 144 Longitudes du Soleil observées par M. de la Caille à Paris & au Cap. (Mém. Acad. 1757, pag. 125).

Temps vrai à Paris.		Longitude observée.		Temps vrai à Paris.		Longitude observée.	
1746	29 Oct.	0 ^h 0'	7 ^s 5° 56' 5''	1747	17 Avril	0 ^h 0'	0 ^s 27° 2' 45''
	7 Nov.	0 0	7 14 58 2,0		1 Mai	0 0	1 10 38 54,3
	8	0 0	7 15 58 25,2		2	0 0	1 11 36 58,9
1747	14 Mars	0 0	11 23 33 30,7		11	0 0	1 20 18 47,8
	15	0 0	11 24 33 11,4		12	0 0	1 21 16 40,6
	16	0 0	11 25 32 49,8		14	0 0	1 23 12 19,0
	23	0 0	0 2 29 14,9		16	0 0	1 25 7 51,4
	13 Avril	0 0	0 23 8 17,9		17	0 0	1 26 5 34,8
	14	0 0	0 24 6 58,0		21 Juin	0 0	2 29 35 10,9
	15	0 0	0 25 5 35,9	1748	15 Févr.	0 0	10 26 15 53,3
	16	0 0	0 26 4 11,7		21	0 0	11 2 18 20,2

Observations du Soleil.

163

Temps vrai à Paris.	Longit. observée.	Temps vrai à Paris.	Longit. observée.
1748 7 Mars 0 ^h 0'	11s 17° 20' 22'' 8	1749 21 0 ^h 0'	3° 28° 41' 30'' 0
8 0 0	11 18 20 14,8	28 0 0	4 5 22 50,5
16 Avril 0 0	0 26 48 27,5	2 Août 0 0	4 10 9 54,2
20 0 0	1 0 42 15,7	6 0 0	4 13 59 56,1
18 Juin 0 0	2 27 26 44,0	7 0 0	4 14 57 30,4
5 Sept. 0 0	5 13 11 1,7	29 0 0	5 6 9 21,5
6 0 0	5 14 9 18,5	30 0 0	5 7 7 26,5
7 Sept. 0 0	5 15 7 37,2	31 0 0	5 8 5 33,3
8 0 0	5 16 5 58,3	1 Sept. 0 0	5 9 3 42,2
9 0 0	5 17 4 20,8	8 0 0	5 15 51 43,6
10 0 0	5 18 2 45,7	9 0 0	5 16 50 9,2
11 0 0	5 19 1 13,2	13 0 0	5 20 44 10,7
1749 5 Mars 0 0	11 15 6 18,0	2 Oct. 0 0	6 9 22 11,1
21 0 0	0 1 1 19,5	3 0 0	6 10 21 22,9
24 0 0	0 3 59 30,1	4 0 0	6 11 20 37,2
25 0 0	0 4 58 49,0	6 0 0	6 13 19 13,4
26 0 0	0 5 58 5,3	8 0 0	6 15 17 58,9
27 0 0	0 6 57 19,2	10 0 0	6 17 16 53,0
28 0 0	0 7 56 31,2	1750 2 Mars 0 0	11 11 51 17,9
29 0 0	0 8 55 40,2	3 0 0	11 12 51 21,3
12 Avril 0 0	0 22 40 4,4	4 0 0	11 13 51 22,5
13 0 0	0 23 38 43,8	5 0 0	11 14 51 20,9
23 0 0	1 3 23 45,4	8 0 0	11 17 51 9,4
25 0 0	1 5 20 22,9	30 0 0	0 9 39 52,7
6 Mai 0 0	1 15 59 20,8	2 Avr. 0 0	0 12 37 4,2
7 0 0	1 16 57 16,8	3 0 0	0 13 36 3,9
8 0 0	1 17 55 11,1	18 0 0	0 28 17 17,4
9 0 0	1 18 53 3,9	21 Juin 0 0	2 29 50 50,7
10 0 0	1 19 50 56,0	28 0 0	3 6 31 15,0
24 0 0	2 3 18 56,3	29 0 0	3 7 28 28,7
25 0 0	2 4 16 29,4	30 0 0	3 8 25 41,6
18 Juin 0 0	2 27 13 4,4	1751 27 Mai 22 55 ^{1/5}	2 6 38 14,7
19 0 0	2 28 10 19,7	30 22 55	2 9 30 43,7
5 Juil. 0 0	3 13 25 21,2	19 Juin 22 55	2 28 37 4,4
6 0 0	3 14 22 32,5	21 22 55	3 0 31 34,6
7 0 0	3 15 19 45,6	27 22 55	3 6 15 1,0
9 Juil. 0 0	3 17 14 12,1	29 22 55	3 8 9 26,2
13 0 0	3 21 3 11,4	11 Juil. 22 55	3 19 35 47,3
16 0 0	3 23 55 1,2	12 22 55	3 20 33 1,1
19 0 0	3 26 46 53,9	19 22 55	3 27 13 58,2
20 0 0	3 27 44 11,9	3 Août 22 55	4 11 34 57,0

Temps vrai à Paris.		Latitude observée.	Temps vrai à Paris.		Latitude observée!
1751	21 Août 22 ^h 55 ² / ₅	4 ^s 28 ^o 53' 19'' 8	1752	21 Fév. 22 ^h 55 ¹ / ₂	10 ^s 1 ^o 56' 20'' 9
	22 22 55	4 29 51 14,8		3 Fév. 22 55	10 15 7 54,0
	1 Sep. 22 55	5 9 31 40,3		5 22 55	10 17 9 22,9
	12 22 55	5 20 13 23,2		26 22 55	11 8 19 21,7
	13 22 55	5 21 11 55,9		2 Mars 22 55	11 13 19 40,2
	29 22 55	6 6 53 9,9		3 22 55	11 14 19 38,6
	30 Sep. 22 55	6 7 52 14,7		4 22 55	11 15 19 34,6
	6 Oct. 22 55	6 13 47 25,6		12 22 55	11 23 18 5,2
	7 22 55	6 14 46 45,5		13 22 55	11 24 17 46,7
	8 22 55	6 15 46 7,5		20 22 55	0 1 14 40,5
	4 Nov. 22 55	7 12 41 46,1		27 22 55	0 8 9 42,3
	5 22 55	7 13 42 20,7		4 Avr. 22 55	0 16 1 48,2
	3 Déc. 22 55	8 12 1 10,2		10 22 55	2 20 45 25,5
	10 22 55	8 19 8 15,0		18 22 55	2 28 23 40,9
	19 22 55	8 28 18 30,5		19 22 55	2 29 20 54,8
	24 22 55	9 3 24 24,7		21 22 55	3 1 15 20,1
	27 22 55	9 6 27 55,7		26 22 55	3 6 1 15,7
	29 22 55	9 8 30 15,8		9 Nov. 22 55	7 18 29 33,8
1752	8 Jan. 22 55	9 18 41 50,6		28 Déc. 22 55	9 8 15 5,4
	9 22 55	9 19 43 0,2		29 22 55	9 9 16 18,2

OBSERVATIONS DE MERCURE.

Années	Temps moyen à Paris.	Longit. observ.	
264	av. J. C. 14 Nov. 16 ^h 16'	7 ^s 2 ^o 47'	Ces observations ont été réduites & corrigées dans les Mémoires de l'Académie 1766, pag. 498, sans cependant tenir compte de la réfraction. Il y en a quelques-unes qu'on ne peut accorder avec les autres.
261	11 Févr. 15 38	9 21 48	
261	25 Avr. 4 31	1 23 8	
261	23 Août 4 42	5 18 58	
256	28 Mai 4 56	2 28 49	
244	18 Nov. 15 20	7 1 52	
236	29 Oct. 15 0	6 13 44	
130	apr. J. C. 4 Juil. 6 21	4 7 22	
132	2 Févr. 4 6	11 2 2	
134	3 Juin 13 55	1 19 48	
134	2 Oct. 15 28	5 21 15	
135	5 Avr. 5 13	1 5 23	
138	4 Juin 6 10	3 8 4	
139	17 Mai 5 54	2 18 34	
139	4 Juil. 13 57	2 21 9	
141	1 Févr. 16 46	9 14 34	
491	8 Sept. 16 25	5 13 30	

I 50 B. Walt. Coper. l. v.
c. 30. App.

Observations de Mercure.

165

Temps vrai à Paris			Longit. observ.	Latitude observée.	
1504	apr. J.C.	8 Janv.	17 ^h 55'	9° 3' 20'	0 45 B Schoner, <i>Ibid.</i>
1504		18 Mars	6 55	0 26 6	3 0 B Schoner, <i>Ibid.</i>
1504		18 Mars	6 40	0 26 29	Suiv. Boull. <i>Ast. Phil.</i> p. 383. <i>vr.</i>

Années N. St.	Temps vrai.		Longit. observ.	Latitude observée.
1585	24	Nov. 18 ^h 18'	7 ^s 13° 4' 0''	2° 18' 0'' B { <i>Ast. Dan.</i> 422. <i>Ast. Phil.</i> 378.
1585	3	Déc. 18 38	7 25 3 0	1 25 0 B <i>Astr. Dan.</i> <i>vr.</i>
1586	3	Nov. 18 28	6 22 35 0	<i>Ibid.</i>
1586	7	Nov. 17 48	6 26 33 0	2 17 0 B <i>Ibid.</i>
1587	19	Janv. 4 6	10 17 48 0	0 1 0 B <i>Tych. Epist.</i> p. 56.
1587	24	Janv. 4 33	10 21 7 0	1 21 0 B <i>Ibid.</i> <i>vr.</i>
1587	25	Janv. 4 39	10 21 20 0	1 40 0 B <i>Ibid.</i> <i>vr.</i>
1587	19	Janv. 4 8	5 17 48 0	0 1 0 B <i>Astr. Dan.</i> 422. <i>vr.</i>
1589	12	Avr. 7 23	1 11 28 30	2 23 40 B <i>Ast. Ref.</i> p. 345. <i>vr.</i>
1589	13	Avr. 7 28	1 12 48 0	2 30 30 B <i>Ibid.</i> p. 346.
1589	14	Avr. 7 33	1 14 1 0	2 36 50 B <i>Ibid.</i> <i>vr.</i>
1589	16	Avr. 7 38	1 16 8 30	2 45 0 B <i>Ibid.</i> <i>vr.</i>
1590	16	Mars 6 8	1 13 44 0	1 42 0 B <i>Astr. Dan.</i> <i>vr.</i>
1592	13	Fév. 4 58	11 12 20 0	0 47 <i>dout.</i> B <i>Ibid.</i> <i>vr.</i>
1593	21	Mai 8 48	2 23 16 0	2 0 0 B <i>Ibid.</i> p. 422. <i>dout.</i> <i>vr.</i>
1593	22	Mai 8 48	2 24 19 0	<i>Ast. Phil.</i> 358. <i>app.</i>
1607	25	Avr. 8 18	1 21 5 0	1 40 B <i>Ast. Dan.</i> p. 422. <i>vr.</i>
1610	15	Déc. 18 18	8 2 42 0 <i>Ibid.</i> <i>vr.</i>
1625	13	Févr. 6 21	11 13 27 0	Boulliaud, <i>Astr. Philol.</i> 358. <i>vr.</i>
1630	11	Déc. 19 8	7 29 13 0	Boulliaud, <i>Ibid.</i>
1632	30	Juil. 15 0	3 24 25 47	0 33 30 B Gassen. <i>Ib.</i> 361. <i>vr.</i>
1634	2	Janv. 5 48	10 1 31 0	0 57 0 A <i>Ibid.</i> p. 356. <i>app.</i>
1634	4	Janv. 5 48	10 3 31 0	0 30 0 A <i>Ibid.</i> <i>app.</i>
1634	6	Janv. 5 48	10 5 1 0	0 1 52 B <i>Ibid.</i> <i>app.</i>
1634	2	Oct. 17 18	5 22 7 8	1 25 0 B p. 356 & 372. <i>vr.</i>
1634	3	Oct. 17 18	5 22 59 26	1 29 18 B <i>Ibid.</i> <i>app.</i>
1634	4	Oct. 17 18	5 23 59 47	1 19 16 B <i>Ibid.</i> <i>app.</i>
1634	12	Oct. 17 33	4 5 6 0 <i>Ibid.</i> p. 363. <i>vr.</i>
1635	16	Janv. 17 18	9 4 24 32	2 1 19 B p. 363. <i>vr.</i>
1635	22	Janv. 17 18	9 8 21 50	1 39 0 B <i>Ibid.</i> p. 356. <i>app.</i>
1635	24	Janv. 17 18	9 10 4 55	1 14 8 B <i>Ibid.</i> <i>app.</i>
1635	25	Janv. 17 18	9 11 6 36	0 59 48 B <i>Ibid.</i> <i>app.</i>
1635	17	Sept. 16 18	5 7 4 0	Gaffendi,
1635	1	Déc. 5 11	9 0 26 0	Gaffendi,
1636	26	Juin 8 16	3 23 17 47	1 36 55 B p. 367. <i>vr.</i>

Années	Temps vrai à Paris.		Longit. observ.	Latitude observée.		
27	8 ^h	10'	3 ^s 24° 57' 34"	20°	0'	0'' B p. 375. vr
1699	14 Juil.	8 10	4 19 31 16	1	4	0 A 367. vr.
	15	8 10	4 20 33 15	0	33	0 A Ibid. vr.
	16	8 10	4 21 26 ^{ou} 46	0	41	A p. 367 & 374. vr.
	16	8 20	4 21 33 0		p. 368. vr.
	3 Sept.	16 45	4 24 37 ^{ou} 38		p. 373. vr.
1699	21 Oct.	22 58 56	6 12 5 58	2	7 9	B Mém. Acad. 1706.
	22 Oct.	23 0 20	6 13 31 44	2	5 32	B Ibid.
	23 Oct.	23 1 54	6 14 59 22	2	4 54	B Ibid.
	26 Oct.	23 7 10	6 19 34 52	1	56 43	B Ibid.
1701	11 Sept.	22 54 56	5 1 54 54	0	5 25	B Ibid.
	19 Sept.	23 2 12	5 10 50 43	1	37 33	B Ibid.
	20 Sept.	23 4 30	5 12 24 48	1	39 32	B Voy. ci-après.
	23 Sept.	23 12 18	5 17 20 13	1	51 4	B Ibid.
	24 Sept.	23 15 2	5 19 2 22	1	52 13	B Ibid.
	25 Sept.	23 17 56	5 20 47 50	1	53 29	B Ibid.
1705	17 Juil.	22 47 5	3 8 27 48	0	29 16	A Ibid.
	24 Juil.	23 16 8	3 21 33 33	0	51 2	B Ibid.
	26 Juil.	23 25 49	3 25 38 27	1	8 32	B Ibid.
1707	12 Avr.	1 11 34	1 11 24 30	2	34 47	B Mém. 1753, p. 320.
	13 Juin	22 37 24	2 2 53 23	1	55 1	A { Mém. Ac. 1707,
	15 Juin	22 39 56	2 4 32 6	1	44 16	A } p. 199.

Observations calculées avec soin pour servir à ma théorie de Mercure.

Années.	Temps moy. à Paris.		Longit. vraie.	Latitude vraie.		
1672	21 Mai	8 ^h 9' 18"	2 ^s 24° 9' 45"	Mémoires de l'Académie, 1766		
1673	4 Mai	7 53 25	2 5 52 5	& 1767.		
1683	13 Déc.	19 39 15	8 3 48 23			
1701	20 Sept.	22 57 28	5 12 23 55			
1731	15 Juil.	22 38 12	3 3 2 35	M. Cassini.		
1744	29 Mai	8 51 52	3 2 0 0			
1750	16 Avr.	22 49 52	0 6 53 1			
1750	5 Oct.	1 19 42	7 7 18 19	1	50 23	A Mém. 1753, p. 277.
1751	6 Mai	0 57 7	2 0 50 36	1	51 15	B
1753	25 Sept.	22 47 51	5 15 41 35			
1758	9 Mai	1 22 54	2 10 1 46			
1759	19 Août	1 41 34	5 22 58 35			
1763	17 Nov.	18 30 8	7 6 13 34			

Observations de Mercure.

Années.	Temps moyen à Paris.	Longit. observ.	
1763	3 Juin 9 ^h 28' 28"	3 ^s 5° 23' 1"	
1763	13 Nov. 18 0 49	7 2 41 28	2 22 21 B
1764	24 Mai 8 7 50	2 26 50 35	1 51 11 B
1764	17 Juil. 15 58 4	3 6 59 6	1 7 9 A

TABLE des longitudes de Mercure en conjonction dans ses douze passages sur le Soleil, observés jusqu'à présent.

Temps moy. à Paris.	Long.réd. à l'écl.	Lat. géoc. vraie.	
1631 6 Nov. 19 ^h 36' 20"	7 ^s 14° 41' 35"	3' 22" B	{ <i>M. Cassini, p. 592.</i> <i>Phil. Transf. n. 386.</i>
1631 6 Nov. 18 50 0	4 28 B	<i>Mss. de M. de l'Isle.</i>
1651 2 Nov. 13 2 30	7 10 26 29	12 0 A	<i>Astr. Br. p. 312. dour.</i>
1661 3 Mai 4 48 28	1 13 33 27	4 30 B	<i>M. Cassini, p. 587, 608.</i>
1677 7 Nov. 0 23 0	7 15 44 20	4 3 B	<i>M. Cassini, p. 591.</i>
1690 9 Nov. 18 6 0	7 18 20 46	12 20 B	<i>M. Cassini, p. 595, 608.</i>
1697 2 Nov. 17 42 0	7 11 33 50	10 42 A	<i>M. Cassini, p. 598.</i>
1723 9 Nov. 5 16 0	7 16 47 20	6 0 B	{ <i>Phil. Transf. n. 386.</i> <i>M. Cassini, p. 601.</i>
1736 10 Nov. 22 59 23	7 19 23 38	14 7 B	<i>Mém. Ac. 1736.</i>
1740 2 Mai 10 36 37	1 12 43 19	14 59 B	<i>Phil. Transf. n. 471.</i>
1743 4 Nov. 22 26 8	7 12 37 32	9 7 A	<i>Mém. Ac. 1736.</i>
1753 5 Mai 18 29 50	1 15 48 0	2 25 A	<i>Mém. 1754, p. 599.</i>
1756 6 Nov. 16 17 28	7 15 13 41	0' 58,8A	<i>Mém. 1758, p. 154.</i>

OBSERVATIONS DE VÉNUS.

Temps vrai à Paris.	Long. observ.	
271 av. J. C. 11 Oct. 14 ^h 20'	5 ^s 3° 36'	Dout.
127 de J. C. 11 Oct. 14 50	5 1 18	
129 19 Mai 14 15	0 11 37	D.
132 8 Mars 6 0	1 2 32	
134 17 Fév. 14 30	9 12 58	D.
136 18 Nov. 5 20	9 13 53	D.
136 25 Déc. 5 10	10 20 39	
138 15 Déc. 14 50	7 7 34	
140 18 Fév. 5 40	0 14 54	
140 29 Juil. 13 20	2 19 34	D.

De ces dix observations, il y en a cinq qui diffèrent entre elles de plus d'un degré; & la première s'écarte du calcul de plus de quatre degrés; ainsi il est difficile de pouvoir les faire servir à la théorie de Vénus. Voici une partie de ces observations telles que M. Caffini les a employées, n'ayant pas fait aux observations de Ptolomée les corrections que j'ai indiquées ci-dessus, pag. 393.

Années.	Temps vr. à Paris.	Lon. observ.	Latitude.
1117	13 Oct. 16 ^h 16'	5 ^s 10 43 ¹ / ₂ M. Caf. p. 534.
1129	18 Mai 16 8	0 10 33	10 30' A M. Caf. p. 535.
1132	8 Mars 4 8	1 1 55 P. 536.
1134	17 Fév. 16 8	9 12 27 Ibid.
1136	18 Nov. 4 0	9 12 50 P. 537.
1136	25 Déc. 4 0	10 20 14 Ibid.
1138	15 Déc. 14 53	7 6 53 P. 538.
1140	18 Fév. 4 8	0 14 28 ¹ / ₂ Ibid.
1140	29 Juil. 16 8	2 18 46 ¹ / ₂ P. 539.
Nouv. Style.			
1585	24 Sept. 17 33	4 15 58	2 8 A Af. Dan. p. 407.
1587	19 Janv. 4 58	11 13 5	1 38 B Tyc. Ep. p. 56.
1587	24 Janv. 4 8	11 16 20	2 29 B Ibid.
1587	25 Janv. 3 58	11 16 55	2 39 B Ib. Af. Dan. app.
1587	3 Mars 5 23	11 16 1	8 56 B Afr. Dan. app.
1587	12 Mars 16 48	11 10 7	8 26 B Ibid. app.
1588	24 Déc. 18 58	5 17 10	3 10 B Ibid. vr.
1590	27 Déc. 19 18	8 20 0	0 27 B Afr. Dan. vr.
1592	22 Fév. 17 30	9 27 18 Afr. Phil.
1594	17 Déc. 5 0	10 22 58	1 7 A
1594	25 Déc. 4 28	10 21 0	1 16 A Afr. Dan. vr.
1600	21 Fév. 20 27	9 38 22	
1601	9 Mai 8 30	1 19 4	
1610	22 Déc. 3 58	10 17 58	1 29 A Afr. Dan. vr.
1616	19 Mars 16 18	10 15 24	Afr. Dan. vr.

J'ai averti que dans les observations tirées de l'*Astr. Danica*, il paroît que l'on a employé une parallaxe trop forte.

Conjonctions de Vénus au soleil, rapportées par M. Cassini, pag. 561. auxquelles j'ai ajouté celles de 1639, 1691, 1751, 1761 & 1769.

Années.	T. vr. de la conjonc.	Longit. de Vénus.	Latit. géocent.
1639	4 Déc. 6 18 $\frac{1}{2}$ inf.	8 ^s 12 ^o 31' 55"	0 ^h 8' 50" ou 9'
1689	25 Juin 13 46 inf.	3 4 53 40	3 1 40 B
1691	15 Nov. 11 4 sup.	par M. de la Hire.	Anc. Mém. T. X. p. 25.
1692	3 Sept. 19 7 inf.	5 12 33 0	
1693	25 Juin 17 38 sup.	3 5 5 35	17 ^h 30 $\frac{1}{2}$ suiv. M. de la H.
1696	1 Sept. 0 58 sup.	5 9 52 55	1 21 20 B
1698	15 Avr. 22 2 sup.	0 26 50 40	
1699	30 Janv. 7 6 inf.	10 11 14 47	7 36 0 B
1699	13 Nov. 12 0 sup.	7 21 24 0	0 32 20 B
1700	2 Sept. 11 20 inf.	5 10 20 20	8 40 15 A
1705	21 Juin 22 0 inf.	3 0 36 52	2 25 10 A
1706	14 Avr. 9 45 sup.	0 24 26 30	1 3 10 A
1707	28 Janv. 18 20 inf.	10 8 47 5	
1708	31 Août 0 30 inf.	5 8 2 0	
1709	22 Juin 6 0 sup.	3 0 56 30	
1710	10 Avr. 18 7 inf.	0 20 55 0	
1711	27 Janv. 12 52 sup.	10 7 33 51	
1712	28 Août 14 53 sup.	5 5 43 34	
1713	19 Juin 15 15 inf.	2 28 29 35	
1714	12 Avr. 2 0 sup.	0 22 15 38	
1715	26 Janv. 8 19 inf.	10 6 22 58	7 10 33 A
1716	28 Août 16 36 inf.	5 5 49 2	8 34 9 A
1718	8 Avr. 10 13 inf.	0 18 42 13	6 57 22 B
1719	10 Nov. 9 17 inf.	7 17 55 34	4 6 18 B
1729	14 Juin 23 56 inf.	2 24 11 16	1 26 53 A
1737	12 Juin 15 43 inf.	2 22 0 30	1 8 12 A
1751	31 Oct. 11 47 $\frac{2}{3}$ inf.	7 8 13 0	5 23 1 A
1761	5 Juin 17 50 $\frac{1}{2}$ inf.	2 15 36 10	0 9 30 $\frac{1}{2}$ A
1769	3 Juin 10 13 $\frac{2}{3}$ inf.	2 13 27 19	0 10 16,4 B

Digressions de Vénus, rapportées par M. Cassini, p. 570.

Années.	Temps.	Digression.	Anom. moy.	Dist. de Vénus au ☉.
1689	4 Sept. 45 ^o 57' 20"		2 ^s 24 ^o 16'	72432
1690	21 Nov. 47 13 20		2 14 26	72500
1691	5 Avr. 46 0 50		9 20 30	72432

170 ASTRONOMIE, LIV. VI.

Années.	Temps.	Digression.	Anom. moy.	Dist. de Vénus au ☉
1692	23 Juin	45° 23' 30"	9 ^s 13° 30'	72419
1697	13 Avr.	45 36 0	7 5 20	71905
1697	4 Sept.	45 52 0	2 25 48	72382
1698	21 Nov.	47 14 20	2 15 35	72515
1699	10 Sept.	46 15 0	9 28 18	72532
1705	12 Avr.	45 48 50	7 3 16	71927
1705	28 Août	45 48 0	2 14 10	72479
1706	17 Nov.	47 10 40	2 9 8	72540
1707	9 Avr.	46 19 10	9 27 32	72540
Temps moyen.			Longitude.	
1746	21 Déc.	10 ^h 37' 30" t.m.	10 ^s 3° 52' 17" (1340).	
1767	31 Juil.	2 58 51	5 23 6 45 (1318).	
1769	7 Août	20 52 57	3 0 19 54 (1318).	

OBSERVATIONS DE MARS.

Temps moyen à Paris.	Long. héliocent	Latitude.
130 13 Déc. 11 ^h 48'	2 ^s 21° 22' 50"	<i>M. Cassini, p. 467.</i>
135 19 Fév. 4 0	4 29 40 0	<i>Ibid.</i>
139 26 Mai 9 1	8 2 53 0	<i>Ibid.</i>
1580 28 Nov. 0 49	2 6 28 35	1 40 <i>B^{Kep.de}</i>
1583 7 Janv. 3 16	3 16 55 30	4 6 <i>B^{St. M.}</i>
1585 9 Fév. 18 32	4 21 36 10	4 32 10 <i>B^{p. 90.}</i>
1587 16 Mars 6 41	5 25 43 0	3 41 <i>B</i>
1589 24 Avr. 5 41	7 4 23 0	1 12 45 <i>B</i>
1591 18 Juin 7 1	8 26 43 0	4 0 <i>A</i>
1593 4 Sept. 16 45	11 12 16 0	6 2 30 <i>A</i>
Selon mon calcul, 14 32	11 12 17 56	
1595 9 Nov. 23 57	1 17 31 40	0 8 <i>B</i>
Suiv. M. Cassini, 22 8	1 17 32 48	<i>Elém. d'As. p. 489.</i>
1597 23 Déc. 15 12	3 2 28 0	3 33 <i>B</i>
1600 28 Janv. 13 20	4 8 38 0	4 30 50 <i>B</i>
1602 2 Mars 13 31	6 12 27 0	4 10 <i>B</i>
1604 7 Avr. 15 41	6 18 37 10	2 26 <i>Bp. 342</i>
1608 3 Août 1 18	10 11 10 0	<i>Astr. Dan. p. 342.</i>
1610 18 Oct. 16 8	0 25 30 0	<i>Ibid.</i>

Voyez Képler, de *Stella Martis*, 90. Longomontanus, *Astr. Dan.* pag. 342. Boulliaud, *Astr. Phil.* pag. 287; Riccioli, *Astron. Reform.* pag. 316. On y trouve une observation faite 272 ans. avant J. C. mais sur laquelle on n'est pas d'accord.

Oppositions de Mars rapportées dans les tables de Halley.

Années.	Temps moy. à Paris.	Long. hélIOC. réd. à l'écliptique.	Anom. moyenne de Mars.
1659	1 Déc. 11 ^h 42'	2 ^s 9° 51' 2''	8 ^s 29°
1662	9 Janv. 6 9	3 19 52 14	10 13
1666	18 Mars 12 15	5 28 39 49	1 4
1670	21 Juin 15 47	9 0 46 42	4 10
1672	8 Sept. 11 33	11 16 56 4	6 14
1674	12 Nov. 17 1	1 21 11 32	8 11
1676	25 Déc. 19 14	3 5 29 55	9 26
1679	30 Janv. 14 59	4 11 27 59	11 8
1781	4 Mars 16 27	5 15 16 16	0 18
1683	10 Avr. 23 40	6 21 39 18	2 0
1685	28 Mai 1 9	8 7 38 15	3 18
1687	8 Août 1 9	10 15 56 5	5 18
1689	21 Oct. 17 29	0 29 28 52	7 20
1691	11 Déc. 3 15	2 19 53 50	9 9
1694	17 Janv. 4 56	3 28 11 52	10 22
1696	20 Fév. 9 9	5 2 18 4	0 3
1698	26 Mars 18 29	6 7 4 17	1 13
1700	8 Mai 7 49	7 18 5 16	2 28
1702	8 Juil. 12 59	9 16 10 10	4 23
1704	26 Sept. 10 3	0 3 45 46	6 28
1711	8 Fév. 5 31	4 19 24 6	11 16
1713	13 Mars 13 3	5 23 20 30	0 27
1717	11 Juin 9 29	8 20 38 46	4 0

Années.	Temps moy. à Paris.	Long. hélIOC. réd. à l'écliptique.	
1683	11 Avr. 0 ^h 11'	6 ^s 21° 41' 30''	<i>M. Cassini, p. 465.</i>
1687	8 Août 0 0	10 15 54 0	<i>6 50 40 A. p. 449.</i>
1691	11 Déc. 3 8	2 19 54 28	<i>Ibid. p. 472.</i>
1694	17 Janv. 4 31	3 28 12 0	<i>Ibid. p. 474.</i>
1696	20 Fév. 9 15	5 2 18 8	<i>Ibid. p. 472.</i>
1698	26 Mars 18 0	6 7 4 18	<i>Ibid. p. 474.</i>
1700	8 Mai 7 38	7 18 5 0	<i>Ibid. p. 472.</i>
1702	8 Juil. 13 2 $\frac{1}{2}$	9 16 10 23	<i>Ibid. p. 474.</i>
1709	4 Janv. 5 54	3 14 18 25	<i>Ibid. p. 469.</i>
1713	13 Mars 16 49 $\frac{1}{2}$	5 23 30 30	<i>Ibid. p. 470.</i>
1715	21 Avr. 10 58 $\frac{1}{2}$	7 1 9 30	<i>Ibid. p. 464.</i>
1717	11 Juin 9 10	8 20 37 15	<i>Ibid. p. 465.</i>
1730	5 Avr. 7 7	6 15 43 36	<i>Ibid. p. 465.</i>

172 ASTRONOMIE, LIV. VI.

Oppositions observées à Paris depuis quelques années

Années	Temps moy. à Paris.	Long. hélIOC. réd. à l'écliptique.	Latit. de Mars.
1741	12 Janv. 8 ^h 14' 23"	3 ^s 22° 49' 16"	Mém. Ac. 1755, p. 218.
1743	15 Fév. 19 17 40	4 27 16 32	
1745	21 Mars 14 19 17	6 1 34 44	
1747	1 Mai 7 3 0	7 10 55 59	
1749	26 Juin 2 6 12	9 4 55 41	
1751	14 Sept. 8 28 0	11 21 35 0	3° 58' 57" $\frac{1}{2}$ B 2 20 8 A 1 27 29 A
1753	16 Nov. 10 28 33	1 24 47 24	
1760	7 Mars 17 44 7	5 18 9 8	
1764	1 Juin 1 2 10	8 11 22 24	
1768	25 Oct. 19 35 44	1 3 25 35	

Observations de Mars hors de ses oppositions, les trois premières sont de M. de la Caille, Astron.

Fund. pag. 244.

	Temps vrai à Paris.	Long. géoc. réd. à l'écliptique.	Latitude géocen. de Mars.
1747	14 Mai 10 ^h 50' 43"	7 ^s 6° 15' 20"	0° 0' 25 $\frac{1}{2}$ B
1751	13 Sept. 11 8 38	11 21 48 6	5 33 16 A
1753	3 Nov. 9 31 46	1 29 29 38 $\frac{1}{2}$	0 0 27 $\frac{1}{2}$ A
1768	3 Déc. 8 47 24	0 27 11 47	0 33 57 B

OBSERVATIONS DE JUPITER.

Oppositions de Jupiter observées par divers astronomes.

	Temps vrai à Paris.	Longitude.	Latitude géocen.
133	15 Mai 23 ^h 3'	7 ^s 23° 22' 22"	Ces 3 Observations sont tirées de Pto- lomée. M. Cassini, p. 416.
136	1 Sept. 4 10	11 7 47 35	
137	8 Oct. 3 18	0 14 19 0	
1520	28 Avr. 15 56	7 17 59 0	Ces 3 Observations sont de Copernic. M. Cassini, p. 416.
1526	28 Nov. 1 58	2 15 51 0	
1529	30 Janv. 21 0	4 21 15 50	
1583	V.S. 6 Sept. 17 13	11 23 33 22	1 34 53 A
1584	13 Oct. 7 20	1 0 22 0	0 52 25 A
1585	18 Nov. 0 12	2 6 17 30	

Années.	T. vrai à Paris.	Longitude.	Latitude géocent.
1586	21 Déc. 16 ^h 2'	3 ^s 10° 19' 4''	0° 8' 17" B
1588	22 Janv. 8 8	4 12 18 34	0 58 47 B
1589	21 Fév. 0 36	5 12 57 8	1 14 32 B
1590	23 Mars 12 20	6 12 54 30	1 32 6 B
1591	23 Avr. 19 6	7 13 7 20	1 17 10 B
1592	25 Mai 16 21	8 14 25 1	0 35 56 B
1594	5 Août 5 35	10 22 21 4	1 12 31 A
1595	12 Sept. 1 25	11 28 53 10	1 39 18 A
1596	18 Oct. 8 30	1 5 40 0	1 25 45 A
1607	17 Nov. 11 ¹ / ₂ <i>dout.</i>	0 4 10 0	Les 12 premières obs. furent faites par Tycho, les trois dernières par Longomont.
1610	30 Déc. 14 40	3 19 36 0	
1613	1 Mars 22 0	5 21 45 0	
1620	n.s. 7 Nov. 10 0	1 15 58 0	Ces 2 obs. sont de Gas. & & les 10 suiv. d'Hévélius.
1633	17 Déc. 2 0	2 26 3 20	
1657	26 Déc. 13 40	3 5 54 37	0 9 30 A
1659	27 Janv. 11 18	4 8 8 56	0 48 43 B
1661	28 Mars 16 52	6 8 57 55	1 38 25 B
1666	15 Sept. 23 50	11 23 43 28	1 37 25 A
1667	23 Oct. 8 25	1 0 33 21	1 33 41 A
1671	31 Janv. 18 4	4 12 35 0	0 59 0 B
1672	2 Mars 12 10	5 13 18 13	1 28 27 B
1674	3 Mai 6 0	7 13 28 43	1 21 17 B
1676	8 Juil. 18 15	9 17 36 18	0 12 21 A
1678	21 Sept. 6 3	11 28 58 41	1 37 10 A

Oppositions de Jupiter observées à Paris.

(Voyez M. Cassini, pag. 418).

Temps vrai à Paris.	Longitude.	Latitude.
1672 2 Mars 9 ^h 0'	5 ^s 13° 18' 0''	
1673 2 Avr. 1 0	6 13 19 0	1° 37' 15" B
1683 5 Févr. 5 0	4 17 10 0	
1688 13 Juil. 12 ¹ / ₄ <i>dout.</i>	9 22 15 50	
1689 19 Août 19 20	10 27 28 10	
1690 26 Sept. 7 18	0 4 5 40	1 39 40 A
1691 2 Nov. 13 30	1 10 52 0	
1692 6 Déc. 21 36	2 16 24 30	
1694 9 Janv. 3 0	3 20 1 3	
1695 9 Févr. 15 3	4 21 43 30	1 7 54 B
1696 11 Mars 4 28	5 22 8 23	1 34 10 B

174 ASTRONOMIE; LIV. VI.

Années.	T. vrai à Paris.	Longitude.	Latitude!
1697	10 Avr. 17 ^h 32'	6 ^s 22° 1' 15''	1° 35' 22" B
1698	12 Mai 5 46	7 22 20 32	1 9 32 B
1699	14 Juin 10 8	8 23 52 42	0 23 7 B
1700	19 Juil. 16 40	9 27 16 22	0 33 36 A
1701	25 Août 20 34	11 2 42 54	1 20 30 A
1702	2 Oct. 17 29	0 9 28 7	1 38 18 A
1703	8 Nov. 17 33	1 16 8 30	1 16 8 A
1704	12 Déc. 18 50	2 21 26 2	0 28 10 A
1706	14 Janv. 16 2	3 24 40 40	0 29 56 B
1707	14 Févr. 23 2	4 26 6 55	1 13 26 B
1708	16 Mars 9 9	5 26 23 51	1 36 52 B
1709	16 Avr. 0 49	6 26 19 0	1 32 58 B
1710	17 Mai 18 24	7 26 47 17	1 4 50 B
1711	20 Juin 6 37	8 28 36 0	0 15 50 B
1712	24 Juil. 21 25	10 2 20 10	0 40 25 A
1713	31 Août 6 9	11 8 2 16	1 25 26 A
1714	8 Oct. 0 26	0 14 53 2	1 38 10 A
1715	13 Nov. 20 19	1 21 23 13	1 11 8 A
1716	17 Déc. 12 31	2 26 20 43	0 19 26 A
1718	19 Janv. 1 55	3 29 17 20	0 35 45 B
1719	19 Févr. 4 3	5 0 31 18	1 17 30 B
1720	20 Mars 15 43	6 0 43 19	1 37 33 B
1721	20 Avr. 9 48	7 0 40 3	1 29 32 B
1722	22 Mai 8 43	8 1 17 41	0 57 15 B
1723	25 Juin 4 0	9 3 21 22	0 7 29 B
1724	30 Juil. 0 28	10 7 19 49	0 50 11 A
1725	5 Sept. 14 44	11 13 18 0	1 31 31 A
1726	13 Oct. 6 0	0 20 4 10	1 37 0 A
1727	18 Nov. 17 39	1 26 4 47	1 5 57 A
1728	22 Déc. 3 9	3 1 8 2	0 12 40 A
1730	23 Janv. 11 5	4 3 49 30	0 41 23 B
1731	23 Févr. 9 56	5 4 53 3	1 21 20 B
1732	24 Mars 22 4	6 5 0 27	1 36 40 B

Dans les tables de M. Halley, il y a de même une suite d'oppositions observées depuis 1658 jusqu'en 1719.



Observations de Jupiter.

175.

Oppositions calculées par M. le Gentil d'après les registres de l'Observatoire. (Mém. acad. 1754, pag. 327).

Années.	Temps moyen à Paris.		Long. hélioc. réd. à l'écliptique.	Latitude géoc.
1733	24 Avr.	19 ^h 6' 4"	7 ^s 5° 0' 27"	1° 26' 23" B
1734	26 Mai	23 38 9	8 5 48 31	
1735	30 Juin	1 38 <i>dout.</i>	9 8 7 17	0 0 19 A
1736	4 Août	4 26 26	10 12 22 58	0 53 14 A
1738	18 Oct.	9 51 13*	0 25 18 25	1 33 34 A
1739	23 Nov.	16 4 22	2 1 30 6	0 58 59 A
1740	26 Déc.	18 48 49*	3 5 57 13	
1742	27 Janv.	22 2 56*	4 8 25 17	0 49 37 B
1743	27 Févr.	18 23 16*	5 9 18 37	1 25 42 B
1744	29 Mars	5 23 3	6 9 20 44	
1745	29 Avr.	4 52 18*	7 9 22 36	1 22 46 B
1746	31 Mai	13 1 8*	8 10 16 2	0 45 37 B
1747	4 Juil.	20 2 21	9 12 45 18	0 8 12 B
1748	9 Août	4 32 8	10 17 16 42	1 1 46 A
1749	15 Sept.	21 0 55	11 23 32 16	
1750	23 Oct.	11 11 55*	1 0 26 20	1 31 28 A
1751	28 Nov.	11 56 36	2 6 29 2	0 51 6 A
1752	31 Déc.	9 54 30	3 10 45 9	0 4 21 B
1754	1 Fév.	8 18 13	4 13 0 16	0 55 10 B
1755	4 Mars	1 53 22	5 13 42 53	

Les sept oppositions marquées par des étoiles, sont les seules où Jupiter ait été comparé à des étoiles fixes, dans les autres on ne s'est servi que du soleil.

Oppositions de Jupiter observées à Paris depuis quelques années.

	Temps moyen à Paris.		Long. hélioc. réd. à l'écliptique.	Latitude hélioc.
1756	2 Avr.	12 ^h 52' 29"	6 ^s 13° 40' 34"	1° 18' 22" B
1757	3 May	15 13 33	7 13 45 38	1 3 46 B
1758	5 Juin	4 53 0	8 14 49 13	0 29 34 B
1759	9 Juil.	19 3 40	9 17 35 14	0 13 11 A
1760	14 Août	10 3 23	10 22 24 33	0 55 5 A
1761	21 Sept.	6 9 15	11 28 54 10	1 18 6 A

176 ASTRONOMIE, Liv. VI.

Années.	T. moyen. à Paris.	Long. hélioc. réd. à l'écliptique.	Latit. hélioc.
1762	28 Oct. 16 ^h 5' 17"	1° 5' 44' 12"	1° 9' 50" A
1763	3 Déc. 10 38 0	2 11 34 57	0 34 44 A
1765	4 Janv. 23 25 53	3 15 30 1	0 12 16 B
1766	5 Fév. 15 59 2	4 17 27 48	1 1 32 B
1767	8 Mars 6 39 39	5 18 0 9	1 30 48 B
1768	6 Avr. 18 13 11	6 17 55 29	1 35 37 B
1769	8 Mai 0 50 0	7 18 6 38	1 13 37 B

Parmi les oppositions précédentes les huit premières ont été calculées par M. Jeurat (*Mém. acad.* 1763, pag. 252 & années suivantes); j'ai conclu les quatre autres de mes propres observations.

OBSERVATIONS DE SATURNE.

Temps moyen à Paris.	Long. obser.	Lieu du soleil.	Latit.
228 av. J. C. 1 Mars 4 ^h 23'	5 ^s 9° 6'	11 7 26	2° 45' B
127 de J. C. 26 Mars 4 14	6 2 14	0 3 53	
133 3 Juin 2 8	8 10 42	2 10 33	
136 7 Juil. 22 9	9 15 17	3 14 5	
138 22 Déc. 6 11	10 10 19	9 0 20	

De ces cinq observations anciennes, il y en a trois d'où M. Cassini a conclu, par des calculs différens le temps de l'opposition, c'est par celles-là que commence la suite des oppositions que nous allons rapporter.

Temps vrai de l'oppof.	Longitude.	Latitude.
127 25 Mars 10 ^h 30'	6 ^s 1° 20' 58"	} M. Cassini, <i>Elém. d'Astr.</i> p. 354.
133 4 Juin 1 20	8 9 40 10	
136 9 Juil. 22 51	9 14 9 20	
1582 ^{v. st.} 20 Août 23 12	11 7 27 47	2° 1' 53" A Ib _a
1583 4 Sept. 21 40	11 19 49 ¹ / ₂ <i>dour.</i>	2 22 36 A
1584 15 Sept. 6 30	0 2 34 0	
1585 28 Sept. 18 0	0 15 44 <i>dour.</i>	
1586 12 Oct. 9 0	0 29 6 5	2 45 32 A
1587 26 Oct. 7 0	1 12 49 44	2 21 38 A
1588 8 Nov. 8 32	1 26 47 30	
1589 22 Nov. 12 18	2 10 54 10	1 52 11 A
1590 6 Déc. 19 40	2 25 14 ¹ / ₂ <i>dour.</i>	
1591 20 Déc. 22 14	3 9 23 14	0 20 53 A

Années.	T. vrai de l'oppof.	Longitude.	Latitude.
1593	3 Janv. 1 ^h 20''	3° 23' 32' 0''	0° 13' 16'' B
1594	17 Janv. 3 0	4 7 30 0	0 45 52 B
1595	30 Janv. 23 0	4 21 15 0	
1596	13 Fév. 10 28	5 4 38 12	1 57 23 B
1597	25 Fév. 19 0	5 17 45 30	2 22 35 B
1598	10 Mars 23 0	6 0 33 35	
1599	23 Mars 18 40	6 13 0 0	
1608 ^{n.ft.}	19 Juil. 3 0	9 26 53 0	} Ces observations sont de Longomontanus.
1609	31 Juil. 13 0	10 8 31 0	
1610	12 Août 12 0	10 20 10 0	
1611	25 Août 16 0	11 2 12 0	} <i>Astron. réform.</i>
1642	13 Sept. 11 25	11 21 37 27	} Ces observations sont du P. Riccioli.
1642	28 Sept. 8 45	11 22 1 50	
1644	9 Oct. 19 12	0 17 38 0	} <i>Mém. Ac. 1746.</i> <i>M. Cassini. p. 356.</i>
1647	20 Nov. 6 50	7 28 24 25	
1654	10 Fév. 19 0	4 22 54 0	} Ces 2 obs. furent faites par Muti à Majorque.
1657	21 Mars 23 0	6 2 18 0	
1657	22 Mars 9 29 ¹ / ₃	6 2 11 5	} <i>Mém. Ac. 1746.</i>
1658	3 Avr. 17 13	6 14 35 28	
1659	16 Avr. 10 11	6 26 47 52	2 46 18 B
1660	27 Avr. 22 48	7 8 41 32	2 46 53 B
1661	10 Mai 6 2	7 20 22 24	2 42 42 B
1662	22 Mai 11 0	8 1 52 20	2 26 30 B
1664	14 Juin 13 4	8 24 27 27	2 7 39 B
1665	26 Juin 15 23	9 5 43 51	0 47 27 B
1670	27 Août 7 20	10 3 44 ¹ / ₆ <i>dout.</i>	1 55 52 A
1671	8 Sept. 8 56	11 16 5 0	2 18 13 A
1672	20 Sept. 12 39	11 28 42 22	2 35 13 A
1673	3 Oct. 21 4	0 11 37 8	2 45 18 A
1674	17 Oct. 12 0	0 24 52 40	2 47 51 A
1675	30 Oct. 7 10	1 8 28 0	2 39 14 A
1676	13 Nov. 7 36	1 22 19 40	2 22 15 A
1683	4 Fév. 23 32	4 16 57 15	1 15 58 B

La seconde observation de 1642 n'est point une opposition.

Les 15 oppositions précédentes furent observées par Hévélius à Dantzic. On trouvera dans les tables de M. Halley une suite d'oppositions de Saturne calculées par cet auteur, avec l'erreur de ses tables, depuis 1657 jusqu'en 1719.

178 ASTRONOMIE, Liv. VI.

Oppositions de Saturne observées à Paris.

Années	T. vrai de l'opp.	Longitude.	Latitude.	
1685	3 Mars 4 ^h 0'	5° 13' 48' 40''	2° 13' 45''	B
1686	16 Mars 10 28	5 26 47 6	2 34 3	B
1687	29 Mars 11 11	6 9 25 26	2 44 35	B
1688	10 Avril 6 26	6 21 44 40	2 48 15	B
1689	22 Avr. 21 34	7 3 48 53	2 45 4	B
1690	5 Mai 7 13	7 15 35 19	2 32 19	B
1691	17 Mai 13 45	7 27 10 30	2 15 35	B
1692	28 Mai 17 15	8 8 35 0	1 54 27	B
1693	9 Juin 19 32	8 19 54 41	1 27 7	B
1694	21 Juin 19 30	9 1 6 40	<i>douteuse</i>	
1695	3 Juil. 23 45	9 12 29 52	0 25 14	B
1696	15 Juil. 3 32	9 23 51 26	0 7 16	A
1697	27 Juil. 9 43	10 5 20 15	0 40 56	A
1698	8 Août 19 8	10 16 59 0	1 13 36	A
1699	21 Août 8 54	10 28 50 50	1 39 44	A
1700	3 Sept. 3 14	11 10 57 40	2 7 30	A
1701	16 Sept. 2 0	11 23 21 16	2 27 45	A
1702	29 Sept. 8 51	0 6 9 30	2 41 5	A
1703	12 Oct. 20 12	0 19 14 21	2 48 15	A
1704	25 Oct. 11 48	1 2 36 23	2 45 38	A
1705	8 Nov. 9 40	1 16 18 35	2 32 25	A
1706	22 Nov. 10 37	2 0 16 23	2 10 53	A
1707	6 Déc. 15 3	2 14 24 27	1 40 9	A
1708	19 Déc. 19 26	2 28 37 11	1 4 0	A
1710	2 Janv. 23 47	3 12 50 16	0 25 24	A
1711	17 Janv. 1 4	3 26 54 36	0 16 26	B
1712	31 Janv. 0 6	4 10 51 12	0 56 20	B
1713	12 Fév. 19 4	4 24 33 34	1 32 10	B
1714	26 Fév. 8 15	5 7 56 46	2 3 0	B
1715	11 Mars 16 55	5 21 3 14	2 25 0	B
1716	23 Mars 19 4	6 3 48 1	2 40 34	B
1717	5 Avr. 16 27	6 16 13 56	2 47 40	B
1718	18 Avr. 8 45	6 28 24 13	2 46 36	B
1719	30 Avr. 20 15	7 10 17 42	2 39 15	B
1720	12 Mai 4 39	7 21 59 13	2 24 30	B
1721	24 Mai 9 17	8 3 28 12	2 4 20	B
1722	5 Juin 13 9	8 14 52 3	1 36 30	B

Années.	T. vrai de l'oppof.	Longitude.	Latitude.
1723	17 Juin 15 ^h 53'	8° 26' 12" 6''	I 12 15 B
1724	28 Juin 17 53	9 7 29 35	0 39 0 B
1725	10 Juil. 21 6	9 18 49 40	0 7 5 B
1726	23 Juil. 1 42	10 0 13 33	0 25 20 A
1727	4 Août 9 54	10 11 48 7	0 58 15 A
1728	15 Août 22 50	10 23 36 50	I 29 32 A
1729	28 Août 14 18	11 5 35 2	I 56 20 A
1730	10 Sept. 12 27	11 17 53 57	2 19 6 A
1731	23 Sept. 15 51	0 0 30 50	2 36 55 A
1732	6 Oct. 0 26	0 13 27 20	2 47 0 A

Les observations précédentes sont tirées des élémens d'affronomie de M. Cassini : les 8 suivantes sont celles dont M. le Monnier a fait usage dans ses recherches sur Saturne, & qu'il a discutées avec le plus grand soin ; quoiqu'elles ne soient pas toutes en opposition, ce sont néanmoins des longitudes réduites au soleil.

Temps moyen à Paris.	Longit. hélioc.	
1686 16 Mars 11 ^h 10' 30''	5° 26' 46' 38''	<i>Mém. Ac. 1746. p. 217.</i>
1672 21 Sept. 8 40 30	11 28 44 0	<i>Ibid. p. 215.</i>
1583 4 Sept. 8 33 15	11 19 55 28	<i>Ibid. p. 699.</i>
1598 13 Mars 11 9 30	6 0 39 10	<i>Ibid. p. 222.</i>
1701 16 Sept. 11 57 0	11 23 24 44	<i>Ibid. p. 704.</i>
1702 6 Oct. 11 33 55	0 6 22 51	<i>Ibid. p. 709.</i>
1716 17 Mars 12 37 16	6 3 33 33	<i>Ibid. p. 219. 695.</i>
1731 23 Sept. 8 40 30	0 0 29 5	<i>Ibid. p. 215.</i>

Temps moyen à Paris.	Longitude.	Latitude.
1733 19 Oct. 15 ^h 42' 39''	0° 26' 45' 26''	<i>Mém. Acad. 1754.</i>
1734 2 Nov. 10 46 0	I 10 18 50	<i>p. 330.</i>
1735 16 Nov. 12 6 18	I 24 10 53	
1737 13 Déc. 19 31 15	2 22 27 31	I° 21' 40''
1738 28 Déc. 1 6 42	3 6 42 55	0 55 21
1740 11 Janv. 4 57 17	3 20 54 9	
1741 24 Janv. 5 33 57	4 4 55 12	0 38 38
1742 7 Fév. 3 3 18	4 18 44 22	I 18 5
1743 20 Fév. 18 23 38	5 2 16 56	I 50 24
1744 5 Mars 4 41 42	5 15 30 4	
1745 18 Mars 10 43 29	5 28 26 58	2 34 16

180 ASTRONOMIE, LIV. VI.

Années.	Temps moy. à Paris.	Longitude.	Latitude.
1746	31 Mars 10 ^h 50' 31''	6 ^s 11° 3' 44''	2 44 43
1747	13 Avr. 5 49 15	6 23 22 33	2 47 0
1748	24 Avr. 20 2 0	7 5 24 42	2 42 21
1749	7 Mai 6 8 17	7 17 12 31	2 30 43
1750	19 Mai 13 8 19	7 28 47 52	2 13 24
1751	31 Mai 17 6 55	8 10 14 46	1 50 15
1752	11 Juin 20 0 32	8 21 35 41	1 23 29
1753	23 Juin 22 17 24	9 2 53 49	0 53 28
1754	6 Juil. 1 10 57	9 14 13 0	
1755	18 Juil. 4 55 37	9 25 35 21	0 10 34 hélioc.

Les observations précédentes sont tirées en partie des calculs de M. le Gentil, (*Mém. acad. 1754*), & en partie de ceux de M. de la Caille.

Temps moy. à Paris.	Long. hélioc. réd. à l'écliptique.	Latitude. hélioc.
1756 29 Juil. 11 ^h 16' 59''	10 ^s 7° 5' 59''	0 40 8 A
1757 10 Août 22 17 14	10 18 46 51	1 8 38
1758 23 Août 12 25 30	11 0 40 44	1 35 47
1759 5 Sept. 7 30 8	11 12 50 24	1 56 48
1760 17 Sept. 8 10 42	11 25 18 7	2 30 16 géoc. 2 14 15 hélioc.
1761 30 Sept. 14 7 7	0 8 4 21	2 42 58 géoc. 2 25 0 hélioc.
1762 14 Oct. 1 25 5	0 21 9 53	2 29 40
1763 27 Oct. 18 14 20	1 4 34 49	2 43 20 géoc.
1764 9 Nov. 15 46	1 18 17 37	2 30 40
1765 23 Nov. 17 6	2 2 14 44	2 7 36 A
1766 7 Déc. 20 19	2 16 21 12	1 37 10 A
1767 22 Déc. 0 52	3 0 32 45	1 0 32 A
1769 4 Janv. 4 34	3 14 43 39	0 20 26 A
1770 18 Janv. 6 1	3 28 48 26	0 20 38 B

Les oppositions de 1760 & 1761 sont tirées des observations de M. de la Caille qui s'étoit contenté de donner la latitude géocentrique observée; cinq autres ont été calculées par M. Jaurat, qui en a déduit seulement la latitude héliocentrique; & j'ai observé les dernières avec un très-grand soin, pour servir de vérification à ce que j'ai dit des dérangemens singuliers de Saturne, (art. 1168).

LIVRE SEPTIEME.

DE LA LUNE.

1400. LA LUNE est après le soleil le plus remarquable de tous les astres; nous n'avons parlé dans le premier livre que des apparences les plus générales de son mouvement (55), nous allons en suivre les circonstances, & en donner l'explication détaillée.

Les premiers phénomènes que les hommes apperçurent dans le mouvement de la lune, furent les changemens de figure que nous appellons ses *phases*, & dont nous avons déjà donné quelque idée. Après avoir disparu pendant quelques jours, la lune commence à se montrer le soir du côté de l'occident, peu après le coucher du soleil sous la forme d'un filet de lumière; ou d'un croissant dont la lumière est foible, parce qu'elle est diminuée par l'éclat du crépuscule. Hévélius n'a jamais observé la lune plutôt que 40 heures après sa conjonction, ou 27 heures avant, (*Selenog. pag. 276 & 408*). Il ajoute que si la lune dans le premier cas avoit eu une déclinaison plus septentrionale, étant au nord de l'écliptique, & qu'elle eût été en même temps péricée & dans les signes ascendants, on auroit pu la voir 24 heures après la conjonction; mais l'assemblage de ces trois circonstances est rare; on n'apperçoit guère la lune que le troisième jour après sa conjonction; quoique Képler ait dit qu'on pouvoit voir la lune, même en conjonction, lorsque sa latitude est de 5 degrés (*Astr. Pars Opt. Cap. 6, pag. 257*). Ce croissant paroît donc au plus tard le 3^e. jour du côté du couchant, & le soir à l'entrée de la nuit; ses pointes sont élevées & tournées à l'opposite du soleil; il devient un peu plus fort le lendemain, & dans l'espace de cinq à six jours il prend la forme d'un demi-cercle: la partie

Phases de
la Lune.

lumineuse est alors terminée par une ligne droite, & nous difons que la lune est *dichotome*, (^a) ou qu'elle est en quadrature, c'est son PREMIER QUARTIER.

Premier
Quartier.

Après avoir paru sous la forme d'un demi-cercle lumineux, la lune continue de s'éloigner du soleil & d'augmenter en lumière pendant 8 jours; elle paroît alors tout-à-fait circulaire; son disque entier & lumineux brille pendant toute la nuit & c'est le jour de la

Pleine Lune.

PLEINE LUNE, ou de l'opposition: on la voit passer au méridien à minuit & se coucher dès que le soleil se leve, tout annonce alors qu'elle est directement opposée au soleil par rapport à nous, & qu'elle brille parce que le soleil l'éclaire en face & non pas de côté.

Après la pleine lune, arrive le décours, qui donne les mêmes phases & les mêmes figures que nous venons d'indiquer en parlant de l'accroissement de la lune; elle est d'abord ovale, puis *dichotome* ou sous la forme d'un

Dernier
Quartier.

demi-cercle, & c'est le DERNIER QUARTIER. Bientôt le demi-cercle de lumière diminue & prend la forme d'un croissant qui devient chaque jour plus étroit, & dont les cornes sont toujours du côté le plus éloigné du soleil; la lune alors se trouve avoir fait le tour du ciel, & se rapproche du soleil; on la voit se lever le matin un peu avant le soleil, dans la même forme qu'elle avoit le premier jour de l'observation elle se rapproche du soleil & se perd enfin dans ses rayons, c'est ce qu'on appelle la NOUVELLE LUNE, ou la conjonction, autrefois la néoménie (^b).

Nouvelle
Lune.

1401. La mesure la plus naturelle du temps fut celle que présentoient ces phases de la lune; cet astre en changeant tous les jours d'une manière sensible le lieu de son lever & de son coucher, en variant sans cesse de figure, & recommençant ensuite un nouvel ordre de changemens tous semblables, offroit une règle publique & des nombres faciles, sans le secours

(^a) Διότομος, *dimidiatus*, Δίκα bis, Τέσσα secō. Copernic se sert du mot *Luna dividua*.

(^b) Νέος *novus*, Μηνή *Luna*,

de l'écriture ; des calculs , des dates , des almanacs ; les peuples trouvoient dans le ciel un avertissement perpétuel de ce qu'ils avoient à faire ; les familles nouvellement formées , & dispersées dans les plaines de Sennaar , se réunissoient sans méprise au terme convenu de quelque phase de la lune.

LA NÉOMÉNIE servit à régler les assemblées , les sacrifices , les exercices publics ; ce culte & ces fêtes n'avoient pas la lune pour objet , mais pour indication. On comptoit la lune du jour qu'on commençoit à l'apercevoir. Pour la découvrir aisément on s'assembloit le soir sur les hauteurs ; quand le croissant avoit été vu , on célébroit la néoménie ou le sacrifice du nouveau mois qui étoit suivi de fêtes ou de repas. Les nouvelles lunes qui concouroient avec le renouvellement des quatre saisons , étoient les plus solennelles ; il semble qu'on y trouve l'origine de nos quatre temps , comme on trouve celles de la plupart de nos fêtes dans les cérémonies des anciens , (*Casali de comparatione rituum Christ. & Pagan*).

Fête de la
Néoménie.

I 402. On retrouve dans les histoires de tous les peuples du monde cette coutume de se réunir sur les hauts lieux ou dans les déserts , d'observer la nouvelle phase , de célébrer la néoménie par des sacrifices ou des prières ; la solennité particulière de la nouvelle lune qui concouroit avec les semailles , ou celle qui suivoit l'entière récolte des productions de la terre se trouve dans toutes les histoires ; les fêtes & les sacrifices de la nouvelle lune & du commencement de chaque mois sont rappelés en plusieurs endroits de l'écriture , comme un ancien usage : *Isaïæ I, 13. Num. X, 10. XXVIII, 11. Reg. I, 9. v. 12 & 20. v. 5.* Spencer a fait une dissertation toute entière pour prouver que les Juifs avoient reçu des Payens cet ancien usage , Spencer cite à ce sujet un grand nombre d'auteurs , & répond à toutes les objections. Jo. Spencer *de legibus Hebræorum ritualibus. Lipsiæ 1605, in-4°. l. III, c. 1. Dissert. 4. pag. 1043.*

La nouvelle lune étoit annoncée par le bruit des trompettes, Judith VIII, 6. *Pfalm.* 80. v. 4. Scaliger *de emendatione temporum*, l. 3. pag. 223, édit de 1629. Horace fait mention de ces fêtes sous le nom de *Tricesima sabbata*, l. I, sat. 9, v. 69. *Cælo supinas. si tuleris manus nascente lunâ*, l. III, od. 23. Les Juifs observent encore la lune quand elle est nouvelle, & ils en font l'objet d'une cérémonie religieuse. *Buxtorfi synagoga judaica*, *Basileæ in-8°* 1641, c. 17, pag. 336. De-là l'usage de sacrifier sur les montagnes où on alloit pour observer la nouvelle lune. Cet usage étoit déjà dans l'Égypte, *Maimonid ou Mossei dux dubitantium*, l. III, c. 46. aussi-bien que celui de sacrifier dans les nouvelles lunes, *ibid.* c. 47.

La fête de la nouvelle lune avoit lieu chez les Ethiopiens d'Afrique, *Itinerarium Alexandri Geraldini*, *Romæ* 1631, l. IX, pag. 150. Chez les Sabéens de l'Arabie heureuse, *Hottinger, historia orientalis*, l. I, c. 8. pag. 279. *ed. in-4°*. 1660. Chez les Perses, *Halcuit's, voyages tom. II*, pag. 399. Chez les Grecs, comme le prouve fort au long Jean Meursius, *Græcia feriata*, *Lugd. Batav.* 1619, *in-4°*. pag. 210, au mot *Νεμῦνια*. Les Olympiades établies par Iphitus commençoient à la nouvelle lune, Samuel Petit, *Leges Atticæ*, *in-fol.* 1635, pag. 59. Les Romains avoient aussi cette fête, Macrobe *Saturn. I*, 15. pag. 181, *ed. de 1694*. La cérémonie du Guy chez les Gaulois se faisoit à la nouvelle lune, & le Druïde portoit un croissant comme on le voit dans les figures anciennes. M. Pelloutier, *hist. des Celtes à Berlin*, 2 vol. *in-12*. On a trouvé cet usage chez les Chinois, Scaliger pag. 118; parmi les Caraïbes de l'Amérique, *Huetii Demonstratio evangelica* 1679, *in-fol.* pag. 84. Chez les Péruviens, Garcilaso de la Vega, *Comentarios reales de los Incas VII.* 5 & 7. M. Goguet, I. 219, *in-4°*. Il étoit également chez les Turcs, *Geuffraus de Turcarum religione*, l. 2, pag. 53.

1403. Il se passe à peu-près 29 jours & demi d'une nouvelle lune à l'autre, c'est une observation facile,

&

& les premiers pasteurs ne manquèrent pas de la faire ; c'est ce qu'on appelle *mois lunaire*, LUNAISON, ou révolution synodique de la lune : nous en verrons bientôt une détermination rigoureuse (1422). Cette lunaison fut la plus ancienne mesure du temps (58, 277).

1404. En observant avec tant d'exactitude les phases de la lune on dut remarquer naturellement que les éclipses de soleil qui paroissent au moins tous les 4 à 5 ans, arrivent entre le dernier croissant d'un cours de lune fini & la première phase d'une nouvelle lune, c'est-à-dire ; entre le temps où la lune s'approche le plus du soleil & celui où elle commence à s'en éloigner par le côté opposé : on apperçoit alors sur le soleil un corps rond & parfaitement noir, on le voit se glisser peu à peu devant le disque du soleil & en intercepter la lumière, du moins en partie ; quelquefois se placer dans le milieu de son disque, & y paroître environné d'une couronne de lumière ; d'autres fois enfin le couvrir en entier & nous plonger dans les ténèbres, comme en 1724. (art. 1791).

Eclipses de
Soleil causées
par la Lune.

Les premiers observateurs comprirent bientôt que ce corps obscur ne pouvoit être autre chose que celui de la lune qu'on avoit vu les jours précédens s'avancer de plus en plus vers le soleil, & qu'on voyoit ensuite un ou deux jours après se placer de l'autre côté ou à l'orient du soleil, & s'en éloigner avec la même vitesse.

La lune après avoir intercepté la lumière du soleil en plein jour paroissoit absolument noire & opaque ; on comprit par-là qu'elle ne brilloit qu'autant qu'elle étoit éclairée, & que le côté qu'elle tournoit vers nous dans le temps d'une éclipse de soleil ne pouvant recevoir aucune lumière du soleil, ne nous en rendoit aucune. C'est ainsi que les premiers observateurs durent comprendre que la lune étoit un globe opaque & massif qui n'avoit pas de lumière par lui-même, & qui n'étoit lumineux que dans la partie éclairée par le soleil ; on voyoit d'ailleurs que la lune n'étoit jamais plus lu-

Opacité de
la Lune.

mineuse & plus resplendissante que quand elle étoit opposée au soleil, de manière à être vue de face, & à nous réfléchir toute la lumière que le soleil envoyoit sur sa surface ou sur son disque; preuve qu'elle ne renvoyoit vers nous qu'une lumière empruntée.

Eclipses de
Lune.

1405. Quatorze ou quinze jours après une éclipse de soleil, il arrive quelquefois une éclipse de lune. Avant qu'elle commence on voit la lune pleine, ronde; lumineuse & opposée au soleil; elle se lève le soir au coucher même du soleil, elle passe toute la nuit sur l'horizon; c'est le temps de l'OPPOSITION ou de la PLEINE LUNE, (1400); mais en peu de temps la lune perd cette grande lumière & disparaît même pour quelque temps à nos yeux, on voit que la terre placée entre la lune & le soleil est l'obstacle qui empêche la lune d'être alors éclairée par le soleil.

Explication
des Phases.

La lune est donc un corps opaque & qui n'a point de lumière par lui-même, cela est démontré par les éclipses de soleil & même par celles de la lune; elle nous cache le soleil lorsqu'elle passe devant lui, & le cache de manière à nous jeter dans les plus profondes ténèbres, comme cela est arrivé à Paris en 1724: voyons donc de quelle manière elle est éclairée par le soleil.

Le soleil éclairant toujours la moitié du globe lunaire, nous ne pouvons voir la lune pleine que quand nous appercevons cette moitié qui est éclairée, & que nous l'appercevons toute entière; si nous sommes placés de côté, en sorte que nous ne puissions voir que la moitié de la partie éclairée, c'est-à-dire, de l'hémisphère exposé au soleil, nous ne verrons que la moitié de ce qui paroït dans la pleine lune, c'est-à-dire, que nous ne verrons qu'un demi-cercle de lumière; la lune paroîtra en quartier, & ainsi des autres situations; telle est la cause des phases de la lune, que nous allons tâcher de rendre plus sensible.

Hémisphère
éclairé & hémisphère visible.

1406. Soit *S* le soleil, (*fig. 80*). *T* la terre autour de laquelle tourne la lune dans son orbite; *EO* le

globe de la lune placé entre la terre & le soleil, c'est-à-dire, en CONJONCTION, ou au temps de la nouvelle lune; alors la partie *E* est seule éclairée du soleil; au contraire la partie *O* est la seule visible pour nous qui sommes en *T*: ainsi l'hémisphère éclairé est précisément celui que nous ne voyons point, & l'hémisphère visible est celui qui n'est point éclairé du soleil, telle est la cause qui rend alors la lune invisible pour nous, vers le temps de la nouvelle lune (1400).

Au contraire, quand la lune est opposée au soleil, l'hémisphère éclairé *L* est précisément celui que nous voyons, parce que nous sommes placés du même côté que le flambeau dont elle est éclairée, & il n'y a rien de perdu pour nous de la lumière que la lune répand; son disque visible *L* est le même que son disque éclairé; c'est pourquoi la lune nous paroît pleine, c'est-à-dire, ronde & lumineuse, quand elle est en OPPOSITION.

Quand la lune est éloignée de 90 degrés du soleil ou environ, c'est-à-dire à peu - près à moitié chemin de *O* en *L* ou de la *conjonction* à l'*opposition*, l'hémisphère visible est *AQZ*; l'hémisphère éclairé par le soleil est *MZQ*; ainsi nous ne voyons que la moitié de cet hémisphère éclairé, qui paroït tout entier & comme un cercle complet dans le temps de l'*opposition*; nous ne voyons donc qu'un demi-cercle de lumière, tel qu'il est représenté séparément en *N*; la rondeur lumineuse étant toujours du côté du soleil.

1407. Lorsque la lune est à 45° du soleil, nous disons qu'elle est dans son PREMIER OCTANT, alors la partie éclairée ou qui regarde le soleil est *CDF*, la partie visible est *BCD*; ainsi nous n'appercevons que la partie *CD* de l'hémisphère éclairé: alors la lune paroît sous la forme d'un croissant, tel qu'on le voit en *G*, nous ne voyons alors que la huitième partie du globe lunaire, & la lune est éloignée du soleil de la huitième partie d'un cercle: c'est ce qui a fait appeler cette phase un *octant*; mais la partie éclairée n'est

Des Octans.

Fig. 80. qu'à peu-près la septième partie de la surface de son disque visible.

Dans le SECOND OCTANT, qui arrive après la quadrature, l'hémisphère visible est HIK , l'hémisphère éclairé par le soleil est IKP ; ainsi il ne manque à notre vue que la petite portion IH , pour que nous puissions voir la partie éclairée toute entière; nous verrons alors plus de la moitié du disque lunaire, & la lune paroîtra sous la forme R ; ce qui manque à son cercle est de la même grandeur que la partie éclairée dans le premier octant, quand la lune étoit en C .

Le troisième octant V qui arrive 45° au-delà de l'opposition, est semblable au second octant; & le quatrième octant X est pareil au premier octant G .

Calcul de
la portion
éclairée.

Fig. 81.

1408. Pour calculer exactement la portion lumineuse & visible du disque lunaire, soit S le soleil (*fig. 81*), T le centre de la terre, C le centre de la lune; AE le diamètre de la lune, perpendiculaire au rayon du soleil, & qui sépare la portion éclairée ANE , de la portion obscure ADE ; le diamètre lunaire ND perpendiculaire au rayon TC de la terre, sépare la partie visible DAN de la partie invisible DEN ; on abaissera de l'extrémité A du demi-cercle lumineux ENA une perpendiculaire AB sur le diamètre ND de la lune, & la ligne NB fera la largeur apparente de la partie visible de l'hémisphère lumineux; en effet, de tout l'hémisphère lumineux ANE il n'y a que la partie AN qui soit comprise dans l'hémisphère visible DAN , & l'arc AN ne peut paroître à nos yeux que de la largeur BN , par la même raison que le demi-cercle entier NAD ne paroît que comme un simple diamètre NBD , & qu'un hémisphère entier ne paroît que comme un cercle ou un plan dont il est la projection (1827). La portion NB du diamètre visible NBD , est le sinus versé de l'arc NA ; cet arc NA , ou l'angle NCA , est égal à l'angle CTF , en supposant TF parallèle à CS ; car l'angle NCA est le complément

de l'angle FCT , à cause de l'angle droit NCT ; mais l'angle FCT est le complément de l'angle FTC à cause du triangle rectangle CFT ; donc l'angle NCA est du même nombre de degrés que l'angle FTC ; cet angle FTC est égal à l'élongation de la lune ou à la distance de la lune au soleil, parce que le soleil est supposé sur la ligne TF de même que sur la ligne CS , à cause de la distance qui est prodigieuse en comparaison de CF , donc l'arc NA est égal à l'élongation de la lune; donc dans les différentes phases de la lune la largeur du segment lumineux de la lune, est égale au sinus versé de l'angle d'élongation, en prenant pour rayon le rayon même du disque de la lune, ou la demi-distance des cornes du croissant. Par exemple, quand la lune quatre à cinq jours après sa conjonction, est à 60° du soleil, sa partie lumineuse NB paroît la moitié du rayon NC ou le quart du diamètre entier ND de la lune, parce que le sinus versé de 60° dans un cercle quelconque est la moitié du rayon de ce cercle. Si le disque lunaire est exprimé par un cercle GNH (fig. 83), dont C soit

Mesure de
la partie lu-
mineuse.

Planche VII.
Fig. 83.

1409. Les réflexions précédentes font voir que ce n'est pas exactement le sinus versé de l'élongation, mais plutôt le sinus versé de l'angle extérieur du triangle formé au centre de la lune par les rayons qui vont au soleil & à la terre. En effet, nous avons supposé dans la démonstration précédente, que les lignes CS & TF menées au soleil, soit de la terre, soit de la lune, étoient sensiblement parallèles; cela n'est vrai qu'à peu-près, & à cause de la grande distance du soleil qui est 360 fois plus loin de nous que la lune. (Voyez livre IX); mais si les rayons ST & SV (fig. 82) qui vont du soleil à la terre & à la planète ne sont pas parallèles, on aura l'angle extérieur TVO du triangle SVT égal à l'angle NVA : l'un & l'autre étant le complément de l'angle AVT ; or la partie

Fig. 823

Règle plus
générale.

éclairée & visible NB est égale au sinus versé de l'angle NVA , donc le diamètre entier est à la largeur de la partie éclairée & visible d'une planète, comme le diamètre du cercle est au sinus versé de l'angle au centre de la planète, extérieur au triangle formé au soleil à la terre & à la planète.

Planche VII.

Fig. 83.

1410. La courbure GBH (fig. 83) qui forme l'intérieur du croissant est une *ellipse*, dont le grand axe GH est égal au diamètre même du disque lunaire : pour le prouver nous nous contenterons d'observer que GBH est la circonférence du cercle *terminateur* de la lumière & de l'ombre, ou du cercle qui sépare l'hémisphère éclairé de l'hémisphère obscur de la lune ; ce demi-cercle est vu de côté, sous une inclinaison qui est le complément de l'angle d'élongation, c'étoit l'angle ACT (fig. 81) : or un cercle vu obliquement paroît toujours sous la forme d'une ellipse (1828), comme on le verra dans le X^e. livre ; donc GBH étant une circonférence vue obliquement doit paroître le contour d'une ellipse.

Je dis encore que son grand axe est le diamètre même GH du disque lunaire ; car tous les grands cercles d'un globe se coupent en deux parties égales, ainsi le cercle visible GNH & le cercle *terminateur* GBH sur le globe de la lune se coupent en deux parties égales ; & en deux points diamétralement opposés, donc le diamètre GCH est la commune section de ces deux cercles. C'est pourquoi les cornes G & H du croissant sont toujours éloignées entre elles d'un demi-cercle, & l'on peut en tout temps mesurer le diamètre de la lune en mesurant la distance des cornes.

Quantités
négligées.

1411. J'ai négligé dans l'article 1408 la petite erreur qui peut provenir de ce que les rayons menés du soleil à la lune & à la terre, ne sont pas exactement parallèles entr'eux ; mais la différence ou l'angle que ses rayons font en divergeant n'est que d'environ un sixième de degré, il est insensible dans ces sortes de calculs. J'ai négligé de même la différence entre les grosseurs du soleil & de la lune, qui fait que le soleil

éclaire toujours un peu plus de la moitié du globe lunaire, mais la différence ne va qu'à un degré de la circonférence de la lune de chaque côté. On pourroit remarquer aussi que nous ne voyons pas la moitié de la lune; mais la différence qui en résulte sur le diamètre apparent de la lune, ne va pas à un quinzième de seconde: car le sinus verse d'un arc de 15 minutes, 0, 0000096 n'est pas la cent millièmiè partie du rayon; ainsi nous n'insisterons point là-dessus.

1412. On voit distinctement après la nouvelle lune que le croissant qui en fait la partie la plus lumineuse, est accompagné d'une lumière foible répandue sur le reste du disque, qui nous fait entrevoir toute la rondeur de la lune; & qu'on appelle LA LUMIÈRE CENDRÉE. Lumière
cendrée.

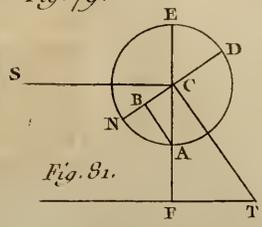
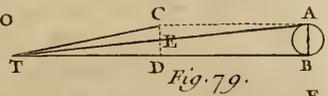
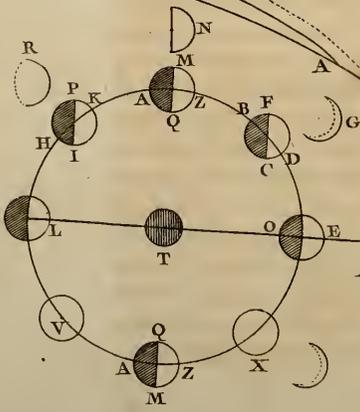
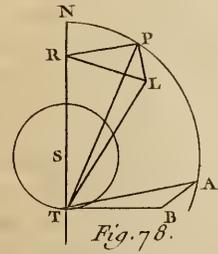
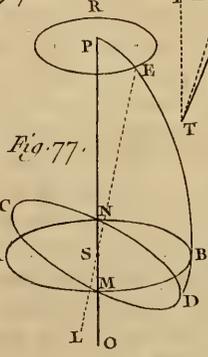
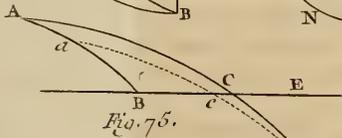
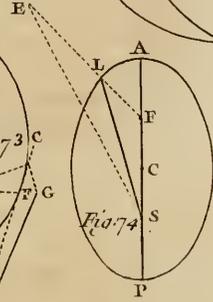
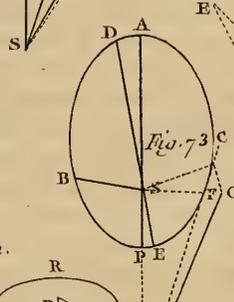
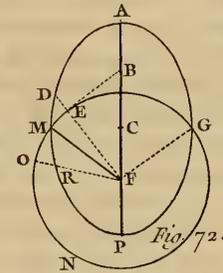
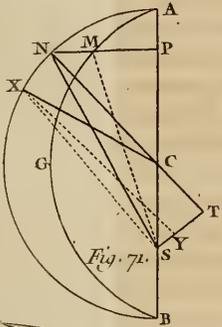
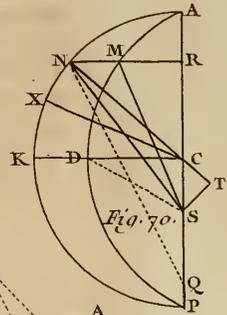
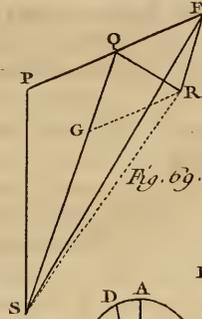
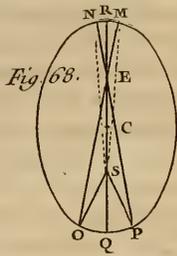
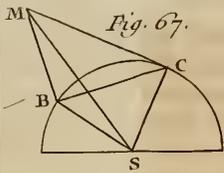
La terre réfléchit la lumière du soleil vers la lune; comme la lune la réfléchit vers la terre: quand la lune est en conjonction pour nous avec le soleil, la terre est pour elle en opposition; c'est proprement pleine terre pour l'observateur qui seroit dans la lune, comme dit Hévélius, & la clarté que la terre y répand est telle que la lune en est illuminée beaucoup plus que nous ne le sommes par un beau clair de lune qui nous fait appercevoir tous les objets. La lune étant bien plus petite que la terre, la lumière que la terre y répand doit être bien plus grande que celle qu'elle en reçoit, il n'est donc pas étonnant que la lune puisse la réfléchir jusqu'à nous, & que cette lumière nous fasse voir la lune. Nous l'apercevriens toute entière lorsqu'elle est en conjonction, si le soleil que nous voyons en même temps n'absorboit entièrement cette lueur terrestre réfléchie sur le globe lunaire, & n'empêchoit alors de voir la lune; mais quand le soleil est couché & le crépuscule presque fini, nous appercevons très-distinctement la lumière cendrée.

Les anciens eurent beaucoup de peine à expliquer la cause de cette lumière secondaire; les uns l'attribuoient à la lune même, ou transparente, ou phosphorique. Les

autres aux étoiles fixes (*Riccioli Almag. novum I. 199*). Képler assure que Tycho l'attribuoit à la lumière de Vénus ; & que Mœstlinus son maître fut le premier qui expliqua en 1596 la véritable cause de cette lumière cendrée. (Képler, *Astr. pars optica*, pag. 254) ; il y a des Italiens qui attribuent cette remarque à *Leonardo del Vinci* célèbre peintre Toscan mort en 1518, & le P. Frisi m'a assuré qu'elle se trouve dans un de ses manuscrits sur les Rivieres, que l'on conserve à Londres. Galilée en donna la même explication (*Sidereus nuncius 1610*, pag. 26), comme l'ayant trouvée depuis plusieurs années ; quoi qu'il en soit, la cause est depuis longtemps de la dernière évidence. (Hevel. *Selenog.* 288, 400).

Cette lumière paroît beaucoup plus vive quand on se place près d'un mur, de manière à ne point voir la partie lumineuse de la lune, qui efface un peu la lumière cendrée ; celle-ci est suffisante alors pour nous faire distinguer les grandes taches de la lune, telles que la mer des crises, sur-tout vers le troisième jour de la lune, & le matin aux environs de l'équinoxe du printemps.

Quoique la lumière cendrée doive aller en diminuant, du jour même de la nouvelle lune, c'est cependant vers le troisième jour qu'elle est la plus sensible pour nous, parce que la lune est alors plus dégagée des rayons du soleil ; c'est aussi aux environs de l'équinoxe du printemps, quand la lune ayant une grande latitude septentrionale se couche long-temps après le soleil ; que cette lumière est la plus sensible. Elle disparoît presque entièrement quand la lune est en quadrature, 1°. Parce que la terre envoie alors quatre fois moins de rayons vers la lune, 2°. Parce que la phase de la lune devenue 4 à 5 fois plus grande nous empêche de la distinguer. Par la même raison cette lumière cendrée paroît un peu plus vive suivant le témoignage d'Hévélius, quand la lune est dans son décours, & qu'elle paroît le matin, quoiqu'à même distance du soleil & à





à pareille phase, parce que la lumière de la partie orientale de la terre est plus vive, tandis que celle de la partie orientale de la lune est un peu plus foible à cause des taches obscures qui s'y trouvent; d'ailleurs la prunelle est plus dilatée après les ténèbres de la nuit qu'après l'éclat du grand jour. (Hevel. *Senelog.* pag. 307, 399).

La lumière cendrée est cause d'un autre phénomène optique, fort sensible, & qu'Hévélius explique assez mal par la compression de la lumière (pag. 287), c'est la dilatation apparente du croissant lumineux, qui paroît être d'un diamètre beaucoup plus grand que le disque obscur de la lune; cela vient de la force d'une grande lumière placée à côté d'une petite, l'une efface l'autre; & la tue comme disent les peintres à l'occasion des couleurs, le croissant paroît enflé par un débordement de lumière qui s'éparpille dans la rétine de l'œil, & élargit le disque de la lune; l'air ambiant éclairé par la lune augmente encore cette illusion.

1413. La lumière de la lune n'est accompagné d'aucune chaleur, M. Tschirnausen avec ses verres brûlans ne put la rendre sensible (*Hist. acad.* 1699, pag. 94). M. de la Hire le fils exposa le miroir concave de l'observatoire qui a 35 pouces de diamètre aux rayons de la pleine lune, lorsqu'elle passoit au méridien dans le mois d'Octobre 1705, & il rassembla ces rayons dans un espace 306 fois plus petit que dans l'état naturel: cependant cette lumière concentrée ne produisit pas le moindre effet sur le thermomètre de M. Amontons, qui étoit très-sensible; (*Mém. Acad.* 1705 pag. 346).

Lumière de
la Lune.

1414. M. Bouguer a trouvé par expérience que la lumière de la lune est 300 mille fois moindre que celle du soleil, & cela en les comparant l'une & l'autre avec la lumière d'une bougie placée dans l'obscurité. (*Tr. d'Opt. sur la gradat. de la lumière, in-4°*, 1760, pag. 89).

DE LA RÉVOLUTION
DE LA LUNE.

1415 LES plus anciens Philosophes comprirent d'abord que la lune tournoit chaque mois tout autour de la terre, qu'elle en étoit la compagne; &, comme nous difons actuellement, *le Sarellite*; Aristote, au rapport d'Averroës, disoit que la lune lui paroissoit comme une terre éthérienne; on peut voir dans Macrobe & dans Plutarque, tout ce que les Philosophes avoient dit à ce sujet.

Toutes les raisons qu'on a eu de changer l'ancienne opinion par rapport au mouvement des planètes cessent par rapport à la lune; on voit évidemment qu'elle paroît tourner autour de la terre, & on ne voit aucune objection qui puisse nous faire abandonner cet idée; ainsi il ne s'agit plus que de connoître la durée de sa révolution; nous allons la rechercher à peu-près: mais pour la connoître bien exactement, il faudra dans la suite faire usage de la connoissance que nous aurons acquise de ses inégalités.

Les premiers Observateurs dûrent reconnoître bien facilement que dans l'espace de 59 jours la nouvelle lune arrivoit deux fois, en sorte que la durée d'une lunaison étoit de 29 jours & demi; mais cette règle à peu-près vraie, étoit sujette à plusieurs exceptions & à plusieurs inégalités qu'on ne développa que bien longtemps après.

Cycle de
Méton.

1416. La première connoissance exacte que l'on ait eue dans la Grèce du mouvement de la lune, ou de la durée exacte de sa révolution, fut celle que donna Méton; qui vivoit environ 430 ans avant J. C. Il avoit reconnu ou plutôt il avoit appris des Orientaux qu'en 19 années solaires il se passoit 235 mois lunaires complets; & cette détermination n'est en défaut que d'un jour sur 309 ans

(1559) ; ainsi la règle de Méton étoit assez exacte pour les usages de la société.

Cette découverte parut si belle à Athènes & dans plusieurs villes de la Grèce qu'on en exposa le calcul en lettres d'or dans des endroits publics, pour l'usage des citoyens, & qu'on appella *nombre d'or* cet espace de 19 ans qui ramenoit exactement la lune en conjonction avec le soleil au même point du ciel, ou au même jour de l'année solaire ; c'est encore aujourd'hui le cycle lunaire (1556).

1417. Calippus remarqua 330 ans avant J. C. que le cycle de Méton avoit un quart de jour de trop, il y substitua une période quadruple, ou de 76 ans, dans laquelle il ne mettoit que 27759 jours au lieu de 27760 qu'il y avoit dans quatre cycles de Méton, (*Doctrina temporum l. II, c. 16*).

Hipparque aperçut ensuite que dans 4 périodes callippiques ou 304 ans, le retour étoit plus exact, & de 3760 mois lunaires ; c'est ce que Censorinus appelle l'année d'Hipparque (*Doct. tempor. II, 33. Censorinus, c. 18, pag. 95*) ; mais Hipparque y substitua lui-même dans la suite la période plus exacte de 126007 jours, & une heure, pour 4267 lunaisons, ce qui donnoit pour chacune 29j 12^h 44' 3" 26222 (Ptolomée IV, 2).

1418. Ce mois synodique ^(a) de 29j 12^h, qu'on appelle aussi lunaison, ne finit que quand la lune après avoir fait le tour du ciel est revenue en conjonction avec le soleil ; mais dans cet intervalle de temps le soleil a fait lui-même 29° par son mouvement propre d'Occident en Orient ; ainsi la lune a fait 29° de plus que le tour entier du ciel ; d'où il est aisé de voir qu'elle n'auroit employé que 27 jours & un tiers à faire les 360°, c'est-à-dire, à revenir à un même point du ciel ; c'est cette révolution de 27j & un tiers qu'on appelle MOIS PÉRIODIQUE ^(b), & c'est celui que nous

Mois synodique & Mois périodique.

(a) Σὺν, cum ἰδέσθαι, via ; parce que c'est le retour de la Lune au Soleil (1173).

(b) Ἡσπῆ, circum, ἰδέσθαι, via ; parce que c'est la révolution complète autour de la Terre.

allons déterminer par les anciennes observations :

1419. La plus ancienne observation que nous avons est une éclipse de lune observée à Babylone par les Caldéens, la première année de la captivité des Juifs sous Salmanazar, au temps d'Ezéchias & de Tobie, elle se rapporte au 19 Mars 720 avant J. C. 6^h 48' au méridien de Paris, suivant le calcul de M. Cassini; car je ne trouve que 6^h 0', de même que M. Dunthorn (*Philos. transf. vol. 46*); le lieu de la lune opposé à celui du soleil étoit, suivant M. Cassini, 5^s 21^o 27'. Il compare cette éclipse à celle du mois de Septembre 1717, dans laquelle le lieu de la lune s'est trouvé de 11^s 27^o 34' le 9 Septembre (*v. style*) à 6^h 2' du soir; l'intervalle est de 2437 années, dont 609 sont bissextiles, plus 174 jours; ou de 890288 jours, moins 46 minutes: pendant ce temps il y a eu 32585 révolutions de la lune, plus 6^s 6^o 7'; ce qui donne la révolution moyenne de la lune à l'égard des équinoxes de 27^j 7^h 43' 5". (M. Cassini, *Elém. d'astron. pag. 293*).

1420. Cette détermination est la plus exacte que l'on puisse trouver par des observations éloignées; il n'y auroit d'autre correction à y faire que celle qui provient des différentes inégalités de la lune dans ces deux observations; mais la lune étoit dans les deux cas à peu près à la même distance de ses apfides, comme l'on pourra s'en assurer quand nous aurons parlé du mouvement de l'apogée; il nous suffira de dire qu'après beaucoup de recherches semblables, cette révolution périodique s'est trouvée de 27^j 7^h 43' 4" 6480, par rapport aux équinoxes pour le commencement de ce siècle-ci on en conclut le mouvement diurne de la lune 13^o 10' 35"; 02847 le mouvement séculaire 10^s 7^o 53' 35". Le mouvement séculaire par rapport aux étoiles 1732559381" en comptant les 1336 révolutions complètes de la lune qu'il y a dans un siècle.

1421. Il faut ajouter environ 7" à la révolution de la lune que nous venons de trouver, quand on veut avoir la révolution moyenne de la lune par rap-

Révolution
de la Lune par
rapport aux
équinoxes.

port aux étoiles fixes, parce que dans l'espace d'un mois lunaire les équinoxes rétrogradent d'environ 4" de degré, en sorte que la lune rencontre plutôt l'équinoxe qu'elle n'eût rencontré une étoile fixe située au même point du ciel (1160), & la différence est pour la lune de 7" de temps. La révolution moyenne sidérale de la lune est de 27j 7^h 43' 11"^½ de temps moyen.

Par rapport
aux étoiles.

Révolution
synodique.

Connoissant la révolution périodique avec exactitude, il est aisé de trouver la révolution synodique, c'est-à-dire, par rapport au soleil, ou la durée d'une lunaison moyenne, en disant : *la différence des mouvemens de la lune & du soleil, est au mouvement de la lune seule, comme la révolution périodique est à la révolution synodique.* En effet, le mouvement de la lune par rapport au soleil ou la différence des mouvemens du soleil & de la lune est ce qui détermine la longueur du mois synodique, tandis que le mouvement de la lune seule détermine le mois périodique; ces deux mois sont donc entr'eux dans la raison inverse de ces mouvemens, c'est-à-dire, comme le mouvement absolu de la lune est à son mouvement relatif ou par rapport au soleil.

Ptolomée supposoit la révolution synodique ou le mois lunaire de 29j 12^h 44' 3" 26222, Boulliaud de 29j 12^h 44' 3" 9''' 37^{iv} 9^v 59^{vi} 15^{vii} ¼. M. Mayer suppose cette révolution pour l'an 300 avant J. C. de 29j 12^h 44' 2" 9494, & pour le commencement de ce siècle ou vers l'année 1700 de 29j 12^h 44' 2" 8921, parce qu'à cause de l'accélération de la lune (1483), la longueur du mois lunaire ou de la révolution synodique a diminué de 0" 0573 ou 3''' 26^{iv} de temps, dans l'espace de 2000 ans.

1422. En partant du mouvement séculaire qui est employé dans les dernières tables, on peut avoir ces révolutions avec toute la précision qu'on voudra, en divisant le nombre 4089864960000000 qui est le produit d'un siècle & de 360° réduits en secondes, 1°. par le mouvement séculaire de la lune par rapport aux équinoxes 1732564415", 2°. par le mouvement séculaire

relativement aux étoiles $1732559381''$; 3° . par le mouvement séculaire relativement au soleil $16029615919''$. Par ce moyen l'on trouve la révolution périodique par rapport aux équinoxes $27j\ 7^h\ 43'\ 4''\ 6480$; la révolution sidérale $27j\ 7^h\ 43'\ 11''\ 5069$, & la révolution synodique $29j\ 12^h\ 44'\ 2''\ 8921$.

DES QUATRE GRANDES INÉGALITÉS DE LA LUNE.

1423. Les révolutions moyennes de la lune que nous venons de déterminer supposent dans la lune un mouvement toujours égal & uniforme; cependant il n'est aucun astre dont les mouvemens soient aussi compliqués & aussi irréguliers; comme l'observoit déjà Pline le naturaliste: *Multiformi hæc ambage torfit ingenia contemplantium, & proximum ignorari maximè sydus indignantium* (*Hist. nat. L. 2, cap. 9*). C'est ce que disoit encore M. Halley dans ces vers sur la théorie de la lune,

Quâ causâ argentea Phœbe
Passibus haud æquis graditur, cur subdita nulli
Hactenus astronomo, numerorum fræna recuset;
Cur remeant nodi, curque auge progrediuntur.

Ce sont ces inégalités dont nous allons traiter, en nous réduisant à ce que les observations seules ont fait connoître immédiatement, sans le secours des calculs de l'attraction; nous parlerons ensuite des petites inégalités que l'attraction a indiquées, & qu'on connoît à peu près depuis qu'on a combiné de cent manières différentes, les observations avec les différentes situations du soleil.

Quatre iné-
galités prin-
cipales, Ces inégalités que l'observation seule fit découvrir sont au nombre de quatre principales, sans compter le mouvement de l'apogée de la lune, & le mouvement du nœud; la première est l'équation de l'orbite, la

seconde est l'évection, la troisième est la variation, la quatrième est l'équation annuelle. A l'égard des petites inégalités que la théorie de l'attraction a indiquées, du moins à peu-près, je tâcherai aussi d'en donner une idée; mais on les a reconnues, soit par le calcul, soit par l'observation, à force d'essais, de tentatives & de combinaisons; il est encore fort douteux qu'on les connoisse bien, & personne n'a donné le détail prodigieux de ces calculs. Ainsi je n'entreprendrai pas d'en donner une explication, qui ne les feroit connoître même que d'une manière imparfaite & peu sûre: il ne faut regarder les 10 petites équations dont nous parlerons ci-après (1454 & suiv.), que comme une hypothèse qui explique & qui représente à peu-près les observations qu'on a faites jusqu'ici du mouvement de la lune.

1424. Pour suivre le progrès des Astronomes dans cette partie, nous sommes obligés de recourir au livre de Ptolomée, (*Almag. L. iv. c. 1*) ou l'on trouve toujours l'histoire de l'ancienne Astronomie. Ptolomée nous avertit d'abord qu'il faut choisir les éclipses de lune pour établir la théorie de la lune, parce que ces éclipses nous paroissent de la même manière que si nous étions au centre même de la terre, auquel ces mouvemens doivent nécessairement se rapporter; au lieu que dans toute autre situation la diversité d'aspect, ou la paralaxe, ajoute à ces recherches une nouvelle difficulté, (1620).

Les inégalités de la lune sont si grandes & si variées, qu'il parut d'abord aux anciens astronomes fort difficile de déterminer seulement la durée d'une révolution moyenne de la lune, c'est-à-dire, d'une révolution qui ne fut point augmentée ni diminuée par les inégalités périodiques de la lune.

1425. Pour parvenir à connoître cette révolution moyenne, en se servant toujours des éclipses de lune, les anciens cherchèrent combien il falloit prendre de mois ou de jours pour avoir un mouvement de la lune qui fût toujours de la même quantité dans le

Période de
18 ans.

même intervalle de temps ; ils trouvèrent 6585 jours & 8 heures, qui font 223 mois lunaires ou 18 ans & 10 jours, c'est-à-dire, qu'ils reconnurent que quand deux éclipses de lune avoient été éloignées de 18 ans & 10 jours, il en revenoit toujours une semblable au bout d'un pareil espace de temps, lorsque le soleil avoit fait 18 révolutions avec 10° & $40'$. Dans cet intervalle, toutes les inégalités de la lune avoient eu leur cours & recommençoient toutes ensemble soit en longitude soit en latitude. (*Almag. IV. 2, pag. 77*). Hipparque reconnut que cette période de 223 lunaifons n'étoit pas rigoureusement exacte ; mais nous la prendrons seulement pour exemple.

1426. Dans cet espace de 223 lunaifons ou retours de la lune au soleil, les anciens remarquerent que le retour de l'équation, ou de l'inégalité de la lune qui étoit d'environ 5 degrés, avoit recommencé 239 fois ; la révolution de la latitude 242 fois, & celle de la longitude 241 fois avec 10° $40'$ de plus ; ainsi la lune avoit été 241 fois au même degré de longitude, 239 fois à sa distance moyenne ou au point de sa plus grande inégalité, & 242 fois à son nœud, à quelque chose près : il n'en falloit pas davantage pour reconnoître les trois principales circonstances du mouvement de la lune, c'est-à-dire, son moyen mouvement ; le mouvement de son apogée, & celui de son nœud ; circonstances nécessaires pour trouver les quatre inégalités dont nous avons à parler ; car les méthodes que nous avons employées dans le VI^e. livre pour les planètes ne fauroient s'appliquer à la lune à cause du mouvement rapide de son apogée & de son nœud.

Cette période de 223 lunaifons que les anciens avoient employée pour calculer les retours égaux des éclipses, ramenoit la lune à une même latitude, aussi bien qu'à une même longitude, ou à un même degré du Zodiaque ; Ptolomée ajoute que si l'on ne s'attache pas aux éclipses & qu'on veuille seulement considérer l'inégalité de la lune dans son mouvement en longitude le long
du

du Zodiaque, en allant d'une pleine lune à l'autre, on aura des retours égaux de la lune en 251 mois, pendant lesquels il y aura eu 269 restitutions des inégalités de la lune ; mais alors la latitude aura été différente.

Tel est donc l'aspect sous lequel les plus anciens astronomes commencèrent à considérer la lune, quand ils voulurent parvenir à déterminer ses inégalités ; ils virent que des éclipses de lune arrivées dans le même point du ciel, & dans la même saison de l'année ne se trouvoient point à des distances égales pour le temps ; ils firent une table des intervalles de temps observés entre plusieurs éclipses de lune, & ils cherchèrent s'il n'y auroit pas entr'elles deux intervalles de temps qui fussent exactement égaux, cela ne se rencontra que sur 223 lunaisons ou 18 ans ; on reconnut ainsi que la lune ne revenoit pas toujours au même degré d'anomalie ou d'inégalité, quoiqu'elle revînt au même point du ciel, & en opposition avec le soleil.

1427. En examinant la lune dans l'espace d'un mois, il n'étoit pas difficile de voir que tous les 7 jours elle avoit cinq à six degrés d'inégalité ; qu'au bout de 14 jours cette inégalité disparessoit, & ainsi de suite ; qu'il y avoit toujours dans le mois deux points éloignés tout à la fois d'une demi-révolution en temps, & d'un demi-cercle en longitude ; c'est-à-dire, deux moitiés égales parcourues en temps égaux : en sorte que les inégalités recommençoient toujours au bout de 27 jours & demi environ. Mais en faisant la même recherche en différens mois ou en différentes années, on remarqua bientôt que le point de la plus grande inégalité ne se trouvoit pas au même point du ciel ; mais toujours un peu plus avancé dans le Zodiaque, & cela d'environ 3 degrés à chaque révolution, en sorte que le mouvement de la lune par rapport à son apogée, ou son mouvement d'anomalie étoit plus petit de $\frac{1}{12}$ que le mouvement absolu.

Première
inégalité, ou
équation de
l'orbite.

Pour expliquer cette première inégalité, on supposa que la lune décrivait un cercle excentrique, comme

nous l'avons expliqué pour le soleil (865); ou bien un épicycle placé sur un cercle concentrique (868), & en même temps que la ligne des apsidés (864), c'est-à-dire, la ligne qui va de l'apogée au périgée changeoit de position & s'avançoit vers l'Orient d'environ 3 degrés par mois.

1428. Ptolomée employa, pour déterminer cette première inégalité, 3 éclipses de lune observées à Babylone dans les années 719 & 720 avant J. C. & il la trouva de $5^{\circ} 1'$ (*Almag. IV*, 6 & 11). C'est cette première inégalité que nous appellons *équation de l'orbite*, ou *équation du centre* (^a), & qui est appelée dans Képler *inæqualitas soluta*. Nous donnerons ci-après sa véritable quantité avec plus d'exactitude (1434).

Trouver l'apogée de la Lune.

1429. Pour déterminer le lieu de l'apogée de la lune en différens temps, à la manière des anciens, je suppose qu'on ait rassemblé plusieurs lieux de la lune déterminés par observation, dans l'intervalle d'une même révolution, l'on prendra l'intervalle du temps moyen entre une de ces observations prise pour époque, & chacune des autres observations; on calculera le mouvement moyen de la lune en longitude pour cet intervalle de temps, au moyen du mouvement diurne (1420); on les ajoutera au vrai lieu de la lune pour le temps de l'époque; on aura pour le temps de chacune des autres observations une longitude, différente de celle qui aura été observée. Ayant fait la même opération sur un grand nombre de longitudes, on choisira celles où la différence entre le lieu calculé & le lieu observé, aura été la plus grande, en plus & en moins, la somme des deux différences fera le double de l'équation de l'orbite. S'il se trouvoit deux observations où cette différence fût égale entre le lieu moyen & le lieu vrai, mais en sens contraire, en plus & en moins, ce seroit une preuve que la lune au temps de l'époque

(^a) Elle est dans Ptolomée sous le nom de *πρώτης καὶ ἀπλῆς ἀνωμαλίας*, ou de première & simple inégalité.

choisie, étoit dans son apogée ou dans son périégée, & que son lieu moyen étoit le même que son lieu vrai : ainsi l'on connoîtra le lieu de l'apogée de la lune. S'il ne se trouve pas deux observations où les différences soient égales, & en sens contraires on cherchera celles où les différences seroient égales & dans le même sens, elles indiqueront des observations voisines de l'apogée & du périégée, puisque l'erreur étant la même, c'est une preuve que le mouvement vrai a été égal au mouvement moyen dans cet intervalle de temps, & cela indique les apsides (1279).

1430. Depuis la découverte des lunettes on a un moyen encore plus simple de trouver l'apogée de la lune, en observant les diamètres apparens de la lune ; car ce diamètre varie depuis $29\frac{1}{2}$ jusqu'à $33\frac{1}{2}$, (1505) ; l'on est donc assuré que la lune est apogée toutes les fois que son diamètre apparent n'est que de $29\frac{1}{2}$, & qu'elle est périégée lorsque ce diamètre est de $33\frac{1}{2}$; cette méthode seroit suffisante pour trouver le lieu de l'apogée de la lune à très-peu près, si l'on ignoroit son mouvement.

Autre méthode.

1431. Mais il y a une manière encore plus exacte de trouver le lieu de l'apogée de la lune par le moyen de ses diamètres, c'est d'en observer la quantité vers les moyennes distances, lorsque le diamètre est environ de $31\frac{1}{2}$. Si on l'a trouvé deux fois de la même quantité, c'est une preuve que dans ces deux observations la lune étoit à des distances égales de ses apsides ; ainsi prenant un milieu entre les deux temps où l'on a observé, on aura le temps où la lune a été apogée.

EXEMPLE. Le 15 Septembre 1762 à midi le diamètre de la lune étoit de $33' 14''$, réduit à l'horizon (1509), le lendemain il étoit plus grand ; mais le 18 à midi il étoit revenu à la même grandeur que trois jours auparavant, & il étoit de $33' 14''$; cela prouve que dans le milieu de l'intervalle ou à minuit du 16 au 17 la lune avoit été dans son périégée.

C'est en observant ainsi les diamètres de la lune que

Horoccius vers l'an 1638, trouva qu'il falloit admettre un balancement de l'apogée & un changement d'excentricité pour expliquer la seconde équation trouvée par Ptolomée, dont nous parlerons ci-après (1434).

Mouvement
de l'apogée.

1432. Après avoir ainsi déterminé plusieurs fois le lieu de l'apogée de la lune en différens temps, on a trouvé qu'il faisoit le tour du ciel par rapport aux étoiles dans l'espace de 8 années communes & 311 jours ou $3232^j 11^h 14' 31''$, 0, & par rapport aux équinoxes en $3231^j 8^h 34' 57''$, 6, ainsi son mouvement considéré par rapport aux équinoxes est de $6' 41'' 069815$ par jour. De-là il suit que le mouvement moyen de la lune (1420) par rapport aux étoiles fixes étant pris pour unité, celui de son apogée $6' 40'' 931992$ est égal à la fraction décimale 0,0084522595, dont le logarithme est 7,9269211; & que la révolution anomalistique de la lune est de $27^j 13^h 18' 34''$, 022 : on la trouvera en disant la différence des mouvemens séculaires de la lune & de son apogée 1717915265 est à un siècle ou $315576000''$, comme 360 degrés ou $1296000''$ sont à $2380714''$.

1433. Jusqu'au temps de Ptolomée on s'étoit borné principalement à observer des éclipses de lune; & la première inégalité de 5° (1428) étoit la seule qui pût s'y manifester. Ptolomée reconnut qu'il y en avoit une autre qui étoit fort sensible dans les quadratures (*Almag. liv. V. ch. 1*), & qu'on appercevoit par les distances de la lune au soleil. En observant avec soin l'ordre de cette inégalité », nous avons reconnu, dit-il, qu'il n'y avoit » que la première & simple inégalité dans les conjonc- » tions & les oppositions, & même dans les quadratu- » res, quand la lune est apogée & périgée; mais on » s'assurera facilement qu'elle ne suffit pas pour calculer » les mouvemens particuliers de la lune observés dans » les autres aspects. LA SECONDE INÉGALITÉ se rapporte » aux distances de la lune au soleil; elle se rétablit & » disparoit dans les conjonctions & dans les oppositions; » elle est la plus grande dans certaines quadratures;

» nous avons découvert cette différence par les obser-
 » vations de la lune que nous avons d'Hipparque, &
 » par celles que nous avons faites au moyen d'un inf-
 » trument construit exprès pour mesurer les différences
 » de longitude le long du Zodiaque entre le soleil &
 » la lune ».

Ces distances de la lune au soleil observées par Hip-
 parque & par Ptolomée, s'accordoient quelquefois avec
 le calcul de la première inégalité ou de la première
 supposition, (1427); quelquefois aussi elles en étoient
 plus ou moins éloignées. Ayant examiné avec soin la
 marche de cette inégalité, Ptolomée reconnut qu'il n'y
 avoit aucune erreur ou différence dans les quadratures
 lorsque la lune étoit apogée ou périgée (^a); mais qu'il
 y avoit une différence de $2^{\circ} \frac{2}{3}$ quand la lune en qua-
 drature, se trouvoit être à 3 signes de son apside.
 (*Almag. V. 3. in fine*). Alors en effet l'inégalité qui se-
 roit de 5° , suivant les règles établies ci-dessus (1428),
 se trouve être de $7^{\circ} \frac{2}{3}$, c'est-à-dire, plus grande de $2^{\circ} \frac{2}{3}$
 en vertu de la seconde inégalité. Ptolomée suppose en
 conséquence que l'épicycle de la lune est porté dans un
 cercle excentrique, & qu'il est plus près de nous dans
 les quadratures que dans les conjonctions & dans les
 oppositions, enforte que pour expliquer ces deux iné-
 galités ensemble il se fert d'un excentrique & d'un épi-
 cycle (*L. V. c. 2 & 4*).

Seconde
 inégalité, ou
 évection.

Ptolomée suppose que dans un jour le centre de l'épi-
 cycle allant suivant l'ordre des signes fait $13^{\circ} 14'$, &
 que l'apogée ou la ligne des apsides de l'excentrique
 fait $11^{\circ} 9'$ contre l'ordre des signes, ainsi tous les 14
 jours l'apogée de l'excentrique rencontrera l'épicycle,
 & tous les 7 jours ils feront opposés entre eux. La pe-
 tite équation de 5° aura donc lieu dans toutes les con-
 jonctions & oppositions, parce qu'alors l'épicycle sera
 toujours dans l'apogée de l'excentrique, & l'équation

(^a) *In quadraturis verò utrisque, in minimo vel in nullo erratur, cum Luna
 vel in maximâ, vel minimâ epicycli longitudine sit. Ptol. L. V. cap. 2.*

de $7^{\circ} \frac{2}{3}$ aura lieu quand l'épicycle fera plus près de la terre, ce qui arrive dans les quadratures; le diamètre de l'épicycle paroissant alors plus grand produira une inégalité plus considérable. (*Almag. V. 2, pag. 102*); mais il faut supposer d'ailleurs toutes choses égales, & la lune au point de la plus grande équation.

Mais dans l'explication que donne Copernic de cette inégalité, (*de Revol. lib. IV, cap. 8*), en suivant les mêmes données que Ptolomée, il employe deux épicycles. Le petit épicycle parcourt dans l'espace d'une révolution anomalistique, & contre l'ordre des signes, la circonférence du grand épicycle, & la lune elle-même parcourt, contre l'ordre des signes, le petit épicycle en $14^h 18^m$, c'est-à-dire, dans l'espace de temps nécessaire pour aller de la conjonction à l'opposition, ou d'une syzygie ^(a) à l'autre; son mouvement dans le petit épicycle est double du mouvement de la lune au soleil, en sorte que dans toutes les syzygies la lune se trouve en dedans du grand épicycle pour former la plus grande équation de 5° , & que dans les quadratures elle est au dehors pour former une équation de $7^{\circ} \frac{2}{3}$. C'est ainsi que la seconde inégalité découverte par Ptolomée, & que l'on appelle aujourd'hui *Evection*, s'expliquoit encore du temps de Tycho, c'est-à-dire, jusques vers l'an 1600. Ptolomée l'appelloit *πρόσνευσιν*, *epicycli quasi annutum*; Copernic l'appelloit *prostaphæresim secundi vel minoris epicycli*; Tycho l'appelloit *prostaphæresim excentricitatis*, nous l'appellons *evection*, à l'exemple de Boulliaud, parce qu'elle porte le calcul à une plus grande précision.

1434. Puisque l'inégalité de la lune alloit depuis 5° jusqu'à $7^{\circ} 40'$, sa quantité moyenne étoit suivant les anciens de $6^{\circ} 20'$, on l'employe actuellement de $6^{\circ} 18' 32''$ (1480), ainsi Hipparque par le seul secours des éclipses de lune, & Ptolomée en y employant les qua-

(a) Συζυγία, *conjugatio, unio*, ce mot comprend indifféremment les nouvelles Lunes & pleines Lunes, les conjonctions & les oppositions.

Eratures, avoient déterminé avec une exactitude assez singulière ces deux premières inégalités.

1435. Cette seconde inégalité que les anciens avoient expliquée par le moyen d'un épicycle sur un excentrique, ou d'un épicycle sur un épicycle, fut expliquée d'une manière différente par Horoccius vers l'an 1640; mais sa théorie ne fut connue qu'en 1673; alors Flamsteed calcula de nouvelles tables de la lune sur les principes & sur les nombres donnés par Horoccius; & ces tables furent publiées par Wallis dans les œuvres posthumes d'Horoccius en 1678, (505). La théorie d'Horoccius a quelque rapport avec l'hypothèse d'Arzachel (392). Cet astronome Arabe qui observoit en Espagne vers l'an 1080 avoit cru appercevoir par les observations de Ptoloméé & celles d'Albategnius, comparées avec les siennes, que l'apogée du soleil avançoit & reculoit alternativement, en même temps que l'excentricité paroissoit avoir diminué considérablement; cela lui fit imaginer l'hypothèse suivante, que Copernic imita dans la suite (*Liv. III, chap. 20*).

Soit T le centre de la terre (*fig. 84*), C le centre de l'orbite ou du cercle qu'une planète est supposée décrire, en sorte que TCA soit la ligne des apsides, & TC l'excentricité de la planète; si l'on suppose que le centre de l'orbite au lieu d'être fixe en C décrive la circonférence d'un petit cercle AGB , il en résultera un double effet. 1^o, La ligne des apsides TA changera de position, & au lieu d'être constamment sur la direction TCA , elle passera par exemple en TG , & fera avec la première situation un angle ATG . 2^o, L'excentricité au lieu d'être égale à TC deviendra TG , TB , &c. Telle fut l'hypothèse dont Horoccius fit usage pour la lune, afin de représenter la seconde inégalité (1433).

Fig. 84

1436. Il est vrai que Képler dans sa préface des éphémérides pour 1618 avoit déjà annoncé qu'il employoit une excentricité de l'orbite lunaire, variable à chaque année, & l'on verra que la manière dont Tycho

Fig. 86.

expliquoit cette inégalité (1443) par le moyen d'un cercle *CETD* (fig. 86), conduisoit aussi à imaginer un changement d'excentricité; ainsi il n'est pas étonnant qu'Horroccius ait fait usage pour le mouvement de la lune de l'hypothèse d'Arzachel, sur-tout en reconnoissant par les observations que non-seulement il falloit changer l'équation de l'orbite lunaire ou son excentricité tous les six mois; mais encore avancer ou reculer l'apogée.

1437. Horoccius dut en effet être conduit à cette hypothèse, par l'observation des diamètres de la lune, qui pouvoient servir à faire connoître le lieu de l'apogée, comme nous l'avons expliqué (1431); il dut s'apercevoir par leur moyen que l'apogée de la lune se trouvoit dans un lieu du ciel plus avancé de 25 degrés lorsque la distance du soleil à l'apogée de la lune étoit de 45° ou de 225° , que lorsqu'elle étoit de 135° & de 315° ; de sorte que le mouvement de l'apogée n'étoit point uniforme, mais sujet à un balancement annuel de plus de 12° ; ce changement de l'apogée étant une fois reconnu, sa liaison avec le changement de l'excentricité étoit aisée à appercevoir.

Les tables de Flamsteed où cette théorie d'Horoccius étoit employée avec des augmentations considérables parurent dans le cours de mathématiques de Jonas Moore, qui a pour titre : *A new systeme of the mathematics*, 2 vol. in-4° 1681. Enfin, les tables de Flamsteed refaites, augmentées & perfectionnées sur la théorie de Newton, mais dans la même forme que celles d'Horoccius, ont été inférées en 1746 par M. le Monnier, avec des additions, dans ses institutions astronomiques. Newton & Halley se fervirent de la même hypothèse ne voyant pas qu'on pouvoit représenter les deux effets par une seule opération (1440).

Fig. 84.

1438. Suivant la théorie de Newton (*Liv. III, prop. 35*), le centre *A* de l'orbite de la lune (fig. 84) décrit un cercle *AGB*, la terre étant en *T*, en sorte que *TC* exprime l'excentricité moyenne de la lune 55050,
TA

TA la plus grande excentricité, & *TB* la plus petite, *TC* étant à *CB* comme l'excentricité moyenne est sa différence à la plus petite, ou comme le sinus total est au sinus de $12^{\circ} 18'$ qui est la plus grande équation de l'apogée, l'on aura $CB = 11727, 31$. Il suppose que si l'on fait l'angle *ACG* égal au double de l'argument annuel, ou de la distance entre le soleil & l'apogée de la lune, l'angle *CTG* sera l'équation de l'apogée, & *TG* l'excentricité actuelle de l'orbite lunaire, ainsi dans le triangle *TCG* dont on connoît deux côtés & l'angle compris, l'on dira la somme de *TC* & *CG* est à leur différence, comme la tang. de la moitié du supplément de *ACG*, c'est-à-dire, la tangente de l'argument annuel, dont le double est l'angle *ACG*, est à la tangente de la demi-différence des angles inconnus.

La somme des côtés *TC* & *CD* 66777, 31 & leur différence 43322, 69 étant des termes constants, la différence de leurs logarithmes ou plutôt le complément arithmétique de cette différence est le logarithme constant que l'on ajoutera toujours au logarithme de la tangente de l'argument annuel pour avoir celui de la tangente de l'argument corrigé; en effet, la demi-somme des angles inconnus, *G* & *T* est l'argument annuel moyen, & leur demi-différence est l'argument corrigé; c'est-à-dire, la moitié de l'angle *ACG* moins l'angle; *T* car la moitié de l'angle *C* en ôtant l'angle *T* est la même chose que la moitié de la différence entre les angles *G* & *T*, puisque $C = G + T$, $\frac{1}{2} C = \frac{G}{2} + \frac{T}{2}$, & $\frac{1}{2} C - T = \frac{G}{2} - \frac{T}{2}$, donc la demi-différence trouvée est l'argument annuel, moins l'angle *T* qui est son inégalité; ou l'équation de l'apogée.

Dans cette hypothèse où l'on suppose l'excentricité moyenne $TC = 55050$, $CB = 11727, 31$, le complément arithmétique du logarithme de la différence entre *TA* & *TB*, ou 98120864 est le logarithme constant qu'il faut ajouter à la tangente de la moitié de l'argu-

ment annuel moyen, pour avoir l'argument annuel corrigé, qui ajouté avec le lieu du soleil donne le vrai lieu de l'apogée de la lune; c'est la forme que M. Halley avoit employée dans ses tables, sans en donner la démonstration.

1439. Cette hypothèse d'Horoccius produit le même effet que celle de Ptolomée ou de Copernic (1433); en effet, on conçoit facilement que si l'apogée de la lune concourt avec la ligne des syzygies l'excentricité TA est assez grande, pour produire une équation de $7^{\circ} \frac{2}{3}$, la lune étant dans sa moyenne distance, & en quadrature tout à la fois; il y aura donc $7^{\circ} \frac{2}{3}$ d'équation, dans cette hypothèse, ainsi que l'exigeoient les observations de Ptolomée, mais si l'apogée de la lune concourt avec la ligne des quadratures l'excentricité sera plus petite ou égale à TB , & la plus grande équation ne sera jamais que de 5 degrés.

En faisant varier ainsi l'excentricité de la lune, il falloit avoir différentes tables d'équations pour les différentes excentricités, ou bien calculer à chaque fois directement l'équation de l'orbite pour l'excentricité actuelle; ce calcul étoit facile & exact par le moyen d'un artifice que M. Halley avoit employé dans ses tables, pour éviter l'inégalité des parties proportionnelles; l'embaras des tables à double entrée, ou leur trop grande étendue.

L'hypothèse elliptique simple, (1252), contient en effet une méthode aisée pour trouver l'anomalie vraie qui répond à l'anomalie moyenne, & M. Halley dans ses tables de la lune en fit usage; mais comme elle s'écarte un peu de l'hypothèse de Képler qui est la seule exacte, il fallut y apporter une petite correction, je vais en donner ici l'explication, parce que l'auteur lui-même ne l'a jamais donnée. M. Halley prit la peine de calculer pour les différentes excentricités, & les différentes anomalies vraies de la lune, quelle étoit l'anomalie moyenne qui y répondoit dans l'hypothèse exacte de Képler, & dans l'hypothèse elliptique simple; la

différence de ces deux anomalies moyennes qui donneroit le même résultat par rapport à l'anomalie vraie, forme la petite quantité d'une table qu'il appelle, *Tabula pro expediendo calculo æquationis centri lunæ*. Ainsi M. Halley, sans avoir des tables d'équation pour chaque excentricité donnoit un moyen de la calculer par une seule opération; l'hypothèse elliptique simple lui auroit suffi; mais comme elle ne donne pas le même résultat que l'hypothèse de Képler, il en avoit cherché la différence; non pas celle des équations qui répondroient à la même anomalie moyenne, mais ce qui revient au même celle des anomalies moyennes qui produiroient la même anomalie vraie.

EXEMPLE. Je suppose que l'on ait pour la moitié de l'anomalie moyenne $74^{\circ} 3' 30''$ avec l'excentricité 53662, & que l'on veuille trouver l'anomalie vraie correspondante; cette anomalie calculée rigoureusement est de $4^{\text{s}} 24^{\circ} 40' 30''$; mais dans la règle que nous avons donnée (1253), l'équation seroit plus petite de $2' 10'' 6$, & il faudroit qu'il y eût $74^{\circ} 2' 24'' 7$ pour la moitié de l'anomalie moyenne, afin de trouver $72^{\circ} 20' 15''$ pour la moitié de l'anomalie vraie, c'est donc $1' 5'' 3$ qu'il faut ôter de la moitié de l'anomalie moyenne pour qu'elle nous fasse trouver l'anomalie vraie $144^{\circ} 40' 30''$, c'est-à-dire, pour lui faire produire le résultat convenable; or la table construite par M. Halley indique cette quantité-là, qui dépend de l'anomalie moyenne de la lune, & de son excentricité; c'est pourquoi il avoit mis en tête les premiers chiffres du *Logarithme pour l'équation de la lune*.

Ce logarithme employé par M. Halley est le complément arithmétique du logarithme de la distance apogée divisée par la distance périgée de la lune, pour chaque excentricité ou pour chaque distance du soleil à l'apogée de la lune. Dans l'exemple précédent, c'est 9,9533449.

1440. C'est ainsi qu'on a employé long-temps une double opération en corrigeant le lieu de l'apogée, &

Méthode
plus simple
pour l'évec-
tion.

Fig. 84.

en cherchant l'excentricité de la lune pour chaque instant donné afin d'en conclure le vrai lieu de la lune; ou le lieu corrigé par les deux premières équations. Flamsteed; Newton ni Halley ne remarquèrent pas qu'il y avoit une méthode facile, pour calculer cette équation, sans supposer une excentricité variable, & un balancement dans l'apogée; c'est celle qu'a employée M. Euler, & dont on n'a point encore donné de démonstration, en voici une assez simple. Soit L la lune (fig. 84), T la terre, C le centre moyen de l'orbite lunaire, G le centre pour un moment donné; CT l'excentricité moyenne de la lune, CLT la moitié de la moyenne équation de l'orbite, GLT la moitié de l'équation pour le temps donné, représentée comme dans la méthode de Newton (1438); CLG est la différence de ces deux équations, ou l'effet que produit sur la demi-équation le changement de l'excentricité & la libration de l'apogée. Pour trouver, par une simple opération cet angle CLG qui est la moitié de l'évection; je considère que quand cet angle est le plus grand, ou lorsque LC est perpendiculaire sur CG , l'angle CLG est de $40'$, c'est-à-dire, que le rapport entre CL & CG est tel qu'il n'en peut résulter que $40'$ pour l'angle L , ou $1^\circ 20'$ environ pour l'évection toute entière. Lorsque l'angle LCG fera oblique, l'angle CLG diminuera, & cela dans le rapport de la perpendiculaire GD , à la ligne CG ou de $\sin. DCG$ au rayon; donc l'évection fera $80' \sin. DCG$; mais l'angle $DCG = ACL - ACG$ est l'anomalie moyenne de la lune, moins deux fois la distance du soleil à l'apogée de la lune, ou, ce qui revient au même (^a), deux fois la distance de la lune

(^a) L'anomalie de la lune est égale à la longitude de la lune moins celle de l'apogée, ou à $2 \odot - \odot - \text{ap. } \odot$; si l'on en ôte le double de l'argument annuel ou $2 \odot - 2 \text{ ap. } \odot$, on aura $2 \odot - 2 \odot - \odot + \text{ap. } \odot$, ou $2 (\odot - \odot) - (\odot - \text{ap. } \odot)$, c'est-à-dire, deux fois le lieu de la lune moins celui du soleil, dont on aura ôté le lieu de la lune moins celui de son apogée, ou l'anomalie moyenne de la lune; donc l'anomalie de la lune moins le double de l'argument annuel équivaut à l'argument de l'évection.

au soleil moins l'anomalie moyenne de la lune, qui forme l'argument de l'évection : donc la demi-évection ; ou l'angle GLC est égale à $80'$ sin. (2 dif. \odot — an. \odot) ; c'est la forme sous laquelle elle se trouve actuellement dans toutes les tables de la lune ; mais il faut remarquer qu'elle est ordinairement jointe avec une autre équation, comme dans la table de la cinquième équation de la lune où elle est jointe à une équation de $36''$ qui a pour argument le double de celui de l'évection :

1441. Cette seconde équation de la lune, qui suivant Ptolomée, étoit de $1^{\circ} 19' \frac{1}{2}$, & suivant Tycho, $1^{\circ} 15'$, est dans les tables de Flamsteed $1^{\circ} 18' 50''$; dans les premières tables de M. Mayer $1^{\circ} 20' 42''$, & dans les nouvelles $1^{\circ} 20' 34''$; dans celles de M. Euler, $1^{\circ} 18' 49''$ dans celles de M. d'Alembert $1^{\circ} 18' 18''$, & dans celles de M. Clairaut $1^{\circ} 16' 18''$; mais M. d'Alembert observe que cette équation de M. Clairaut ne répond qu'à une partie équivalente, à $1^{\circ} 16' 12''$ dans les anciennes tables de Mayer, parce que la forme des équations étant différente, il faut les décomposer pour pouvoir les comparer ensemble. (*Recherches sur différens points du Syst. du Monde III. 27*). Nous donnerons dans le XXII^e livre une idée de la maniere dont l'attraction du soleil produit cette inégalité (3479).

Quantité de l'évection.

1442. La troisième inégalité de la lune étant une découverte de Tycho-Brahé ; il est nécessaire de remonter à l'origine de ses recherches sur la théorie de la lune ; elle étoit entrée pour beaucoup dans le projet que Tycho avoit conçu de réformer toute l'astronomie, & de lui donner une nouvelle face ; cependant comme les mouvemens de la lune lui parurent les plus compliqués & les plus difficiles à démêler, il fut long-temps sans oser se décider, & il ne comptoit pas en parler dans son livre des *Progymnasmes*, où il traita des autres parties fondamentales de l'astronomie : néanmoins ce livre qu'il avoit fait imprimer chez lui à différentes reprises, n'ayant vu le jour qu'après sa mort par les soins de ses héritiers, qui le firent achever en 1610, on y

Recherches de Tycho-Brahé.

ajouta pour lors un appendix de 28 pages pour la théorie de la lune, qui est à la suite de la théorie du soleil, & qui interrompt l'ordre des chiffres entre les pages 112 & 113. Ce petit abrégé de la théorie de la lune avoit été achevé en 1601 par Tycho, aidé de Longomontanus, (comme les éditeurs en avertissent à la page 819 du même livre), & on le trouva dans ses papiers. Je vais en donner l'extrait comme d'une pièce originale qui contient la découverte de la VARIATION ou de la troisième inégalité de la lune; mais comme je ne puis séparer celle-ci des deux autres, il est nécessaire de rappeler la manière dont il envisage les deux premières inégalités

Fig. 86.

1443. Soit T le centre de la terre, (fig. 86.) TF le rayon de l'*excentrique*, ou du cercle principal, par lequel on représente les mouvemens de la lune; nous le supposons divisé en cent mille parties: on prendra TB de 2174 parties, & l'on décrira un cercle $TECD$; sur lequel on fera mouvoir le centre de l'*excentrique*, de manière que dans les syzygies, c'est-à-dire, les conjonctions & les oppositions, le centre soit en T au centre même de la terre, que dans toutes les quadratures il soit au contraire en C , à la plus grande distance de la terre, & que dans les octans il soit en D & en E . L'équation qui en résultera ou l'angle BRT , est de $1^{\circ} 15'$; car 2174 est à peu-près le sinus de $1^{\circ} 15'$ pour un rayon de cent mille; cette équation est proportionnelle au sinus du double de l'élongation de la lune au soleil, puisque le cercle est décrit tout entier dans une demi-révolution, & elle est soustractive dans la première quadrature, parce que le mouvement de la lune se fait de F en R ; ensorte que l'angle FTR vu de la terre est plus petit que l'angle formé en C autour du vrai centre de l'orbite lunaire: cette hypothèse sert à expliquer à l'évection (1441).

1444. Le grand épicycle dont le rayon FG est de 5800, exprime une partie de l'équation du centre, & produit $3^{\circ} 19'$ d'inégalité; le centre du petit cercle

MNL est supposé en *G* lorsque la lune est apogée ; il descend vers *H* & se trouve en *I* lorsqu'elle est périgée, ce qui arrive, suivant Tycho, à la moitié des $27^j 13^h 18' 35''$, qui forment la durée de sa révolution anomalistique.

Le troisième épicycle *MLKN* est celui sur lequel la lune même est placée ; son rayon *GM* est de 2900, c'est-à-dire, la moitié du grand épicycle, & il produit par conséquent une inégalité de $1^{\circ} 40'$. La lune se meut sur cet épicycle, de manière que quand le centre du petit cercle est apogée en *G*, la lune soit en *K* dans la partie inférieure de ce petit cercle *MNK* ; mais quand le centre du petit cercle sera en *H* ou en *O*, & que l'équation de l'orbite sera la plus grande, la lune sera en *M*, & à la plus grande distance possible du centre *F* du grand épicycle ; parce que la lune parcourt ce troisième épicycle en $13^j 18^h 39' 17'' \frac{1}{2}$, moitié de sa révolution anomalistique ; la somme de ces deux équations, qui répondent à la distance *FM*, est de $4^{\circ} 58 \frac{1}{2}$; c'étoit, suivant Tycho, la plus grande équation, qui par l'évection devenoit quelquefois de $7^{\circ} 28'$, moindre de $12'$ que dans Ptolomée & Copernic.

1445. Mais, ajoute l'auteur, j'ai éprouvé par un grand nombre d'observations exactes, que ces trois cercles ne satisfont pas encore aux observations, & que dans les octans, c'est-à-dire, à 45° des syzygies & des quadratures, il y a une autre différence sensible ; j'ai donc été obligé d'ajouter un petit cercle en *F* pour expliquer cette VARIATION, & je suppose que le centre *F* du grand épicycle en parcourt non pas la circonférence, mais le diamètre *VX* perpendiculaire au rayon *BF*, par un mouvement de libration qui soit réglé cependant de même que s'il se faisoit sur la circonférence, comme fait Copernic dans d'autres occasions, c'est-à-dire, proportionnellement aux sinus des arcs parcourus ; il en résulte une équation qui depuis les syzygies jusqu'aux quadratures, doit toujours s'ajouter à la longitude moyenne de la lune par rapport au soleil, pour avoir la véritable

Troisième
inégalité ou
variation.

situation du centre de l'épicycle, mais qui est soustractive dans le second & le quatrième octant. Cette libration dépend donc du double de la vraie distance de la lune au soleil, & produit la *Variation*, inégalité qui va à $37' 4''$ dans les octans. On remarquera que Tycho avoit encore déterminé cette inégalité avec bien de la précision, puisque les dernières tables supposent actuellement la variation de 37 à $40'$; elle est dans M. Clairaut de $39' 54''$, dans les anciennes tables de Mayer $40' 43''$; dans celles de Flamsteed $40' 34''$, suivant la théorie de M. d'Alembert $37' 50''$. (*Recherches, &c. III. 28*), & dans les nouvelles tables de Mayer $37' 4''$, en y comprenant les petites équations que la même table renferme.

Tycho se proposoit de donner l'explication & les preuves de toute sa théorie, dans un ouvrage particulier, mais il n'en eut pas le temps, & il ne nous en laissa que le résultat renfermé dans les hypothèses que je viens d'expliquer.

1446. Dans les tables de la lune qui sont jointes à cet ouvrage, on trouvera les trois inégalités, dont je viens de raconter la découverte, sous le nom d'*Equation de l'orbite, évection & variation*, (Equat. V, XI & XII); mais les quantités en sont déterminées par les recherches & les observations nouvelles. Les deux dernières sont appellées dans Képler *Inæqualitates menstruæ*; l'évection en particulier y est nommée *Æquatio temporanea*, & la variation *Æquatio perpetua* ou *variatio*; (Képler, *Epitome*, pag. 790, 793), parce que celle-ci revient perpétuellement à chaque mois, & que l'autre ne revient que de temps en temps; Boulliaud appella la première *Evection* & ce nom lui est resté. Quand à la seconde, Képler lui donnoit le nom de *Variation* avec Tycho qui en étoit l'inventeur, (Képler, *Epit. pag. 811.*): Boulliaud l'appelle *Variation* ou *Réflexion*. La variation se détermine assez bien par la théorie, c'est-à-dire, par le principe de l'attraction (3469); elle dépend uniquement de la masse du soleil & de sa distance

à la terre, & subsisteroit quand même les orbites du soleil & de la lune seroient circulaires & concentriques. Pour la déterminer, M. Mayer avoit supposé dans ses premières tables la parallaxe du soleil de $11''\frac{1}{2}$, au lieu de $9''$ qu'elle paroît devoir être; mais dans ses nouvelles tables, il emploie la parallaxe de $7''\ 8$ d'après la valeur de l'équation $1' 55''$ dif. \odot déterminée par les observations, & comparée, dit-il, avec la théorie.

1447. On remarque comme une chose assez singulière que cette quantité moyenne de la variation dans certaines tables est exactement la moitié de l'évection; je dis cette quantité moyenne, parce que la variation change suivant la distance du soleil & de la lune à la terre, ce qui produira d'autres inégalités (1467): ce rapport si simple entre deux des plus fortes inégalités de la lune, ne paroît pas une suite nécessaire de la théorie de l'attraction, mais c'est un fait qui méritoit d'être remarqué, quoique dans nos nouvelles tables il y ait une petite différence.

1448. L'ÉQUATION ANNUELLE de la lune, qui est d'environ $11' 16''$ est la dernière de celles que les observations seules avoient fait découvrir; elle est indiquée par Tycho, à la sixième page de la théorie de la lune qui est insérée dans ses progymnastiques, où il dit qu'une expérience répétée de plusieurs façons lui a fait connoître que les mouvemens moyens de la lune exigent, pour être uniformes, une équation des jours, différente de celle que donnent les mouvemens du soleil. Tycho donne, en effet, une table de l'équation du temps qu'il faut employer pour calculer le lieu de la lune; mais cette équation ne s'accorde pas avec l'équation annuelle que nous employons actuellement.

1449. Képler chercha comme Tycho une équation du temps pour la lune; il écrivoit à Bernegger en 1625, *in lunâ post omnem apparatus Tychonis & meum transigi de eclipsibus non posse puto nisi introductâ insuper æquatione annua, sive in motus lunæ sive in temporis æquationem usitatam*, (*Epist. Kep. & Bern. pag. 72*).

1450. Enfin Horoccius dans sa théorie de la lune en fit également usage, Flamsteed en publia les résultats en 1673, avec des tables construites d'après les nombres qu'Horoccius avoit laissés manuscrits (*Horoccii op. posth.*). Il est vrai que Horoccius n'employoit expressément que les deux équations données par les anciens, avec la variation de Tycho; mais il corrigeoit le temps vrai pour lequel il vouloit calculer le lieu de la lune par une équation du temps, additive dans les six premiers signes de l'anomalie moyenne du soleil, & qui alloit à 13' 24" de temps dans les moyennes distances, ce qui revenoit au même que s'il eût ajouté 7' 21" aux longitudes de la lune, tandis qu'il négligeoit une partie de la véritable équation qui auroit dû être de 7' 42" de temps soustractive, de sorte que par-là il ajoutoit 4' 14" au lieu moyen de la lune; le total revenoit à 11' 34" pour la plus grande équation annuelle; or M. Mayer ajoute en effet dans ses nouvelles tables 11' 16" pour l'équation annuelle, ainsi l'on peut dire qu'elle étoit véritablement & exactement employée dans les tables d'Horoccius, quoique sous un nom différent. Flamsteed remarqua ensuite avec raison que l'équation employée par Horoccius, n'est pas proprement l'équation du temps dans le système solaire, suivant les démonstrations que Flamsteed avoit données à ce sujet; depuis la mort d'Horoccius (1642); cependant, ajouta-t-il, cette équation physique doit être employée dans les calculs de la lune, & elle lui est particulière; c'est un satellite qui est affecté par le mouvement de la terre; & il se meut un peu plus lentement autour d'elle quand elle est aphélie, ou fort éloignée du soleil, que quand elle en est plus proche; il avoit eu envie d'exprimer aussi en degrés cette équation particulière de la lune; mais il la conserva en temps par respect pour l'usage qu'en avoit fait Horoccius, & pour ne pas paroître surcharger encore le système lunaire d'une nouvelle équation (*Hor. op. pag. 492, 496*).

Quelques années après Halley donnant à la suite de

son catalogue des étoiles australes, publié en 1679, quelques réflexions sur la théorie de la lune, remarqua qu'elle paroïssoit aller plus vite quand le soleil étoit plus éloigné, que lorsqu'il étoit plus proche de la terre; il fixa pour lors cette équation à la neuvième partie de celle du soleil, c'est-à-dire, à treize minutes environ.

1451. Newton reconnut aussi que cette équation suivoit de sa théorie; en effet la pesanteur de la lune vers la terre étant diminuée par l'attraction du soleil; le fera encore plus quand le soleil sera plus proche de la terre; or la lune étant retenue dans son orbite par une moindre force s'éloignera du soleil; l'orbite se dilatera davantage, & le temps de la révolution sera plus long. (1224). Cette équation annuelle qui se trouve de $11' 49''$ dans les tables de Flamsteed & de Halley est accompagnée de deux équations analogues, de $20'$ pour l'apogée, & de $9' \frac{1}{2}$ pour le nœud, que Newton a introduites. Elles sont également employées dans les nouvelles tables de Mayer, l'une de $8' 50''$, l'autre de $23' 12''$.

1452. Cette équation annuelle est de $11' 49''$ dans les tables de Flamsteed; de $11' 20''$ dans celles de M. Euler. (*Alman. de Berlin 1750*); de $12' 57''$ dans celles de M. d'Alembert. (*Recherches, &c. pag. 230*); M. Mayer l'a faite comme M. Euler de $11' 20''$, & dans ses dernières tables de $11' 16''$, sans doute d'après les observations; car la théorie de l'attraction ne la détermine pas d'une manière assez exacte, M. Clairaut ne la faisoit que de $10' 36''$ dans ses premières tables.

Valeur de
l'Équation
annuelle.

1453. On comprend assez, sans que j'en donne ici d'exemple, comment il a été possible à Tycho, Képler, Horoccius & Halley de découvrir l'équation annuelle; il ne s'agissoit que de calculer plusieurs lieux de la lune ou plusieurs observations d'éclipses en différens temps de l'année, sur les tables où l'on employoit déjà l'équation de l'orbite, l'évection & la variation; tous ces calculs s'accordoient avec les observations au

mois de Janvier & au mois de Juillet; ils s'en écartoient constamment d'abord au mois de Mars, ensuite au mois de Septembre en sens contraire; cela suffisoit pour faire voir qu'il y avoit une inégalité attachée à l'équation de l'orbite solaire, & qui étoit à son *maximum* toutes les fois que le soleil étoit dans ses moyennes distances. Cette équation annuelle est la plus grande dans les distances moyennes du soleil, quoiqu'elle dépende du plus grand & du plus petit éloignement, par la même raison que l'équation de l'orbite est nulle dans les deux apsides, & la plus grande dans les moyennes distances (1256). Aussi-tôt que la vitesse actuelle cesse d'excéder la vitesse moyenne, la somme des excès accumulés jusqu'alors, c'est-à-dire, l'équation totale se trouve la plus forte & elle est à son *maximum*; cette équation provenant de l'excès de la vitesse doit augmenter sans cesse, tant que cette vitesse surpasse la moyenne, quelque petite que soit la différence.

DES PETITES INÉGALITÉS DE LA LUNE.

1454. Jusqu'alors la théorie de la lune n'étoit composée que des quatre équations dont nous avons parlé; Horoccius les avoit employées de la manière la plus exacte. M. Halley en 1679 lui rendoit cette justice en disant : *Unica vero (theoria) Horoccii nostratis ad veritatem naturalem accedere videtur*; en même temps il assure que l'évection & la variation peuvent se calculer à la fois par une seule hypothèse, en supposant que dans la ligne des syzygies l'orbite de la lune est comprimée au-dedans & vers la terre d'environ la 90^e. partie de la distance moyenne, & qu'elle est allongée d'autant dans la ligne des quadratures; M. Halley n'accompagne son idée d'aucune espèce de calcul, il se contente de dire que cela est très-d'accord avec les lieux de la lune observés par M. Cassini. Paris étoit

alors presque le seul endroit de la terre, où l'on faisoit & en très-grand nombre d'excellentes observations.

1455. Des trois inégalités de la lune découvertes avant le temps de Képler, les deux dernières avoient un rapport trop visible avec le soleil pour que ce génie actif & pénétrant n'en cherchât pas la cause physique. La lune, disoit-il, est mise en mouvement par deux forces : savoir une qualité qui émane de la terre & qui entraîne la lune autour d'elle, & une autre force qui provient des rayons solaires, enforte que quand la lune a fait 90° depuis sa conjonction jusqu'à sa quadrature, il y en a 88 qui proviennent de la force de la terre, & deux qui viennent de la lumière du soleil, (*Epit. astr. Cop. pag. 552, 564, 780*). Les idées physiques de ce grand homme firent naître dans la suite l'explication encore plus satisfaisante que l'attraction nous donna enfin de toutes ces inégalités, (*v. Liv. XXII*), & cette même attraction a fait reconnoître une multitude d'autres inégalités dont nous avons à parler.

Képler en-
trevoit la cause
de ces iné-
galités.

On a écrit sans fondement que M. Halley avoit proposé une autre correction pour la théorie d'Horoccius, c'est-à-dire, celle qui a été fixée depuis par M. Newton à $2' 25''$ (1463). Halley n'en avoit aucune idée, il indiquoit seulement une cause des changemens de latitude que Tycho avoit découverts, en disant que le soleil qui envoyoit obliquement ses rayons à la lune, l'obligeoit par une certaine puissance de s'approcher de lui; *efficit potentia quadam insita ut propius ad se accedat*, (*Halley catal. st. austr. 1679*); mais Newton plusieurs années auparavant avoit déjà eu des idées de l'attraction universelle (3381).

1456. Les observations seules n'avoient pu faire découvrir aux astronomes que des inégalités qui alloient à plusieurs minutes; peut-être l'équation annuelle n'eût pas même été reconnue par les observations, si elle n'avoit eu un retour constant dans les mêmes saisons de l'année, ce qui la rendoit remarquable (1453). Aussi toutes les autres petites inégalités dont il nous reste

Théorie de
Newton.

à parler, n'ont été d'abord soupçonnées que par l'idée de l'attraction, & n'ont été déterminées qu'en comparant avec cette théorie un grand nombre de bonnes observations ; il étoit réservé à Newton de faire le plus grand pas dans la théorie de la lune, comme dans tout le reste ; guidé par le principe de la gravitation universelle, & aidé des observations de Flamsteed, il détermina la quantité de plusieurs nouvelles équations, avec les époques, & les moyens mouvemens. Cette belle théorie parut en 1702. *Voy. Davidis Gregorii astronomiæ physicæ & geometricæ elementa, Oxonii 1702, folio. Postea Geneva 1726, 2 vol. in-4°.*

C'étoit la partie la plus précieuse de cet ouvrage de Gregori qui contient d'ailleurs la plupart des grandes découvertes qu'on a faites dans la physique céleste. La théorie de Newton, reparut de nouveau cinq ans après avec des explications & des tables, (*Prælectiones astronomiæ Cantabrigiæ habitæ à Guillelmo Whiston, 1707, 8°*). Newton la publia aussi dans la seconde édition de son fameux ouvrage intitulé : *Philosophiæ naturalis principia mathematica, 1713, 4°*. Ce fut alors que l'on commença de construire des tables conformes à ces nombres.

1457. M. de l'Isle fut le premier qui vers 1715 ou 1716 calcula des tables de la lune d'après les nombres de Newton. M. HORREBOW, professeur à Copenhague ; publia dans un journal littéraire de Hall, (*Bibliotheca novissima*), quelques tables de la lune qu'il assujettit autant qu'il put à la théorie de Newton, il les compara avec plus de 30 observations qui s'y accordoient assez bien. Le P. GRAMMATICI, Jésuite, publia en 1726 de petites tables de la lune, *V. Tabulæ lunares ex theoria Newtonis, a quodam Uranophilo e Soc. Jesu, Ingolstadtii, 1726*, & calcula plus de 60 observations choisies sur ces tables, sans y trouver d'erreurs sensibles. LEADBETTER publia en 1728 de nouvelles tables de tous les mouvemens célestes, tirées de différens auteurs ; & l'année suivante des tables particulières de la lune faites sur la théorie de Newton, qui ont été réimpri-

mées depuis, (*Uranoscopia or the contemplation of the Heavens*, By Charles Leadbetter, London, 1735, 2 vol. 8°).

1458. ROBERT WRIGHT publia la même année une adresse aux Lords préposés pour examiner les mémoires sur la découverte des longitudes, où il fit voir par le calcul de plusieurs observations comparées avec les tables, que la théorie de la lune étoit suffisante pour remplir cet objet, il publia ensuite ses tables avec le détail du calcul de 30 observations, dont la plupart sont des éclipses de lune, (*New and correct tables of the lunar motions, according to the Newton theory by Robert Wright*, 1732, 4°).

ANGE CAPELLI, chanoine de Parme, donna en 1733 des tables de la même nature. V. *Astroscofia numerica in-4° Venetiis*, & il calcula le lieu de la lune pour tous les jours de l'année 1736; afin que les astronomes pussent y comparer leurs observations. V. *Commercium litterarium ad astronomiæ incrementum*, Tomus I, autore *Michaele Adelbulnero, Norimbergæ*, 1735, 4°. Ce journal cessa au mois de Mai 1736, 1739. Il parut encore d'autres tables calculées sur le même principe. V. *The practical astronomy of the moon, or new tables of the moon's motions, exactly constructed from sir Isaac Newton's theory by Richard DUNTHORNE, Cambridge*, 1739, 8°.

1459. Flamsteed qui depuis ses dernières tables publiées en 1681, n'avoit pas cessé de travailler à la même théorie, calcula aussi des tables que M. le Monnier a publiées depuis, avec des augmentations considérables. V. *Institutions astronomiques*, à Paris 1746, 4°. pag. 145. Ces tables ne diffèrent pas beaucoup de celles de M. Halley.

Enfin celles de M. Halley qui étoient imprimées depuis 1719, ont été rendues publiques en 1749; M. Halley y a négligé de petites équations, dont il ne croyoit pas la détermination assez sûre, & M. Newton disoit à M. de l'Isle en 1724, que si M. Halley eût employé toutes ces petites équations, & qu'il eût ajouté

une minute & demie à la longitude de la lune pour son accélération physique dans notre siècle (1483), il n'auroit trouvé presque aucune différence entre l'observation & le calcul. V. *les lettres de M. de l'Isle sur les tables astron. de Halley*, dans les mémoires de Trévoux pour les mois de Janvier & Février 1750.

D'un autre côté Halley négligea deux des équations de Newton, parce qu'il trouva qu'il n'étoit pas possible de les déterminer par les observations que l'on avoit; il disoit que si les erreurs de ses tables alloient quelquefois à 5', c'étoit dans la partie de l'orbite lunaire, où Flamsteed l'avoit rarement observée, & où par conséquent la théorie de Newton avoit manqué de secours; ajoutons que les observations de Flamsteed n'avoient pas toujours le degré d'exactitude nécessaire pour un objet si délicat. Halley lui-même reconnut l'imperfection de ses tables, & il l'exposa aux yeux du Public avec le moyen qu'il croyoit propre à y remédier ou la table des erreurs pendant 18 ans (1501).

1460. Jusqu'alors c'étoit la théorie de Newton; & même les nombres qu'il avoit calculés, qui avoient produit toutes les tables de la lune; mais un géomètre aussi laborieux que profond, commençoit vers 1745 à attaquer le problème des trois corps dans toutes ses branches, c'étoit M. Euler; il vit bientôt que Newton n'avoit pas tiré des calculs de l'attraction, tout ce qu'on pouvoit en conclure, & il donna dans ses opuscules en 1746 de nouvelles tables de la lune, où il avoit fait usage de la théorie autant qu'il lui avoit été possible jusqu'alors, mais il les donna beaucoup mieux encore trois ans après dans l'Almanach astronomique de Berlin pour 1750.

M. d'Alembert & M. Clairaut qui s'occupoient à peu-près vers le même temps des mêmes questions donnèrent aussi des tables de la lune en 1754. Mais M. Mayer, astronome de Gottingue, ayant comparé les tables de M. Euler avec les observations, trouva moyen de les corriger avec tant de succès qu'il publia en 1753, dans
le

le second volume des mémoires de l'académie de Göttingen, des tables qui ne s'écartoient jamais de l'observation de 2' (1471), tandis que dans les tables même de Halley il y avoit quelquefois des erreurs de 7 à 8'.

Le succès de Mayer dans ses premières tables l'encourageoit à les perfectionner encore ; il s'occupoit lui-même de la théorie, il chercha l'équation générale de l'orbite d'après les calculs de l'attraction, il en rectifia tous les coefficients par un grand nombre d'observations, & en 1755 il envoya de nouvelles tables à Londres, comme étant dignes de concourir au prix des longitudes. Après sa mort, arrivée en 1762 (594), sa veuve envoya à Londres une copie de ces tables encore perfectionnées, que M. Bradley vérifia par ordre des Commissaires de la longitude, & qui furent trouvées si exactes & si précieuses pour la navigation, qu'on donna à sa veuve une récompense de 3000 livres sterling, (ou 68500 liv. de France). On a fait imprimer ces tables aux dépens de l'Etat en 1770 ; ce sont celles que je publie de nouveau dans cet ouvrage, & dont je vais donner une idée.

Nouvelles
tables de
Mayer.

J'ai déjà dit qu'à l'équation annuelle de la lune, fixée par Horoccius, Newton avoit joint une équation annuelle pour l'apogée & une pour le nœud : ces trois équations sont proportionnelles à l'équation de l'orbite du soleil, parce qu'elles ne dépendent, comme nous l'avons dit (1451), que de la distance du soleil, qui lorsqu'il est plus près de la terre dilate l'orbite de la lune & retarde par conséquent son mouvement : il augmente au contraire le mouvement de l'apogée & des nœuds, qui n'ayant pas d'autre cause que l'action du soleil devient plus fort lorsque la cause augmente. La plus grande équation annuelle de la lune est dans Newton de 11' 51" pour la lune, 20' 0" pour l'apogée, & 9' 30" seulement pour le nœud, dont le mouvement est plus lent que celui de l'apogée ; elles sont dans les nouvelles tables de 11' 16", 23' 12" & 8' 50".

I 46 I. L'équation semestre de 3' 45" ou la seconde

Tome II.

F f

Équation
semestre.

équation, qui dans Newton dépend du double de l'*argument annuel*, fait partie de la X^e équation des tables de Mayer, qu'on trouvera dans cet Ouvrage; elle vient de ce que la force perturbatrice du soleil est plus grande lorsque le grand axe de l'orbite de la lune est dirigé vers le soleil, & doit produire une inégalité que Newton trouva, en effet; par les observations d'environ $3' 45''$ dans les moyennes distances du soleil, lorsque la ligne des apsides est éloignée de 45° du soleil; elle n'est que de $58''$ dans les tables de Mayer; M. Clairaut la faisoit de $2' 13''$, & M. d'Alembert la fait de $2' 28''$ (III. 28); cette équation, au lieu d'être $3' 45''$, suivant Newton, ne devrait être que de $3' 34''$ quand le soleil est dans son aphélie, & devenir de $3' 56''$ lorsqu'il est le plus proche de la terre; mais M. Halley négligea cette petite correction qu'il jugeoit de peu de conséquence. Il négligeoit aussi la septième équation de Newton qui dépendoit de la simple distance de la lune au soleil, & qui étoit de $2' \frac{1}{3}$ dans les quadratures, suivant la théorie de Newton (1465); celle-ci est de $1' 57''$ dans les tables de Mayer; de $2' 5''$ dans M. d'Alembert, & de $3' 40''$ dans M. Clairaut; elle fait partie de la XII^e équation dans les tables de cet ouvrage.

1462. L'équation de $58''$ qui dépend de la double distance du soleil au nœud, ou l'équation semestre de Halley, & la neuvième dans M. Mayer, (V. les tables de la lune), vient de ce que l'action du soleil sur la lune est un peu plus grande quand la ligne des nœuds passe par le soleil; elle étoit de $47''$ dans Newton où elle formoit la troisième équation. M. Clairaut la fait de $1' 21''$, M. d'Alembert de $1' 9''$ (*Recherches, &c. pag. 28*). M. Mayer l'a faite de $58''$.

1463. L'équation de la lune que M. Halley appelle la quatrième équation, & qu'il ne faisoit que de $2' 25''$, est appelée par M. Newton la sixième équation, ou la *seconde équation du centre*; son argument ou la quantité dont elle dépend & qui en règle la mesure & les retours (3603), est la somme de la distance de la lune

au soleil & de la distance de leurs apogées ; ou le double de la distance de la lune au soleil moins l'anomalie moyenne de la lune, plus l'anomalie moyenne du soleil. On voit en général que si la lune étoit en conjonction & qu'elle fût apogée, le soleil étant périégée elle seroit le plus près du soleil qu'il soit possible, & par conséquent plus exposée à l'effet de la gravitation du ☉, qui diminue sa pesanteur vers la terre. Newton qui faisoit sa sixième équation de $2' 10''$ l'employoit après l'équation de l'orbite, de sorte qu'il employoit le vrai lieu de la lune pour la trouver ; mais Halley employoit celle-ci avant l'équation de l'orbite, afin que le lieu de la lune étant plus rapproché du vrai, il pût faire trouver l'excentricité & l'équation de l'orbite avec plus de précision ; cette équation est de $2' 9''$ dans nos tables où elle est la sixième.

1464. M. Halley n'employoit dans ses tables que ces trois petites équations avec l'équation annuelle ; ce n'étoit pas assez pour parvenir à la précision d'une minute : M. Mayer en a ajouté six autres ; M. Clairaut en employe 18 indépendamment des quatre grandes équations, & de celles de la latitude.

1465. La septième équation de la lune dans Newton & dans les tables de Flamsteed est de $2' 20''$, dans les quadratures ; elle dépend de la distance de la lune au soleil ; & elle est soustractive dans les six premiers signes de la distance ; M. Mayer la fait de $1' 57''$, elle est comprise dans la douzième table (1461).

1466. L'inégalité que nous avons appelée avec M. Boulliaud *évection*, (1441) ; est variable à raison des distances du soleil à la terre ou de celles de la lune à la terre : car quand le soleil ou la lune s'éloignent de la terre, l'évection diminue : on trouvera dans la table V^e. la quantité moyenne de l'évection ; mais ses accessoires ou ses variations sont contenues dans les tables V^e. VI^e. VII^e. & dans la X^e. qui dépend de l'argument annuel. Dans la table X^e de la variation, qui est la douzième équation, M. Mayer a encore ajouté une

autre petite équation qui a le même argument & qui tient à l'évection (1465). M. d'Alembert a décomposé ces équations pour examiner la manière dont sa théorie s'accordoit avec les équations supposées dans les premières tables de Mayer; il faut voir la table qu'il en donne dans ses *Recherches*, &c. Tom. III, pag. 28.

1467. La variation que nous avons expliquée ci-devant (1445), & qui est un effet de la force du soleil qui accélère ou retarde le mouvement de la lune dans son orbite (3469, 3481), se trouvera dans la table XII^e. quant à sa partie moyenne; mais elle devient plus grande quand le soleil s'approche de la terre ou que la lune s'en éloigne; les changemens qu'elle éprouve par la distance du soleil à la terre & qui dépendent de l'anomalie moyenne du soleil sont renfermés dans les tables II. & III; & ceux qui proviennent du changement de distance de la lune à la terre, par l'équation IV. & une partie de la V^e. Newton admettoit un changement de 2' 10" en plus & en moins dans la variation; il faisoit la plus grande variation de 37' 25", le soleil étant périégée, & de 33' 4" le soleil étant apo-gée; les équations précédentes produisent à peu-près le même résultat.

1468. L'équation VIII. de 34" est un supplément nécessaire de l'équation annuelle (1448); car cette inégalité vient de la force du soleil sur la lune, en tant que l'orbite du soleil est excentrique, & que sa distance à la terre est variable; mais cette équation annuelle étant considérable, elle ne peut manquer de changer lorsque la distance de la lune à la terre varie; car alors non-seulement la lune est plus ou moins près du soleil; mais sa vitesse devenue différente, donne aussi plus ou moins de prise à l'action du soleil: pour cet effet, M. Mayer y a ajouté l'équation qui sera marquée la huitième dans nos tables, dont l'argument est l'anomalie moyenne de la lune moins celle du soleil; & comme cette table ne suffit pas encore pour représenter toute l'inégalité, il a renfermé le reste d'une façon

particulière dans l'équation de $23' 12''$ qu'on applique à l'anomalie moyenne, & qui fuit les petites équations du moyen mouvement; elle renferme aussi l'inégalité annuelle du mouvement de l'apogée (1451).

1469. Les équations renfermées dans les tables IX. & XIII. dépendent de l'inclinaison de l'orbite lunaire, parce que la force du soleil agit plus ou moins obliquement sur la lune, suivant qu'ils sont l'un & l'autre plus ou moins éloignés des nœuds, & situés dans des plans plus ou moins différens; dès-lors le mouvement de la lune en est diversément affecté; à cela se joint l'excentricité qui rend cette force plus grande dans l'apogée de la lune. Voilà pourquoi l'équation de la table XIII. dépend du double de l'argument de latitude moins l'anomalie de la lune.

1470. Indépendamment des trois grandes équations & des 9 petites dont j'ai tâché de donner une idée générale, il y en a encore quelques-unes que M. Mayer dit avoir réunies aux précédentes (quand il a pu les assujettir à un même argument) sur-tout à l'équation de l'anomalie moyenne; il y en a d'autres enfin qu'il a regardées comme négligeables par leur petitesse, ou dont il n'a pu déterminer assez exactement la véritable quantité par les observations; M. Clairaut emploie plus de vingt équations, mais il y en a plusieurs qui reviennent à une partie de celles qui sont dans les tables de Mayer.

1471. M. Mayer au moyen de ces 10 petites équations, combinées & ajustées sur 200 observations de la lune, tant de ce siècle-ci que du précédent, étoit venu à bout dès 1753 de représenter ces observations avec la précision la plus grande qu'on eût encore obtenue: à peine sur ce grand nombre s'en trouvoit-il dix dont le calcul s'écarta d'une minute & demie; aucune des erreurs ne montoit à deux minutes, & le nombre de celles qui n'alloient qu'à quelques secondes étoit considérablement le plus grand; M. de Chaligny ayant pris la peine de calculer pour moi sur ces tables 104 obser-

Exactitude
des tables de
Mayer.

vations, faites depuis le 15 Septembre 1760 jusqu'au 31 Décembre 1761, n'en trouva que 6 où l'erreur fût au-delà d'une minute, il n'y en avoit qu'une dont l'erreur étoit de $1' 52''$, & une de $1' 19''$. Si l'on considère ensuite la simplicité & la commodité de ces tables, on ne sera pas surpris que je les aie préférées jusqu'ici aux autres tables de la lune, pour mes calculs annuels de la connoissance des temps; c'est par la même raison que je les avois inférées dans la connoissance des temps de 1761, & dans la première édition de cette astronomie; le P. Hell, M. Maskelyne, M. de Charniere & M. l'Abbé de Roehon les firent encore imprimer dans d'autres ouvrages; mais celles qui se trouvent dans cette nouvelle édition & qui viennent d'être imprimées à Londres sont encore plus parfaites (1460).

1472. Ces nouvelles tables ne sont pas exactement conformes aux équations que M. Mayer avoit données dans sa théorie, qui vient d'être imprimée à Londres avec les mêmes tables, parce qu'il avoit corrigé les équations, même après avoir envoyé sa théorie à Londres. Voici les équations telles qu'elles résultent des tables, que j'ai décomposées pour donner séparément celles qui sont réunies ensemble dans une même table.

Pour former les argumens de ces équations; on commence par chercher le vrai lieu du soleil, par les élémens qui ont été donnés ci-devant (1278, 1312, 1330), ensuite le lieu moyen de la lune de son apogée & de son nœud (1480) pour le moment donné; le lieu de l'apogée retranché du lieu moyen de la lune donne son anomalie moyenne; on applique ensuite à cette anomalie moyenne de la lune l'équation annuelle qui vient des inégalités de l'apogée = $23' 12''$ sin. anom. moy. \odot , & au supplément du nœud son équation annuelle = $8' 50''$ sin. anom. \odot ; mais on n'emploie l'anomalie de la lune corrigée aussi bien que le nœud corrigé, que pour la onzième équation pour laquelle on corrige encore l'anomalie avec toutes les dix pre-

mières équations ; pour la douzième , on applique à la distance de la lune au soleil même la onzième équation ; pour la treizième on employe la longitude corrigée par la douzième , & pour la quatorzième on employe la longitude vraie de la lune dans son orbite.

TABLE I.		+	11' 16"	fin. anomalie moyenne du ☉					
Equat. ann.		-	0 3	fin. 2 anomalie moy. ☉					
II.		-	0 54	fin. 2 distance moy. ☉ + anomalie moy. ☉					
III.		-	0 1 9	fin. 2 dist. moy. ☉ - anomalie moy. ☉					
IV.		+	0 57	fin. 2 dist. moy. ☉ + anom. moy. ☉					
V.	{	-	1 20 33	fin. 2 dist. moy. ☉ - anom. moy. ☉					
Evection.		+	0 36	fin. 4 dist. moy. ☉ - 2 anom. moy. ☉					
VI.		+	2 9	fin. arg. évect. + anom. moy. ☉					
VII.		+	0 49	fin. arg. évect. - anom. moy. ☉					
VIII.		+	0 34	fin. anom. moy. ☉ - anom. moy. ☉					
IX.		+	0 58	fin. 2 dist. moy. ☉ - 2 arg. moy. de latit. ou fin. 2 (☉ - ☉)					
X.	{	+	0 16	fin. dist. moy. ☉ - anom. moy. ☉, ou fin. (apog. ☉ - ☉)					
		-	0 58	fin. 2 dist. moy. ☉ - 2 anom. ☉, ou fin. 2 (ap. ☉ - ☉).					
XI.	{	-	6 18 15	fin. anom. ☉ corrigée par les équ. précéd. & par son équ. A.					
Equation de l'orb.		+	12 58	fin. 2 anom. ☉					
		-	37	fin. 3 anom. ☉					
XII.	{	-	1 57	fin. dist. ☉ corrigée par les équations précédentes.					
Variat.		+	35 43	fin. 2 dist. ☉					
		+	2	fin. 3 dist. ☉					
		+	10	fin. 4 dist. ☉					
XIII.		+	1 23	fin. 2 arg. latit. corrigée - anomal. corrigée.					
XIV.		-	6 43	fin. 2 argum. latit. (1130)					
XV.		-	0 18	fin. longit. moy. ☉ (2863)					
Nutation.									

I 473. On pourra voir dans la seconde édition des tables de M. Clairaut, faite en 1765, une semblable formule, dans laquelle on n'emploie que les longitudes moyennes du soleil & de la lune, ce qui en rend l'usage plus

facile, mais le nombre des équations est un peu plus considérable, & j'ignore si l'exactitude de ces tables approche de celle que donne la formule précédente.

Réflexions
générales.

1474. J'aurois bien souhaité de pouvoir donner ici une notion plus distincte de toutes ces inégalités de la lune, leur quantité, la manière dont on les a découverts & dont on peut les constater; mais dans tout ce qui s'est fait jusqu'ici sur cette matière, il y a encore trop d'incertitude & d'obscurité, M. Clairaut emploie 22 équations, mais les géomètres qui s'en sont occupés depuis 25 ans, n'ont point donné les détails de leurs procédés, & ne sont point d'accord sur les quantités des équations, sur leur utilité, sur leur exactitude; il se passera plus de 50 ans avant qu'on puisse donner de pareils détails dans un traité d'astronomie, avec de la brièveté & de l'exactitude.

Des tables
faites sur la
seule théorie.

1475. Les tables de la lune données par Képler, Horoccius, Flamsteed, Cassini & Mayer, ont pour fondement les observations mêmes; car quoique Newton eût trouvé à peu-près la forme de ses équations par le principe de l'attraction, il en avoit déterminé la quantité par les observations de Flamsteed; Mayer chercha de même dans la théorie & les calculs de M. Euler la forme de ses tables, mais il paroît qu'il les ajusta sur les observations de M. Bradley, à force de tentatives, d'essais & de calculs.

Cependant le seul principe de l'attraction en raison inverse du carré de la distance, devoit suffire, ce semble, pour calculer, sans le secours de l'observation; toutes les petites inégalités de la lune; c'est ce qu'ont entrepris les plus fameux géomètres de ce siècle, M. Euler, M. Clairaut, M. d'Alembert, & plusieurs autres après eux; mais ils conviennent tous qu'il est douteux qu'on puisse parvenir à fixer par la seule théorie toutes ces petites inégalités. M. d'Alembert, (dans le mercure de Sept. 1757, pag. 109), dit que la valeur des coefficients des équations lunaires, trouvés par la théorie, est encore fort incertaine; il me paroît très-douteux, (ajoute-t-il),

(ajoute-t-il), qu'on puisse parvenir à les fixer par la théorie seule; il ne faut pas se presser d'affurer aux tables de M. Mayer l'exactitude astronomique; d'ailleurs il y a employé un tâtonnement fait sur les seules observations. M. d'Alembert dit à peu-près la même chose en plusieurs endroits de ses *Recherches*, sur la nécessité d'avoir recours aux observations pour déterminer ces coefficients, (III, 31).

1476. M. Clairaut, dans le journal des savans (Déc: 1757), répondit que M. Mayer n'avoit omis dans ses tables aucune des équations qui sont essentielles pour la longitude de la lune, & qui ne demandent pas une extrême attention dans les calculs de la théorie; mais cette réponse même n'indique-t-elle pas que dans les autres équations qu'on peut ajouter à celles de M. Mayer; il reste quelque doute du côté de la théorie; je fais d'ailleurs que M. Clairaut a fait un grand usage des observations pour rectifier les coefficients de ses équations, & qu'il a varié beaucoup sur la valeur de quelques-unes, sur-tout de celles qui dépendent de t , $2t - 2y$, z , $y + z$, $2s - y$; t est la distance de la lune au soleil; y est l'anomalie; s l'argument de latitude; & z l'anomalie du soleil.

On trouvera dans le XXII^e livre la forme & les principes de ces recherches (3468); nous n'en suivrons pas le détail pour chacune des inégalités de la lune; parce que ce détail est prodigieux, & qu'il exigeroit des volumes: d'ailleurs ceux qui ont eu la constance de les faire, n'ont pas encore pû se déterminer à les publier; on trouvera tout ce qui s'est fait là-dessus dans trois ouvrages que nous allons indiquer, qui sont de MM. d'Alembert, Clairaut. & Euler.

1477. L'ouvrage de M. Euler a pour titre: *Theoria motûs lunæ exhibens omnes ejus inæqualitates*, authore L. Eulero, Petropoli, 1753, in-4^o. 347 pag. La pièce du même auteur qui a remporté le prix de l'académie en 1770, contient sur la même matiere beaucoup de nouvelles recherches.

1478. L'ouvrage de M. Clairaut est la pièce qui a remporté le prix de l'Académie Impériale des sciences de S. Pétersbourg, proposé en 1750, sur la théorie de la lune, elle fut imprimée à Pétersbourg dès l'année 1752, en 92 pag. in-4°. & M. Clairaut en a fait imprimer une nouvelle édition, à Paris chez Defaint & Saillant 1765, avec des tables de la lune.

1479. L'ouvrage où M. d'Alembert a approfondi cette matière, est intitulé : *Recherches sur différens points importants du Système du Monde*, I^{ere} partie, 1754, in-4°. 260 p. On y trouve des tables de la lune de M. d'Alembert ; elles ont été publiées de nouveau avec des corrections dans le second volume de ses *Opuscules mathématiques* en 1762, avec plusieurs nouvelles considérations sur la théorie de la lune. Les volumes suivans de ses recherches & de ses opuscules, contiennent beaucoup de supplémens à ce travail. On peut ajouter à ces trois ouvrages primitifs ceux de Mayer, de Simpson, du P. Walmsley, du P. Frisi, &c. sur la même matière.

*ÉLÉMENS PRINCIPAUX DE LA THÉORIE
de la Lune tirés de l'observation selon divers
Auteurs.*

1480. Mouvement séculaire pour cent années Juliennes, dont 25 sont bis- sextiles, ou 365,25 jours moyens.	}	Képler & Horoc.	10 ^s	7°	48'	51"
		Newton, Flamsteed & Halley,	10	7	50	25
		la Hire,	10	7	50	1
		Cassini,	10	7	49	52
		Mayer, <i>an. tab.</i>	10	7	52	20
		<i>Nouv. tab.</i>	10	7	53	35
Mouvement de l'a- pogée pour cent années Juliennes.	}	Képler & la Hire,	3	19	14	16
		Horoccius,	3	19	4	16
		Flamsteed, Halley, & Mayer, dans les <i>deux éditions</i> ,	3	19	11	15
		Cassini,	3	19	14	16
		Bailly, (<i>mém. ac. 1763</i>)	3	19	5	0

Mouvement féculaire du Nœud.	}	Képler, Horoccius				
		& la Hire,	4 ^s	14 ^o	11 ^o	7 ^{''}
		Flamst. & Halley,	4	14	11	15
		Cassini,	4	14	11	5
		Mayer, <i>An. & nouv.</i> <i>tables,</i>	4	14	11	15

Epoque de la longi- tude moyenne de la Lune pour 1750.	}	Képler,	6	8	13	49
		Horoccius,	6	8	12	49
		la Hire,	6	8	18	5
		Flamsteed,	6	8	16	19
		Halley,	6	8	15	19
		Cassini,	6	8	14	55
		Mayer, <i>Anc. tab.</i> <i>Nouv. tab.</i>	6	8	16	53

Epoque ou longitude de l'apogée pour 1750.	}	Képler,	5	21	30	33
		Horox,	5	20	30	33
		La Hire,	5	20	40	54
		Flamsteed,	5	20	58	52
		Halley,	5	20	58	52
		Cassini,	5	21	1	21
		Mayer, <i>Anc. tab.</i> <i>Nouv. tab.</i>	5	20	56	47

Epoque ou longit. du Nœud pour 1750.	}	Képler,	9	10	33	14
		Horox,	9	10	15	14
		La Hire,	9	10	21	0
		Flamsteed,	9	10	15	0
		Halley,	9	10	13	59
		Cassini,	9	10	18	8
		Mayer, <i>An. & nouv.</i> <i>tables,</i>	9	10	19	9

Equation du centre.	}	Flamsteed, <i>moyen.</i>	6	18	43
		Euler,	6	18	18
		D'Alembert, III, 29,	6	18	43
		Clairaut,	6	18	1
		Mayer, <i>Anc. tab.</i> <i>Nouv. tab.</i>	6	18	44

Je ne compare pas avec ces tables celles de M. de la Hire, de M. Cassini, de M. Halley, quant à l'équation de l'orbite & à l'évection, parce que ces deux équations y étoient combinées d'une façon particulière.

L'excentricité moyenne, employée par M. Clairaut, est comme dans M. Halley 0,05505, ou 5505 parties, dont la distance moyenne contient 100000. Ensuite il la diminuée de $\frac{1}{177}$ pour rapprocher sa formule des observations auxquelles il l'avoit comparée, mais il a conservé la première dans sa seconde édition *pag.* 59. Cette excentricité donne pour équation $6^{\circ} 18' 18'' 4$; mais pour trouver celle de Mayer $6^{\circ} 18' 32''$, il faut supposer l'excentricité 0,055083, parce que sa table de l'équation de l'orbite renferme encore quelque partie des perturbations du soleil (V. M. d'Alembert, III. 29). L'excentricité, suivant M. Mayer, étoit de 5454, ensuite il l'augmenta de $\frac{1}{300}$ ce qui donne 5472 (Théor. *pag.* 50). Cette excentricité dans une orbite elliptique donneroit pour équation $6^{\circ} 16' 3''$.

Sur les autres équations de la lune, voyez les articles précédens; sur la parallaxe de la lune & son diamètre, voyez le Livre IX^e.

Révolutions.

1481. Les révolutions de la lune, de son apogée & de son nœud peuvent se déduire de leurs mouvemens séculaires: en supposant la précession de $1^{\circ} 23' 54''$ par siècle, & les moyens mouvemens tels qu'ils sont dans les nouvelles tables (1480), je trouve les révolutions de la manière suivante.

Révolution tropique de la lune,	27 ^j	7 ^h	43'	4'',65
Révolution sidérale de la lune,	27	7	43	11,51
Révolution synodique,	29	12	44	2,89
Année lunaire de 12 révolutions synodiques,	354	8	48	35
Révolution anomalistique,	27	13	18	33,92
Révolution par rapport au nœud,	27	5	5	49,17
Révolution tropique de l'apogée				
8 ans 311 ^j ou	3231,	8	34	57,6
Suivant M. Cassini, <i>pag.</i> 312	3231.	8	0	

Révolution fidérale de l'apogée,	3232 ⁱ 11 ^h 14' 31", 0
Révolution tropique du nœud 18 années	
communes & 228 ⁱ ou	6798 4 52 52, 3
Suivant M. Cassini, pag. 288,	6798 7 0
Révolution fidérale du nœud	6803 2 55 18, 4
Mouvement diurne de la lune par	
rapport à l'équinoxe,	13° 10' 35", 02847365
Mouvement diurne de l'apogée;	0 6 41, 06981520
Mouvement diurne du nœud,	0 3 16, 38603696

Le mouvement de la lune par rapport aux étoiles fixes étant pris pour unité, celui de l'apogée est 0, 0084522592, & celui du nœud 0, 0040160476, aussi par rapport aux étoiles; c'est celui dont on a besoin dans la théorie de l'attraction.

1482. La distance moyenne de la lune à la terre est de 85393 lieues, (chacune de 2283 toises, ou de 25 au degré) (1718). Distance.

Le diamètre vrai de la lune (1717) nous apprendra que son volume est la 49^e. partie de celui de la terre. La masse ou la quantité de la matière de la lune est $\frac{1}{70}$ de celle de la terre, comme nous le dirons en parlant de sa densité dans le livre XXII. (3414). Grosueur.

Accélération du moyen mouvement de la Lune.

1483. L'ÉQUATION SÉCULAIRE qu'on trouvera dans les tables de la lune exprime une accélération qu'on a remarquée depuis long-temps dans les moyens mouvemens de la lune; la durée de sa révolution en mettant à part toutes ces inégalités, est plus courte actuellement de 22 tierces de temps qu'elle n'étoit il y a 2000 ans; ce qui produit un degré d'erreur sur le lieu de la lune quand on le calcule pour l'année 300 avant J. C. en employant le mouvement de la lune qui convient aux observations modernes, c'est-à-dire, 10^s 7° 53' 35" par siècle.

Auteurs qui
en ont parlé.

M. Halley sur la fin du dernier siècle fut le premier qui remarqua cette accélération physique dans le mouvement de la lune, (*Philos. transf.* n°. 204 & 218 : il en parla en 1693 & 1695 à l'occasion des observations d'Albategnius & des ruines de Palmyre ; Newton dans la seconde édition de ses principes, pag. 481, cite M. Halley comme ayant reconnu le premier cette accélération ; M. Dunthorn a examiné ensuite cette matière (*Philos. transf.* 1749 & 1750, n°. 491 pag. 162) ; M. Mayer en parle dans le second volume des mémoires de Gottingen, (*Comment. soc. Gotting.* 1752, pag. 383) ; enfin j'ai discuté cette matière avec encore plus de soin & de détails dans les mémoires de l'académie pour 1757, pag. 426. Voici en peu de mots le résultat de mes recherches à ce sujet.

1484. Pour connoître l'inégalité du moyen mouvement de la lune entre les anciennes observations de l'an 720 avant J. C. & celles de notre siècle ; il faut nécessairement en avoir qui ayent été faites dans un siècle intermédiaire, & l'on en trouve très-peu. Les observations les plus remarquables que l'on puisse y employer sont deux éclipses de soleil observées à Geffa qui étoit à 6 ou 7 milles du Caire, l'an 977 & 978, par les astronomes du Roi Abu-Haly-Almanzor le Sage, qui commandoit en Egypte ; ces observations sont dans un manuscrit d'Ibn Junis. Pour représenter ces éclipses j'ai trouvé qu'il falloit supposer le moyen mouvement séculaire de la lune $10^{\circ} 7' 53' 21''$ dans ce siècle-ci, plus grand de $3' \frac{1}{2}$ que dans M. Cassini, & y appliquer une équation séculaire de $9'' 886$ pour le premier siècle. Mayer qui ne la faisoit que de $7''$ dans ses premières tables la fait de $9''$ actuellement. Cette équation de $9''$ augmente ensuite comme le carré des temps (1166), & devient de $1^{\circ} 26' 24''$ pour l'année 700 avant J. C. Cette équation séculaire fait que la durée de la révolution de la lune n'est dans ce siècle ici que de $27^j 7^h 43' 4''$, 648, tandis qu'elle étoit de $27^j 7^h 43' 5''$, 1386 il y a 2000 ans.

1485. Je dois cependant avertir que M. Grifchow étant à Leyde en 1749, engagea M. Schultens, professeur en langue Arabe à faire la recherche & la traduction du Mss. Arabe, dont ces observations sont tirées ; M. Bevis m'a communiqué cette traduction ; on y trouve des obscurités, & M. Bevis pense même qu'on y a mêlé le calcul avec de véritables observations ; il seroit à souhaiter qu'on s'assurât mieux d'un fait aussi intéressant ; les personnes instruites dans les langues Orientales, & qui n'ont encore presque rien fait pour nos sciences, n'auroient pas de meilleures occasions de rendre leurs études utiles. Il y a dans le même manuscrit une éclipse de lune du 14 Mai 979, qui étoit mal rendue dans la traduction de Skikardus, mais qui s'accorde avec le calcul quand on rectifie la traduction.

Incertitude
à ce sujet.

Au reste la nécessité de cette équation séculaire paroît être prouvée encore par les observations faites depuis 60 ans ; en effet, M. Mayer a trouvé le mouvement pour 60 ans de $1^{\circ} 10' 44'' 9''$, plus grand de deux minutes que ne le donnent les anciennes observations. Toutes les éclipses du dernier siècle s'accordent à la minute avec cette accélération, tandis que les erreurs vont à 2 ou 3 minutes quand on employe le mouvement moyen des autres tables. Enfin 42 observations de M. de la Hire calculées avec soin par M. de la Caille & par M. Bailly indiquent qu'il faut ajouter environ $38''$ au mouvement pour 60 ans établi par M. Mayer dans ses premières tables (*Mém. acad.* 1763, pag. 24), & dans les nouvelles tables Mayer a effectivement ajouté $45''$. Ainsi l'équation séculaire est de $9''$ pour le premier siècle ou de 1° pour 2000 ans, & le mouvement moyen pour le commencement du 18^e siècle est de $4^{\circ} 9' 23' 5''$ par année, ce qui seroit $10^{\circ} 7' 53' 35''$ par siècle s'il étoit uniforme pendant cent ans.

**DES NŒUDS ET DE L'INCLINAISON
DE L'ORBITE LUNAIRE.**

1486. L'ORBITE de la lune est inclinée sur l'écliptique, de même que celles de toutes les autres planètes (1116); ainsi la lune traverse l'écliptique deux fois dans chaque révolution, & sept jours après avoir traversé l'écliptique dans un de ses nœuds elle s'en éloigne de 5 degrés: sans cette inclinaison nous aurions tous les mois une éclipse de soleil le jour de la conjonction, & une éclipse de lune le jour de l'opposition; mais au contraire il y a des années entières où il n'arrive aucune éclipse de lune (par exemple, en 1763); parce qu'au moment de chaque opposition la lune est trop éloignée de son nœud, & se trouve par conséquent au-dessus ou au-dessous de l'écliptique où restent toujours le centre du soleil, & l'ombre de la terre.

LE NŒUD ASCENDANT de la lune où celui par lequel elle traverse l'écliptique en s'avancant vers le nord s'appelle quelquefois *la tête du dragon*, & se désigne par ce caractère Ω : le nœud descendant ou queue du Dragon par celui-ci ϑ .

1487. Ce qu'il y a de plus remarquable dans les nœuds de la lune c'est la promptitude de leur mouvement; si la lune traverse l'écliptique dans le premier point du Bélier ou dans le point équinoxial (comme cela arrivoit au mois de Juin 1764) dix-huit mois après c'est dans le commencement des poissons qu'elle coupe l'écliptique, c'est-à-dire, que son nœud a rétrogradé de 30 degrés ou d'un signe entier; & il fera de même tout le tour du ciel dans l'espace de 18 années communes 228 jours $4^h 52' 52''$. Ce mouvement des nœuds fut aisé à reconnoître en voyant la lune éclipsée par exemple la belle étoile du cœur du Lion ou *Regulus* qui est sur l'écliptique même: quand la lune éclipsa *Regulus* (comme cela arrivoit au mois de Juin, 1757) elle

Révolution
des Nœuds.

elle est évidemment dans son nœud ; mais quelques années après ; on voit qu'au lieu d'éclipser *Regulus* elle passe 5° plus haut ou plus bas , au nord ou au midi de l'étoile : donc le nœud de l'orbite lunaire n'est plus alors au point de l'écliptique où se trouve *Regulus* ; mais à 90° degrés de-là ; il en est de même des autres étoiles. Toutes les fois que la lune a été en conjonction avec une étoile , de manière à en passer fort près ; elle se trouve le mois suivant plus éloignée de l'étoile , & toujours de plus en plus. Au bout de 19 ans on la voit revenir par les mêmes points du ciel & couvrir les mêmes étoiles , ce qui prouve assez que le nœud de la lune fait le tour du ciel dans cet espace de temps.

1488. Les éclipses de lune sont de la même grandeur quand la lune est à la même distance de l'écliptique ou à la même distance de son nœud (1786). *Hipparque* ayant comparé entr'elles des éclipses de lune observées depuis les Chaldéens jusqu'à lui , trouva que dans l'espace de 5458 mois lunaires la lune avoit passé 5923 fois par son nœud. Cela lui servit à trouver le mouvement diurne de la lune par rapport à son nœud de 13° 13' 45" 39''' $\frac{2}{3}$, (*Riccioli, Almag. tom. I, pag. 252*), & ce résultat s'est trouvé fort exact : car, suivant *Boulliaud (Astron. philol. pag. 154)* , il est de 13° 13' 45" 39''' 38^{iv} , & suivant *Riccioli* 13° 13' 45" 29''' 28ⁱⁱⁱⁱ en y employant deux observations bien choisies. Cet élément est si facile à déterminer par les éclipses de lune observées (1419) & comparées avec les nôtres , qu'il n'y a là-dessus aucune incertitude. J'ai donné ci-dessus les résultats de différentes tables pour le mouvement séculaire du nœud (1480) , dans celles de *Mayer* , il est de 4^s 14° 11' 15" pour cent années Juliennes , outre les cinq révolutions complètes , par rapport aux équinoxes.

Mouvement
par rapport au
Nœud.

1489. Le mouvement total du nœud en 100 ans par rapport aux équinoxes est de 6963075" & de 6958041" , par rapport aux étoiles fixes , celui de la lune est de 1732559381" ; d'où il est aisé de conclure

Révolution
par rapport au
Nœud.

que le mouvement moyen de la lune par rapport aux étoiles étant pris pour unité, celui de son nœud est égal à la fraction décimale 0,0040160476 dont le logarithme est 7,6037988; le mouvement de la lune par rapport à son nœud est donc 1,0040160476. La révolution de la lune par rapport au nœud se trouveroit en divisant par ce dernier nombre la révolution syddérale 27^j 7^h 43' 11" 51; car la révolution par rapport aux étoiles est à la révolution par rapport au nœud, comme le mouvement par rapport au nœud est au mouvement par rapport aux étoiles. On la trouvera aussi en disant : la somme des mouvemens séculaires de la ☾ & du nœud 1739517422", est à un siècle comme 360° sont à un quatrième terme 2351149" 1709, ainsi cette révolution de la lune par rapport au nœud qui étoit de 27^j 5^h 5' 36" suivant Riccioli, est selon nous de 27^j 5^h 5' 49" 1709.

1490. L'orbite de la lune fait avec l'écliptique un angle d'environ cinq degrés, c'est-à-dire, que la lune lorsqu'elle est à 90° de ses nœuds a environ 5° de latitude; mais cette plus grande latitude qui n'est que de 5° dans les nouvelles lunes ou les pleines lunes qui arrivent à 90° des nœuds, se trouve de 5° 18' dans les quadratures, lorsquelles sont observées de même à 90° des nœuds, c'est-à-dire, que l'inclinaison de l'orbite lunaire est la plus petite dans les syzygies, & la plus grande dans les quadratures; Ptolomée ne connoissoit pas cette différence: il supposoit l'inclinaison constante & toujours de 5°. Copernic lui-même (*Lib. IV. cap. 4*), n'avoit pas examiné la chose de plus près. Tycho-Brahé fut le premier qui fit cette remarque importante pour la théorie de la lune; & après avoir découvert la troisième inégalité de la lune par ses observations (1445); il découvrit aussi le changement de l'inclinaison, & l'inégalité du mouvement des nœuds de la lune, comme il le dit à la 26^e. page du petit appendix que j'ai déjà cité (1442).

1491. On s'est persuadé mal à propos, dit Tycho;

que les limites de la plus grande latitude de la lune étoient toujours les mêmes & alloient constamment à 5° . Ptolomée, Albategnius, Alphonse, ont été suivis en cela par Copernic avec trop de confiance, comme dans plusieurs autres occasions : on a eu tort de croire aussi que les nœuds de la lune avoient un mouvement uniforme & régulier. Des observations faites depuis quelques années avec le plus grand soin, nous ont forcé d'abandonner les anciennes traditions sur lesquelles nous avions compté jusqu'alors ; nous avons trouvé que dans les nouvelles & pleines lunes la latitude de la lune est de $4^{\circ} 58' \frac{1}{2}$; à peu-près comme l'établissoit Ptolomée ; mais dans les quadratures elle va jusqu'à $5^{\circ} 17' \frac{1}{2}$, & nous nous en sommes assurés par des observations exactes & multipliées faites dans les limites australes & boréales, & dans les deux tropiques, en tenant compte des réfractions & des parallaxes.

Inégalité découverte par Tycho.

1492. Tycho reconnut aussi dans les nœuds de la lune une inégalité qui dans les nouvelles & pleines lunes n'étoit pas sensible, aussi elle n'avoit pas été remarquée par les anciens qui n'observoient presque jamais la lune, si ce n'est dans les éclipses ; mais dans les autres situations il trouvoit $1^{\circ} 46'$ de différence sur le lieu du nœud, ce qui faisoit environ 12 minutes de plus ou de moins sur la latitude de la lune aux environs des nœuds.

Inégalité du Nœud.

1493. Enfin Tycho vit que ces deux inégalités de l'inclinaison & du nœud pouvoient se représenter à la fois par le mouvement du pôle de l'orbite lunaire dans un petit cercle tel que *E C F G* (*fig. 85*), dont le diamètre *GC* étoit de $19'$; le centre *D* de ce petit cercle étant supposé à une distance *DA* du pôle *A* de l'écliptique égale à $5^{\circ} 8'$ qui est la moyenne inclinaison ou la moyenne distance des poles de l'écliptique & de l'orbite de la lune ; c'est-à-dire, que suivant Tycho l'arc *AD* est de $5^{\circ} 8'$. L'exactitude de cette détermination est remarquable, car l'inclinaison a été reconnue de $5^{\circ} 8' 52''$ par les plus récentes observations, & la

Maniere de représenter ces deux effets.

Fig. 85.

Fig. 85.

valeur de GD $8' 49''$; ce qui diffère à peine des quantités trouvées par Tycho-Brahé. Le pole de l'orbite lunaire est supposé se mouvoir sur la circonférence GEC ; de manière qu'il soit en G dans les syzygies, en C dans les quadratures, en F dans les octans; son mouvement étant proportionnel au double de la vraie distance de la lune au soleil; cela supposé en calculant le triangle sphérique ADF , on trouve que l'angle DAF est de $1^\circ 46'$; c'est la plus grande équation du lieu du pole D , & par conséquent du lieu du nœud de la lune sur l'écliptique, éloigné toujours de 90° du lieu du pole (1353). Dans un autre point comme H , l'angle HAG fera aussi l'équation du nœud, & AH la distance actuelle des poles de l'écliptique & de l'orbite lunaire ou l'inclinaison de l'orbite de la lune pour le temps donné; l'angle ADH étant toujours égal au double de l'élongation de la lune ou de ce qui lui manque pour aller à 180° , c'est-à-dire, au double de la distance de la lune à sa conjonction ou à son opposition.

1494. Tycho-Brahé n'aperçut pas qu'il résulteroit de cette hypothèse & de cette construction une manière très-simple de corriger la latitude de la lune par une seule équation; Képler, Newton, Halley, & M. Euler même continuèrent d'employer une équation pour l'inclinaison & une pour le nœud, d'où ils tiroient ensuite la latitude de la lune par la résolution d'un triangle sphérique; c'est T. Mayer qui dans ses premières tables de la lune fut prendre une voie plus simple: je vais la démontrer ici, car l'auteur ne nous en a point laissé de démonstration.

Equation de
la latitude.

1495. Soit L la lune, E le pole de son orbite dans un temps quelconque; ensorte que LE soit de 90° , parce que le pole d'un cercle est toujours éloigné de sa circonférence de 90° ; l'arc LD ou la distance de la lune au pole moyen est plus ou moins grande que la distance au pole vrai, de toute la quantité de l'équation de la latitude que nous cherchons. Si du pole moyen D on abaisse le petit arc perpendiculaire DM sur le

cercle LE prolongé en M ; on aura $LM=LD$, & par conséquent EM sera la différence cherchée entre la distance au pôle vrai & la distance au pôle moyen; ou entre la latitude vraie & la latitude moyenne. Puisque AD est le cercle de latitude qui passe par les pôles de l'orbite de la lune, & qui lui est perpendiculaire aux points de la plus grande digression; l'arc de cercle DB perpendiculaire au premier sera celui qui passe par les nœuds de la lune, & l'angle LDB sera la distance de la lune à son nœud ou l'argument de latitude mesuré au pôle de son orbite; ce qui revient au même que s'il étoit compté sur l'orbite même de la lune. L'angle ADM est égal à l'angle LDB ; car si des angles droits ADB & LDM on ôte la partie commune MDB , on aura les restes égaux ADM & LDB : ainsi ADM est aussi égal à l'argument de latitude; mais ADE , suivant l'hypothèse & les observations de Tycho (1493) est égal au double de la distance de la lune au soleil, donc MDE est égal au double de cette distance moins l'argument de latitude. Le petit triangle rectangle DME sensiblement rectiligne, donne, suivant la règle ordinaire de la trigonométrie rectiligne, $ME=ED \sin. MDE$; donc l'équation de la latitude de la lune est égale à $8' 49''$ multipliées par le sinus de la double distance de la lune au soleil moins l'argument de latitude.

Règle,

1496. Il résulte aussi de ce changement dans les nœuds & l'inclinaison de l'orbite lunaire une inégalité dans la réduction à l'écliptique; mais M. Mayer l'a renfermée dans la table de la *variation*, parce qu'on a reconnu qu'en diminuant de quelques secondes la variation, on produisoit le même effet; M. d'Alembert remarque dans sa théorie de la lune, pag. 97, que les quantités qui proviennent de l'équation du nœud & de celle de l'inclinaison, se détruisent mutuellement, à l'exception d'une équation de 23 secondes qui a le même argument que la variation de la lune.

1497. Puisque l'hypothèse que je viens d'expliquer est la seule employée dans les tables que je publie, je

ne dirai qu'un mot de la manière dont M. Newton ; & après lui Flamsteed , Halley & tous les auteurs qui ont suivi , ont considéré ces variations dans la latitude de la lune. Newton supposa que l'inclinaison de l'orbite de la lune étoit sujette à un balancement alternatif de $9'$, & le nœud à une inégalité de $1^{\circ} 29' 39''$, il considéroit ces deux choses séparément. Dans cette hypothèse , on trouve que lorsque le soleil est dans le nœud de la lune , ce nœud a moins de mouvement , car son équation augmente en plus , jusqu'à ce que le soleil se trouve à trois signes du nœud , alors l'équation additive est de $1^{\circ} 29' 39''$, elle cesse alors d'augmenter , & le mouvement du nœud est le même que s'il n'y avoit point d'inégalité , c'est-à-dire , égal au mouvement moyen.

1498. L'inclinaison de l'orbite lunaire est la plus grande quand le soleil est dans le nœud , alors Newton la suppose de $5^{\circ} 17' 30''$, elle est au contraire la plus petite ou de $4^{\circ} 59' 30''$, lorsque le soleil répond aux limites de la plus grande latitude , & qu'il est à 90° des nœuds de la lune. C'est ainsi que Newton changeoit l'angle d'inclinaison & le lieu du nœud de la lune ; après quoi connoissant la distance de la lune à son nœud , & l'angle d'inclinaison , il cherchoit la réduction à l'écliptique & la latitude. On verra dans le XXII^e. livre (3515) le principe de ces singularités par le moyen de la loi de l'attraction , il ne s'agit ici que de l'hypothèse astronomique trouvée par le moyen des observations de Tycho , & adoptée par Newton à cause de sa conformité avec les loix qu'il avoit reconnues.

1499. J'ai dit que Newton avoit aussi introduit une équation annuelle (1451) , de $9' 27''$ pour le nœud ; elle est plus petite que celle de l'apogée , dans le même rapport que le moyen mouvement du nœud est plus petit que celui de l'apogée ; mais l'équation du nœud est soustractive quand les autres sont additives , parce que le mouvement du nœud se fait en sens contraire du mouvement de la lune & de celui de son apogée ; ces équations sont

aussi employées dans les tables de M. Mayer que l'on trouvera dans ce livre.

1500. Enfin le calcul rigoureux de l'attraction du soleil a fait voir que cette grande inégalité de la latitude ne pouvoit représenter qu'à une ou deux minutes les latitudes observées, & que les différentes manieres dont s'exerce l'attraction du soleil sur la lune, donnoient lieu à neuf autres équations qui méritoient d'entrer dans le calcul. Voici les nombres sur lesquels sont faites les onze tables que nous publions d'après lui; ils ne sont pas conformes à la théorie imprimée, parce ce qu'il paroît que Mayer corrigeoit encore ses tables en 1762, même après avoir envoyé à Londres sa théorie. On suppose dans ces tables que l'argument de latitude a été formé en ôtant du vrai lieu de la lune dans son orbite, le lieu du nœud corrigé, & la distance de la lune au soleil en ôtant du vrai lieu de la lune dans son orbite, le vrai lieu du soleil.

Ces inégalités dans les latitudes de la lune sont assez petites pour qu'on puisse souvent les négliger, sans faire sur la latitude de la lune des erreurs de plus d'une minute & demie; nous allons cependant rapporter ici la formule qui exprime toutes les équations contenues dans les nouvelles tables.

TABLE I. { 5° 8' 46" fin. Argument de latitude.

Latitude. { - 6 fin. 3 Argumens de latitude.

II.	+	8 49	fin. 2 dist. ☉ ⊙ — Argument de latitude.
III.	+	2	fin. Argument latitude — anom. ⊙
IV.	-	17, 4	fin. Argument latit. — anom. moy. ☉
V.	-	24, 1	fin. Argum. latit. — 2 anom. moy. ☉
VI.	+	2, 7	fin. Argum. latit. — 3 anom. moy. ☉
VII.	-	8, 3	fin. 2 dist. ☉ ⊙ — Argum. latit. + anom. ⊙
VIII.	-	3, 7	fin. 2 dist. ☉ ⊙ — Argum. latit. — anom. ⊙
IX.	-	2, 2	fin. 2 dist. ☉ ⊙ — Arg. latit. + anom. moy. ☉
X.	+	15, 0	fin. 2 dist. ☉ ⊙ — Arg. latit. — anom. moy. ☉
XI.	-	6, 0	fin. 2 dist. ☉ ⊙ — Arg. latit. — 2 anom. moy. ☉

Parmi les autres équations que donne la théorie, il n'y en a aucune qui passe 2'', & l'auteur les a négligées dans ses tables; il paroît même que dans les XI précédentes, on en pourroit négliger 5 ou 6, quant à présent.

DE LA PÉRIODE CALDÉENNE
de deux cents vingt-trois Lunaisons.

1501. Nous avons dit, (330, 1425) que les anciens astronomes, long-temps avant Hipparque, avoient aperçu le retour constant des éclipses au bout de 223 mois lunaires, ou de 18 ans & dix jours, (*Almag. IV. 2*). Pline le Naturaliste dit aussi qu'il est certain que les éclipses retournent dans le même ordre dans l'espace de 223 mois, (*L. II. cap. 13*). C'est pourquoi M. Halley appelle cette période la *Période de Pline*, (*Philos. Transf. 1692. n°. 194. Acta Erudit. 1692. pag. 529*).

Les éclipses ne pouvoient revenir dans le même ordre, malgré les inégalités de la lune, à moins que ces inégalités n'eussent aussi la même période, d'où M. Halley conclut que les inégalités & les erreurs des tables, quoiqu'imparfaitement connues, devoient cependant revenir les mêmes au bout de 223 lunaisons, en sorte qu'une erreur observée devoit suffire pour annoncer celle qui auroit lieu 18 ans après, malgré l'imperfection des tables de la lune. C'est cette période que M. Halley appelle aussi *Saros*, ou *Période Caldaique*; mais au sujet du *Saros*, voyez l'art. 1566.

M. Halley dès l'année 1684 avoit fait usage des 18 ans pour prédire les éclipses: on avoit observé le 22 Juin 1666, V. Style, une éclipse de soleil; à Londres & à Dantzick; il s'en servit pour prédire celle du 2 Juillet 1684, en y employant la même erreur qu'il avoit reconnue dans les tables pour le 22 Juin 1666, & sa prédiction se trouva vérifiée à la minute; enfin, il trouva que même hors des syzygies, les erreurs des tables se retrouvoient presque les mêmes; il en conclut que les défauts

défauts de la théorie avoient une régularité, & pour le reconnoître parfaitement, il forma dès-lors le deffein d'observer la lune fans interruption pendant une période entiere de 18 ans (588).

1502. On trouve dans les tables de M. Halley un catalogue des éclipses de lune & de soleil, arrivées depuis 1701 jusqu'en 1718; il donna pour chacune le temps moyen du milieu de l'éclipse, l'anomalie moyenne de du soleil, l'argument annuel, & la latitude de la lune. Pour que cette table pût servir à trouver les éclipses dans d'autres périodes, il y joignit deux autres tables pour corriger la période; parce qu'en effet le retour n'est pas assez exact pour qu'on puisse en tirer des conclusions certaines. Boulliaud en avoit fait la remarque long-temps avant Halley; l'éclipse de lune du 31 Janvier 1580 avoit été totale, celle du 10 Février 1598; ne fut que de $11\frac{1}{2}$ doigts; celle du 14 Mars 1634 ne fut que de 11 doigts; celle du 27 Avril 1706 de $5\frac{1}{2}$; celle du 29 Mai 1760 de trois cinquièmes de doigt: enfin le 10 Juin 1778, après dix périodes accomplies, il n'y aura plus d'éclipse, parce que la période ne ramene pas la lune à même distance du nœud. (M. le Gentil, *Mém. Acad.* 1756, pag. 58). Par la même raison, les erreurs des tables doivent devenir différentes après quelques périodes: le 18 Octobre 1641, celle des tables de Flamsteed étoit, suivant M. le Gentil, de 2' 6" en excès, mais le 23 Décembre 1749, elle étoit de 1' 11" en défaut; l'erreur des tables a donc varié de 3' 17" dans l'espace de 6 périodes, ce qui fait 33" de changement pour chacune. De même l'éclipse du 20 Janvier 1647, comparée avec celle du 27 Mars 1755, donne 45" pour la différence de l'erreur des tables de Flamsteed à la fin de chaque période. Ainsi quoique cette manière de connoître & de prédire l'erreur des tables, fût bonne dans le temps où l'on craignoit de la part des tables plusieurs minutes d'erreur, elle est peu nécessaire actuellement, que nous avons des tables dont l'erreur ne passe pas une minute.

Retour des
éclipses.

Conclusion.

DU DIAMÈTRE DE LA LUNE.

1503. Les anciens qui comme Ptolomée ne pouvoient mesurer le diamètre apparent de la lune qu'avec des pinules, ne pouvoient guère s'en assurer avec précision; Hipparque & Ptolomée se contenterent de dire que le diamètre de la lune dans son apogée étoit égal à celui du soleil, c'est-à-dire, de 30'; mais que dans le périégée il paroïssoit plus grand que celui du soleil.

Albategnius dit que le diamètre moyen de la lune est de 32' 25'', & qu'il varie depuis 29' 30'' jusqu'à 35' 20'', Copernic le trouve de 27' 34'' à 35' 38''. (*L. 4. ch. 22*). Enforte que le diamètre moyen est de 31' 36'', nous le trouvons aujourd'hui de 31' 29''.

Tycho-Brahé voyant que la lune dans les éclipses perdoit cette lumière étrangère qui dans les pleines lunes la fait paroître plus large, établissoit le diamètre moyen de la lune de 26' 50'' dans les conjonctions, & de 34' 0'' dans les oppositions (*Progymn. pag. 134*).

Képler, avant la découverte des lunettes, le trouvoit de 32'; mais il étoit dans l'incertitude de 20'' environ (*Astron. pars opt. pag. 349*); quoiqu'il eût discuté cet article fort en détail avec des observations & des méthodes propres à trouver les diamètres du soleil & de la lune, dans cet ouvrage qui a pour titre: *Ad vitellionem paralipomena, quibus astronomiæ pars optica traditur*, 1604, in-4°. Mais dans la suite & après l'invention des lunettes d'approche, Képler trouva les diamètres de la lune de 30' 0'' à 32' 44'', c'est-à-dire, le diamètre moyen 31' 22'' (*Epit. astron. Coper. pag. 861*). Horoccius dans sa théorie de la lune le supposoit de 31' 0''.

1504. Nous voyons dans l'histoire de l'académie des sciences par M. Duhamel que dans l'éclipse de soleil du 2 Juillet 1666, dont les différentes phases furent observées avec soin, dans la maison de M. Colbert, par MM. Huygens, Roberval, Auzout, Frénicle &

Buor, on reconnoît que le diamètre de la lune étoit plus petit que celui du soleil, & que les tables astronomiques le faisoient plus grand, en même-temps qu'elles faisoient le diamètre du soleil plus petit qu'il n'étoit réellement; ainsi le diamètre de la lune étoit trop grand dans les tables de Képler.

Le 8 Juillet 1666 à $8^h \frac{1}{2}$, la lune étant périgée & en quadrature, son diamètre fut mesuré & trouvé de $33'$, & le 22 à 3^h du matin la lune étant apogée, elle avoit $29' 50''$. Ces mesures qui n'avoient plus que quelques secondes d'incertitude étoient beaucoup plus exactes que toutes celles qu'on avoit prises jusques-là, elles furent faites avec des fils placés au foyer d'une lunette suivant la description rapportée en 1667 par M. Galloys dans les éphémérides de la même année, c'est-à-dire, après l'invention du micromètre (2348).

Depuis ce temps-là M. de la Hire, dans ses tables supposa les diamètres de la lune $29' 30''$ & $33' 30''$; M. Cassini dans ses tables, $29' 30''$ & $33' 38''$; M. le Monnier dans ses institutions astronomiques (pag. 184) donne pour les diamètres de la lune $29' 28''$ & $33' 42''$.

1505. Suivant les observations exactes que j'en ai faites avec un héliomètre de 18 pieds, le diamètre moyen de la lune est de $31' 29''$, les extrêmes sont à peu-près $29' 25''$, lorsque la lune est apogée & en conjonction, & $33' 34''$, lorsqu'elle est périgée & en opposition; mais les différentes inégalités de la lune mettent dans ces diamètres beaucoup de diversités. Il faut bien observer que ce que j'appelle ici *diamètre moyen de la lune*, est un milieu arithmétique entre le plus grand & le plus petit diamètre. L'on ne trouveroit que $31' 29''$, si l'on vouloit prendre la quantité constante à laquelle s'ajoutent toutes les équations, ou les inégalités du diamètre, pour avoir le diamètre actuel dans un temps donné (1712).

1506. Les variations observées dans le diamètre de la lune, indiquent celles de sa distance; aussi la découverte des lunettes d'approche a donné le moyen

Diamètre par les dernières observations.

de reconnoître exactement les augmentations & les diminutions de la distance de la lune. Non-seulement le diamètre de la lune diminue quand la lune avance vers l'apogée, mais Horroccius trouva vers l'an 1638 que la lune étant apogée, n'étoit pas toujours à même distance de la terre, & qu'elle en étoit plus éloignée lorsqu'elle se trouvoit alors en conjonction ou en opposition; cela lui fit établir cette augmentation d'excentricité dans l'orbite de la lune, qui a lieu, selon lui, toutes les fois que la ligne des apsides concourt avec la ligne des syzygies (1435).

M. Picard fit avec soin ces mêmes observations du diamètre de la lune, pour en conclure ce changement des distances de la lune à la terre; il reconnut que la lune périgée & en quadrature, paroissoit sous un angle plus petit que la lune périgée & en syzygie. Cette augmentation du diamètre de la lune dans les syzygies, vient de deux inégalités dans les distances de la lune; dont nous parlerons à l'occasion de la parallaxe de la lune (1710).

Change-
ment du dia-
mètre.

Elles ont été observées depuis que les micromètres nous ont donné le moyen de mesurer exactement les diamètres de la lune dans ses diverses positions; on a observé que quand l'argument de l'évection étoit de 0 signes, le diamètre étoit diminué de 18'' ou 20'', & que l'argument de l'évection étant de 6 signes, il étoit au contraire augmenté de 18'', quoique la ☾ fût à la même distance de son apogée. On a vu de même par rapport à l'argument de la variation, que lorsqu'il étoit nul, ou égal à 6 signes, le diamètre de la lune augmentoit de 14 ou 15'', & diminoit d'autant vers 3 ou 9 signes, c'est-à-dire, dans les octans à même distance de l'apogée.

1507. Ces observations faites dans le dernier siècle en Angleterre & en France, étant conformes à la théorie de Newton, c'est-à-dire, à l'effet que doit produire l'attraction du soleil; Newton s'en servit pour

corriger la parallaxe de la lune, par les deux argumens de l'évection & de la variation. Suivant la théorie de M. Mayer, le diamètre de la lune pour un temps quelconque est exprimé par la formule suivante : $31' 9'' - 1' 42'' 3 \text{ cof. anomal.} + 5'' 4 \text{ cof. } 2 \text{ anomal.} + 13'' 7 \text{ cof. } 2 \text{ dist. } \odot - 20'' 2 \text{ cof. } (2 \text{ dist. } \odot - \text{anomal. } \odot)$; les autres équations sont insensibles; on peut les trouver en prenant les équations de la parallaxe (1714), car toutes ces équations étant multipliées par $\frac{6}{11}$, donneront les équations correspondantes du diamètre. D'ailleurs lorsqu'on connoît la parallaxe horizontale de la lune pour Paris, on en conclut le diamètre par le rapport constant de $54' 56''$ à $30'$ (1711).

1508. M. de la Hire crut reconnoître dans le dernier siècle que le diamètre de la lune paroissant sur le soleil, dans les éclipses, paroissoit plus petit de $30''$ que quand sa circonférence étoit lumineuse (*Tabula astron. pag. 41*); mais M. le Monnier assure que c'étoit par des fautes de calcul (*Mém. acad. 1748, pag. 209*). M. le Monnier ayant mesuré le diamètre de la lune sur le soleil le 25 Juillet 1748 à $10^h 18'$ le trouva de $29' 47'' \frac{1}{2}$, c'est-à-dire, plus grand qu'il ne s'y étoit attendu; & il reconnut que la diminution proposée par M. de la Hire n'avoit pas lieu. La même chose a été reconnue dans l'éclipse du 1 Avril 1764 : la plus grande phase arriva à $10^h 30' 43''$ à Londres, la distance du bord de la lune à celui du soleil étoit de $2' 26''$, suivant l'observation de M. Short, le diamètre de la lune mesuré horizontalement sur le soleil étoit de $29' 49'' \frac{1}{2}$, & celui du soleil de $31' 59''$; la différence $2' 9'' \frac{1}{2}$ est conforme à celle que j'avois annoncée dans mes calculs de la connoissance des mouvemens célestes; car le diamètre du soleil, selon moi, devoit être de $32' 1''$, le diamètre horizontal de la lune $29' 34''$, & le diamètre augmenté à raison de sa hauteur sur l'horizon $29' 52''$; la différence est $2' 9''$. Ainsi cette diminution que M. de la Hire croyoit avoir lieu dans les éclipses de soleil; n'existe point; l'inflexion de $4'' \frac{1}{2}$ qui a lieu dans

Diminution
dans les éclipses.

dans les rayons qui passent sur le bord de la lune ne change rien à son diamètre (1992).

Augmen-
tation par la
hauteur.

Fig. 87.

1509. Lorsque la lune est plus près du zénit ; elle est aussi plus près de nous ; ainsi son diamètre apparent paroît plus grand dans la même proportion. Soit T le centre de la terre, (fig. 87), O un observateur situé à la surface de la terre, Z la lune située au zénit de l'observateur ; si la distance ZO de la lune à l'observateur est plus petite d'un soixantième, que la distance ZT de la lune au centre de la terre, le diamètre apparent vu du point O , sera plus grand d'un soixantième que le diamètre vu du centre T de la terre.

De même si la lune est située en L , de manière que sa hauteur au-dessus de l'horizon soit égale à l'angle LOH , sa distance au zénit étant égale à l'angle LOZ , on voit que la distance LO fera plus petite que la distance LT au centre de la terre ; le seul cas où cette augmentation sera nulle, est celui où la lune sera dans l'horizon même en H , car alors elle sera presque également éloignée du point O & du point T ; voilà pour quoi l'on appelle DIAMÈTRE HORIZONTAL de la lune, celui qui est vu du centre de la terre, parce qu'il est aussi égal au diamètre que nous observons quand la lune est à l'horizon.

Diamètre
horizontal.

Lorsqu'on connoît le diamètre horizontal de la lune ; il est aisé de trouver le *diamètre augmenté* à raison de la hauteur sur l'horizon, puisqu'ils sont entre eux comme le côté LO est au côté LT . Dans le triangle LOT , l'angle OLT est ce qu'on appelle la *parallaxe de hauteur* (1627) ; l'angle LOZ , ou son supplément LOT , qui a le même sinus, est la distance apparente au zénit, l'angle LTO est la distance vraie de la lune au zénit, vue du centre de la terre, ou le complément de la hauteur vraie. Dans tout triangle rectiligne les sinus des côtés sont comme les sinus des angles opposés ; ainsi le côté LO est au côté TL , comme le sinus de l'angle OTL est au sinus de l'angle LOT ; donc le diamètre horizontal est au diamètre apparent, comme le

sinus de la distance vraie de la lune au zénit ; vue du centre de la terre , est au sinus de la distance apparente de la lune au zénit , vue du point *O*.

1510. Ainsi pour trouver le diamètre de la lune augmenté à raison de sa hauteur au-dessus de l'horizon , on fera cette proportion : *Le cosinus de la hauteur vraie est au cosinus de la hauteur apparente , comme le diamètre horizontal est au diamètre apparent.* C'est la différence entre celui-ci & le diamètre horizontal qu'on appelle *Augmentation du diamètre* , & dont j'ai donné une table fort ample dans mon *Exposition du calcul astronomique* , pag. 259. On en trouvera une parmi les tables de cet ouvrage.

Règle de
cette aug-
mentation.

1511. M. de la Caille dit dans ses leçons d'astronomie ; que cette augmentation du diamètre de la lune est la différence de parallaxe entre le bord supérieur & le bord inférieur de la lune ; mais cette notion est défectueuse , car elle ne sauroit s'appliquer au diamètre de la lune mesuré horizontalement , qui cependant est augmenté aussi bien que le diamètre vertical , suivant les différentes hauteurs de la lune.

1512. Suivant la démonstration précédente le diamètre de la lune doit paroître plus petit quand la lune se lève , que quand elle est parvenue à une certaine hauteur ; la lune en s'élevant doit paroître plus grande à nos yeux , & l'observation faite avec un instrument quelconque prouve sans cesse aux astronomes que la lune paroît sous un angle plus petit quand elle est à l'horizon. Cependant un fait généralement reconnu c'est que la lune , à la vue simple , paroît d'une grandeur extraordinaire lorsqu'on la voit se lever à la fin du jour derrière des bâtimens ou des montagnes ; il n'y a presque personne qui ne s'imagine la voir alors deux ou trois fois aussi large que quand elle arrive ensuite à une grande hauteur. C'est-là certainement une illusion optique , & elle a lieu de même pour les autres astres ; mais il suffit de regarder la lune dans une lunette quelconque , dans un tube de papier , & même si l'on veut , au travers d'une carte où l'on a fait un trou d'épingle ,

Grandeur
de la Lune à
l'horizon.

pour se convaincre que l'augmentation n'est point réelle & que le diamètre de la lune est vu au contraire alors sous un plus petit angle, que lorsque la lune est à une plus grande hauteur.

Regis dans son système de philosophie (Tom. IV, l. 8), soutenoit que c'étoit un effet de la réfraction; mais au lieu d'étendre les objets, la réfraction les accourcit, & fait paroître les distances plus petites (2246).

Jugement
involontaire.

Il est difficile de se former une idée claire de la cause de cette illusion, si ce n'est en admettant avec tous les opticiens ce jugement tacite, commun & involontaire, par lequel nous estimons fort grands les objets que nous jugeons être fort éloignés, en même temps que nous jugeons les objets fort éloignés lorsque nous voyons à la fois beaucoup de corps interposés entre nous & ces objets. Roger Bacon en citant l'optique de Ptolomée, (ouvrage qui s'est perdu pendant les siècles d'ignorance), nous apprend que cet auteur en avoit jugé ainsi; Descartes & le P. Mallebranche (*Recherche de la vér. liv. I.*) l'expliquent de la même manière. Voici donc, ce me semble, le nœud de la difficulté.

1513. La lune se levant à l'horizon derrière une montagne ou à l'extrémité d'une plaine, paroît nécessairement à la suite de plusieurs objets sensibles & variés; au lieu que dans une certaine hauteur on élève la vue pour appercevoir la lune, & l'on ne voit rien entr'elle & nous qui puisse nous faire juger de sa distance. Dans le premier cas, notre imagination accoutumée à juger de l'éloignement d'un corps par la multitude des objets qui paroissent entre lui & nous, estime la lune fort loin de nous, & cela par habitude, par instinct & par une suite de sa manière d'estimer & de juger des distances. Or un même objet que nous jugerons fort éloigné, sera jugé plus grand que si on le croyoit fort près: ainsi la lune dans l'horizon, estimée à une plus grande distance est jugée plus grande par cette première perception; la réflexion ne suffit pas pour

pour empêcher la liaison de ces deux jugemens, parce que l'habitude continuelle y a mis une dépendance si forte qu'on ne peut plus les séparer : on trouvera d'autres preuves de la vérité de ce jugement habituel & involontaire sur la grandeur des objets, dans le premier volume du grand traité d'optique de Smith, *art. 160 & suiv. Tom. I, pag. 111*, de l'édition du P. Pezenas, Avignon 1767.

1514. Le Pere Gouye substituoit, ou ajoutoit une autre considération à celle-ci, & je crois qu'elles peuvent aller ensemble & se fortifier mutuellement. Une colonne qui paroît au-devant d'une muraille, ou qui est environnée de plusieurs objets différens, & même une colonne cannelée, semble en général être plus grande que si elle étoit simple & isolée ; les vapeurs de l'horizon & le voisinage de la terre, des montagnes, des arbres, font cet effet sur la lune : & en la faisant paroître plus accompagnée, elles la présentent à notre perception comme si elle étoit d'un plus grand volume. (*Histoire de l'acad. 1700, pag. 8*).

Remarque
du P. Gouye.

1515. Le diamètre de la lune en ascension droite est la quantité dont diffèrent entr'elles les ascensions droites du bord & du centre de la lune, soit P le pole du monde (*fig. 88*), EQ l'équateur, PLA le cercle de déclinaison qui passe par le centre de la lune & qui marque en A l'ascension droite de la lune sur l'équateur ; PMB le cercle de déclinaison qui passe par le bord de la lune M , & qui touchant le limbe de la lune va déterminer en B l'ascension droite du bord de la lune ; AB est donc le demi-diamètre de la lune en ascension droite, & suivant ce qu'on a vu pour le soleil (*894*), il faut diviser le demi-diamètre horizontal par le cosinus de la déclinaison vraie de la lune, pour avoir le demi-diamètre en ascension droite.

Diamètre
en ascension
droite.

Fig. 88.

1516. Lorsqu'on veut savoir le temps que le diamètre de la lune emploie à traverser le méridien, on convertit en temps lunaire le diamètre de la lune en ascension droite. Je suppose que le retardement diurne de la

Temps que
la Lune met
à passer le mé-
ridien

lune par rapport au soleil soit d'une heure, c'est-à-dire, qu'elle emploie 25 heures de temps moyen à parcourir 360 degrés & à revenir au méridien, le jour pour lequel on calcule; je suppose aussi que son diamètre en ascension droite soit de 30 minutes, il ne s'agit que de savoir combien la lune emploiera de temps à parcourir 30' par son mouvement diurne à raison de 25 heures pour 360 degrés; on fera donc cette proportion: 360° sont à la révolution diurne, 25 heures, comme le diamètre en ascension droite 30', est au temps cherché qu'on trouvera de 2' 5'', c'est ce que la lune emploie à traverser le méridien. Les astronomes en font un usage fréquent dans les observations de la lune, lorsqu'après avoir observé le passage du premier bord de la lune au méridien ils veulent savoir à quelle heure le centre de la lune y a passé: (art. 3944); car alors il faut ajouter au temps où le premier bord aura passé celui que le demi-diamètre aura dû employer à traverser le méridien, pour avoir le passage du centre de la lune par le méridien. On trouve aussi le temps qui répond au demi-diamètre de la lune, par le moyen de deux tables; qui seront parmi celles de la lune, à la fin de cet ouvrage. L'une contient la réduction du demi-diamètre horizontal en temps lunaire, suivant les divers retardemens de la lune d'un jour à l'autre, & les diverses grandeurs du demi-diamètre de la lune; l'autre est une table de ce qu'il faut y ajouter à raison de la déclinaison de la lune, en conséquence de la règle que nous avons donnée (1515), de diviser le diamètre par le cosinus de la déclinaison, pour avoir l'espace qui lui répond sur l'équateur, & en conclure le temps qu'il emploie à passer; on y voit, par exemple, que si le diamètre de la lune est de 33' 36'', & le retardement diurne de 62' ou d'une heure 2', il faudra 70'' ou 1' 10'' au demi-diamètre de la lune pour passer le méridien; il suffit pour construire cette table de faire la règle de trois que nous venons d'indiquer. La seconde table contient la quantité qu'il faudroit ajouter à ce même temps, si la

lune au lieu d'être dans l'équateur se trouvoit à une certaine déclinaison : ainsi la déclinaison de la lune étant supposée de 29° , & le temps calculé ci-dessus de $1' 10''$, on trouve dans la table $10''$ qu'il faut encore y ajouter, & l'on aura $1' 20''$ pour le temps qu'a employé le demi-diamètre de la lune à passer le méridien. La partie que renferme cette seconde table est la différence entre le diamètre LM de la lune (*fig. 88*), & la quantité AB qui lui répond dans l'équateur, cette différence étant convertie en temps.

Fig. 88.

1517. Quelques astronomes ont cru que pour trouver ainsi le temps du diamètre, il falloit auparavant augmenter le diamètre de la lune, à raison de sa hauteur au-dessus de l'horizon (1510), au lieu qu'il faut prendre le diamètre horizontal, ou vu du centre de la terre : en effet, lorsque le bord de la lune paroît toucher le méridien, l'observateur qui seroit au centre de la terre ou celui qui seroit à la surface, étant tous deux dans le même plan & dans le même méridien, que le bord de la lune, voient tous deux à la fois & sans aucune différence, le bord de la lune dans le méridien ; je puis dire la même chose du bord suivant ; ainsi le temps que la lune emploie à traverser le méridien, seroit absolument le même, vu du centre ou vu d'un point quelconque de la surface de la terre, situé sous le même méridien ; & il ne dépend en aucune façon de la hauteur de la lune au-dessus de l'horizon.

Un savant, qui même dans un livre imprimé en 1769 avoit fait cette méprise, me faisoit, par lettres, cette objection ; quand j'observe le bord de la lune dans le méridien, « je veux savoir combien le centre de la lune » en est éloigné, mais cette distance dépend du demi-diamètre de la lune, tel qu'il paroît alors, il faut » donc employer dans le calcul le demi-diamètre apparent, ou augmenté à raison de sa hauteur sur » l'horizon ».

Je réponds en prouvant que la distance du centre de la lune au méridien en temps, ne dépend que de la

grandeur apparente du demi-diamètre, vu du centre autour duquel se fait le mouvement : un arc de $15'$, vu du centre de la terre, traverse le méridien en une minute de temps ; si je m'approche de l'objet assez pour qu'il me paroisse de $30'$ au lieu de $15'$, il n'en traversera pas moins le méridien en une minute, parce qu'en même temps que l'objet me paroîtra doublé par sa proximité, la vitesse de son mouvement sera aussi doublée ; & les $30'$ traverseront le méridien dans le même temps que les $15'$ employoient à le traverser auparavant.

Applatiffement de la Lune,

1518. Cette méprise occasionna celle de M. Godin qui crut trouver la lune sensiblement aplatie, c'est-à-dire, le diamètre vertical du nord au sud, plus petit que le diamètre mesuré horizontalement d'orient en occident. Dans le commerce astronomique que M. le Docteur Adelbulner faisoit imprimer à Nuremberg, (*tom. II, pag. 81*) ; on trouve l'extrait d'une lettre de M. Celsius, astronome Suédois, où il étoit dit que MM. Cassini & Godin avoient trouvé par leurs observations que le diamètre vertical de la ☾ étoit plus grand de $30''$ que le diamètre horizontal. M. Celsius entreprenoit d'en rendre raison par la parallaxe, mais il se trompoit ; cela provenoit uniquement de ce que M. Godin faisoit au diamètre horizontal de la lune, trouvé par la mesure du temps une correction qu'il ne devoit point faire, & cela rendoit ce diamètre horizontal plus petit que le diamètre vertical.

Suivant les loix de la force centrifuge, le globe de la lune doit être aplati, en effet, du nord au sud, à cause de la rotation de la lune sur son axe ; il est probable aussi que la lune est alongée vers le centre de terre (3183). Nous parlerons du diamètre absolu de la lune après que nous aurons déterminé sa parallaxe (1717).



MOUVEMENT HORAIRE
DE LA LUNE.

1519. LE mouvement horaire est le nombre de minutes & de secondes que la lune paroît décrire en une heure dans son orbite, vue du centre de la terre ; on en fait usage dans le calcul des éclipses, & il est important de le connoître avec précision.

La quantité moyenne du mouvement horaire est de $32' 56''$, 4 ; on le trouve en divisant en 24 parties son mouvement diurne, ou en faisant cette proportion : la durée de la révolution périodique est à 360 degrés comme une heure est au mouvement horaire.

L'excentricité seule de l'orbite lunaire fait que le mouvement horaire de la lune varie de $3' 45''$; l'évection produit une inégalité de $42''$, la variation en produit une de $38''$; toutes les autres équations de la lune (1472) influent aussi pour quelque chose dans l'inégalité du mouvement horaire ; ensorte qu'on ne peut trouver exactement le mouvement horaire qu'en y faisant entrer toutes les équations de la lune.

1520. Les astronomes pour avoir exactement le mouvement horaire, calculoient le lieu de la lune avec toutes ses équations pour deux instans éloignés d'une heure l'un de l'autre, la différence des deux longitudes de la lune sur son orbite étoit le mouvement horaire. Mais cette méthode ne donne le mouvement horaire qu'à 3 ou 4 secondes près, parce que les tables d'équation n'étant calculées qu'en secondes, il peut se glisser une erreur d'une demi-seconde à chaque équation, sans compter celle des parties proportionnelles où l'on néglige aussi les demi-secondes. C'est pourquoi M. Clairaut, M. d'Alembert & M. Mayer ont donné des formules pour le mouvement horaire de la lune, en y employant les dixièmes de secondes, ce qui donne une précision aussi grande que celle dont la théorie de chaque équation

peut-être susceptible ; la formule de M. Clairaut est démontrée dans les mémoires de 1752, pag. 600, & se trouve avec les tables dans la connoissance des mouvemens célestes pour 1765, pag. 109.

En nommant y l'anomalie moyenne de la lune, & t sa distance moyenne au soleil, les premiers termes sont $32' 56'' 4 - 3' 45'' 4 \text{ cof. } y + 14'' 8 \text{ cof. } 2y + 42'' 5 \text{ cof. } 2t - 37'' 7 \text{ cof. } (2t - y)$. On trouvera parmi nos tables de la lune celles que M. Mayer a calculées pour avoir aussi le mouvement horaire.

1521. Quand on a des longitudes calculées de 12 en 12 heures dans des éphémérides comme la connoissance des temps, ou le nautical almanach, on peut en conclure le mouvement horaire avec une très-grande précision : en effet lorsque l'on prend la douzième partie du mouvement de la lune entre midi & le minuit suivant, l'on a le mouvement horaire qui avoit lieu à six heures, c'est-à-dire, vers le milieu de l'intervalle qu'il y a eu entre les deux longitudes employées ; j'ai reconnu par l'examen des interpolations (3928), que malgré toutes les inégalités de la lune, les secondes différences sont sensiblement uniformes dans l'espace de 24 heures, ainsi le mouvement horaire croît ou décroît d'une manière qui est sensiblement uniforme depuis midi jusqu'à minuit ; il est plus petit si l'on veut à midi, il est plus grand à minuit que ne seroit le mouvement supposé uniforme dans les 12 heures ; mais dans le milieu de l'intervalle, c'est-à-dire, à six heures, il a dû se trouver exactement de cette quantité moyenne entre le plus petit mouvement qui avoit lieu à midi, & le plus grand qui a lieu à minuit ; donc en prenant le milieu entre le premier & le dernier, ou ce qui revient au même, prenant la douzième partie du mouvement total, on aura le mouvement à six heures.

Par la même raison si l'on prend la douzième partie du mouvement entre le minuit & le midi du lendemain, on aura le mouvement horaire pour 18 heures, comme dans l'opération précédente on l'a eu pour 6 heures :

ayant ainsi le mouvement horaire à 6 heures & à 18, il ne fera pas difficile de le trouver aussi à toute autre heure : voici un exemple dans lequel je suppose qu'on ait les longitudes de la lune de 12 en 12 heures, avec les différences écrites à côté qui sont les mouvemens fémi-diurnes ou pour 12 heures. On multiplie ces mouvemens par 5, on prend les minutes pour des secondes, & les degrés pour des minutes, & l'on a ainsi les mouvemens horaires qui répondent aux temps intermédiaires.

1757	Longit. de la ☾	Mouv. pour douze heures.	Quintuple ou mouv. hor.	
1 Janv. Minuit	1 ^s 27° 57' 0"	6° 0' 10"	30' 1"	le 1 à 6 ^h
2 Midi	2 9 55 51	5 58 41	29 53	le 1 à 18
Minuit	2 15 53 21	5 57 30	29 47	le 2 à 6
3 Midi	2 21 49 56	5 56 35	29 43	le 2 à 18

Si je veux maintenant connoître le mouvement horaire pour le 1 Janvier à 9^h du soir ; j'observe que le mouvement horaire a diminué de 8" entre le 1 Janvier à 6^h & le 1 à 18^h, & que l'heure proposée est trois heures plus tard que 6^h. Je ferai donc cette proportion : 12^h : 8" :: 3^h : 2", & ayant retranché 2" de 30' 1", j'aurai 29' 59" pour le mouvement horaire à 9^h du soir.

1522. La même méthode sert pour trouver le mouvement horaire en ascension droite, & en temps ; car connoissant le retardement diurne & inégal de la lune pour 24 heures, on peut trouver le retardement horaire pour une heure quelconque. Je suppose que le 1 du mois la ☾ ait passé au méridien à 4^h 0', le 2 à 4^h 50', le 3 à 5^h 45', enforte que du 1 au 2 le retardement soit de 50', & du 2 au 3 de 55', & que l'on veuille chercher le retardement horaire pour le 2 à

l'heure du passage au méridien, c'est-à-dire, à 4 heures 50 minutes.

On prendra le milieu entre les deux retardemens ; & ce milieu fera $52' 30''$; l'on dira $24^h 52' \frac{1}{2} : 52' 30'' :: 1^h 0' : 2' 6'' \frac{1}{2}$ de temps retardement de la lune en une heure de temps qui est exact pour le 2 à $4^h 50'$. On pourroit le trouver par ce moyen pour toute autre heure.

On peut avoir aussi ce retardement pour un autre intervalle quelconque, par exemple, pour le temps que le diamètre de la lune employe à passer par le méridien (1516), & ajoutant le retardement trouvé avec la durée du passage, calculée d'abord indépendamment de cette circonstance, on auroit la véritable durée du temps que le diamètre de la lune employe à passer par le méridien ; mais pour plus d'exactitude il faudroit connoître auparavant à peu-près la quantité de ce retardement, ou du moins le supposer d'avance de $4''$ de temps, pour pouvoir trouver avec la dernière précision combien la lune retarde pendant la durée de ce passage.

Ce que je viens de dire au sujet du mouvement horaire de la lune, soit en longitude, soit en ascension droite est souvent utile, sur-tout pour trouver la longitude en mer par le moyen de la lune, comme on le peut voir dans l'état du ciel de M. Pingré, pour 1757, pag. 189.

DES OBSERVATIONS DE LA LUNE.

1523. POUR établir & confirmer les théories précédentes, on a eu besoin d'un grand nombre d'observations, & ce seroit ici le lieu d'en rapporter une suite considérable pour l'utilité de ceux qui voudroient examiner encore les tables & les perfectionner ; mais cet ouvrage étant déjà trop volumineux, je me contenterai d'indiquer les sources où l'on pourra les trouver. Les observations anciennes sont d'abord nécessaires pour trouver les moyens mouvemens de la lune de son apo-
gée

gée & de son nœud : telles font d'abord trois éclipses de lune observées à Babylone par les Caldéens, (1419) qui font les plus anciennes des dix éclipses Caldéennes que Ptolomée nous a conservées dans son almageste : celles de Ptolomée lui-même, & celles de Tycho-Brahé ; qui ont été calculées par Longomontanus, mais qu'il seroit peut-être utile de vérifier par les nouvelles tables. On trouveroit dans l'histoire céleste de Tycho, un bien plus grand nombre de bonnes observations, précieuses par leur ancienneté ; mais elles auroient besoin d'être calculées & réduites en y employant les tables que nous avons aujourd'hui ; & faute de ce travail, qui exigeroit un grand nombre de calculateurs exercés, nous ne pouvons, quant à présent, en tirer que peu de fruit ; il en est de même de celles d'Hévélius & même de Flamsteed qui font en très-grand nombre. (V. *Machina cœlestis & Historia cœlestis*).

1524. Nous avons pour le dernier siècle une suite de 42 observations de M. de la Hire faites dans les années 1683, 1684 & 1685, à l'observatoire royal avec un quart de cercle mural solidement établi dans le plan du méridien, dont il a donné la description dans ses tables, & avec un autre quart de cercle mobile de trois pieds de rayon. Ces observations ont été calculées par M. Bailly, de l'académie des sciences, (*Mém.* 1763 ; pag. 28), d'après les recherches que M. de la Caille avoit faites sur les observations de M. de la Hire, pour s'assurer de l'état des instrumens pendant le cours de ces observations, en conclure les élémens de la théorie du soleil pour ce temps-là, & les positions des principales étoiles fixes. Ces observations sont rapportées dans l'*histoire céleste*, publiée par M. le Monnier en 1741. Mais elles n'avoient jamais été discutées, appréciées, corrigées, réduites & employées, comme elles l'ont été par ce travail ; l'on peut donc regarder ces 42 observations comme les plus anciennes qui aient été faites avec la précision qu'on exige aujourd'hui, & les plus

266 ASTRONOMIE, LIV. VII.

exactes qu'on puisse avoir du dernier siècle; elles seront très-propres à vérifier la théorie & les tables de la lune pour ce temps-là, voici le résultat de ce travail.

Epoque de la longitude moyenne du soleil pour 1684,	9 ^s 10 ^o 58' 58"
Longitude de l'apogée du soleil,	3 7 28 0
Excentricité du soleil,	0, 1685
Ascension droite moyenne de Sirius pour 1684,	97 48 29, 7
Déclinaison moyenne de Sirius	16 19 20, 0

M. de la Caille a reconnu par ces calculs l'accélération de la lune (1485); il trouvoit aussi qu'il faudroit augmenter de 5' la longitude de l'apogée employée dans les tables de Mayer, cependant cette dernière correction n'est pas aussi évidente à cause des inégalités de la lune, dans lesquelles elle se trouve compliquée.

Erreur du
Mural de M.
de la Hire.

1525. M. de la Caille qui faisoit ces recherches en 1759 sur les observations de M. de la Hire, avec toute l'exactitude qu'il mettoit dans ses ouvrages, découvrit par l'examen des hauteurs solstiales du soleil que l'erreur du quart de cercle de M. de la Hire, étoit de 6" au solstice d'hiver, & de 34" au solstice d'été; il trouva aussi que l'erreur du mural de M. de la Hire en 1685 étoit de 15", soustractive des temps du passage à 19 & à 29° de hauteur, de 6" à 46 degrés; mais qu'elle étoit de 15" 7 additive à 65° de hauteur, nulle à 52° de hauteur, & il en dressa une table par le moyen de 34 comparaisons des temps vrais déterminés par des hauteurs correspondantes du soleil, avec les temps des passages du soleil au mural observés par M. de la Hire les mêmes jours.

Observations
de Halley.

1526. Dans le même temps, c'est-à-dire, en 1682, 83, 84, M. Halley observoit la lune à Islington près de Londres, dans le dessein de faire servir ces obser-

vations à corriger les tables de la lune par la période de 18 ans, (1501) ces observations sont rapportées à la fin de l'astronomie Caroline, édition de 1710. Dans la suite M. Halley fit dans la même vue la plus nombreuse collection qu'on ait vu d'observations de la lune; elle commence à 1722, & finit au commencement de 1740. Elle renferme plus de 2000 observations, calculées & comparées avec ses tables, & toutes ces observations ont été imprimées à la suite de ces mêmes tables in-4° à Londres, & in-8° à Paris; mais comme ces observations supposent les lieux des étoiles fixes tirés du catalogue de Flamsteed & réduits à ce siècle-ci; elles sont exposées à des erreurs peut-être d'une minute, & il seroit important de recourir aux manuscrits originaux de M. Halley pour rectifier ses conclusions & vérifier ses calculs; avec cette précaution on pourroit tirer un grand avantage du travail immense de ce célèbre astronome.

Parmi les observations modernes les plus exactes; nous avons 31 observations de la lune faites en 1751 & 1752 à l'occasion des recherches de la parallaxe de la lune & de sa distance à la terre (1650), le soin qu'on apporta à les faire, & celui que M. de la Caille a mis à les calculer assure l'exactitude de ces observations; & je crois qu'on n'en sauroit guères trouver de meilleures. Il y a aussi 104 observations de M. de la Caille faites au college Mazarin en 1760 & 1761, les ascensions droites ont été observées avec un instrument des passages dont la lunette a 50 pouces de longueur, & les déclinaisons avec un sextant de six pieds de rayon, & un quart de cercle de trois pieds de rayon qui n'a servi que lorsque la lune étoit fort méridionale, parce qu'alors la lunette du sextant ne pouvoit servir commodément dans l'observatoire du college Mazarin. Cette lunette méridienne étoit à l'abri des variations de la chaleur & du froid, & placée dans le méridien avec une si grande exactitude qu'il n'y avoit en aucun point

2" d'erreur. C'est l'instrument dont je me fers encore actuellement : il est scellé dans une pierre assise sur le massif des murs de l'église, en sorte qu'il ne manque rien à l'observateur pour opérer avec la plus grande exactitude : j'ai fait avec les mêmes instrumens un grand nombre d'observations que je donnerai dans une autre occasion.

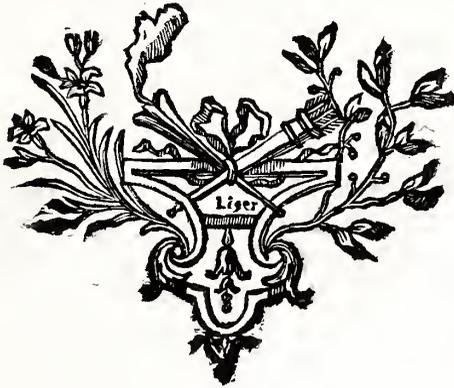
Je dois faire mention aussi d'une des plus belles collections qui existe, quoiqu'elle ne soit pas encore publique, c'est celle d'environ 1200 observations de M. Bradley calculées & réduites par lui & par M. Gaël Morris, excellent calculateur, qui m'en a fait voir le manuscrit à Londres au mois de Mars 1763. Elles ont servi à vérifier les nouvelles tables de M. Mayer (1460); & l'on se propose de les faire imprimer à Londres, aux dépens de l'Etat. M. Bradley avoit déjà envoyé il y a plus de dix ans à M. Euler 130 observations faites en 1743, 1744 & 1745; celui-ci les communiqua à M. Mayer, qui en a fait usage pour ses tables, & les a données dans les mémoires de Gottingen, (T. III, p. 393). Il y a encore une suite intéressante dans la nouvelle édition des tables de la lune de M. Clairaut. Toutes les observations de M. Bradley passerent entre les mains de M. Bliss son successeur à Greenwich, je fus témoin le 9 Juin 1763 d'une délibération de la société royale de Londres qui en ordonna la publication, mais cette décision n'a encore eu depuis sept ans aucune exécution.

1527. Les observations de la lune que M. le Monnier fait depuis 1733 avec la plus grande assiduité, & dont l'impression est déjà commencée au Louvre, in-folio, formeront une suite très-importante & également propre à donner à la théorie de la lune le dernier degré d'exactitude; il y en a déjà trois cahiers in-folio de publiés, le quatrième est sous presse (Mai 1770).

1528. M. Darquier, correspondant de l'académie à Toulouse, a fait aussi un grand nombre d'observations depuis plusieurs années, elles seront imprimées successi-

vement dans les volumes des mémoires présentés à l'académie par les Savans étrangers.

1529. On peut consulter encore la collection d'observations de la lune, faites depuis 1737 jusqu'en 1755, à l'observatoire royal, & que M. Cassini de Thury a donnée en 1756, dans les additions aux tables astronomiques de M. Cassini son pere. Enfin, on trouveroit dans les manuscrits du dépôt de la marine, une quantité prodigieuse d'observations de la lune, faites successivement par M. de l'Isle à Pétersbourg, & ensuite à Paris par lui, par moi, & par M. Messier qui m'a remplacé dans l'observatoire de la marine, où il les continue journellement. Ces observations n'ont point encore été calculées.



LIVRE HUITIEME. DU CALENDRIER.

1530. LA CHRONOLOGIE ancienne, & l'usage ordinaire que l'on fait du calendrier, appartiennent trop à l'astronomie pour ne pas les traiter ici séparément. Le fondement de la chronologie consiste dans la mesure des années & des jours, & par conséquent dans les mouvemens du soleil & de la lune, comparés entre eux, & avec les divers événemens de l'histoire; ainsi après avoir parlé des moindres parties du temps qui sont les heures, & les semaines, nous parlerons des années, de leurs différentes divisions, des cycles qui en sont composés, du calendrier, des périodes anciennes, enfin, des époques les plus célèbres : nous dirons aussi quelque chose des levers & couchers héliques des étoiles qui sont assez célèbres parmi les anciens, & que les commentateurs ont souvent très-mal interprétés.

Heures
Planétaires.

1531. LES HEURES PLANÉTAIRES usitées autrefois chez les Juifs & les Romains, commençoient au lever du soleil, & recevoient leur nom d'une des sept planètes. Cet usage étoit venu des Egyptiens, suivant Hérodote, *L. II*, n°. 82, & Dion Cassius, *L. 37*; pag. 42, édition de 1592; ou des Caldéens (*Salmas. de an. climat. pag 595*, M. Gouget, *II*, 437, M. Sallier, *Mém. des inscrip. IV*, 65). On croit que l'ordre des planètes dans les jours de la semaine venoit de l'influence qu'on leur supposoit sur les différentes heures du jour; le Dimanche, au lever du soleil, la première heure étoit pour le soleil, ensuite venoient Vénus, Mercure, la lune qui étoient supposées au-dessous de lui, puis Saturne, Jupiter & Mars qui étoient au-dessus; par-là il arrivoit que le lendemain commençoit par la lune, & voilà pourquoi le jour de la lune,

c'est-à-dire, le lundi fut placé à la suite du jour consacré au soleil. (*Clavius in sphaeram*, pag. 45); M. l'Abbé Rouffier dans un savant ouvrage sur la musique des anciens, croit que cet arrangement vient des intervalles de la musique, comme l'insinue Xiphilin d'après Dion (*L. 36, in Pompeio*), & Scaliger l'explique par des triangles faits sur les côtés d'un eptagone, (*Emend. temp. l. I, de diebus*). Plutarque en avoit fait la matière d'une dissertation, dont il ne nous reste que le titre, dans ses questions de tables, *Symposium*, l. IV, q. 7. Ces heures étoient *inégaies*, parce qu'on divisoit le jour naturel en douze parties, & la nuit en douze autres parties.

1532. LES HEURES BABYLONIQUES commençoient à se compter au lever du soleil, (*Macrobe, Saturn. l. I, c. 3*) cela se pratique encore à Majorque & à Nuremberg. Celles des Egyptiens & des Romains commençoient à minuit; & cet usage est encore celui de la plupart des nations de l'Europe.

Heures
Babyloni-
ques.

Tous les astronomes commencent le jour à midi, comme faisoient autrefois les Umbres suivant Macrobe, & comme font aussi les Arabes; les astronomes vont aussi jusqu'à 24 heures; ainsi lorsqu'on compte dans la société le 2 Janvier 8 heures du matin, les astronomes disent le premier Janvier à 20 heures, & c'est ce que nous appellons *temps astronomique*.

Heures
Astronomi-
ques.

Les Juifs & les Romains distinguoient dans le jour artificiel, pris du lever au coucher du soleil, quatre parties principales, *Prime, Tierce, Sexte & None*. Prime commençoit au lever du soleil; Tierce, trois heures après; Sexte commençoit à midi; & None, trois heures avant le coucher du soleil; mais ces heures étoient plus ou moins grandes, suivant que le soleil étoit plus ou moins long-temps sur l'horizon; l'on employe encore dans le bréviaire de l'Eglise Romaine les mêmes dénominations. Ce sont-là les heures Judaïques, planétaires ou inégales.

Heures
Judaïques.

1533. Les Athéniens commençoient à compter les heures depuis le coucher du soleil ; on en fait de même en Italie, on le faisoit même autrefois en Pologne, en Autriche, en Bohême ; mais il n'y a plus à Prague que deux horloges de cette espèce. Les Italiens commencent leurs 24 heures une demi-heure après le coucher du soleil ; j'ai expliqué leur usage à cet égard dans la préface du livre intitulé : *Voyage d'un François en Italie, fait dans les années 1765 & 1766*, à Paris, chez Desaint, 1769.

Semaines
de sept jours.

1534. L'usage de diviser les temps en semaines de sept jours est de la plus haute antiquité : il paroît que les plus anciens peuples de l'Orient s'en sont servis, c'est le sentiment du Syncelle, cité par M. Sallier, (*Mém. de l'acad. des Inscript. tom. IV, pag. 65*). Cet usage étoit même chez les Péruviens, *Garcilaso de la Vega, commentarios reales de los Incas, tom. I. L. II. c. 23*. Scaliger *de emend. Temp. pag. 9*. Spectacle de la Nature, *tom. IV, pag. 47*.

M. Gouget pense que les Grecs furent presque les seuls peuples, qui d'abord ne se servirent pas des semaines de sept jours. (*T. I, pag. 217 in-4°*). Cependant il y a des savans qui doutent que cette maniere de diviser le temps ait été employée ailleurs que chez les Juifs. (Voyez Costard, *The history of astronomy, pag. 150*. Spencer, *De legibus Hebræorum, L. 1. c. 4*). Quoi qu'il en soit, on ne peut disconvenir que le nombre sept n'ait été fort remarquable & fort distingué parmi les anciens, (S. Clément d'Alex. *Stromatum, VI. 16. pag. 813*, édition de 1715. Macrobe, *Somn. Scip. I. 6. pag. 35*. Selden, *de jure nat. & gent. L. III, c. 17*).

Plusieurs auteurs ont cru même que la fête du septième jour n'étoit point particulière aux Juifs, mais qu'elle avoit lieu chez les payens. M. Sallier cite un grand nombre de témoignages à ce sujet, (*Mém de l'acad. des Inscript. IV. 50*), sur-tout Philon & Joseph ; il les réfute, à la vérité, & se détermine pour le sentiment

timent contraire. (*Ibid. pag. 64*). Mais cela n'empêche pas que l'usage des semaines de sept-jours n'ait eu lieu chez les anciens.

M. Goguet pense qu'inutilement on a voulu proposer plusieurs conjectures sur les motifs qui ont pu déterminer les différens peuples à s'accorder sur cette manière primitive de partager le temps, & qu'il faut la rapporter à une tradition générale des sept jours qu'avoit duré la création du monde. Il est singulier que cet auteur n'ait pas vu que cet usage venoit des phases de la lune qui ne se montre que pendant quatre semaines ou 28 jours, ce qui a servi à régler le temps chez toutes les Nations (1401) : ces phases changent à peu-près tous les sept jours, & si l'on avoit voulu faire des semaines de huit jours, on eût trouvé un excès de trois jours au bout du mois. D'ailleurs les années solaires de 365 jours se partagent, à un jour près, en semaines de 7 jours, au lieu qu'il y auroit eu cinq jours de reste, si l'on eût fait les semaines de huit jours ; ainsi l'usage des mois & des années paroît avoir dû entraîner celui d'une semaine de sept jours.

Années des Anciens.

1535. Nous avons parlé des années qui servirent aux premiers peuples du monde (277), & qui furent d'abord de 30 jours ; nous parlerons plus bas des années lunaires, dont se servent encore les Turcs & les Arabes, & qui sont de 354 & de 355 jours (1602), mais la première règle constante qu'il y ait eu pour les années, fut celle des années de 365 jours, qui étoient toutes égales ; c'est ce qu'on appelle les années Égyptiennes ; le soleil retardoit chaque année de six heures sur une année Égyptienne, & tous les quatre ans l'équinoxe arrivoit un jour plus tard dans l'année civile ; ce retardement formoit une année entière au bout de 1461 années civiles, ou d'une période caniculaire (1605). Nous en donnerons une table ci-après (1598). Les années

Différentes
sortes d'an-
nées.

Années
Égyptiennes.

Egyptiennes font encore employées dans la Perse ; mais au sujet de la forme ancienne & nouvelle de l'année des Perses , on peut voir les notes de Golius sur Alfergan , Scaliger , de *Emendatione Temporum* , & le P. Pétau , *Doctrina Temporum*.

Temps où
commençoit
l'année.

1536. Parmi nous l'année civile est tantôt de 365 jours & tantôt de 366 (1539) ; elle commence au premier Janvier depuis l'année 1567. (Voyez l'édit de Rouffillon donné en 1564 , par Charles IX. art. 9) ; les anciens Romains la commençoient avec le mois de Mars sous le règne de Romulus ; les Grecs au mois de Septembre : Numa Pompilius la fixa au mois de Janvier. Sous la seconde race de nos Rois elle commençoit à Pâques après la bénédiction du cierge pascal ; & dans certains endroits elle commençoit à l'Annonciation , c'est-à-dire , le 25 de Mars , à peu-près comme chez les Hébreux , dont l'année ecclésiastique & civile commençoit à Pâques , *Exod.* 12 , quoiqu'ils eussent une année naturelle qui commençoit au mois de Septembre. *Ezech. c.* 40. Voyez aussi l'*Art de vérifier les dates* , par D. Clémencet & D. Durand , in-4^o , 1752. chez Cavelier , & la nouvelle édition in-folio 1770. Le P. Petau , *Doct. Temp. Liv. IX* , c. 3. *Casali de veteribus sacris christianorum ritibus. Romæ* , 1647 , fol. c. 62.

1537. Le printemps étoit , ce me semble , le temps où l'année devoit naturellement commencer :

Dic age , frigoribus quare novus incipit annus ,
Qui melius per Ver incipiendus erat ? *Faß. I.* 149.

Mais la raison qui déterminâ les anciens pour le mois de Janvier fut sans doute qu'au solstice d'hiver le soleil recommence à monter vers notre hémisphère boréal ; ce commencement d'élévation & d'acroissement dans les jours leur parut devoir être le commencement de l'année :

Bruma novi. prima est , veterisque novissima Sólis ;
Principium capiunt Phœbus & annus idem. *Faß. I.* 163.

1538. L'année qui se divise actuellement en 12 mois solaires de 30 ou 31 jours avoit été divisée par Romulus en dix mois seulement, & elle n'avoit que 304 jours. Macrobe, *Saturn.* l. I, c. 12, donne un assez long détail du calendrier de Romulus, de même que Solinus, *Memorabilium pars I, c. 2.* On y voit que Mars étoit le premier mois de l'année, & portoit le nom du Dieu dont Romulus vouloit descendre; les mois de Juillet & Août se nommoient quintile & sextile, le mois de Décembre étoit, comme son nom l'indique, le dixième & le dernier mois de l'année. Numa ajouta 50 jours à l'année lunaire des Romains, & la fit de 354 jours (*Macr. I, 13*). Solinus dit deux fois qu'il la fit de 355 jours, cependant l'année lunaire ne devoit être que de 354; il avoit peut-être de l'inclination pour les nombres impairs, comme ensuite les Pythagoriciens. Les mois des Romains étoient alors de 29 & de 30 jours alternativement, pour répondre aux mois lunaires qui sont de $29\frac{1}{2}$: Numa composa l'année de 12 mois, changea les six mois qui avoient 30 jours pour les rendre impairs; ces six jours joints avec 51 jours qu'il avoit ajoutés, en firent 57; il en composa deux mois, l'un de 29 jours, l'autre de 28.

Primus oliviferis Romam deductus ab arvis

Pompilius menses sensit abesse duos. *Fast. III, 151.*

Il plaça ces deux mois au commencement de l'année, suivant l'opinion de plusieurs Savans, en faisant commencer l'année avec l'hiver, parce que c'étoit le temps où les jours commençoient à augmenter: quelques Savans sont d'une opinion contraire. Ces mois de 29 & de 30 jours formoient une année lunaire de 355 jours, plus petite de 10 jours que l'année solaire, en sorte qu'au bout de trois ans l'hiver n'arrivoit plus au commencement de Janvier, mais de Février. Numa employa donc, aussi bien que les Grecs, une intercalation, par laquelle l'hiver devoit toujours commencer

avec le mois de Janvier, mais il distribua les jours intercalaires d'une façon particulière; lorsqu'il y eut deux années de passées, on ajouta 22 jours; lorsqu'il y en eut quatre, 23 jours; à la sixième, 22 jours; à la huitième, 23; de sorte qu'en huit ans il y avoit 90 jours intercalaires. (Gassendi, *Op. tom. V, pag. 550*).

Les Romains ne remarquèrent pas d'abord qu'il y avoit 8 jours de trop dans cette manière d'intercaler; parce que leur année lunaire avoit un jour de plus que celle des Grecs; il se trouva au bout de 30 ans que l'hiver ne commençoit plus avec le mois de Janvier, mais avec celui de Décembre, il fallut donc ensuite reformer cette méthode, & après deux huitaines d'années, on se contentoit d'ajouter 66 au lieu de 90 jours à la troisième huitaine; les Prêtres étoient chargés de ce soin; les jours intercalaires s'ajoutoient chez les Grecs à la fin de l'année, plusieurs auteurs croient que les Romains à leur exemple choisirent aussi la fin de l'année, parce que le mois de Février étoit comme la fin de l'ancienne année qui commençoit au mois de Mars; c'étoit même, disent-ils, le dernier mois de l'année de Numa, jusqu'au temps des Decemvirs, 450 ans avant J. C.; il semble que cette opinion soit autorisée par le témoignage d'Ovide.

Qui sequitur janum veteris fuit ultimus anni,

Tu quoque sacrorum, Termine, finis eras. *Fast. II, 49.*

On voit aussi par ces vers pourquoi les jours intercalaires se plaçoient non à la fin de Février, mais après le 24 de Février appellé VI^o. Calend. Martii, c'étoit à cause de la fête du Dieu, Terme qui se célébroit le 23 de Février (VII^o. Cal. Martii). Ces jours intercalaires au nombre de 22 ou de 23 formoient tous les deux ans, comme un troisième mois qui s'appelloit, suivant Putarque, *Merkedonius*, ou plus communément intercalaire.

Mais ces intercalations qui étoient confiées aux Prêtres

furent quelquefois altérées , il y eut des temps où par superstition l'on omit des intercalations ; il arriva même , selon Censorinus & Macrobé , que les Prêtres pour contrarier ou favoriser des Magistrats ou des Traitans firent des années plus ou moins longues (Macrobe I, 14. *Solinus memorabilium pars I, cap. 4*).

Jules César entreprit de corriger le désordre de ce calendrier , & d'en éclaircir l'obscurité , 46 ans avant J. C. Il voulut faire correspondre les années civiles aux années astronomiques , en sorte qu'à la même saison l'on comptât toujours les mêmes mois , & qu'on pût dire que le printemps arrivoit toujours au même temps de l'année. Voyez Censorinus , *ch. 10*. Suétone , dans la *vie de César*. Dion Cassius , *liv. XLIII*. Solinus , *ch. 3*. Macrobe , *Saturn. liv. I, ch. 14*. Jules César étoit curieux d'astronomie , il avoit même composé divers ouvrages.

Media inter prælia semper
Stellarum cœlique plagis superisque vacavi ,
Nec meus Eudoxi vincetur fastibus annus. *Pharsal. X, 185*.

1539. Il étoit devenu essentiel au temps de Jules César de faire dans le Calendrier une entière réformation : César étoit tout à la fois Dictateur & Pontife , & ce soin le regardoit principalement. Pour s'en acquitter avec plus d'exactitude , César fit venir *Sosigenes* , mathématicien d'Egypte , qui s'occupa sérieusement de ce travail , (*Pline XVIII, 25*). Cet auteur fait l'éloge de son application , en disant : *Ipsè ternis commentationibus , quamquam diligentior esset cæteris , non cessavit tamen addubitare , ipse semet corrigendo*. Il fit sentir à César qu'on ne pouvoit établir une forme constante dans les années , à moins qu'on n'abandonnât la lune , pour s'en tenir aux mouvemens du soleil ; mais comme l'année solaire étoit de 365 jours & un quart , il falloit , pour suivre ce quart d'excédent , donner un jour de plus à l'année , dans laquelle on rassembleroit les quatre quarts de jour.

Sosigenes ,
Auteur du Ca-
lendrier Ju-
lien.

Sosigènes imagina donc de faire trois années de 365 jours, & la quatrième de 366 : on laissa le commencement de l'année d'accord avec le commencement de l'hiver, & du mois de Janvier, ou plutôt de la nouvelle lune qui cette année-là suivit le solstice d'hiver, afin de ne pas s'écarter d'une manière trop marquée de l'usage des Romains. Ce fut dans l'année 45 avant J. C. que se fit la réforme, & l'année 44 avant J. C. fut la première année Julienne, l'équinoxe arriva le 25 Septembre : on prolongea l'année de 90 jours jusqu'à la nouvelle lune qui suivit le solstice d'hiver, de façon que l'année eut 444 jours pour cette fois seulement, elle fut appelée l'*Année de confusion*. (Scaliger , de *Emend. temporum* , l. II , pag. 187 , l. IV , pag. 228) ou plutôt 445 suivant le P. Petau (*L. IV* , c. 1. l. X , c. 61) , & *Censorinus* , c. 20. Macrobe (*Saturn. I* , 14) dit 443 jours ; & Solinus dit qu'il y eut une année de 244 jours (*Memorabilia mundi pars II* , c. 2) ; mais il paroît que c'est par erreur.

Année de
445 jours.

1540. L'année de Numa n'avoit que 355 jours, il fallut donc en ajouter dix ; César, à l'exemple de Numa, répartit ces dix jours de manière à ne point toucher aux mois de Mars, Mai, Quintile, (ou Juillet) & Octobre, parce qu'ils avoient été établis de 31 jours par Romulus ; il ajouta deux jours à chacun des mois de Janvier, Sextile, (ou Août) & Décembre qui étoient de 29, & devinrent par-là de 31 ; il ajouta un jour aux mois d'Avril, Juin, Septembre & Novembre qui en avoient 29, pour les faire de 30 jours ; il n'ajouta rien au mois de Février (dit Macrobe, *Saturn. I* , 14) : *Ne Deum inferum religio immutaretur*, par respect pour les morts à qui le mois de Février étoit consacré, car le mot de Février venoit de *Februus*, Dieu des lustrations, ou des sacrifices qu'on célébroit à l'honneur des Dieux mânes.

1541. Jusqu'alors le mois intercalaire avoit été le mois de Février, César plaça de même en Février le jour intercalaire qu'il ajoutoit tous les 4 ans, & cela

après le 23 Février ou le 7^e des Calendes de Mars ; & avant le régifuge ou la fête instituee en mémoire de l'expulsion de Tarquin, qui se célébroit le VI des Calendes ; ce jour au lieu d'être le 24 se trouvoit alors le 25, & le 24 qui étoit le jour intercalaire, s'appelloit *bis Sexto Calendas Martias*, parce que le jour du régifuge conservoit son nom de *Sexto Calendas*, & se trouvoit le 25, delà vint le nom d'années biffextiles pour celles où le mois de Février avoit 29 jours, & où le 24 Février s'appelloit *Bis Sexto Calendas*. Toutes les années de l'ère vulgaire, tant avant qu'avant J. C. dont le nombre est divisible par quatre sont biffextiles.

Origine du
terme de bis-
fextiles.

1542. Jules César étoit né le 4 des ides du mois *Quintile* ; après sa mort, Antoine qui étoit son collègue dans le consulat, fit ordonner par une loi que ce mois porteroit le nom de Jules César, & il fut toujours appelé le mois de *Juillet*, depuis la seconde année de la réformation Julienne (1539). Le mois *Sextile* fut ensuite appelé *Augustus*, Août, en vertu d'un *Senatus consulte* rendu après la bataille d'Actium ; non que cet Empereur fût né dans le mois *Sextile*, car le jour de sa naissance étoit le IX Cal. Octob. ou le 23 Septembre ; mais dans ce mois, dit Macrobe, il étoit parvenu au consulat, il avoit triomphé trois fois, il avoit conquis l'Égypte, il avoit terminé les guerres civiles, ce qui fut cause que le Sénat regardant ce mois comme le plus heureux de l'Empire d'Auguste, ordonna qu'à l'avenir on l'appelleroit du nom de ce Prince.

Noms de
Juil. & Août.

Plusieurs Empereurs voulurent dans la suite, à l'exemple d'Auguste, donner leurs noms à des mois de l'année ; Néron voulut donner son nom au mois d'Avril, Commode voulut donner le sien au mois d'Août, & celui d'Hercule au mois de Septembre, Domitien voulut appeller Germanicus le mois de Septembre, & celui d'Octobre Domitien ; mais comme l'observe Macrobe après la mort de ce tyran, non-seulement on arrachoit les inscriptions qu'il avoit usurpées, mais en haine de

sa mémoire, on changea jusques aux noms qu'il avoit établis pour les mois de l'année.

1543. Après la mort de Jules César, il y eut un petit dérangement dans les intercalations, les Pontifes ne comprenant pas le sens de la règle qu'il avoit établie, ajoutoient un jour au commencement de l'année au lieu de l'ajouter à la fin; ils rendoient biffextile celle qui étoit la quatrième en y comprenant la biffextile précédente, enforte qu'il n'y avoit que deux années communes, au lieu de trois qu'il doit y avoir entre deux biffextiles; on s'aperçut de cette erreur au bout de 36 ans, alors il y avoit eu 12 biffextiles au lieu de 9 qu'il auroit dû y avoir. Pour y remédier Auguste ordonna que dans les douze années suivantes, il n'y auroit aucune intercalation, pour retrancher par-là trois jours de la suite & de l'ordre des années établies par Jules César (Solinus I, *pars* 2). Depuis ce temps-là, il n'y a eu dans le calendrier Julien aucune interruption, du moins suivant l'opinion commune. M. Euler a pensé qu'il pouvoit y avoir eu un jour d'erreur, ce qui lui servoit à expliquer la discordance des équinoxes observés par Ptolomée; mais j'ai prouvé par les lieux de la lune qu'il n'y avoit point erreur de date, & il paroît que ces observations étoient supposées, ou qu'elles étoient extrêmement défectueuses (*Mém. acad.* 1757, *pag.* 420). On verra aussi dans le XIII^e. livre le soupçon que Flamsteed a eu sur la situation des armilles de Ptolomée pour expliquer une partie de cette imperfection des équinoxes de Ptolomée (2275).

1544. Malgré l'avantage que le calendrier Julien avoit sur celui des années Egyptiennes, il étoit encore imparfait, puisqu'en supposant l'année de 365 jours 6^h, on se trompoit de 11' chaque année (886); & les 11' avoient produit une différence de dix jours; c'est ce qui occasionna la réformation Grégorienne de 1582, dont nous allons parler; & c'est ce qui a produit longtemps une différence de calendrier entre les différens peuples de l'Europe (1548).

DE LA RÉFORMATION GRÉGORIENNE
pour les Années solaires.

1545. LA réformation du calendrier avoit été proposée bien des fois depuis qu'on s'étoit apperçu que les équinoxes anticipoient de plusieurs jours (1544) : un Evêque de Cambrai que les auteurs appellent *Petrum ab Alliaco*, Chancelier de l'Université & Précepteur de Jean Gerfon, présenta son projet au concile de Constance, & au Pape Jean XXIII, en 1414, & l'on regarde son ouvrage comme ayant été une des premières occasions de la réforme Grégorienne; (*Weidler*, pag. 295). Le cardinal *Cusa* écrivit aussi vers le même temps sur la réformation du calendrier & sur la correction des tables Alphonfines; cet auteur dont nous avons les Œuvres en trois volumes in-folio, mourut en 1464. Le Pape Sixte IV. forma décidément le projet d'exécuter cette réformation du calendrier; il attira près de lui Régiomontanus dont la réputation & le savoir méritoient la plus grande confiance en pareille matière (434); mais ce célèbre astronome mourut à Rome en 1476, avant que d'avoir pu exécuter cette entreprise. Voyez Gassendi dans la vie de Régiomontanus, & dans son histoire du calendrier, *Op.* tom. V, pag. 584. Le Concile de Trente terminant ses sessions en 1563, laissa au Pape le soin de travailler à la réformation du calendrier. Enfin le Pape Grégoire XIII. parvint en 1582 à terminer ce grand ouvrage; & le calendrier qu'il a établi a pris le nom de CALENDRIER GRÉGORIEN. (Voy. CLAVIUS, *Calendar. Gregorianum.*, in-fol. BLONDEL, *Histoire du calendrier Romain*; RICCIOLI, *Chronologia reformata*; GASSENDI, *Romanum calendarium*, in-folio, *Op. t.*, V, pag. 545). Il envoya en 1577 à tous les Princes Chrétiens un abrégé des raisons qu'il avoit d'entreprendre la réformation du calendrier, en les priant de consulter tous les mathématiciens qu'ils croiroient capables

Les Astronomes sont consultés.

de lui suggérer des idées nouvelles ou des expédiens commodes. Après avoir reçu différens mémoires à ce sujet, le Pape assembla à Rome les gens les plus habiles pour achever ce grand ouvrage. Ce calendrier Grégorien devenu aujourd'hui le calendrier civil dans tous les pays de l'Europe, consiste dans une manière de compter les années, telle que les saisons commenceront toujours aux mêmes temps de l'année.

Décret du
Concile de
Nicée.

1546. Le point fixe d'ou l'on partit dans la réformation du calendrier fut la décision du Concile de Nicée tenu l'an 325, qui établit l'équinoxe au 21 de Mars, & ordonne que la fête de Pâque sera célébrée le Dimanche après le XIV^e de la lune du premier mois, c'est-à-dire, de la lune dont le 14^e arrive *ou le jour même ou après le jour de l'équinoxe* (1571).

On croyoit au temps du Concile de Nicée que l'année étoit à peu-près de 365j 5^h 55' suivant le sentiment de Ptolomée (885) : on supposa donc que l'équinoxe qui arrivoit alors le 21 de Mars arriveroit toujours de même, ou qu'on y remédieroit dans la suite; mais comme il y a six minutes de moins dans la véritable durée de l'année solaire (886), l'équinoxe arrivoit chaque année six minutes plutôt qu'on ne croyoit; & du temps de Grégoire XIII. en 1577, il se trouvoit arriver le 11 de Mars; il auroit fallu omettre trois jours de l'année tous les 400 ans pour que le 21 de Mars fût toujours près du véritable équinoxe.

Règle du
Calendrier
Grégorien.

Ce fut le 24 Février 1581 que parut le Bref par lequel Grégoire XIII. ordonna l'observation des trois articles qui devoient remplir pour toujours l'intention du Concile de Nicée; les voici en abrégé.

1547. Il est dit 1^o. qu'après le 4 Octobre 1582; on retranchera 10 jours du mois, enforte que le jour qui suivra la fête de S. François, qu'on a coutume de célébrer le 4 Octobre, sera appelé non le 5, mais le 15 d'Octobre, & que la lettre Dominicale G sera changée en C.

2^o. Pour qu'à l'avenir l'équinoxe du printemps ne

puisse pas s'éloigner du 21 de Mars, il est dit que les années biffextiles qui avoient lieu de quatre ans en quatre ans n'auront plus lieu dans les années séculaires 1700, 1800, 1900, mais seulement l'an 2000, & ainsi de suite à perpétuité; de sorte que trois années séculaires soient toujours communes, & la quatrième biffextile dans l'ordre suivant.

1600, biff.	2100, com.	2600, com.	3100, com.
1700, com.	2200, com.	2700, com.	3200, biff.
1800, com.	2300, com.	2800, biff.	3300, com.
1900, com.	2400, biff.	2900, com.	3400, com.
2000, biff.	2500, com.	3000, com.	3500, com.

3°. Pour trouver d'une manière plus sûre le quatorzième de la lune paschale, & les jours de la lune dans tout le cours de l'année, on supprime du calendrier le nombre d'or, & l'on y substitue le cycle des épactes par lequel la nouvelle lune conservera toujours sa véritable place dans le calendrier, nous en parlerons bientôt en détail (1573).

Le Pape ordonne ensuite à tous les Ecclésiastiques d'embrasser la nouvelle forme du calendrier; il exhorte & il prie l'Empereur & tous les Princes chrétiens de le faire recevoir également dans leurs Etats.

1548. La suppression de dix jours faite en 1582 dans les Etats seulement des Princes catholiques fut cause d'une différence qui a subsisté long-temps en Europe dans la manière de compter les jours; toutes les fois, par exemple, que l'on comptoit en Angleterre le 2 Janvier, on comptoit le 12 en France, c'est-à-dire, 10 jours de plus; les personnes qui craignoient l'équivoque datoient ainsi, $\frac{2}{12}$ Janvier, c'est-à-dire, le deux vieux style ou style Julien, & le 12 nouveau style ou style Grégorien. Lorsqu'en 1700 on eut supprimé une biffextile suivant la règle du calendrier Grégorien, la différence se trouva de 11 jours; parce que dans le calendrier Julien on avoit fait l'année 1700 plus lon-

Différence
du vieux Style
& du nou-
veau.

gue d'un jour ; ce qui faisoit compter ensuite un jour de moins.

1549. Cette différence du vieux & du nouveau style a subsisté long-temps entre les pays Protestans & les pays Catholiques. On voit dans les transactions philosophiques, n^o. 203, 239, 257, 260, ce que l'on pensoit en Angleterre de la réformation ; mais elle y a été adoptée enfin, & le nouveau style a commencé en Angleterre au mois de Septembre 1752 ; on a retranché alors 11 jours, & l'on s'est trouvé d'accord avec le calendrier Grégorien. L'uniformité du calendrier Grégorien est reçue actuellement dans tous les Etats policés de l'Europe ; la Russie est le seul pays où l'on compte encore 11 jours de moins, que dans les autres pays de l'Europe.

Du Cycle solaire & des Lettres Dominicales.

1550. On employe dans certaines occasions le cycle solaire qui est un intervalle de 28 ans, après lequel les jours de la semaine reviennent aux mêmes jours du mois & dans le même ordre, tant que les années sont biffextiles de 4 ans en 4 ans. Suivant la manière dont nous comptons actuellement les années de ce cycle, elles commencent 9 ans avant l'ère chrétienne.

Ainsi pour trouver à quelle année du cycle solaire on étoit en 1763, on ajoute 9 avec 1763, l'on divise la somme 1772 par 28, on trouve pour quotient 63 qui nous apprend que le cycle solaire a recommencé 63 fois depuis l'ère chrétienne ; mais le reste de la division se trouve de 8, ainsi il y a huit années de plus que les 63 cycles complets, nous sommes donc à la huitième année, c'est-à-dire, que l'on a huit de cycle solaire en 1763.

Calendrier
perpétuel.

1551. On trouve dans tous nos livres d'églises une forme de calendrier perpétuel, où les 12 mois de l'année sont marqués avec des lettres à côté de chaque jour ; ces lettres servent à marquer les jours de la se-

maine qui répondent aux quantiemes de mois, suivant un ordre qui revient tous les 28 ans. On met un A vis-à-vis le premier jour de Janvier, B vis-à-vis du 2, & ainsi de suite; si l'année commence par un Dimanche comme cela est arrivé en 1758, la lettre A sera la lettre dominicale, & tous les Dimanches de l'année se trouveront indiqués par un A, dans chaque mois du calendrier perpétuel. Après avoir rencontré 52 fois les sept lettres A, B, &c. dans le calendrier, c'est-à-dire, après 52 semaines qui font 364 jours, le 365^e jour de l'année recommencera par un A, & sera encore un Dimanche, car l'année commune commence & finit par le même jour du mois, parce que 52 fois 7 font 364. Ainsi l'année suivante commencera par un lundi, & aura son premier Dimanche le 7 du mois; or dans le calendrier perpétuel, c'est un G qui répond au 7 du mois, ainsi la lettre dominicale de cette seconde année sera le G, celle de la troisième année seroit une F, & ainsi de suite dans un ordre rétrograde.

Lettres Dominicales.

Mais quand il arrive une année bissextile, le mois de Février a 29 jours, la lettre D qui commence le mois de Mars doit dénoter alors un jour de plus: si elle a été dominicale pendant les deux premiers mois de l'année, elle se trouve indiquer ensuite le lundi, & c'est la lettre précédente qui devient dominicale. Ainsi dans les années bissextiles, il y a toujours deux lettres dominicales, une qui sert pour les mois de Janvier & de Février, jusqu'au jour de S. Mathias ~~exclusive-~~ment, l'autre qui sert pour les dix autres mois.

Deux Lettres dans les années bissextiles.

En 1756 le cycle solaire étoit 1, & les lettres dominicales D & C; dans les 27 années suivantes on a B, A, G, F (& E), D, C, B, A (& G); F, E, D, C (& B); A, G, F, E (& D); C, B, A, G (& F); E, D, C, B (& A); G, F, E, après quoi on recommence D & C dans le même ordre pour 28 autres années qui forment un nouveau cycle solaire.

1552. On peut trouver la lettre dominicale de deux façons dans ce siècle-ci; on ajoutera, par exem-

Trouver la Lettre Dominicale.

ple, cinq au nombre des années de ce siècle-ci, & de plus autant d'unités qu'il y a de biffextiles dans cet intervalle ; la somme étant divisée par 7, le reste désignera la lettre dominicale de l'année, en appellant G la première, F la seconde, &c. Pour en sentir la raison, on remarquera que les lettres dominicales de 1696 étoient A & G, ainsi l'on avoit 1 pour la lettre dominicale de 1696, & il y en a eu cinq avant 1701. Depuis ce temps-là toutes les années ont eu une lettre, il faut donc prendre autant de lettres que d'années depuis 1700, & cinq de plus ; & comme les années biffextiles ont deux lettres, il faut encore ajouter autant de nombres qu'il y a eu de biffextiles ; par exemple, en 1763 on ajoutera 63 avec 5 & 15, on divisera 83 par 7, on aura 6 de reste, c'est-à-dire, que la sixième lettre B sera la lettre dominicale de 1763.

Seconde
Méthode.

La seconde manière de trouver la lettre dominicale est celle-ci : divisez le nombre de l'année depuis 1700, plus sa quatrième partie par 7, retranchez le reste de 3 ou de 10, vous aurez le chiffre qui indique la lettre dominicale dans la table suivante ; je suppose, par exemple, qu'il soit question de l'année 1757, ajoutez à 57 son quart 14, la somme 71 étant divisée par 7, le reste sera 1, qu'on ôtera de 3, & l'on aura 2 qui dans l'ordre ci-joint fait voir que B sera la lettre cherchée pour 1757.

A	B	C	D	E	F	G
1	2	3	4	5	6	7

Ces deux règles ne serviront que jusqu'en 1799 inclusivement, parce que les années 1800 & 1900 ne seront point biffextiles, comme le sont les autres années de 4 en 4, ce qui formera une interruption dans le cours ordinaire des lettres dominicales ; car l'année 1800 n'aura que la lettre E au lieu des deux lettres E & D qu'elle auroit dû avoir suivant la règle précédente. Les nom-

bres que nous venons de placer sous chaque lettre servent aussi à trouver quel sera le premier Dimanche de l'année ; par exemple, quand la lettre dominicale est A, le premier Dimanche tombe au 1 Janvier, quand elle est B, il arrive le 2, &c.

1553. Pour trouver la lettre qui convient à chaque jour du mois dans une année quelconque, il suffit de diviser par 7 le nombre de jours écoulés depuis le commencement de l'année ; le reste de la division sera le nombre répondant à cette lettre, parce que les lettres se suivent sans interruption tout le long de l'année ; si ce nombre est 1, on aura A, s'il est 2, on aura B, & ainsi de suite, comme dans la petite table précédente. Pour connoître plus aisément le nombre de jours écoulés depuis le commencement de l'année, nous allons en donner une table pour les premiers jours, & pour les dixième & vingtième de chaque mois, dans laquelle il faut observer si c'est une année biffextile d'ajouter toujours l'unité après le mois de Février, puisque ces années-là ont un jour de plus, & qu'il se place au mois de Février pour y former un 29^e jour.

MOIS DE L'ANNÉE.	Jours écoulés depuis le commencement de l'Année.		
	Le premier.	Le dix.	Le vingt.
Janvier.	1	10	20
Février.	32	41	51
Mars.	60	69	79
Avril.	91	100	110
Mai.	121	130	140
Juin.	152	161	171
Juillet.	182	191	201
Août.	213	222	232
Septembre.	244	253	263
Octobre.	274	283	293
Novembre.	305	314	324
Décembre.	335	344	354

Ajoutez 1 dans les années Biss.

1554. Pour connoître à quel jour de la semaine répond un quantième de mois; par exemple, le 20 Février 1762, à 1761 complet ajoutez le nombre de bissextiles qui y sont renfermées, savoir 440, ôtez-en 12 jours, & ajoutez-y 51, c'est-à-dire, les jours écoulés depuis le commencement de l'année, la somme 2240 étant divisée par 7, il ne reste rien; ce qui prouve que c'est un samedi, s'il restoit 1 ce seroit un Dimanche, & ainsi des autres.

Si l'on vouloit trouver la même chose en suivant l'ancien calendrier, il ne faudroit ôter que 1 au lieu de 12, puisqu'il y a 11 jours à compter de moins, quand on suit le vieux style.

1555. Voici une autre table qui sert à trouver quel est le jour de la semaine qui répond à chaque jour du mois, quand on connoît l'année du cycle solaire, ou la lettre dominicale; on trouve souvent cette table gravée sur le revers des cadrans solaires, à Bouffole, que l'on faisoit communément autrefois. Les chiffres qui sont au haut de la table indiquent l'ordre des mois en supposant que le mois de Mars s'appelle 1; les autres chiffres de la table indiquent les jours du mois qui répondent à un des jours de la semaine, indiqué par la lettre dominicale qui est au bas de la table. Ainsi quand la lettre dominicale est G, comme en 1770 le dimanche arrive dans les mois d'Avril & de Juillet, le 1, le 8, le 15, le 22 & le 29; dans les mois de Septembre & de Décembre le 2, le 9, &c. Dans le mois de Juin le 3, le 10, &c. Quand la lettre dominicale est F comme en 1771, tous les nombres de la table marquent le lundi; car le nombre 1 qui répond aux mois 5 & 2, c'est-à-dire aux mois de Juillet & d'Avril, se trouve, en effet, indiquer que ces deux mois commencent par le lundi; le nombre 2 qui est au-dessous de 7 & 10, c'est-à-dire, de Sept. & Déc. annonce que dans ces deux mois, le 2 est un lundi, &c. Lorsque les noms des mois ne se trouvent pas gravés dans les deux premières lignes, & qu'il y a seulement 5, 7, &c. 2, 10, &c. Il faut se rappeler que 2 est le mois d'Avril, que 3 est le mois de Mai, & ainsi des autres.

TABLE

TABLE pour trouver le quantiè^me du mois qui répond à chaque jour de la semaine, quand on connoît la Lettre Dominicale.

Jul. 5 Avril 2	Sept. 7 Déc. 10	Juin. 4	Fév. 12 Mars 1 Nov. 9	Août 6	Mai 3	Janv. 11 Oct. 8
1 8 15 22 29	2 9 16 23 30	3 10 17 24 31	4 11 18 25	5 12 19 26	6 13 20 27	7 14 21 28
G Dim.	F Lun.	E Mar.	D Mer.	C Jeudi	B Ven.	A Sam.

Il arrive souvent que la table précédente est gravée sur de petits cadrans sans que les noms des mois, les lettres dominicales, ni les jours de la semaine y soient marqués ; elle devient alors une énigme dont j'ai cru devoir donner ici l'explication, qui m'a été demandée plus d'une fois; elle ne se trouve, en effet, ni dans Clavius, ni dans le traité des instrumens de mathématiques de Bion, où l'on cherche quelquefois aussi inutilement l'explication de plusieurs espèces de cadrans ou de cercles, gravés en Allemagne ou en France, dans le 16^e & le 17^e siècle.

Du Cycle lunaire & du Nombre d'Or.

I 5 5 6. LE CYCLE LUNAIRE est un espace de 19 années solaires, ou de 6939 jours dans lequel il arrive 235 lunaifons, enforte qu'au bout des 19 ans les nouvelles lunes arrivent au même degré du zodiaque, & par conséquent au même jour de l'année que 19 ans auparavant. On appelle la première année d'un cycle lunaire, celle où la nouvelle lune arrive le 1 de Janvier, du moins, suivant le calendrier Grégorien; de ces 235 lunaifons, on en donne 12 à chaque année, ce qui fait 228 lunaifons, alternativement de 29 & de 30 jours; il en reste 7 qu'on appelle lunaifons embolismiques ou intercalaires, il y en a six de 30 jours chacune; mais la septième est de 29 jours seulement, on la place à la fin du cycle ou de la 19^e année, où elle forme une irrégularité. Ce cycle fut trouvé par Méton environ 430 ans avant J. C., & fut regardé dans la Grèce comme une découverte si belle qu'on en gravoit le calcul en lettres d'or; l'on appelle encore NOMBRE D'OR, l'année du cycle lunaire, dans laquelle on se trouve.

Toutes les fois que la nouvelle lune arrive le 1 jour de Janvier, on recommence un cycle lunaire, & l'on a 1 pour le nombre d'or. Voici la règle générale pour trouver le nombre d'or en tout temps; on ajoute 1 à l'année de notre ere, parce que dans l'année 1 de J. C. le nombre d'or a dû être 2, on divise la somme par 19; le reste, s'il y en a un, marque l'année du cycle lunaire où l'on se trouve, c'est-à-dire, le nombre d'or qui convient à l'année proposée: ainsi en 1764 après avoir ajouté 1, l'on divisera 1765 par 19, le quotient fera 92, parce que le cycle lunaire a recommencé 92 fois depuis J. C.; mais il restera 17, & cela nous apprend que le nombre d'or en 1764 est 17; si l'on ne trouve aucun reste dans la division, c'est une preuve qu'on est à la dernière année du cycle & que le nombre d'or est 19.

Règle pour
trouver le
nomb. d'Or.

1557. Il est bon d'observer qu'il y a eu autrefois deux cycles de 19 ans, dont l'un commençoit trois ans plus tard que l'autre; (Voyez l'art de vérifier les dates, par D. Clémencet & D. Durand, première édition, pag. xxxiv).

Dans la table chronologique de l'ouvrage que je cite; l'année 1. de notre ère répond à 18 du cycle lunaire, & à 2 du cycle de 19 ans, mais le premier n'y est pas continué au-delà de l'an 1580; le cycle de 19 ans est le seul qui aille jusqu'à la fin de la table, c'est celui qui a prévalu, & à qui nous avons transporté le nom de cycle lunaire, pour nous conformer à l'usage actuel de tous les astronomes.

1558. Pour savoir exactement combien le cycle lunaire, dont nous nous servons, diffère de 19 années Juliennes de $365\frac{1}{4}$ chacune, ou de $6939\text{ j }18^{\text{h}}$; il ne s'agit que de multiplier par 235 la révolution synodique de la lune qui est $29\text{ j }12^{\text{h}} 44' 3'' 10''' 48''''$ suivant les tables de Reinhold; ou tables Prussiennes qui furent employées dans le calendrier, on trouvera, suivant Clavius, (*cap.* 8. n^o. 4. pag. 86), $6939\text{ j }16^{\text{h}} 32' 27'' 18'''$: ainsi il y a un excès de $1^{\text{h}} 27' 32'' 42'''$; donc à la fin des 19 ans les nouvelles lunes arriveront $1^{\text{h}} \frac{1}{2}$ plutôt, puisque le cycle finira à peu-près $1^{\text{h}} \frac{1}{2}$ avant la fin des 19 ans, ce qui formera après $312\text{ ans } \frac{1}{2}$, la valeur de $23^{\text{h}} 59' 52'' 49'''$, c'est-à-dire, un jour moins $7'' 11'''$; car $1^{\text{h}} 27' : 19 :: 24^{\text{h}} : 312$. En calculant plus rigoureusement, on aura l'anticipation exacte d'un jour sur $312\frac{1}{2}$ ans plus $23\text{ j }17^{\text{h}}$: les $312\text{ ans } \frac{1}{2}$ font, 1^o, une équation d'un jour tous les 300 ans; 2^o, tous les 2400 ans, il y a 100 ans de retard, & l'équation d'un jour, est reculée d'un siècle, parce que les $12\frac{1}{2}$ ans omis tous les 300 ans, font un siècle après 2400 ans. C'est sur ce dernier résultat de $312\frac{1}{2}$ ans qu'on a réglé l'équation lunaire d'un jour entier pour chaque espace de 300 ans, moins un tiers de jour, après 2400 ans, à cause des $12\frac{1}{2}$ ans de plus; on pourroit dire encore moins un tiers de jour, après 481436 ans, à cause des $23\text{ j }17^{\text{h}}$, qui font alors à peu-près cent

Erreur du
Cycle Lunai-
re.

ans ; mais parce que dans l'usage civil l'équation ne peut se faire que d'un jour, il a été statué qu'après chaque espace de 2400 ans, on en laisseroit passer 100, sans tenir aucun compte de l'équation lunaire. On néglige la différence qui avoit lieu après 481436 ans, parce que cette période excédoit celle de 300000 ans, pour laquelle principalement le calendrier avoit été dressé. (Clavius, pag. 133).

1559. Il y avoit du temps de la Réformation Grégorienne (1545), plusieurs astronomes qui, en suivant le calcul d'Hipparque, affuroient que c'étoit en 304 ans, & non en 312 ans $\frac{1}{2}$, qu'il devoit y avoir un jour à ajouter au cycle lunaire. Si l'on admet avec M. Mayer le mois lunaire vers 1700 de 29j 12^h 44' 2" 8921, on trouve pour 235 lunaisons 6939j 16^h 31' 19" 6435, c'est-à-dire, par rapport aux 19 années ou 6939j & 18^h, un défaut de 1^h 28' 40" 3565 ; or cette quantité est à 6939j 18^h, comme 24^h font à 308 années 278j 3^h ; ainsi l'erreur du cycle lunaire seroit d'un jour en 308 ans & 278j 3^h, & non pas 312 ans & demi ; mais comme nous n'avons à expliquer ici que le Calendrier Grégorien, tel qu'il a été établi, nous supposons, avec les auteurs de ce Calendrier, que la révolution de la lune est exactement telle qu'on la trouve dans les tables Prussiennes d'*Erasme Reinhold* (450) : il avoit comparé les observations de Copernic avec celles de Ptolomée & d'Hipparque ; il avoit dressé des tables calculées avec encore plus de soin que celles de Copernic, & elles passaient pour être les meilleures de toutes avant la publication des tables Rudolphines de Képler.

Le cycle lunaire a été long-temps la seule manière que l'on eût de trouver les nouvelles lunes de chaque mois ; mais l'imperfection que nous venons de faire voir dans le cycle lunaire, lui a fait substituer celui des épactes, que nous expliquerons bientôt (1570).

Période
Dyonisienne.

1560. Les combinaisons du cycle solaire & du cycle lunaire, forment une période qui doit ramener les nouvelles lunes aux mêmes jours de la semaine, & aux

Tables de
Reinhold em-
ployées dans
le Calendrier.

mêmes jours du mois , puisque , à la fin de chaque cycle solaire , les jours du mois reviennent aux mêmes jours de la semaine , & qu'au bout de chaque cycle lunaire , les nouvelles lunes reviennent aux même jours du mois. Si l'on multiplie 19 par 28 , ou le cycle lunaire par le cycle solaire , on aura 532 ans ; c'est une période qui fut employée par *Denis le Petit* , l'an 527 , (*Janus, hist. cycli Dionysiani*) , ce fut lui qui , en réformant le calendrier , établit pour époque la naissance de J. C. , ce qui fut adopté bientôt dans toute la chrétienté ; cette période s'appelle aussi période Victorienne , & *grand cycle Paschal* , parce qu'après cet espace de 532 ans , les nouvelles lunes reviennent aux mêmes jours de la semaine & du mois ainsi que les lettres dominicales , Pâques & les fêtes mobiles se retrouvent dans le même ordre. Pour trouver l'année de cette période , où l'on est actuellement , il faut ajouter 457 à l'année courante , & diviser la somme par 532 , le reste est l'année de la période Dionysienne ; mais depuis la réformation du calendrier , cette période n'est plus d'aucun usage.

*Du Cycle d'indiction , de la Période Julienné ,
& autres Périodes.*

1561. LES INDICATIONS ou espèces d'ajournemens qu'on employoit dans les tribunaux sous Constantin , & les Empereurs suivans , formèrent une période ou un cycle de 15 ans qui s'est perpétué sans cause , & comme une forme arbitraire de numération ; les indications commencèrent au 25 Septembre 312. Les Empereurs Grecs , & l'église de Constantinople commençoient du 1 Septembre ; les Papes qui s'en servent aussi , commencent au 1 Janvier 313 ; cette période n'a rien de plus remarquable que d'être citée dans les actes de la Cour de Rome.

Si l'on prolonge cette période en remontant , on trouve qu'elle commenceroit 3 ans avant l'ère chrétienne ;

il fuffit donc d'ajouter 3 au nombre de l'année, & de divifer la fomme par 15, le refte de la divifion fera le nombre du cycle d'indiction qui convient à l'année propofée. Ainfi pour 1763, on divifera 1766 par 15, le quotient 117 nous apprend qu'il y a eu 117 révolutions de ce cycle depuis le commencement de notre ere, & le refte 11 de la divifion eft le nombre d'indiction qui convient à 1763.

1562. LA PÉRIODE JULIENNE eft le produit des trois cycles, folaire, lunaire & d'indiction, ou de 28, 19 & 15; c'eft-à-dire, un efpace de 7980 ans, dans lequel il ne peut y avoir deux années qui aient les mêmes nombres pour les trois cycles; mais au bout duquel les trois cycles reviennent enfemble dans le même ordre. Pour favoir combien de temps il y a que cette période a commencé, il ne faut qu'ajouter 4713 à l'année de l'ere chrétienne, & l'on a l'année de la période Julienne qui répond à l'année courante où l'on eft.

La période Julienne a été propofée par Jofeph Scaliger comme une mefure univerfelle en chronologie; & nous y réduirons ci-après toutes les époques (1595). Képler & Boulliaud en ont fait ufage dans leurs tables aftronomiques, & fur-tout *Mercator* dans fon aftronomie imprimée en 1676.

Les époques des mouvemens céleftes font rapportées à la première année de la période Julienne, dans Muller, & celles de la chronologie dans le grand ouvrage du P. Petau, de *Doctrina temporum*. Par exemple, la création du foleil, fuivant le calcul de Scaliger, répond au 22 Octobre 764 de cette période, ou à l'an 730, fuivant le calcul du P. Petau (1595).

1563. Lorsque pour une année dont on connoît le cycle folaire, le nombre d'or & l'indiction on cherche la période Julienne, c'eft la matière d'un problème indéterminé arithmétique, mais déterminé chronologiquement, dont on trouve la folution dans prefque tous les livres d'algèbre; il fe réduit à chercher un nombre qui, divifé par trois nombres donnés, produife trois

Cycle d'indiction , Période Julienne: 295

restes donnés (*Instit. astr. pag. 620*). En voici une solution différente.

PROBLÈME. Trouver un nombre qui divisé par 28 donne pour reste un nombre a , divisé par 19 donne un reste b , & divisé par 15 donne un reste c .

SOLUTION. Nommons les trois restes de la division x, y, z , on aura pour le nombre cherché $28x + a = 19y + b = 15z + c$. Pour résoudre en nombres entiers l'équation $28x + a = 19y + b$ ou $y = x + \frac{28x + a - b}{19}$, je suppose $m = \frac{28x + a - b}{19}$, $x = 2m + \frac{m - a + b}{9}$; j'égale encore cette fraction à n , & j'ai $m = 9n + a - b$, donc $x = 2m + \frac{m - a + b}{9} = 19n + 2a - 2b$; $28x + a = 532n + 57a - 56b = 15z + c$. Pour résoudre de même en nombres entiers cette équation, je la mets sous cette forme $z = 35n + 3a - 3b + \frac{7n + 12a - 11b - c}{15}$ & j'égale la fraction à p , j'en tire $n = 2p - a + b + \frac{p - 5a + 4b + c}{7}$, & faisant cette fraction $= q$, on a $p = 7q - 5a + 4b - c$, donc $n = 2p - a + b + q = 15q + 9a - 7b - 2c$; & $532n + 57a - 56b$ qui est la valeur de $15z + c$ sera $= 7980q + 4845a - 3780b - 1064c$; c'est aussi la valeur du nombre cherché qui est l'année de la période Julienne. De là suit une règle générale : les produits du nombre d'or par 3780 & de l'indiction par 1064 étant ôtés du produit de 4845 par le cycle solaire, (augmenté s'il le faut de 7980), on divisera la différence par 7980, si cela se peut, & le reste de la division sera le nombre cherché, ou l'année de la période Julienne.

EXEMPLE. En 1770 les cycles sont 15, 4 & 3, les produits 72675, 15120 & 3192, le quotient 6, & le reste de la division 6483; c'est l'année de la période Julienne qui répond à 1770.

1564. Quoique le cycle lunaire soit la période la plus simple de celles qui expriment avec quelque exactitude le retour de la lune au soleil, il y a cependant

Autres périodes lunaires.

plusieurs autres périodes qui ont eu de la célébrité, celle de 8 ans employée par Cléoftrate & Harpalus, la période Caldéenne de 18 ans & dix jours dont nous avons parlé assez au long (1501). Celle de 59 ans proposée par Philolaus & Enopides, & celle de Calippus.

Période
Calippique.

Calippus Cyzicenus, astronome Grec, vivoit 330 ans avant J. C., il proposa le premier la période de 76 ans quadruple du cycle lunaire de Méton, parce qu'en ôtant un jour de 4 cycles il le rendoit plus exact. Voyez Censorinus, c. 18. Ptolomée, V. 3. On prétend qu'il reconnut l'erreur du cycle de Méton, dans une éclipse de lune arrivée 6 ans avant la mort d'Alexandre. Ce cycle ou cette période de Calippus commence à l'automne de l'année de la période Julienne 4383, ou 330 ans avant J. C., il en est parlé quelquefois dans l'almageste de Ptolomée, & dans plusieurs auteurs tels que Scaliger, *de emend. temp. pag. 84^o, 421.* Pétau, *de Doctrina temporum II, 16,* & suiv. Ptolomée, *Almag. III, 2. VII, 2 & 3.*

Les anciens parlent encore de la période de 82 ans proposée par Démocrite, de celle de 247 ans par Gamaliel, de celle de 304 ans employée par Hipparque pour les années civiles (Riccioli, *Almag. I, 243*).

Grande
année des pa-
triarches.

1565. On trouve aussi dans les anciens quelques vestiges d'une période de 600 ans que M. Cassini a fait valoir comme la plus exacte de toutes les périodes lunifolaires. Joseph, dans ses Antiquités Judaïques (*Liv. 1, ch. 4, art. 15*), dit que les Patriarches n'auroient pu perfectionner l'astronomie s'ils avoient vécu moins de 600 ans, *parce que ce n'est qu'après la révolution de six siècles que s'accomplit la grande année.* M. Cassini observe aussi que 600 années solaires qui seroient de 365j 5^h 51' 37^{''} $\frac{1}{2}$ chacune, & 7421 mois lunaires (supposés de 29j 12^h 44' 3^{''} chacun) font de part & d'autre la même somme, savoir, 219146 jours 12^h 15' ou 18934258500^{''}; il n'y a pour la lune que 3^{''} de plus; or ces périodes sont peu différentes de celles que nous avons trouvées, savoir, pour l'année, 365j 5^h 48'
45^{''} $\frac{1}{2}$.

45'' $\frac{1}{2}$, & pour le mois lunaire , il y a 2000 ans, 29j 12^h 44' 2'' 95. Ainsi dans l'espace de 600 ans la lune doit revenir en conjonction avec le soleil dans le même point du ciel ; & cette période *lunifolaire* parut à M. Cassini si intéressante qu'il l'appella PÉRIODE DE LOUIS LE GRAND , (*Anciens mém. de l'acad. tom VIII , pag. 5* , Dissertation de M. de Mairan sur la période de 600 ans , à la suite de ses lettres au P. Parennin).

Période de
de Louis-le-
Grand.

J'observerai seulement que si l'on employe la durée de l'année que nous connoissons , & le mois synodique tel que nous l'avons indiqué ci-devant , l'on aura 28^h 33' 51'' de trop dans les 7421 mois lunaires , & la lune retarderoit de plus d'un jour au bout des 600 ans ; mais dans ces temps reculés on ne pouvoit connoître l'année solaire avec une si grande précision.

I 566. Le Néros des Caldéens n'étoit suivant M. Goguet que cette période de 600 ans ; mais on dispute beaucoup sur la valeur de trois périodes anciennes appellées SOSSOS , NÉROS , & SAROS. Bérose , Prêtre de Babylone en parloit dans son histoire des Caldéens composée 300 ans avant J. C. Cette histoire qui ne subsiste plus , fut citée par *Jule Africain* , auteur du deuxième siècle , qui composa une chronique Grecque , mais elle est également perdue ; George surnommé le *Syncelle* qui dans le huitième siècle a écrit une chronographie en Grec , cite un passage de Bérose qui avoit été rapporté par *Jule Africain* , où il s'agit du Sossos , du Néros & du Saros , & c'est-là le seul passage ancien où il en soit parlé. Le *Syncelle* cite *Annianus* & *Panodorus* qui avoient prouvé que le Sossos étoit de 60 jours , le Néros 600 jours , & le Saros de 3600 jours , ou 9 ans & dix mois ; M. Fréret a cru que le Saros étoit de 19 ans & demi , (*Mém. de l'acad. des inscr. tom. VI*). Le R. P. Giraud de l'Oratoire pense qu'il est de 3600 mois lunifolaires de 30 & de 31 jours qui font 3711 lunaisons (*Mém. de Trévoux Févr. 1760*).

Des Saros,
Neros & Sof-
fos.

M. Goguet (*Tom. III , pag. 261*) & M. Gibert , (*Mém. de Trévoux , Avril 1760*) estiment le Saros de

600 ans, M. de Mairan a réfuté M. Gouget à la suite de ses lettres au P. Parennin. Cette discussion me meneroit trop loin; mais je dois remarquer avec M. le Gentil (*Mém. acad.* 1756, pag. 64), que Suidas & après lui M. Halley ont attribué le nom de *Saros* à la période Caldaïque de 18 ans & onze jours ou de 223 lunaifons (1501), mais sans aucune espèce de preuve.

Période
lunaire des
Egyptiens,

1567. L'année lunaire est de 354 jours 9^h; car on peut négliger ici 11 minutes qu'il y a de moins que les 9 heures (1481), ainsi le temps que le commencement de l'année lunaire doit mettre à revenir d'accord avec le commencement de l'année solaire est de 2835 années solaires tropiques, qui font exactement 2922 années lunaires.

Cette période lunaire sert à M. Gibert (*Mém. de Trévoux*, 1762, pag. 197) pour expliquer un passage célèbre, mais très-obscur, d'Hérodote (*L.* 2, c. 42).

Passage sin-
gulier d'Hé-
rodote,

Hérodote voyageant en Egypte 450 ans avant J. C. entendit dire aux Prêtres Egyptiens que pendant la durée de 341 regnes qu'ils comptoient dans leur histoire; jusqu'au temps de Séthon, qui étoit sur le trône quand Sennachérib vint fondre sur l'Egypte, *le soleil s'étoit levé quatre fois des points où il a coutume de se lever; & que deux fois il avoit recommencé son cours du côté où il se couchoit au temps d'Hérodote, deux fois il l'avoit fini du côté où il se levoit au même temps.*

1568. M. Gibert pense que le mot de *soleil* doit se prendre au figuré; en effet, suivant le témoignage de *Phavorinus*, au mot *ἡλιος*, on disoit très-bien un soleil pour dire un jour, ou pour dire une année. M. G. évalue les 341 regnes à 11340 ans, à raison de 33 ans pour chacun, & il observe que dans cet espace de temps la période lunaire s'est accomplie 4 fois; les 4 renouvellemens de cette période donneront pour ainsi dire quatre levers du soleil, ou quatre commencemens d'année Egyptienne aux commencemens de l'année lunaire; mais dans ces 11340 ans l'année avoit commencé

deux fois dans la faison où elle finissoit au temps d'Hérodote, & fini deux fois dans la faison où commençoit l'année; voila peut-être le sens emblématique du passage. Cette conjecture paroît plus soutenable que les applications forcées qu'on a voulu faire des hypothèses astronomiques à ce passage d'Hérodote. V. M. Fréret sur la chronologie de Newton; M. Goguet sur l'origine des sciences, & différens volumes des mémoires de l'académie des belles lettres, où ce passage d'Hérodote est discuté.

1569. La précession des équinoxes formoit une grande période appellée chez les anciens *Αποκατάστασις*, ou *restitutio*, à cause du rétablissement des étoiles aux mêmes positions par rapport aux cercles de la sphère; elle est de 25972 ans, comme on le verra dans le XVI^e. livre (2745). Les peuples superstitieux firent de ce retour purement astronomique, un retour moral & civil des choses humaines, auquel on croit que Virgile fait allusion :

Alter erit tum Tiphys, & altera quæ vehat Argo
Delectos heroas : erunt etiam altera bella,
Atque iterum ad Trojam magnus mitteretur Achilles.

Eclogue IV, v. 34.

*DES ÉPACTES OU DE LA RÉFORMATION GRÉGORIENNE
pour les années lunaires.*

1570. LE calendrier établi par Grégoire XIII. en 1582, avoit pour premier objet de régler les années civiles de manière que l'équinoxe du printemps arrivât toujours aux environs du 21 de Mars, pour faire enforte que les mêmes faisons revinssent perpétuellement aux mêmes jours du mois : cet objet a été rempli par l'ordre des intercalations que nous avons expliqué (*art.* 1547).

Mais la réformation avoit encore une autre branche ;

importante dans les vues du souverain Pontife, c'étoit de remettre les nouvelles lunes & sur-tout le quatorzième de la lune Paschale au même état où elles avoient été en 325 au temps du Concile de Nicée, & dont elles étoient éloignées de plus de quatre jours.

Règle du
Concile de
Nicée.

I 571. Suivant le Concile de Nicée, on doit célébrer la fête de Pâque le 1^{er} Dimanche après le 14^e. de la lune, si ce 14^e. arrive le 21 de Mars ou après le 21 de Mars; ainsi la fête de Pâque ne doit jamais arriver plutôt que le 22 de Mars, car la règle dit que ce sera le premier Dimanche après le quatorzième; de même elle ne doit jamais arriver plus tard que le 25 Avril; car si la pleine lune tombe au 20 Mars, ce ne sera pas la pleine lune Paschale, on attendra celle qui suit le 21 Mars ou celle du 18 Avril; & si le 18 Avril se trouve un Dimanche, ce ne sera encore que le Dimanche suivant, 25 Avril, qui sera le jour de Pâque.

Limites
Paschales.

Le P. Alexandre, (Hist. ecclésiast. tom. III, pag. 378, chap. V. dissert. V), fait voir combien l'église a pris de soin depuis le Concile de Nicée pour empêcher qu'il ne se glissât quelque erreur dans la célébration de la Pâque; on s'en est occupé dans divers siècles; mais ce fut sous Grégoire XIII. en 1582, que la réformation du calendrier fut consommée à cet égard. Un des premiers qui s'en occupèrent fut S. Hyppolite, Evêque & Martyr qui vivoit l'an 228.

I 572. Le cycle Paschal de S. Hyppolite étoit de 112 ans, il étoit composé de 7 cycles de 16 ans; les auteurs ne nous en avoient donné aucune idée; mais en 1551 en fouillant dans les champs, qui sont aux environs de Rome sur le chemin de Tivoli, on trouva dans les mazures d'une ancienne église de S. Hyppolite une statue assise, ayant à ses côtés ce cycle en lettres Grecques depuis l'an 222 jusqu'à l'an 333. V. la dissertation de M. Bianchini sur ce cycle imprimée à Rome en 1703 in-folio, où il parle aussi d'un cycle lunaire de César trouvé à Rome sur un marbre antique. Il en est aussi fait mention dans le supplément

qui est à la fin du XVIIe. volume de l'Encyclopédie.

Il y a eu d'autres cycles relatifs à la fête de Pâques : on trouvera des détails considérables sur toutes les périodes qui ont servi à cet usage dans l'ouvrage intitulé : *Dissertationes de cyclis Paschalibus qui Enneadecaëteride Alexandrina nituntur, Dyonyssii scilicet & Bedæ, Ravennanensi Isidori felicis, Cyrilli, Theophili, Aniani, Panodori Metrodori, Anatolii, Eusebii, Synodi Nicænæ & Athanasii, ut & de Enneadecaëteridis Alexandrinæ natura & constitutione, initio seu primo anno, ratione embolismi, initio singulorum annorum & hujus initii translatione, ut & de computo lunari Alexandrinorum necnon de computo solari in genere, & Pauli Alexandrini atque Alexandrinorum in specie. Amstelædami apud Joannem Boom, 1736, petit in-4^o.*

Cycles pour la Pâque.

Les souverains Pontifes s'occupèrent plus d'une fois du projet de cette réformation (1545). Grégoire XIII, rassembla à Rome des savans de divers pays dès l'année 1576; un médecin nommé *Aloisius Lilius* lui présenta pour lors un projet de calendrier intitulé : *Compendium novæ rationis restituendi calendarii*, qui parut très-bien fait, que le Pape adressa en 1577, à tous les Princes chrétiens & à toutes les universités célèbres pour le faire examiner, & qui fut enfin adopté dans le bref de la réformation (1546).

1573. L'ÉPACTE ^(a) dans son principe est ce qu'il faut ajouter à l'année lunaire (1481) pour former l'année solaire (886); la suite des épactes est la suite des différences qui se trouvent entre ces deux sortes d'années. Il y a des épactes astronomiques destinées à trouver exactement les syzygies astronomiques moyennes en heures, minutes & secondes (art. 1752). Les épactes du calendrier sont destinées seulement à trouver, suivant l'intention de l'église, & la règle établie en 1582, les jours des nouvelles lunes ecclésiastiques; je dis suivant l'intention & la règle de l'église, parce que les nouvelles lunes ecclésiastiques ne sont pas tout-à-fait d'acc

Epactes du Calendrier.

(^a) ἐπιόγω, adjicio, j'ajoute.

cord avec les N. L. moyennes de l'astronomie (1589).

L'épacte qu'on assigne à chaque année dans le calendrier est le nombre qui indique l'âge de la lune, au commencement de cette année, suivant le calendrier ecclésiastique ; delà il suit que si la nouvelle lune arrive le 1 Janvier l'épacte est zéro pour cette année-là ; mais l'année suivante elle sera de 11, parce que l'année lunaire n'est que de 354, & l'année solaire est de 365 ; ce qui fait que la nouvelle lune étant tombée au 20 Décembre, la lune aura 11 jours le 1 Janvier de l'année suivante ; de même l'année d'après l'épacte est de 22 ; la troisième année elle seroit de 33 si l'on n'en ôtoit 30 pour former un mois complet, elle se réduit donc à 3. Par ce moyen les épactes d'années suivent l'ordre naturel des multiples de onze en retranchant toujours 30 ; savoir, 11, 22, 3, 14, 25, 6, 17, 28, 9, 20, 1, 12, 23, 4, 15, 26, 7, 18, 29. Tel est l'ordre naturel & primitif des épactes, quand on suppose les mois lunaires de 29 & de 30 jours ; & les années civiles de 365 jours, avec une bissextile tous les quatre ans.

Calendrier
perpétuel.

1574. Pour que l'épacte de l'année serve à indiquer la nouvelle lune, tous les mois, on place dans le calendrier perpétuel (1551), c'est-à-dire, le calendrier des lettres dominicales, qui est joint à tous nos livres d'églises, les 30 épactes à côté des jours du mois, en rétrogradant, suivant cet ordre, 30, 29, 28, &c. Si la nouvelle lune arrive le 2 Janvier, elle sera marquée par l'épacte 29, qui se trouvera également vers le 1 de Février, le 2 de Mars, & vers tous les autres jours de l'année où il devra y avoir nouvelle lune : on dira que l'épacte de cette année-là est 29. L'année d'après, l'épacte sera plus forte de 11 jours, parce que les nouvelles lunes arriveront onze jours plutôt ; ainsi ôtant 30 de la somme, on aura 11 pour l'épacte suivante, & toutes les fois que la lune avancera d'un jour, il faudra augmenter l'épacte d'une unité, pour que la nouvelle lune soit marquée un jour plutôt dans le calendrier perpétuel. Ainsi au bout de 19 ans, on ajoute 12 au lieu de 11,

& cette addition se fait toutes les fois que le nombre d'or passe de 19 à 1, parce que la dernière lunaïson de chaque cycle lunaire n'est que de 29 jours, au lieu de 30, (1556), ce qui fait avancer les nouvelles lunes d'un jour.

1575. Cet ordre primitif & régulier est celui qu'on suppose à l'époque du concile de Nicée; mais en s'en éloignant, on observe deux défauts dans cette règle; ou deux interruptions, on les appelle *équation lunaire*, & *équation solaire*; la première vient de ce que le cycle lunaire, de 19 ans, est défectueux d'environ $1^h \frac{1}{2}$ (1558), les 235 lunaïsons ne faisant pas tout-à-fait 19 ans, de sorte qu'au bout de 312 ans les nouvelles lunes arrivent un jour plutôt, & l'on est obligé de prendre l'épacte plus forte d'une unité. La seconde équation a lieu à cause du retranchement de trois bissextiles sur l'espace de 400 ans (1547), qui fait que la nouvelle lune arrive plus tard, & qu'il faut diminuer l'épacte. De cette double inégalité, il résulte que chaque siècle exige un nouvel ordre d'épactes; il y en a 30 suites différentes qui forment ce qu'on appelle *la table étendue des épactes*, (Planche VIII); ces 30 suites tiennent lieu de 30 calendriers qu'il auroit fallu avoir, & elles composent un total aussi parfait, que les règles de l'église & de la société civile pouvoient l'exiger.

Table des
Epactes.
Planche VIII.

Ces 30 lignes sont désignées par 30 lettres de l'alphabet qui descendent dans un ordre rétrograde; mais dans lesquelles on a seulement évité d'employer certaines lettres qui pouvoient occasionner de la confusion dans les caractères.

1576. En tête de la table on trouve les 19 nombres du cycle lunaire, en commençant par 3, qui au temps du concile de Nicée se plaçoit vis-à-vis le 1 Janvier. La première ligne horizontale de la table, marquée P, n'est autre chose que la suite des nombres que nous avons indiqués ci-dessus (1573), en commençant par 0 ou * sans autre interruption que celle d'un jour de plus, quand le nombre d'or devient 1. (1574); la seconde ligne mar-

quée *N* est la suite des nombres qui ont une unité de moins que la précédente, c'est-à-dire, 29, 10, 21, &c. La troisième ligne *M*, commence par 28, & ainsi des autres jusqu'à la dernière ligne qui commence par 1, 12, &c.

Le progrès des nombres de chaque ligne est toujours par XI comme celui de la première ligne; il y a dans chacune 19 chiffres qui répondent également aux 19 nombres d'or, qui croissent continuellement de XI, en retranchant 30 à chaque fois qu'ils s'y trouvent, exceptés sous le nombre d'or 1, qui est l'avant-dernier de tous, car alors l'épacte augmente de 12, parce que la dernière lune de l'année n'a que 29 jours, quoiqu'elle

1576, pag. 304, dans le titre de la Table & en marge, est la seule
ajoutez Planche VIII.

*TABLE de l'équation des Epactes où l'on voit
quelle ligne on doit prendre pour chaque siècle dans
la table étendue des Epactes.*

Années.	Ligne d'Ep.	Années.	Ligne d'Ep.	Années.	Ligne d'Ep.
Biff. 1582	D	2500	u	Biff. 3500	p
1600	D	2600	t	3600	q
1700	C	2700	t	3700	p
1800	C	Biff. 2800	t	3800	n
1900	B	2900	f	3900	n
Biff. 2000	B	3000	f	Biff. 4000	n
C 2100	B	3100	r	4100	m
2200	A	Biff. 3200	r	4200	l
2300	u	C 3300	r	CC 4300	l
Biff. 2400	A	3400	q	Biff. 4400	l

Cette table a été continuée par Lilius & par Clavius jusqu'à l'an 301700, & même quelques siècles au-delà, pour faire voir qu'alors elle recommencera dans le même ordre qu'en 1700, C, C, B, B, &c. en sorte qu'ils n'a-
voient

voient besoin que de 3000 nombres pour exprimer tous les changemens possibles des épactes à perpétuité, en supposant que les moyens mouvemens du soleil & de la lune fussent dans les siècles à venir; tels que les tables Pruténiques les supposoient; & que les variations du calendrier revinssent toutes au bout de trois cent mille ans.

Il y a 8 colonnes dans la Planche VIII, depuis le nombre d'or 12, jusqu'au nombre d'or 19, où l'on a mis l'épacte en chiffres Arabes, 25, au lieu de mettre xxv en chiffre romain, ce sont les 8 suites d'épactes qui contiennent vingt-cinq & vingt-six, & dans lesquelles la nouvelle lune auroit pu être indiquée deux fois en 19 ans pour le même quantième, sans cette diversité de caractère, comme nous l'expliquerons à l'occasion du calendrier perpétuel (1586).

1577. Il ne s'agit plus que d'apprendre à distinguer laquelle des 30 lignes doit s'employer à chaque siècle, puisqu'il se fait une interruption, en vertu de l'équation solaire & de l'équation lunaire (1575). La première ligne marquée *P* fut attribuée dans la réformation du calendrier au sixième siècle; on supposa que les nombres d'or indiquoient exactement pour ce siècle-là les nouvelles lunes; l'on prit pour époque du calendrier l'année 550, temps postérieur à celui du concile, parce qu'on voulut que les nouvelles lunes du calendrier fussent en retard sur les nouvelles lunes astronomiques moyennes, de peur que la fête de Pâques ne vînt à être célébrée avant le xiv de la lune paschale, contre l'intention de l'église (1589; or les nouvelles lunes moyennes arrivent quelquefois un peu avant la nouvelle lune vraie, sur laquelle les Juifs se régloient; l'église a donc voulu avoir dans son calendrier des nouvelles lunes moyennes qui ne pussent jamais devancer les vraies, mais qui les suivissent toujours.

1578. On a pris pour racine l'année 550^(a), sous

(^a) C'est pourtant à l'année 500 | des épactes *P*, mais on verra la raison qu'on a attribué la première ligne | de ces 50 ans d'anticipation (1580).

le règne de l'Empereur Justinien ; alors les nombres d'or indiquoient les nouvelles lunes environ 16 heures plus tard qu'au temps du concile de Nicée , comme on le voit par les tables astronomiques , & il n'y avoit plus de danger qu'elles pussent être indiquées plutôt que les nouvelles lunes vraies. L'on attribue à l'année 500 & au sixième siècle entier , la première ligne de la table générale des épactes , qui est marquée *P* dans Clavius , pag. 110 , & dans la table que nous avons expliquée ; mais comme au bout de 300 ans , c'est-à-dire , l'an 800 , il y a une équation lunaire & que la lune anticipe d'un jour dans le calendrier , les nouvelles lunes arrivant un jour plutôt , c'est le nombre précédent qui indique les nouvelles lunes , & il faut prendre la dernière ligne *a* , dont les épactes sont plus fortes d'un jour ; après un autre intervalle de 300 ans , c'est-à-dire , l'an 1100 , il y a encore une équation lunaire , la lune anticipe encore d'un jour , il faut donc pour le douzième siècle remonter d'une ligne , & l'on aura la ligne *b* qui commence par 11 , XIII , &c. De même en 1400 , on aura la ligne marquée *c*.

En 1582 l'on retrancha dix jours de l'année (1548) ; les nouvelles lunes arrivèrent donc dix jours plus tard , ainsi il faut descendre de dix lignes dans la table générale , & venir à la ligne *D* pour 1583 ; je dis que cela s'appelle descendre , parce que de la ligne *c* à la ligne *a* , on descend d'abord de deux lignes , & si l'on diminue encore l'épacte de l'unité , on trouve les nombres de la première ligne *P* qui est censée descendre encore davantage ; car la table générale des épactes est comme un cercle dans lequel on recommence dans le même ordre & sans interruption , lorsqu'on l'a parcouru tout entier.

En 1600 , il n'y a eu , ni équation lunaire , ni équation solaire , puisque la première avoit été employée en 1400 , & que la seconde ne devoit arriver qu'en 1700 , 1800 & 1900 (1547) , ainsi l'on a conservé la même ligne *D* , qui commence par XXIII.

1579. En 1700, il y a eu une équation solaire, parce qu'on a omis une biffextile (1547), & que l'année a été plus courte d'un jour; les nouvelles lunes ont dû arriver par cette raison un jour plus tard, & pour les indiquer un jour plus tard, il faut avoir l'épacte plus petite d'une unité (1574), ainsi en 1700, il a fallu descendre d'une ligne dans la table & prendre la suite des épactes qui répond à la lettre C, & qui commence par xxii. Cela doit arriver ainsi toutes les fois que l'on omet un jour, ou qu'on passe une biffextile, ce que nous appellons équation solaire. Il auroit dû y avoir une équation lunaire en 1700, nous dirons bientôt pour quoi elle fut remise à 1800 (1580, 1589).

1580. L'équation lunaire ayant été employée pour l'année 1400, en 1700 il y avoit 300 années d'écoulées, & il auroit fallu encore une équation lunaire (1589); cependant comme la lune anticipe d'un jour sur le cycle lunaire, non pas en 300 ans, mais seulement en $312\frac{1}{2}$ ans, ces $12\frac{1}{2}$ ans avoient été omis 4 fois depuis l'an 500; savoir en 800, 1100, 1400, 1700, ainsi il y avoit 50 ans, dont on avoit anticipé l'équation lunaire, d'ailleurs en partant de l'année 550, c'étoit en 850, 1150, 1450, 1750, qu'on devoit employer l'équation lunaire, ainsi ajoutant encore à 1750 les 50 ans dont on étoit resté en retard, on trouve qu'en 1800 il faudra employer l'équation lunaire, ce qui feroit une augmentation dans l'épacte (1574); mais en 1800, il y aura un jour intercalaire omis, de même qu'en 1700, & par conséquent, on devroit de même retrancher un de l'ordre des épactes, & descendre d'une ligne dans la table générale; ces deux effets se détruiront, les nouvelles lunes ne monteront ni ne descendront, elles demeureront aux mêmes jours, la même ligne C dans la table générale servira pour tout le 19^e. siècle qui commence en 1800, comme elle avoit servi pour le siècle précédent.

En 1900, on omettra encore un jour intercalaire, les nouvelles lunes descendront d'un jour, & il faudra

descendre à la ligne *B* de la table générale. L'année 2000 ne changera point de ligne, parce qu'il n'y a cette année-là, ni intercalaire omise, ni équation lunaire. En 2100 l'on omet une intercalaire, & l'on employe l'équation lunaire, parce qu'il y a 300 ans d'écoulés depuis 1800, où l'on a fait la dernière équation, ainsi le 22^e. siècle qui commence à 2100 conservera la même lettre *B* que le siècle précédent, de même que je l'ai remarqué pour l'année 1800.

En 2200, on omettra une intercalaire, & il n'y aura point d'équation lunaire, ainsi on descendra à la ligne *A* de la table générale, & par la même raison en 2300 on descendra à la ligne marquée *u*.

En 2400, on aura eu 300 ans depuis la dernière équation lunaire de 2100, il y aura donc une équation lunaire; mais il n'y aura point d'équation solaire, ainsi les nouvelles lunes monteront d'un jour (1574), & l'on reviendra à la ligne *A* de la table générale.

2500, Equation solaire, on descendra à la ligne *u*.

2600, Equation solaire, on descendra à la ligne *t*.

2700, Equat. sol. & lun. on conservera la ligne *t*.

2800, Aucune équation, on conservera la ligne *t*.

Ainsi dans les principes de Lilius, il est aisé de continuer à l'infini la table de l'équation des épactes, si l'on a égard à l'intercalaire qu'on doit retrancher trois fois en 400 ans, & à l'équation lunaire qui doit arriver tous les 300 ans, d'abord sept fois de suite, & après cela au bout de 400 ans seulement; cette différence vient de ce que les 12 ans & demi qu'on néglige tous les 300 ans, se trouvent avoir fait 100 ans au bout de 8 fois 300 ou de 2400 ans, il faut renvoyer alors l'équation lunaire à l'année séculaire qui suivra, comme nous l'avons indiqué, lorsque parvenus à 1700 nous avons rejeté l'équation lunaire à 1800; il arrivera donc toujours que l'équation lunaire sera différée au bout de 2400 ans à compter de 1800, c'est-à-dire, dans les années 4300, 6800, 9300, 11800, & ainsi de

fuite en allant toujours par 2500 ; alors au lieu d'être employée tous les 300 ans , elle ne le fera qu'au bout de 400 ans pour cette fois-là ; par ce moyen la lune ne remonte dans le calendrier que de 8 jours en 2500 ans , au lieu qu'elle remonteroit de 8 jours en 2400 ans. Nous avons marqué ces années de retard d'un double caractère CC dans la table de la page 304.

1581: Cependant Clavius observe qu'après l'an 8100, il doit y avoir une erreur dans la méthode de Lilius pour trouver l'équation, en sorte qu'à l'an 8200 il faudra descendre de la ligne *F* à la ligne *D*, c'est-à-dire, de deux lignes, & non pas d'une seule comme cela arriveroit suivant la règle précédente, & il donne une méthode pour construire d'une autre manière la table des épactes après l'an 8100, je ne la rapporterai pas ici, l'auteur convient lui-même que c'est assez pour nous d'avoir une règle constante pour un si long espace de temps ; d'ailleurs il sera aisé, en conservant même toute la disposition du calendrier, de monter ou de descendre d'une ligne dans la table générale, si dans la suite des temps on vient à s'appercevoir que les nouvelles lunes ont monté ou descendu dans le calendrier, ainsi il seroit très-inutile de s'occuper ici de la méthode que Clavius a donnée, c'est une pure curiosité (*Cap.* 12, n°. 10, *pag.* 150). On ne l'a point suivie dans le calendrier Grégorien.

Petite erreur du calendrier Grégorien.

Si l'on vouloit pousser la précision encore plus loin, il faudroit ajouter une nouvelle équation lunaire au bout de 481436 ans, parce qu'il y avoit outre les $312\frac{1}{2}$ ans 23^h & $17'$ (1558), qui font alors 100 ans ; mais comme cet espace de temps alloit au-delà du cycle de trois cent mille ans qu'on a regardé comme le grand cycle qui renouvelle le calendrier, Lilius a négligé cette dernière équation lunaire, bien persuadé qu'il n'y avoit aucun calcul astronomique qui pût se trouver encore exact après une si longue période.

Autre équation que l'on néglige.

1582. On sera curieux peut-être de voir ici la raison du grand cycle de 300 mille ans qui ramène les

Cycle de trois cent mille ans.

épâctes aux mêmes lettres & dans le même ordre : je considère d'abord qu'après dix mille ans, c'est-à-dire, après 100 siècles, on retrouve la même variété dans les lettres de la table générale, mais non pas les mêmes lettres ; après 1600 les deux années séculaires suivantes 1700 & 1800 ont la même lettre *C*, les trois années suivantes 1900, 2000 & 2100 ont la même lettre *B* ; l'année 2200 a la lettre *A*, l'année 2300 la lettre *u*, l'année 2400 la lettre *A*, l'année 2500 la lettre *u*, les 3 années 2600, 2700 & 2800 ont la même lettre *t*, &c. Et ce fera la même chose après 10 mille ans ou cent années séculaires ; par exemple, commençons à l'an 11600, & nous aurons les lettres suivantes.

Après 11600 les deux années 11700 & 11800 auront la même lettre i

Les 3 années 11900, 12000, 12100 auront la même lettre h

L'année 12200 aura la lettre g

L'année 12300 aura la lettre f

L'année 12400 aura la lettre g

L'année 12500 aura la lettre f

Les 3 années 12600, 12700, 12800 auront la même lettre e

Si l'on commençoit dix mille ans plus tard, ou à l'année 21700, on retrouveroit un ordre semblable dans la variété des épâctes ; en voici la raison : dans l'espace de 100 années séculaires, il arrive 32 équations lunaires, puisqu'on a vu que la lune en 25 séculaires rémonte dans le calendrier de 8 jours, ainsi les dix mille ans qui précèdent une époque, & les dix mille qui la suivent ont le même nombre d'équations lunaires, ils ont aussi le même nombre de biffextiles omises, c'est-à-dire, 25, ainsi un même espace de dix mille ans voit toujours une même interruption d'épâctes ; si l'on choisiroit un espace moindre, on ne trouveroit pas tout à la fois un nombre d'années séculaires divisible par

25 & par 4, par 25 pour former un nombre complet d'équations lunaires, & par 4 pour former un nombre complet de biffextiles omises.

Dans l'espace de 300 mille ans, il y aura non-seulement une variété pareille, mais le retour des mêmes lettres dans le même ordre. Pour le prouver, commençons à l'an 1700, où se trouve la ligne *C* de la table générale. Dans l'espace de dix mille ans, il y aura un changement de 43 lettres jusqu'à *k*, comme on peut s'en assurer en continuant le calcul précédent, pour 100 siècles; si des 43 l'on retranche les 30 qui font la table entière, on aura changé de 13 lettres; après le second espace de dix mille ans, on aura changé de 26. En procédant toujours ainsi de 13 en 13, & retranchant toujours 30, quand ils seront de trop, on parviendra enfin à trouver un changement de 30 lettres, mais ce ne sera qu'après avoir fait cette addition 30 fois, car il n'y a pas de nombre plus petit qui multipliant 13 puisse faire un multiple de 30. Ainsi ce n'est qu'après 30 intervalles de dix mille ans chacun que la même lettre peut revenir, & en même temps être suivie du même ordre & des mêmes variétés dans les lettres de la table générale.

1583. Il nous reste à parler de quelques artifices qu'on apperçoit dans les calendriers, pour l'ordre des épâctes. Nous avons dit que dans le calendrier perpétuel des épâctes & des lettres dominicales (1574), on trouve à côté des jours du mois les épâctes 30, 29, 28, &c. & les 7 lettres *G, F, E, D, C, B, A*, en commençant par le premier jour de Janvier. Dans ce calendrier tous les jours auxquels répond l'épâcte de l'année, sont ceux des nouvelles lunes cette année-là; mais il y a trois observations à faire sur trois articles particuliers de ce calendrier perpétuel.

Au lieu du nombre 30, on met une étoile * qui tient lieu de 30 & de zéro; en effet, dans les années où il y a nouvelle lune le premier Décembre & le 31, l'é-

Signe
ambigu.

acte qui marque l'âge de la lune quand l'année finit ; devrait être 30 , parce que la lune a 30 jours quand l'année finit ; mais elle devrait être zéro , si l'on considérait la nouvelle lune du 31 , ainsi l'on met un signe ambigu qui tient lieu de l'une & de l'autre , & qui s'applique à ces deux cas.

Epaetes
doublées.

Dans le calendrier perpétuel on a pratiqué six interruptions , où l'on a mis ensemble les épaetes xxiv & xxv ; sans cela les 12 suites d'épaetes qui sont de 30 chacune , formeroient 360 jours , au lieu de 354 qu'elles doivent former pour s'accorder avec l'année lunaire , qui a 11 jours de moins que l'année solaire (1481) ; cette suppression de 6 jours a été répartie sur la seconde trentaine , sur la 4^e , la 6^e , la 8^e , la 10^e & la 12^e , & les jours où elle tombe sont le 5 Février , le 5 Avril , le 3 Juin , le 1 Août , le 29 Septembre & le 27 Novembre ; ces six jours , qui par la disposition précédente , devraient avoir xxv d'épaete ont tout à la fois xxv & xxiv ; par-là on gagne un nombre à chaque fois , & il se trouve qu'à la fin de Décembre il reste 11 jours , comme cela doit être , puisque l'année lunaire n'a que 354 jours (1481).

Les 12 lunaisons de chaque année sont alternativement de 30 & de 29 jours (1556) , aussi l'on met alternativement 30 épaetes & 29 , d'abord les 30 dans le mois de Janvier , ensuite 29 , seulement en en réunissant deux au même jour , puis 30 , & ainsi de suite ; l'épaete xxiv dans Février , & toutes celles qui la suivent se trouve remontée d'un rang au-dessus de sa place naturelle vers le commencement du mois , à cause des deux épaetes xxv & xxiv qui sont réunies au 5 de Février ; ainsi les lunaisons qui commencent par les 30 épaetes qui précèdent les deux épaetes accumulées au 5 de Février , c'est-à-dire , par les épaetes xxv , xxvi , xxvii , xxviii , xxix , * , I , II , &c. jusqu'à l'épaete xxiv inclusivement , contiennent seulement 29 jours. Il faut dire la même chose des lunaisons qui répondent aux 30 épaetes

épaectes semblables qui précèdent dans cinq autres endroits du calendrier la réunion de $xxiv$ & xxv (*Clavius*, pag. 101).

1585. Dans les mois qui ont deux épaectes au même jour, xxv & $xxiv$, on pourroit craindre qu'il n'y eût deux nouvelles lunes indiquées au même jour, dans l'espace de 19 ans, savoir l'une quand l'épaecte de l'année seroit xxv , & l'autre quand elle seroit $xxiv$; or il ne peut pas y avoir deux nouvelles lunes dans les 19 ans, qui tombent au même jour du mois, puisqu'elles n'y reviennent qu'après les 19 ans révolus (1556); pour obvier à cet inconvénient dans la disposition des épaectes de la table étendue, on a mis 25 au lieu de xxv dans toutes les suites d'épaectes, ou dans toutes les lignes où les deux nombres 24 & 25 se trouvent ensemble & peuvent revenir dans l'espace de 19 ans; ce nombre 25 est mis dans le calendrier à côté de $xxvi$; parce que dans ces mêmes lignes d'épaectes les nombres 25 & $xxvi$ ne peuvent pas se trouver ensemble dans l'espace des 19 ans, dès-lors que 24 & 25 s'y trouvent.

Dans les mois qui ont 25 & $xxvi$ d'épaecte au même rang ou au même jour, il ne peut pas arriver, non plus, que la nouvelle lune soit indiquée deux fois au même jour en 19 ans, parce que 25 ne se trouve point dans les huit suites d'épaectes qui contiennent vingt-cinq & vingt-six, on n'a mis dans celles-ci que le nombre romain xxv , qui, dans le calendrier est à coté de $xxiv$, mais xxv & $xxiv$ ne sont point ensemble dans ces huit suites-là; ainsi l'on a toujours eu soin de faire enforte que les deux figures qui sont ensemble dans le calendrier à un même jour, ne fussent pas dans une même suite d'épaectes; il est bien vrai que les mêmes nombres y sont; mais l'un est en chiffres Romains, & en petites capitales, l'autre en chiffres Arabes, & cette différence de forme les distingue assez; quelquefois on met le 25 en rouge, comme dans les Bréviaires, ou dans les livres imprimés en deux couleurs.

1586. Toutes les fois que dans un cycle de 19 ans,

l'épacte xxv concourt avec un nombre d'or plus grand qu'onze, c'est-à-dire, avec les nombres d'or 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, il y a toujours dans ce même cycle une épacte xxiv; mais si pour lors on prend l'épacte 25 qui est d'un caractère ou d'une couleur différente, qui dans six endroits du calendrier est placée à côté de l'épacte xxvi, il ne pourra jamais y avoir deux nombres d'or ou deux nouvelles lunes au même jour, parce que cette épacte 25 marquée d'un autre caractère ou d'une autre couleur répond par-tout à un jour différent de celui qui a l'épacte xxiv.

Quand dans un cycle de 19 ans l'épacte xxv se rencontre avec un nombre d'or plus petit que 12 ou avec les nombres d'or 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 & 11, il ne peut pas arriver que dans le même cycle l'épacte xxiv se trouve employée avec l'épacte xxv; pour lors on prendra l'épacte xxv, qui dans six endroits est marquée au même jour que l'épacte xxiv, & puisque l'épacte xxiv n'aura pas lieu dans ce cycle-là, on ne risquera point de trouver dans le même cycle deux nouvelles lunes au même jour.

De même, quoique l'épacte 25 qui est différente en caractère ou en couleur, se trouve dans six jours de l'année à côté de l'épacte xxvi, on ne craindra pas; cependant, de trouver deux nouvelles lunes au même jour dans les 19 ans, parce que quand l'épacte xxv se trouve avec un nombre d'or, plus grand que 11, (& ce sont les seuls cas où l'on se ferve du caractère 25), l'épacte xxvi n'a jamais lieu dans le même cycle, pour indiquer les nouvelles lunes.

C'est ce que l'on peut voir aisément dans la table étendue des épactes, *Planche VIII*; car dans les 8 lignes marquées N, E, B, r, n, k, e, b, qui chacune répondent à un cycle lunaire, entier de 19 ans (1576), on voit l'épacte 25 distinguée par les chiffres Arabes sous les 8 nombres d'or, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19; l'épacte xxiv sous les onze autres, & jamais l'épacte xxvi. Mais dans les 22 autres lignes horizontales de

La table où l'épacte xxv se trouve sous les 11 petits nombres d'or, depuis 1 jusqu'à 12, on trouve quelquefois l'épacte xxvi, mais on n'y trouve pas xxiv. Si donc on prend tantôt l'épacte xxv, qui est dans le calendrier à côté de xxiv, & tantôt l'épacte 25 qui est d'un autre caractère ou d'une autre couleur, & placée dans le calendrier à côté de xxvi, ayant égard aux nombres d'or, petits ou grands, avec lesquels elle concourt, il n'arrivera jamais que dans le même cycle de 19 ans, il y ait deux nouvelles lunes au même quantième du mois, quoique dans les six endroits ci-dessus marqués, il y ait au même jour xxv avec xxiv, & xxvi avec l'épacte 25 du caractère différent.

Ainsi l'épacte xxiv ne peut pas avoir lieu quand l'épacte xxv concourt avec un des onze premiers nombres d'or, mais seulement quand elle concourt, avec un nombre d'or plus grand que 11, & l'épacte xxvi n'a jamais lieu lorsque l'épacte 25 de caractère différent concourt avec un nombre d'or plus grand que 11.

1587. On a choisi les épactes xxv & xxiv, pour les accumuler ensemble, quoiqu'on eût pu choisir deux autres épactes quelconques; mais c'étoit à peu près vers ces mêmes jours que l'on employoit l'équation de la lune dans l'ancien calendrier des nombres d'or, du concile de Nicée, & l'on a cherché à s'en rapprocher le plus qu'il étoit possible, dans la disposition du nouveau calendrier. (Clavius, pag. 103). Ces nombres xxv & xxiv que l'on met ensemble, ont même été choisis, d'ailleurs avec dessein, pour faire en sorte que presque toutes les lunaisons paschales fussent de 29 jours, comme le vouloient les Peres du concile de Nicée, & qu'elles commençassent toujours entre le 8 de Mars, & le 5 Avril. Il n'y a dans le nouveau calendrier que deux exceptions à la première règle, c'est lorsqu'on a pour épacte 25 & xxiv, & que 25 concourt avec un nombre d'or plus grand que 11, ce qui arrive bien rarement, il n'y a que ces deux lunes paschales qui soient de 30 jours. Lorsque les PP. de Nicée assignèrent 29

jours aux nouvelles lunes paschales, depuis le 8 Mars jusqu'au 5 Avril, il étoit facile d'y arranger 19 nombres d'or, de façon que tous donnaissent des lunaifons de 29 jours, mais comme il y a 30 épaçtes, on ne sauroit les arranger toutes dans 29 jours, à moins qu'on n'en mette deux à la fois au même jour, comme cela arrive au 5 Avril; c'est ce qui fait que la lunaifon de l'épaçte xxiv a 30 jours, & par conséquent aussi celle de l'épaçte 25 placée au-dessus de xxiv. (Clavius, pag. 103).

Si l'équation de la lune, au lieu de se faire au 5 Avril, se faisoit à la fin de Janvier & de Mars, comme *Aloysius Lilius*, premier auteur de ce calendrier, l'avoit pratiqué dans le *Compendium* que Grégoire XIII adressa en 1577 aux Princes chrétiens (1572), il y auroit sept lunaifons paschales de 30 jours au lieu de 2, enforte qu'on seroit beaucoup plus éloigné de cette partie de l'ancien usage de l'église, qu'on a voulu respecter autant qu'il étoit possible; l'on trouve même dans le calendrier Grégorien les nouvelles lunes, sur-tout celles de Pâque, rapportées pour le temps du concile de Nicée aux mêmes jours où elles ont été supposées dans ce temps-là, d'après les nombres d'or de l'ancien calendrier. C'est ce qui résulte de plusieurs longs chapitres qu'on pourra voir dans le grand traité de *Clavius*, dont il n'est possible de donner ici que les principes & les principaux résultats.

Autre réunion de deux épaçtes.

1588. Le troisième artifice employé dans la disposition des épaçtes du calendrier perpétuel, consiste à avoir mis à la fin de Décembre à côté de l'épaçte xx, une épaçte extraordinaire 19, qui est aussi différente ou par le caractère, ou par la couleur; elle sert uniquement à marquer la nouvelle lune le dernier de Décembre, lorsque l'épaçte xix concourt avec le nombre d'or 19, ce qui n'arrivera plus jusqu'après l'an 8200, & lorsque des trente cycles de la table, celui qui a la lettre D, sera en usage, comme il l'a été depuis la correction Grégorienne, jusqu'à l'année 1700 exclusive.

ment ; c'est dans cette ligne *D* seulement que l'épacte XIX se trouve sous le nombre d'or 19. L'épacte 19 placée au 31 de Décembre, doit alors indiquer une nouvelle lune, comme cela est arrivé en 1595, 1614, 1633, 1652, 1671, 1690. En effet, dès que le nombre d'or est 19, on doit ajouter 12 à l'épacte de l'année pour former celle de l'année suivante (1574) ; au lieu qu'on n'ajoutoit que 11 dans les autres cas ; ainsi à l'épacte XIX, lorsqu'elle a lieu avec le nombre d'or 19, il faut ajouter 12, & l'on a 1 d'épacte pour l'année suivante ; mais l'usage de l'épacte 1 ne se trouve dans le calendrier qu'au 30 de Janvier, donc si l'épacte 19 n'étoit pas placée dans le calendrier au 31 de Décembre pour y indiquer une nouvelle lune, la lunaïson de Décembre ne contenant alors que 29 jours (1556), il n'y auroit point de lunaïson indiquée dans le calendrier depuis le 2 Décembre jusqu'au 29 de Janvier. Car dans le mois de Décembre, il n'y a pas d'autre épacte XIX que celle du 2 de Décembre, & dans le mois de Janvier, il n'y a pas d'épacte XIX avant le 30. Cependant il y a dans le cas dont il s'agit, une lune de 29 jours qui commence le 2 Décembre, & une autre qui commence le 31 de Décembre ; le calcul prouve même qu'il y a en effet une nouvelle lune moyenne ce jour-là, quand le nombre d'or 19 concourt avec l'épacte XIX. (*Clavius pag. 104*).

Mais l'exception dont il s'agit ou l'addition de l'épacte 19 extraordinairement cumulée avec l'épacte XX ; au 31 de Décembre, ne fait dans le calendrier aucune confusion, parce qu'elle est à côté de l'épacte XX qui n'a jamais lieu dans le cycle où l'épacte XIX concourt avec le nombre d'or 19 ; en effet, on peut voir dans la table étendue des épactes que la ligne *D* qui a lieu dans le cas prévu ne renferme pas l'épacte XX. Ce nombre ne se trouve point dans les 19 épactes de ce cycle, il ne peut donc pas y avoir double emploi, ni deux nouvelles lunes indiquées au même jour dans l'espace des 19 ans, quoiqu'il y ait deux épactes au même jour.

15 1589. Les épâctes ne peuvent indiquer que les nouvelles lunes moyennes, c'est-à-dire, les nouvelles lunes qui auroient lieu, si la lune & le soleil alloient toujours d'un mouvement uniforme, & que leur longitude moyenne fût toujours égale à leur longitude vraie; ce seroit assez pour l'usage du calendrier civil, car l'on est toujours sûr de ne pas se tromper de plus d'un jour, même en se restreignant aux moyens mouvemens; mais nous devons observer encore que non-seulement les nouvelles lunes désignées dans le calendrier par les épâctes, ne sont point les nouvelles lunes astronomiques vraies qu'on observe, & qu'on trouve dans nos éphémérides, mais elles ne sont pas même exactement d'accord avec les nouvelles lunes moyennes; il y a souvent des différences qui deviennent sensibles; par exemple, en 1700 la pleine lune moyenne arriva le samedi 3 Avril vers les 11 du soir, à Rome; Pâque devoit donc se célébrer le lendemain, suivant la règle (1571); mais dans le calendrier la pleine lune étoit indiquée pour le 4, la fête se trouva donc renvoyée au 11 du même mois. (V. *l'Hist. de l'acad.* 1701, pag. 107). Lors de la correction Grégorienne, on voulut remettre les nouvelles lunes aux mêmes lieux où elles étoient au temps du concile de Nicée, par le moyen du cycle de 19 ans; mais comme en 625 ans le cycle ramene la nouvelle lune deux jours plutôt (1558), il y avoit alors quatre jours de différence entre les nouvelles lunes astronomiques & celles du cycle: dans l'exécution on n'a tenu compte que de 3 jours au lieu de 4, delà vient que la pleine lune astronomique vient souvent un jour avant la pleine lune Paschale, & que le calendrier n'a point à cet égard la justesse qu'on avoit eu intention de lui donner, delà vient aussi la contradiction apparente que l'on trouvera quelquefois entre les calculs rigoureux de l'astronomie, & les calculs beaucoup moins exacts du comput ecclésiastique.

Ainsi dans l'exécution du projet de la réformation l'on n'a pas exactement suivi l'intention de la bulle de

Grégoire XIII, il auroit dû y avoir une équation lunaire en 1700 (1579); depuis 1700 l'épacte répondant au nombre d'or 1, auroit dû être 1 au lieu qu'on ne lui attribue que 0 ou *, enforte qu'on n'a augmenté que de 3 jours les épactes lunaires depuis le Concile jusqu'à présent, au lieu de 4 jours; cette erreur d'un jour a fait tomber la fête de Pâque en 1704 au 23 Mars, au lieu qu'elle auroit dû être le 20 Avril, parce que dans cette année la pleine lune devoit être marquée au 20 Mars, & qu'elle ne le fut qu'au 21; or le 20 Mars n'est point du mois Paschal, mais le 21 en est, (*Hist. acad.* 1701). La raison de ce défaut est que l'objet des réformateurs étoit de demeurer plutôt au-dessous qu'au-dessus des véritables nouvelles lunes, pour empêcher que les épactes n'indiquassent la nouvelle lune plutôt qu'elle n'arrive réellement, & que la fête de Pâque ne fût célébrée le xiv de la lune ou même plutôt, c'est-à-dire, en même temps que chez les Hérétiques quarto-decimans; pour cet effet, on a eu plus d'égard à la pleine lune qu'à la nouvelle lune, on n'a pas craint qu'il arrivât que la fête de Pâque fût célébrée plus tard que le xxi de la lune, mais on redoutoit la célébration qui auroit pû tomber le xiv de la lune, quand il se trouve un Dimanche, parce que c'est le jour que choisissent les Juifs pour la célébration de la Pâque.

Cette remarque déjà faite par Clavius auroit dû prévenir le reproche astronomique fait par M. Cassini, au calendrier Grégorien, si ce n'est que M. Cassini ne trouvât pas cette raison suffisante pour avoir fait mettre entre le calendrier & l'astronomie une semblable différence; elle nuit à l'exactitude du calendrier, relativement à l'usage qu'on en peut faire pour trouver les nouvelles lunes.

Méthode pour trouver l'Épacte & les Fêtes mobiles pour une année quelconque.

1590. Si l'on veut y employer les tables, dont j'ai indiqué ci-dessus la construction, on commencera par chercher le nombre d'or (1556), parce que l'on a pris les nombres d'or qui suivent toujours un progrès uniforme pour servir à régler les irrégularités des épactes; ce nombre d'or pris au haut de la table étendue (Pl. VIII.), marquera la colonne dans laquelle doit se trouver l'épacte que l'on cherche.

Pour savoir dans quelle ligne de la table, & vis-à-vis de quelle lettre il faut chercher l'épacte, on prendra dans la table d'équation (1576), la lettre qui convient au siècle où l'on se trouve, & ce sera dans cette ligne qu'il faudra prendre l'épacte répondante au nombre d'or.

Trouver
l'épacte d'une
année.

1591. Pour avoir une règle particulière dans ce siècle-ci & le suivant; on multipliera par 11 le nombre d'or de l'année courante, parce que chaque année l'épacte augmente de 11, on ajoutera 19, parce que l'épacte est 18 à chaque dernière année du cycle lunaire; on divisera cette somme par 30, & l'on aura pour reste l'épacte de l'année.

Ainsi pour avoir l'épacte de 1762, on multiplie le nombre d'or 15 par 11, on a 165, on y ajoute 19, & l'on divise la somme 184 par 30, le reste de la division est 4 qui est l'épacte cherchée. On peut la trouver encore autrement : on multiplie par 11 le nombre 62, le produit est 694; on ajoute 9 au produit (c'est l'épacte de 1700), & de plus autant d'unités que le nombre d'or 1 est revenu de fois depuis 1700, ce qui est arrivé en 1710, 1729 & 1748, la somme 694 étant divisée par 30, le quotient est 23, & le reste 4 est l'épacte de 1762. Cette règle ne sert que pour le 18^e siècle.

Méthode pour trouver les Fêtes Mobiles. 321

Fêtes
mobiles.

1592. Le calendrier perpétuel dont nous avons déjà parlé (1551, 1574), où l'on marque les épaectes vis-à-vis de chaque jour, en diminuant toujours d'une unité, & les lettres dominicales A, B, C, &c. suffit, quand on a l'épaecte de l'année actuelle (1590), pour trouver la fête de Pâque & toutes les autres fêtes mobiles. L'épaecte de l'année indique tous les jours de pleine lune dans le calendrier perpétuel : ainsi pour avoir la nouvelle lune Paschale qui ne peut arriver qu'après le 7 de Mars, il faut voir à quel jour répond l'épaecte de l'année ; à compter du 8 de Mars inclusivement, & ce sera celui de la nouvelle lune Paschale ; le quatorzième jour, à compter de la nouvelle lune inclusivement, sera le jour de la pleine lune Paschale, & le premier Dimanche après cette pleine lune exclusivement ; c'est-à-dire, le premier jour où l'on trouvera la lettre dominicale de l'année (1552), sera le jour de Pâque.

1593. Les limites Paschales sont le 22 Mars & le 25 Avril (1571), ainsi en 1598, 1693 & 1761, la fête de Pâque est arrivée le 22 Mars ; elle s'y trouvera encore en 1818, 2285, 2437, 2505, &c. Au contraire cette fête n'est tombée qu'au 25 Avril en 1546, en 1666 & en 1734, & cela arrivera encore en 1886, 1943, 2038, 2190, &c.

La Septuagésime est toujours neuf semaines avant Pâque, ou le 64^e jour y compris celui de Pâque. Le mercredi des Cendres le 47^e jour avant le jour de Pâque, en comptant l'un & l'autre.

On trouve la fête de l'Ascension en comptant 40 jours après Pâque ; la Pentecôte en comptant 50 ; la Trinité 57 jours, & la Fête-Dieu 61 jours après Pâque ; celle-ci arrive toujours le même quantième du mois que le Samedi-Saint.

Le premier Dimanche de l'Avent ne peut arriver que depuis le 27 Novembre inclusivement, jusqu'au 3 Décembre inclusivement ; ainsi ce sera toujours le Dimanche compris dans cet intervalle.

1594. Les astronomes qui calculent des éphémè-

rides ont encore besoin de connoître les règles du calendrier pour d'autres usages ecclésiastiques ; voici les principales. Les jeûnes des Quatre-Temps, qu'on peut regarder comme des fêtes mobiles, ont été fixés par Grégoire VII, aux quatre époques suivantes, 1°. La première semaine de Carême ; 2°. La semaine de la Pentecôte, 3°. Le mercredi avant la fête de S. Mathieu ou après l'exaltation de Ste Croix qui se célèbre le 14 Septembre ; 4°. La troisième semaine de l'Avent. Si Noël arrive le lundi, le mardi ou le mercredi, c'est 2 mercredis avant Noël, sinon ce sera le mercredi d'au-paravant. Il paroît que les jeûnes des Quatre-Temps ont été institués à l'imitation de ceux qui étoient en usage chez les Juifs. (*Casali de veteribus sacris christianorum ritibus, Romæ, 1647 fol. pag. 252. cap. 63*) ; mais plusieurs de nos fêtes paroissent avoir été tirées aussi des usages du Paganisme : *Addimus prædictis, licuisse ecclesiæ, quæ apud ethnicos impiè superstizioso cultu agebantur feriæ, easdem sacro ritu expiatis ad pietatem christianam transferre, ut majori id esset diaboli contumeliæ, & quibus ipse coli voluerit, Christus & Sancti ejus ab omnibus honorarentur. Casali, c. 60, pag. 239.* Il cite Baronius in An. 44 & 58, & Spondanus, n°. 36 & 29.

Les Rogations sont le lundi avant l'Ascension. La fête des cinq Plaies de N. S. est le vendredi avant la Quadragesime. La *Compassion*, ou N. D. de pitié le vendredi de la Passion, exceptés quand l'Annonciation se trouve ce jour-là ; alors la petite fête fait place à la grande. Les jeûnes de Vigiles qui se trouvent tomber au Dimanche se transportent au samedi précédent, quand même ce seroit une fête.

Les fêtes doubles de S. Mathias, S. André & S. Thomas, qui dans le Carême & l'Avent se remettent du Dimanche au lundi ne sont point chomées par le peuple, & on ne les met pas en italiques ; l'Annonciation & la Conception qui sont fêtes solennelles se fêtent seules dans ce cas-là. Quand l'Annonciation tombe depuis le Dimanche des Rameaux, inclusivement, jus-

qu'au Dimanche de Quasimodo inclusivement, on la renvoie au lendemain de Quasimodo, comme cela est arrivée en 1758 1766 & 1769. Quand la Conception tombe au second Dimanche de l'Avent, elle se renvoie au lendemain. Quand la fête de S. André concourt avec le premier Dimanche de l'Avent, on la célèbre le lendemain ; dans tout autre cas, elle se fait le Dimanche. Dans les années biffexiles, la fête de S. Mathias se célèbre le 25 Février au lieu du 24, & Ste Honore le 28. J'observerai à cette occasion que, quoique l'usage ancien soit de mettre le nom d'un Saint à tous les jours du mois, dans la connoissance des temps, il y en a un grand nombre qui ne sont fêtés, ni à Rome, ni à Paris, mais dont les noms se trouvent seulement dans le Martyrologe Romain : l'édition de Paris par M. l'Abbé Chatelain est la meilleure. On peut consulter sur tous ces objets le livre intitulé : *Ordo perpetuus divini officii juxta ritum Breviarii ac missalis sanctæ Romanæ ecclesiæ. Ordinabat monachus Benedictinus e congregatione S. Mauri. Divione apud Fr. Desventes, 1759, in-12.* Et pour le Diocèse de Paris les *Rubriques générales* qui sont en tête du Bréviaire, sur lesquelles M. l'Abbé Joannot compose chaque année le *Breve Parisiense*, à l'imitation de l'*Ordo divini officii* qui s'imprime pour l'usage du Bréviaire Romain.

Des Epoques les plus célèbres, & de la manière d'en compter les années.

1595. JE ne parlerai point ici des époques incertaines sur lesquelles les chronologistes ne sont point d'accord ; le P. Pétau place l'époque de la création du monde, suivant les calculs de la Genèse, à l'an 730, de la période Julienne, 3984 ans avant J. C. ce qui fait 3983, suivant notre manière de compter (*Doctrina temporum tom. II, pag. 282, édit. de 1705*), mais il y a des Grecs, comme S. Clément d'Alexandrie, qui comp-

324 ASTRONOMIE, Liv. VIII.

tent 5624 ans, depuis la création du monde jusqu'à J. C., ou plutôt jusqu'au commencement de l'ère vulgaire, qui ne commence pas exactement à l'année de la naissance de J. C.

Epoques
des Olym-
piades.

L'ÈRE DES OLYMPIADES commence à l'année 3938 de la période Julienne, 776 ans avant J. C. ; ou 775 suivant notre manière de compter (1330). Le cycle solaire étoit 18, le cycle lunaire 5, l'indiction 8. Les Athéniens comptoient ces années de la nouvelle lune la plus voisine du solstice d'été, c'est-à-dire, d'un des jours des mois de Juin ou de Juillet ; il y a sur cet article quelques différences d'opinions parmi les chronologistes ; mais il n'y en a point sur l'année de cette date. Voyez le Pere Pétau, liv. IX, chapitre 40 & suiv.

Fondation
de Rome.

I 596. LA FONDATION DE ROME, selon Varron, se rapporte au 21 Avril 3961 de la période Julienne, 753 ans avant J. C. ou 752 suivant nous. Censorinus & la plupart des Savans, les Empereurs même dans les jeux séculaires, ont adopté cette manière de compter, qui forme les années Varroniennes de la fondation de Rome, quoique Rome ait été fondée l'année précédente, suivant Tarrutius, & l'année suivante selon les fastes du Capitole ; cette année 752 avant J. C. avoit 13 de cycle solaire, 9 de cycle lunaire & 1 d'indiction, (Riccioli, *Astron. reform. tab. XXII*).

Epoque de
Nabonassar.

I 597. L'ÈRE DE NABONASSAR célèbre par les calculs d'Hipparque & de Ptolomée, est celle de la fondation du royaume de Babylone, ou de la quatrième & dernière Monarchie de l'Empire des Assyriens, Nabonassar s'étant emparé de la ville de Babylone qui appartenoit aux Assyriens ou aux Medes ; cet événement ne fut pas d'abord extrêmement remarquable, mais un siècle après, au temps de Nabopolassar & de Nabuchodonosor, ce royaume devint célèbre. L'ère de Nabonassar commence à l'an 3967 de la période Julienne ; 747 ans avant J. C. suivant la manière de compter des Chronologistes, ou 746 suivant notre méthode (1330) :

Le commencement du mois Thoth tombe au 26 Février à midi, au méridien d'Alexandrie ou une heure 52' avant midi, au méridien de Paris. Cette année-là le cycle solaire étoit 19, le cycle lunaire 15, le cycle d'indiction 7. De cette époque se comptent les années Egyptiennes de 365 jours; & après 1460. ans complets, la 1461^e. année se retrouve commencer au 26 Février.

1598. La seconde année de Nabonassar commença de même le 26 Février 745, & la troisième le 26 Février 744, parce que les deux premières années étoient de 365 jours dans le calendrier Julien, comme dans le calendrier Egyptien; mais l'année Julienne 744 avant J. C. étant bissextile & contenant un jour de plus que l'année 3 de Nabonassar, la quatrième commence un jour plutôt, ou le 25 Février 743 avant J. C. Les trois années suivantes commencent encore le 25 Février; mais la huitième commence le 24 Février 739, la douzième le 23 Février 735; & ainsi de suite.

Par cette progression qui est fort simple, j'ai construit une table de huit cent quatre-vingt-huit années, qui se trouvent jusqu'à l'année 140 de J. C., où tombe la dernière observation de Ptolomée; en voici un extrait, pour l'usage des astronomes qui veulent réduire les observations de l'Almageste. J'y ai joint une table des mois Egyptiens, & du nombre de jours qu'ils contiennent. On trouve une table pareille des années de Nabonassar, mais moins commode que la mienne, dans le P. Riccioli (*Astronomia reformata*): On peut voir aussi M. de la Nauze, (*Mem. de l'acad. des inscrip. XIV, 334*).

TABLE du commencement des années de Nabonassar ,
réduites au Calendrier Julien , & des mois Egyptiens.

Années de Nabon.	Ann. Jul. avant J. C.	Années de Nabon.	Ann. Jul. avant J. C.	MOIS EGYPTIENS.		JOURS
1	26 Fév. 746	468	1 Nov. 280	θωθ.	Thoth. . .	30
2	26 Fév. 745	484	28 Oct. 264	φαφι.	Paophi ou Phaophi. .	60
3	26 Fév. 744	508	22 Oct. 240			
4	25 Fév. 743	592	1 Oct. 156	αθηρ.	Athyr ou Athir.	90
8	24 Fév. 739	596	30 Sept. 152	χοιακ.	Chœac, Kiak, ou Chiach.	120
12	23 Fév. 735	600	29 Sept. 148			
16	22 Fév. 731	712	1 Sept. 36	τυβι.	Tybi. . . .	150
26	20 Fév. 723	716	31 Août 32	μεχιρ.	Mechir ou Mekir. . .	180
100	1 Fév. 647	744	24 Août 4			
104	31 Janv. 643	748	23 Août 0	φαμενθ.	Phamenoth.	210
224	1 Janv. 523			φαρμουθι.	Pharmuthi, ou Pharmouthi.	240
227	1 Janv. 520					
228	31 Déc. 520		Après J. C.	παχων.	Pachon ou Pakon. . . .	270
232	30 Déc. 516					
348	1 Déc. 400					
		752	22 Août 4	παυνι.	Payni ou Pauni.	300
		840	31 Juil. 92	επιφι.	Epéphi ou Epi-phi. . . .	330
		864	25 Juil. 116			
		872	23 Juil. 124	μεσορι.	Mesori ou Mesfori. . . .	360
		888	19 Juil. 140		Cinq jours intercalaires.	365

1599. Par le moyen de cette table, on réduit facilement au calendrier Julien les observations qui sont dans Ptolomée. La plus ancienne est une éclipse de lune qui commença à Babylone, la première année de *Mardocempade*, où la 27^e de Nabonassar, le 29 du mois Thoth une heure entière après le lever de la lune; (*Almag. IV, 6*). L'année 27 de Nabonassar commençoit le 20 Février, ainsi le 29 du mois Thoth seroit le 48^e. de Février; il en faut ôter 29 jours que contient le mois de Février, parce que cette année 720 étoit biffextile (1541); il reste le 19 Mars de l'année 720, suivant notre manière de compter, & celle de M. Cassini, (1330); car la plupart des chronologistes l'appellent année 721.

Je suppose qu'on demande à quel jour répond le 17 du mois Kiak de la 86^e année de Nabonassar, jour où fut faite la seconde observation de Mercure; on voit par la table précédente que l'année 486 commençoit le 28 Octobre, 262 ans avant J. C., & par la table des mois que le 17 du mois Kiak étoit le cent septième jour à compter du 28 Octobre inclusivement; car le 28 étoit déjà de l'année 486; on prendra donc quatre jours qui restent du mois d'Octobre, savoir, 28, 29, 30, 31, trente du mois de Novembre, 31 du mois de Décembre, 31 du mois de Janvier, 261 avant J. C. La somme est 96, il en reste onze pour aller à 107, donc le cent septième étoit le 11 Février 261; c'est le jour qui répond au 17 du mois Kiak de l'an 486 de Nabonassar, (*Mém. acad.* 1766, pag. 465, 480). On remarque que dans cette observation faite le 18 au matin pour ceux qui comptent depuis minuit; Ptolomée a soin de dire que c'est entre le 17 & le 18, c'est-à-dire, le 17 en comptant depuis midi, ou le 18 si c'étoit vers le lever du soleil, parce que du temps de Ptolomée le jour civil commençoit au lever du soleil. On trouve cette attention en plusieurs endroits de l'Almageste, (pag. 59, 225, 226, 233, &c. *édit. de 1551*).

1600. LA MORT D'ALEXANDRE le Grand, arriva le 19 Juillet, l'an 4390 de la période Julienne, 324 ans avant J. C. ou 323 suivant nous; & la septième année de la première période Calippique. Cette époque sert à réduire les observations d'Hipparque, rapportées par Ptolomée aux années de la mort d'Alexandre; par exemple, Hipparque observa un équinoxe (*Almag. III; 2*), le 27 du mois Méchir au matin, la trente-deuxième année de la troisième période Calippique; la 178^e depuis la mort d'Alexandre, ou la 602^e depuis Nabonassar (1330), & les chronologistes la rapportent au 24 Mars, 146 avant J. C., ou 145 suivant notre manière de compter.

1601. La première année de l'ère chrétienne ou Ere vulgaire.

ere vulgaire est la 4714^e de la période Julienne ; l'an du monde 3984, suivant le calcul du P. Pétau ; cette année on avoit 10 de cycle solaire, 2 de cycle lunaire ; 4 d'indiction romaine, c'est la 46^e des années Juliennes ; c'est-à-dire, la 46^e année à compter depuis la réformation du calendrier par Jules César ; elle concourt depuis le 1 Janvier jusqu'au 21 Avril avec l'année de Rome 753, & ensuite avec l'année 754. Avant la nouvelle lune, la plus proche du solstice d'été, elle concourut avec la quatrième année de la 194^e. Olympiade ; & le reste de l'année fut dans la première de la 195^e. Olympiade. Jusqu'au 23 Août à midi, elle concourut avec l'année 748 de Nabonassar, & avec l'année 324 de la mort d'Alexandre ; mais dans le reste de cette année-là, on compta 749 & 325 (*Astr. ref. tab. XXII*). La naissance effective de J. C. tombe à la fin de l'année 2 avant l'ere chrétienne, ou 471^e de la période Julienne, suivant Baronius & Scaliger ; & même deux ans plutôt suivant quelques auteurs ; mais le P. Pétau prouve assez qu'il y a là dedans beaucoup d'incertitude (*Liv. XII ; c. 4, 5 & 6*). Le P. Alexandre, dans sa grande histoire ecclésiastique, la fixe à la fin de l'année 4709, ou 4 avant J. C. *Differt. I, tom. III, pag. 65 & 66.*

Hégire.

1602. L'ÉPOQUE DES TURCS, appelée *Hégire*, commence à la fuite de Mahomet qui sortit de la Mecque ; elle tombe au vendredi 16 Juillet 622, ou 5335 de la période Julienne. Il y a une autre Secte d'Arabes, (suivie dans les tables Alphonfines) qui place le commencement de l'hégire au jeudi 15 Juillet. Les années Arabes font de 354^j 8^h 48', & les années civiles font des années lunaires de 354 & ensuite de 355 jours ; ainsi 12 années Juliennes font 12 ans 130 jours & 14 heures. Ils partagent leurs années en cycles de 30 ans, dans lesquels ils font 19 années communes de 354 jours, & onze de 355, savoir, les années 2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 21, 24, 26 & 29, de chaque cycle ; leur cycle a commencé en 1757 le 14 Septembre, avec l'année 1171 de l'hégire.

Années Arabes.

1603. On trouve des tables détaillées de la correspondance des années Arabes avec les années Juliennes, dans le P. Petau, liv. VII, c. 22, dans Riccioli, dans le livre d'Ulug-Beg intitulé : *Epochæ celebriores*, que Gravius publia à Londres en 1650, & dans le catalogue d'étoiles d'Ulug-Beg, qui fut publié avec des commentaires, par Th. Hyde à Oxfort en 1665, & qu'on y a réimprimé en 1767. En voici un extrait pour le temps où nous sommes.

Un Savant m'ayant assuré qu'il falloit ajouter deux jours à ceux de cette table de Gravius, pour se conformer à l'usage actuel des Turcs, j'ai consulté M. Cardone, favant dans les langues Orientales qui m'a fait voir sur un almanach perpétuel, dressé à Constantinople, la même correspondance que dans la table de Gravius.

Années Grégor.			Hégire
1770	26	Avr.	1184
1771	15	Avr.	1185
1772	4	Avr.	1186
1773	24	Mars	1187
1774	13	Mars	1188
1775	2	Mars	1189
1776	20	Févr.	1190
1777	8	Févr.	1191
1778	29	Janv.	1192
1779	18	Janv.	1193
1780	7	Janv.	1194
1780	27	Déc.	1195

On peut voir la comparaison détaillée des calendriers & des époques, usités chez les Romains, les Egyptiens, les Arabes, les Perses, les Syriens & les Hébreux, dans le Commentaire sur le premier chapitre d'Alfragan, ajouté par *Christman* à l'édition de 1590 in-8°. dans le P. Riccioli, (*Chronol. reformata*), dans le P. Pétau, &c.

DU LEVER HÉLIQUE

Cosmique ou Acronique de différentes Etoiles.

1604. LES POETES & les Auteurs anciens qui ont écrit sur l'Astronomie, l'agriculture & l'histoire, parlent souvent du lever & du coucher des étoiles, & sur-tout du lever hélicque (218). Ces passages sont souvent

obscurs & même pleins de contradictions ; c'est ce qui m'engage à donner ici les principes de cette matière, afin qu'avec un peu d'astronomie on puisse entendre ces auteurs, & même les éclaircir.

Chaque année le soleil par son mouvement propre d'Occident vers l'Orient rencontre les différentes constellations de l'écliptique, & les rend invisibles pour nous par l'éclat de sa lumière. Lorsque le soleil après avoir traversé une constellation est assez éloigné d'elle pour se lever une heure plus tard, la constellation commence à paroître le matin en se levant un peu avant que la lumière du soleil soit assez considérable pour la faire disparoître ; c'est ce qu'on appelle *lever héliaque* ou *solaire* des étoiles. De même le *coucher héliaque* arrive lorsque le soleil approche d'une constellation : car avant qu'il l'ait atteint elle cesse de paroître le soir après le coucher du soleil, parce qu'elle se couche trop peu de temps après lui. Il est sur-tout nécessaire, pour l'intelligence de la chronologie & des Poëtes, d'avoir une idée de ce lever héliaque : commençons par celui de Sirius qui étoit si célèbre parmi les Egyptiens. Nous avons sur cette matière un petit ouvrage de Bainbrigijs intitulé : *Canicularia*, augmenté par *Gravius*, & publié à Oxfort en 1648, ce livre est fort rare actuellement ; le P. Pétau en a aussi traité, *Variar. dissertat.* livre VII, c. 1.

Lever hélia-
que des étoi-
les.

Lever hélia-
que de Sirius.

1605. Le lever héliaque de Sirius il y a 2000 ans arrivoit en Egypte vers le milieu de l'été, lorsque après une longue disparition cette étoile commençoit à re-paroître le matin, un peu avant le lever du soleil ; la saison qui régnoit alors, ou la situation du soleil, étoit à peu-près la même que celle du 12 Juillet parmi nous ; & c'étoit le temps où le vent Étésien soufflant du Nord sur l'éthiopie y accumuloit les vapeurs, les nuages & les pluies, & causoit les débordemens du Nil ; aussi le lever de Sirius s'observoit avec le plus grand soin, c'étoit une des cérémonies religieuses de ce temps-là,

Spectacle de la nature, tom. IV, pag. 307. Hist. du Ciel, tom. I, pag. 42, 277.

L'année cynique des Egyptiens commençoit au lever héliaque de Sirius; mais pour ce qui est de leur année civile qui étoit continuellement de 365 jours (1597), elle ne pouvoit pas s'accorder avec l'année naturelle, & tous les 4 ans le lever de Sirius devoit arriver un jour plus tard dans l'année civile. Après un espace de 1460 ans, que Cenforinus appelle la grande année des Egyptiens, l'année naturelle se retrouvoit commencer au même point de l'année civile; ainsi l'an 1322 avant J. C. & l'an 138 après J. C. le lever de Sirius se trouva arriver le premier jour du mois *Thoth*, ou le premier jour de l'année civile, qui répondoit au 20 Juillet; c'est cette période *Caniculaire* ou *Sothiaque* de 1460 ans dont on trouve des vestiges dans quelques anciens auteurs. (Cenforinus, c. 18. Plato in *timæo*, Clem. Alexand. *Stromatum*, lib. I. Riccioli, *Alm.* I, 129. Petav. *var. dissert.* lib. II, c. 4). Les anciens étoient en erreur dans ce calcul de plus de 36 ans, parce qu'ils ne connoissoient point l'année sydérale ou astrale qui devoit régler le cycle sothiaque, ils croyoient que 1460 années solaires étoient égales à 1461 années vagues ou civiles; mais comme il y a quelque chose de moins pour l'année tropique, & quelque chose de plus pour l'année sydérale, la période n'étoit point exactement de 1460 ans; au bout de ces 1460 ans l'année civile ou vague ne concouroit réellement, ni avec l'année tropique, ni avec l'année sydérale. En supposant l'année sydérale de 365^j 6^h 9' 11", 2 (888), il ne faut que 1424 années sydérales pour faire 1425 années Egyptiennes, vagues ou communes, l'une & l'autre formant le nombre de 520135 jours. En supposant l'année tropique; de 365^j 5^h 48' 45", 5 (886), il falloit 1507 années tropiques ou 1508 années communes pour ramener les saisons au même jour de l'année, après un intervalle de 550420 jours; ainsi la période de 1460 ans ne ramenoit point au mê-

Année
cynique.

Période
Caniculaire.

me jour les levers des étoiles, qui n'exigeoient que 1425 ans, ni les faisons qui en exigeoient 1508. On peut voir encore sur cette matière M. Dupuis, *Mém. de l'acad. des Inscriptions & Belles Lettres*, tom. XXIX, pag. 116 & suiv.

Arc d'émer-
sion de Si-
rius.

Fig. 89.

1606. Pour trouver exactement le temps de l'année où devoit arriver en Egypte le lever héliaque de Sirius, nous supposons que cette étoile pouvoit être aperçue à son lever par des yeux attentifs pourvu que le soleil fût encore abaissé de 10° sous l'horizon, quoique Ptolomée donne en général 12° pour l'arc d'émer-sion des étoiles de la première grandeur (2261). Soit P le pôle (fig. 89) γC l'équateur, γD l'écliptique, S l'étoile dont il s'agit. Sous une latitude de 30° telle qu'on l'observe dans la basse Egypte, on aura $PZ = 60^{\circ}$, l'angle $ACS = 60^{\circ}$, AS de $16^{\circ} 22'$; c'est la déclinaison de Sirius vers l'an 138 où commence la période Sothiacale. En résolvant le triangle CAS on trouvera CA de $9^{\circ} 44'$; c'est la différence ascensionnelle qui étant ajoutée à l'ascension droite γA de Sirius pour ce temps-là $80^{\circ} 16'$, donne l'ascension oblique γC $90^{\circ} 0'$; ainsi le point C de l'équateur qui se levoit en même temps que l'étoile, avoit 90° d'ascension droite. Dans le triangle γBC on trouvera l'arc de l'écliptique γB qui répond à l'arc γC de l'équateur, l'angle B (qui dans le cas présent se trouve être un angle droit), & la déclinaison BC qui dans notre cas étoit égale à l'obliquité de l'écliptique; nous la supposons de 23 degrés 40 min.

Dans le triangle BCD connoissant BC , l'angle B ; & l'angle BCD , égal à la hauteur du pôle, on trouvera $BD = 13^{\circ} 3'$; cet arc ajouté à la longitude du point B donnera celle du point coascendant D ; on cherchera aussi l'angle D . Si l'on suppose enfin le soleil au point M de l'écliptique, 10° au-dessous de l'horizon; il faudra chercher la longitude du point M , & ce sera le lieu du soleil au premier instant où Sirius doit s'apercevoir à l'horizon, le soleil étant encore assez bas

Dans le triangle *MND* l'on connoît l'angle *D* par l'opération précédente , auffi bien que $MN=10^{\circ}$: on trouvera $DM=11^{\circ} 16'$ qui ajouté à la longitude du point *D* , donnera celle du point *M* de $3^{\circ} 24' 19'$. Telle étoit la longitude du foleil le jour du lever hélique de Sirius , le premier jour où Sirius paroiffant à l'horizon le matin se trouvoit affez dégagé du foleil pour pouvoir être apperçu : c'est la longitude que le foleil a maintenant le 16 de Juillet. On trouve cette longitude plus petite de $12^{\circ} \frac{1}{4}$ en remontant 1460 ans plutô , ou au commencement de la période précédente , fuivant le calcul de *Bainbrigijs*. Au refte ces réfultats ne font pas fufceptibles d'une grande précifion , non plus que l'obfervation du lever hélique d'une étoile ; l'état de l'atmosphère , la fuation de l'obfervateur , la latitude des différentes Provinces d'Egypte y devoient apporter des différences confidérables. Il y a des pays où l'on voit Sirius lors même que le foleil eft élevé fur l'horizon. On trouveroit de la même manière le temps du lever hélique des autres étoiles pour une époque donnée ; mais il nous fuffit d'avoir fourni un exemple de la méthode ; tout ceci appartient plus à l'intelligence des anciens qu'à l'histoire de la véritable aftronomie. (V. le P. Pétau , l. III , diff. l. I , c. 2 , &c).

Fig. 82.

Longitude du Soleil au lever de Sirius.

1607. Quoique le lever hélique des étoiles fût le plus remarquable parmi les anciens , ils diftinguoient encore plufieurs autres efèces de levers & de couchers (*Gemini elementa*) ; les modernes à leur imitation ont diftingué le lever *cofmique* qu'on peut appeller le lever du matin ; & le coucher *cofmique* ou coucher du matin , auffi bien que le lever & le coucher *acroniques* (a) qu'il vaudroit mieux appeller le lever & coucher du foir. Le moment du lever du foleil règle le lever ou le coucher *cofmique* : lorsque des étoiles fe lèvent avec le foleil ou fe couchent au foleil levant , on dit qu'elles fe lèvent ou fe couchent *cofmiquement* ; mais quand les étoiles fe lèvent ou fe couchent le foir au mo-

Lever *cofmique* & *acronique*.

(a) Ἀκρονικός , *vespertinus*.

334 ASTRONOMIE, Liv. VIII.

ment où se couche le soleil, on dit que c'est le lever ou le *coucher acronique*; d'où il suit que le coucher acronique suit à 12 ou 15 jours près le coucher héliaque, du moins pour les étoiles voisines de l'écliptique, & que le lever cosmique précède de la même quantité le lever héliaque.

1608. Le P. Pétau a calculé une table fort ample de ces différentes sortes de levers & de couchers des différentes étoiles pour le temps de Jules César: en voici un extrait. Pour s'en servir, il faut observer que les quatre saisons de l'année qui commencent en 1772, les 20 Mars, 21 Juin, 22 Septembre & 21 Décembre, arrivoient du temps de César, les 23 Mars, 25 Juin, 25 Septembre & 23 Décembre, c'est-à-dire, deux ou trois jours plus tard, suivant le calendrier Julien qui fut établi à Rome, 44 ans avant J. C.

TABLE qui marque le lieu du Soleil en signes & degrés, pour le temps du lever & du coucher des 12 principales étoiles à Rome, la première année de la correction Julienne, 44 ans avant J. C.

	Lever Cosmique.	Lever Héliaque.	Lever Acronique.	Coucher Cosmique.	Coucher Héliaque.	Coucher Acronique.
Antarès.	7 ^s 14 ^d	7 ^s 27 ^d	1 ^s 14 ^d	1 ^s 2 ^d	6 ^s 3 ^d	7 ^s 2 ^d
L'aigle.	8 9	8 27	2 9	3 26	9 10	9 26
Arcturus.	5 14	5 26	11 14	2 3	7 11	8 3
La Chèvre.	11 17	0 17	5 17	8 14	1 28	2 14
Luis. de la couron.	5 26	6 10	11 26	3 4	7 15	9 4
Queue du Cygne. .	7 21	8 6	1 21	5 14	11 0	11 14
Queue du Dauphin.	8 17	9 6	2 17	4 5	9 14	10 5
Prem. tête des Gém.	2 14	3 0	8 14	8 28	2 13	2 27
Aldébaran.	1 21	2 11	7 21	7 9	0 26	1 9
Cœur de l'Hydre. .	4 11	4 25	10 11	9 4	2 16	3 4
α de la Balance. . .	6 17	7 11	0 17	0 17	5 24	6 17
Regulus.	4 1	4 18	10 1	10 3	2 27	4 3
Sirius.	3 23	4 8	9 23	7 19	1 6	1 19
γ des Pleiades. . .	0 23	1 28	6 23	7 3	0 18	1 3

1609. On trouve dans les élémens d'astronomie de *Geminus*, & dans les dissertations du P. Pétau, *Doctrina temporum*, tom. III, plusieurs circonstances des différentes sortes de lever & de coucher, avec plusieurs dissertations & plusieurs tables pour trouver à différens jours de l'année le lever & le coucher de différentes étoiles; ces détails me conduiroient trop loin, je me contenterai de rapporter quelques passages des Poëtes latins pour servir d'exemple.

Hippocrate même parle de ces circonstances, il dit qu'on doit observer les levers & les couchers héliques des étoiles, spécialement du grand Chien & d'Arcturus, de même que le coucher cosmique des Pléiades, (*Hipp. de Ære*); mais cela doit s'entendre de l'influence des différentes saisons de l'année, de la chaleur, de l'humidité, & des autres qualités de l'atmosphère dans chaque mois.

Polybe racontant la perte de la flotte Romaine dans la première guerre Punique, attribue ce malheur à l'obstination des consuls qui avoient voulu, malgré les pilotes, se mettre en mer entre le lever d'Orion & celui du grand Chien, saison toujours orageuse. Le lever hélique d'Orion arrivoit le 26 Juin, suivant Plin & Ovide; mais celui du grand Chien arrivoit le 26 Juillet, suivant Columelle, c'est donc dans le mois de Juillet qu'ils naviguoient.

1610. C'est sur-tout dans ses fastes qu'Ovide parle souvent des étoiles; ce Poëte annonce d'abord qu'il va chanter les principes sur lesquels étoit fondée la division de l'année Romaine, le lever & le coucher des constellations :

Tempora cum causis Latium digesta per annum,

Lapsaque sub terras, ortaque signa canam. *Fast. I. 1.*

1611. Après avoir parlé des 12 mois de l'année & des divinités qui y présidoient, il entre dans la partie astronomique de son ouvrage, en faisant un éloge pom-

peux des anciens astronomes, *Felices animæ*, &c. vers 297. Le lever héliaque de la Lyre est le premier dont il parle. & il le fixe au jour des Nones, c'est-à-dire, au cinq de Janvier :

Signa dabunt imbres exoriente Lyrâ. I. 306.

Il faut convenir que la détermination de ce jour n'est point exacte; le lever héliaque arrivoit dès le 6 Novembre, mais les Poètes ne se piquent pas d'une bien grande précision; on peut voir dans le P. Pétau, *Dissertationum*, lib. II, c. 8, beaucoup d'inexactitudes & d'erreurs dans différens passages des anciens.

1612. Ovide est plus exact lorsqu'arrivé au 9 de Janvier, il parle du lever héliaque de la constellation du Dauphin,

Interea Delphin clarum super æquora fidus
Tollitur, & patriis exerit ora vadis. I. 457.

Car la constellation du Dauphin se devoit vers les 6 heures du matin dans cette saison-là, c'est-à-dire, assez long-temps avant le soleil pour pouvoir être observée le matin, & c'étoit le commencement de son apparition, ou son lever héliaque; au contraire il place au 10 de Juin le lever acronique, en disant :

Navita puppe, sedens Delphina videbimus inquit,
Humida cum pulso nox erit orta die. VI. 470.

Quand les Pléiades (*Atlantides*) se couchoient cosmiquement ou au lever du soleil, la Couronne se devoit héliaquement, paroissant avant le soleil. *Georg.* I. 222.

1613. Le coucher cosmique paroît indiqué pour le premier Avril au matin.

Dum loquor, elatæ metuendus acumine caudæ
Scorpius, in viridès præcipitatur aquas. IV. 163.

C'est cependant au 15 Avril qu'on le trouve par le calcul, au temps de César, pour l'étoile *Antarès*.

Le

Le lever héliaque des pléiades & le commencement de l'été sont annoncés pour le 13 de Mai; ce seroit le 21, suivant le calcul du Pere Pétau.

Pleiadas aspicias omnes, totumque sororum

Agmen, ubi ante idus nox erit una super;

Tum mihi, non dubiis autoribus, incipit æstas. *L. V. 599.*

1614. Puisque nous en sommes à des faits astronomiques propres à éclaircir les ouvrages des anciens Poëtes; nous dirons un mot du rapport qu'il y avoit entre les constellations, & les points Cardinaux de l'écliptique où commençoient les saisons. En 1770, le soleil entre dans le signe du Bélier, & dans l'équinoxe, en commençant le printemps le 20 de Mars; mais il n'entre dans la *constellation*, c'est-à-dire, dans les étoiles qui portent le nom de Bélier que le 29 Avril; car la première étoile γ est à $29^{\circ} 58'$ de l'équinoxe, parce que les points Cardinaux de l'écliptique, c'est-à-dire, les équinoxes & les solstices ont rétrogradé de 30 degrés, depuis le temps où ils étoient d'accord avec les constellations. Cette rétrocession ou précession des équinoxes est fort lente (915), il faut 2145 ans pour qu'elle soit d'un signe entier, ou de 30 degrés; mais lorsqu'on remonte au siècle d'Auguste, on trouve $25 \frac{1}{4}$ degrés, & au temps de l'ancienne Grèce 1450 ans avant J. C. on trouve 43 degrés dont les équinoxes étoient plus avancés qu'ils ne le sont aujourd'hui; le printemps n'arrivoit que lorsque le soleil étoit dans le milieu de la constellation du Bélier. Il est probable, en effet, que les premiers astronomes placèrent les saisons, par exemple, le printemps dans le milieu du groupe d'étoiles qu'ils prirent pour la première constellation, c'est-à-dire, dans le milieu du Bélier, & l'été dans le milieu de la 4^e constellation ou de l'Ecreviffe; c'est-à-dire, qu'ils appelèrent l'Ecreviffe l'assemblage des étoiles au milieu desquelles se trouvoit le soleil au temps du solstice.

Différence des signes & des constellations.

Les anciens prennent le milieu des constellations.

Situations des équinoxes.

1615. La position des points cardinaux a du être

ensuite fort différente, suivant les temps où on l'a observée & décrite; aussi trouve-t-on des auteurs anciens qui placent les équinoxes & les solstices au commencement de chaque signe, cela vouloit dire alors, de chaque constellation; d'autres qui les mettent au 2^e, au 4^e, au 6^e, au 10^e, au 15^e degré des mêmes signes. Voyez M. Fréret, Défense de la chronologie 1758, pag. 460, 467: en voici des exemples.

Au temps d'Hipparque, la première étoile du Bélier étoit dans le colure même de l'équinoxe, & le soleil entroit dans la constellation du Bélier, en même temps que dans l'équinoxe.

1616. Au temps d'Hésiode, 950 ans avant J. C., les points cardinaux étoient au 8^e degré des constellations, & le soleil entroit dans les astérismes ou constellations, 8 jours avant que d'entrer dans les points de la dodécatémerie (a), qui portoient les mêmes noms; ainsi le soleil entroit dans la constellation du Bélier, 8 jours avant l'équinoxe, c'est-à-dire, avant le temps où les jours étoient égaux aux nuits; Columelle (*Liv. IX. chap. 13*) nous dit que les calendriers rustiques de Méton, d'Eudoxe (b), & des anciens astronomes suivoient cette méthode, & que les jours de fêtes qui dépendoient du commencement des saisons étoient réglés sur ce pied-là; il s'y conforme lui-même, on la trouve dans Varron, Ovide, Vitruve, Plin, Hygin, dans le Scholiaste d'Aratus, dans Martianus Capella, & même dans les calendriers du vénérable Bede, (né en Angleterre en 672), comme l'observe le P. Pétau, *Dissert. liv. II. c. 4. pag. 43.*

Contradictions de Manilius,

Le poète Manilius, qui n'étoit qu'un compilateur, dit dans un endroit de son poème, que le solstice est au premier degré du cancer, (*Liv. I, vers 605*), & dans l'autre que c'est au 15^e degré, *Livre III.* Il avoit

(a) Δωδεκάτημερια, la douzième partie, c'est-à-dire, 30 degrés du cercle de l'écliptique.

(b) A l'égard d'Eudoxe, voyez l'art. 1619.

trouvé cette dernière méthode dans l'ancienne astrologie grecque , & il l'explique assez clairement , en parlant du Cancer ,

Extenditque diem summum , parvoque recessu ,
Destruit , ut quanto fraudavit tempore lucas
In tantum noctes augetcat. *III. 622.*

c'est-à-dire , que le Cancer augmente la durée des jours & la diminue ensuite ; mais de sorte qu'il rende à la longueur des nuits , ce qu'il ôte à celle des jours , tour-à-tour elle leur ôte & leur rend leur durée ,

Inque vicem nunc damna facit , nunc tempore supplet. *III. 636.*

& le P. Pétau a fait voir assez en détail , qu'Hipparque avoit supposé les solstices dans la sphère d'Eudoxe ; au moins à 15° vers l'orient , du lieu où ils étoient 162 ans avant J. C.

1617. A l'égard de l'ancienne sphère grecque ; attribuée à Chiron (255) , elle se rapporte environ à 1350 ans avant J. C. Il y a grande apparence qu'elle avoit été réglée par quelques astronomes Egyptiens , (Fréret, *pag. 459*). La division du Zodiaque est peut-être encore plus ancienne que Chiron ; car il est naturel de penser qu'elle fut faite dans le temps auquel les levers sensibles du commencement de chaque constellations précédoient de 15 jours les points cardinaux , c'est-à-dire , les équinoxes & les solstices (1614).

Sphère de Chiron.

1618. Mais au temps d'Hésiode (321) , c'est-à-dire , 950 ans avant J. C. on avoit fait , ce semble , quelque changement à la sphère ancienne de Chiron , (M. Fréret, *pag. 460*) , il paroît qu'on dressa de nouveaux calendriers , dans lesquels les levers & les couchers des étoiles étoient marqués d'une manière plus conforme aux apparences , que dans la sphère de Chiron. Les idées astronomiques commençoient à devenir plus communes dans la Grèce , par le commerce des Orientaux ; le calendrier fait du temps d'Hésiode fut reçu

Sphère d'Hésiode.

340 ASTRONOMIE, LIV. VIII.

par les Grecs, & ensuite par les Romains (1616), qui l'employèrent sans examen, comme s'il eût été fait pour le temps & le climat où ils vivoient. Ainsi il faut ôter environ 38° des longitudes qu'ont les étoiles en 1770, si l'on veut faire des calculs qui soient d'accord avec les passages d'Ovide, de Pline, &c. sans cependant qu'on puisse dire qu'ils aient suivi constamment la même règle.

Sphère
d'Eudoxe.

1619. Cependant Eudoxe qui écrivit environ 370 ans avant J. C. (337), paroît avoir décrit la sphère d'après une tradition plus ancienne que le temps d'Héfiode; Newton dans sa chronologie pense que c'étoit sur la sphère de Chiron, & il en fixe l'époque à 936 ans avant J. C., mais Whiston dans la réfutation qu'il a faite de la chronologie de Newton, & M. Fréret, après lui, prouvent que la sphère décrite par Eudoxe, & par le poète Aratus (346), se rapporte à l'an 1353 avant J. C. ou environ. M. Maraldi la fait aussi remonter à plus de 1200 ans avant J. C. (*Mém. acad.* 1733, pag. 438); delà M. Fréret conclut, (pag. 459), que ces connoissances étoient cultivées depuis long-temps dans l'orient; probablement cette sphère avoit été réglée par quelques astronomes Egyptiens ou Phéniciens qui étoient venus avec les fondateurs des colonies Orientales, & qui avoient abandonné l'Orient avec les Pasteurs chassés d'Egypte par Sésostris. Mais il est surprenant qu'on ne fût pas plus avancé au temps d'Eudoxe.

C'est ici que je terminerai ce que j'avois à dire du calendrier & de la chronologie, j'ai été trop court pour ceux que la curiosité porte spécialement à l'histoire, mais trop long pour ceux qui ne cherchent qu'à pénétrer dans les branches essentielles de l'astronomie; je reprends donc le fil des théories astronomiques, & je commence par les parallaxes qui en font une branche essentielle, & qui nous conduiront ensuite au calcul des éclipses.



LIVRE NEUVIEME.

DES PARALLAXES.

1620. LA PARALLAXE (^a), est la différence entre le lieu où un astre paroît, vu de la surface de la terre, & celui où il nous paroîtroit, si nous étions au centre; on l'appelle quelquefois *Parallaxe diurne*, pour la distinguer de la parallaxe annuelle (1141).

Définition
de la Paral-
laxe.

Tous les mouvemens célestes doivent se rapporter au centre de la terre pour paroître réguliers, car les différens points de la surface de la terre étant situés fort différemment les uns des autres, un astre doit leur paroître dans des aspects fort différens; c'est au centre qu'il faut se transporter, afin de voir tout à sa véritable place, & de trouver la véritable loi des mouvemens célestes; ainsi nous sommes obligés de calculer sans cesse la parallaxe, pour réduire le lieu d'une planète observé à celui que nous eussions vu du centre de la terre.

1621. Soit T le centre de la terre, (*fig. 87*), O le point de la surface où est placé l'observateur; TOZ la ligne verticale, ou la ligne qui passe par le zénit Z , par le point O de l'observateur, par le centre T de la terre, & par le nadir. Une planète P située dans la ligne du zénit, répond toujours au même point du ciel, soit qu'on la regarde du centre T , soit qu'on l'observe du point O ; le point du ciel qui paroît à notre zénit marque également le lieu de l'astre dans les deux cas; ainsi un astre qui paroît au zénit n'a point de parallaxe: c'est le premier principe qu'il faut considérer dans cette théorie des parallaxes.

La paral-
laxe est nulle
au zénit.

Fig. 87.

(^a) Παράλλαξις, *differentia*, à | vateur, & produit un changement
παράλλαξις, *transmutatio*; la paralla- | dans la situation apparente de
xe vient en effet d'un changement | l'astre.
de situation de la part de l'obser- |

Fig. 87.

1622. Si la planète, au lieu d'être sur la ligne du zénit $TOPZ$, paroît sur la ligne horizontale OH , perpendiculaire à la première, la distance TH au centre de la terre étant la même que la distance TP , le lieu de la planète H vu du centre de la terre, est sur la ligne TH , le lieu de la planète, vu du point O , est sur la ligne OH : ces deux lignes TH & OH ne répondent pas au même point du ciel ; car au delà du point H , où elles se croisent, elles iront en s'éloignant l'une de l'autre ; & dans la sphère des étoiles fixes, elles rencontreront deux points différens, & indiqueront pour l'astre situé en H deux situations différentes, cette différence est ce que nous appellons parallaxe.

1623. Comparons ces deux différentes situations ; ou ces deux différens points, avec le point du zénit ou le point du ciel qui est sur la ligne COZ menée par le centre & par le point O de la surface : l'angle ZOH formé par la ligne verticale OZ , & par la ligne OH , sur laquelle paroît la planète, est la distance apparente de l'astre au zénit : si nous étions au centre T , l'angle ZTH feroit la vraie distance de l'astre au zénit, ou la quantité de degrés dont la ligne TH , menée à l'astre, différeroit de la ligne TZ menée au zénit.

1624. La distance apparente ZOH est plus grande que la distance vraie ZTH ; car dans le triangle rectiligne HTO , dont le côté TO est prolongé en Z , l'angle extérieur ZOH est égal aux deux intérieurs T & H ; donc il est plus grand que l'angle T de la quantité de l'angle H : ainsi la distance apparente de l'astre H au zénit est plus grande que la distance vraie ZTH . La différence de ces deux distances est l'angle OHT , qui s'appelle la *Parallaxe horizontale*, si la ligne OH est horizontale, comme nous l'avons supposée, c'est-à-dire, si le lieu apparent de l'astre qu'on observe, est sur l'*horizon apparent* OH , c'est-à-dire, sur la tangente menée par le point O de la surface terrestre. Dans le triangle TOH rectangle en O , on a cette proportion

Parallaxe
horizontale.

en prenant l'unité pour rayon ou sinus total ; $1 : \sin. OHT :: TH : OT$: donc le sinus de la parallaxe horizontale est égal à $\frac{OT}{TH}$, c'est-à-dire, que le rayon de la terre divisé par la distance de l'astre, donne une fraction (3608) qui dans les tables des Sinus indique la parallaxe.

Fig. 87.

1625. La parallaxe d'un astre est donc l'angle formé au centre de l'astre par deux rayons, dont l'un va au centre de la terre, & l'autre au point de la surface où est l'observateur ; c'est l'inclinaison des deux lignes qui partent du centre & de la surface, pour aller se réunir au centre de la planète ; enfin, c'est aussi l'angle sous lequel paroît le rayon de la terre, ou la distance de l'observateur au centre de la terre, lorsque cette distance ou ce rayon sont supposés vus du centre de la planète, & c'est ainsi que nous l'avons déjà considérée, (1396).

Définition de la parallaxe.

1626. Le triangle TOH s'appelle *Triangle parallactique* ; il est toujours situé verticalement, puisque le côté OT étant une ligne verticale, le plan du triangle fait sur OT , ne sauroit être incliné ; ainsi, tout l'effet de la parallaxe se fait de haut en bas, dans le plan d'un cercle vertical : d'ailleurs il est aisé de comprendre que le centre de la terre étant perpendiculairement sous nos pieds (a), c'est-à-dire, dans le plan de tous les cercles *verticaux*, l'effet de la parallaxe ne peut pas s'écarter de ces cercles ; ainsi la parallaxe est toute en hauteur, c'est-à-dire, qu'elle abaisse les astres du haut en bas, & dans un vertical, sans faire paroître l'astre à droite ni à gauche du vertical. De là il suit que la parallaxe ne change point l'azimut d'une planète ; de même dans le méridien la parallaxe ne change point l'ascension droite d'un astre, parce que le vertical est alors perpendiculaire à l'équateur, & que tous les points

Triangle parallactique.

L'effet des parallaxes est en hauteur.

(a) On considère ici la terre comme une sphère, son aplatissement changera peu de chose à la situation du centre par rapport au vertical (1624) :

Fig. 87.

du vertical répondent au même point de l'équateur.

1627. Jusqu'ici nous n'avons parlé de parallaxe que pour le cas où l'astre est à l'horizon, c'est-à-dire, où l'angle ZOH est un angle droit, & nous avons appelé *parallaxe horizontale* celle qui a lieu dans ce cas-là (1624) : si la planète L se trouve plus près du zénit, en sorte que l'angle ZOL , distance de la planète au zénit, soit un angle aigu, l'angle de la parallaxe OLT deviendra plus petit; on l'appelle alors *parallaxe*

Parallaxe de
hauteur.

de *hauteur*. 1628. THÉOREME. *Le sinus total est au sinus de la parallaxe horizontale, comme le sinus de la distance au zénit est au sinus de la parallaxe de hauteur; en supposant que la distance de la planète au centre de la terre soit la même dans les deux cas, & que la terre soit sphérique.*

DÉMONSTRATION. Dans le triangle rectangle HOT on a cette proportion : HT est à TO , comme le sinus de l'angle droit O est au sinus de l'angle THO ; parce que dans tout triangle rectiligne des côtés sont comme les sinus des angles opposés. Dans le triangle TOL on a de même cette proportion : TL est à TO comme le sinus de l'angle LOT est au sinus de l'angle TLO ; dans cette dernière proportion on peut mettre au lieu de TL , son égale HT , puisque la planète est supposée toujours à même distance du centre de la terre; ainsi l'on a ces deux proportions, en nommant R le sinus de l'angle droit :

$$\left. \begin{array}{l} HT : TO :: R : \sin. H. \\ HT : TO :: \sin. LOT : \sin. L. \end{array} \right\} \text{donc } R : \sin. LOT :: \sin. H : \sin. L;$$

mais le sinus de l'angle obtus LOT est le même que celui de l'angle LOZ , ou de la distance de la planète au zénit; donc le rayon est au sinus de la distance au zénit, comme le sinus de la parallaxe horizontale H est au sinus de la parallaxe de hauteur L .

Le sinus de la distance apparente au zénit est la même chose que le cosinus de la hauteur apparente ,
&c

& le rayon est toujours supposé être l'unité ; ainsi ,
 $1 : \cosin. \text{ haut.} :: \sin. \text{ par. horiz.} : \sin. \text{ parall. de hauteur}$; donc *le sinus de la parallaxe de hauteur est égal au sinus de la parallaxe horizontale multipliée par le cosinus de la hauteur apparente.*

Fig. 87.

1629. La parallaxe horizontale de la lune , qui est la plus grande de toutes les parallaxes des planètes , ne va qu'à un degré environ ; or entre le sinus d'un degré , & l'arc d'un degré la différence est à peine de la valeur d'un quart de seconde ; ainsi l'on peut prendre l'un pour l'autre , & dire en général que *la parallaxe de hauteur est égale à la parallaxe horizontale multipliée par le cosinus de la hauteur apparente.* C'est ainsi que j'énoncerai toujours à l'avenir le théorème général de la parallaxe de hauteur , dont je ferai un usage fréquent ; & nommant p la parallaxe horizontale , & h la hauteur apparente , je supposerai qu'on a toujours la parallaxe de hauteur $= p. \cos. h.$

Règle de la parallaxe de hauteur.

1630. La parallaxe est nulle quand l'astre paroît au zénit ; nous l'avons déjà observé (1621) , & cela se déduit encore de la valeur que nous venons de trouver ; car si la distance au zénit est nulle , son sinus est égal à zéro , & la parallaxe de hauteur étant le produit de zéro par la parallaxe horizontale sera aussi égale à zéro. Au contraire la parallaxe est plus grande à l'horizon , que dans tout autre cas , ou à toute autre élévation ; car le cosinus de la hauteur ne sauroit être plus grand que le sinus de 90° , ou le cosinus de zéro ; donc le produit de la parallaxe horizontale par le cosinus de la hauteur apparente , qui forme la parallaxe de hauteur , ne sauroit être plus grand que lorsque la planète paroît à l'horizon. Dans le cas même où elle seroit à l'horizon réel , c'est-à-dire , où l'angle OTH seroit droit , l'angle TOH étant aigu , le cosinus de TOH seroit plus petit que le rayon , & la parallaxe seroit plus petite que lorsque l'angle TOH étoit droit , c'est-à-dire , lorsque la ligne OH du lieu apparent vu de la surface de la terre étoit dans l'horizon. D'ailleurs on voit

Fig. 87.

que la perpendiculaire qui seroit égale à HT , dans le dernier cas étant plus longue que HO , le rayon TO paroîtroit sous un plus petit angle que quand l'angle O est droit, & que la distance perpendiculaire est plus petite. On trouveroit de même que quand le triangle HOT est isocelle, l'angle H est toujours plus petit que la parallaxe horizontale, parce que la perpendiculaire est plus longue que HO ; il y a dans ce cas-là un septième de seconde, dont la parallaxe est moindre que la parallaxe horizontale H .

Changement
de la parallaxe
de hauteur.

1631. Le changement de la parallaxe de hauteur pour un petit espace de temps est aisé à calculer par les formules différentielles, car la parallaxe de hauteur est $p \cos. h$, (1629) la différentielle de $\cos. h$ est $d h \sin. h$, (3308) donc le changement de $p \cos. h$ sera $p d h \sin. h$; mais p est ordinairement exprimé en secondes; ainsi pour que $p d h \sin. h$ soit aussi exprimé en secondes, il faut que $d h$ ne soit qu'une fraction, de même que $\sin. h$, c'est-à-dire, qu'il faut l'exprimer en décimales du rayon, en le divisant par l'arc de 57° , (3359); donc pour un degré de changement sur la hauteur le changement de la parallaxe sera $\frac{p \sin. h \cdot 1^\circ}{57^\circ}$.

Supposons que la parallaxe soit de $60'$, la hauteur de 30° ; on trouvera le changement de parallaxe pour un degré de changement en hauteur $= \frac{3600'' \sin. 30^\circ \cdot 3600''}{57^\circ 17' 44'' 8.}$
 $= 31'' 4$; nous ferons usage de cette formule, quand il s'agira des observations de la lune (2540).

La parallaxe
est en raison
inverse de la
distance.

1632. La parallaxe horizontale d'un astre est d'autant plus petite que sa distance est plus grande; car plus le point H se rapprochera du point O , plus l'angle THO augmentera. Dans le triangle THO on a cette proportion, $TH : TO :: R : \sin. THO$; si l'astre est en N on aura dans le triangle TNO cette proportion $TN : TO :: R : \sin. TNO$; la première proportion donne cette équation, $TH \sin. THO = R. TO$; la seconde proportion donne celle-ci, $TN. \sin. TNO = R.$

TO ; donc TH . fin. $THO = TN$. fin. TNO ; donc $TH : TN :: \text{fin. } TNO : \text{fin. } THO$; car en réduisant cette dernière proportion en équation on a l'équation TH . fin. $THO = TN$ fin. TNO ; donc la distance TH dans le premier cas, est à la distance TN dans le second cas, comme le sinus de la parallaxe dans le second cas est au sinus de la parallaxe dans le premier.

La même démonstration auroit lieu, quelque fut l'angle TOH , pourvu que les points N & H fussent sur une même ligne ONH ; ainsi lorsque la hauteur apparente est supposée la même, les sinus des parallaxes de hauteur sont en raison inverse des distances.

1633. La parallaxe d'un astre augmente dans le même rapport que son diamètre apparent ; en effet, lorsqu'un astre s'éloigne il diminue de grandeur apparente dans la proportion inverse de sa distance (1384) ; mais sa parallaxe horizontale diminue de la même manière & dans le même rapport (1632) ; ainsi la parallaxe d'un astre est toujours comme son diamètre : si ce diamètre apparent diminue de moitié par l'éloignement de la planète, la parallaxe diminuera aussi de moitié, & le même rapport subsistera toujours entre le diamètre apparent & la parallaxe horizontale d'un astre, quelle que soit sa distance.

Elle est
comme le dia-
mètre appa-
rent.

EXEMPLE. La parallaxe de Vénus a été observée le 6 Juin 1761 d'environ $30''$, & son diamètre paroïssoit alors de 60, on sera donc toujours assuré que le diamètre de Vénus est double de sa parallaxe ; ainsi quand le diamètre paroîtra de $40''$, la parallaxe sera de $20''$, & il suffira en tout temps d'observer le diamètre pour pouvoir en conclure la parallaxe.

1634. Lorsqu'on connoît la parallaxe horizontale d'un astre il est aisé de connoître sa distance : en effet, dans le triangle rectangle THO , l'on connoît le demi-diamètre de la terre TO qui est de 1432 lieues (chacune de 2283 toises), & l'angle HOT qui est de 90° , puisqu'on suppose la planète dans l'horizon ; si donc on connoît de plus l'angle THO qui est la pa-

Elle sert à
trouver la dis-
tance.

rallaxe horizontale, il fera aisé de résoudre le triangle TOH , & de connoître la distance TH ; c'est ainsi qu'on a trouvé les distances en lieues rapportées ci-devant (pag. 158).

Méthodes pour trouver la Parallaxe horizontale d'une Planète.

Par les
éclipses de
lunes.

1635. Les astronomes ont travaillé dans tous les temps à connoître les distances des planètes par le moyen de leurs parallaxes, & sur-tout la parallaxe de la lune qui est la plus sensible. Les éclipses de lune fournissent une méthode qui pouvoit être assez bonne autrefois pour trouver à peu-près la parallaxe de la lune. On observera à un instant précis la hauteur apparente du centre de la lune, pendant qu'elle est en partie éclipsee; on calculera pour le même-temps la dépression du soleil au-dessous de l'horizon, ou sa distance au zénit (1034), l'on aura la hauteur du centre de l'ombre; qui est toujours égale à la dépression du centre du soleil; par le moyen de cette hauteur du centre de l'ombre & de la latitude de la lune au temps du milieu de l'éclipse, que je suppose connue, on trouvera la hauteur vraie du centre de la lune, & cette hauteur vraie comparée avec la hauteur apparente que l'on a d'abord observée, donnera la parallaxe de hauteur. On la trouveroit indépendamment de la latitude, en observant une éclipse qui seroit centrale, ou à peu-près, car la durée de l'éclipse donneroit la somme des diamètres de la lune & de l'ombre, d'où il seroit aisé de conclure la parallaxe (1772).

1636. Halley, dans son catalogue des étoiles australes, publié en 1679, employoit d'une autre manière les éclipses de lune, il cherchoit le diamètre de l'ombre par le moyen de la grandeur de l'éclipse & de sa durée, & il étoit persuadé qu'en faisant ces observations avec beaucoup d'exactitude, on trouveroit aussi exact;

rement que par toute autre méthode la parallaxe de la lune ; mais ces méthodes sont insuffisantes actuellement.

1637. Il n'y a guère que trois méthodes suffisamment exactes pour trouver la parallaxe ; la méthode des plus grandes latitudes, celle des parallaxes d'ascension droite ; & celle des différences de déclinaison déterminées en même temps par des observateurs fort éloignés ; elles ont chacune leur avantage & nous les expliquerons séparément.

PREMIERE MÉTHODE. Ptolomée employa autrefois les plus grandes latitudes de la lune observées au nord & au midi de l'écliptique, pour reconnoître la quantité de la parallaxe, (*Alm. liv. V, c. II, pag. 113. édit. 1551*) ; Tycho-Brahé s'en servit également, (*Progym. 463*), M. Halley la propoisoit en 1679, comme s'il eût cru en être l'inventeur ; enfin elle a été employée par M. le Monnier, qui se fondeoit sur les plus grandes latitudes de la lune qu'il avoit observées, pour diminuer de 28'' la parallaxe de la lune employée par Newton, (*Inst. Astr. pag. 185*).

Par les plus grandes latitudes.

1638. Supposons qu'un observateur soit situé vers $28^{\circ} \frac{1}{2}$ de latitude terrestre septentrionale, & qu'il observe la lune passer à son zénit lorsqu'elle a $28^{\circ} \frac{1}{2}$ de déclinaison boréale, & qu'elle est dans sa plus grande latitude à 5° au nord de l'écliptique : quinze jours après, la lune étant dans la partie opposée du ciel & dans sa plus grande latitude australe à 5° au-dessous de l'écliptique, elle doit être éloignée du zénit de 57° , puisqu'elle est à $28^{\circ} 28' \frac{1}{2}$ de l'équateur vers le midi ; comme dans le premier cas elle étoit à $28^{\circ} \frac{1}{2}$ vers le nord ; la parallaxe ne changeoit rien à la première distance de la lune à l'équateur, parce que la lune étoit alors au zénit, mais la seconde distance doit paroître augmentée sensiblement par l'effet de la parallaxe, qui est considérable à 57° du zénit ; ainsi tout l'effet de la parallaxe conspire à augmenter la latitude méridionale de la lune, & à la faire paroître plus grande que la latitude septentrionale. Au lieu de

5° elle paroîtra de 5° 50' au moins ; car si la parallaxe horizontale est d'un degré, elle doit être de 50' à 57° du zénit (1629) ; si l'on trouve plus de 50' d'excès dans cette latitude australe, ce fera une preuve que la parallaxe horizontale est plus grande qu'un degré.

Ainsi les plus grandes latitudes de la lune, qui doivent être égales par rapport au centre de la terre, paroissent différentes quand on les voit de la surface, la latitude méridionale étant toujours plus grande que l'autre, parce que la lune est abaissée vers le midi par l'effet de la parallaxe quand elle est dans sa plus grande latitude méridionale, & cette différence des deux latitudes observées nous fait connoître la parallaxe entière qui auroit lieu à l'horizon.

1639. On peut employer cette méthode, même dans les lieux où la lune n'est jamais au zénit ; car ayant la différence des latitudes apparentes, qui est la somme des deux parallaxes de latitude, ou bien ayant la différence des parallaxes, à deux hauteurs connues, il sera aisé d'avoir la parallaxe horizontale. Soit P la plus grande parallaxe de hauteur, p la plus petite, Z la plus grande distance au zénit, z la plus petite, $P : p :: \sin. Z : \sin. z$ donc $P - p : p :: \sin. Z - \sin. z : \sin. z$ & $p = \frac{(P - p) \sin. z}{\sin. Z - \sin. z}$. Ainsi connoissant la différence de deux parallaxes ou leur somme, il est aisé de trouver chacune séparément.

Quand on a observé la lune dans deux temps aussi différens, on trouve ordinairement que la lune est plus éloignée de la terre, ou à une latitude un peu plus grande dans une des deux observations que dans l'autre ; on a soin dans ce cas-là de tenir compte de la différence, en corrigeant une des deux observations, pour réduire la latitude à celle qu'on auroit observée, si la distance au nœud & la parallaxe horizontale eussent été précisément les mêmes dans les deux observations.

Pour tenir compte de l'aplatissement de la terre dans cette méthode, il ne faut que corriger la parallaxe de hauteur de la manière qui sera indiquée ci-après, (1682).

1640. Quoique nous ayons commencé par expliquer la méthode des plus grandes latitudes, celle des ascensions droites dont nous allons parler n'est ni moins belle ni moins utile; nous verrons qu'elle a servi à déterminer la parallaxe de Mars & par conséquent celle du soleil avec beaucoup de précision (1736); & M. Maskelyne l'avoit employée avec succès en 1761 à l'Isle de Sainte Hélène, même pour la lune, malgré l'irrégularité & la vitesse de son mouvement: (*Philos. transf.* 1764, pag. 371).

Méthode
des ascen-
sions droites.

1641. La méthode qui détermine les parallaxes par les ascensions droites à sa première origine, ce me semble, dans l'ouvrage de Regiomontanus intitulé: *De Cometae magnitudine longitudineque ac de loco ejus verò, problemata XVI*; je crois ce livre imprimé en 1544, quoique l'auteur fût mort dès l'an 1476. Sa méthode est un peu compliquée; mais elle se réduit néanmoins à trouver la parallaxe de hauteur, par le moyen de la différence des temps écoulés entre deux observations.

Cette méthode fut donnée ensuite par Diggefeus, auteur Anglois, qui publia en 1573, un ouvrage intitulé: *Ala seu Scala Mathematica*, à l'occasion de la nouvelle étoile de Cassiopée qui parut en 1572. On trouve encore cette méthode dans la science des longitudes de Morin; dans les éphémérides de Képler pour l'année 1619; dans Hévélius qui en fait un usage fréquent; dans M. Cassini, *Traité de la comète de 1681*; & dans l'*Histoire céleste de Flamsteed*, à l'occasion de Mars, qui fut observé par tous les astronomes dans son opposition & son périégée, en 1672.

Auteurs
qui l'ont em-
ployée.

Pour expliquer cette méthode, je commencerai par le cas le plus simple, ce qui rendra la méthode plus claire & les démonstrations plus sûres. Je suppose un observateur situé sous la ligne équinoxiale, observant une planète située aussi dans l'équateur; il la verra passer à son zénit & ensuite descendre perpendiculairement à l'horizon; la parallaxe de hauteur sera toute entière dans l'équateur, puisque l'équateur & le vertical de la

planète sont alors confondus perpétuellement l'un avec l'autre. Il suffiroit alors d'observer l'ascension droite d'une planète à son lever & à son coucher ; on auroit la première trop grande , & la seconde trop petite , de la valeur de la parallaxe horizontale , ainsi la moitié de la différence observée seroit la parallaxe que l'on cherche. Dans d'autres situations de la planète & de l'observateur, la parallaxe d'ascension droite est moindre que la parallaxe horizontale , & que la parallaxe de hauteur ; mais on peut les conclure l'une de l'autre , comme nous allons l'expliquer.

Fig. 90.

1642. Soit Z le zénit (fig. 90) ; P le pole du monde , EQ l'équateur , LMN le parallele de l'astre , M le lieu vrai , & m le lieu apparent qui est plus bas que le vrai lieu M , dans le vertical $ZMmT$; si du pole P l'on tire deux cercles de déclinaisons PMV & Pmu , l'un par le lieu vrai de l'astre M , l'autre par son lieu apparent m , la différence de ces deux cercles de déclinaisons , l'angle MPm qu'ils font entr'eux au pole du monde , ou l'arc de l'équateur Vu qui en est la mesure , sera la parallaxe d'ascension droite ; or dans le triangle PMm si l'on connoît l'angle P , il ne sera pas difficile de trouver le côté opposé Mm , c'est-à-dire , que de la parallaxe d'ascension droite observée dans un temps ou dans un lieu quelconque on déduira facilement la parallaxe de hauteur.

La question se réduit donc à observer la parallaxe d'ascension droite , ce qui se fait de la manière suivante : lorsqu'une planète passe dans le méridien & que la parallaxe est nulle en ascension droite (1626) , on observe la différence entre le temps du passage de la planète & celui d'une étoile fixe au fil d'une lunette ; cet intervalle de temps , converti en degrés à raison de 15 degrés par heure ou de 15'' de degré pour 1'' d'heure , donne la différence d'ascension droite entre l'étoile & la planète (88 , 2505).

Six heures après le passage au méridien on observe encore la même différence de passage , & l'on en conclud

clud la différence d'ascension droite ; mais la parallaxe diminue l'ascension droite de la planète lorsqu'elle est vers le couchant , en l'abaissant & la faisant paroître plus à l'occident , tandis que la parallaxe ne change rien à l'ascension droite de l'étoile ; ainsi la différence des ascensions droites ne fera plus la même que celle qu'on avoit observée dans le méridien , elle sera plus ou moins grande de toute la parallaxe d'ascension droite.

1643. Nous supposons à la vérité que le lieu vrai de la planète soit exactement à la même distance de l'étoile dans chacune des deux observations , c'est-à-dire , que la parallaxe soit la seule cause de la différence qu'on aura trouvée entre la première & la seconde observation , & que la planète n'ait eu aucun mouvement propre ; mais il est aisé de corriger cette supposition : on observera deux jours de suite au passage de la planète par le méridien , la différence vraie d'ascension droite entre la planète & l'étoile , on trouvera de combien elle varie d'un jour à l'autre , & par conséquent de combien elle avoit dû augmenter en six heures par le mouvement propre de la planète , & indépendamment des apparences de la parallaxe ; si l'observation a donné une différence plus grande que celle qu'on trouve par le calcul , elle sera l'effet de la parallaxe d'ascension droite ; & l'on séparera cet effet d'avec celui du vrai mouvement de la planète.

1644. Pour conclure facilement la parallaxe horizontale de la parallaxe d'ascension droite observée à une certaine distance du méridien , on peut se servir de cette expression générale , parallaxe horizontale =

$$\frac{\text{Par. asc. droite} \cos. \text{déclin.}}{\sin. \text{angle hor.} \cos. \text{haut. du pole}}$$

Formule
de la parallaxe
d'ascension
droite.

DÉMONSTRATION. Suivant la trigonométrie sphérique l'on a dans le triangle $Z P m$ la proportion suivante :
 $\sin. Z m : \sin. Z P m :: \sin. Z P : \sin. Z m P$; mais $M m = p$

$\sin. Z m (1629)$; donc $\frac{M m}{p} = \sin. Z m$, & $\frac{M m}{p} \sin. Z m P$

$= \sin. Z P m \sin. Z P$; mais $MA = M m \sin. Z m P$; donc $\frac{MA}{p} = \sin. Z P m \cdot \sin. Z P$, ou $MA = p \sin.$ angle horaire $\cosin.$ latit. On a encore $MA = Vu \cos.$ décl. (892) $=$ parall. asc. dr. $\cos.$ décl., donc parallaxe asc. dr. $\cos.$ décl. $= p \sin.$ angle hor. $\cos.$ latit. donc la parallaxe d'ascension droite mesurée sur l'équateur est égale à $\frac{p \sinus \text{ angle horaire} \cdot \cosinus \text{ latitude}}{\cosin. \text{ décl.}}$; donc

$p = \frac{\text{par. asc. dr. } \cos. \text{ décl.}}{\sin. \text{ angle hor. } \cos. \text{ lat.}}$, c'est la formule qu'il falloit dé-

montrer, & qui sert à trouver aussi la parallaxe d'ascension droite à un moment donné (1648); mais il faut bien remarquer dans l'expression précédente que c'est la déclinaison apparente & l'angle horaire apparent que l'on doit employer. Cette formule revient au même que la proportion donnée par M. Cassini, dans ses éléments d'astronomie (pag. 27 à la fin).

1645. On a besoin de la parallaxe d'ascension droite aux environs du méridien pour corriger des différences de passages entre la lune & les étoiles, qui ne sont pas observés précisément dans le fil du milieu de la lunette méridienne (2387). Soit P le pole (fig. 215), Z le zénit, C le lieu vrai de la lune, F son lieu apparent dans le vertical; l'arc EF est sensiblement égal est à la parallaxe d'ascension droite cherchée, puisque c'est la différence entre l'ascension droite vraie qui est marquée par le cercle horaire PCE , & l'ascension droite apparente qui répond au point F , à la distance EF du même cercle horaire. Or dans le triangle sphérique PCZ , on a $\sin. C = \frac{\sin. P \cdot \sin. PZ}{\sin. ZC}$, la parallaxe de hauteur $CF = p \cdot \sin. ZC$, $EF = CF \sin. C = p \cdot \sin. P \sin. PZ$, & cette quantité réduite à l'équateur (892) $= \frac{p \cdot \sin. P \cdot \sin. PZ}{15 \sin. PC}$, c'est la quantité qu'il faut ôter du passage de la lune observé au fil vertical CF , s'il est après le vrai méridien; ce qui revient au même que la formule précédente: on en trouve des tables dans les

éphémérides du P. Hell & du P. Pilgram, pour 1770, imprimées à Vienne en Autriche.

1646. Lorsque la planète a été observée à égales distances avant & après le méridien, on a une différence double de la parallaxe horaire; & si les distances ne sont pas égales, on a une différence qui est la somme de deux parallaxes d'ascension droite, chacune proportionnelle au sinus de son angle horaire; comme on le voit par la formule précédente; pour lors il faut diviser cette différence, trouvée entre les observations, par la somme des sinus des angles horaires, pour avoir la parallaxe horizontale, ou, ce qui revient au même, l'on peut diviser la différence observée, ou l'argument de la parallaxe, en deux parties qui soient entr'elles comme les sinus des angles horaires ou des distances au méridien dans les deux observations, & n'employer dans la formule précédente qu'une de ces parties avec son angle horaire, pour trouver la parallaxe horizontale.

1647. Il suffit d'observer un astre deux heures avant & 2 heures après le passage au méridien, pour trouver dans l'ascension droite d'une planète une différence égale à sa plus grande parallaxe d'ascension droite; car les distances au méridien sont pour cette espèce de parallaxe ce que sont les distances au zénit pour les parallaxes de hauteur; or le sinus de la distance au méridien qui répond à deux heures de temps étant la moitié du rayon, on a de chaque côté du méridien une parallaxe qui est la moitié de la plus grande parallaxe d'ascension droite.

Il suffit de quatre heures d'intervalle.

Si cette méthode étoit employée sous l'équateur même elle donneroit immédiatement & sans aucune hypothèse, la parallaxe horizontale de la lune qui répond au rayon de l'équateur, malgré l'aplatissement de la terre; c'est un avantage particulier à cette méthode, nous verrons bien-tôt quelle correction il faut y faire dans les autres cas, (1691).

Cette méthode est indépendante de la figure de la terre.

1648. Je prendrai pour exemple de cette méthode

Y y ij

les observations de M. Maraldi, (*Mém. de l'acad.* 1722). Le 15 Août 1719, Mars étant fort près d'une étoile de 5^e grandeur qui est à la jambe orientale du verseau, M. Maraldi dirigea le fil d'une lunette de 12 pieds suivant le parallèle de l'étoile : à 9^h 18' du soir Mars suivait l'étoile de 10' 17" de temps, & 7 heures après, ou le 16 à 4^h 21' du matin, il la suivait seulement de 10' 1". Mais, suivant les observations faites au méridien plusieurs jours de suite, Mars devoit se rapprocher réellement de l'étoile de 14" de temps, c'est-à-dire, qu'après l'avoir suivie de 10' 17" de temps il auroit dû ; 7^h après, en être éloigné de 10' 3", au lieu de 10' 1" qu'observa M. Maraldi ; donc il y avoit 2" de temps pour l'effet & pour l'argument de la parallaxe ; ces 2" doivent être réduites en temps, multipliées par le cosinus de la déclinaison qui étoit de 15°, divisées par le cosinus de la latitude de Paris ou par le sinus de 41° 10', & par la somme des sinus des angles horaires ou des distances au méridien qui étoient de 49° 15' & de 56° 39', & l'on trouve enfin 27" $\frac{1}{2}$ pour la parallaxe horizontale de Mars, d'où il résulte 10" $\frac{1}{3}$ pour celle du soleil ; la distance de Mars à la terre étant alors $\frac{37}{60}$ de celle du soleil.

Pour déterminer plus exactement la parallaxe d'ascension droite, il faudroit mesurer la distance de la planète à une étoile, avec plus de précision que par les temps & les passages, comme l'observe M. le Monnier, (*Inst. astr. pag.* 434) ; il propoisoit de placer la lunette avec son micromètre, sur un instrument semblable à celui de M. Graham, décrit dans l'optique de Smith, & qu'une horloge feroit mouvoir avec l'astre ; ce genre d'instrument qu'on peut appeller *Héliostate*, a été exécuté par Passellant pour le cabinet du Roi à la Muete.

La difficulté qu'on trouvoit autrefois à mesurer la distance d'une planète à une étoile fixe, & leur différence d'ascension droite, à cause du mouvement diurne est aussi levée aujourd'hui par l'usage des héliomètres (2433) ou micromètres objectifs, qui font le même effet que

l'Héliostate ; on a l'avantage dans un héliomètre de mesurer la distance de la planète & de l'étoile , avec la même facilité que si l'une & l'autre étoit immobile ; mais pour en faire l'application à cette méthode des parallaxes d'ascension droite , il faudroit que la planète & l'étoile fussent à très-peu-près sur le même parallèle , sans quoi la distance mesurée à une seule étoile , ne donneroit pas la différence d'ascension droite avec assez d'exactitude.

Au reste , quoiqu'il soit difficile par la méthode ordinaire de s'assurer d'une seconde de temps , sur la différence d'ascension droite qu'on aura observée une fois , il est probable que si l'on répète dix fois dans une nuit la même observation , l'on pourra s'assurer d'une demi-seconde , & même d'un tiers de seconde , qui répond à $5''$ de degré ; on a soin ensuite de doubler l'effet de la parallaxe , en observant la différence d'ascension droite à l'orient & à l'occident du méridien (1647) , & l'on se trouve parvenu à une exactitude de $2''$ ou $3''$ sur la parallaxe de la planète qu'on observe ; aussi voyons-nous que par cette méthode on étoit parvenu à connoître la parallaxe horizontale du soleil , à une seconde près , puisque M. Cassini & M. Maraldi l'ont trouvée de $9''\frac{1}{2}$ ou $10''$, & qu'on l'a trouvée enfin de $9''$ depuis l'observation du passage de Vénus sur le soleil , qui étoit la plus concluante de toutes.

1649. LA TROISIEME MÉTHODE pour déterminer la parallaxe est celle qui suppose deux observateurs très-éloignés l'un de l'autre , observant tout à la fois la hauteur d'un astre dans le méridien ; c'est la plus naturelle & la plus exacte ; c'est celle que j'ai employée en 1751 lorsque M. l'Abbé de la Caille étoit au Cap de Bonne-Espérance , & que j'observois en même temps la lune à Berlin , pour trouver la parallaxe de la lune , qui n'avoit jamais été déterminée par une méthode aussi exacte. (*Mém. de l'acad. 1751, pag. 457*).

1650. Le cas le plus simple de cette méthode est celui où l'on auroit un observateur en O (*fig. 87*) ; &

Fig. 87.

un autre en D , qui seroit éloigné du premier de la quantité OD égale à peu-près à un quart de la terre, le premier étant en O observeroit un astre H à l'horizon; le second étant en D l'observeroit à son zénit : dans ce cas l'angle OHT , qui est parallaxe horizontale, seroit égal à l'angle HTE , ou au complément de l'arc OD qui est la distance des deux observateurs, ou la différence de leurs latitudes; car je les suppose placés sous le même méridien.

Il est impossible que les circonstances locales nous donnent dans la pratique un cas aussi simple que celui-là; ainsi nous allons voir ce qui arrive quand les deux observateurs sont à une distance quelconque, & que l'astre leur paroît à des hauteurs quelconques.

Fig. 91.

1651. Supposons, comme en 1751, un observateur B , (fig. 91) situé à Berlin, & un autre en C ou au Cap de Bonne-Espérance; L la lune que nous observons tous deux en même temps dans le méridien; (il n'importe que ce soit précisément au même instant pourvu qu'on sache de combien a dû varier la hauteur méridienne dans l'intervalle des deux passages); CLT est la parallaxe de hauteur pour le Cap, BLT est la parallaxe de hauteur à Berlin (1627), la somme de ces deux parallaxes est l'angle CLB , argument total de la parallaxe horizontale; ce seroit leur différence si les observateurs voyoient tous deux l'astre au midi, ou tous les deux au nord. De ces deux parallaxes de hauteur, la première BLT est égale à la parallaxe horizontale multipliée par le cosinus de la hauteur apparente à Berlin, ou par le sinus de la distance apparente au zénit qui est l'angle LBA (1628); la seconde parallaxe CLT est égale à la parallaxe horizontale multipliée par le sinus de la distance LCD au zénit du Cap; donc la somme BLC qui est la parallaxe totale des deux observateurs est égale à la parallaxe horizontale multipliée par la somme des deux sinus des distances observées; donc on aura la parallaxe horizontale en divisant l'angle observé BLC , ou l'ar-

Argument
de la paral-
laxe.

On en dé-
duit la paral-
laxe horizon-
tale.

gument de la parallaxe , par la somme des sinus des distances au zénit.

1652. Cette méthode fut aussi employée pour déterminer la parallaxe du soleil, ou plutôt celle de Mars & de Vénus. Le 5 Octobre 1751 le bord boréal de Mars paroissoit à $1' 25'' 8$ au dessous du parallele de l'étoile λ du verseau au Cap de Bonne-Espérance, $33^{\circ} 55'$ au midi de l'équateur, Mars étant à $25^{\circ} 0'$ du zénit ; le même jour à Stockholm qui est à $59^{\circ} 21'$ de latitude septentrionale, la même différence de déclinaison entre le bord boréal de Mars & l'étoile λ du verseau paroissoit de $1' 57'' 7$, & Mars étoit à $68^{\circ} 14'$ du zénit ; ces deux différences de déclinaison qui devoient être égales, diffèrent l'une de l'autre de $31'' 9$. Si l'on divise cette différence par la somme des sinus des distances au zénit, $0,4226$; $0,9287$, ou par $1,3513$ l'on aura $23'' 6$ parallaxe horizontale de Mars (M. de la Caille, *Leçons d'astr.* pag. 216).

1653. L'opération précédente suppose la terre parfaitement sphérique ; mais lorsqu'il s'agit de la parallaxe de la lune on ne sauroit négliger l'applatiffement de la terre ; il faut alors diminuer de quelques minutes les deux distances au zénit, observées, (en supposant que le zénit de l'observateur soit entre la lune & le pole élevé) ; & les multiplier chacune par le rayon correspondant de la terre avant que d'employer la règle précédente.

L'ellipse $BECP$ (*fig. 92*) représente une moitié du sphéroïde terrestre, T est le centre, TP est l'axe de la terre, E l'équateur, B & C sont les deux observateurs que je suppose placés sous le même méridien & observant à la fois la lune en L ; ZBM , zCN sont les perpendiculaires à la surface de l'ellipse en B & en C , l'angle LBZ est la distance apparente de la lune au zénit, pour l'observateur B , LCz est la distance apparente pour l'observateur C . On calculera les angles MBT , NCT formés par les perpendiculaires à la surface de la terre, en B & en C , & par les rayons BT

Il faut considérer l'applatiffement de la terre.

Fig. 92.

Fig. 91.

& CT menés au centre de la terre (2679); on les retranchera des distances au zénit, & l'on aura les angles LCD , LBA ou les distances corrigées, dont on fera à peu-près le même usage que nous avons fait ci-devant des distances au zénit dans la terre sphérique (1651). Puisque $TB : TL :: \sin. TLB : \sin. TBL$ ou ABL , on aura lorsque l'angle B sera droit, $\frac{TB}{TL}$ égal au sinus de la parallaxe horizontale à Berlin (1624); de même $\frac{CT}{TL}$ est le sinus de la parallaxe horizontale au Cap de Bonne-Espérance, ou au point C ; ainsi le sinus de la somme, ou de l'angle $BLC = \frac{CT}{TL} \sin. LCD + \frac{TB}{TL} \sin. LBA$, (3617) en supposant le cosinus de chaque parallaxe égal à l'unité; donc la distance $TL = \frac{CT \sin. LCD + TB \sin. LBA}{\sin. BLC}$; & le sinus de la parallaxe horizontale à Paris, ou dans un autre lieu quelconque dont on connoîtra la distance au centre de la terre sera égal à cette distance ou au rayon de la terre multiplié par $\frac{\sin. BLC}{CT \sin. LCD + TB \sin. LBA}$. Dans cette formule on fait usage des deux rayons de la terre TC & TB dont on trouvera la valeur dans le XV^e. livre, (2680, 2690), & ci-après (1705).

1654. Nous remarquerons ici que quand la lune est au méridien, la parallaxe de hauteur, même dans le sphéroïde aplati est exactement proportionnelle au sinus de la distance au zénit LBZ , diminuée de la valeur de l'angle MBT ou ABZ , c'est-à-dire; au sinus de l'angle LBA , ou de l'angle LBT , cela est évident par la considération seule du triangle (1628). Nous ferons usage de cette considération, (3942).

Ces trois méthodes qui servent à trouver en général la parallaxe d'un astre, sont applicables à tous les astres & en particulier au soleil & à la lune; mais il y a des méthodes particulières à ces deux astres, telles sont

pour

pour la lune la méthode des éclipses (1635); pour le soleil la méthode des quadratures de la lune (1722), & celle des passages de Vénus sur le soleil qui est la meilleure de toutes. L'importance des parallaxes du soleil & de la lune, la multitude des tentatives qu'on a faites pour les bien connoître, & l'usage que nous en ferons dans le cours de cet ouvrage, exige que nous en traitions séparément avec un certain détail.

PARALLAXE DE LA LUNE.

1655. LES anciens avoient une idée bien imparfaite des distances des planètes & de leurs parallaxes; quoique la lune fût celle dont il étoit le plus facile de connoître l'éloignement, on la croyoit beaucoup plus près de nous qu'elle n'est réellement.

Pythagore jugeoit la distance de la lune à la terre de 126 mille stades, (*Plin. hist. nat. II, 21*); & comme le stade étoit d'environ 95 toises (2640), cette distance ne va pas à 6 mille lieues, au lieu de 80 mille que nous trouvons actuellement, d'où l'on peut juger qu'au temps de Pythagore 612 ans avant J. C., l'on n'avoit encore fait aucune observation propre à déterminer cette distance.

La distance de la Lune inconnue 600 ans av. J. C.

Hipparque, au rapport de Ptolomée (*Alm. V, 11*); avoit entrepris par de certaines conjectures tirées des éclipses de trouver les distances de la lune à la terre; mais par la difficulté & l'incertitude de sa méthode, il avoit trouvé des différences considérables dans ses résultats. Cependant on voit qu'il jugeoit la plus grande distance de la lune entre $72\frac{1}{2}$ & 83 demi-diamètres de la terre, & la plus petite entre 62 & 71. Ces limites sont établies aujourd'hui de 56 à 64; Hipparque avoit donc de la parallaxe une idée beaucoup plus exacte qu'on ne l'avoit eue avant lui.

1656. La distance de la lune, suivant Posidonius, étoit de deux millions de stades, *Vicies centum millia*

stadiorum, Pline II. 23 ; cette distance revient à 87165 lieues, & elle approche beaucoup de celle que nous trouvons aujourd'hui ; on lit de même dans la grande édition du P. Hardouin ; mais ce qu'il y a de singulier, c'est que le P. Hardouin dans sa note sur ces mots-là, suppose qu'il n'y ait point *Millia*, mais seulement *Vicies centum*, c'est-à-dire, 2000 stades, puisqu'il l'évalue à 250 mille pas, (le stade étoit de 125 pas Romains, ou 95 toises de Paris), tandis que *Vicies centum millia stad.* signifie 250000000 pas, mais il est clair qu'il faut rejeter la note du P. Hardouin, & s'en tenir au texte ; *Vicies centum millia*, parce que Posidonius ne pouvoit pas supposer la lune 1000 fois plus près de nous qu'elle n'est réellement, sur-tout les observations d'Hipparque ayant été faites avant lui ; d'ailleurs les anciens ne se servoient jamais de l'expression, *Vicies centum*, pour signifier simplement deux mille ; mais *Vicies centum millia*, est la manière de parler des anciens auteurs. Voyez ce que j'en ai dit dans les mém. de 1752, pag. 84.

1657. Ptolomée observa la lune par le moyen de ses règles parallaxiques, lorsqu'elle étoit dans le tropique d'été à $2^{\circ} \frac{1}{8}$ du zénit d'Alexandrie, & lorsqu'elle étoit dans le tropique d'hiver à $50^{\circ} 55'$, il trouva, par le moyen de ses tables, que dans le temps de cette dernière observation la lune n'étoit véritablement qu'à $49^{\circ} 48'$ du zénit, d'où il conclut une parallaxe de 67 minutes ; enfin il détermina la plus grande distance de la lune de 64 demi-diamètres & la plus petite de 34, c'est-à-dire la parallaxe entre $54'$ & $1^{\circ} 41'$.

1658. Les Arabes ne corrigèrent point les erreurs de Ptolomée en cette partie ; mais Alphonse, Roi de Castille, diminua beaucoup cette parallaxe. Copernic détermina ensuite par des observations faites en 1522, les distances de la lune de 68 & 52 demi-diamètres terrestres ou la parallaxe entre $50'$ & $66'$! On ne sauroit faire un plus bel éloge de son travail, qu'en disant que Tycho, après un grand nombre de bonnes observations faites 60 ans après, avec une prodigieuse collection d'instru-

mens ne trouvoit rien à changer à la plus grande parallaxe de Copernic; il se contenta d'augmenter la plus petite parallaxe jusqu'à $56' \frac{3}{4}$.

On verra dans l'Almageste de Riccioli, & dans un mémoire que j'ai donné sur la parallaxe de la lune. (*Mém. acad.* 1752, pag. 87), les sentimens de différens auteurs sur la parallaxe : voici une table où ces diverses opinions sont rapprochées.

T A B L E des Parallaxes selon différens Astronomes.

NOMS DES AUTEURS.	La plus grande parallaxe.	La plus petite parallaxe.
Hipparque, 120 ans avant J. C.	48' 30''	41' 30''
Le même, par d'autres observations.	55 30	47 30
Ptolomée, 147 ans après J. C.	103 0	53 34
Alphonse, Roi de Castille, en 1284.	63 17	53 19
Copernic, mort en 1543.	65 48	50 19
Tycho, mort en 1601.	65 36	56 44
Képler, dans ses éphémérides, 1616.	60 58	54 41
Dans ses Tables Rudolphines, 1627.	63 41	58 22
Boulliaud, en 1645.	63 43	53 30
Riccioli, en 1651.	66 56	51 32
M. de la Hire, en 1702.	61 25	52 17
M. Halley, en 1719.	61 7	53 29
M. Cassini, en 1740.	62 11	54 33
M. le Monnier, <i>Inst. astr.</i> 1746.	61 8	53 29
M. Euler, dans ses Tables, en 1760.	61 15	52 42
Suivant les Tables de M. Mayer.	61 32	53 57
Suivant mes observations (1713).	61 29	53 51

Quantité
de la parallaxe
de la lune.

1659. Comme la méthode des plus grandes latitudes de la lune est une des plus avantageuses pour observer la parallaxe de la lune, les astronomes ont continué d'en faire usage aussi bien que Ptolomée; M. le Monnier, en publiant les tables de la lune de Flamsteed en 1746, observa que cet auteur dans ses premières tables publiées en 1680, avoit fait la parallaxe horizontale de la lune au temps de ses moyennes distances & dans les syzygies, de $58' 2'' \frac{1}{2}$, M. Newton de $57' 30''$; mais par les plus grandes latitudes de la lune observées depuis 7 à 8 ans, il l'avoit trouvée de $57' 2'' \frac{1}{2}$. (*Instit. astr. pag. 185*). Pour moi je l'ai trouvée de $57' 26''$, beaucoup plus approchante de celle de Newton, & cela par la meilleure de toutes les méthodes, c'est-à-dire, par les observations simultanées faites en 1752 au Cap de Bonne-Espérance & à Berlin, dont je donnerai le résultat ci-après (1711): on verra que la plus grande parallaxe de la lune qui a lieu pour Paris quand la lune est pleine & périgée, est de $61' 29''$, & la plus petite parallaxe de $53' 51''$, la lune étant nouvelle & apogée (a).

De la parallaxe de la Lune en longitude.

1660. Il ne suffit pas dans les calculs astronomiques de connoître la parallaxe horizontale, il faut souvent en connoître l'effet en longitude; la plupart des auteurs qui ont écrit sur le calcul des éclipses de soleil, ont employé la parallaxe en longitude pour trouver le lieu apparent de la lune. Quoiqu'on puisse s'en passer, comme je le ferai voir dans le livre suivant, je donnerai cependant ici la méthode la plus sûre de trouver la parallaxe en longitude & en latitude avec un exemple détaillé.

Nonagésime.

La méthode employée par Képler est celle du Nonagésime; on appelle NONAGÉSIME le point de l'écliptique éloigné de 90 degrés des deux sections de l'horizon & de l'écliptique, ou des points qui se levent

(a) Nous indiquerons (dans le livre XXII), une méthode qui a du pendule à secondes, ou par le nombre de pieds que les corps été employée pour trouver la parallaxe de la lune, par la longueur graves parcourent sous l'équateur (3483).

& qui se couchent ; ainsi la longitude du Nonagéfime est moindre de trois fignes que celle du point *afcendant*, de l'*horoscope*, (1055) ou du point orient de l'écliptique, c'est-à-dire, du point situé à l'horizon du côté de l'orient.

Soit le méridien *HZEC* (fig. 93), l'horizon *HOBC* ; l'écliptique *ENRTO* prise dans l'hémifphère oriental ; *E* le point culminant de l'écliptique, c'est-à-dire, le point qui paffe dans le méridien, & dont l'afcenfion droite est celle du milieu du ciel (1011). Le point *O* de l'écliptique qui fe leve au même instant, est le point orient, ou l'horoscope (1055) ; l'arc *ON* étant pris de 90 degrés, le point *N* est le nonagéfime. Si par le pole *P* de l'écliptique & par le zénit *Z* on tire un cercle *PZNB*, ce cercle fera tout à la fois un cercle de latitude, puisqu'il paffe par le pole de l'écliptique ; & un vertical, puisqu'il paffe par le zénit : il fera perpendiculaire à l'écliptique en *N* & à l'horizon en *B* ; l'arc *NB* fera la hauteur du nonagéfime ; mais parce que *NO* est un quart de cercle & que l'angle *B* est droit, le point *O* est le pole de l'arc *NB* ; & l'angle *NOB* qui a pour mefure l'arc *NB* est auffi égal à la hauteur du nonagéfime. Enfin l'arc *PZ* compris entre le pole & le zénit est encore égal à la hauteur du nonagéfime ; car fi des arcs *PN* & *ZB* qui font chacun de 90 degrés l'on ôte la partie commune *ZN*, il restera *PZ* égal à *NB*, qui est la hauteur du nonagéfime.

Si l'angle *OEC* est obtus, l'arc *EO* de l'écliptique fera auffi plus grand que 90° ; c'est ce qui arrive quand le point *E* est dans les fignes afcendans 9, 10, &c. ou que l'afcenfion droite du milieu du ciel est depuis 18 heures jufques à 24 heures ou 0^h, & depuis 0^h jufqu'à 6 heures, alors le nonagéfime *N* est dans l'hémifphère oriental, comme dans la figure 93 ; mais quand l'afcenfion droite du milieu du ciel est plus grande que 6 heures & moindre que 18, l'angle *OEC* est aigu, & l'arc *EO* moindre que 90 degrés, le nonagéfime fe

Fig. 93.

Fig. 93.

trouve en M dans la partie occidentale du ciel & de l'autre côté du méridien. Tout cela doit s'entendre des pays qui, comme le nôtre, sont dans l'hémisphère boréal de la terre. Si l'on veut une règle plus universelle, on remarquera que le triangle OEC situé dans la partie orientale de l'hémisphère doit être pris de manière que son côté EC qui est la hauteur du point culminant n'excede jamais 90 degrés, moyennant cette précaution, on aura toujours l'angle OEC obtus, l'arc OE plus grand que 90 degrés, & le nonagéfime à l'orient dans les signes ascendants *en général* (1662), c'est-à-dire, dans ceux où est le soleil quand il va en montant ou qu'il se rapproche du zénit d'un jour à l'autre. Ce sera tout le contraire dans les signes descendans en général.

1661. Lorsqu'à un instant donné l'on veut connoître la longitude du nonagéfime, on cherche l'ascension droite du milieu du ciel (1011), ou le point de l'équateur qui est dans le méridien; ensuite la longitude du point E de l'écliptique qui y répond, avec sa déclinaison & l'angle de l'écliptique avec le méridien (898). Cela fait, on a la hauteur du point culminant E de l'écliptique, égale à la hauteur connue de l'équateur, plus ou moins la déclinaison trouvée.

Ainsi dans le triangle EOC rectangle en C , connoissant la hauteur CE du point culminant, & l'angle CEO du méridien avec l'écliptique dans ce point-là; on cherchera l'angle EOC en disant, $R : \text{cof. } CE :: \text{sin. } E : \text{cof. } O$ (3669); c'est-à-dire, *le rayon est au cosinus de la hauteur du point culminant, comme le sinus de l'angle de l'écliptique avec le méridien est au cosinus de la hauteur du nonagéfime.*

1662. On a ensuite dans le triangle OEC cette autre proportion, $R : \text{cotang. } CE :: \text{cof. } E : \text{cotang. } OE$, (3668); mais l'arc NE de l'écliptique compris entre le point culminant & le nonagéfime est le complément de OE ; ainsi l'on aura $R : \text{cot. } CE :: \text{cof. } E : \text{tang. } NE$, ou $\text{tang. } CE : R :: \text{cof. } E : \text{tang. } NE$, c'est-à-dire, *la tan-*

gente de la hauteur du point culminant est au rayon, comme le cosinus de l'angle de l'écliptique avec le méridien est à la tangente d'un arc, qu'il faut ajouter à la longitude du point culminant E , si ce point est dans les signes ascendants pris en général, & retrancher dans les signes descendans, pour avoir la longitude du nonagésime N . (Voyez l'Exemple art. 1675). Les signes ascendants pris en général sont ceux dans lesquels le soleil se trouve quand il se rapproche du zénit, ou que sa hauteur méridienne augmente d'un jour à l'autre; ainsi un pays de la terre situé même dans l'hémisphère boréal à 10 degrés, aura les signes ascendants depuis le Capricorne jusqu'à 26 degrés du Bélier; & depuis le Cancer jusqu'à 4 degrés de la Vierge.

Règle pour
la longit. du
Nonagésime.

Ce sont ces signes ascendants pris en général qu'il faut employer dans la règle précédente; & il faut rectifier ainsi le passage de M. de la Caille, (pag 389 lig. 21), où il dit qu'on ajoute au point culminant lorsque ce point est dans le premier & dans le dernier quart de l'écliptique. Cela n'est vrai que pour les pays situés hors de la Zone torride.

1663. Quand on a la longitude du nonagésime & la longitude de la lune, on prend leur différence, qui est la distance de la lune au nonagésime (1676); cette différence jointe avec la hauteur du nonagésime & la latitude de la lune, suffit pour trouver la parallaxe de la lune en longitude & en latitude: voici des formules assez commodes pour cet effet.

Expression
de la Paral-
laxe en longit.

Soit L le lieu vrai de la lune (fig. 93), S son lieu apparent dans le vertical ZLS , PLR le cercle de latitude qui passe par le lieu vrai de la lune, PST celui qui passe par le lieu apparent; LR est la latitude vraie; ST la latitude apparente, & ayant pris PI égal à PL , l'arc IS est la parallaxe de latitude; l'arc RT de l'écliptique est la parallaxe de longitude.

Fig. 93

Si l'on nomme p la parallaxe horizontale de la lune, on aura la parallaxe de hauteur LS égale à $p \sin. ZS$, (1629); dans le triangle rectiligne rectangle ISL on a $IL =$

Fig. 93.

SL fin. S ; donc la parallaxe de longitude $TR = \frac{P. \text{fin. } ZS \text{ fin. } S}{\text{fin. } PS}$, en calculant suivant l'article 891, & prenant PS pour PI , parce que ces arcs étant toujours forts grands, les différences des sinus d'un degré à l'autre sont fort petites. On a aussi dans le même triangle $IS = IL \cot. S (3611) = p. \text{fin. } ZS. \text{fin. } S \cotang. S$. C'est la parallaxe de latitude; il faut faire évanouir l'angle S des deux expressions précédentes.

Dans le triangle PZS l'on suppose connus deux côtés & l'angle compris, savoir, PZ , PS & l'angle P , c'est-à-dire, la hauteur du nonagéfime, les distances apparentes de la lune au pôle de l'écliptique & au nonagéfime; on a donc (3722) la tangente de l'angle $S = \frac{\text{fin. } ZPS}{\cot. PZ. \text{fin. } PS - \text{cof. } P. \text{cof. } PS.}$ ou bien la cotangente de $S = \frac{\cot. PZ. \text{fin. } PS - \text{cof. } P. \text{cof. } PS.}{\text{fin. } P.}$, & multipliant le numérateur & le dénominateur par tangente PZ , $\cotang. S = \frac{\text{fin. } PS. - \text{cof. } P. \text{cof. } PS. \text{tang. } PZ.}{\text{fin. } P. \text{tang. } PZ.}$; cette valeur multipliée par $p. \text{fin. } ZS. \text{fin. } S$, donnera celle de IS , paral. de latit. $= \frac{p. \text{fin. } PS. \text{fin. } ZS. \text{fin. } S. - p. \text{cof. } P. \text{cof. } PS. \text{fin. } ZS. \text{fin. } S \text{ tang. } PZ.}{\text{fin. } P \text{ tang. } PZ.}$;

mais $\text{fin. } ZS = \frac{\text{fin. } PZ. \text{fin. } P}{\text{fin. } S}$, (3710) substituant cette valeur dans l'expression de la parall. en latitude IS , on aura $\frac{p. \text{fin. } PS. \text{fin. } P. \text{fin. } PZ. \text{fin. } P. - p. \text{cof. } P. \text{cof. } PS. \text{fin. } S. \text{tang. } PZ. \text{fin. } PZ. \text{fin. } P.}{\text{fin. } P. \text{tang. } PZ. \text{fin. } S. \text{fin. } P. \text{tang. } PZ. \text{fin. } S.}$; effaçant tous les termes qui se détruisent, la formule se réduit à $\frac{p. \text{fin. } PS. \text{fin. } PZ}{\text{tang. } PZ} - p. \text{cof. } P. \text{cof. } PS. \text{fin. } PZ$; & mettant $\text{cof. } PZ$ à la place de $\frac{\text{fin. } PZ}{\text{tang. } PZ}$, elle devient $= p. \text{fin. } PS. \text{cof. } PZ. - p. \text{cof. } P. \text{cof. } PS. \text{fin. } PZ$; mais on a $\text{cof. } PZ = \frac{\text{fin. } PZ}{\text{tang. } PZ}$, & $\text{fin. } PS = \text{tang. } PS. \text{cof. } PS$; ainsi l'on pourra la mettre sous cette forme: la parallaxe de latitude $= p. \text{cof. } PS. \text{fin. } PZ \left(\frac{\text{tang. } PS}{\text{tang. } PZ} - \text{cof. } P \right)$.

1664. Pour trouver la parallaxe de longitude TR , on reprendra sa valeur donnée ci-dessus, $TR = \frac{p \cdot \sin. ZS \cdot \sin. S}{\sin. PS}$ & substituant pour $\sin. ZS$ sa valeur $\frac{\sin. PZ \cdot \sin. P}{\sin. S}$, (3690) on a la parallaxe de longitude $\frac{p \cdot \sin. PZ \sin. P}{\sin. PS}$.

1665. A la place des lettres nous pouvons mettre les choses qu'elles expriment; par exemple, $\cos. PS$ est la même chose que le sinus de la latitude apparente ST ; $\sin. PZ$ est le sinus de la hauteur du nonagéfime (1660); l'angle P , ou NPT , est la distance apparente de la lune au nonagéfime, puisque cet angle est mesuré par l'arc TN de l'écliptique compris entre la lune & le nonagéfime; ainsi les expressions précédentes de TR & de IS , se changeront en celles-ci : par. longit. = $\frac{\text{par. hor. sin. dist. au non. sin. haut. du non.}}{\cos. latit.}$, & par. latit. = $\left(\frac{\text{cotang. lat.}}{\text{tang. haut. du non.}} - \cos. \text{dist. au non.} \right)$ (par. horiz. sin. haut. du non. sin. latit.).

1666. Si l'on nomme p la parallaxe horizontale, l la latitude apparente, d la distance apparente de la lune au nonagéfime, h la hauteur du nonagéfime; on aura la parallaxe de longitude = $\frac{p \sin. d \sin. h}{\cos. l}$ & la parallaxe de latitude = $p \sin. h \sin. l \left(\frac{\cot. l}{\text{tang. } h} - \cos. d \right)$. Parallaxe de longit.

1667. Cette expression se réduit à celle-ci encore plus commode pour l'usage $p \cdot \cos. h \cos. l - p \sin. l \sin. h \cos. d$, parce que $\sin. l \cot. l = \cos. l$ & $\frac{\sin. h}{\text{tang. } h} = \cos. h$; je dis qu'elle est plus commode, parce que dans le calcul (1677), on se contente d'abord, si l'on veut, de la première partie $p \cos. h \cos. l$, & même de $p \cos. h$, car en supposant l de $5^\circ \frac{3}{4}$, il n'y a jamais plus de $19''$ d'erreur à craindre dans cette supposition, lors même que la parallaxe est de $61' \frac{1}{2}$.

1668. Ainsi la formule qui exprime la parallaxe de latitude (1667), est composée de deux parties; la

première qui est $p \cos. h \cos. l$, ne dépend point de la distance de la lune au nonagéfime, & c'est la partie principale de la parallaxe en latitude; dans le calcul des éclipses de soleil la latitude de la lune étant extrêmement petite, son cosinus est sensiblement égal au rayon ou à l'unité: ainsi l'on a pour la première partie de la parallaxe en latitude $p \cos. h$. Pour avoir exactement cette première partie de la parallaxe en latitude, dans tous les cas, il faut multiplier la parallaxe horizontale de la lune par le cosinus de la hauteur du nonagéfime, & par le cosinus de la latitude.

Première
partie de la
Parallaxe en
latitude.

1669. La seconde partie de la parallaxe en latitude est $p \sin. l \sin. h \cosin. d$; on la trouve en multipliant la parallaxe horizontale par le sinus de la latitude de la lune, le sinus de la hauteur du nonagéfime, & le cosinus de la distance apparente de la lune au nonagéfime. Cette seconde partie est toujours très-petite, parce que le sinus de la latitude de la lune qui est un des facteurs, est à peine un dixième de l'unité, lors même que la latitude de la lune est la plus grande; cette seconde partie devient comme nulle dans les éclipses de soleil où la latitude n'est jamais que d'un demi-degré, & $\sin. l$ environ un centième: dans des éclipses d'étoiles où la latitude de la lune seroit de 6 degrés, & la lune située dans le nonagéfime à $58 \frac{1}{2}$ degrés de hauteur, la parallaxe horizontale étant de 1° , cette seconde partie seroit de $5' 21''$, & ne pourroit se négliger.

1670. On peut encore simplifier cette seconde partie de la parallaxe en latitude, en considérant qu'elle est égale à la parallaxe en longitude trouvée ci-dessus (1666), multipliée par le sinus de la latitude de la lune, & divisée par la tangente de la distance au nonagéfime; en effet, si la parallaxe de longitude est égale à $\frac{p \sin. d \sin. h}{\cos. l}$, ou simplement $p \sin. d \sin. h$ dans les éclipses, on a $p = \frac{\text{par. long.}}{\sin. d \sin. h}$, substituant cette valeur de p dans

l'expression, $p \sin. h \sin. l \cos. d$, elle deviendra = $\frac{\text{par. long. } \sin. l \cos. d}{\sin. d}$; mais $\frac{\cos. d}{\sin. d} = \text{cotang. } d$, donc on a par. long. $\sin. l \cot. d$, pour la seconde partie de la parallaxe en latitude dans les éclipses de soleil.

Seconde partie de la parallaxe en latitude.

1671. Hors des éclipses on a $p = \frac{\text{par. longit. } \cos. l}{\sin. d \sin. h}$, donc la seconde partie p de la par. = $\sin. h \sin. l \cos. d = \frac{\text{par. long. } \cos. l \sin. l \cos. d}{\sin. d} = \text{par. long. } \sin. l \cot. d \cos. l$ deuxième partie de la parallaxe en latitude hors des éclipses.

On doit retrancher cette quantité de la première partie, $p \cos. h \cos. l$, trouvée ci-dessus (1668); si ce n'est dans le cas où la distance apparente de la lune au nonagésime & sa distance apparente au pôle élevé de l'écliptique sont de différente espèce, c'est-à-dire, l'une aiguë & l'autre obtuse; car alors la seconde partie de la formule est additive, parce que $\sin. l$ change de signe dès lors que la latitude de la lune est méridionale, (en supposant l'observateur dans nos régions septentrionales); & $\cos. d$ change quand la distance au nonagésime surpasse 90 degrés. Il ne peut y avoir de difficulté pour le cas où la lune seroit située entre le pôle & le zénit; car le calcul de la formule donneroit une quantité à soustraire d'une autre plus petite, c'est-à-dire, une parallaxe négative, & cela même avertiroit que la lune est entre le zénit & le pôle élevé ou que la parallaxe diminue la distance au pôle élevé, au lieu de l'augmenter, comme on le supposoit dans l'article 1663. On sent bien que cette seconde partie doit être en général ôtée de la première, quand la lune est du côté du pôle élevé, car la latitude boréale de la lune dans nos régions boréales rapproche la lune du zénit, & par conséquent diminue sa parallaxe, ainsi le terme qui marque presque tout l'effet de la latitude doit se retrancher dans ce cas-là. S'il y a une exception pour le cas où la distance au nonagésime surpasse 90 degrés, c'est parce que dans ce cas-là le vertical fait un angle plus grand avec l'écliptique, & que

la lune est si basse , que la diminution de parallaxe provenant de la latitude n'égalé pas l'augmentation qui vient de l'angle. Dans le point même qui est à 90 degrés du nonagéfime , la latitude ne change presque rien à la parallaxe en latitude , parce que si elle augmente la hauteur , elle diminue l'angle du vertical avec l'écliptique.

1672. Cette seconde partie de la parallaxe en latitude renferme *cos. l.* , c'est-à-dire, qu'elle est multipliée par le cosinus de la latitude apparente ; & il est nécessaire d'y avoir égard dans les éclipses d'étoiles fixes par la lune , car la latitude pouvant aller à 6 degrés , on pourroit commettre une erreur de 20'' dans certains cas sur la parallaxe , en supposant le cosinus de la latitude égal au rayon.

1673. Pour trouver la parallaxe de longitude & de latitude , par le moyen du nonagéfime , le P. Riccioli , (*Astr. réfor. præcep. pag. 21*) , emploie une table qu'il appelle *Parallaxis mecoplatica* : en tête de la table est la parallaxe horizontale ; dans la colonne latérale la hauteur du nonagéfime , & dans la table on a une parallaxe de longitude qui auroit lieu , si la lune étoit à l'horizon même , c'est-à-dire , *p sin. h* , car les nombres croissent comme les sinus ; dans la même table avec cette parallaxe horizontale de longitude , & la distance de la lune au nonagéfime , on trouve la parallaxe *p sin. d sin. h* , qui n'a besoin d'aucune correction , si la lune est près de l'écliptique , comme dans les éclipses de soleil , mais à laquelle il faut ajouter une petite correction , à cause de *cos. l* , si la lune a une latitude. Cette correction ne va qu'à 8'' pour $5^{\circ} \frac{1}{4}$ de latitude , & 32' de parallaxe de longitude. J'ai donné une petite table où l'on peut prendre cette correction , & autres semblables , dans la connoissance des mouvemens célestes de 1764 , pag. 118.

Le P. Riccioli , pour trouver la parallaxe de latitude ; cherche d'abord la hauteur du nonagéfime dans l'orbite de la lune , en ajoutant à la hauteur du nonag. une lati-

tude de l'orbite lunaire, prise avec la distance du nonag. au nœud ; & dans la même table avec la parallaxe horizontale de la lune & le complément de cette hauteur du nonagésime, il trouve la parallaxe de la lune en latitude $p \cos. h$, qui est plus exacte que si l'on avoit employé la hauteur simple du nonagésime, mais qui ne l'est pas autant que la formule que j'ai donnée ci-dessus. Je passe à l'application de ces formules.

1674. EXEMPLE. Le 7 Avril 1749 j'observai l'immersion d'Antarès à $1^h 1' 20''$ du matin, temps vrai, à l'hôtel de Clugny ; on demande pour ce moment la parallaxe de longitude & de latitude. Je suppose qu'on a déjà calculé pour le même temps le lieu du soleil, & celui de la lune par les tables ; & qu'on connoisse la hauteur du pôle avec l'obliquité de l'écliptique : voici les nombres que j'avois employés dans mes premiers calculs, & qui pourront servir d'exemple, quoique les résultats soient plus exacts ci-après (1978).

Lieu du soleil par les tables de Halley,	$0^s 17^o 19' 10''$
Lieu de la lune par les tables de Halley,	8 5 26 2
Latitude australe de la lune,	3 47 20
Obliq. del'écl. supposée pour ce temps-là,	23 28 23
Hauteur du pôle du lieu de l'observateur,	48 50 10
Hauteur de l'équateur,	41 9 50
Ascens. droite du soleil calculée (908),	15 57 44
Le temps vrai $13^h 1' 20''$ réduit en degrés,	195 20 0
L'ascension du milieu du ciel (1011),	211 17 44
Ou en en retranchant 180 degrés,	31 17 44
La déclinaison méridionale qui répond à cette ascension droite (898),	12 42 42
L'angle de l'éclipt. avec le méridien qui répond à la même ascension droite $31^o 17' 44''$ (898),	70 6 4
La long. qui répond à la même asc. droite (898), ou la long. du point de l'éclipt. qui est dans le méridien, (diminuée de 180^o),	33 32 32

374 ASTRONOMIE, LIV. IX.

Ou en y ajoutant 180° , parce qu'on les avoit ôtés de l'ascension droite, $7^\circ 3' 32' 3\frac{1}{2}''$

La hauteur de ce point culminant de l'écliptique, ou la différence entre sa déclinaison $12^\circ 42' 42''$ & la haut. de l'équat. $41^\circ 9' 50''$ 28 27 8

On prendroit leur somme si la décl. du point *E* étoit du côté du pôle élevée.

Fig. 93. 1675. Le rayon est au sinus de $70^\circ 6' 4''$ qui est l'angle *CEO* (*fig. 93*), comme le cosinus de la hauteur du point culminant $28^\circ 27' 8''$ est au cosinus de la hauteur du nonagésime ou de l'angle *NOB* (1661), qui se trouve de $34^\circ 14' 11''$. On cherchera aussi le logarithme de la tangente de *CE*. On fera ensuite cette proportion: la tangente de la hauteur *CE* $28^\circ 27' 8''$ est au rayon, comme le cosinus de l'angle $E = 70^\circ 6' 4''$ est à la tangente de l'arc *NE* de l'écliptique, compris entre le nonagésime & le méridien, cet arc se trouvera de $32^\circ 8' 1''$; étant ôté de la longitude du point culminant $7^\circ 3' 32' 3\frac{1}{2}''$, puisque la lune est dans les signes descendans (1662), il donnera la longitude du nonagésime $6^\circ 1^\circ 24' 2''$. Voici l'ordre & la disposition du calcul.

T. longit.	$17^\circ 19' 10''$	9,4939285	Cotang. Asc. $31^\circ 17' 44''$	10,2161655
Cof. obl. écl.	$23 28 23$	<u>9,9624865</u>	cof. obl. écl.	<u>5,9624865</u>
Tang. asc. dr.	$15 57 44$	9,4564150	cot. long. <i>E</i> $33 32 3$	10,1786520
T. vr. en deg.	$195 20 0$			
Somme,	<u>$211 17 44$</u>	ôtez 180°		
Sinus asc. d.	$31 17 44$	9,7155461	sin. <i>E</i> $70 6 4$	9,9732640
Tang. obliq.	$23 28 23$	<u>9,6377431</u>	cof. haut. <i>CE</i> $28 27 8$	<u>9,9440950</u>
Tang. décl.	$12 42 42$	9,3532892	cof. h. non. $34 14 11$	9,9173590
Haut. équat.	<u>$41 9 50$</u>			
Haut. <i>CE</i>	$28 27 8$	ou du point culmin.		
Cofin.	$31 17 44$	9,9317116	cofin. <i>E</i> $70 6 4$	9,5319412
Sin.	$23 28 23$	<u>9,6002296</u>	ôtez tang. <i>CE</i> $28 27 8$	<u>9,7339002</u>
Cof. ang. <i>E</i>	$70 6 4$	9,5319412	tang. <i>NE</i> $32 8 1$	9,7980410
			ou $1^\circ 2^\circ 8' 1''$	
Otez de la longitude du point culminant <i>E</i> <u>$7 3 32 3$</u>	
Reste la longitude du Nonagésime <i>N</i> <u>$6 1 24 2$</u>	

1676. Pour avoir la distance de la lune au nonagésime, il faut prendre la différence entre la longitude de la lune & celle du nonagésime, en ôtant la plus petite de la plus grande; mais si la différence surpasse 6 signes, il faut ôter la plus grande de la plus petite en ajoutant 12 signes à celle-ci, par ce moyen la différence cherchée sera toujours moindre que 6 signes, & la lune sera à l'orient du nonagésime, si c'est le nonagésime que l'on a retranché; la lune sera occidentale, si c'est la longitude qu'on a ôtée de celle du nonagésime, soit qu'on ait employé ces longitudes toutes seules, soit qu'on en ait augmenté une de 12 signes. Dans notre exemp. on ôte $6^s 1^o 24' 2''$, de $8^s 5^o 26' 2''$, il reste $64^o 2'$ pour la distance de la lune au nonagésime, la lune est orientale. On verra l'usage de cette considération, (1876).

1677. Connoissant la hauteur du nonagésime & sa distance à la lune, nous allons chercher les parallaxes de longitude & de latitude par les formules précédentes (1668 & suiv.).

Log. paral. horiz. p , $57' 16''$ ou $3436''$	3,5360532	Premier calcul ou ap- proximation.
Log. sin. de la hauteur du nonag. h ,	9,7502063	
Log. sin. dist. de la lune au nonag. $64^o 2'$	9,9537833	
Log. de p . sin. h sin. d .	3,2400428	
Otez le log. du cof. de la lat. vr. $3^o 47' 20''$	9,9990497	
Reste le log. de $29' 2''$ paral. de long. à peu-près,	3,2409931	

On ajoutera cette parallaxe avec la distance vraie de la lune au nonagésime $64^o 2'$, & l'on aura la distance apparente $64^o 31' 2''$ qu'il faudra employer dans le calcul de l'article 1678.

Logarit. de la parallaxe horiz. p . $57' 16''$	3,5360532
Log. cof. de la hauteur du nonagésime,	9,9173603
Log. de $47' 21''$, paral. de latit. à peu-près.	3,4534135

376 ASTRONOMIE, LIV. IX.

On ajoutera cette parallaxe avec la latitude vraie $3^{\circ} 47' 20''$, parce que la latitude de la lune est opposée au pôle élevé de l'écliptique, & l'on aura la latitude apparente $4^{\circ} 34' 41''$, qu'il faudra employer dans le calcul suivant pour plus d'exactitude.

	I 678. Logarit. de la parall. horiz.	
	ou de p , $3436''$	3,5360532
Second calcul plus exact.	Log. sin. h haut du nonag. $34^{\circ} 14' 11''$	9,7502063
	Log. sin. d ou dist. apparente de la lune au nonagésime, $64^{\circ} 31' 2''$	<u>9,9555505</u>
	Log. p . sin. h sin. d .	3,2418100
	Otez le log. cof. latit. app. l . $4^{\circ} 34' 41''$.	<u>9,9986121</u>
	Reste le log. de la parallaxe de longitude plus exacte $1750'' 4$, ou $29' 10'' 4$	3,2431979

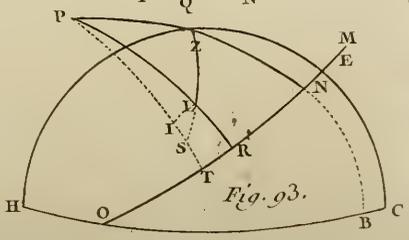
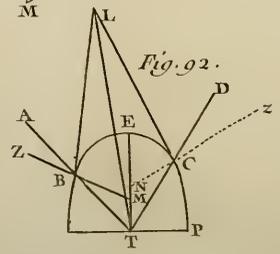
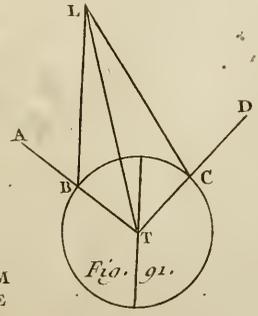
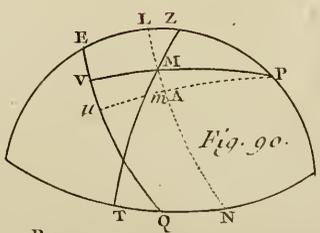
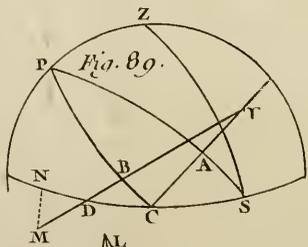
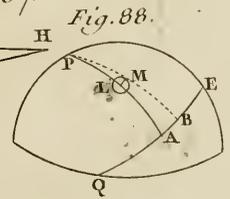
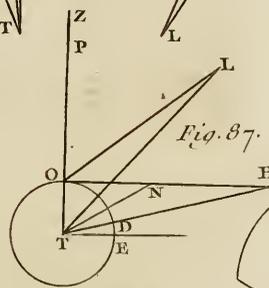
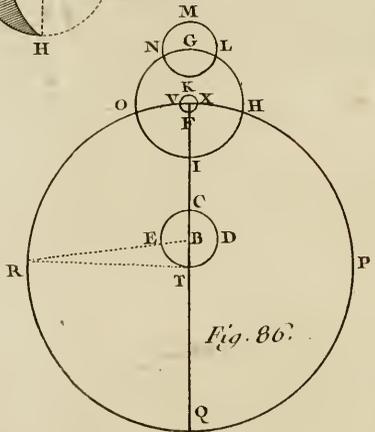
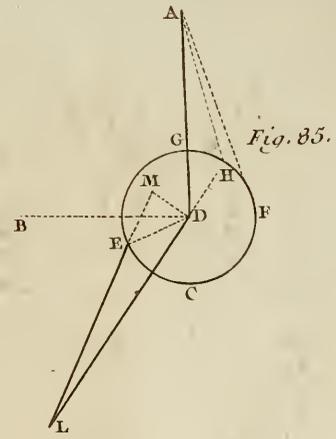
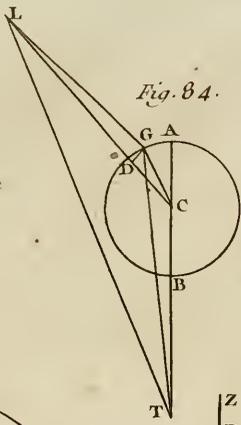
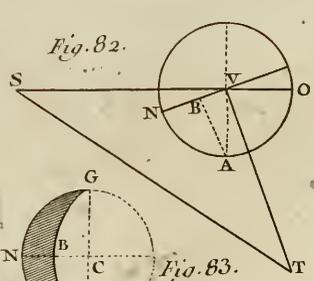
On employera les mêmes nombres pour la parallaxe en latitude.

Log. p	3,5360532	Log. p	3,5360532
Log. cof. h . . .	9,9173603	Log. sin. latit. ap.	8,9020962
Log. cof. lat. ap.	<u>9,9986121</u>	Log. sin. h . . .	9,7502063
Log. $2831''$, 6.	3,4520256	Log. cof. dif. ap. d .	<u>9,6337106</u>
C'est la première partie de la parallaxe en latit. (1668).		Log. $66''$, 4. . .	1,8220663
		Seconde Partie.	

Ces deux parties de la formule étant ajoutées ensemble parce que sin. l . & cof. d . font de même espèce (1671), on aura exactement la parallaxe totale en latitude $2898''$ ou $48' 18''$.

I 679. Pour avoir la longitude apparente de la lune, on ajoute la parallaxe de longitude à la longitude vraie, si la lune est orientale, ou si c'est le nonagésime que l'on a retranché; la parallaxe est soustractive, si c'est le lieu de la lune qu'on a retranché de la longitude du nonagésime.

L'on verra l'usage de ces parallaxes de longitude & de latitude, dans le calcul des éclipses, & des longitudes des pays de la terre, (1876, 1970).





1680. On abrege toutes les opérations des articles 1674 & 1675, par le moyen de la table du nonagésime & de sa hauteur, pour la latitude de Paris; que j'ai publiée dans la connoissance des temps de 1767 & de 1768; sa forme est encore plus commode que celle des tables qui se trouvent dans Ptolomée, Copernic, Magini, Muler, Képler, Rénérius, Boulliaud & Riccioli; elle ne suppose que l'ascension droite du milieu du ciel (1011). Par exemple, le 6 Avril 1749 à $13^h 1' 20''$ de temps vrai, la somme du temps vrai réduit en degrés & de l'ascension droite du soleil, est de $211^\circ 17' \frac{3}{4}$ (1674): on regarde la table vis-à-vis de 210° ou de $14^h 0'$, & ayant pris les parties proportionnelles, on trouve $6^s 1^\circ 24'$ pour la longitude du nonagésime, & $34^\circ 14'$ pour la hauteur du nonagésime à Paris, à peu-près comme dans les calculs précédens (1675). Cette table sera d'une grande commodité dans tous les calculs, où l'on voudra savoir promptement & à peu-près la parallaxe de longitude & de latitude. L'ascension droite du soleil en temps est toute calculée dans la connoissance des temps que je publie chaque année, car elle est le complément à 24^h de la distance de l'équinoxe au soleil (991).

1681: On trouveroit aussi la longitude du nonagésime par les tables des Maisons (1057), & par celles des ascensions obliques, inférées dans tous les vieux livres d'astrologie. (Voyez la *Connoiss. des mouv. cél.* 1767, pag. 227).

EQUATIONS DE LA PARALLAXE dans le sphéroïde aplati.

1682. LA terre ayant la figure d'un sphéroïde aplati vers les poles (2672), les différens points de la terre ne sont pas à la même distance du centre, & la parallaxe horizontale de la lune, qui dépend de la distance qu'il y a du centre de la terre à la surface, ne

fauroit être la même dans ces différens points.

Auteurs qui
ont parlé de
ces équations.

Depuis long-temps, les astronomes ont vu que l'aplatissement de la terre qui est de $\frac{1}{230}$ environ, pouvoit produire sur la parallaxe de la lune une erreur de 16'', qui seroit encore plus grande, si l'on admettoit avec M. Bouguer un aplatissement de $\frac{1}{178}$; il étoit donc important de faire entrer la figure de la terre dans le calcul des parallaxes. Newton considéra le premier cette différence des parallaxes de la lune (*Princ. liv. III. prop. 38. cor. 10*). Depuis ce temps-là M. Manfredi, le P. Grammatici, M. de Maupertuis dans son traité de la parallaxe de la lune, M. Euler, dans les mémoires de Berlin pour 1749, & M. de l'Isle (*Mém. acad. 1757, pag. 490*), donnèrent des méthodes pour tenir compte de l'aplatissement dans les calculs astronomiques.

1683. Toutes ces méthodes étoient sujettes à l'inconvénient d'une extrême longueur; elles exigeoient une précision scrupuleuse & fatigante dans le calcul trigonométrique; enforte que les astronomes n'avoient point encore admis cette considération de l'aplatissement de la terre dans le calcul des éclipses, jusqu'au temps où je donnai dans les mémoires de l'académie pour 1756, & dans la connoissance des temps pour 1762; une méthode & des tables d'un usage extrêmement commode, dont je vais expliquer la construction & les principes. Toutes les autres méthodes étoient bonnes pour être appliquées à un exemple; mais elles étoient de nature à ne pas être employées deux fois. L'objet que je me proposai dans ces recherches fut de renfermer l'effet de l'aplatissement de la terre dans une petite équation, qui ne changeroit rien à la méthode ordinaire de calculer les parallaxes, & qui pourroit se prendre sans aucune partie proportionnelle, ou se négliger suivant les cas. M. du Séjour a donné ensuite une méthode analytique pour les éclipses, dans laquelle il fait entrer la figure de la terre sans allonger sensiblement le calcul (*Mém. acad. 1764, pag. 215*); mais

il est nécessaire de donner ici des formules qui soient relatives à nos méthodes astronomiques.

1684. L'ellipse POE (fig. 94), représente un méridien de la terre, P le pôle élevé, O le lieu de l'observateur, ON la verticale ou la perpendiculaire à l'horizon & à la surface de la terre en O ; CNH la méridienne horizontale, ou la commune section du méridien avec l'horizon; CON l'angle de la verticale avec le rayon CO , qui est à Paris d'environ $15'$ à $19'$ suivant les diverses hypothèses (1708), & que j'appelle a . La perpendiculaire ON est sensiblement égale au rayon CO , à cause de la petitesse de l'angle CON ; la parallaxe qui auroit pour base ON seroit plus petite d'un cent millièbre que la parallaxe horizontale, qui a pour base CO ; mais on peut négliger ici cette différence, qui ne va qu'à un trentième de seconde (a). Si l'observateur O étoit situé en N , il verroit encore la lune dans le même vertical où il la voit du point O , & au même point d'azimut sur l'horizon; mais cet azimut ou la lune paroît, vue du point O ou du point N , quand la lune n'est pas au méridien, est différent de celui où elle paroîtroit, si on l'observoit du centre C de la terre; les rayons menés du point C & du point N jusqu'à la lune, font alors un angle que j'appelle la PARALLAXE D'AZIMUT. Si le rayon dirigé vers la lune est perpendiculaire à CN , cette ligne CN fera la sous-tendante ou la mesure de la parallaxe d'azimut; puisque dans les arcs très-petits les sinus & les tangentes ne diffèrent pas sensiblement des arcs, & si l'on appelle p la parallaxe horizontale qui répond au rayon CO ou ON , l'on aura 1 ou $CO : \sin. a$ ou $CN :: p : \text{parallaxe d'azimut}$; ainsi cette parallaxe qui répond à CN sera $= p \sin. a$, la lune étant à l'horizon & ayant 90 degrés d'azimut, c'est-à-dire, étant dans le premier vertical.

Planche IX.
Fig. 94.

Parallaxe
d'azimut.

(a) Car le cosinus d'un angle $0,0000096$, qui sur 10 ne fait que de $15'$, ne diffère du rayon que de 1 un trentième de seconde.

Fig. 95.

1685. Si la lune s'éloigne vers le nord & que son azimut compté depuis le midi soit plus grand que 90 degrés, l'angle dont CN est la base, deviendra plus petit. Soit CN (fig. 95), la même ligne que dans la fig. 94, tracée séparément, & qui s'étend horizontalement du midi au nord depuis le centre de la terre jusqu'à la verticale; que le rayon CMR soit dirigé vers le point de l'horizon où la lune répond & qui marque l'azimut de la lune, égal à l'angle NCM , que j'appellerai z ; la perpendiculaire NM abaissée du point N sur CR fera la mesure de la parallaxe d'azimut, au lieu de CN ; en effet, c'est la même chose, quant à cette parallaxe, que la lune soit vue du point C ou du point M , l'un & l'autre point étant dans un même vertical, & d'ailleurs il vaut mieux quant à la mesure de cette parallaxe considérer la lune comme vue du point M . Or $MN = CN \sin. NCM$, ou $CN \sin. z$; la parallaxe qui répond à CN est $p \sin. a$, donc celle qui répond à MN est $p \sin. a \sin. z$: c'est la valeur générale de la parallaxe d'azimut, la lune étant à l'horizon, avec un azimut égal à z .

1686. On verra dans la suite que la parallaxe d'azimut employée dans le calcul des éclipses, (1892) doit être mesurée sur un arc de grand cercle, tiré par le centre de la lune, parallèlement à l'horizon ou perpendiculairement au vertical; ce petit arc ne change point, quelle que soit la hauteur de la lune, parce qu'il est formé dans tous les cas par la rencontre des lignes qui sont toutes deux menées des points M & N à la lune, ou dans le plan de l'horizon, ou dans un même plan dont la partie NM est horizontale, & qui vont se réunir à la lune; ainsi la parallaxe d'azimut pour une hauteur quelconque de la lune fera encore $p \sin. a \sin. z$: on en verra l'usage dans le calcul des éclipses, où je me servirai de la différence d'azimut pour trouver la distance apparente des centres (1892).

Pour épargner aux astronomes le calcul de l'azimut; j'ai dressé pour la latitude de Paris deux tables, (Con-

Son expression dans le calcul des éclipses.

noïss. des temps, 1760, 1761, *Mém. acad.* 1756), qui se rapportent à la déclinaison de la lune & à sa distance au méridien, elles contiennent la parallaxe d'azimut, & la correction de la parallaxe de hauteur, dont je vais bientôt parler, & peuvent servir dans presque toute l'Europe, sans qu'il y ait d'erreur sensible. Au reste, comme il suffit de prendre l'azimut sur un globe à 2 ou 3 degrés près, le calcul de ces deux petites équations n'ajouteroit que peu de chose à celui des parallaxes.

1687. Cette parallaxe d'azimut entraîne un petit changement dans la parallaxe de hauteur. En effet, si l'observateur étoit situé en N (*fig.* 94), la parallaxe de hauteur seroit mesurée par ON , & seroit $p \cos. h$, suivant la règle ordinaire; mais la hauteur vraie vue du centre C de la terre est un peu moindre, si la lune est au midi du premier vertical; & un peu plus grande si la lune est au nord ou du côté du pôle élevé, puisque le rayon tiré du point C , & celui qui est tiré du point N n'ont pas la même inclinaison; il faut donc faire une correction à la parallaxe de hauteur trouvée par la règle ordinaire.

Soit L (*fig.* 95), la lune hors du méridien; CML le plan du vertical dans lequel se trouve la lune, en sorte que l'angle LCM soit la hauteur de la lune vue du centre de la terre, la ligne CM étant à la fois & dans le plan de l'horizon, & dans le plan du vertical de la lune; soit aussi le petit arc NM perpendiculaire sur CM . La hauteur de la lune vue du centre C de la terre est plus petite que la hauteur vue du point N ou du point M , de la quantité de l'angle CLM ; en effet, puisque le petit arc NM est perpendiculaire sur CM , il l'est aussi sur LM , parce qu'il est nécessairement perpendiculaire au plan du vertical LMC , & à toutes les lignes tirées au point M de ce plan: ainsi la ligne NM étant comme infiniment petite par rapport à la grande distance LM , les lignes LM & LN sont sensiblement égales; le point M est donc pla-

Correction
de la parallaxe
de hauteur.

Fig. 94.

Fig. 95.

Fig. 95.

cé de la même façon & à la même distance de la lune L , que le point N , donc la hauteur de la lune vue du point N ou vue du point M est sensiblement la même. Mais la hauteur de la lune vue du point M , qui est l'angle LMR , est plus grande que la hauteur vue du point C , c'est-à-dire, que l'angle LCM , de la quantité de l'angle CLM , parce que dans le triangle CLM , on a l'angle extérieur LMR égal aux deux intérieurs pris ensemble LCM , CLM ; donc la hauteur de la lune vue du point C est plus petite que la hauteur vue du point N , de la quantité CLM .

1688. Lorsque la lune est hors du méridien, cet angle CLM est plus petit que lorsque la lune est dans le méridien, & cela dans le rapport du cosinus de l'azimut au rayon. En effet, lorsque la lune est dans le méridien, (supposant que sa hauteur & sa distance soient les mêmes que dans le cas précédent), le point M tombe en N , l'angle LCN est la hauteur de la lune; car il faut concevoir le sommet L du triangle CLM relevé en l'air perpendiculairement au-dessus du plan de la figure. Si l'on examine dans ces deux cas la valeur de l'angle CLM , on verra que l'angle CLM a pour base la ligne CM , quand la lune est hors du méridien, & que dans le méridien il a pour base la ligne CN ; comme tout est égal d'ailleurs, soit la distance CL , soit l'inclinaison du rayon CL sur la base CN ou CM , & que les lignes CM & CN sont extrêmement petites, les petits angles seront entre eux comme leurs bases CN & CM ; mais dans le triangle CMN rectangle en N , CN est à CM comme le rayon est au cosinus de l'angle NCM qui est l'azimut de la lune; donc la différence CLM entre les hauteurs de la lune vues du point N & du point C , quand la lune est hors du méridien, est à cette même différence quand la lune est dans le méridien, à hauteur égale, comme le cosinus de l'azimut est au rayon.

1689. L'angle MLC , dans le cas où il seroit le plus grand & où il auroit pour base la ligne entière

CN seroit égal à $p \sin. a$ (1684) ; car il seroit alors la parallaxe d'azimut : si donc il avoit pour base & pour mesure le petit arc CM , nommant z l'azimut NCM , on auroit cette proportion ; $1 : \cosin. z :: p \sin. a : CLM$; donc l'angle CLM seroit égal à $p. \sin. a. \cosin. z$, dans le cas ou CL seroit perpendiculaire à CM ; mais à cause de l'obliquité de la ligne CL & de l'angle LCR sur la base CM , qui diminue l'angle CLM , il n'a plus pour mesure que MS qui est à CM , comme le sinus de la hauteur MCS est au rayon, ou comme $\sin. h : 1$, donc l'angle CLM est égal à $p. \sin. a \cos. z. \sin. h$.
 équation de la parallaxe de hauteur dans le sphéroïde applati.

Valeur de cette correction.

Cette correction est additive à la parallaxe calculée pour le point N , lorsque la lune est entre le premier vertical & le pole élevé ; dans tous les autres cas, on la retranche de la parallaxe calculée par la méthode ordinaire, & l'on a la véritable parallaxe de hauteur dans le sphéroïde applati. Je donnerai dans le livre suivant (1881) une méthode pour calculer les éclipses par les seules parallaxes de hauteur & d'azimut ; c'est ce qui m'a déterminé à expliquer ici tout ce qui concerne ces parallaxes.

1690. Quand on calcule la parallaxe de hauteur par la formule $p \cosin. h$ (1629), on suppose le centre de la terre en N (fig. 94) sur la verticale ON , & l'on trouve la différence entre le lieu vu du point O & le lieu vu du point N , avec la même parallaxe horizontale, qui a pour base ON égale à OC , soit sur la terre sphérique, soit dans le sphéroïde ; mais comme c'est au centre C qu'il est nécessaire de réduire le lieu de la lune, on est obligé d'ôter de la parallaxe $p \cos. h$ la correction $p. \sin. a. \sin. h. \cos. z$, qui devient additive quand l'azimut compté du point du midi ou du point opposé au pole élevé est plus grand que 90 degrés : on trouvera une table de cette équation dans les endroits cités (1686).

Fig. 94

Ainsi nous sommes parvenus sur la terre applatie ;

comme sur la terre sphérique, à réduire au centre C de la terre le lieu vu du point O , par un petit changement de hauteur & d'azimut; voyons la manière de faire cette même réduction par un petit changement dans la déclinaison seule, ou bien dans la longitude & la latitude.

Application
à la méthode
du nonagésime.

1691. LA MÉTHODE où l'on employe les parallaxes de longitude & de latitude (1663), par le moyen du nonagésime, exigeoit une correction pour l'applatiffement de la terre, & c'est ce que M. de la Caille a donné dans la dernière édition de ses leçons d'astronomie (pag. 223), & M. Pingré, dans les mémoires de 1764 (pag. 362), en suivant les principes de la méthode précédente que j'avois donnée quelques années auparavant; mais M. de la Caille n'ayant point démontré ses formules, & ayant emprunté de M. de Maupertuis des choses qui n'y sont pas suffisamment démontrées, je vais reprendre cette matière.

Fig. 94.

La normale ZON (fig. 94), perpendiculaire à la surface de la terre au point O , où se trouve l'observateur, étant prolongée au-dessous de l'horizon, va couper en K l'axe de la terre $PCKM$; ainsi un observateur placé en K verroit la lune sur le même cercle horaire, à la même distance du méridien, & à la même ascension droite que s'il étoit en C , parce que les points C & K sont placés sur l'axe de la terre & sur le plan de tous les cercles de déclinaison qui se coupent dans la commune section PCM ; ainsi la lune ne paroîtra point changer le plan de son cercle horaire, ni son ascension droite, quand on transportera l'observateur de C en K .

On commence donc par employer la parallaxe qui répond à la ligne OK , pour réduire au point K le lieu vu de la surface de la terre, & comme les points O & K sont dans le même vertical & dans la ligne même du zénit, il ne faut pour cela que la règle employée pour la terre sphérique ou la formule $p \cosin. h$ (1629), en prenant seulement une parallaxe qui réponde au rayon

rayon OK , au lieu de celle qui répondoit à ON , on fera sûr qu'il n'y a aucune erreur dans la parallaxe d'ascension droite calculée par ce moyen; toute la différence produite par l'applatissement consistera dans la parallaxe de déclinaison, dont nous allons parler, en supposant toujours que la parallaxe horizontale qu'on employera convienne à l'intervalle OK , & non pas au rayon OC ou ON , dont nous avons fait usage dans la méthode précédente.

1692. L'observateur supposé en K , & celui qui seroit au centre C de la terre, ne voyent pas la lune à une même distance de l'équateur & du pôle: la distance au pôle vue du centre C est l'angle LCP , mais vue du point hypothétique K , c'est l'angle LKP , moindre que LCP ; la différence de ces deux distances au pôle est l'angle CLK ; cet angle, dont nous donnerons la valeur ci-après (1696), est donc le changement qu'exige l'applatissement de la terre, & puisque l'angle extérieur PCL est égal aux deux intérieurs PKL & CLK , il faut ajouter cette petite équation CLK à la distance de la lune au pôle P trouvée pour le point K , si l'on veut la réduire au centre C & avoir la vraie distance de la lune au pôle, qui est l'angle LCP .

De là il suit que lorsque la lune sera du côté du pôle élevé, c'est-à-dire, que sa déclinaison sera septentrionale, l'observateur étant dans les pays septentrionaux, ou méridionale, & observée dans les pays méridionaux, l'équation de l'applatissement sera soustractive de la déclinaison vue du point K , pour avoir la déclinaison vue du centre C de la terre. Lorsque la lune sera par rapport à l'équateur, du côté du pôle abaissé, on ajoutera à la déclinaison réduite au point K l'équation de l'applatissement, pour avoir la vraie déclinaison vue du centre de la terre; mais dans les deux cas, il faudra toujours retrancher de la parallaxe de déclinaison la même équation CLK , pour avoir la parallaxe de déclinaison par rapport au centre de la terre, à

Fig. 94.
Il faut augmenter la parallaxe horizontale.

Equation de la déclinaison.

Fig. 94.

moins que la lune ne soit entre le zénit & le pôle élevé.

1693. Ainsi pour trouver dans le sphéroïde la situation de la lune pour le centre C de la terre, on fait deux réductions, l'une de O en K , & l'autre de K en C . La première de O en K nous fournit l'avantage de ne supposer que les règles ordinaires; savoir, que la parallaxe de hauteur est comme le cosinus de la hauteur apparente. La seconde a l'avantage d'être assez petite, & de se réduire aussi à une règle fort simple (1696), ce qui en rend l'usage facile.

La première & la plus grande de ces parallaxes réduit le lieu vu du point O à celui qu'on observe du point K , situé perpendiculairement au-dessous de O ; cette réduction ne suppose rien de plus que la parallaxe dans la sphère, car l'angle OLK est proportionnel au sinus de la distance au zénit comptée de la ligne ZOK : ainsi prenant le point K pour centre, & employant la parallaxe horizontale qui répond à la longueur OK , on aura par la règle ordinaire (1629), la parallaxe de hauteur OLK , qui donnera la hauteur vue du point K , aussi-tôt qu'on aura la hauteur vue du point O . On auroit de même la longitude & la latitude vues du point K au moyen de celles qu'on auroit observées à la surface de la terre, & cela par les formules ordinaires (1666).

Il faut ensuite en conclure ces mêmes quantités vues du point C , parce que c'est le centre de la terre auquel nous devons rapporter tous les mouvemens célestes, si nous voulons les dégager de leurs inégalités; le point K étant un point différent, suivant les différentes latitudes, la quantité CK sera différente, aussi bien que la quantité OK . Nous allons les déterminer.

1694. La parallaxe qui convient à OK , sera toujours plus grande que la parallaxe horizontale qui est mesurée par OC ; à Paris la différence est d'environ 17", qu'il faut ajouter à la parallaxe horizontale de

Paris pour avoir celle qui convient au centre K , ou à la distance OK , & pour pouvoir opérer par les règles ordinaires des parallaxes sphériques. On trouvera parmi les tables de la lune celle des quantités répondantes à NK , nous donnerons aussi dans le XV^e. livre une table du rayon CO de la terre pour chaque latitude, & de l'angle $COK = a$; d'où il est aisé de conclure les petits côtés CN & NK , & l'on en trouvera encore une table ci-après (1705).

Augmentation de la parallaxe.
Fig. 54.

1695. On peut calculer cet excès NK de la nouvelle parallaxe, pourvu qu'on connoisse l'angle COK du rayon avec la verticale (1708). Dans le triangle NCK , on a cette proportion : le rayon est à la tangente de l'angle NCK , comme CN est à NK ; donc $NK = CN$ tangente NCK ; mais $CN = p \sin. a$ (1684), & NCK est égale à la latitude du lieu O , car il est opposé par la pointe à l'angle de la hauteur du pôle P , & il est le complément de l'angle OKP formé par la ligne verticale & par l'axe de la terre, donc $NK = p \sin. a \text{ tang. lat.}$ A Paris où la valeur moyenne de p . est de $57' 40''$, on aura la quantité $p. \sin. 15' \text{ tang. } 48^\circ 50' = 17'' 3$ qu'il faut ajouter à la parallaxe moyenne pour Paris, si l'on veut avoir la parallaxe sur OK (1691).

Elle est de $17''$ pour Paris.

1696. Pour connoître l'équation de la déclinaison ou l'angle CLK , il faut abaisser sur le rayon de la lune LK la perpendiculaire CV qui, à raison de sa petitesse fera la mesure de l'angle CLK ; cet angle marque la différence entre les distances au pôle LCP LKC , ou entre les déclinaisons vues des points C & K . La perpendiculaire CV sera égale à CK cosinus déclin. ; car dans le triangle rectiligne CKV , rectangle en V , on a cette proportion : CV est à CK , comme le sinus de CKV est au rayon; mais CKV ou PKL est la vraie distance de la lune au pôle, & son sinus est le cosinus de la vraie déclinaison, donc $CV = CK$ cosinus déclinaison. A l'égard de CK , on en trouvera la valeur au moyen de $CN = p \sin. a$ (1684); car dans le triangle CKN on a cette proportion : CK est à CN , comme le rayon est au

388 ASTRONOMIE, LIV. IX.

sinus de l'angle CKN , qui est le complément de la latitude du point O , donc $CK = \frac{CN}{\text{cof. latit.}}$; mais $CN =$

Equation
de la déclinaison.

$p \sin. a$, donc $CK = \frac{p \sin. a}{\text{cof. lat.}}$, substituant donc cette valeur de CK dans celle de $CV = CK \text{ cof. décl.}$, l'on aura la valeur de CV & de l'angle CLK , $\frac{p \sin. a \text{ cof. décl.}}{\text{cof. haut. du pole.}}$. C'est l'équation de la déclinaison.

Toujours
additive.

1697. Supposons comme à Paris l'angle a de $15'$; & la latitude géographique $48^\circ 50'$; supposons aussi la parallaxe horizontale moyenne de $57' 40''$, on aura $CV = 23'' \text{ cof. décl.}$. Si la déclinaison de la lune est de 28° ; l'équation de la déclinaison, produite par l'appâtissement de la terre, sera de $20'' 2$, soustractive du côté du pole élevé, & additive à la déclinaison de la lune, si la lune est du côté du pole abaissé, pour avoir la vraie déclinaison vue du centre C de la terre, au lieu de celle qu'on avoit trouvée pour le point K par les opérations précédentes. Il est facile de voir que la correction CLK de la déclinaison doit toujours s'ajouter à la distance de la lune au pole élevé qui est l'angle PLK , pour avoir la vraie distance PCL , lors même que la lune est entre le pole & le zénit, parce que l'angle extérieur PCL est toujours plus grand que l'angle intérieur CKL .

La table ci-jointe fait voir qu'au lieu de $23''$, on auroit $30'' 4$, si l'on supposoit l'appâtissement de $\frac{1}{178}$, comme M. de Maupertuis, dans son *Discours sur la parallaxe*, je suppose aussi dans cette table que la parallaxe horizontale soit de $60'$, ce qui rend plus faciles les réductions pour d'autres cas.

Si l'on cherche la parallaxe de déclinaison ou de hauteur, pour le cas où la lune est dans le méridien, on n'a besoin d'aucune équation: il suffit de corriger la dis-

Déclinaison de la Lune.	Equation de la parall. en décl.
0°	30'', 4
5	30, 3
10	30, 0
15	29, 4
20	28, 6
25	27, 6
30	26, 4

tance au zénit par l'angle de la verticale avec le rayon ; (1654, 3942).

1698. En réduisant le lieu apparent de la lune au point *K*, on n'a pour l'ascension droite aucune correction (1691), & l'équation de la déclinaison est égale à $\frac{p \sin. a \cos. \text{décl.}}{\cos. \text{haut. du pole}}$ (1696) = 23'' pour la latitude de Paris ;

il reste à savoir combien ce petit changement dans la déclinaison peut influer sur la longitude & sur la latitude de la lune, ou, ce qui revient au même, quel est le rapport qu'il y a entre le changement de la déclinaison & ceux de la latitude & de la longitude. Soit *A* (fig. 96), le pole de l'équateur ou le pole du monde, *C* le pole de l'écliptique, *B* le lieu vrai de la lune, *AB* sa distance au pole du monde, *BC* sa distance au pole de l'écliptique, & *BL* le petit changement fait à la déclinaison de la lune (1696) sans changer l'angle *A* ; il faut chercher quel sera le changement arrivé dans la latitude de la lune. Pour cela ayant tiré le cercle de latitude *CL*, & le petit arc perpendiculaire *LN*, on aura *BN* pour le changement de latitude ; or *BL* est à *BN*, ou *d* (*AB*) à *d* (*BC*) :: $\sin. AB. \sin. BC : \cos. AC - \cos. AB.$

Equation de la parallaxe en latitude.

Fig. 96.

$\cos. BC$ (3748), donc $BN = BL \left(\frac{\cos. AC - \cos. AB. \cos. BC.}{\sin. AB. \sin. BC} \right)$;

mais au lieu de *BL*, on doit mettre 23'' $\cos. \text{déclin.}$ ou $23'' \sin. AB = \frac{p \sin. a \cos. \text{déclin.}}{\cos. \text{haut. du pole.}}$ qui étoit la valeur de

CV (1696), alors on aura l'applatissement en latitude

$BN = 23'' \left(\frac{\cos. AC}{\sin. BC} - \frac{\cos. AB. \cos. BC}{\sin. BC} \right) = \frac{p \sin. a}{\cos. h. \text{ du pole.}}$

$\left(\frac{\cos. 23^\circ}{\cos. \text{latit. } C} - \sin. \text{décl.} \tan. \text{lat.} \right)$, c'est-à-dire, $23'' \frac{\cos. 23^\circ 28'}{\cos. \text{lat. } C}$

— 23'' $\sin. \text{déclin.} \tan. \text{lat. } C$. Le signe — se changeroit en + si la déclinaison & la latitude de la lune étoient de signes différens. C'est la latitude vraie, ou vue du centre de la terre qu'il faut employer dans ces calculs.

1699. La seconde partie de cette formule 23'' $\sin. \text{décl.} \tan. \text{latit.}$ ne peut aller au-delà de 1'', 3 pour Paris ; ainsi il y a bien des cas où l'on peut la négliger

Fig. 96.

Elle est
presque const-
tante.

totallement, & s'en tenir pour la correction de la latitude de la lune, au terme $23'' \frac{\text{cof. } 23^\circ}{\text{cof. lat. } C}$; ce terme lui-même varié très-peu, puisque le cosinus de la latitude de la lune diffère à peine de l'unité; ainsi sans craindre l'erreur d'une seconde entiere, on peut s'en tenir à une correction constante de $26''$, 6 pour Paris lorsquë la parallaxe horizontale est de $57' 40''$; sous les autres latitudes elle fera de $\frac{p \sin. a \text{ cof. } 23^\circ \frac{1}{2}}{\text{cof. haut. pole}}$, comme on le voit par la formule. A l'égard des signes ils sont les mêmes que pour la déclinaison (1692), c'est-à-dire, que dans les pays septentrionaux, si la latitude de la lune est septentrionale, on retranchera cette correction de la latitude de la lune rapportée au point *K*, pour avoir sa vraie latitude vue du centre *C* de la terre. Dans nos régions septentrionales, on la retranchera de la parallaxe en latitude (a) (1667), trouvée par les règles ordinaires; si cependant la lune étoit entre le pole & le zénit, il faudroit l'ajouter. Je suppose qu'on ait employé dans le calcul de la parallaxe ordinaire, une parallaxe horizontale augmentée de $p \sin. a$, tang. haut. du pole, qui est la valeur de *NK* (1695).

Equation de
la parallaxe
en longitude.

1700. La correction de la longitude qui dépend du changement de déclinaison, est égale au petit angle sphérique *LCN*; or $NL = LCN. \sin. CL$ (891); donc $LCN = \frac{NL}{\sin. CL}$; mais dans le triangle rectiligne rectangle *BLN*, on a $NL = BL. \sin. B$ (3611); donc $LCN = \frac{BL. \sin. B}{\sin. CL}$. Par la propriété ordinaire des triangles sphériques on a $\sin. B : \sin. AC :: \sin. C : \sin. AB$ (3690); donc $\sin. B = \frac{\sin. AC. \sin. C}{\sin. AB}$ substituant cette va-

(a) M. de la Caille, (pag. 225 lig. 14), dit que cette correction doit être ôtée de la latitude australe de la lune quand l'observateur est placé dans la partie boréale de la terre; mais il faut lire ajoutée. Il

ya aussi erreur, en ce qu'il dit que la même correction est additive à la latitude boréale, tandis qu'elle est certainement soustractive dans le cas dont il s'agit.

leur de fin. B on a $LCN = \frac{BL \sin. AC \sin. C}{\sin. CL \sin. AB}$, c'est-à-dire, = $\frac{BL \sin. 23^\circ \text{ cof. longit.}}{\text{cof. lat. } \textcircled{C} \text{ cof. déclin.}}$; mais BL est égale à $\frac{p. \sin. a. \text{ cof. déclin.}}{\text{cof. haut. du pole}}$; (1696) donc LCN , ou la correction de la longitude est égale à $\frac{p. \sin. a. \sin. 23^\circ 28' \text{ cof. long. } \textcircled{C}}{\text{cof. haut. du pole cof. latit. } \textcircled{C}}$, & comme le cosinus de la latitude de la lune est toujours à peu-près égal à l'unité, on aura sans craindre l'erreur d'une seconde pour la longitude, $\frac{p. \sin. a. \sin. 23^\circ}{\text{cof. haut. du pole}} \text{cosin. longit. } \textcircled{C}$; ce fera pour Paris environ $9''$ 1 cof. longit.

Fig. 96.

Elle est de $9''$ cof. long.

1701. Cette correction de la longitude s'ôte de la longitude vraie vue du centre C calculée par les tables, pour avoir la longitude vue du point K , tant que la lune s'éloigne du pole élevé: en effet, nous avons vu qu'il faut ajouter l'équation de la déclinaison pour avoir la vraie distance au pole, réduite au centre de la terre (1697), ou l'ôter de la vraie pour avoir celle qui est vue du point K toutes les fois que la lune est du côté du pole élevé; or si vous rapprochez la lune du pole élevé dans le temps qu'elle s'en éloigne par son mouvement propre, vous diminuez sa longitude; donc cette correction est soustractive de la longitude vraie de la lune vue du point C , pour la réduire au point K , toutes les fois que la lune s'éloigne du pole élevé; ou ce qui revient au même, cette portion de la parallaxe doit s'oter de la longitude vraie vue du centre C , qui est donnée par les tables, pour avoir celle qui est vue du point K , à laquelle on applique ensuite les formules ordinaires qui dépendent du nonagésime.

Fig. 94.

1702. Ainsi pour tous les pays dont la hauteur du pole est septentrionale, cette correction de la longitude est soustractive, ou a le signe — quand la déclinaison boréale de la lune diminue, ou que la déclinaison méridionale augmente; ce qui arrive, quand la lune est dans les signes descendans, c'est-à-dire, qu'elle a 3, 4, 5, 6, 7 & 8^s de longitude; & elle a le signe + dans les signes ascendans 9, 10, 11, 0, 1, 2, &

Signes descendans.

Fig. 24.

cela est vrai en considérant le point de l'écliptique où répond la lune, quand même le mouvement de la lune dans son orbite auroit une autre direction; ce qui pourroit arriver, si la lune étoit fort proche du solstice & du nœud; ainsi la règle générale est d'ôter la correction de la longitude vraie, toutes les fois que la lune fera dans les signes descendans 3, 4, &c. & de la soustraire dans les six autres, pour les pays qui sont au nord de l'équateur.

C'est le contraire pour les pays situés au midi de l'équateur; mais il n'y auroit rien à changer à cette règle, quand même la lune seroit entre le zénit & le pôle.

1703. Si le lieu de la lune est plus avancé que celui du nonagésime, la parallaxe de longitude est additive, c'est-à-dire, qu'elle a le signe +, sinon elle a le signe —, donc en combinant ce signe avec celui de l'applatissement que nous venons d'indiquer, on aura exactement la longitude apparente dans la terre applatie, vue de la surface de la terre ou du point O.

1704. On pourroit aussi déduire de l'équation de la déclinaison (1696) celle de la hauteur; mais la méthode que j'ai donnée (1687), est bien plus commode. Je dois seulement avertir que M. de la Caille, (pag. 225), a fait cette correction, *soustractive dans tous les cas*; mais il est évident qu'elle devient quelquefois additive: en effet, quand le rayon dirigé vers la lune est entre CO & CP , si l'on transporte l'œil de K en C , l'on a une plus grande hauteur, & l'équation de la hauteur est additive, comme je l'avois démontré dans les mémoires de 1756, avant que M. de la Caille écrivît sur cette matière (1689).

Explication
de la Table.

1705. J'ai renfermé dans la table suivante toutes les quantités qui doivent servir aux calculs précédens pour différentes latitudes, en employant la valeur des rayons de la terre, tels que CO , dont on trouvera le calcul dans le livre XV^e. d'après les hypothèses de M. Bouguer (2690), & de M. Maupertuis (*Discours sur la*

la parallaxe de la lune, 1742, pages 34 & 36), l'applatiffement de la terre étant supposé de $\frac{1}{178}$; je suppose aussi la parallaxe de la lune de 60' sous l'équateur; l'on augmentera ou l'on diminuera tous ces nombres de la table, lorsque l'on supposera une parallaxe horizontale plus ou moins grande que 60', ou un applatiffement plus ou moins considérable que $\frac{1}{178}$.

Fig. 94.

La première colonne contient les degrés de latitudes géographiques, ou les hauteurs du pole. La seconde & la troisième présentent la différence entre le rayon de l'équateur & le rayon CO qui répond à chaque latitude, en supposant celui de l'équateur de 1°; c'est-à-dire, que l'on trouve dans ces deux colonnes ce qu'il faut ôter de la parallaxe horizontale sous l'équateur, pour avoir la parallaxe sous une latitude donnée dans les deux hypothèses. Si l'on vouloit supposer l'applatiffement de la terre moindre que $\frac{1}{178}$, on diminueroit ces nombres dans la même proportion.

La quatrième & la cinquième colonne contiennent la valeur de NK en secondes; c'est-à-dire, la quantité qu'il faut ajouter à la parallaxe horizontale déjà trouvée par une des colonnes précédentes pour chaque latitude, afin d'avoir la parallaxe qui répond à OK , & dont nous avons fait usage ci-devant (1694 & suiv.). Cette valeur de NK aussi bien que celle de CK est encore de 48" sous le pole, ou du moins infiniment près du pole, parce que le rayon du cercle osculateur se termine en K à cette distance-là, quelque près qu'on soit du pole.

La sixième & la septième colonne contiennent le segment CK en secondes; c'est la quantité, qui multipliée par le cosinus de la déclinaison, donne l'équation de la déclinaison (1696), & par conséquent celles de la longitude & de la latitude (1699, 1700).

La huitième & la neuvième colonne contiennent l'équation de la latitude, ou l'effet de l'applatiffement en latitude pour chaque hauteur du pole, dans les mêmes

hypothèses ; cette équation est constante pour chaque latitude géographique (1699).

La dixième colonne contient les 90 premiers degrés de la longitude de la lune , & la dernière la correction de la longitude pour la latitude de Paris seulement (1700). Cette équation est la même pour les trois autres quarts (1701), aux signes près ; en prenant le supplément , l'excès sur 180 degrés , ou le complément à 360 degrés , suivant les cas , comme pour chercher le sinus d'une longitude , ou pour calculer la déclinaison du soleil (855).

Equations de la Parallaxe pour des Sphéroïdes aplatis , en supposant $\frac{1}{178}$ d'aplatissement & 60' de Parallaxe.

Haut. du Pole.	Otez de la par. sous l'équateur.		NK (Fig. 94.)		CK (Fig. 94.)		Parallaxe en Latitude.		Long. de la Lune.	Parall. de longit. à Paris.
	Deg.	Bouguer.	Mau-pertuis.	Bouguer.	Mau-pertuis.	Bouguer.	Mau-pertuis.	Bouguer.		
0	0'',0	0'',0	0'',0	0'',0	0'',0	0'',0	0'',0	0'',0	0°	12'',0
10	0,5	0,6	1,0	1,2	5,7	7,0	5,2	6,4	10	11,8
20	1,9	2,4	4,0	4,7	11,7	13,8	10,7	12,7	20	11,3
30	4,2	5,1	9,0	10,1	18,1	20,2	16,6	18,6	30	10,4
40	7,2	8,3	11,4	16,7	25,0	26,0	22,9	23,9	40	9,3
50	10,8	11,9	2,45	23,8	32,0	31,0	29,2	28,5	50	7,7
60	14,4	15,2	3,33	30,3	38,5	35,0	35,3	32,3	60	6,0
70	17,4	17,9	4,11	35,7	43,8	38,0	40,1	35,0	70	4,1
80	19,5	19,6	4,65	39,3	47,3	39,9	43,3	36,8	80	2,1
90	20,2	20,2	48,2	40,5	48,2	40,5	44,2	37,1	90	0,0

1706. On trouvera parmi les tables de la lune celle de la parallaxe pour différentes latitudes, avec la correction tant en longitude qu'en latitude, & les angles de la verticale avec le rayon de la terre dans l'hypothèse que l'applatissement soit $\frac{1}{230}$ seulement, hypothèse qui paroît favorisée par diverses mesures des degrés, dont les excès par rapport au degré de l'équateur ne sont pas si considérables que ceux des degrés de France & de Laponie (2691).

1707. On fera peut-être surpris de l'extrême différence qu'il y a entre les deux hypothèses de M. Bouguer & de M. de Maupertuis employées dans la table précédente, quoique le degré d'applatissement soit le même; cette différence va à $7''$ & $\frac{7}{10}$ pour la valeur de CK sous le pôle, parce que les rayons de courbure sont fort différens dans ces deux hypothèses, quoique le degré d'applatissement soit le même. Cependant, il n'en résulte pas grande différence sur la parallaxe, parce que l'équation CK de la déclinaison augmente avec l'équation NK de la parallaxe, & l'une compense l'autre, de sorte que le résultat est toujours le même à une seconde près, ou environ, dans les deux hypothèses.

1708. L'angle de la verticale avec le rayon mené de Paris au centre de la terre, est de $19' 30''$, suivant la table que j'ai calculée dans l'hypothèse de M. Bouguer; mais il ne feroit pas de $15'$, si l'on suivoit l'hypothèse dans laquelle je corrigeois les degrés de Laponie, de France & du Pérou dans les mémoires de l'académie, 1752, pag. 111, ou celle d'une ellipse ordinaire avec un applatissement de $\frac{1}{230}$, dont je ferai usage dans les tables de la lune. Ce même angle est de $18' 28''$, quand on employe pour déterminer la figure de la terre, les seuls degrés du nord & du Pérou; en supposant sa figure elliptique, (*Mém. acad.* 1752, pag. 103). Enfin, il est de $19' \frac{1}{4}$ dans l'hypothèse de M. de Maupertuis; je l'ai pris de $15'$ en nombres ronds

Angle de
la verticale.

dans les calculs précédens, & dans les tables de la lune on verra qu'il est de $14' 49''$.

1709. M. du Séjour en commençant son grand travail sur le calcul analytique des éclipses (*Mém. acad.* 1764, pag. 221), a donné des formules très-élégantes & très-simples pour calculer les rayons de la terre, & les angles des verticales avec les rayons, il y a joint des tables détaillées, construites dans les deux hypothèses d'aplatissement, $\frac{1}{230}$ & $\frac{1}{178}$, auxquelles on peut avoir recours. J'ai employé une de ces tables pour calculer les équations de la longitude & de la latitude qu'on trouvera dans les tables de la lune.

Des inégalités de la Parallaxe, & de sa quantité absolue.

1710. LA parallaxe horizontale & le diamètre de la lune sont dans un rapport constant, (1633); quand la lune s'éloigne de nous, son diamètre diminue, (1384), & sa parallaxe horizontale diminue aussi dans le même rapport, (1632): ainsi les trois inégalités dont j'ai parlé à l'occasion du diamètre de la lune, (1507), ont lieu de même dans la parallaxe; mais elles sont plus grandes dans le rapport de 11 à 6, (1717).

Après qu'on eut observé les changemens du diamètre de la lune, il fut aisé de reconnoître ceux de la parallaxe; mais Ptolomée & les anciens qui faisoient tourner la lune dans un excentrique ou dans un épicycle, avoient déjà pensé qu'elle devoit être plus ou moins éloignée de nous, & avoient établi une inégalité dans la parallaxe, quoiqu'ils ne connussent pas celle des diamètres. Tous les auteurs qui ont suivi, ont distingué la parallaxe de l'apogée de celle du périée.

Ce ne fut que vers 1666, que M. Picard commença à reconnoître qu'il y avoit deux autres inégalités sensibles dans le diamètre apparent de la lune, & par

conséquent dans sa parallaxe. Ces inégalités répondent à l'évection (1435), & à la variation (1445); & l'on sent assez que l'attraction du soleil, en changeant la vitesse de la lune autour de la terre, ne peut manquer de changer aussi sa distance, comme le calcul de l'attraction l'a fait voir : ainsi la valeur de ces inégalités a été déterminée & par l'observation & par la théorie.

1711. M. Clairaut employe dans ses tables de la parallaxe 10 équations, (*Mém. acad.* 1752, *Connoiss. des mouv. célest.* 1765) : les principales sont contenues dans la formule suivante, où y exprime l'anomalie moyenne de la lune, & t la distance moyenne de la lune au soleil, $57' 3'' - 3' 5''$, $5 \cos. y + 10''$, $3 \cos. 2y + 28''$, $1 \cos. 2t - 34''$, $\cos. (2t - y)$. La constante $57' 3''$ est celle que j'avois déjà déterminée pour la latitude de Paris, en appliquant aux parallaxes que j'avois observées à Berlin les équations précédentes; ce qui me donnoit à chaque fois la constante qu'il s'agissoit de trouver, (*Mém. acad.* 1756). J'ai reconnu en même-temps que le diamètre horizontal de la lune est à sa parallaxe pour Paris, comme $30'$ sont à $54' 56''$, en comparant avec ces parallaxes les diamètres de la lune que j'ai observés fréquemment, avec un héliomètre de 18 pieds.

Constante
pour Paris.

Rapport
du diamètre à
la parallaxe.

1712. Cette parallaxe $57' 3''$, n'est pas la parallaxe moyenne qui tient un milieu entre la plus grande & la plus petite (car celle-ci est de $57' 39''$); mais c'est celle qui répond à la distance moyenne de la lune à la terre, & qui en diffère pour deux raisons qu'il est utile de faire sentir à nos Lecteurs. Premièrement, si l'on ne considère que l'orbite elliptique de la lune, dont l'excentricité est environ 0,05505; on trouvera que si la parallaxe est de $57' 3''$ dans les moyennes distances, elle sera de $60' 22''$ dans le périgée, & de $54' 5''$ dans l'apogée; la première diffère de la constante $57' 3''$, de $3' 19''$, la seconde n'en diffère que de $2' 59''$, parce que le même changement sur la distance

produit sur l'angle de la parallaxe un plus grand effet ; quand la lune s'approche de nous que quand elle s'en éloigne. La distance moyenne est un milieu arithmétique entre la distance apogée & la distance périgée, mais la parallaxe est en raison inverse de la distance, ainsi la parallaxe $57' 3''$, qui répond à la distance moyenne, est une moyenne harmonique entre celles qui répondent aux distances apogée & périgée ; or le milieu harmonique diffère beaucoup du milieu arithmétique. Par exemple, les premiers nombres qui expriment les nombres de vibrations des accords de la musique, 2, 4, 6, sont en proportion arithmétique, d'où l'on conclut que les nombres $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ qui expriment les longueurs des cordes sont en proportion harmonique, ces dernières quantités qui peuvent se représenter par les fractions décimales 0, 50 ; 0, 25 ; 0, 17 sont bien loin de la progression arithmétique, puisqu'il faudroit que la moyenne fut 0, 33 & non pas 0, 25. Voilà une première raison pour laquelle la constante $57' 3''$ diffère de $10''$ de la moyenne prise entre la parallaxe apogée & la parallaxe périgée.

La seconde raison, c'est que l'attraction du soleil peut augmenter la parallaxe périgée de $1' 5''$, & qu'elle ne peut diminuer la parallaxe apogée que de $12''$, parce que son effet est plus considérable quand la lune est près de la terre, & que les attractions du soleil & de la terre conspirent à rapprocher la lune de nous ; que quand la lune est fort éloignée, & que le soleil tend à l'éloigner encore. Cette seconde raison fait que la parallaxe moyenne entre la plus grande & la plus petite est encore plus forte de $26'' \frac{1}{2}$, que si les équations de la parallaxe faisoient autant pour la diminution de la parallaxe constante $57' 3''$ que pour son augmentation ; ainsi suivant nos tables la parallaxe moyenne doit être plus grande de $36'' \frac{1}{2}$ que la constante, c'est-à-dire, $57' 39'' \frac{1}{2}$. Il faut dire à peu-près la même chose du diamètre de la lune (1507).

1713. Suivant les nouvelles tables de Mayer, la

plus grande parallaxe de la lune, (lorsqu'elle est dans son périégée & en opposition), est de $61' 25''$, la plus petite parallaxe qui a lieu dans l'apogée en conjonction, est de $53' 53''$, sous la latitude de Paris; il y avoit environ $3''$ de moins dans la première édition de ses tables, faite en 1753, peu après que j'eus donné le résultat de nos observations de 1751 & 1752. Dans l'article précédent comme dans celui-ci, j'ai fait abstraction des petites inégalités que M. Clairaut & M. Mayer ont ajoutées aux deux grandes inégalités qui dépendent de l'évection & de la variation, mais je vais en donner la formule, quoiqu'on ait rarement besoin d'une si grande précision.

La plus grande & la plus petite parallaxe.

1714. Suivant la formule de Mayer, la parallaxe équatoriale est $57' 11''$, avec toutes les équations suivantes; elles sont placées dans l'ordre de leurs quantités; mais nous avons marqué à côté l'ordre des tables, qui est le même que celui des équations de la lune, & qu'on a choisi pour la facilité du calcul.

TABLE	{	$57' 11'' - 3' 7''$	5	cof. anomal. C.
XI.		+	10	cof. 2 anomal.
	{	-	0, 5	cof. 3 anomal.
V.		-	37	cof. Arg. évection.
	{	+	0, 3	cof. 2 Arg. évection.
XII.		+	25, 2	cof. 2 dist. C ⊙
	{	-	1	cof. dist. C ⊙
X.		+	2, 0	cof. 2 (apog. C - ⊙)
	{	-	0, 2	cof. 3 (apog. C - ⊙)
VI.		+	1, 0	cof. Arg. évect. + anom. ⊙
XIII.	+	0, 8	cof. 2 Arg. lat. — anom. C corrig.	
III.	-	0, 8	cof. 2 dist. C ⊙ + anom. ⊙	
II.	-	0, 7	cof. dist. C ⊙ + anom. ⊙	
VII.	+	0, 6	cof Arg. évect. — anom. moy. C	
IX.	+	0, 4	cof. 2 (Ω - ⊙)	
I.	+	0, 3	cof. anom. moyen. ⊙	
VIII.	+	0, 2	cof. anom. moy. C - anom. moy. ⊙	
IV.	+	0, 1	cof. 2 dist. ⊙ C + anom. moy. C	

Au lieu de $57' 11''$ qui est la parallaxe sous l'équateur, on a, suivant M. Mayer, $57' 2'' \frac{1}{2}$ pour la latitude de Paris, c'est la parallaxe que j'avois déterminée par mes observations de Berlin, comparées à celles du Cap (*Mém. acad.* 1752, 1753 & 1756, pag. 378), & que M. Clairaut avoit adoptée dans la dernière édition de ses tables, pag. 117; elle étoit en nombres entiers $57' 3''$, (1711). C'est aussi cette parallaxe pour Paris que j'ai employée dans les tables que je publie dans ce livre.

1715. M. de la Caille plusieurs années après son retour du Cap, voulut aussi examiner le résultat de toutes les observations qui avoient été faites pendant son séjour au Cap; il conclut de 40 observations faites à Berlin, à Paris, à Greenwich, à Stockholm, à Bologne, que la plus grande parallaxe horizontale de la lune périégée & en syzygie, est de $61' 23'' 1$ à l'égard d'un observateur placé sous le pôle, & de $61' 41'' 7$ sous l'équateur; en supposant l'applatiffement de la terre $\frac{1}{200}$ du diamètre de l'équateur. (Voyez les *Ephémérides* de 1765 — 74, & les *Mémoires* de 1761, pag. 51).

Résultat de
M. de la Caille.

1716. Dans l'hypothèse de M. Bouguer (2683); M. de la Caille trouve la plus grande parallaxe de $61' 22'' 7$ sous le pôle, de $61' 45'' 6$ sous l'équateur; la constante dont nous avons parlé (1711) de $56' 56''$ sous le pôle, de $57' 14'' 8$ sous l'équateur; le rapport du diamètre horizontal de la lune à la parallaxe horizontale sous le pôle, égal à celui de $30'$ à $54' 41'' \frac{1}{2}$ en supposant le diamètre de la lune tel qu'il paroît avec une lunette ordinaire de six à sept pieds; ces résultats sont d'accord avec ceux que j'avois donnés; ce qui fait voir la précision & la certitude de nos recherches. Il n'y a que deux légères différences: la première consiste en ce que j'avois supposé l'applatiffement de la terre plus considérable que M. de la Caille, ce qui peut produire dans certains cas 1 ou 2'' de différence sur la parallaxe; la seconde, que j'ai employé les diamètres

mètres de la lune mesurés avec une lunette de 18 pieds ; qui sont plus petits de 2'' ou 3'' que ceux de M. de la Caille , mesurés avec des lunettes de six pieds ; soit que la différence vienne réellement de l'effet des lunettes , soit qu'il y ait moins d'exactitude & plus de difficulté à observer avec une petite lunette telle qu'il l'a employée (1388 , 1395).

1717. Le rapport entre la parallaxe de la lune à 45 degrés de latitude & son diamètre horizontal est celui de 30' à 54' 57'', ou de 30' à 54' 59'', suivant l'hypothèse qu'a embrassée M. de la Caille ; ce rapport est sensiblement & en nombres ronds celui de 6 à 11 : ainsi le rayon de la lune est $\frac{3}{11}$ du rayon moyen de la terre. Le cube de cette fraction est $\frac{1}{49}$; ainsi le volume ou la grosseur de la lune est la 49^e. partie du volume ou de la grosseur de la terre. Cependant comme la densité de la lune est moindre que celle de la terre (3414), il se trouve que la masse , la quantité de matière , le poids , ou la puissance attractive dans la lune est environ 70 fois moindre que dans la terre , comme on l'a reconnu par son action sur les marées (3595).

Grandeur réelle de la Lune.

1718. La parallaxe de la lune pour Paris , par un milieu entre la plus grande & la plus petite est de 57' 39'' ; si l'on divise le rayon moyen de la terre qui est de 3271850 toises par le sinus de 57' 39'' , on aura la distance de la lune en toises ; & divisant par 2283 , parce que nos lieues communes de 25 au degré sont de 2283 toises , on trouvera la distance moyenne de la lune 85464 lieues. Si l'on supposoit la parallaxe moyenne de 57' 43'' , comme dans la première édition de ce livre , on trouveroit 85393 lieues.

Elle est $\frac{1}{70}$ de la terre.

Distance absolue.

1719. Pour faire sentir à tout le monde le degré de certitude que comporte ce résultat , il suffira de remarquer que la parallaxe de la lune est connue à 2'' près , (1716) ; chaque seconde de parallaxe produit à peine 25 lieues sur la distance ; ainsi nous sommes assurés de ne pas nous tromper de 50 lieues sur 85 mille , que contient la distance de la lune à la terre.

Erreur possible sur cette distance.

DE LA PARALLAXE DU SOLEIL,
& de sa distance à la terre.

Incertitude
des Anciens.

1720. APRÈS avoir vu combien les anciens s'étoient trompés sur la distance de la lune à la terre, (1655) quoique facile à déterminer; on ne sera pas étonné de voir qu'ils n'eussent aucune idée de celle du soleil, du moins avant le temps d'Hipparque. C'est sur-tout ici que les anciens devoient dire comme Pline. *Incomperta hæc & inextricabilia, sed tam prodenda quam sunt prodita.... Nec ut mensura, id enim velle pene dementis otii est, sed ut tantum æstimatio conjectandi constet animo.* (Lib. II, c. 23).

Les opinions anciennes sur la distance du soleil à la terre sont rapportées dans Plutarque, (*De placitis Phil.* III, 31); & dans Pline (*Lib. II, c. 21*), on voit que Pythagore supposoit le soleil trois fois aussi loin que la lune, c'est-à-dire, 16 ou 18 mille lieues, au lieu de 32 millions qu'on a trouvé de nos jours.

1721. Posidonius, contemporain de Pompée, donnoit au demi-diamètre de la terre 38182 stades, suivant le calcul du P. Riccioli, & à la distance du soleil 502000040, c'est-à-dire, 13141 demi-diamètres de la terre, au lieu de 22918 que nous trouvons actuellement; cette opinion étoit assez approchante du vrai, mais on ne peut l'attribuer qu'au hazard d'une heureuse conjecture. Il faut même supposer une interprétation favorable du texte de Pline, pour trouver cette distance si exacte, je vais rapporter le passage en entier. *Posidonius non minus 40 stadiorum a terra altitudinem esse in quâ nubila ac venti nubesque proveniant.... sed a turbido ad lunam VICIES CENTUM MILLIA stadiorum, inde ad solem quinquies millies. Eo spatio fieri ut tam immensa ejus magnitudo non exurat terras.* L'expression *quinquies millies* qui exprime la distance de la lune au soleil signifie 5000 stades, suivant quelques commentateurs; mais

Le P. Riccioli observe que, suivant la coutume des auteurs latins, il faut sous-entendre *centena millia*, ce qui fait 500 millions de stades depuis la lune jusqu'au soleil, à quoi ajoutant la distance de la lune aux nuages 2 millions de stades, & celle des nuages à la terre 40 stades, on trouve 502 millions & 40 stades pour la distance du soleil selon l'hypothèse de Posidonius. Il y a des éditions où on lit 400 stades pour la hauteur des nuages, mais le texte est visiblement altéré; car les anciens ne pouvoient pas supposer 20 lieues pour la distance des nuages, que l'on voit si souvent toucher le sommet de nos montagnes. Cependant le P. Riccioli a fait cette espèce de faute, & l'Imprimeur en a ajouté une autre en mettant un chiffre de trop dans la somme (Plin II, 23. Riccioli I, 111).

Plin pensoit que la distance du soleil devoit être 12 fois aussi grande que celle de la lune, parce que la durée de sa révolution est 12 fois aussi longue; mais cette conséquence n'avoit aucun fondement; enfin il conclut son 23^e chapitre par l'opinion de Pétofiris & de Nécepsos, Rois d'Egypte, qui croyoient la distance du soleil de 2270 stades seulement; mais Plin la rejette avec raison comme une idée puérile.

1722. On ne connoissoit donc point la distance & la parallaxe du soleil, avant Aristarque de Samos, qui vers l'an 264 avant J. C., démontra que la parallaxe n'alloit pas au-delà de 3', en sorte que la distance du soleil surpassoit 1146 demi-diamètres terrestres, c'étoit avoir beaucoup fait, parce qu'il y avoit eu des Pythagoriciens qui d'après certaines proportions harmoniques avoient cru que le soleil étoit seulement 3 fois plus loin de nous que la lune; d'ailleurs on a été 1800 ans avant que de trouver rien de mieux. Aristarque de Samos voyant que le rayon de la terre étoit une base presque insensible, par rapport à la distance qu'on vouloit mesurer, parce que la terre vue du soleil paroissoit sous un trop petit angle, imagina d'employer la distance de la lune à la terre, qu'il étoit plus facile de

Méthode
d'Aristarque.

connoître par la parallaxe, & de chercher l'angle sous lequel cette distance devoit paroître vue du soleil; sa méthode est ingénieuse & ne suppose que l'observation exacte de la quadrature de la lune.

Fig. 82.

Lorsque la lune est à moitié éclairée, où lorsque la ligne qui sépare la lumière de l'ombre sur le disque lunaire est parfaitement droite, en sorte qu'on voie sur le disque de la lune un demi-cercle parfait, alors le rayon qui va du soleil à la lune SV (fig. 82), est nécessairement perpendiculaire au rayon TV , par lequel nous appercevons la lune; car toutes les fois que cet angle devient différent de l'angle droit, son sinus verse diffère du rayon, & la partie éclairée ne sauroit être égale au rayon du disque lunaire (1409); si dans le même instant on mesure l'angle STV entre la lune & le soleil, ou l'angle d'élongation (1142), on connoitra deux angles du triangle STV , & par conséquent le troisième angle S qui doit être le complément de l'angle T , puisque l'angle V est de 90 degrés. Or le côté TL distance de la lune à la terre étoit supposé connu (1655), ainsi il étoit facile de trouver la distance TS du soleil à la terre, qui étoit l'objet de cette méthode d'Aristarque.

La méthode d'Aristarque parut à Képler, en 1618; très-digne d'être employée par Galilée & Marius qui se servoient alors des lunettes d'approche; & dans ses éphémérides pour 1619, il exhorte les philosophes à faire leurs efforts pour déterminer par cette méthode la parallaxe du soleil, qui jusqu'alors avoit été conclue de la grandeur des éclipses de lune, & de celle de l'ombre de la terre dans ces éclipses, avec des incertitudes & des variétés prodigieuses.

1723. Ce qui rend cette méthode insuffisante, c'est la difficulté de déterminer exactement le temps ou l'angle V est droit, de même que la petitesse de l'angle S ; la lune peut faire dans son orbite un arc de 15' sans que la grandeur apparente de sa partie éclairée augmente de 4'', par rapport à nous; or l'angle TSV n'est pas

de 10', par conséquent on ne sauroit l'appercevoir ni le mesurer en observant la partie éclairée de la lune.

Pour faire bien sentir la vérité de cette objection, rappelons nous que la partie visible de l'hémisphère éclairé de la lune est égale au sinus verse de l'angle V , (1409); & supposons que l'angle V soit plus grand de 10 minutes que l'angle droit, comme si l'angle à la terre STV étoit lui-même un angle droit; le sinus verse de 10 minutes est de 29 parties, le diamètre étant de 20 mille, ce qui ne fait que $2''\frac{1}{2}$; ainsi la partie lumineuse que nous voyons, n'aura augmenté que de $2''\frac{1}{2}$, nous ne verrons sur le disque lunaire aucune différence sensible, la lune paroîtra aussi bien dichotome que lorsqu'elle étoit exactement en quadrature, cependant alors l'élongation T sera de 90° , & l'angle V étant supposé de 90° , puisque la lune sera dichotome, on trouvera zéro au lieu de 10 minutes pour la valeur de l'angle S . Il seroit également possible de trouver une quantité négative, c'est-à-dire, moins que rien, pour la parallaxe du soleil.

1724. Cependant Vendelinus ayant observé souvent à Majorque, en 1650, ces quadratures de la lune le matin & le soir, trouva que la dichotomie de la lune arrivoit lorsque l'angle étoit de $89^\circ 45'$ & même un peu plus grand, d'où il tira cette conséquence très-vraie que l'angle LST n'étoit pas de $15'$, ni la parallaxe du soleil de $15''$ (*Ricc. Almag. I, 109 & 731*). D'un autre côté le P. Riccioli, après beaucoup de pareilles observations affuroit que l'angle au soleil étoit de $30'$ ou différent de très-peu de minutes; il supposoit la parallaxe de $28''$ à $30''$, il ne pouvoit pas encore se résoudre à la faire aussi petite que l'avoient fait Posidonius & Vendelinus (*Almag. I, 734*). De là il résulte que la méthode d'Aristarque pouvoit bien nous apprendre que la parallaxe du soleil n'étoit pas au-dessus d'une demi-minute; mais il étoit difficile de s'assurer d'une plus grande précision.

1725. Ptoloméé employa pour déterminer la dis-

Fig. 99.

rance du soleil, la méthode d'Hipparque, fondée sur l'observation des éclipses de lune, & cette méthode lui auroit fait découvrir la distance du soleil, si elle n'eût pas été prodigieusement grande par rapport à celle de la lune qu'il employoit dans cette recherche; (*Alm. V*). Soit AO le diamètre du soleil, (*fig. 99*), GB celui de la terre, APO le cône d'ombre que produit la terre dans les éclipses de lune. La durée des éclipses avoit fait connoître à Ptolomée que CE , c'est-à-dire, la largeur du cône d'ombre traversé par la lune étoit d'environ $1^{\circ} \frac{1}{3}$ ou deux fois le demi-diamètre du soleil, & trois cinquièmes de plus, c'est-à-dire, $\frac{13}{5}$ du diamètre du soleil. Il supposoit le diamètre AO du soleil de $31 \frac{1}{3}$, aussi bien que celui de la lune pleine & apogée, la distance TL de la lune à la terre de $64 \frac{1}{8}$ demi-diamètres terrestres, il n'étoit pas difficile d'en conclure par la trigonométrie rectiligne que la distance TS du soleil devoit être de 1210 fois le demi-diamètre TB de la terre; & il s'en suivoit que la parallaxe du soleil devoit être de $2' 50''$, ainsi Ptolomée croyoit le soleil 17 ou 18 fois plus près de nous qu'il ne l'est réellement, & Copernic le rapprocha encore.

Pour trouver le rapport de TB à TS , Ptolomée fait $TM = TL$, & dans le triangle TMQ il trouve MQ ; parce que $MQ : CL :: 5 : 13$ par observation, il trouve CL ; mais puisque $TM = TL$, $LC + MR = 2TB$, d'où ôtant LC & MQ il reste QR . Ptolomée considère ensuite qu'à cause des triangles semblables on a $TS : SM :: TA : AQ :: BA : RA :: TB : QR$. Mais TB & QR sont déjà connus par les deux opérations précédentes; ainsi l'on a le rapport de TS à SM , & celui de la distance de la lune à celle du soleil; d'où Ptolomée conclut que TB est à TS comme 1210 est à 1, ou que la distance du soleil est de 1210 demi-diamètres de la terre. Le P. Riccioli (*Alm. I, 107*), réduit cette méthode aux règles ordinaires de la trigonométrie rectiligne; mais j'ai mieux aimé indiquer ici la manière dont les anciens procédoient pour dé-

duire le rapport des inconnues aux quantités données , par les rapports de celles-ci entre elles.

Cette méthode passe pour être de l'invention d'Hipparque, elle a été suivie & employée par Ptolomée, (*Alm. lib. V. Albategnius, cap. 30. Régiomontanus, Epit. Alm. lib. V. Copernic, Lib. IV, cap. 19. Longomontanus, Astr. dan. lib. I. Theoricor, cap. 9. Boulliaud, Astr. phil. lb. IV*). Mais Lansbergius fait voir que Albategnius, Copernic & Tycho s'étoient trompés dans leurs données, & avoient admis des choses incompatibles & incohérentes, (*Riccioli, Alm. I, 107*).

1726. Tycho employoit la distance du soleil de 1142 demi-diamètres de la terre, (*Progymn. pag. 97*). Il dit ensuite que les éclipses de lune prouvent suffisamment que la parallaxe horizontale du soleil est de trois minutes; mais en convenant que cette détermination n'étoit pas sans incertitude (*pag. 415 & 463*). En effet, il dit ailleurs (*Progymn. pag. 414*) qu'il a mesuré quelquefois, avec soin, la parallaxe de Mars en opposition, pour savoir s'il étoit plus près de nous que le soleil, (comme cela devoit être, suivant l'hypothèse de Copernic & la sienne), & il ajoute qu'il parlera, dans un temps plus convenable, de ce qu'il a trouvé à ce sujet; mais ce qui me persuade que ses efforts avoient été inutiles, c'est qu'il réfute ensuite (*pag. 661*), *Th. Digges* qui, en 1573, avoit donné en Angleterre une méthode pour trouver les parallaxes des astres, (*Digges Ala seu scala mathematica*), il lui oppose la difficulté qui naît des réfractions, & du mouvement propre de Mars; il ajoute seulement qu'il croit y être parvenu par un autre moyen, dont il parlera dans une occasion plus favorable. Tout cela indique assez que Tycho n'avoit point, sur la parallaxe du soleil ou de Mars, de résultat dont il fût bien assuré, & qu'il avoit seulement adopté le résultat de Copernic.

1727. Képler aperçut avec la sagacité, qui lui étoit ordinaire, que la parallaxe de Mars étoit absolument insensible, à plus forte raison celle du soleil,

(*Epit. astr. Cop. pag. 479*) ; il supposoit la distance du soleil 3469 demi-diamètres de la terre , c'est-à-dire , 1' pour la parallaxe du soleil. Dans son ouvrage (*De Stella Martis, pag. 71.*), il dit qu'entre 700 & 2000 demi-diamètres de la terre , il est difficile de statuer démonstrativement sur la distance du soleil à la terre ; c'est-à-dire , qu'il supposoit la parallaxe du soleil entre 4' 55" & 1' 44". Dans ses éphémérides de 1617 & 1618 , il l'employoit de 2' , (*Ricc. Almag. I. 108*) , la distance du soleil étoit donc , selon lui , de 1719 demi-diamètres ; mais ensuite il réduisit cette parallaxe à une minute.

1728. Nous avons dit que Vendelinus , plusieurs années après la mort de Képler , établissoit la parallaxe du soleil de 15" , & le P. Riccioli , en 1665 , de 28" (1724). Cependant en 1677 , on ne regardoit pas cette quantité comme bien sûre ; nous voyons que M. Halley en rendant compte de l'observation du passage de Mercure sur le soleil , qu'il avoit faite à l'Isle de Sainte Hélène , en 1677 , la jugeoit plus grande. Il compara le mouvement de Mercure en longitude , observé dans l'espace de 5^h 14' 20" , (il l'avoit trouvé de 31' 14" $\frac{1}{2}$) , avec le mouvement calculé par les tables de Street , qu'il trouvoit de 30' 50" seulement ; il jugea que cette différence de 24" $\frac{1}{2}$, ne pouvoit être que l'effet de la parallaxe de Mercure , d'où il conclut que la parallaxe horizontale du soleil étoit de 45" ; mais il convient que les élémens qu'on emploie dans cette recherche y jettent beaucoup d'incertitude.

« Je fais bien , ajoute M. Halley , que la parallaxe de
 » Mars acronique , étant deux fois plus grande , servi-
 » roit à faire connoître celle du soleil , mais cette mé-
 » thode est fort sujette à caution , parce qu'elle suppose
 » les observations de la distance de Mars aux étoiles
 » fixes , faites avec le plus grand soin , & les meilleurs
 » micromètres , encore n'est-on pas assuré d'y parvenir.
 » Il ne reste qu'une observation , par laquelle on puisse
 » résoudre le problème de la distance du soleil à la terre ,
 c'est

Il propose
 le passage de
 Vénus.

» c'est celle de Vénus qui paroîtra en 1761 dans le disque
 » du soleil ; car si l'on observe alors la parallaxe de Vénus
 » au soleil par la méthode que je viens d'expliquer, elle
 » sera presque trois fois aussi grande que celle du soleil,
 » & cette observation fera la plus facile de toutes, en-
 » sorte que par ce phénomène, on apprendra tout ce qu'il
 » est possible aux hommes de savoir là-dessus. (Voyez
 » l'art. 2041)».

1729. M. Halley convient ensuite que les plus habiles astronomes de son temps ne croient pas que la parallaxe du soleil soit si grande qu'il la trouve ; mais il pense qu'ils n'ont que des probabilités sur cette matière. La raison que M. Halley trouvoit la plus plausible étoit celle de Street, qui supposoit la parallaxe du soleil entre 10" & 20", parce que, disoit-il, si elle étoit seulement de 10", pour lors Vénus seroit plus grande que la terre, ce qui n'est pas probable, la terre ayant la lune qui tourne autour d'elle, & ce satellite étant la marque d'une prééminence & d'une grandeur au-dessus de Vénus. Si la parallaxe du soleil alloit à 20 secondes, alors mercure seroit plus petit que la lune, cependant il n'y a pas d'apparence qu'une planète principale ou du premier ordre, soit moindre qu'une planète du second ordre ; toutes ces raisons étoient bien peu concluantes.

La parallaxe de Mars en opposition n'avoit pas paru sensible avec les plus grands instrumens de Tycho-Brahé ; cela persuadoit à M. Halley qu'elle n'étoit pas d'une minute, d'où il s'ensuivoit que celle du soleil ne passoit pas 25", & il conclut par dire qu'après avoir bien examiné toutes les circonstances, il est très-persuadé que la parallaxe du soleil est environ de 25". Il suivoit à peu-près en cela le P. Riccioli, qui dans son astronomie réformée, l'avoit employée de $28''\frac{1}{3}$ pour les moyennes distances du soleil. Telles étoient les incertitudes des astronomes sur la parallaxe du soleil avant que les observations faites par les astronomes de l'académie des Sciences, eussent prouvé que cette parallaxe n'alloit pas à plus de 10".

M. Halley
 estime la pa-
 rall. de 25".

1730. M. Cassini, dans une lettre écrite au marquis Malvasia, en 1662, & dans un mémoire qui a pour titre : *Les élémens de l'astr. vérifiés*, (publié en 1684), dit qu'on avoit proposé deux hypothèses, qui sur les hauteurs méridiennes du soleil faisoient à peu-près le même effet dans les climats d'Europe, de sorte qu'il n'y avoit pas de moyen assez certain de distinguer évidemment, par observation, quelle étoit la véritable hypothèse. La première supposoit la parallaxe du soleil insensible ou au-dessous de $12''$, & dans cette hypothèse les réfractions étoient invariables pendant toute l'année; dans l'autre on supposoit la parallaxe horizontale du soleil d'une minute, comme Képler, mais cette supposition obligeoit de varier la réfraction dans tout le cours de l'année, à proportion de la déclinaison du soleil. Les observations des phases de la lune & de la parallaxe de Mars dans ses oppositions favorisoient la première hypothèse, que nous savons actuellement être la véritable; mais la distance du soleil à la terre qui en résultoit étoit prodigieuse. M. Cassini s'étoit arrêté à la dernière hypothèse dans les observations de l'équinoxe du printemps, qu'il publia à Bologne en 1656, après avoir tracé la méridienne de S. Pétrone, cependant il balançoit encore entre ces deux hypothèses, en 1662, comme on le voit dans les éphémérides de Malvasia, (pag. 155), & il souhaita, en 1671, que cette incertitude fût levée par le voyage de Cayenne: ce fut un des objets de l'instruction, dont on chargea M. Richer.

1731. Les premières tentatives qui furent faites en France pour trouver la parallaxe de Mars, sont dans un ouvrage de M. Cassini, qui fait partie du *Recueil d'observations* publié à Paris en 1693. Il compare les observations que M. Richer avoit faites à Cayenne, le premier Octobre 1672, avec celles que M. Picard & M. Romer faisoient en même temps à Paris; mais il trouve la même différence en déclinaison de Mars à l'étoile \downarrow du Verseau, soit par l'observation de Paris, soit par celle de Cayenne, en sorte que la parallaxe de

Mars lui paroïssoit nulle pour ce jour-là , sans qu'il pût en favoir précisément la raison. Nous ne voyons pas , dit M. Cassini , qu'il puisse y avoir d'erreur sensible dans l'observation de Paris , & il ne peut y avoir erreur que de $15''$ au plus sur la hauteur de Mars observée en Cayenne ; or la parallaxe de Mars , dans ce cas-là , étoit tout au plus de $25''$; celle du soleil ne pouvoit donc être de plus de $9''$, suivant ces observations.

Quelques années après , c'est-à-dire , en 1684 , M. Cassini donna un mémoire qui a pour titre : *Les élémens de l'astronomie vérifiés par le rapport des tables aux observations de M. Richer , faites en l'Isle de Cayenne.* Il compara entr'elles les observations du 5 Septembre 1672 , du 9 & du 24 , faites en même temps à Cayenne & à Paris , & il trouva que Mars avoit été pour Paris plus abaissé par rapport à l'étoile de $15''$ qu'en Cayenne , ce qui donnoit la parallaxe horizontale de Mars $25''\frac{1}{2}$, & celle du soleil de $9''\frac{1}{2}$, ou sa distance à la terre de 21600 demi-diamètres de la terre.

M. Cassini
juge la parall.
de $9''\frac{1}{2}$.

1732. La même année M. Cassini , aidé de MM. Romer & Sédileau , employa pour chercher la parallaxe de Mars , la méthode des ascensions droites (1648) , qu'il publia ensuite à l'occasion de la comète de 1680. Entre les observations faites quatre heures avant le passage au méridien , & quatre heures après , on trouvoit le plus souvent deux secondes de temps de différence entre la variation apparente & celle qui devoit avoir lieu réellement , d'où M. Cassini tiroit la parallaxe de Mars de 24 ou $27''$; la distance de Mars à la terre étoit à la moyenne distance du soleil à la terre , comme 1 est à $2\frac{2}{3}$, ou comme 1 est à $2\frac{3}{4}$.

Le 9 Septembre 1672 , la nuit même de l'opposition de Mars , il étoit près de deux petites étoiles disposées selon son parallèle , qui servirent pour les observations de plusieurs jours ; ces observations donnerent la variation journaliere de l'ascension droite de Mars , entre le 8 & le 9 Septembre de $67''\frac{1}{2}$ de temps , entre le 9 & le 10 de $66''\frac{3}{4}$. Le 9 , entre $8^h 36'$ du soir & 15^h

56', la variation apparente de l'ascension droite de Mars fut observée de $21''\frac{1}{2}$; le changement véritable déduit des mouvemens journaliers, ne devoit être que de $19''\frac{3}{4}$; la différence de $1''\frac{3}{4}$ étoit l'accélération apparente, causée par l'effet de la parallaxe de Mars; Mars passoit au méridien à $12^h 8'$, sa déclinaison étant de $10^\circ 34'$, il est aisé de conclure de tout cela (1648), avec M. Cassini, que la parallaxe horizontale de Mars étoit de $24''\frac{3}{4}$.

Les mêmes recherches furent continuées jusqu'à la fin de Septembre; car comme les différences cherchées étoient extrêmement petites, il falloit un très-grand nombre d'observations, qui donnassent le plus souvent à peu-près la même chose, pour être persuadé que ces différences venoient de la parallaxe, & non de quelque défaut des observations, qui sont d'ailleurs sujettes à de semblables différences, ou même à de plus grandes: M. Cassini convient qu'il est arrivé quelquefois qu'on n'a pas trouvé de différence entre les mouvemens horaires apparens & les véritables, & quelquefois un peu de différence contraire à l'effet de la parallaxe: on s'arrêtoit, dit-il, à ce qu'on trouvoit plus souvent, & & par des observations plus choisies.

1733. On manqua en 1672 l'observation la plus avantageuse & la plus décisive pour cette détermination: le premier Octobre Mars passa par la moyenne des trois étoiles appellées \downarrow dans l'eau d'Aquarius, & il la cacha par son disque à 10 heures du soir, comme on le trouve par la comparaison des observations faites le même jour; mais les nuages dérobèrent cette importante observation. On mesura cependant la même nuit plusieurs distances de Mars à cette étoile, qui servent à trouver à peu-près le temps de cette conjonction; mais en les comparant ensemble on y trouve de petites différences irrégulières dont quelques-unes ne donnent point de parallaxe; d'autres en donnent trop, & d'autres sont en sens contraire à l'effet de la parallaxe.

Cela donnoit lieu à M. Cassini de douter si l'irrè-

gularité de ces différences entre les observations faites si près de la conjonction, n'étoit pas causée par quelque réfraction extraordinaire, & si Mars n'avoit point une atmosphère par laquelle les rayons de l'étoile étoient rompus diversement à diverses distances, jusqu'à un certain terme. C'étoit à la diffraction ou inflexion de la lumière que ces différences devoient se rapporter, (*Newton, Opt. part. 3*).

Irrégularité
observée.

1734. M. Picard, à Brion en Anjou, observa les mêmes différences d'ascension droite le premier Octobre 1672; il trouva la parallaxe de Mars absolument nulle en comparant son observation avec celle de Cayenne; mais en comparant ses observations entr'elles par la méthode des angles horaires (1647), il la trouva double de celle de M. Cassini; tout cela prouve combien ces observations sont délicates, & provient peut-être aussi de la cause indiquée dans l'article précédent.

1735. M. de la Hire observa aussi Mars à Paris avec assiduité depuis le 22 Septembre 1672 jusqu'au 29 Octobre suivant; pendant ce temps-là il le vit passer vers un grand nombre de petites étoiles qui sont dans l'eau d'*Aquarius*, & il trouva de si grandes variétés dans les résultats, qu'il jugea la parallaxe insensible, comme on le voit dans ses tables, pag. 6 : « A peine avons-nous trouvé, dit-il, une parallaxe » sensible dans le soleil; ainsi l'on peut en sûreté la » négliger si on le juge à propos. Si cependant on veut » employer pour le soleil une parallaxe de 6'', on aura » la distance moyenne du soleil à la terre, de 34377 » demi-diamètres terrestres ». On peut juger par-là que si M. de la Hire n'a jamais employé la parallaxe du soleil que de 6'', c'étoit parce qu'il la croyoit absolument insensible.

M. de la
Hire la juge
de 6''.

1736. Flamsteed qui avoit fait les mêmes observations à Derby, écrivoit le 16 Novembre 1672, qu'ayant mesuré la distance de Mars à deux étoiles, il avoit reconnu que sa parallaxe n'étoit certainement pas de 30 secondes, & que la parallaxe du soleil n'étoit

pas de plus de 10 secondes, (*Philos. transf. n^o. 89, pag. 5118*), & quelques mois après, il étoit persuadé que la parallaxe de Mars ne passoit pas 25 secondes, & que celle du soleil étoit tout au plus de 10 secondes (*Ib. pag. 6100*).

Diverses
observations
qui donnent
10".

1737. En 1704 M. Maraldi profita de la situation de Mars périégée pour observer sa parallaxe, il la trouva de 23", d'où résulroit la parallaxe du soleil de 10 secondes. (*Mém. acad. 1706, pag. 74*).

M. Pound & M. Bradley firent aussi en 1719 de semblables observations avec une lunette de 15 pieds : M. Halley rapporte qu'il les vit observer souvent & que dans toutes leurs observations ils ne trouvèrent jamais la parallaxe du soleil plus grande que 12", & jamais moindre que 9".

1738. M. Maraldi qui observa aussi Mars en opposition la même année, trouva la parallaxe horizontale du soleil de 10 secondes, (*Mém. acad. 1722, pag. 216*).

1739. M. Cassini en 1736 observa pendant plusieurs jours, à Thury, Mars qui étoit en opposition & fort près de l'étoile μ des Poissons; il trouva la parallaxe du soleil entre 11" & 15".

1740. M. l'Abbé de la Caille ayant obtenu la permission de faire un voyage au Cap de Bonne-Espérance pour y travailler au catalogue des étoiles (728), en profita pour faire sur la parallaxe de la lune & sur celle du soleil un grand nombre d'observations. Il a comparé à ses observations celles qui avoient été faites à Greenwich, par M. Bradley; à Bologne, par M. Zannotti; à Paris, par M. Cassini de Thury & M. le Gentil; à Stockolm & à Upsal, par M. Wargentin & M. Strommer; à Hernosand, par M. Schemmark, avec des quarts de cercles de six pieds, ou des lunettes de 7 à 8 pieds garnies de micromètres; ces observations faites depuis la fin du mois d'Août jusqu'au 6 Octobre 1751, étant toutes réduites au 14 Septembre 1751, jour de l'opposition de Mars au soleil, donnent des

résultats qui sont tous compris entre 24 & 34 secondes, mais par un milieu pris entre 27 résultats M. de la Caille trouve $26'' 8$ pour la parallaxe horizontale de Mars ce jour-là. La distance de Mars à la terre étoit alors à celle du soleil, comme 3841 à 10047, d'où il résulte que la parallaxe horizontale du soleil étoit alors de $10'' \frac{1}{4}$, & que dans la moyenne distance du soleil elle seroit de $10'' 2$ ou $10'' \frac{1}{5}$.

1741. M. de la Caille a encore recherché la parallaxe de Mars par 41 observations faites à Thury par M. Cassini & M. Maraldi; à l'Hôtel de Clugny, par M. Messier; à Lyon, par le Père Béraud Jésuite; à Toulouse, par M. d'Arquier & M. Garipuy; à Naples, par M. Sabatelli & le P. Carcani; & à Wittemberg en Saxe, par M. Bose, le milieu entre ces 41 résultats est de $26'' \frac{1}{3}$ pour la parallaxe de Mars; ce qui diffère à peine des autres observations.

Dans le temps où M. de la Caille étoit au Cap de Bonne-Espérance, Vénus se trouva aussi dans sa conjonction inférieure, le 31 Octobre 1751, & elle fut observée au Cap & en Europe; il est vrai que le temps fut très-peu favorable aux observations, mais M. de la Caille en a calculé quatre qui donnent la parallaxe du soleil de $9'' 8$, $10'' 4$ à $10'' 5$ & $11'' 4$; ainsi prenant un milieu on a $10'' 38$ pour la parallaxe horizontale du soleil dans sa moyenne distance par les observations de Vénus; & toutes compensations faites, M. de la Caille termine ses recherches là-dessus (*Introd. aux éphémérides de 1765—1774, pag. L*), en disant qu'on peut établir comme une quantité certaine à moins d'un quart de seconde près que la parallaxe horizontale du soleil dans sa distance moyenne à la terre, est de dix secondes & un quart.

1742. Tel étoit l'état actuel de nos connoissances sur la distance du soleil, quand les passages de Vénus sur le soleil sont arrivés en 1761 & 1769. Si l'on a toujours mis au nombre des époques mémorables, celles des progrès de l'esprit, tout ce qui nous procure

Par les passages de Vénus 9".

des connoissances nouvelles est pour nous un événement célèbre : le passage de Vénus étoit un de ces phénomènes rares & singuliers, prédit & attendu depuis plus d'un siècle, il n'avoit jamais été observé, depuis qu'on en connoissoit l'importance. C'étoit cependant de tous les phénomènes célestes, celui dont on devoit espérer la plus exacte détermination de la parallaxe du soleil, & par conséquent de toutes les distances des planètes à la terre, comme nous le dirons dans le XI^e. livre. Ces passages nous ont fait connoître que la parallaxe du soleil est à peu-près de 9 secondes, car l'observation faite au Cap en 1761, a donné la parallaxe de 8" 6 pour le jour de l'observation, suivant M. Short, (*Phil. transf.* 1763, pag. 340); & suivant M. Pingré, (*Mém. acad.* 1761, pag. 479). Ce qui fait presque 8" 8 pour les moyennes distances; & par l'observation faite à la Baye d'Hudson en 1769, je trouve 9" 2 (2149), le milieu est exactement 9", parallaxe moyenne du soleil, & nous pourrons supposer en nombres ronds la parallaxe du soleil de 9 secondes, dans le reste de cet ouvrage.

1743. L'extrême petitesse de la parallaxe du soleil fait qu'on peut dans un grand nombre d'occasions la négliger, & supposer que les rayons qui vont du soleil à tous les points de la terre sont parallèles entr'eux; de la même manière que si le soleil étoit à une distance infinie de nous; puisque des lignes qui sont entre elles un angle si petit ne diffèrent pas de celles qui seroient exactement parallèles, ou qui ne seroient point d'angle, c'est la supposition que nous ferons dans les préliminaires du calcul des éclipses.

La parallaxe du Soleil change d'un tiers de sec.

1744. La distance du soleil à la terre est plus petite au mois de Décembre qu'au mois de Juin d'une trentième partie, parce que l'excentricité de l'orbite terrestre est de 0, 0168 (1217, 1278). Ainsi la parallaxe horizontale du soleil doit être d'un tiers de seconde plus grande au mois de Janvier qu'au mois de Juillet.

1745. Lorsqu'on a une table des logarithmes des distances du soleil à la terre faite suivant les principes de l'art. 1245, il suffit de diviser la parallaxe moyenne par la distance actuelle du soleil pour avoir la parallaxe du soleil dans un temps donné; si elle est de 9" au commencement d'Avril & d'Octobre, elle n'est que de 8 secondes $\frac{83}{100}$ au commencement de Juillet, & elle est de 9 secondes $\frac{17}{100}$ au commencement de Décembre.

1746. La parallaxe du soleil étant connue, sa distance absolue est aisée à trouver (1634) : car le sinus de 9 secondes est au rayon, comme le demi-diamètre de la terre est à la distance du soleil; & comme le rayon d'un cercle est 22918 fois plus grand que le sinus de 9 secondes; il s'ensuit que la distance du soleil est de 22918 fois le rayon de la terre, ou environ 32830478 lieues communes de France, de 2283 toises chacune. Les distances des autres planètes sont aisées à conclure de celles-ci, puisqu'on connoît leur rapport (1224), & nous avons déjà rapporté ces distances, (1222).

Distances
absolues des
Planètes.

1747. J'ai annoncé (1093) que même suivant Tycho, le soleil étoit plus gros que la terre, cela suit évidemment de la quantité qu'il supposoit pour la parallaxe du soleil, qui étoit de 3' (1726); le demi-diamètre du soleil étant supposé de 15' vu de la terre, & celui de la terre de 3' vu du soleil, il s'ensuit que le soleil est cinq fois plus large que la terre, ou 125 fois plus gros & plus pesant, même dans les principes de Tycho; en sorte qu'il faisoit tourner autour de la terre un corps bien plus gros qu'elle, (1093).

1748. On peut actuellement comparer entre elles les distances du soleil & de la lune, & reconnoître que la distance moyenne de la lune est 384 fois plus petite que celle du soleil, à peu-près comme nous l'avons supposé (1409); les parallaxes seules suffisent pour reconnoître ce rapport; celle de la lune est de 57' 39" :

(1712); ainsi elle contient 384 fois la parallaxe du soleil supposée de 9 secondes, & 380 fois si l'on emploie la parallaxe de la lune dans les moyennes distances qui est $57' 3''$. Donc la distance du soleil est dans le même rapport, c'est-à-dire, 380 fois plus grande que la distance moyenne de la lune.

1749. Les principes que nous venons d'établir sur les parallaxes, nous conduiront maintenant aux calculs des éclipses de lune & de soleil, qui seront l'objet du livre suivant, & qui n'ont presque aucune difficulté, quand on entend bien le calcul des parallaxes.



LIVRE DIXIÈME.

DU CALCUL DES ÉCLIPSES.

1750. **L**ES ÉCLIPSES^(a) ont toujours formé pour les hommes un spectacle frappant ; la manière de les prédire leur paroît être l'objet le plus important des recherches de l'astronomie ; c'est du moins la preuve sur laquelle on juge souvent des progrès de cette science & de l'exactitude des astronomes.

Il est vrai que les éclipses ne sont importantes pour nous que parce qu'elles sont un moyen de déterminer les inégalités de la lune, & les longitudes des différens lieux de la terre ; mais cet objet est assez considérable pour mériter des détails ; ajoutons à cela l'intérêt que le Public y prend, l'usage où sont les astronomes de les calculer toutes avec le plus de soin qu'il est possible, & l'emploi que les Historiens en ont fait ; tout cela exige qu'on apprenne dans un livre d'astronomie toutes les méthodes les plus exactes & les plus sûres de calculer les éclipses, avec toutes les choses remarquables qui peuvent y avoir rapport.

1751. Le premier calcul préliminaire dans une éclipse est celui de la conjonction moyenne : lorsqu'on ignore le temps où il y aura des éclipses & qu'on veut s'en instruire, on est obligé de calculer toutes les conjonctions & toutes les oppositions qui arriveront dans l'année, & de choisir celles qui peuvent être écliptiques ; c'est-à-dire, où la lune sera assez près de l'écliptique, & à une latitude assez petite pour qu'il puisse y avoir éclipse. On a calculé diverses tables propres à trouver aisément chaque conjonction moyenne : nous

Conjonctions
moyennes.

(^a) *Ἐκλείπω*, *deficio*, parce que dans les éclipses le soleil ou la lune paroissent nous manquer.

avons vu que le Saros de M. Halley, ou la période Caldéenne de Pline ramene ordinairement les éclipses dans le même ordre au bout de 18 ans (1501); ainsi cette période fournit déjà un moyen pour prévoir à peu-près les jours où il peut y avoir une éclipse de lune ou de soleil, quand on connoît celles qui ont eu lieu 18 ans auparavant; mais l'usage de cette méthode est borné (1502).

Épactes
astronomiq.

1752. On peut aussi reconnoître les syzygies écliptiques par la méthode des épactes, & c'est la voie la plus naturelle & la plus générale. On en trouve la table dans le P. Riccioli, (*Astron. reform. pag. 60*); dans M. de la Hire, dans M. Cassini, (*Tables astron. pag. 58*), dans les éphémérides du P. Hell, pour 1764, & dans nos tables de la lune. Les épactes astronomiques dont nous nous servons pour trouver les nouvelles lunes moyennes, ne sont autre chose que l'âge de la lune au commencement de l'année, ou le nombre de jours qui restoit depuis la dernière conjonction moyenne de l'année précédente jusqu'au commencement de l'année actuelle, si elle est bissextile, ou à la veille si c'est une année commune (1326); par exemple, il y a eu conjonction moyenne le 26 Décembre 1761, à $1^h 14' 14''$, la longitude moyenne du soleil étant égale à la longitude moyenne de la lune; depuis ce moment-là jusqu'au 31 de Décembre à midi, pour lequel sont calculées les époques des années communes, il y a quatre jours $22^h 45' 46''$; c'est-là ce qu'on appelle épacte astronomique de 1762. Cette épacte étant retranchée de 29 jours $12^h 44' 3''$, nous apprend que la première conjonction moyenne de 1762 arrivera le 24 Janvier à $13^h 58' 17''$ de temps moyen, puisque 4 jours 22^h qui restent de l'année précédente avec 24 jours 13^h du mois de Janvier, font l'intervalle de 29 jours 12^h qu'il doit y avoir d'une conjonction à l'autre.

1753. Pour calculer l'épacte d'une année, il suffit de retrancher la longitude moyenne du soleil de celle de la lune, & de convertir le reste en temps lunaire,

à raison de $12^{\circ} 11' 27''$ par jour, qui est la différence des mouvemens diurnes du soleil & de la lune. Ainsi l'époque du soleil pour 1762 est 9 signes $10^{\circ} 6' 14''$; & celle de la lune 11 signes $10^{\circ} 25' 45''$, suivant les premières tables de Mayer; celle du soleil étant retranchée de cette dernière, il reste 2 signes $0^{\circ} 19' 31''$ qui répondent à quatre jours $22^h 45' 46''$ de temps, ces 4 jours font l'épacte de 1762, parce qu'il a fallu 4 jours à la lune pour s'éloigner du soleil de deux jours, & qu'au moment de l'époque de 1762, il y avoit quatre jours que la conjonction étoit passée; il est aisé de trouver le temps qui répond à une différence quelconque de longitude, dès que l'on sait que pour 360° il faut 29 jours $12^h 44' 3''$ (1422).

1754. On trouvera parmi nos tables de la lune celle des épactes, qui avoit été calculée par M. L'émery, sur la première édition des tables de Mayer; après les épactes des années qui restent de ce siècle ci, on y trouve celles d'un nombre quelconque d'années, jusqu'à 2000; vis-à-vis des années & des centaines d'années, il y a des nombres qu'on peut appeller le *changement des épactes*, & qui s'ajoutent à l'épacte d'une année pour avoir celle d'une autre année; ainsi vis-à-vis d'une année on trouve 10 jours 15 heures qui est l'âge de la lune à la fin de l'année, quand la conjonction est arrivée au commencement; de même vis-à-vis de 60 on trouve 3 jours $7^h 16' 9''$, c'est le temps qui répond à la différence entre le mouvement du soleil en 60 ans, c'est-à-dire, entre $27' 33''$, & celui de la lune $40^{\circ} 43' 24''$; cette différence $40^{\circ} 15' 51''$ répond à 3 jours 7 heures, c'est la quantité dont la lune est plus éloignée de sa conjonction à la fin de 60 ans qu'elle ne l'étoit auparavant; enforte que l'on ajoute ces 3 jours 7 heures à l'épacte de l'époque proposée pour avoir l'épacte à la fin des 60 ans. Il en est de même des changemens de chaque mois.

L'épacte du mois de Janvier est zéro, car puisque l'épacte de l'année marque l'âge de la lune le 31 Dé-

Epactes de
mois.

signes

cembre, & que nous appellons zéro le 31 Décembre; il n'y a rien à y ajouter pour le mois de Janvier. L'épacte de Février fera l'âge de la lune au commencement de Février, en supposant que la lune ait commencé le 31 Décembre, c'est donc l'excès de 31 jours sur une lunaison entière, ou un jour $11^h 15' 58''$. Pour comprendre la raison de cette épacte du mois de Février, on considérera que si l'épacte de l'année étoit nulle, ou $0^h 0'$ la conjonction seroit arrivée le 31 Décembre précédent à midi, (art. 1756); & celle du mois de Janvier qui arrive 29 jours 13 heures plus tard tomberoit au 29 Janvier à 13^h , il resteroit du mois de Janvier un jour & 11^h , & c'est l'épacte du mois suivant. Cette épacte ôtée de $29^j 13^h$ fait voir que la conjonction suivante arrivera le 28 Février à deux heures; il s'en faut deux heures qu'il ne reste quelque chose de ce mois-là; ainsi l'épacte du mois de Mars seroit *moins* deux heures; ou ce qui revient au même 29 jours 11 heures.

L'épacte de Mars est l'âge de la lune, le premier de Mars, en supposant que la lune ait commencé le 9 de Décembre, c'est donc l'excès de 59 jours que contiennent les deux premiers mois sur la durée d'une lunaison, ou $29^j 11^h 15' 58''$. On trouvera de même les changemens des autres mois, tels qu'ils sont dans la table.

1755. De là suit aisément la règle générale pour trouver une nouvelle lune, par la table des épactes. Ajoutez ensemble l'épacte des années & celle du mois, retranchez la somme d'une révolution ou de plusieurs, en sorte que le reste soit moindre que 29j, & ce reste marquera le jour, l'heure & la minute de la conjonction moyenne pour ce mois-là. Si l'année est bissextile, il faut, dans les deux premiers mois, retrancher un jour de la somme des épactes avant de faire la soustraction; parce que les époques des années bissextiles étant pour le premier Janvier à midi, sont trop avancées d'un jour, jusqu'à ce que le jour intercalaire, placé vers la fin de

Règle pour
trouver une
conjonction.

Février, ait rétabli les choses dans leur ordre naturel.

On demande la conjonction moyenne du mois d'Avril 1764; en supposant qu'on n'ait pas une table aussi détaillée que la nôtre, on ajoutera ensemble les nombres suivans, tirés de la table des épactes astronomiques.

Epacte de l'année 1700.	91 21 ^h 50' 53"
Changement pour 60 ans.	3 7 16 9
Pour 4 ans.	14 0 1 38
Pour le mois d'Avril.	<u>1 9 47 51</u>
Somme à ôter	28 14 56 31
Révolution entière	<u>29 12 44 3</u>
Conjonction moyenne	0 21 47 32

C'est-à-dire, le 31 Mars à 21 heures.

1756. Lorsque le jour de la conjonction moyenne se trouve zéro, comme dans l'exemple précédent, il faut prendre le dernier jour du mois précédent; ainsi la conjonction que nous venons de trouver, est celle du 31 Mars à 21^h 47' 32", quoique nous ayons employé l'épacte du mois d'Avril; on sent assez qu'il faudroit avoir un jour dans la somme des épactes, pour pouvoir dire que c'est le premier d'Avril; tant qu'il n'y a que zéro de jours pour le mois d'Avril, on ne peut pas dire que nous soyons en Avril, car on compte 1 aussi-tôt que le mois commence.

1757. Pour trouver les pleines lunes ou oppositions moyennes, il faut considérer qu'elles arrivent plus tard que les conjonctions moyennes, d'une demi-révolution ou de 14j 18^h 22' 1" $\frac{1}{2}$, ainsi il suffira d'ajouter ces 14 jours au temps d'une conjonction moyenne, pour trouver l'opposition qui la suit, ou d'en ôter 14 jours pour avoir l'opposition qui précède: on peut aussi trouver le temps d'une opposition, en retranchant de 14j 18^h 22' 1", la somme des épactes; car si l'épacte, où ce qui reste du mois précédent, à compter de la nouvelle lune, est de 5 jours, il est évident que la pleine lune arrivera

Pour les pleines lunes.

le 9 du mois suivant, puisqu'il doit y avoir 14 jours d'intervalle; il suffit donc d'ôter de 14 jours, les 5 jours d'épâctes, & le reste 9 annonce que la pleine lune arrivera le 9^e jour du mois.

Si la somme des épâctes est trop grande pour pouvoir être ôtée de 14^j, on ajoutera à 14^j une ou plusieurs révolutions; ainsi pour trouver la pleine lune du mois d'Avril 1764, on ajoutera la

demi-révolution,	14 ^j 18 ^h 22' 1"
Avec une révolution entière.	29 12 44 3
Somme.	44 7 6 4
Otez la somme des épâctes Avr. 1764.	28 14 56 31
Pleine lune du mois d'Avril.	15 16 9 33

1758. M. Halley avoit donné une suite d'éclipses, depuis 1701 jusqu'à 1718, pour servir à trouver les autres éclipses par la période de 18 ans (1502); mais les éditeurs y ajoutèrent une table des conjonctions moyennes que M. Pound avoit construite, & que l'on peut voir dans le premier volume des tables de Halley; (à Paris chez Bailly, in-8°. 1754), elle revient à peu-près au même que celle des épâctes; mais on y a joint des tables d'équations pour trouver à peu-près les conjonctions vraies. Il y en a de semblables dans le *Calendarium*, imprimé à Berlin pour 1749.

Trouver s'il y aura éclipse.

1759. Quoiqu'on ne connoisse encore que le temps moyen d'une conjonction moyenne, ou d'une opposition moyenne, par la méthode des épâctes on peut savoir, à peu-près, s'il y aura éclipse de soleil ou de lune; on prendra dans les tables la longitude moyenne du soleil & celle du nœud de la lune pour le temps moyen trouvé; on retranchera le lieu d'un des nœuds, de la longitude moyenne du soleil, & l'on aura la distance moyenne du soleil au nœud de la lune.

Lorsque le soleil est éloigné de plus de 21° d'un des nœuds de la lune, il ne fauroit y avoir éclipse de soleil, en aucun lieu de la terre; si cette distance est moindre

moindre que 15° , il est sûr qu'il y aura éclipse de soleil en quelque lieu de la terre; l'incertitude roule entre 15 & 21° , c'est-à-dire, que si la distance moyenne du soleil au nœud le plus voisin; dans le temps de la conjonction moyenne, est entre 15 & 21° ; il faudra faire un calcul plus exact que celui dont je viens de parler, pour être sûr qu'il y aura éclipse. (M. Cassini, *Tables astr.* pag. 25).

Il ne peut y avoir éclipse de lune, si dans le temps de la conjonction moyenne il y a plus de $14^{\circ}\frac{1}{2}$ de distance moyenne entre le soleil & le nœud de la lune; mais on est sûr qu'il y en aura une, si cette distance est moindre que $7^{\circ}\frac{1}{2}$; entre $14^{\circ}\frac{1}{2}$ & $7^{\circ}\frac{1}{2}$, l'on fera obligé de recourir à un autre calcul, mais il est toujours très-commode d'avoir promptement l'exclusion de presque toutes les syzygies qui ne sauroient être écliptiques, & de n'avoir à en calculer rigoureusement qu'un très-petit nombre, pour connoître toutes les éclipses qui doivent arriver dans une année quelconque.

1760. Il y a des années dans lesquelles il n'arrive aucune éclipse de lune, telle est l'année 1767; le nœud de la lune s'étant trouvé à $10^{\circ} 11^{\circ}$ au commencement de Janvier; mais communément il y en a plusieurs à chaque année.

1761. Lorsqu'on a trouvé qu'il doit y avoir éclipse dans une nouvelle ou pleine lune, & qu'on veut en calculer les circonstances, il faut commencer par trouver l'heure & la minute en temps vrai de la conjonction ou de l'opposition vraie en longitude; la latitude de la lune pour ce moment; le mouvement horaire de la lune en longitude & en latitude, la parallaxe & le diamètre; c'est un préliminaire essentiel dans le calcul de toutes les éclipses.

Calculs nécessaires pour toutes les éclipses.

Pour cela, on calcule d'abord le lieu du soleil & celui de la lune, comme nous le dirons en parlant de l'usage des tables, pour deux instans différens; & l'on a par ce moyen le mouvement horaire de la lune & celui du soleil, avec la différence de leur longitude

pour un instant connu ; on peut aussi se servir des tables du mouvement horaire qui sont à la suite des tables de la lune.

Temps de
la conjonc-
tion.

Je suppose qu'on ait trouvé pour le premier Avril 1764 à 8 heures 32' du matin que le lieu de la lune étoit moins avancé que celui du soleil de 54', & que le mouvement horaire de la lune, moins celui du soleil, étoit de 27' ; il est évident que puisque la lune se rapproche du soleil de 27' par heure, elle atteindra le soleil deux heures après ; car 27' font à une heure comme 54' font à deux heures. Ainsi la conjonction vraie, arrivera à 10^h 32'.

Lorsqu'on connoît le temps de la conjonction on trouve dans les tables pour le même instant, la latitude de la lune, sa parallaxe, son diamètre & le diamètre du soleil ; il faut aussi connoître le mouvement horaire de la lune en latitude, & pour cet effet on calcule la latitude de la lune pour deux instans différens.

1762. Quand on a l'heure de la conjonction & le mouvement horaire de la lune, il faut trouver l'inclinaison de son orbite par rapport à l'écliptique ; d'abord l'inclinaison de l'orbite vraie, ensuite celle de l'orbite relative ; cela est nécessaire pour les éclipses de lune, & même pour les éclipses de soleil quand on veut en avoir les phases pour différens pays de la terre (1806) ; voilà pourquoi je place cet article au nombre des préliminaires généraux du calcul des éclipses.

Orbite re-
lative.

1763. Lorsqu'on calcule une conjonction de deux planètes, ou d'une planète à une étoile, c'est-à-dire, un appulse, ou même une éclipse, on n'a besoin que de connoître la quantité dont un des astres se rapproche de l'autre, ou le mouvement relatif ; par exemple, dans une éclipse de soleil on demande avec quelle vitesse & dans quelle direction la lune s'approche du soleil. Il suffit pour cet effet de chercher combien la longitude d'une planète surpasse celle de l'autre dans l'espace d'une heure, & combien une latitude excède l'autre dans le même espace de temps : ce n'est pas le

mouvement réel, total & absolu, de chacune des deux planètes, mais l'excès d'un des mouvemens sur l'autre qui produit une conjonction ou une éclipse.

On peut donc ne faire aucune attention au mouvement d'une des deux planètes, pourvu qu'on donne à l'autre la différence des deux mouvemens, c'est-à-dire, qu'en faisant mouvoir seulement l'une des deux on lui fasse changer de longitude & de latitude par rapport à l'autre, autant qu'elle en change réellement par la combinaison des deux mouvemens pris ensemble; on aura par ce moyen la conjonction apparente des deux astres, tout de même que si l'on considéroit les deux mouvemens à la fois.

Ainsi pour calculer une conjonction de deux planètes, on ne considère que le mouvement relatif, c'est-à-dire, le mouvement de l'une par rapport à l'autre; & on suppose fixe l'une des deux; cette supposition ne fait que simplifier le calcul & ne change rien à l'état réel des choses; car si une planète avance par heure de 36 minutes, & l'autre de 2 minutes, il est évident qu'elles ne changeront que de 34 minutes l'une par rapport à l'autre, & elles feront à la même distance que si l'une étant fixe, l'autre n'avoit eu que 34' de mouvement.

Soit P & A (*fig. 97*) les deux planètes en conjonction, $PR = AB$ le mouvement horaire d'une des deux planètes en longitude, c'est-à-dire, parallèlement à l'écliptique, AC le mouvement horaire de l'autre planète; la différence BC des deux mouvemens est le mouvement horaire relatif, puisque la première planète ayant avancé de la quantité PR égale AB , & la seconde planète de la quantité AC , elles ne diffèrent l'une de l'autre que de la quantité BC en longitude, c'est-à-dire, autant que si l'une étoit restée en P , & que l'autre eût parcouru seulement un arc AG égal à BC , en partant du point A .

Fig. 97.

1764. Il en est de même du mouvement en latitude; supposons que la planète qui a eu le mouvement

Fig. 97.

PR en longitude ait eu le mouvement RD en latitude, en sorte que son vrai mouvement soit PD ; supposons que l'autre planète ait eu de même un mouvement en latitude CE , en même temps que le mouvement en longitude AC ; c'est-à-dire, que son mouvement propre ait été réellement AE , la différence des deux mouvemens horaires en latitude RD & CE , ou la quantité FE fera le mouvement horaire relatif en latitude, ou la quantité dont une planète s'éloignera de l'autre en latitude; on pourra donc supposer fixe la planète P , prendre AG & GH à la place de BC & FE , & supposer que la planète A a parcouru l'orbite relative AH .

Fig. 98.

On pourra faire aussi un triangle MNO (fig. 98), dont les côtés MN & NO soient égaux aux mouvemens horaires relatifs BC & FE ou AG & GH en longitude & en latitude, l'angle OMN fera l'inclinaison de l'orbite relative, & MO le mouvement horaire sur cette orbite relative; on pourra supposer qu'une planète étant restée fixe en M , l'autre a décrit MO : par le moyen de cette supposition on voit que les deux planètes différenceront, soit en longitude, soit en latitude autant que lorsqu'on laissoit à chacune son mouvement particulier; tout se passera donc entr'elles, & toutes les apparences seront les mêmes qu'auparavant; la supposition de l'orbite relative MO ne fera que simplifier le calcul, en réduisant deux mouvemens à un seul.

1765. L'orbite relative est donc celle que l'on peut supposer à la place de l'orbite réelle, & dans laquelle pourroit se mouvoir une des deux planètes sans que ses distances réelles par rapport à l'autre parussent être changées. Dans le triangle MNO on a ces proportions: MN est à NO , comme le rayon est à la tangente de l'angle OMN , & le cosinus de l'angle OMN est au rayon, comme MN est à MO ; ainsi pour trouver l'inclinaison de l'orbite relative & le mouvement horaire relatif, on fera ces deux proportions: *La différence des deux mouvemens horaires en longitude, est à la*

Inclinaison
de l'orbite re-
lative,

différence des mouvemens en latitude, comme le rayon est à la tangente de l'inclinaison relative. Ensuite, le cosinus de l'inclinaison relative est au rayon comme la différence des mouvemens horaires en longitude est au mouvement horaire MO sur l'orbite relative. C'est celui dont nous ferons usage (1777, 1807), & nous en donnerons un exemple à l'art. 1778 (a).

Mouvement
relatif.

1766. On suppose dans ces deux proportions que les planètes vont du même sens tant en longitude qu'en latitude; mais si l'une étoit directe & l'autre rétrograde, c'est-à-dire, si l'une des longitudes étoit croissante & l'autre décroissante, il faudroit prendre la somme des mouvemens horaires en longitude, au lieu de leur différence. De même si l'une des latitudes étoit croissante & l'autre décroissante, du même côté de l'écliptique, c'est-à-dire, si l'une alloit au nord & l'autre au midi par le mouvement horaire en latitude, il faudroit prendre la somme des mouvemens en latitude au lieu de leur différence; tout cela peut avoir lieu quand on calcule les éclipses des planètes par la lune (1995).

Dans les éclipses de lune ce n'est pas le soleil; mais le point opposé au soleil que l'on considère comme l'une des deux planètes; ce point opposé au soleil; qui est le centre de l'ombre de la terre, a le même mouvement horaire en longitude que le soleil lui-même, & par conséquent doit se traiter comme le soleil. Le soleil n'ayant aucun mouvement horaire en latitude; c'est celui de la lune que l'on emploie dans les deux proportions de l'article 1765.

1767. Dans le calcul des éclipses de lune on peut se contenter d'ajouter 8 secondes à la différence des mouvemens horaires en longitude, pour avoir le mouvement relatif ou composé, de la lune au soleil, & éviter la seconde analogie, parce que dans un triangle dont un angle est de $5^{\circ} \frac{1}{4}$, & l'hypothénuse d'un demi-degré, le grand côté a environ 8" de moins que l'hypothénuse.

(a) Il faut bien distinguer l'orbite relative de l'orbite apparente (1872).

Différence
des inclinai-
sons.

1768. On trouve dans les tables de M. Cassini; (pag. 57), une réduction qui est toujours entre 22 & 28 minutes; que l'on ajoute avec $5^{\circ} 15'$ qui est à peu près l'inclinaison vraie de l'orbite de la lune dans toutes les éclipses, pour avoir l'inclinaison relative ou celle de l'orbite composée; cet angle est la différence entre EAC & HAG (fig. 97).

1769. Dans les éclipses de soleil ou d'étoiles que l'on ne veut calculer que par une opération graphique (1850), on n'a besoin de savoir qu'à 5 minutes près, l'inclinaison de l'orbite lunaire, on peut alors supposer toujours que l'inclinaison est de $5^{\circ} 40'$; pour les éclipses de soleil, & $5^{\circ} 9'$ pour les éclipses d'étoiles; mais si l'on veut calculer l'éclipse rigoureusement (1868), ou s'il s'agit d'une éclipse d'étoile par la lune (1860), il faut chercher le mouvement horaire de la lune en longitude & en latitude, & faire la proportion de l'article 1765.

DES ÉCLIPSES DE LUNE.

Eclipse
centrale.

1770. L'ÉCLIPSE DE LUNE est l'obscurité produite sur le disque de la lune, par l'ombre de la terre. L'éclipse totale est celle où la lune entière est obscurcie; l'éclipse partielle est celle où une partie du disque de la lune conserve sa lumière. L'éclipse *centrale* est celle qui a lieu quand l'opposition arrive dans le point même du nœud; la lune traverse alors par le centre même le cône d'ombre, c'est pourquoi l'on appelle centrale cette sorte d'éclipse.

Limites
écliptiques.

Si la lune au moment de son opposition vraie est assez loin de ses nœuds pour que sa latitude surpasse 30 minutes, l'éclipse de lune ne sauroit être totale, & si la latitude est plus grande que 64 minutes, il ne sauroit y avoir éclipse, parce que l'ombre de la terre n'occupe jamais dans l'orbite de la lune plus de 47 minutes, & le demi-diamètre $17'$: ainsi pour que le bord de la lune puisse toucher l'ombre de la terre, il faut

que la distance de leurs centres ou la latitude de la lune ne surpasse pas 64'.

1771. Nous mesurons les mouvemens de la lune par les arcs célestes qu'elle paroît décrire ; il est donc nécessaire de mesurer de la même manière l'ombre qu'elle traverse dans les éclipses , c'est-à-dire, la largeur de ce cône ténébreux que la terre répand derrière elle , en interceptant la lumière du soleil , comme font tous les corps opaques.

Soit S le centre du soleil (*fig. 99*) , T le centre de la terre , L celui de la lune en opposition , SA le demi-diamètre du soleil , TB le demi-diamètre de la terre ; LC le demi-diamètre de l'ombre de la terre dans l'endroit où la lune doit la traverser ; cette ligne LC est le rayon du cercle qui forme la section , perpendiculaire à l'axe , du cône de l'ombre dans la région de la lune.

Fig. 99.

L'angle CTL formé au centre de la terre & qui a pour base le côté CL , est ce qu'on appellera le demi-diamètre de l'ombre ; c'est l'angle sous lequel nous paroît le mouvement de la lune , ou l'arc de son orbite qu'elle décrit pendant la demi-durée de l'éclipse centrale , c'est-à-dire , en traversant l'ombre de C en L .

Demi-diamètre de l'ombre.

1772. Le triangle rectiligne CAT dont le côté AT est prolongé jusqu'en D a son angle externe CTD , égal aux deux angles internes opposés pris ensemble , c'est-à-dire , aux angles BAT & BCT , dont l'un est la parallaxe du soleil , l'autre celle de la lune (1625) ; ainsi l'angle CTD est égal à la somme des parallaxes ; si l'on en ôte l'angle LTD il restera l'angle CTL ou le demi-diamètre de l'ombre ; mais l'angle LTD est égal à l'angle opposé ATS , qui mesure le demi-diamètre apparent du soleil , donc si l'on ôte de la somme des parallaxes le demi-diamètre apparent du soleil , le reste sera le demi-diamètre de l'ombre. La figure 100 représente la section du cône ou le cercle d'ombre , dont le rayon est LC dans la figure 99.

Règle pour le connoître.

EXEMPLE. La parallaxe horizontale de la lune au moment de l'opposition du 17 Mars 1764, étoit de $60' 56''$, la parallaxe horizontale du soleil est constamment de 9 secondes (1742), la somme des parallaxes est donc $61' 5''$; si l'on en ôte le demi-diamètre du soleil $16' 5''$, on aura pour le demi-diamètre de l'ombre $45' 0''$. Il y faudra encore ajouter environ $45''$ pour l'atmosphère de la terre (1776).

1773. Le demi-diamètre de l'ombre trouvé par la règle précédente, peut varier depuis $37' 46''$ jusqu'à $46' 19''$; il est le plus grand quand la lune est périgée & le soleil apogée.

Augmen-
tation à cau-
se de l'atmos-
phère,

1774. On connoît assez le diamètre de la terre & la parallaxe de la lune pour être sûr de la détermination du diamètre de l'ombre trouvé par la règle précédente. Cependant quand on observe les éclipses on trouve constamment que l'ombre est un peu plus grande que suivant cette règle; & il est évident que l'atmosphère de la terre en est la cause.

La densité de l'air est assez grande & réfléchit assez de rayons pour former des crépuscules (2260), pour causer la réfraction astronomique (2160), & pour affaiblir prodigieusement la lumière du soleil à l'horizon (2259): ainsi il n'est pas étonnant qu'elle le soit assez pour intercepter une partie des rayons qui éclairent la lune, pour former une augmentation autour de l'ombre de la terre, & pour changer la longueur & l'intensité du cône d'ombre. C'est une des causes qui font que l'ombre est mal terminée & qu'on trouve souvent 2' de différence entre les temps du commencement d'une même éclipse de lune observée par différens astronomes.

L'augmentation que l'atmosphère produit dans le demi-diamètre de l'ombre est de $20''$, suivant M. Cassini; de $30''$ suivant M. le Monnier, de $60''$ suivant M. de la Hire.

1775. M. le Gentil pense qu'elle est de $40''$ dans les parties de l'ombre qui répondent à l'équateur, & de

de 1' 40" pour les parties qui sont formées par la masse d'un air plus dense répandu autour des poles de la terre. (*Mém. acad. 1755, Exposition du calcul, pag. 157, Connoissance des mouvemens célestes 1763*).

1776. Enfin d'autres astronomes, entr'autres M. Mayer, pensent que la correction de l'atmosphère est toujours $\frac{1}{60}$ du demi-diamètre de l'ombre, c'est-à-dire, qu'il faut y ajouter autant de secondes qu'il y a de minutes. Je m'en tiens ordinairement à cette règle, elle est suffisante à cause du peu de précision dont ces observations sont susceptibles. Dans l'exemple précédent l'on a trouvé 45' 0", on y ajoutera 45", & l'on aura le demi-diamètre apparent de l'ombre de la terre y compris son atmosphère 45' 45".

Règle
générale.

Trouver les Phases d'une Eclipsé de Lune.

1777. LORSQU'ON connoît l'heure de la pleine lune ou de l'opposition vraie (1761), la latitude de la lune pour ce temps-là, l'inclinaison de son orbite qui dépend du mouvement horaire de la lune tant en longitude qu'en latitude (1765), & le mouvement horaire du soleil; on doit chercher le temps du milieu de l'éclipsé.

Soit *O* (*fig. 100*), le point de l'écliptique opposé au soleil, ou le centre de l'ombre de la terre à la distance de la lune; *OG* le demi-diamètre de l'ombre, *ELS* l'orbite relative de la lune (1765); *L* le lieu de la lune au moment de l'opposition, *OL* la latitude de la lune, ou sa distance à l'écliptique *KG*; *OM* la perpendiculaire abaissée sur l'orbite relative *EMS*; au moment où l'éclipsé commence, la lune étant en *E*, le bord de la lune touche en *P* le bord de l'ombre; ainsi *E* est le lieu de la lune au commencement de l'éclipsé; de même le point *S* est le lieu de la lune à la fin de l'éclipsé, ou à la sortie de l'ombre: les triangles *MOE*, *MOS* sont égaux, puisqu'ils ont un côté commun *OM*, les côtés

Le temps
du milieu.
Fig. 100.

Fig. 100.

égaux OE & OS , & qu'ils font rectangles l'un & l'autre en M ; ainsi le côté EM est égal au côté MS ; donc le point M indique le milieu de l'éclipse; au lieu que le temps de l'opposition arrive quand la lune est au point L de son orbite sur un cercle de latitude OL perpendiculaire à l'écliptique KG dans le point O qui est directement opposé au soleil.

Dans le triangle LOM , formé par le cercle de latitude OL & par la perpendiculaire OM , l'angle LOM est égal à l'inclinaison de l'orbite relative de la lune (1765); puisque la perpendiculaire à l'orbite & la perpendiculaire à l'écliptique, font nécessairement le même angle que l'orbite fait avec l'écliptique; avec cet angle on a aussi le côté LO latitude en opposition; on trouvera donc LM en faisant cette proportion: *Le rayon est au sinus de l'inclinaison, comme la latitude OL est à l'intervalle LM .* On le réduira en temps à raison du mouvement horaire de la lune, en disant: *Le mouvement horaire relatif (1765) est à 1^h ou $3600''$, comme l'espace ML est au temps qu'il y aura entre la conjonction & le milieu de l'éclipse.* On retranchera cet intervalle de temps, du moment de l'opposition, si la latitude de la lune est croissante; on l'ajoutera au temps de l'opposition, si la latitude est décroissante, ou que la lune aille en se rapprochant du nœud, & l'on aura le milieu de l'éclipse.

Règle pour
trouver le mi-
lieu de l'é-
clipse.

1778. EXEMPLE. Dans l'éclipse de lune du 17 Mars 1764, on trouve par les tables que la pleine lune ou l'opposition vraie devoit arriver à $12^h 6' 28''$; le mouvement horaire de la lune étoit de $37' 23''$ en longitude, & $3' 26''$ en latitude, le mouvement horaire du soleil $2' 29''$; la différence des mouvemens horaires, $34' 54''$, est au mouvement en latitude $3' 26''$, comme le rayon est à la tangente de l'inclinaison relative $5^\circ 37'$ (1765): le cosinus de cette inclinaison $5^\circ 37'$ est au rayon, comme la différence des mouvemens horaires en longitude, $34' 54''$, est au mouvement horaire de la lune sur son orbite relative $35' 4''$.

La latitude de la lune en opposition étoit de $38' 42''$;

le rayon est au sinus de l'inclinaison $5^{\circ} 37'$, comme la latitude $38' 42''$ est à l'intervalle ML , qu'on trouve de $3' 47''$ en parties de degrés. Le mouvement horaire relatif $35' 4''$ est à $60' 0''$; comme $3' 47''$ font à $6' 28''$ de temps; on ajoutera cet intervalle, parce que la latitude étoit décroissante, la lune n'étant pas encore arrivée à son nœud; & comme le temps de l'opposition est $12^h 6' 12''$, on aura le milieu de l'éclipse à $12^h 12' 40''$, c'est-à-dire, le 18 Mars, $0^h 12' 40''$ du matin.

Fig. 100.

1779. Les mêmes quantités qui ont servi à trouver la différence LM entre la conjonction & le milieu de l'éclipse, serviront à trouver la plus courte distance OM de l'orbite lunaire au centre de l'ombre; car dans le triangle LOM rectangle en M , on connoît LO qui est la latitude au temps de la conjonction, & l'angle LOM égal à l'inclinaison de l'orbite relative de la lune, on trouvera le côté OM par cette proportion: *Le rayon est à la latitude LO , comme le sinus de l'angle L , ou le cosinus de l'inclinaison relative, est à la plus courte distance OM .*

Trouver la plus courte distance.

Règle:

EXEMPLE. Dans l'éclipse du 17 Mars 1764, la latitude de la lune LO étoit de $38' 42''$, & l'inclinaison de l'orbite relative $5^{\circ} 37'$: or le rayon est à $38' 42''$, comme le cosinus de MOL $5^{\circ} 37'$ est à $2311''$, ou $38' 31''$; c'est la perpendiculaire cherchée: elle servira ci-après pour trouver le commencement, la fin, & la grandeur de l'éclipse (1781).

1780. Lorsqu'on connoît le milieu de l'éclipse (1778), la plus courte distance des centres de l'ombre & de la lune (1779), le demi-diamètre apparent de l'ombre (1776), & le demi-diamètre de la lune, pris dans les tables, il ne reste plus qu'un triangle à résoudre pour trouver le commencement & la fin de l'éclipse.

Trouver le commencement de l'éclipse.

Soit OM (fig. 100), la plus courte distance, ou la perpendiculaire abaissée du centre O de l'ombre, sur l'orbite relative EMS de la lune (1779); $GPAK$ la

Fig. 100.

circonférence de l'ombre, EP le rayon du disque lunaire; E le centre de la lune au moment où son bord commence à toucher le bord de l'ombre en P , c'est-à-dire; au moment où l'éclipse commence; S le centre de la lune à sa sortie de l'ombre, lorsque l'éclipse finit ou que le dernier bord de la lune touche en R le bord de l'ombre. La distance OE des centres de la lune & de l'ombre, est composée des quantités OP & PE ; dont l'une OP est le demi-diamètre de l'ombre (1776), & l'autre le demi-diamètre de la lune (1507); de même la distance OS , à la fin de l'éclipse, est composée des quantités OR & RS , c'est-à-dire, qu'elle est aussi à la somme du demi-diamètre de l'ombre & de celui de la lune; ainsi OS est égale à OE , à moins qu'on ne veuille avoir égard à la petite différence qu'il peut y avoir dans le mouvement horaire & dans la parallaxe de la lune pendant l'espace de quelques heures, & à la différence qu'on pourroit supposer dans l'atmosphère (1775); mais on a coutume de les négliger.

Dans le triangle OEM , rectiligne rectangle en M ; on connoît la perpendiculaire OM (1779), & la somme OE des demi-diamètres de la lune & de l'ombre; on cherchera le troisième côté ME : l'on convertira ce côté ME en temps par la proportion suivante. Le mouvement horaire de la lune sur son orbite relative est à 1 heure ou 3600'', comme le côté trouvé ME est à la demi-durée de l'éclipse en secondes de temps. Cette demi-durée étant retranchée du temps du milieu de l'éclipse (1777), on aura le commencement; & si l'on ajoute la demi-durée avec le milieu, on aura la fin de l'éclipse.

1781. EXEMPLE. Dans l'éclipse de lune du 17 Mars 1764, la perpendiculaire MO étoit de 38' 31'', le demi-diamètre OP de l'ombre 45' 0'', celui de la lune 16' 39'', la somme des demi-diamètres, en y ajoutant 1' 40'' pour l'atmosphère (1775) fera 1° 3' 19''; ainsi dans le triangle EMO , on connoît OE & OM : on

trouvera *ME* par l'opération suivante, où j'emploierai la méthode la plus commode pour résoudre ce triangle *OEM*.

Somme des côtés *OE* & *OM*, $1^{\circ} 41' 50''$ log. 3, 786041
 Différence des côtés *OE* & *OM*, $24' 48''$ log. 3, 172603

Somme des deux logarithmes 6, 958644
 Moitié de la somme, ou logarithme de *EM*, 3, 479322
 Auquel répond $50' 15''$.

Le mouvement horaire de la lune sur son orbite relative étoit de $35' 4''$; ainsi l'on dira $35' 4''$ est à 1 heure, comme *EM* $50' 15''$ est à la demi-durée de l'éclipse 1 heure $25' 59''$.

Cette demi-durée de l'éclipse est le temps que la lune employoit à aller de *E* en *M*; mais le milieu de l'éclipse en *M* a été trouvé 12 heures $12' 40''$ (1778); si l'on en retranche 1 heure $25' 59''$, on aura pour le commencement de l'éclipse 10 heures $46' 41''$; & si on l'ajoute, on aura la fin de l'éclipse 13 heures 38 minutes 39 secondes.

1782. Si l'on veut avoir égard à l'inégalité de la correction de l'atmosphère proposée par M. le Gentil, (1775), on résoudra deux triangles; un pour le commencement & un pour la fin de l'éclipse, en employant deux hypothénuses différentes *OE* & *OS*, dont l'une fera quelquefois plus grande d'une minute que l'autre.

1783. L'inégalité du mouvement horaire de la lune ne mérite guère d'être ici considérée; elle ne va jamais qu'à trois ou quatre secondes, dont le mouvement horaire peut être plus ou moins grand dans la première demi-durée d'une éclipse que dans la seconde. Les tables du mouvement horaire sont dans la *Connoiss. des mouv. célest.* 1765; & l'on en trouve aussi dans les tables qui font partie de cette astronomie.

1784. Dans les éclipses de lune qui sont totales, on a encore deux autres phases à chercher, qui sont l'IMMERSION & l'ÉMERSION, c'est-à-dire, le moment où la lune entre totalement dans l'ombre, & celui où

Méthode pour résoudre le triangle.

Fig. 100.

Inégalité dans le mouvement horaire.

Immersion & émerison.

Fig. 101. elle commence à en sortir. Soit D (*fig. 101*), le lieu de la lune à l'instant où elle est assez avancée dans l'ombre, pour que son dernier bord N touche le bord intérieur de l'ombre; on a un nouveau triangle OMD ; dont l'hypothénuse OD est égale à la différence entre le demi-diamètre de l'ombre ON , & le demi-diamètre DN de la lune; mais l'opération est la même que dans l'article 1781; la demi-durée de l'éclipse totale se retranche du milieu de l'éclipse, pour avoir l'immersion qui arrive en D , & elle s'ajoute pour avoir l'émerfion qui arrive en V .

Trouver la
grandeur de
l'éclipse.
Fig. 100.

Règle
générale.

1785. Lorsqu'on a la plus courte distance des centres OM (*fig. 100*), le demi-diamètre de l'ombre OA , & le demi-diamètre de la lune MB , il est aisé de trouver la partie éclipsée de la lune, c'est-à-dire, la quantité AC . Car AM est égale à $OA - OM$, si l'on y ajoute MC , l'on aura AC ; donc AC est égale à $OA + MC - OM$, c'est-à-dire, que la partie éclipsée est égale à la somme des demi-diamètres de la lune & de l'ombre, moins la plus courte distance.

Doigts
éclipsés.

EXEMPLE. Dans l'éclipse du 17 Mars 1764, (1781) la somme des demi-diamètres est $63' 19''$, la plus courte distance est $38' 31''$, la différence $24' 48''$ est la partie éclipsée. On a coutume de l'exprimer en doigts ou en douzièmes parties du diamètre de la lune; on fera donc cette proportion: le diamètre apparent de la lune $33' 18''$ est à 12 doigts 0 minutes, comme $24' 48''$ sont à un quatrième terme qu'on trouvera $8^d 56' \frac{1}{2}$: ainsi la grandeur de l'éclipse fera de 8 doigts & $56' \frac{1}{2}$ de doigts.

*Fig. 101. &
102.*

1786. La règle que je viens de donner pour trouver la grandeur des éclipses de lune a lieu également, soit que le centre de la lune & son orbite apparente soient hors de l'ombre, comme dans la *fig. 102*; soit qu'au contraire la lune soit toute entière dans l'ombre, comme dans la *fig. 101*; car dans la *fig. 102* l'on a $OA + CM = AC + OM$, ou $OA + CM - OM = AC$; & dans la *fig. 101*, qui a lieu pour les éclipses totales, on a $AC = OA - OM + CM$. Dans ce dernier cas,

on dit que la grandeur de l'éclipse est de plus de douze doigts, parce qu'on y comprend la partie *AB* de l'ombre, qui surpasse le bord de la lune; c'est-à-dire, que l'on comprend sous le nom de partie éclipsee toute la quantité *AC*, qui seroit éclipsee en effet, si la lune avoit assez de diamètre pour s'étendre jusqu'en *A*. Si dans ce cas, la lune est au nord de l'écliptique, on dit que l'éclipse est du côté du nord, quoique dans une éclipse partielle ce soit la partie australe de la lune qui soit éclipsee, quand la latitude est boréale. Cela fait une espèce de disparate qu'on peut éviter en disant la lune est au nord de l'écliptique. Cette règle qui est conforme à celle de M. de la Caille, (*Leçons d'astr. art.* 1119), me paroît n'être pas observée, dans plusieurs endroits de ses éphémérides; mais peut-être que cela vient des fautes d'impression ou de calcul. On voit par là que les éclipses de lune sont de la même grandeur, quand elles arrivent à la même distance des nœuds, puisque leur grandeur dépend sur-tout de la latitude *OL* de la lune, & celle-ci de la distance de la lune à son nœud; voilà pourquoi on détermine le mouvement des nœuds par les éclipses de même grandeur, observées dans des temps éloignés (1488).

Toutes les quantités dont nous venons de donner le calcul dans les articles 1778, 1780, 1785, se trouvent calculées dans les tables du P. Riccioli, (*Astron. refor. pag. 66*), & de M. Cassini, (*Tab. astr. pag. 59*); enforte qu'avec ces tables auxiliaires, on peut calculer une éclipse de lune sans aucun calcul trigonométrique.

1787. ON PEUT DÉTERMINER encore sans calcul, avec la règle & le compas, toutes les circonstances d'une éclipse de lune, aussi-tôt qu'on a calculé par les tables le temps de la conjonction, la latitude, la parallaxe, & le mouvement horaire. Cette méthode est même très-suffisante, lorsqu'il ne s'agit que d'annoncer les éclipses qui doivent arriver: car on ne sauroit se tromper d'une minute dans l'opération graphique si la

Fig. 101.

Tables auxiliaires.

Trouver les mêmes phases avec le compas.

figure a seulement un pied de diamètre ; & l'on ne peut être assuré d'une plus grande exactitude dans la prédiction d'une éclipse de lune ; à peine peut-on être sûr de l'observation même à une minute près. Ainsi je crois qu'on peut très-bien se contenter de l'opération graphique dans toutes les éclipses de lune.

EXEMPLE. Le demi-diamètre de l'ombre de la terre dans la région lunaire ayant été trouvé de $46'$ (1776) ; je divise le rayon OG (*fig. 100*) en 46 parties ; je prends OL égale à la latitude de la lune $38' \frac{2}{3}$; & au point L , je tire l'orbite de la lune ELS , inclinée de $5^\circ 37'$, ou si l'on veut de $5^\circ 40'$ (1769), sur la parallèle à l'écliptique. Le mouvement horaire relatif étant de $35'$, je prends $35'$ sur les divisions de OG , je les porte sur l'orbite de L en X ; & ayant marqué en L le temps de la conjonction 12 heures $6'$, je marque 11 heures $6'$ au point X où tombe le mouvement horaire ; je divise XL en $60'$ de temps, & les mêmes ouvertures de compas servent à diviser l'orbite $ELMS$. Je prends une ouverture de compas égale à la somme des demi-diamètres de l'ombre & de la lune, $1^\circ 3'$, & la portant de O en S sur l'orbite relative, je trouve sur ses divisions que le point S répond à 13 heures 39 minutes, comme on l'a trouvé par le calcul (1781).

Pénombre
dans les éclipses.

Fig. 99.

1788. LA PENOMBRE est une obscurité moindre que celle du cône d'ombre ; c'est une lumière foible, causée par une portion du disque du soleil, qui éclaire encore la lune lors même que le centre ne l'éclaire plus. Le point E , (*fig. 99*), qui est sur le côté OEP du cône d'ombre, est dans une entière obscurité, parce qu'il n'est éclairé par aucun rayon du soleil. Le point F , qui est sur la ligne AGF , menée par le bord supérieur A du soleil, & par le bord inférieur G de la terre, jouit d'une lumière parfaite, parce qu'il voit le disque entier AO du soleil ; mais tous les points situés entre E & F ne voient qu'une partie du disque solaire, ils ne reçoivent qu'une partie de la lumière du soleil,

&c

& forment la pénombre ; c'est ce qui fait que le commencement d'une éclipse de lune est si douteux, que l'on s'y trompe quelquefois de plusieurs minutes.

1789. On observe dans la couleur des éclipses de lune des différences considérables : lorsque la lune est apogée, elle traverse le cône d'ombre plus près de son sommet ; elle paroît alors plus rouge, plus lumineuse que lorsque les éclipses arrivent dans le périégée ; car dans le périégée, les rayons rompus par l'atmosphère, qui se dispersent dans le cône d'ombre, & qui en diminuent l'obscurité, ne parviennent pas jusqu'au centre de l'ombre ou à l'axe du cône, qui est trop large dans ce point-là, & qui est plus près de la terre.

Voilà pourquoi l'on a vu des éclipses où la lune dis-
 paroït entièrement ; telle fut l'éclipse du 15 de Juin 1620, ou celle du 9 de Décembre 1601, dans laquelle on ne distinguoit pas le bord éclipsé, (*Képler, astron. pars opt. pag. 297, Epitome, pag. 825*), Hévélius en parlant de l'éclipse du 25 Avril 1642, assure qu'on ne distinguoit pas, même avec des lunettes, la place de la lune, quoique le temps fût assez beau pour voir les étoiles de la cinquième grandeur, (*Hevel. Selenographia, pag. 117*) ; mais il est fort rare que la lune disparoisse ainsi totalement dans les éclipses.

DES ÉCLIPSES DE SOLEIL.

1790. LES ÉCLIPSES de soleil sont produites par l'interposition de la lune, qui dans ses conjonctions passe quelquefois directement entre nous & le soleil : elle nous le cache alors en tout ou en partie. Les éclipses TOTALES sont celles où le soleil paroît entièrement couvert par la lune, le diamètre apparent de la lune étant plus grand que celui du soleil. Les éclipses AN-

NULAIRES sont celles où la lune paroît toute entière sur le soleil ; alors le diamètre du soleil paroissant le plus grand, excède de tout côté celui de la lune, & forme autour d'elle un anneau ou une couronne lumi-

Eclipses totales ou annulaires.

neuse : telle fut l'éclipse du premier Avril 1764, que l'on vit annulaire à Cadix, à Rennes, à Calais & à Pello en Laponie ; ainsi que je l'avois annoncé dans la connoissance des mouvemens célestes de 1764, pag. 205. Les éclipses *centrales* sont celles où la lune n'a aucune latitude au moment de la conjonction apparente, son centre paroît alors sur le centre même du soleil & l'éclipse est totale ou annulaire, en même temps qu'elle est centrale.

1791. Les plus anciens auteurs nous ont conigné comme des événemens remarquables les grandes éclipses de soleil, & c'est ce qui m'engage à en dire ici quelques mots. Il en est parlé dans Isaïe, chap. 13, dans Homère & Pindare, dans Pline, liv. II, chap. 12 ; dans Denis d'Halicarnasse, liv. II. Ce dernier dit qu'à la naissance de Romulus, & à sa mort, il y eut des éclipses totales de soleil dans lesquelles la terre fut dans une obscurité aussi grande qu'au milieu de la nuit. Hérodote nous apprend que dans la sixième année de la guerre entre les Lydiens & les Mèdes, il arriva pendant la bataille que le jour se changea en une nuit totale ; Thalès le Milésien l'avoit annoncé pour cette année-là. Pline, (Liv. II, chap. 2) parle aussi de la prédiction de Thalès, & M. Costard prouve que cette éclipse fut celle du 17 Mai 603, avant J. C. (*Philos. transf.* 1753, pag. 23). On trouve de semblables éclipses dans les années 431, 190, & 50 ans avant J. C., & dans les années après J. C. 59, 100, 237, 360, 787, 840, 878, 957, 1133, 1187, 1191, 1241, 1415, 1485, 1544, 1560, (*Képl. astron. pars opt. pag* 290, &c.). On trouvera un catalogue exact de toutes les éclipses arrivées depuis l'ère vulgaire, dans *l'art de vérifier les dates*, seconde édition, in-folio chez Desprez.

Spéctacle
singulier
d'une éclip-
se.

1792. C'est en effet, une chose très-singulière que le spectacle d'une éclipse totale de soleil. Clavius, qui fut témoin de celle du 21 Août 1560 à Conimbre, nous dit que l'obscurité étoit, pour ainsi dire, plus

grande ou du moins plus sensible & plus frappante que celle de la nuit ; on ne voyoit pas où pouvoir mettre le pied , & les oiseaux retomboient vers la terre par l'effroi que leur causoit une si triste obscurité, (*Képl. astr. pars opt.* 296).

Il n'y a eu depuis très-long-temps à Paris d'autre éclipse totale, que celle du 22 Mai 1724; celle de 1706 fut de dix doigts & 58 minutes : il restoit environ $\frac{1}{12}$ du diamètre du soleil, sa lumière étoit à la vérité d'une pâleur effrayante & lugubre ; cependant tous les objets se distinguoient , aussi facilement que dans le plus beau jour, (*Hist. acad.* 1706, pag. 115). Cette éclipse fut totale à Montpellier, & l'on y remarqua autour de la lune une couronne d'une lumière pâle, large de la douzième partie du diamètre de la lune, dans sa partie la plus sensible ; mais qui diminuant peu à peu s'appercevoit encore à 4 degrés tout autour de la lune (*Ibid*, pag. 118).

Eclipse totale à Paris en 1724.

1793. Dans l'éclipse de soleil du 23 Septembre 1699, il ne resta que $\frac{1}{180}$ du diamètre du soleil à Gripswald en Poméranie, l'obscurité y fut si grande, qu'on ne pouvoit lire ni écrire ; il y eut des personnes qui virent quatre étoiles, ce devoit être Mercure, Vénus, Régulus & l'Epi de la Vierge, (*Hist. acad.* 1700, pag. 106).

Dans l'éclipse du 22 Mai 1724, l'obscurité totale dura 2' $\frac{1}{4}$ à Paris ; on vit le soleil, Mercure & Vénus sur la même ligne droite : il parut peu d'étoiles à cause des nuages. La première petite partie du soleil qui se découvrit lança un éclair subit & très-vif, qui parut dissiper l'obscurité entière ; le baromètre ne varia point ; le thermomètre baissa un peu ; mais il seroit difficile de dire si l'éclipse en étoit cause ; l'on vit autour du soleil la couronne lumineuse dont on avoit beaucoup parlé dans l'histoire de 1706. (*Mémoires de l'acad.* 1715. *Histoire de l'académie* 1724. *Mémoires pour servir à l'histoire de l'astronomie*, par M. de l'Isle, 1738, pag. 205).

Nombre
des éclipses.

1794. Les éclipses de soleil sont beaucoup plus rares que les éclipses de lune, pour un lieu déterminé : la raison en est évidente ; la lune étant beaucoup plus petite que la terre, ne peut couvrir qu'une très-petite partie de notre globe ; souvent même la pointe du cône d'ombre n'arrive pas jusqu'à nous, comme dans les éclipses *annulaires*. Il arrive toutes les années plusieurs éclipses, quelquefois jusqu'à six, en comptant celles de lune & de soleil ; mais on ne les voit pas toutes dans un même lieu ; car depuis 1755 jusqu'en 1764 inclusivement, on ne trouve que quatre éclipses de soleil visibles à Paris, tandis qu'on y a dû voir onze éclipses de lune.

Le Roi ayant désiré de savoir s'il y auroit à Paris des éclipses totales, dans l'espace de quelques années, j'engageai M. du Vaucel à se livrer à cette recherche, il trouva que d'ici à l'année 1900, il y auroit 59 éclipses visibles à Paris, sans qu'aucune y soit totale, & une seule annulaire qui sera celle du 9 Octobre 1847, (*Mém. présentés, &c. tom. V, pag. 575*).

1795. Le calcul des éclipses de soleil est beaucoup plus difficile & plus long que celui des éclipses de lune, à cause des parallaxes qui y entrent nécessairement ; les parallaxes diffèrent pour chaque point de la terre, en sorte qu'une éclipse de soleil paroît d'une manière différente à différens pays : au contraire les éclipses de lune paroissent de la même manière, & sont parfaitement les mêmes pour tous ceux qui les voyent ; car la lune perdant alors véritablement sa lumière, devient obscure pour tout le monde.

Si nous étions placés en un point de la surface de la lune lorsqu'elle est éclipée, & que nous voulussions calculer la manière dont elle devoit paroître dans ce point déterminé de la lune, nous tomberions également dans la difficulté des parallaxes ; car l'éclipse de lune ayant lieu successivement & différemment pour les différens points de la surface de la lune, il faudroit calcu-

ler la parallaxe pour le point de la lune où nous serions placés.

Au contraire si dans le temps que nous avons sur la terre une éclipse de soleil, un observateur placé dans la lune, vouloit nous regarder, & calculer cette éclipse qu'il appelleroit *éclipse de terre*, il n'y trouveroit pas plus de difficulté que nous en trouvons dans le calcul d'une éclipse de lune; il verroit les mêmes phases en quelque point de la lune qu'il fût placé; il apperoit une petite tache noire & ronde s'avancer sur le disque de la terre, & le parcourir successivement: c'est ainsi qu'il faudra considérer les éclipses de soleil pour rendre la théorie plus simple, & aller pas à pas dans des détails plus compliqués.

La théorie & le calcul des éclipses de soleil étant difficiles à concevoir, j'ai cru qu'il falloit commencer par employer une méthode, pour ainsi dire, mécanique, & telle que les yeux pussent soulager l'imagination; je vais donc expliquer une opération graphique, avec laquelle on pourra calculer une éclipse de soleil, pour la terre en général avec la même facilité que l'on a calculé une éclipse de lune (1787), & même trouver à quelques minutes près, pour chaque pays de la terre, les circonstances de l'éclipse par le moyen d'un globe terrestre, pourvu qu'on ait fait seulement les calculs préliminaires (1761).

1796. Pour faire sentir les raisons & les principes de cette opération graphique, nous allons montrer la manière dont les éclipses de soleil arrivent sur la surface de la terre, dans le cas le plus simple: en supposant un principe qu'il ne faut pas perdre de vue, savoir que le soleil est assez éloigné de nous, pour que les rayons qui partent du centre du soleil, & qui vont aux différens points de la terre, soient sensiblement parallèles (1743). Le point *T*, (fig. 104), que je suppose le centre de la terre, voit le centre du soleil par un rayon *TS*; le point *E* qui est à la surface de la terre, voit le centre du soleil par un autre rayon *EO*,

Parallélisme des rayons solaires.

Fig. 104.

Planche X.

Fig. 104. qui ne fait avec le précédent qu'un angle de $9''$ (1742), & qui va par conséquent le rencontrer à une distance prodigieuse, ainsi ce rayon est sensiblement parallèle au précédent : on peut donc supposer que la ligne EO parallèle à TS , est celle par laquelle le point E de la terre voit le centre du soleil.

1797. Si cependant l'on veut avoir égard à la parallaxe du soleil, & supposer que le rayon EO se rapproche de ES pour aller former au centre du soleil un angle de $9''$, toute la différence consistera à diminuer l'angle TEA de $9''$, en tirant une ligne ER qui fasse avec EO un angle REO de $9''$, & ce sera sur la ligne ER que le point E de la terre verra le centre du soleil, puisque ER & TS vont se réunir au soleil sous un angle de $9''$, qui est en effet la parallaxe du soleil. Si l'on suppose que LA soit une portion de l'orbite lunaire interceptée par les rayons TS , ER , cette ligne LA paroîtra plus petite de $9''$ lorsqu'on voudra tenir compte de la parallaxe du soleil : pour le comprendre il suffit de concevoir un autre rayon GS qui du point G de la terre aboutit au centre du soleil S ; l'intervalle que les rayons GS & TS interceptent dans l'orbite de la lune, & que nous appellerons ci-après la projection de la terre, (1804, 1836), est vu de la terre sous un angle LGS qui est la différence des angles GLT & LSG ; c'est-à-dire, la différence des parallaxes de la lune & du soleil; mais il faut imaginer le point de concours S à une distance prodigieuse, pour que l'angle S ne soit que de 9 secondes; alors l'angle G est plus petit de 9 secondes que l'angle L , & l'angle RET plus petit de 9 secondes que l'angle ELT ou son égal OEL ; ainsi la projection de la terre est sensiblement égale à la parallaxe de la lune.

1798. Si la lune est en L au moment de la conjonction, l'observateur placé en K sur la surface de la terre, verra une éclipse centrale de soleil (1790), puisque le centre de la lune lui paroîtra sur le rayon même $TKLS$, par lequel il voit le centre du soleil.

Soit AL une portion de l'orbite lunaire décrite avant la conjonction, en allant de A en L , ou d'occident vers l'orient : puisque le point E de la terre voit le centre du soleil sur la ligne EAO (1796), il s'ensuit évidemment que quand la lune sera au point A de son orbite, elle couvrira le soleil, & formera une éclipse centrale pour l'observateur placé en E , puisqu'alors le centre de la lune, aussi bien que celui du soleil paroîtront sur une même ligne EAO .

Si la lune emploie une heure à parcourir la portion AL de son orbite, l'éclipse aura lieu pour le point E de la terre, une heure avant qu'elle ait lieu pour le point K , ou pour le centre T de la terre, c'est-à-dire, une heure avant la conjonction, que je suppose arriver au point L . L'espace AL est ce que nous appellerons bientôt le *rayon de projection* (1804, 1836), parce que c'est l'espace auquel on rapporte les points E & K de la terre, comme sur un plan de projection : nous parlerons plus en détail de la nature & des circonstances de la projection (1825, 3871).

Rayon de projection.

1799. Je fais que l'on a d'abord quelque peine à se figurer ainsi le soleil, répondant au même instant à divers points de la projection pour différens lieux de la terre ; mais qu'on réfléchisse à ce qui se passe dans une allée de jardin, où l'on se promène en voyant le soleil sur sa droite ; toutes les ombres des arbres sont parallèles entr'elles ; quand on est sur la première ombre, on voit le soleil répondre au premier arbre ; quand on a fait quelques pas on voit le soleil répondre à l'arbre suivant ; & s'il y a quatre personnes en même temps qui soient entre elles à la même distance que les quatre arbres sont entr'eux, elles verront répondre le soleil aux quatre arbres différens ; c'est ainsi que l'observateur qui est en D voit le soleil répondre au point C de l'orbite de la lune ou de la projection ; tandis que l'observateur qui est en K voit le soleil au point L (a), comme

(a) Au reste il n'est pas besoin de la terre ne sont point fixes ; d'avertir que les points E, F, K , ils tournent par le mouvement de

celui qui est en F voit le soleil au point H .

1800. Le point E de la terre est le premier point d'où l'on verra la lune sur le soleil ; il aura l'éclipse centrale quand la lune sera en A (1798), le centre de la lune répondant au centre du soleil ; mais avant que d'être en A , le centre de la lune a été en un point M , tel qu'alors le bord B de la lune touchoit le bord du soleil, parce que le centre du soleil paroissant en A , le bord de son disque paroissoit en B éloigné du centre A d'environ 16 minutes (1388) ; le centre M de la lune étoit alors éloigné du centre A du soleil d'une quantité égale à la somme des demi-diamètres AB & BM ; du soleil & de la lune, & c'étoit le commencement de l'éclipse pour l'observateur situé en E , ou le premier instant où il a vu le bord de la lune toucher le bord du soleil. La distance de la lune au point L de la conjonction, ou à la ligne des centres, étant égale à la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune plus la quantité AL égale à ET , l'observateur qui au lever du soleil étant en E aura vu l'attouchement des bords de la lune & du soleil, verra l'éclipse centrale d'un autre point de l'espace absolu, différent du point E ; & ce sera l'habitant de la terre qui sera arrivé au bord E du cercle d'illumination qui verra l'éclipse centrale lorsque la lune sera parvenue en A .

Quand com-
mence l'éclip-
se,

1801. La partie AL de l'orbite lunaire égale au rayon ET de la terre paroît sous un angle AEL , égal à l'angle ELT qui est la parallaxe horizontale de la lune (1624) ; la partie ML paroît donc égale à la somme du demi-diamètre BM de la lune, du demi-diamètre BA du soleil, & de la parallaxe horizontale de la lune qui est égale à AL . Ainsi le point E de la terre verra commencer l'éclipse aussi-tôt que la distance ML de la lune au point L de la conjonction sera égale à la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune, &

rotation de la terre ; mais dans ces préliminaires généraux, nous n'examinons pas quels pays de la terre occupent les divers points du globe, il suffit de considérer ces points en général.

de

de la parallaxe horizontale de la lune, dont on aura ôté 9 secondes pour plus d'exactitude (1797). De même le point G , le dernier & le plus oriental de la terre, verra finir entièrement l'éclipse, lorsque la lune, après avoir passé la conjonction, sera éloignée du point L de la même quantité, c'est-à-dire, de la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune, & de la parallaxe horizontale de la lune.

Si la lune est en C , de manière que AC soit aussi égal à la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune, le point E de la terre verra aussi le centre C de la lune éloigné du centre A du soleil, de la somme des demi-diamètres, c'est-à-dire, qu'il verra les bords du soleil & de la lune se toucher, & l'éclipse finir; puisqu'alors le centre du soleil paroît en A & celui de la lune en C , à une distance CA égale à la somme des demi-diamètres. Quand finit l'éclipse.

Mais dans le temps que la lune est en C , & que le point E de la terre voit finir l'éclipse, un autre point D de la terre, qui voit le centre du soleil sur le rayon DC parallèle à TS , voit le centre de la lune sur celui du soleil, c'est-à-dire, qu'il a une éclipse centrale; il en est de même de tous les autres points de la terre qui répondent perpendiculairement sous différens points de la ligne ACL .

1802. En même temps que le point E de la terre voit finir l'éclipse par le contact des deux bords, lorsque le centre de la lune est en C , & que le point D voit l'éclipse centrale, les points de la terre situés entre E & D , voient l'éclipse de différentes grandeurs; ainsi le point F de la terre, qui voit le centre du soleil sur la parallèle FH , voit la distance apparente de la lune C au soleil H de la quantité CH ; si nous supposons que la ligne CH , prise sur l'orbite lunaire $LCHAM$, soit plus petite que la somme des demi-diamètres, la lune anticipera d'autant sur le soleil; si elle est plus petite d'un doigt, le bord de la lune fera d'un doigt sur le soleil, on dira que l'éclipse est d'un doigt. Si CH est

supposée moindre de six doigts solaires, que la somme des demi-diamètres, il faut nécessairement que cette somme, qui forme la distance des centres de la lune & du soleil au commencement de l'éclipse ait été retrécie d'autant; elle n'a pu l'être, que parce que le disque lunaire a anticipé d'autant sur celui du soleil; donc dans la supposition de CH moindre que CA de six doigts pour le point F , il doit y avoir six doigts du diamètre du soleil, couverts par la lune pour l'observateur F , & par conséquent l'on verra du point F le bord de la lune sur le centre même du soleil. De même si CH est plus petite que cette somme, & cela de 3 doigts seulement, ou d'un quart du diamètre solaire, la lune anticipera ou mordra sur le soleil de 3 doigts seulement, & l'éclipse ne sera que de la même quantité.

1803. Ainsi pour trouver le point F de la terre où l'éclipse doit paroître de 3 doigts, à un instant donné où l'on suppose la lune en C , il faut, en partant du point C où est la lune, 1° , prendre CA égale à la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune; 2° , en partant du point A , prendre AH de 3 doigts, &c. 3° , abaisser une perpendiculaire HFN sur la terre, (c'est-à-dire; sur le plan GE du cercle de la terre, qui est perpendiculaire à la ligne des centres), & l'on aura le point F de la terre où l'éclipse doit paroître de 3 doigts, la lune étant en C , puisque le soleil paroissant alors en H & la lune en C , leur distance est plus petite de 3 doigts, que la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune.

Cercle de
projection.

1804. J'ai supposé jusqu'ici que l'orbite LBM de la lune passoit par la ligne SLT , qui joint les centres du soleil & de la terre, & que la lune en conjonction n'avoit aucune latitude; voyons ce qui arrivera dans les cas où la lune en conjonction aura une latitude. Il faut considérer d'abord que tout ce que j'ai dit du point M (1800), doit s'entendre également de tout autre point qui seroit à la même distance du point T & du point L ; supposons que la ligne LM (égale à la parallaxe

de la lune, plus la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune), tourne autour du point L , & décrit un cercle dont le plan soit perpendiculaire à LT , & au plan de notre figure, enforte que tous les points de ce cercle soient à égales distances du point T ; c'est ce cercle décrit sur LM que nous appellerons le *Cercle de projection* (1835), & nous allons le considérer seul dans la suite du discours, en y rapportant tout ce que nous venons de dire sur la *Figure* 104. Il est évident que les différens points du cercle placé dans la région de la lune & décrit sur LA , répondent aux différens points de la circonférence de la terre, de la même manière que le point A répond au point E de la terre, & le point L au point K ; chaque point de la terre a sa projection ou son image à l'extrémité de la ligne qui va tomber perpendiculairement au plan de projection, dans la région de la lune.

1805. Supposons une ligne LB , (*fig.* 103), de même longueur que la somme LM du rayon de projection & des demi-diamètres du soleil & de la lune dans la *fig.* 104, décrivons un cercle $BCGD$ sur le plan de projection; décrivons aussi un autre cercle $AEFR$, dont le rayon LA soit égal à la parallaxe de la lune, (dont on retranchera 9" pour plus d'exactitude (art. 1797), comme LA dans la figure 104, formoit le rayon de projection égal au rayon de la terre & vu sous un angle égal à la parallaxe de la lune; lorsque la lune approchera assez de la conjonction pour que son centre vienne à se trouver sur quelque point K de la circonférence BCD , l'éclipse commencera pour quelque point de la surface de la terre (1801).

De même, lorsque le centre de la lune sera sur quelque point V de la circonférence AVE du cercle de projection, le centre de la lune paroîtra répondre sur le centre du soleil, & l'éclipse commencera d'être centrale pour quelque point de la surface de la terre, c'est-à-dire, pour celui qui se trouvera directement sous le point V , ou qui aura sa projection au point V .

Cercle de projection.

Fig. 103.

Fig. 103.

1806. L'ÉCLIPSE GÉNÉRALE de soleil est celle que l'on calcule pour la terre en général, sans examiner à quel pays elle se rapporte ; c'est par où nous commençons, à l'exemple de Képler, (*Épit. pag. 873*), avant de chercher les circonstances d'une éclipse de soleil pour chaque lieu déterminé de la terre. Au moment où la distance LK du centre de la projection au centre de la lune est égale à la somme des trois demi-diamètres du soleil, de la lune, & de la projection, l'éclipse de soleil commence pour un point de la terre qui répond perpendiculairement au point I (1800), ou dont la projection est en I ; c'est le commencement de l'éclipse générale ; de même, lorsque la lune est parvenue au point G de son orbite, assez éloigné pour que la distance LG soit encore égale aux trois demi-diamètres, le bord de la lune quitte le bord du soleil pour le dernier de tous les pays de la terre où il peut y avoir éclipse, c'est la fin de l'éclipse générale. De même, la perpendiculaire LM abaissée sur l'orbite, marque le milieu de l'éclipse générale, comme dans le cas des éclipses de lune (1777).

Milieu de
l'éclipse gé-
nérale.

1807. Pour connoître le temps du milieu de l'éclipse générale, on suppose les mêmes calculs préliminaires, & l'on suit la même méthode que pour une éclipse de lune (1777) ; LAB représente une portion de l'écliptique ; L le point où est le soleil au moment de la conjonction, LM la latitude de la lune, KMG l'orbite relative (1765). Dans le triangle LMH rectangle en M , on connoît l'angle HLM égal à l'inclinaison de l'orbite relative, & l'hypothénuse HL égale à la latitude de la lune ; on multipliera le côté LH par le sinus de l'angle MLH , & l'on aura le côté HM ; on le convertira en temps à raison du mouvement horaire de la lune sur l'orbite relative, & l'on aura l'intervalle entre la conjonction & le milieu de l'éclipse ; cet intervalle se retranchera du moment de la conjonction, arrivé en H , si la latitude de la lune est croissante, c'est-à-dire, si la lune a passé son nœud ; mais

il s'ajoutera au temps de la conjonction, si la lune va en se rapprochant de son nœud; & l'on aura le temps du milieu de l'éclipse générale en M ; comme dans l'exemple de l'article 1778.

Le cercle de projection AER représente le disque de la terre, ou l'image de l'hémisphère éclairé de la terre transporté dans l'orbite ou dans la région de la lune; la ligne VX est la portion de l'orbite lunaire qui sera décrite pendant la durée de l'éclipse totale, comme la ligne KG est la portion d'orbite qui sera décrite depuis le premier moment où la pénombre (1788) touchera le disque de la terre en quelque point I , c'est-à-dire, où quelque point de la terre verra un commencement d'éclipse, jusqu'au dernier instant où la pénombre abandonnera la terre au point F , le centre de la lune étant alors en G , & l'éclipse finissant pour le dernier de tous les pays où elle sera visible; ainsi la longueur KG de l'orbite lunaire comprise entre les points K & G , nous fera connoître la durée de l'éclipse; comme le milieu M de la ligne KG nous fera trouver le temps du milieu de l'éclipse générale: la ligne KG est coupée en deux parties égales par la perpendiculaire LM , parce que les côtés LK & LG sont égaux; il en est de même de la corde VX ; ainsi le point M indique le milieu de l'éclipse générale, dont la durée est exprimée par KG ; & la durée de l'éclipse centrale est représentée par VX .

Durée de
l'éclipse gé-
nérale.

1808. EXEMPLE. Dans l'éclipse du premier Avril 1764, le temps vrai de la conjonction indiqué par les tables étoit $10^h 32' 7''$, mais nous nous servirons du temps observé $10^h 31' 23''$ du matin, à Paris; la latitude pour ce temps-là $39' 36''$ boréale; le mouvement horaire de la lune en longitude $29' 39''$, celui du soleil $2' 27'' \frac{2}{3}$, l'inclinaison relative $5^\circ 44' 26''$, le mouvement horaire relatif ou composé $27' 19'' \frac{1}{2}$; on fera ces deux proportions: $R : 39' 36'' :: \sin. 5^\circ 44' 26'' : 3' 58''$, valeur de HM , & $27' 19'' \frac{1}{2} : 60' 0'' :: 3' 58'' : 8' 42''$; on retranchera ces $8' 42''$ de l'heure de la con-

Fig. 103. jonction, parce que la latitude de la lune alloit en augmentant, & l'on aura $10^{\text{h}} 22' 41''$ pour le temps du milieu de l'éclipse générale, compté au méridien de Paris.

Le même triangle *HLM* fera trouver la perpendiculaire *LM* par le moyen de cette analogie : $R : \cos. 5^{\circ} 44' 26'' :: 39' 36'' : 39' 24''$; c'est la plus courte distance de la lune au centre de la projection dans le temps du milieu de l'éclipse; cette perpendiculaire *LM*, de $39' 24''$, nous servira pour trouver le commencement & la fin.

Commencement & fin de l'éclipse générale.

1809. Le commencement de l'éclipse générale compté au méridien de Paris se trouve de la même manière que le commencement d'une éclipse de lune (1780, 1787); dans le triangle *LKM* rectangle en *M*, on connoît la perpendiculaire *LM* (1808) & l'hypothénuse *LK* égale à la somme des trois demi-diamètres du soleil, de la lune, & de la projection; (1800), on cherchera le côté *MK*, on le convertira en temps à raison du mouvement horaire, & ce temps ôté de celui du milieu de l'éclipse en *M*, donnera le temps du commencement de l'éclipse générale en *K*; étant ajouté il donnera la fin de l'éclipse en *G*.

EXEMPLE. Dans l'éclipse de 1764, le côté *LM* est de $39' 24''$; la parallaxe de la lune de $54' 9''$ pour Paris, le demi-diamètre horizontal de la lune $14' 47''$, celui du soleil $16' 1''$, la somme des demi-diamètres de la projection & la pénombre, c'est-à-dire, de la différence des parallaxes & des demi-diamètres du soleil & de la lune, est de $1^{\circ} 24' 48''$, on résoudra le triangle *LKM* (1781); pour cela on fera la somme & la différence; on ajoutera leurs logarithmes, on prendra la moitié de la somme, & l'on y ajoutera le logarithme constant 0,344158, différence entre le logarithme du mouvement horaire (1765), & celui de 1^{h} ou $3600''$; on trouvera le logarithme de $9893''$ ou $2^{\text{h}} 44' 53''$; ainsi le commencement de l'éclipse générale étoit à $7^{\text{h}} 37' 48''$ du matin, & la fin à $1^{\text{h}} 7' 34''$.

Logarithme constant.

après-midi, sa durée sur toute la terre étoit de 5 heures 29' 46".

Fig. 103.

1810. Le commencement de l'éclipse centrale arrive lorsque la lune est au point V , où son orbite coupe le cercle de projection; car alors le centre de la lune, le centre du soleil & le bord de la terre sont sur une même ligne, & le point de la terre dont la projection est en V , voit le centre de la lune sur le centre du soleil.

Commencement & fin de l'éclipse centrale.

Dans le triangle LMV , rectangle en M , on connoît la perpendiculaire LM (1808) & la ligne LV qui est la différence des parallaxes ou le rayon de la projection, on cherchera le côté MV , on le convertira en temps, c'est-à-dire, on cherchera le temps que la lune emploie à parcourir VM , & ce temps étant ôté de celui du milieu de l'éclipse générale, on aura le temps qu'il étoit à Paris quand l'éclipse commençoit à être centrale pour quelque point V de la terre.

EXEMPLE. Dans l'éclipse de 1764, supposant $LV = 54' 0'' = 3240''$; $LM = 39' 24''$, on trouvera $MV = 36' 56''$, qui réduit en temps donne $1^h 21' 5''$; cette demi-durée étant ôtée du milieu de l'éclipse $10^h 22' 41''$, donnera le commencement de l'éclipse centrale $9^h 1' 36''$, & ajoutée au milieu de l'éclipse donnera la fin $11^h 43' 46''$. Le temps que l'ombre employoit à traverser la terre étoit de $2^h 42' 10''$.

1811. Les calculs que nous venons de faire pour l'éclipse générale, peuvent s'exécuter graphiquement comme ceux des éclipses de lune (1787); on fera une grande figure dont le rayon LA soit égal à la différence des parallaxes horizontales, c'est-à-dire, divisé en autant de minutes qu'en contient cette différence des parallaxes; on prendra la ligne LH égale à la latitude de la lune, & l'angle MLH égal à l'inclinaison relative de l'orbite lunaire; on prendra sur la même échelle une quantité égale au mouvement horaire de la lune sur son orbite relative, que l'on portera de H en N ; on marquera en H l'heure & la minute de

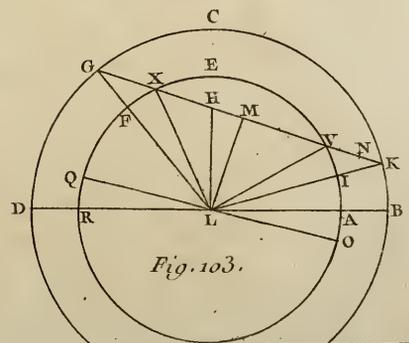
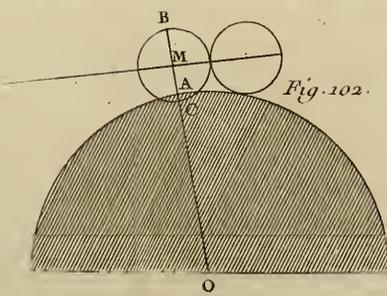
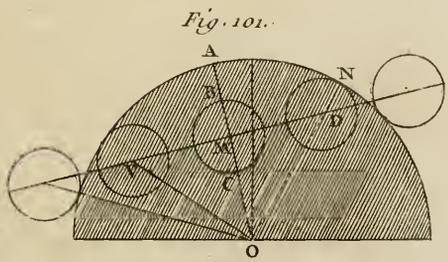
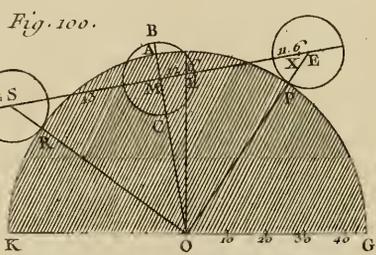
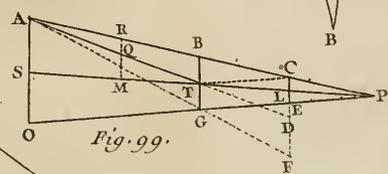
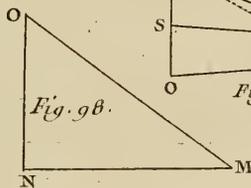
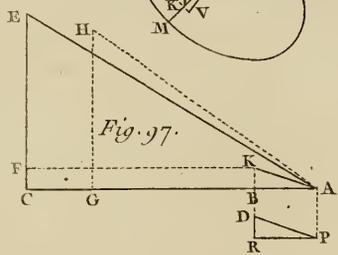
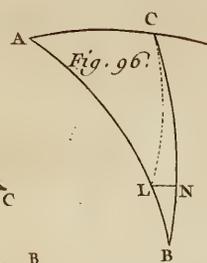
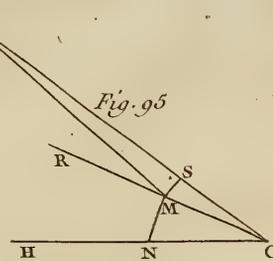
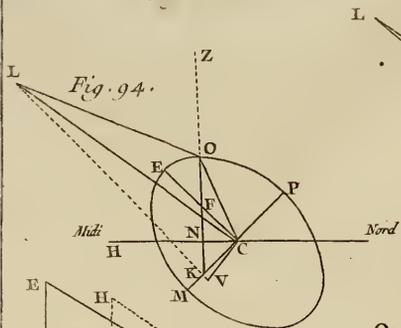
Opération graphique.

la conjonction, & en *N* une heure de moins ; on divisera par ce moyen l'orbite *GK* en heures & minutes ; & l'on verra à quelle heure la lune s'est trouvée en *K*, en *V*, en *M*, en *X* & en *G* ; comme on l'a trouvé par les calculs des articles précédens.

1812. Il s'agit actuellement de connoître quels sont les différens pays de la terre qui sont en *V*, en *X*, au moment où la lune y arrive, c'est-à-dire, leurs longitudes géographiques, & leurs latitudes ; Boulliaud les trouvoit par le moyen des tables du nonagésime ; je donnerai une méthode pour en faire le calcul par la trigonométrie (1930) ; mais il faut indiquer dès à présent une manière simple & naturelle pour trouver ces pays avec un globe. M. de la Caille a donné dans ses leçons d'astronomie (art. 1166) une méthode pour y parvenir avec la règle & le compas en décrivant des ellipfes ; nous en parlerons également (1942 & suiv.) ; mais je ne conseillerois pas aux astronomes de faire ces calculs par la trigonométrie, si ce n'est dans des cas extraordinaires, & pour des observations importantes ; le temps qu'exigent ces calculs rigoureux, est bien mieux employé à calculer des observations déjà faites, pour en tirer des conséquences, qu'à annoncer avec une précision si scrupuleuse celles qui doivent arriver ; les opérations graphiques sont suffisantes pour tracer des cartes semblables à celles de la planche XIV, que l'on met ordinairement en abrégé dans les éphémérides. Ce fut M. Cassini qui en donna l'idée & le modèle, à l'occasion de l'éclipse de soleil qu'il avoit observée à Ferrare en 1664. (*Observatione dell' eclisse solare fatta in Ferrara 1664*).

Machines
pour les
éclipses.

1813. Il y a dans les manuscrits de M. de l'Isle une description avec les plans d'une machine de son invention, propre à faire trouver facilement & sans calcul les circonstances d'une éclipse de soleil. M. de Fouchy avoit aussi exécuté, il y a plusieurs années, une machine composée d'un globe & de différentes pièces pour le même usage. M. Segner, de Gottingen, en a décrit



décrit une dans les tranſactions philoſophiques, (année 1741, n°. 461). Enfin, dans le livre de M. Ferguſon, intitulé, *Aſtronomy explained*, 1757, pag. 280, ou 1764 pag. 298, planche XIII, on trouve auſſi la deſcription d'une machine pour les éclipses, qu'il appelle *Eclipſareon*, avec laquelle il trouve le temps, la quantité, le progrès, les circonſtances & la durée d'une éclipse de ſoleil pour tous les pays de la terre. L'Auteur qui étoit Berger du Roi, en Ecoſſe, eſt venu au ſein de la ville de Londres exercer un talent naturel qu'il avoit pour la mécanique & pour l'aſtronomie, il s'y eſt diſtingué, & a obtenu des bienfaits du Roi d'Angleterre.

1814. Pour mettre tout au plus ſimple, je ne ſuppoſe qu'un globe terreſtre qui ait cependant au moins 6 pouces de diamètre, & une règle avec deux pieds, représentée par *GVAE* (fig. 105), dont la longueur *VA* ſoit égale au diamètre du globe dont on ſe fert, & la hauteur égale au rayon du globe, ou un peu plus, afin d'être placée ſur ſon horizon *GE*; le rayon de ce globe doit représenter le rayon de la terre, ou la parallaxe de la lune, comme *LA* dans la figure 104, c eſt-à-dire, qu'il faut le ſuppoſer, par exemple, de 54' parce que la parallaxe de la lune dans l'éclipse de ſoleil de 1764 étoit de 54'.

Fig. 105.

Comme l'on n'eſt pas maître de changer le diamètre de ſon globe dans les différentes éclipses de ſoleil, il faudra calculer les différentes parties de la figure, c'eſt-à-dire, le mouvement horaire de la lune & les diamètres du ſoleil & de la lune, en les réduiſant à cette échelle; ſi le globe a 8 pouces de diamètre, & que la parallaxe actuelle, ſoit, par exemple de 54', on dira 54' ſont à 48 lignes, comme 31', ſomme des demi-diamètres, eſt à 27 lignes $\frac{1}{2}$, qu'on portera ſur la règle *LA*, qui doit représenter l'orbite de la lune.

1815. On évitera même ces règles de trois en ſe ſervant d'une échelle compoſée de pluſieurs lignes parallèles, & diviſées en 60 parties par des tranſverſales, telle qu'on la trouvera décrite ci-après (1858), &

Fig. 115.

qu'on la voit dans la *figure 115*, la ligne marquée 60 est supposée égale au rayon du globe dont on se sert; mais le rayon de ce globe devant toujours être égal à la parallaxe, si elle est de 54', on aura besoin d'une échelle plus longue que le rayon du globe dans le rapport de 60 à 54; car le rayon devant être alors divisé en 54', les minutes doivent être plus longues dans le même rapport, par conséquent les divisions sur lesquelles on les prendra, doivent être plus étendues, ou être des portions d'une parallèle plus longue dans le rapport de 60 à 54. La parallèle *AB* qui répond à 54' est dans ce rapport avec la parallèle qui répond à 60', elle doit donc servir à prendre les minutes du mouvement horaire, des demi-diamètres & des autres parties de la figure, lorsque la parallaxe sera de 54'; ainsi le nombre des minutes sera plus petit, parce que le rayon n'en contiendra que 54 au lieu de 60.

Usage du
globe pour le
calcul des
éclipses.

Fig. 103.

1816. Pour placer sur le globe l'orbite de la lune; il faut avoir fait une figure, telle que la *fig. 103*, où la ligne *BLD* représente une portion de l'écliptique, & *XV* l'orbite relative (1765); on y ajoutera une ligne *OLQ* pour représenter une portion de l'équateur; en faisant l'angle *ALO* égal à l'angle de position (1044), ou au complément de l'angle de l'écliptique avec le méridien (1846); l'équateur sera au midi ou au-dessous de l'écliptique à l'orient du globe, dans les signes ascendants, c'est-à-dire, quand la conjonction arrivera depuis le 21 Décembre jusqu'au 21 Juin. La somme de l'angle *ALO* & de l'inclinaison de l'orbite relative, ou leur différence, suivant les cas, donnera l'angle de la perpendiculaire *LM* avec le méridien universel *LH*, ou le méridien du globe, que l'on suppose immobile; cet angle est le même que l'angle de l'orbite avec l'équateur; on prendra sur la figure avec un compas les arcs *OV*, *QX*, & l'on marquera un pareil nombre de degrés sur l'horizon du globe, à compter depuis les vrais points d'orient & d'occident, c'est-à-dire, depuis les intersections de l'équateur & de l'horizon du globe,

en allant du côté du nord, si la latitude de la lune est boréale, du côté du midi, si elle est australe.

On élèvera le pole du globe sur son horizon du nombre de degrés que la déclinaison du soleil indiquera; si la déclinaison est boréale, c'est le pole boréal qu'il faut élever; ce sera le pole antarctique, si la déclinaison est méridionale: on placera le support $GVAE$, (fig. 105), de maniere qu'un bord de la règle supérieure VA réponde perpendiculairement au-dessus des deux points marqués sur l'horizon du globe; dans cet état, cette traverse VA représentera l'orbite de la lune, placée sur l'horizon du globe, comme elle l'étoit sur le cercle de projection dans la figure 103.

Maniere
de placer le
globe.

Fig. 105.

Il faut prendre encore sur la figure 103 les temps de l'orbite lunaire qui répondent en V & en X , c'est-à-dire, au commencement & à la fin; on les écrira sur le support VA , que je suppose couvert d'une petite bande de papier collé, & l'on aura un intervalle AV , qu'on divisera en minutes de temps, comme l'on a divisé l'orbite VX de la lune (1811), ou bien l'on se servira du mouvement horaire, & l'on marquera seulement le temps du milieu de l'éclipse sur le milieu L de la règle.

Il ne s'agira plus que de placer le globe sur l'heure qui lui convient; par exemple, dans l'éclipse de 1764, la lune devant être en A à 9h 2', qui est le commencement de l'éclipse centrale, on tournera le globe de maniere que Paris soit en C , 2h 58' à l'occident du Méridien universel MP ; c'est ce méridien dans lequel le soleil est supposé fixe, tandis que tous les pays de la terre passent successivement devant lui par la rotation du globe d'occident en orient (1829).

Méridien
universel.

1817. Le globe terrestre étant ainsi disposé pour l'heure de Paris, il est aussi placé pour tous les autres pays, & la lune étant supposée en A , le point de la terre qui répond perpendiculairement sous la lune, est celui où l'éclipse paroît centrale dans ce même moment (1800); on n'a donc qu'à abaisser un à-plomb du point A , si l'horizon du globe est bien de niveau, ou placer l'œil

Fig. 105.

perpendiculairement au-dessus du point *A*, ou enfin, se servir d'une petite équerre, & l'on verra sur le globe le point de la terre que l'on cherchoit, perpendiculairement au-dessous de *A*; l'on marquera la longitude & la latitude de ce point-là; ce sera le premier point de l'éclipse centrale, marquée sur la carte de la *planche XIV*.

Au point *A* l'on placera le centre d'un cercle dont le rayon *AD* soit égal à la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune; on pourra faire un cercle de carton, qu'on placera parallèlement à l'horizon du globe, son centre étant en *A*; ou bien l'on fera circuler un compas dont l'ouverture soit égale à la somme des demi-diamètres, & dont une pointe soit en *A*; on remarquera tous les points du globe qui se trouveront répondre perpendiculairement sous la circonférence de ce cercle, ce sont ceux qui verront les bords du soleil & de la lune se toucher au même instant.

1818. On fera un autre cercle dont le rayon soit plus petit que le précédent, d'un quart du diamètre du soleil, c'est-à-dire, de 3 doigts, (ce sera 8' en 1764), ou bien on échanvrera de la même quantité une portion du même cercle qui a servi pour la première phase, comme dans le limaçon de la *figure 106*; ou bien l'on diminuera seulement l'ouverture du compas dont on s'est servi dans l'opération précédente; alors la circonférence du cercle, ainsi diminuée de trois doigts; ou l'ouverture du compas, promenée tout autour du point *A* (*fig. 105*), indiquera sur le globe, par le moyen de l'à-plomb, tous les points de la terre où le soleil est éclipsé dans ce moment-là de 3 doigts seulement; on en comprendra la raison en réfléchissant sur les articles 1802 & 1803.

Cercle de la
pénombre.

1819. On pourra faire de même d'autres cercles pour l'éclipse de 2, 3, 4, 5 doigts, &c. en diminuant de 2, 3 doigts, &c. le rayon du cercle de la *pénombre* c'est-à-dire, du cercle dont le rayon étoit égal à la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune; on pourra échanvrer un seul cercle dont la circonférence soit di-

visée en 12 parties, & le rayon de même en 12 parties, & dont les 12 secteurs aillent en diminuant comme le limaçon d'une montre à répétition (*fig. 106*), chacun étant plus petit que le précédent, d'un doigt ou d'une douzième partie du diamètre solaire, pris sur la même échelle que la parallaxe horizontale & le mouvement horaire (1815); en promenant un à-plomb sur les circonférences de ces cercles, il marquera sur le globe les pays qui pour cet instant-là auront l'éclipse d'un doigt, ou de 2, &c.

Fig. 106.

Si l'on place en *L*, sur le milieu de la traverse *AV*; le centre de ces cercles, & qu'on fasse la même opération, après avoir fait tourner le globe pour amener la rosette *P* du globe sur 10^h 23', qui est l'heure du milieu de l'éclipse générale au méridien de Paris, on trouvera tous les pays qui à 10^h 23' ont l'éclipse d'un doigt, de deux, &c. C'est ainsi qu'on peut tracer sur un globe, ou sur une carte géographique, la figure de tous les points qui auront une éclipse centrale, ou qui auront l'éclipse d'un doigt, de deux, &c. On en trouvera le calcul trigonométrique avec un exemple à l'article 1930 & suiv. Il est bon d'observer dès-à-présent que tous ces pays qui dans un instant donné voient l'éclipse d'un doigt, n'ont pas cependant la grandeur de l'éclipse d'un doigt; car ce n'est pas la plus grande phase qu'on trouve par cette opération, c'est seulement la phase qui a lieu pour moment donné.

Méthode pour déterminer les phases d'une éclipse de soleil par le moyen des projections.

1820. LA méthode que je viens d'expliquer pour trouver, par le moyen d'un globe, les pays de la terre qui doivent voir une éclipse de soleil, ne seroit pas assez exacte pour trouver, à une ou deux minutes près, le commencement & la fin de l'éclipse en un lieu quelconque, à moins qu'on n'eût un globe très-grand &

Opération
graphique.

très-parfait ; mais nous y parviendrons aisément au moyen d'une figure de projection & d'une ellipse tracée avec soin ; cette opération graphique avec la règle & le compas fera plus exacte , & aussi simple que celle du globe. Avant d'en donner les règles, je vais tâcher d'en faire comprendre la théorie en expliquant avec soin les principes de la projection orthographique ; j'en ai déjà fait quelque usage, (art. 1798 & suiv.), mais je vais en expliquer ici tous les fondemens & toutes les circonstances.

1821. M. Cassini s'étoit occupé , à ce qu'il paroît , de cette matière , même avant que d'avoir quitté l'Italie. M. Weidler , (pag. 522), cite à ce sujet un ouvrage de M. Cassini, intitulé : *Nova Eclipsium methodus. Bonon. Italice* , 1663 , in-4°. J'aurois été fort curieux de voir un ouvrage aussi ancien de M. Cassini , sur cette matière ; mais je l'ai cherché inutilement en Italie , en France , en Angleterre & en Allemagne , & je suis persuadé qu'il n'a jamais été imprimé ; le P. Audiffredi , savant bibliothécaire & astronome , du Couvent de la Minerve à Rome , m'a écrit qu'il en jugeoit de même , & qu'il l'avoit dit dans son ouvrage *De' Scrittori Nizzardi* , où des Ecrivains du comté de Nice , dans lequel il a parlé de M. Cassini , & où il s'est servi de ce qu'en ont dit Apostolo Zeno , Michele Giustiniani , le P. Nicéron , &c. Le premier dit , en parlant de l'éclipse de 1664 , que M. Cassini publia ses observations à Ferrare , & qu'elles furent d'autant plus intéressantes qu'il y fit usage d'une nouvelle méthode pour déterminer les apparences d'une éclipse de soleil dans toute la terre ; mais qu'il se reserva de publier dans un autre temps cette méthode en son entier , & d'en faire la matière d'un ouvrage qui devoit être intitulé : *Nova eclipsium methodus* , (*Giornale d'Italia* , tom. 27 , pag. 121) ; il continue le détail de tous les ouvrages que M. Cassini donna jusqu'à son départ pour la France , mais il ne dit plus rien de la nouvelle méthode des éclipses , ce

qui me fait croire que du moins en Italie il n'en fut plus question. Le P. Nicéron n'en dit rien, quoiqu'il parle aussi des observations de l'éclipse de 1664, publiées à Ferrare, (1812). M. Eustache Zanotti, m'a dit qu'il ne croyoit pas qu'il y eût rien autre de publié sur cette matière; il se souvient qu'étant jeune il reçut de M. Manfredi, des manuscrits que Domin. Cassini avoit autrefois prêtés à ce dernier, où étoit expliquée la méthode de calculer graphiquement les éclipses, ces manuscrits étoient en françois, ce qui prouve qu'il les avoit composés en France, il n'y faisoit mention d'aucun ouvrage précédemment publié, & Manfredi n'en avoit pu indiquer aucun à M. Zanotti, lorsqu'il lui prêta ces papiers. On ne voit rien de M. Cassini jusqu'à l'année 1700, qu'il fit part de sa méthode à l'académie, (*Hist. de l'acad. 1700, pag. 103*); elle se trouve fort au long à la tête des tables de M. son Fils publiées en 1740.

1822. Flamsteed donna une dissertation à la suite du cours de mathématiques de Jonas Moore, (*A new systeme of the mathematick, 1681*), cette pièce a pour titre, *The doctrine of the sphere grounded on the motion of the earth*; il dit dans la préface qu'on n'avoit jamais publié de méthode pour trouver les phases d'une éclipse de soleil sans calculer les parallaxes; il y avoit pensé en 1676, & avoit envoyé sa méthode à Jonas Moore, celui-ci la communiqua à la société royale; mais Christ. Wren, dit alors qu'il avoit trouvé la même méthode 16 ans auparavant; & pour le prouver, il lui envoya peu après une semblable projection tracée proprement sur un carton, avec plusieurs inventions ingénieuses de nombres & d'échelles pour la construction des éclipses de soleil sous la latitude de Londres.

Je crois donc, dit Flamsteed, que Wren est le premier de tous qui ait connu la manière de trouver les phases d'une éclipse sans calculer les parallaxes; il ajoute que M. Halley, avant son départ pour Sainte

Wren est regardé comme le premier inventeur.

Helene en 1666, lui parla de la construction des éclipses, mais en lui cachant la méthode, à laquelle Flamsteed n'avoit pas alors beaucoup de confiance.

Projection
ortographique.

1823. PROJETER une figure, c'est la rapporter à un autre plan, par des lignes tirées de chaque point de la figure à chaque point du plan. On distingue plusieurs sortes de projections, mais la plus simple de toutes est la projection *ortographique* (a), formée par des lignes perpendiculaires au plan de projection; c'est celle dont on se sert avec un très-grand avantage pour les éclipses sujettes aux parallaxes. Soit une ligne AB , (fig. 107), & un plan quelconque PL , différent de cette ligne; si des extrémités A & B de la ligne donnée on abaisse sur le plan PL des perpendiculaires Aa , Bb , l'espace ab qu'elles occuperont sur le plan PL ; fera la projection ortographique de la ligne AB , & le plan PL sur lequel on a abaissé ces perpendiculaires, s'appellera le *plan de projection*.

Fig. 107.

1824. Si les lignes Aa , Bb , au lieu d'être parallèles, & perpendiculaires au plan de projection, avoient pour origine un point commun, il en résulteroit sur le plan PL une autre figure, une autre sorte de projection; nous ferons usage, par exemple, de la projection *stéréographique* (b) (2111), à l'occasion de la Mappemonde qui servira pour le passage de Vénus; & nous parlerons dans le XXIV^e. livre de plusieurs sortes de projections (3871); mais nous n'avons besoin ici que de la projection ortographique.

Projection
d'une ligne.

1825. LA PROJECTION ortographique ab d'une ligne AB faite sur un plan de projection PL par les perpendiculaires Aa , Bb est le cosinus de son inclinaison. Car ayant tiré AC parallèle à PL , l'angle BAC est égal à l'inclinaison de la ligne AB sur le plan de projection PL , & $AC = ab$ est la projection de la

(a) ὀρθός, *rectus*, parce que cette projection se fait par des angles droits.

(b) στερεός, *solidus*, parce que c'est la projection employée pour représenter le globe qui est un corps solide.

ligne AB ; or $AB : AC :: R : \text{cof. } BAC$; ainsi le rayon est au cosinus de l'inclinaison, comme la ligne AB est à sa projection AC . Donc si l'on prend le rayon pour l'unité, on trouvera que la projection d'une ligne est égale à cette ligne multipliée par le cosinus de son inclinaison sur le plan de projection.

1826. LA PROJECTION d'un arc tel que FI est égale à son sinus. Soit la circonférence DFH (fig. 108), du demi-cercle dont on demande la projection, située dans un plan perpendiculaire au plan de projection, toutes les lignes perpendiculaires FC abaissées de chaque point de la circonférence sur le rayon CH , seront perpendiculaires au plan & marqueront les projections des mêmes points; le point K fera la projection du point I ; ainsi la ligne CK sera la projection de l'arc FI ; mais si C est le centre du cercle, CK égal à IL est le sinus de l'arc FI : ainsi les sinus des arcs FI seront les projections de ces arcs, si l'on prend leur origine au point F qui répond perpendiculairement au centre C . Cette proposition sera d'un grand usage dans le calcul des éclipses (1838 & suiv.).

Projection
d'un arc.
Fig. 108.

1827. LA PROJECTION orthographique d'un cercle incliné est toujours une ellipse. Soit DFH (fig. 108), le cercle dont on cherche la projection, DH celui de ses diamètres qui est dans le plan de projection, ou parallèle à ce plan; si l'on incline ce demi-cercle en le faisant tourner autour du diamètre DH , de manière que toutes les lignes IK fassent avec le plan de projection un angle quelconque, toutes ces lignes auront pour projections des lignes KG qui seront égales chacune à leur correspondante IK multipliée par le cosinus de l'angle d'inclinaison (1825), en sorte que KG fera par-tout à IK comme le cosinus de l'angle d'inclinaison est au rayon; or, telle est la propriété d'une ellipse, que toutes ses ordonnées KG soient aux ordonnées IK d'un cercle de même diamètre dans un rapport constant (3256); donc les lignes KG formeront une ellipse; donc enfin la projection d'un demi-

Projection
d'un cercle.
Fig. 108.

Fig. 108.

cercle DFH fera la circonférence d'une ellipse DGH , dont le grand axe DH est le même que celui du demi-cercle; & le petit axe plus petit en raison du cosinus de l'inclinaison. Il en seroit absolument de même quand le diamètre DH du cercle projeté seroit à une certaine distance au-dessous du plan de projection.

Le cercle
paroît en forme
d'ellipse.

Fig. 109 &
110.

1828. Un cercle vu obliquement paroît donc sous la forme d'une ellipse; car on fait qu'une ligne AB (fig. 109), vue obliquement du point O paroît de la même grandeur que la ligne perpendiculaire $AC = AB \sin. ABC$; ainsi dans un cercle CAD (fig. 110), vu obliquement toutes les ordonnées AB, EF , paroissent plus petites dans le même rapport, le cercle paroît donc une ellipse CGD , dont le petit axe est au grand comme le sinus de l'inclinaison est au rayon. Cette proposition revient au même que la précédente; mais il est nécessaire de s'accoutumer à comprendre que le cercle vu obliquement, paroît en forme d'ellipse; car nous ferons un usage continuel de cette proposition.

Fig. 111.

Cercle d'illumination.

1829. Les principales lignes de la projection d'une éclipse sont représentées dans la fig. 111; ST est la ligne menée du centre du soleil au centre de la terre, que nous appellons simplement la ligne des centres; IL un plan qui passe par le centre de la terre perpendiculairement à la ligne des centres. Ce plan forme le cercle d'illumination, & sépare la partie éclairée IDL de la partie obscure $LOVI$; nous allons rapporter à ce plan les différentes parties de la projection; & tout ce que nous dirons à ce sujet pourra s'appliquer au plan de projection, lors même que nous le placerons dans la région de la lune (1835), parce qu'il sera toujours parallèle au cercle d'illumination, & sensiblement égal. La ligne PO est l'axe de la terre; EQ le diamètre de l'équateur; $PELOQIP$ le méridien universel (1816), c'est-à-dire, celui qui passe continuellement par le soleil, & que les différens pays de la terre atteignent successivement par la rotation diurne de notre globe; ED est la déclinaison du soleil ou sa distance à l'équateur; l'arc

PI est l'élevation du pôle au-dessus du plan de projection; cette hauteur est égale à la déclinaison du soleil, car si des angles droits ou quarts de cercle *PE* & *DI* on ôte la partie commune *PD*, on aura l'arc *PI=DE* qui est la distance du soleil à l'équateur *E*, ou sa déclinaison. Cette élévation est aussi égale à l'inclinaison de tous les parallèles terrestres par rapport à la ligne des centres, & le complément de leur inclinaison par rapport au plan de projection.

Fig. 1112

Elévation
de l'axe &
du pôle.

Ayant pris, depuis l'équateur, les arcs *EG* & *QF* égaux à la latitude d'un lieu de la terre, tel que Paris, la ligne *GH* perpendiculaire à l'axe *PO*, & qui est le cosinus de la latitude *EG*, fera le rayon du parallèle de Paris, ou du cercle que Paris décrit chaque jour par la rotation diurne de la terre; *GF* fera le diamètre du parallèle. Des points *G*, *F* & *H*, qui sont les extrémités & le centre du parallèle de Paris, nous abaisserons des perpendiculaires *GM*, *FR*, *HN*; les points *M*, *R*, *N* où ces perpendiculaires rencontreront le cercle de projection *IL*, seront les projections des extrémités & du centre du parallèle.

1830. La distance *TM* du centre *T* de la projection au bord intérieur *M* de la projection du parallèle de Paris, est égale au sinus de l'arc *GD* ou de la différence entre *EG* qui est la latitude de Paris, & *DE* qui est la déclinaison du soleil; la distance *TR* du centre *T* de la projection à l'extrémité la plus éloignée *R* du parallèle de Paris, est égale au sinus de l'arc *DF*, ou *VF*; cet arc *VF* est égal à la somme des arcs *VQ* & *QF* dont l'un est égal à la déclinaison du soleil, & l'autre à la latitude de Paris; ainsi la distance du centre à la projection du sommet du parallèle, est égale au sinus de la somme de la latitude du lieu & de la déclinaison du soleil.

1831. La projection du pôle *P* se trouvera en abaissant une perpendiculaire du point *P* sur la ligne *TI*; elle marque un point éloigné du centre *T* d'une quantité égale à *TP* cof. *PTI* ou *TP* cof. décl. ☉ (1825).

Fig. III.

Distance du
centre de l'é-
lipse.

1832. La distance TN ou l'espace de la projection compris entre le centre T de la projection, & le centre N du parallèle est égal à $TH \cdot \cos. HTN$ (1825); mais TH est le sinus de la latitude de Paris, HTN est égal à PI ou à DE , c'est-à-dire, à la déclinaison du soleil; donc TN est égale au produit du sinus de la latitude du lieu, par le cosinus de la déclinaison du soleil pour le moment donné, en prenant pour rayon le rayon même de la projection: nous en ferons usage (1862).

1833. Le point D de la terre est celui qui a le soleil au zénit; un autre point quelconque E qui en est éloigné de la quantité DE , a donc le soleil éloigné de son zénit de la même quantité DE ; delà il suit qu'une ligne TA étant prise sur la projection & étant convertie en arc pour avoir DE , elle donnera le sinus de la distance du soleil au zénit ou le cosinus de sa hauteur pour le lieu de la terre qui est projeté au point A ; c'est-à-dire, que la ligne TA , sinus de l'arc DE , en est la projection. Nous ferons usage plusieurs fois de cette proposition, & en particulier à l'article 1936.

Expression
de la parall.
de hauteur.

1834. Il suit aussi delà que TA exprime la parallaxe de hauteur pour le lieu de la terre qui est projeté en A ; car TL qui est la parallaxe horizontale (1797), est encore le sinus total; donc TA qui est le cosinus de la hauteur sera aussi la parallaxe de hauteur, qui est toujours $= p \cdot \cos. h$ (1629); donc en général la distance d'un pays de la terre au centre de la projection, est égale à la parallaxe de hauteur; le rayon de la projection étant pris pour la parallaxe horizontale. On peut dire cependant que c'est la parallaxe qui convient à la hauteur du soleil, & non pas celle qui conviendrait à la hauteur de la lune, parce que les différens points de la projection sont ceux auxquels on rapporte le soleil vu des différens points de la terre; ce n'est pas ceux où l'on rapporte la lune, qui se meut sur une orbite différente, tantôt au-dessus & tantôt au-dessous; cependant on néglige dans la méthode des projections la différence qu'il y a entre la hauteur du soleil & celle de la lune (1874),

parce qu'elle ne peut aller qu'à un demi-degré environ, lorsque l'éclipse commence ou finit. Fig. 1112

1835. Le parallèle de Paris ou le cercle dont H est le centre, & GF le diamètre, étant rapporté ou projeté sur le plan ITL y devient une ellipse (1827), & c'est cette ellipse qu'il est nécessaire de décrire sur le plan, pour y rapporter les phases de l'éclipse; mais auparavant je dois faire observer que l'on peut transporter dans la région de la lune le plan de projection ITL , & que l'ellipse y fera parfaitement la même que sur le plan ITL qui passe par le centre de la terre, puisqu'elle sera comprise entre des lignes parallèles à la ligne des centres TDS , & qui s'étendent jusqu'à la lune, où elles forment une projection de la terre, égale à la terre elle-même (1796).

Soit NO (fig. 113), le diamètre de la terre perpendiculaire au rayon du soleil, ou le diamètre du cercle d'illumination, c'est-à-dire, du cercle terminateur de la lumière & de l'ombre; OAN l'hémisphère éclairé, OVN l'hémisphère obscur de la terre; OK & NM deux lignes dirigées vers le soleil, & que je suppose d'abord parallèles entr'elles puisqu'elles en diffèrent très-peu (1796); XY un plan perpendiculaire à la ligne des centres & aux rayons du soleil, que j'appellerai *plan de projection*; MGK un cercle décrit sur ce plan, & qui soit parallèle & égal au cercle d'illumination; c'est ce cercle MK que j'appelle *cercle de projection* (1804), parce qu'il est véritablement la projection orthographique (1823) du disque de la terre dans la région de l'orbite lunaire. Plan de projection dans la Lune.
Fig. 113.

1836. Nous choisissons pour plan de projection celui qui est dans la région de l'orbite lunaire & qui passe à la distance de la lune, quoiqu'on pût choisir d'autres plans qui passeroient ou par le soleil ou par la terre, (*Mém. acad.* 1744, pag. 191); mais celui qui passe par la lune me paroît le plus commode, parce que le mouvement de la lune & son diamètre y sont tels que nous les observons réellement de la terre; Raisons de préférence.

Fig. 113.

le rayon même de la terre y paroît d'une grandeur connue, & donnée par les tables, qui est la parallaxe horizontale de la lune. En employant un plan de projection, tel que le propose M. le Monnier, d'après Képler, & Boulliaud, (*Inst. astron. pag. 213*) qui passe par le centre de la terre, on est obligé de supposer l'œil de l'observateur placé dans la lune, ce qui peut donner quelque difficulté de plus à ceux qui commencent à s'occuper de ces matières. Ayant choisi la région lunaire pour y placer notre projection, voyons comment on doit y rapporter les parallaxes terrestres.

Soit PCR l'axe de la terre, élevé au-dessus du cercle d'illumination (1829), ou du cercle terminateur; de la quantité PCN égale à la déclinaison du soleil (1829). Soit $ABDE$ le cercle ou parallèle diurne que décrit par le mouvement de rotation un point de la terre, tel que Paris; AF, DG , des lignes parallèles aux rayons du soleil, & que nous supposerons aussi parallèles entr'elles, puisque la différence est insensible (1796). Ces lignes forment un cylindre oblique dont la base est un cercle; mais dont toutes les sections perpendiculaires à l'axe sont des ellipses; puisqu'elles sont la projection d'un cercle vu obliquement (1828).

1837. La projection de la terre entière sera un cercle MFK parallèle & égal au cercle d'illumination; comme nous l'avons déjà dit; mais le parallèle de Paris ou le cercle $ABDE$ n'étant point parallèle au plan de projection XY ; il ne peut s'y projeter que sous une forme elliptique (1827). C'est cette ellipse que nous allons décrire; elle est la même sur le plan de projection XY que sur le plan qui passeroit par NO , c'est-à-dire, sur le plan du cercle d'illumination, puisque ces deux ellipses sont renfermées entre des lignes parallèles FA, GD ; ainsi tout ce que j'ai dit à l'occasion de la *figure 111*, (art. 1829), aura lieu pour l'ellipse que nous allons décrire sur le cercle de projection qui passe dans l'orbite lunaire.

1838. Dans les opérations suivantes, il ne faut

pas oublier que la distance de la lune au point de la projection qui représente un lieu de la terre, marque la distance apparente des centres du soleil & de la lune pour ce lieu-là. Je suppose un point A de la terre (fig. 113), projeté en F par un rayon AF ; le même lieu A de la terre voit le soleil sur la ligne AF (1796); si le centre de la lune répond alors au point L de la projection, l'observateur situé en A verra la lune éloignée du soleil de la quantité FL ; ainsi la distance apparente sur le plan de projection entre la lune L & le point F qui répond au point A de la terre, sera FL . Il faut bien concevoir que le point F étant la projection du lieu A de la terre, c'est au point F de la projection que l'on rapporte le soleil quand on l'observe du point A ; ainsi l'on peut indifféremment dire qu'un point F de la projection marque le lieu A de la terre, par exemple, la situation de Paris, ou qu'il marque le lieu du soleil vu de Paris (1799).

Fig. 113.

1839. Au moyen des propositions démontrées dans les articles 1829 & suiv. il est aisé de tracer l'ellipse de projection pour un lieu & pour un jour donné. Soit AOB (fig. 112), le cercle d'illumination, ou le cercle de la terre qui est perpendiculaire au rayon du soleil ou à la ligne des centres; il faut supposer le soleil au-dessus de la figure, répondant perpendiculairement au-dessus du centre C de la terre. La ligne $OPDC$ est un diamètre du méridien universel dans lequel on suppose le soleil immobile; ACB est un diamètre de l'équateur, perpendiculaire au méridien universel; P est la projection du pôle, c'est-à-dire, le point du plan de projection sur lequel le pôle répond perpendiculairement (1831); on prendra les arcs BL & AK égaux à la latitude du lieu; ensuite KM , KN , LR , LV , égaux à la déclinaison du soleil; on tirera les lignes MER , NFV , l'on aura CE égale au sinus de BR ou de la somme de la latitude du lieu & de la déclinaison de l'astre, & la ligne CF égale au sinus de BV ou de la différence des mêmes arcs. Ainsi les points E & F

Fig. 112.

Pour avoir
le petit axe.

Fig. 112.

feront les extrémités de la projection du parallèle (1830); donc l'ellipse qui représente le parallèle aura EF pour petit axe, & divisant EF en deux parties égales au point G , l'on aura le centre de l'ellipse, car le centre doit être nécessairement à égale distance des deux extrémités E, F , du petit axe.

1840. Il est vrai que le point G est différent du point D , par lequel passe le diamètre KL du parallèle de Paris; mais cela vient de ce que le cercle AOB sur lequel nous avons pris les arcs BL & AK égaux à la latitude de Paris, n'est pas un méridien ni un cercle sur lequel se comptent les latitudes; l'axe est incliné au cercle de projection, le méridien est incliné au cercle AOB , le point de l'axe par lequel passe le parallèle de Paris, est bien à une distance du centre égale à CD ; mais ce point rapporté sur le cercle de projection répond perpendiculairement en G , en sorte que CG est égale à CD multipliée par le cosinus de la déclinaison (1825). Ainsi l'opération que nous venons de faire pour trouver le point G , est seulement une construction par laquelle on a les grandeurs CE & CF telles que nous avons fait voir qu'elles devoient se trouver, mais où la ligne KDL ne servira point comme diamètre du parallèle.

Pour le
grand axe.

1841. Le grand axe de l'ellipse est le diamètre même du parallèle; ayant pris déjà les arcs AK & BL égaux à la latitude du lieu pour lequel on veut dresser la projection, la ligne droite KL fera égale au diamètre du parallèle; or l'on a vu (1829) que le demi-diamètre du parallèle ou le demi-grand-axe de l'ellipse, n'est autre chose que le cosinus de la latitude du lieu. Ayant la grandeur de l'axe on tirera par le centre G que nous avons déterminé, une ligne SGX parallèle & égale à KL , qui est égale au diamètre du parallèle de Paris; SGX fera le grand axe de l'ellipse qu'il s'agit de décrire.

Règles pour
décrire l'el-
lipse.

1842. Connoissant le grand axe SX & le petit axe EGF (1839) de l'ellipse que nous cherchons, il
fera

sera aisé de la décrire, c'est-à-dire, d'en trouver tous les points d'heure en heure. On décrira sur le grand axe SX un cercle $SHXQ$, qui représentera le parallèle de Paris, quoique situé dans un plan différent; ce cercle étant divisé en 24 heures aux points marqués 1, 2, 3, &c. on fera sûr que chaque point g du parallèle paroîtra sur la ligne gf perpendiculaire au grand axe SX , tirée par chaque point de division; car quelle que soit l'inclinaison du cercle SHX , & l'obliquité sous laquelle il sera vu, pourvu qu'il passe par les points S & X , le point g de sa circonférence répondra toujours perpendiculairement au point h du grand axe, & l'abscisse Gh de l'ellipse sera toujours le sinus même de l'arc Hg du parallèle, ou de la distance au méridien.

Pour trouver aussi l'ordonnée bh de l'ellipse, au même point, on remarquera que la ligne gh du parallèle étant vue obliquement, doit paroître d'une longueur bh , telle que bh soit à gh , comme le cosinus de l'inclinaison du parallèle est au rayon (1825), ou comme le sinus de la déclinaison du soleil est au rayon (1829), ou enfin comme le petit axe EG est au grand axe HG , donc $HG : gh :: EG : bh$; ainsi gh étant le cosinus de 30° pour le rayon HG , bh sera le cosinus de 30° pour le rayon GE .

1843. Les abscisses de l'ellipse PbX étant les sinus de 15° , 30° , 45° , &c. les ordonnées bh doivent être les cosinus des mêmes arcs, en prenant pour rayon la moitié du petit axe (3264); on marquera donc en partant du centre G les points 1, 2, 3, tels que G_1 , soit le sinus de 15° ou de Hg ; G_2 , le sinus de 30° , &c. pour le rayon GH ; aux points 1, 2, 3, &c. on élèvera sur GX des perpendiculaires qui soient les cosinus de 15° , 30° , 45° , pour le rayon FG , ou GE , & ces perpendiculaires détermineront les points cherchés & le contour de l'ellipse du parallèle.

1844. Pour trouver aisément ces sinus & ces cosinus, au défaut d'un compas de proportion, on décrira du centre G un autre cercle EYF sur le petit axe,

on le divifera comme le cercle HXQ en 24 parties, fi l'on fe contente de 24 heures, ou en 48, fi l'on veut avoir une ellipse divifée en demi-heures. Par les points de divifion du grand cercle, on tirera des lignes gbf parallèles au petit axe, & par les points de divifions du petit cercle, qui correspondent aux mêmes heures, on tirera des lignes comme ab parallèles au grand axe; celles-ci étant prolongées iront rencontrer les premières dans des points tels que b , qui formeront l'ellipse que l'on cherche. Par exemple, la feconde ligne parallèle au petit axe, & qui va du point 30 au point F , coupe la feconde ligne ab , tirée également à 30° du point E parallèlement au grand axe $G X$, dans le point b , ce point eft celui de l'ellipse qui eft à deux heures du méridien. Le point correspondant c à gauche marque deux heures après midi. C'eft ainfi qu'on a pour chaque heure la projection du parallèle de Paris, & la fuation de Paris fur le cercle de projection, à toutes les heures du jour.

Déclinaifon feptentrionale ou méridionale.
Planche XI.
Fig. 114.

1845. On voit dans la *fig.* 114 une ellipse tracée par la méthode précédente pour 26 degrés de déclinaifon, mais dans laquelle on a fupprimé toutes les lignes qui ont fervi à la décrire. La partie inférieure de l'ellipse a lieu quand la déclinaifon eft feptentrionale; car alors la partie éclairée du parallèle, telle que BAE , dans la *fig.* 113, paroît la plus baffe ou la plus méridionale par rapport au rayon folaire TS . Mais foit qu'on fe ferve de la partie fupérieure ou de la partie inférieure de l'ellipse, il faut toujours confidérer Paris, comme allant vers la gauche, c'eft-à-dire à l'orient, dans la partie visible du parallèle ou dans la partie qui eft tournée vers l'étoile.

Heures du matin ou du foir.
Fig. 114.

La partie droite ou occidentale de l'ellipse, (*fig.* 114); fert pour les heures du matin, dans les éclipses de foieil; ou fi c'eft une éclipse d'étoile fixe, cette partie fert avant le paffage de l'étoile au méridien, puisque le mouvement de la terre fe fait vers l'orient, foit fur la terre, foit fur la projection qui en eft l'image; on marque

0^h ou 12^h aux sommets du petit axe, lorsqu'il s'agit du soleil, ou bien l'on y marque l'heure du passage de l'étoile au méridien, lorsqu'il s'agit d'une éclipse d'étoile par la lune.

On voit au bas de la *fig. 114* les diamètres des ellipses qu'on trouveroit pour différentes déclinaisons en employant le même rayon de projection. On y voit aussi à quelle distance passeroient toutes ces ellipses du sommet *S* de la projection, c'est-à-dire, la valeur de *S.V.* J'ai marqué au milieu de l'ellipse les lieux des centres de ces différentes ellipses; chacun pourra les tracer toutes sur autant de cartons différens, pour calculer les éclipses de toutes les étoiles par la lune.

Fig. 114.

Pour rendre l'usage de cette méthode plus facile, j'ai donné dans les mémoires de l'académie pour 1763, une figure qui peut servir à tracer des ellipses pour tous les degrés de déclinaison, dont l'échelle est double de celle de la *fig. 114*; & sur la même planche, j'en ai tracé plusieurs qui sont divisées exactement de minutes en minutes; on pourra aussi, pour décrire de semblables ellipses, se servir des tables que le P. Pilgram a calculées dans les éphémérides de Vienne pour 1769, de toutes leurs dimensions.

1846. La situation du cercle de latitude ou de l'axe de l'écliptique sur le cercle de projection, par rapport au cercle de déclinaison *CA*, (*fig. 116*), peut se trouver par le moyen du calcul de l'angle de position (1044); mais pour abréger, autant qu'il est possible, l'opération graphique dont nous parlerons bientôt (1848), on peut se servir de la méthode suivante. Je suppose que *FGH*, soit un arc du cercle de projection égal au double de l'obliquité de l'écliptique, c'est-à-dire, que du point *G* où se termine le méridien *CG* de la projection; on ait pris les arcs *GF* & *GH*, chacun de 23° 28'; sur la tangente *GV* de l'arc *GF* & du centre *G*, l'on décrira un demi-cercle *VMX* qu'on divisera en 12 signes, comme l'écliptique, en commençant au point *X* du côté de l'occident, où l'on marquera le Bélier, c'est-à-

Tracer le cercle de latitude.

Planche XII.

Fig. 116.

Fig. 116.

dire, os de longitude ; on prendra sur ce cercle un arc égal à la longitude du soleil ou de l'étoile, par exemple, XM ; on abaissera sur le diamètre VX la perpendiculaire MN ; & le point N de la tangente GNV où passera cette perpendiculaire MN , fera le point où l'on devra tirer le cercle de latitude CSN .

En effet, GN est le cosinus de l'arc XM ou de la longitude du soleil, pour le rayon GV ; donc $GV : R :: GN : \cos. \text{long. } \odot$; c'est-à-dire, $GN = GV \cos. \text{longit.}$ mais par la construction $GV = \text{tang. } 23^{\circ} \frac{1}{2}$ pour le rayon que nous supposons égal à l'unité, c'est-à-dire, CG , donc $GN = \text{tang. } 23^{\circ} \frac{1}{2} \cos. \text{long.}$, cela revient à la proportion suivante, par laquelle on trouve l'angle de position (908, 3680), le rayon est au cosinus de la longitude du soleil, comme la tangente de l'obliquité de l'écliptique est à la tangente de l'angle de position. Donc l'angle NCA est celui que forme le cercle de latitude CN avec le méridien CG .

1847. On pourroit aussi faire une construction semblable pour les étoiles fixes que la lune rencontre ; en supposant le cosinus de la latitude égal au rayon (1044) ; l'erreur est insensible, puisque la latitude de la lune ne va pas à 6 degrés ; en sorte qu'il n'y a pas $\frac{1}{180}$ d'erreur à craindre, ce qui ne fait pas 8 minutes de degré sur l'arc AF : or 8' sont insensibles même sur une figure d'un pied de rayon, telle que j'ai coutume de l'employer. Au reste j'ai donné à l'art. 1046 ces angles calculés pour toutes les étoiles considérables, & j'ai marqué sur la circonférence de la fig. 114. les points où il faut tirer le cercle de latitude pour différentes étoiles, telles que γ $\mu\eta$, c'est-à-dire, l'étoile γ de la constellation de la Vierge, &c. On voit que toutes celles dont la longitude est dans le premier ou le dernier quart de l'écliptique, c'est-à-dire, dans les signes ascendants, sont à la droite du méridien CS , les autres sont à la gauche ; parce que dans la fig. 116, les trois premiers & les trois derniers signes de longitude sont dans le quart de cercle $3X$, qui est à l'occident ou

à la droite du point *G* ; cela est aisé à appercevoir sur un globe ; la direction de l'écliptique tend à l'orient dans tous les cas ; si en même temps elle se rapproche du nord , la perpendiculaire doit décliner du côté opposé à la direction de l'écliptique , c'est-à-dire , à l'occident , quand on la considère du côté du nord.

Trouver les phases d'une Eclipsé de soleil ou d'étoile , avec la règle & le compas.

1848. On peut par une opération très-commode ; & avec l'exactitude d'une minute de temps trouver le commencement & la fin d'une éclipse , sans calculer les parallaxes ; j'ai parlé de l'auteur de cette invention , art. 1821.

On voit dans la *fig. 114* un demi-cercle d'environ 6-pouces de rayon , qui représente la projection de la terre dans l'orbe de la lune (1798) ; le rayon *CR* est divisé en autant de minutes qu'en contient la différence des parallaxes horizontales de la lune & du soleil , (1797) ; le diamètre *TR* est parallèle à l'équateur , *CS* est une portion du méridien universel ou du cercle de déclinaison qui passe par le soleil ou par l'étoile ; *CK* est la distance du centre de projection au centre de l'ellipse , trouvée ci-dessus (1832) ; *KF* est le demi-axe de l'ellipse (1841) , égal au cosinus de la latitude du lieu pour lequel on calcule une éclipse , par exemple , de Paris. La ligne *KV* ou *KQ* est la moitié du petit axe de l'ellipse , qui est au grand axe comme le sinus de la déclinaison de l'astre est au rayon (1828). Cette ellipse de la *fig. 114* représente le parallèle de Paris , ou la trace décrite sur le plan de projection par le rayon mené de Paris à une étoile dont la déclinaison est de 26 degrés.

Fig. 114

1849. La partie supérieure de l'ellipse est l'arc diurne , ou celui dont on doit faire usage quand la déclinaison du soleil est méridionale ; la partie inférieure

Fig. 114.

FQH, est celle qui sert pour les déclinaisons septentrionales (1845).

1850. On tirera le cercle de latitude *CL* ou l'axe de l'écliptique, qui est à la gauche ou à l'orient du méridien dans le second & troisième quart de longitude, ou dans les signes descendans; il est à la droite ou à l'occident dans les autres signes qui sont 9, 10, 11, 0, 1, 2, de longitude (1847).

1851. La latitude de la lune au moment de la conjonction étant prise sur les divisions de la ligne *CR*, qui sert d'échelle, & portée de *C* en *L* sur le cercle de latitude, le point *L* est celui où doit passer l'orbite de la lune, en lui donnant l'inclinaison convenable. On marquera au point *L* l'heure de la conjonction.

1852. Pour tracer l'orbite de la lune, on tirera au point *L* de la conjonction une ligne *LM* perpendiculaire au cercle de latitude; on prendra la quantité du mouvement horaire de la lune en longitude, moins celui du soleil, sur les divisions de *CR*, & l'on portera ce mouvement de *L* en *M*; on prendra aussi le mouvement horaire en latitude, on le portera de *M* en *N* parallèlement au cercle de latitude; au midi du point *M*, si la lune se rapproche du nord; au nord, si la lune s'approche du midi, c'est-à-dire, si la latitude est australe croissante ou boréale décroissante. Par les points *N* & *L*, on tirera l'orbite de la lune *INL*; on marquera au point *L* l'heure & la minute de la conjonction; on marquera en *N* une heure de moins; l'on divisera *NL* en 60 minutes de temps, & l'on portera les mêmes divisions à gauche du point *L*, pour avoir la situation de la lune de minutes en minutes une heure avant la conjonction, & une heure après. On prolongera même ces divisions plus loin, si cela paroît nécessaire.

1853. On marquera sur l'ellipse les heures du soleil ou de l'étoile qui répondent aux divisions qu'on a trouvées (1844); savoir, les 6 heures du matin à la droite, ou à la partie occidentale de la figure, & les

6 heures du soir à la partie orientale. Ces 12 heures se mettroient dans la partie supérieure de l'ellipse si le soleil ou l'étoile étoit dans les six derniers signes, ou dans les signes méridionaux (1845). Quand il s'agit d'une éclipse d'étoile, c'est l'heure du passage au méridien que l'on écrit sur le méridien, en *V* ou en *Q*. Ces règles seroient les mêmes, si l'observateur étoit dans l'hémisphère austral de la terre, avec cette seule différence que l'ellipse seroit au-dessous ou au midi du centre *C* de la projection.

1854. On prendra sur les divisions de *CR* la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune, ou le demi-diamètre seul de la lune, s'il s'agit d'une éclipse d'étoile. Le compas étant ouvert de cette quantité, on verra si le moment de la conjonction marqué en *L*, & la même minute de temps prise sur les divisions de l'ellipse, sont éloignés entre eux de cette quantité des demi-diamètres, dans ce cas le temps de la conjonction sera aussi le temps du commencement ou de la fin de l'éclipse; ce sera le commencement si le point trouvé sur le parallèle est à l'orient du point *L*; ce sera la fin de l'éclipse si le point de l'ellipse marqué de la même heure que le point *L*, est à l'occident ou à la droite du point *L*.

1855. Si cette distance des points correspondans sur l'ellipse & sur l'orbite de la lune n'est pas égale à la somme des demi-diamètres, on placera le compas à la droite ou à la gauche du point *L* sur l'orbite de la lune comme en *I*; on verra si le point *A* de l'ellipse marqué du même nombre d'heures & de minutes que le point *I* de l'orbite, est à la gauche de celui-ci de la quantité des demi-diamètres; s'il est trop éloigné, on rapprochera peu à peu la branche droite du compas, sans changer l'ouverture, jusqu'à ce que la branche gauche trouve un point *A* de l'ellipse marqué du même nombre de minutes que le point de l'orbite où est la branche droite.

1856. Quand on aura ainsi trouvé deux temps cor-

Commen-
cement de
l'éclipse.

respondans, l'un sur l'orbite, l'autre sur le parallèle, tels que I & A , marqués de la même heure & de la même minute, & éloignés de la quantité IA , de manière que le point I de l'orbite soit à la droite ou à l'occident du point A du parallèle, on fera sûr que ce moment est celui du commencement de l'éclipse; car on a vu que l'éclipse commence pour Paris, quand la distance entre le point de la projection ou Paris voit le soleil, c'est-à-dire, auquel Paris répond, & celui où se trouve la lune au même instant, est égale à la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune (1801).

La lune avance vers l'orient dans son orbite de I en E , & Paris avance sur son parallèle de A en B ; mais beaucoup plus lentement, puisqu'il faut 12 heures pour décrire la demi-ellipse du parallèle de Paris, tandis que la lune en 2 heures de temps ou environ fait dans son orbite un chemin aussi considérable: ainsi la lune arrivera de l'autre côté ou à l'orient de Paris, & se trouvera en E lorsque Paris ne sera arrivé qu'en B ; ils feront encore une fois à la même distance l'un de l'autre, c'est-à-dire, à une distance BE , égale à la somme des demi-diamètres de la lune & du soleil, la lune abandonnant le soleil; & quand on aura trouvé deux points B & E marqués de la même minute, on fera sûr d'avoir la fin de l'éclipse.

La plus courte distance.

1857. Le milieu de l'éclipse est à peu près le milieu de l'intervalle de temps écoulé entre le commencement & la fin: ainsi l'on cherchera la minute ou le point D qui tient le milieu entre ces momens marqués en I & en E , & la minute ou le point G qui tient aussi le milieu entre A & B . La distance de ces deux points D & G , dont l'un est sur l'orbite, l'autre sur le parallèle de Paris, donnera la plus courte distance des centres de la lune & du soleil, ou leur distance, dans le temps du milieu de l'éclipse. Cette distance étant portée avec le compas sur les divisions du rayon CR , se trouvera exprimée en minutes & en secondes de degré; car sur une échelle d'un pied de rayon, cha-

que

que minute occupe plus de deux lignes, & l'on y distingue facilement un intervalle de 5 à 6'' : ainsi l'on aura en minutes & en secondes la plus courte distance du centre de la lune au centre du soleil ou de l'étoile, au temps du milieu de l'éclipsé. Si le point *D* de l'orbite est au-dessous ou au midi du point *G* du parallèle, ce fera une preuve que la lune passe au midi de l'étoile.

Fig. 114.

On peut aussi trouver la plus courte distance des centres sans supposer que le milieu de l'éclipsé soit à égale distance du commencement & de la fin ; il n'y a qu'à mesurer plusieurs fois la distance de la lune à l'étoile, ou la distance des points correspondans marqués de la même minute sur l'orbite & sur l'ellipse, on verra cette distance diminuer peu à peu jusqu'à un certain terme, ou cette distance étant parvenue à son *minimum*, cesse de diminuer pour augmenter un moment après ; l'on aura par ce moyen, soit la plus courte distance, soit le temps où elle arrive, qui est le milieu de l'éclipsé.

1858. Pour éviter de diviser chaque fois le rayon *CR* de la projection, en autant de parties qu'en contient la parallaxe ; c'est-à-dire, tantôt en 54', tantôt en 61', sans compter les fractions de minutes, on forme une échelle *EF*, (fig. 115), dont les lignes sont plus longues que le rayon du cercle qu'on veut faire servir de projection, lorsque la parallaxe est plus petite ; & plus petites quand la parallaxe est plus grande : par exemple, si la parallaxe est de 54', c'est-à-dire, plus petite d'un sixième que le rayon de la projection qu'on suppose toujours de 60', il faut avoir une échelle où le compas puisse indiquer 54' au lieu de 60' ; car la même ouverture de compas qui valoit 10' quand la parallaxe étoit de 60', ne doit valoir que 9' quand cette parallaxe n'est que de 54' ; il faut donc avoir une échelle plus grande d'un sixième ; cette échelle, quoique divisée en 60 parties, n'en fera trouver que 54 quand on y portera le rayon de projection, parce qu'elle est plus grande que ce rayon, & que ses parties ont

Echelle des parallaxes.

Fig. 115.

Fig. 114. plus d'étendue. Aussi la ligne AB qui répond à $54'$ est plus longue que la ligne supérieure de l'échelle marquée 60 , autant que 60 est plus grand que 54 ; ainsi une portion quelconque de l'orbite ou une ouverture quelconque de compas qui vaudroit $10'$ sur la ligne de $60'$ ne vaudra que $9'$ sur la ligne de $54'$, dont les subdivisions sont plus allongées.

Pour faire sentir encore mieux la raison de ce procédé, supposons que la parallaxe étant de $54'$, la latitude soit de 27 minutes; il faut prendre la moitié du rayon de la figure, ou du cercle de projection pour avoir la latitude, mais ce rayon est divisé en $60'$ sur l'échelle, il en faudroit donc prendre 30 sur cette ligne; mais il revient au même d'en prendre 27 sur une ligne plus grande dans la même proportion, ou de $\frac{2}{3}$; les $27'$ de de cette échelle plus longue, en feront 30 sur le rayon de la figure; car $54 : 60 :: 27 : 30$, ainsi l'on aura une latitude qui se trouvera la moitié du rayon, comme elle doit l'être; il en est de même du mouvement horaire & des diamètres, qu'on prendra sur une échelle plus longue quand la parallaxe sera plus petite.

1859. Le demi-diamètre de la lune étant toujours les $\frac{3}{11}$ de la parallaxe (1717), on pourra tirer une ligne droite CD sur l'échelle, de manière qu'elle intercepte les $\frac{3}{11}$ de toutes les échelles de parallaxe, en comptant de la ligne marquée 10 , 10 ; on prendra facilement sur cette échelle le demi-diamètre de la lune qui est, par exemple, de $16\frac{2}{3}$ si la parallaxe est de $61'$; de $14\frac{2}{3}$ si elle est de $54'$, & ainsi des autres; on le prendra avec le compas sans avoir besoin d'en savoir la valeur; on néglige ici l'augmentation du diamètre de la lune qui a lieu à différens degrés de hauteur (1509).

Fig. 114

Quand on a la plus courte distance GD des centres du soleil & de la lune, & qu'on en veut conclure la grandeur de l'éclipse en doigts (1785), il faut porter cette distance sur le diamètre du soleil, divisé en 12 parties ou 12 doigts, & l'on y voit aisément la partie éclipsée du soleil.

1860. Lorsqu'il s'agit d'une éclipse d'étoile, on suit le même procédé que pour les éclipses de soleil, en observant, 1^o, que CL est la différence entre la latitude de la lune & celle de l'étoile; 2^o, que LN est le mouvement horaire de la lune seule, puisque l'étoile n'a aucun mouvement propre; 3^o, que sur les points V ou Q de l'ellipse on marque l'heure du passage au méridien, ou plus exactement, la différence entre son ascension droite & celle du soleil, convertie en temps, pour le temps de l'éclipse; 4^o, que l'on prend la distance IA égale au seul diamètre de la lune.

Eclipse d'étoile par la lune.

1861. EXEMPLE. Le 7 Avril 1749, Antarès fut en conjonction avec la lune à 2^h 22' du matin; la parallaxe de la lune étoit alors de $57\frac{1}{4}$, son mouvement horaire 33' 12" en longitude, & 1' 56" en latitude décroissante; la latitude au moment de la conjonction étoit de 3^o 45' 22", celle de l'étoile étoit de 4^o 32' 12"; ainsi la lune étoit au nord de l'étoile de 46' 50".

Je commence par tirer l'axe de l'écliptique ou le cercle de latitude CL au point qui convient à la longitude d'Antarès 8^s 6^o 16' (1046, 1846), je prends sur la ligne qui répond à 57' dans l'échelle des parallaxes, une quantité de 46' 50", & je la porte de C en L sur le cercle de latitude; au point L je tire la perpendiculaire LM .

Je prends sur la même ligne de l'échelle des parallaxes le mouvement horaire de la lune 33' $\frac{1}{7}$, & je le porte de L en M sur la perpendiculaire au cercle de latitude, je porte aussi 2' au-dessous du point M , parce que la lune s'avançoit de 2' par heure vers le nord, & le point N marque le lieu de la lune une heure avant la conjonction, ou à 1^h 22' du matin: ayant donc marqué en L le moment de la conjonction 2^h 22', je marque en N 1^h 22', & divisant l'intervalle LN en 60 parties; je marque la situation de la lune de 10 en 10', comme on le voit dans la figure depuis 0^h 50' jusqu'à 2^h 30'.

L'heure du passage d'Antarès au méridien de Paris est 3^h 11' (984), je la marque au sommet V de l'ellipse,

Fig. 114.

& je marque $2^h 11'$, $1^h 11'$, &c. sur les autres divisions de l'ellipse; je subdivise les intervalles de 10 en 10', du moins dans les heures où il paroît que l'éclipse peut arriver, c'est-à-dire, qui approchent de l'heure de la conjonction.

Immersion.

Je prends sur l'échelle le demi-diamètre de la lune, depuis la ligne 10, 10, jusqu'à la ligne CD , & cela sur la ligne de $57'$; cette ouverture de compas étant promenée sur l'orbite de la lune & sur l'ellipse, je vois qu'une des pointes étant en I sur $1^h 1'$, l'autre pointe tombe en A sur l'ellipse, & y rencontre aussi $1^h 1'$: ainsi la lune étant en I à $1^h 1'$, & la projection de Paris, ou le lieu apparent de l'étoile en A , il doit se faire une éclipse, la distance de la lune à l'étoile étant précisément égale au demi-diamètre de la lune, ce qui suppose un contact de l'étoile au bord de la lune.

Émerison.

Je promène la même ouverture de compas de l'autre côté en avançant vers l'orient, & je trouve qu'une des pointes étant en E sur $2^h 11'$, l'autre pointe tombe aussi à $2^h 11'$ sur l'ellipse en B , c'est le moment de l'émerison; la lune a donc parcouru la portion IE de son orbite, depuis le moment de l'immersion jusqu'à celui de l'émerison, & le lieu apparent de l'étoile a changé de la quantité AB . C'est vers le milieu de cet intervalle, la lune étant en D & l'étoile en G , qu'est arrivée la plus courte distance; on s'en assurera en mesurant la distance de minute en minute; car l'on verra qu'aux environs de $1^h 36'$ elle cesse de diminuer, après quoi elle augmente; cette plus courte distance DG étant portée sur la ligne 57 de l'échelle des parallaxes, se trouvera de $6'$, ce qui m'apprend que le centre de la lune a passé $6'$ au midi de l'étoile, vers le temps de la conjonction apparente.

La plus courte distance.

Change-ment pour différentes latitudes.

1862. Les opérations que je viens de décrire, supposent que la figure 114 est dressée pour Paris; s'il étoit question de toute autre latitude la distance CK du centre de la projection au centre de l'ellipse, seroit différente. Car cette distance augmente quand la latitude ou la hauteur

du pôle devient plus grande (1832) ; cependant une seule ellipse étant donnée, & son ouverture conforme à la déclinaison du soleil ou de l'étoile dont il s'agit, on peut la faire servir pour toutes les latitudes géographiques, en plaçant le centre C de la projection à différentes distances du centre K de l'ellipse. En effet, dès que l'ellipse est tracée de l'ouverture convenable, c'est-à-dire, que son grand axe est au petit comme le rayon est au sinus de la déclinaison de l'astre, elle peut servir pour exprimer toutes sortes de parallèles, ou de cercles qui sont vus sous une même obliquité & qui forment tous des ellipses semblables ; il ne s'agit plus que de proportionner le reste de la figure, c'est-à-dire, la distance du centre de projection & le rayon du globe ou de sa projection, de façon que l'ellipse y occupe la place du parallèle terrestre qu'il s'agit de représenter : or, voici la manière de le faire. La distance CK est égale à $\text{cof. décl.} \sin. \text{latit.}$ (1832), en supposant que CR est le rayon : si l'on veut prendre pour rayon, ou pour échelle le demi-diamètre du parallèle, ou le cosinus de la latitude, il faudra encore faire cette proportion : le cosinus de la latitude est à l'unité, comme la valeur de CK est à sa valeur en parties du parallèle, qui sera par conséquent $\frac{\sin. \text{lat.}}{\text{cof. lat.}} \text{cof. décl.}$; mais $\frac{\sin.}{\text{cof.}} = \text{tang.}$; donc

$CK = \text{tang. lat. cof. décl.}$. Ainsi la distance du centre de la projection au centre du parallèle ou de l'ellipse, est égale à la tangente de la latitude, multipliée par le cosinus de la déclinaison de l'astre, en prenant pour unité le demi-diamètre du parallèle, ou le demi-axe KF de l'ellipse.

Distance des deux centres.

1863. EXEMPLE. Dans le passage de Vénus de 1761, la déclinaison du soleil étoit de $22^{\circ} 42'$; je suppose qu'on ait décrit l'ellipse qui convient à cette déclinaison, c'est-à-dire, une ellipse dont le grand axe est au petit, comme l'unité est au sinus de $22^{\circ} 42'$, & qu'on veuille faire servir cette ellipse pour la latitude de 10° , on ajoutera le logarithme de la tangente de 10° avec celui du cosinus de $22^{\circ} 42'$, la somme étant cherchée

dans les nombres naturels, on trouve 0,163 pour la distance qu'il y a entre le centre de l'ellipse & le centre du cercle qui doit servir de projection, en supposant que le demi-axe de l'ellipse est l'unité, ou 163, en supposant ce demi-axe divisé en 1000 parties. On trouvera de même la distance qui convient aux autres latitudes de 10 en 10°. pour la même déclinaison de 22° 42'.

Rayon de projection.

Fig. 112.

1864. On doit chercher aussi la longueur du rayon de projection pour la latitude donnée; mais il est évident que ce n'est autre chose que la sécante de la latitude du lieu, en prenant pour rayon le demi-diamètre du parallèle: car si DL , (fig. 112), étoit pris pour rayon d'un cercle décrit du centre L , la ligne menée de C en L feroit la sécante de l'angle CLD égal à l'arc LB , qui est la latitude du lieu; ainsi l'on cherchera dans les tables ordinaires les sécantes de chaque latitude, & divisant le rayon DL de l'ellipse en 1000 parties, on prendra sur ces divisions la grandeur du rayon de chaque projection, par exemple, 2000 pour 60° de latitude; & l'on aura la longueur du rayon avec lequel il faut décrire le cercle de projection, en partant du centre qu'on a trouvé (1863): c'est ce rayon de projection qu'il faut diviser en autant de parties qu'en contient la différence des parallaxes; ainsi l'échelle des parallaxes (fig. 115), doit être augmentée dans la proportion des sécantes des latitudes, par ce moyen la même ellipse servira pour différens pays, en employant différentes échelles, (2075).

Fig. 115.

Fig. 114.

1865. La table suivante contient la valeur de la distance des centres CK (fig. 114) pour différentes latitudes & différentes déclinaisons; c'est par le moyen de cette table que j'ai marqué dans la fig. 114, aux environs du centre K , les points où doit être le centre de l'ellipse pour Paris, à différentes déclinaisons; on voit que le centre de l'ellipse qui sert pour 28° de déclinaison, est plus près du centre C de la projection d'environ six lignes, que le centre de l'ellipse qui répond à zéro, ou plutôt de la ligne droite qui en tient

Trouver les phases d'une Eclipsé. 487

lieu quand la déclinaison est nulle. Cette même table servira pour marquer dans la Planche XV, à l'occasion du passage de Vénus, le rayon de la projection pour différentes latitudes (2077).

DISTANCE du centre de la Projection au centre de l'Ellipse, pour différentes latitudes & différentes déclinaisons, en supposant le demi-axe de 1000; avec le rayon de Projection, pour chaque latitude.

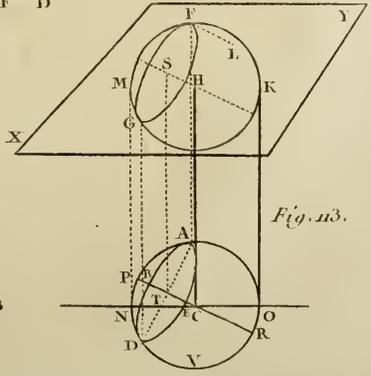
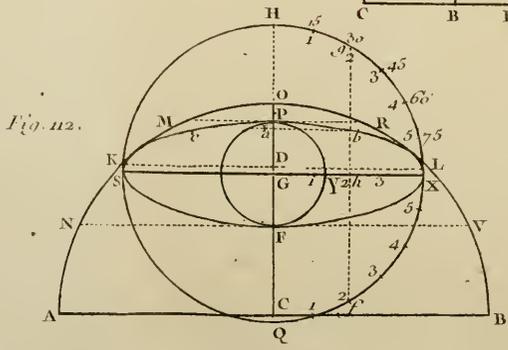
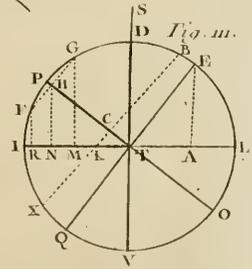
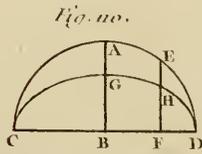
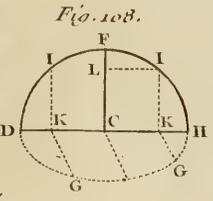
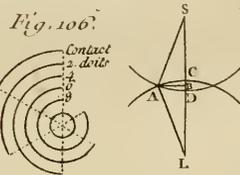
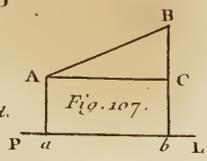
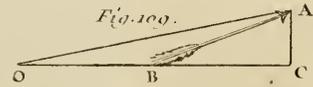
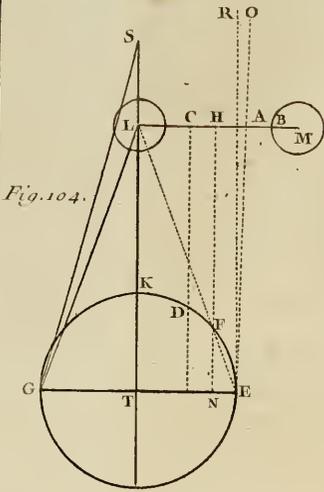
Degrés de Latit.	DEGRÉS DE DÉCLINAISON.												Rayon de projec.
	0	3	6	9	12	15	18	21	22 42	24	27	30	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1000
5	87	87	87	86	86	84	83	82	81	80	78	76	1004
10	176	176	175	174	172	170	168	165	163	161	157	153	1015
15	268	268	260	265	262	259	255	250	247	245	239	232	1035
20	364	363	362	359	356	352	346	340	336	332	324	315	1064
25	466	466	460	461	456	450	443	435	430	426	415	404	1103
30	577	577	574	570	565	558	549	539	533	527	514	500	1155
35	700	699	696	692	685	676	666	654	646	640	624	606	1221
40	839	838	834	828	821	810	798	783	774	767	748	727	1305
45	1000	999	994	988	978	966	951	934	923	913	891	866	1414
48 ⁵ / ₅	1143	1142	1137	1130	1119	1105	1088	1068	1055	1045	1019	990	1519
50	1192	1190	1185	1177	1166	1151	1133	1113	1099	1089	1062	1032	1556
55	1428	1426	1420	1411	1397	1379	1358	1333	1318	1305	1272	1237	1743
60	1732	1730	1723	1711	1694	1673	1647	1617	1598	1582	1543	1500	2000
65	2144	2142	2133	2118	2098	2071	2040	2002	1978	1959	1911	1857	2366
70	2747	2744	2732	2714	2687	2654	2613	2565	2535	2510	2448	2379	2924

1866. Par le moyen de cette table on peut faire servir une seule ellipse pour tous les pays du monde, au lieu que suivant le procédé de l'article 1839, on décrirait sur le même cercle de projection une ellipse pour chaque latitude. Les positions & les grandeurs de ces ellipses seroient différentes, comme on le voit dans la Planche XIII; mais leur ellipticité, leur figure, le rapport de leurs axes seroit le même, parce qu'il ne dépend que de la déclinaison du soleil, (1827);

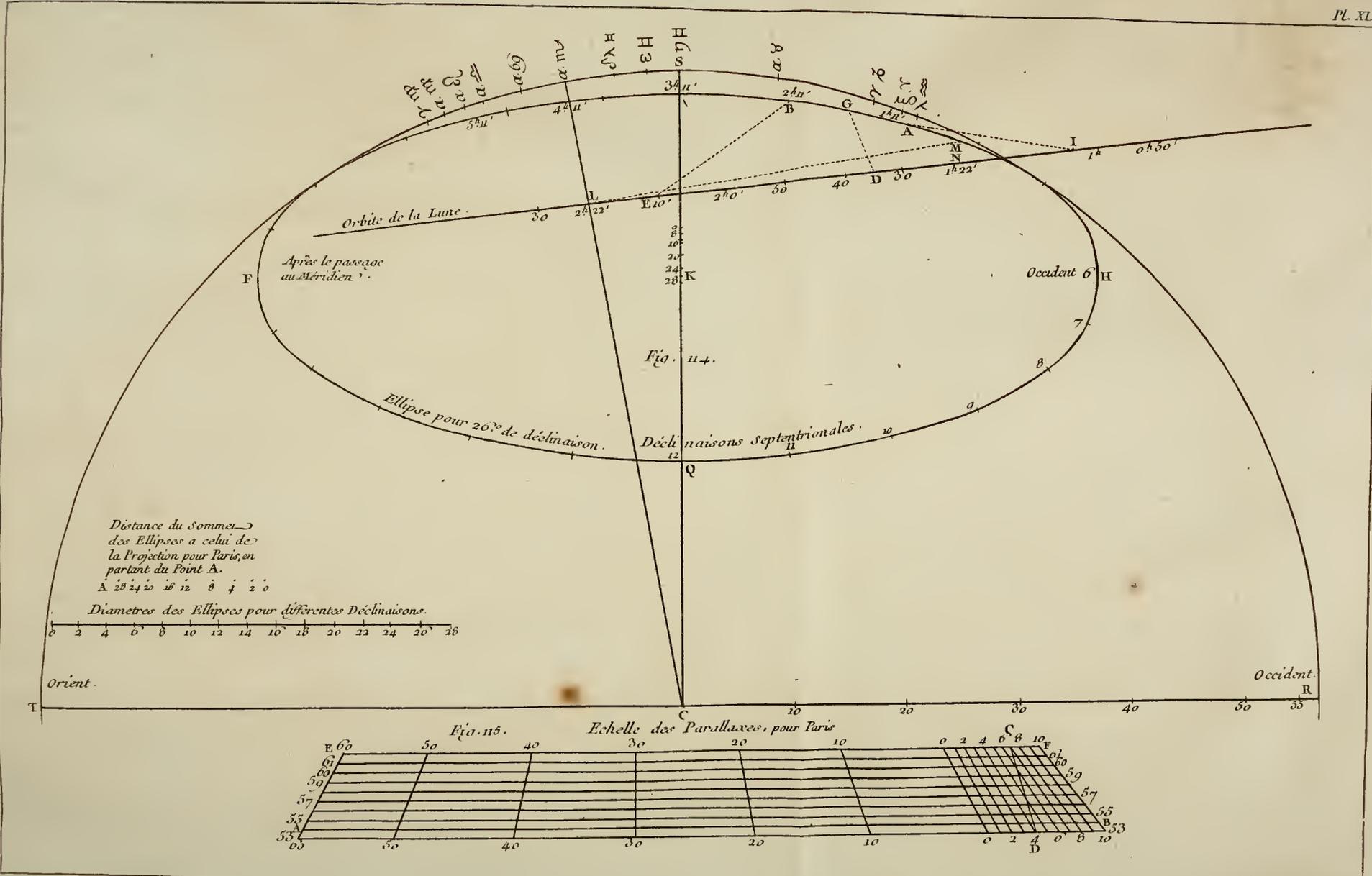
& comme les ellipses sont difficiles à décrire, il est souvent plus commode en calculant pour plusieurs lieux, de conserver l'ellipse, & de changer le centre du cercle de projection aussi bien que la grandeur du rayon : on en verra une application importante à l'occasion du passage de Vénus, où cette méthode s'emploie avec succès (2076). On trouvera aussi des tables détaillées, & propres à tracer ces sortes de figures pour tous les pays, calculées par le P. Pilgram, d'après sa méthode, dans le livre intitulé : *Ephemerides astronomicae, anni 1769, ad meridianum Vindobonensem, Viennæ*, 1769.

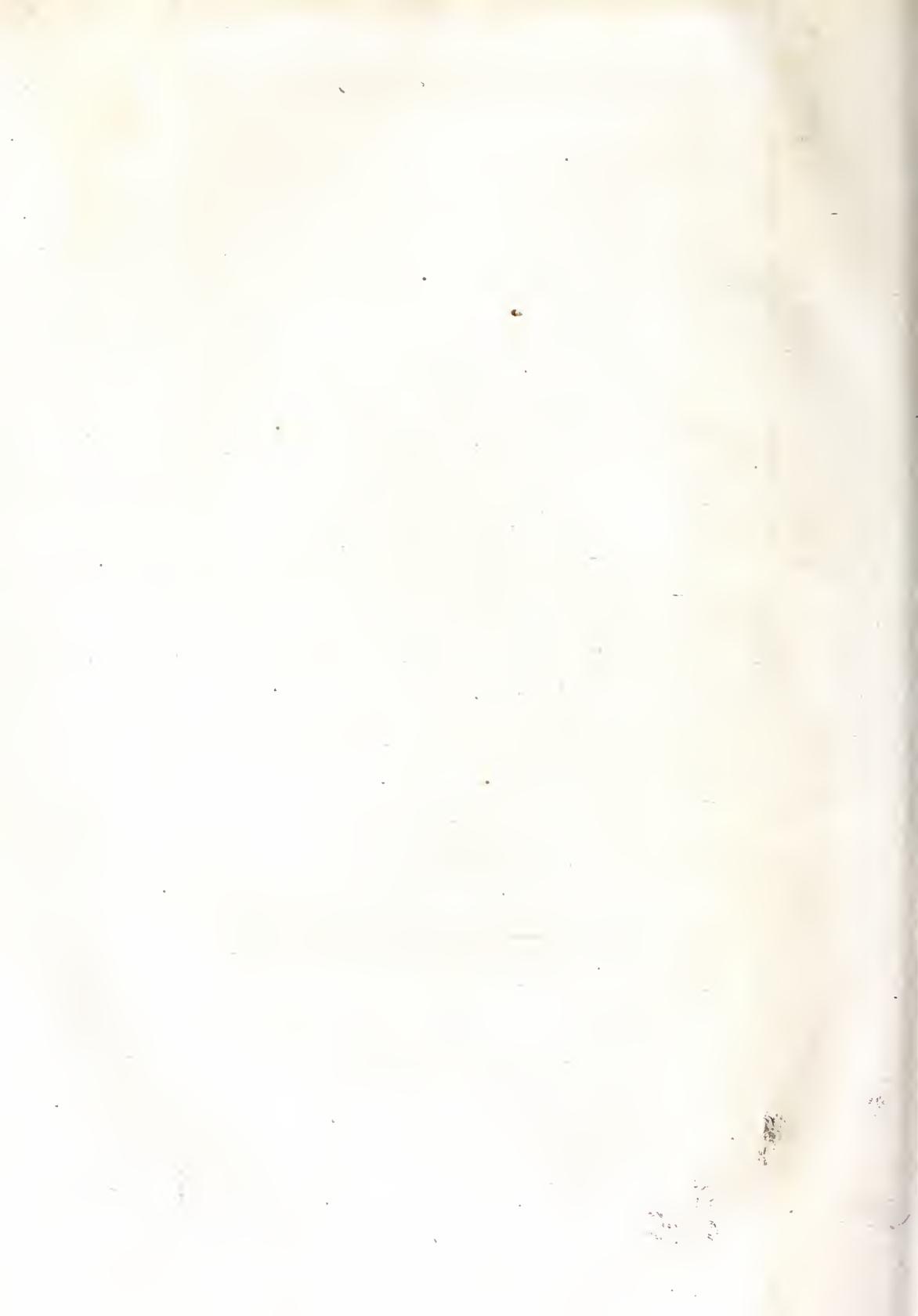
1867. L'augmentation du diamètre de la lune à diverses hauteurs (1509), doit entrer dans cette opération d'une façon particulière : c'est au diamètre du soleil qu'il convient de l'appliquer, si l'on vouloit porter la précision jusques-là. Supposons Paris au point F (fig. 104), en sorte qu'il voie le centre du soleil au point H de la projection, la lune étant en L ; si la distance HL ou l'angle HFL compris entre les centres du soleil & de la lune égale la somme des demi-diamètres, ce sera la fin de l'éclipse; mais ce sont les demi-diamètres vus du point F , & non pas vus du point N , ou vus du centre de la terre qu'il faut prendre; la différence est nulle pour le soleil, mais elle est sensible pour la lune, & va jusqu'à $18''$ ou une demi-minute de temps. Mais si le demi-diamètre de la lune paroît plus grand; l'arc total de la projection HL paroît plus grand aussi; dans la même proportion, & si le diamètre du soleil étoit augmenté de même, il ne seroit plus nécessaire d'avoir égard à l'augmentation de HL , tout resteroit proportionnel, la projection, les diamètres & le mouvement horaire. Alors les phases de l'éclipse seroient les mêmes vues du point F , ou vues du point N ; il vaut donc mieux appliquer l'augmentation au diamètre du soleil, qu'au diamètre de la lune, afin de n'avoir rien à changer dans les autres parties de la figure & du calcul.

En









En effet, supposons pour rendre les choses très-sensibles, & les calculs très-simples que le point *K* où est l'observateur, soit à la moitié de *TL* ou de la distance de la lune, que le rayon de projection *LA* au lieu d'être d'un degré paroisse de deux degrés; que le mouvement horaire vu du point *K* ait également doublé & soit d'un degré, & le diamètre de la lune d'un degré; si le diamètre du soleil étoit aussi doublé & qu'il parût d'un degré, la distance des centres *CL* commencement de l'éclipse seroit de 1° , & ce commencement paroîtroit arriver une heure avant que la lune fût au point *L*, ou se fait la conjonction; & il en seroit tout de même pour le centre *T* de la terre, où les quantités précédentes paroîtroient moindres de moitié; mais si le demi-diamètre du soleil ne participe pas à cette augmentation vue du point *K*, il faudra pour réduire tout à ce qu'on auroit vu du centre de la terre augmenter le demi-diamètre du soleil. Si c'est une étoile dont on calcule l'éclipse, il n'y aura point de correction à faire pour la hauteur de la lune au-dessus de l'horizon.

Fig. 104.

*Méthodes pour calculer rigoureusement les éclipses
sujettes aux parallaxes.*

1868. Nous avons expliqué assez au long la manière de trouver par une opération graphique le commencement & la fin d'une éclipse de soleil ou d'étoile. Nous allons passer à l'explication des méthodes rigoureuses où l'on employe le calcul, pour trouver jusqu'à la précision des secondes les résultats qu'on ne pouvoit trouver qu'à une minute près par le moyen de l'opération graphique; & nous expliquerons quatre méthodes différentes.

Lorsqu'on ne veut calculer une éclipse de soleil que pour la prédire dans les éphémérides, la méthode graphique (1848) est suffisante; on auroit tort, ce me

semble, de mettre beaucoup de temps à les calculer en secondes, avec une précision à laquelle les tables ne répondent pas, puisque l'erreur des tables de la lune, qui va quelquefois à une minute, entraîne deux minutes d'incertitude sur le temps du commencement & de la fin d'une éclipse.

Mais lorsqu'on a quelque raison particulière de se préparer à une observation, lorsqu'on a observé une éclipse de soleil ou d'étoile, & qu'on veut l'employer à trouver le lieu de la lune, le temps de la conjonction & l'erreur des tables; c'est alors qu'on doit faire avec la dernière précision le calcul de l'éclipse, & qu'on peut en chercher le commencement & la fin par les méthodes exactes que nous allons expliquer.

Quatre méthodes différentes.

Il y a quatre méthodes employées pour cet effet par les astronomes; celle des projections, employée par M. de la Hire, & par M. Cassini; celle du nonagésime & des parallaxes de longitude, employée par M. de la Caille, dans ses Leçons d'astronomie; celle des angles parallactiques & des parallaxes de hauteur, que je préfère, comme étant la plus courte & la plus exacte, au moyen de la forme que je lui ai donnée, (1881); enfin la méthode analytique donnée dans les mémoires de l'académie par M. du Séjour.

Nécessités des Figures.

1869. Je commencerai par avertir le Lecteur, qu'en entreprenant le calcul exact d'une éclipse, il est utile & même nécessaire de former une figure, où l'on marque à peu-près avec la règle & le compas les angles que l'on aura trouvés par le calcul, & les lignes que l'on aura déterminées, suivant leur position & leur grandeur. Sans ce secours, il est aisé de se tromper, en ajoutant quelquefois ce qui doit être soustrait; d'ailleurs cette précaution dont je supposerai qu'on fasse usage, épargnera beaucoup de détails sur les règles & sur les exceptions qui ont lieu dans différens cas pour la position de la lune, par rapport au vertical, au cercle de déclinaison, au cercle de latitude, & à la perpendiculaire sur l'orbite.

MÉTHODE DES PROJECTIONS.

1870. PARMi les différentes manières de calculer la projection, je choisirai celle de M. Cassini, comme étant la plus simple, & je prendrai pour exemple l'éclipse de soleil du 28 Février 1710, employée dans les tables astronomiques de M. Cassini, pag. 53; mais dont cet auteur n'a donné que l'opération graphique, & j'y appliquerai le calcul trigonométrique. Je suppose le temps de la conjonction au 28 Février 1710, $0^h 18'$ après midi, la déclinaison du soleil $7^\circ 59' 42''$, la latitude de la lune en conjonction $46' 31''$, l'inclinaison de l'orbite relative $5^\circ 42' 26''$ (1765), le mouvement horaire relatif $27' 10''$, le milieu de l'éclipse générale en T (fig. 116) à $12^h 7' 47''$, la distance perpendiculaire CT (1808) de $46' 17''$, l'angle de position $22^\circ 9' 27''$, qui ajouté avec l'inclinaison donne l'angle ACT de $27^\circ 51' 53''$; la différence des parallaxes horizontales, ou le rayon de la projection $54' 28''$; le demi-grand axe DK ou le cosinus de la latitude de Paris, $35' 51''$, le demi-petit axe $4' 59'' 5$, & la distance CD du centre de la projection à celui de l'ellipse = $40' 36'' 5$. Soit O le lieu de Paris sur son parallèle KOA à $11^h 43' 30''$, L le lieu de la lune sur son orbite LT , on demande la distance apparente des centres de la lune & du soleil, ou la valeur de la ligne OL , pour ce moment-là, c'est-à-dire, $34' 30''$ avant la conjonction, ou $24' 17''$ avant le milieu de l'éclipse générale; c'est le temps du commencement de l'éclipse trouvé par l'opération graphique, (M. Cassini, tab. astron. pag. 55).

Méthode
pour calculer
la projection.

Fig. 116.

1871. Puisque le mouvement de la lune est de $27' 10''$ en une heure, il fera de $10' 59'' 7$ en $24' 17''$ de temps, & l'on aura la portion de l'orbite lunaire $TL = 10' 59'' 7$; on dira CT est à TL , comme le rayon est à la tangente de l'angle TCL qu'on trouvera de $13^\circ 21' 45''$, ensuite $\sin. TCL :: TL : R : CL$, qui fera de $2854'' 5$ ou $47' 34'' 5$.

Fig. 116.

Pour trouver l'angle OCA , l'on considérera que la distance depuis l'heure donnée $11^h 43' 30''$ jusqu'à midi est de $16' \frac{1}{2}$, ce qui répond à $4^\circ 7' 30''$; le demi-grand axe de l'ellipse multiplié par le sinus de $4^\circ 7' \frac{1}{2}$, donnera $OB = 154'' 7$, & le demi-petit axe multiplié par le cosinus de $4^\circ 7' \frac{1}{2}$, donnera $DB = 298'' 7$, (1843); DB étant ajouté avec $CD = \sin. \text{latit. cof. déclin.}$ (1832) = $2436'' 5$, donnera $CB = 2735'' 2$.

Dans le triangle BCO rectangle en B , dont on connoît les deux côtés CB & BO , l'on trouvera l'angle $OCB = 3^\circ 14' 16'' 6$, & l'hypothénuse $CO = 45' 39'' 6$. On prendra la différence de l'angle OCB & de l'angle ACT , qui est lui-même la somme, quelquefois la différence de l'angle de position $22^\circ 9' 27''$, & de l'angle d'inclinaison $5^\circ 42' 26''$, (1934); cette différence donnera l'angle $OCT = 24^\circ 37' 36'' 4$, la somme de l'angle OCT & de l'angle LCT , trouvé ci-dessus de $13^\circ 21' 45''$ (1871), fera l'angle $OCL = 37^\circ 59' 21'' 4$. On connoîtra aisément les cas où il faut prendre la somme ou la différence, en examinant la situation respective des points L , O & T .

1872. Dans le triangle OCL , on connoît les deux côtés OC , CL & l'angle compris OCL ; il ne restera plus qu'à chercher le côté OL , qui est la distance apparente des centres, en faisant la somme des côtés OC , CL qui est $93' 14'' 1$ est à leur différence $1' 54'' 9$, comme la tangente de la demi-somme des angles inconnus, $71^\circ 0' 19'' 3$, est à la tangente de leur demi-différence $3^\circ 24' 53''$; ainsi l'angle O fera de $74^\circ 25' 12'' 3$, d'où l'on conclura enfin le côté OL de $30' 24''$: c'est la distance apparente des centres du soleil & de la lune à $11^h 43' 30''$.

Distance
apparente des
centres.

1873. Le moment pour lequel on a calculé seroit le moment même du vrai commencement de l'éclipse, si l'on eût trouvé la distance apparente égale à la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune; mais le demi-diamètre du soleil étoit de $16' 12''$, celui de la lune à l'horizon $14' 46''$; & comme la lune avoit 33°

de hauteur, il y a 9'' pour l'augmentation du demi-diamètre, ainsi la somme étoit 31' 7'', & la distance apparente des centres est plus petite de 43'' que la somme des demi-diamètres du soleil & de la ☾; cela prouve que l'éclipse étoit déjà commencée; on fera un semblable calcul de la distance apparente pour 11^h 40', & l'on trouvera 63'' de plus pour la distance des centres: ainsi en 3' $\frac{1}{2}$ de temps la distance apparente changeoit de 63'', donc elle change de 43'' en 2' 23''; on ôtera cette quantité de l'heure du premier calcul 11^h 43' 30'', & l'on aura 11^h 41' 7'' pour le commencement de l'éclipse. On pourroit tracer, par le moyen de deux calculs semblables, l'orbite apparente de la lune, pour trouver les autres phases de l'éclipse; c'est ce que j'expliquerai dans la méthode suivante (1879).

Si l'on veut avoir égard à l'inflexion des rayons (1992), il faudra ôter 4'' $\frac{1}{2}$ de la somme des demi-diamètres apparens, ou de 31' 7'', avant que de la comparer avec la distance apparente calculée, parce que l'inflexion fait paroître le commencement de l'éclipse plus tard, & la fin plutôt qu'on ne les observeroit si ces phases ne dépendoient que de la somme des demi-diamètres apparens.

Inflexion.

1874. Cette méthode des projections suppose implicitement que la hauteur de la lune soit égale à celle du soleil, ou que la parallaxe de la lune soit proportionnelle au cosinus de la hauteur du soleil; en effet, si le point *Y* est le vrai lieu de la lune sur son orbite, *O* la projection de Paris ou le lieu du soleil vu de Paris, *C* le vrai lieu du soleil vu du centre de la terre, *CY* est la vraie distance des centres du soleil & de la lune, *YO* la distance apparente (1800), & *CO* la parallaxe de hauteur (1834), cependant le point *O* ne dépend que du lieu du soleil, & nullement de la situation de la lune en *Y* ou en *L*, ainsi cette parallaxe ne dépend que de la hauteur du soleil.

Si un point *K* de la terre (*fig.* 104) qui voit le soleil *S* à son zénit voyoit le bord de la lune au point

Fig. 104.

L, c'est-à-dire, également au zénit, la parallaxe seroit nulle en suivant les règles de la projection, mais dans le vrai, le centre de la lune en supposant son demi-diamètre de 15' seroit à 15' du zénit, & la parallaxe de son centre seroit véritablement de $14''\frac{1}{2}$, quoiqu'elle paroisse nulle dans la figure, & que le lieu de la terre pour lequel on calcule soit au centre même de la projection.

On y remédieroit dans ce cas-là, en augmentant la distance apparente des centres donnée par la projection, à raison de la hauteur de la lune sur l'horizon, par le moyen de la table qui sert pour les diamètres de la lune; en effet, l'augmentation du demi-diamètre de la lune, quand il paroît au zénit est de 15''; c'est la différence entre la parallaxe du bord & la parallaxe du centre (1510), où la quantité dont la distance du centre de la lune au centre du soleil vue de la surface *K* est plus grande que celle qu'on voit du centre *T* de la terre; cette augmentation est proportionnelle à la distance apparente, elle est de 29'' pour 30'; ainsi elle serviroit à corriger la distance trouvée par la méthode des projections dans le cas où les deux centres seroient dans le même vertical.

1875. *M.* de la Caille, dans les Mémoires de l'Académie pour 1744, pag. 202 & suiv. fait voir de quelle manière on pourroit calculer rigoureusement une éclipse par le moyen des projections; c'est-à-dire, corriger la méthode précédente; mais celle de *M.* de la Caille m'a paru plus longue, sans être aussi exacte que celle qui sera détaillée ci-après (1881). D'ailleurs *M.* du Séjour a traité la projection de la manière la plus exacte dans la méthode analytique, dont on verra bientôt la formule (1923).

Calcul d'une Éclipse par le Nonagésime.

1876. LE NONAGÉSIME (1660), fournit une seconde méthode pour le calcul d'une éclipse; mais dans cette méthode, il faut, pour avoir la distance apparente des

centres, chercher la différence apparente de longitude & de latitude, entre la lune & le soleil. Je suppose donc que pour un instant donné, l'on veuille trouver la distance apparente des centres; il faut avoir pour cet instant la parallaxe de longitude & celle de latitude 1665 & suiv.

Si la lune est à l'orient du nonagésime (1676), il faut ajouter la parallaxe de longitude avec la longitude vraie, pour avoir la longitude apparente de la lune. Mais si la longitude de la lune est occidentale, c'est-à-dire, plus petite que celle du nonagésime, pourvu que la différence ne soit pas de 180° , il faut retrancher la parallaxe.

La somme ou la différence de 90° , & de la latitude vraie de la lune, suivant qu'elle est australe ou boréale est la distance au pôle boréal de l'écliptique; on ajoute la parallaxe en latitude à la distance vraie de la lune au pôle de l'écliptique pour avoir sa distance apparente au pôle; ayant fait le même calcul pour deux instans, on verra si la lune se rapproche ou s'éloigne de l'écliptique.

1877. On prendra la différence entre la longitude du soleil & la longitude apparente de la lune pour avoir la différence apparente en longitude. Soit DE (fig. 121) une portion de l'écliptique, S le lieu du soleil au moment pour lequel on calcule, L le lieu apparent de la lune, EL sa latitude apparente, SE sa différence apparente de longitude avec le soleil: dans le triangle SEL , rectangle en E , l'on connoîtra deux côtés SE & EL ; on cherchera l'hypothénuse SL , qui est la distance apparente des centres du soleil & de la lune. Pour cela, on ajoutera les carrés des deux côtés, & l'on cherchera la racine de la somme; ou bien on fera les deux proportions suivantes $SE : EL :: R : \text{tang. } ESL$, & $\sin. ESL : R :: EL : SL$, distance apparente des centres.

Trouver la distance apparente.

Fig. 121.

EXEMPLE. Le 1 Avril 1764 à $9^h 10'$ du matin à Paris, où la latitude est de $48^\circ 50'$, on demande la

Fig. 94. distance apparente de la lune au soleil. Supposons la différence de longitude vraie entre la lune & le soleil, suivant les tables, de $37' 11''$ & la latitude de la lune $36' 21''$ boréale, sa déclinaison $4^\circ 48'$, le lieu du soleil $0^\circ 11' 29' 25''$, l'ascension droite du milieu du ciel $21^\circ 54' 32''$; la longitude du nonagésime $11^\circ 28' 31' 55''$; la hauteur du nonagésime $34^\circ 12' 30''$, la différence des parallaxes horizontales à Paris $54' 0''$; on trouve pour la parallaxe réduite au point *K* (fig. 94) $54' 20'' 8$, la parallaxe de longitude (1665) $6' 55'' 8$; la correction de l'applatiffement, en supposant l'angle de la verticale & du rayon de la terre $19'$, est $\frac{54'.0''. \sin. 19' \sin. 23^\circ \cos. 11^\circ 29'}{\cos. 48^\circ 50'. \cos. 0^\circ 36'} = 10'' 6$ (1700), la parallaxe exacte $7' 6'' 4$ & la distance à la conjonction apparente $30' 4'' 6$.

La 1^{re} partie de la parall. en latitude (1668) = $44' 57''$: la seconde partie (1670) + $4''$, la correction de l'applatiffement (1698) $\frac{54'.0''. \sin. 19' (\cos. 23^\circ - \sin. 4^\circ 48' \text{ tang. } 0^\circ 36')}{\cos. 48^\circ 50' (\cos. 0^\circ 36' - \sin. 4^\circ 48' \text{ tang. } 0^\circ 36')} = 25''$, enforte que la parallaxe entiere de latitude est $44' 36''$; la latitude vraie étant $36' 21''$ la latitude apparente est $8' 15''$. Connoissant les deux côtés *EL*, *SE* (fig. 121), dont l'un est de $8' 15''$, & l'autre de $30' 5''$; on trouvera l'hypothénuse ou la distance apparente *SL* des centres du soleil & de la lune $31' 12''$, la même que par la nouvelle méthode (1918).

Fig. 121. Si l'on veut comparer cette distance avec la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune, il faudra y ajouter $4'' \frac{1}{2}$ à cause de l'inflexion des rayons (1992), qui fait paroître trop grandes toutes les distances de la lune au soleil ou aux étoiles, & l'on aura $31' 16'' \frac{1}{2}$ distance apparente qui, pour le temps du commencement de l'éclipse, doit être égale à la somme des demi-diamètres.

Exception pour les étoiles. I 878. S'il s'agit d'une éclipse d'étoile par la lune, ou d'une autre éclipse dans laquelle la lune ait une latitude sensible, il faudra avoir soin de multiplier la différence de longitude *HI* par le cosinus de la latitude apparente

apparente IL , pour avoir cette différence SE en arc de grand cercle dans l'endroit où se trouve la lune, qui est la quantité dont nous avons fait usage.

1879. On fera le même calcul une heure après, & l'on aura une autre distance apparente SF (fig. 121) de la lune au soleil, & l'angle DSF , par le moyen de la différence de longitude apparente SD , & de la latitude apparente FD (1877). On connoîtra aussi par ce moyen le mouvement apparent en longitude relativement au soleil, ED ou AF , & le mouvement apparent en latitude AL . Connoissant FA & LA on calculera l'angle AFL , qui est l'inclinaison du mouvement apparent, & la ligne LF , qui est le mouvement de la lune relativement au soleil, sur l'orbite apparente ou affectée par la parallaxe. Cet angle AFL peut être de plus de 20 degrés dans certains cas, comme quand la lune est dans son nœud descendant, & que le nonagésime à 0^s de longitude; car alors le changement de la parallaxe porte la lune du même côté que l'inclinaison de son orbite; ce qui augmente l'inclinaison apparente. On aura donc l'angle SLF , égal à la somme des angles ESL , AFL ; quelquefois c'est leur différence; on en conclura la perpendiculaire SB , qui est la plus courte distance apparente de la lune au soleil; & le temps où la lune a été en B , c'est le milieu de l'éclipse; en supposant que l'orbite apparente est rectiligne pendant une heure de temps; ce qui est sensiblement vrai, cette perpendiculaire donnera la grandeur de l'éclipse de soleil.

Fig. 121.

Orbite apparente de la lune.

On supposera SL égal à la somme des demi-diamètres apparens du soleil & de la lune; connoissant SL & SB , on cherchera la ligne BL , on la convertira en temps, à raison du mouvement sur l'orbite apparente trouvé ci-dessus, & l'on saura combien la lune a employé de temps à aller de B en L . Or l'on connoît le temps du milieu de l'éclipse en B , donc on connoîtra le moment de la fin en F , & celui du commencement en L . (Kepler *Epit. astr.* p. 888).

Il faut bien distinguer cette orbite apparente affectée par la parallaxe, & que nous venons de déterminer, de

L'orbite relative (1765), qui peut être représentée ici par une autre ligne MN ; nous n'en parlerons point dans le cas actuel. On se rappelle que dans l'orbite relative il s'agit du mouvement vrai de la lune, vu du centre de la terre par rapport au soleil supposé fixe en S ; on le détermine par le moyen des latitudes vraies EM , DN , qui peuvent aller d'un autre sens & être d'une autre dénomination que les latitudes apparentes EL , DF .

1880. Quand on voudra connoître avec une grande précision la grandeur de l'éclipse, il faudra calculer deux autres distances apparentes, comme nous avons calculé SF & SL , mais plus voisines du milieu B de l'éclipse, & se servir de ces nouvelles distances pour trouver la perpendiculaire SB . Mais si l'orbite apparente FL n'est pas parfaitement rectiligne, comme nous l'avons supposé pendant la durée d'une éclipse, la différence ne va jamais qu'à peu de chose : dans l'éclipse de 1748, je n'ai trouvé que $3''$ de courbure en $40'$ de temps, par un calcul rigoureux. La plus courte distance SB , fait connoître la grandeur de l'éclipse, à peu près comme dans les éclipses de lune (1785); *car la somme des diamètres appareus de la lune & du soleil, moins la plus courte distance apparente des centres, donne la grandeur de l'éclipse*. Cette manière de déterminer les phases par le moyen de l'orbite apparente, est beaucoup plus facile que celle des interpolations indiquée par M. de la Caille dans ses leçons d'astronomie, art. 1140.

Règle pour
la grandeur de
l'éclipse.

Le diamètre apparent de la lune exige que l'on connoisse sa hauteur, du moins à peu près, pour trouver l'augmentation (1509). On peut trouver cette hauteur grossièrement avec un globe; mais si l'on veut mettre de la précision dans ce calcul, on est obligé, pour ce seul objet, quoique extrêmement petit, de faire tout le calcul de la hauteur (1034). Cela seul donne à la méthode du nonagésime un désavantage marqué; la méthode suivante, non-seulement par cette raison, mais en général, par sa simplicité & son exactitude, me paroît être sans contredit préférable.

*NOUVELLE MÉTHODE POUR CALCULER
les Eclipses.*

1881. JE passe enfin à ma méthode, que je crois être la plus courte, la plus générale, la plus exacte; j'y fais usage des angles parallactiques, ainsi que les plus anciens astronomes, à compter depuis Ptolomée; mais d'une manière beaucoup plus simple, & sans négliger l'applatissement de la terre, ni aucune des considérations nécessaires pour l'exactitude des résultats. Ma méthode consiste à trouver la différence de hauteur & d'azimut entre les deux astres qui sont en conjonction, pour en conclure leur distance apparente, qui est le terme auquel on se propose de parvenir, pour trouver le commencement & la fin d'une éclipse (1873), ou pour tracer l'orbite apparente (1879).

La première opération qui est nécessaire dans ce calcul, est de trouver la hauteur du soleil ou de l'étoile que la lune doit éclipser. Je suppose qu'on ait calculé par les tables, pour un moment donné, la longitude du soleil ou de l'étoile & la latitude de celle-ci; la longitude & la latitude vraie de la lune, sa parallaxe horizontale, la déclinaison du soleil ou de l'étoile, & leurs ascensions droites; enfin l'angle de position du soleil (908) ou de l'étoile (1044), & son angle horaire (1008): par le moyen de la déclinaison & de l'angle horaire, on calculera sa hauteur (1034), & l'angle du vertical avec le cercle de déclinaison (1036).

Calcul par les angles parallactiques.

Calculs préliminaires.

1882. EXEMPLE. Le premier Avril 1764, la conjonction vraie est indiquée par les tables à 10^h 32' 7" du matin, la latitude de la lune étant de 40' 4" boréale à l'heure de la conjonction; la différence des mouvemens horaires en longitude 27' 10"; le mouvement horaire de la lune en latitude 2' 43"¹/₂ du midi au nord, sa parallaxe 54' 9", celle du soleil 9". Si l'on demande à 9^h 10' du matin la distance apparente des

Elémens pour le premier Avril 1764.

Fig. 119.

centres du soleil & de la lune, on aura la déclinaison du soleil pour cet instant $4^{\circ} 47' 36''$, sa hauteur $33^{\circ} 7' 30''$; l'angle ZSO du vertical ZS avec le cercle de déclinaison SO (fig. 119), $32^{\circ} 4' 17''$; l'angle de position OSP $23^{\circ} 0' 0''$; la différence de longitude AB entre la lune & le soleil $37' 11''$, & la latitude de la lune SB $36' 21''$ boréale.

L'angle
parallactique.

1883. L'ANGLE PARALLACTIQUE proprement dit; celui que nous désignerons généralement par ce nom, lorsqu'il ne sera pas qualifié plus spécialement, est formé par le vertical ZSD & le cercle de latitude PSE , qui est toujours perpendiculaire à l'écliptique. On ne peut calculer l'angle parallactique PSZ sans le diviser en deux parties qui se calculent séparément; favoir l'angle de position PSO (1044), & l'angle OSZ du cercle de déclinaison OS qui passe par l'étoile, avec le vertical ZS (1036).

1884. Nous prendrons toujours ces angles du côté du pôle élevé, c'est-à-dire, du côté du nord pour nos climats septentrionaux, soit que l'angle du vertical & du cercle de déclinaison soit aigu ou obtus^(a), & nous considérerons la partie du cercle de latitude ou du cercle de déclinaison, qui est comprise entre l'astre & le pôle élevé, qui chez nous est le pôle boréal de l'écliptique ou de l'équateur. Les angles étant ainsi considérés, on observera les règles suivantes, qui n'ont besoin d'aucune autre démonstration que l'inspection d'un globe, ou d'une figure.

Dans quel
cas on les
ajoute.

Il faut ajouter ensemble ces deux angles, c'est-à-dire; l'angle de position & l'angle du vertical avec le cercle de déclinaison après le passage au méridien, si c'est dans les signes ascendants 9, 10, 11, 0, 1, 2, ou avant le passage au méridien, si c'est dans les signes descendants; mais on prend leur différence en ôtant le plus

(a) Il est obtus (1036) lorsque ZS fig. 42. est plus près du pôle que la perpendiculaire ZX ; cela ne peut avoir lieu pour le soleil que dans la zone torride, & pour la lune à 5 ou 6 degrés plus loin de l'équateur.

petit du plus grand, quand l'astre n'a pas passé le méridien, & qu'il est dans les signes ascendants, ou lorsqu'il a passé le méridien & se trouve dans les signes descendans.

1885. Pour pouvoir se former aisément une figure exacte, dans les différens cas, supposons qu'on ait tiré une ligne verticale ZSD (fig. 119), & que le soleil soit en S ; si c'est le matin, on fait qu'en regardant l'orient on a le pole septentrional à sa gauche, ainsi l'on tirera vers la gauche une ligne SO pour représenter le cercle de déclinaison. On fait aussi que vers l'orient l'écliptique & le mouvement propre du soleil qui se fait d'occident en orient doivent aller de haut en bas; mais, si c'est dans les signes ascendants, ce mouvement du haut en bas n'est pas tout-à-fait perpendiculaire au cercle de déclinaison SO , il va un peu en se rapprochant du pole O , où de l'origine du cercle SO , on tirera donc l'écliptique dans la direction LE qui se rapproche du pole O , & l'on verra par ce moyen que la ligne perpendiculaire à l'écliptique ou le cercle de latitude SP doit passer à droite du cercle de déclinaison SO ; il en est ainsi à proportion des autres cas. On peut dire aussi en général que le point P est à l'occident du point O , dans les signes ascendants, 9, 10, 11, 0, 1, 2, & qu'il est à l'orient dans les 6 autres signes, ou que l'angle de position est occidental dans les signes descendans, oriental dans les autres.

Fig. 119.

1886. Lorsque l'angle du cercle horaire est oriental (1036), aussi bien que l'angle de position, il faut les ajouter ensemble pour former l'angle parallactique, & celui-ci fera également oriental, c'est-à-dire, que le cercle de latitude fera à l'orient du vertical. Si l'un des angles est oriental, & l'autre occidental, il faudra prendre leur différence, & l'angle parallactique aura la dénomination du plus grand.

Il faut donc examiner si par le résultat de l'addition ou de la soustraction, l'angle parallactique est oriental (1036), c'est-à-dire, si le cercle de latitude est à l'o-

Le cercle de latitude est à l'orient ou à l'occident.

rient du vertical du côté du nord, ou s'il est à l'occident. En général le cercle de latitude est à l'orient du vertical avant le passage au méridien, & à l'occident après le passage au méridien; si ce n'est dans le cas où l'angle du vertical avec le cercle de déclinaison, non-seulement est plus petit que l'angle de position; mais qu'il en a été retranché (^a). Car alors le cercle de latitude est à l'occident du vertical, si c'est avant le passage au méridien; & à l'orient du vertical, si c'est après le passage au méridien; nous ferons obligés plusieurs fois de rappeler cette distinction (1895 & suiv.).

Si nous étions dans la partie septentrionale de la Zone torride, & que nous eussions le soleil du côté du nord, c'est-à-dire, que sa déclinaison fut plus grande que la latitude du lieu, l'angle du cercle horaire seroit occidental le matin, du côté du zénit, & il seroit obtus dans certains cas. L'angle de position seroit oriental dans les signes ascendants, tout comme il l'est dans l'Europe.

Dans les pays situés au midi de l'équateur, l'angle du cercle horaire est oriental le matin, comme en Europe. L'angle de position est oriental dans les signes 3, 4, 5, 6, 7, 8, au contraire de ce qui a lieu en Europe.

EXEMPLE. Le premier Avril 1764, à 9^h 10' du matin, on prendra la différence des deux angles 32° 4' 17" & 23° 0' 0"; & l'on aura 9° 4' 17" pour l'angle parallaxique *ZSP*. Cet angle est oriental, c'est-à-dire, que le cercle de latitude *PS* est à la gauche ou à l'orient du vertical, dans ce cas-là, puisque c'est avant le passage au méridien, & que l'angle du cercle horaire étant oriental, l'angle de position quoique occidental ne s'est pas trouvé le plus grand.

(^a) Cela arrive pendant quelque temps avant midi, dans les signes ascendants; & après midi pendant quelque temps dans les signes descendants; car dans le premier cas, le cercle de latitude peut être à l'occident du vertical un certain nombre de minutes avant le passage au méridien; & dans le second cas, il peut être à l'orient plusieurs minutes après le méridien.

1887. L'ANGLE DE CONJONCTION est l'angle formé par le cercle de latitude, & par le cercle mené du soleil à la lune. Cet angle est nul dans la conjonction, & il augmente d'autant plus, que la lune s'éloigne de la conjonction, toutes choses égales. Soit S (fig. 119) le soleil ou l'étoile dont on calcule une éclipse, A la lune, SB la latitude de la lune avant sa conjonction, BA la différence de longitude entre la lune & l'étoile, mesurée dans la région de l'étoile, c'est-à-dire, multipliée s'il est nécessaire par le cosinus de la latitude (892); SA la ligne qui joint le vrai lieu du soleil à celui de la lune, l'angle ASB est celui que j'appelle ANGLE DE CONJONCTION; parce qu'il est formé au centre du soleil ou de l'étoile S par le cercle de latitude SB , & par la ligne SA menée du soleil S au lieu vrai A de la lune. Pour trouver cet angle de conjonction l'on dira : *La différence des latitudes est à la différence des longitudes des deux astres, comme le rayon est à la tangente de l'angle de conjonction, ou* $SB : BA :: R : \text{tang. } BSA$.

Angle de conjonction.

Fig. 119.

Règle pour le trouver.

La ligne BA , s'il s'agit d'une éclipse d'étoile, est un peu plus petite que la différence de longitude prise dans les tables, & mesurée le long de l'écliptique. Pour être réduite à l'écliptique, il faudroit qu'elle fût divisée par le cosinus de la latitude apparente de la lune (892); j'ai donné une table de la quantité qu'il faut ôter de la différence de longitude pour avoir l'arc AB , (*Connoissance des mouv. célest. 1764, pag. 118*). Cette quantité ne peut aller qu'à 15 secondes dans les plus grandes latitudes de la lune, & en supposant même AB d'un degré.

Attention pour les étoiles.

1888. L'ANGLE D'AZIMUT, ou l'angle de distance est l'angle ZSA formé au centre du soleil ou de l'étoile, par le vertical de l'étoile, & par la ligne SA , qui va du centre de l'étoile au centre de la lune. Cet angle d'azimut ASC ne peut se former que par la somme ou la différence des angles BSC & ASB , c'est-à-dire, de l'angle parallactique & de l'angle de conjonction.

Angle d'azimut.

Fig. 119.
Règle pour
le former.

L'angle de conjonction est toujours occidental ; ou à l'occident du cercle de latitude avant la conjonction, il est oriental après la conjonction ; ainsi lorsque l'angle parallactique sera oriental, c'est-à-dire, lorsque le cercle de latitude pris du côté du nord, ou la portion du cercle de latitude qui est au nord de l'étoile, sera à l'orient du vertical, avant la conjonction, on prendra la *différence* de l'angle de conjonction & de l'angle parallactique, & après la conjonction l'on prendra la *somme*. Lorsque l'angle parallactique sera occidental, c'est-à-dire, que le cercle de latitude sera à l'occident du vertical, on prendra la *somme* avant la conjonction & la *différence* après la conjonction. Tout cela dans le cas où la lune sera au nord du soleil ou de l'étoile qui est en conjonction ; mais si la latitude de la lune est au midi du soleil ou de l'étoile, c'est-à-dire, si la lune a une latitude plus méridionale ou moins boréale que l'étoile, on changera les mots de *somme* & de *différence* dans les préceptes que nous venons d'établir, parce que ce sera la partie inférieure de la figure 119, dont on fera usage. On aura soin de remarquer si la somme est plus grande que 90 degrés (1903). Ces préceptes sont généraux, soit dans les pays septentrionaux, soit dans les pays méridionaux, & dans le cas même où l'angle parallactique est obtus ; pourvu qu'on n'employe que son supplément à 180° dans les règles précédentes & qu'on entende par le mot *d'angle parallactique oriental*, un angle aigu du côté de l'orient vers le nord. C'est ainsi que l'on formera l'angle d'azimut ASC , compris entre le vertical ZCS , & l'arc de la distance vraie SA qui est entre le soleil & la lune.

Distance
vraie de la
lune au so-
leil.

1889. Il faut chercher aussi l'arc AS , qui est la distance vraie de la lune au soleil ou à l'étoile, soit en ajoutant les carrés de AB & BS en secondes, pris dans les tables ordinaires des carrés, soit en faisant cette proportion. Le sinus de l'angle de conjonction ASB est à la différence de longitude AB , comme le rayon est à la distance AS . Cette distance AS multipliée

pliée par le sinus de l'angle d'azimut ASC (1888), ou de son supplément, donnera la différence d'azimut vraie AC ; & cette même distance AS , multipliée par le cosinus de l'angle d'azimut ASC , ou de son supplément s'il est obtus, donnera la différence de hauteur vraie SC entre le soleil & la lune : nous en ferons usage art. 1903.

Fig. 119.

Différence de hauteur & d'azimut.

EXEMPLE. La différence de latitude $36' 21''$ (1882), est à la différence de longitude $37' 11''$, comme le rayon est à la tangente de $45^\circ 38' 57''$, angle de conjonction ASB . Divisant $37' 11''$ par le sinus de $45^\circ 39'$, on a la distance vraie SA , $52' 0''$; la différence entre l'angle de conjonction $45^\circ 38' 57''$, & l'angle parallactique est de $9^\circ 4' 17''$ (1886), ce qui donne l'angle d'azimut ASC , $36^\circ 34' 40''$. La distance vraie $52' 0''$, multipliée par le sinus de l'angle d'azimut $36^\circ 34' 40''$, donne la différence vraie d'azimut AC , $30' 59'' 2$; & la distance vraie multipliée par le cosinus du même angle d'azimut, donne la différence de hauteur SC , $41' 45'',5$ (a).

1890. La différence vraie d'azimut peut être prise pour la différence apparente, dans tous les calculs où l'on ne veut pas mettre une précision extraordinaire, & dans ce cas le calcul d'une éclipse devient beaucoup plus simple, mais si l'on veut calculer tout à la rigueur, la différence vraie d'azimut AC exige deux petites corrections que je vais expliquer. Supposons les deux verticaux de l'étoile & de la lune très-proches l'un de l'autre, comme ZCD & ZAM (fig. 117). Soit un arc AC perpendiculaire au vertical ZC , j'ai appelé cet arc la différence vraie d'azimut; si l'on prend AM

Fig. 117.

(a) Les petites Tables de Logarithmes imprimées in-12, 1760 (chez Guérin & Delatour, & qui se vendent chez Defaint), sont fort commodes pour ces calculs, quand on néglige les décimales, parce qu'elles dispensent de réduire ces arcs en secondes pour en trouver les loga-

rithmes; ce sont d'ailleurs les plus exactes que je connoisse: nous employâmes, M. de la Caille & moi, la plus grande attention à en revoir les épreuves, elles furent même encore lues séparément par d'autres Académiciens.

Fig. 117.

égal à la parallaxe de la lune en hauteur (1629); en sorte que M soit son lieu apparent dans le vertical ZAM , & qu'on tire MD perpendiculaire au vertical du soleil CD , la différence apparente d'azimut qui est MD , sera plus grande que la différence vraie AC ; parce que AM n'est pas exactement parallèle à CD . Pour savoir combien la différence apparente MD surpasse la différence vraie AC , on tirera AN parallèle à CD , & l'on aura NM pour l'excès de MD sur AC ; c'est cet excès dont il s'agit de trouver la valeur. Dans le triangle ANM l'on a $MN = AM \cos. M$, (3611); mais dans le triangle sphérique ZMD , $R : \cos. M : : \text{tang. } MZ : \text{tang. } MD$ (3668), ou $\cos. M = \frac{\text{tang. } MD}{\text{tang. } ZM}$; donc $MN = \frac{AM \text{ tang. } MD}{\text{tang. } ZM}$; mais puisque AM est la parallaxe de hauteur, on a $AM = p \sin. ZM$ (1629); donc en substituant cette valeur & mettant $\cos. ZM$ à la place du sinus divisé par la tangente; on aura $p \cosin. ZM \text{ tang. } MD$.

Valeur
de cette pre-
mière équation.

1891. Ainsi la parallaxe horizontale multipliée par le sinus de la hauteur apparente, & par la tangente de la différence apparente d'azimut à peu-près connue, donne la quantité de secondes qu'il faut ajouter à la différence vraie pour avoir la différence apparente d'azimut MD ; entre la lune & l'étoile, prise dans la région de la lune. Je ne prends pas ici les différences d'azimut dans l'horizon comme on le fait dans d'autres occasions (1038), mais sur un almicantarât, à la hauteur de la lune, ou sur l'arc de grand cercle qui se confond sensiblement avec le parallèle à l'horizon.

On ajoute dans tous les cas cette quantité à la différence vraie d'azimut pour avoir la différence apparente; mais cette quantité ne va jamais qu'à 30'' dans les éclipses, & j'en ai fait une table, (*Connoissance des mouv. célest.* 1764, pag. 120), dans laquelle on prendra facilement à la vue & sans parties proportionnelles cette quantité, dont il faudra augmenter la différence vraie d'azimut. Dans des calculs qui ne seroient pas bien im-

portans, ou dans les premiers calculs préparatoires d'une éclipse on peut négliger cette correction de l'azimut, comme celle qui dépend de l'applatiffement de la terre (1892).

EXEMPLE. La différence des parallaxes horizontales étant de $54' 0''$, la hauteur de la lune 33° ; la différence d'azimut $AC 30' 59'' 2$ (1889), on a $p \sin. h \text{ tang. } AC = 16''$, qui étant ajoutées à AC donnent la différence apparente $DM = 31' 15''$.

Fig. 119.

C'est cette différence apparente $31' 15''$ qu'il auroit fallu employer dans l'opération précédente; mais l'erreur qui résulte d'avoir pris la différence vraie au lieu de l'apparente, est comme insensible: si cependant on vouloit y avoir égard on recommenceroit le calcul en mettant la tangente de $31' 15''$, au lieu de celle de $30' 59''$, & l'on trouveroit $16'' 4$ pour la correction cherchée, qu'il faut ajouter à $30' 59'' 2$ pour avoir $31' 15'' 6$, différence apparente d'azimut.

1892. LA PARALLAXE D'AZIMUT qui a lieu dans le sphéroïde aplati (1686), est la seconde correction qu'il faut faire à la différence vraie d'azimut pour avoir la différence apparente. Lorsqu'on a calculé par les tables la vraie différence d'azimut entre le soleil & la lune (1889, 1891), & qu'on a trouvé DM (fig. 119); cela nous apprend que la lune vue du centre de la terre paroîtroit au point M , si la terre étoit sphérique; mais à cause de l'applatiffement de la terre elle ne paroît pas dans le même vertical, étant vue de la surface. Si l'on prend un petit arc de grand cercle ML égal à la parallaxe d'azimut, le point L fera celui où la lune devra paroître vue de la surface de la terre.

Seconde équation, ou parallaxe d'azimut.

Fig. 119.

Cette parallaxe d'azimut $= p \sinus a. \sinus z$, (1686) fait toujours paroître la lune du côté du pôle élevé; en effet, l'observateur situé en O (fig. 94) voit la lune dans le même vertical & au même point d'azimut que s'il étoit situé au point N de la verticale: or le point N est toujours opposé au pôle P qui est élevé sur l'ho-

Fig. 94.

Fig. 94.

rizon, comme cela est évident par la situation de l'ellipse terrestre; donc l'observateur placé en O ou en N voit la lune plus près du pôle P , que s'il étoit au centre C de la terre. Ainsi cette parallaxe dans les pays septentrionaux est additive à la différence vraie d'azimut, si la lune est au nord du vertical du soleil ou de l'étoile; elle se retranche si la lune est au midi, c'est-à-dire, si la différence vraie d'azimut est vers le midi.

1893. Pour pouvoir faire distinguer d'une manière sûre & commode les cas où la lune est au nord du vertical, nous allons donner des règles générales auxquelles on pourra avoir recours dans le calcul des éclipses; mais dont on pourra se passer si l'on a devant les yeux une figure du vertical & du méridien, ou du cercle de déclinaison qui passe par l'étoile, dans laquelle la lune soit placée comme elle doit l'être au temps pour lequel on calcule, telle qu'est la *figure 119* pour l'exemple que nous avons choisi. On peut encore se servir d'un globe pour guider le calcul. Au reste, j'ai renfermé dans les règles suivantes toutes les variétés possibles, afin de lever pour jamais toute incertitude dans ma méthode.

Dans les hauteurs du pôle qui ont lieu en Europe & qui sont plus grandes que 28° , l'angle parallaétique est toujours aigu; ainsi dans les premières règles nous le supposerons moindre que 90° du côté du nord; nous distinguerons si la lune a passé le méridien ou non, c'est-à-dire, si elle est dans l'hémisphère oriental ou occidental, & si elle est au nord du soleil ou de l'étoile. En disant que la lune est au nord, j'entends que son lieu vrai est plus près du pôle boréal de l'écliptique, que celui de l'étoile; c'est-à-dire, sa vraie latitude boréale plus grande ou sa vraie latitude australe plus petite que la latitude de l'étoile. Tout cela posé, l'on aura la parallaxe d'azimut additive à la différence d'azimut dans tous les cas suivans.

1894. DANS LES PAYS SEPTENTRIONAUX. AVANT LE MÉRIDIEN, si la lune est au NORD & APRÈS sa conjonction.

Cas où cette équation est additive.

Si la lune est au NORD, AVANT sa conjonction, & que l'angle de conjonction soit plus PETIT que l'angle parallaétique.

Dans les pays septentrionaux.

Si la lune est au MIDI, APRÈS la conjonction, & que l'angle de conjonction soit plus GRAND que l'angle parallaétique.

1895. Dans le cas où l'angle de position se fera trouvé le plus grand & où l'on en aura retranché l'angle du vertical avec le méridien (1886); il faudra dans les trois règles précédentes mettre MIDI au lieu de NORD.

1896. APRÈS LE MÉRIDIEN. Si la lune est au NORD & AVANT sa conjonction.

Si la lune est au NORD, APRÈS sa conjonction, & que l'angle de conjonction soit plus PETIT que l'angle parallaétique.

Si la lune est au MIDI, AVANT la conjonction, & que l'angle de conjonction soit plus GRAND que l'angle parallaétique.

1897. Dans le cas où l'angle du vertical avec le cercle de déclinaison aura été retranché de l'angle de position (1886), il faudra dans ces trois règles mettre *midi* au lieu de *nord*, & *nord* au lieu de *midi*; ou, ce qui revient au même, changer dans les trois premières règles (1894) ces mots, *avant*, *après*, *nord* & *midi*.

1898. Il peut arriver dans des pays situés près de la zone torride sous des latitudes moindres que 28° , que l'angle parallaétique soit obtus du côté du nord (1036), alors on considérera son supplément à 180° & dans les six règles des articles 1894 & suiv. on changera les mots AVANT & APRÈS; d'où résultent les règles suivantes pour trouver les cas où la lune est au nord du vertical de l'étoile dans les pays septentrionaux, & où la parallaxe d'azimut est additive à la différence d'azimut.

Si l'angle parallaétique est obtus.

1899. AVANT LE MÉRIDIEN. Si la lune est au NORD, AVANT la conjonction.

Si la lune est au NORD, APRÈS la conjonction ; mais l'angle de conjonction plus PETIT que le supplément de l'angle parallaëtique.

Si la lune est au MIDI, AVANT la conjonction, & l'angle de conjonction plus GRAND que le supplément de l'angle parallaëtique.

1900. APRÈS LE MÉRIDIEN. Si la lune est au NORD ; APRÈS la conjonction.

Si la lune est au NORD, AVANT la conjonction, & que l'angle de conjonction soit plus PETIT que le supplément de l'angle parallaëtique.

Si la lune est au MIDI, APRÈS la conjonction, & que l'angle de conjonction soit plus grand que le supplément de l'angle parallaëtique.

Dans les
pays situés au-
delà de l'é-
quateur.

1901. DANS LES PAYS MÉRIDIONAUX ; c'est-à-dire, situés dans l'hémisphère austral de la terre, ou au midi de l'équateur ; la parallaxe d'azimut s'ajoute à la différence d'azimut lorsque la lune est au midi du vertical de l'étoile ; d'où il résulte que pour trouver les cas où elle fera additive, il suffit de changer les mots de *nord* & *midi* dans toutes les règles précédentes, où il s'agit de la latitude de la lune.

Cas où l'é-
quation est
soustractive.

Je me dispense, pour abréger, de rapporter les cas où l'équation est soustractive ; mais l'on pourra en faire une table en écrivant toutes les règles ci-dessus, & changeant tout à la fois les mots *avant* & *après*, *nord* & *midi*.

1902. EXEMPLE. La parallaxe étant de $54' 0''$ dans l'éclipse de 1764, l'angle a supposé de $19'$, comme je l'employois autrefois (1708), l'azimut de la lune $53^{\circ} \frac{1}{2}$, on a la parallaxe d'azimut $p \sin. a. \sin. z$ (1686) = $14'' 4$, qui retranchée de $31' 15'' 6$ (1891), différence d'azimut vue du centre de la terre, donne la différence apparente d'azimut DL $31' 1'' 2$, telle qu'on la voit sur la surface du sphéroïde.

1903. Quand on a trouvé la différence d'azimut entre la lune & l'étoile, il faut connoître aussi la hauteur vraie de la lune, & pour cela on prend la différence de hauteur entre la lune & l'étoile (1889), qu'on ajoute à celle de l'étoile si la lune est plus élevée. Mais pour distinguer cette circonstance, voici des règles générales qui supposent seulement qu'on ait examiné si la somme de l'angle de conjonction & de l'angle parallactique (en prenant son supplément, s'il est obtus), forme plus ou moins de 90° , dans les cas où on les ajoute ensemble (1888). On pourra se dispenser de consulter ces règles si l'on voit assez distinctement la situation des lignes & des angles dont il s'agit dans ce calcul, ou si l'on a un globe ou une figure exacte devant les yeux. Les règles suivantes renferment tous les cas où il faut ajouter la différence de hauteur vraie, à celle du soleil, ou de l'étoile, pour avoir la hauteur vraie de la lune.

1904. **DANS LES PAYS SEPTENTRIONAUX.** Cas où la différence de hauteur est additive.
AVANT LE MÉRIDIEN. Si la latitude de la lune est au NORD, de l'étoile, AVANT la conjonction.

Si la lune est au NORD, APRÈS la conjonction, & que la somme de l'angle de conjonction & de l'angle parallactique (1888), soit moindre que 90° .

Si la lune est au MIDI, AVANT la conjonction & que la somme de l'angle de conjonction & de l'angle parallactique soit plus grande que 90° .

1905. Mais si l'on a retranché de l'angle de position celui du vertical avec le méridien (1886), l'on aura une différence de hauteur additive dans les cas suivans.

Si la lune est au NORD du soleil ou de l'étoile, APRÈS la conjonction.

Si la lune est au NORD, AVANT la conjonction, & que la somme soit plus petite que 90° .

Si la lune est au MIDI APRÈS la conjonction, & que la somme des angles soit plus grande que 90° .

1906. APRÈS LE MÉRIDIEN. Ce sont les trois règles de l'article 1905.

Mais si l'on a retranché de l'angle de position celui du vertical avec le méridien (1886), ce sont les trois règles de l'article 1904.

Les préceptes de ces trois articles, sont les seuls dont on ait besoin en Europe.

1907. Dans les pays septentrionaux de la zone torride, l'angle parallaxique peut se trouver obtus si la lune est entre le zénit & le pôle élevé : alors on changera les mots de NORD & de MIDI dans les articles 1904 & 1905 ; mais on prendra le supplément de l'angle parallaxique avant de l'ajouter à l'angle de conjonction (1888).

Si l'angle
parallaxique
est obtus.

Dans les
pays méridio-
naux.

1908. DANS LES PAYS MÉRIDIONAUX, c'est-à-dire, si le lieu pour lequel on calcul une éclipse est de l'autre côté de l'équateur, ayant une latitude géographique australe, AVANT LE MÉRIDIE ; on changera les mots de NORD & MIDI dans l'art. 1904.

1909. Mais si l'on a retranché de l'angle de position celui du vertical avec le cercle de déclinaison, l'on changera dans l'article 1905 les mots de NORD & de MIDI.

1910. APRÈS LE MÉRIDIE. On changera aussi dans l'art. 1905 les mots de NORD & MIDI.

1911. Mais si l'angle du vertical avec le méridien a été soustrait de l'angle de position (1886), on changera NORD & MIDI dans l'art. 1904.

1912. Si l'angle parallaxique est obtus dans les pays méridionaux, AVANT LE MÉRIDIE ; on prendra l'art 1904. APRÈS LE MÉRIDIE ce sera l'article 1905 ; je suppose toujours qu'on prend le supplément de l'angle parallaxique pour l'ajouter à l'angle de conjonction (1888).

1913. Les cas où la différence de hauteur est soustractive se peuvent conclure de ceux où elle est additive, en changeant dans les neuf articles précédens tous les mots MIDI & NORD, AVANT & APRÈS ; d'ailleurs on saura qu'elle est soustractive, lorsqu'après avoir parcouru les cas précédens où elle est additive on n'y verra pas celui dont on aura besoin,

1914. Après avoir ajouté la différence de hauteur SC avec celle du soleil ou de l'étoile, ou l'avoir retranché par le moyen des règles précédentes, on aura la hauteur vraie de la lune. Pour avoir sa hauteur apparente, on multipliera la différence des parallaxes par le cosinus de la hauteur vraie de la lune que l'on vient de trouver, on aura la parallaxe de hauteur à quelques secondes près; cette parallaxe se retranchera de la hauteur vraie de la lune pour avoir sa hauteur apparente, & la différence des parallaxes horizontales, multipliée de nouveau par le cosinus de cette hauteur apparente, donnera plus exactement la parallaxe de hauteur (1629).

Trouver la hauteur apparente.

1915. On retranchera de cette parallaxe la correction due à l'applatissement de la terre, $p \sin. a. \sin. h.$ $\cos. z$ (1689); & l'on aura exactement la parallaxe de hauteur AM ou CD (fig. 117 & 119) dans le sphéroïde aplati.

Correction de la parallaxe,

1916. La parallaxe de hauteur CD (fig. 119) abaisse la lune au-dessous du soleil ou de l'étoile; ainsi l'on en retranchera la quantité CS dont la hauteur vraie de la lune étoit plus grande que celle du soleil, & l'on aura la différence de hauteur apparente SD . Si la hauteur vraie de la lune a été trouvée moindre que celle de l'étoile, on ajoutera cette différence avec la parallaxe de hauteur, pour avoir la quantité SD dont le lieu apparent de la lune sera plus bas que celui de l'étoile.

Fig. 112.

1917. Connoissant ainsi la différence apparente de hauteur SD , & la différence apparente d'azimut LD (1902), on résoudra le triangle SLD , & l'on trouvera la distance apparente SL . Cette distance fera connoître si l'éclipse est commencée, & fera trouver le véritable commencement de l'éclipse, en faisant le même calcul pour un temps plus ou moins avancé de quelques minutes, comme on le verra dans l'exemple suivant.

1918. EXEMPLE. La différence de hauteur vraie entre la lune & le soleil $41' 45''$, 5 (1889), étant

Fig. 119.

ajoutée à la hauteur du soleil $33^{\circ} 7' 35''$ donne la hauteur vraie de la lune $33^{\circ} 49' 20''$. La différence des parallaxes horizontales du soleil & de la lune $54' 0''$, multipliée par le cosinus de la hauteur de la lune, donne la parallaxe de hauteur à peu-près, $44' 51''$. Cette parallaxe retranchée de la hauteur vraie de la lune $33^{\circ} 49' 20''$ donne sa hauteur apparente $33^{\circ} 4' 29''$. Le cosinus de cette hauteur apparente multiplié par la parallaxe horizontale, donne plus exactement la parallaxe de hauteur $45' 15'' 2$; il en faut ôter la correction $p \sin. a \sin. h \cos. z$ dûe à l'applatiffement (1689), qui se trouvera de $5'' 9$, & l'on aura la véritable différence des parallaxes dans le sphéroïde applati $45' 9'' 3 = AM$ ou CD ; il en faut retrancher la différence de hauteur vraie $CS = 41' 45'' 5$, il reste la différence de hauteur apparente SD , $3' 23'' 8$; cette valeur de SD avec celle de DL (1902), qui est de $31' 1'' 2$, nous donnera l'angle de $83^{\circ} 45' 4''$, & la distance apparente des centres du soleil & de la lune $31' 12'' 3$, comme par la première méthode (1877). La somme du demi-diamètre du soleil $16' 0'' \frac{1}{2}$ & du demi-diamètre horizontal de la lune $14' 47''$ augmenté de $7'' \frac{1}{2}$, à cause de sa hauteur (1510), est de $30' 55''$, quantité moindre de $17''$ que la distance apparente des centres; ainsi le centre de la lune doit se rapprocher encore du centre du soleil de $17''$ pour que l'éclipse puisse commencer. Si l'on refait un semblable calcul (1882 & suiv.), pour un temps plus avancé de $5'$, ou pour $9^h 15'$ l'on trouvera que la distance apparente des centres est de $29' 22'' 5$, plus petite que la précédente de $1' 49'' 8$ ou en nombres ronds de $1' 50''$; or $1' 50'' : 5' 0'' :: 17'' : 46''$; donc la distance des centres perdra, dans l'espace de $46''$ de temps, les $17''$ dont nous l'avons trouvée trop grande; ainsi l'éclipse commencera à $9^h 10' 46''$. Il faudroit ôter $4'' \frac{1}{2}$ de la somme des demi-diamètres, & la réduire à $30' 50'' \frac{1}{2}$, si l'on vouloit avoir égard à l'inflexion des rayons qui rasent le limbe de la lune (1992).

Distance
apparente.Commen-
cement de
l'éclipse.

Fig. 119:
Former
l'orbite appa-
rente.

1919. Si l'on veut former l'orbite apparente de la lune, affectée de la parallaxe, pour trouver le milieu de l'éclipse, & le mouvement apparent, on cherchera dans le même triangle (dont on connoît les côtés SD & DL), l'angle LSD , $83^{\circ} 45' 4''$; la somme ou la différence de cet angle, & de l'angle parallactique (1883), donnera l'angle LSE $74^{\circ} 40' 47''$ (a). L'on fera le même calcul deux heures plus tard la lune étant en F , & l'on aura de même l'angle FSE , qu'on ajoutera avec l'angle LSE ; ainsi l'on formera un triangle LSF , dans lequel on connoîtra LS , SF , & l'angle LSF , on cherchera le segment LX qui donnera le temps où la lune doit paroître en X , c'est le temps du milieu de l'éclipse (1879); on cherchera ensuite la perpendiculaire SX avec laquelle on trouvera facilement la grandeur de l'éclipse (1880).

1920. Pour plus d'exactitude, il faudroit que les calculs d'où l'on déduit le milieu de l'éclipse ne fussent éloignés entre eux que d'une demi-heure, ou bien que l'un des calculs ne fût pas éloigné d'un quart d'heure de la plus grande phase. Ainsi l'on peut regarder le premier résultat comme une approximation, & calculer la distance des centres pour le temps de la plus grande phase que l'on aura trouvé par le premier calcul; on combinera cette nouvelle distance des centres avec celle qu'on aura calculée pour le commencement ou pour la fin, & l'on en déduira plus exactement la grandeur & le temps de la plus grande phase.

1921. La nouvelle méthode que je viens de donner pour calculer une éclipse, est plus simple que celle du nonagésime. 1°. On n'a besoin que de la hauteur de la lune, qu'il est nécessaire d'avoir à peu-près, même dans la méthode du nonagésime, pour connoître l'augmentation du diamètre de la lune (1510). 2°. On a la parallaxe exacte qui convient à la hauteur apparente, par deux

Avantages
de cette mé-
thode.

(a) Ce sera la somme, si la lune & le vertical sont de différens côtés par rapport au cercle de latitude.

Fig. 119.

simples additions (1918), au lieu que dans la formule du nonagésime (1665), il faut faire deux fois une évaluation qui est bien plus compliquée. 3°. Lorsque les corrections de l'applatissement de la terre sont réduites en tables, comme je l'ai fait pour Paris, & qu'on a une table des hauteurs, & des angles parallacliques, ma méthode est beaucoup plus courte que celle du nonagésime, en supposant de pareilles tables pour cette méthode.

1922. Si l'on vouloit avoir non-seulement la distance apparente des centres; mais encore les parallaxes de longitude & de latitude. On les trouveroit par le moyen du triangle SLE , dans lequel on calculeroit la différence des longitudes apparentes $EL = 30' 5'' 8$, & la latitude apparente $\sphericalangle E = 8' 14'' 7$, comparant ces valeurs avec les différences vraies $AB = 37' 11''$, & $BS = 36' 21''$, l'on aura la parallaxe de longitude $7' 5'' 2$, & celle de latitude $44' 35'' 7$, ainsi que par la méthode du nonagésime (1877); mais on aura rarement besoin de ces parallaxes, si l'on calcule les éclipses par la méthode précédente, que je crois plus exacte, & plus simple que celle du nonagésime. Cependant nous employerons la méthode du nonagésime, pour trouver la différence des méridiens, par le temps de la conjonction vraie (1971).

Méthode analytique pour calculer les Eclipses.

1923. APRÈS avoir expliqué trois méthodes astronomiques pour calculer exactement une éclipse, j'aurois souhaité de développer ici une méthode purement analytique, donnée par M. du Séjour, Conseiller au Parlement de Paris, d'abord en 1761 (a), & plus rigoureusement dans les Mémoires de l'académie pour

(a) Recherches sur la Gnomonique, les rétrogradations des planètes, & les éclipses de soleil, | (par M. du Séjour & M. Goudin), à Paris chez Defaint & Saillant 1761, in-8° 86 pages.

1765, 1766, 1767, &c. ; mais M. du Séjour ayant considéré ce problème dans une généralité, où il suppose beaucoup de principes qui ne peuvent être démontrés dans cet ouvrage, je vais me contenter de rapporter ici sa principale formule, avec un exemple, pour que le lecteur puisse du moins en comparer l'usage avec celui des trois méthodes précédentes. Cette méthode analytique a toute la généralité qu'un géomètre habile pouvoit lui donner; elle est simple dans l'application, & très-élégante dans ses principes & ses démonstrations. Je souhaite que l'exemple que je vais en donner, détermine les astronomes à consulter les mémoires de l'académie pour en voir les fondemens, & suivre les applications sans nombre que M. du Séjour en a faites à toutes les sortes de problèmes que l'on peut proposer sur les éclipses.

1924. PROBLÈME. Trouver la distance apparente des centres du soleil & de la lune, à un instant donné.

Je suivrai dans ces calculs les mêmes lettres que M. du Séjour, & les mêmes élémens pour l'éclipse de 1764, qui me servira d'exemple; j'avertirai seulement que dans les formules suivantes, on peut négliger r qui exprime le rayon ou le sinus total, puisqu'il est toujours égal à l'unité dans nos tables.

Soit π = sinus de la parallaxe horizontale de la lune sous le pole, à l'instant donné.

π' = sin. de la parallaxe du soleil, qui est de 9'' (1742):

ρ = demi-grand axe de la terre, supposant le demi-petit axe = 1, c'est-à-dire, que $\rho = \frac{178}{177}$.

θ = sinus de l'inclinaison de l'orbite corrigée ou de l'orbite relative (1765).

\downarrow = cosinus de l'inclinaison de l'orbite corrigée.

ξ = cosinus de la latitude de la lune à l'heure de la conjonction.

$\zeta = 1 - \frac{\pi'}{\pi} \xi$

b = nombre de secondes de temps depuis la conjonction jusqu'à l'instant pour lequel on calcule.

518 ASTRONOMIE, LIV. X.

s = sinus de la latitude du lieu diminuée de la moitié de l'angle de la verticale (1708).

c = cofinus de la latitude du lieu ainsi corrigée.

g = sinus de l'angle horaire ☉, ou du temps vrai réduit en degrés.

h = cofinus de l'angle horaire.

p = sinus de la déclinaison du soleil à l'instant donné.

q = cofinus de la déclinaison du soleil.

Ω = cofinus obliquité de l'écliptique. $\chi = \sqrt{q^2 - \Omega^2}$.

t = tangente }
 ω = sinus } de l'angle de l'orbite relative avec la
 φ = cofinus } perpendiculaire au méridien universel,
 à l'instant pour lequel on calcule.

On trouve la valeur de ω par cette formule $\omega = \frac{\theta \Omega}{q}$

$\pm \frac{\psi \chi}{q}$ (mém. de l'acad. 1766, pag. 257).

$l = r \frac{\text{fin. lat. } \odot \text{ au temps de la conjonction.}}{\text{fin. parall. polaire au temps de la conjonct.}}$

$\gamma = \xi \frac{\text{fin. versé (mouv. hor. } \odot \text{ en longit. sur l'éclip. mouv. hor. } \odot)}{\text{fin. parall. horiz. polaire au temps de la conjonction.}}$

$\pi = \frac{r \xi \text{ fin. (mouv. hor. } \odot - \text{mouv. } \ominus)}{\psi \text{ fin. parall. polaire.}}$

$$A = \frac{\psi l}{\xi} - \frac{q s \phi}{r^2} + \frac{c g p \omega}{r^2} + \frac{c h p p \phi}{r^4}$$

$$B = \frac{\theta l}{\xi} - \frac{q s \omega}{r^2} - \frac{c g p \phi}{r^2} + \frac{c h p p \omega}{r^4} + \frac{b \gamma r}{3600 \xi}$$

$$\frac{A r}{B} = \text{tang. H}$$

$$E = \xi - \frac{p s \pi}{r^2} - \frac{c p q h \pi}{r^4} - \frac{\gamma b^2 \pi}{(3600)^2 r}$$

La tangente de la distance apparente des centres du soleil & de la lune fera enfin égale à $\frac{A \xi \pi}{E \text{ fin. H}}$ (mém. de l'ac. 1765, pag. 299).

1925. L'usage de cette méthode n'exige d'autre attention que celle de changer les signes d'une manière convenable, suivant la règle qu'on verra dans la trigonométrie que depuis 180° jusqu'à 360, les sinus

changent de signe, & les cosinus depuis 90° jusqu'à 270° . On fait aussi que $+$ multiplié par $-$ donne $-$, & que $-$ multiplié par $-$ donne $+$, enfin que les quantités qui après avoir diminué jusqu'à zéro continuent de diminuer encore deviennent négatives.

Ainsi l'on suppose pour b , que le temps est après la conjonction, sinon b est négatif.

Pour l , que la latitude à l'heure de la conjonction est boréale, autrement l est négative.

Pour p , que la déclinaison du soleil est boréale à l'heure du calcul.

Pour x , que le soleil est dans les signes ascendants, ou depuis 9^s jusqu'à 3^s de longitude.

Pour g , que l'heure donnée est après midi.

Pour h , que l'heure est entre six heures du matin & six heures du soir, sans cela le cosinus h est négatif.

Pour le changement de la parallaxe que la lune s'approche de la terre, ou que la parallaxe augmente.

Pour s , que la latitude du lieu est boréale; le cosinus de la latitude $= c$ est toujours positif.

Pour n , que le mouvement horaire relatif est direct ou vers l'orient, ainsi n est négatif, dans les passages de Vénus & de Mercure.

Pour γ , que l'orbite est concave vers la terre; dans les passages de Vénus γ est négatif, mais on peut négliger totalement cette petite quantité.

Pour θ , que le mouvement de la lune en latitude va vers le nord, & le mouvement relatif en longitude vers l'orient, si l'une des deux conditions change sans l'autre, θ devient négatif.

t a le même signe que ω .

Dans les éclipses de soleil les quantités $r, p, \psi, \xi, c, q, \omega, \varphi, \pi, \pi', \zeta, \gamma, n$, sont toujours positifs.

1926. EXEMPLE. Je suppose qu'on demande la distance apparente des centres du soleil & de la lune, le 1 Avril 1764, à $9^h 10'$ à Paris, $1^h 21' 23''$ avant la conjonction; nous supposons avec M. du Séjour, la conjonction à $10^h 31' 23''$, & la latitude $39' 36''$, la

parallaxe horizontale pour Paris $54' 9''$, & sous le pôle $54' 1'' \frac{1}{2}$; sa formule pour trouver les parallaxes sous d'autres latitudes, est dans les mémoires de l'académie pour 1764. Le nombre 206265 qui se trouve dans les formules suivantes est l'arc égal au rayon (1242); j'ai supprimé la lettre r qui exprime toujours l'unité.

Tangente de l'inclinaison de l'orbite relative ou corrigée = $\frac{\text{mouv. en latit.}}{206265 \sin. \text{diff. mou. en lon.}} = \frac{2' 44''}{206265 \sin. 27' 11'' , 3}$, ainsi cette inclinaison = $5^{\circ} 44' 26''$.

$\rho = 1,00565$	Logarithme.	0,0024467
$\pi = 54' 1'' 5$	8,1963030
$\pi = 10''$	
$57^{\circ} = 206264'' 8$	5,3144281
$\theta = \sin. 5^{\circ} 44' 26''$	9,0001044
$\psi = \cos. 5^{\circ} 44' 26''$	9,9978165
$\xi = \cos. \text{latit. } \odot 39' 36''$	9,9999711
$b = -4883$	3,6886867
$s = \sin. 48.41.25$	9,8757280
$c = \cos. 48.41.25$	9,8196289
$g = -\sin. 42^{\circ} 30'$	9,8296833
$h = \cos. 42.30$	9,8676309
$p = +\sin. 4^{\circ} 48' 50''$	8,9238624
$q = \cos. 4.48.50$	9,9984653
$\Omega = \cos. 23.28.21$	9,9624884
$\alpha = +38936$	9,5903565
$\omega = \sin. 28.44.30$	9,6820198
$t = \text{tang. } 28.44.30$	9,7391209
$\varphi = \cos. 28.44.30$	9,9428989
$\zeta = \sin. 85.30.6$	9,9986603
$l = +0,73301$	9,8651087
$\gamma = 0,00200$	7,3008965
$n = +0,50581$	9,7039847

1927. Pour parvenir à l'évaluation des termes de A , de B , & de E , on calcule d'abord séparément les termes généraux qui ne changent pas de valeur pendant la durée d'une éclipse.

Le

Le premier terme de A est $\frac{\psi^1}{\zeta} = + 0,73159$.

Le premier terme de B est $\frac{\theta^1}{\zeta} = + 0,07354$.

Le premier terme de E est $\xi = + 0,99993$.

Il entre encore dans la valeur de A des quantités qui sont sensiblement les mêmes pour toute la durée de l'éclipse ; tels sont dans le second terme $q\phi$, dans le troisième $p\omega$, dans le quatrième $p\rho\phi$. De même dans la valeur de B , on a $q\omega$, $p\phi$, $p\rho\omega$, & $\frac{n}{3600\zeta}$; dans celle de E les produits $p\pi$; $p q \pi$; $\frac{\gamma\pi}{(3600)^2}$; il est bon de les former séparément avant que de calculer les termes qui dépendent du lieu, & de l'heure pour lesquels on calcule, voici leurs Logarithmes, (*Mém. acad.* 1765, pag. 298).

LOGAR. de $q\phi = - 0,0586358$.

$p\omega = - 0,3155335$.

$p\rho\phi = - 1,1307920$.

$q\omega = - 0,3195149$.

$p\phi = - 0,0546544$.

$p\rho\omega = + 1,3916711$.

$\frac{n}{3600\zeta} = + 6,1490219$.

$p\pi = - 2,8798346$.

$p q \pi = - 1,8027850$.

$\frac{\gamma\pi}{(3600)^2} = - 1,6154055$.

$\zeta\pi = + 8,1949633$.

On écrit ensuite les quatre termes de A , dans quatre colonnes, chacun avec le signe qui convient au produit qui a lieu dans le cas actuel ; il n'y a que le troisième terme qui change dans notre exemple, parce que g est négatif, l'heure donnée étant avant midi ; on les évalue chacun séparément, & l'on trouve les quantités suivantes.

$$\left. \begin{aligned} + \frac{\psi 1}{\zeta} &= + 0,73159 \\ - q s \phi &= - 0,65629 \\ - c g p \omega &= - 0,21566 \\ + c h p p \omega &= + 0,03601 \end{aligned} \right\} \text{ donc } A = - 0,10435$$

On écrit aussi les quatre termes de B chacun avec le signe qui leur convient ; dans notre exemple , le troisième terme change de signe , parce que g est négatif ; le cinquième terme change aussi , parce que le temps donné étant avant la conjonction b est négatif. Voici tous les termes de B .

$$\left. \begin{aligned} + \frac{\theta 1}{\zeta} &= + 0,07354 \\ - q s \omega &= - 0,35992 \\ + c g p \phi &= + 0,39324 \\ + c h p p \omega &= + 0,01975 \\ - \frac{b \eta}{3600 \zeta} &= - 0,68819 \end{aligned} \right\} \text{ donc } B = - 0,56158,$$

$$\text{donc } \frac{A}{B} = \text{tang. } H, \text{ \& } H = 10^{\circ} 31' 35''.$$

$$\left. \begin{aligned} \xi &= + 0,99993 \\ - p s \pi &= - 0,00101 \\ - c p q h \pi &= - 0,00766 \\ - \frac{\gamma b^2 \pi}{(3600)^2} &= - 0,00006 \end{aligned} \right\} \text{ donc } E = + 0,99120.$$

1928. Ainsi la tangente de la distance apparente $= \frac{A \zeta \pi}{E \sin. H} = \text{tang. } 31' 2''$. Elle s'accorderoit parfaitement avec celle que j'ai trouvée par les autres méthodes (1877, 1918), si l'on avoit employé les mêmes élémens, comme je m'en suis assuré. La manière d'en conclure le commencement & la fin de l'éclipse est la même que par les autres méthodes (1918).

1929. Cette méthode de M. du Séjour a toute la généralité possible ; elle auroit l'avantage de servir avec

la même facilité dans les cas mêmes où les quantités qu'on néglige actuellement, ne seroient pas négligeables. On peut, avec ces formules, trouver les limites des erreurs que l'incertitude de chaque élément peut produire ; c'est cette facilité qui a fait trouver l'inflexion (1992). Enfin la même forme de calcul sert à trouver le *maximum* & le *minimum* de toutes les circonstances d'une éclipse, à en tirer toutes les conséquences possibles, & à chercher tous les élémens que l'observation de l'éclipse peut déterminer ; de même que les courbes d'illumination qui seront l'objet des articles suivans.

*MÉTHODE POUR CALCULER LA ROUTE DE L'OMBRE
& les lignes des phases sur la surface de la terre.*

1930. APRÈS avoir déterminé les circonstances de l'éclipse générale pour le méridien de Paris, (1806) ; par le calcul, ou par l'opération graphique, dont on peut très-bien se contenter (1811), il est question de connoître par longitudes & latitudes les pays de la terre où commenceront ces phases ; il faut savoir, par exemple, quel est le point *I* de la terre *fig. 103*, qui le premier de tous verra commencer l'éclipse en voyant lever le soleil, quel est le point *V* qui le premier verra l'éclipse centrale au lever du soleil. On a vu la manière de le trouver sans calcul, par le moyen d'un globe (1814), nous allons indiquer une méthode trigonométrique, & une opération graphique pour y parvenir.

Fig. 103.

M. de la Caille avoit donné, il est vrai, une méthode graphique pour tracer les lignes des phases, mais personne encore n'avoit donné avant moi, la manière de les calculer par la trigonométrie ; M. du Séjour, étoit le seul qui eût donné des formules analytiques pour tracer la ligne de l'ombre, ou de l'éclipse centrale, dans le recueil que j'ai cité (1923) ; depuis ce temps-là, il a donné dans les Mémoires de l'académie, une théorie plus générale & une analyse plus complète

de tous les cas de ce problême; mais cela ne m'empêchera pas de suivre dans cette partie l'application des méthodes que j'ai expliquées ci-dessus, & qui sont plus familières aux astronomes, quant à présent.

Fig. 118.

Trouver le premier lieu qui verra l'éclipse.

193 I. Soit le centre de la projection en C (fig. 118); l'orbite de la lune KMG ; le milieu de l'éclipse en M , le commencement de l'éclipse générale au moment où la lune est en K ; le triangle MCK que nous avons employé à trouver la portion MK de l'orbite (1809); servira aussi à trouver l'angle MCK , en disant $CK : R :: CM : \text{cof. } MCK$; la somme ou la différence de cet angle MCK , & de l'angle PCM que forme le méridien universel CP avec la perpendiculaire à l'orbite, donnera l'angle PCK ou PCI , dont la mesure est l'arc DI du cercle de projection. Rien n'empêche actuellement de concevoir sur le cercle ADE le globe même, dont il est la projection, & d'imaginer sur le globe un triangle sphérique PDI ; le côté PD est égal à la déclinaison du soleil, c'est-à-dire, à l'élevation de l'axe de la terre au-dessus du cercle terminateur ou du cercle de projection (1829), le côté DI est l'arc déterminé il n'y a qu'un instant sur le cercle de projection; l'angle D est droit, puisque le méridien universel CPD est perpendiculaire au cercle terminateur; on pourra donc résoudre le triangle IPD , en disant 1°. Le rayon est au cosinus de la déclinaison du soleil; ou de PD , comme le cosinus du côté DI , est au cosinus de l'hypothénuse PI , 2°. Le sinus de PD est au rayon, comme la tangente du côté DI est à la tangente de l'angle DPI . L'hypothénuse PI est la distance du lieu I au pôle P du monde, ou le complément de sa latitude, si PI est moindre que 90 degrés; mais si le côté DI étoit plus grand que 90°, l'hypothénuse PI seroit aussi plus grande, on seroit obligé de prendre le supplément à 180° de l'arc trouvé dans les tables par le calcul trigonométrique, & d'ôter 90° de ce supplément pour avoir la latitude du point I ; qui dans ce cas-là seroit une latitude méridionale. Je

Latitude du point I .

suppose que le pôle P , élevé au-dessus du cercle de projection est le pôle boréal du monde, c'est-à-dire, que la déclinaison du soleil est boréale; mais si c'étoit le pôle austral qui fût élevé au-dessus du plan de projection, il faudroit tirer le méridien ou cercle horaire PI du pôle austral & non du pôle boréal.

1932. L'angle DPI , formé au pôle du monde par le méridien PI du lieu cherché, & par la partie supérieure PD du méridien universel, servira à trouver l'angle horaire du lieu I , c'est-à-dire, sa distance au méridien universel, ou le chemin qu'il a fait & l'arc qu'il a décrit depuis son passage par le méridien universel, en y ajoutant 180 degrés; car comme le point I s'avance d'occident en orient, ou de droite à gauche vers le méridien universel PC où il arrivera à midi, l'angle DPI est sa distance au point de minuit, & l'angle horaire compté d'un midi à l'autre, est plus grand que 180° de la quantité DPI . Si le lieu dont il s'agit étoit à gauche ou à l'orient du méridien universel, comme le point F , l'angle horaire CPF seroit le supplément de l'angle DPF , trouvé par le calcul précédent.

1933. L'angle horaire pour Paris, qui est déterminé par l'heure donnée (211), étant diminué de 20 degrés, on le retranchera de l'angle horaire trouvé pour le point I , & l'on aura la longitude géographique du lieu de la terre qui y répond, comptée du premier méridien (1012).

1934. EXEMPLE. Dans l'éclipse de 1764, $CK = 1^{\circ} 24' 48''$, (1809) $CM = 39' 24''$, & $PD = 4^{\circ} 48' 50''$; on fera cette proportion: $1^{\circ} 24' 48'' : R :: 39' 24'' : \text{cof. } 62^{\circ} 18' 47''$ valeur de l'angle MCK ; on y ajoutera l'angle d'inclinaison $LCM = 5^{\circ} 44' 26''$, puisque le milieu M de l'éclipse est à l'occident de la conjonction, & le point K à l'occident du point M ; on y ajoutera l'angle de position $LCP = 23^{\circ} 0' 0''$, parce que le cercle de latitude est à l'orient du méridien vers le nord dans les signes ascendants (1847), & l'on aura $91^{\circ} 3' 13''$

Fig. 118.

(dont le supplément est $88^{\circ} 56' 47''$) pour l'angle PCI qui est égal à l'arc DI ; cet arc DI étant obtus; nous apprend que l'hypothénuse PI , & l'angle DPI le feront également, suivant les règles de la trigonométrie sphérique (3658, 3659). On fera cette proportion : $\sin. 4^{\circ} 48' 50'' : R :: \text{tang. } 88^{\circ} 56' 47'' : \text{tang. } 89^{\circ} 54' 42''$; ce qui montre que l'angle P est de $90^{\circ} 5' 18''$, & l'angle horaire du lieu I , $270^{\circ} 5' 18''$.

Le commencement de l'éclipse générale en I a été trouvé $7^h 38' 8''$ à peu-près (1809), ou $19^h 38' 8''$; en comptant d'un midi à l'autre, ce qui fait $294^{\circ} 32' 0''$ pour l'angle horaire à Paris, dont ôtant 20° , on aura $274^{\circ} 32' 0''$ pour l'angle horaire sous le premier méridien; on le retranchera de l'angle horaire du lieu I , $270^{\circ} 5' 18''$, en ajoutant 360° pour la soustraction: il restera $355^{\circ} 33' 18''$ pour la longitude géographique du lieu cherché I , (1012).

Sa situation
dans l'éclipse
de 1764.

1935. On fera aussi cette proportion $R : \cos. 4^{\circ} 48' 50'' :: \cosinus 88^{\circ} 56' 47'' : \cos. 88^{\circ} 57' 0''$, dont le supplément $91^{\circ} 3' 0''$ marque la distance du lieu I au pôle boréal du monde: ainsi ce lieu est à $1^{\circ} 3'$ de latitude australe & à $355^{\circ} 33'$ de longitude, c'est-à-dire, qu'il est situé dans le milieu de la Mer du Nord, entre la côte de Guinée & la côte du Brésil. On trouveroit par une opération semblable le point V , qui le premier verra l'éclipse centrale au lever du soleil; sa longitude est à peu-près de $332^{\circ} 28'$, & sa latitude $18^{\circ} 49'$ boréale. On trouvera ci-après le résultat du calcul de M . du Séjour, (1957); le calcul est encore le même pour trouver la position du point F & du point X , les derniers de la terre qui verront l'éclipse.

Tracer la
route de l'ombre.

1936. La trace de l'ombre de la lune sur la surface de la terre peut se marquer sur un globe ou sur une carte de géographie, en déterminant de quart-d'heure en quart-d'heure la longitude & la latitude du lieu qui doit voir l'éclipse centrale, pendant l'espace de temps compris entre ceux où la lune a été en V & en X . Commençons par le point M de la projection, & cher-

chons quel est le pays de la terre, qui projeté au point M , aura l'éclipse centrale à l'heure même du milieu de l'éclipse générale (1807).

La ligne CM , considérée comme une ligne droite de la projection, représente un arc du cercle de la terre dont elle est la projection, & qui est compris entre le point C , qui répond perpendiculairement au soleil, & le point de la terre qui est projeté en M . Or on a vu que les arcs comptés du centre de la projection ont leur sinus même pour projection (1833) : ainsi pour trouver l'arc de la terre qui répond à CM , il suffit de savoir quels sont les degrés dont CM est le sinus; l'on fera donc cette proportion : le rayon de la projection exprimé en secondes, est au sinus total, comme la perpendiculaire CM est au sinus de l'arc de la terre qui lui répond.

On considérera ensuite le triangle sphérique PCM , dont on connoît deux côtés & l'angle compris, savoir, l'arc CM que nous venons de trouver, l'arc CP , complément de la déclinaison du soleil, ou sa distance au pôle, & l'angle PCM , égal à celui que forme le méridien avec la perpendiculaire CM , ou l'équateur avec l'orbite apparente de la lune (1816), on cherchera le côté PM & l'angle CPM par les analogies suivantes, en abaissant une perpendiculaire du point M sur le méridien PC . (3696, 3697).

$R : \text{cof. } PCM :: \text{tang. } CM : \text{tang. } CZ$; on a $CP - CZ = PZ$;

$\text{Cof. } CZ : \text{cof. } PZ :: \text{cof. } CM : \text{cof. } PM$.

$\text{Sin. } PZ : \text{sin. } CZ :: \text{tang. } PCM : \text{tang. } CPM$.

Au moyen de PM & de l'angle P , on trouvera la longitude & la latitude du point M par les considérations que nous avons employées ci-dessus pour trouver celles du point I (1934).

1937. Tous les autres pays de la terre qui doivent avoir l'éclipse centrale se trouveront par une semblable opération, ou pour un moment donné, ou pour une latitude donnée, ou enfin pour une longitude prise à

Trouver le pays où l'éclipse est centrale à 1 heure donnée.

volonté : mais il est plus commode de choisir un temps donné. Supposons, par exemple, qu'à une heure fixe la lune étant en O , on demande quel est le point O de la terre où l'éclipse paroîtra centrale, c'est-à-dire; le pays qui est projeté au point O de la projection en même-temps que la lune s'y trouve; ce pays de la terre voyant tout à la fois le soleil & la lune au point O de la projection, aura une éclipse centrale.

1938. Pour connoître le côté MO , on se servira du mouvement horaire de la lune, en disant, une heure ou 60' font au mouvement horaire de la lune sur son orbite relative, comme la différence entre le temps donné & celui du milieu M de l'éclipse générale est au mouvement MO . On cherchera l'angle MCO par cette proportion : la perpendiculaire CM est au côté MO , comme le rayon est à la tangente de l'angle MCO ; cet angle combiné avec l'angle PCM que le méridien fait avec la perpendiculaire, donnera l'angle PCO ; on cherchera le côté CO , en disant : Le sinus de l'angle MCO est à MO , comme le sinus total est à CO ; ensuite, le rayon de la projection est au sinus total, comme la ligne CO est au sinus de l'arc de la terre dont elle est la projection; par ce moyen l'on a dans le triangle sphérique PCO , deux côtés PC , CO & l'angle compris PCO ; on trouvera par les analogies rapportées ci-dessus (1936), le côté PO , & l'angle au pôle CPO ; d'où l'on tirera la latitude & la longitude du point O (1934).

1939. EXEMPLE. Le 1 Avril 1764, le milieu de l'éclipse générale étant supposé à 10h 22' 41" au méridien de Paris, (1808), on demande quel pays de la terre aura l'éclipse centrale, à 10h 42' 30", c'est-à-dire, 19' 49" après le milieu de l'éclipse, on dira 1°, 60' : 27' 19" $\frac{1}{2}$:: 19' 49" : MO qui fera de 9' 2" : 2°, 39' 24" : 9' 2" :: R : tang. $MCO = 12^\circ 54' 5''$; on ôtera cet angle OCM de l'angle $PCM = 28^\circ 44' 26''$, il restera l'angle PCO 15° 50' 21"; 3°, cosin. $MCO = 12^\circ 54' 5''$: CM , 39' 24" :: R : $CO = 40' 25''$. 4°, 54' 0" : R :: 40' 25" :

25'' : sin. $48^{\circ} 27' 54''$; c'est l'arc de la terre qui répond à la projection CO . 5° , R : cof. $PCO = 15^{\circ} 50' 21''$:: $T. CO = 48^{\circ} 27' 54''$: $T.$ segment $= 47^{\circ} 21' 43''$; on ôtera ce segment $47^{\circ} 21'$ du côté $PC = 85^{\circ} 11' 10''$, il restera le second segment $37^{\circ} 49' 27''$. 6° , sin. $37^{\circ} 49' 27''$: sin. $47^{\circ} 21' 43''$:: tang. $PCO = 15^{\circ} 50' 21''$: tang. $CPO = 18^{\circ} 47' 44''$, d'où il suit que l'angle horaire du lieu O est de $341^{\circ} 12' 16''$. 7° , Enfin, cof. $47^{\circ} 21' 43''$: cof. $37^{\circ} 49' 27''$:: cof. $48^{\circ} 27' 54''$: cof. $PO = 38^{\circ} 54' 26''$; ce qui prouve que la latitude du lieu O est de $51^{\circ} 5' 34''$. A $10^h 42' 30''$ l'angle horaire pour Paris, est de $340^{\circ} 37' 30''$, & pour le premier méridien $320^{\circ} 37' 30''$, on retranchera cet angle horaire de celui du lieu $O = 341^{\circ} 12' 16''$, & il restera $20^{\circ} 34' 46''$ pour la longitude du pays cherché; ce point tombe à l'orient de Calais, qui est à $19^{\circ} 31'$ de longitude, & à $50^{\circ} 58'$ de latitude septentrionale.

Fig. 118.

1940. On peut aisément trouver par les mêmes principes une suite de pays qui auront l'éclipse d'un doigt, où de telle autre grandeur qu'on voudra : voici en quoi consistoit le procédé de l'opération graphique de M. de la Caille, (*Leçons d'astronomie*, art. 1169). Du point M (fig. 120), où est le milieu de l'éclipse, on prend MA égale à la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune; on tire par ce point A la ligne BAE parallèle à l'orbite de la lune; elle marque sur la projection une suite de points qui auront successivement un simple contact de la lune & du soleil, au nord du soleil sans aucune éclipse (1801). Du point A l'on prendra AQ d'un quart du diamètre du soleil ou de 3 doigts, & la ligne OQR marquera des pays où l'on doit voir le soleil éclipsé de trois doigts; on prendra AS égale au diamètre du soleil, & la ligne SY marquera une suite de points où l'on verra la lune entière sur le soleil, touchant le bord septentrional du soleil; la distance MS est la demi-largeur de l'espace, où l'on voit une éclipse annulaire, quand le diamètre de la lune est plus petit que celui du soleil, & une éclipse tota-

Fig. 120.

Fig. 120. le, si le diamètre de la lune est plus grand, c'est-à-dire, si le point S tombe au-dessous du point M .

1941. En suivant l'esprit de cette méthode, M. de la Caille cherche encore pour un instant donné la longitude & la latitude d'un point R de la terre qui voit l'éclipse de trois doigts, & d'un point Z qui voit les deux bords se toucher, de la même manière que l'on a déterminé sur l'orbite celui qui voyoit l'éclipse centrale (1937): la seule différence consiste à employer CQ au lieu de CM , & du reste la ligne QR est égale à la portion MH de l'orbite lunaire qui serviroit à trouver un lieu de la terre, comme H , qui voit l'éclipse centrale au même instant. Mais dans cette méthode, on néglige la différence entre l'inclinaison de l'orbite relative, & celle de l'orbite apparente; & l'on suppose que HR soit la plus courte distance de la lune H , à un point R de la projection, quoique en décrivant son parallèle ou son ellipse le point R puisse s'en approcher davantage. M. du Séjour a corrigé cette erreur dans ses méthodes, en résolvant le problème d'une manière plus rigoureuse (*Mém. de l'acad.* 1765, pag. 306; 1767, pag. 156).

1942. Au reste, M. de la Caille ne s'est servi de ces principes que pour exécuter sur une carte géographique, ainsi que dans notre Planche XIV, le type général d'une éclipse, qu'il faisoit graver dans ses éphémérides, toutes les fois qu'il y avoit à Paris éclipse de soleil; ces principes suffisoient même pour former une carte semblable à celle que *Madame le Pauté*, donna pour la grande éclipse du 1 Avril 1764 (*); où il n'est question que de donner aux astronomes un avertissement général, pour qu'on fasse des calculs plus rigoureux, dans les endroits où l'on se propose d'observer. On voit sur cette carte de Mad. le Pauté, la trace de l'ombre, qui formoit sur la terre une petite el-

Vitesse de
l'ombre.

(*) A Paris chez Latré, Graveur, rue S. Jacques, à la ville de Bordeaux.

lipse, & qui parcourroit environ 12 lieues par minute : cette vitesse est double de celle d'un boulet de canon, qui est d'environ 200 toises par seconde, ou 5 lieues par minute, (*Journal des Savans*, Avril 1769). Mais quoique les principes que je viens d'exposer fussent pour ces cas-là, cette branche du calcul des éclipses étant par elle-même curieuse & intéressante, je vais donner quelques détails de plus à ce sujet, & y appliquer la méthode des projections, soit par une opération graphique, soit par le calcul trigonométrique ; je finirai par des tables détaillées qui ont servi à construire la carte des phases de l'éclipse tracée avec soin dans la Planche XIV.

1943. Pour trouver graphiquement les phases de l'éclipse, en divers pays de la terre avec plus de précision que par le globe, il faut tracer une projection orthographique de la terre, sur un plan perpendiculaire à la ligne des centres du soleil & de la lune, telle qu'on la voit dans la Planche XIII, (*fig. 122*) ; *C* est le centre, & *CK* le rayon de la projection égal à 54' 0'' dans notre exemple ; *P* est la projection du pôle, dont la distance $CP = 54' \cos. \text{déclin.} = 53' 49''$ (1831) ; les ellipses qui représentent les parallèles de 10° 20', &c. de latitude y sont tracées, suivant la méthode de l'article 1842 ; chacune a son demi-grand axe égal au cosinus de sa latitude (1829), & le demi-petit axe égal au cos. de la latitude, multiplié par le rayon de projection, & par le sinus de la déclinaison du soleil (1828), c'est-à-dire, en commençant par l'équateur, 4' 32'', 4' 28'', 4' 16'', 3' 55'', 3' 28'', 2' 55'', 2' 16'', 1' 33'', 0' 47'', de 10 en 10 degrés.

Planche XIII.
Fig. 122.

La distance du centre *C* de la projection au centre de chaque ellipse, est égale au produit de 54', par le sinus de la latitude & le cosinus de la déclinaison (1832), ces distances prises de 10 en 10 degrés, sont de 9' 21'', 18' 24'', 26' 54'', 34' 35'', 41' 13'', 46' 36'', 50' 34'', 53' 00''. Chacune des abscisses, prise sur le grand axe, est égale au demi-axe multiplié par le sinus de l'an-

Fig. 122.

gle horaire, & chaque ordonnée (1843) égale au demi-petit axe multiplié par le cosinus de l'angle horaire ; comme dans la table suivante ; par ce moyen, il est aisé de tracer exactement chacune de ces ellipses, en supposant qu'on ne veuille pas se servir de l'opération graphique (1844) ou du compas elliptique, dont l'usage est peu commode.

TABLE des abscisses & des ordonnées des ellipses qui représentent les parallèles terrestres dans l'éclipse de 1764, en supposant le rayon de projection de 54' 0'' & la déclinaison 4° 48' 50''.

LATITUDES	Midi.		I. heure.		II. heures.		III. heures.		IV. heures.		V. heures.	
	Ab.	Ordon.	Abfc.	Ordon.	Abfc.	Ordon.	Abfc.	Ordon.	Abfc.	Ordon.	Abfc.	Ordon.
0°	0	4' 32''	13' 59''	4' 21''	27' 0''	3' 54''	38' 11''	3' 11''	46' 46''	2' 15''	52' 10''	1' 10''
10	0	4 28	13 46	4 19	26 35	3 52	37 36	3 9	46 3	2 14	51 22	1 9
20	0	4 16	13 8	4 7	25 22	3 41	35 53	3 1	43 57	2 8	49 1	1 6
30	0	3 55	12 6	3 47	23 23	3 24	33 4	2 46	40 30	1 58	45 10	1 1
40	0	3 28	10 42	3 21	20 41	3 0	29 15	2 27	35 50	1 44	39 57	0 54
50	0	2 55	8 59	2 49	17 21	2 31	24 33	2 4	30 4	1 27	33 32	0 45
60	0	2 16	6 59	2 11	13 30	1 58	19 6	1 36	23 23	1 8	26 5	0 35
70	0	1 33	4 47	1 30	9 14	1 21	13 4	1 6	16 0	0 46	17 50	0 24
80	0	0 47	2 26	0 46	4 41	0 41	6 38	0 33	8 7	0 24	9 3	0 12

1944. Toutes les ellipses des parallèles terrestres, étant ainsi tracées se trouvent divisées en heures, & il est aisé d'en tracer le contour ; elles touchent la circonférence *ABTR* du cercle de projection en deux points, l'un à l'orient, l'autre à l'occident : ces points séparent l'ellipse en deux parties, dont l'une est l'arc diurne, & l'autre l'arc nocturne ; si l'on veut savoir par le calcul à quel endroit de chaque ellipse est le point de contact du cercle de projection, il ne faut que trouver les arcs semi-diurnes pour chaque latitude, qui sont les complémens des différences ascensionnelles ; le cosinus de l'arc semi-diurne est égal à la tangente de la

latitude ; multipliée par la tangente de la déclinaison ; quand on néglige la réfraction (1026). Ces arcs semi-diurnes en degrés, depuis l'équateur jusqu'à 80 degrés de latitude sont de 90° , $90^{\circ} 51'$, $91^{\circ} 45'$, $92^{\circ} 47'$, $94^{\circ} 3'$, $95^{\circ} 46'$, $98^{\circ} 23'$, $103^{\circ} 23'$, $118^{\circ} 32'$; si on les convertit en temps, on aura l'heure & la minute qui doit se trouver dans le point de contact.

On peut chercher aussi par le calcul, à quels points du cercle de projection doivent passer les différens parallèles ; on considérera un parallèle BCK (fig. 111), dont C est le centre, BE la latitude du lieu, CT le sinus de la latitude, KT le sinus de la distance du centre T , ou du point par où passe l'équateur, au point K par où l'astre doit passer pour paroître sur le cercle terminateur ; or $\sin. TKC : TC :: R : TK$, c'est-à-dire, que le cosinus de la déclinaison, est au sinus de la latitude, comme le rayon est au sinus de la distance entre l'équateur & le point de section du parallèle terrestre, dont le rayon est BC .

Fig. 111.

1945. Dans l'éclipse du 1 Avril 1764, la déclinaison du soleil étant de $4^{\circ} 49'$; on trouve par l'analogie précédente que le parallèle de 10° touchoit le cercle de projection à $10^{\circ} 2'$ de l'équateur, celui de 20° à $20^{\circ} 4'$; celui de 30° à $30^{\circ} 7'$; celui de 40° à $40^{\circ} 10'$; celui de $48^{\circ} 50'$ à $49^{\circ} 4'$; celui de 60° à $60^{\circ} 21'$; celui de 70° à $70^{\circ} 34'$; celui de 80° à $81^{\circ} 13'$; & celui de $85^{\circ} 11'$ à 90° ; c'est-à-dire, au sommet du méridien universel de la figure, puisque la déclinaison est supposée de $4^{\circ} 49'$. Les parallèles qui sont plus éloignés de l'équateur que le complément de la déclinaison ne touchent point le cercle de projection ; mais leurs ellipses en sont éloignées au sommet où dans leur plus proche distance, d'une quantité RI égale au sinus versé de l'arc DF qui est la somme du complément DP de la déclinaison, & du complément PK de la latitude du parallèle.

On auroit pu décrire encore sur la figure 122, les parallèles de 10° & de 20° au midi de l'équateur ; mais

cela auroit rendu la figure trop grande pour ce volume

1946. Par les points de division de chaque ellipse, on a tiré d'autres ellipses qui se coupent toutes au pôle P (fig. 122); car les cercles horaires dans cette projection orthographique sont aussi des ellipses (1827); mais comme ce sont de grands cercles, ces ellipses ont toutes pour centre, le centre même de la projection, & pour grands axes des lignes égales au diamètre de la projection. Le petit axe de chacune est le produit du grand axe par le sinus de l'angle d'inclinaison, c'est-à-dire, de l'angle que fait le cercle lui-même avec la ligne des centres (1828).

Si pour décrire ces ellipses avec précision, l'on veut savoir quel angle forment les axes avec le méridien universel CP , & quelles sont les valeurs des petits axes, on imaginera un triangle sphérique, rectangle, formé par le cercle d'une heure & le méridien, avec un arc abaissé perpendiculairement du soleil sur le cercle horaire; l'angle au soleil formé par le méridien universel & par la perpendiculaire se trouvera en disant : le rayon est au cosinus de la distance du soleil au pôle comme la tangente de 15° est à la cotangente de l'angle cherché (3680); ainsi en multipliant la tangente de l'angle horaire par le sinus de la déclinaison, l'on aura la tangente de l'angle que forme le grand axe de chaque ellipse avec le méridien CP , ces angles sont dans la figure 122, de $1^\circ 17'$, $2^\circ 47'$, $4^\circ 49'$, $8^\circ 16'$, & $17^\circ 24'$. En prenant ces quantités-là sur la circonférence, à droite & à gauche du sommet R de la projection, on pourra tirer le grand axe de chaque ellipse, pour la décrire avec plus de facilité.

1947. Quand à l'inclinaison du rayon solaire ou de la ligne des centres du soleil & de la terre sur le plan du cercle horaire, elle est égale à l'arc perpendiculaire abaissé du soleil sur ce cercle; on la trouve par le même triangle sphérique, en disant (3681) : le rayon est au cosinus de la distance du soleil au pôle, comme

le sinus de l'angle horaire est au sinus du côté, qui est égal à l'inclinaison; & ce sinus multiplié par le rayon de projection donne le demi-petit axe de l'ellipse du cercle horaire. Ces demi-axes dans notre exemple, sont de $13' 56''$, $26' 54''$, $38' 3''$, $46' 36''$, $51' 59''$, pour 1^h , 2^h , 3^h , 4^h & 5^h .

Fig. 1220

1948. Ayant décrit les parallèles & les méridiens sur la projection, on tirera le cercle de latitude CT formant l'angle de position RCT (1846); il est dans cette éclipse de $23^{\circ} 0'$; on prendra CL égale à la latitude de la lune $39' 36''$; on tirera l'orbite LF faisant un angle de $84^{\circ} 15' 34''$ avec le cercle de latitude (1765). Au point L de la conjonction, on marquera $10^h 31' 23''$ qui est le temps de la conjonction; on prendra sur l'orbite le mouvement horaire relatif $27' 19'' \frac{1}{2}$ par le moyen duquel on divisera l'orbite en heures & en minutes avant & après la conjonction, depuis $7^h 35'$ jusqu'à 12 heures $30'$, c'est-à-dire, pendant toute la durée de l'éclipse.

Nous avons suffisamment expliqué la manière de trouver sur cette figure les points de la terre qui auront l'éclipse centrale (1931); la table qu'en a calculé M. du Séjour, se trouvera ci-après (1969), avec celles des autres circonstances de l'éclipse, dont nous avons à parler. Nous commencerons ici par chercher les points qui voient pour plus grande & unique phase, le contact des deux bords du soleil ou de la lune; la méthode est la même que pour trouver la grandeur de l'éclipse d'un doigt, de deux doigts, &c. Si l'on tire une ligne DEG (fig. 122) parallèle à l'orbite, qui en soit éloignée de la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune, cette ligne DEG marquera bien sur la terre une suite de points qui verront les deux bords se toucher, comme l'orbite elle-même y marque une suite de points qui voient les centres coïncider; mais il n'est pas exactement vrai que le point E de la terre qui voit le contact des bords, lorsque la lune est sur la ligne BE perpendiculaire à l'orbite, ne les a pas vu plus près, ou

Fig. 1220

Fig. 122.

qu'il ne verra pas ensuite la lune entamer le bord du soleil ; enfin il n'est pas vrai que la distance BE doive être la plus courte distance ou la plus grande phase, puisque cette plus courte distance arrive ordinairement sur une ligne inclinée à la perpendiculaire, & c'est ce que M. de la Caille avoit négligé d'observer dans ses leçons d'astron. (art. 1172), où il n'avoit pour objet que de dresser en général une figure approchée des phases de l'éclipse.

1949. Le problème des plus grandes phases données, considéré généralement, seroit impraticable, même par les méthodes directes ; mais M. du Séjour voulant résoudre ce problème dans son grand travail des éclipses a imaginé pour simplifier l'équation de prendre pour son *medium* ou pour sa donnée, l'angle que forme la ligne de la plus grande phase avec la perpendiculaire BE sur l'orbite ; cet angle étant supposé d'une certaine quantité détermine la latitude, l'heure & la quantité de la plus grande phase, par le moyen d'une équation qui a servi à construire la table de la limite de l'éclipse qui se trouvera ci-après (art. 1969). M. de Séjour trouve qu'il y auroit une erreur de $3^{\circ} 33\frac{1}{2}'$ sur la longitude & de $0^{\text{h}} 35' 49''$ sur l'heure du contact, pour la latitude de $16^{\circ} 57'$, si l'on supposoit que la plus grande phase arrive sur la perpendiculaire à l'orbite relative.

1950. Pour trouver, par la méthode graphique ; cette ligne de la plus grande phase sous une latitude donnée, on peut faire varier l'orbite avec ses divisions, jusqu'à ce qu'on ait rencontré deux heures pareilles, l'une sur le parallèle & l'autre sur l'orbite, qui soient éloignées de la somme des demi-diamètres, & en même temps plus près que les autres points semblables qui précèdent & qui suivent. Pour cela on trace l'orbite $RB M$ sur un carton séparé de la figure ; en faisant mouvoir cette orbite BL de la lune vers la droite, de la valeur, par exemple, de $50'$, enforte que ce soit le point de $11^{\text{h}} 21'$, au lieu de $10^{\text{h}} 31'$, qui tombe en L sur le cercle de latitude, je trouve après quelques essais qu'en mettant une pointe du compas sous l'équateur à $9^{\text{h}} 48'$ du

du matin, avec une ouverture égale à la somme des demi-diamètres, elle tombe aussi à $9^h 48'$ de l'orbite ainsi déplacée, & qu'en la portant sur $9^h 45'$, & sur $9^h 50'$, la distance est sensiblement la même, enforte que $9^h 48'$ est véritablement le temps de la plus courte distance & de la plus grande phase, réduite à un simple contact, sous l'équateur; pour un pays qui compte $50'$ de plus, ou qui est plus oriental que Paris de $0^h 50'$, c'est-à-dire, de $12^\circ \frac{1}{2}$ & qui a par conséquent $32^\circ \frac{1}{2}$ de longitude.

195 1. Au lieu de faire promener l'orbite, on peut aussi se contenter de chercher un point sur l'orbite, & un sur le parallèle, où la distance donnée soit sensiblement la même, en faisant varier chacun de ces points de cinq minutes; on trouve que l'heure de l'orbite est alors plus petite que l'heure du parallèle, de $50'$ de temps; on en conclut que le lieu cherché est plus oriental que Paris de $50'$ de temps.

195 2. Si je fais la même opération sous le parallèle de 30° , & en faisant avancer l'orbite mobile de $2^h 39'$ sur la droite, enforte qu'elle soit coupée par le cercle de latitude à $1^h 10' \frac{1}{2}$, je vois en essayant différentes heures sur le parallèle, que si je mets les pointes de compas sur $1^h 49'$ du soir, tant au parallèle qu'à l'orbite, la distance sera égale à la somme des demi-diamètres, & que ce sera la plus courte qui ait lieu avant & après, enforte que le contact y arrivera, comme plus grande phase à $1^h 49'$; or ce pays ayant la conjonction $2^h 39'$ plutôt que Paris, est de $39^\circ \frac{3}{4}$ plus oriental, ainsi il a $59^\circ \frac{3}{4}$ de longitude. On trouveroit de même la suite de tous les points qui sont dans la table de la limite de l'éclipse (1969).

195 3. Si l'on tire une ligne parallèle à l'orbite, qui soit au-dessus de la ligne du contact GED , de la douzième partie du diamètre du soleil, elle marquera de même une suite de points qui doivent avoir l'éclipse d'un doigt. Mais pour avoir des points où ce soit la plus grande phase, & afin de trouver le milieu de l'éclipse pour chaque point, il faut faire le même tâtonnement que

pour le contact, en portant sur divers parallèles & sur l'orbite mobile une ouverture de compas égale à la somme des demi-diamètres, moins la douzième partie du diamètre du soleil, & ainsi des autres phases.

1954. Pour appliquer le calcul à ces opérations graphiques, il faudroit chercher la distance apparente des centres pour chaque lieu trouvé, par les méthodes ordinaires (1870, 1876 ou 1881), & recommencer ce calcul pour deux ou trois instans à chaque latitude, afin de reconnoître si l'on a trouvé exactement l'heure de la plus grande phase donnée, par exemple, l'heure où l'on y a observé le milieu de l'éclipse, & sa grandeur d'un doigt.

Faisant le même calcul pour différentes latitudes ; on aura une suite de points où doit paroître le contact des deux bords, & l'on en tracera la courbe sur une carte, comme celle de la Planche XIV. Ce calcul seroit long, mais on ne le fait que pour un petit nombre de points. D'ailleurs on ne cherche communément ces lignes que par pure curiosité, pour avertir, dans les éphémérides, les habitans des pays où l'on peut espérer de voir une éclipse ; cela ne vaut guère la peine de chercher une exactitude plus grande que celle des lignes droites parallèles à l'orbite, ou des opérations graphiques dont je viens d'indiquer la méthode. Mais dans le cas où l'on voudroit même calculer ces distances exactement, je crois que la méthode indirecte que je propose, seroit encore la plus courte.

1955. Il en est à peu-près de même quand on cherche le point de la terre qui doit voir le contact des deux bords au lever du soleil, ou qui voit tout à la fois le commencement, le milieu & la fin de l'éclipse au lever du soleil, en un seul instant & comme plus grande phase ; le point *B* (*fig.* 120) ou le cercle de projection est coupé par la ligne *AB* du contact est bien un point où l'on voit le commencement de l'éclipse au lever du soleil, mais il n'est pas exactement vrai que ce contact y soit la plus grande phase, & que ce soit le plus mé-

ridional de tous les lieux de la terre où l'on voit l'éclipse ; il est nécessaire d'y appliquer les mêmes opérations que pour les autres points des lignes de limites , & l'on trouvera , comme M. du Séjour , qu'à $19^{\circ} 36' 33''$ de latitude australe , le contact arrivera au lever du soleil a $6^h 6' 48''$ sous une longitude de $346^{\circ} 3' 49''$. Quant au point le plus méridional de tous ceux qui ont vu l'éclipse , on trouve qu'à $20^{\circ} 5' 47''$ de latitude , le contact est arrivé à $5^h 25'$ du matin , dans un lieu plus occidental que Paris de $3^h 2'$ ou $45^{\circ} \frac{1}{2}$, c'est-à-dire qui est à $334^{\circ} \frac{1}{2}$ de longitude. C'est le point marqué *B* dans la figure 123. On verra la différence qu'il y a entre ce point de la ligne de limite , & le point dont la projection est en *B* (fig. 120) , si l'on calcule la longitude & la latitude de celui-ci. Si *CM* est de $39' 24''$ (1934) , *AM* = $30' 47''$, *CA* = $8' 37''$, *CB* = $54' 0''$, on aura l'angle *ACB* = $80^{\circ} 49'$, ôtant l'angle *ACF* = $62^{\circ} 19'$ (1934) on a l'arc *FB* = $18^{\circ} 30'$; connoissant l'arc *FB* , on a la latitude du parallèle qui passe au point *B* du cercle de projection ; car $\sin. \text{latit.} = \sin. BF \cos. \text{déclin.}$ (1943) ; cette latitude est de $18^{\circ} 26'$. Pour trouver la longitude de ce point-là , on cherchera l'angle au pole , ou l'arc semi-diurne , dont le cosinus = tang. déc. tang. lat. = $88^{\circ} 23'$; on cherchera aussi *AB* qui réduit en temps de l'orbite donnera $1^h 57' 3''$, ainsi la lune étoit en *B* a $8^h 25' 38''$; l'angle horaire pour Paris étoit donc $53^{\circ} 35' \frac{1}{2}$; il surpasse celui du lieu *B* de $34^{\circ} 47' \frac{1}{2}$, & puisque ce sont des angles du matin , le point *B* est plus occidental que Paris , & sa longitude est $345^{\circ} 12' \frac{1}{2}$. Cette longitude est moindre de $52'$ que celle qu'on a trouvé en calculant rigoureusement le point qui doit voir le contact pour plus grande phase , & au lever du soleil.

Fig. 120.

1956. Le point de la plus petite phase est un autre cas assez simple , du problème des phases : nous avons vu qu'au midi il y a une suite de points où se voit le contact du bord austral de la lune avec le bord boréal du soleil ; mais l'attouchement du bord boréal

Fig. 118.

de la lune, n'avoit point lieu en 1764; la plus proche distance des centres n'a pû être plus grande pour les pays septentrionaux que la ligne MH (fig. 118), différence entre le rayon de la projection & la plus courte distance. Le pays dont le parallèle touche le cercle de projection en H , & qui voit le milieu de l'éclipse au coucher du soleil, voit aussi exactement la plus petite distance possible pour ce point-là, puisque son mouvement est parallèle à l'orbite de la lune, & la plus petite phase qui soit possible du côté du nord, sur la surface de la terre. Pour trouver la position géographique du point M , je suppose l'angle $PCM=28^{\circ} 44'$, est $HE=62^{\circ} 19'$, le sinus de cet arc multiplié par le cosinus de la déclinaison donne le sinus de la latitude du point de la terre, dont le parallèle touche en H le cercle de projection, & il se trouve de $61^{\circ} 56'$. L'arc semi-diurne sous cette latitude est $99^{\circ} 5'$; la lune étant en M à $10^{\text{h}} 22' 41''$, l'angle horaire pour Paris, n'est que de $24^{\circ} 20'$, ainsi le lieu cherché est de $74^{\circ} 45'$ à l'occident de Paris; c'est-à-dire, à $305^{\circ} 15'$ de longitude; c'est le point boréal de la terre qui voit la plus petite phase possible; la plus grande distance des centres y est de $14' 36''$, ou de 5 doigts & demi, c'est-à-dire, égale à MH , au coucher du soleil. C'est donc sous le parallèle de $61^{\circ} 56'$ à l'endroit marqué A dans la carte de l'éclipse, Planche XIV, que doivent se terminer toutes les lignes des phases qui ne diminuent pas au-delà de 6 doigts & un quart. Ce pays est dans la terre de Labrador, à l'orient de la Baie d'Hudson, pour l'éclipse de 1764.

1957. Après avoir indiqué la manière de tracer la ligne des phases sur la terre par longitudes & latitudes, nous allons parler des *courbes d'illumination* qui marquent les limites de tous les pays où peut s'observer une éclipse.

Milieu de
l'éclipse au lever
du soleil.

TROUVER les lieux où le milieu de l'éclipse arrive au lever du soleil. Le point $9^{\text{h}} 1' 9''$ de l'orbite lunaire coupe le cercle de projection sur la droite vers l'endroit où

ce cercle est touché par l'ellipse ou le parallèle de $18^{\circ} 5'$ de latitude, or le soleil ayant $4^{\circ} 48' 50''$ de déclinaison se leve à $5^{\text{h}} 53' 45''$ sous cette latitude, son arc semi-diurne étant de $6^{\text{h}} 6' 15''$; ainsi le point qui se trouvera sur le bord du cercle à $9^{\text{h}} 1' 9''$ de Paris, comptera $5^{\text{h}} 53' 45''$; la différence est $3^{\text{h}} 7' 24''$ dont il comptera moins que Paris, ou dont il sera plus occidental que Paris; $3^{\text{h}} 7'$ font $46^{\circ} 51'$, donc sa longitude sera $333^{\circ} 9'$ comptée du premier méridien; c'est le résultat du calcul de M. du Séjour, (*Mém. acad.* 1766, pag. 258). Ce point est entre les Isles du Cap-Verd, & celles de l'Amérique, & c'est-là le premier endroit de la terre où l'on a commencé de voir l'éclipse centrale au lever du soleil; il est marqué *C* dans la carte, Planche XIV.

1958. On observera que le point d'intersection *B* (*fig.* 122) de l'orbite avec le cercle de projection, n'est pas à 18° de l'équateur ou du point *A*; mais qu'il est le point où le parallèle de 18° coupe le plan de projection; il représente le point de la terre dont nous avons donné le calcul (1944); ce point *B* est celui où l'arc diurne est séparé de l'arc nocturne par le plan d'illumination perpendiculaire au rayon du soleil. Les divisions marquées 10° , 20° , &c. sur le cercle *AP* ne font pas des arcs de 10° & de 20° pris sur ce cercle; mais les points où il rencontre les parallèles qui font à 10° & à 20° de l'équateur; aussi le sommet *R* de ce cercle au lieu d'être marqué de 90° , répond à $85^{\circ} 11'$ complément de la déclinaison du soleil, parce qu'il est touché par le parallèle de $85^{\circ} 11'$ qui est tout entier au-dessus du cercle d'illumination & du cercle de projection; mais on n'a pu le représenter dans la figure, à cause de son extrême petitesse.

1959. Du côté de l'orient l'orbite doit couper le cercle de projection, à $11^{\text{h}} 43' 23''$, à l'endroit où il est touché par le parallèle de $75^{\circ} 7' 22''$ de latitude; il est aisé d'en conclure la longitude de ce point ou du pays qui le dernier de tous a vu l'éclipse centrale, ou

Fig. 122.

qui l'a vue au coucher du soleil. Cette longitude est de $132^{\circ} 25'$; ce point est situé au nord de la Chine, & il est marqué *D* dans la carte de l'éclipse, Planche XIV. On a vu ci-devant la manière de trouver rigoureusement par la trigonométrie la suite des points de l'éclipse centrale (1936). M. du Séjour, a résolu ce problème & un grand nombre d'autres par ses méthodes analytiques, de la manière la plus exacte & la plus générale (*Mém. acad.* 1766, pag. 187 & suiv.).

Fig. 123.

1960. La courbe du milieu de l'éclipse au lever ou au coucher du soleil, où *BCADM* (fig. 123); ne peut se trouver par un procédé aussi simple; celle qui est marquée de *B* en *H* sur la Planche XIV, n'est pas la suite des points qui se lèvent ou qui voient le soleil quand la lune est au milieu *M* de son orbite (fig. 122), dans le moment du milieu de l'éclipse générale, c'est la suite des points qui voient au lever du soleil la plus grande phase qu'ils aient à voir; c'est pourquoi toutes les courbes des phases de trois doigts, de six doigts, &c. se terminent sur cette ligne *BCADM* (fig. 123); où elles marquent les points de la terre qui voient la plus grande phase de trois doigts au lever du soleil, de six doigts au lever, &c.

Pour trouver sur un parallèle quelconque le point où passe cette courbe du milieu de l'éclipse au lever du soleil; il faut pour chaque ligne des phases trouver comme dans les articles 1950, 1954, un point de l'orbite & un point de l'ellipse éloignés de la quantité d'une phase quelconque, & tels que pendant quelques minutes, la lune soit à la même distance du parallèle terrestre considéré vers l'endroit où il touche le cercle de projection, & où par conséquent arrive le lever ou le coucher du soleil. On trouvera de même ci-après la table des pays qui doivent avoir le milieu de l'éclipse au lever ou au coucher du soleil; M. du Séjour, a traité cette matière analytiquement dans les *Mémoires de* 1765, pag. 322.

1961. On a coutume de tracer aussi sur la carte

géographique d'une éclipse la courbe de tous le pays où l'éclipse commence & finit, soit au lever, soit au coucher du soleil, on la voit dans la Planche XIV, sous la forme d'un huit de chiffre, dont le nœud est près du pôle, & qui s'étend depuis la Tartarie jusqu'au Brésil.

Commencement au lever du soleil.

Pour tracer cette courbe, on cherche successivement les points où elle coupe les divers parallèles de la terre : on choisit un parallèle quelconque, par exemple, l'équateur qui passe au point *A* du cercle de projection (fig. 122) ; on prend une ouverture de compas égale à la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune, & mettant l'une des pointes en *A*, on fait avec l'autre une intersection sur l'orbite de la lune, qui tombe en *R* à $7^{\text{h}} 37' \frac{1}{2}$, l'arc semi-diurne est de $6^{\text{h}} 0'$; car on néglige ici l'effet des réfractions, ainsi le point *A* de la terre compte $6^{\text{h}} 0'$ du matin, tandis qu'il est $7^{\text{h}} 37' \frac{1}{2}$ à Paris ; donc ce lieu est $1^{\text{h}} 37' \frac{1}{2}$ à l'orient de Paris, c'est-à-dire, que sa longitude est de $355^{\circ} 37' \frac{1}{2}$. Cette opération est exacte & n'exige point de tâtonnement : il est sûr que ce point *A* verra les deux bords du soleil & de la lune se toucher au lever du soleil ; il pourra voir ensuite une plus grande éclipse, mais cela n'intéresse pas la question présente. Si l'on fait l'intersection à gauche avec la même ouverture de compas, elle doit tomber sur $9^{\text{h}} 39' \frac{1}{3}$, c'est l'heure qu'il étoit à Paris, lorsque la lune étoit dans ce point de son orbite ; mais il étoit $6^{\text{h}} 0'$ du matin pour le point de l'équateur qui se levoit en *A*, donc ce point est à $3^{\text{h}} 39' \frac{1}{3}$ à l'occident de Paris, ou à $325^{\circ} 10'$ de longitude, peu éloigné de Cayenne ; M. du Séjour trouve $325^{\circ} 14' 0''$ de longitude.

Fig. 122.

1962. On trouvera de même sous les autres parallèles, à l'occident de la projection la longitude des lieux qui verront le commencement & la fin de l'éclipse au lever du soleil, on en trouvera ci-après une table exacte, calculée par M. du Séjour. En faisant la même chose sur le bord oriental du cercle de projection sous

chaque parallèle, on trouvera les longitudes des lieux qui doivent avoir le commencement ou la fin de l'éclipse au coucher du soleil; le commencement en prenant les intersections à droite sur l'orbite lunaire, la fin en les faisant sur la partie gauche ou sur l'extrémité orientale de l'orbite.

Courbe
singulière.

Planche XIV.
Fig. 123.

1963. Quand tous ces points du commencement & de la fin de l'éclipse au lever & au coucher du soleil sont rapportés sur un globe, ou sur une carte géographique, il en résulte une courbe singulière qui ressemble quelquefois à un huit de chiffre, quelquefois aussi elle ne contient qu'un seul ovale, ou deux ovales séparés; M. du Séjour donnera toutes les propriétés géométriques & astronomiques de ces courbes, les points de croix, d'inflexion, de rebroussement, les points isolés, &c. dans les *Mémoires* de 1769, comme il l'a annoncé dans ceux de 1768, pag. 187 & 188. Celle que l'on voit dans la carte, Planche XIV, (fig. 123) a vers le point *K* au-dessus du pôle arctique, un nœud ou intersection formée par un point triple, à l'endroit de la terre, où le soleil ne fait que se coucher un instant à minuit, ou rase l'horizon, ce qui arrive sous le parallèle de $85^{\circ} 11'$ complément de la déclinaison du soleil ce jour-là. Pour avoir la longitude de ce méridien, M. de la Caille (art. 1177), suppose qu'il faut prendre le point *M* (fig. 122), où la perpendiculaire coupe l'orbite de la lune, il est marqué $10^{\text{h}} 22' 41''$, c'est-à-dire, selon cet Auteur, le lieu qui avoit midi quand la lune étoit en *M*; or il comptoit $1^{\text{h}} 37' 19''$ de moins que Paris, il étoit donc de $24^{\circ} \frac{1}{3}$ plus oriental, c'est-à-dire, qu'il avoit $44^{\circ} \frac{1}{3}$ de longitude. Mais observons que le point, qui en se couchant & se levant, à minuit au-delà du pôle *P* voit le commencement de l'éclipse, ne verra point la fin à ce même moment, à moins que toute l'éclipse ne fût réduite à un simple contact pour ce point-là, ce qui forme un cas unique, & n'avoit pas lieu en 1764; de même la ligne *BCADM*, qui marque sur le globe le

le milieu au lever & au coucher du soleil, ne peut pas être coupée en un même point par les 2 lignes courbes, dont l'une marque le commencement au lever & au coucher du soleil, & l'autre la fin au lever & au coucher du soleil; celle du commencement au lever du soleil se termine & se joint à celle du commencement au coucher du soleil, lorsque la lune est vers le point $10^h 14'$ (*fig. 122*), éloignée du sommet R de la projection de $30' 48''$, ou de la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune; la ligne de la fin au lever se termine, & celle de la fin au coucher commence, lorsque la lune est vers $12^h 27'$, éloignée du point R vers l'orient de la somme des demi-diamètres; les deux premières se joignent au point G de la terre (*fig. 124*), & les deux dernières en un point I , beaucoup plus occidental.

Fig. 122.

Fig. 124.

1964. Pour déterminer sur la terre ces deux points G & I , l'on remarquera d'abord qu'ils sont sur le parallèle de $85^\circ 11'$ où le soleil ne fait que raser l'horizon; mais ils sont à des longitudes fort différentes. La lune étant au point de l'orbite marqué $10^h 14\frac{1}{3}'$ (*fig. 122*), on a $10^h 14\frac{1}{3}'$ à Paris, en comptant depuis minuit, & le point qui est en R comptant 0^h , il compte moins, il a moins de longitude; il est plus occidental de $10^h 14\frac{1}{3}'$ ou $153^\circ 35'$, sa longitude est donc de $226^\circ 25'$. C'est le point G (*fig. 124*), qui est commun aux lignes du commencement au lever, & du commencement au coucher. On trouvera de même le point I où se réunissent les courbes de la fin au lever, & de la fin au coucher; car la lune étant au point de son orbite marqué $12^h 25'$, est éloignée du point R de la somme des demi-diamètres, & le lieu de la terre qui pour lors est arrivé en R , comptant $12^h 25'$ de moins, a aussi une longitude moindre de $186^\circ \frac{1}{4}$; sa longitude est donc de $193^\circ 45'$; M. du Séjour trouve $193^\circ 49\frac{1}{2}'$, comme on le verra dans la table. Sous le parallèle de $85^\circ 11'$, il faut distinguer 3 points au lieu d'un seul qui est indiqué dans la figure de M. de la Caille.

Fig. 124.

Le premier est à $226^{\circ} 24'$ de longitude, il voit le commencement au lever & au coucher du soleil; le dernier est à $193^{\circ} 49'$, il voit la fin au lever & au coucher du soleil; entre ces deux points est un lieu intermédiaire qui voit le milieu où la plus grande phase au lever & au coucher du soleil, il est marqué H dans la figure 124; c'est l'endroit où le parallèle de $85^{\circ} 11'$, est touché par la ligne du milieu, & ce point de contact sépare le milieu au lever d'avec le milieu au coucher.

Fig. 120.

1965. Ce lieu de la terre qui doit voir le milieu de l'éclipse au lever & au coucher du soleil, est aussi sur le parallèle dont la latitude est égale au complément de la déclinaison du soleil $85^{\circ} 11'$; ou suivant M . du Séjour, $85^{\circ} 14'$; c'est le lieu qui se trouve en L (fig. 120), lorsque la lune est aux environs du point N , où aboutit la perpendiculaire LN ; cette ligne exprime à peu-près la plus grande phase ou la plus courte distance possible pour le point L , & c'est au moment du minuit qui joint le lever avec le coucher du soleil. Pour savoir à quelle heure la lune étoit en N , on employe les triangles semblables CMT , LTN dans lesquels on connoît $CT = 44' 56''$, $TM = 21' 36''$, $CL = 54' 0''$, & l'on fait cette proportion $CT:TM::CL:NM$, que l'on trouve répondre à $57' 0''$ de temps; ce temps ajouté avec celui du milieu de l'éclipse générale en M , $10^h 22' 41''$, donne $11^h 19' 41''$ pour l'heure qu'il étoit à Paris, lorsque la lune étoit en N ; & comme l'on comptoit 0^h dans le lieu L , il s'ensuit qu'il étoit plus occidental que Paris, de $11^h 19' 41''$ ou de $169^{\circ} 55' \frac{1}{2}$; ainsi sa longitude étoit de $210^{\circ} 4' 30''$.

1966. A parler exactement, ce n'est pas au point N que la distance LN est réellement la plus courte possible pour le point L ; mais comme le mouvement en L est toujours très-petit, & que l'inclinaison de l'orbite TN , par rapport à la tangente en L ne va jamais qu'à 29° , il n'y a pas d'erreur sensible; je trouve, par exemple, que dans le cas où la déclinaison seroit de 10° , & l'inclinaison de 27° , la perpendiculaire LN

ne différeroit de la ligne de la plus grande phase que de 2° , parce que le mouvement sur l'ellipse étant 12 fois moindre que celui de la lune, il faut que le cosinus de l'angle que forme la ligne LN avec l'orbite, soit 12 fois moindre que le cosinus de l'angle formé par cette même ligne LN avec la tangente en L ; or les deux angles étant assujettis à faire entr'eux 153° , qui est le supplément de 27° , il n'y a que des angles de 88° & de 65° , qui ayant leur somme égale à 153° , ayent aussi leurs cosinus dans le rapport de 1 à 12.

On voit, par ce qui précède, combien le point du milieu de l'éclipse au lever du soleil, est éloigné du point M qui, suivant M. de la Caille, marquoit sur l'orbite la longitude du lieu où devoient se couper les lignes du commencement & de la fin de l'éclipse au lever & au coucher du soleil.

1967. Ces courbes d'illumination que l'on voit dans la carte, (*fig. 123*) paroissent d'abord assez bizarres; mais quelques considérations sur la nature du phénomène qu'elles représentent, feront sentir les raisons générales de leur situation & de leur contour. Les courbes du coucher sont plus vers la droite, où plus orientales que celles du lever, parce que les pays qui quittent déjà l'horizon, quand l'éclipse commence ont plus de longitude & sont plus orientaux que ceux qui y arrivent, ou qui ont le soleil levant. Les courbes du coucher sont aussi plus au nord que celle du lever, cela arrive en général dans les signes ascendants, surtout quand la lune est en même-temps dans son nœud ascendant; car alors elle va en se rapprochant du nord depuis le commencement jusqu'à la fin de l'éclipse; le mouvement de l'ombre tend vers le nord, & les pays qui en se couchant sont éclipsés sur la gauche ou sur la partie orientale RU de la figure 122, sont plus au nord que ceux qui ont vu l'éclipse en se levant dans la partie droite $GABT$.

Fig. 123

Le pays situé en B , qui est à peu-près le plus méridional de tous ceux qui peuvent voir l'éclipse au soleil

Fig. 123.

levant ne voit qu'un contact, ou un instant d'éclipse, & ce pays voit tout à la fois le commencement, le milieu & la fin; ainsi les trois courbes commencent en un point *B*, qui est à l'occident de la figure, parce que la lune arrivant par l'occident, les pays les plus occidentaux sont ceux qui voient l'éclipse les premiers.

Dans des pays un peu plus septentrionaux, la lune étant un peu plus basse, il y a un peu plus de parallaxe, la lune mord davantage sur le soleil, l'éclipse y dure plus long-temps, il se passe plus de temps entre le commencement & la fin; il y a donc plus d'espace entre le lieu *E* qui se leve quand l'éclipse commence, & le lieu *F* qui se leve quand l'éclipse finit; voilà pourquoi la courbe s'élargit & se renfle en *E* & en *F*; mais le point *E* qui se leve ou qui arrive sur le cercle terminateur, parallèle au plan de projection, quand l'éclipse commence; est plus occidental que celui qui se leve quand l'éclipse finit, & la distance de ces deux points, où la largeur de la courbe répond à la plus grande durée de l'éclipse, & à la petitesse des degrés de longitude qui fait que la courbe occupe moins d'espace; la plus grande largeur en longitude est à $18^{\circ} 5' 24''$ de latit. comme on le verra dans la table, pag. 554. En arrivant au parallèle de $85^{\circ} 11'$, le soleil ne se couche qu'un instant, donc les trois points qui séparent la partie droite & la partie gauche de chaque courbe; c'est-à-dire, où l'on voit le commencement, le milieu, ou la fin de l'éclipse, au lever & tout à la fois au coucher du soleil doivent être sur ce cercle-là; & les courbes qui marquent la suite de ces points doivent toucher sa circonférence, voilà pourquoi les 3 courbes se rapprochent & se terminent sur ce parallèle, vers le nord, en 3 points, dont l'un *G* est commun aux courbes du lever & du coucher au commencement, le second *H* appartient aux courbes du milieu de l'éclipse au lever & au coucher, le troisième *I* est celui du lever & du coucher à la fin de l'éclipse, à $193^{\circ} 49'$ de longitude.

Trois points
de contact.

1968. Les deux courbes du milieu de l'éclipse ne doivent pas se rencontrer au même point que celles du commencement & de la fin ; car les pays qui ont $85^{\circ} 11'$ de latitude arrivant l'un après l'autre au nord de la projection , dans le point *R* du sommet (*fig.* 122) ; celui qui y arrive quand l'éclipse commence à moins de longitude que celui qui y arrive quand elle est à son milieu , & la différence est proportionnelle au nombre de degrés qui répondent à la demi-durée de l'éclipse , pour les pays les plus septentrionaux de tous , où la lune ne paroîtra qu'à $14\frac{1}{2}$ minutes du soleil (1956).

Fig. 122.

La courbe de la fin au lever , coupe celle du commencement au coucher , en un point *K* très-voisin du parallèle de $85^{\circ} 11'$, parce que le pays qui après avoir vu l'éclipse commencer au coucher du soleil , la voit finir le lendemain matin au lever du soleil , a nécessairement une nuit fort courte ; il est par conséquent situé à une latitude fort grande , & fort peu éloignée de celle où le soleil ne se couche point , il est à $169^{\circ} 47' 38''$ de longitude. Il y a encore deux autres points d'intersection , enforte qu'on doit considérer six points , là où les figures ordinaires semblent n'en indiquer qu'un seul. Mais pour qu'on apperçoive distinctement tous ces points d'attouchement & d'intersection qui étoient confondus en un seul point , dans les figures de *M.* de la Caille , je les ai représentés séparément sur le côté de la Planche XIV. Le cercle *GHI* est le parallèle de $85^{\circ} 11'$, où le soleil ne fait que raser l'horizon le jour de l'éclipse ; les points *G* , *H* , *I* sont les points où ce cercle est touché par les courbes du commencement , du milieu & de la fin ; le point *R* est celui qui voit le commencement au coucher , & ensuite le milieu au lever du soleil ; le point *S* est celui qui voit le milieu au coucher , & ensuite la fin au lever ; le point *K* est celui qui voit le commencement au coucher , & ensuite la fin au lever du soleil , il est à $85^{\circ} 3' 28''$ de latitude , & à $210^{\circ} 12'$ de longitude ; au reste la différence de ces points , quoiqu'elle fasse plus de 30° en longi-

tude, n'occupe pas sur la figure un espace sensible.

Si la déclinaison du soleil étoit australe, ce seroit à la partie supérieure du parallèle de 85° , & non pas à la partie inférieure, que se feroient les contacts *G*, *H*, *I*, des trois courbes, & la ligne du commencement au lever, couperoit celle de la fin au coucher, de la même manière que celle du commencement au coucher, coupe la courbe de la fin au lever du soleil.

L'heure où arrive chaque phase, se trouve naturellement par les calculs que nous avons indiqués, ainsi il est facile de tirer sur la figure de l'éclipse, la courbe qui marque tous les pays où chaque phase paroitra à six heures du matin, comme on le voit sur la gauche dans la figure 123, & ainsi de toutes les autres heures, jusqu'à celles du soir qui sont sur la droite de la figure; mais il faut observer que ces lignes des heures ne se rapportent pas aux lignes du commencement & de la fin de l'éclipse, mais seulement à celles du milieu ou des plus grandes phases. On pourroit marquer les heures sur les lignes du commencement & de la fin, puisque ce sont les arcs semi-diurnes de chaque latitude qui indiquent l'heure du lever & du coucher du soleil.

1969. Les opérations graphiques, aidées de quelques calculs assez simples peuvent suffire pour trouver les courbes d'illumination, celles des différentes phases, & les principales affections des six courbes, qu'aucun Auteur d'astronomie n'avoit encore expliquées: il y auroit de plus grands détails à donner sur cet article, s'il ne falloit mettre des bornes à cet ouvrage. Mais pour donner un modele des calculs que l'on peut faire dans ces cas-là, pour mettre dans l'exemple que j'ai choisi toute l'exactitude possible, & pour qu'on voie précisément à quels points de la figure 123, doivent passer toutes les courbes des phases qui y sont représentées, je vais donner une table de tous ces points, par longitudes & latitudes, calculée avec soin par les formules rigoureuses de M. du Séjour, qui sont dans les mémoires de 1765 & 1767. C'est M. du Vaucel, déjà connu par

divers mémoires d'astronomie, qui a bien voulu se charger de calculer les courbes des phases, & de placer ces courbes sur une projection orthographique d'une partie du globe, où la partie géographique a été dirigée par M. Buache, premier Géographe du Roi. Les tables de l'éclipse centrale & annulaire, avoient été calculées par M. du Séjour, (*Mém. acad.* 1766, p. 258, 1767, p. 192), de même que la limite de l'éclipse du côté du midi, (*Mém.* 1768, pag. 95), & une partie de la courbe du commencement & de la fin; on trouvera dans les mémoires de 1769, lorsqu'ils paroîtront, la théorie de cette courbe d'illumination (1967).

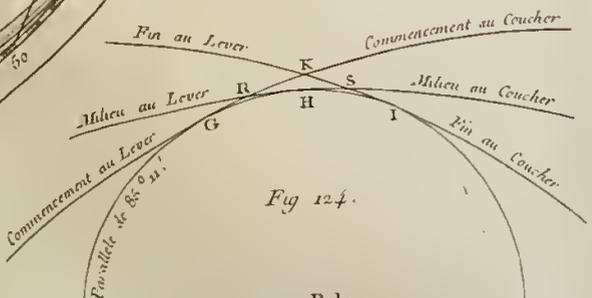
HEURES dans chaque lieu.			Longitude en supp. celle de Paris 20°.	Latit. géog. septentrionale.
5 ^h 53' 45''	Lever		333° 8' 30''	18° 5' 24''
6 0 0	du Soleil.		334 41 30	18 14 7
7 0 0		348 2 15	21 7 58
8 0 0		358 44 45	26 38 4
9 0 0		7 17 30	34 26 55
9 21 12		9 57 22	37 38 11
9 30 0		11 2 15	39 0 20
10 0 0		14 44 0	43 48 22
10 30 0		18 34 0	48 38 54
10 31 16	Latitude		18 43 55	48 51 0
11 0 0	de Paris.		22 43 30	53 20 1
11 30 0		27 20 30	57 40 19
Midi		32 28 0	61 31 26
1 0 0		44 6 30	67 34 14
2 0 0		57 5 15	71 36 19
3 0 0		70 52 0	74 7 20
4 0 0		85 6 15	75 33 41
5 0 0		99 36 45	76 11 52
5 25 12	Maximum		105 45 45	76 15 26
6 0 0	de Latitude.		114 18 15	76 8 42
7 0 0		129 9 45	75 23 31
7 13 4	Au coucher du Soleil.		132 25 15	75 7 22

ECLIPSE ANNULAIRE, ou contact intérieur des bords du Soleil & de la Lune, en supposant l'inflexion de $4''\frac{1}{2}$, & le diamètre de la Lune augmenté à raison de sa hauteur.

AU MIDI DU SOLEIL.			AU NORD DU SOLEIL.		
Latitude.	Longitude.	Heure dans le lieu de l'observ.	Latitude.	Longitude.	Heure pour le lieu de l'observ.
38° 0'	7° 26' 29''	9h 9' 7''	36° 0'	11° 17' 0''	5h 24' 19''
40 0	9 3 15	9 21 59	40 0	14 25 15	9 49 58
42 0	10 36 32	9 34 31	42 0	15 57 45	10 2 34
44 0	12 7 47	9 46 48	44 0	17 31 29	10 15 8
45 0	12 53 8	9 52 53	45 0	18 19 5	10 21 26
46 0	13 38 31	9 58 57	46 0	19 7 15	10 27 44
47 0	14 24 11	10 5 0	47 0	19 56 30	10 34 5
48 0	15 10 30	10 11 2	48 0	20 47 40	10 40 29
48 30	15 33 53	10 14 3	48 30	21 13 50	10 43 43
49 0	15 57 25	10 17 4	49 0	21 40 20	10 46 58
50 0	16 45 0	10 23 8	50 0	22 34 30	10 53 31
51 0	17 33 40	10 29 13	52 0	24 28 50	11 6 53
52 0	18 23 55	10 35 22	56 0	28 50 20	11 35 24
54 0	20 9 25	10 47 50	60 0	34 14 40	12 7 34

LIMITE de l'Eclipse, ou table des lieux où l'on a dû observer le contact extérieur des limbes au nord du Soleil, calculée pour les différentes valeurs de l'angle que fait la ligne de la plus grande phase, avec la perpendiculaire à l'orbite relative (1949) Mém. de l'acad. 1768, pag. 172.

Angle supposé.	Longitude.	Latitude vraie.	Heure dans chaque lieu.
0°	334° 31' 0''	20° 5' 47'' Méridion.	5h 25' 12'' Matin.
Lev. du Soleil.	346 3 49	19 36 33	6 6 48
4	352 39 25	18 51 52	6 30 36
8	5 32 0	16 0 3	7 24 45
12	15 50 53	12 0 38	8 12 21
16	24 20 15	6 57 15	8 57 36
20	32 10 30	0 15 25	9 47 3
22	36 32 16	4 36 49	10 20 2
23	39 38 2	8 32 30	10 46 22
23	45 56 10	16 56 53	11 46 6
22	43 47 37	20 24 48	0 13 40 Soir.
20	52 29 30	24 22 34	0 48 53
16	58 44 2	29 25 44	1 42 24
12	65 17 20	33 2 50	2 30 57
8	73 4 27	35 51 40	3 21 21
4	82 40 7	37 52 24	4 17 46
0	96 47 30	38 42 52	5 25 12
.....	108 13 12	38 10 43	6 15 9



Gravé par Desbordes, Paris 1771

o | 90 47 30 | 38 10 43 | o 15 v

COURBE DU MILIEU DE L'ÉCLIPSE.

Latitude vraie.	Milieu au lever.		Milieu au coucher.	
	Longitude.		Longitude.	
D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	
19 30 Mérid.	346 9 13			
19 0	345 50 52			
15 0	345 4 30			
10 0	343 47 45			
5 0	342 18 30			
0 0	340 40 15			
10 Septent.	336 47 45			
20	332 13 20			
30	326 58 25			
38 42 52	96 47 30		
40	320 3 20	108 33 25		
48 50	315 13 10	111 28 50		
60	306 38 25	117 6 20		
70	296 28 40	125 22 20		
80	276 8 45	144 49 45		
84 11 10	246 53 20	173 33 10		
84 41 10	237 44 55	182 40 5		
85 11 10	219 7 5	201 17 15		
85 11 43	218 21 7 ¹ / ₂	202 0 7 ¹ / ₂		
85 14 23	210 13 0 ¹ / ₂	210 13 0 ¹ / ₂		

Le dernier point de chaque colonne est commun à la courbe du commencement au coucher, & de la fin au lever du ☉, comme on le voit à la page suivante.

ÉCLIPSE DE 3 DOIGTS AU NORD DU ☉.

Heures.	Longitude.	Latitude vraie.
7 ^h Matin.	353° 1' 45"	8° 41' 13" Mérid.
8	10 53 0	4 9 15
9	21 29 0	2 29 20 Septent.
10	29 50 45	10 46 38
11	36 42 30	19 31 10
Midi.	43 11 15	27 35 48
1 Soir.	51 20 45	34 20 10
2	59 30 0	39 41 0
3	68 7 0	43 34 46
4	79 49 30	46 5 41
5	92 16 45	47 16 16
6	106 30 45	47 7 2

ÉCLIPSE DE 6 DOIGTS AU NORD DU ☉.

Heures.	Longitude.	Latitude
7 ^h Matin.	354° 34' 0"	0° 43' 11" Septent.
8	7 39 0	5 26 15
9	17 13 11	12 15 19
10	25 21 15	20 7 5
11	32 2 30	29 18 33
Midi.	39 22 15	37 22 38
1 Soir.	47 23 0	44 7 41
2	57 9 30	49 24 51
3	68 22 30	53 2 4
4	80 39 0	55 22 28
5	93 52 45	56 27 11
6	107 52 15	56 19 6

ÉCLIPSE DE 9 DOIGTS AU NORD DU ☉.

Heures.	Longitude.	Latitude.
6 ^h Matin.	338° 11' 15"	8° 25' 59" Septent.
7	352 4 45	11 2 6
8	2 56 0	16 0 13
9	12 29 0	23 8 28
10	19 42 45	31 44 52
11	27 5 45	40 41 46
Midi.	35 20 30	48 51 36
1 Soir.	45 9 15	55 26 36
2	56 31 45	60 15 36
3	69 7 45	63 33 31
4	82 19 30	65 33 35
5	96 25 30	66 28 21
6	111 21 15	66 25 1

ÉCLIPSE DE 9 DOIGTS AU MIDI DU ☉.

Heures.	Longitude.	Latitude.
6h Matin.	329° 35' 45"	30° 22' 38" Septen.
7	342 20 0	33 51 10
8	352 15 30	40 34 35
9	0 9 30	50 25 47
10	7 40 0	62 43 30
11	17 26 0	74 59 13
Midi.	29 10 0	82 55 15
I Soir.	44 45 0	86 2 0
2	59 33 30	87 13 59
3	74 36 15	87 47 0
4	89 35 30	88 3 22
5	104 22 15	88 10 51
6	119 19 15	88 9 30

ÉCLIPSE DE 7 DOIGTS AU MIDI DU ☉.

Heures.	Longitude.	Latitude.
6h 0 Matin.	322° 53' 0"	44° 31' 5" Septen.
7 0	334 32 0	49 53 23
7 52	340 7 45	62 39 38
7 52	337 14 45	68 56 8
7 0	322 3 30	75 57 59
6 0	360 0 45	77 47 9

COMMENCEMENT & fin de l'éclipse, au lever ou au coucher du Soleil.

Latitude vraie.			Commen. au Lever.			Commen. au Coucher.			Fin de l'écl. au lev. du Soleil.			Fin au Couc.			
D.	M.	S.	D.	M.	S.	D.	M.	S.	D.	M.	S.	D.	M.	S.	
19	36	12	Mérid.	348	37	13	.	.	.	Sommet B.,
19	34	23		346	3	48	(1)
19	30			347	13	58	.	.	343	26	28	.	.	.	
19	0			348	43	20	.	.	341	46	20	.	.	.	
15	0	0		353	6	45	.	.	335	48	45	.	.	.	
10	0	0		355	4	59	.	.	331	31	59	.	.	.	
5	0	0		355	49	30	.	.	328	4	30	.	.	.	
1	1	54		355	39	39	(2)
0	0	0		355	33	30	.	.	325	14	0	.	.	.	
10	0	0	Septen.	353	15	31	.	.	320	8	1	.	.	.	
18	5	24		349	59	13	.	.	316	18	13	.	.	.	Plus grande largeur.
20	0	0		349	2	12	.	.	315	23	22	.	.	.	
30	0	0		342	43	54	.	.	309	52	24	.	.	.	
38	10	15		.	.	.	108	48	16	Sommet M.
38	12	2		108	13	12	(3)
40	0	0		334	42	50	112	34	10	303	23	50	101	32	10
48	50			330	31	25	124	19	50	300	2	55	99	33	20
50	0	0		329	34	32	125	12	43	299	20	32	99	34	13
56	17	21		100	39	17
60	0	0		321	29	10	132	58	35	291	48	38	101	41	5
60	53	52		320	42	2	.	.	.	291	2	2	.	.	Plus petite largeur.
70	0	0		311	27	55	142	9	35	281	23	25	108	41	35
75	7	22		.	.	.	149	16	3	.	.	.	115	35	3
80	0	0		291	46	31	161	11	44	260	26	31	127	42	14
84	41	10		253	25	25	199	5	5	221	38	25	166	5	50
85	0	23		244	40	40	208	14	5	212	11	40	175	21	35
85	3	28		.	.	.	210	12	22	210	12	22	.	.	Interfection K.
85	7	10		239	50	5	213	14	40	207	7	35	180	25	10
85	9	10		237	42	10	215	12	5	205	8	40	182	24	5
85	11	43		.	.	.	218	21	7	202	0	7	.	.	(5)
85	14	27		226	23	59	226	23	59	193	49	30	193	49	30

(1) Point de passage de la portion du commencement à celle de la fin; la durée de l'éclipse a été instantanée pour ce point de la terre; il est le plus austral de tous ceux qui ont vu le commencement au lever du Soleil. C'est aussi l'extrémité de la courbe du milieu au lever du Soleil.

(2) Lieu qui a vu le premier contact extérieur visible sur la terre.

(3) Point du passage de la portion de la courbe appar-

tenante au commencement de l'éclipse, à celle qui appartient à la fin. La durée de l'éclipse a été instantanée pour ce point particulier de la terre: il est le moins boreal de tous ceux qui ont vu la fin au coucher du Soleil.

(4) Lieu qui a vu le dernier contact extérieur des limbes visible sur la terre.

(5) Ces deux points sont les interfections avec le milieu au coucher & le milieu au lever du Soleil.

TROUVER LA DIFFÉRENCE DES MÉRIDIEHS
ou la différence de longitude, au moyen d'une
éclipse de soleil, ou d'une éclipse d'étoile par
la lune.

1970. LA MÉTHODE la plus exacte que nous ayons pour connoître les longitudes géographiques (47), ou les différences des méridiens (51, 54), est certainement celle des éclipses de soleil ou d'étoiles; le seul inconvénient de cette méthode est la longueur des calculs qu'elle exige, mais cela n'empêche pas que nous n'en fassions un usage continuel; & je vais l'expliquer avec soin pour mettre tout le monde à portée de l'employer, & procurer, s'il est possible, à la géographie & à l'astronomie plus de secours qu'elle n'en a trouvé jusqu'à présent, dans cette partie des observations.

1971. Lorsqu'on a observé le commencement & la fin d'une éclipse de soleil, l'immersion & l'émergence d'une étoile cachée par la lune, ou celle d'une planète, il faut en déduire le temps de la conjonction vraie; & quand on a le temps de la même conjonction pour chacun des deux pays, la différence des temps est évidemment celle des méridiens, (Képler, *astron. pars opt.* 393. *Expos. du calc. astron. pag.* 150. *Mém. présentés, tom. I, pag.* 539). Cette méthode est la plus directe, la plus élégante & la plus sûre dont on puisse faire usage, & je ne pense pas même qu'on en doive employer d'autre. Je choisis, pour exemple, le calcul d'une éclipse d'étoile, comme renfermant quelques considérations de plus que celui d'une éclipse de soleil; mais j'y ajouterai toujours les modifications qu'exigent les éclipses de soleil.

1972. Soit S (fig. 121), le soleil ou l'étoile, qui sont éclipsés, L la situation apparente du centre de la lune, par rapport au soleil au commencement de l'éclipse; F le lieu apparent du centre de la lune au moment

Fig. 121

Aaaa ij

Fig. 121.

de l'émerfion; LF le mouvement apparent de la lune, par rapport au foleil dans l'intervalle de la durée de l'éclipse; GHI un arc de l'écliptique, DSE un parallèle à l'écliptique paffant par le centre du foleil ou de l'étoile; fi FA eft parallèle à DE , l'on aura le mouvement apparent en latitude AL , & le mouvement relatif apparent en longitude FA fur un arc de grand cercle; cet arc fe confond fenfiblement avec le parallèle à l'écliptique, mais il eft plus petit de quelques fecondes que l'arc GI de l'écliptique; & c'eft la première chofe qu'il s'agit de trouver.

1973. On connoît par les tables l'heure de la conjonction vraie, calculée, de même que les longitudes & les latitudes vraies de la lune, & de l'afre éclipsé au commencement & à la fin de l'éclipse; on calcule pour les mêmes infans la différence des parallaxes en longitude & en latitude, par les méthodes qui ont été détaillées (1665 & fuiv. 1922); on ajoute chaque parallaxe à la longitude vraie, ou bien on la retranche fuivant les cas que nous avons expliqués (1676), & l'on a les longitudes apparentes ou affectées de la parallaxe, dont la différence eft le mouvement apparent de la lune fur l'écliptique; on en retranche le mouvement du foleil, ou de l'afre éclipsé; s'il eft rétrograde on les ajoute, & l'on a la valeur de GI mouvement relatif apparent fur l'écliptique.

On applique de même la différence des parallaxes en latitude pour chacun des deux infans, à la latitude vraie de la lune calculée par les tables (ou à fa diftance au pôle boréal de l'écliptique), & l'on a les latitudes apparentes IL , GF , au commencement & à la fin de l'éclipse; la différence de ces latitudes apparentes ou leur fomme, fi l'une étoit australe & l'autre boréale, eft le mouvement apparent de la lune en latitude; on en ôte le mouvement en latitude de l'afre éclipsé, fi fa latitude change dans le même fens que celle de la lune, & l'on a la valeur de AL ; on multiplie la différence des longitudes apparentes, c'eft-à-

Trouver la différence des Méridiens. 557

dire, GI , par le cosinus de la latitude apparente qui tient le milieu entre les latitudes IL & GF (892), & l'on a la valeur du mouvement FA mesuré dans la région de l'éclipse; il est plus petit que le mouvement sur l'écliptique; j'ai donné une table de la différence, dans la *Connoissance des mouvemens célestes*, pour 1764, pag. 118.

Fig. 127.

1974. Dans le triangle FAL rectangle en A , l'on connoît les deux côtés FA & AL , on trouvera l'hypothénuse FL , en disant : le mouvement en longitude dans la région de l'étoile est au mouvement en latitude, comme le rayon est à la tangente de l'inclinaison de l'orbite apparente (1879), ou de l'angle LFA . Le cosinus de l'inclinaison apparente est au mouvement apparent en longitude, dans la région de l'étoile, comme le rayon est au mouvement apparent FL en ligne droite; sur l'orbite apparente de la lune relativement à l'astre S , qui est toujours supposé immobile pendant la durée de l'éclipse.

Inclinaison
apparente.

Dans le triangle LSF , on connoît 3 côtés, le mouvement apparent FL en ligne droite, la somme des demi-diamètres de la lune & de l'astre éclipsé, celui de la lune étant augmenté à raison de sa hauteur sur l'horizon (1510), cette somme étant diminué de $4'' \frac{1}{2}$, à cause de l'inflexion des rayons (1992); la somme des demi-diamètres pour le commencement est SL , pour la fin c'est SF ; on cherchera les angles, SLF & SFL ; commençant par l'analogie suivante : le mouvement FL est à la somme des deux distances observées, ou des deux sommes des demi-diamètres, SL & SF , comme leur différence, est à la différence des segments BL & BF ; la moitié de cette différence trouvée, étant ajoutée avec la moitié du mouvement FL donnera le plus grand des deux segments; cette demi-différence retranchée de la moitié du mouvement FL donnera le plus petit des deux segments.

1975. L'on prendra le segment qui est du côté de la plus grande latitude apparente, soit qu'elles soient

Fig. 121.

de même dénomination, ou de dénominations différentes, c'est-à-dire, que si dans la première observation la latitude apparente calculée IL est plus petite que dans la seconde, on se servira du rayon de la lune, & du segment, qui répondent à la seconde observation; mais si la latitude est plus grande au commencement de l'éclipse, on choisira le segment qui répond à ce commencement. Avec ce segment, on fera la proportion suivante : la somme des demi-diamètres apparens qui répond à ce segment est au rayon des tables, comme le segment correspondant est au cosinus de l'angle adjacent BLS ou BFS ; cet angle ajouté avec celui de l'inclinaison apparente LFA donnera le complément de l'angle de conjonction apparente, c'est-à-dire, l'angle DSF , qui répond à la plus grande latitude.

Distance à la
conjonction
apparente.

Le rayon est à la somme des demi-diamètres apparens SF , qui répond à la plus grande latitude, diminuée de $4'' \frac{1}{2}$ à cause de l'inflexion, comme le cosinus de l'angle DSF est à SD ; cette quantité divisée par le cosinus de la latitude HS de l'astre S , si ce n'est pas le soleil, donnera la distance HG à la conjonction apparente, pour celle des deux observations qui répond à la plus grande des deux latitudes apparentes de la lune. Cette distance à la conjonction apparente, avec le mouvement apparent, pourroit servir à trouver la conjonction apparente, si l'on en avoit besoin. On ôtera cette distance de la longitude vraie du soleil ou de l'étoile, si c'est le commencement de l'éclipse auquel répond la plus grande latitude, on l'ajoutera avec la longitude du soleil, si c'est la fin de l'éclipse, & l'on aura la longitude apparente de la lune observée. Cette longitude apparente observée étant comparée à celle qu'on avoit calculée, donnera l'erreur des tables en longitude. Il pourroit arriver que l'immersion fût après la conjonction apparente en longitude, le cas est rare; mais si l'on avoit lieu de le craindre, on pourroit s'en assurer en calculant par les tables seules l'immersion, & la conjonction apparente.

1976. Le mouvement vrai de la lune seule en longitude sur l'écliptique, est à une heure ou 3600'', comme l'erreur des tables en longitude, est à un nombre de secondes de temps qu'on ôtera de l'heure de la conjonction calculée par les tables, si l'on a trouvé par observation une longitude plus grande que par les tables, & l'on aura l'heure de la conjonction observée; c'est ce qu'il falloit trouver.

Fig. 121.

En se contentant de chercher ainsi l'erreur des tables sur le temps de la conjonction, au lieu de chercher directement la longitude vraie, & la conjonction vraie; on évite l'attention qu'il faudroit avoir d'employer la parallaxe de la lune seule à la fin du calcul dans les éclipses de soleil, au lieu de la différence des parallaxes du soleil & de la lune qu'on emploie dans le commencement. Je donnerai, un exemple de l'autre manière de procéder (1980), qui est plus simple quand il s'agit d'une étoile. Il est toujours utile, de trouver également la conjonction & l'erreur des tables, par le moyen de l'autre triangle SBL , qui est du côté de la plus petite latitude, en prenant l'autre segment, & l'autre somme des demi-diamètres, & en prenant la différence des deux angles, dont on a pris la somme dans le premier calcul. Le résultat doit être exactement le même, puisque les deux observations du commencement & de la fin n'en font qu'une seule pour la détermination de la longitude & de la latitude.

Le triangle SFD qui a servi à trouver la différence de longitude apparente SD , sert aussi à trouver la différence des latitudes apparentes, c'est-à-dire, FD , qu'on ajoutera avec la latitude de l'étoile S , si celle de la lune F qu'on a calculée par les tables, a été trouvée plus grande que celle de l'étoile, en sorte que le point F soit plus éloigné de l'écliptique que le point D , & l'on aura la latitude apparente de la lune, qui comparée avec celle qu'on a tirée des tables fera connoître l'erreur des tables en latitude.

Différence
des latitudes
apparentes.

Il peut arriver un cas, où l'on seroit embarrassé de

Fig. 121.

favoir, si le point F est plus ou moins éloigné de l'écliptique GI que le point D ; c'est le cas ou la différence FD des latitudes apparentes, ne seroit que d'environ $30''$ dans chacune des deux observations; l'erreur des tables laissant à peu-près une incertitude de $30''$, on ne sauroit pas si le centre de la lune a passé au nord ou au midi de l'astre S ; dans ce cas le commencement & la fin d'une éclipse ne suffiroient pas pour déterminer la latitude; il faudroit y suppléer ou par la grandeur de l'éclipse, s'il s'agit du soleil, ou par la différence de déclinaison observée, entre la lune & l'étoile avant l'immersion ou après l'émerison; dans ce cas-là, il faudroit calculer la longitude & la latitude apparente de la lune pour le moment de l'observation (1973), en conclure l'ascension droite & la déclinaison apparente (906); les comparant à celles qu'on auroit observées, on jugeroit si la lune est plus au nord ou au midi par l'observation que par les tables. Les préceptes que nous venons de donner pour trouver la conjonction vraie, suffisent à ceux qui ont déjà l'habitude de ces sortes de calculs; les autres auront besoin de se fortifier par l'exemple suivant.

1977. EXEMPLE. Le 6 Avril 1749, l'étoile *Antarès* fut éclipsee par la lune à Berlin, à $14^h 6' 19''$ de temps vrai, & elle reparut de l'autre côté de la lune à $15^h 12' 54''$. Le même jour, j'observai l'émerison à Paris, à $13^h 1' 20''$; je me propose de chercher la différence des méridiens, entre Paris & Berlin, par la comparaison de ces observations. Pour faire ce calcul, par la méthode exacte que je viens de détailler, il faut connoître déjà à peu-près la différence des méridiens que l'on cherche, ou bien le premier calcul ne fera qu'une approximation, & on le recommencera pour trouver le même résultat une seconde fois avec plus de précision; par exemple, si je n'avois aucune idée de la longitude de Berlin, je prendrois la différence entre les heures de l'immersion à Paris & à Berlin, c'est-à-dire, entre $13^h 1' 20''$, & $14^h 6' 19''$, & je supposerois qu'il y

Trouver la différence des Méridiens. 561

a 1^h 4' 59" de différence entre les deux méridiens ; mais sachant dès à présent que cette différence n'est pas fort éloignée de 44' 25", je me suis servi de cette connoissance.

I 978. J'ai donc réduit au méridien de Paris, les deux observations de Berlin, je les ai aussi réduit en temps moyens, & j'ai calculé pour ces deux instans les quantités suivantes par des tables semblables à peu-près à celles qui sont à la fin du premier volume de cet ouvrage.

Longitudes vraies de la lune, 8° 5' 43' 16" 8° 6' 26' 9"

Latitudes vraies de la lune,

australes, 3° 47' 18" 3° 45' 10"

Pour la hauteur du pôle de Berlin, 52° 31' 30", la parallaxe horizontale étoit de 57' 15", 7 en la supposant de 57' 18" à Paris ; l'angle de la verticale avec le rayon de la terre, que je supposois alors de 18' 42" (1708), donne une augmentation de 24", 1 (1695) ; ainsi la parallaxe qu'il faut d'abord employer est de 57' 39", 8. Voici les autres élémens du calcul des parallaxes.

a Temps vrai à Paris.

b Le lieu du soleil par les tables.

c Ascension droite du milieu du ciel (1011).

d Hauteur du nonagéf. (1661).

e Longit. du nonagéf. (1662).

f Parall. de longit. par les formules (1674).

g Aplatissement en longitude (1700).

	Immersion.	Emerfion.
a	13 ^h 21 54"	14 ^h 28' 29"
b	os 17 20 17 $\frac{1}{2}$	os 17 23 1
c	227 33 32	244 14 49
d	24 56 6	18 52 37
e	6 13 7 26	7 5 12 24
f	19 27,8	9 43,3
g	4,9	4,9
h	19 22,9	9 38,4
i	53 18,6	55 40,9
k	21,0	21,0
l	52 57,6	55 19,9

h Parallaxe en longitude dans le sphéroïde.

i Parallaxe de latitude par les formules (1666).

k Aplatissement en latitude (1698).

l Parallaxe de latitude dans le sphéroïde.

La formule qui m'a donné l'aplatissement en latitude

pour Berlin, est celle-ci $\frac{57' 16'' \sin. 18' 44''}{\sin. 52' 31'} \left(\frac{\cos. 23' 28'}{\cos. 3' 46'} - \sin. 26' \right) \text{ tang. } 3' 46' = 21''$.

1979. Le mouvement apparent en latitude dans l'espace de $1^h 6' 35''$, qu'a duré l'occultation à Berlin, c'est-à-dire, la valeur de AL est de $11'' 4$, dont la latitude apparente croissoit ; le mouvement apparent en longitude sur l'écliptique étoit de $27' 8''$, $5 = GI$, & de $27' 3''$, 2 dans la région de l'étoile, sur un grand cercle FA ; on trouvera donc l'angle AFL de $30' 17''$ & le côté FL , ou le mouvement de la lune sur son orbite apparente $27' 3''$, 2 .

1980. Le diamètre horizontal de la lune étant de $31' 18''$, le demi-diamètre apparent sera $15' 41''$, $9 = SL$ pour le premier instant, & de $15' 42''$, $2 = SF$ pour la fin ; que l'on diminueroit chacun de $4'' \frac{1}{2}$, si l'on vouloit avoir égard à l'inflexion. Ayant abaissé du centre S de l'étoile une perpendiculaire SB sur l'orbite apparente FL , les segmens feront de $13' 31''$, $4 = BL$, & de $13' 31''$, $8 = BF$, & l'angle $SLB = 30' 31' 13''$. L'angle L étant du côté de la plus petite latitude IL , on en ôtera l'angle AFL ou CLF de $30' 17''$, & l'on aura l'angle $SLC = LSE = 30' 0' 56''$. Dans le triangle ESL , on connoît $SL = 15' 41''$, 9 , & l'angle ESL de $30' 0' 56''$, on trouvera SE qui divisé par le cosinus de la latitude apparente $LI 4' 40' 16''$ donne $13' 38''$, 3 pour la distance apparente HI de la lune à sa conjonction sur l'écliptique : c'est ce que Képler & Boulliaud appellent *scrupula incidentia*. Cette distance apparente IH de $13' 38'' 3$, est à l'occident de l'étoile, & précède la conjonction apparente, puisqu'il s'agit de l'immersion, & que la lune étoit moins avancée que l'étoile ; mais la parallaxe de longitude faisoit paroître la lune plus avancée vers l'orient de $19' 22''$, 9 (a) ;

(a) S'il s'agissoit d'une éclipse de soleil, il faudroit employer ici, pour plus d'exactitude, la parallaxe seule de la lune en longitude, & non pas la différence des parallaxes du soleil & de la lune, dont on se fert dans les premiers calculs (1877).

Trouver la différence des Méridiens. 563

parce que la longitude de la lune est plus grande que celle du nonagéfime (1876) : ainfi le lieu vrai de la lune étoit encore plus éloigné de l'étoile que le lieu apparent ; il faut donc ajouter la parallaxe avec la diftance à la conjonction apparente, & l'on aura 33' 1", 2 pour la diftance de la lune à la conjonction vraie, en minutes de degrés comptées fur l'écliptique ; ce qui fait (a) 0^h 59' 36", à raifon de 36' 53" pour 1^h 6' 35" de temps qui est la différence des deux longitudes calculées ; ces 59' 36" font la différence entre l'observation & la conjonction vraie ; or l'immersion avoit été observée à 14^h 6' 19", donc le temps vrai de la conjonction étoit à 15^h 5' 55", au méridien de Berlin. On pourroit dans les éclipses de soleil chercher cette conjonction observée par le moyen de la conjonction calculée, & de l'erreur des tables, comme je l'ai indiqué (1976).

Temps de la conjonction vraie.

1981. Il y a des cas où la ligne *FL* du mouvement apparent est située différemment par rapport à *DE* qui est parallèle à l'écliptique ; mais on pourra prendre dans tous les cas, la somme de l'angle *SFB* du triangle, & de l'angle d'inclinaison *AFL*, l'on aura toujours l'angle *DSF* du côté où la différence de latitude apparente *EL* est la plus grande (c'est-à-dire, qu'on aura le complément de l'angle de conjonction apparente). Son finus & son cosinus multipliés par la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune, ou par le demi-diamètre apparent seul de la lune, diminué de 4" $\frac{1}{2}$, donneront les différences apparentes de latitude & de longitude, *FD* & *SD*, pour l'observation où la différence de latitude étoit la plus grande.

1982. Pour vérifier le calcul précédent, il est bon de chercher aussi la conjonction par l'émerfion de l'étoile. L'on connoît *SF* = 15' 42", 2 & le segment

Le même calcul par l'émerfion.

(a) Pour réduire en temps ces différences de longitude, on ne fait qu'ajouter à leur logarithme un logarithme constant, qui est la

différence entre le logarithme de 3600" ou 1^h, & celui du mouvement horaire vrai de la lune seule sur l'écliptique, c'est ici 0,2569281.

Fig. 121.

$FB = 13' 31''$, 8 on trouve l'angle $SFB = 30^\circ 30' 12''$, l'on ajoute ensemble les deux angles SFB , BFA , l'on a $SFA = DSF = 31^\circ 0' 29''$. Dans le triangle DSF , rectangle en D , dont on connoît l'hypothénuse $FS = 15' 42''$, 2 & l'angle $DSF = 31^\circ 0' 29''$; on trouve SD , qui étant divisé par le cosinus de la latitude apparente $4^\circ 40' 31''$, donne $GH = 13' 30''$, 2, distance à la conjonction apparente, mesurée sur l'écliptique. Dans cette seconde observation, la lune paroïssoit plus orientale que l'étoile, de $13' 30''$, 2; mais à cause de la parallaxe de longitude, qui la faisoit paroître plus avancée, le lieu apparent étoit plus oriental que le lieu vrai, de $9' 38''$ 4; donc il reste $3' 51''$ 8, dont la lune avoit réellement passé sa conjonction vraie avec l'étoile, ce qui fait en temps $6' 59''$; cet intervalle étant ôté de l'heure de cette seconde observation $3^h 12' 54''$, on trouve le temps vrai de la conjonction vraie à $3^h 5' 55''$, aussi bien que par la première observation. On sent bien qu'il ne doit y avoir aucune différence si l'on a bien opéré, puisque le temps de la conjonction étant déterminé par le mouvement FL , qui dépend des deux observations conjointement, on ne sauroit trouver qu'un seul résultat par ces deux observations; mais une différence de quelques décimales qu'il est très-difficile d'éviter, n'est ici d'aucune conséquence.

Latitude observée.

1983. Pour connoître la vraie latitude de la lune par cette observation, on cherchera aussi les côtés DF & EL , par le moyen des triangles DSF & LSE qu'on a résolus ci-dessus; on trouvera $DF = 8' 5''$, 5, & $EL = 7' 51''$; on ajoutera ces quantités à la latitude de l'étoile $4^\circ 32' 12'' = IE = GD$, parce que la lune paroïssoit plus méridionale que l'étoile, & l'on aura les latitudes apparentes de la lune IL , GF , $4^\circ 40' 3''$, 0, & $4^\circ 40' 17''$ 5; on en ôtera les parallaxes de latitude $52' 57''$ 4, & $55' 19''$ 8, parce que la latitude australe de la lune étoit augmentée par la parallaxe, & l'on aura $3^\circ 47' 5''$ 6, & $3^\circ 44' 57''$ 7 pour les latitudes vraies de la lune IM , GN conclues de l'obser-

vation; ces latitudes se trouvent être plus petites de $12'' 5$ chacune que celles qu'on avoit tirées des premières tables de M. Mayer. On remarquera en passant, que l'orbite vraie MN de la lune se rapproche ici de l'écliptique, quoique l'orbite apparente LF s'en éloigne.

Fig. 127.

1984. Le même jour j'observai à Paris l'immersion d'Antarès à $1^h 1' 20''$ du matin (*Mém. acad.* 1755, p. 370) du matin; il s'agit de trouver aussi la conjonction vraie de la lune à l'étoile par l'observation de Paris. On feroit la même opération que pour Berlin (1978), si l'on avoit observé à Paris l'émerfion aussi bien que l'immersion; mais les nuages m'ayant empêché de faire la seconde observation, je vais y suppléer par une autre méthode, qui servira d'exemple en pareil cas.

Observation correspondante à Paris.

1985. La latitude vraie de la lune calculée par les tables pour le moment de l'observation est $3^{\circ} 47' 58''$; il en faut ôter $12'' 5$, puisque nous avons trouvé par l'observation de Berlin, que les tables donnoient ce jour-là une latitude trop grande de $12'' 5$ (1983), & nous aurons pour la latitude vraie de la lune, au moment de l'immersion observée à Paris, $3^{\circ} 47' 45'' \frac{1}{2}$; il y faut ajouter la parallaxe de latitude $48' 15'' 7$, pour avoir la latitude apparente de la lune $4^{\circ} 36' 1'' 2$ & en ôter la latitude de l'étoile $4^{\circ} 32' 12''$, ce qui donne, pour la différence apparente en latitude EL au moment de l'observation, $3' 49'' 2$. Dans le triangle SLE , on connoît $LE = 3' 49'' 2$, & $SL = 15' 41'' 7$ demi-diamètre apparent de la lune, augmenté à raison de sa hauteur qui étoit de 10 degrés; l'on cherchera le côté SE , par la méthode que j'ai expliquée (1781); ce côté divisé par le cosinus de la latitude apparente de la lune, donnera la différence apparente de longitude HI , sur l'écliptique pour Paris, $15' 16'' 4$; il y faut ajouter la parallaxe de longitude $29' 19'' 6$, pour avoir la distance à la conjonction vraie, $44' 36''$. On réduira cette différence en temps, par le moyen du mouvement horaire de la lune, (en ajoutant à son logarithme le logarithme constant 0, 256536), & l'on aura

celui de $1^h 20' 31''$, intervalle de temps entre l'observation de Paris, $13^h 1' 20''$, & le temps vrai de la conjonction vraie, qui se trouvera par conséquent être à $14^h 21' 51''$ pour Paris.

Conjonction
pour Paris.

1986. On aura donc les deux temps de la conjonction, de la manière suivante :

Comparaison
des 2 temps.

Temps vrai de la conjonction vraie à Berlin, $15^h 5' 55''$
Temps vrai de la conjonction vraie à Paris, $14 21 51$

Donc la différence des Méridiens, $0 44 4$
Et par rapport à l'observatoire R. de Paris, $0 44 6$

Cette quantité est plus petite de $19''$ que suivant M. Grifchow, (*Mémoires présentés à l'acad. tom. I.*).

Longitude
de la lune.

La longitude de l'étoile Antarès étoit alors $8^s 6^o 16' 20''$, c'est aussi la longitude vraie de la lune pour le 5 Avril $14^h 21' 51''$, temps vrai à l'Observatoire Royal de Paris, ou $14^h 24' 2''$, temps moyen, & la latitude vraie de la lune étoit de $3^o 45' 11''$, suivant l'observation. La longitude calculée par les anciennes tables de Mayer n'étoit que de $9''$ trop grande, & la latitude l'étoit de 12 à 13 secondes.

1987. Quand on a observé le commencement & la fin d'une éclipse de soleil, on a pareillement deux distances égales SL & SF ; mais elles sont égales à la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune, diminuée aussi de $4'' \frac{1}{2}$ à cause de l'inflexion (1992). Quand on a observé deux phases avec un micromètre (1991); on a également deux distances entre les centres de la lune & du soleil, on les prend deux à deux, l'une avant & l'autre après le milieu, & calculant le mouvement apparent de la lune dans l'intervalle des deux observations, on a toujours un triangle SLF , dont les trois côtés sont connus, & par lequel on trouve la distance à la conjonction, & le temps de la conjonction vraie.

Usage de
la fin d'une
éclipse.

1988. Si l'on n'a que la fin d'une éclipse observée exactement en deux endroits, comme cela arrive souvent, on est obligé de supposer la latitude de la lune

exactement connue, dans chaque observation, & cela n'influe pas beaucoup sur le résultat, sur-tout si la distance des deux observateurs n'est que de peu de degrés. Dans ce cas, on peut se contenter de calculer par les tables la distance apparente des centres (1877, 1918); ces calculs peuvent aisément se faire avec ma méthode des angles parallaxiques (1881); car dès qu'on connoît la latitude de la lune & sa longitude, on calcule la distance apparente des centres pour l'heure de l'observation faite sous le méridien inconnu; si on la trouve plus grande ou plus petite que par l'observation, on change la supposition faite pour la différence des méridiens, & par conséquent la longitude & la latitude, ce qui donne une autre distance apparentes des centres. Alors par une règle de trois, on trouve quelle est la différence des méridiens qu'il faut supposer pour trouver par le calcul la même distance des centres que par observation. On peut aussi calculer par ma méthode la conjonction vraie, en cherchant l'orbite apparente comme je l'ai indiqué (1919).

1989. La manière de déterminer les longitudes des différens pays de la terre, par la conjonction vraie calculée pour les deux pays, est la plus exacte que nous ayons; le seul inconvénient qu'on y trouve, est la longueur du calcul qu'elle suppose; c'est un très-grand obstacle, à cause du peu de personnes qui s'occupent de ces recherches. On verra dans le XIV^e. livre (2481) différentes considérations sur la manière d'observer les éclipses de lune & celles des satellites de Jupiter, pour en déduire la différence des méridiens entre deux villes; mais celle que je viens d'expliquer par les éclipses de soleil & d'étoiles, fera peut-être toujours la plus exacte.

1990. Lorsque la lune a passé l'opposition, sa partie orientale est éclairée, sa partie occidentale est obscure; ainsi les immersions se font dans la partie éclairée, & les émerfions se font dans la partie obscure, c'est-à-dire, à gauche dans une lunette astronomique. Je crois que ce sont-là les seules émerfions dont on puisse être

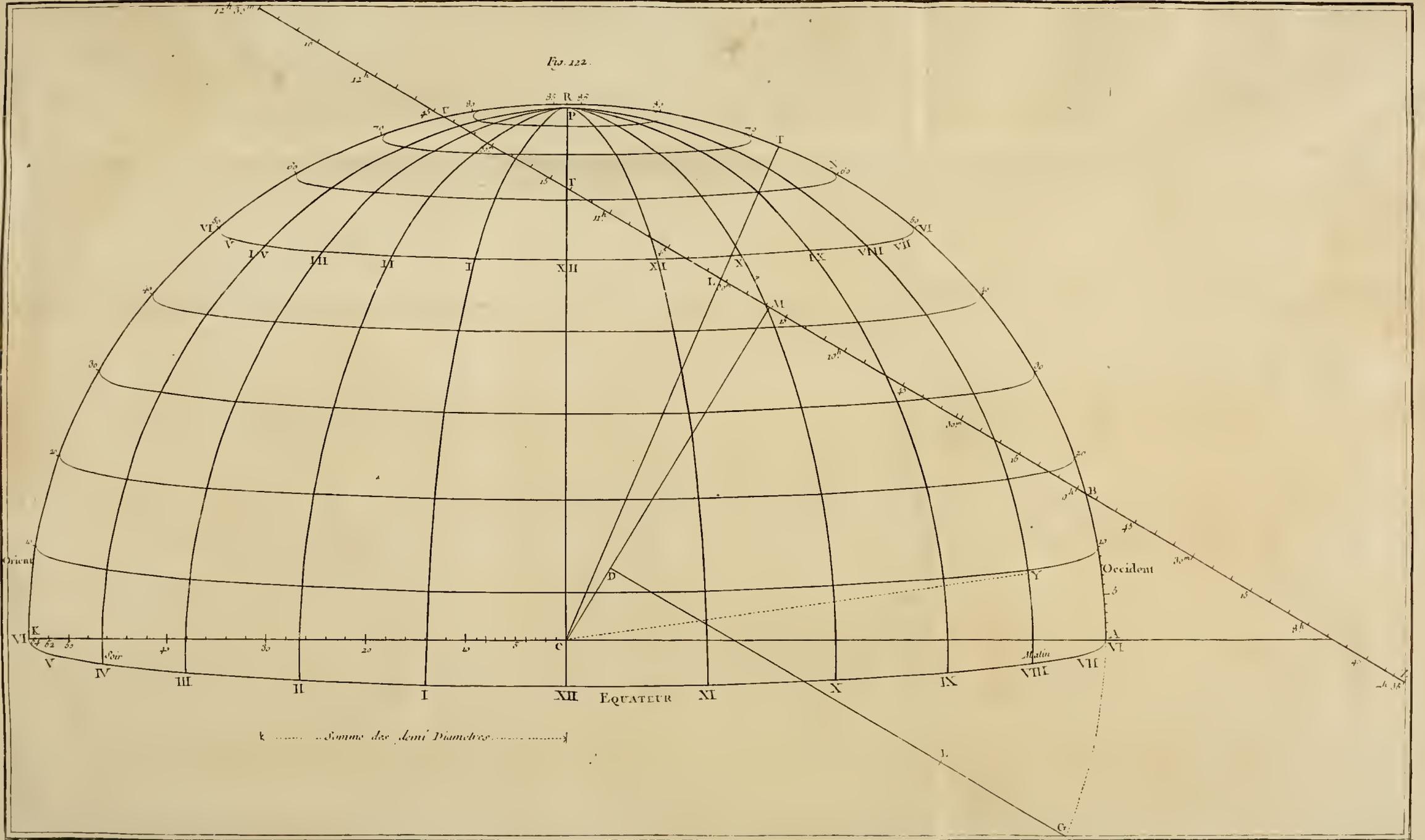
Utilité de
cette métho-
de.

bien assuré; car quand l'étoile sort de la partie éclairée de la lune, sa lumière, trop foible par rapport à celle de la lune, ne se distingue pas facilement au premier instant de l'émerfion.

Lorsqu'on a vu une planète, ou une étoile entrer sous la lune, & que l'on fait à quelle distance elle doit passer par rapport au centre de la lune, on conçoit une ligne au travers des taches de la lune, & l'on essaie de remarquer vis-à-vis de quelles taches doit se faire l'émerfion; car si l'on n'est pas prévenu de la situation du point d'émerfion, c'est en vain que l'on espere appercevoir l'étoile au moment de son émerfion; & ces observations, au lieu d'être les plus exactes que l'on ait, deviennent les plus défectueuses: je pourrois citer plusieurs exemples, ou des astronomes habiles s'y sont trompés considérablement.

1991. Il arrive souvent dans les éclipses d'étoiles ou de planètes par la lune que l'astre éclipsé paroît tout entier pendant quelques secondes sur le disque éclairé de la lune; on a attribué ce phénomène à l'atmosphère de la lune, & M. Euler entreprend de prouver son existence par les éclipses de soleil (*Mém. de Berlin*, 1748, pag. 103). M. de l'Isle l'attribuoit à la diffraction ou à l'inflexion des rayons qui rasent les bords de la lune (*Mémoires pour servir à l'Histoire de l'Astronomie*, 1738, pag. 249); ce phénomène observé par le Pere Grimaldi, & par Newton (*Opt. parte 3*), servoit surtout à M. de l'Isle, pour expliquer les anneaux que l'on voit autour du soleil dans les éclipses totales; pour moi, je pense que c'est une simple illusion optique, occasionnée par l'irradiation ou le débordement de lumière de la lune (^a); l'atmosphère de la lune ne sauroit produire un effet si sensible; car dans les éclipses de

(^a) On peut voir dans l'essai du Docteur Jurin sur la vision distincte & indistincte, que l'apparence d'une étoile sur le disque de la lune, ne vient que du cercle de dissipation, dans lequel l'étoile se trouve lorsqu'elle est fort proche de la lune, (*Optique de Smith, Tom. I. p. 236*, de la traduction du P. Pezenas, Avignon 1767, 2 vol. in-4°).



soleil on voit le bord de la lune très-net & très-bien terminé, à l'exception de quelques inégalités dans certaines parties de sa circonférence; les taches de la lune sont toujours de la même couleur; Vénus quand elle est éclipsée par la lune, ne change pas de forme & de couleur; enfin on a vu dans une occultation de Jupiter par la lune, que le bord de la lune paroïssoit sur le bord même de Jupiter. (*Mém. acad.* 1715). Ainsi l'atmosphère de la lune est trop peu considérable pour faire paroître les étoiles sur le disque éclairé de la lune, quoiqu'elle suffise pour produire le phénomène dont nous allons parler.

1992. L'INFLEXION des rayons qui rasent les bords de la lune paroît cependant démontrée par les observations de l'éclipse de 1764, que M. du Séjour a discutées dans plusieurs mémoires avec beaucoup d'habileté; il la trouve d'environ $4''\frac{1}{2}$, & il l'attribue à une petite réfraction de l'atmosphère de la lune. Ayant comparé d'abord les distances des cornes de l'éclipse de soleil à divers instans, que M. Short avoit observées à Londres, il vit qu'on ne pouvoit les concilier. La réfraction dans l'atmosphère de la lune, & les causes physiques d'inflexion dont M. de la Hire, M. Euler, &c. avoient parlé, lui firent naître l'idée de calculer les mêmes phases avec une formule, dans laquelle entroit la supposition d'une inflexion, dont la valeur pouvoit se déterminer ensuite en comparant la formule avec les observations, & il trouva qu'il falloit, pour concilier toutes ces observations, faire l'inflexion d'environ $4''\frac{1}{2}$.

Inflexion
de $4''\frac{1}{2}$.

1993. La durée de l'éclipse entre le commencement & la fin est diminuée par l'inflexion, qui fait toujours paroître trop grande la distance des bords de la lune & du soleil; au contraire la durée de l'éclipse annulaire est augmentée par l'inflexion, & la bande terrestre où l'éclipse paroît annulaire, est élargie par cette cause physique; M. du Séjour a comparé toutes les observations de l'anneau faites en 1764, & il a reconnu

que la durée en avoit été plus longue qu'elle n'auroit dû l'être. (*Mém. acad.* 1767, pag. 201). Il desireroit pendant que les astronomes profitent des observations semblables qui pourront se présenter pour constater davantage ce phénomène ; la circonstance la plus favorable seroit celle d'une éclipse qui seroit totale pour les pays où la lune seroit fort élevée sur l'horizon, & annulaire dans les pays où la lune seroit plus basse ; telle fut l'éclipse du 23 Septembre 1699. Ce point d'astronomie physique mériteroit qu'on entreprît quelques voyages pour observer les éclipses de soleil dans les pays où elles sont totales ou annulaires ; il exige du moins qu'on se rende très-attentif à mesurer les distances des cornes avec de bons héliomètres, le plus près qu'il est possible du commencement ou de la fin d'une éclipse.

1994. Cette inflexion de $4''\frac{1}{2}$ est égale au double de la réfraction horizontale qui a lieu dans l'atmosphère de la lune, multipliée par la distance de la lune au soleil, & divisée par la distance du soleil à la terre (*Mém. acad.* 1767, p. 215). L'attraction du globe lunaire sur le rayon qui en rase les bords, y produiroit une courbure hyperbolique & une semblable inflexion, mais elle est absolument insensible, comme l'a fait voir M. du Séjour, (*Ibid.* pag. 213).

Différentes sortes d'Éclipses.

Eclipses des
planètes par la
lune.

1995. LES éclipses des planètes par la lune se calculent de la même manière que les éclipses de soleil, ou d'étoiles ; la seule différence consiste à prendre la somme des mouvemens de la planète & de la lune, en latitude, & de leurs mouvemens en longitude réduits à la région de l'étoile (892), ou bien leur différence, suivant que les mouvemens se font en sens contraire, ou du même sens, cela donne le mouvement relatif en longitude & en latitude, qui sert à trouver l'inclinaison de l'orbite relative (1765). On prend de même la somme ou la

différence des mouvemens apparens (1973), pour avoir l'inclinaison apparente, avec laquelle on calcule l'immersion, l'émergence & le milieu de l'éclipse (1919).

Les éclipses des planètes par la lune sont assez fréquentes; Mercure est la seule planète que l'on puisse rarement observer quand elle est cachée par la lune; je n'en connois qu'une seule observation qui fut faite au Brésil par Margraf, dans le dernier siècle; ces éclipses seroient utiles pour déterminer les longitudes des villes où on les observe.

1996. Les planètes sont quelquefois assez proches l'une de l'autre pour s'éclipser mutuellement; Mars parut éclipser Jupiter le 9 Janvier 1591, & il fut éclipé par Vénus le 3 Octobre 1590, (Képler, *Astron. Pars Optica*, pag. 305); Mercure fut caché par Vénus le 17 Mai 1737, (*Philos. transact. n°. 450*).

Eclipse
d'une planète
par une autre.

1997. On trouve aussi dans les ouvrages des astronomes plusieurs exemples des occultations d'étoiles par les planètes: Saturne couvrit l'étoile σ de la sixième grandeur qui est à la corne australe du Taureau, le 7 Janvier 1679, suivant M. Kirch, (*Miscell. Berolin*, p. 205).

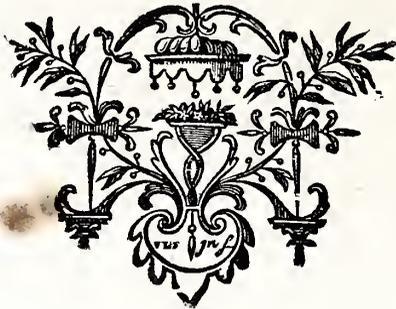
Jupiter couvrit l'étoile du Cancer appelée l'*Ane austral*, le 4 Sept. 241 avant J. C.; Gassendi observa le 19 Décembre 1633, Jupiter qui cachoit une étoile aux pieds des Gémeaux, & M. Pound observa en 1716 l'occultation de l'étoile α des Gémeaux par Jupiter, (*Phil. transf. n°. 350. Abrégé, IV. 319*).

Le 18 Janvier 272 avant J. C. Mars couvrit l'étoile boréale au front du Scorpion; & Gassendi a vu Mars couvrir aussi l'étoile qui est à l'extrémité de l'aile de la Vierge. Mars en 1672 couvrit une des étoiles du Verseau, & nous avons eu occasion de parler des remarques dont ce phénomène fut l'occasion (1733).

Vénus dut cacher la belle étoile au cœur du Lion, le 16 Sept. 1574, suivant Mœstlinus, & le 25 Sept. 1598, suivant Képler. (*Astr. Pars Opt. p. 305. Riccioli, Alm. l. 721*).

1998. Les comètes couvrent aussi quelquefois des étoiles fixes. Le 12 de Janvier 1764, je vis la comète, qui paroïssoit alors, sortant de dessus une étoile de septième grandeur à la queue du cygne; l'étoile étoit encore enveloppée dans la chevelure de la comète. Ces sortes d'observations seroient très-curieuses pour la théorie des comètes, si l'on connoïssoit parfaitement les positions des petites étoiles.

1999. Enfin, on peut regarder comme une autre sorte d'éclipses les passages de Mercure & de Vénus sur le disque du soleil dans leurs conjonctions inférieures; mais à cause de l'importance de ces passages, je suis obligé d'en parler plus au long, & ce sera la matière du livre suivant.



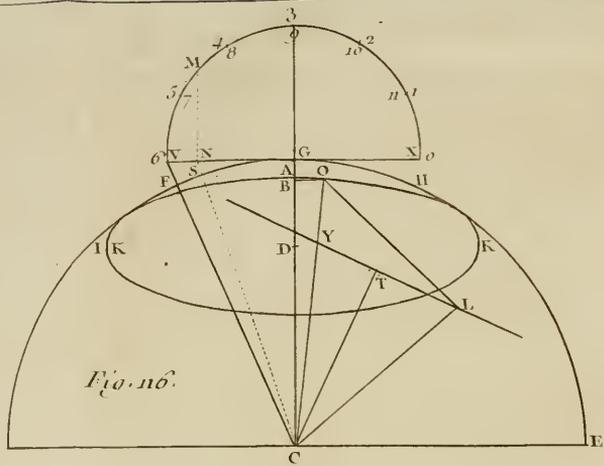


Fig. 116.

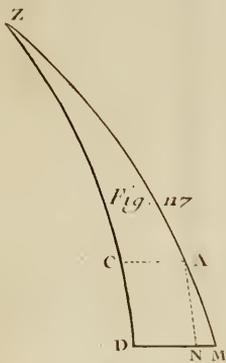


Fig. 117.

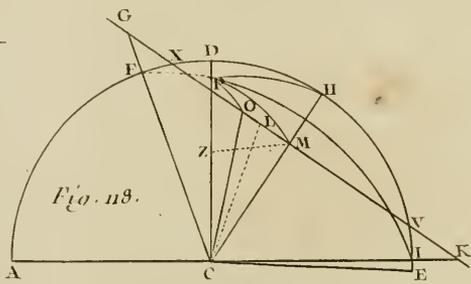


Fig. 118.

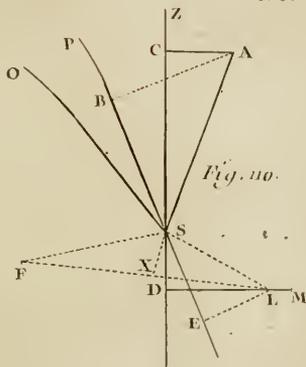


Fig. 119.

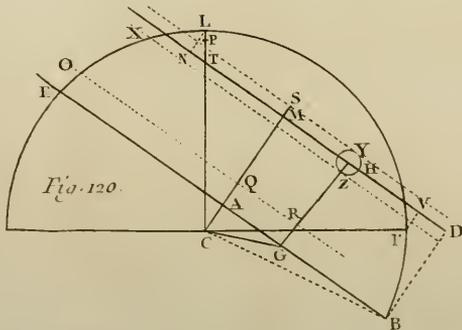


Fig. 120.

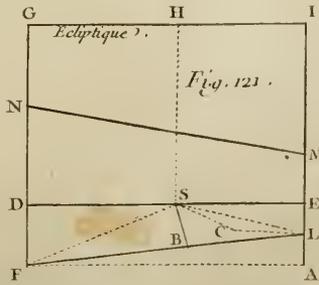
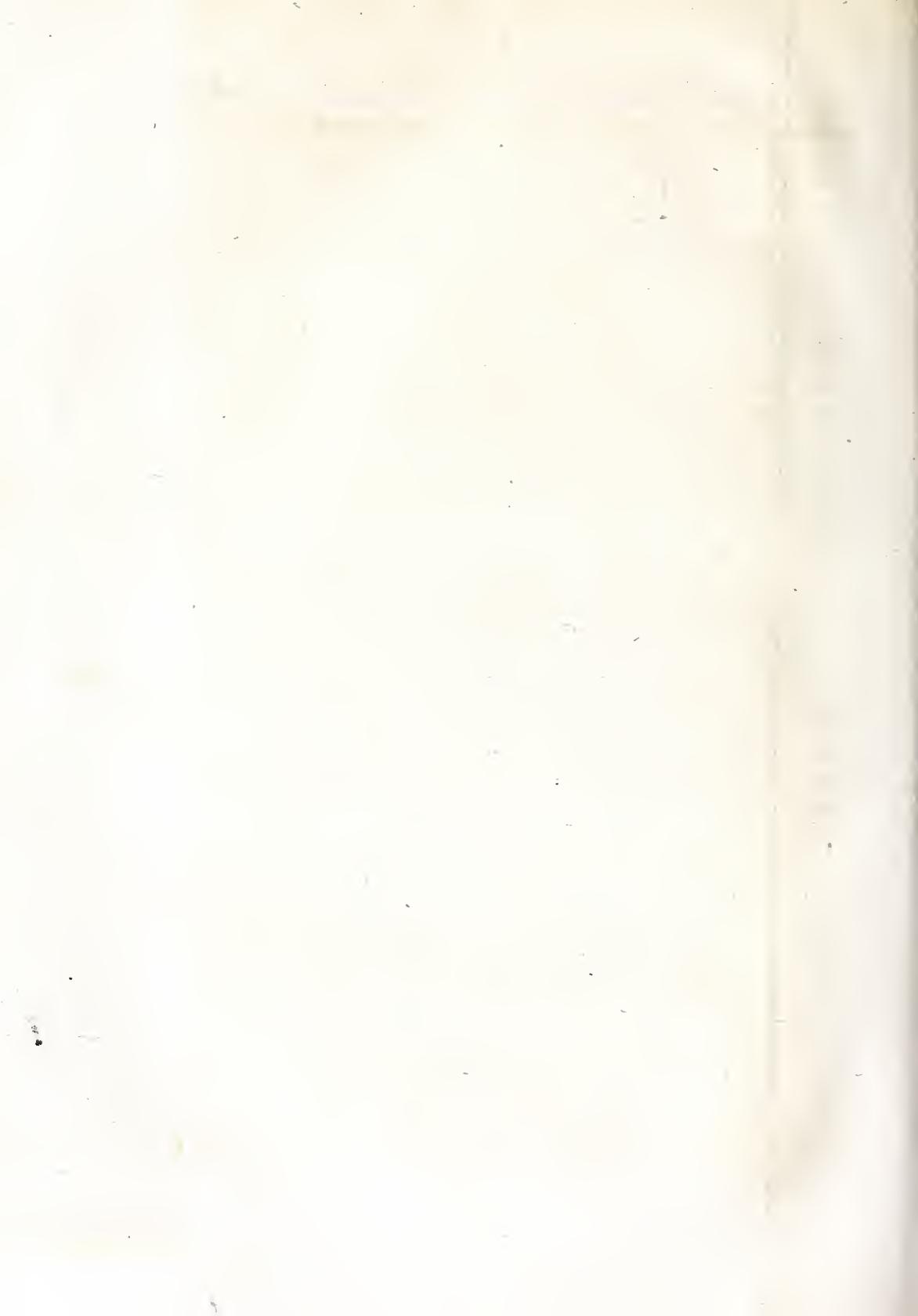


Fig. 121.



LIVRE ONZIEME.

DES PASSAGES DE VÉNUS ET DE MERCURE sur le Soleil.

VÉNUS & Mercure qui tournent autour du soleil à une moindre distance que la terre, (art. 1082), se trouvent entre nous & le soleil à chaque révolution synodique ; & si ces planètes n'ont alors que peu de latitude, on voit sur le soleil une tache noire & ronde, dont la largeur paroît occuper environ la trentième partie de celle du soleil, si c'est Vénus, & seulement la 150^e partie si c'est Mercure.

2000. Averrhoës crut avoir apperçu Mercure sur le soleil, mais Albategnius & Copernic, (*L. II. c. 10*), ne pensoient pas qu'il fût possible de l'y voir à la vue simple, & ils avoient raison. Képler crut aussi avoir apperçu Mercure sur le soleil à la vue simple ; mais il reconnut ensuite que ce ne pouvoit être qu'une tache du soleil ; il s'en trouve quelquefois d'assez grosses pour qu'on puisse les entrevoir sans lunettes ; Gallilée assuroit en avoir vu & les avoir montré à d'autres à la vue simple, & nous en citerons des exemples (3131). Mais à l'égard de Mercure qui n'a que 12'' de diamètre, il est impossible qu'on l'ait jamais apperçu sur le soleil ; c'est tout ce que l'on pouvoit faire, en 1761, que d'y appercevoir Vénus, qui avoit 58'' de diamètre (1391, 2157), je n'oserois même assurer qu'on l'ait apperçue à la vue simple ; Gassendi nous assure que plusieurs fois & entr'autres le 10 Septembre 1621, il n'a pu voir à la vue simple des taches qui mesurées avec des lunettes, avoient cependant une minute & un tiers de diamètre. Il n'est donc pas étonnant qu'avant la découverte des lunettes, on n'eût jamais observé Mercure ni même Vénus sur le soleil.

Ces passages
ne se voient
pas à la vue
simple.

2001. Ces passages n'arrivent que lorsque Vénus & Mercure dans leur conjonction inférieure, n'ont pas une latitude plus grande que le demi-diamètre du soleil, c'est-à-dire, lorsque la conjonction arrive fort près du nœud, tout au plus, à la distance de $1^{\circ}\frac{1}{4}$ pour Vénus.

Ils sont très-
importans.

2002. Ces passages sont importans ; ils fournissent un moyen de déterminer exactement le lieu du nœud de Mercure, ou de Vénus, & la longitude héliocentrique indépendamment de la parallaxe du grand orbe ; mais les passages de Vénus ont sur-tout l'avantage singulier de pouvoir faire connoître exactement la parallaxe du soleil (2149) ; d'où dépendent les distances de toutes les planètes entr'elles & par rapport à nous (1222) ; c'est ce qui leur a donné une si grande célébrité, & ce qui m'oblige de les traiter séparément dans ce XI^e livre.

Il y a dans les passages de Vénus trois choses qui concourent à donner de l'avantage & du mérite à ces fortes d'observations ; 1^o, la grande précision avec laquelle on observe le contact de deux objets, dont l'un est obscur & placé sur un autre qui est lumineux ; il n'y a dans l'astronomie que ce seul cas où l'on puisse observer un angle de distance à un dixième de seconde près ; 2^o, le rapport connu de la parallaxe de Vénus au soleil, avec celles de toutes les autres planètes ; 3^o, la grandeur de cette parallaxe qui produit un quart-d'heure de différence entre les observations, & qui est plus que double de celle du soleil.

2003. Képler fut le premier qui en 1627 après avoir dressé sur les observations de Tycho ses tables Rudolphines, osa marquer les temps où Vénus & Mercure passeroient devant le soleil ; il annonça même un passage de Mercure pour 1631, & deux passages de Vénus, l'un pour 1631, & l'autre pour 1761, dans un avertissement aux astronomes, publié à Leipsick en 1629 : *Admonitio ad Astronomos rerumque cælestium studiosos, de miris rarisque anni 1631 phænomenis, Veneris puta, & Mercurii in solem incurfu*. Képler n'avoit pas pu donner à ses tables

un degré de perfection assez grand, pour annoncer d'une manière exacte & infaillible ces phénomènes, qui tiennent à des quantités fort petites; le passage qu'il annonçoit pour 1631 n'eut pas lieu; & Gassendi qui s'y étoit rendu fort attentif à Paris ne l'avoit point apperçu; mais aussi il y eut en 1639 un passage de Vénus que Képler n'avoit point annoncé & qui fut observé en Angleterre. Képler mourut en 1631 quelques jours avant le passage de Vénus qu'il avoit annoncé pour 1631; mais celui de Mercure fut observé, comme il l'avoit prédit.

2004. Avant que de tracer l'histoire de ces observations, examinons d'abord pourquoi les passages de Mercure & sur-tout ceux de Vénus sur le soleil, sont si rares: Vénus revient toujours à sa conjonction inférieure au bout d'un an & 219 jours (1173); il sembleroit donc qu'à chaque conjonction Vénus devrait paroître sur le soleil, étant placée entre le soleil & nous; mais il en est de ces éclipses comme des éclipses de lune (1770), il ne suffit pas que Vénus soit en conjonction avec le soleil, il faut qu'elle soit vers son nœud, & que sa latitude vue de la terre n'excede pas le demi-diamètre du soleil, c'est-à-dire, environ 16'. Soit *C* le centre du soleil (*Pl. XV, fig. 125*), *NCD* l'écliptique, *NSVE* l'orbite de Vénus; *V* Vénus en conjonction, c'est-à-dire, au moment où elle répond perpendiculairement au point *C* de l'écliptique où est le soleil; *CV* la latitude géocentrique de Vénus; si cette latitude est plus petite que le rayon *CO* du soleil, il est évident que Vénus paroîtra sur le disque *SOE* du soleil, il en est de même de Mercure.

2005. Lorsqu'on connoît la révolution synodique moyenne de Mercure ou le retour de ses conjonctions au soleil, qui est de 115j 21^h 3' 22" 3 (1173), on peut trouver pour un intervalle quelconque toutes les conjonctions inférieures de Mercure au soleil; on choisit celles qui arrivent quand le soleil est près du nœud de Mercure, c'est-à-dire, vers le commencement de Mai & de Novembre, & en les calculant avec plus de soin (2043), l'on

Planche XV.

Fig. 125.

Trouver les
années des
passages.

voit bientôt si la latitude géocentrique au moment de la conjonction vraie n'excède pas le demi-diamètre du soleil, & si Mercure peut paroître sur le disque du soleil. C'est ainsi que M. Halley calcula, en 1691, plusieurs passages de Mercure sur le soleil, qui sont rapportés dans les transactions philosophiques, n°. 193, pag. 511, dans le premier volume de l'Abrégé, pag. 427, & dans les leçons d'astronomie de Whiston, dictées en 1703 & imprimées en 1708 in-8°, (*Prælectiones Astronomiæ*, pag. 267); on y trouve les calculs que M. Halley avoit faits de 29 passages tant pour le dernier siècle que pour celui-ci. Il y employoit des périodes de 6 ans, de 7, de 13, de 46 & de 265, qui fort souvent ramènent les passages de Mercure sur le soleil au même nœud; & qui suffisoient pour indiquer les années où il peut y en avoir, comme nous le dirons bientôt. M. Halley avoit fait la même chose pour les passages de Vénus; il y reconnut les périodes de 8 ans, de 235 & de 243, qui ramènent les passages de Vénus sur le soleil, & il calcula 17 passages de Vénus, comme nous le dirons, après que nous aurons parlé de l'histoire de ces observations.

Périodes des passages de Mercure & de Vénus.

Premier passage de Mercure.

2006. La première observation que l'on ait eu d'un semblable phénomène, est le passage de Mercure observé à Paris par Gassendi, le 7 Novembre 1631 au matin; il en rendit compte lui-même dans une lettre adressée à Schickardus la même année; & qui se trouve à la fin de son *Institutio astronomica*, sous ce titre: *Mercurius in sole visus*. J'ai été plus heureux, dit-il, que tous ces philosophes hermétiques occupés à chercher *Mercurium in sole*; (c'est-à-dire, la pierre philosophale): je l'ai trouvé, je l'ai contemplé, là où personne avant moi ne l'avoit vu. En conséquence de l'avertissement de Képler, publié en 1629, Gassendi se préparoit à observer Mercure sur le soleil dans une chambre obscure, en recevant l'image du soleil sur un carton, au travers d'une lunette, comme il avoit coutume de le faire pour les éclipses de soleil; dans la chambre qui étoit au-dessous, il avoit placé un observateur avec un quart de cercle de deux pieds, pour mesurer

mesurer la hauteur du soleil au premier signal ; ce qui devoit lui donner le temps vrai de chaque observation (1030). Dès le 5 de Nov. il vouloit chercher Mercure sur le soleil , mais le ciel fut pluvieux toute la journée , & le 6 il eut encore presque tout le jour un ciel couvert. Le 7 au matin , il ne put appercevoir le soleil qu'au travers des nuages jusqu'à 9 heures ; il remarqua pour lors quelque chose de noir sur son image du soleil ; mais ne croyant pas que le diamètre de Mercure pût être si petit , il ne soupçonna pas que ce fût cette planète ; & ne marqua sa position que d'une manière assez vague. Cependant Gassendi fit ensuite réflexion que ce pouvoit être une petite tache formée ce jour-là ; elle pouvoit servir à y comparer Mercure s'il venoit à y paroître ensuite , au moyen de quoi l'on pourroit déterminer la parallaxe de Mercure par cette tache , si dans quelqu'autre pays on se trouvoit avoir fait une pareille observation ; en conséquence il mesura sa distance au centre du soleil ; quelque temps après il la mesura de nouveau , & trouva la distance un peu plus grande ; il fut très-étonné de cette différence , & commença de croire que ce n'étoit point une tache ordinaire , puisqu'elle avoit un mouvement si sensible ; il eût même quelque idée que ce pouvoit être Mercure , mais sans oser se le persuader , tant il étoit préoccupé de l'idée que Mercure paroîtroit beaucoup plus gros. Mais enfin le soleil ayant reparu , Gassendi mesura de nouveau la distance des centres , & l'ayant trouvé fort augmentée , il comprit enfin que c'étoit Mercure qu'il voyoit sur le soleil ; il frappa du pied pour avertir de prendre hauteur , afin d'avoir le temps vrai ; mais celui qu'il avoit placé au quart de cercle avoit quitté son poste , ce qui lui fit perdre encore beaucoup de temps , en sorte qu'il ne pût faire , pour ainsi dire , d'autre observation que celle de la sortie de Vénus ; elle arriva à 10h 28' , suivant le calcul de Gassendi , le soleil ayant 21° 44' de hauteur apparente ; Mercure étoit à 32° $\frac{1}{2}$ du vertical du centre du soleil , mais Gassendi avoit quelque doute sur ce dernier point.

Ce passage de 1631 observé à Paris par Gassendi, le fut aussi à Inspruck, par le P. Jean-Baptiste *Cysatus*; Jésuite; à Rufac en Alsace, par Jean *Remus Quietanus*, Médecin; & à Ingolstadt par un anonyme; mais l'observation de Gassendi est la seule dont ont ait tiré des conséquences astronomiques.

Résultat de ce passage.

Ce premier passage de Mercure étant la première observation que les astronomes aient eue d'une longitude héliocentrique de Mercure, a été employé pour la théorie de Mercure par plusieurs astronomes, & en particulier par M. Cassini (*Elemens d'astron. pag. 592*): il trouve que le milieu de ce passage a dû arriver le 7 Novembre 1631 à 7^h 44' 16" du matin, & la conjonction vraie à 7^h 50', le lieu du soleil & celui de Mercure étant à 7^s 14° 41' 35", & le lieu du nœud à 1^s 13° 24' 43"; on peut voir aussi le calcul qu'en fit M. Halley, (*Philos. transf. 1725, n°. 386*). J'ai placé le résultat de ce passage, parmi les observations de Mercure pag. 167.

Douze autres passages.

2007. Depuis ce temps-là, nous avons eu 12 autres passages de Mercure sur le soleil, dont les résultats ont été rapportés dans le VI^e livre avec les autres observations de Mercure (*pag. 167*): on trouvera le détail des 8 premiers dans M. Cassini, *pag. 585. & suiv.*

Après le passage de 1631, on trouve d'abord le second passage qui fut celui du 3 Novembre 1651 n. st.; observé à Surate dans les Indes, par *Shakerlaeus*, Anglois, qui avoit entrepris exprès ce grand voyage, pour observer Mercure sur le soleil; l'observation est rapportée dans l'ouvrage de Wing intitulé: *Astronomia Britannica*.

2008. Le troisième est celui du 3 Mai 1661. Il fut observé à Dantzick par *Hewelius*, qui composa à ce sujet l'ouvrage intitulé, *Mercurius in sole visus*; mais son calcul a été réformé par M. Cassini (*pag. 584*), qui en a fait un grand usage pour la théorie de Mercure. C'étoit le premier passage qu'on eût observé vers le nœud descendant; il fut aussi observé à Londres par *Huygens*; *Mercator* & *Street*.

2009. Le 4^e passage de Mercure arriva le 7 Nov. 1677, & fut observé par M. Halley à l'isle de S^{te} Hélène, où il étoit allé pour cette observation; par M. Gallet, à Avignon; par M. Tounley, en Angleterre; & par un Anonyme à Montpellier.

2010. Le 5^e passage de Mercure fut observé le 10 Nov. 1690, à Canton dans la Chine, par les PP. Fontanay & le Comte, Jésuites; à Nuremberg, par M. *Wurtzelbaur*; à Erford, par M. *Kirch*; à Varfovie, par le P. A. A. *Kochanski*; à Sommerfeld, près de Leipfick, par Michel *Arnoldus*.

2011. Le 6^e passage fut observé le 3 Novembre 1697; à Paris, par M. Cassini, M. Maraldi & M. de la Hire; à Rotterdam, par le fils de M. Cassini; à Tchaotcheoufou dans la Chine, par le P. Fontanay, Jésuite; à Pékin, par le P. Visdeloup, Jésuite; à Nuremberg, par M. *Wurtzelbaur*, &c. M. de l'Isle qui, dans un avertissement parle de toutes ces observations, a laissé dans ses manuscrits les détails de l'observation faite à la Chine; celle qui fut faite à Paris est rapportée dans les élémens de M. Cassini, pag. 597.

Je ne parle pas ici d'un passage du 5 Mai 1707, qui fut entrevu à Copenhague, par M. Roemer, sans qu'on en ait tiré aucune conséquence utile. On en attendoit un le 8 Mai 1720 au matin; M. de l'Isle qui étoit pour lors à l'hôtel de Taranne, chercha Mercure inutilement, & le passage ne dut pas arriver suivant mes tables.

2012. Le 7^e passage est du 9 Novembre 1723; il fut observé à Paris, à Londres, à Gênes, à Bologne, à Padoue, &c. M. Halley dans les tranfactions philosophiques de 1725, en a fait usage pour corriger ses tables de Mercure, & M. de l'Isle donna à cette occasion un grand mémoire dans le volume de l'académie pour 1723.

2013. Le 8^e passage est arrivé le 11 Novembre 1736, c'est l'observation la plus complete qu'on ait eue en Europe d'un passage de Mercure; car en plusieurs endroits l'on observa l'entrée & la sortie. On peut voir à

ce sujet les mémoires de l'académie , année 1736.

2014. Le 9^e passage est celui du 2 Mai 1740, observé seulement à Cambridge dans la nouvelle Angleterre, par M. Wintrop; l'observation se trouve dans les transactions philosophiques, elle servit à M. de l'Isle en 1752 à prédire le passage de 1753, en lui apprenant qu'il falloit ajouter 1' 23'' à la longitude héliocentrique de Mercure, tirée des tables de M. Halley; c'étoit le second passage qu'on eût vu dans le nœud descendant. M. de l'Isle étoit allé exprès de Pétersbourg à Beresow, en Sibérie, pour y faire cette observation, mais les nuages se dissipèrent une heure trop tard, & il manqua l'objet de ce pénible voyage.

2015. Le 10^e passage a été observe dans toute l'Europe, le 5 Novembre 1743, Voyez les mémoires de l'académie pour cette année-là.

2016. Le 11^e est celui du 6 Mai 1753, c'est le troisième qu'on ait vu dans le nœud descendant; il a été observé de même dans toute l'Europe; on eut à Paris, & j'eus moi-même au Château de Meudon l'observation la plus complete; ce fut à cette occasion que je donnai ma méthode pour calculer ces sortes d'observations (2125). *Mém. de l'acad. 1753 & 1754.*

2017. Le 12^e passage de Mercure est celui du 7 Novembre 1756, observé à Pékin par le P. Amiot & le P. Gaubil, & à Pondichéri par le P. Cœurdoux, tous trois savans Missionnaires Jésuites. M. de l'Isle a donné le détail de cette observation avec les conséquences qu'il en avoit tirées, dans les mémoires de l'acad. pour 1758, j'aurai occasion d'en parler encore à l'art. 2159.

2018. Enfin, il y a eu un 13^e passage le 9 Novembre 1769 au soir, dont la conjonction a dû arriver à 10^h 33' avec 7^s 17° 50' 49'' de longitude, & 7' 39'' de latitude géocentrique; j'apprends qu'il a été observée en Amérique, mais les observations ne me sont point encore parvenues. (Août 1770).

Passages du
mois de No-
vembre.

2019. Les observations de ces 13 passages font voir qu'il y a des périodes ou des retours assignables pour ces

fortes de phénomènes, & M. Halley qui les avoit aperçus, s'en servit pour les prédire tous. La période la plus courte pour les passages de Mercure, dans son nœud ascendant au mois de Novembre, est celle de 6 ans 8j 18^h 27'; il y a un jour de plus, quand l'année du premier passage est la bissextile ou la suivante, par exemple 1776; il n'y a pour lors qu'une bissextile entre les deux passages qui arrivent dans les 6 ans. Après cet intervalle de temps, Mercure paroît de 31' 35" plus au nord que la première fois au moment de la conjonction, suivant nos nouvelles tables.

2020. Ainsi pour que l'on puisse observer deux passages de Mercure sur le soleil au nœud ascendant, ou au mois de Novembre dans l'intervalle de 6 ans, il faut que dans le premier passage, Mercure ait eu une latitude très-méridionale, & qu'il ait presque rasé le bord austral du soleil, afin que dans le passage suivant, il puisse rencontrer le bord boréal du soleil; mais cette circonstance arrivera très-rarement. Le calcul précédent pour la quantité dont Mercure paroît plus au nord dans un passage que dans l'autre, se fera par les règles des articles 2045 & suiv. Ces nombres sont un peu plus exacts que ceux de M. Halley. (*Philos. transf.* 1691, n^o. 193, pag. 511. Abrégé I. 430).

2021. La seconde période est celle de 7 ans moins 7 jours & 44', elle a lieu de 1769 à 1776; mais lorsqu'il n'y a qu'une bissextile en 7 ans, ce qui arrive quand l'année du premier passage est bissextile, on retranche seulement 6 jours. A la fin de cette période, Mercure passe 23' 24" plus au midi que la première fois; c'étoit seulement 22' 47", suivant les calculs de M. Halley, dans lesquels il donnoit la plus courte distance, ou la perpendiculaire sur l'orbite relative.

2022. La troisième période est celle de 13 années Juliennes, 2j 17^h 48'; il y a un jour de moins, s'il se trouve 4 bissextiles dans l'intervalle. Mercure passe 8' 21" plus au nord que la première fois, au moment de

la conjonction. Cette période a lieu de 1743 à 1756, de 1756 à 1769, &c.

2023. La quatrième période du retour de Mercure au soleil est de 46 années Juliennes 1j 4^h 47', ou un jour de moins, s'il y a douze biffextiles dans l'intervalle, comme cela arrive lorsque la première observation a lieu dans la seconde ou la troisième année après la biffextile; il y a un jour de plus quand le calendrier Grégorien fait omettre une intercalaire. Mercure à la fin de cette période passe 1' 22'', plus au nord-qu'au commencement de cette période, suivant le calcul de M. Halley, ou 1' 36'', suivant mes tables. Cette période a eu lieu de 1631 à 1677.

2024. Enfin, la cinquième & la plus exacte de toutes ces périodes, est celle de 263 années Juliennes, 11^h 7' environ; l'on comptera un jour de plus, si la première année de la période est une biffextile. A cause de l'omission de deux intercalaires en 1700 & en 1800 dans le calendrier Grégorien, la période entre le passage de 1631 & celui de 1894, sera de 263 ans 3j 11^h. Mercure passe 10'' seulement plus au nord, suivant le calcul de M. Halley, mais suivant mes tables qui donnent un mouvement du nœud beaucoup moindre (1337), Mercure doit passer 1' 20'' plus au nord.

Passages du
mois de Mai.

2025. Dans les retours de Mercure au nœud descendant, les périodes de 6 & de 7 ans ne peuvent avoir lieu, parce que dans les passages du mois de Mai, Mercure étant plus loin du soleil, & plus près de la terre que dans ceux du mois de Novembre, sa latitude géocentrique est plus grande, même à égale distance du nœud; Mercure paroît donc nécessairement au nord du disque du soleil, s'il a rencontré ce disque même dans sa partie la plus méridionale, au commencement de cette période.

2026. Ainsi la période la plus courte pour les retours de Mercure sur le soleil à son nœud descendant au mois de Mai, est celle de 13 années Juliennes 3j 7^h & 38', ou un jour de moins, si l'année précédente est la troisième après

une bissextile, c'est-à-dire, si la première conjonction est arrivée dans l'année qui précède une bissextile. Mercure passe plus au midi de $17' 15''$. Cette période a eu lieu de 1740 à 1753.

2027. La seconde période des passages de Mercure dans le nœud descendant est de 46 années Juliennes, en supposant qu'il y en ait 12 de bissextiles, avec $5^h 40'$ environ. Mais si la première année est la bissextile, ou celle qui suit la bissextile, il faut ajouter un jour de plus pour avoir le second passage; on trouve même entre 1661 & 1707, $2j 5^h 46'$ de différence, à cause de la bissextile de 1700 qui avoit été omise (1547). Mercure étoit $2' 59''$ plus au midi, à la fin de cette période.

2028. La troisième est celle de 263 années Juliennes $1j 2^h$ & un quart; on compte un jour de plus, si l'année du premier passage a été bissextile, & encore deux autres jours de plus, s'il y a deux interruptions du calendrier. Mercure passe seulement de $27''$ plus au midi que la première fois, suivant mes tables de Mercure. M. Halley comptoit un jour de moins, mais il me paroît que c'est une méprise.

2029. Il y avoit plusieurs passages dans la liste de M. Halley, qui ne pourront avoir lieu, parce que la latitude sera plus grande qu'il n'avoit cru; M. Trebuchet en avoit fait la remarque à l'occasion des passages de Vénus; en conséquence, il a cru devoir vérifier les calculs de M. Halley en se servant de mes tables de Mercure, plus exactes que celles de cet auteur; il a employé aussi les nouvelles tables du soleil, mais en négligeant les petites équations. En même temps il a poussé les calculs beaucoup plus loin que M. Halley qui s'étoit arrêté à 1799, voici la nouvelle table de M. Trebuchet qui s'étend jusqu'à la fin du 19^e siècle, & contient 40 passages. Ceux qui doivent arriver jusqu'en 1815, sont figurés dans une planche gravée, que Whiston publia à Londres en 1723. La table suivante contient le temps moyen de la conjonction vraie de Mercure au soleil, & la latitude vraie de Mercure au moment de la conjonction.

*Passages de Mercure sur le Soleil dans son nœud descendant,
au mois de Mai pendant trois siècles.*

ANNÉES.	Temps moy. à Paris.			Longit. géocent. vraie en conjonc.				Latitude géoc.			
	H.	M.	S.	J.	D.	M.	S.	M. S.			
1615	3 Mai.	1	23	50	1	12	34	17	6	33	B
1628	5	9	20	17	1	15	38	59	10	52	A
1661	3	6	58	58	1	13	38	17	3	36	B
1674	6	15	0	37	1	16	43	19	13	51	A
1707	5	12	45	0	1	14	43	5	0	37	B
1740	2	10	47	36	1	12	43	23	14	52	B
1753	5	18	25	37	1	15	47	28	2	22	A
1786	3	16	27	0	1	13	47	44	12	3	B
1799	7	0	5	48	1	16	51	52	5	20	A
1832	4	22	6	12	1	14	52	6	9	3	B
1845	8	5	46	36	1	17	56	17	8	19	A
1878	6	3	45	12	1	15	56	25	6	8	B
1891	9	11	27	12	1	19	0	41	11	19	A

*Passages de Mercure sur le Soleil dans son nœud ascendant,
au mois de Novembre pendant trois siècles.*

ANNÉES.	Temps moy. à Paris.			Longit. géocent. vraie en conjonc.				Latitude géoc.			
	H.	M.	S.	J.	D.	M.	S.	D. S.			
1605	1 Nov.	7	57	29	7	9	29	20	13	58	A
1618	4	1	49	30	7	12	5	32	5	32	A
1631	6	19	37	10	7	14	41	45	2	48	B
1644	8	13	21	25	7	17	17	56	11	7	B
1651	2	12	47	30	7	10	32	10	12	16	A
1664	4	6	38	50	7	13	8	21	3	58	A
1677	7	0	26	20	7	15	44	33	4	25	B
1690	9	18	9	15	7	18	20	44	12	44	B
1697	2	17	37	50	7	11	35	2	10	40	A
1710	6	11	28	30	7	14	11	12	2	19	A
1723	9	5	15	52	7	16	47	26	6	0	B
1736	10	22	59	40	7	19	23	38	14	21	B
1743	4	22	27	0	7	12	37	50	9	3	A
1756	6	16	18	0	7	15	14	3	0	42	A
1769	9	10	6	0	7	17	50	19	7	39	B
1776	2	9	21	40	7	11	4	26	15	45	A
1782	12	3	48	41	7	20	26	30	15	50	B
1789	5	3	16	35	7	13	40	37	7	25	A
1802	8	21	7	35	7	16	16	53	0	55	B
1815	11	14	53	30	7	18	53	7	9	15	B
1822	4	14	11	46	7	12	7	14	14	8	A
1835	7	8	6	50	7	14	43	31	5	49	A
1848	9	1	57	0	7	17	19	44	2	31	B
1861	11	19	43	50	7	19	56	0	10	52	B
1868	4	19	2	34	7	13	10	7	12	33	A
1881	7	12	56	10	7	15	46	20	4	12	A
1894	20	6	46	40	7	18	22	40	4	9	B

2030. Pour faire sur les passages de Vénus de semblables calculs, on se sert aussi de sa révolution synodique (1173), par laquelle on trouve les temps de toutes les conjonctions moyennes; lorsqu'on a calculée ces conjonctions, on choisit celles qui arrivent aux environs des nœuds, c'est actuellement vers le commencement de Juin & de Décembre: on les calcule plus exactement (2043), & l'on trouve les retours de ces conjonctions à peu-près tels que je vais les rapporter (2038).

2031. La première période qu'on remarque dans les passages de Vénus sur le soleil à son nœud ascendant, ou au mois de Décembre, est celle de 8 ans, en ôtant du premier passage $2^j 10^h 52'$; Vénus passe la seconde fois $24' 18''$ plus au midi que la première fois. Il n'y a point de différence à faire pour le nombre de jours, relativement aux années bissextiles.

Périodes
de Vénus.

2032. La seconde période est celle de 235 ans $2^j 10^h 10'$. On compte un jour de plus, si la première conjonction s'est trouvée dans une année bissextile; la route de Vénus est de $21' 30''$ plus boréale dans la seconde observation que dans la première; au lieu que M. Halley la croyoit plus au nord de $11' 33''$ seulement.

2033. La période de 243 ans ramène aussi les passages de Vénus, en ôtant seulement $43'$ du premier; mais si la première année a été bissextile, on compte un jour de plus pour l'intervalle. La route de Vénus au bout des 243 ans est de $2' 48''$ plus méridionale, suivant mes tables; M. Halley la croyoit plus méridionale de $13' 8''$ par le défaut des tables que l'on avoit alors.

2034. Dans tous les passages du mois de Décembre vers le nœud ascendant, l'inclinaison relative de l'orbite de Vénus suivant M. Halley, est de $9^\circ 5'$, le mouvement horaire de Vénus $4' 7''$, & le temps qu'il lui faudroit pour traverser le disque entier du soleil est de $7^h 56'$. Dans ceux du mois de Juin les élémens sont à peu-près tels qu'on les trouvera ci-après (2058), la durée

du passage du centre de Vénus par le centre du soleil, ne peut être que de $7^h 37'$.

2035. Dans les conjonctions de Vénus qui arrivent au mois de Juin vers le nœud descendant, les mêmes périodes ont lieu, avec quelques petites différences : la première période est de 8 ans moins $2j 7^h 37'$, & Vénus devient plus boréale de $19' 34''$, suivant les observations qu'on a faites dans les deux passages de 1761 & 1769.

2036. La seconde période est de 235 ans $2j 8^h 18'$, ou un jour de plus, si la première année est bissextile. On ajoute encore un jour, si le calendrier Grégorien a souffert quelque interruption, comme en 1700, 1800 & 1900. Vénus devient plus australe de $18' 10''$ à la fin de cette période ; il est vrai que suivant M. Halley qui ne tenoit pas compte du mouvement du nœud de Vénus, elle devoit passer plus au midi de $9' 21''$, mais ce mouvement étant de $19''$ par année (1340), cela rend Vénus plus méridionale.

2037. La troisième période est de 243 ans, $1^h 23'$, ou un jour de plus, si la première année est bissextile ; Vénus à la fin de cette période paroît plus boréale, non pas de $10' 37''$, comme l'avoit cru M. Halley, mais de $1' 20''$ seulement.

2038. En se servant de pareilles périodes, M. Halley calcula les 17 passages de Vénus qui sont dans la table suivante ; mais M. Trébuchet ayant corrigé le calcul des latitudes, d'après le mouvement du nœud de Vénus qui a été observé, en a trouvé 6 où Vénus ne paroîtra point sur le soleil, quoiqu'elle dût y passer suivant le calcul de M. Halley, & je les ai marqués d'une astérisque * dans la table suivante. Les plus courtes distances y sont rectifiées, & j'y ai corrigé deux autres erreurs que M. Trébuchet avoit remarquées dans le calcul de M. Halley.



TABLE des passages de Vénus sur le disque du Soleil pendant 12 siècles.

Temps vrai de la conjonction à Paris.		La plus courte distance de Vénus au centre du Soleil.	
V.St. 918	20 Nov. 22 ^h 3'	25' 30"	A *
1048	20 Mai 0 6	26 35	B *
1161	20 Nov. 21 20	27 22	A *
1283	23 Mai 8 24	7 50	B
1291	21 Mai 1 29	27 40	B *
1396	23 Nov. 7 30	5 47	A
1518	25 Mai 16 42	10 55	A
1526	23 Mai 9 47	8 55	B
N.St. 1631	6 Déc. 17 39	15 48	B
1639	4 Déc. 6 47	8 30	A
1761	5 Juin 18 5	9 50	A
1769	3 Juin 11 10	10 0	B
1874	8 Déc. 16 56	13 0	B
1996	10 Juin 2 23	28 0	A *
2004	7 Juin 19 28	8 30	A
2109	13 Déc. 3 6	34 42	B *
2117	10 Déc. 16 13	10 23	B

2039. Nous avons dit que Képler avoit annoncé un passage de Vénus pour l'année 1631, & qu'il n'y en avoit point eu (2003); mais il y en eut un 8 ans après, en 1639: Gassendi qui étoit déjà à Paris en 1631, se rendit très-attentif au passage que Képler avoit annoncé pour 1631; il raconte fort au long ses tentatives à ce sujet. (*Mercurius in sole visus, & Venus invisus*); mais elles furent infructueuses. La conjonction devoit arriver à 9^h 6' du soir, avec une latitude boréale de 11'' $\frac{1}{3}$, en sorte que l'entrée de Vénus sur le soleil, devoit se faire le 6 Décembre vers le coucher du soleil; il auroit voulu examiner le soleil & se préparer deux jours d'avance à cette observation, mais le 4 & le 5 on n'eut que de la

Passage de Vénus annoncé pour 1631.

pluie avec un vent impétueux ; le 6 Gassendi vit plusieurs fois le soleil, & le soir jusqu'à trois heures passées, sans que Vénus y parût ; le 7 & le 8 au matin Vénus n'y étoit point, & Gassendi resta dans le doute, si ce passage étoit arrivé tout entier pendant la nuit du 6 au 7, comme nous le croyons aujourd'hui, ou si la latitude s'étant trouvée trop grande, le passage avoit manqué totalement.

Passage
observé en
1639.

2040. Le passage de Vénus qu'il y eut en 1639 fut le premier qu'on observa ; mais ce fut par un hazard heureux ; Horoccius s'étoit occupé à calculer des éphémérides sur les tables de Lansberge, beaucoup moins parfaites que les tables Rudolphines ; ces tables de Lansberge donnoient une erreur de 16' pour la latitude de Vénus, & les tables Rudolphines une erreur de 8' seulement ; mais l'erreur de Lansberge faisoit remonter Vénus sur le soleil, de sorte que le passage devoit être visible, tandis que l'erreur des tables de Képler la faisoit passer au-dessous ; c'est ainsi que de mauvaises tables occasionnèrent une bonne observation ; sur la foi de ces tables, que Lansberge avoit célébrées avec une assurance capable d'en imposer, Horoccius se prépara à observer ce passage, & le 24 Novembre 1639 vieux style, ou le 4 Décembre N. St., il vit en effet pendant environ une demi-heure Vénus sur le soleil ; il en avoit donné avis à *Cabrée* son ami, qui étoit à quelques lieues d'Hoole & qui l'observa également. J'en ai donné le résultat parmi les observations de Vénus, pag. 169, d'après M. Honsby ; suivant M. Cassini, la conjonction arriva le 4 Décembre 1639 à 6^h 20' du soir, temps vrai, avec 8^s 12° 31' 44" de longitude, & 9' 8" de latitude géocentrique (*Elém. d'astr.* pag. 559).

M. Halley
calcule les
passages de
Vénus.

2041. Dans le temps qu'on observa le passage de Vénus sur le soleil en 1639, on ne connoissoit pas encore toute l'utilité qu'on retireroit un jour de ces sortes de phénomènes : ce fut M. Halley qui en 1677 apperçut que la durée d'un passage de Mercure ou de Vénus sur le soleil pouvoit servir à trouver sa parallaxe ; il essaya

même de la trouver par le moyen du passage de Mercure ; mais en 1691 il donna dans les transactions philosophiques un mémoire exprès sur les passages de Vénus , où il parla de 17 passages , c'est-à-dire , de ceux qui avoient dû avoir lieu depuis 918 , ou qu'on pouvoit espérer jusqu'à l'an 2117. (V. l'art. 2038). (*The Philosophical transactions* , n° 193 , pag. 511 , ou l'*Abrégé de Lowthorp* , tom. I. pag. 434).

2042. Enfin M. Halley annonça que si l'intervalle de temps entre les deux contacts intérieurs des bords de Vénus & du soleil , pouvoit se déterminer , à une seconde près , en deux pays situés d'une manière convenable , on en concluroit la parallaxe du soleil & sa distance , à $\frac{1}{5000}$ près. Il développa ensuite cette dernière conséquence en 1716 dans un autre mémoire : (Voyez *Philosoph. transf.* n°. 348 , pag. 454 , ou l'*Abrégé de Jones* , tom. IV , pag. 213). Il assigna pour lors les lieux de la terre où il croyoit qu'on devoit se transporter pour faire , en 1761 , cette importante observation avec tout l'avantage convenable ; mais il se trompa considérablement dans cette partie de son mémoire , comme je l'ai expliqué fort au long dans l'*Hist. de l'acad.* année 1757 , pag. 83.

Il annon-
ceur impor-
tance.

Méthodes pour calculer les circonstances d'un passage de Vénus ou de Mercure sur le Soleil.

2043. LES circonstances d'un passage de Vénus sont le temps de la conjonction , le milieu du passage , l'entrée & la sortie ; la latitude au temps de la conjonction , & la plus courte distance des centres de Vénus & du soleil ; les méthodes qu'on emploie pour ces calculs sont les mêmes pour Vénus & pour Mercure ; ainsi l'on devra entendre de Mercure tout ce que je dirai de Vénus dans les articles suivans.

On commence par calculer ces passages tels qu'ils paroîtroient s'ils étoient vus du centre de la terre ; on cherche ensuite l'effet des parallaxes en différens points de

Deux méthodes différentes.

la surface de la terre. Il y a deux méthodes pour calculer les circonstances d'un passage de Vénus pour le centre de la terre, l'une par les longitudes & latitudes héliocentriques, l'autre par les longitudes & latitudes géocentriques; la première est la plus simple; M. de l'Isle est le premier qui l'ait employée; je m'en servirai dans l'exemple suivant.

2044. Lorsqu'on connoît par le moyen des périodes indiquées ci-dessus (2005, 2031), le jour où il peut y avoir un passage de Venus sur le soleil, il s'agit de trouver l'heure de la conjonction: on calcule pour ce jour-là & pour la veille, la longitude du soleil & la longitude héliocentrique de Vénus réduite à l'écliptique; pour avoir le vrai mouvement diurne de Vénus vu du soleil; on calcule aussi le mouvement diurne de la terre aussi vu du soleil, qui est égal au changement de la longitude du soleil.

Ainsi le 5 Juin 1761 à midi, la longitude de la terre opposée à celle du soleil étoit de $8^s 14^o 53' 34''$, & celle de Vénus $8^s 14^o 24' 47''$, par les tables dont je me servois alors; le 6 Juin la longitude de la terre $8^s 15^o 50' 56''$, & celle de Vénus $8^s 15^o 59' 55''$. Ainsi le mouvement diurne du soleil ou de la terre étoit de $57' 22''$, & celui de Vénus de $1^o 35' 8''$; la différence $37' 46''$ est le mouvement diurne de Vénus par rapport à la terre, vu du soleil, sur l'écliptique. La longit. de Vénus pour le 5 à midi étant moindre que celle de la terre de $28' 47''$, on fera cette proportion; le mouvement relatif $37' 46''$ est à 24^h comme $28' 47''$, distance de Vénus à sa conjonction avec la terre, sont à $18^h 17^m \frac{1}{2}$, temps de la conjonction suivant les tables; je l'ai trouvée par observation à $17^h 50'$, c'est-à-dire, le 6 à $5^h 50'$ du matin; ainsi l'erreur des tables étoit de près de demi-heure; quoique j'eusse choisi les élémens dont on pouvoit espérer le plus d'exactitude, (*Mém. acad.* 1761, pag. 107); mais il ne faut pas s'en étonner, car une erreur de $50''$ dans la longitude de Vénus suffit pour changer d'une demi-heure le temps de la conjonction, à cause de la lenteur de son mouvement.

Temps de la conjonction.

relatif. En employant les tables seules de M. Halley, on trouve la conjonction à 5^h 56' ; mais cette exactitude est produite par la compensation de deux erreurs. (*Ibid.* pag. III). L'heure de la conjonction vue du soleil ou de la conjonction vue de la terre, est exactement la même ; puisque la conjonction a lieu quand Vénus est sur le plan du cercle de latitude qui passe par les centres du soleil & de la terre ; ainsi nous n'avons aucun autre calcul à faire pour trouver la conjonction.

2045. Ayant trouvé l'heure de la conjonction, l'on calcule par les tables la latitude héliocentrique de Vénus, le rayon vecteur ou la distance au soleil, aussi bien que la distance de la terre au soleil. Cette latitude vue du soleil étoit, suivant mes tables de 3' 54" australe ; le mouvement horaire en latitude vu du soleil 14" 08, la distance de Vénus au soleil 72643, celle de la terre au soleil 101546, & par conséquent celle de Vénus à la terre 28903 ; je suppose cent mille pour la distance moyenne du soleil à la terre, comme l'a fait M. Halley dans ses tables. On cherchera aussi le demi-diamètre du soleil, qui dans cet exemple est de 15' 46" $\frac{1}{2}$, mais que je réduirai dans la suite à 15' 43" (2159).

2046. Soit *S* le centre du soleil (*fig.* 126), dont le demi-diamètre est *SA*, *T* le centre de la terre, *TV* la distance de Vénus à la terre ; si l'on conçoit un cône *ATB*, dont le sommet soit au centre de la terre *T*, & dont le soleil soit la base, l'angle *ATB* de ce cône sera la valeur du diamètre du soleil vu de la terre (1383). Ce cône étant coupé dans la région de Vénus par un plan perpendiculaire à son axe, la section est un cercle dont le diamètre est *CD* ; lorsque Vénus traverse le cône *ATB*, elle passe dans ce plan de section, ou dans le cercle dont le diamètre est *CD*, & elle y est nécessairement pendant toute la durée du passage. En effet, quand Vénus entre en *C* dans le cône *ATB*, elle paroît vue de la terre *T*, être sur le bord *A* du soleil ; quand elle quitte ce cône en *D*, elle paroît sur l'autre bord *B* du disque solaire, & c'est la fin du passage : ainsi nous allons cher-

Latitudes
& distances.

Section du
cône solaire.

Fig. 126.

Fig. 126. cher par le moyen des longitudes vues du soleil (2044); à quelle heure Vénus entrera dans la section du cône CD , & ce fera le commencement du passage.

2047. Il faut savoir d'abord quelle est la grandeur apparente vue du soleil de la section CD , que Vénus doit traverser pendant la durée du passage, ou de l'angle CSV ; pour cela on considère les triangles rectilignes rectangles SCV , TCV , qui ont un côté commun CV ; si l'on prend CV pour rayon, on aura SV pour tangente de l'angle SCV , ou cotangente de CSV , on aura de même TV pour cotangente de l'angle CTV , qui est égal au demi-diamètre du soleil; on pourra donc faire cette proportion, $TV : SV :: \text{cotang.} : CTV : \text{cot.} : CSV$, ou parce que les tangentes sont en raison inverse des cotangentes, $SV : TV :: \text{tang.} : CTV : \text{tang.} : CSV$; mais de si petits angles sont entre eux comme leurs tangentes, il n'y auroit pas une seconde d'erreur à craindre, même pour des arcs d'un degré; ainsi l'on dira: *la distance de Vénus au soleil est à la distance de Vénus à la terre, comme le demi-diamètre du soleil vu de la terre est au demi-diamètre de la section vue du soleil.*

Règle pour
trouver cette
section.

2048. Au moyen des distances rapportées ci-dessus (2045) pour le passage de Vénus sur le soleil en 1761, on aura cette proportion, $7264 : 2890 :: 15' 46'' \frac{1}{2} : 6' 16'' 59$, enforte que le demi-diamètre de la section que Vénus traversoit le jour du passage, étoit de $6' 16'' 59$ vu du soleil.

Fig. 125. 2049. Soit un cercle AES (fig. 125), dont le demi-diamètre CO vu du soleil soit de $6' 16'' \frac{1}{2}$ (2048); la circonférence AES représentera celle de la section que Vénus doit traverser; CN étant supposée une portion de l'écliptique; on tirera sur CN une perpendiculaire CV , égale à $3' 54''$, latitude héliocentrique de Vénus que nous avons trouvée ci-dessus (2045) pour le moment de la conjonction; le point V fera celui où Vénus devra se trouver au moment de la conjonction, & c'est par le point V qu'il faudra tirer une ligne EVS , pour représenter la trace ou l'orbite relative de Vénus, après

après que nous aurons déterminé l'inclinaison relative de cette orbite vue du soleil.

Fig. 125.

2050. Nous avons fait voir en parlant des éclipses (1765), que pour trouver l'inclinaison relative d'une orbite par rapport à un astre *C*, supposé fixe, il faut faire cette proportion : la somme ou la différence des deux mouvemens en longitude, est à la somme ou à la différence des mouvemens en latitude, comme le rayon est à la tangente d'un angle qui se trouve être l'inclinaison de l'orbite relative. Dans le cas dont il s'agit ici, les mouvemens en longitudes vont du même sens; ainsi l'on prendra la différence des mouvemens diurnes de la terre & de Vénus, qui est $37' 46''$; & le mouvement diurne de Vénus en latitude, qui est de $5' 38''$, le soleil n'en a aucun, l'on dira donc, $37' 46'' : 5' 38'' :: R : \text{tang. } 8^\circ 29''$, c'est à peu-près l'inclinaison de l'orbite relative de Vénus sur l'écliptique; ou plus exactement $8^\circ 28' 47''$ (2058). On tirera donc une ligne *SVE*, qui fasse avec le cercle de latitude *CV* un angle de $81^\circ 31'$, c'est le complément de l'inclinaison $8^\circ 29'$; & comme la latitude de Vénus *CV* va en croissant, on fera l'angle aigu *OVS* extérieurement du côté de la sortie *S* de Vénus, ou du côté de l'orient. Je dis que la sortie est du côté de l'orient, parce que toutes les planètes vues du soleil paroissent aller à l'orient; c'est-à-dire, selon l'ordre des signes; quoiqu'il n'y ait véritablement ni orient ni occident quand on se suppose dans le soleil, on est convenu de dire, comme sur la terre, qu'une planète va d'occident vers l'orient, quand elle va suivant l'ordre des signes, le Bélier, le Taureau, &c. en augmentant de longitude.

Orbite relative.

2051. On abaissera sur l'orbite *ES* une perpendiculaire *CM*; le point *M* fera le milieu du passage de Vénus, & *CM* fera la plus courte distance de Vénus à la terre, vue du soleil; c'est sa distance à la ligne des centres, ou à l'axe du cône dont nous avons parlé (2046). Pour trouver la quantité *MV*, on fera attention que l'angle *MCV*, formé par la perpendiculaire à l'orbite, & la perpendiculaire à l'écliptique, est égal à celui que

Fig. 125.

forment l'orbite relative & l'écliptique, c'est-à-dire, à l'inclinaison $8^{\circ} 28' 47''$; on fera donc cette proportion, $R : CV : \text{ou } 3' 54'' :: \sin. 8^{\circ} 28' 49'' : MV$ qui se trouvera $34'' 505$.

Mouvement relatif.

2052. Le mouvement diurne de Vénus sur son orbite relative se trouvera en disant (1765), le cosinus de l'inclinaison est au rayon, comme la différence des mouvemens diurnes $37' 46''$ est au mouvement sur l'orbite relative $38' 11''$, dont la vingt-quatrième partie est le mouvement horaire vu du soleil $1' 35''$ à peu-près; nous le trouverons ensuite par une méthode plus exacte, $1' 35'' 504$ (2057).

Milieu du passage.

Au moyen de ce mouvement horaire, il est aisé de trouver le milieu du passage & le temps que Vénus emploie à aller de V en M ; on dira pour cet effet, $1' 35'' 504 : 3600'' :: 34'' 505 : 21' 41''$, différence entre la conjonction & le milieu du passage. La différence des logarithmes de $3600''$ & du mouvement horaire, forme un logarithme constant 1576281 qui, ajouté avec celui de la quantité VM vue du soleil, donne le temps correspondant. Si l'on suppose l'heure de la conjonction $5^h 50''$ (2044), on aura pour le milieu du passage $5^h 28' 19''$.

La plus courte distance.

Le triangle CVM , qui a servi à trouver MV (2051) servira aussi à trouver CM , en disant, $R : CV :: \cos. VCM : CM$, qui fera $231'' 44$: ainsi la plus courte distance CM vue du soleil est de $3' 51'' 44$. Pour trouver cette distance vue de la terre; on dira comme dans l'article 2047, la distance de Vénus à la terre est à celle de Vénus au soleil, comme $3' 51'' 44$ font à $9' 41'' 69$, c'est la plus courte distance de Vénus au soleil vue de la terre.

2053. Si l'orbite de Vénus traversoit le centre C de la section, l'arc ME de l'orbite seroit égal à CD , c'est-à-dire, au rayon même de la section, $6' 16'' 6$; mais à cause de la latitude CV , Vénus traverse une corde ES plus petite que le diamètre; ainsi Vénus ne fera pas aussi long-temps dans le cercle ASE , & la durée du passage sera moindre, que si Vénus n'avoit point de latitude.

Pour connoître la longueur ME , qui est égale à SM , on résoudre le triangle CME , dans lequel on a $CE = 6' 16' 59''$ & $CM = 3' 51'' 44$: l'on trouvera ME de $4' 57'' 08$. Le temps que Vénus employera à parcourir ME , fera la demi-durée du passage : ainsi on la trouvera par cette proportion ; le mouvement horaire relatif $1' 35'' 504$, est à une heure ou $3600''$, comme $4' 57'' 08$ sont à $3^h 6' 38''$. C'est le temps que Vénus emploie à aller de E en M , & c'est la demi-durée du passage, vue du centre de la terre.

Fig. 125.

Demi-durée du passage.

La demi-durée $3^h 6' 38''$ étant ôtée de $5^h 28' 19''$, milieu du passage (2052), donnera $2^h 21' 41''$, pour le moment de l'entrée du centre de Vénus dans la section du cône solaire, ou dans le cercle ASE ; & cette même demi-durée étant ajoutée à $5^h 28' 19''$, donnera $8^h 34' 57''$ pour la sortie du centre de Vénus ; c'est aussi la sortie vue du centre de la terre ; c'est-à-dire, telle qu'elle est, en faisant abstraction des parallaxes (2060).

Entrée & sortie.

2054. Telle est la méthode la plus simple de trouver le commencement & la fin du passage de Vénus par rapport au centre de la terre ; on n'y emploie autre chose que les longitudes de Vénus vues du soleil, qui sont beaucoup plus aisées à calculer que les longitudes géocentriques (1143). On pourroit faire la même chose en y employant les longitudes géocentriques, & le mouvement de Vénus vu de la terre (2057) ; il suffiroit de prendre pour rayon du cercle AES le demi-diamètre du soleil $15' 46'' 5$: on trouveroit $CM = 9' 42'' 626$ le logarithme constant 11760380 & la demi-durée $3^h 6' 38''$; avec un mouvement rétrograde.

2055. Le changement de la distance de Mercure au soleil est assez sensible dans l'espace de quelques heures, pour qu'on ne doive pas supposer égaux les rayons du disque ou de la section ASE au commencement & à la fin du passage. M. de l'Isle, en calculant le passage de Mercure pour le 7 Novembre 1756 (*Mém. acad.* 1758, pag. 148), trouve le rayon CE pour l'entrée $34' 24'' 43$, & le rayon CS pour la sortie $34' 30'' 25$, c'est-à-dire,

Inégalité des distances de Mercure.

Fig. 125.

plus grand de $5'' 82$; parce que dans l'espace de $5^h 25'$ que dura ce passage, Mercure s'étoit rapproché de son périhélie, & par conséquent du soleil; ce qui lui faisoit parcourir une section plus voisine de la base du cône, & par conséquent plus étendue: mais cette inégalité peut se négliger dans les passages de Vénus.

Inégalité de son mouvement.

2056. L'inégalité du mouvement de Mercure doit aussi entrer dans le calcul, si l'on veut être assuré du résultat à quelques secondes près. Dans le passage de 1756, le mouvement héliocentrique de Mercure sur son orbite relative, dans la première demi-durée du passage étoit de $34' 21'' 18$; & dans la seconde demi-durée, il étoit de $34' 26'' 07$, c'est-à-dire, plus grand, en temps égal, de $4'' 89$. (*Mém.* 1758, pag. 143); la moitié de cette inégalité vaut $11'' \frac{1}{2}$ de temps, dont le vrai milieu du passage est différent d'un milieu pris entre l'entrée & la sortie, observées en *E* & en *S*, en sorte que la seconde demi-durée, à compter du point *M*, étoit plus courte de $23''$ que la première demi-durée *EM* (*Ibid.* pag. 153).

Calcul du mouvement horaire.

2057. J'ai donné dans les mémoires de l'académie pour 1762, pag. 96, une méthode exacte, pour trouver avec la précision d'un centième de seconde, les mouvemens horaires de Mercure & de Vénus, & par conséquent leur inégalité; mais les bornes de ce traité ne me permettent pas d'en donner ici la démonstration: il me suffira de rapporter mes formules, elles sont tirées des règles que j'ai démontrées (1240, 1241), & des formules différentielles (3307, & suiv.). Soit *x* l'anomalie excentrique, *u* l'anomalie vraie, *a* la distance aphélie, *p* la distance périhélie, *e* l'excentricité en secondes; on a $dx = du \frac{\sqrt{a \cos. \frac{1}{2} x^2}}{v p \cos. \frac{1}{2} u^2}$, & $e dx \cos. x$ est la quantité qu'il faut ajouter au mouvement *dx* de l'anomalie excentrique (dans le premier & le dernier quart de l'anomalie excent.) pour avoir le mouvement de l'anomalie moyenne. On supposera le mouvement vrai *du* connu à peu près, pour en déduire d'abord *dx*, & ensuite le mouvement moyen, qui doit se trouver de $4' 0'' 32$ pour

Vénus, & de $10' 13'' 86$ pour Mercure, si l'on a bien supposé le mouvement vrai. Si l'on trouve un mouvement moyen plus grand, l'on diminuera la valeur qu'on a supposée pour mouvement vrai, à peu-près comme on a fait pour trouver l'équation du centre (1244). Le mouvement horaire vrai sur l'orbite multiplié par le cosinus de l'inclinaison vraie de l'orbite, donnera le mouvement horaire sur l'écliptique; & multiplié par le sinus de l'inclinaison, & le cosinus de la distance au nœud, il donnera le mouvement horaire en latitude vu du soleil. Ayant pris la différence entre le mouvement sur l'écliptique & celui de la terre, on trouvera le mouvement relatif (2052), l'on en conclura les mouvemens géocentriques relatifs, de Vénus ou de Mercure par rapport au soleil, par le simple rapport des distances de la planète à la terre & au soleil.

2058. C'est ainsi que j'ai trouvé pour le passage de Vénus sur le soleil en 1761, le mouvement horaire $1' 35'' 504$ vu du soleil, & le mouvement vu de la terre $3' 57'' 40$ sur l'écliptique, $4' 0'' 03$ sur l'orbite, $35'' 39$ en latitude & l'inclinaison $8^{\circ} 28' 47''$; mais pour 1769 le mouvement relatif vu de la terre est de $3' 57'' 49$ sur l'écliptique, $4' 0'' 11$ sur l'orbite relative, & $35'' 42$ en latitude, l'inclinaison $8^{\circ} 28' 59''$; il faut avoir soin d'employer ou le mouvement sur l'orbite ou le mouvement sur l'écliptique, suivant les différens cas (2065, 2150).

2059. Pour Mercure dans son passage sur le soleil, le 6 Mai 1753, à $10^h 20'$ du matin; le mouvement héliocentrique vrai de Mercure seul étoit de $7' 17'' 56$ sur l'orbite, $7' 14'' 31$ sur l'écliptique, $53'' 24$ en latitude, les mouvemens géocentriques relativement au soleil $3' 59'' 83$, $3' 55'' 87$ & $43'' 40$; l'inclinaison relative $10^{\circ} 25' 28''$ vue du soleil ou de la terre.

Méthode pour trouver l'effet de la parallaxe dans les passages de Vénus & de Mercure sur le Soleil, par un calcul rigoureux.

2060. LORSQU'ON veut simplement calculer & prédire un passage de Vénus sur le soleil, il suffit de calculer l'effet des parallaxes en différens lieux de la terre par les méthodes graphiques, dont je donnerai bientôt l'explication (2070); mais lorsqu'un passage de Vénus a été observé en différens pays de la terre, comme ceux de 1761 & de 1769, & qu'on veut en conclure la parallaxe du soleil, on ne sauroit mettre trop d'exactitude & trop de scrupule dans le calcul de la parallaxe; pour réduire chaque observation au centre de la terre, & pour trouver le rapport qu'il y a entre les effets de la parallaxe dans ces différens lieux d'observations: c'est ce que nous allons exécuter par la méthode la plus rigoureuse & la plus exacte, en ne négligeant pas même les centièmes de secondes dans la parallaxe; car cette précision est nécessaire, si l'on veut avoir pour les temps cherchés la précision d'une seconde.

2061. Je prendrai pour exemple l'observation que je fis à Paris le 6 Juin 1761. Le contact intérieur des deux bords de Vénus & du soleil arriva à 8^h 28' 25" du matin; il faut trouver pour ce moment la parallaxe de Vénus par rapport au soleil, l'effet qu'elle produisoit sur la distance du centre de Vénus au centre du soleil; & le temps où ce même contact a dû arriver pour le centre de la terre. La première opération consiste à trouver pour cet instant la hauteur vraie du centre de Vénus, & l'angle du vertical, avec le cercle de déclinaison au centre de Vénus. La longitude du soleil étoit de 2^s 15° 42' 29", son ascension droite 74° 28' 43", sa déclinaison 22° 42' 15", l'angle de position 6° 7' 6". L'angle horaire ou la distance du soleil au mériden; se trouve en convertissant en degrés, ce qui manque au

temps vrai donné pour aller à 12^h , c'est-à-dire, $3^h 31' 35''$, à raison de 15° par heure; il est de $52^\circ 53' 45''$. Vénus étant assez éloignée du centre du soleil, pour que sa hauteur soit différente de celle du soleil; il faut, pour trouver exactement cette hauteur, avoir l'angle horaire de Vénus & sa déclinaison.

2062. Soit S (*fig.* 131) le centre vrai de Vénus au moment du contact intérieur apparent, CS la distance vraie des centres de Vénus & du soleil, elle est égale à la différence des demi-diamètres du soleil & de Vénus; le premier est de $15' 46'' \frac{1}{2}$ dans les tables, nous le réduirons à $15' 43''$ (2159), le second est d'environ $29''$ (2157). Il faut encore ôter $3''$, c'est à peu-près l'allongement que la parallaxe produisoit dans la distance, mais que l'on pourroit négliger, si l'on n'en favoit pas déjà la valeur par des calculs préliminaires; ainsi CS est $15' 11''$; CM est la perpendiculaire ou la plus courte distance supposée de $9' 30''$ (^a); on trouvera par la résolution du triangle MCS que l'angle MCS est de $51^\circ 16' 3''$, on en prendra le complément $SCV = 38^\circ 43' 57''$; on y ajoutera l'angle $VCO = 14^\circ 35' 53''$, inclinaison de l'orbite sur l'équateur pour le moment de l'observation, qui étoit la somme de l'inclinaison $8^\circ 28' 47''$, & de l'angle de position pour le soleil $6^\circ 7' 6''$, la ligne CV étant supposée parallèle à l'orbite relative & CO parallèle à l'équateur, l'on aura l'angle $SCO = 53^\circ 19' 50''$. Par le moyen du triangle SCO , dont on connoît l'hypothénuse CS $15' 11''$ & l'angle OCS , on trouvera OS , différence de déclinaison vraie = $12' 11''$, & CO qui divisée par le cosinus de la déclinaison du soleil (892), parce que CO n'est qu'un parallèle à l'équateur, & non pas l'équateur lui-même, donnera la différence d'ascension droite vraie entre Vénus & le soleil $9' 50''$.

Fig. 131

(^a) Je l'ai trouvée ainsi par le calcul d'un grand nombre d'observations (2135), en suivant les méthodes dont je donnerai l'explication ci-après (2153). On pour-

roit supposer quelques secondes de plus ou de moins, sans que les calculs suivans en fussent sensiblement affectés.

On retranchera cette différence d'ascension droite de l'angle horaire du soleil $52^{\circ} 53' 45''$, puisque Vénus à sa sortie étoit plus près du méridien que le centre du soleil, & l'on aura l'angle horaire pour Vénus $52^{\circ} 43' 55''$; on retranchera la différence de déclinaison $12' 11''$ de la déclinaison du soleil $22^{\circ} 42' 15''$ & l'on aura la déclinaison vraie de Vénus $22^{\circ} 30' 4''$; avec ces deux élémens, & la hauteur du pôle $48^{\circ} 51' 0''$, (comme elle est au Palais du Luxembourg où je faisois alors mes observations), je trouve la hauteur vraie de Vénus $41^{\circ} 1' 7''$, & l'angle du vertical avec le cercle de déclinaison pour le lieu vrai de Vénus $43^{\circ} 57' 10''$, (1034, 1036).

La différence d'ascension droite étant retranchée de celle du soleil, donne l'ascension droite de Vénus $74^{\circ} 18' 53''$; cette ascension droite avec la déclinaison vraie $22^{\circ} 30' 4''$, & l'obliquité de l'écliptique $23^{\circ} 28' 19''$ fait trouver l'angle de position $6^{\circ} 10' 59''$ pour le lieu vrai de Vénus; il faut résoudre pour cela un triangle dont on connoît deux côtés, & l'angle compris qui est la distance de Vénus au colure des solstices; c'est un angle obtus dans ce cas-ci; l'angle de position $6^{\circ} 10' 59''$, ajouté avec l'inclinaison sur l'écliptique $8^{\circ} 28' 47''$ donne l'inclinaison de l'orbite de Vénus par rapport à l'équateur ou à son parallèle $14^{\circ} 39' 46''$.

2063. La parallaxe horizontale du soleil est de $9''$, ce qui donne pour celle de Vénus $31'' 62$; car la distance de Vénus est à celle du soleil comme $9''$ est à $31'' 62$ au moment de la conjonction: ainsi la différence des parallaxes horizontales de Vénus & du soleil est $22'' 62$; on la multipliera par le cosinus de la hauteur vraie de Vénus, diminuée, si l'on veut de la parallaxe à peu-près connue, ou de $17''$, & l'on aura $17'' 068$ pour la différence des parallaxes de hauteur. Soit V (fig. 134) le vrai lieu du centre de Vénus au moment de l'observation, ZVD le vertical, D son lieu apparent, qui étoit plus bas de $17'' 068$; GF le bord du soleil, VM l'orbite relative de Vénus, vue du centre de la terre, CE une ligne tirée par le centre du soleil, supposée parallèle
au

au vertical ZVD de Vénus ; il faut trouver la valeur exacte de l'angle CVM formé par l'orbite VM , & par la vraie distance CV de Vénus au centre du soleil ; pour cela je suppose que le milieu du passage est arrivé en M à $5^h 30' 10''$ (2135), ou environ $2^h 58' 15''$ avant le moment du contact ; le mouvement horaire de Vénus sur son orbite étant de $4' 0'' 03$ (2058) ; on peut en conclure la portion MV de l'orbite vraie de Vénus parcourue depuis le milieu du passage ; de son logarithme on ôte celui de la plus courte distance vraie CM , $9' 30''$, & l'on a celui de la tangente de l'angle MCV ; on peut aussi le conclure des valeurs de $CV = 15' 11''$ & de $CM = 9' 30''$, je le trouve par-là de $51^\circ 16' 3''$.

L'angle ECF est supposé formé par une ligne CE parallèle au vertical ZVD de Vénus & par la ligne PCF parallèle au cercle de déclinaison qui passe par Vénus, cet angle est de $43^\circ 57' 10''$; on en retranchera l'angle MCF du cercle de déclinaison CF avec la perpendiculaire à l'orbite, qui est de $14^\circ 39' 41''$, & l'on aura $29^\circ 17' 29''$ pour l'angle ECM , qui ajouté avec MCV , donnera $80^\circ 33' 32''$ pour l'angle ECV , égal à CVZ , formé au lieu vrai de Vénus ; son supplément est l'angle CVD dont nous avons besoin. En prenant l'angle parallactique & l'angle de position pour le centre vrai de Vénus V , c'est-à-dire, en supposant que CE n'est point le vertical du soleil, mais une ligne parallèle au vertical de Vénus, on ne suppose point que les deux verticaux soient réellement parallèles. On pourroit chercher aussi ces angles pour le lieu apparent D de Vénus, comme je l'ai fait ailleurs (2148), mais il faut supposer que CV soit connu à très-peu-près.

2064. Dans le triangle CVD , l'on connoît donc deux côtés & un angle, savoir, CD qui est la différence des demi-diamètres de Vénus & du soleil, $= 914''$, VD qui est la parallaxe de hauteur $17'' 068$, l'angle CVD opposé à CD , & que nous venons de trouver ; on cherchera l'angle VCD qui est de $1^\circ 3' 19'' 8$, on le retranchera de l'angle $CVZ = 80^\circ 33' 32''$, & l'on aura

Fig. 134. l'angle CDV $79^{\circ} 30' 12'' 2$. Alors on dira $\sin. V : CD :: \sin. D : CV$, & l'on aura la vraie distance $CV = 911'' 03$; si l'on retranche cette distance vraie de la distance apparente $CD = 914''$, égale à la différence des demi-diamètres, on aura $2'' 97$ pour l'allongement que la parallaxe caufoit dans la distance du centre de Vénus au centre du soleil, observée à Paris, au moment du contact intérieur des deux bords de Vénus & du soleil.

Allongement
à Paris.

2065. Par le moyen de la distance vraie CV , nous saurons combien Vénus étoit éloignée du contact vrai, qui eût été observé du centre de la terre : pour que ce contact ait lieu, il faut que Vénus soit en un point X de son orbite vraie MVX , tel que la distance vraie CX des deux centres soit égale à la différence des demi-diamètres $914''$, c'est-à-dire, égale à CD ; il faudra donc résoudre séparément les deux triangles CMV , CMX , avec la plus courte distance $CM = 9' 30''$ qui est un côté commun à tous les deux; mais en employant d'abord le côté CV de $911'' 03$, comme nous l'avons trouvé, & ensuite le côté CX de $914''$; on trouvera MV de $710'' 68$ & MX de $714'' 49$, la différence $3'' 81$ est la valeur de VX ; les temps qui correspondent à MV & MX sont $2^h 57' 39'' 0$ & $2^h 58' 36'' 0$; ainsi la portion de l'orbite de Vénus parcourue depuis le moment du contact observé à Paris, Vénus étant alors réellement en V , jusqu'au moment du vrai contact vu du centre de la terre, qui est arrivé lorsque Vénus étoit en X , ou l'arc VX correspond à $57''$ de temps; on trouveroit la même chose avec sa valeur $3'' 81$ convertie en temps, (par le moyen du logarithme constant 1, 176038 qui est celui de 3600'' ou 1^h divisées par le mouvement horaire $4' 0'' 03$); car on trouveroit $57''$ pour le temps que l'on cherche; c'est l'effet de la parallaxe sur le temps de l'attouchement intérieur, à Paris; il y est donc arrivé $57''$ plutôt qu'on ne l'auroit vu du centre de la terre, en supposant la parallaxe du soleil de $9''$.

Effet de la
parall. à Paris
en 1761.

On pourroit trouver aussi l'arc VX de l'orbite, en abaissant sur CX la petite perpendiculaire VA ; dans le

triangle VAX on connoît $AX = 2'' 97$ différence entre la distance vraie & la distance apparente, avec l'angle $AVX = MCX$ qui pourroit être pris pour $MCV = 51^{\circ} 16'$, quoiqu'il soit plus grand de quelques minutes; l'on trouveroit facilement l'hypothénuse VX ; mais cette méthode n'est pas tout-à-fait aussi exacte que celle dont je viens de donner le détail.

2066. La sortie apparente, en général, arrive plutôt que la vraie, quand elle se fait au-dessous du diamètre horizontal. *Mém. 1756, pag. 263. Journal des Savans, Mars 1760, Février 1762*), c'est-là l'unique règle; mais pour prévenir la difficulté qui pourroit avoir lieu quand la sortie vraie se fait au-dessus du diamètre horizontal & l'apparente au-dessous, on peut dire que la sortie apparente est avancée toutes les fois qu'elle se fait au-dessous du diamètre horizontal, & plus loin de ce diamètre que la sortie vraie; par la même raison, l'entrée apparente est retardée toutes les fois qu'elle se fait au-dessous & plus loin du diamètre horizontal, que l'entrée véritable, enforte que si la parallaxe de hauteur est une corde partagée également par le diamètre horizontal du soleil, l'entrée sera la même qu'au centre de la terre.

Ainsi dans l'observation de la sortie faite à Naples, en 1761, il n'y avoit, pour ainsi dire, aucun effet de parallaxe, parce que la parallaxe y étoit partagée presque également par le diamètre horizontal, suivant une table que M. Trébuchet a mise à la fin d'un mémoire imprimé dans les mercures de Mai & Juin 1764.

2067. Si l'on supposoit la parallaxe du soleil de $10''$, on trouveroit l'accélération qui en résulte en faisant cette proportion; $9'' : 57'' :: 10'' : 63'' 4$; cela prouve que cette différence eût été de $1' 3''$ de temps, si la parallaxe horizontale du soleil eût été de $10''$, car l'effet augmente proportionnellement; en faisant de semblables hypothèses pour les pays où le passage a été observé, on reconnoîtra quelle est la parall. qui satisfait aux observations.

2068. C'est par la méthode que je viens d'expliquer, que j'ai calculé pour 1761 l'effet des parallaxes à

Fig. 134.

Tobolsk , à Rodrigues , à Stockolm , &c. pour le comparer avec ce qui avoit été observé , & reconnoître par là si la parallaxe du soleil que j'avois supposée dans mes calculs étoit la véritable , j'en donnerai le détail ci-après (2143) ; je passe à la manière de calculer la parallaxe pour les autres momens du passage , afin de donner ensuite une méthode infiniment plus courte , & d'une exactitude suffisante , pour les autres observations.

2069. On doit employer à peu-près la méthode précédente pour calculer l'effet de la parallaxe sur les distances de Vénus au bord du soleil , quand on a mesuré les distances de Vénus au bord du soleil , en observant le passage (2131) , mais ces calculs n'exigent pas la même précision. Je suppose que le 6 Juin 1761 à 7^h 18' 55" du matin , on ait observé une distance DC , & qu'on veuille en conclure la distance vraie CV , on abaissera sur le rayon CD une perpendiculaire VH , & l'on aura $CH=CV$, du moins sensiblement , & DH fera l'effet de la parallaxe sur cette distance observée ; je suppose que le milieu soit arrivé à 5^h 30' 10" (2151) , on aura la distance du milieu du passage 1^h 48' 45" , & par conséquent la portion MV de l'orbite 7' 15" , CM est de 9' 30" : ainsi l'on trouvera l'angle MCV de 37° 21'. L'inclinaison MCF étant 8° 29' , & l'angle parallactique ECl du vertical avec le cercle de latitude (1884) , étant supposé de 39° 23' , on aura l'angle $ECM=30° 54'$, & l'angle $ECV=68° 15'=CVZ$: c'est l'angle de la vraie distance CV avec le vertical ZV . Comme cette opération n'a pas besoin d'une aussi grande précision que la précédente , je suppose , vû la petitesse du triangle HDV que l'angle CDV ou HDV est égal à l'angle CVZ , & dans le triangle HDV , connoissant la parallaxe de hauteur VD de 21" pour l'heure de l'observation , je la multiplie par le cosinus de l'angle HDV qui est l'angle d'azimut (1888) ou l'angle du vertical avec le rayon DC , & je trouve $HD=8''$, c'est l'allongement que la différence des parallaxes produisoit dans la distance observée à l'heure donnée : mais on va voir une ma-

niere bien plus commode de trouver cet allongement, par une opération graphique.

2070. C'est une chose très-avantageuse pour l'astronomie que toutes les opérations & les calculs de parallaxes dans les passages de Mercure & de Vénus, puissent s'exécuter par une opération graphique très-facile, & cela jusqu'à la précision des dixièmes de secondes. Le travail est si long par les autres méthodes, que la plupart des astronomes ont négligé de calculer leurs observations, d'en faire usage, & d'en tirer des résultats, parce qu'ils n'appercevoient pas le moyen que je vais expliquer d'exécuter fort vite, & avec une exactitude suffisante, la partie la plus difficile de ce travail.

2071. Il faut appliquer ici ce qui a été dit sur les projections dans les éclipses de soleil (1796, 1835 & suiv.). On imaginera du centre du soleil un cône de rayons qui environnent la terre, en sorte que le cercle de la terre que nous avons appelé cercle d'illumination (1829) en soit la base; & que l'angle au centre du soleil soit de $18''$, puisque du soleil on verroit la terre sous un angle de $18''$ (1742). Ce cône de rayons coupé dans l'orbite de Vénus y forme un petit cercle qui est la projection de la terre dans la région de Vénus; son demi-diamètre vu de la terre, paroît sous un angle égal à la différence des parallaxes de Vénus & du soleil (1797), qui est d'environ $22'' \frac{1}{2}$ dans son passage sur le soleil, en supposant la parallaxe du soleil de $9''$ (2063).

2072. Soit le disque du soleil $GEKSV$ (fig. 131), tel qu'il étoit vu de la terre dans le passage de Vénus, en 1761; $EMRS$ l'orbite relative de Vénus sur le soleil; LCK le cercle de déclinaison, ou méridien universel, passant par le centre du soleil; LQN le cercle qui représente la projection de la terre dans l'orbite de Vénus, & dont le rayon CL ou CN vu de la terre paroît de $22'' \frac{1}{2}$. Sur ce cercle de projection l'on tracera l'ellipse de projection PQ , qui représente le parallèle diurne de Paris, ou du lieu pour lequel on veut faire le calcul des parallaxes (1839). Par exemple, je suppose qu'à une heure quelconque, Vénus étant au point R de son orbite

Trouver les parail. avec le compas.

Projection dans l'orbite de Vénus.

Rayon de projection.

Fig. 131i

Fig. 137.

EMRS, on veuille favoir l'effet de la parallaxe; on considèrera premièrement, que *CP* exprime la parallaxe de hauteur (1834). Ayant ensuite tiré la ligne *PR*, on verra que si *CR* est la vraie distance de Vénus au centre du soleil, vue du centre de la terre, la ligne *PR* est leur distance apparente pour Paris, parce que *P* est le lieu où Paris voit le centre du soleil, au lieu de le voir en *C*, & le lieu où le centre du soleil voit Paris; c'est le point où la projection est coupée par le rayon visuel mené de Paris au centre du soleil. Ainsi du point *R*, comme centre, on décrira un petit arc *CH*, pour avoir *RH* égal à *RC*, & la ligne *PH* fera la différence entre la distance apparente *PR* & la distance vraie *CR*, c'est-à-dire, la parallaxe de distance.

2073. Au lieu du petit arc *CH* décrit du centre *R*, on peut prendre sans erreur sensible une ligne droite perpendiculaire à la ligne *CR*; car *CH* étant extrêmement petite en comparaison de la longueur de *CR*, sa courbure est absolument insensible; mais on peut tirer une perpendiculaire *CH*, sans avoir besoin du point *R*; qui devient inutile dès-lors qu'on ne prend plus *CH* pour un arc décrit du centre *R*. En conséquence, on peut se passer totalement de l'orbite *EMS* & du grand cercle *GEKS* qui exigeroit une figure excessivement grande; il suffira de tirer dans le petit cercle de projection une ligne *ms* parallèle à l'orbite *MS*, & de la diviser également en heures & minutes, aussi bien que si c'étoit l'orbite même; au point *r* qui répond à l'heure & à la minute pour laquelle on calcule, on tirera la ligne *Cr*; sur cette ligne *Cr* une perpendiculaire *CH*, & une parallèle *PH*, qui fera la parallaxe de distance. Ainsi rien n'empêche de tracer en grand ce petit cercle de projection, & de lui donner 8 à 9 pouces de rayon; alors on y pourra faire avec la règle & le compas, d'une manière fort exacte toutes les opérations précédentes.

Parallaxe de distance.

2074. Supposons donc que le cercle *LBN* (fig. 132), qui est plus grand & plus sensible, représente également le petit cercle de projection, *mRS* étant l'orbite de Vénus; on voit que si *R* est le lieu de Vénus sur son

orbite ; CH perpendiculaire à CR , & PH parallèle à CR , cette ligne PH sera la parallaxe de distance.

Fig. 132.

Pour éviter de faire usage du centre C de la projection qui est variable pour différens pays (2076), je tire par le centre D de l'ellipse une ligne DM qui soit parallèle à l'orbite mRS , & MG qui lui soit perpendiculaire ; ayant supposé la plus courte distance des centres DM de $9' 30''$ (2135), je prens sur MG le mouvement horaire, ou $4'$ par heure, pour la diviser en temps, tout ainsi que l'orbite de Vénus ; je tire par le centre de l'ellipse une ligne DG au point où se trouve Vénus à un instant donné, cette ligne est nécessairement parallèle à la ligne CH trouvée par l'opération précédente : ainsi je me sers de la ligne DG pour tirer CH & pour avoir PH qui est la parallaxe de distance, en supposant que P marque la situation de Paris sur l'ellipse QPV , au moment pour lequel on calcule.

2075. On peut trouver de même la parallaxe en ascension droite & en déclinaison, & cela est extrêmement commode pour ceux qui en observant le passage de Vénus emploient une machine parallatique ou un micromètre ordinaire (2136). Je suppose que BCA soit une portion du parallèle à l'équateur, & que du point P où Paris est situé à l'heure donnée sur son parallèle diurne, on abaisse une perpendiculaire PK ; on aura CK pour la parallaxe d'ascension droite mesurée sur un grand cercle, & PK pour la parallaxe de déclinaison ; parce que c'est le point P au lieu du point C qui est le centre apparent du soleil, en vertu de la parallaxe, ou si l'on veut, parce que le lieu de l'observateur est projeté au point P , qui répond au point K du parallèle à l'équateur, au lieu que le centre de la terre est projeté en C (2072). Pour le comprendre encore mieux, soit tirée du point R (*fig. 131*), une perpendiculaire RA sur le parallèle à l'équateur ou sur CO , elle sera la différence de déclinaison, & CA la différence d'ascension droite du soleil & de Vénus vue du centre de la terre, donc si l'observateur est en P , ou si le lieu du soleil paroît en P & qu'on tire du point P une perpendiculaire PK sur CO , elle sera la

Parallaxe
d'ascension
droite.

Fig. 132.

Fig. 131.

parallaxe de déclinaison, & CK celle d'ascension droite. Ainsi ayant divisé le rayon CA de la projection (fig. 131), en autant de parties qu'en contient la parallaxe horizontale de Vénus au soleil, (c'étoit $22''\frac{1}{2}$ en 1761), on portera sur les divisions de CA les quantités PK & CK , & l'on aura en secondes & en dixièmes de secondes, la valeur des parallaxes d'ascension droite & de déclinaison.

Cette parallaxe d'ascension droite sur un arc de grand cercle dans la région du soleil deviendroit plus grande d'un treizième, si on la rapportoit sur l'équateur par le moyen des deux cercles de déclinaison qui passent par les extrémités de l'arc (892); mais on peut dans les calculs ne se servir que de celle qui est mesurée sur un grand cercle, en rapportant les observations à la région du soleil.

La même
opération
pour divers
pays.

2076. Jusqu'ici j'ai supposé que c'étoit pour Paris que l'on vouloit calculer les parallaxes; il faut étendre maintenant cette méthode à tout autre pays, puisque les passages de Vénus arrivés en 1761 & 1769 ont été observés dans un grand nombre de pays différens; toutes ces observations peuvent se calculer par la méthode que nous allons expliquer, d'une manière extrêmement simple & commode.

2077. L'ellipse qui représente le parallèle de Paris ayant été tracée pour $22^{\circ}42'$, déclinaison du soleil le jour du passage de 1761, elle a la même figure ou la même proportion dans ses axes pour tous les pays; mais le rayon de projection & la distance CD du centre de l'ellipse au centre de projection, doivent être différens (1862): j'ai fait voir qu'en supposant le demi-axe QD de l'ellipse divisé en mille parties, la distance des centres C & D est égale à la tangente de la latitude du lieu multipliée par le cosinus de la déclinaison de l'astre; j'ai donné une table à la page 487, dans laquelle y a une colonne pour la déclinaison de $22^{\circ}42'$, & où l'on voit la distance du centre de la projection à celui de l'ellipse, & le rayon avec lequel on doit décrire le cercle de la projection, quand on a trouvé le centre qui convient à un pays quelconque: en voici une plus détaillée pour les passages de Vénus.

TABLE

TABLE de la distance qu'il y a entre le centre de la projection, & le centre de l'ellipse décrite pour $22^{\circ} 42'$ de déclinaison, avec le rayon de la projection, pour différentes latitudes.

Deg. de latit.	Distan. des centres.	Rayon de projection.	Deg. de latit.	Distan. des centres.	Rayon de projection.	Deg. de latit.	Distan. des centres.	Rayon de project.
0	0	1000	24	411	1095	48	1025	1494
2	32	1001	26	450	1112	50	1099	1556
4	65	1002	28	491	1132	52	1181	1624
6	97	1006	30	533	1155	54	1270	1701
8	130	1010	32	577	1179	56	1368	1788
10	163	1015	34	622	1206	58	1476	1887
12	196	1022	36	670	1236	60	1598	2000
14	230	1031	38	721	1269	62	1735	2130
16	265	1040	40	774	1305	64	1892	2281
18	300	1051	42	831	1346	66	2072	2459
20	336	1064	44	891	1390	68	2283	2669
22	373	1079	46	955	1449	70	2535	2924
24	411	1095	48	1025	1494	72	2839	3236

Dans le cas où la déclinaison du soleil sera différente, on se servira toujours de la deuxième colonne qui contient le rayon de projection pour différens pays; mais pour avoir la distance des centres il faudra multiplier les nombres de la première colonne par le cosinus de la déclinaison donnée, divisé par le cosinus de $22^{\circ} 42'$, qui est la déclinaison employée dans la table précédente, parce qu'il faudra détruire la multiplication par $\cos. 22^{\circ} 42'$ & la faire par le $\cos.$ de la nouvelle déclinaison (1862).

2078. L'ellipse de la figure 127 a été décrite assez en grand pour qu'on puisse y faire toutes les opérations précédentes dans les passages de Vénus, en se servant de l'échelle qui est à côté, dans la figure 128; cette échelle suppose la différence des parallaxes horizontales de $26''$, parce que la figure avoit été gravée avant le passage de 1761, dans un temps où l'on croyoit la parallaxe du soleil un peu plus grande qu'elle n'est réellement, mais l'explication fera la même, & chacun ayant choisi le rayon de projection dont il voudra faire usage, pourra le diviser de manière qu'il réponde à $22''$ & $\frac{2}{19}$ qui est la différence des parallaxes, en supposant celle du soleil de $9''$.

EXPLICATION D'UNE FIGURE

par la laquelle on trouve, sans aucun calcul, tous les effets de la Parallaxe sur les passages de Vénus, dans tous les pays de la terre (a).

2079. LES différentes sortes d'observations que l'on a faites dans les passages de Vénus sur le soleil, en 1761 & en 1769, sont toutes affectées des parallaxes en différentes manières; le calcul de ces parallaxes est d'une extrême longueur par les méthodes ordinaires; mais il devient de la plus grande facilité par l'opération graphique, dont nous allons donner l'explication.

Fig. 127.

Je décris une ellipse $KVGP$ (fig. 127), dont le grand axe est au petit, comme le sinus total est au sinus de la déclinaison du soleil, qui est de $22^{\circ} 42'$, ou à peu-près, dans les passages de Vénus sur le soleil qui arrivent au mois de Juin; on a divisé cette ellipse en temps, de deux en deux minutes, pour avoir à chaque instant la situation de Paris sur son ellipse de projection.

Parallaxe de hauteur.

Fig. 128.

2080. Si P est le lieu de Paris sur son parallèle le 6 Juin à $8^h 15'$ du matin, & C le centre de la projection pour Paris, la ligne PC tirée au centre de la projection représentera la parallaxe de hauteur (1834); si l'on porte la longueur de cette ligne PC sur l'échelle de 49° de latitude, près de laquelle est marqué Paris; (fig. 128), l'on verra qu'elle est de $19''$. Ainsi la parallaxe de hauteur de Vénus au soleil, à $8^h 15'$ du matin, étoit de $19''$ à Paris; en supposant $26''$ pour la différence des parall. horiz. comme dans l'échelle de la figure 128.

Parallaxe d'ascenf. droite.

2081. Pour trouver la parallaxe d'ascension droite on abaissera une perpendiculaire PZ (fig. 127) du point P où est situé Paris, sur le parallèle à l'équateur, mené par le point C qui est le centre de la projection pour Paris; la ligne CZ comprise depuis le centre jusqu'à cette perpendiculaire étant portée sur l'échelle (fig. 128), doit se trouver de $14''$. C'est la parallaxe d'ascension

(a) Il y a eu quelques exemples de pareils articles publiés sous le nom de M. de l'Isle, à qui je crus devoir en faire honneur, parce qu'il avoit eu la première idée de ce genre d'opérations.

Figure pour trouver les Parallaxes. 611

droite mesurée sur un arc de grand cercle passant par le soleil (2075), telle par conséquent qu'il faut l'avoir pour réduire les observations faites au micromètre (2136), dans lesquelles on n'a pour objet que de trouver la différence d'ascension droite dans la région du soleil; elle seroit plus grande d'un treizième, si on la divisoit par le cosinus de la déclinaison (892) pour la réduire à l'équateur.

Fig. 128.

2082. La parallaxe de déclinaison n'est autre chose que la perpendiculaire elle-même tirée du point *P* sur le parallèle à l'équateur (2075); dans cet exemple elle doit être de $14''\frac{1}{2}$. C'est la quantité qu'il faut ôter de la différence apparente de déclinaison entre Vénus & le soleil, observée à Paris le 6 Juin 1761 à 8h 15' du matin, déjà corrigée par la différence des réfractions (2546 & suiv.), pour avoir cette vraie différence de déclinaison.

Parallaxe de déclinaison.

2083. On trouvera de la même manière la parallaxe de longitude & de latitude au moyen de la ligne *AC* marquée *parallèle à l'écliptique* sur la figure 127, elle fait avec la parallèle à l'orbite de Vénus, un angle égal à l'inclinaison relative qui étoit, en 1761, de $8^{\circ} 29'$. Sur ce diamètre qui représente une portion de l'écliptique, on abaissera du point *P* une perpendiculaire *PB*, qu'on trouvera dans l'exemple proposé de $16''$; ce sera la parallaxe de latitude. La distance entre cette perpendiculaire & le centre *C* de la projection, mesurée le long de l'écliptique, sera la parallaxe de longitude; elle se trouve de $12''\frac{1}{2}$. Je ne vois pas qu'on ait besoin de ces deux sortes de parallaxes dans la réduction & dans le calcul des observations; mais j'ai voulu les expliquer pour qu'il ne manquât rien à l'usage & à l'intelligence de la figure que je propose.

Parallaxe de longit. & de latitude.

2084. La parallaxe de distance est une des plus nécessaires, puisque les meilleures observations que l'on ait faites dans les passages de Vénus, sont celles où l'on a employé des héliomètres, pour observer la distance de Vénus au bord du soleil (2131), & que ces observations seroient difficiles à réduire sans le secours de l'opération graphique dont il s'agit. Pour trouver la parallaxe de

Parallaxe de distance.

Fig. 127.

distance, on est obligé d'avoir égard à la situation de Vénus ; on tirera par le centre de l'ellipse une ligne EM parallèle à l'orbite, & une autre ligne MN perpendiculaire à l'orbite ; ayant pris EM pour représenter la plus courte distance des centres, $9' 30''$, on prendra sur MN la valeur de $4'$ par heure, pour diviser cette orbite MN , & marquant au point M le temps observé du milieu du passage, (c'étoit $5^h 30'$ en 1761), on divisera MN en heures & minutes (2074) ; le point N , par exemple, répondra à $8^h 15'$, qui étoit $2^h 45'$ avant le milieu du passage ; alors on tirera une ligne occulte EN , & par le centre C de la projection une ligne CH parallèle à EN ; la perpendiculaire PH abaissée du point P sur cette ligne fera la parallaxe de distance ; si dans l'exemple précédent on porte PH sur l'échelle qui convient à la latitude de Paris, on la trouvera d'environ $3''\frac{1}{2}$ pour $8^h\frac{1}{4}$ du matin. Cette parallaxe de distance doit se retrancher de la distance apparente de Vénus au centre du soleil, parce que le point H est au midi du point P , aussi bien que Vénus ; si le point H n'étoit pas entre le point P , & la parallèle à l'orbite de Vénus, tirée par le centre C de la projection, il faudroit ajouter la parallaxe à la distance apparente.

Parallaxe
pour 1769.

2085. La ligne MN doit être tirée plus loin du centre E de l'ellipse, si l'on emploie cette figure pour le passage de 1769, parce que la plus proche distance des centres étoit de $10' 10''$ (2147) : on pourra prendre EO au lieu de EM , & par ce moyen l'on conservera les divisions de la ligne NM pour l'entrée, & on les portera au-dessous de la ligne EO pour la sortie de Vénus ; le point O répondra à $10^h 36'$ du soir, milieu du passage à Paris.

Pour l'en-
trée à Paris.

2086. Je suppose qu'à $7^h 20'$ du soir, temps où Vénus commençoit à paroître sur le soleil à Paris, l'on veuille avoir la parallaxe de distance ; on tirera une ligne du centre E au point D qui répond au-dessus du point O , à $3^h 16'$ de distance au milieu du passage ; du centre C de la projection on tirera une perpendiculaire

sur cette ligne *DE* prolongée à gauche ou au-dessous du point *E*, cette perpendiculaire va se diriger vers le lieu de Vénus sur son orbite pour 7^h 20'; alors du point *R* qui est à 7^h 20' du soir ou à la gauche de l'ellipse, l'on tirera une perpendiculaire *RV* sur cette dernière ligne, ou ce qui revient au même, une parallèle à *ED*; le point *V* où elle rencontrera *CV*, marquera l'endroit qui paroît aussi éloigné de Vénus que le point *R* où Paris est projeté, & la distance *CV* du centre *C* au point *V* fera la parallaxe de distance. On peut aussi tirer par le centre *C* une parallèle à *DE*, & la perpendiculaire abaissée du point *R* où est Paris sur cette parallèle à *ED* fera la parallaxe de distance; cette parallaxe étant portée sur les divisions du rayon de projection pour Paris, l'on y verra qu'elle contient 26'', c'est-à-dire, qu'elle est à très-peu-près égale à la parallaxe horizontale.

2087. Le commencement de la sortie à Pétersbourg est arrivé à 3^h 27' 25'' du matin, & 2^h 59' après le milieu du passage. Pour trouver la parallaxe de distance à ce moment-là, je tire du centre *E* de l'ellipse une ligne au point *Q* qui répond à 2^h 59' au-dessous du point *O*; par le point *K* marqué 60°, qui est le centre de la projection pour Pétersbourg, je tire une parallèle à cette ligne *EQ*; du point *G* où est Pétersbourg sur son parallèle à 3^h 27' du matin j'abaisse une perpendiculaire *GT* sur la dernière parallèle *KT*, & *GT* est la parallaxe de distance; en la portant sur l'échelle de 60°, je trouve 19'', qui est la parallaxe de distance, pour la sortie, en supposant toujours que la parall. horiz. soit de 26''; il y auroit 16'' seulement, si l'on avoit supposé la parallaxe relative de 22'' 6, & que l'échelle de la figure 128 eût été divisée en 22 $\frac{1}{2}$ parties, au lieu de l'être en 26.

Pour la sortie à Pétersbourg.

2088. Dans les exemples précédens le point *H* où aboutit la perpendiculaire *PH* est au midi du point *P*, pour l'entrée, c'est une preuve que l'entrée apparente est accélérée par l'effet de la parallaxe de distance *PH*; & tant que le point *T* ou la ligne *KT* est à la gauche ou au midi du lieu *G* pour la sortie, cette sortie est également

Fig. 127. accélérée ; cela revient au même que la règle dont j'ai déjà parlé (2066).

Centres pour différens pays. Au lieu du grand nombre d'échelles qui sont dans la figure 128, on pourroit se contenter d'une seule, ou même des divisions du demi-grand axe de l'ellipse, en faisant seulement cette règle de trois : la sécante de la latitude pour un rayon 1000 est à la différence des parallaxes horizontales, comme le nombre de millièmes trouvées sur les divisions du demi-grand axe de l'ellipse est à leur valeur en secondes, ainsi dans le dernier exemple ayant trouvé 144, je dis $1996 : 26 :: 1440 : 19''$, c'est la parallaxe de sortie à Pétersbourg.

2089. Le centre *C* de la projection pour Paris ; (*fig. 127*), est marqué par les trois lignes qui y passent ; mais il doit changer si l'on calcule des observations faites sous d'autres latitudes (2076) : on voit sur la ligne *ECK* les points qui répondent à différentes latitudes, c'est-à-dire, les centres de la projection qu'il faut substituer au point *C*, & par lesquels on doit tirer les parallèles à l'écliptique & à l'équateur, c'est-à-dire, toutes les lignes qui donnent les parallaxes. Les degrés marqués au-dessus du centre *E* de l'ellipse sont pour les pays situés au midi de l'équateur à des latitudes australes, & quoiqu'ils ne soient marqués que jusqu'à 30° , il est aisé d'étendre les divisions en transportant vers le haut, sur un papier qu'on y ajoutera, les divisions qui sont au-dessous du centre de l'ellipse. Quand on aura trouvé une parallaxe quelconque pour une latitude différente de celle de Paris, on portera cette ouverture de compas dans l'échelle générale (*fig. 128*), sur celles des lignes verticales qui sera marquée de la latitude dont il s'agit ; & l'on y verra sa valeur en secondes & dixièmes de secondes, parce que la projection ne donne les parallaxes qu'en supposant le rayon de la projection égal à la parallaxe horizontale.

Inconvénient du papier.

2090. Le racornissement du papier est un obstacle à l'exactitude des figures imprimées ; Hévélius s'en plaignoit à l'occasion de ses phases de la lune, (*Selenogr. pag. 214*) : le papier que l'on mouille pour l'impression,

se dilate & s'étend, il se comprime plus ou moins, suivant sa qualité & son épaisseur; il se retire ensuite inégalement lorsqu'on le fait sécher, & la proportion n'est plus la même entre sa longueur & sa largeur; Hévélius en avertissoit le lecteur pour qu'on ne l'accusât pas d'avoir mal dessiné la situation des taches de la lune, & d'avoir fait ovales des figures qui devoient être circulaires.

2091. Dans une des épreuves de la grande ellipse, (fig. 127), j'ai observé que les extrémités du grand axe de l'ellipse étoient plus près du centre de l'ellipse sur le papier que sur le cuivre, de 1 ligne $\frac{3}{4}$ d'un côté, & 2 lignes $\frac{1}{4}$ de l'autre; les sommets du petit axe étoient rapprochés du centre, l'un de $\frac{1}{3}$, l'autre de $\frac{1}{7}$ de ligne; le centre de la projection pour Paris étoit rapproché d'une ligne du centre de l'ellipse; ainsi le papier s'étoit rétréci dans toutes ses parties, mais beaucoup plus dans sa longueur, qui est la direction de l'enverjure de la forme, parce qu'il a beaucoup moins de densité dans le sens des fils de l'enverjure, que dans le sens des pontuseaux, où les fils étant ferrés l'un contre l'autre, ont donné à la pâte plus de fermeté & de consistance, (Voyez l'Art de faire le Papier, que j'ai donné en 1760); on pourroit croire que le rouleau de la presse contribue à l'extension du papier, mais l'expérience fait voir que les estampes ne laissent pas de se rétrécir même dans le sens où la presse auroit dû les étendre.

2092. Pour y remédier dans les cartes géographiques, Guillaume de l'Isle, premier géographe du Roi, avoit eu l'attention d'altérer sur ses cuivres les dimensions des cartes, & de changer ses cercles en ovales, de la quantité dont le papier avoit coutume de se rétrécir, en longueur plus qu'en largeur. Joseph Nicolas de l'Isle en faisant graver la figure que l'on voit ici, a pris une autre précaution qui n'est pas moins bonne, pour mettre chacun à portée de remédier à l'irrégularité de la figure imprimée: on voit tout autour de la figure un rectangle *AABB*, dont la longueur *AA* ou *BB*, a été faite exactement de 23 pouces sur le cuivre, & la hauteur *AB*

Fig. 127.

Manière d'y remédier.

de 17 pouces. Il arrivera communément par le tirage que la longueur se réduira à 22 pouces 8 lignes, & la hauteur à 16 pouces 10 lignes; mais comme l'on humecte nécessairement la figure en la collant sur un carton, il sera aisé de l'étendre de manière qu'elle remplisse exactement un rectangle fait sur le carton, dont un côté soit à l'autre comme 17 est à 23 : on la laissera sécher dans cet état, & elle conservera ses dimensions proportionnelles, parce que le carton s'opposera suffisamment à la contraction du papier (a).

DE L'ENTRÉE ET DE LA SORTIE DE VÉNUS
pour tous les pays de la Terre.

2093. C'EST une partie essentielle du calcul des passages de Vénus sur le soleil, que de déterminer à la fois pour tous les pays de la terre, & cela par une méthode facile, l'effet de la parallaxe, qui fait paroître l'entrée ou la sortie plutôt ou plus tard. M. de l'Isle fut le premier qui eut l'idée de marquer sur une seule Mappemonde, au moyen d'un certain nombre de cercles, la quantité dont l'entrée & la sortie arrivent dans les différens pays plutôt ou plus tard que pour le centre de la terre. Il l'exécuta d'abord pour le passage de Mercure, en 1753; ensuite pour celui de Vénus, en 1761, & j'en ai tracé une semblable pour le passage de 1769 (b), dont il y a un petit extrait dans la *figure* 133.

2094. En expliquant cette Mappemonde, je pris pour exemple le passage de Vénus qui étoit annoncé pour 1769, dont j'avois fait le calcul & construit la figure par une méthode particulière. J'en donnai l'explication & les calculs à l'académie, lorsqu'on y étoit occupé à traiter du passage de 1761 & de celui de 1769, en discutant les avantages qu'il pourroit y avoir dans l'un & l'autre (Voyez l'*Hist. de l'acad. pour* 1757, pag. 100, & les *Mém.* pag. 232); je conserverai ici le même exemple, mais j'y ajouterai ensuite les résultats de l'observation.

(a) On en trouvera encore quelques exemplaires chez Latré, graveur, rue S. Jacques.

grand, avec tous les détails & les distinctions de couleurs, à Paris, chez Latré,

(b) Elle se trouve gravée en

2095. Je calculai d'abord les circonstances de ce passage par la méthode expliquée ci-dessus (2044); en corrigeant les tables de Vénus par l'observation de 1761, je trouvai le temps de la conjonction vraie en C , (fig. 129), le 3 Juin 1769 à $10^h 10'$ du soir, sa longitude étant de $8^s 13^{\circ} 27' 10''$, la latitude géocentrique $10' 13''$ 4 boréale (a), l'entrée du premier bord de Vénus en E à $7^h 21'$, & la sortie du second bord de Vénus en S à $13^h 44'$, la perpendiculaire $TM = 10' 7''$; la différence des parallaxes horizontales $22'' 6$, en supposant celle du soleil de $9''$; le mouvement horaire $4' 0'' 11$ (2058); l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique étoit de $8^{\circ} 28' 59''$ & son inclinaison sur l'équateur (ou la somme de $8^{\circ} 29'$ & de l'angle de position) de $15^{\circ} 32'$.

Circonstances du passage de 1769.

Fig. 129.

La projection TA de la terre étant vue sous un angle de $22'' 6$, la distance TA est de $22'' 6$, tandis que TS est de $15' 47''$, c'est la valeur que je supposois au demi-diamètre apparent du soleil; ainsi le lieu de la terre, dont la projection se trouve en A , & qui rapporte le centre du soleil au point A (1797), verra Vénus éloignée du centre du soleil de $15' 23'' 4$ seulement, ou de la quantité SA , lorsque le centre de Vénus étant en S , quittera véritablement le soleil pour un observateur qui répondroit au centre T ; il faudra donc que Vénus en avançant dans son orbite soit arrivée en V , pour que la distance VB du centre du soleil qui paroît en B (pour le lieu de terre dont la projection est au point B), & du centre de Vénus qui est en V soit de $15' 47''$, c'est-à-dire; que VD soit de $22'' 6$, aussi bien que TB ; alors le pays de la terre projeté en B verra le centre de Vénus sortir de dessus le soleil, puisque sa distance apparente au centre du soleil sera égale au demi-diamètre du soleil (1800); & le point B fera le dernier de tous les points de la terre, d'où l'on verra la sortie.

2096. Par la même raison, si l'on prend une ligne TN qui soit plus petite de $22'' 6$ que TS , en sorte que

(a) Par les observations, j'ai trouvé la conjonction à $10^h 13'$ | $40''$ & la latitude $10' 16''$ (2155);

Fig. 129.

la ligne entière NTI soit égale au demi-diamètre du soleil ; le point de la terre dont la projection est actuellement en I verra Vénus sortir du soleil, quoiqu'elle ait encore tout l'espace NS à parcourir pour en sortir réellement par rapport au centre T de la terre ; ainsi le point I fera le premier de tous les points de la terre qui verra le centre de Vénus sortir du soleil, parce qu'il verra Vénus éloignée du soleil de la quantité IN , égale au demi-diamètre du soleil, dans le temps qu'elle fera encore en N ; de même que le point B fera le dernier de tous. Le point I n'est pas diamétralement opposé au point B , mais la différence est assez légère pour pouvoir se négliger dans une opération purement graphique ; d'ailleurs, il n'en résulteroit pas 5'' d'erreur sur les temps que l'on cherche, & il s'en faut beaucoup que nous soyons assurés d'une si grande exactitude, dans ces sortes de prédictions.

2097. Ce que nous avons dit des points B & I pour la sortie de Vénus, doit s'entendre aussi des points H & K pour l'entrée de Vénus sur le soleil : le point H est le premier de tous les pays de la terre qui verra Vénus entrer sur le soleil ; le point K fera le dernier de tous : je suppose les points H & K diamétralement opposés par la raison que je viens de dire (2096). On trouveroit facilement les longitudes & les latitudes géographiques des pays de la terre qui sont en A , en I , en H & en K par les méthodes que nous avons employées pour les éclipses de soleil (1930).

2098. La différence entre le temps où le point H verra l'entrée de Vénus, & le temps où elle arrivera pour le point K , dépend de la distance HK qui est de 45'' ; il en est de même de la sortie. Il faut que Vénus, qui a paru quitter le soleil pour le point de la terre dont la projection est en I , s'éloigne encore de 45'', pour pouvoir paroître de même à l'observateur situé en B ; ainsi l'on connoîtra la différence de temps entre ces deux phases, si l'on trouve combien il faut de temps à Vénus pour s'éloigner du centre du soleil de cette quantité de 45''.

Pour trouver exactement cet intervalle de temps, il

faut résoudre séparément les deux triangles TMN , TMV ; on connoît la perpendiculaire TM , avec les hypothénuses, on cherchera les autres côtés. Pour faire ce calcul, je supposerai que le point N & le point V soient ceux du dernier contact extérieur de Vénus en 1769, le demi-diamètre de Vénus étant supposé de $29''$ (2157), l'on aura $16' 16''$ pour la somme des demi-diamètres du soleil & de Vénus; mais puisqu'il s'agit du contact extérieur des deux bords, l'hypothénuse TN est plus petite de $22'' 6$, & TV plus grande de la même quantité, c'est-à-dire, que TN est de $15' 53'' 4$, & TV de $16' 38'' 6$; en conséquence, on trouvera MN de $735'' 20$, & MV de $792'' 94$, la différence NV est $57'' 74$; or Vénus emploie $14' 27''$ de temps à parcourir sur son orbite un arc de $57'' 74$, parce que son mouvement apparent est de $4'$ par heure: ainsi le plus grand effet de la parallaxe est de $14' 27''$, en supposant de $9''$ la parallaxe horizontale du soleil. Je supposerai cette quantité de $15'$, en nombres ronds, pour la facilité des opérations suivantes, c'est-à-dire, que je supposerai $15'$ de temps entre la sortie de Vénus pour le point I de la terre, & sa sortie pour le point B , comme on les auroit réellement si la parallaxe du soleil étoit de $9'' \frac{1}{3}$, à peu-près comme la donne l'observation faite à la Baie d'Hudson (2149). En ôtant $15'$ de l'entrée pour le centre de la terre & de plus la valeur du demi-diamètre de Vénus, on trouvera que le point H a le premier contact à $7^h 14'$ du soir.

Fig. 129.

Le plus grand effet de la parallaxe.

2099. Considérons maintenant des points de la terre Z , F , & Y , qui sont éloignés du point E d'une quantité EF , plus grande que EH d'un tiers du diamètre HK de la projection; tous ces pays verront l'entrée de Vénus $5'$ plus tard que les pays situés en H ; car puisque du point H au point K , il y a $15'$ de différence, il doit y en avoir cinq du point H au point F ; & tous les points qui sont sur la ligne ou sur l'arc ZFY étant à même distance du point E , verront la même distance apparente des centres de Vénus & du soleil, & Vénus entrera au même instant sur le soleil pour tous les pays de la terre projetés sur l'arc ZFY ; je pren-

drai l'arc ZFY pour une ligne droite, à cause de son extrême petitesse, en comparaison de EF .

Fig. 130. 2100. Si l'on partage le diamètre HK en 15 parties égales (comme nous l'avons fait séparément dans la *figure* 130 pour éviter la confusion), & que le point H ait vu l'entrée lorsqu'il étoit $7^h 14'$ à Paris, le pays de la terre qui répond au premier point de division verra l'entrée une minute plus tard ou à $7^h 15'$; le second point la verra à $7^h 16'$, &c. J'ai marqué à la droite du diamètre HK les minutes de l'entrée, & à gauche celles de la sortie, pour les différens points de la terre, qui répondent aux 15 portions du diamètre de la projection.

2101. Si donc on prend un globe terrestre d'un diamètre égal à HK (*fig. 129*); qu'on prenne l'ouverture ou la distance GH (*fig. 130*), & qu'on décrive un cercle en prenant pour centre ou pour pôle le point du globe que représentoit le point H de la projection; on tracera aisément sur ce globe un petit cercle, dont la circonférence marquera tous les pays de la terre, où l'entrée doit commencer à $7^h 19'$. Tous ces pays de la terre étoient marqués sur la projection (*fig. 129*) par le cercle ZFY , ils étoient par conséquent à une distance du bord de Vénus, égale à $16' 16''$, somme des demi-diamètres de Vénus & du soleil: ainsi ils ont tous observé au même instant le premier contact des deux bords: j'appellerai *cercles d'entrée* ces petits cercles décrits sur le globe, & qui passent sur tous les points où l'entrée paroît au même instant.

Cercles
d'entrée.

Trouver
les poles
d'entrée.
Fig. 129.

2102. Ainsi la première opération préliminaire consiste à trouver sur le globe terrestre le point H , (*fig. 129*), qui doit servir de pôle à tous ces cercles d'entrée que nous avons à décrire, & qui seront à peu-près parallèles entre eux; on peut trouver ce point avec le globe même, & l'on peut aussi y employer le calcul: on cherchera d'abord l'angle ETM qui est de $50^\circ 48'$. Si l'on en ôte l'angle OTM de $15^\circ 32'$ (2095), on aura l'angle OTE , ou l'arc HX de la terre qui en est la mesure, égal

à $35^{\circ} 16'$; & si on les ajoute ensemble, on aura l'arc *XA*, de $66^{\circ} 20'$. Fig. 122

2103. On prendra un globe terrestre monté sur son horizon; on élèvera le pôle de $22^{\circ} 36'$, qui est la déclinaison de Vénus; & dans cet état l'horizon du globe représentera le cercle d'illumination (1829), ou un plan de la terre parallèle au plan de projection. Car le soleil étant dans l'hémisphère boréal, est plus près du pôle arctique, il faut que ce pôle soit toujours dans la partie illuminée, & avancé de 22° sur le cercle d'illumination qui dans tous ses points est à 90° du soleil. Si la déclinaison de Vénus étoit méridionale, ce seroit le pôle antarctique ou méridional qu'il faudroit élever au-dessus de l'horizon.

2104. Le globe étant ainsi élevé, suivant la déclinaison du soleil, il faut le tourner suivant l'heure qu'il est. Par exemple, à $7^{\text{h}} 20'$ temps vrai à Paris, le soleil est éloigné de 110° du méridien; il faut donc faire tourner le globe d'occident en orient, comme tourne la terre, jusqu'à ce qu'il y ait 110° de l'équateur entre Paris & le méridien; on suppose le soleil fixe dans ce méridien universel, comme nous l'avons fait pour les éclipses de soleil.

2105. Les pays de la terre qui sont à 110° du méridien de Paris vers l'occident ont 270° de longitude, en prenant 20° pour la longitude de Paris, comme les géographes ont coutume de le faire (49); il n'y a donc qu'à tourner le globe, en sorte que le point marqué à 270° de longit. terrestre se trouve sous le méridien. Dans cet état, le globe sera dans la position où le verroit un observateur placé dans le soleil, quand il est à Paris $7^{\text{h}} 20'$ du soir; l'horizon de ce globe représentera le cercle *HBKI* de la fig. 129, ou le plan de projection.

2106. Tous les pays situés alors dans l'horizon de notre globe artificiel du côté de l'orient auront le soleil couchant; tous ceux qui se trouveront à l'occident verront le soleil se lever. Ce cercle d'illumination passe dans la partie orientale de la France & dans la mer Baltique;

Entrée au
lever ou au
coucher du
soleil.

il passe au nord de la Sibérie, de-là il s'étend en Asie jusqu'à la terre d'Yesso; il entre dans la mer du Sud près des Isles Mariannes, va rejoindre l'Amérique méridionale vers le détroit de le Maire, l'Afrique vis-à-vis du Cap-vert, & enfin la France d'où nous étions partis. Ces points sont marqués dans la *fig. 133* par le cercle *FGO BAD*, tracé sur la Mappemonde; & ils désignent d'un côté tous les pays qui verront l'entrée de Vénus au coucher du soleil, de l'autre tous ceux qui verront l'entrée au lever du soleil; en négligeant pour ce moment l'effet des parallaxes. Si l'on prend à l'orient du méridien un arc de $35^{\circ} \frac{1}{4}$ (2102) sur l'horizon du globe, en partant du nord, cet arc se terminera vers le midi de la Bavière, entre Munich & Inspruck, à $28^{\circ} \frac{1}{3}$ de longitude & $47^{\circ} \frac{0}{2}$ de latitude; c'est le pays dont la projection est au point *H* (*fig. 129*); c'est l'endroit d'où il faut partir, comme d'un pôle pour décrire les cercles d'entrée dont nous avons déjà commencé de parler (2101), & que l'on voit dans la *fig. 133*.

2107. L'on trouvera par la même méthode le pôle *B* de sortie à 20° de latit. boréale, & $73^{\circ} \frac{0}{2}$ de longit. ce qui tombe en Arabie près du détroit d'Ormus, en mettant le globe de manière qu'il soit à Paris $13^h 43' \frac{1}{2}$. On remarquera aussi quels sont alors les pays qui se lèvent & qui se couchent, afin de tracer sur la mappemonde le cercle d'illumination au moment de la sortie vue du centre de la terre, qui est représenté par les arcs *CAI* & *EGH*; ainsi les quatre portions de cercles *FGB*, *BAD*, *EGH*, *CAI* marqueront tous les points où l'on doit voir l'entrée & la sortie au moment du lever ou du coucher du soleil, & serviront par conséquent de limites pour les autres cercles que nous avons à décrire, car il sera inutile de marquer les cercles d'entrée sur les pays où le soleil est couché, quand Vénus entre sur son disque.

2108. Dans tous les pays qui sont au-dessus de *FGB*, c'est-à-dire, au nord de l'Europe & de l'Asie ou au-dessus de *BAD*, c'est-à-dire, dans toute l'Amérique, le soleil étoit levé, & par conséquent on a vu l'entrée

de Vénus sur le soleil. Chaque pays, par le mouvement diurne de la terre, avance vers l'orient ; ceux qui sont dans ce moment sur la ligne *FG* seront à droite ou au-dessous de cette ligne un instant après, ils seront hors du cercle d'illumination, & ne verront plus le soleil : ainsi la ligne *FG* est celle des points où l'on verra l'entrée au coucher du soleil ; il en de même des pays situés sur l'arc *AD*, en avançant vers l'orient ou vers la droite ils cesseront de se trouver sur le cercle d'illumination *AD*, & perdront le soleil de vue : ainsi l'entrée de Vénus arrivera pour eux au coucher du soleil. Au contraire les pays situés sur *GB* & sur *BA*, en avançant vers l'orient, monteront alors sur le cercle d'illumination, & verront l'entrée au lever du soleil, comme nous l'avons marqué sur les arcs *GB* & *BA*.

2109. On trouvera par une opération semblable le cercle d'illumination, pour le moment de la sortie du centre de Vénus, ou pour $13^{\text{h}} 44'$ au méridien de Paris. L'angle horaire étant de 206° , les pays situés à 174° de longitude seront alors dans le méridien, car $360 - 206 + 20 = 174$; on disposera donc le globe, élevé de 22° , en sorte que le 174° degré de longitude soit sous le méridien ; alors on verra du côté de l'orient, dans l'horizon, tous les pays où la sortie doit paroître au coucher du soleil, & à l'occident tous ceux où la sortie doit arriver au soleil levant ; ces lignes sont marquées *EGH* & *CAI* sur la mappemonde. Les pays situés sur *CI*, en avançant vers l'orient, quitteront alors le cercle d'illumination, & perdront de vue le soleil ; ainsi la sortie de Vénus arrivera pour eux au coucher du soleil. Cette ligne s'étend depuis le Groenland, au travers de l'Amérique septentrionale & du Mexique, jusques dans la Mer du Sud. Au contraire les lieux situés sur la ligne *EGH* & qui, par le mouvement diurne, avancent vers l'orient s'élèvent au-dessus du cercle d'illumination *EGH*, & verront la sortie au lever du soleil. La ligne qui passe dans tous ces points s'étend depuis le nord de l'Europe, au travers de la Turquie & de l'Arabie, jusques dans la mer des Indes, & finit dans les terres australes.

Fig. 133.

Le point *G* où se coupent les lignes *FGB*, *EGH*, voit l'entrée au coucher du soleil, & la sortie le lendemain matin au lever du soleil; mais la durée de ce passage y est invisible, c'est ce qui arrivoit vers Marienbourg; en Livonie. Le point *A* où se coupent les deux lignes *CAI* & *BAD* voyoit l'entrée au soleil levant, & la sortie au coucher du soleil, on y voyoit par conséquent toute la durée du passage.

Dans tout l'espace *FGBEF*, on a vu l'entrée de Vénus aussi bien que dans tout l'espace *BCDAB*. Dans l'espace *HBEGH* & *CBIAC*, on a vu la sortie, ainsi les espaces communs à tous les deux; sçavoir, *CBAC* & *BGEB* ont vu l'un & l'autre, c'est-à-dire, l'entrée & la sortie. Dans les espaces *ADCA* & *FGEF* on ne voyoit que l'entrée. Dans les espaces *EGHB* & *BAI*, on ne voyoit que la sortie. Dans les parties *FGHF*, *IADI*, l'on ne voyoit ni l'un ni l'autre. Dans les mappemondes que M. de l'Isle a publiées pour les passages de Mercure & de Vénus, en 1753 & 1761, de même que dans la mienne pour 1769, ces différens espaces sont désignés par des couleurs différentes; on fait enluminer de bleu les pays où se voit l'entrée seulement, de jaune ceux où il n'y a de visible que la sortie, & de rouge ceux où les deux phases peuvent être observées.

2110. Il s'agit maintenant de tracer sur la carte les cercles d'entrée & de sortie pour $7^h 17', 20', 23', 26'$, afin de connoître les pays où l'effet de la parallaxe est le plus considérable, & de pouvoir choisir en conséquence la position la plus favorable pour l'observer.

Supposons que le cercle *HGK* fig. 130, soit exactement de la même grandeur que le globe dont on veut se servir, par exemple, de six pouces; que le point *H* représente le premier de tous les pays de la terre où se voit l'entrée, c'est-à-dire, où elle s'aperçoit dès $7^h 14'$, tandis qu'au point opposé *K* elle se voit seulement à $7^h 29'$; dans les points comme *G*, on la voit à des temps intermédiaires entre $7^h 14'$ & $7^h 29'$. On divisera *HK* en 15 parties égales, puisque nous supposons 15' de temps
pour

pour la différence entière des deux points *H* & *K* (2098); par chacun de ces points de division, on tirera des perpendiculaires au diamètre *HK*, elles intercepteront des arcs *HG*, qui seront les largeurs des cercles d'entrée & de sortie pour les différens temps marqués sur le diamètre *HK*; ainsi prenant avec un compas la distance du point *H* au point *G*, marqué par la ligne de la cinquième division, on prendra cette même distance qui est d'environ $70^{\circ} 32'$ sur le globe, puisque son sinus versé est un tiers du diamètre; avec cette ouverture, partant du pôle que nous avons déterminé près de Munich (2106), & faisant tourner circulairement une pointe du compas, on formera un cercle qui coupe l'équateur à 330° de longitude, le premier méridien à 17° de latitude australe, le méridien de 60° de longitude à 16° de latitude australe, celui de 90° à $2^{\circ} \frac{1}{2}$ de latitude boréale, celui de 120° à 29° de latitude boréale, le méridien de 180° de longitude, sur le parallèle de 59° , & celui de 290° sur le parallèle de 35° . Il suffit d'avoir trois de ces points sur un hémisphère, on les marquera sur la mappemonde par leurs longitudes & leurs latitudes; on fera passer un cercle par ces trois points, & ce même cercle passera nécessairement sur tous les autres points de l'hémisphère qui appartiennent au même cercle, & où l'entrée de Vénus doit arriver à $7^h 19'$ comptées sur le méridien de Paris:

Fig. 130.

2111. Nous parlons de ces cercles décrits sur la mappemonde, comme des cercles décrits sur le globe; parce qu'on verra que dans la projection des mappemondes, qui est la projection stéréographique ordinaire, tous les cercles du globe deviennent des cercles, quoique plus ou moins grands suivant leur situation (3874); ainsi nous sommes assurés que le même trait de compas, qui passe sur trois points de notre mappemonde, passera aussi par tous les autres lieux, qui sur le globe terrestre, se trouvoient appartenir au même cercle.

Projection
stéréographi-
que.

2112. La mappemonde représente le globe coupé en deux parties différentes, ce qui nous a obligé de cou-

per aussi en deux portions la plupart des cercles d'entrée. Par exemple, on voit sur l'hémisphère du nouveau monde (*fig. 133*), une portion *LM* du cercle d'entrée de $7^h 17'$, & l'on voit encore à gauche dans l'autre hémisphère une portion *NO* du même cercle, marquée de même $7^h 17'$. Chacune de ces deux portions exige 3 points pour la déterminer; mais on voit que le point *N* & le point *L* ne font qu'un même point, l'un & l'autre étant sur le premier méridien vers 71° de latitude; & d'ailleurs, quand on a son compas ouvert sur le globe, il est aisé de marquer par longitude & latitude autant de points qu'on juge à propos, & d'en prendre trois dans l'hémisphère oriental, & trois dans l'hémisphère occidental, si cela est nécessaire. Il seroit inutile de marquer sur notre mappemonde la partie d'un cercle d'entrée qui passe sur les pays où le soleil n'est pas levé, & où par conséquent l'on ne peut voir l'entrée de Vénus sur le soleil; c'est pourquoi j'ai terminé tous les cercles d'entrée à la ligne *GOBAD* qui sur la mappemonde sépare les pays où l'on voyoit le soleil à $7^h 14'$ de ceux où on ne le voyoit pas.

Cercles de
fortie.

Fig. 129.

Fig. 130.

2113. Les cercles de fortie se décriront de la même manière lorsqu'on aura les poles de fortie, (art. 2107). Le pole *B* (*fig. 129*), se trouve vers Mascate en Arabie; le point ou pole opposé *I* se trouve dans la Mer du Sud; celui-ci voit la fortie à $13^h 36'$, tandis que le point *B* la voit à $13^h 51'$, comme je l'ai marqué dans la *fig. 130*; la différence est encore de $15'$; ainsi l'on peut prendre le cercle *HGK*, pour représenter les différens arcs dont on aura besoin pour la fortie; le point *H* étant marqué $13^h 51'$, les points de division qui ont servi à marquer d'un côté $7^h 17'$, $20'$, $23'$ & $26'$, serviront à marquer de l'autre $13^h 48'$, $45'$, $42'$, $39'$, & les mêmes ouvertures de compas qui ont servi pour tracer les cercles d'entrée (2110), serviront à décrire les cercles de fortie. Le cinquième point de division du diamètre *HK*, par lequel on a tiré une perpendiculaire *GG*, a déterminé l'arc *HG* pour $7^h 19'$, & il détermine l'arc *HG* pour

$13^h 46'$; l'arc HG étant toujours de $70^\circ 32'$.

Fig. 130.

2114. Ayant tracé de même tous les cercles d'entrée & de sortie dans le passage de 1769, j'ai vu que l'entrée à Mexico dans la nouvelle Espagne devoit être à $7^h 21' 10''$, la sortie à $13^h 37' 40''$; ainsi la durée totale du passage y étoit de $6^h 16' 30''$; tandis qu'aux environs de Pétersbourg la durée y devoit être plus grande de $18\frac{1}{4}'$, je dis aux environs de Pétersbourg, c'est-à-dire un peu au nord, parce qu'à Pétersbourg on ne pouvoit voir l'entrée.

2115. En conséquence j'annonçai que deux observations complètes de ce passage, en 1769, dont l'une seroit faite au Mexique & l'autre au nord de Pétersbourg, nous donneroient la parallaxe avec une précision deux fois aussi grande que celle qu'on auroit pu avoir dans le passage observé en 1761, en supposant même toutes ces observations d'accord. (*Mém. acad.* 1757, pag. 244). En effet la plus grande différence que nous eussions pu comparer, étoit de $8'$ entre Tobolsk & l'Isle Rodrigues, encore falloit-il supposer qu'on conût exactement leur différence de longitude, au lieu qu'on avoit, en 1769, une différence double, indépendante de la longitude, supposé que l'on parvînt à observer la durée entière du passage de 1769 en Laponie & au Mexique, ou en Californie; c'est ce qui fut adopté par toutes les académies, & qui détermina les voyages dont nous parlerons en faisant l'histoire de ces observations (2146). Celles de la mer du Sud étoient encore plus importantes, puisque la durée totale du passage pouvoit s'y trouver de $25'$ plus courte qu'en Laponie; j'en avertis dans le mémoire que je publiai en 1764 sur ce passage; mais il n'y a eu qu'un vaisseau Anglois avec lequel on ait tenté d'aller faire cette observation dans la mer du Sud, & nous ignorons encore le succès de ce voyage, (en Octobre 1770).

Voyages
qu'il étoit
utile d'en-
treprendre.



MÉTHODES pour observer un passage de Vénus, ou de Mercure sur le Soleil, & pour tirer des Observat. toutes les conséquences qui en résultent.

2116. IL y a trois sortes d'observations différentes que l'on peut faire dans un passage de Vénus & de Mercure sur le soleil ; chacune exige une méthode pour calculer ces observations, & en tirer les résultats convenables. Je ne parle que de trois espèces d'observations ; parce qu'on ne peut guères employer pour un passage de Vénus que trois sortes d'instrumens ; 1^o, le quart-de-cercle (2311), pour avoir les différences de hauteur & d'azimut ; 2^o, le micromètre (2358), ou l'héliomètre (2433), pour avoir les distances au bord le plus proche ; 3^o, le micromètre dans la lunette parallatique (2400), pour avoir les différences d'ascension droite & de déclinaison : l'explication de ces méthodes pourroit être réservée pour le XIV^e livre ; mais elle devient nécessaire ici à cause des résultats que nous avons à en tirer.

Par le moyen
du quart-de-
cercle.

2117. Le quart-de-cercle est de tous les instrumens d'astronomie le plus familier aux astronomes, celui dont les observations sont les plus simples, la manipulation la plus aisée ; c'est en général celui que l'on doit préférer à tous, lorsqu'il est possible de l'employer : M. de l'Isle en fit sentir toute l'utilité dans le temps du passage de Mercure sur le soleil en 1723, (*Mém. acad.* 1723) ; & il est communément préférable à la lunette parallatique, pour les raisons suivantes.

Raisons
de préférence
pour le quart-
de-cercle.

2118. Dans un quart-de-cercle les fils conservent toujours leur position exacte, l'un est toujours vertical, & l'autre toujours horizontal, au lieu que dans la machine parallatique il est difficile que le mouvement soit aussi régulier, & la position aussi exacte que celle que détermine un fil à plomb. Dans ces observations du quart-de-cercle la réfraction ne change point les quantités, ou les différences de hauteur observées, au lieu qu'elle affecte & complique beaucoup les différences d'ascension

droite & de déclinaison. Enfin, les réductions & le calcul qu'exigent les parallaxes & les réfractions, rendent le calcul plus long dans les observations faites à la lunette parallatique, que dans celles qu'on fait au quart-de-cercle.

2119. Soit AB le fil vertical de la lunette, & ED le fil horizontal, qui se coupent au foyer de la lunette d'un quart-de-cercle, en sorte que $AEBD$ représente le champ de la lunette, S le disque du soleil sur lequel on apperçoit Vénus en V , dont on veut déterminer la position. On disposera la lunette de manière que le soleil ne touche point les fils; mais que par le mouvement diurne il soit obligé de venir les rencontrer; si c'est le matin, comme les lunettes astronomiques renversent les objets, il faut faire paroître le soleil au haut de la lunette & sur la droite, comme on le voit dans la figure; alors le mouvement diurne étant dirigé de S en C , le soleil traversera le fil vertical, & l'horizontal aussi bien que Vénus.

Planche XVI,
Fig. 135.

2120. On observera donc attentivement avec une horloge à secondes les six instans suivans, dans l'ordre où ils arriveront: car il pourra se faire que les passages au fil horizontal, précèdent les passages au fil vertical; & que l'ordre suivant soit changé, cela dépendra de l'endroit où l'on aura placé le soleil, & de la direction de son mouvement par rapport à l'horizon.

Momens des
fix observa-
tions.

1. Passage du bord précédent du soleil, au fil vertical.
2. Passage du bord inférieur du soleil, au fil horizontal.
3. Passage du bord précédent de Vénus, au fil vertical.
4. Passage du bord inférieur de Vénus, au fil horizontal.
5. Passage du bord suivant du soleil, au fil vertical.
6. Passage du bord supérieur du soleil, au fil horizontal.

J'appelle bord inférieur du soleil celui qui paroît tel dans la lunette, (quoiqu'il soit réellement supérieur), afin de ne pas compliquer l'attention de l'observateur par des considérations incidentes.

2121. Je n'observe que le passage d'un des bords de

Fig. 135.

Vénus, parce que le diamètre de cette planète étant assez connu (2157), il est inutile de se charger d'une double observation qui peut nuire à l'exactitude des autres, & détourner l'attention de l'observateur; si cependant on a avec soi une personne pour compter les secondes & une autre pour les écrire; on fera bien d'observer les deux bords de Vénus au fil vertical AB & au fil horizontal, ED ; le milieu donnera plus sûrement le passage du centre de Vénus.

2122. Quoique j'aie indiqué le passage de chaque bord du soleil au fil vertical, & au fil horizontal, on peut se contenter d'observer un seul bord, en choisissant celui dont Vénus est le plus près; car le diamètre du soleil étant très-bien connu, on trouvera fort exactement par le calcul combien son diamètre a dû employer de temps à traverser le fil vertical & le fil horizontal du quart-de-cercle (894); mais si l'on a la facilité d'observer chaque bord, on aura une confirmation de l'un par l'autre, & un double terme de comparaison pour la situation de Vénus.

2123. Lorsqu'on a par observation le temps qui s'est écoulé entre les passages du bord du soleil & du bord de Vénus à un même fil, on en conclut leur différence de hauteur si c'est le fil horizontal, & leur différence d'azimut si c'est le fil vertical; j'appellerai ici différence d'azimut comme dans le calcul des éclipses (1891), un arc de grand cercle perpendiculaire au vertical.

On connoît ou par observation ou par le calcul (897) le temps que le demi-diamètre du soleil emploie à traverser le fil horizontal du quart-de-cercle; on fera donc cette proportion: le temps que le demi-diamètre entier met à traverser le fil, est la valeur du demi-diamètre du soleil (1388), comme le temps écoulé entre les passages du bord de Vénus & du bord du soleil au fil horizontal, est à un quatrième terme, qui fera la différence de hauteur entre les bords observés de Vénus & du soleil. Je suppose que le demi-diamètre du soleil étant de $15'46''$

Différence
de hauteur par
observation.

emploie 2' de temps à traverser le fil horizontal dans le temps de l'observation, & qu'entre les bords inférieurs de Vénus & du soleil au fil horizontal il se soit écoulé une minute de temps, il est évident qu'il y aura la moitié de 15' 46'', ou 7' 53'', pour la différence de hauteur entre les deux bords de Vénus & du soleil.

Fig. 135.

2124. On connoît de même ou par l'observation (2120) ou par le calcul (896), le nombre de minutes & de secondes de temps que le demi-diamètre entier du soleil met à passer le fil vertical; on a par observation le temps écoulé entre les passages du bord de Vénus & de celui du soleil au même fil; on fera donc aussi cette proportion: le temps employé par le demi-diamètre du soleil à traverser le fil vertical, est à la valeur du demi-diamètre du soleil en min. & en sec., comme le temps écoulé dans l'observation entre le bord précédent du soleil & celui de Vénus au même fil vertical, est au nombre de minutes & de secondes qui forme la différence d'azimut entre ces deux bords observés. Si le bord occidental du soleil *F* a passé au fil vertical 2' plutôt que le centre *S*, & 1' plutôt que Vénus *V'*, on sent assez que la différence d'azimut doit être la moitié de la différence *FS*, l'une & l'autre étant mesurée perpendiculairement au vertical.

2125. Quand on a observé par le moyen du quart-de-cercle la différence de hauteur & d'azimut entre Vénus & le centre du soleil, il faut en conclure la différence de longitude & de latitude, pour le moment de l'observation. En expliquant la manière d'en faire le calcul je prendrai pour exemple une des observations que je fis le 6 Juin 1761. A 6^h 31' 46'' du matin temps vrai à Paris, le bord précédent ou le bord occidental *A* de Vénus, (fig. 136), suivoit le bord précédent *P* du soleil de 43'' au fil vertical, & le bord boréal *F* de Vénus précédoit de 59'' $\frac{1}{2}$ le bord austral *M* ou le dernier bord du soleil; il s'agit d'en conclure d'abord la différence de hauteur & la différence d'azimut entre les centres de Vénus & du soleil. Ces deux passages de Vénus au vertical & à l'horizontal n'étoient pas éloignés l'un de l'autre d'une minute de

Déterminer
le lieu de Vénus
par cette
observation.

Fig. 136.

Fig. 136.

temps, sans quoi il faudroit les réduire à un même temps, au moyen du changement qu'on auroit remarqué entre ces observations & les suivantes. Le temps que le demi-diamètre du soleil emploie à traverser le méridien (895), étoit ce jour-là de $1' 8'' 2$, l'angle du vertical avec le cercle de déclinaison $44^{\circ} 39'$ pour l'heure de cette observation (1036); on en déduit le temps que le demi-diamètre employoit à traverser le fil horizontal $1' 37'' 0$, & le temps qu'il employoit à traverser le vertical $1' 36'' 0$; on fera donc ces proportions, $1' 36'' : 15' 46'' :: 43'' : 7' 4''$; d'où il suit que le bord occidental A de Vénus (fig. 136), étoit éloigné horizontalement du bord occidental P du soleil de la quantité AB égale à $7' 4''$; & y ajoutant le demi-diamètre de Vénus AD (2157), on aura la quantité $BD = 7' 33''$, on retranchera BD de BE qui est égale au demi-diamètre du soleil $15' 46''$; & l'on aura $ED = 8' 13''$, c'est la différence d'azimut entre le centre du soleil & le centre de Vénus, au moment où Vénus a été observée.

2126. On fera ensuite cette seconde proportion; $1' 37'' : 15' 46'' :: 59'' \frac{1}{2} : 9' 40''$; c'est la différence FG de hauteur apparente entre le bord précédent F de Vénus, qui paroïssoit inférieur dans la lunette, & le bord suivant M du soleil; on en ôtera le demi-diamètre FD de Vénus $29''$, & l'on aura $DG = 9' 11''$; on retranchera DG de GH égale au demi-diamètre du soleil $15' 46''$, & l'on aura DH différence de hauteur apparente entre les centres de Vénus & du soleil $6' 35''$ au moment où Vénus a passé au fil horizontal.

2127. Cette différence de hauteur apparente n'a pas besoin d'être corrigée par la réfraction; comme si on l'avoit mesurée au micromètre; d'ailleurs, le soleil étoit assez haut & les deux points assez voisins l'un de l'autre pour que cette quantité fût insensible; mais cette différence doit être corrigée par le moyen de la parallaxe. Pour cet effet, ayant calculé la hauteur du soleil (1034), on la trouve de $21^{\circ} 59'$; le cosinus de cette hauteur multiplié par la différence des parallaxes horizontales $22''$ donne

donne la différence des parallaxes de hauteur $19''$ qui n'exige aucune correction pour la différence des réfractions. Il faut donc ôter $19''$ de la différence en hauteur $6' 35''$ pour avoir la vraie différence $6' 16''$; c'est la véritable valeur de HD ou CE . On a vu ci-devant une méthode beaucoup plus simple pour trouver la parallaxe (2080). Dans le triangle CED qui est sensiblement rectiligne & rectangle, on connoît $CE = 6' 16''$ & $ED = 8' 13''$, on trouvera l'angle $DCE = 52^\circ 40'$, & l'hypothénuse $CD = 10' 21''$, c'est la vraie distance du centre de Vénus au centre du soleil.

Fig. 136.

2128. On cherchera ensuite la position du cercle de latitude sur la figure, pour avoir l'angle de conjonction. L'angle de position pour l'heure donnée est $6^\circ 23'$ qu'il faut soustraire (1884), de l'angle $44^\circ 39'$ que fait le vertical avec le cercle de déclinaison; il reste $38^\circ 16''$ pour l'angle parallactique du vertical avec le cercle de latitude, c'est l'angle ECI , on le retranchera de l'angle $ECD = 52^\circ 40'$; il restera $14^\circ 24'$ pour l'angle de conjonction DCI (1887).

2129. On abaissera du centre D de Vénus une perpendiculaire DK sur le cercle de latitude, ce sera la différence de longitude entre les centres de Vénus & du soleil; & CK fera la latitude de Vénus. Dans le triangle DCK l'on connoît l'hypothénuse $CD = 10' 21''$ & l'angle $DCK 14^\circ 24'$; on trouvera la latitude $CK = 10' 1''$ & la différence de longitude $DK = 2' 34''$; c'est le résultat immédiat de l'observation (2125); mais on doit en conclure aussi la conjonction & la latitude, comme nous le dirons ci-après (2150). La méthode que nous venons d'expliquer est aussi celle dont on se sert pour observer les taches du soleil & de la lune (3141).

Différence
de longitude
& de latitude.

2130. M. de Fouchy a donné une méthode pour calculer de semblables observations sans supposer que l'un des fils soit horizontal & l'autre vertical, mais seulement qu'ils soient perpendiculaires l'un à l'autre: soit RH fig. 135, la route du centre du soleil, $MLKO$ celle du centre de Vénus; si l'on a observé le bord du soleil en

Fig. 135.

T & en I , le milieu entre ces deux instans d'observation donne l'heure où le centre a passé en N ; de même le milieu entre les passages des deux bords au fil AB donne le moment du passage du centre du soleil au point O ; on a donc la valeur de NO . Dans le triangle RNT , on connoît RN & RT , on trouve l'angle N , ce qui fait connoître le côté NC du triangle NOC . Dans le triangle CYL on connoît YL par le temps du passage de Vénus en L & en Y , & l'angle L égal à l'angle N , on cherche CL , on en ôte NC , & l'on a NL . Dans le triangle NLK l'on a NL avec l'angle L , on trouve NK différence de déclinaison entre Vénus & le soleil, & KL qui donne le temps du passage de Vénus en K , & par conséquent la différence entre l'ascension droite du soleil pour le moment où il a passé en N , & celle de Vénus lorsqu'elle étoit en K . (*Mém. acad.* 1737, pag. 250).

Avec le micromètre.

2131. Lorsqu'on peut observer pendant plusieurs heures un passage de Vénus ou de Mercure sur le soleil, & qu'on a un bon héliomètre (2433), ou micromètre objectif; la méthode la plus exacte de toutes pour observer la position de la planète sur le disque du soleil, est de mesurer sa distance au bord le plus proche du soleil; sur-tout quand la hauteur est assez grande pour qu'on n'ait pas à craindre une grande inégalité de réfractions; j'ai employé cette méthode avec succès dans le passage de 1761, quoique je n'eusse pas un long espace de temps pour mesurer des distances fort différentes entr'elles. Par la distance du bord de Vénus au bord le plus proche du soleil, on trouve aisément la vraie distance des centres, par exemple CA (fig. 137); si l'on a une autre distance, telle que CD , avec l'intervalle de temps compris entre ces deux observations, on calcule le mouvement AD de Vénus sur son orbite dans cet espace de temps; alors dans le triangle CAD dont on connoît les trois côtés, on cherche un angle A & la perpendiculaire CB qui est la plus courte distance des centres; d'où il est aisé de conclure le milieu du passage, le temps de la conjonction & la latitude pour ce temps là. C'est à peu-près de même

Fig. 137.

Usage de
2. distances.

que nous avons cherché le temps de la conjonction vraie par le moyen d'une éclipse de soleil (1973). Si l'on a observé la plus courte distance CB , on la compare avec une des distances comme CD , la plus éloignée du milieu du passage, & l'on en conclut BD que l'on réduit en temps, pour avoir le temps du milieu du passage en B .

2132. Enfin si l'on n'a observé que deux distances telles que CD & CV du même côté de la perpendiculaire, comme cela m'est arrivé en 1761, on peut également s'en servir pour trouver le temps de la conjonction & la latitude pour cet instant; c'est ici le cas le plus compliqué, c'est pourquoi je vais l'expliquer en détail, en l'accompagnant d'un exemple. Les autres cas s'en déduiront facilement.

2133. EXEMPLE. Je choisis pour terme de comparaison & pour une de mes deux distances, le contact intérieur des bords de Vénus & du soleil observé le six Juin 1761 à $8^h 28' 25''$. Je suppose que la distance vraie des deux centres de Vénus & du soleil étoit à ce moment-là de $915'' 1$, après l'avoir corrigée par la parallaxe (2084); c'est la distance CV . Le même jour à $7^h 18' 45''$, j'avois mesuré la distance du bord de Vénus au bord du soleil le plus éloigné, à laquelle ajoutant le demi-diamètre de Vénus je trouve la distance du centre de Vénus au bord boréal du soleil $27' 53''$; si le soleil eût été moins élevé, il faudroit encore la corriger par la réfraction (2247); j'en ôte le demi-diamètre du soleil, & j'ai la distance apparente des centres de Vénus & du soleil $12' 6'' 5$; j'en ôte $7''$ dont la parallaxe faisoit paroître cette distance trop grande (2084), & j'ai la distance vraie $CD 11' 59'' 5$. L'intervalle de temps entre D & V est de $1^h 9' 40''$, pendant lequel Vénus parcouroit sur son orbite un arc DV de $4' 38'' 5$, (2058).

2134. Dans le triangle CDV l'on connoît donc les trois côtés $CV=914'' 95$, $CD=719'' 5$; & $VD=278'' 5$, le grand côté CV est à la somme de CD & VD , comme leur différence est à la différence des segmens que la perpendiculaire DX forme sur le grand côté CV ;

Fig. 137.
Usage de la plus courte distance.

Usage du premier contact de Vénus.

Fig. 137.

la moitié de cette différence est $240'' 5$, ce qui donne le plus petit segment $VX = 216'' 9$. A cause du triangle VDX , on a $VD : VX :: R : \cosin. V$, $38^\circ 44'$, & à cause du triangle CVB , on a $R : \sin. V :: CV : CB$, & $R : \cos. V :: CV : VB$; par-là on trouve la perpendiculaire CB ou la plus courte distance des centres de $9' 32'' 4$, & ayant trouvé le logarithme de VB , on y ajoute tout de suite le logarithme constant 1, 176038, qui est celui d'une heure divisée par $4' 0'' 03$, & l'on a le logarithme de $2^h 58' 25''$; cette quantité est la distance en temps du milieu du passage à l'heure du contact; on la retranchera du temps vrai de l'observation, & l'on aura $5^h 30' 0''$ pour le temps du milieu du passage.

Résultat de
la plus courte
distance.

2135. C'est ainsi que j'ai calculé toutes mes observations des distances de Vénus au bord du soleil en les comparant toutes à celle que donne le contact en V , qui est nécessairement l'observation la plus exacte de toutes (2140), & j'ai trouvé par un milieu général la plus courte distance de $9' 30''$, & le milieu du passage de $3^h 30' 10''$; d'où il suit que le temps de la conjonction étoit à $5^h 51'$ avec une latitude pour ce temps-là de $9' 36'' 3$. Je montrerai ci-après comment l'on doit tirer une semblable conclusion de chaque observation prise séparément, lorsqu'on se sert du quart-de-cercle (2150).

Troisième
méthode.

2136. LE RÉTICULE appliqué à une lunette ordinaire (2350) est de tous les instrumens d'astronomie le plus simple, le plus ordinaire, le plus facile à se procurer; ainsi nous devons expliquer ici la méthode d'y observer les différences d'ascension droite & de déclinaison dans un passage de Vénus ou de Mercure sur le soleil; M. J. Dom. Cassini proposa cette méthode en 1698, & M. Maraldi en a donné le détail, (*Mém. de l'acad.* 1736). On dispose la lunette sur une machine parallatique (2400), ou sur un pied ordinaire, en inclinant les fils de manière que le bord du soleil décrive par son mouvement diurne parallèle à l'équateur, un des fils de la lunette tel que AB (fig. 138); dans cet état l'on compte à l'horloge la minute & la seconde à laquelle le premier bord du

Fig. 138.

soleil D touche le fil horaire CDE , & ensuite le moment où le bord V de Vénus y arrive à son tour ; la différence des temps convertie en degrés, & multipliée par le cosinus de la déclinaison (892), donne la différence d'ascension droite entre le bord du soleil & celui de Vénus, mesurée dans la région même du soleil ; on peut aussi employer le temps que le demi-diamètre du soleil emploie à passer le méridien (894), en faisant cette règle de trois ; le temps du demi-diamètre du soleil est à sa valeur en secondes de degré, comme le temps entre les bords du soleil & de Vénus est à leur différence d'ascension droite en secondes de degré.

Fig. 138.

Différence
d'ascension
droite.

2137. La différence de déclinaison se mesure ou par le moyen d'un micromètre dont le curseur VR soit placé sur Vénus, ou par le temps qu'elle emploie à aller de F en G , c'est-à-dire, d'un des fils obliques à l'autre (2352) ; on conclura aisément de ces deux observations la différence d'ascension droite & de déclinaison entre les centres de Vénus & du soleil ; on la corrigera par la parallaxe (2081) ; & par la réfraction si le soleil a été assez bas, & la différence des hauteurs assez sensible pour qu'on en ait besoin, & l'on aura la vraie différence d'ascension droite & de déclinaison entre le centre de Vénus & celui du soleil.

2138. Je suppose que CE & DE (fig. 136) soient les différences de déclinaison & d'ascension droite, la ligne CE étant le cercle de déclinaison ; & DE un parallèle à l'équateur ; voici la manière la plus simple de calculer ces sortes d'observations. Dans le triangle CED où l'on connoît les deux côtés, on cherchera l'angle ECD & l'hypothénuse CD ; on tirera ensuite le cercle de latitude CKI faisant avec le cercle de déclinaison CE un angle ECI qu'on appelle l'angle de position (1044), & qui pour le centre du soleil étoit de $6^{\circ} 7'$ au temps du passage de Vénus en 1761 ; on prendra la somme ou la différence de ces angles ECD & ECK suivant la situation du cercle de latitude (1884), & l'on aura l'angle KCD . Dans le triangle KCD l'on connoît l'hypothénuse

Fig. 136.

Fig. 136.
Différence
de longitude
& de latitude.

CD & l'angle KCD , l'on trouvera la latitude CK & la différence de longitude DK , d'où l'on conclura le temps de la conjonction & la latitude au même instant (2150). Le 6 Juin 1761, à 8h 13' 3", le bord précédent de Vénus suivoit de 32" de temps au fil horaire le bord du soleil, & il y avoit 3' 43" 4 de différence de déclinaison entre le centre de Vénus & le bord boréal du soleil. En suivant les règles précédentes, on trouvera la latitude de Vénus 11' 0" & la différence de longitude 9' 20". On verra ci-après (2150) la manière dont on doit déduire de deux semblables élémens le temps de la conjonction, & la latitude pour ce même instant.

2139. Cette manière de calculer les observations faites avec le micromètre, est celle que je donnai dans les *Mém. de l'acad.* pour 1754; elle est la plus simple qu'on ait imaginée: avant moi les astronomes calculoient l'ascension droite du soleil & sa déclinaison, ensuite celle de Vénus, & enfin sa longitude & sa latitude, (*Mém. de l'acad.* 1723), ce circuit rendoit le calcul d'une longue rebutante; je crois l'avoir réduit à la plus grande facilité.

Observations de l'entrée & de la sortie de Vénus; en 1761 & 1769, avec les résultats qu'on en déduit.

2140. LA plus importante de toutes les observations que l'on fait dans un passage de Vénus ou de Mercure sur le soleil, est celle de l'entrée ou de la sortie, principalement du contact intérieur des deux bords de Vénus & du soleil; ce n'est qu'une distance de Vénus au bord du soleil que l'on observe; mais elle se mesure avec plus de précision qu'aucune distance que pourroient donner les instrumens d'Astronomie: car l'on peut se tromper d'une ou deux secondes de degré avec les meilleurs instrumens, & l'on ne doit pas craindre ici une erreur de plus d'un cinquième de seconde, ou moins encore, si l'on opère avec les précautions convenables.

D'ailleurs c'est une distance qui est exactement & rigoureusement la même pour tous ceux qui l'observent, & pour tous les pays de la terre; car elle est réellement égale au diamètre apparent du soleil, qui est égal pour tous les observateurs du monde, en sorte que la comparaison de toutes ces observations devient très-facile, & en même temps très-exacte.

2141. Au moment où le bord de Vénus touche celui du soleil, le filet de lumière qui restoit au bord du soleil se trouve tranché subitement; on distingue ce filet de lumière lors même qu'il n'a qu'un dixième de seconde, & l'on voit un point noir se détacher de Vénus & s'élan-
 cer vers le soleil (2159); voilà pourquoi l'on ne doit se tromper que d'une ou de deux secondes de temps au plus, sur cette observation. C'étoit l'avis de M. Halley; c'est celui de M. Pingré: (*Mém. acad.* 1761, pag. 480); & M. Short avec qui j'eus à Londres, en 1763, une conversation à ce sujet, m'assura qu'il avoit vu le contact de Vénus de la même manière que moi; aussi la différence des méridiens qu'il a trouvée de 9' 16" entre les observatoires de Greenwich & de Paris par son observation comparée avec la mienne, tombe à la même seconde que le milieu pris entre tous les passages de Mercure observés jusqu'ici, & les calculs des éclipses de soleil de 1764 & 1769.

De quelle
manière se fait
le contact.

Je négligerai ici la différence qu'il peut y avoir entre les différentes lunettes qui ont servi à cette observation, je crois qu'elle est peu considérable, & très-peu constatée jusqu'à présent, on peut voir cependant la manière dont le P. Hell desire qu'on y ait égard, dans ses *Ephémérides pour 1765*, depuis la page 281 jusqu'à la page 308, & sur-tout le *Suppositum VII*, pag. 283, sur lequel il n'a pas voulu s'expliquer complètement.

2142. J'ai raconté dans l'histoire de l'académie pour 1757, quels étoient les préparatifs du monde savant; pour observer avec fruit le passage de Vénus en 1761, lorsque ce phénomène si désiré arriva enfin le 6 Juin, comme on l'avoit prédit. Il fut observé en une multitude de

provinces de France, d'Angleterre, d'Allemagne, d'Italie. On trouvera les observations dans *la connoissance des mouvemens célestes de 1763*, pag. 211; dans *les éphémérides du P. Hell pour 1762*; dans *les transactions Philos.*; dans *les mém. de l'acad.*, & dans le mémoire que j'ai donné avec la figure du passage de 1769, à Paris chez Latré; Graveur, 1764. Je parlerai ci-après des élémens que j'en ai déduits; mais les plus importantes observations sont celles qui furent faites au Cap de Bonne-espérance, à Tobolsk, à Rodrigues, & dont il est nécessaire de parler, afin d'expliquer les conséquences importantes qu'on en a déduites.

2143. Les déterminations de la parallaxe les plus sûres, sont celles qui sont indépendantes de la différence des méridiens ou de la longitude des lieux, élément toujours difficile à bien constater; telles sont celles qui se tirent de la durée totale du passage, observée tout à la fois à Stokolm & à Tobolsk en 1761: voici le calcul que j'en donnai à l'académie le 23 Décembre 1761, aussitôt après que nous eûmes reçu les observations des pays éloignés. La latitude de Tobolsk est de $58^{\circ} 12' 30''$; celle de Stokolm $59^{\circ} 20' 30''$; le contact intérieur fut observé par M. l'Abbé Chappe à Tobolsk, lorsque Vénus entra totalement sur le soleil, à $7^h-0' 28''$ du matin; & le contact intérieur, lorsque Vénus commença de sortir, $0^h 49' 20'' \frac{1}{2}$ après midi.

Les contacts intérieurs observés par M. Wargentini à Stokolm, sont $3^h 39' 29''$ & $9^h 30' 10''$. En supposant la parallaxe horizontale du soleil de $10'' \frac{1}{4}$, je trouvai par un calcul très-exact & très-rigoureux, fait de la même manière que celui de l'article 2061, que les corrections nécessaires pour réduire ces quatre observations au centre de la terre, étoient de $-6' 19'' 7$, & $+2' 46'' 2$ pour Stokolm; $-6' 23'' 6$, & $+4' 29'' 4$ pour Tobolsk; par ce moyen, la durée se trouve $5^h 59' 46'' 9$ par les observations de Stokolm, & $5^h 59' 45'' 5$ par celles de Tobolsk. Il y a $1'' 4$ de différence dans cette supposition; en sorte que pour trouver exactement la même durée, il faut employer

Parallaxe
déduite de
l'observation
de M. Chappe,
 $10'' \frac{1}{2}$.

employer $10'' 4$ pour la parallaxe du soleil, en supposant ces 4 observations rigoureusement exactes; cependant nous verrons bientôt que cette parallaxe est un peu trop grande (2149). La différence des méridiens qui résulte de cette détermination est de $4^h 24' 23''$ entre Paris & Tobolsk; (Voyez les *Mém. de l'ac.* 1761, p. 112 & 485).

Ces deux observations seroient décisives si la distance des lieux eût été plus grande; mais il faut considérer que l'effet de la parallaxe ayant été presque le même sur l'entrée, & seulement de $1' 43''$ plus grand à Tobolsk pour la sortie, $5''$ d'erreur sur l'instans de chacune des observations de la sortie, c'est-à-dire, $10''$ de différence entre les temps vrais de ces observations & ceux qu'on a pris pour tels changeroient la parallaxe d'une seconde.

2144. La durée observée d'un côté à Upsal, par M. Bergman, de l'autre à Cajanebourg, par M. Planman, ne donne que $9''$ pour la parallaxe quand on les compare avec la durée observée à Tobolsk, (*Mém. acad.* 1761, pag. 458); mais comme les différences entre les durées observées n'alloient pas à $2'$ de temps, il restoit toujours à cet égard un petit degré d'incertitude.

M. Pingré observa le contact intérieur à $0^h 36' 49''$, à l'Isle Rodrigues, située par $19^{\circ} 40' 40''$ de latitude méridionale. Il détermina par quelques observations de la lune & des satellites la différence des méridiens entre Paris & l'Isle Rodrigues $4^h 3' 26''$: ainsi la différence des temps observés a été de $4' 58''$ plus grande que celle des méridiens. Cette différence devoit être de $4' 33'' 56$ seulement, en supposant la parallaxe de $10''$; d'où M. Pingré conclut que la parallaxe horizontale du soleil, dans ses moyennes distances, est de $10'' 18$, (*Mém. acad.* 1761, pag. 482).

Observation de M. Pingré, $10''$ un cinquième.

2145. Enfin M. Mason ayant déterminé au Cap de Bonne-Espérance le contact intérieur à $9^h 39' 52''$, si l'on suppose la différence des méridiens entre Paris & le Cap de $1^h 4' 17''$, on trouvera pour Paris $8^h 35' 35''$, au lieu de $8^h 28' 25''$: ainsi la différence des temps observés est de $7' 10''$; on trouve par la méthode de l'art.

Observation de M. Mason, $8' \frac{1}{2}$.

2061 qu'elle feroit de $8' 17'' 2$, en supposant la parallaxe du soleil de $10''$; d'où il suit que cette parallaxe ne doit être supposée que de $8'' 6$, pour concilier ces observations.

Longitude
du Cap.

La longitude du Cap doit être regardée comme bien connue; car M. de la Caille la trouvoit $1^h 4' 18'' \frac{1}{2}$, par ses observations, (*Mém. acad.* 1761, pag. 11); & M. Short la trouvoit $1^h 4' 13''$, par quatre observations de M. Mafon, très-bien d'accord entre elles & faites avec d'excellens télescopes de même longueur, mais il l'a augmentée ensuite jusqu'à $1^h 4' 19''$, (*Phil. transf.* 1763, pag. 321); ainsi l'on doit regarder, ce me semble, l'observation du Cap comme très-concluante; d'ailleurs M. Short par un grand nombre de comparaisons trouvoit la parallaxe de $8'' 56$. (*Philos. transf.* 1762, pag. 621 & 1763, pag. 340), ce qui donne pour la moyenne $8'' 7$.

Observations
faites en 1769.

2146. Au milieu de ces incertitudes nous attendimes le passage de 1769; il étoit encore plus important que celui de 1761, parce que l'effet de la parallaxe y devoit être plus sensible, en supposant que l'observation fût faite dans les points les plus favorables, tels que la mer du sud, la Californie, & les parties les plus septentrionales de l'Europe. Aussi tous les Princes qui aiment & qui favorisent les sciences, firent pour cette observation des dépenses & des préparatifs immenses.

M. le Gentil étoit resté aux Indes depuis le passage de 1761, pour y attendre celui de 1769. D'un autre côté l'académie n'ayant pu obtenir de la Cour d'Espagne des facilités pour un voyage dans la mer du sud, M. l'Abbé Chappe partit pour la Californie, avec deux Officiers Espagnols, le 29 Décembre 1768 (a); j'étois destiné pour l'Isle de S. Domingue, où il s'agissoit aussi d'aller vérifier les montres marines de M. Berthoud, commission dans laquelle M. Pingré voulut bien me remplacer, mais sa santé ne m'ayant pas permis de l'exécuter. M. Véron fut chargé d'aller faire le tour du monde sur le vaisseau commandé par M. de Bougainville, avec M. Commerson, habile naturaliste, pour revenir aux Indes, où M. Véron

(a) Il est mort à S. Joseph près le Cap S. Lucas, le 3 Août 1769.

espéroit aussi faire l'observation du passage de Vénus; mais il n'a pu y parvenir; le P. Christophe, Capucin, se chargea de la faire à la Martinique, & il y réussit.

La société royale de Londres, sous la protection du Roi d'Angleterre, envoya M. Dymond & M. Wales dans l'Amérique septentrionale; M. Green dans la mer du sud, sur un vaisseau commandé par le Capitaine James Cook; & M. Call à Madras, aux Indes; il y avoit d'ailleurs plusieurs personnes qui étoient déjà à portée de faire cette observation dans divers endroits des colonies Angloises; savoir, M. Wintrop, à Cambridge; M. Smith, à Norriton en Pensilvanie; M. Wright, à l'Isle Coudre, près de Québec; M. le Capitaine Helland, près du Fort S. Louis, & d'autres observateurs à Philadelphie & aux environs.

L'académie de Pétersbourg, par ordre de l'Impératrice de Russie, attira des astronomes de Genève & d'Allemagne, & fit faire à Londres & à Paris un grand nombre d'instrumens; elle envoya des observateurs dans trois endroits de la Laponie Russe; savoir, M. Rumowsky, à Kola, lat. 69° , long. $50^{\circ}\frac{1}{2}$; M. Pictet, de Genève, à Oumba, lat. 67° , long. 52° ; M. Mallet, de Genève, à Ponoï, lat. 67° , long. 59° : on envoya le Capitaine Islenief, dans la Russie Asiatique, à Yakoutsk, sur la Lena, lat. 62° , long. $147^{\circ}\frac{1}{2}$ environ; d'autres astronomes allèrent du côté de la mer Caspienne, dans le gouvernement d'Astracan; M. Lowitz, à Gurief, lat. 47° , long. 70° ; M. Kraft, à Orenbourg, lat. 52° , long. 73° ; & M. Christ. Euler, à *Orsk*, lat. 51° , long. 76° . Chacun de ces observateurs étoit bien accompagné, & muni de toutes les choses nécessaires pour le succès de sa mission. J'étois sur le point d'aller moi-même à Saint Pétersbourg, lorsqu'ayant appris que l'Electeur Palatin vouloit bien contribuer à ces observations, en laissant voyager le P. Mayer son astronome, je me reposai sur lui de cette commission. Le P. Mayer partit de Manheim pour aller à Pétersbourg, où il fit l'observation, avec M. Albert Euler, M. Stahl & M. Kotelnikoff qui y étoient déjà: toutes ces observations ont été imprimées successive-

ment en Russie, & elles feront encore inférées dans le XIV^e volume des mémoires de l'académie de Pétersbourg.

Le Roi de Dannemarck demanda le P. Hell, astronome de L. M. Impériales, pour faire l'observation à l'Isle *Whardus* ou Wardoë, extrémité septentrionale de notre continent. Ces observations ont été imprimées à Copenhague, & nous les avons reçues au commencement de Mars 1770.

Parmi les astronomes Suédois, nous avons pour observateurs à *Stokolm*, M. Wargentini, M. Ferner & M. Wilcke; à *Upsal*, M. Mélander, M. Prospérin, M. Bergman, M. Salénus & M. Stromer; à *Pello*, M. Mallet; à *Torneo*, M. Hellant; à *Cajanebourg*, M. Planman; à *Gripfswald*, en Poméranie, M. Mayer.

En France l'observation fut faite à Paris, à la Meute; à Colombes, à Saron, à S. Hubert, à Laon, à Calais, à Montreuil, à Caen, à Rouen, au Havre, à Brest, à Kergais, à Bordeaux, à Bayonne, à Toulouse. Les astronomes Anglois l'ont faite à Londres, à Greenwich, à Oxford, à Shirburn, à Edimbourg; à Cavan & à Londonderry, en Irlande; au Cap-Lizard, & à Gibraltar; on l'a faite aussi à Cadix, à Porto en Portugal, &c. mais il me suffit de parler ici des observations que j'ai calculées, & dont je puis tirer des conséquences.

2147. L'empressement que j'avois de savoir le résultat de tant de préparatifs, fut secondé par M. Maskelyne, astronome royal d'Angleterre; par M. Albert Euler, secrétaire de l'académie Impériale de Pétersbourg; & M. Wargentini, secrétaire de l'académie royale de Suede: ils m'envoyèrent sans délai, toutes les observations qu'ils reçurent, & dès la fin de l'année 1769, je fus en état de comparer des observations assez éloignées, pour pouvoir en conclure avec une précision suffisante, la distance du soleil à la terre; ce résultat fut publié dans la Gazette de France du 10 Janvier. Parmi les observations faite dans l'Amérique septentrionale; celle de la Baie d'Hudson étoit la plus complete, de même que celle de Cajanebourg.

MM. Dymond & Wales ayant été envoyés dans le nord de l'Amérique septentrionale, avoient choisi leur station au Fort du Prince de Galles, sur la côte occidentale de la Baie d'Hudson, près de la rivière Churchill, à $58^{\circ} 47' 30''$ de latitude septentrionale, $6^{\text{h}} 26' 23''$ à l'occident de Paris, dans un endroit, par conséquent où l'on devoit voir l'entrée & la sortie de Vénus; ils observèrent, en effet, le contact intérieur de l'entrée à $1^{\text{h}} 15' 23''$, & le contact intérieur de la sortie à $7^{\text{h}} 0' 47'' \frac{1}{2}$; j'ai pris un milieu entre deux résultats qui ne différoient que de $3''$, ces observations furent faites avec des télescopes de M. Short de deux pieds de foyer.

Observation
faite à la Baie
d'Hudson.

Le calcul de cette observation est donc indépendant de la longitude du lieu, avantage considérable à cause de l'incertitude qu'il est si difficile de lever dans les observations de longitude; pour profiter de tout l'avantage de cette observation d'Amérique, il falloit la comparer à une autre qui fût également complète dans notre continent; je n'avois pas encore reçu celle du P. Hell, qui ne nous est parvenue qu'au mois de Mars; je choisiss celle de M. Planman, faite à Cajanebourg dans la Finlande, Province de Suede, qui avoit la plus grande authenticité, nous ayant été envoyée aussi-tôt après le jour de l'observation. M. Planman avoit aussi observée la durée du passage; savoir le contact intérieur de l'entrée à $9^{\text{h}} 20' 45'' \frac{1}{2}$, & seulement le contact extérieur de la sortie à $13^{\text{h}} 32' 27''$ de temps vrai, sous une latitude de $64^{\circ} 13' 30''$, & $1^{\text{h}} 41' 42''$ à l'orient de Paris.

Observation
faite à Cajanebourg.

Si la parallaxe du soleil est bien connue, & si elle est de $9''$, comme je l'ai supposée dans la première édition de cette astronomie, il faut qu'en supposant cette parallaxe, & réduisant les quatre observations au centre de la terre, la durée du passage entre deux contacts intérieurs soit parfaitement la même. Si cette durée est plus petite à Cajanebourg, où l'effet de la parallaxe faisoit paroître la durée plus longue qu'au Fort du Prince de Galles, c'est une preuve que la parallaxe employée dans le calcul est trop forte; mais en supposant $9'' 04$ pour la paral-

laxe de ce jour-là, j'ai concilié si bien les quatre observations que j'ai trouvé la même durée pour les deux stations de Cajanebourg & de la Baie d'Hudson, à un tiers de seconde près, ce qui est absolument insensible. En augmentant de $0'' 15$ la parallaxe on a une durée moindre de $6'' 7$ pour Cajanebourg, que pour le Fort; ce qui fait voir qu'il faut mettre dans le calcul une très-grande précision, & dans les données une grande exactitude, si l'on veut avoir rigoureusement l'effet des parallaxes; j'ai donc été obligé de recommencer plusieurs fois ces opérations, je ne rapporterai ici que le résultat de la dernière, avec la méthode que j'y ai employée. Soit C le centre du soleil (*fig. 134*), MV l'orbite de Vénus vue du centre de la terre, D le lieu apparent de Vénus au moment du contact intérieur observé; VD la parallaxe de hauteur dans le vertical ZVD ; j'ai calculé d'abord à peu-près le temps où Vénus avoit été réellement en M , & en V pour le lieu de l'observateur; avec l'angle ECV ou CVZ ; CV étoit alors égale à la différence des demi-diamètres du soleil & de Vénus, que je suppose ici de $917''\frac{1}{2}$ ou à la somme $976''\frac{1}{2}$, plus ou moins l'accourcissement ou l'allongement produit par la parallaxe; mais CD étoit par-tout égale à la différence ou à la somme des demi-diamètres, je m'en suis servi pour calculer la différence apparente de déclinaison, & la différence d'ascension droite, ou la différence des angles horaires de Vénus & du soleil. Ayant ainsi pour chaque observation l'angle horaire & la déclinaison de Vénus, j'ai calculé sa hauteur, l'angle parallactique, & la parallaxe de hauteur; je pourrois ne supposer ici la hauteur vraie diminuée que par la différence des parallaxes de Vénus & du soleil; mais pour plus d'exactitude, il faut en ôter la parallaxe de hauteur du soleil, pour avoir la hauteur apparente de Vénus, par laquelle on trouve la différence des parallaxes de Vénus & du soleil plus exactement; connoissant aussi à peu-près le temps que Vénus a mis à aller de M en V , j'en ai conclu l'arc MV , l'angle MCV , l'angle ECV , que je suppose égal à CVZ , puisque CE n'est

Fig. 134.

pas le vertical du soleil, mais une parallèle au vertical de Vénus ZVD .

Fig. 134.

Dans le triangle CVD connoissant l'angle V , le côté VD qui est la différence des parallaxes de hauteur, & le côté CD qui est la différence ou la somme des demi-diamètres, j'en ai conclu l'angle DCV , dans lequel il faut employer jusqu'aux dixièmes de secondes; ensuite l'angle CDV qui est la différence ou la somme de l'angle V & de l'angle C , & ensuite le côté CV distance vraie de Vénus au centre du soleil. Dans le triangle CMV , l'on connoît la plus courte distance CM , qui par mes premiers caculs se trouvoit de $609''$, 693 , & CV que l'on vient de trouver, on cherche MV qui réduit en temps à raison de $4' 0'' 115$ par heure, donne la distance de Vénus depuis le milieu M du passage. Mais avec la même valeur de CM & la distance des centres CX égale à la différence des demi-diamètres du soleil & de Vénus, supposés ici de $15' 43'' 55$ (2159) & $29'' \frac{1}{2}$ (2157), on trouve $2^h 50' 8'' 1$ pour la distance XM vue du centre de la terre, qui diffère de la précédente, de la quantité VX qui est l'effet cherché de la parallaxe le long de l'orbite. Si au lieu de la différence des demi-diamètres, on emploie leur somme, on trouvera $3^h 9' 28'' 0$ pour la distance entre le contact extérieur & le milieu du passage. Voici le détail des quantités que j'ai trouvées, dans lequel il faut observer que la situation du vertical est orientale ou à gauche du cercle de déclinaison pour l'entrée, soit à Cajanebourg, soit à la Baie d'Hudson, & même pour la sortie dans ce dernier endroit, mais que le vertical est plus occidental ou plus à droite du côté du nord, que le cercle de déclinaison PC , dans la sortie de Cajanebourg, parce que la sortie de Vénus y est arrivée le matin.

Éléments du calcul des Parallaxes dans les observations de Cajanebourg & de la Baie-d'Hudson.

- Temps vrai des 4 observ. sous leurs méridiens respectifs. • •
- Milieu du passage à peu-près connu. • • • • •
- Distance de l'observation au milieu du passage. • • • • •
- Ang. *CVM* fig. 134. formé par la perp. *CM* & le ray. du lieu *V*. • •
- Ang. *DCM* formé par la perp. *CM* & le rayon du lieu app. • •
- Différence appar. d'ascens. droite entre Vénus & le Soleil. • •
- Différence de déclinaison à ajouter à celle du Soleil. • • • •
- Angle horaire de Vénus. • • • • •
- Distance de Vénus au pôle du Monde. • • • • •
- Hauteur apparente de Vénus. • • • • •
- Parall. de Vénus au Soleil, en supposant $9^{\circ} 04'$ pour le Soleil. • •
- Angle de position pour Vénus. • • • • •
- Som. de l'ang. de position & de l'inclin. de l'orb. $8^{\circ} 28' 59''$. • •
- Angle parallactique du cercle horaire avec le vertical de Vénus. • •
- Ang. *V* qui est la som. ou la diff. des angl. préc. & de l'ang. *DCV*. • •
- Angle *D* formé par le vertical & le rayon apparent *CD*. • • • •
- Distance apparente *CD*. • • • • •
- Distance vraie des centres de Vénus & du Soleil, ou *CV*. • •
- Temps correspondant ou distance *MV* au milieu du passage. • •
- Distance vraie vue du centre de la terre ou valeur de *MX*. • •
- Eff. de la parall. en tems. en sup. la parall. horis. du Sol. $9^{\circ} 04'$. • •
- Temps des 4 observations réduits au centre de la terre. • • • •

FORT-DU-PRINCE
58° 47' 30''

H. M. S.	H. M. S.	H. M. S.
1 15 23	7 0 47,5	
4 10 0	4 10 0	
2 54 37	2 50 47,5	
48° 39 27	48° 1 34	
48 55 27	49 23 49	
— 9 8	+ 15 0	
— 12 46	6 29	
18 41 37	105 26 52,5	
67 21 27	67 26 3	
51 27 59	11 34 45	
14 159	22 265	
7 1 57	7 6 28	
15 30 56	15 34 27	
15 27 42	30 39 5	
17 40 49	94 15 6	
17 56 59,5	84 21 22,3	
913,95	913,95	
927,43	912,03	
2 54 37,6	2 49 29,4	
2 50 8,1	2 50 8,1	
+ 4 29,5	- 7 0 38,7	
1 19 52,5	7 0 38,8	

CAJANEBOURG
64° 13' 30''

H. M. S.	H. M. S.	H. M. S.
9 20 45,5	15 32 27	
12 18 3	12 18 3	
2 57 17,5	3 14 24	
49° 5 16	51° 40 51	
49 30 20	52 38 6	
— 9 16	— 16 22	
— 12 41	6 3	
140 2 6,5	126 36 53	
67 21 32	67 26 22	
2 14 11	6 4 53	
22 711	22 605	
7 1 56	7 5 43	
15 30 55	15 34 42	
16 13 53	20 32 57	
17 20 28	46 42 36	
17 45 55,7	47 40 43,7	
913,95	972,95	
935,60	988,30	
2 57 19,9	3 14 21,8	
2 50 8,1	3 9 28,0	
+ 7 11,8	- 4 53,6	
9 27 57,3	15 27 33,2	

2 1 48. Le milieu entre les deux phases réduites au centre de la terre, pour le Fort-du-Prince, ou le milieu du passage est $4^h 10' 0'' 6$. A l'égard des phases de Cajanebourg, les deux distances observées n'étant pas les mêmes, il faut résoudre

résoudre un triangle dans lequel on connoît deux côtés $913''95$ & $972''95$ avec l'arc parcouru en $5^h 59' 35''9$ de temps, qui est $1439''08$; on trouve les deux segmens $680''86$ & $758''22$, qui réduits en temps donnent $3^h 9' 28''0$, & $2^h 50' 8''1$, d'où l'on conclut le milieu $12^h 18' 5''4$; mais le milieu, pour le fort est $4^h 10' 39''3$, la différence de longitude de ces deux villes seroit de $8^h 7' 26''$. Mais la demi-durée $2^h 50' 8''1$, étant plus petite de $38''5$ que celle qu'on tire de l'observ. du fort, il s'ensuit qu'il faut diminuer la parall. de $1''31$, & quelle étoit ce jour-là de $7''73$, ce qui donne pour la parall. moy. $7''86$; en adoptant ces deux obs. le milieu du passage se trouve à $4^h 10' 17''$ & $12^h 17' 59''$.

Parallaxe de $8''$.

2149. M. Ingré observa l'entrée de Vénus au Cap-François à $2^h 44' 44''\frac{1}{2}$, $4^h 58' 40''$ à l'occ. de Paris ; ayant calculé son observ. de même que celle de M. Wintrop, à Cambridge, $4^h 53' 59''$ à l'occ. de Paris, il trouve la parall. moy. $9''3$; en comparant l'obs. de Wardhus avec celle de la Baie d'Hudson, il trouve $9''27$; par les observations de Stokolm, de Pétersbourg, & de la Baie d'Hudson $9''3$.

Autres observations.

Parmi les observateurs qui attendoient le passage de Vénus, il y en a plusieurs qui n'ont pu l'observer, tels sont M. le Gentil, à Pondichery ; M. Call, à Madras ; M. Pictet, à Oumba en Laponie ; M. Helland, à Torneo ; M. Mallet, Suédois, à Pello ; M. Rome, à Rochefort ; le P. Béraud, à Lyon ; & il y en a plusieurs aussi dont les observ. ont été incomplettes. Mais M. l'abbé Chappe qui étoit à S. Joseph en Californie à $23^{\circ} 3' 37''$ de latitude, observa le premier contact intérieur à $0^h 17' 27''$ & le second contact à $5^h 54' 50''3$; cette observation comparée avec celle de Wardhus me donne $8''80$ pour la parallaxe moyenne : je trouve $8''36$ par Cajanebourg & S. Joseph, $8''54$ par S. Joseph & le Fort du Prince ; enfin je trouve $9''07$ par l'observation de Wardhus & celle du Fort du Prince de Galles. Tout cela fait voir que la parallaxe moyenne approche beaucoup de $9''$; il semble qu'on peut s'en tenir à $8''\frac{3}{4}$. Nous n'attendons plus, pour confirmer ce résultat, qu'une observation faite dans la mer du Sud ; mais qui ne nous est point encore parvenue (Juillet 1771).

2 I 5 0. Après cette observation des contacts intérieurs, les résultats les plus importants des passages de Vénus sont la conjonction & la latitude : on a vu ci-dessus la manière de trouver par chaque obs. faite au quart-de-cercle ou au micromètre, la différence de long. & de latit. entre Vénus & le Soleil (2129, 2138). La différ. de long. de Vénus au moment de l'obs. que nous avons trouvée de $2'34''$ (2129), ou plus exactement $2'34''4$, nous fera trouver le moment de la conjonction, en nous servant du mouvement hor. sur l'écliptique $3'57''4$ (2058); nous ferons donc cette proportion $3'57''4 : 60'0'' :: 2'34''4 : 39'1''$ de temps, qu'il faut ôter de l'heure de l'observation $6^h 31'46''$ (2125), parce que la conjonction étoit passée, & l'on aura $5^h 52'45''$ pour l'heure de la conjonction qui résulte de cette observation; il suffit d'ajouter le logar. constant 1,180822 au logar. de la différence de longitude sur l'écliptique, pour avoir celui du temps en secondes.

Heure de la conjonction.

2 I 5 1. On cherchera aussi la latit. de Vénus pour ce moment, par le moyen du mouvement hor. en latitude, que l'on fait être de $35''4$ (2058), en disant; $60'0'' : 35''4 :: 39'1'' : 23''$; on ôtera ces $23''$ (qui sont le mouvement en latitude) de la différence trouvée pour le moment de l'obs. $10'1''2$ (2129), & l'on aura enfin $9'38''2$ pour la latit. de Vénus au moment de la conjonction; c'est le second élément que nous avons à trouver : il faut en ôter $6''3$ pour avoir la plus courte distance des centres, comme il est aisé de s'en assurer par la méthode de l'art. 2052; ainsi la plus courte distance étoit de $9'32''$, par cette observation; le milieu entre un grand nombre d'autres m'a donné $9'30''$, & le milieu du passage $5^h 30'10''$ (2135).

Latitude en conjonction.

2 I 5 2. Je suis surpris que les astronomes n'aient pas encore remarqué l'avantage qu'il y avoit à déduire ainsi de chaque observation, soit le temps de la conjonction, soit la latitude pour ce temps-là. Les plus célèbres astronomes ont cru qu'il falloit comparer deux observations entre elles, pour déterminer le temps de la conjonction, le mouvement en longitude & en latitude, & l'inclinaison de l'orbite; ils n'ont pas fait attention que le mouvement

horaire & l'inclinaison sont donnés par les tables, dix fois plus exactement qu'on ne peut les déduire de deux observations de cette espèce, & qu'ils perdroient ainsi tout l'avantage que le grand nombre d'observations doit procurer, celui d'avoir un grand nombre de fois le résultat essentiel pour la théorie de Vénus. En suivant la méthode que je viens d'expliquer, on trouve le temps de la conjonction autant de fois que l'on a d'observations; on est en état de prendre un milieu entre beaucoup de résultats, de distinguer les observations défectueuses, & de les discuter toutes avec très-peu de calcul.

2153. C'est ainsi que j'ai calculé une multitude d'observations faites pendant la durée de ce passage, à Paris, à Béziers, à Gottingen, &c; elles m'ont donné 9' 30" à peu-près pour la plus courte distance des centres; M. de Thury la trouva de 9' 30" à Vienne en Autriche, (*Mém. acad.* 1761, pag. 411); M. Pingré, de 9' 33", (*Ibid.* pag. 466), mais il la diminue de 3" pour le cas où la différence des demi-diamètres ne seroit que de $917\frac{1}{2}$: or c'est en effet la quantité que l'on devoit supposer, comme on le verra par les diamètres du Soleil & de Vénus, que j'ai déterminés; (1388, 2157), il faudroit même diminuer encore la perpendiculaire de $5''\frac{1}{2}$ à cause de la diminution du diamètre du soleil (2159).

La plus courte distance des centres, en 1761.

2154. Les observations faites pendant la durée du passage, par l'une des trois méthodes que j'ai données, (2116 & suiv.) doivent toujours se réduire à trouver un grand nombre de fois le temps de la conjonction, qui dans le passage de 1761 est arrivé à 5^h 51' de temps vrai, & la latitude pour cet instant de la conjonction, qui a été trouvée de 9' 36", (2135, 2151); cette latitude géocentrique observée doit se réduire au soleil, lorsqu'on veut en déduire le lieu du nœud; pour cela on fait cette proportion: la distance de Vénus au soleil est à sa distance à la terre, comme la latitude géocentrique est à la latitude héliocentrique. Ainsi la latitude en 1761 ayant été trouvée de 9' 36" au moment de la conjonction (2135), & le rap-

Temps de la conjonction.

652 ASTRONOMIE, Liv. XI.

Latitude héliocentrique.
Fig. 125.

port des distances étant celui de 28903 à 72643, (2045); on trouve $3' 49'' 3$ pour la latitude héliocentrique CV (fig. 125).

Lieu du nœud.

Pour en conclure la distance de Vénus à son nœud, il suffit de résoudre le triangle CVN rectangle en C , & qui est sensiblement rectiligne, en disant: la tangente de l'inclinaison vraie, $3^{\circ} 23' 20''$, est au rayon, comme le côté CV de $3' 49'' 3$ est au côté CN qui se trouvera de $1^{\circ} 4' 40''$, c'est l'arc de l'écliptique vu du soleil, & compris entre le nœud N de Vénus & le point C de la conjonction. Cet arc retranché du lieu du soleil au moment de la conjonction $2^{\text{s}} 15^{\circ} 36' 10''$, donnera le lieu du nœud de Vénus $2^{\text{s}} 14^{\circ} 31' 41''$; peu différent de celui dont j'ai fait usage ci dessus, (1339); on trouve $2^{\text{s}} 14^{\circ} 32' 6''$ en diminuant de $7''$ le diamètre du soleil (2159).

On trouveroit le même résultat avec la latitude géocentrique observée $9' 36'' 3$, & l'inclinaison relative vue de la terre $8^{\circ} 28' 47''$; mais de l'une ou de l'autre manière, l'opération précédente se réduit sommairement à ajouter le logarithme constant 082731 avec celui de la latitude géocentrique observée $9' 36''$, & l'on a le logarithme de la distance au nœud, qu'on ajoute avec la longitude de Vénus au temps de la conjonction, qui est l'opposite de celle du soleil, ou qu'on en retranche, suivant que la conjonction est arrivée avant ou après le passage au nœud; en 1761 elle étoit soustractive; en 1769 additive.

Résultat pour 1769.

2155. En 1769 le contact intérieur fut observé à Paris à $7^{\text{h}} 38' 45''$, l'effet de la parallaxe étoit de $7' 30''$; ainsi le contact intérieur vu du centre de la terre, arriva à $7^{\text{h}} 46' 15''$; la demi-durée du passage intérieur étoit de $2^{\text{h}} 50' 8''$ (2148), ainsi le milieu du passage est $10^{\text{h}} 36' 23''$, & ôtant $22' 43'' \frac{1}{2}$, on a la conjonction $10^{\text{h}} 13' 39'' \frac{1}{2}$ temps vrai, ou $10^{\text{h}} 11' 26'' \frac{1}{2}$ temps moyen. La durée vue du centre de la terre nous donne l'arc parcouru sur le soleil; & par conséquent la plus courte distance $10' 9'' 69$; d'où je tire la latitude $10' 16''$, & la distance de Vénus au nœud $1^{\circ} 9' 0''$, qui ajoutée au lieu du soleil $2^{\text{s}} 13^{\circ}$

27' 19" au moment de la conjonction donne le lieu du nœud ascendant de Vénus 2^s 14° 36' 20" pour le 3 Juin 1769 ; en négligeant l'aberration.

C'est une chose singulière que cette méthode, si naturelle & si simple, de trouver le nœud de Vénus ou de Mercure par observation, n'ait point été employée par les astronomes qui ont calculé ces passages ; la plupart se sont servi d'opérations compliquées qui quelquefois les ont jettés dans l'erreur ; je pourrois en citer plusieurs exemples.

2156. Les réductions & le calcul des observations que nous venons de discuter, suppose qu'on connoisse la parallaxe, par la méthode expliquée ci-devant (2147) ; mais on pourroit encore choisir des observations par lesquelles on éviteroit l'effet de la parallaxe. M. le Monnier considère, par exemple, qu'en 1769, elle étoit presque nulle en latitude pour S. Domingue, & en longitude pour Ponoï, de sorte qu'en combinant ces deux observations ensemble, on peut avoir complètement le vrai lieu de Vénus sans connoître la parallaxe ; mais elle est trop bien déterminée pour qu'on puisse craindre actuellement d'en faire usage dans les calculs.

2157. LE DIAMÈTRE de Vénus mesuré sur le soleil par M. de la Caille avec un bon micromètre, en 1761, s'est trouvé de 59", (*Mém. ac. 1761, p. 80*) ; suivant le P. la Grange à Marseille 58"4 ; d'autres observateurs l'ont trouvé un peu plus petit, ou un peu plus grand de quelques secondes. Mais la meilleure maniere de le déterminer exactement, est d'y employer le temps qu'il a mis à quitter le soleil ; car chaque seconde du diamètre de Vénus emploie 19" de temps à sortir du soleil ; & comme on ne se trompe pas de 5" sur la durée de la sortie, cette durée doit faire trouver, à un quart de seconde près, le vrai diamètre de cette planète.

Lorsque le dernier bord de Vénus touche le bord extérieur du soleil en *E*, (*fig. 137*), Vénus est au point *F* de son orbite, & la distance *CF* des centres de Vénus & du soleil est égale à la somme des demi-diamètres de

Trouver le diamètre de Vénus.

Fig. 137

Fig. 137.

Vénus & du soleil ; au contraire dans le contact intérieur Vénus est en D , & la distance des centres est égale à la différence des demi-diamètres ; on connoît la plus courte distance CB (2153) ; ainsi en résolvant séparément les deux triangles CBD , CBF , on trouvera les portions BD & BF de l'orbite de Vénus, dont la différence DF étant réduite en temps, nous donnera le temps que le diamètre de Vénus devoit employer à sortir, vu du centre de la terre ; mais la durée de la sortie n'est point la même vue de la surface de la terre.

Il faut donc connoître aussi la quantité dont la parallaxe fait varier cette durée de la sortie, pour le lieu de l'observation ; quand on se tromperoit de quelque chose sur la parallaxe, l'erreur seroit insensible dans l'espace de 18' de temps ; ainsi l'on peut calculer, comme dans l'art. 2061, l'effet de la parallaxe sur le

Fig. 134.

temps de chacun des deux contacts : je trouve en supposant les demi-diamètres $15' 43''$, & $29''$ que l'intervalle MV est de $3^h 16' 5''$, celui qui répond à MX de $3^h 16' 48''$; la différence entre ces intervalles de temps & ceux que l'on trouveroit pour le contact intérieur, vu de Paris & du centre de la terre, $2^h 57' 39''$, & $2^h 58' 36''$ (2065), fait voir que la durée de la sortie du diamètre de Vénus étoit de $18' 12''$ pour le centre de la terre, & $18' 26''$ pour Paris, en supposant le demi-diamètre de $29''$. Or, par mon observation cette durée s'est trouvée de $18' 25''$: on fera donc cette proportion ;

Diamètre de Vénus.

$18' 26''$: $0' 58''$:: $18' 25''$: $57'' 9$; c'est le diamètre de Vénus conclu de la durée de sa sortie, en 1761. On pourroit faire un semblable calcul par les observations de 1769.

2158. Au moyen des distances données ci-dessus, entre Vénus, la terre & le soleil, (2045), on trouve que si Vénus eût été à la même distance que le soleil, son diamètre eût paru de $16'' \frac{1}{2}$, le jour du passage de 1761 ; or, si la parallaxe du soleil est de $9''$, le diamètre de la terre, vu à la même distance, est de $18''$, donc le diamètre de Vénus est à celui de la terre, comme $16 \frac{1}{2}$

est à 18 ; d'où il suit que le volume de Vénus est à celui de la terre, comme 77 est à 100 : ce seroit aussi le rapport de leurs masses, de leurs poids ou de leurs quantités de matière, si la densité de Vénus étoit égale à celle de la terre ; mais on verra qu'elle est probablement un peu plus grande (3410), ce qui me fait regarder la masse de Vénus comme étant à peu-près égale à celle de la terre ; ou plus exactement 1,01818 (1391, p. 158).

Grosseur de Vénus.

C'est par la même méthode que je déterminai en 1753 le diamètre de Mercure, tel que je l'ai inséré dans la table générale des diamètres des planètes (1391). Voyez les *Mém. de l'académie 1756, pag. 264.*

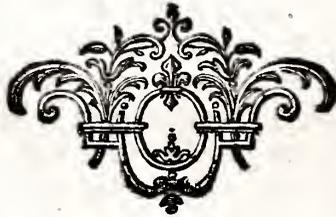
2159. On a vu que le diamètre du soleil doit paroître amplifié par le débordement de la lumière qui l'environne (1388), & que les meilleures lunettes ne dégagent pas tout-à-fait les bords du soleil de cette aberration : les passages de Mercure & de Vénus en donnent un indice très-fort : M. de l'Isle ayant examiné le passage de Mercure, arrivé en 1756, dans lequel l'orbite de Mercure passoit presque au centre du soleil, trouva que la durée du passage supposoit le diamètre du soleil d'environ 32' 4", tandis que, suivant moi, il auroit été de 32' 21" (*Mém. acad. 1758, pag. 145*). M. du Séjour a trouvé que pour concilier les observations de l'éclipse annulaire de 1764, il falloit diminuer aussi de quelques secondes le diamètre du soleil. Nous n'avons pas de passage de Vénus par le centre du soleil, mais puisque en 1761 Vénus a passé au midi du centre, & en 1769 au nord, nous pouvons, en comparant ces deux passages, en tirer une induction sur le diamètre du soleil. J'ai trouvé que le lieu du nœud conclu de ces deux passages par le moyen du diamètre du soleil que j'avois observé (1388), étoit différent de 1' 18", en tenant compte du mouvement de ce nœud en 8 ans : pour avoir le même lieu du nœud par les deux observations, il falloit que les distances au nœud fussent de 1° 4' 20" & 1° 8' 43", & que les plus courtes distances fussent de 9' 28" 3 & 10' 7". Pour trouver cette distance de 10' 7", par le moyen de la durée du passage, il faut supposer que le dia-

Diamètre du Soleil.

mètre du soleil soit plus petit d'environ 6'', ou de 15'43''7 dans le passage de 1769 ; c'est ce que j'ai fait voir dans un mémoire lu à l'académie , au commencement de 1770.

Phénomène
du contact.

Le contact de Vénus , avec le bord du soleil , est accompagné d'un phénomène qui paroît confirmer cette diminution ; on voit un point noir ou une espèce de ligament noir allongé qui unit les deux bords de Vénus & du soleil , lors même que leurs circonférences paroissent séparées (2141) ; il me semble que cela vient de l'irradiation qui environne le bord du soleil , & qui disparoît nécessairement dans un point , aussi-tôt que les bords réels se touchent ; en effet , l'expansion de lumière ne sauroit avoir lieu quand la cause primitive de cette lumière , c'est-à-dire, le bord effectif du soleil ne nous envoie plus de rayons ; il doit donc y avoir dans cette partie du bord apparent du soleil une cessation & une interruption subite de la lumière exorbitante ; & comme cette interruption n'a pas lieu dans les parties voisines du point de contact , il paroît dans ce point-là une gibbosité , ou un ligament noir , que grand nombre d'observateurs ont remarqué , comme je l'ai dit plus au long dans les mémoires de 1769. En conséquence de cette explication j'ai diminué le diamètre du soleil , dans les calculs les plus importants de ce XI^e Livre.



LIVRE DOUZIEME.

DES RÉFRACTIONS ASTRONOMIQUES.

2160. **L'**ATMOSPHERE ^(a), c'est-à-dire, la masse d'air qui environne la terre, affoiblit la lumière, la disperse, la décompose, & change sa direction. Il est prouvé par un grand nombre d'expériences qu'on trouve dans tous les livres d'optique, & par la théorie même de l'attraction, que les rayons de lumière qui entrent obliquement d'un milieu moins dense dans un milieu plus compact, changent de direction, & se rapprochent de la perpendiculaire, comme s'ils étoient plus fortement attirés par la matière la plus dense; ce changement des rayons de lumière est différent suivant l'obliquité du rayon, & les tables qui en contiennent l'effet, s'appellent *Tables de Réfractions*, ou *Tables Anaclastiques* ^(b).

2161. Soit ABD la surface de la terre, (*fig. 139*); EKG la surface extérieure de l'atmosphère qui environne la terre, & dont la densité est sensible jusqu'à quelques lieues de hauteur; A le lieu de l'observateur, & MK un rayon de lumière qui entre obliquement dans l'atmosphère en K ; ce rayon plié & courbé dans l'atmosphère, parvient au point A , comme s'il avoit suivi la ligne droite NKA ; l'œil reçoit l'impression de la lumière suivant la direction NKA du rayon qui arrive à l'œil en A ; l'observateur rapporte sur le rayon AKN l'astre qui est véritablement en M , en sorte que la réfraction fait paroître l'astre plus élevé de la quantité de l'angle NKM , que nous appellons la RÉFRACTION ASTRONOMIQUE.

De quelle manière se fait la réfraction.

Fig. 139.

Le rayon CKR étant perpendiculaire à la surface ré-

(a) Ἄτμος, Vapor, Σφαίρα, Globus.

(b) Ce mot vient de κλάω, frango.

fringente en K , on appelle ANGLE D'INCIDENCE l'angle MKR , que forme le rayon incident avec la perpendiculaire, avant la réfraction, & l'on appelle ANGLE DE RÉFRACTION, l'angle NKR , ou son égal AKC que forme ce rayon avec la même perpendiculaire, après la réfraction; les sinus de ces deux angles ont entre eux un rapport constant, qu'on appelle le *Rapport de Réfraction*, & que Newton suppose ici être de 3201 à 3200; aussi n'y a-t-il point de réfraction quand le rayon est perpendiculaire à la surface réfringente, car un des angles étant nul, l'autre s'évanouit nécessairement; d'ailleurs le rayon perpendiculaire a une surface plus dense, ne change pas de direction pour en être plus attiré, puisqu'il y arrive le plus directement possible, & par le plus court chemin. De là il suit que la réfraction se fait toujours dans un plan vertical; car le rayon rompu n'ayant de tendance que pour se rapprocher de la ligne verticale ou du zénit, ne déviara ni à droite ni à gauche, le rayon rompu fera dans le même plan que le rayon direct & la ligne du zénit; ainsi le lieu vrai & le lieu apparent feront dans le même vertical.

Auteurs qui
ont écrit sur
l'optique.

2162. On trouvera les loix, les propriétés & les effets de la réfraction, & ceux de la lumière, dans plusieurs livres d'optique, sur-tout dans celui qui a pour titre: *A compleat System of Optiks* by Robert SMITH. Cambridge, 1738, 2 vol. in-4°. Il y en a deux éditions Françoises d'Avignon & de Brest, données par le P. Pézenas & par M. le Roy. On peut consulter aussi l'optique de NEWTON, celle de M. BOUGUER, celle de M. DE COURTIVRON; la Dioptrique oculaire du P. d'ORLEANS, in-fol. 1671, KIRKER, *Ars magna Lucis & Umbra*; la Dioptrique d'HUYGENS, celles d'HARTSOEKER, de MOLINEUX, de DESCARTES; SCHOT, *Magia naturalis*; ZAHN, *Oculus fundamentalis artificialis*; RHEITA, *Oculus Enochii & Eliæ*; CRAIGE, *Optica analytica*, les leçons d'optique de M. DE LA CAILLE, de VOLF, &c.

2163. Les anciens connurent très-bien le phénomène des réfractions en général. Aristote dans un de ses pro-

blêmes parle de la courbure apparente d'une rame dans l'eau, & Archimède passe pour avoir écrit un traité sur la figure d'un cercle vu sous l'eau; on croyoit alors que les angles de réfraction étoient proportionnels aux angles d'incidence; Snellius & Descartes ont fait voir que la proportion n'avoit lieu qu'entre les sinus de ces angles.

La réfraction astronomique ne fut même pas inconnue à Ptolomée, quoiqu'il n'en ait pas fait usage dans ses calculs, (*Riccioli I, 642*); il dit sur la fin du VIII^e livre de l'Almageste, qu'il y a des différences dans le lever & le coucher des astres, qui dépendent des changemens de l'atmosphère: il en faisoit mention d'une manière plus détaillée dans son *Optique*, Ouvrage qui ne nous est pas parvenu, (*Montucla, Histoire des Mathématiques, I. 308. Roger Bacon, Specula Math. pag. 37*). Alhazen, Opticien Arabe du dixième siècle (393), qu'on soupçonne généralement d'avoir pris dans Ptolomée presque toute son optique, en parle décidément & fort au long, (*lib. VII. cap. 4, n^o. 15, pag. 251. edit. an. 1574*): il donne la manière de s'en assurer par l'expérience.

2164. Prenez, dit-il, un instrument composé avec des armilles qui tournent autour des poles (2274), mesurés la distance d'une étoile au pole du monde, lorsqu'elle passe près du zénit dans le méridien, & lorsqu'elle se lève près de l'horizon, vous trouverez la distance au pole plus petite dans ce dernier cas; Alhazen démontre ensuite que cela doit arriver par l'effet de la réfraction; il ne dit point, à la vérité, quelle est la quantité qui en résulte sur les observations; mais ce passage d'Alhazen fait voir de quelle manière on observa l'effet de la réfraction, & comment on parvint d'abord à le reconnoître. De même quand les anciens observoient l'équinoxe avec ces armilles, ils pouvoient l'apercevoir deux fois en un même jour, par l'effet des réfractions, (*Flamsteed, Prolegom. pag. 21*), cet effet pouvoit aussi se reconnoître facilement par les étoiles circompolaires; car si l'on observe deux étoiles, comme γ d'Andromède

Comment les Anciens ont aperçu la réfraction.

& l'étoile polaire, éloignées l'une de l'autre de 47° ; on trouvera leur distance plus grande d'un demi-degré, quand la première passera par le méridien, près du zénit, que quand elle passera sous le pôle, près de l'horizon; & toutes les distances des étoiles entre elles changeront ainsi plus ou moins.

2165. Snellius, en publiant les observations de Waltherus, remarqua (pag. 51) que ces observations étoient si exactes, qu'elles avoient appris à Waltherus l'augmentation de hauteur que cause la réfraction; mais Tycho fut le premier qui la détermina d'une manière à en dresser des tables: voici la manière dont il raconte lui-même cette découverte astronomique (*Progymn. pag. 15*).

Tycho en
donne des
tables.

2166. Il avoit déterminé avec un ou deux instrumens assez bien faits, la hauteur du pôle par les hauteurs supérieures & inférieures de l'étoile polaire (33), il la détermina aussi par les hauteurs du soleil dans les deux solstices (70), & il trouva la seconde plus petite de $4'$; il eut d'abord un soupçon sur la bonté de ses instrumens, il continua d'en faire construire jusqu'à dix de différentes grandeurs & de différentes formes, travaillés avec le plus grand soin, & il trouva toujours le même résultat; il ne pouvoit plus alors attribuer cette différence au défaut des observations; il pensa sérieusement à chercher une cause de ce phénomène, & il imagina enfin, qu'il provenoit d'une réfraction considérable que le soleil devoit éprouver au solstice d'hiver, n'étant élevé que de 11° pour lui. Cette explication étoit d'accord avec les démonstrations de l'optique, cependant il avoit peine à se persuader que cette réfraction fût assez considérable pour produire une si grande erreur; il jugeoit qu'il y avoit au moins $9'$ de réfraction (a) à la hauteur de 11° ; c'est pourquoi Tycho fit faire encore des armilles de dix pieds de diamètre, dont l'axe

(a) Il n'y en a réellement que $4\frac{3}{4}$, mais Tycho en augmentoit l'effet par la parallaxe du soleil qu'il supposoit de $2' 50''$ à cette hauteur (1726).

répondoit exactement au pôle du monde, & avec lesquelles il mesuroit la déclinaison des astres hors du méridien, il reconnut alors que, même en été, la réfraction, quoique insensible à la hauteur méridienne du soleil, devenoit sensible près de l'horizon, & que l'effet alloit à un demi-degré dans l'horizon.

2167. Tycho-Brahé crut que la réfraction du soleil devenoit nulle à 45° de hauteur, & celle des étoiles à 20° ; quoiqu'à cet hauteur elle soit de $2'\frac{1}{2}$; cette erreur subsista long-temps: le P. Riccioli, même en 1665, supposoit encore que les réfractions n'avoient plus lieu au-delà de 26° de hauteur, ou environ, qu'il n'y avoit que $29'$ de réfraction horizontale pour la lune en été, $30'$ pour le soleil, & $30' 27''$ pour les étoiles. *Astron. reform. Tabularum, pag. 47.*

2168. Ce fut M. Cassini qui vers l'an 1660, entreprit de former une nouvelle table de réfractions, en même temps que les nouvelles tables du soleil, qui représentèrent les observations avec une justesse beaucoup plus grande qu'on ne l'avoit fait avant lui (554, 1730). Mais pour éprouver la justesse de sa nouvelle table de réfractions, M. Cassini souhaita d'avoir des observations du soleil faites au zénit, où tout le monde convenoit qu'il n'y avoit point de réfractions, pour vérifier si les observations qui y seroient faites ne seroient pas beaucoup mieux représentées par ses nouvelles tables du soleil, que par les Tychoniciennes; car dès lors il n'y avoit plus de doute que les tables du soleil & celles des réfractions, ne fussent préférables aux Tychoniciennes, représentant mieux les observations faites, & dans les cas où il y a réfraction & dans ceux où il n'y en a point.

Louis XIV, & le grand Colbert, dont le zèle pour la gloire des sciences avoit déjà paru tant de fois, laissoient à l'académie le choix des entreprises: elle jugea qu'il n'y avoit point de lieu plus commode pour de pareilles observations que l'Isle de Cayenne qui est à 5° de l'équateur, & où la France envoyoit des vaisseaux plusieurs fois l'année. Les hauteurs méridiennes du soleil

Voyage de
Cayenne.

devoient être, en tout temps, exemptes de réfractions ; si cette réfraction étoit nulle au-dessus de 45° , car la plus petite hauteur du soleil y est de 61° . On y devoit donc trouver l'obliquité de l'écliptique, sans aucune diminution de réfractions, mais au contraire, augmentée par l'effet de la parallaxe du soleil dans les deux solstices ; ainsi dans les hypothèses Tychoniciennes, la distance des deux tropiques devoit se trouver à Cayenne de plus de $47^{\circ} 3'$, & selon M. Cassini qui diminueoit la parallaxe & supposoit de la réfraction, même dans les grandes hauteurs, cette distance ne devoit paroître à Cayenne que de $46^{\circ} 58'$; il y avoit donc entre ces hypothèses une différence de $5'$ qui pouvoit s'observer exactement à Cayenne, & décider à la fois ces trois objets ; la réfraction, la parallaxe & l'obliquité de l'écliptique. Ces seuls motifs étoient plus que suffisans pour faire entreprendre le voyage de Cayenne, & cependant il y avoit encore d'autres objets intéressans à constater, tels que la longueur du pendule, la parallaxe de la lune, de Mars & du soleil, la théorie de Mercure, & les longitudes géographiques, la position des étoiles australes, les marées, les variations du baromètre ; tels furent les motifs curieux du voyage qu'entreprit M. Richer (538, 546). Il partit de Paris au mois d'Octobre 1671, & il séjourna à Cayenne depuis le 22 Avril 1672, jusqu'à la fin de Mai 1673, accompagné du Sr. *Meurisse*, qu'on lui avoit donné pour l'aider dans ses observations ; elles furent publiés en 1679, & sont aussi rapportées dans le recueil d'observations que l'académie donna en 1693.

2169. Les choses arrivèrent à Cayenne à peu-près comme M. Cassini l'avoit prévu ; l'obliquité apparente de l'écliptique y parut de $23^{\circ} 28' 32''$, c'est-à-dire, beaucoup plus petite qu'elle ne devoit être, suivant Tycho-Brahé ; elle ne différa que de $5''$ de celle qu'il devoit y avoir ; en adoptant pour les réfractions, & pour la parallaxe du soleil, les tables de M. Cassini ; il n'eut d'autre conséquences à tirer des observations de Cayenne, si ce n'est que les élémens par lesquels il avoit représenté les

observations faites en Europe, représentoient avec la même justesse les observations faites en Amérique, ce que ne faisoient point, les élémens dont s'étoit servi Tycho-Brahé à l'égard de l'obliquité de l'écliptique, de la parallaxe du soleil & des réfractions astronomiques.

MÉTODES pour observer la quantité des Réfractions Astronomiques.

2170. APRÈS avoir tracé l'histoire de la réfraction, je passe aux méthodes qui ont été employées successivement pour l'observer. On a vu celle des déclinaisons (2164) : voici celle des hauteurs. La réfraction étant la différence entre la hauteur apparente & la hauteur vraie, il s'agit de pouvoir calculer celle-ci pour le moment où l'on a observé la première.

Méthodes
anciennes.

Lorsqu'on n'avoit pas l'usage des horloges, on employoit l'azimut ou l'angle Z (fig. 89), pour résoudre le triangle PZS , & trouver la véritable hauteur; l'angle Z ou PZS ne dépend point de la réfraction & n'en est point affecté, puisque le lieu vrai & le lieu apparent, sont dans un seul & même vertical ZS (2161), & par conséquent au même degré d'azimut; ainsi dans le triangle PZS , on connoîtra pour l'instant donné les côtés PZ & PS avec l'angle Z opposé à l'un d'eux; l'on trouvera par la trigonométrie sphérique, le troisième côté ZS , dont le complément est la hauteur vraie, qui comparée avec la hauteur apparente, observée en même temps que l'azimut, donne la quantité de la réfraction. (Tycho, *Progymn.* pag. 93). Cette méthode des azimuts n'est point usitée actuellement.

Fig. 89.

2171. Les hauteurs correspondantes du soleil, ou d'une étoile sont très-propres à faire connoître la quantité de la réfraction, si elles sont prises avec un grand quart-de-cercle & une horloge excellente. Je suppose, par exemple, que la hauteur du soleil observée à six heures de distance du mériden, le matin & le soir, se soit trouvée de 9° précisément, & que suivant le calcul

Par les hauteurs correspondantes.

(1034), elle ne doit être réellement que de $8^{\circ} 54'$; on saura dès-lors qu'à la hauteur apparente de 9° il y a $6'$ de réfraction, & que le soleil paroît trop élevé de $6'$.

Fig. 89.

2172. Dans le triangle PZS (fig. 35 ou 89), formé au pôle, au zénit & au soleil, on suppose connues la distance PZ du pôle au zénit, & la distance PS du soleil au pôle boréal du monde, indépendamment des réfractations; mais l'erreur qui peut en résulter sur les grandes réfractations est très-petite, & elle sera corrigée par d'autres méthodes (2174, 2181, 2215); on connoît aussi, par l'observation des hauteurs correspondantes, l'heure qu'il est, & l'angle horaire ZPS : ainsi l'on trouvera par la résolution du triangle PZS la distance au zénit, ou ZS ; c'est le complément de la hauteur vraie, puisque les deux côtés PZ & PS , aussi bien que l'angle P , sont des quantités vraies, & données indépendamment des réfractations. Cette hauteur vraie, trouvée par le calcul, est toujours plus petite que la hauteur apparente observée avec le quart-de-cercle, & la différence est la quantité de réfraction qui convient à la hauteur observée. Cette méthode fut employée autrefois par M. Picard, & l'a été récemment par M. de la Caille; c'est par son moyen qu'on a reconnu que la réfraction horizontale, la plus grande de toutes les réfractations, est d'environ $32\frac{1}{2}$.

Réfraction
horizontale.

2173. M. de la Caille avant son voyage en Afrique; avoit aussi entrepris de déterminer les réfractations par le moyen des angles horaires & des hauteurs correspondantes du soleil, & des étoiles fixes les plus brillantes; il est le premier qui ait eu l'avantage d'employer cette méthode d'une manière indépendante des hypothèses; car à son retour du Cap, connoissant la réfraction à la hauteur du pôle (2187), & les déclinaisons des étoiles observées près du zénit du Cap, indépendamment des réfractations, il avoit les côtés PS & PZ avec une extrême exactitude; il a donc calculé à son retour la plupart de ces hauteurs correspondantes; elles étoient d'autant plus exactes qu'il les avoit observées avec l'intention d'en conclure, & la théorie du soleil, &
les

les ascensions droites des étoiles, dans un temps où il ne pensoit point à aller au Cap; mais où il cherchoit à vaincre la difficulté qu'il y a de bien déterminer les ascensions droites des étoiles dans une sphère aussi oblique que la nôtre; il eut la satisfaction de trouver de la conformité entre ces résultats & ceux d'une méthode plus parfaite que nous expliquerons bientôt.

M. de la Caille détermina sur-tout en 1753, la réfraction de 18° par la méthode des hauteurs correspondantes, avec un soin particulier, & par un grand nombre d'observations; cette réfraction de 18° est une des plus importantes, parce que c'est celle du bord du soleil à Paris, dans le tropique du capricorne. M. de la Caille y emploie 9 étoiles, & il trouve 20 résultats, entre $2' 59''$ & $3' 25''$, le milieu entre tous donne la réfraction moyenne à 18° de hauteur apparente pour Paris, de $3' 12'' 6$.

Réfraction
solstitiale
d'hiver.

2174. Il y a un moyen de trouver la réfraction à de certaines hauteurs, sans supposer l'angle *P*; elle consiste à observer une étoile qui passe au méridien, par le point même du zénit, ou fort près de-là, & qui passe ensuite au méridien sous le pole. La réfraction étant nulle au zénit, on aura la distance de l'étoile au pole, sans autre réfraction que celle de la hauteur du pole; mais lorsque l'étoile, environ 12^h après, passera au méridien sous le pole & fort près de l'horizon, on trouvera sa distance au pole beaucoup moindre, parce qu'elle sera accourcie par la réfraction qui élève l'étoile.

Par les étoiles
les circompolaires.

EXEMPLE. La Claire de Persée passoit il y a quelques années à six minutes du zénit de Paris; ainsi l'on étoit sûr que sa distance au pole étoit de $41^\circ 4'$; par conséquent elle devoit passer au méridien sous le pole à $41^\circ 4'$ du pole, ou à $7^\circ 46'$ de hauteur vraie. On l'observoit cependant à $7^\circ 52' 25''$; ainsi l'on étoit assuré que la réfraction élevoit cette étoile de $6' 25''$ à $7^\circ 52' \frac{1}{2}$ de hauteur apparente, (*Instit. astr. pag. 418*). On trouvera d'autres exemples de cette méthode, art. 2226.

2175. Mais la plus grande difficulté consistoit à déterminer la réfraction vers 45° de hauteur; comme elle

Réfraction
à 45° .

n'est que d'environ une minute, la méthode précédente étoit trop peu exacte pour qu'on pût l'employer ; Flamsteed & Halley faisoient cette réfraction de $54''$, Cassini de $59''$, Picard & la Hire de $71''$, Bradley de $57''$; M. de la Caille l'a trouvée de $66''\frac{1}{2}$ par la méthode que nous allons expliquer ; mais on croit assez généralement quelle ne passe pas $60''$.

Travail de
M. de la Caille
sur les réfrac-
tions.

2176. Le travail de M. de la Caille sur les réfractions, est cependant un des fruits les plus précieux de son voyage au Cap de Bonne-Espérance ; il est fondé sur la comparaison répétée des distances de 160 étoiles au zénit de Paris & du Cap, observées dans chacune de ces deux stations, au moins six fois chacune, & cela avec des instrumens de six pieds de rayon, (*Mém. acad.* 1755.).

2177. La première partie du mémoire de M. de la Caille, consiste à prouver que les réfractions au Cap de Bonne-Espérance, sont plus petites d'un quarantième que celles de Paris, (2232). La seconde partie est destinée à prouver par la somme de 4 réfractions, qu'à la hauteur du pôle de Paris, qui est 49° , la réfraction moyenne est de $58''2$, & que la vraie différence en latitude de Paris au Cap, est de $82^\circ 46' 42''$ (2186).

Depuis la hauteur de 48° jusqu'au zénit, il calcula toutes les autres réfractions pour Paris, en les supposant proportionnelles aux tangentes de la distance au zénit (2207). Ces réfractions ainsi connues, servirent à réduire en hauteurs vraies, les hauteurs apparentes des étoiles qu'il avoit observées au Cap depuis 48° jusqu'au zénit ; il compara ensuite ces hauteurs vraies aux hauteurs apparentes des mêmes étoiles, qui étant observées à Paris, avoient depuis 7° jusqu'à 48° de hauteur ; par ce moyen il eut un grand nombre de distances apparentes des parallèles de Paris & du Cap, affectées seulement des réfractions pour Paris à de petites hauteurs.

2178. Ces distances apparentes des deux parallèles étoient toutes plus grandes que $82^\circ 46' 42''$, différence vraie des parallèles de ces deux observatoires (2186), & leur excès donnoit la réfraction pour chaque hauteur

observée à Paris. Ayant comparé de même les étoiles observées à de grandes hauteurs à Paris, & à de petites hauteurs au Cap, il trouva les réfractions pour le Cap, & elles se sont trouvées plus petites d'un quarantième que celles de Paris. Réfraction plus petite au Cap.

2179. Toutes ces réfractions ainsi observées à Paris, à la hauteur de différentes étoiles, étant prises consécutivement de cinq en cinq, & réduites à des degrés justes de hauteur apparente, & à une certaine régularité dans leur progression, au moyen des interpolations, M de la Caille en forma sa table des Réfractions, que j'ai donnée dans mon *Exposition du calcul astronomique*, p. 251. Ce long travail fut recommencé plusieurs fois, vérifié par un nombre immense de hauteurs observées dans le même-temps à Greenwich par M. Bradley; à Gottingen par M. Mayer; à Bologne par M. Zanotti; & par moi-même à Berlin. J'y étois allé en 1751 pour faire des observations correspondantes à celles de M. l'Abbé de la Caille, & je m'occupai spécialement des hauteurs méridiennes des étoiles qui étoient près du zénit & près de l'horizon, pour en déduire la réfraction au Cap & à Berlin. Les comparaisons des étoiles observées au Cap, fort près du zénit, & en Europe à de petites hauteurs, ont servi à trouver aussi les réfractions pour Paris à ces petites hauteurs, c'est-à-dire, jusqu'à 30° , telles qu'elles sont dans la table de M. de la Caille; les autres ont été conclues par la règle de M. Bradley (2206).

2180. Il est vrai qu'une partie de ce travail est fondée sur la réfraction de 45° que M. de la Caille a trouvée plus grande que tous les autres astronomes (2175); on lui en fit l'objection de son vivant, & j'ai vu à Londres, en 1763, une lettre que M. de la Caille écrivoit à M. Bévis le 21 Décembre 1760, dans laquelle il lui disoit qu'il avoit résolu de faire l'été suivant une nouvelle vérification de son secteur, en conséquence du soupçon de M. Bradley. Il avoue que plusieurs observations de M. Mayer & de M. Zanotti s'accordoient à indiquer une réfraction plus petite que la sienne, mais il avoit soupçonné que

Doute sur la réfraction à 45° .

l'arc de 90° , dans ces instrumens étoit trop petit de quelques secondes; c'est ainsi que celui de Greenwich est trop grand de $15''$, & que l'arc de 60° du quart-de-cercle que j'avois porté à Berlin en 1751 est trop petit de $30''$. La vérification que M. de la Caille se proposoit de faire sur son instrument n'a pas été exécutée, du moins, je n'en ai pas connoissance; & quoiqu'il soit actuellement entre mes mains, je n'ai pas cru qu'il fût possible de déterminer avec bien de la certitude une si petite différence, sur un instrument de six pieds, dont la suspension est une aiguille (2385). Nous parlerons encore d'une autre objection (2217).

Maniere de
tripler la ré-
fraction.

2181. Malgré le doute qui nous reste sur les réfractations de M. de la Caille, je vais continuer à expliquer les méthodes ingénieuses dont il s'est servi, & qu'on pourra employer encore avec succès. M. de la Caille, (*Mém. acad.* 1751, pag. 411), trouva une maniere heureuse de tripler l'effet de la réfraction, à 34° de hauteur pour la rendre plus sensible: la distance apparente du soleil au zénit du Cap, en 1752, fut observée dans le solstice de $57^\circ 21' 55'' 6$, affectée de la réfraction seulement, & la distance apparente du pole au zénit $56^\circ 3' 10'' 3$, aussi affectée de la réfraction; la premiere réfraction est plus grande de $4'' 9$ que la seconde, il faut l'augmenter de cette quantité pour avoir la distance du zénit au tropique du cancer $57^\circ 22' 0'' 5$, affectée de la même réfraction que celle de la distance du zénit au pole.

La distance vraie du tropique du Capricorne au zénit du Cap étant fort petite, on peut supposer d'abord que sa réfraction soit connue, & l'employer de $10'' 1$; s'il y a une erreur, elle sera d'autant plus petite, que la quantité elle-même est moindre, & l'on sera à même d'y revenir ensuite. Cela étant supposé, M. de la Caille trouve la vraie distance du tropique au zénit du Cap de $10^\circ 26' 53'' 3$, il y ajoute la distance du zénit au pole austral affectée de la réfraction, $56^\circ 3' 10'' 3$, de sorte que la distance du pole austral au tropique du Capricorne, altérée par la réfraction de la hauteur du pole est $66^\circ 30' 3'' 6$.

2182. On a donc séparément trois quantités affectées chacune de la réfraction qui convient à la hauteur apparente du pôle $33^{\circ} 57'$, & qui sans la réfraction devroient faire ensemble 180° degrés, savoir :

La distance du pôle au trop. du cancer.	66° 30' 3" 6
La distance du pôle au zénit.	56 3 10 3
La distance du zénit au trop. du cancer. . .	57 22 0, 5
Som. de ces 3 quant. dimin. de 3 réf. égal.	179 55 14, 4
La véritable somme devoit être.	180 0 0
Donc le triple de la réfraction est.	4 45, 6
Et la réfraction à 34° de hauteur	1 35, 2

2183. M. de la Caille trouva aussi un moyen pour quadrupler la réfraction : la position du Cap de Bonne-Espérance à l'égard de Paris étoit singulière, par deux circonstances qui se trouvèrent favorables pour la détermination directe des réfractions, & M. de la Caille fut en profiter d'une manière ingénieuse pour quadrupler l'effet qu'il avoit besoin de déterminer, & rendre par-là quatre fois moindres les petites incertitudes qu'on pouvoit craindre sur le résultat.

Manière de quadrupler la réfraction.

La première circonstance est que la hauteur du tropique du cancer au Cap, est à peu-près la même que celle du pôle austral ; de-là il est aisé de conclure, sans aucun calcul & sans aucune hypothèse, la réfraction absolue à cette hauteur de 34° , en comparant la hauteur solsticiale du soleil, avec la hauteur apparente du pôle, (*Mém. acad.* 1751, pag. 411).

La seconde circonstance est que la distance du pôle boréal du monde au zénit de Paris, $41^{\circ} 10'$, est presque égale à la moitié de l'arc intercepté, entre le Cap & Paris, qui est de $82^{\circ} 46' 42''$; d'où il suit que si les réfractions sont les mêmes, ou si l'on connoît leur rapport, on peut trouver directement la réfraction qui convient à la hauteur du pôle de Paris.

2184. La distance vraie des parallèles de Paris & du Cap est de $82^{\circ} 46'$ environ, dont la moitié est $41^{\circ} 23'$,

ainsi une étoile située à $41^{\circ} 23'$ du zénit de chacun, auroit la même hauteur méridienne, & la même réfraction; mais chaque distance au zénit étant diminuée par la réfraction de $58''$, la somme de ces deux distances doit être diminuée du double, ou de $1' 56''$ par l'effet de la réfraction; ainsi la distance apparente des deux parallèles conclue de la somme de ces deux distances observées est trop petite du double de la réfraction qui a lieu à $41^{\circ} 23'$ du zénit.

Il y a grand nombre d'étoiles qui ayant environ 41° de distance au zénit, ont pu servir à cette recherche, M. de la Caille y employa 13 étoiles qui sont entre $38^{\circ} 50'$ & $44^{\circ} 10'$, savoir β du Serpenteire, δ de la Vierge, ϵ du Serpent, β de l'Aigle, Procyon, γ d'Orion, α du Serpent, α d'Orion, α de l'Aigle, ϵ de Pégase, β du petit Chien, β de l'Écrevisse, & γ de l'Aigle; elles étoient toutes également propres à cette recherche, parce que si l'une de ces étoiles passe à moins de $41^{\circ} 23'$ du zénit de Paris, & y éprouve une moindre réfraction, elle passe au Cap à une distance plus grande & y éprouve une plus forte réfraction, ainsi la somme des deux réfractions est encore la même que si chacune de ces étoiles étoit précisément à $41^{\circ} 23'$ de chaque zénit. Si la réfraction croissoit en raison simple des distances au zénit, il seroit inutile de s'affujettir à certaines limites, comme celles de ces 13 étoiles; or, dans toutes les hypothèses & dans toutes les tables de réfraction, on trouve un progrès uniforme de 38 à 44° de distance au zénit, ainsi toutes les étoiles précédentes ont dû donner la distance apparente des parallèles de Paris & du Cap, affectée du double de la réfraction qui a lieu à $41^{\circ} 23'$ de distance au zénit, en supposant qu'à même hauteur elle soit la même au Cap & à Paris. Cette distance apparente diminuée de deux réfractions, s'est trouvée de $82^{\circ} 44' 46''$.

La hauteur apparente du pôle au Cap, affectée de la réfraction à cette hauteur, fut observée sur un grand nombre d'étoiles de $33^{\circ} 56' 49'' 1$, & celle du Collège Mazarin à Paris, où M. de la Caille avoit fait une

multitude d'observations, de $48^{\circ} 52' 27'' 5$; la somme de ces deux hauteurs apparentes, donne $82^{\circ} 49' 16'' 6$ pour la distance des deux parallèles de Paris & du Cap, augmentée par la somme de deux réfractions qu'il eût fallu en soustraire pour avoir les hauteurs vraies. Cette distance augmentée est plus grande de $4' 30'' 6$, que la distance diminuée qui est de $82^{\circ} 44' 6''$; ainsi l'on a $4' 30'' 6$ pour la somme des quatre réfractions qu'il s'agit de séparer.

Distance apparente plus grande que la vraie.

Partage des 4 réfractions.

2185. Si ces 4 réfractions étoient égales, il suffiroit de prendre le quart des $4' 30'' 6$ pour avoir la réfraction cherchée; mais de ces 4 réfractions, il y en a deux qui doivent être différentes d'un quarantième, & qui répondent à $41^{\circ} 23'$, une pour $56^{\circ} 3'$, distance du pôle au zénit du Cap, & une pour $41^{\circ} 8'$, distance apparente du pôle au zénit de Paris; ainsi il faut diviser $4' 30'' 6$ en 4 parties, qui ayent les conditions requises dans les 4 cas que je viens d'expliquer.

Pour parvenir à ce partage convenable, & pour séparer les 4 réfractions contenues dans la quantité de $4' 30''$, il n'y a qu'à employer la règle démontrée ci-après (2207), que les réfractions sont comme les tangentes des distances au zénit, en faisant celles du Cap plus petites d'un quarantième que celles de Paris; l'on trouvera $1' 36'' 5$ pour la hauteur de $33^{\circ} 57'$ au Cap, $57'' 2$ pour $41^{\circ} 22'$ de distance au zénit du Cap, $58'' 2$ pour $48^{\circ} 52'$ de hauteur apparente à Paris; & $58'' 7$ pour $41^{\circ} 22'$ de distance au zénit à Paris; ce sont là les quatre réfractions dont la somme est de $4' 30'' 6$, & qui ont servi à M. de la Caille pour trouver les réfractions moindres, en suivant les tangentes des distances au zénit (2207), (*Mém.* 1755, p. 568).

Réfraction à la hauteur du pôle.

2186. La réfraction trouvée, par ce moyen, pour 41° distance au zénit étant appliquée à chacune des hauteurs égales d'une même étoile, observées au Cap & à Paris, a fait connoître que la vraie distance des parallèles est de $82^{\circ} 46' 42''$, & cette vraie distance a servi à trouver toutes les réfractions à de petites hauteurs, depuis 6° où elle est de $8' 42''$, jusqu'au zénit; M. de la Caille n'a rien voulu statuer sur les hauteurs plus petites (2254);

Distance vraie des parallèles.

2187. On peut séparer encore par une autre méthode sans le secours d'aucune hypothèse, les 4 réfractions contenues dans $4' 30'' 6$. Il faut d'abord en retrancher $1' 35'' 2$, réfraction trouvée immédiatement par observation pour $33^\circ 57'$ de hauteur apparente (2182); le reste $2' 55'' 4$ sera la somme de trois réfractions presque égales, qui répondent aux distances apparentes de $41^\circ 8'$ à Paris, & $41^\circ 22'$ au Cap & à Paris; l'on aura donc $58'' 6$ pour $41^\circ 8'$ à Paris, $57'' 8$ pour $41^\circ 22'$ au Cap, & $59'' 0$ pour $41^\circ 22'$ à Paris, quantités qui ne diffèrent pas sensiblement de ce que nous venons de trouver (2185), & d'où il résulte, suivant M. de la Caille, qu'à 45° la réfraction est de $66'' \frac{1}{2}$; il est aisé d'en conclure toutes les autres qui sont comme les tangentes des distances au zénit (2207).

2188. A l'égard des réfractions à de moindres hauteurs, il les a déterminées immédiatement en comparant les hauteurs méridiennes d'étoiles qu'il avoit observées au Cap, avec celles qu'il observa ensuite à Paris & avec celles des autres astronomes (2179).

2189. Jamais table de réfractions, ni aucune autre table astronomique n'a été vérifiée par tant d'observations, ni avec des précautions aussi grandes que celle dont on vient de voir la construction; il étoit donc bien naturel que M. de la Caille jugeât de l'exactitude des tables qui avoient paru jusqu'alors par leur comparaison avec la sienne. Dans la table de réfraction, dressée par M. Cassini, & qui étoit depuis long-temps celle du livre de la *Connoiss. des temps*, les réfractions sont un peu plus petites; savoir de $4''$ à 18° ; de $16''$ à 30° , de $6''$ à 49° ; &c. Cette table fut calculée vers 1662, par Dominique Cassini, & imprimée la même année à la fin des éphémérides de *Malvasia*, sous le titre de *Refractio æstiva*. Il y avoit dans le même livre une table qu'il appelloit *Refractio æquinoctialis*, & une autre qui étoit destinée pour l'hiver, la réfraction équinoxiale, qui étoit sa réfraction moyenne, étoit si conforme à celle de M. de la Caille; sur-tout depuis 23° de hauteur, qu'à peine trouve-t-on une

une seconde de différence, de sorte qu'on peut dire, à la gloire de ce grand homme, qu'il fut le premier qui calcula géométriquement la réfraction, & que de ceux qui vinrent après lui, pas un ne réussit aussi-bien. Il est vrai que ces réfractions. équinoxiales deviennent ensuite un peu trop grandes en approchant de l'horizon, mais il s'en faut beaucoup qu'elles soient en excès autant que les tables de Flamsteed & de Newton sont en défaut; & M. de la Caille pense que cette table des réfractions équinoxiales, est la meilleure de toutes celles qui ont été calculées depuis 1662. (*Mém. acad.* 1755, pag. 576).

Les réfractions publiées dans les tables de M. de la Hire, (*pag.* 6), & qui avoient été calculées en tout ou en partie, par M. Picard, s'accordent assez bien avec celles de M. de la Caille, depuis l'horizon jusques vers 35° de hauteur, mais depuis 35° jusqu'au zénit, elles sont toujours trop grandes.

Les réfractions de Flamsteed, sont celles qui s'éloignent le plus de celles de M. de la Caille, elles sont plus petites de 1' 4" à 10°, de 40" à 20°, de 31" à 30°, & de 21" à 40° de hauteur.

Réfractions
de Flamsteed.

Les réfractions de Newton & de Halley sont aussi trop petites de 45" à 10° de hauteur, de 29" à 20°, de 22" à 30°, & de 15" à 40°. Enfin, celles de M. Bradley sont plus petites de 14" à 6°, de 22" à 10°, de 26" à 20°, de 11" à 40°.

Réfractions
de Bradley.

Mais de peur qu'on n'objecte à M. de la Caille que les réfractions peuvent être moindres en Angleterre qu'à Paris, M. de la Caille rapporte la comparaison de 23 hauteurs méridiennes d'étoiles observées à Greenwich, à de petites hauteurs, en même temps qu'il les observoit au Cap près du zénit, & il les trouve d'accord, en les corrigeant par sa table de réfractions, en supposant la latitude de Greenwich de 51° 28' 53", & la distance vraie des parallèles de Greenwich & du Cap 85° 24' 5" 8; il ne s'en trouve que quatre qui s'écartent de 5 à 6", & toutes les autres s'accordent à 2 ou 3" près, à donner la même distance des parallèles. Il a fait de même la comparaison

de 35 étoiles observées à Gottingen, 24 à Bologne, & 50 que j'avois observées à Berlin, chacune plusieurs fois avec un mural de cinq pieds de rayon, & il a trouvé continuellement le même accord. Ainsi quoique l'on soit persuadé assez généralement que les réfractions de M. de la Caille sont un peu trop fortes, je crois qu'il importe de s'en assurer encore, & l'on ne pourra faire mieux que de suivre la route de cet incomparable astronome.

*DES HYPOTHESES PHYSIQUES
propres à représenter les réfractions.*

2190. QUOIQU'ON puisse déterminer immédiatement par observation à toutes les hauteurs possibles la réfraction astronomique, il seroit très-utile d'en connoître la loi, de manière à pouvoir remplir par un calcul exact les intervalles que l'observation a laissés : voici les diverses tentatives qu'on a faites à ce sujet.

M. Cassini, en 1662, voyant que la manière d'observer les réfractions qu'avoit employé Tycho, ne pouvoit faire connoître la réfraction à de grandes hauteurs, & dès qu'elle est moindre qu'une minute, songea à y employer le calcul & la théorie ; sa méthode fut perfectionnée dans la suite, & on la trouve dans les élémens d'*Astronomie de M. Cassini le fils*, page 15.

Hypothèse
de M. Cassini.
Fig. 139.

2191. Soit AB la surface de la terre, (fig. 139) EKG la surface de l'atmosphère ou de la matière réfractive, supposée homogène, FG le rayon de l'étoile avant son entrée dans l'atmosphère, GA le rayon rompu, qui est perpendiculaire à la ligne verticale CAZ , lorsque l'étoile paroît à l'horizon ; au lieu de voir l'étoile sur le rayon FG , on la doit voir sur la ligne droite AGT , & l'angle TGF que forme le rayon direct, avec le prolongement GT du rayon rompu est la quantité de la réfraction horizontale, que M. Cassini avoit trouvée par observation de $32' 20''$. Lorsque l'étoile se sera élevée en M son rayon direct fera MK , & le rayon rompu AKN ;

l'angle MKN est l'angle de réfraction à cette hauteur ; je suppose avec M. Cassini qu'elle ait été observée de $5' 28''$ à 10° de hauteur apparente (2172 , 2189).

La hauteur AE que l'on veut donner à l'atmosphère supposée homogène doit être telle que les sinus des angles d'incidence PGF , MKR , soient aux sinus des angles rompus PGT , RKN dans un rapport constant, & que les réfractions FGT , MKN soient entre elles, comme $32' 20''$ & $5' 28''$, ces deux réfractions étant supposées immédiatement & exactement connues par observation.

Pour trouver cette hauteur, M. Cassini emploie la méthode indirecte de fausse position ; il suppose de 2000 toises la hauteur AE de l'atmosphère uniforme, le rayon AC de la terre étant de 3271600 toises, ainsi la longueur totale CE ou CG sera de 3273600 toises. (*Elém. d'astron. pag. 15*). Dans le triangle CAG rectangle en A , dont on connoît CA & CG , on trouvera l'angle CGA de $87^\circ 59' 50''$, auquel on ajoutera la réfraction FGT de $32' 20''$, & l'on aura l'angle FGP de $88^\circ 32' 10''$; c'est l'angle d'incidence pour le rayon FG à son entrée dans l'atmosphère en G . De même dans le triangle CAK , dont on connoît les côtés CA , CK & l'angle CAK de 100° à la hauteur apparente de 10° , l'on trouvera l'angle AKC égal à l'angle RKN de $79^\circ 48' 12''$.

2192. Pour trouver la réfraction en K , l'on dira : le sinus de l'angle rompu CGA $87^\circ 59' 50''$, est au sinus de l'angle d'incidence FGP , $88^\circ 32' 10''$, comme le sinus de l'angle rompu RKN , $79^\circ 48' 12''$, est au sinus de l'angle d'incidence MKR $79^\circ 53' 40''$, dont retranchant l'angle NKR $79^\circ 48' 12''$, il reste l'angle MKN de $5' 28''$; c'est la réfraction à la hauteur apparente de 10° ; & comme cette réfraction est véritablement égale à celle que M. Cassini avoit observée, il s'en suit que la hauteur de l'atmosphère supposée de 2000 toises suffit pour représenter les deux réfractions observées de $5' 28''$, & $32' 20''$. Si l'on avoit trouvé dans le calcul précédent une réfraction plus ou moins grande que $5' 28''$, on auroit recommencé le calcul, en supposant une hauteur de l'atmosphère

Règle pour
trouver la réfraction.

un peu différente de 2000 toises. La même règle servira pour trouver toute autre réfraction par le calcul.

2193. Cette hypothèse de M. Cassini sur la hauteur d'une matière réfractive équivalente à la hauteur de l'atmosphère, s'est trouvée assez bien d'accord avec les observations faites à différens degrés de hauteurs, en sorte qu'elle peut donner avec très-grande facilité, comme on vient de le voir, & avec une précision suffisante, la réfraction qui convient à une hauteur quelconque.

Cependant il y a une grande différence entre l'hypothèse de M. Cassini qui suppose une matière homogène finissant à 2000 toises d'élévation, & l'état réel de l'atmosphère qui diminue insensiblement & par degrés, & qui est encore sensible à 54 mille toises de hauteur, par l'ombre qu'elle répand sur le disque de la lune (1776), & à 34 mille par son effet sur les crépuscules (2270); mais malgré cette différence entre l'hypothèse de 2000 toises, & la nature de l'air, il suffit pour l'astronomie d'y trouver un équivalent qui compense, par la simplicité du calcul, le petit degré de précision qui manque peut-être à l'hypothèse. Au reste, nous allons passer à une détermination plus rigoureuse de ce problème Physico-Mathématique.

2194. La découverte du principe général de l'attraction, fit reconnoître à Newton que la réfraction de la lumière étoit un effet de l'attraction que l'atmosphère exerce sur les corpuscules de la lumière. En partant de ce principe, on peut déterminer la trajectoire du rayon, & la loi suivant laquelle varie la réfraction depuis le zénith jusqu'à l'horizon. Un rayon de lumière qui est attiré successivement vers le centre de la terre par les différentes couches de l'atmosphère, se trouve par-là détourné de la ligne droite qu'il suivroit dans le vide; cette attraction, qui va toujours en augmentant lorsque le rayon s'enfonce dans l'atmosphère, produit une réfraction qui augmente toujours de plus en plus; la somme de toutes ces réfractions, quand le rayon arrive à notre œil, forme la réfraction astronomique.

Trajectoire
d'un rayon.

2195. Plusieurs auteurs ont cherché à déterminer la courbe décrite par ce rayon dans l'atmosphère; M. Taylor, (*Method. increm. directa & inversa*); M. Bernoulli, (*Hydrodyn. pag. 221*); M. Euler, (*Mém. de Berlin 1754, Tom. X. pag. 131*); M. Simpson, (*Mathematical Dissertations, pag. 46, 1743*). On peut voir encore sur cette matière un ouvrage qui a pour titre: *Les propriétés remarquables de la route de la lumière*, par J. H. Lambert, à la Haye 1759, in-8°. Enfin, le P. Boscovich ayant traité cette matière d'une façon plus simple & plus élégante qu'aucun des géomètres qui l'avoient précédé, & m'ayant communiqué son travail; je me servirai de sa méthode pour démontrer la loi des réfractions, trouvée par M. Simpson, & celle que M. Bradley en a déduite, sans en avoir donné la démonstration (2203), mais que j'avois démontrée déjà dans la première édition de cet ouvrage (a).

2196. Pour déterminer la réfraction, il s'agit de considérer, en général, la courbe qu'une particule de lumière doit décrire lorsqu'elle est sans cesse attirée vers le centre de la terre avec une force quelconque. Soit C le centre de la terre, (*fig. 140*) vers lequel est attiré le corpuscule F de lumière; A le lieu de l'observateur, Z le zénit; FA la courbe que doit décrire le rayon; SF la ligne par laquelle il entre dans l'atmosphère, BIA la direction du rayon qui arrive au point A , IH & AG les tangentes à la courbe en A & en F , & qui se coupent en I ; on abaissera du centre C de la terre des perpendiculaires CH & CG sur ces tangentes; l'angle ZAI est la distance apparente au zénit pour un astre S ou F , & si l'on suppose AK parallèle à FS , l'angle ZAK sera la distance vraie. La première tangente SFH de la courbe décrite par le rayon de lumière étant continuée, rencontre en un point I la dernière tangente AIB , qui marque

Méthode du
P. Boscovich.

Fig. 140.

(a) On ne peut se dispenser de supposer ici la connoissance du calcul différentiel dont il sera parlé dans le XXI^e Livre; ainsi le lecteur

qui n'y auroit pas encore pénétré,
doit passer les démonstrations suivantes, & se contenter d'en voir les résultats.

Fig. 140.

le lieu apparent de l'astre ; la réfraction astronomique est égale à l'angle BIS ou GIH des deux tangentes ; & puisqu'on suppose AK parallèle à $SFIH$, elle est encore égale à l'angle BAK .

2197. La première chose qu'il est bon de démontrer relativement à la cause physique des réfractions, c'est que leur changement ne dépend que de la constitution de la partie basse de l'atmosphère, & pour cela nous ferons sur le mouvement, en général, quelques remarques nécessaires. Dans toutes les courbes décrites en vertu d'une force de projection uniforme & d'une force centrale quelconques, la force à égales distances du centre étant égale, la vitesse en différens points de la courbe est en raison inverse des perpendiculaires abaissées sur les tangentes en ces différens points ; car les aires étant toujours égales (1233), & étant le produit de l'arc de la courbe par la perpendiculaire abaissée sur cet arc prolongé, ou sur la tangente, les petits arcs de la courbe diminueront dans le même rapport que les perpendiculaires augmenteront, & de manière à former toujours le même produit. Ainsi la vitesse du corpuscule de lumière en F est à sa vitesse en A , comme CG est à CH ; & faisant le rayon de la terre $CA = 1$, $CH = y$, la vitesse dans un point F de la courbe $= v$, la vitesse finale en $A = c$, l'angle CAG ou la distance apparente au zénit $= a$, en sorte que $CG = \sin. a$, on aura $v = \frac{c \sin. a}{y}$.

2198. Supposons pour un instant que FA soit un arc infiniment petit, compris entre deux lignes droites finies FC , AC , dont l'angle FCA soit $= dx$; soient tirées deux tangentes FI , AI , une ligne AL parallèle à CF , AQ perpendiculaire à CF , & QO perpendiculaire sur la corde AOF . Si la réfraction totale HIG est égale à r , on aura dans le cas de la portion infiniment petite $FCA = dx$, $LIA = dr$, puisque l'une est la différentielle de l'angle au centre C , & l'autre l'angle d'une tangente de la courbe avec la tangente qui en est infiniment proche, & que la somme de tous ces angles est l'inclinaison de

la dernière tangente sur la première. Si l'on fait encore $CA=z$, $FQ=dz$, la force réfractive en $F=f$, $CH=y$, la vitesse en F étant $\frac{v_{\text{fin.}}^2}{y}$; l'espace FA qui est comme le produit du temps par la vitesse sera $v dt$, & l'effet AL de la force accélératrice sera proportionel à la force & au carré du temps (3365) ou fdt^2 . La force suivant FQ ou la force réfractive absolue f est à cette même force décomposée suivant FA ou FO , comme FQ est à FO , comme FA est à FQ , comme $v dt$ est à dz , c'est-à-dire, $v dt : dz :: f : \frac{fdz}{v dt}$, expression de la force attractive, dans la direction du mouvement FI de la lumière; ainsi la différentielle de la vitesse, qui est comme la force & le temps conjointement, c'est-à-dire, $dv = \frac{fdz dt}{v dt}$; donc $vdv = fdz$; ainsi l'augmentation du carré de la vitesse dans chacun des petits arcs de la courbe est comme la force absolue, & le changement de la distance au centre.

2199. De-là il suit que si deux particules de lumière appartenantes à deux rayons différens, ont eu une fois des vitesses égales à même distance du centre, elles les auront toujours; car en se rapprochant également du centre elles éprouveront des forces égales, des accroissemens égaux dans les carrés de vitesses égales, ainsi les vitesses elles-mêmes feront égales. Mais tous les rayons homogènes parviennent à la première surface de l'atmosphère avec des vitesses égales, ainsi sous quelle direction qu'ils traversent l'atmosphère, ils auront des vitesses égales à même distance du centre, la valeur de c ou de la vitesse finale en A sera constante pour tous les rayons; le rapport de CH à CG ou de la vitesse finale à la vitesse initiale, sera également le même; ce rapport différera peu de l'égalité, puisque la réfraction est toujours fort petite en comparaison de la distance au zénit.

Vitesses égales à même distance.

2200. Quelque changement qui arrive dans l'atmosphère, pourvu que son état reste le même en A , la vitesse finale sera la même; car l'augmentation du carré de la vitesse, sera comme la somme de tous les produits des

forces attractives dans chaque couche par leurs épaisseurs relatives, c'est-à-dire, des *fdz*. Que l'on conçoive l'atmosphère divisée en plusieurs couches de même épaisseur; la force en chaque point fera l'excès des actions qu'exercent les couches inférieures sur celles des couches supérieures; le rayon approchant de la terre, les effets des couches intermédiaires seront successivement détruits, & il ne restera que l'effet produit par l'excès de la dernière force sur la première. Ainsi quoique la lumière parvienne à l'air qui nous touche par un nombre quelconque de milieux différemment denses, sa vitesse est la même que si elle y parvenoit immédiatement de l'Ether. La vitesse de la lumière en *A* ne dépend donc que de la constitution de l'atmosphère en *A*, & de la hauteur du thermomètre ou du baromètre dans le lieu de l'observation; mais la situation du point *I* ou de l'intersection des deux tangentes, peut rendre plus variable la réfraction aux environs de l'horizon.

La réfraction ne dépend que de l'air inférieur.

2201. Pour avoir la loi des réfractions, il faut trouver leur rapport avec la distance au zénit & avec l'angle *FCE*, formé au centre de la terre. La hauteur de l'atmosphère ou la longueur de *CF* étant la même pour tous les rayons de même espèce, le rapport du sinus d'incidence *CFH*, au sinus de réfraction *CAG* fera le même pour tous, car ces sinus sont $\frac{CH}{CF}$ & $\frac{CG}{CA}$ (3613.); si le rapport des vitesses en *A* & en *F* ou de *CH* à *CG* est celui de $1+b$ à 1 , & que la hauteur de l'atmosphère *MF* soit $=e$, ce rapport de $\frac{CH}{CF}$ à $\frac{CG}{CA}$ sera celui de $\frac{1+b}{1+e}$ à 1 . Si l'on fait $\frac{1+b}{1+e} = m$, on aura $1 : m :: \sin. CAG$ ou $\sin. a : \sin. CFH$, qui sera $= m \sin. a$.

Dans le quadrilatère rectiligne *CFIA* les quatre angles internes sont nécessairement quatre angles droits, aussi bien que les angles internes *A* & *I* réunis avec leurs externes; retranchant de part & d'autre les deux internes *A* & *I*, l'on aura les deux externes *A* & *I* égaux aux deux autres internes *C* & *F*, ou $CFI + ACF = CAG + GIH$;

GIH ; CFI ou $CFH = CAG - ACF + GIH = a - (x - r)$, ainsi l'on aura $m \sin. a = \sin. (a - (x - r))$. Nous en déduirons la règle de Simpson (2210). La somme de deux sinus qui sont comme 1 & m est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme des angles a , & $a - (x - r)$ est à la tangente de leur demi-différence (3644); ainsi $1 + m : 1 - m :: \text{tang. } (a - \frac{1}{2}(x - r)) : \text{tang. } \frac{1}{2}(x - r)$; & puisque ce rapport est constant, il s'en suit que la tangente de $\frac{1}{2}(x - r)$ ou le petit angle lui-même $x - r$ fera comme la tangente de $(a - \frac{1}{2}(x - r))$ ou de la distance apparente au zénit diminuée du petit angle $\frac{x - r}{2}$.

2202. Si le rapport de x à r ou de l'angle au centre à la réfraction est constant, le petit angle $\frac{x - r}{2}$ fera un certain multiple de la réfraction r ; & la réfraction elle-même sera comme la tangente de la distance au zénit, diminuée d'un certain multiple de la réfraction, nous verrons que c'est à peu-près trois fois la réfraction. Pour que le rapport de x à r soit constant, il faut supposer que la force attractive des couches de l'atmosphère croît uniformément, & que le rayon éprouve continuellement la même force, en passant d'une couche à la suivante. Dans cette supposition de la force constante, soit un arc infiniment petit $AF = v dt$ (2198); la tangente AI sensiblement égale à la moitié de l'arc, fera $\frac{v dt}{2}$; le sinus de CFA , ou de CFL (qui lui est égal, parce que l'angle AFL est infiniment petit) est $= \frac{AQ}{AF}$, mais l'arc AQ est comme l'angle multiplié par le rayon (3357); ainsi $AQ = z dx$, & comme $AF = v dt$ le sinus de CFA fera $\frac{z dx}{v dt}$; mais $AI : AL :: \sin. ALI$ ou $ALH : \sin. AIL$; c'est-à-dire, $\frac{v dt}{2} : f dt^2 :: \frac{z dx}{v dt} : \sin. dr$, donc $\sin. dr$ ou dr lui-même $= \frac{2fz dx}{v^2}$, & $\frac{dr}{dx} = \frac{2fz}{v^2}$; ainsi l'on a le rapport entre le petit changement de la réfraction & l'angle au centre.

Force
constante.

Le rapport $\frac{z}{v}$ est pour ainsi dire constant, parce que les vîteses & les distances au centre de la terre ne changent que très-peu, ainsi $\frac{dr}{dx}$ est sensiblement comme la force réfractive f , qui a lieu dans chacune des couches de l'atmosphère, & si cette force f est sensiblement constante, ou égale dans les différentes hauteurs de l'atmosphère, le rapport $\frac{dr}{dx}$ sera constant.

2203. Ainsi en supposant que la force réfractive est constante dans toute l'atmosphère, le rapport de x à r est un rapport constant; dans cette hypothèse Simpson, en prenant deux réfractions observées, trouvoit $r = \frac{z}{11}(x-r)$, ou $x = 6\frac{1}{2}r$; Bradley supposoit $\frac{z}{12}$ ou $\frac{1}{8}$, au lieu de $\frac{z}{11}$, & faisoit $x = 7r$; d'où il suit que $a - \frac{x-r}{2} = a - 3r$, ainsi la réfraction est comme la tangente de la distance au zénit diminuée de trois fois la réfraction. C'est la règle trouvée par M. Bradley peu de temps avant sa mort, mais qui n'avoit été ni publiée ni démontrée avant la première édition de mon Ouvrage; elle s'est trouvée assez bien d'accord avec les observations; nous verrons bientôt la manière de trouver ce nombre trois par le moyen des observations (2210, 2213). Cette démonstration de la règle de Bradley, que le P. Boscovich déduit des notions les plus simples du mouvement est la plus élégante & la plus simple qu'on eût pu désirer.

Règle de
Bradley.

2204. Les principes que l'on vient de voir suffisent pour prouver que dans toutes les hypothèses qu'on fait sur le progrès de la force réfringente, le sinus d'incidence est au sinus de réfraction en raison constante, & en raison inverse de la vîtesse dans le premier milieu, à la vîtesse dans le second, (on suppose que le rayon soit attiré perpendiculairement à la surface réfringente & à une très-petite distance). Car si AC venoit parallèle à CF , CA & CF seroient égaux, CFH seroit l'angle d'incidence, CAG l'angle de réfraction, & le rapport de leurs sinus seroit celui des perpendi-

lares CH & CG ou des vitesses, donc les vitesses sont en raison inverse des sinus de réfraction & d'incidence.

2205. D'après la règle de Bradley on a $x = 7r$, c'est-à-dire, l'angle FCA égal à 7 fois la réfraction; ainsi la réfraction est toujours la septième partie de l'angle au centre de la terre, dans lequel est renfermé tout l'espace que le rayon a parcouru dans l'atmosphère. Nous en ferons usage pour les réfractions terrestres (2252).

2206. Pour faire usage de la règle de Bradley, je suppose que la réfraction soit de $33'$ à l'horizon, & qu'on demande celle qui a lieu à 45° : le triple de la réfraction horizontale, $1^\circ 39'$, étant ôté de la distance apparente au zénit 90° , on a $88^\circ 21'$, on en conclura la réfraction pour 45° , dès qu'on saura que cette réfraction est d'environ $1'$, en disant, la tangente de $88^\circ 21'$ est à la tangente de $44^\circ 57'$, comme la réfraction horizontale $33'$ est à $57''$, qui est exactement la réfraction pour $45^\circ 0'$ de distance apparente au zénit. C'est par cette règle qu'on a construit la table de réfractions de M. Bradley, que j'ai publiée dans la connoissance des mouvemens célestes pour 1765, & pour les années suivantes jusqu'à 1770, ainsi que dans la première édition de cet ouvrage. Cette même règle a servi à calculer une partie de la table de M. de la Caille (2177).

2207. Cette règle qui a lieu dans les petites hauteurs comme dans les grandes, & qui est confirmée sensiblement par les observations, prouve aussi que les réfractions sont proportionnelles aux tangentes des distances au zénit, tant que ces réfractions ne passent pas environ $3'$, ou que leurs hauteurs excèdent 20° ; car alors les tangentes des distances simples ou celles de ces distances diminuées de trois fois la réfraction, ont sensiblement le même rapport; ainsi nous avons pu supposer, sans aucune erreur sensible, que les réfractions au-dessus du pôle à Paris étoient comme les tangentes des distances au zénit (2187). Mais en approchant de l'horizon la simple distance au zénit ne suffit plus, parce que la réfraction étant triplée, produit dans les tan-

Règle plus simple.

gentes une différence énorme, il faut alors employer une fautive position pour calculer la réfraction par la règle de Bradley, comme dans l'exemple précédent.

Qualité
réfractive
de l'air.

2208. On fait par les expériences du baromètre que les densités de l'air grossier croissent en progression géométrique, & non pas en progression arithmétique en s'approchant de la terre. (Voyez Mariotte, Gravesande, Mussenbroëck, Nollet, l'Encyclopédie; la connoissance des mouvemens célestes 1765, pag. 212). Mais on a lieu de croire que la réfraction, ou en général la force attractive des corps sur les rayons de lumière, ne dépend pas seulement de leur densité, mais aussi d'une cause interne qui est peut-être la structure de leurs parties, leur distribution, leurs interstices, leur viscosité, leur adhérence, leur qualité plus ou moins huileuse, plus ou moins inflammable. M. Simpson attribuoit cette différence entre la loi des densités observées avec le baromètre, & celle que nous admettons pour les réfractations dans l'étendue de l'atmosphère à la chaleur de l'air, beaucoup plus grande vers la surface de la terre que dans la région supérieure. Mais, quoi qu'il en soit de cette cause, on fait d'ailleurs que la réfraction n'augmente pas toujours comme les pesanteurs ou les densités des corps réfringens : l'esprit de térébenthine est bien plus léger que le verre, & cependant la réfraction y est presque aussi grande; ainsi rien n'empêche de croire que la matière réfractive change de densité d'une manière uniforme en s'élevant au-dessus de la terre, quoique cela ne soit pas vrai pour l'air grossier. Quoique les expériences faites sur un air condensé fassent paroître la réfraction proportionnelle à la densité, il peut arriver que la matière électrique, ou la matière du feu, beaucoup plus abondante dans la région supérieure de l'atmosphère que dans la partie basse, rende la réfraction plus grande à une certaine hauteur qu'elle ne devrait être, si l'air étoit homogène avec celui que nous respirons; par-là il peut arriver que la force réfractive approche bien plus de l'uniformité que de la

progression géométrique. Au reste, M. Cassini, (*Mém. acad.* 1714), employoit une courbe circulaire pour les rayons de lumière, ce qui suppose implicitement une force réfractive constante; & M. Bouguer, (*Mém. acad.* 1749), trouvoit aussi un rapport constant entre x & r (2203), dans des suppositions qui reviennent à celle d'une force constante.

2209. Cette hypothèse s'accorde avec les réfractations observées; tandis que la loi des densités démontrée par les hauteurs du baromètre ne sauroit s'y appliquer; si l'on calcule la quantité de la réfraction horizontale suivant cette loi des densités au moyen de la pesanteur spécifique de l'air & de la force réfractive, qui sont connues, l'on trouve cette réfraction horizontale de 52', au lieu de 32' que l'on observe réellement; mais quand on calcule cette même réfraction horizontale en supposant que la densité croisse uniformément, on approche beaucoup de l'observation. Au-dessus de 7° de hauteur, il est indifférent, quelle supposition l'on fasse sur les densités de l'atmosphère; car si l'on prend une réfraction observée à une hauteur qui ne soit pas au-dessous de 7°, & qu'on en déduise les autres réfractations suivant les deux hypothèses différentes, on ne trouvera jamais plus de 2" de différence, d'où M. Simpson. (*Math. diss.* pag. 61), conclut que l'hypothèse des accroissemens égaux étant beaucoup plus conforme à l'observation vers l'horizon, doit donner elle seule une table fort exacte des réfractations à de plus grandes hauteurs, aussi-tôt que les grandes réfractations sont une fois observées.

2210. Suivant la règle de Simpson, il y a un rapport constant entre le sinus de la distance apparente au zénit, & le sinus d'un certain angle; & la différence de ces deux angles est à la réfraction cherchée dans un autre rapport constant; or, par l'art. 2201, en mettant au lieu de $x - r$ un multiple nr de la réfraction, l'on a $m \sin. a = \sin. (a - nr)$, & c'est par les observations que l'on détermine m & n ; par exemple, en

Force constante.

Règle de Simpson.

supposant la réfraction de $33'$ à l'horizon & de $1'30''\frac{1}{2}$ à 30° de hauteur, Simpson trouvoit $m = \sin. 86^\circ 58'\frac{1}{2}$ ou $0,99861$ & $n = \frac{11}{2}$.

Suivant la règle de Bradley, la réfraction est proportionnelle à la tangente de la distance apparente au zénit diminuée d'un certain multiple de la réfraction (2203), ou en général r proportionnel à tang. $(a - hr)$, & il suppose $h = 3$, ce qui revient à $n = 6$ au lieu de $\frac{11}{2}$ qu'il y a dans la règle de Simpson; or ces deux règles peuvent facilement se déduire l'une de l'autre.

En effet par celle de Simpson l'on a $1 : m :: \sin. a : \sin. (a - nr)$, ainsi $1 + m : 1 - m :: \sin. a + \sin. (a - nr) : \sin. a - \sin. (a - nr)$, ou ce qui revient au même :: tang. $(a - \frac{1}{2}nr) : \text{tang. } \frac{1}{2}nr$, parce que la somme de deux sinus est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme des deux arcs est à la tangente de leur demi-différence (3644); ainsi tang. $\frac{1}{2}nr$, & r lui-même sont proportionnels à tang. $(a - \frac{1}{2}nr)$, ainsi la valeur de h dans Bradley est $= \frac{1}{2}n$ dans Simpson, & si $n = 6$ on a $h = 3$, mais si $n = \frac{11}{2}$ comme Simpson le supposoit, on a $h = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$ au lieu de 3; ainsi dans ce cas-là, il faut diminuer la distance au zénit de deux fois & $\frac{3}{4}$ la réfraction. Au contraire le nombre n dans Simpson se déduit facilement de la valeur de h dans Bradley $= \frac{1}{2}n$: pour trouver ensuite l'autre coefficient m , on emploie une réfraction r observée à une distance a du zénit; ayant, par exemple, $m = \frac{\sin. (a - nr)}{\sin. a}$, si l'on suppose $a = 90^\circ$, on a $\sin. (a - nr) = \text{cof. } nr = m$.

Avantage
de cette règle.

2211. La règle de Bradley est plus facile à retenir & plus simple dans l'énoncé, que la règle de Simpson; mais elle n'est pas aussi commode lorsqu'il s'agit de construire une table par le moyen des observations; parce qu'elle suppose qu'on connoisse d'avance la réfraction que l'on cherche. Ainsi dans l'usage il vaudroit mieux la disposer suivant la forme de Simpson: pour chaque distance apparente au zénit a' à laquelle répond une réfraction r' on a cette équation $\sin. (a' - nr') = m$

fin. a' (2210); la valeur de $a' - nr'$ étant trouvée & retranchée de a' il reste nr' qui divisée par n donne la réfraction cherchée r' . Par exemple, si la réfraction horizontale est de $33' = r$, on a $nr = 6r = 3^\circ 18'$ & $\text{cof. } nr = m = \text{cof. } 3^\circ 18' = 0,9983$; si maintenant l'on veut avoir la réfraction à 50° de distance au zénit, on trouve $\text{cof. } 3^\circ 18'$ fin. $50^\circ = \text{fin. } 49^\circ 53' 13''$, cet angle est plus petit que 50° , de $6' 47''$ dont la sixième partie $1' 7'' 8$ est la réfraction qui convient à 50° de distance apparente au zénit.

2212. Si l'on veut employer la hauteur apparente $= p$, l'on pourra prendre $\text{cof. } q = m \text{ cof. } p$, p fera le complément de a , & q le complément de $a - nr$; ainsi $a = 90^\circ - p$; $q = 90^\circ - (a - nr) = p + nr$, $nr = q - p$; $r = \frac{q - p}{n}$: cette formule nous servira bientôt pour les réfractions qui ont lieu au-dessous même de l'horizon (2220).

2213. Il faut maintenant trouver dans cette hypothèse les coefficients nécessaires à la construction d'une table, au moyen de deux réfractions observées; on considérera que par les formules de la trigonométrie la valeur de $m \sin. a$, ou $\sin. (a - nr) = \sin. a \text{ cof. } nr - \sin. nr \text{ cof. } a$ (3619), mais l'arc nr étant très-petit, l'on a $\text{cof. } nr = 1 - \frac{1}{2} n^2 r^2$ (3316); c'est pourquoi l'on aura $\sin. (a - nr) = \sin. a - \frac{1}{2} n^2 r^2 \sin. a - nr \text{ cof. } a$; & parce que $m \sin. a = \sin. (a - nr)$, divisant par $\sin. a$ & mettant $\text{cot. } a$ pour $\frac{\text{cof. } a}{\sin. a}$, on aura $m = 1 - \frac{1}{2} n^2 r^2 - nr \text{ cot. } a$.

En employant une autre réfraction r' à une distance du zénit a' , on a la même valeur; ainsi $\frac{1}{2} n^2 r'^2 - \frac{1}{2} n^2 r^2 = nr \text{ cot. } a - nr' \text{ cot. } a'$, & $\frac{1}{2} n = \frac{r \text{ cot. } a - r' \text{ cot. } a'}{r'^2 - r^2}$. Si r' est la

réfraction horizontale, on aura $\text{cot. } a' = 0$ & $n = \frac{2r \text{ cot. } a}{r'^2 - r^2}$.

Connoissant la valeur de n on trouvera aussi celle de $m = 1 - \frac{1}{2} n^2 r^2 - nr \text{ cot. } a$. Si r est une réfraction assez éloignée de l'horizon pour que $\text{cot. } a$ ne soit pas trop petite on pourra omettre $\frac{1}{2} n^2 r^2$ & faire $m = 1 - nr \text{ cot. } a$.

Pour la réfraction horizontale r' , on aura $\cot. a = 0$ & $m = 1 - \frac{1}{2}n^2r'^2 = \cos. nr'$ (3316).

Simpson employoit les valeurs suivantes, $a = 60^\circ$, $r = 1' 30'' \frac{1}{2}$, $r' = 33'$, ce qui donne $n = \frac{1}{2}$, $m = \cos. 3^\circ 1' \frac{1}{2} = \sin. 86^\circ 58' \frac{1}{2} = 0,9983$. Bradley supposoit $r = 1' 38'' \frac{4}{4}$, ce qui donne $n = 6$ & $m = \cos. 3^\circ 18'$. Si l'on employoit les réfractions de M. Cassini, (*Mém. ac.* 1714) $r' = 32' 20''$, $r = 5' 24''$, $a = 80^\circ$, on trouveroit $n = 6$, 452 & $m = \cos. 3^\circ 28' 37''$. Si l'on prenoit deux réfractions dans la table de M. de la Caille, $r = 1' 54'' \frac{4}{4}$ pour 60° & $r' = 8' 42''$ pour 84° , on trouveroit $n = 17,78$ au lieu de 6 & $m = \cos. 6^\circ 7'$; mais les réfractions de M. de la Caille n'étant point faites sur cette théorie ni assujetties à cette règle, il n'est pas étonnant qu'elles s'y accordent mal; il suffit d'une différence de quelques secondes dans les données pour en produire une très-grande dans les coefficients.

2214. Pour réduire en nombre la valeur de $\frac{1}{2}n$ donnée ci-dessus, il faut réduire le numérateur & le dénominateur en décimales du rayon; mais on peut simplifier l'opération en ôtant le logarithme de l'arc égal au rayon 5,3144251 de la somme des logarithmes de $r' + r$ & de $r' - r$ qui font celui de $r'^2 - r^2$, & l'on a pour valeur de n une quantité dont toutes les parties sont homogènes entr'elles (3359); parce que pour lors r & $r' + r$ restent exprimées en secondes de degré, & $r' - r$ se convertit en décimales du rayon.

Méthodes
pour avoir les
réfractions ab-
solues.

2215. La loi des réfractions ou la règle de leur progression étant supposée connue par la théorie précédente, il seroit facile de trouver les réfractions absolues. Je suppose, par exemple, qu'on ait observé la hauteur apparente de deux étoiles circompolaires au-dessus & au-dessous du pôle (33); en corrigeant ces quatre observations par les réfractions, elles doivent donner exactement la même hauteur du pôle; on pourra donc par de fausses positions trouver quelle est la réfraction horizontale qui, en suivant la théorie précédente, donnera quatre réfractions telles que la hauteur
du

du pôle se trouve exactement la même par chacune des deux étoiles. On pourroit même les donner par une formule directe ; mais on en a rarement besoin , & le calcul est aussi court par la méthode indirecte. De même la déclinaison du soleil observée très-exactement en divers temps de l'année a servi à M. Bradley pour construire sa table des réfractions , en supposant le rapport de ces réfractions connu par les règles précédentes.

2216. La règle de Bradley étant fondée sur une hypothèse qui n'est pas absolument conforme à la physique (2208) , mais que les observations nous font admettre , il étoit permis d'examiner si l'on ne représenté-
 roit pas encore mieux les observations en changeant un peu la forme de cette règle & la valeur des coefficients ; M. Bonne ayant combiné un très-grand nombre d'ob-
 servations , a trouvé qu'on les représenté-
 roit mieux en mettant au lieu du nombre 3 constant pour toutes les hauteurs, celui-ci $3,19953 + 0,03428 \cos. a$, en sorte que sa formule de réfraction se réduit à celle-ci , en suppo-
 sant a égale à la distance au zénit.

Règle de
M. Bonne.

$$\text{Réfraction} = \frac{\text{tang.} (a - R'' 3,19953 + 0,03428 \cos. a)}{\text{tang.} (90^\circ - 1944 (3,19953 + 0,03428 \cos. a) \frac{1}{1944})}$$

A la fin de nos tables, on trouvera la table de réfrac-
 tions calculée sur ce principe par M. Bonne , pour le
 cas où le baromètre est à 28 pouces de hauteur , &
 le thermomètre de M. Réaumur à 10° au-dessus de la
 congélation.

2217. Je reviens à l'hypothèse de la force constan-
 te (2209) , pour en tirer l'augmentation de vitesse
 de la lumière dans l'atmosphère , où la valeur de b . Soit
 ACI (fig. 140) $= x'$, CIG ou $CIA = a - x'$; $CIH =$
 $a - x' + r$; leurs sinus sont comme les perpendiculaires
 CG , CH , ou les vitesses 1 & $1 + b$ (2197. 2201) ,
 donc $(1 + b) \sin. (a - x') = \sin. (a - x' + r)$, & sup-
 posant que l'angle r soit fort petit $(1 + b) \sin. (a - x')$
 $= \sin. (a - x') + r \cos. (a - x')$, (3617) ; divisant par $\sin.$
 $(a - x')$ & mettant $\cotang.$ pour $\frac{\cos.}{\sin.}$, on a $1 + b =$

Changement
de vitesse de
la lumière.

Fig. 140.

$1 + r \cot. (a - x') \& b = r \cot. (a - x')$. Pour faire usage de cette formule, il faut observer que la valeur de x' est très-petite en comparaison de a , sur-tout lorsque a n'approche pas beaucoup de 90° , car $\sin. CAG$ ou $a : \sin. CIG$ ou $a - x' : CI : CA$, c'est à dire, dans un rapport qui diffère peu de l'égalité. Si la réfraction à 60° de distance au zénit est $1' 38'' 4 = r$, on trouve $b = r \cot. a$, ou $\sin. r \cot. a = 0,0002755$; Hauksbée trouvoit $0,000264$ en se servant de la réfraction observée du vide dans l'air, le sinus d'incidence étant au sinus de réfraction, comme $1 + b$ est à 1 ; cela s'accorde assez avec les réfractions de Bradley, tandis que celles de M. de la Caille donneroient $0,00032$, qui est sensiblement trop fort; aussi est-on persuadé que les réfractions de M. de la Caille sont un peu trop considérables (2180). On peut aussi déduire b de la valeur de m , car $b = r \cot. a \& 1 - m = nr \cot. a$, donc $b = \frac{1 - m}{n}$ & si $m = 0,9983$ (2213), on a $b = 0,000277$, ce qui ne diffère pas beaucoup de ce qu'on vient de trouver par une méthode indépendante de l'hypothèse de la force constante.

2218. Sous la zone torride au niveau de la mer M. Bouguer a trouvé la réfraction horizontale de $27'$, & à 83° de $5' 30''$; par-là on trouve $\frac{1}{2} n = \frac{r \cot. a}{r' - r} = 3,262$; $m = \cos. nr = 0,99866$ & $b = 0,0002054$; cette quantité est plus petite que dans nos climats, & nous verrons bientôt que la raréfaction produite par la chaleur de l'air diminue les réfractions (2222).

Hauteur
de l'atmosphère.

La hauteur e de l'atmosphère sensible ou réfringente se trouvera facilement par ces formules, car $m = \frac{1 + b}{1 + e}$ (2201); donc $e = \frac{1 - m + b}{m}$, & parce que $b = \frac{1 - m}{n}$ (2217), on a $e = \frac{(n + 1)(1 - m)}{nm}$. Cette expression fait voir que la distance au centre de la terre change réellement plus que la vitesse, car le changement e de la distance est au changement b de la vitesse, comme $n + 1$ qui surpasse un peu l'unité est à m qui est un peu moindre que l'unité,

quand on l'exprime en parties du rayon de la terre (2219); mais on peut prendre pour le rapport de ces changemens le rapport de $n+1$ à 1. Avec les réfractions de Bradley on trouve $e = 0,001942$ en parties du rayon de la terre (2690); avec celles de Bouguer $0,001548$, ce qui fait 6342 & 5065 toises; M. Bouguer trouvoit 5158 toises, fondé en partie sur les réfractions horizontales observées à différentes hauteurs, & en partie sur une hypothèse qui revenoit à peu-près à la force constante que nous employons actuellement.

2219. On peut trouver par ces formules la réfraction pour un lieu situé à une élévation quelconque, & pour des objets situés même au-dessous de l'horizon, pourvu qu'on ait déterminé m & n pour le lieu proposé. La valeur de n est la même à quelle hauteur que l'on soit; car c'est le nombre 6 par lequel se multiplie la réfraction pour corriger la distance au zénit (2210), or cette loi, qui vient de la nature de la réfraction est la même dans toute la hauteur de l'atmosphère, puisque la force est constante. Pour trouver la valeur de m qui dépend de la hauteur de l'atmosphère, on se rappellera que $e = \frac{(n+1)(1-m)}{nm}$ (2218), donc $m = \frac{n+1}{n+1+en} = 1 - \frac{en}{n+1}$ en faisant la division suivant les règles ordinaires, & négligeant les puissances supérieures de e à cause de la petitesse de cette hauteur e de l'atmosphère.

Par exemple, les observations de M. Bouguer donnent $n = 6,524$, & la hauteur totale de l'atmosphère 5055 toises; ainsi à 2388 toises de hauteur la distance au sommet ou la valeur de e qui est la hauteur de l'atmosphère dans ce cas-là, $= 2667 = 0,008166$, d'où l'on conclut $m = 1 - \frac{en}{n+1} = 0,9992919 = \text{cos. } nr$ (2210), dans le cas de la réfraction horizontale; on a donc $nr = 2^{\circ} 9' 24''$ & $r = 19' 50''$. Or cette réfraction fut observée par M. Bouguer en différens temps de $19' 34''$, de $19' 35''$ & de $20' 17''$; enforte que cette règle de théorie

Réfraction
à différentes
hauteurs.

donne une réfraction qui tombe fort bien entre celles que donne l'observation.

2220. Pour une hauteur p au-dessus de l'horizon ; si l'on appelle q cette hauteur augmentée d'un certain angle (2212), on a $\text{cof. } q = m \text{ cof. } p \text{ \& } r = \frac{q-p}{n}$, d'où il est aisé de conclure la réfraction ; par exemple, pour 7° on trouve $3' 55''$; par l'observation elle étoit de $3' 24''$ ou de $3' 51''$.

Au-dessous
de l'horizon.

Pour le cas où l'objet paroïssoit au-dessous de l'horizon rationel, de $1^\circ 17'$, p étant négatif, on trouve $34' 53''$, tandis que par observation M. Bouguer trouvoit $34' 47''$; l'augmentation est rapide au-dessous de l'horizon, parce que l'on a la somme des deux angles p & q , au lieu qu'au dessus de l'horizon l'on n'avoit que leur différence. Nous parlerons bientôt de ces réfractions terrestres (2251).

2221. La valeur de $m = \text{cof. } nr = 1 - \frac{en}{n+1}$ (2219) sert à prouver ce qu'avoit remarqué M. Bouguer, que la réfraction horizontale à différentes hauteurs est comme la racine de la distance au sommet de l'atmosphère ; car $\frac{en}{n+1} = 1 - \text{cof. } nr = \text{sin. verse } nr = \frac{1}{2} n^2 r^2$ (3316) ; donc $r^2 = \frac{2e}{n(n+1)}$; donc r est comme la racine de e .

Réfraction
sur les mon-
tagnes.

Ainsi pour avoir la réfraction horizontale à un degré quelconque de hauteur au-dessus du niveau de la mer, on ôte cette hauteur de celle de l'atmosphère (5158 toises suivant M. Bouguer), & la réfraction horizontale est comme la racine du reste, qui est la hauteur restante de l'atmosphère au-dessus du lieu de l'observation.

C'est ainsi que le P. Boscovich a déduit toutes les règles & toutes les formules qu'on avoit données jusqu'ici pour la réfraction, d'une théorie aussi simple qu'elle est élégante & féconde ; on trouvera de plus grands détails dans le mémoire qu'il a composé sur cette matière, & qui est destiné à paroître dans un des volumes des *Mémoires présentés à l'académie*.

DU CHANGEMENT DE LA RÉFRACTION
produit par les variations de l'atmosphère.

2222. LA densité de l'air est la cause immédiate de la réfraction ; il étoit donc naturel de croire que la réfraction diminueroit lorsque la densité de l'air deviendroit moindre, soit par l'expansion que produit la chaleur, soit par les causes qui en diminuent le poids ; les astronomes ont en effet reconnu dans les réfractions, deux sortes de variétés très-sensibles, dont l'une dépend de la chaleur de l'air, & l'autre de son poids ; elles sont indiquées par le thermomètre (129), (a) & par le baromètre, instrument que je suppose connu, & dont j'ai parlé fort au long dans la *Connoiss. des mouv. célestes de 1765*.

2223. Tycho-Brahé en donnant sa table des réfractions reconnut bien qu'elles étoient sujettes à des variations, (*Progymn. pag. 79, 104*) ; mais M. Cassini & M. Picard furent les premiers qui mesurèrent avec quelque précision le changement & l'inégalité des réfractions. M. Picard reconnut par les hauteurs méridiennes du soleil en 1669, que les réfractions étoient plus grandes en hiver qu'en été, & la nuit plus grandes que le jour. (*Hist. célest. pag. 19*). Suivant les observations rapportées à la fin de son voyage d'Uranibourg, (*pag. 41*), il trouva la réfraction horizontale de 33' 2" par le premier bord du soleil, & 32' 37" par le second bord ; en sorte que dans le petit intervalle de temps que le soleil emploie à se lever, la réfraction diminue de 25" par la présence du soleil. Il ajoute qu'étant au Mont-Valérien & ayant pointé un quart-de-cercle vers

M. Picard observe l'inégalité des réfractions.

(a) Θερμὸς, calidus, Μέτρον, mensura, Βάρος, pondus. Le baromètre n'est qu'un tube vide d'air à sa partie supérieure, & dans lequel une colonne de vis-argent se tient élevée par la pression de l'air d'envi-

ron 28 pouces, cette hauteur diminue quand l'air devient plus léger (2270). M. Bouguer l'a vu à 15 pouces 11 lignes à une hauteur de 2484 toises. (*Mém. acad. 1753, pag. 516*).

le sommet des Tours de Notre-Dame de Paris, il trouva leur abaissement de 20'; mais le soleil ne fut pas plutôt levé que l'abaissement fut de 22'; les vapeurs s'étoient élevées par la présence du soleil, & le milieu entre Paris & le Mont-Valérien étoit devenu plus égal, au lieu qu'avant le lever du soleil Paris étoit dans un air plus dense que le Mont-Valérien.

Changement
du jour à la
nuit.

2224. Ce changement de la réfraction a été observé de même en Amérique; M. Bouguer a observé que les réfractions de la nuit y sont plus grandes que celles du jour, de $\frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{7}$. (*Mém. acad.* 1749, pag. 105). Avant le lever du soleil le froid est plus grand, l'atmosphère plus condensée doit avoir perdu le plus de sa hauteur, au moins par sa partie inférieure; si l'atmosphère se condendoit par-tout proportionnellement d'un septième de son volume le changement de réfraction ne seroit que de $\frac{1}{14}$, c'est-à-dire, la moitié moindre, comme le démontre M. Bouguer; mais les variations se font principalement dans la partie inférieure & vont en effet à un septième, tandis qu'elles sont insensibles dans la partie supérieure de l'atmosphère (2254).

C'est sur-
tout dans la
partie infé-
rieure de l'at-
mosphère,

2225. M. Halley remarqua à l'occasion des hauteurs méridiennes de Sirius observées à Paris en 1714 & 1715, qu'il devoit y avoir 8" de différence en divers temps de l'année sur la réfraction qui convient à cette hauteur, (*Phil. transf.* n°. 364). En effet, la hauteur du baromètre qui marque la pesanteur de l'air, varie d'environ deux pouces sur vingt-huit, ou d'un quatorzième: les réfractions sont proportionnelles à la densité du milieu, comme il est démontré par les expériences de Hauksbée faites sur un air condensé au double & au triple; ainsi les réfractions doivent changer aussi d'un quatorzième, & puisqu'à la hauteur de Sirius qui est de 25°, la réfraction est, suivant M. Halley, de 1'55', il doit y avoir des différences de 8" suivant les temps & les pesanteurs de l'air: nous en parlerons ci-après (2237).

Hauksbée
prouve qu'il
doit avoir
lieu.

Effet de la
chaleur.

2226. M. le Monnier en 1738 & 1739, fit un grand nombre d'observations sur les réfractions des

Étoiles circompolaires ; elles sont rapportées au commencement de l'Histoire céleste, qu'il a publiée en 1741. Il employa pour observer la réfraction, les étoiles qui passent aux environs du zénit de Paris, telles que la Chèvre, la Claire de Persée, & la dernière de la grande Ourse, il déterminoit leur distance au zénit avec le grand secteur de 9 pieds, qui avoit servi en Laponie pour la figure de la terre (2380), & il observoit ensuite leur hauteur sous le pôle avec un quart-de-cercle de trois pieds de rayon. Ainsi, le 24 Septembre 1738 l'étoile α de la Chèvre observée à $48^{\circ} 51'$ de latitude, parut à $3^{\circ} 9' 24'' \frac{1}{2}$ du zénit, l'observation étant réduite au premier Juillet 1738 ; la vraie distance de la Chèvre au pôle étoit donc de $44^{\circ} 18' 24'' \frac{1}{2}$, & sa hauteur inférieure devoit être de $4^{\circ} 32' 35'' \frac{1}{2}$, mais le 14 Juillet cette hauteur méridienne parut de $4^{\circ} 42' 23''$; ainsi la réfraction étoit de $9' 47'' \frac{1}{2}$ à cette hauteur, tandis que, suivant la table de M. Cassini, elle devoit être de $11' 7''$. Le thermomètre qui avoit monté à 23° , vers les trois heures, étoit encore sur les neuf heures du soir à 18° , ainsi la réfraction étoit plus petite de $1' 20''$ que suivant la table de M. Cassini. Le 5 Août on la trouva de $9' 20''$ seulement, le baromètre étoit à 27 pouces $\frac{1}{2}$.

Au mois de Février 1739, la distance de la Chèvre au zénit, observée avec le secteur, étoit de $3^{\circ} 9' 9''$, & par conséquent sa hauteur méridienne sous le pôle devoit être de $4^{\circ} 32' 51''$; cependant le 4 Février au matin, le thermomètre étant à 5° , la hauteur apparente inférieure fut déterminée de $4^{\circ} 43' 22''$, la réfraction étoit donc de $10' 31''$, plus grande de $71''$ qu'elle n'avoit été le 5 Août 1738.

2227. Le 27 Février 1740, le thermomètre étant à 10° au-dessous de la congélation, & la vraie hauteur de la Chèvre devant être de $4^{\circ} 33' 2''$, à la même latitude $48^{\circ} 51'$, cette hauteur parut de $4^{\circ} 44' 15''$; ainsi la réfraction à cette hauteur étoit de $11' 13''$; l'observation du 26 donnoit $11' 18''$; ainsi M. le Monnier établit par ces deux observations la réfraction dans le plus

Différence
de 2' pour
36° du ther-
momètre.

grand froid. à Paris, lorsque le thermomètre est à 10° au-dessous de la congélation, de 11' 15" à 4° 44' $\frac{1}{4}$ de hauteur apparente, tandis qu'elle a été observée de 9' 20" à 24° au-dessus de la congélation; la différence est à raison de 2' pour 36° du thermomètre. Le baromètre étoit à 28 pouces.

2228. M. le Chevalier de Louville, à Carré, près d'Orléans; M. le Docteur Bévis, à Newington, près de Londres, avoient fait aussi de semblables observations, & M. le Monnier en avoit déduit les réfractions, mais il ne les a point publiées. (*Hist. célest. pag. xxxjii*).

2229. Les changemens de la réfraction horizontale pourroient peut-être se reconnoître par la seule observation des amplitudes; M. le Monnier remarque, par exemple, que de la hauteur de Chatillon, près Paris, où est bâti l'observatoire de M. le Prince de Croy, l'on peut appercevoir le lever & le coucher de la lyre, & qu'une seule minute de variation dans la réfraction horizontale en produit 29 dans la distance apparente des verticaux du lever & du coucher; ce seroit peut-être un moyen d'observer les variations relatives au thermomètre & au baromètre, avec assez de précision. (*Mém. acad. 1766, pag. 611*). Mais il y a trop peu de beaux jours à Paris, pour qu'on puisse espérer beaucoup d'une pareille méthode.

2230. De ces différences de réfraction en différentes saisons de l'année, on est porté à conclure que les différens climats de la terre doivent aussi éprouver des réfractions différentes; on avoit cru que dans le nord les réfractions augmentoient considérablement. (*Mém. acad. 1700, pag. 37*); elles alloient même jusqu'à un degré par les observations de Bilberg & de Spole, Mathématiciens de Charles XI, Roi de Suède; mais probablement il s'étoit glissé quelque erreur dans leur observation.

L'examen des réfractions dans le nord étoit un des objets que se proposèrent les Académiciens qui allèrent en Suède en 1736, & voici ce que M. le Monnier en rapporte.

2231. Le 5 Janvier 1737, à Tornea sur les confins de la Laponie où nos Académiciens étoient allé mesurer la base qui devoit servir à leurs triangles, le thermomètre marquoit 31° au-dessous de la glace à 11^h du matin, un peu avant le lever du soleil; le même jour la réfraction fut déterminée par l'observation du soleil à midi de $20' 3''$ à la hauteur de $2^{\circ} 9' \frac{1}{2}$, ce qui étoit conforme à la table de M. Cassini.

Le 7, la réfraction fut trouvée d'une minute plus grande que suivant la table, ou de $20' 10''$ à la hauteur de $2^{\circ} 24' \frac{1}{2}$; mais quelquefois on la trouva d'une minute plus petite, sur-tout quand le thermomètre étoit aux environs de la congélation; enfin l'on fut obligé de conclure que les réfractions étoient les mêmes au cercle polaire qu'à Paris, parce qu'elles furent trouvées assez souvent d'accord avec la table de M. Cassini, principalement dans les plus grands froids. (*Hist. célest. pag. XII.*)

Réfractions
égales dans le
Nord.

2232. M. de la Caille étant en Afrique, se proposa aussi d'examiner si les réfractions étoient égales au Cap & à Paris; pour cela, il choisit deux étoiles telles que γ du Sagittaire, & β du Cocher; la première passe à 4° du zénit du Cap & à 79° de celui de Paris; la seconde passe à 4° du zénit de Paris, & à 79° de celui du Cap; si la distance de ces deux étoiles ne paroît pas la même au Cap & à Paris, c'est-à-dire, si la réfraction accourcit plus leur distance à Paris qu'au Cap, c'est une preuve que la réfraction est plus forte à Paris, & M. de la Caille trouva en effet $7''$ sur $5' 12''$, c'est-à-dire, un 44^e de plus à Paris. Ayant formé ainsi 47 comparaisons de différentes étoiles prises deux à deux; il n'y en eut que 7 qui indiquèrent une réfraction plus petite à Paris, toutes les autres la donnèrent plus grande; il y en eut qui donnèrent même un seizième de plus, mais la quantité moyenne entre toutes est un quarantième. (*Mém. acad. 1755, pag. 562.*)

2233. Cette différence paroît à M. de la Caille assez petite pour lui faire tirer cette conclusion définitive, « que l'on peut, sans craindre des erreurs sen-

Et dans
toute la Zone
Tempérée.

» sibles, se servir dans toute l'étendue des zones tem-
 » pérées d'une même table de réfractions, quand même
 » un observateur la trouveroit un peu en défaut par des
 » observations faites près de son horizon, parce qu'on
 » doit attribuer l'erreur apparente à la réfraction ter-
 » restre & aux autres circonstances locales ».

Dans la
 Zone Tor-
 ride.

2 2 3 4. Pour déterminer les réfractions dans la Zone Torride, M. Bouguer fit au Pérou différentes observations dont on trouve le résultat dans les mémoires de 1739; il descendit encore en 1740, dans une Isle de la riviere des Emeraudes, nommée alors l'Isle de l'Inca, & qui a été appelée depuis ce temps-là l'Isle de l'Observatoire; & il y détermina les réfractions horizontales depuis 1 jusqu'à 7°: la table qu'il dressa fait voir que les réfractions y sont plus petites environ d'une septième partie qu'elles ne sont en Europe; cette table est dans les mémoires de 1739; la réfraction horizontale y est de 27'; à 6° de hauteur elle est de 7' 4'', & à 45° de 44''. M. Bouguer a donné ensuite une table de réfraction pour Quito, qui est plus élevé au-dessus du niveau de la mer. (*Mém. acad.* 1749), & je l'ai insérée dans la *Connoiss. des mouv. célest. pour 1765*.

Diminution
 des Réfrac-
 tions lorsqu'on s'éle-
 ve.

2 2 3 5. M. Romer étoit persuadé que sur des lieux élevés les réfractions devoient être plus grandes, (*Horrebow Atrium Astron. pag. 6 & 83*), & on le croyoit assez généralement avant le voyage du Pérou. Pour décider cette question, M. Bouguer observa au mois de Décembre 1738 la réfraction à Chimborazo 2388 toises au-dessus du niveau de la mer, il n'y trouva la réfraction horizontale que de 19' $\frac{3}{4}$ (*Mém. acad.* 1749, pag. 79 & 82); à la croix de Pitchincha qui est à 2044 toises il la trouva de 20' 48''; à Quito, qui est élevé de 1479 toises, de 22' 50''; enfin au niveau de la mer de 27'. Ces observations, jointes à la théorie (2219), lui firent établir cette règle générale: si l'on prend l'excès de 5158 toises sur l'élévation des lieux par rapport au niveau de la mer, les réfractions y sont comme les racines de ces excès. Ainsi la racine carrée de 5158

est à 27', réfraction horizontale au niveau de la mer dans la Zone Torride, comme la racine carrée de l'excès de 5158 toises sur la hauteur du poste proposé fera à la réfraction horizontale. Nous en avons fait voir la raison (2221). La quantité de 5158 toises est la hauteur au-dessus de laquelle la matière réfractive ne produit plus d'effet sensible, du moins dans la Zone Torride.

Changement
de Réfraction
relatif au ba-
romètre.

2236. Ayant reconnu que les réfractions étoient plus petites le jour que la nuit; plus petites l'été que l'hiver, & plus petites dans la Zone Torride que dans les Zones Tempérées; il étoit naturel de chercher combien, dans le même pays, il devoit y avoir de différence lorsque l'air y étoit plus ou moins dense, plus ou moins pesant; par exemple; on prend pour terme moyen de la pesanteur de l'air, le cas où il soutient le mercure dans le baromètre à 28 pouces de hauteur mesure de Paris; mais cette élévation change à Paris depuis 26 pouces 3 lignes, jusqu'à 28 pouces 9 lignes, quoique ces extrêmes soient très-rares, & la réfraction doit changer à proportion (2225).

2237. Si l'on établit les réfractions moyennes pour 28 pouces, on devra les trouver plus petites d'une 28^e partie quand le Mercure descendra d'un pouce, c'est-à-dire, quand le poids de l'air aura diminué d'un 28^e; sur le sommet de Pitchincha, le mercure n'alloit qu'à 15 pouces 11 lignes; aussi la réfraction y étoit-elle très-petite. Il en fera de même de tous les autres cas: la variation de la réfraction fera toujours à la réfraction moyenne, comme le changement du baromètre est à sa hauteur moyenne 28 pouces (2225).

2238. Cette règle adoptée d'abord par M. Halley (2225); confirmée ensuite par M. Euler dans les calculs qu'il a donnés sur le changement des réfractions, (*Mém. de Berlin* 1754, pag. 168), a été suivie par M. Mayer & par M. de la Caille; & les observations du baromètre que M. de l'Isle a faites chaque jour à Paris pendant plusieurs années, ont servi à réduire les réfractions obser-

vées par M. de la Caille, à leur quantité moyenne; toutes les fois que dans le temps des observations le baromètre différoit de 28 pouces. Ces réfractions ainsi corrigées se sont trouvées d'une régularité qui prouve la bonté de cette règle, & M. de la Caille a fait en conséquence une table (2240), où l'on voit quelle fraction ou quelle partie de réfraction il faut ajouter à la moyenne, ou en ôter, pour avoir la réfraction actuelle & apparente quand le mercure est au-dessus ou au-dessous de 28 pouces; cette quantité est, par exemple, de $\frac{1}{14}$ de la réfraction moyenne, quand le baromètre est à 26 pouces; parce que 2 pouces font $\frac{1}{14}$ de 28; c'est sur ce principe qu'on a dressé la table du changement des réfractions, ou des densités de l'air pour chaque hauteur du thermomètre & du baromètre, qui est à la suite de nos tables. On en trouve aussi une dans les tables de M. Mayer, publiée à Londres en 1770; avec laquelle il étoit persuadé qu'on pouvoit représenter les réfractions dans tous les pays de la terre.

Changement
relatif au ther-
momètre.

2239. Les changemens que la chaleur produit dans les réfractions, ont été déterminés par observation. M. de la Caille a trouvé que les réfractions diminuent d'une vingt-septième partie, quand le mercure change de 10 degrés sur le thermomètre de M. de Réaumur (129); il prend pour réfraction moyenne celle qui a lieu, quand le thermomètre est à la température moyenne des caves de l'Observatoire, c'est-à-dire, à 10° sur le thermomètre de M. de Réaumur, 134 de M. de l'Isle, & 54 $\frac{1}{2}$ de Fahrenheit.

M. Mayer, qui depuis plusieurs années observoit à Gottingen, avec un excellent quart-de-cercle mural de six pieds de rayon, construit à Londres par Bird, avoit communiqué à M. de la Caille plusieurs observations faites pour déterminer les réfractions; il trouvoit que la réfraction moyenne changeoit de $\frac{1}{22}$, soit pour 15 lignes de variation dans le baromètre, soit pour 10° de changement dans le thermomètre, en prenant pour réfraction moyenne, celle qui répond à 28 pouces du

M. Mayer
le trouve par
observation.

baromètre , & à 0° du thermomètre , c'est-à-dire , à la première congélation. Cette proportion avoit lieu , selon lui , depuis 10° de hauteur jusqu'au zénit , & il étoit persuadé que la réfraction étoit la même sur toute la surface de la terre , sans autre variation que celle du thermomètre & du baromètre.

2240. M. de la Caille , d'après la formule de M. Mayer , dressa deux tables fort amples des variations , qui répondent aux différentes hauteurs du thermomètre & du baromètre , il corrigea au moyen de ces deux tables toutes ses observations des étoiles faites à Paris depuis 7° de hauteur jusqu'à 36 , & au Cap , depuis 5° $\frac{2}{3}$ de hauteur jusqu'à 30 ; il trouva en général que ces équations rétablissoient assez bien les inégalités des distances apparentes d'une même étoile au zénit , observées en différentes saisons & en différens états de l'atmosphère. Cependant la correction qui répondoit aux variations du thermomètre lui parut un peu trop grande ; & après plusieurs essais , il jugea qu'il falloit la faire égale tout au plus à $\frac{1}{27}$ des réfractions moyennes qui conviennent à 10° du thermomètre. Ayant constaté cette valeur , il réduisit en une seule table à double entrée les deux corrections , & il les employa à réduire toutes ses hauteurs observées , à une température moyenne. L'exactitude de cette table fut constatée par le résultat de 243 comparaisons différentes corrigées d'après les équations qu'elle indique , la moitié de ces observations ne diffèrent que de 2'' du résultat qu'on devoit avoir , & il n'y en a pas un quart où la différence soit de plus de 6'' ; on trouvera cette table dans mon *Exposition du calcul astronomique* , pag. 252 , & dans l'édition Françoisse que j'ai donnée en 1759 des tables de Halley pour les planètes. M. de la Caille a représenté toutes ses observations d'une manière très-satisfaisante , au moyen de cette table ; en effet les distances entre le parallèle du Cap & ceux de Paris , de Greenwich , de Berlin , de Bologne & de Gottingen , corrigées par la seule table des réfractions moyennes , paroissent toujours

M. de la Caille diminue cette quantité.

Table des densités de l'air.

plus petites lorsqu'il comparoit des observations faites dans les temps froids, & plus grande dans les autres: de 243 comparaisons que M. de la Caille a faites entre le Cap & Paris, il n'y en a que 7 qui donnent 10" de plus que 82° 46' 42" distance vraie des parallèles de Paris & du Cap, & 3 qui donnent 10" de moins; il y a 198 comparaisons qui ne s'en écartent pas de plus de 6", & 119 qui la donnent à 2" près.

2241. M. Bonne ayant fait ensuite des expériences & des calculs sur ces densités de l'air & comparé beaucoup d'observations avec une très-grande sagacité, a fait une autre table du changement de la réfraction ou des densités de l'air; il suppose la réfraction moyenne pour 10° & pour 28 pouces égale à 1, & en changeant la température, pour la même hauteur du baromètre, c'est-à-dire 28 pouces, il trouve pour 30° de chaleur 0,920, & pour 8° de froid 1,085. La table qu'il a dressée en conséquence est à la fin de nos tables astronomiques; elle est fondée sur ce que la densité de l'air exprimée dans la table est égale au volume de l'air à la température, multiplié par la hauteur actuelle du baromètre; divisé par le volume qui répond à la chaleur actuelle; multiplié par la hauteur moyenne du baromètre.

2242. Pour réduire cette formule en table, il faut supposer le volume de l'air au tempéré égal à 229 parties (a); pour avoir ensuite le volume qui répond à la chaleur actuelle, on y ajoutera autant d'unités qu'il y aura de degrés au-dessus de la température; ou bien

(a) Ce nombre 229 exprime le volume total de l'air au tempéré, en supposant que le changement total soit de 90 parties, comme dans un thermomètre à Mercure qu'on fait passer de la glace à l'eau bouillante; M. Bonne a déterminé ce nombre 229 en faisant soutenir une goutte de Mercure par l'air d'un thermomètre, mis à la glace & à l'eau bouillante; le nombre de lignes cubes de l'espace que la goutte de Mercure a parcouru, est à 90,

comme le nombre de lignes cubes, compris dans la boule & le tube au-dessous de la congélation, est à 229, & il a trouvé le même résultat par les calculs faits d'après les observations de M. Mayer, de M. de la Caille & de M. de Luc; c'est une chose assez singulière observée par M. Bonne que les volumes de l'air, à la glace & à l'eau bouillante, sont entr'eux comme le côté d'un carré est à sa diagonale.

l'on en ôtera autant d'unités qu'il y aura de degrés au-dessous de la même température ; par exemple, pour 30° du thermomètre on ajoutera 20, & l'on aura 249, volume répondant à la chaleur actuelle de 30° ; pour 8° au-dessous de la congélation, on ôtera 8 & l'on aura 211. Ainsi la formule pour 30° & 27 pouces du baromètre est $\frac{229}{336} \times \frac{324}{249} = 0,887$, tel est le fondement de la table que j'ai adoptée.

Effet de la Réfraction sur la hauteur du pôle à Paris.

2243. L'INCERTITUDE que l'on a sur la hauteur du pôle à Paris vient de l'incertitude de la réfraction à 49° de hauteur ; c'est donc ici le lieu de parler de cette hauteur du pôle & de la réfraction qui y convient. La latitude du milieu de Paris, qui est de 48° 51' 22", étoit marquée de 48° 30' dans la Géographie de Ptolomée (II. 8.), de 48° 40' dans Oroncé Finé, qui vivoit en 1528, dans Fernel son contemporain, dans Merfenne, Bourdin, Alleaume ; elle est de 48° 49' dans Viète, (*Responsorum*, L. II.), de 48° 50' dans le Comte de Pagan, Morin & Duret ; de 48° 51' dans Boulliaud ; de 48° 52' dans Midorge & Gassendi, en 1625 ; de 48° 54' dans Roberval & Hénrion. (*Cosmo. pag. 328*) ; de 48° 55' dans la même Cosmographie, pag. 325, c'étoit en 1614. M. Petit, Intendant des Fortifications, la trouva en 1652 par les hauteurs méridiennes du soleil de 48° 53' 10", & en 1654 de 48° 52' 41". MM. Roberval & Buot en 1667, 48° 53' au Jardin de la Bibliothèque du Roi. Ce ne fut qu'à l'époque de l'application des lunettes aux quart-de-cercles qu'on eut de la précision & de la certitude sur cet article fondamental de l'astronomie ; la hauteur du soleil au solstice d'été, le 21 Juin 1667, prise à l'endroit désigné pour le bâtiment de l'Observatoire Royal, fut trouvée de 64° 41' quantité trop grande de près de 2' ; ce ne fut qu'à

la fin de l'été que se fit cette découverte importante pour la perfection des quarts-de-cercle. Il faut observer aussi que nous ne savons pas à quel endroit de Paris quelques-unes de ces observations furent faites, & que depuis la Porte Montmartre, vers laquelle M. Picard observoit en 1766; jusqu'à l'Observatoire Royal, il y a plus de 2000 toises de différence en latitude.

Hauteur
du pole const-
ante.

La hauteur du pole est constante, c'est une vérité reçue de tous les astronomes; M. Manfredi avoit cru reconnoître une variation dans celle de Bologne, par la comparaison des solstices d'hiver & d'été observés à la méridienne de S. Petrone depuis 80 ans, (*De gnomone Bonon.* cap. 16); mais je suis persuadé qu'il faut attribuer à des circonstances locales, les différences qu'il a trouvées.

2244. La hauteur apparente du pole en 1667, fut observée à Paris par M. Picard, au Jardin de la Bibliothèque du Roi, de $48^{\circ} 53'$; d'où il résulte qu'à l'Observatoire Royal, la hauteur apparente du pole étoit de $48^{\circ} 51' 10''$; on ne comptoit pas beaucoup alors sur la différence de la hauteur vraie à la hauteur apparente, quoique M. Cassini l'eût indiquée; si l'on en ôte $53''$, on aura pour la hauteur vraie $48^{\circ} 50' 17''$ par les observations de 1667.

M. de la Hire observa dans la suite la hauteur apparente $48^{\circ} 51' 2''$; & comme il augmentoit la réfraction & diminuoit la parallaxe du soleil, il trouva la vraie hauteur $48^{\circ} 49' 58''$; mais M. le Monnier a fait voir, (*Hist. célest. pag. XIX*), que le quart-de-cercle de 32 pouces de rayon, dont M. Picard & M. de la Hire se servirent, n'étoit pas aussi exact que ces astronomes le croyoient, & qu'il ne falloit pas compter sur cette détermination à quelques secondes près.

Suivant M. de Louville (*Mém. acad. 1721*), la hauteur apparente du pole à l'Observatoire étoit $48^{\circ} 50' 58''$; il en ôte $50''$ pour la réfraction, ce qui donne la hauteur vraie $48^{\circ} 50' 8''$.

M. Maraldi (*Mém. acad. 1733*), trouve $48^{\circ} 50' 12''$;
&

& M. le Monnier y ajoute 2'' de plus, à cause de la réfraction, (*Mém. acad.* 1739), ce qui donne $48^{\circ} 50' 14''$.

M. le Monnier par des observations de l'étoile polaire; faites en 1738, trouva la hauteur apparente du pôle $48^{\circ} 51' 4''$, il en conclut la hauteur vraie $48^{\circ} 50' 14''$, (*Mém. acad.* 1739, pag. 220). Par d'autres observations faites en 1740, il jugea la hauteur apparente du pôle à l'observatoire royal $48^{\circ} 51' 9''$, & la hauteur vraie $48^{\circ} 50' 15''$, la réfraction étant de $54''$ lorsque le thermomètre étoit à 3° au-dessous de la congélation, (*Hist. célest.* pag. xxxvii).

M. Cassini de Thury au moyen d'un quart-de-cercle de 6 pieds de rayon, qui venoit d'être construit pour l'observatoire, trouva la hauteur du pôle en 1742, de $48^{\circ} 50' 12''$ & de $48^{\circ} 50' 9''$, en employant les deux lunettes différentes, & en supposant la réfraction de $52''$ à la hauteur du pôle; s'il avoit supposé la réfraction de $58''$, comme M. de la Caille, il n'auroit trouvé par ses observations que $48^{\circ} 50' 5''$, (*Mém. acad.* 1744).

2245. Enfin, M. l'Abbé de la Caille après un nouveau travail sur les réfractions, fait avec deux secteurs différens de 6 pieds de rayons, vérifiés une multitude de fois & avec les soins les plus scrupuleux, a jugé par un très-grand nombre d'observations, que la réfraction à la hauteur du pôle de Paris étoit de $58''$, & la vraie hauteur du pôle à l'observatoire royal de Paris $48^{\circ} 50' 14''$, (*Mém. acad.* 1755, pag. 569).

Vraie latit.
à Paris 48°
 $50' 14''$.

Ainsi M. de la Caille avec une réfraction plus grande de $6''$ que M. Cassini ne la supposoit, (ce qui devoit diminuer la hauteur du pôle), a trouvé cependant encore $4''$ de plus pour la hauteur du pôle, ainsi il y a $10''$ de différence entre ces observations; au reste ces différences sont assez petites pour prouver que la hauteur du pôle ne varie point dans un même lieu; c'est-à-dire, que le mouvement diurne de la terre se fait toujours sensiblement sur le même axe, & autour des mêmes

points. Cette hauteur du pôle de $48^{\circ} 50' 14''$ est celle dont j'ai coutume de me servir.

Autres effets de la Réfraction.

Sur les
diamètres.

2246. LORSQUE le bord inférieur du soleil ou de la lune paroît à l'horizon, si la grandeur réelle du diamètre de l'astre est de $30'$, la réfraction étant plus petite d'environ $4' 21''$ à $30'$ de hauteur apparente qu'elle n'est à l'horizon, le bord supérieur du soleil étant beaucoup moins élevé par la réfraction que le bord inférieur, le diamètre vertical paroîtra plus court que le diamètre horizontal; voilà pourquoi le soleil paroît ovale quand il se leve ou qu'il se couche; M. de Mairan a vu le soleil sensiblement elliptique, même à 10° de hauteur sur l'horizon, le 28 Juin 1733, (*Mém. acad.* 1733, pag. 329).

Cet effet des réfractions ne fut pas inconnu aux anciens: Diodore de Sicile parle avec étonnement d'un pays où le soleil ne paroît point rond, mais un peu applati; il paroît que ce fait étoit emprunté d'Agatharchides, qui avoit aussi parlé d'un pays où le jour ne duroit que trois heures; le passage entier mérite d'être lu.

Cet accourcissement du diamètre vertical a lieu proportionnellement sur tous les diamètres inclinés, du soleil & de la lune; or les astronomes faisant un usage continuel de ces diamètres observés dans tous les sens, il est important d'en tenir compte dans le calcul; j'en ai donné une table dans mon *Exposition du calcul astronomique*, & on la trouvera encore parmi les tables qui sont à la fin du premier volume de cet ouvrage. T. LXXXIII.

Pour en exposer la construction, je suppose d'abord que la figure du diamètre du soleil est sensiblement elliptique par l'effet de la réfraction; cela est vrai du moins au-delà de 3 ou 4° de hauteur; car la réfraction étant alors uniforme, l'accourcissement de la réfraction est proportionnel à la quantité des cordes verticales du

disque solaire qui sont affectées de la réfraction ; c'est-à-dire, qu'une corde de 15' est accourcie moitié moins que celle de 30' ; or quand on diminue proportionnellement toutes les ordonnées d'un cercle, on a celles d'une ellipse (3256).

Dans une ellipse qui est peu excentrique les diminutions des rayons, en s'éloignant du grand axe, sont sensiblement comme les carrés des sinus des distances au sommet (2680) ; ainsi quand on a observé un diamètre incliné, par exemple, le diamètre de la lune dans le sens des cornes, l'accourcissement diminue comme le carré du cosinus de l'angle que fait la ligne des cornes avec la verticale.

Par exemple, la lune en quadrature ayant été observée avec un micromètre, on a trouvé son diamètre de 33' 10" dans la direction de la ligne des cornes, & l'on a estimé que cette ligne faisoit avec la ligne horizontale un angle de 30°, la lune ayant 20° de hauteur ; on trouve dans la table au-dessous de 20°, & vis-à-vis de 30°, 1'' 0, mais comme le diamètre est de 33' au lieu de 30' que suppose la table, il faut augmenter cette correction proportionnellement, ou de 0'' 1, & l'on aura 1'' 1, pour l'accourcissement cherché.

Si l'on vouloit avoir cet accourcissement pour le cas où la hauteur de la lune est moindre que 2°, il faudroit le calculer plus rigoureusement, mais il est bien rare qu'on en ait besoin dans ce cas-là.

2247. On doit corriger de la même manière les distances mesurées sur le disque du soleil entre le bord & une tache ou une planète, telle que Mercure & Vénus ; cette correction est alors proportionnelle à la distance mesurée ; la table ne donne sa valeur que pour une distance égale au diamètre dans le sens où l'on a mesuré.

Sur les
distances.

2248. La manière de corriger les grandes distances observées entre deux astres & de les dégager de l'effet des réfractions, sera expliquée dans le XXIV^e livre, à l'occasion de l'usage qu'on en fait pour trouver les longitudes en mer (3982).

Sur les
éclipses.

2249. C'est aussi par l'effet des réfractions qu'il arrive qu'on a vu la lune éclipfée, tandis que le soleil étoit encore sur l'horizon, Pline raconte le fait (II. 13), aussi-bien que Cléomède (II. 6); mais celui-ci regardoit la chose comme impossible; nous l'avons vu arriver à Paris le 19 Juillet 1750: le soleil & la lune, quoique réellement opposés, étoient rapprochés d'un degré par l'effet des deux réfractions.

Des Réfractions terrestres; & des accidens de Réfraction.

Fig. 141.

2250. LES RÉFRACTIONS TERRESTRES sont celles qui ont lieu entre deux points de la terre, tels que M & L , (fig. 141); si l'on suppose l'observateur en M mesurant la hauteur d'une montagne en L , le rayon LGM en s'approchant de la terre en G , & s'en éloignant en M , prend une courbure considérable, ce qui fait paroître l'objet L hors de sa véritable place, & sur le rayon MGF .

Cas où les
astres paroissent
plus bas
que l'horizon.

2251. La réfraction terrestre se joint quelquefois à la réfraction astronomique, parce qu'il y a des cas où l'observateur étant fort élevé voit les astres au-dessous de la ligne horizontale: la différence peut devenir extrêmement considérable. M. Bouguer étant à Chimborazo 2388 toises au-dessus du niveau de la mer, & observant le soleil à l'horizon lorsqu'il se couchoit, la réfraction horizontale étoit de $19' 45''$; mais le soleil étant parvenu à 1° de dépression apparente, la réfraction étoit déjà de $30'$, & même de $34' 47''$ à $1^\circ 17'$ de dépression apparente, par l'effet de la réfraction terrestre, (*Mém. acad.* 1749, pag. 79); nous en avons donné la démonstration (2220).

2252. Soit M , l'observateur sur le sommet d'une haute montagne; MH la ligne du niveau apparent ou de l'horizon rationel & astronomique; S le soleil, dont le rayon $SRLM$ se courbe en entrant dans l'atmosphère

en R , & arrive à l'œil M , en se confondant avec la tangente FGM ; la dépression apparente du soleil est l'angle HMF ; la partie la plus basse MGL du rayon solaire est égale de part & d'autre du point G , qui est le plus près de la surface de la terre T ; l'inclinaison en L est la même qu'en M , si l'on suppose le point L aussi élevé que le point M au-dessus de la terre. Si donc on suppose l'angle MCL de deux degrés, l'angle HML d'un degré, l'observateur en L verroit l'astre S un degré au-dessus de l'horizon, au lieu de le voir un degré au-dessous, & la courbure de la partie RL du rayon seroit la réfraction astronomique pour un degré d'élévation apparente; mais la seconde courbure de L en M est plus considérable, c'est une réfraction terrestre, qui ajoutée à la réfraction astronomique pour un degré de hauteur apparente, forme la réfraction pour un degré de dépression apparente; & cette même réfraction terrestre est celle qu'on éprouveroit, si du point M on observoit la hauteur apparente de l'objet terrestre L : cette réfraction est à peu-près la septième partie de l'arc de la terre compris entre M & L , ou de l'angle MCL décrit par le rayon, pendant son trajet dans l'atmosphère (2205); quelquefois M. Bouguer l'a supposée d'un neuvième, (*Mém. acad.* 1749, pag. 101); mais en supposant un septième, il s'en suit que sur une distance de 950 toises ou d'une minute, cette réfraction seroit de $8'' \frac{1}{2}$; ainsi l'on doit retrancher de chaque hauteur observée, ou ajouter à chaque dépression la moitié de cette réfraction, ou $\frac{1}{14}$ de l'intervalle des deux stations. Il y a sur cette matière une petite dissertation de M. Mayer intitulée : *Programma de refractionibus objectorum terrestrium*, (Gotting. 1751), & un ouvrage de M. Lambert intitulé : *Les propriétés remarquables de la route de la lumière par les airs, & en général par plusieurs milieux réfringens, sphériques & concentriques, avec la solution des problèmes qui y ont du rapport, comme sont les réfractions astronomiques & terrestres, & ce qui en dépend*, par J. H. Lambert, à la Haye, chez Nicolas Van-Daalen 1759,

Quantité de
la Réfraction
terrestre.

116 pages in-8°. Il y traite de la réfraction à différentes hauteurs, de la réfraction terrestre, des hauteurs des montagnes, mesurées par le moyen du baromètre, ou par des triangles, de la correction des hauteurs des objets terrestres que M. Cassini avoit déterminées dans le livre de la figure de la terre; il prouve que la réfraction terrestre est $\frac{1}{14}$ de la courbure de la terre, le rayon osculateur de la courbe de la lumière étant 7 fois le rayon de la terre.

2253. C'est ainsi que le P. Boscovich corrige les hauteurs des signaux dans sa mesure du degré en Italie. Le signal placé au sommet de Carpegna, vu de l'extrémité occidentale de la base de Rimini, étoit à $87^{\circ} 53'$ du zénit, & cette extrémité vue du signal de Carpegna, étoit à $92^{\circ} 24' 10''$ du zénit; la somme de ces arcs est de $180^{\circ} 17' 10''$ au lieu de $19' 11''$ que l'excès auroit été, à raison de la distance, en négligeant l'effet de la réfraction. (*De litteraria expeditione, &c. pag. 162*). La hauteur de chaque objet étoit augmentée de plus d'une minute par la réfraction, aussi le P. Boscovich suppose $87^{\circ} 54' 0''$ & $92^{\circ} 25' 11''$ pour les distances de chacun des objets par rapport au zénit.

Irrégularités des réfracti-
ons horiz.

2254. Les changemens réguliers, qui peuvent se mesurer & se prédire par le moyen du thermomètre (2239) & du baromètre (2237), ne sont pas les seuls qu'on apperçoive dans les réfracti-
ons : il y a des changemens irréguliers qu'on ne sauroit calculer, & qui viennent principalement de la partie inférieure de l'atmosphère (2223). M. de Mairan avoit déjà remarqué (*Mém. acad. 1721*), que plus la couche des vapeurs denses est près de la surface de la terre, plus les réfracti-
ons sont augmentées; M. Bouguer a fait voir aussi (*Mém. acad. 1749, pag. 108*), que les changemens de réfracti-
ons ne viennent pas d'un changement de l'atmosphère entière, mais seulement de la partie la plus basse : voici comme il le prouve. Lorsqu'on est sur le sommet de Pitchincha où le baromètre n'a que 16 pouces de hauteur, la couche d'air qu'on a au-dessous de soi, ou la

colonne d'air qui s'étend depuis le niveau de la mer jusqu'à la hauteur de la montagne équivaut à 12 pouces de mercure, car les deux ensemble produisent une hauteur de 28 pouces; si toute la masse de l'air se dilatoit alors de $\frac{1}{48}$ seulement, il y auroit $\frac{1}{48}$ de la colonne inférieure qui s'éleveroit sur Pitchincha, le poids de la colonne supérieure y augmenteroit, & le baromètre y monteroit de 3 lignes, car $\frac{1}{48}$ de 12 pouces fait trois lignes; cependant l'observation a prouvé qu'il n'y a point de pareil changement du baromètre sur les hautes montagnes, & que le mercure y varie à peine d'une ligne; c'est une preuve que les différences d'un sixième observées dans la réfraction au-dessous de ces montagnes, comme à Quito, entre le jour & la nuit, ne viennent que du changement de l'air qui s'est fait au-dessous du sommet; ce changement d'une ligne dans le baromètre qui a lieu sur les montagnes, ne peut produire que $\frac{1}{144}$ de différence dans la réfraction, puisqu'il ne prouve que $\frac{1}{144}$ de dilatation dans l'atmosphère (2237).

Les réfractions sont sur-tout inégales quand il vient un filet de vent froid au travers d'une masse d'air échauffé, ou quand il arrive de ces causes météorologiques qui rompent les colonnes de l'air & font baisser le baromètre quelquefois de deux pouces. (*Anciens mémoires de l'académie, tom. II, pag. 87*).

2255. On apperçoit à Paris que les réfractions voisines de l'horizon sont sensiblement affectées par les vapeurs & les fumées qui s'élèvent de dessus la ville, située au nord de l'observatoire royal. Les vapeurs & l'humidité de l'air influent beaucoup sur les réfractions, de même que la situation des lieux plus ou moins élevés, le voisinage des villes, des montagnes, des fôrêts, des rivieres, ou des plaines arides; aussi M. de la Caille étoit persuadé qu'un astronome ne sauroit jamais avoir près de l'horizon des réfractions purement célestes, c'est-à-dire, de la nature de celles qui se font à 20° de hauteur ou au-dessus; les seules circonstances locales

produisent des différences si considérables dans les réfractions horizontales, qu'il n'a pas même voulu inférer dans sa table de réfractions celles qui ont lieu au-dessous de 6° .

Différences dans l'espace de 24 heures.

A différentes heures du jour ces réfractions sont différentes : on voit des côtes de Gènes & de Provence, les montagnes de l'Isle de Corse, à certaines heures du jour ; mais à d'autres heures ces montagnes paroissent se plonger dans la mer, sans qu'on puisse attribuer cette différence à autre chose qu'aux réfractions terrestres, (*Mém. acad. 1722, pag. 348*). Le P. Laval à Marseille trouvoit l'abaissement apparent de l'horizon, tantôt de $11' 46''$, & tantôt de $14' 30''$, tandis que l'inclinaison véritable du rayon direct qui rasoit la surface de la mer devoit être de $13' 14''$, (*Mém. acad. 1707, pag. 195*). On trouvera sur cette matière des observations curieuses dans le *Traité* de M. de Luc sur les baromètres & les thermomètres, qui est actuellement sous presse à Genève, en 1770.

Tremblement de lumière.

2256. Je dois placer ici un fait assez singulier, & qui a quelque rapport avec les accidens de réfraction ; M. de la Caille éprouvoit quelquefois au Cap de Bonne-Espérance, des ondulations de lumière qui faisoient trembler les astres dans sa lunette au point de ne pouvoir pas observer ; dans ces circonstances, il ne distinguoit pas même les taches de la lune, quoique le ciel fût très-serein ; & le demi-diamètre de la lune enflé par cette ondulation paroissoit de 3 à $4''$ plus grand que dans les autres temps. Nous observons en France que le vent de sud-est, lorsqu'il est un peu fort, produit quelque chose de semblable ; quoique d'une manière beaucoup moins sensible qu'au Cap de Bonne-Espérance.

Diminution de la lumière.

2257. Les rayons en traversant obliquement l'atmosphère se dispersent, en sorte que l'intensité de la lumière du soleil lorsqu'il est à l'horizon, est 1354 fois moindre que lorsqu'il est au zénit, suivant les expériences de M. Bouguer : voyez le livre intitulé : *Traité d'Optique sur la gradation de la lumière*, par M. Bouguer, à

à Paris chez Delatour 1760 in-4°, & un autre livre qui est aussi très-bon, sur la même matière : *J. H. Lambert Photometria, sive de mensura & gradibus luminis, colorum & umbræ ; Augustæ Vindelicorum 1760, 547 pag. in-8°*. On sent assez que les rayons qui se présentent obliquement à l'entrée de l'atmosphère doivent être en effet les plus faciles à réfléchir ; chacun a éprouvé par les ricochets d'une pierre jettée sur la surface de l'eau, que plus le choc d'un corps est oblique, plus il se réfléchit aisément.

2258. Ce n'est pas tant l'atmosphère que les vapeurs dont elle est chargée, qui produisent l'affoiblissement de la lumière du soleil : M. de Mairan examine cette matière fort au long dans les mémoires de 1719 & 1721, & il conclut que si l'atmosphère toute pure interceptoit à midi dans le solstice d'hiver, seulement la cinquième partie de la lumière qui parvient jusqu'à nous dans le solstice d'été, le soleil nous seroit toujours caché dès qu'il approcheroit de l'horizon, à peu-près comme il l'est dans les jours sombres, ce qui est contraire à l'expérience ; il est donc certain, continue M. de Mairan, que lorsque la lumière du soleil nous paroît sensiblement plus foible en hiver qu'en été, cet affoiblissement doit presque toujours être attribué aux vapeurs dont la partie inférieure de l'atmosphère est chargée, plutôt qu'à l'atmosphère proprement dite, quoique traversée beaucoup plus obliquement.

2259. L'atmosphère est chargée continuellement d'exhalaisons, de vapeurs, de nuages aqueux ou de feux électriques ; de là naissent une multitude de météores, & sur-tout ces feux que les enfans prennent pour de véritables étoiles, mais qui ne sont que des exhalaisons légères, dont la lumière ne dure qu'un instant.

Etoiles
volantes.

DES CRÉPUSCULES.

2260. LE CRÉPUSCULE ou la lumière crépusculaire qu'on apperçoit vers l'horizon après que le soleil est

couché, de même que l'aurore qui nous annonce son lever, sont encore des effets semblables à celui de la réfraction; c'est l'atmosphère qui réfléchit & qui disperse les rayons du soleil, en sorte qu'il en parvient jusqu'à nos yeux une partie assez forte pour nous empêcher de distinguer les astres, quoique le soleil soit au-dessous de l'horizon.

Arc d'é-
merfion.

2261. L'ARC D'ÉMERSION d'un astre est la quantité dont le soleil est abaissé sous l'horizon dans un vertical, lorsque l'on commence à appercevoir cet astre à la vue simple. On estime ordinairement les arcs d'émerfion de 5° pour Vénus, quoique dans certains temps il soit absolument nul (1197), de 10° pour Mercure & Jupiter, de 11 à 12° pour Mars, Saturne, & les étoiles de première grandeur (218). Cependant Sirius se voit en plein jour, dans les pays méridionaux; M. de la Nux l'a vu souvent à l'Isle de Bourbon; *Canopus* est une étoile aussi grande en apparence que Sirius, du moins dans une belle nuit; mais sa lumière est un peu moins blanche, ou un peu plus terne, & on ne la voit pas aussi facilement dans le crépuscule. L'arc d'émerfion, suivant Ptolomée, est de 14° pour les étoiles de troisième grandeur, (*Riccioli Almag. nov. I. 659*); enfin il est d'environ 18° pour les plus petites étoiles, puisqu'on ne les apperçoit distinctement à la vue simple que quand le soleil est abaissé de 18° : c'est ce qu'on appelle l'abaissement du cercle crépusculaire.

Abaissement
du cercle cré-
pusculaire.

2262. Cet abaissement de 18° est ce qui doit décider de la durée du crépuscule, mais il varie sans doute suivant les temps & les lieux: on peut voir dans le P. Riccioli, (*Almag. nov. I, pag. 39*), une table de toutes les opinions qu'il y a eu sur la durée des crépuscules.

2263. Rothman, (suivant Tycho), avoit trouvé que le crépuscule ne finissoit complètement que quand le soleil étoit descendu de 24° sous l'horizon; suivant Nonius dans son traité des crépuscules, c'étoit 16° ; suivant M. Cassini 15° ; suivant le P. Riccioli, c'est dans

les équinoxes 16° le matin, $20\frac{1}{2}$ le soir, dans le solst. ce d'été $21^{\circ} 25'$ le matin, dans le solstice d'hiver $17^{\circ} 25'$ le matin; il y a apparence que cela varie suivant les temps & les lieux; M. de la Caille étant en mer l'a trouvé de $16^{\circ} 38'$ & de $17^{\circ} 13'$, (*Mém. de l'acad.* 1751, pag. 454); mais la plupart des astronomes prennent 18° pour l'abaissement du cercle crépusculaire.

2264. LA DURÉE DU CRÉPUSCULE est donc le temps que le soleil emploie à s'abaisser de 18° ; cette durée varie tous les jours; on trouve dans les œuvres du P. Clavius, (*Tom. III, pag. 275*), une table de la durée du crépuscule depuis 35° jusqu'à 61° de latitude, & pour chaque longitude du soleil de trois en trois degrés; on y voit qu'elle varie sous la latitude de 35° depuis $1^h 28'$ jusqu'à $1^h 52'$, & sous celle de 45° depuis $1^h 42'$ jusqu'à $2^h 39'$; l'inégalité est encore plus grande quand on avance vers les poles.

2265. Le crépuscule le plus long de tous arrive toujours au solstice d'été, mais le plus court n'arrive pas au solstice d'hiver; il y a un terme moyen, où sa durée est la moindre, & c'est la matière d'un problème *De maximis & minimis*, qui coûta de la peine à M. Bernoulli, & dont la solution est rapportée dans *l'analyse des inf. per.* art. 61: en voici une solution de M. Euler qui est plus facile & plus complète; dans laquelle nous donnerons aussi la durée du plus court crépuscule.

2266. TROUVER la déclinaison du soleil au temps du plus court crépuscule sous une latitude donnée, & la durée du crépuscule le même jour: soit *HO* l'horizon, (*fig. 35*), *CHZPOD* le méridien, *CD* le cercle crépusculaire abaissé de 18° sous l'horizon (2263), *Z* le zénit du lieu donné, *P* le pole boréal, *FNGM* le parallèle que décrit le soleil au temps du plus court crépuscule, & dont il s'agit de connoître la déclinaison, ou la distance *PM* au pole; *NM* l'arc du même parallèle qui répond à l'angle horaire *NPM* & qui mesure la durée du plus court crépuscule. On tirera un autre cercle *TR* parallèle à l'équateur, infiniment proche du parallèle *NM*,

Fig. 35.

& suivant la nature du *Minimum*, ces deux arcs seront égaux, parce que le changement ou la différentielle d'une quantité devient zéro, quand cette quantité est la plus petite ou la plus grande. Ainsi l'on aura $TR = NM$; mais $TR = FG$ à cause du parallélisme des arcs FG & TR ; FT & GR ; donc $FN = GM$. De plus $FT = GR$ à cause du parallélisme des deux cercles FG , TR ; donc les triangles rectangles FTN , GRM sont égaux, donc l'angle RMG est égal à l'angle TNF . L'angle ZMR & l'angle PMG sont droits, donc l'angle RMG est égal à l'angle PMZ . Par la même raison $TNF = PNZ$; donc l'angle PNZ est égal à l'angle PMZ . Si l'on prend $MQ = 90^\circ$ & qu'on tire l'arc PQ , l'on aura le triangle sphérique PQM égal au triangle ZNP , puisque $ZN = MQ$, $PN = PM$, & l'angle N égal à l'angle M ; donc on aura $PQ = PZ$.

2267. Dans le triangle ZQP l'on a par la trigonométrie (3716) $\text{cof. } ZQP = \frac{\text{cof. } ZP - \text{cof. } QP \text{ cof. } ZQ}{\text{fin. } QP \text{ fin. } ZQ}$
 $= \frac{\text{cof. } ZP (1 - \text{cof. } ZQ)}{\text{fin. } ZP \text{ fin. } ZQ}$ (parce que $ZP = QP$) =
 $\frac{\text{cot. } ZP (1 - \text{cof. } ZQ)}{\text{fin. } ZQ}$; donc pour son supplément dont le cosinus est négatif (3605), on aura $\frac{-\text{cot. } ZP (1 - \text{cof. } ZQ)}{\text{fin. } ZQ}$
 $= \text{cof. } PQM$.

Dans le triangle PQM on a par la trigonométrie (3719) $\text{cof. } PM = \text{fin. } PQ \text{ fin. } QM \text{ cof. } Q + \text{cof. } PQ \text{ cof. } QM$; mais le second terme est nul, puisque $QM = 90^\circ$; de plus $\text{fin. } QM = 1$ donc $\text{cof. } PM = \text{fin. } PQ \text{ cof. } QM$
 $= \frac{-\text{cot. } ZP (1 - \text{cof. } ZQ) \text{ fin. } ZP}{\text{fin. } ZQ} = \frac{-\text{cof. } ZP (1 - \text{cof. } ZQ)}{\text{fin. } ZQ}$; &

mettant à la place de $\frac{1 - \text{cof. } ZQ}{2}$ sa valeur $\text{fin. } \frac{1}{2} \text{ fin. } QZ$.

(3626), on aura $\frac{1}{2} \text{ cof. } PM = \frac{-\text{cof. } ZP \text{ fin. } \frac{1}{2} ZQ \text{ fin. } \frac{1}{2} ZQ}{\text{fin. } ZQ}$.

Le dénominateur $\text{fin. } ZQ = 2 \text{ fin. } \frac{1}{2} ZQ \text{ cof. } \frac{1}{2} ZQ$ (3625); substituant cette valeur dans le dénominateur de l'expression

précédente, elle devient $\frac{-\text{cof. } ZP \text{ fin. } \frac{1}{2} ZQ}{2 \text{ cof. } \frac{1}{2} ZQ} = \frac{-\text{cof. } ZP \text{ tang. } \frac{1}{2} ZQ}{2}$

$= \frac{1}{2} \text{ cof. } PM$. Donc $-\text{cof. } PM = \text{cof. } ZP \text{ tang. } \frac{1}{2} ZQ$.

d'où l'on tire cette proportion : Le sinus total est au sinus de la latitude du lieu donné (cos. PZ), comme la tangente de 9° ($\frac{1}{2} ZQ$) est au sinus de la déclinaison du soleil. Le signe moins indique une déclinaison australe.

2268. Pour trouver la durée du plus court crépuscule, on considère que les triangles PQM , ZNP étant égaux (2266), l'angle $QPM = ZPN$; donc $ZPQ = MPN$; or dans le triangle ZPQ , dont les trois côtés sont donnés, on a pour l'angle P , $2 \sin. \frac{1}{2} P^2 = \frac{\cos. (PQ - PZ) - \cos. ZQ}{\sin. PQ \sin. PZ}$ (3743) $= \frac{1 - \cos. ZQ}{\sin. PZ^2}$, parce que $PQ = PZ$; donc $\sin. \frac{1}{2} P^2 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos. ZQ}{\sin. PZ^2} = \frac{\sin. \frac{1}{2} ZQ^2}{\sin. PZ^2}$;

Formule pour le plus court crépuscule.

donc $\sin. \frac{1}{2} P = \frac{\sin. \frac{1}{2} ZQ}{\sin. PZ}$; d'où l'on tire cette proportion; Le cosinus de la latitude du lieu (sin. PZ), est au sinus de 9° (sin. $\frac{1}{2} ZQ$), comme le rayon est au sinus de la moitié de l'angle ZPQ ou NPM , qui convertie en temps donne la durée du plus court crépuscule.

Formule pour sa durée.

2269. Par le moyen de ces deux proportions, on trouve que le plus court crépuscule arrive à Paris quand le soleil a $6^\circ 51'$ de déclinaison australe, ce qui a lieu vers le 2 Mars & le 10 Octobre, & que sa durée est de $1^h 47'$. Mais le plus court crépuscule qui puisse avoir lieu sur la terre est sous l'équateur, au temps de l'équinoxe, & il est de $1^h 12'$.

La figure du crépuscule est une hyperbole, qui est un peu altérée par la réfraction, (*Mém.* 1713, pag. 60), on voit en mer dans la Zone Torride cette courbe assez bien terminée lorsque le crépuscule est près de finir, au rapport de M. de la Caille.

2270. LA HAUTEUR DE L'ATMOSPHERE peut se déduire de l'abaissement du cercle crépusculaire; Képler en fit l'essai, & M. de la Hire, (*Mém. acad.* 1713, pag. 54), perfectionna cette méthode; soit C le centre de la terre, *fig.* 139, ABD un arc la circonférence de la terre que je suppose de 18° , BG la hauteur de l'atmosphère, DG le rayon du soleil quand il est à 18° au-dessous de l'horizon, c'est le premier rayon qui commence

Fig. 139.

Fig. 139.

à être réfléchi vers l'observateur placé en A , par la partie supérieure G de l'atmosphère.

Dans le triangle AGC rectangle en A , on connoît l'angle ACG qui est de 9° , & le rayon de la terre CA que Képler supposoit de 904 milles d'Allemagne; on trouvera CG de 914 milles, donc l'excès BG est de 10 milles; si l'on évalue chaque mille, à 3800 toises, on aura 38 milles toises pour la hauteur de l'atmosphère, du moins suivant cette méthode, employée à la façon de Képler. Quoique Képler trouvât 10 milles pour la hauteur de l'atmosphère par la méthode des crépuscules; cependant il n'estimoit cette hauteur que d'un demi-mille, ou environ 2000 toises, il attribuoit le crépuscule, soit aux différentes réflexions & réfractions des rayons au-dedans de l'atmosphère, soit à l'atmosphère du soleil (845).

Hauteur de
l'atmosphère.

M. de la Hire ne trouve que 34585 toises au lieu de 38000, en faisant entrer dans son calcul la réfraction du rayon DG , & la différence de hauteur entre le bord & le centre du soleil, (*Mém. acad.* 1713, p. 59).

M. Mariotte dans son essai de la nature de l'air, en employant les expériences sur la condensation de l'air, trouve l'atmosphère encore un peu moindre que M. de la Hire.

Si l'on suppose que la hauteur de l'atmosphère dans les éclipses de lune produit une ombre qui soit la 60^e partie de celle de la terre, comme plusieurs astronomes l'ont dit (1776), on aura 54488 toises pour la hauteur de l'atmosphère.

Si l'on prend pour atmosphère la partie de l'air où la réfraction de la lumière est sensible, on ne trouve que 5158 toises de hauteur, suivant M. Bouguer (2218).

Quand on ne prend que la hauteur où le poids de l'air & son action sur le baromètre sont sensibles, on ne trouve qu'environ 4200 toises pour la hauteur de l'atmosphère ou plus exactement 25275 pieds, suivant les expériences de M. de Luc. Ce nombre de pieds divisé par la hauteur du baromètre en lignes, donne au quotient le nombre de pieds dont il faut monter ou descendre.

pour faire changer d'une ligne la hauteur du baromètre, en supposant toutes fois que l'air soit à la température, ou à 10° du thermomètre (129), on prendroit 27096 pieds si le thermomètre étoit à 25°. (*Connoiss. des mouv. célest.* 1765, pag. 220).

Des Atmosphères des Planètes.

2271. Nous avons parlé de l'atmosphère du soleil à l'occasion de la matière zodiacale (845), & de celle de la lune à l'occasion de l'inflexion (1992); nous ajouterons seulement que le P. Boscovich, dans une dissertation imprimée à Rome en 1753, *De Lunæ atmosphæra*, a fait voir que la lune pourroit avoir une atmosphère aussi dense que de l'eau, sans qu'il fût possible de nous en appercevoir, & que cette atmosphère pourroit bien être la cause qui empêche de distinguer les montagnes sur le bord de la lune, tandis qu'on les voit distinctement sur son disque. On peut voir aussi ce que dit le P. Frisi dans sa dissertation de *Atmosphæra cœlestium corporum*, qui remporta le prix de l'académie en 1758; & qu'il a fait imprimer à Lucques en 1759, dans le premier volume de ses dissertations. Au reste, il est impossible de dire quelque chose de certain sur cette matière.

2272. Les passages de Vénus & de mercure sur le soleil devoient nous faire appercevoir les atmosphères de ces deux planètes, s'il y en avoit, comme quelques astronomes l'ont cru; cependant j'ai vu Mercure en 1753, & Vénus en 1761, sans aucune apparence d'anneau lumineux; mais je ne dois pas dissimuler que d'autres astronomes ont parlé plusieurs fois de ces anneaux; on en vit un à Montpellier dans le passage de Mercure en 1736, & l'on assure même que cet anneau continua de paroître six à sept secondes après que Mercure fut totalement sorti de dessus le disque du soleil. M. de Fouchy, M. le Monnier, M. Chappe, M. Wargentin ont assuré qu'ils avoient vu cet anneau autour de

Anneau
lumineux.

Vénus, (*Mém. acad.* 1761, pag. 365), ce qui formeroit un préjugé pour le systême des atmosphères des planètes, si cet anneau ne pouvoit s'expliquer par des causes purement optiques.

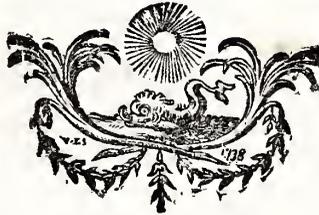
M. Cassini, (*Observations astron.* pag. 42 & 45), en comparant entre elles diverses observations de Mars, lorsque cette planète étoit fort près de la moyenne des 3Ψ dans l'eau du verseau, trouva des différences très-irrégulières; il crut qu'elles pouvoient être causées par quelque réfraction extraordinaire, faite dans l'atmosphère de Mars; il trouva les mêmes irrégularités par l'observation de Cayenne; le jour de la conjonction de Mars à la moyenne Ψ , l'intervalle entre cette étoile & celle qui la précède parut sensiblement augmenté, car les jours précédens la différence du passage de ces deux étoiles étoit de $2' 8''$ de temps à Cayenne, comme on l'observa toujours à Paris, & le jour de la conjonction, il parut de $2' 14''$, ce qui semble s'accorder à ce que M. Cassini avoit imaginé que le rayon visuel qui alloit à l'étoile après la conjonction avec Mars, rencontrant obliquement son atmosphère y pouvoit être rompu, de sorte qu'il faisoit paroître l'étoile trop orientale en augmentant sa distance par rapport à Mars qui avoit passé à l'occident de l'étoile,

M. Cassini attribuoit à la même cause la trop grande vitesse dans la séparation de Mars & de l'étoile, qu'il trouvoit par la comparaison des observations de M. Picard & de M. Romer. Un autre phénomène semblable, c'est que la parallaxe déduite de la comparaison de la dernière observation de M. Picard avec celle de M. Richer, parut insensible, tandis qu'elle paroïssoit trop grande, vers le temps de la conjonction, à cause d'une trop grande vitesse dans la séparation de Mars avec l'étoile fixe suivante: il attribuoit une partie seulement de la différence à la parallaxe, & l'autre à la réfraction produite dans l'atmosphère de Mars. M. Cassini, en rapportant ses doutes sur cette matière, avertit les observateurs d'y prendre garde dans les occasions semblables,

pour

pour avoir la confirmation ou la réfutation de cette idée par des observations plus décisives.

2273. LA DIFFRACTION ou inflexion des rayons dont parle M. Newton dans le 3^e livre de son optique, est le changement de direction que des rayons éprouvent en passant près d'un corps solide qui les attire par sa masse ou les repousse par une espèce de réflexion : on a essayé quelquefois d'expliquer, par cette diffraction, divers phénomènes que d'autres expliquent par les réfractions des atmosphères, ou par l'irradiation & l'aberration des rayons qui bordent les corps lumineux (1991, 2272), de même que les bandes lumineuses des ombres, observées par le P. Grimaldi, & par M. de l'Isle, (*Mémoires pour servir à l'histoire & au progrès de l'astronomie*, à Pétersbourg 1738, in-4°).



LIVRE TREIZIEME.

DES INSTRUMENS D'ASTRONOMIE.

LES fondemens essentiels de l'astronomie & les calculs des principaux phénomènes ont rempli la majeure partie de cet ouvrage ; il est temps d'y joindre le détail & la pratique des observations : cette branche de l'astronomie n'avoit été traitée par aucun astronome, c'est ce qui m'a obligé à lui donner ici une certaine étendue.

2274. Le plus ancien instrument d'astronomie dont on ait fait usage, est le Gnomon ou style droit avec lequel on mesuroit les ombres du soleil, nous en parlerons bientôt en détail (2281). On employa ensuite les cercles divisés en degrés (23, 304), auxquels on rapportoit les arcs des cercles célestes ; le plus célèbre de ces instrumens est ce qu'on appelle les *Armillés d'Alexandrie*, avec lesquelles Timocharès (345) observa la déclinaison de l'épi de la Vierge ; elles avoient une demiaune de diamètre, (*Proclus Hyp. astr. c. 2.*) Flamsteed pense que, comme l'aune des anciens pouvoit être la longueur des bras étendus, ces armilles devoient avoir trois pieds de diamètre, (*Flamst. proleg. pag. 19, 21, 30*) ; il en est parlé dans l'Almageste III. 2. Je crois que leur précision pouvoit aller à 10'.

2275. Ptolomée se servit pour déterminer la parallaxe de la lune d'un instrument qu'on a appelé *Triquetrum* ou *Règles parallactiques* ^(a), dont le rayon étoit de 4 coudées ou de 6 pieds, il en donne la description dans son Almageste, (*Lib. V. cap. 12, pag. 113*), la

Fig. 196. figure 196 représente les 3 règles.

(a) Copernic & Tycho écrivent *parallatiques*, mais Ptolomée écrivoit *παραλλακτικόν*, il s'en servoit pour les parallaxes ; c'est la machine que nous décrivons ci-après (2400), qu'on doit appeller *parallatique*, parce qu'elle suit le parallèle des astres.

Sur un côté de la règle *AO* l'on voit à angles droits deux petites planchettes carrées *L* & *O* parallèles entre elles, dont chacune a au milieu un petit trou, celui de l'œil est le plus petit, & celui qui est en *L* est assez grand pour que la lune puisse y paroître toute entière; la règle *AO* étoit ajustée par une charnière sur la règle verticale *AF*, & elle tournoit librement autour du point *A*; la règle *GD* servoit à régler le mouvement de *AO*; sur les lignes *AG* & *AO* étoient marquées 60 parties égales qui formoient le rayon, tandis que *GD* étoit la corde de l'angle *GAO*, en supposant que le triangle *GAD* fût toujours isocelles. Le long de la règle verticale *AF*, il y avoit un fil à plomb passant par deux trous *B* & *C* qui servoit à rendre la règle *AF* exactement perpendiculaire à l'horizon.

Ptolomée décrit encore dans son *Almageste*, (Liv. *Astrolabe* V. cap. 1, pag. 100), un autre instrument qu'il appelle *Astrolabe*; & qu'il employoit pour observer les distances de la lune au soleil: il y avoit deux cercles exactement tournés, placés l'un dans l'autre à angles droits, l'un destiné à représenter l'écliptique, & l'autre le colure des solstices sur lequel on marquoit les poles de l'équateur; un troisième cercle tournoit autour des poles de l'écliptique sur deux cylindres qui y étoient fixés, & servoit à marquer les longitudes; un quatrième cercle au dedans des trois autres portoit deux trous ou deux pinules, qui servoient à regarder la lune ou un autre astre & à mesurer sa longitude & sa latitude. Cet instrument ne diffère de celui de Tycho, que nous décrivons ci-après (2279), que par une plus grande perfection dans ce dernier.

2276. Les Arabes ne se servirent point des armilles; mais seulement des règles parallactiques de Ptoimée, *Instrumens des Arabes.* ils y ajoutèrent des quarts-de-cercles d'un plus grand rayon & des sextans, comme on le voit par un écrit du Docteur Bernard sur l'obliquité de l'écliptique déterminée par les Arabes, (*Phil. transf. n° 163*); il raconta à Flamsteed qu'il avoit vu un écrit d'un ancien Arabe sur

la comparaison des instrumens de son temps avec ceux des anciens, pour prouver que les observations des Arabes étoient plus exactes que celles des Grecs, il seroit bien à desirer que ce petit ouvrage fût traduit, (*Flamst. Proleg. pag. 20 & 26*).

De Walthe-
rus.

2277. Après les observations Arabes, on trouve celles de Waltherus, qui se servit d'abord des règles paralléliques, & du rayon ou bâton astronomique, *Bacculus astronomicus*, qui étoit à peu-près de la même nature, ensuite d'une armille à la façon de Ptolomée. Les erreurs de ses observations alloient quelquefois à 10', ainsi que dans celles de Copernic; Régiomontanus dans son livre *de Torqueto*, parle de plusieurs autres espèces d'instrumens, dont le détail seroit trop long. Le *Torquetum* avoit une table horizontale, une autre parallèle à l'équateur, & une 3^e dans le plan de l'écliptique, avec un cercle de latitude mobile.

2278. Copernic fut ensuite le plus célèbre observateur du 16^e siècle, mais nous voyons qu'il n'employa pas d'autres instrumens que ceux de Ptolomée (2275); son astrolabe est décrit dans son livre de *Revolutionibus*, Lib. II. cap. 14, & son instrument parallatique, Lib. IV. cap. 15. De son aveu il pouvoit y avoir 10' d'erreur dans ses observations.

De Tycho.

2279. Tycho-Brahé fut le premier qui fit construire des instrumens sur lesquels on distinguoit, non-seulement les minutes, mais quelquefois les secondes de dix en dix, comme on le voit dans l'ouvrage où il en donne la description, (*Astronomiæ instauratæ mechanica*), dans son histoire céleste, dans les mémoires de l'académie pour 1763, où M. Jaurat a donné les figures de ceux qui étoient les plus remarquables, beaucoup mieux gravées que dans le livre de Tycho, enfin dans l'histoire céleste de Flamsteed, *Tom. III, pag. 46*.

Tycho rendant compte dans ses Progymnasmes des observations qu'il avoit faites pour l'établissement des principaux points de l'astronomie, donne la description des deux instrumens dont il s'étoit le plus servi, sur-

tout pour mesurer les distances des étoiles & leurs différences d'ascensions droites; le premier de ces deux instrumens est un sextant dont le rayon avoit 4 coudées ou environ 6 pieds, & il en avoit trois de la même construction, (*Progymn. pag. 247, Astronomiæ inst. mechanica, pag. 53*).

Le second instrument que Tycho décrit dans ces deux ouvrages, comme un des instrumens dont il faisoit le plus d'usage, est celui qu'il appelle ARMILLES ÉQUATORIENNES, elles sont représentées dans la *fig. 195*; le cercle extérieur *NZH* représente le méridien, & il est supposé placé en effet dans le plan du méridien, en sorte que le point *N* regarde directement le midi, & que le point *N* soit au nord; ce cercle étoit de cuivre, poli & divisé de minute en minute, les autres cercles étoient couverts de lames de cuivre. Autour de l'axe *PA* tournent les deux cercles *FI* & *QN*; le cercle *FI* n'est point divisé, parce qu'il ne sert qu'à soutenir & porter l'équateur *NMR* qui est mobile; l'axe *PA* est de cuivre, & porte un cylindre *D* au centre de cette sphère. Les pinnules *R* & *N* qui sont sur l'équateur sont de cuivre, elles servent à mesurer les distances des astres au méridien ou les angles horaires, & les différences d'ascension droite. On a même cet avantage avec un équateur mobile, que lorsqu'on met un astre sur le degré d'ascension droite qui lui convient, on voit dans le méridien même l'ascension droite du milieu du ciel (1011), dont les astronomes ont souvent besoin; d'où l'on conclut l'heure qu'il est, quand on fait l'ascension droite du soleil.

Fig. 195.

Le cercle intérieur *VQC* est un cercle de déclinaison ou un méridien qui tourne autour de l'axe *PA*, & dont le plan est toujours perpendiculaire à celui de l'équateur *RMN*; on dirige ce méridien mobile vers l'astre dont on veut mesurer la déclinaison, & au moyen des pinnules *Q* & *C* & du cylindre *D*, qui est au centre de l'instrument, porté sur l'axe même, on s'aligne vers

l'étoile dont la déclinaison se trouve marquée par la pinnule.

Toute cette machine étoit placée sur un pied de cuivre, très-solide, qu'il faut concevoir au-dessous de *T*, & que je n'ai pas représenté, parce qu'il n'est pas essentiel à la nature de l'instrument; le fil à-plomb *ZT* étoit un fil de cuivre très-délié chargé d'un poids *T*, qui seroit à placer l'instrument une fois pour toutes, ou à vérifier de temps à autres sa position. On imite, pour ainsi dire, ces armilles dans la construction de l'*Anneau astronomique*, dont on peut voir la description dans le traité des instrumens de mathématiques, par *Bion*.

Cet instrument est celui dont Tycho faisoit le plus d'usage, car toutes les fois qu'il avoit observé les distances des planètes aux étoiles avec le sextant, il mesuroit ordinairement leur déclinaison, & le temps vrai de l'observation avec ces armilles équatoriennes, en mesurant la distance de quelque belle étoile au méridien le long de l'équateur. On mesuroit aussi quelquefois la hauteur & l'azimut pour avoir le temps vrai, avec d'autres instrumens. Souvent Tycho, à la suite des distances d'une planète aux étoiles, donne aussi l'ascension droite de la planète conclue de sa distance au méridien par les armilles équatoriennes.

Tels sont les deux principaux instrumens de la nombreuse collection de Tycho, & ceux qu'il décrit par préférence dans ses *Progymnasmes*; leur précision alloit à peu-près à une minute.

Instrumens
d'Hévélius.

2280. Les instrumens dont se servit Hévélius dans le dernier siècle, étoient aussi remarquables par leur grandeur & leur exactitude; il en a décrit 12 principaux dans son *Organographie*, (*Mach. cœlest. pars 1*), parmi lesquels on remarque un sextant de cuivre, de plus de six pieds de rayon, avec lequel il mesura ce nombre prodigieux de distances qu'on trouve dans le grand ouvrage intitulé: *Mach. cœlestis*; on peut estimer à 15'' ou

20'' les erreurs probables de ses observations. Il semble même que Flamsteed les regarde comme encore plus petites, (*Flamst. Proleg. pag. 100*).

DES GNOMONS OU MÉRIDIENNES.

2281. ON appelle Gnomon (72) une hauteur perpendiculaire prise au-dessus d'une méridienne horizontale ; on mesure sur la méridienne ou la longueur de l'ombre , ou la distance entre l'image lumineuse du soleil & la verticale qui marque le pied du style ; l'on a dans les deux cas la tangente de la distance du soleil au zénit ; la hauteur du style étant prise pour le rayon.

L'observation des hauteurs méridiennes du soleil (70), ou de la longueur des ombres a dû être une des premières méthodes employées pour mesurer l'année, & le retour des saisons ; cette méthode paroît avoir été fort en usage chez les Egyptiens, les Chinois & les Péruviens, voyez M. Gouget, (II. 250), l'histoire de l'astronomie Chinoise, (*Tom. I, pag. 3. Tom. II, pag. 5, 8 & 21*). Les Gnomons ont été les premiers instrumens astronomiques qu'on ait imaginés, parce que la nature les indiquoit pour ainsi dire aux hommes : les montagnes, les arbres, les édifices sont autant de Gnomons naturels qui ont fait naître l'idée des Gnomons artificiels qu'on a employés presque par-tout. Tels furent probablement l'horloge d'Achaz, (Voyez M. Gouget), les Gnomons des Caldéens (261), de Pythéas à Marseille (341), & d'Ératosthènes (2628).

Sous l'empire d'Auguste un Mathématicien nommé *Manlius*, profita d'un obélisque que ce Prince avoit fait élever dans le champ de Mars, pour en faire un Gnomon ; Pline dit qu'il avoit $116\frac{3}{4}$ pieds, ($105\frac{3}{4}$ de France), & qu'il marquoit les mouvemens du soleil. (*Pl. lib. 36. cap. 9, 10 & 11*). Cet obélisque se voit encore à Rome, quoique abattu & fracassé ; j'en ai parlé dans le IV^e volume de mon *Voyage en Italie*, & l'on peut voir plusieurs belles

differtations sur cette matière dans l'ouvrage de M. Bandoni, *Dell' obelisco di Cesare Augusto*, &c. à Rome 1750, in-folio.

Cocheou-King en fit un de 40 pieds à Pékin, vers l'an 1278 (418); Ulug-Beg vers 1430 se servit à Samarkand d'un Gnomon qui avoit 165 pieds de hauteur (396). Cet usage des Gnomons a été si naturel & si général qu'on en a trouvé des vestiges, même au Pérou: *Garcilaso de la Vega, commentarios reales de los incas* 1723, Tom. 1, Lib. 2. cap. 22, pag. 61.

Paul Toscanella qui mourut en 1482, éleva à Florence l'un des plus fameux Gnomons que l'on ait vu; il a 277 $\frac{1}{2}$ pieds de hauteur, & c'est le plus grand qui existe. Le P. Ximenez premier mathématicien du grand Duc de Toscane, l'a rétabli, & en a donné une ample & belle description: *Del vecchio e nuovo Gnomone Fiorentino* &c. 1757, in-4°.

Gassendi voulant observer en 1636, la hauteur solsticiale du soleil, comme il l'avoit promis à Wendelinus; forma dans le college de l'Oratoire à Marseille, un Gnomon de 51 pieds 8 pouces 4 lignes de hauteur (*Gass. op. Tom. V, pag. 525*), avec lequel il observa la hauteur solsticiale du bord supérieur du soleil 70° 25' 59". Le Gnomon du P. Henri à Breslaw avoit 35 pieds; comme je le trouve dans les manuscrits de M. de l'Isle.

2282. Ignace Dante, Dominicain, ensuite Evêque d'Alatri, construisit un Gnomon de 67 pieds de haut en 1575 ou 1576, dans l'Eglise de Saint Pétrone, patron de Bologne (460); M. Cassini le rétablit en 1655, & en 1695 (554), & lui donna 83 $\frac{1}{2}$ pieds de hauteur; c'est cette méridienne de Saint Petrone de Bologne, qui a été la plus célèbre & la plus utile de toutes. On en trouve la description dans deux ouvrages, l'un de M. Cassini, l'autre de M. Manfredi, avec les observations qui y ont été faites en très-grand nombre: j'en ai parlé dans le second volume du *Voyage d'un François en Italie*, publié en 1769.

Méridienne
de S. Petrone.

M. Picard en 1669 commença la méridienne qui est dans la grande salle de l'Observatoire royal de Paris, dont le Gnomon à 31 pieds; M. Cassini l'a refaite longtemps après, & elle a été ornée de marbres avec des divisions & des figures pour chaque signe.

La méridienne des Chartreux de Rome aux Thermes de Dioclétien est la plus ornée que je connoisse; il y a deux Gnomons, l'un de $62\frac{1}{2}$ pieds de hauteur au midi, l'autre de 75 pieds du côté du nord; cet ouvrage fut construit par M. Bianchini en 1701. Voyez sa dissertation de *Nummo & Gnomone clementino*, à la suite de son livre de *Kalendario & cyclo Cæsaris, Romæ 1703 in-folio*; le livre publié par Manfredi, à Vérone en 1737: *Francisci Bianchini astronomicæ observationes*; & mon Voyage en Italie, Tom. III. pag. 484, édition de Paris 1769.

La méridienne de S. Sulpice de Paris fut entreprise en 1727 par M. Sully, Horloger; M. le Monnier l'a refaite en grand, avec soin & avec magnificence, (*Mém. acad. 1743, pag. 361*), & il s'en est servi chaque année pour observer l'obliquité de l'écliptique; les objections que j'ai faites contre le résultat de ces observations se trouvent dans les *Mémoires de l'académie* pour 1762.

De S. Sulpice de Paris.

Des Lunettes Astronomiques.

2283. L'INVENTION des lunettes d'approche devenue si utile à l'astronomie, fut faite vers l'an 1609 par hazard en Hollande; mais Molyneux dans sa Dioptrique observe que Roger Bacon, mort en 1292, en avoit donné quelque idée, & Képler dans une dissertation imprimée en 1611, observoit que J. B. Porta, Napolitain, en avoit parlé avant la fin du dernier siècle d'une manière assez positive. (*Voyez l'Optique de Smith*).

Galilée dans le *Nuncius Sydereus*, publié au mois de Mars 1610, pag. 9, raconte qu'environ dix mois auparavant, le bruit s'étoit répandu qu'un certain Hollandois avoit fait une lunette, par le moyen de laquelle

les objets éloignés paroissent fort proches ; on en racontoit plusieurs effets singuliers , que quelques personnes révoquoient en doute. Quelques jours après un gentilhomme François , nommé Jacques *Badovere* , lui ayant écrit de Paris la même chose , il se mit à en chercher la raison , & à méditer sur les moyens de faire un pareil instrument , par le moyen des loix de la réfraction ; il y parvint bientôt. Il mit aux deux extrémités d'un tube de plomb , deux verres , plans d'un côté & sphériques de l'autre , mais dont l'un avoit un côté convexe , & l'autre un côté concave ; alors approchant l'œil du verre plan concave , il vit les objets trois fois plus près qu'à la vue simple , il continua à Padoue de construire des lunettes plus longues ; & nous avons au dépôt de l'académie l'objectif avec lequel il découvrit peu après les satellites de Jupiter (2880).

Objectif &
oculaire.

2 2 8 4. Les lunettes dont se servent aujourd'hui les astronomes , sont formées de deux verres convexes , dont l'un tourné du côté de l'objet s'appelle l'*objectif* , & l'autre vers lequel on place l'œil s'appelle l'*oculaire* ; je supposerai comme des choses connues plusieurs propositions que l'on trouvera démontrées dans les livres d'Optique ^(a) déjà cités (2162) ; je ne rapporterai donc ici que les principes les plus simples pour mettre sur la voie le Lecteur qui ne voudra pas recourir à d'autres livres.

Effet des
Lunettes.

Fig. 142.

2 2 8 5. Les rayons *SA* , *SA* (fig. 142) qui viennent d'un point lumineux , par exemple , d'une étoile , sont parallèles entr'eux à cause de la grande distance (1743) ; ils se réunissent en un foyer *F* , & y forment l'image du point lumineux ; ces rayons après s'être réunis au point *F* s'écartent & vont tomber sur l'oculaire *GG* , duquel ils sortent parallèles pour entrer dans l'œil placé en *O*.

(a) Optique vient de ὀπτικός , vois au travers , parce qu'elle traite
video ; Catoptrique vient de κάτοπτρον , des réfractions ; la Dioptrique s'ap-
speculum , parce que c'est la con- pelle aussi anaclastique , du mot κλάω ,
noissance des rayons réfléchis ; frango.
Dioptrique vient de δίοπτραις , je

Un œil bien constitué, c'est-à-dire, qui n'est ni myope ni presbyte, voit distinctement un objet lorsque les rayons qui vont de l'objet à l'œil y arrivent parallèlement entr'eux, & il voit l'objet sur l'axe optique CF ou sur la ligne qui passe par l'objet, par le centre de l'objectif, & par le point F du foyer où tous les rayons étoient rassemblés avant que d'arriver à l'oculaire.

Fig. 142.

Axe Optique.

2286. Si l'on considère deux points lumineux, par exemple, les deux extrémités S & L d'un objet (fig. 143), on aura deux axes SAF & LAG ; le point S envoie une infinité de rayons parallèles entr'eux, qui vont tous se réunir en un point F pour arriver ensuite à l'œil parallèles entr'eux, & c'est ainsi que l'œil aperçoit distinctement l'image de cet objet au point F (2285); de même le point L envoie une infinité de rayons qui couvrant toute la surface de l'objectif, vont ensuite se réunir au foyer G , sur l'axe LAG , & font voir distinctement le point L ; l'angle que ces rayons SAF & LAG font entr'eux après avoir traversé l'oculaire, lorsqu'ils arrivent à l'œil, est plus grand que celui des rayons directs; & l'on démontre dans les livres d'Optique que la grandeur apparente d'un objet est multipliée autant de fois que le foyer de l'objectif contient celui de l'oculaire; ainsi une lunette de 18 pieds de foyer, avec un oculaire de 2 pouces de foyer, grossit un objet 108 fois, parce que deux pouces sont contenus 108 fois dans 18 pieds; avec une semblable lunette on voit les objets comme on les verroit s'ils étoient 108 fois plus près de nous qu'ils ne sont réellement. A l'égard des Télescopes, voyez l'art. 2410.

Fig. 143.

Combien grossissent les lunettes.

2287. La grandeur de l'image GF répond à un angle GAF égal à l'angle SAL qui mesure le diamètre de l'objet; ainsi pour qu'un objet qui a 32' de diamètre puisse se voir dans une lunette, il faut que l'ouverture de l'oculaire soit assez grande pour que le demi-diamètre BF de cette ouverture soutende un angle de 16' au centre A de l'objectif; c'est cette ouverture de l'oculaire, ou

Z z z z ij

plutôt celle du *Diaphragme* ^(a), ou du cercle de carton qu'on place au foyer *F* d'une lunette, qui décide seule du *champ de la lunette*, c'est-à-dire, de la grandeur de l'objet qu'on peut y appercevoir.

2288. On donne 10 à 12 lignes d'ouverture au diaphragme d'une lunette de 5 pieds dont l'oculaire auroit 2 pouces de foyer; on doit consulter là-dessus l'expérience; car il est permis d'augmenter cette ouverture tant qu'on ne voit ni couleurs ni confusion sur les bords du champ de la lunette; mais plus une lunette grossit, plus le champ diminue, parce qu'un oculaire d'un court foyer ne peut pas avoir une grande ouverture: un oculaire de 2 pouces de foyer ne sauroit avoir que deux pouces d'ouverture tout au plus.

La lumière dépend de l'ouverture de l'objectif.

2289. L'ouverture de l'objectif ou la largeur *CD* qu'on y réserve pour introduire les rayons, décide seule de la quantité de lumière qu'on aura dans la lunette, & de la clarté avec laquelle on y verra les objets; c'est-là le principal avantage d'une grande lunette sur une petite; le verre *CD* pouvant admettre une plus grande quantité de lumière, on peut la disperser par le moyen d'un oculaire qui grossisse beaucoup, sans qu'elle soit trop affoiblie.

Aberrations qui viennent de la sphéricité.

Il seroit donc très-utile d'augmenter cette ouverture pour augmenter la lumière des objets; cependant on donne à peine deux pouces & demi d'ouverture à une lunette de 18 pieds; parce que la figure sphérique de nos verres ne réunit pas exactement les rayons en un seul point; cette *aberration* provenant de la sphéricité est d'autant plus forte que l'ouverture est plus grande; les objets deviennent confus & mal terminés quand on augmente l'ouverture assez pour rendre cette aberration sensible, & c'est là un des principaux inconvéniens des lunettes astronomiques (1395).

2290. Dans des verres qui seroient parfaitement sphériques l'aberration des rayons ou la confusion qui en

(a) *Διά inter, φράγμα vallum separatio.*

réfulte , seroit comme le cube des longueurs focales. (*Opt. de Smith*). D'après cette règle , M. Huygens avoit donné une table. des ouvertures qui convenoient à chaque lunette , suivant la longueur du foyer de l'objectif : voici un extrait de cette table pour des lunettes de 3, 6, 9 & 18 pieds de foyer , qui sont les longueurs les plus employées dans l'usage de l'astronomie ; ces nombres sont exprimés en pouces & dixièmes de pouces ; la dernière colonne exprime la longueur des foyers d'oculaires , que M. Huygens conseilloit pour ces différentes lunettes.

Foyer.	Ouverture.	Oculaire.
<i>pieds</i>	<i>pou.</i>	<i>pou.</i>
3	0, 97	1,07
6	1, 37	1,50
9	1, 67	1,83
18	2, 42	2,60

Tables des ouvertures & des foyers d'oculaires.

2291. M. le Gentil après avoir fait plusieurs expériences sur les lunettes , & sur le degré de netteté que procurent des ouvertures & des foyers différens , & ayant employé les nombres indiqués dans l'Optique de Newton, (*Liv. I. prop. 7*) , a dressé une table pour des lunettes de différentes longueurs ; en voici l'extrait pour les longueurs les plus ordinaires, qui sont de 3, 6, 9 & 18 pieds ; les ouvertures des objectifs & les foyers des oculaires sont exprimés en lignes & dixièmes de lignes, (*Mém. ac. 1755, p. 462*).

Foyer.	Ouverture.	Oculaire.
<i>pieds</i>	<i>lig.</i>	<i>lig.</i>
3	6, 7	16, 9
6	9, 7	24, 1
9	12, 0	29, 0
18	16, 7	41, 0

2292. On ne doit consulter que l'expérience pour régler les ouvertures , les oculaires , & les diaphragmes des lunettes ; parce que tout cela peut varier suivant la perfection de l'objectif , & l'usage qu'on se propose d'en faire. Avec un excellent objectif de 15 pieds , on peut employer un oculaire qui n'aura qu'un pouce & demi , pour voir un objet fort lumineux , parce que l'image étant parfaite on peut la regarder avec une loupe qui la grossisse beaucoup , sans qu'elle paroisse obscure ni mal terminée ; mais il y faudra peut-être un

Tout cela varie beaucoup.

oculaire de 3 pouces, si l'objectif est d'une qualité médiocre ou si l'objet a peu de lumière.

Différences
des lunettes
de jour à
celles de nuit.

2293. Il faudroit quand on observe pendant le jour employer des oculaires plus foibles ou d'un plus long foyer que la nuit, à cause de la grande lumière des objets environnans qui frappe & éblouit les yeux, rétrécit la prunelle, & rend l'œil moins sensible aux impressions d'une lumière trop foible. Lorsqu'on ne veut que rassembler une très-grande lumière sans s'occuper de rendre les objets bien terminés, on rend l'ouverture de l'objectif extrêmement grande, & le foyer de l'oculaire un peu long; c'est-là tout le secret des *lunettes de nuit* avec lesquelles on parvient à découvrir des comètes dans le ciel, & des vaisseaux sur mer pendant la nuit.

Avantages
de deux oculaires

2294. Deux oculaires plans convexes, qui seroient, par exemple, de 3 pouces & de 1 pouce $\frac{1}{2}$ pour une lunette de 12 pieds, font souvent beaucoup mieux qu'un seul oculaire, ils procurent une plus grande ouverture de l'oculaire, & les astronomes trouvent de l'avantage dans cette méthode; on est même obligé d'y avoir recours lorsqu'on veut employer des oculaires d'un court foyer, & faire grossir considérablement une lunette (2304).

Lunettes à
six verres convexes.

2295. Les lunettes astronomiques sont composées de deux verres seulement, mais elles ont l'inconvénient de renverser les objets; les lunettes ordinaires dont on se sert sur terre sont composées de quatre verres; mais on en fait quelquefois, sur-tout pour la Marine, qui sont à six verres convexes; elles ont le champ plus grand d'environ une moitié que les lunettes à quatre verres, & elles sont moins sujettés aux Iris: voyez M. Euler dans les mélanges de l'académie de Turin, *Tom. III*, & dans les mémoires de Berlin, *Tom. XIII*.

2296. Dans la disposition de ces lunettes, on observe de ne pas mettre les oculaires l'un au foyer de l'autre, on y verroit les taches & les poussières noires qui nuisent à la netteté de l'image, au lieu que quel-

ques lignes d'écartement suffisent pour empêcher qu'on ne distingue ces corps étrangers sur la surface d'un oculaire.

2297. Je n'entrerai pas dans le détail de la manière de travailler & de polir les verres avec le sable, & ensuite le tripoli ou la potée d'étain. Cet art aussi bien que celui de faire les instrumens d'astronomie, fera la matière d'une ample description que M. l'Abbé de Rochon se propose de publier à la suite des Arts que l'académie a déjà donnés (*Nov.* 1770) : en attendant l'on peut consulter Smith, Huygens, Molineux, le Pere d'Orléans. Hévélius cite un auteur nommé *Hieronymus Syrturus* qui avoit fort bien écrit sur cette matière; il y en a un autre nommé *Arshout*; M. Passemant en a dit quelque chose dans sa *construction d'un télescope*, imprimée en 1738, & M. l'Abbé de Rochon dans ses opuscules.

Du travail
des verres.

Des Lunettes Achromatiques (a).

2298. UN des plus grands obstacles qu'on ait trouvé jusqu'ici à la perfection des lunettes, est l'inégale réfrangibilité des rayons de différentes couleurs; il n'y a presque pas de lunette ordinaire dans laquelle on ne voie sur les bords plusieurs cercles colorés produits par les oculaires; les astres lorsqu'ils sont fort lumineux y paroissent également bordés des mêmes couleurs; cette différente réfrangibilité des rayons fait que le foyer des lunettes est incertain & variable; que la parallaxe optique des micromètres est sujette à changer (2599); que les objets sont mal terminés & qu'on ne peut donner aux objectifs qu'une très-petite ouverture.

Inconvé-
niens des cou-
leurs dans les
lunettes.

Ces inconvéniens avoient fait desirer un moyen de

Idées de
MM. New-
ton, Euler &
Dollond.

(a) *Χρῶμα*, color; précédé d'un *a* privatif veut dire, sans couleur. Cependant les lunettes ainsi appelées n'ôtent pas les couleurs qu'on aperçoit ordinairement dans les

lunettes & qui viennent des oculaires, mais elles ôtent la confusion de rayons qui a lieu au foyer des objectifs. Voyez le P. Boscovich, *Dissertatio I*, pag. 48.

réunir les rayons de différente espèce à un même foyer, & l'on y a réussi en grande partie. M. Euler en 1747 examina si l'on ne pourroit point y parvenir par un moyen que Newton avoit indiqué dans son optique pour corriger l'erreur de la sphéricité; il s'agissoit de faire des objectifs composés de deux couches de verre dont l'intervalle fût rempli d'eau. (*Mém. de Berlin, Tom. III, pag. 274*). M. de Maupertuis fit faire à Paris divers essais d'après la théorie de M. Euler; mais ils n'eurent pas le succès que cet illustre auteur avoit espéré. Dollond célèbre Opticien de Londres, voulut d'abord réfuter M. Euler qui avoit attaqué la loi de réfraction donnée par Newton dans cette théorie des couleurs; mais M. Klingenstierna ayant convaincu Dollond de l'erreur de Newton, (*Mém. acad. 1757, pag. 524*); celui-ci trouva en 1759 une méthode qui a très-bien réussi pour former des lunettes achromatiques: j'ai oui dire à Londres en 1763 à plusieurs personnes qu'un nommé Hall avoit eu, il y a bien des années, la même idée; mais Dollond le pere est du moins le premier qui nous ait fait jouir de cette belle invention & qui l'ait portée à un certain degré de perfection. (*Mém. acad. 1756, pag. 380*).

2299. Hévelius avoit observé depuis long-temps que le crystal de roche avoit une réfraction plus grande que le verre de Venise, (*Selen. pag. 9*); mais ce qu'on n'avoit pas observé, c'est que la dispersion des couleurs prismatiques dans différens verres étoit fort différente; lors même qu'on supposoit un égal degré pour la réfraction moyenne, c'est-à-dire, pour celle des rayons verts, qui tiennent le milieu entre les extrêmes ou entre les violets & les rouges. Il y a des matières qui dispersent deux fois plus que d'autres les rayons colorés, & qui augmentent beaucoup la longueur du spectre coloré sous un même degré de réfraction moyenne; enforte qu'on peut faire varier leurs angles réfringens jusqu'à obtenir un spectre coloré de même grandeur, une égale séparation des rayons extrêmes, sans que la réfraction moyenne soit égale.

Matières
des objectifs
achromati-
ques.

2300. M. Dollond forma des prismes, ou de petits angles réfringens, premièrement avec un verre jaunâtre ou couleur de paille, appelé communément à Londres *verre de Venise*, 2°, avec le verre d'Angleterre, connu sous le nom de *Crown-glass* (a), dont on fait les vitres à Londres, 3°, avec le crystal blanc, dont on fait à Londres les verres & les carafes, appelé *Flint-glass* (b); il trouva des prismes de *Crown-glass* & de *Flint-glass*, qui produisoient dans les couleurs une égale divergence de rayons, ou une égale étendue dans le spectre coloré, quoique la réfraction moyenne fût inégale; d'où il étoit aisé de conclure qu'un objectif composé de ces deux matières, réunies d'une manière convenable, n'auroit plus cette aberration de rayons qui produisoit la confusion des images.

Si l'on nomme 1 le sinus de l'angle de réfraction; on a le sinus de l'angle d'incidence dans le *Crown-glass* 1,5412 pour les rayons rouges, 1,5598 pour les rayons violets, suivant les expériences de M. Jaurat; tandis que dans le *Flint-glass* on a 1,6092 & 1,6384; ainsi le rapport des dispersions est de 1 à 1,57 ou de 200 à 314, mais suivant M. Dollond, c'est de 200 à 300, & suivant M. l'Abbé de Rochon de 200 à 320; il y a apparence que cela varie un peu, même dans une seule espèce de verre.

2301. Ce n'est pas ordinairement le poids des matières qui rend la réfraction plus forte; car l'esprit de térébenthine a presque autant de réfraction que le verre, quoiqu'il pèse beaucoup moins; le tissu intérieur des parties y contribue certainement beaucoup; mais nous observons en général que le verre le plus pesant, est celui qui disperse le plus les rayons colorés, & qui produit le spectre le plus allongé. En effet, le *Flint-glass* donne trois pouces de couleurs, là où nos glaces

(a) C'est-à-dire, *Verre en couleur*, parce qu'on le travaille en rond par le moyen de la force centrifuge.

(b) *Flint* signifie petit cailloux ou *silice*; c'est la matière qui le compose jointe avec un tiers de plomb.

ordinaires ne donneroient que deux pouces, enforte que la dispersion du crystal d'Angleterre est $\frac{1}{2}$ de celle de notre verre; & d'un autre côté, l'on trouve en pesant ces matières dans l'air & dans l'eau, que le Flint-glass pese un tiers de plus que notre verre commun.

Essais sur des
verres de dif-
férens poids.

2302. Cet excès de pesanteur prouve bien qu'il entre beaucoup de plomb dans le verre dont la dispersion est si forte, aussi m'a-t-on assuré en Angleterre qu'il entroit en minium un tiers du poids total de la matière du *Flint-glass*; & M. Passemant est parvenu à faire des échantillons, qui donnoient la même dispersion, en faisant fondre six onces de sablon, quatre de potasse, cinq de minium, & huit grains de manganèse (qui est, pour ainsi dire, le savon des Verreries), pour éclaircir la matière. Il est même parvenu à faire un verre, dont la dispersion étoit double de celle de nos glaces, & qui pesoit 1570 grains le pouce cube, en faisant fondre deux onces de sable, $3\frac{1}{2}$ de minium, une once de potasse & un gros de salpêtre. Les morceaux de composition de verre qui nous viennent d'Allemagne, & que les Bijoutiers, & sur-tout M. Straff, employent pour imiter les diamans, réussissent à merveille pour nos lunettes, parce qu'ils contiennent beaucoup de minium; ils ont une qualité diffractive double de celle du verre commun; mais il est bien rare d'en trouver qui soit sans ondes; M. Bouriot a reconnu que le pouce cube pese 1440 grains, quelquefois même jusqu'à 1600; le Straff qu'on fait en France 1306, le Flint-glass 1202, les glaces d'Angleterre 1005, le verre ordinaire de France 940, le verre de Bohême 774; enforte qu'on pourroit faire des lunettes achromatiques avec le verre de France & celui de Bohême. D'ailleurs M. Zeiher à Pétersbourg a trouvé qu'avec une certaine quantité d'alkali, on diminue la réfraction moyenne du verre, sans presque rien changer à la dispersion ou à l'étendue du spectre coloré, (*M. d'Alembert, opusc. Tom. III, pag. 404*). M. Bévis m'a dit qu'il avoit fait faire à Londres des essais de verre avec beaucoup de borax, & que la réfrangibilité étoit

aussi grande que celle du crystal blanc d'Angleterre ; tout cela fait voir qu'avec du temps & des expériences , on pourra varier & perfectionner beaucoup la composition de ces lunettes.

2303. M. Clairaut a donné une théorie très-détaillée des lunettes achromatiques (2308), dans laquelle on trouve un grand nombre de combinaisons différentes pour le choix des foyers, & la quantité des courbures propres à corriger tout à la fois & la réfrangibilité, & les aberrations de sphéricité, c'est-à-dire celles que la figure circulaire produit. D'après ces formules, M. Anthéaulme, connu par son habileté dans la Physique & dans les Arts, fit au mois de Septembre 1763 un très-bon objectif achromatique de sept pieds ; le premier que l'on ait fait de cette force ; il produit beaucoup plus d'effet que la lunette de 34 pieds qui est à l'Observatoire, il a 34 lignes d'ouverture, & peut porter un oculaire de 3 lignes. M. Anthéaulme a centré ses verres, en faisant porter sur leur surface une des extrémités d'un niveau très-parfait (2399), & faisant tourner le verre entre trois entailles, où il tournoit sans changer de situation ; la moindre inégalité d'épaisseur faisoit varier le niveau. Il l'a travaillé dans une forme qui n'étoit pas parfaite ; mais y ayant ensuite collé du papier fort épais, & appliquant le verre dessus, il a vu les endroits où le papier étoit trop comprimé ; il les a usés avec la pierre-ponce, & il s'est procuré par-là un bassin de papier, très-exactement sphérique. Je vais rapporter ici les dimensions de cet objectif ; étant déjà consacrées par un entier succès, elles pourront servir de modèle à d'autres artistes.

Objectif de
M. Anthéaulme.

2304. La partie *ABH* (*fig. 144*), qui est tournée du côté de l'œil, est de la matière la plus légère, de verre commun ou de Crown-glass. Sa courbure extérieure *AB* a 7 pieds $\frac{1}{2}$ ou 90 pouces de rayon ; la surface intérieure *AHB* a 18 pouces de rayon ; le verre *CEGD* qui est de la matière la plus pesante a le rayon de sa concavité *CD* de 17 $\frac{1}{4}$ pouces, ou 1 pied 5 pouces 3 lig.

Dimensions
de cette lunette
achromatique.

Fig. 144.

A a a a ij

& ce ménisque a le rayon de la convexité EG , qui doit être tournée du côté de l'objet, de 7 pieds 6 pouces 8 lign. Ces deux matières différentes sont séparées l'une de l'autre sur les bords, par l'intervalle d'une carte à jouer, & forment par leur assemblage un objectif composé, qui a sept pieds de foyer. On est obligé d'employer pour cette lunette deux oculaires, afin d'avoir un champ plus considérable, malgré la force amplificative (2294): le grand oculaire, qui est le plus près de l'objectif a 18 lignes de foyer; le rayon de sa convexité tournée vers l'objectif est de 11 lignes $\frac{6}{10}$, celui de la convexité tournée du côté de l'œil est 7 pouces 1 ligne $\frac{2}{10}$; le petit oculaire a 5 lignes de foyer; c'est un *ménisque*, c'est-à-dire, qu'il est convexe du côté de l'objet, & concave du côté de l'œil; la convexité a 2 ligne $\frac{1}{4}$ de rayon; la concavité a 8 lignes: ce petit oculaire est placé à 9 lignes du premier, ou à la moitié seulement de la distance de son foyer. Le premier oculaire a 9 lignes d'ouverture, le second en a deux; mais le premier contribue sur-tout à l'étendue du champ de la lunette, & le second a sa force amplificative (2286).

Règle très-simple.

2305. Parmi les différentes formules que M. Clairaut a trouvées propres à former des objectifs achromatiques, il y en a une qui est fort simple, puisqu'elle ne consiste qu'à rendre le rayon des deux courbures intérieures, égal à un cinquième du rayon des deux courbures extérieures. Si AB (*fig.* 144) est un arc de 10 pieds de rayon aussi-bien que l'arc EG , & que les arcs intérieurs CD ayent deux pieds de rayon, la partie ABH étant de verre commun plus léger, on aura un objectif achromatique de 10 pieds de foyer, (*Mém.* 1757, pag. 532); cependant les dimensions rapportées ci-dessus (2304) paroissent donner encore plus de perfection.

2306. M. l'Abbé Bouriot a exécuté des lunettes achromatiques avec beaucoup d'intelligence & d'adresse, une entr'autres qui a 6 pieds 3 pouces de foyer, & peut grossir jusqu'à 120 fois; le Flint-glass qui est en dehors a une surface convexe du côté de l'objet, & une concave

du côté des oculaires ; les surfaces extérieures ont 5 pieds 3 pouces de rayon ; les surfaces intérieures 14 pouces ; l'ouverture est de 28 lignes. Il emploie deux oculaires , le plus grand a 18 lignes de foyer , le plus petit 6 lignes , & celui-ci est placé aux deux tiers du foyer du grand oculaire , ou à 12 lignes de distance , ils sont tous les deux plans convexes ; la surface plane est tournée du côté de l'œil ; le premier oculaire a 10 lignes d'ouverture , le second 5 lignes , & l'ocillon , ou l'ouverture à laquelle on applique l'œil , a 3 lignes de diamètre. M. de l'Étang , autre amateur , en a fait aussi d'excellentes.

2307. Les lunettes les plus singulières que l'on ait faites , sont celles que M. Dollond exécute depuis 1765 ; la miènné a environ 43 pouces de foyer avec 40 lignes d'ouverture , elle force plus que les lunettes ordinaires de 20 pieds ; l'objectif est composé de trois verres , dont un est de Flint-glass concave des deux côtés , placé entre deux lentilles bi-convexes de verre commun ; les six rayons à commencer par celui de la surface extérieure sont de 315 , 450 , 235 , 315 , 320 & 320 lignes. Ces lunettes deviendront encore meilleures lorsqu'on y emploiera trois sortes de verres , au lieu de deux , qui à la rigueur ne réunissent que deux sortes de rayons. (Voyez le P. Boscovich , *Dissert. II* , pag. 101).

Lunettes de
Dollond.

2308. On peut voir sur la théorie des lunettes achromatiques , M. Clairaut , (*Mém. acad.* 1756 , pag. 380 ; 1757 , pag. 524 ; 1762 , pag. 578. M. Euler , (*Mém. acad.* 1765 , pag. 555 , *Mémoires de Berlin* , Tom. XXII , pag. 119. M. d'Alembert , Opuscules mathématiques , d'abord dans le Tom. III , publié en 1764 , & ensuite dans le Tom. IV. M. Klingensfierna , dans une pièce qui a remporté le prix de l'académie de Pétersbourg en 1762. M. de Rochon , dans ses Opuscules , publiés en 1768 , in-8°. Le P. Boscovich , dans les cinq Dissertations Latines qu'il a publiées à Vienne en 1767 , in-4°. Le P. Pézenas dans la nouvelle édition de l'Optique de Smith , qu'il a donnée à Avignon en 1767. M. Duval

Révolu-
tion arrivée
en 1667,
dans les inf-
trumens.

le Roy, dans celle qu'il a donnée à Brest la même année: 2309. L'établissement de l'Académie Royale des Sciences de Paris, en 1666, forma une époque mémorable dans les Sciences, mais sur-tout dans celle des observations astronomiques; jusqu'alors Boulliaud & Gassendi, nos meilleurs observateurs, s'étoient contentés de faire des observations à l'estime, & avec des instrumens grossiers. Pour voir combien il y avoit jusqu'alors d'inexactitude dans les observations, il ne faut que jetter les yeux sur les variétés qu'il y a eu dans la latitude de Paris, déterminée en divers temps (2243). Auzout se plaignoit beaucoup de l'imperfection des instrumens, & souhaitoit ardemment de les perfectionner. Nous voyons qu'en 1664, dans une Epître au Roi, il lui disoit : *Mais, SIRE, c'est un malheur qu'il n'y a pas un instrument à Paris, ni, que je sache, dans tout votre Royaume auquel je voulusse m'assurer pour prendre précisément la hauteur du pole; il auroit pu ajouter qu'il n'y en avoit pas plus en Angleterre, en Italie, &c.*

Louis XIV, secondé par les soins du grand Colbert, ne tarda pas à y remédier; l'académie des Sciences fut établie; on jeta les fondemens de l'Observatoire royal; on rassembla les astronomes François; on en appella du dehors, & l'on fit construire les meilleurs instrumens. Les soins du Ministère furent heureusement secondés par l'habileté des astronomes. Auzout & Picard imaginèrent en 1667 de placer la lunette sur le quart-de-cercle (2312), au lieu des pinnules dont Tycho-Brahé se servoit.

Usage des
lunettes sur le
quart-de-cer-
cle.

2310. On trouve dans l'histoire céleste de M. le Monnier, pag. 2 & 11, l'extrait d'un mémoire lu à l'académie par M. Picard, au mois de Décembre 1667; il rapporte des hauteurs méridiennes du soleil, observées au mois d'Octobre 1767, dans le Jardin de la Bibliothèque du Roi, avec un quart-de-cercle de 9 pieds 7 pouc. de rayon, & avec un sextant de 6 pieds, dans lesquels il y avoit des verres au lieu de pinnules; ce sont les premières observations où l'on ait appliqué des lunettes aux quarts-

de-cercle; & cette idée doit être regardée comme une de celles qui ont changé la face de l'astronomie; on la verra employée dans tous les instrumens que nous allons décrire.

**DESCRIPTION DU QUART-DE-CERCLE
MOBILE.**

2311. Le quart-de-cercle mobile est de tous les instrumens d'Astronomie, celui dont l'usage est le plus ancien, le plus général, le plus indispensable, le plus commode: c'est pourquoi je commencerai par celui-là; on a déjà vu la manière dont il faut concevoir l'usage du quart-de-cercle pour mesurer des hauteurs (23): il ne s'agit plus que des détails de l'instrument, porté à sa dernière perfection.

Je suppose un quart-de-cercle de trois pieds de rayon, *CBA* (Fig. 149). Le limbe qui forme la circonférence *ADB* est assemblé avec le centre *C* par trois règles de fer *CA*, *CD*, *CB*, de deux pouces de large, fortifiées chacune par derrière d'une règle de champ qui en empêche la flexion. Vers le centre de gravité *X* de la masse entière du quart-de-cercle, est fixé un axe ou cylindre de deux pouces de diamètre sur 5 à 6 pouces de long, perpendiculairement au plan de l'instrument; ce cylindre entre dans une douille, c'est-à-dire, dans un cylindre creux *E* représenté séparément en *EE* (Fig. 153); cette pièce qu'on appelle le genou, est composée non-seulement d'une douille horizontale *EE*, mais d'un autre cylindre *e*, fondu tout d'une pièce avec la douille, & que l'on place verticalement en *n* sur le pied de l'instrument. Pour empêcher que le quart-de-cercle ne sorte de sa place, on applique derrière la douille ou le canon *E* (Fig. 149) une plaque de fer qui recouvre le tout; cette plaque est arrêtée par une forte vis, qui pénètre dans l'axe du quart-de-cercle, & qui tourne avec lui, sans lui permettre de sortir de la douille.

Planche XVIII.
Fig. 149.

Axe.

Fig. 153.
Genou.

Fig. 149.

Par le moyen de ce genou, le quart-de-cercle peut

Fig. 149.

tourner verticalement & horizontalement ; il tourne verticalement, c'est-à-dire, sans changer de vertical, lorsque le genou EF restant immobile, l'axe du quart-de-cercle tourne dans la douille à frottement dur ; il tourne horizontalement en se dirigeant successivement vers tous les points de l'horizon, lorsqu'on fait tourner sur son pied l'arbre F du genou. Il y a des vis de pression au-dessus de la douille horizontale E , & à côté de la douille verticale F , comme on le voit au-dessus de p , avec lesquelles on presse le canon dans sa douille lorsqu'on veut fixer le quart-de-cercle à une hauteur donnée, ou dans un vertical déterminé.

Vis de
pression.

Lunette.

2312. Vers l'un des rayons CB du quart-de-cercle on fixe une lunette GM ; elle passe dans une douille de cuivre, fixée en G par des rebords ou empattemens, où passent de fortes vis qui l'affujétissent inébranlablement sur la carcasse de l'instrument ; à l'autre extrémité M est la boîte du micromètre, fixée aussi par des empattemens. A l'égard du tuyau qui s'étend de G en M , il n'importe de quelle manière il soit fait, ce n'est que pour donner de l'obscurité dans la lunette ; on le fait ordinairement de cuivre, il suffit qu'il ait 15 à 16 lignes de diamètre pour un quart-de-cercle de trois pieds, à moins que la lunette ne soit achromatique ; la solidité en est indifférente ; mais celle des deux pièces G , M , qui portent les verres, est essentielle, parce que leur solidité assure celle de l'axe optique de la lunette, qui doit être exactement parallèle au plan de l'instrument (2569), & au premier rayon qui passe par le point de 90° . Nous expliquerons la manière de lui donner précisément cette situation (2555).

Suspension
du fil.

2313. Au centre C de l'instrument, est un cylindre de cuivre exactement tourné, qui porte à son centre un point très-délicat & très-fin. Dans ce point, on place la pointe d'une aiguille, sur laquelle on fait passer la boucle du fil à plomb ; on voit séparément en AA (Fig. 150) le cylindre, ainsi que l'aiguille placée au centre, qui y est supportée par une pièce d'acier a recourbée,

Fig. 150.

recourbée, & percée d'un trou, au travers duquel passe l'aiguille pour aller se loger au centre du cylindre. Quand elle y est bien placée, on a soin de la ferrer dans le trou de la pièce *a* avec une vis de pression qui paroît au-dessus de *a*. Autour de l'aiguille *a*, l'on fait une boucle avec un cheveu, un fil de pite, ou un fil d'argent très-fin; à cette boucle placée tout contre le cylindre du centre, on suspend le fil-à-plomb chargé d'un poids que l'on voit en *q* (*Fig. 149*); ce fil marque sur la division du limbe le degré de la hauteur à laquelle est dirigée la lunette *MG*. L'extrémité du cylindre *AA* (*Fig. 150*), qui porte le point du centre & la pointe de l'aiguille, doit être un peu arrondie ou convexe, pour que le fil n'y éprouve pas un trop grand frottement (2386). On peut aussi mettre à la place de l'aiguille *a* une vis qui se termine en une pointe très-fine, & qui tourne dans la pièce *a*, comme dans une espèce de pont.

Fig. 150.

2314. Autour du cylindre qui porte le centre du quart-de-cercle, il y a une plaque de cuivre plus large, ronde, fixée sur la charpente de l'instrument. Sur cette pièce est suspendu le *garde-filet CH* (*Fig. 149*); c'est une longue boîte de cuivre, mince, soutenue vers le centre, autour duquel elle tourne pour se mettre toujours d'à-plomb, & contenir le fil ou le cheveu qui pend du centre pour marquer la division. Ce garde-filet a une longue porte qui se ferme avec deux petits crochets, pour garantir mieux le fil de l'agitation de l'air; on la voit ouverte sur la gauche; à la partie inférieure *H* est une boîte plus large. Il y a des astronomes qui y placent un vase d'eau où trempe le poids du fil à-plomb, afin que la résistance diminue les oscillations & en abrége la durée; j'ai toujours craint qu'elle ne diminuât aussi la liberté du poids, & je n'en ai jamais fait usage: j'ai reconnu par expérience qu'on peut fixer le plomb en le touchant légèrement du bout du doigt, & quand ses oscillations sont très-petites, on peut les

Fig. 149.
Garde-filet.

Fig. 149,
151 & 152.

anéantir en les contrariant à propos par un petit tour de la vis, qui fait faire une oscillation opposée, & arrête subitement le fil à-plomb : on a bientôt acquis cette habitude quand on observe souvent. La boîte inférieure a une porte *Z* où est attaché un microscope & une lampe à deux meches ; la lampe sert à éclairer le limbe & le fil à-plomb, pour voir sur quelle division il répond ; le microscope sert à grossir les points, pour mettre facilement & exactement le fil du quart-de-cercle sur le point que l'on veut (2578).

La Verge de
rappel.

2315. La verge de conduite ou *Verge de rappel* *LKI* est une addition très-utile que M. de Fouchy a introduite pour mettre le fil sur tel point du limbe que l'on veut ; on la voit représentée séparément en *IL* (Fig. 151 & 152), avec tous ses détails ; mais il faut supposer que la partie *L* Fig. 152, est placée au-dessus & sur le prolongement de la partie *I* (Fig. 151). La tringle a trois pieds de long, sept lignes de large & cinq d'épaisseur ; elle est logée par ses deux bouts dans deux boîtes de cuivre *I*, *L*. Quand elle est arrêtée en *I* (Fig. 149), au moyen de la vis de pression *c* qui l'empêche de glisser dans la boîte *I*, alors l'extrémité inférieure sert de point d'appui : en tournant l'écrou qui est en *B*, l'on fait monter la boîte *L*, qui est fixée par une pièce ou mâchoire *r*, derrière le quart-de-cercle, à la règle de champ du limbe, par le moyen d'une cheville qui traverse & la mâchoire & la règle de champ ; en faisant mouvoir ainsi la boîte *L*, on fait avancer le quart-de-cercle.

2316. La manière dont l'écrou *B* est tenu sur la boîte *L*, paroît assez dans la Fig. 152. Cette boîte est évidée par en haut ; à sa base supérieure est pratiquée une rainure dans laquelle tourne un écrou, qui y est retenu par le moyen d'un collet, ou qui est seulement rivé par-dessous au dedans de la boîte. Cet écrou, qui tient nécessairement à la boîte, avance quand on le tourne sur la vis *B* qui est à l'extrémité de la verge, parce que

celle-ci est fixée par son autre extrémité; l'écrou fait avancer aussi le quart-de-cercle qui est obligé de suivre la boîte *L*.

Pour produire ce mouvement avec plus d'exactitude, *M. Canivet* s'y prend de la manière suivante; à l'extrémité de la boîte *L*, est soudée une plaque de cuivre d'environ deux lignes d'épaisseur, ronde, dans l'épaisseur de laquelle on pratique une rainure circulaire de demi-ligne de profondeur: cette rainure reçoit la base de l'écrou qui tourne dans la rainure; la base de l'écrou est recouverte par deux demi-cercles d'une ligne d'épaisseur qui embrassent l'écrou, auquel on fait, si l'on veut, une rainure circulaire pour que les deux demi-cercles s'y engagent mieux. Ces demi-cercles sont attachés à la plaque supérieure de la boîte *L*, chacun avec deux vis; ils empêchent l'écrou de sortir de la rainure de la boîte, sans empêcher qu'il n'y tourne librement. La vis qui termine la verge de conduite passe au travers de l'écrou. Un écrou à tête ronde, qui a un grenetis *R* (*Fig. 167*), c'est-à-dire, qui est légèrement dentelé sur les bords, est plus fort que n'est un écrou à oreille, tel que je l'ai représenté en *B*, & en *m*.

Fig. 167.

A l'extrémité inférieure *I* de la verge de rappel, on a pratiqué un semblable mouvement, pour que l'observateur qui est occupé à regarder le fil à-plomb, puisse faire tourner le quart-de-cercle d'une petite quantité, & le mettre exactement sur celui des points de la division qui approche le plus de la hauteur de l'astre qu'on se propose d'observer. Pour cet effet, la boîte *I* (*Fig. 151*), est fixée sur une pièce de fer ou de cuivre, coudée *f*, qui passe dans une autre boîte *g*, & se termine par une autre vis *m*, qui est prise dans un écrou, arrêté par un collet sur la base de la boîte *g* dans laquelle il tourne librement; en faisant tourner l'écrou *m*, on fait avancer la vis, la pièce *f* & la boîte *I*, dans laquelle est ferrée la verge de rappel, par une vis de pression *c*: cette verge est obligée d'avancer & de faire mouvoir avec elle le quart-de-cercle.

Fig. 151.

La boîte gm aussi bien que la boîte BL doivent être mobiles autour d'un axe pour se prêter aux différentes inclinaisons de la verge de rappel; & la boîte g est montée sur un collet N (Fig. 149), qui embrasse le pied du quart-de-cercle, qui y tourne librement, & qu'on peut arrêter par une vis de pression, pour fixer le quart-de-cercle dans un vertical déterminé; mais cette vis de pression n'est pas absolument nécessaire.

Fig. 149.

Arbre dupied.

2317. Le montant ON ou pied du quart-de-cercle est un arbre de fer de deux pouces de diamètre sur 3 pieds & demi de hauteur, il se termine par un carré, qui passe au travers des barres P, P , qui font les traverses du pied. Dans ce carré l'on passe une clavette au-dessous de Q ; aussi-tôt que les quatre arcs-boutans R ont été mis en place, on ferre cette clavette Q à coups de marteau, cela fait descendre l'arbre NO sur les arcs-boutans, & forme un assemblage ferme & invariable de l'arbre avec ses arcs-boutans R & ses traverses PP . Le pied ON doit être assez long pour que le limbe DA soit à 2 pieds de terre, ou même $2\frac{1}{2}$ pour la commodité des Observateurs.

Arcs-boutans.

Vis & coquilles du pied.

2318. Pour caler l'instrument, on employe les 4 vis que l'on voit aux extrémités P, P , des traverses du pied; elles sont de cuivre, & ont un pouce de diamètre; elles servent à soutenir le pied de l'instrument, à l'incliner, à rendre son arbre ON exactement vertical, de manière qu'on puisse faire tourner le quart-de-cercle sur son pied sans que le plan cesse d'être vertical, du moins sensiblement. Ces vis portent sur des coquilles de fer, que M. le Cardinal de Luynes employa le premier, vers 1745, & qui servent par leur frottement à empêcher que le quart-de-cercle ne change de place quand on tourne la vis.

Cercle azimutal.

2319. Le cercle azimutal ph , a 6. pouces de diamètre; il est fixé à une douille de cuivre qui est attachée sur le pied de l'instrument; le canon F du genou porte à son extrémité inférieure une alidade k , qui

tourne avec le quart-de-cercle, tandis que la plaque azimutale est fixe; l'alidade marque par son mouvement le degré d'azimut, ou le point de l'horizon auquel le plan est dirigé.

L'usage de ce petit cercle azimutal, ne s'étend pas jusqu'à observer l'azimut avec précision, comme Tycho le faisoit autrefois; on a banni ce genre d'observations comme trop difficile à bien faire: cependant j'ai vu à Avignon, un quart-de-cercle fait sous les yeux du Pere Morand, dont l'axe exactement tourné portoit à sa partie inférieure, & entre les pieds du quart-de-cercle un grand cercle azimutal, avec lequel on pouvoit très-bien observer l'azimut; cela est souvent commode & utile, mais exige des vérifications particulières.

2320. Le limbe *ADB* du quart-de-cercle est la pièce la plus essentielle, il a deux pouces de large, son épaisseur qui est de quatre lignes est formée de deux lames, une de fer & l'autre de cuivre; il est important que le limbe de cuivre soit bien dressé, & que toutes ses parties soient dans un seul & même plan (1119) avec le point du centre. Pour parvenir à cette opération difficile, on se sert d'une règle qu'on fait tourner autour d'un grand axe, & l'on voit si malgré son mouvement l'extrémité de la règle est toujours également proche du limbe dans tous ses points. On peut aussi reconnoître si le limbe d'un instrument est dans un seul & unique plan, en établissant un canal plein d'eau qui parte du centre, & touche la circonférence; on y place une espèce de petite barque, dont le mat est un fil de-fer recourbé, & qui touchant presque le centre & le limbe indique par sa distance en divers points si tous sont dans le même plan; c'est ainsi que l'on nivelle les grandes méridiennes des gnomons. C'est un usage trop répandu jusqu'ici, de former le limbe d'un quart-de-cercle avec du cuivre, tandis que l'assemblage est de fer; le cuivre se dilate plus par la chaleur, & cela peut changer l'arc de 90° . Il est vrai qu'on remédie presque entièrement à cet inconvénient par la force des rivets, ou

Limbe qui
porte les divi-
sions.

des clous qui attachent le cuivre sur le fer, car M. Bouguer ayant exposé un quart-de-cercle à une très-grande chaleur, ne trouva pas dans les angles de différence sensible (*Fig. de la Terr. pag. 184*); cependant on feroit encore mieux de n'employer que du cuivre dans la construction toute entière de l'instrument; cela se pratique depuis long temps en Angleterre, quoique la dépense soit un peu plus considérable, & M. Canivet en a fait plusieurs à Paris, de la même façon.

La manière de diviser un instrument est un objet qui devoit peut être nous occuper ici, mais l'ouvrage de M. le Duc de Chaulnes, & celui de M. Bird, publié en Angleterre, contiennent sur ce sujet des détails auxquels nous ne pouvons que renvoyer.

Divisions. C'est sur le limbe *ADB* que l'on place les divisions; quelquefois par transversales (2336); mais plus souvent avec de simples points, comme on le voit dans la *Fig. 149*; lorsque la lunette a un micromètre, comme on le voit en *M*, on n'a besoin que d'avoir des points de dix en dix minutes. Nous parlerons de la manière de vérifier ces divisions, (2562 & suiv.).

Méthode
Angloise.

2321. En Angleterre tous les quarts-de-cercles mobiles ont une alidade ou lunette mobile, comme dans la *fig. 155*; avec un vernier (2343); enforte que le limbe du quart-de-cercle ne change point, & que la lunette seule tourne autour du centre, comme dans un mural. On se contente d'employer un fil à-plomb, qui pend sur le dernier point de la division, ou du moins qui est parallèle au rayon vertical de 90° ; quelquefois même on n'y emploie que le niveau (2398), dont l'usage est plus commode que celui du fil à-plomb, sans être moins exact quand le niveau est bien fait.

Pièce du
double genou.
Fig. 153.

2322. Le double genou représenté en *ST*, (*fig. 153*); ne sert que pour mettre le plan de l'instrument dans une situation horizontale. La partie *e* du premier genou étant toujours verticale, & la partie *EE* toujours horizontale; le cylindre *T* entre dans le canon *EE*, où il tourne à frottement; l'axe *V* qui porte le quart-de-

Sextant de Flamst. pour mesurer les dist. 751

cercle, & qui est vertical quand le plan est dans une situation horizontale, entre dans la douille S; par ce moyen on donne au plan toutes les inclinaisons nécessaires (2583). Voyez les vérifications & les usages du quart-de-cerle, art. 2550 & suiv.

Sextant de Flamsteed pour mesurer les distances.

2323. PEU de temps après la perfection des instrumens à Paris (2310), Flamsteed entreprit d'observer en Angleterre, avec la même précision; vers la fin de 1671, il commençoit à mesurer des distances dans le Ciel avec des lunettes de 7 & de 15 pieds, à Derby; & il reconnut souvent que les tables de la lune, & les catalogues d'étoiles dont on se servoit alors étoient défectueux; les positions des étoiles marquées dans le catalogue de Tycho, s'écartoient souvent de 3, 4, ou 5', & les lieux de la lune de 15 à 20' de l'observation. Ce fut alors que le Chevalier MOOR, qui étoit à la tête de l'Artillerie, qui aimoit les Siences, & en particulier Flamsteed, lui fournit des instrumens, & déterminâ Charles II à faire bâtir l'Observatoire devenu si célèbre, de GRÉENWICH près de Londres, où Flamsteed entra au mois d'Août 1676. (*Hist. célest. Prolég. pag. 103*).

Générosité
du Chevalier
Moor.

Au défaut d'un quart-de-cerle mural que Flamsteed ne put d'abord se procurer, il s'occupâ pendant les douze premières années à mesurer les distances des étoiles entre elles & les distances des planètes aux étoiles, avec un sextant que le Chevalier Moor lui avoit donné; je vais le décrire ici pour faire connoître la manière dont les premières observations d'Angleterre ont été faites dans le dernier siècle, & le degré d'exactitude qu'on doit attendre de ces observations, qui seront toujours fort utiles pour les recherches des astronomes.

2324. Le sextant CDB (*fig. 148*) a 6 pieds 9 pouces $\frac{1}{4}$ de rayon mesure d'Angleterre (6 pieds 4 pouces 2 lignes mesure de Paris); il est divisé de 5 en 5'. Vers

Structure du
Sextant.
Fig. 148.

Fig. 148.

le centre de gravité, par lequel cet instrument est soutenu, l'on voit une plaque A de 9 pouces de large, & d'un pouce & demi d'épaisseur, de laquelle partent 10 lames de fer, qui asssemblent les rayons CB & CD , avec le limbe BD de l'instrument. Le rayon CB porte 7 barreaux de fer E, E , d'environ 7 pouces, aux extrémités desquels est une règle ET , où sont portés les verres de la lunette fixe; par ce moyen l'espace BT est suffisant pour que deux observateurs puissent regarder à la fois par les deux lunettes lorsqu'elles approchent du parallélisme, ce qui arrive dans la mesure des petits angles.

Divisions
du limbe.

Le limbe BD est de fer, il a un pouce & demi de large, & il est couvert d'une lame de cuivre beaucoup plus large, qui a un quart de pouce d'épaisseur; le bord extérieur est denté, ou plutôt strié comme une vis, & il y a 17 filets dans un pouce; les révolutions, ou les valeurs de ces filets, ou stries, se comptent sur des cercles tracés sur le limbe de cuivre, tout près du bord; mais comme le sextant est vu par-dessous dans la figure 148, je n'ai pu y représenter les divisions. Il y a encore sur le limbe de cuivre des cercles divisés en degrés, & de 5 en 5', les diagonales sont éloignées entre-elles de 5', & la largeur du limbe est divisée en 5 parties sur le bord d'un carré de cuivre, qui sert d'index ou de ligne de foi, à peu-près comme dans la figure 145, & qui accompagne la lunette mobile; ces parties qui valent une minute chacune, sont encore subdivisées en six parties sensibles qui donnent 10''.

Manière de
s'incliner.

L'alidade, ou lunette mobile CO , qui tourne autour du centre C de l'instrument, porte une lunette à deux verres convexes, & au foyer commun deux fils à angles droits, pour la diriger exactement à l'étoile. On voit sur le revers de l'instrument entre le limbe & le rayon CD , une barre de fer NN , placée de champ, sur laquelle est ajusté le demi-cercle denté NFF . Les extrémités de la barre NN sont cylindriques, & reçues en NN dans deux colliers de cuivre, comme des pivots dans leurs trous, pour que le plan du Secteur puisse s'incliner

Sextant de Flamst. pour mesurer les dist. 753

s'incliner en tournant autour de l'axe NN . Cet axe NN est parallèle à la lunette fixe TE , par son moyen on tourne le sextant sans que la lunette fixe EE quitte l'étoile à laquelle elle étoit dirigée, & de manière que la lunette mobile OC , puisse parvenir dans la position nécessaire pour l'autre astre.

Une barre de fer GG perpendiculaire à la barre NN , & fixée également sur le plan du Secteur, porte un autre demi cercle denté, H , dont le plan est perpendiculaire à celui du grand demi-cercle FF , & qui est plus petit & plus mince. Sur ce demi-cercle, & dans l'endroit où il touche le grand demi-cercle NF , il y a une vis sans fin avec un manche, qui sert à incliner le plan de l'instrument pour lui faire faire un angle quelconque, avec le plan du grand demi-cercle FF , qui est toujours dans le plan d'un cercle de déclinaison.

2325. L'axe AQX sur lequel tourne l'instrument est de fer, & a 3 pouces de diamètre, il est arrondi & conique à l'extrémité X , où il tourne dans un cône de cuivre; mais sa partie supérieure est écartée & fendue pour recevoir le demi-cercle FF , dont le centre répond à l'extrémité A de l'axe. La circonférence de ce demi-cercle engrene dans un pignon en I , & ce pignon engrene dans une autre roue qui est conduite par une manivelle M & une vis sans fin, ce qui donne le mouvement à toute la machine, afin que la lunette fixe ET puisse se placer dans un parallèle quelconque: car elle seroit toujours dans le plan de l'équateur si elle restoit perpendiculaire à l'axe AX . Un peu au-dessous du milieu de l'arbre est une boîte Q de cuivre, qui est à l'extrémité d'un fort montant de chêne; l'axe y est supporté & contenu dans le plan du méridien, de manière à se diriger toujours vers le pôle du monde.

Les deux demi-cercles F & H servent à placer l'instrument dans le plan de deux astres pour en mesurer la distance; on commence par diriger la lunette fixe ET vers l'un des deux astres, par le moyen du seul

Mouvement
parallatique
du Sextant.

demi-cercle *FF*, après quoi sans quitter l'étoile on peut faire tourner le plan de l'instrument par le demi-cercle *H*, de manière que la lunette mobile *CO* étant placée sur quelque point du limbe soit dirigée vers l'autre astre.

Il y a actuellement à l'Observatoire Royal de Greenwich un très-beau quart-de-cercle mobile de trois pieds de rayon qui s'incline en tout sens par le moyen de deux axes & de deux demi-cercles dentés, à peu-près comme le sextant que je viens de décrire.

Il avoit demandé un mural.

2326. Avant que ce sextant mobile fût construit, Flamsteed avoit demandé qu'on fit faire un quart-de-cercle mural pour mesurer les hauteurs méridiennes des étoiles, & on le lui avoit promis; mais un des membres de la Société Royale ayant voulu le faire construire à sa manière, il se trouva hors d'état de servir, & Flamsteed se tourna du côté de l'observation des distances; dans le même temps qu'à l'Observatoire royal de Paris on observoit les hauteurs méridiennes, comme on le peut voir dans l'histoire céleste.

2327. Flamsteed essaya d'observer des hauteurs méridiennes avec le sextant que nous avons décrit; mais comme cela étoit fort difficile, il fit construire à ses frais en 1683 un instrument du même rayon, qu'il divisa lui-même, & dont il se servit plusieurs années.

Mural fait par Abraham Sharp.

En 1688, Abraham Sharp fut choisi pour aider Flamsteed dans ses observations; c'étoit un homme très-adroit, en même temps qu'il étoit fort instruit dans les Mathématiques; il fit lui-même un arc mural de 69 pouces $\frac{1}{2}$ de rayon, (5 pieds, 5 pouces de Paris); avec lequel Flamsteed fit ensuite pendant 30 ans les observations qui ont servi à dresser le fameux Catalogue Britannique, & il commença le 19 Septembre 1689, (*Prolegom. pag. 111*). Cet instrument étoit si bien fait que les Artistes même l'admiroient; mais comme les muraux qui se font aujourd'hui sont encore plus parfaits; je me contenterai de les décrire.

Description du Quart-de-Cercle mural.

2328. Tycho - Brahé qui avoit beaucoup perfectionné le quart-de-cercle fut le premier qui imagina le quart-de-cercle MURAL, c'est-à-dire, celui dont le plan est fixé contre un mur, & dont l'alidade parcourt le plan du méridien, pour observer les passages & mesurer les hauteurs méridiennes; il donna à cet instrument le nom de *Quadrans Tychonicus*, (*Astron. Inst. Mekan. pag. 21*) en qualité d'inventeur, & il s'en servit beaucoup pour déterminer la théorie du soleil; c'est véritablement l'instrument le plus commode & celui avec lequel on peut faire en peu de temps le plus grand nombre de bonnes observations.

Le mural que l'on voit dans la *fig. 155* fut fait à Londres en 1742 par Jonathas Siffon, sous la direction de M. Graham; M. le Monnier s'en servit à Paris jusqu'en 1751 qu'il fut transporté à Berlin, pour mes observations (*Hist. de l'acad. de Berlin, T. VI, an. 1750, pag. 255. Smith Optique art. 853*).

Fig. 155.

2329. Ce mural est entièrement de cuivre, il a environ 5 pieds de rayon, le chassis en est formé par des règles plates de cuivre fortifiées par des règles de champ. Les rayons *HB*, *HA* étant divisés chacun en quatre parties égales servent à trouver les points *D* & *E* par lesquels le quart-de-cercle est suspendu librement sur des appuis ou supports de fer, qui sont faillies sur le nud du mur.

Mural de cuivre de 5 pieds.

L'un des supports *E* est représenté séparément en *e* à côté du quart-de-cercle; il est mobile au moyen d'une tringle *EF* ou *ef* qui passe dans un écrou, pour rétablir l'instrument dans sa situation, lorsqu'on voit qu'il en est un peu dérangé; cela se reconnoît par le moyen du fil perpendiculaire *HA* qui doit toujours répondre sur le même point *A* du limbe, & qu'on a soin d'examiner avec un microscope à chaque observation.

Suspendu librement.

Pour empêcher la vacillation d'une aussi grande machi-

C c c c i j

Fig. 155.

ne on a placé derrière le limbe 4 oreilles de cuivre avec de doubles équerres I, K, I, K ; il y en a d'autres le long du rayon HA & du rayon HB ; chacune de ces équerres porte deux vis entre lesquelles on arrête les oreilles qui sont fixées derrière le quart-de-cercle.

Ces équerres sont scellées dans le mur ou dans la pierre qui porte l'instrument, & le contiennent dans le plan du méridien, sans s'opposer à la dilatation ou à la contraction des règles de cuivre dont est composé le mural; cette liberté qu'a l'instrument de s'étendre en tout sens, fait que la dilatation causée par la chaleur, ne change rien aux angles qu'on mesure par ce moyen (2320).

Contre poids
de la lunette.

2330. Au-dessus de la pierre qui porte l'instrument & à la même hauteur que le centre, on place horizontalement un axe PO , qui est perpendiculaire au plan du quart-de-cercle & qui passeroit par le centre c s'il étoit prolongé. Cet axe tourne sur deux pivots P ; sur cet axe est fixée à angles droits une autre branche ON chargée à son extrémité d'un poids N , capable de faire équilibre avec la pesanteur de la lunette LM ; tandis que l'axe par son extrémité voisine du quart-de-cercle conduit le châssis de bois PRM qui tient à la lunette en M . Le contre-poids dispense l'Observateur de soutenir le poids de la lunette quand il s'agit de l'élever; & empêche qu'elle ne charge & ne fatigue le limbe de l'instrument.

2331. L'extrémité inférieure V de la lunette est garnie de deux petites roulettes qui prennent le limbe du quart-de-cercle des deux côtés; la lunette ne touche presque le limbe que par ces deux roulettes qui en rendent le mouvement si doux, qu'en lui donnant de la main un assez petit mouvement, la lunette parcourt toute seule une grande partie du limbe du quart-de-cercle, emportée par le contre-poids N (2330).

2332. Lorsqu'on veut arrêter la lunette à une certaine hauteur, on se sert d'une main de cuivre T qui embrasse le limbe, & qui fait ressort par dessous; elle

se fixe par une vis de pression qui la serre sur le limbe; alors en tournant la vis de rappel on fait avancer la lunette jusqu'à ce que l'astre dont on observe la hauteur soit sur le fil horizontal de la lunette; on voit alors sur une plaque *X* qui tient à la lunette, & qui porte un vernier (2343), le nombre de degrés & de minutes & même les quarts-de-minutes, le reste s'estime facilement à 2 ou 3'' près (2345).

2333. M. Bird, célèbre artiste de Londres, a fait trois quarts-de-cercle de 8 pieds de rayon, pour Greenwich, Paris & Pétersbourg, & deux de 6 pieds pour Gottingen & pour Cadix; ils sont d'une si grande perfection que le gouvernement d'Angleterre a acheté sa méthode, & l'a publiée en 1767 (*The method of dividing, &c. London by John Nourse, 1767, in-4°*). Dans quelques uns de ces quarts-de-cercle on a deux divisions par lignes (2345), avec une division par points entre les deux autres, & l'alidade qui est en *X* (*fig. 155*) est percée vers le milieu pour qu'on ait la facilité d'y tendre un fil qui se place sur les points. Après qu'on a observé une étoile on emploie le micromètre extérieur pour trouver le chemin qu'il faut faire faire à la lunette pour qu'elle parvienne sur le point, & l'on ajoute cette quantité à celle qui est indiquée par le point, pour avoir la hauteur de l'étoile. M. Siffon a fait aussi à Londres plusieurs muraux; M. Canivet, ingénieur pour les instrumens de Mathématiques à Paris, a fait un mural de 6 pieds pour l'observatoire de Milan, & plusieurs sextans de 6 pieds de rayon pour différens Observatoires de l'Europe; mais ce sont des instrumens mobiles (2559), à deux lunettes, faits sur le principe du quart-de-cercle de la *figure 149*.

Instrumens
faits par M.
Bird & Cani-
vet.

Des différentes divisions du Quart-de-Cercle.

2334. IL y a quatre méthodes pour subdiviser dans un quart-de-cercle l'intervalle d'une division à l'autre, qui est ordinairement de 5 ou de 10' : 1°, le

758 ASTRONOMIE, LIV. XIII.

micromètre ; 2°, la vis extérieure ; 3°, les transversales avec une alidade divisée ; 4°, la division de Vernier.

Le micromètre d'un quart-de-cercle mural est le même que pour un quart-de-cercle mobile, & nous en donnerons la description (2366) ; on l'a employé en France dans quatre quarts-de-cercles muraux, dont trois sont à l'Observatoire royal & un dans la maison de M. de Fouchy, rue des Postes ; ce dernier y fut placé dans le temps que M. Godin & M. de Fouchy y observoient ensemble.

Usage de la vis extérieure.

Fig. 155.

2335. La vis extérieure a été employée en Angleterre dans les muraux de 8 pieds & dans les grands secteurs semblables à celui de l'art. 2381. La vis *T* (fig. 155), destinée à mouvoir la lunette porte un petit cercle ou cadran de laiton divisé, qui est fixé sur la vis, & qui tourne avec elle. Il y a un index qui est placé à frottement dur sur la monture & qui ne tourne point avec le cadran & avec la vis ; quand on a observé la hauteur d'une étoile en la mettant exactement sur le fil de la lunette, & qu'on veut savoir le nombre de secondes qui y répond, on place l'index sur le chiffre zéro ou sur le commencement de la division du cadran ; l'on fait tourner la vis avec son cadran jusqu'à ce que l'alidade *X* ou le Vernier tombe exactement sur un des points de la division, & le nombre de secondes qui a passé sur le cadran, en le faisant ainsi mouvoir, s'ajoute avec les degrés & minutes qui répondent au point de la division ; si les pas de la vis ne sont pas tels qu'un tour fasse exactement une minute, on divise le cadran en conséquence des filets de la vis.

Transversales.

2336. La division par transversales droites est fort ancienne, elle tire son origine de l'échelle géométrique dont on ignore l'auteur ; Tycho-Brahé nous apprend qu'avant lui on s'en servoit pour diviser les flèches, arbalètes, ou bâtons de Jacob. Thomas Digges, (*Algebra seu Scale mathem.* 1573), l'attribue à un nommé Cantzler ; Tycho qui en parla pour la première fois dans son *Traité sur la comète de 1577*, dit qu'il la tenoit d'un

habile Professeur de Leipfick, nommé Homélius, qui l'employoit dans son échelle géométrique. Tycho s'en servit dans presque tous ses instrumens, mais en 1672, il ne l'avoit pas encore employée.

2337. Quand aux transversales circulaires Hévélius attribuoit cette invention à Benoît *Hedraus*, auteur Suédois qui la donna en 1643, dans un livre intitulé : *Nova & accurata astrolabii geometrici structura*, imprimé à Leyde ; mais Morin dans son livre intitulé : *Longitudinum caelestium atque terrestrium scientia*, imprimé dès 1634, l'avoit attribué à Jean Ferrier, artiste industrieux, on ne fait pas si c'est le même dont parle Clavius dans la préface d'un petit Traité qui est à la fin des huit livres de sa Gnomonique ; celui-ci étoit Espagnol, & avoit imaginé une méthode nouvelle & très-ingénieuse pour tracer les cadrans solaires.

2338. Quoi qu'il en soit, la méthode des transversales s'emploie encore dans quelques muraux, & dans les quarts-de-cercles mobiles lorsqu'on n'a ni alidade ni micromètre. Soit *ALDE* (fig. 145), une portion du limbe d'un quart-de-cercle ; *AL* une portion du rayon, ou de l'alidade qui porte la lunette du mural ; *LB* un arc de 5' qu'il s'agit de diviser de 10 en 10'', c'est-à-dire, en 30 parties ; on voit assez qu'en divisant la diagonale ou transversale *AB* en 30 parties, à commencer du point *A*, l'alidade *AL* tombera sur la première division lorsque le point *L* aura parcouru la trentième partie de l'arc *LB* ou 10'', & ainsi des autres.

Fig. 145.

2339. Ce que nous disons de l'alidade *AL* se doit dire du fil à-plomb dans un quart-de-cercle mobile ; ce fil qui tombe d'abord sur 4° 0', c'est-à-dire, sur les points *A* & *L*, en supposant le quart-de-cercle dirigé à 4° de hauteur, coupera la transversale *AB* sur le milieu *H* de sa hauteur quand le fil à-plomb *AL* fera sur le milieu de l'arc *LB* ou *AC* ; c'est ainsi qu'on substitue les divisions d'une ligne *AB* qui a deux pouces de long, à celles d'une petite ligne *LB*, qui à cause de son extrême petitesse, ne pourroit se diviser facilement.

Des cercles
concentri-
ques.

2340. La hauteur AB devant être divisée en parties égales aussi bien que tous les rayons, tels que ED , &c. on se fert dans les quarts-de-cercles mobiles de plusieurs cercles concentriques & parallèles à CE & à BD ; mais dans les muraux il est bien plus commode de ne diviser que la seule alidade AL , comme on le voit dans la *fig.* 145; elle peut être divisée sur sa hauteur en 30 parties, ce qui est très-facile en lui donnant 15 à 20 lignes de hauteur, ainsi qu'au limbe du quart-de-cercle; les transversales AB de l'instrument étant tirées de 5 en 5', l'alidade AL en parcourant l'espace LB de 5', rencontrera la transversale AB successivement dans les points marqués 1, 2, 3, 4; lorsqu'elle sera au point 1, elle aura fait une minute ou un cinquième de l'espace qu'il y a de L en B , & ainsi des autres minutes; on voit même que chaque intervalle d'une minute étant divisé en 6 parties égales sur l'alidade, on pourra appercevoir si l'alidade AL au lieu de rencontrer la transversale AB au point 1, ne la rencontre qu'à un sixième de l'intervalle qu'il y a depuis A jusqu'en 1, & si elle est à $\frac{1}{30}$ de l'intervalle qu'il y a de A en C .

Inégalités
des transver-
sales.

2341. Les transversales AB à la rigueur ne doivent pas être divisées en parties égales, parce que AC est plus petit que LB , étant une partie d'un cercle de moindre rayon; cette inégalité est insensible dans la pratique; car si le point H de la ligne AB est celui qui répond à la moitié de LB , la partie AH doit être plus petite que HB d'une quantité égale seulement à la moitié de AB multipliée par $\frac{LB-AC}{LB+AC}$, ce qui seroit aisé à démontrer.

Division de
Nonnius, ou
de Vernier.

2342. La division qui est aujourd'hui la plus employée est appelée dans plusieurs auteurs *division de Nonnius*, quoique Nonnius n'en soit pas tout-à-fait l'auteur; mais il en avoit imaginé une autre qui eut beaucoup de célébrité, & qui pouvoit conduire à celle que nous avons aujourd'hui. Voyez son traité de *Crepusculis*, imprimé en 1542. Le véritable auteur de la nôtre dans son

son état actuel fut Pierre VERNIER, Châtelain de Dornans en Franche-Comté, qui la publia dans un petit Ouvrage imprimé à Bruxelles en 1631, intitulé : *La construction, l'usage & les propriétés du cadran nouveau*. Voyez une dissertation du P. Pézenas qui renferme beaucoup de choses curieuses sur les instrumens de mathématiques. (*Mémoires rédigés à l'Observatoire de Marseille, année 1755, seconde Partie, pag. 8 & suiv.*), & les notes de Benjamin Robins sur l'Optique de Smith; je crois donc qu'il est juste de rétablir le véritable auteur dans ses droits, & d'appeller *Vernier* au lieu de Nonnius, la pièce qui forme la division dont il s'agit.

Explication
du Vernier.

Fig. 156.

2343. Le VERNIER est une pièce de cuivre *CDAB* (*fig. 156*), (c'est la petite portion *X* de la *figure 155* représentée séparément); on voit que la longueur *CD* du Vernier est divisée en 20 parties égales; mais elle est placée sous une portion du limbe qui contient 21 divisions, c'est-à-dire, qu'on a pris la longueur de 21 divisions du quart-de-cercle, & qu'on a divisé cette longueur en 20 parties seulement; ainsi la première division de la pièce de Vernier qui est marquée 15, en commençant au point *D*, est un peu en arrière ou à la gauche de la première division du limbe, & cela de la vingtième partie d'une des divisions du limbe, ce qui fait 15". La seconde division du Vernier est à gauche de la seconde division du limbe, & cela du double de la première différence ou de 30", & ainsi de suite, jusqu'à la 20^e & dernière division à gauche de la pièce du Vernier, ou les 20 différences étant accumulées, chacune de la vingtième partie d'une division du limbe, cette division se trouve exactement d'accord avec la 21^e ligne du limbe du quart-de-cercle.

2344. Il faudra donc pousser l'alidade d'une vingtième partie de division ou de 15" à droite, pour faire concourir la seconde division du Vernier avec une des divisions du limbe; de même en la poussant de deux vingtièmes ou de 30", il faudra regarder la seconde division de l'alidade, & ce sera celle qui concourra avec

une division du limbe. Ainsi l'on jugera que le commencement *D* du Vernier qui est toujours l'index ou la ligne de foi a avancé de 2 divisions ou de 30'' à droite, quand on verra que c'est la seconde division marquée 30 sur le Vernier, qui correspond exactement à une des lignes du quart-de-cercle.

Utilité de
cette métho-
de.

2345. Par le moyen d'un Vernier fait avec soin, l'on distingue aisément un centième de ligne; & sur le limbe d'un quart-de-cercle de 5 pieds divisé de 5 en 5' l'on voit immédiatement 15'', l'on estime ensuite jusqu'à 2 ou 3'', à la vue; cette méthode est aujourd'hui généralement adoptée, comme la plus parfaite de toutes, & on l'emploie en Angleterre, même pour les quarts-de-cercles mobiles, à la place du micromètre dont on se sert en France (2366).

Fig. 156.

Division en
96 parties.

J'ai placé à côté du quart-de-cercle & dans sa grandeur naturelle (fig. 156), la plaque de cuivre qui est portée par la lunette. Cette plaque de cuivre porte deux verniers; la ligne supérieure *CD* divise les cinq minutes en 20 parties, c'est-à-dire, de 15 en 15''; la ligne inférieure *AB* répond aux parties d'une autre division qui n'est pas de 90°, mais de 96 parties pour le quart-de-cercle; elle a été quelquefois employée en Angleterre à cause de la facilité des subdivisions. Chacune des 96 portions du quart-de-cercle vaut 56' 15'' de la division ordinaire; elle est divisée sur le limbe en 16 parties, & l'arc de Vernier *AB* occupant 25 de ces divisions & étant divisé lui-même en 24, donne immédiatement des parties dont la valeur est de 8'' 47''' $\frac{1}{3}$. De cette manière on peut facilement construire une table de réduction qui serve à trouver par le moyen de cette seconde division les degrés, minutes & secondes; comptés à la manière ordinaire, & avoir une même hauteur de deux manières différentes, ce qui fait une excellente vérification des divisions du quart-de-cercle, & des hauteurs estimées sur le vernier.

DESCRIPTION DU MICROMÈTRE.

2346. LE MICROMÈTRE (^a) est un instrument composé de plusieurs fils placés au foyer d'une lunette, pour mesurer par leur intervalle la grandeur de l'image qu'on y apperçoit ; il y a plusieurs sortes de micromètres que je décrirai séparément, en commençant par les plus simples.

2347. La première idée du micromètre fut donnée par M. Huygens en 1659 (*Systema Saturnium*, pag. 82). Après avoir parlé des diamètres des planètes qu'il avoit observés, il dit que Riccioli avoit trouvé le diamètre de Vénus trois fois plus grand que lui ; & pour justifier sa détermination, il rend compte de la manière dont il s'y est pris pour mesurer les diamètres des planètes : voici à peu-près ce qu'il en dit.

2348. « Dans les lunettes formées de deux verres
 » convexes il y a un endroit où l'on peut placer un
 » objet aussi petit & aussi fin qu'on voudra ; il y paroît
 » très-distinct, très-bien terminé. . . . Si à ce foyer
 » l'on place d'abord un anneau dont l'ouverture soit un
 » peu plus petite que celle de l'oculaire, on verra par
 » cet anneau tout le champ de la lunette, c'est-à-dire,
 » tout l'espace circulaire qu'on apperçoit dans le ciel en
 » regardant par cette lunette, & cet espace sera ter-
 » miné par une circonférence exacte dont le diamètre
 » est facile à mesurer. L'horloge oscillatoire que nous
 » avons imaginée depuis peu est très-propre à cet effet ;
 » on fait qu'il passe un degré de la sphère en 4 mi-
 » nutes de temps, ou une minute en 4 secondes de temps ;
 » si donc une étoile a employé 69'' à parcourir le champ
 » de la lunette, on fera sûr que cette lunette occupe
 » $17\frac{1}{4}'$, & telle est celle dont nous nous servons. On
 » prendra alors une ou deux petites plaques ou lames

Invention du
 Micromètre.

(^a) *Microps*, *parvus*, parce qu'il sert à mesurer de petits angles qui ne passent guère un degré.

» dont la largeur aille en diminuant; on percera le tube
 » de la lunette de chaque côté à l'endroit dont nous
 » avons parlé, pour y placer les petites lames en tra-
 » vers ^(a). Lorsque l'on voudra mesurer le diamètre d'une
 » planète on examinera quelle largeur doit avoir cette
 » lame pour cacher entièrement la planète, & cette lar-
 » geur étant comparée au diamètre entier de l'ouver-
 » ture de l'anneau, par le moyen d'un compas très-fin,
 » fera connoître le diamètre de la planète en minutes &
 » en secondes ».

M. Auzout
 imagine les
 fils mobiles.

2349. Ainsi le micromètre de M. Huygens ne consistoit qu'en une petite lame qu'il faisoit glisser sur le diaphragme, ou petit anneau qui circonscrit l'ouverture; cette lame cachoit par sa largeur l'image qu'on vouloit mesurer, & en donnoit ainsi le diamètre. M. Auzout imagina le premier en 1666 de renfermer l'image entre deux fils qu'on rapprochoit l'un de l'autre; les premières observations faites avec ce nouvel instrument furent imprimées en Angleterre même. (*Phil. Transf. n^o. 21*), M. Townley écrivit ensuite qu'il avoit trouvé une semblable invention dans les papiers de M. Gascoigne: (*Phil. Transf. n^o. 25*), & M. Bevis assure qu'il en a trouvé la preuve dans une lettre écrite par M. Gascoigne en 1641, dont l'original étoit dans la Bibliothèque de Milord Maclesfield. Quoi qu'il en soit de l'inventeur secret que nous opposé l'Angleterre, il est sûr que M. Auzout inventa, & qu'il connut le mérite de l'invention; il en fit usage, il la publia, & en enrichit l'astronomie.

Réticule de
 45°.

Fig. 138.

2350. Avant que de donner la description des micromètres, il faut parler des *réticules*, qui sont l'espèce la plus simple de micromètres; il y en a deux sortes principales: sçavoir, le réticule de 45°, & le réticule rhomboïde. Le champ d'une lunette simple, tel que le cercle *ACBE* (*fig. 138*), est ordinairement garni d'un chassis, dans lequel il y a quatre cheveux, ou 4 fils tendus. Le fil *AB* est destiné à représenter le parallèle

(^a) *Virgulæ*; petites lames de cuivre, ou d'une autre matière.

à l'équateur ou la direction du mouvement diurne des astres; le fil horaire CE , qui lui est perpendiculaire, représente un méridien ou cercle de déclinaison; & les fils obliques NO , LM , font des angles de 45° avec les deux premiers.

Fig. 138.

2351. Lorsqu'on veut mesurer la différence d'ascension droite, entre deux astres, pour connoître la position d'une planète par le moyen de celle d'une étoile, on incline le fil AB , de manière que le premier des deux astres le suive & le parcoure exactement; & l'on observe l'heure, la minute, & la seconde où l'astre passe au centre P , ou à l'intersection des fils. Quand le second astre vient à traverser la lunette à son tour, il décrit une autre ligne $VFDR$, parallèle à APB ; on compte l'instant où il arrive en D , c'est-à-dire, sur le même cercle de déclinaison $CDPE$, où l'on a observé le premier astre en P , & la différence des temps donne celle des ascensions droites (2505).

Différence
d'ascension
droite.

2352. Pour trouver la différence de déclinaison, des deux astres ou la perpendiculaire PD , comprise entre AB & VR , on compte le moment où le second astre passe en F & en G ; l'intervalle de temps converti en degrés, & multiplié par le cosinus de la déclinaison de l'astre (892) donne l'arc FDG , dont la moitié FD est égale à DP , à cause de l'angle FPD supposé de 45° (2507).

Différence
de déclinaison.

2353. M. Bradley a substitué le réticule rhomboïde au réticule de 45° , & c'est aujourd'hui le plus usité parmi les Astronomes. Le réticule de 45° a deux inconvéniens que M. Bradley a voulu éviter; c'est 1^o. de rendre inutile une partie du champ de la lunette; savoir, les deux segmens NCL , MEO , qui se trouvent en haut & en bas; 2^o. d'embarrasser considérablement le centre de la lunette par l'intersection de plusieurs fils, l'astre peut y passer quelquefois sans être aperçu.

Réticule
rhomboïde.

Le réticule de M. Bradley est formé d'un rhombe $BEDF$ (fig. 147), tel que l'une des diagonales soit

Fig. 147.

Fig. 147.

Propriété de
ce réticule.

double de l'autre. Pour le tracer, nous supposons un carré $AGHC$, dont les côtés AC & GH soient divisés chacun en deux parties égales, en D & en B . Du point B , l'on tire aux angles A & C les lignes BA , BC , & du point D aux angles G & H , les lignes DG , DH ; ces quatre lignes formeront par leurs intersections le rhombe $BEDF$; EF est la moitié de AC , & par conséquent la moitié de BD ; si en quelque endroit de ce réticule on tire une ligne ef parallèle à la base EF , la perpendiculaire Bd sera égale à la base ef , comme BD est égale à AC , c'est-à-dire, que la largeur d'une partie de ce rhombe est toujours égale à la hauteur.

2354. Lorsqu'on veut comparer avec ce réticule une planète à une étoile, on fait en sorte que le premier des deux astres parcourt dans son mouvement diurne l'espace EF ; & comme l'on connoît la valeur du réticule en degrés & en minutes, on fait combien le point B est éloigné du milieu du fil EF , ou du centre de la lunette. Le second astre venant à traverser aussi la lunette, on compte exactement le temps qu'il a employé à passer de e en f , on convertit le temps en degrés, minutes & secondes: on diminue ces degrés, en les multipliant par le cosinus de la déclinaison de cet astre (892), & l'on a la grandeur de ef , ou Bd , & par conséquent Md , qui est la différence en déclinaison des deux astres. (Voyez l'exemple art. 2518).

2355. Ce réticule sert à comparer les planètes, & les comètes aux étoiles fixes, qui ont à peu-près la même déclinaison, ou bien à comparer les petites étoiles, dont on veut dresser un Catalogue, à quelque étoile principale, qui est à peu-près sur leur parallèle. M. de la Caille, qui s'en est servi au Cap de Bonne-Espérance en 1751, pour dresser un Catalogue de près de dix mille étoiles dans la partie australe du Ciel, l'avoit fixé dans la lunette d'un quart-de-cercle; on peut également le placer dans une lunette méridienne (2391), ou dans une lunette parallatique (2407).

2356. Pour pouvoir distinguer dans l'obscurité si l'étoile a passé au-dessus ou au-dessous de la ligne EF du milieu, on a l'attention de conserver une largeur considérable à la partie ELB du réticule, tandis que les trois autres côtés sont les plus minces & les plus évidés qu'il soit possible; lorsque l'étoile, après s'être cachée derrière une des lames du réticule, reparoît aussitôt de l'autre côté, l'on est assuré qu'elle est dans la partie inférieure EDF ; mais s'il s'écoule plusieurs secondes sans qu'on l'apperçoive, on juge qu'elle est dans le segment supérieur EB , dont la lame est beaucoup plus large que les autres; M. de la Caille étoit même dans l'usage de réserver pleine toute la partie BLE , qui est ombrée ou teintée dans la figure.

Toutes les lignes ponctuées GA , GH , ne sont que des lignes auxiliaires & accessoirs, que l'on trace sur une platine ronde de cuivre destinée à former le réticule; & lorsqu'il est tracé, l'on abat toutes les parties inutiles, on ne conserve qu'un anneau circulaire $BLDK$, de la grandeur du champ de la lunette, ou de l'ouverture qu'on veut donner à l'oculaire, & la partie rhomboïde $BEDF$; celle-ci ne fait avec cet anneau circulaire $BLDK$ qu'une seule pièce, qui se place au foyer commun des deux verres. On y met, si l'on veut, deux fils BD , LK , quoiqu'à la rigueur on puisse très-bien s'en passer.

2357. M. Romer imagina dans le dernier siècle une espèce de micromètre propre à observer les éclipses, c'est-à-dire, à diviser en 12 parties égales les diamètres du soleil & de la lune, malgré leurs changemens (*Hist. acad. pag. 145*). Cette lunette, dit M. Horrebow, est composée de deux objectifs qu'on peut éloigner l'un de l'autre : *Elongato objetivo interiori à cratula* ^(a), & *contrahendo tubum videbitur filaris cratulae quadratum esse auctius.* (*Horrebow Basis astron. pag. 88*). On trouve dans le même livre de M. Horrebow, la description de plusieurs instrumens de M. Romer, & en particulier de

Micromètre
de M. Romer.

(a) *Cratula*, c'est la boîte qui contient le réticule.

la lunette double, *Tubus reciprocus*, (*Ib. pag. 97*); on peut l'employer à corriger les divisions des instrumens, à observer les équinoxes, & à trouver deux points qui soient opposés, & en ligne droite avec l'axe d'une lunette, comme M. de la Condamine l'a remarqué; on le peut faire avec la lunette d'épreuve (2503); au reste, les bornes de ce livre n'admettent que la description des instrumens les plus usités.

Micromètre simple à grand de vis.

2358. Les micromètres sont de deux sortes : le micromètre qu'on applique à une lunette mobile de 7 à 8 pieds pour mesurer des diamètres, ou des différences d'ascension droite & de déclinaison, est plus simple que celui du quart-de-cercle : je commencerai donc par le premier ; je décrirai le micromètre dont je me fers depuis 1753, il est presque semblable à celui qui avoit été décrit en 1738 dans l'Optique de Smith *art. 877* : c'est la meilleure construction que je connoisse.

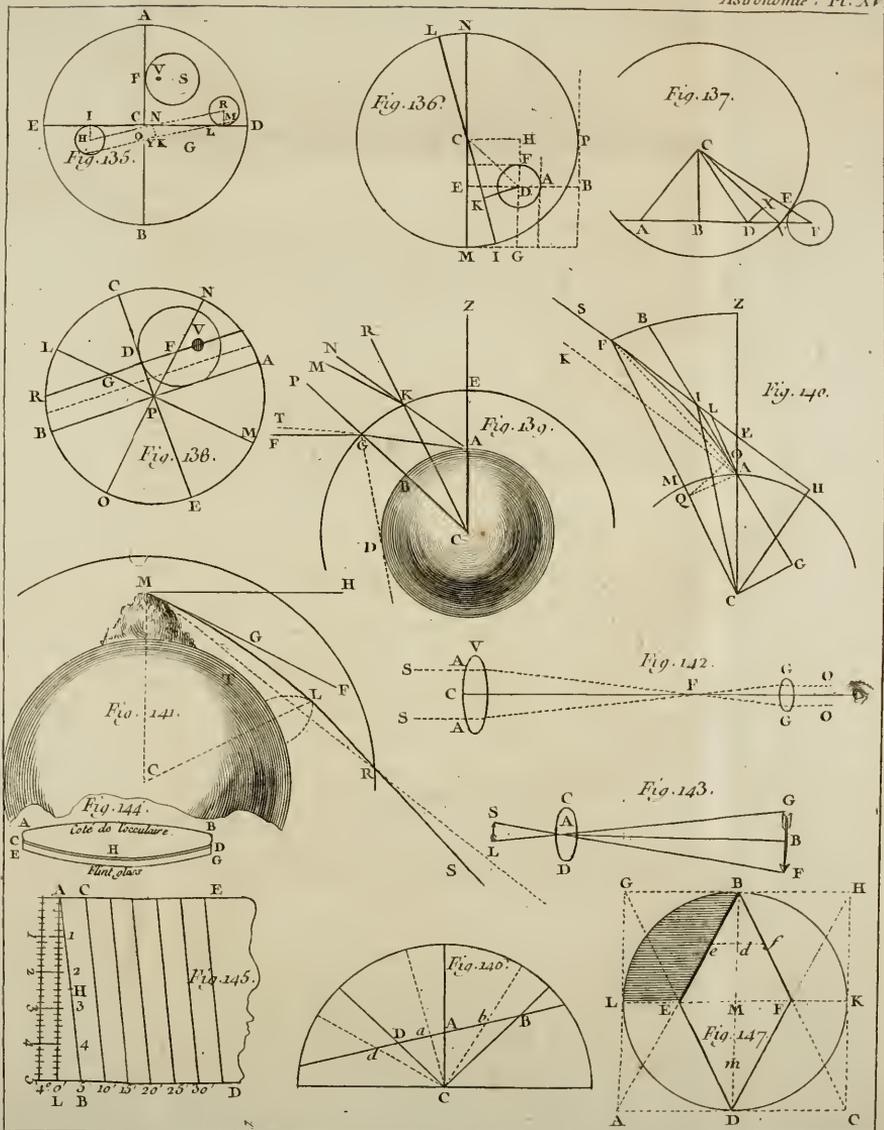
Fig. 157.

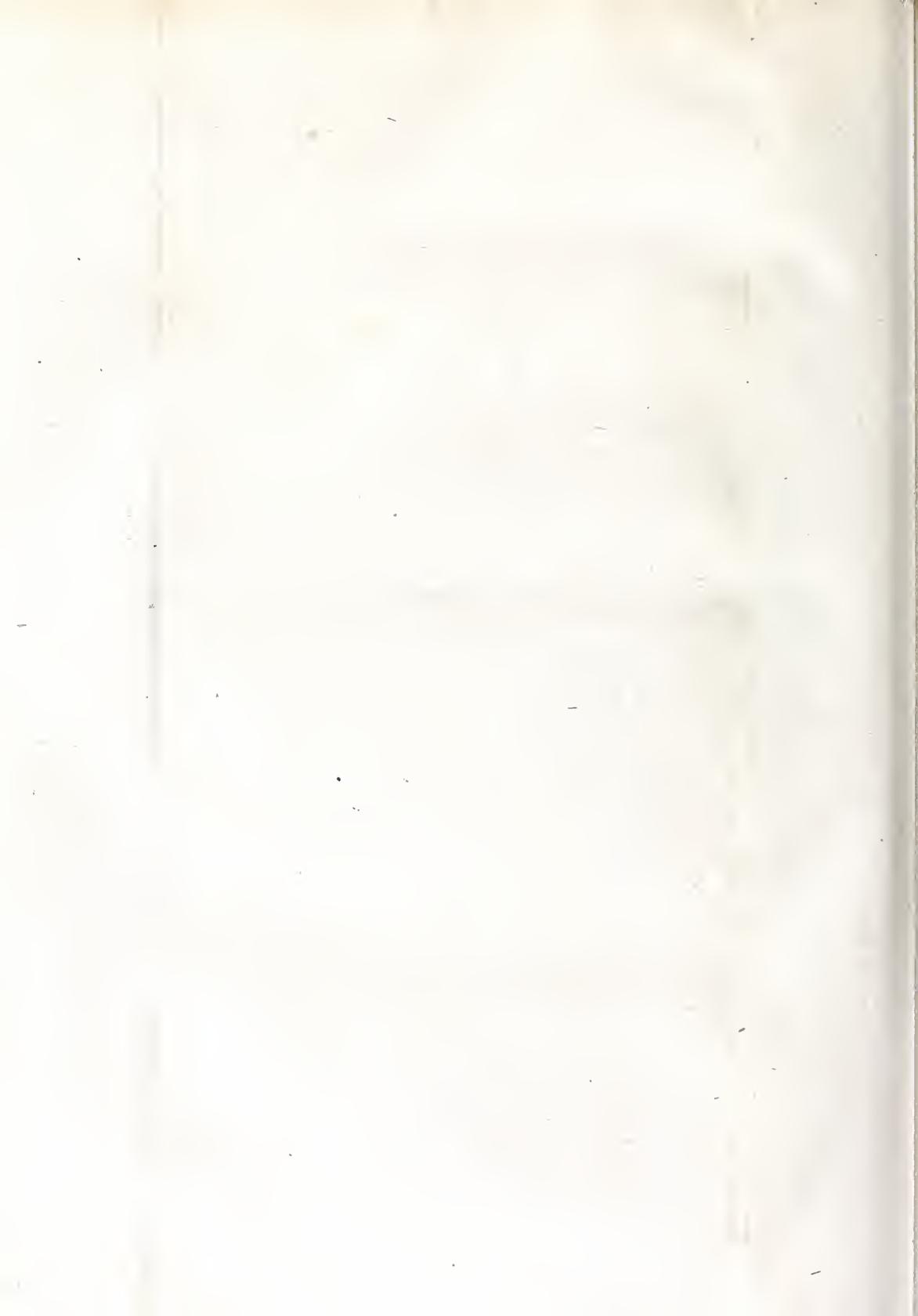
Le micromètre est représenté dans les figures 157 & 158, vu des deux faces; *AB fig. 157*, est une platine de 8 pouces de longueur, sur environ quatre pouces de large. *CD* est une vis de 5 pouces de long, sur 4 lignes $\frac{1}{2}$ de diamètre, qui porte 48 filets sur chaque pouce; c'est la partie essentielle du micromètre. Cette vis *CD* passe dans un écrou *EF* d'environ trois pouces de long, & dans le milieu on réserve une moitié d'écrou *G*, qui fait ressort contre la vis, pour en diminuer le jeu, & pour la nettoyer. L'écrou *EF* porte le chassis mobile *HIKL*, qui a deux pouces 8 lignes de large, & autant de hauteur; il est contenu & guidé par le côté *IK*, dans une coulisse formée par une règle de cuivre *AN*, qui recouvre la platine du micromètre.

La vis est la partie essentielle.

Chassis du curseur.

2359. A l'extrémité du chassis *HIKL*, on place une petite lame *mn*, fixée sur le chassis, avec deux vis, & qui porte deux petits bras, pour tendre le fil mobile ou le curseur. Sur l'extrémité des deux petits bras, il y a deux autres pièces *K* & *L*, de 3 lignes de large sur 2 lignes de hauteur, qui serrent les extrémités





Observatoire Royal de Greenwich.

Observatoire Royal de Paris.

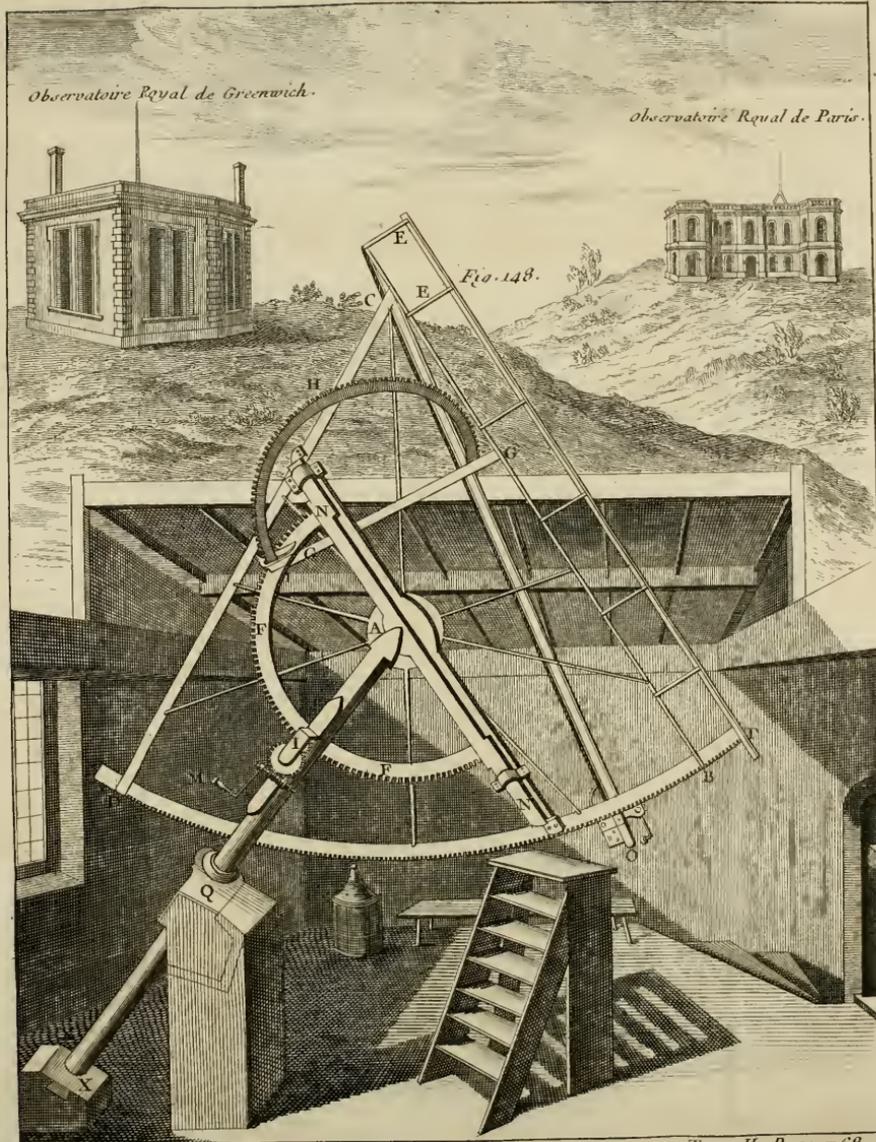
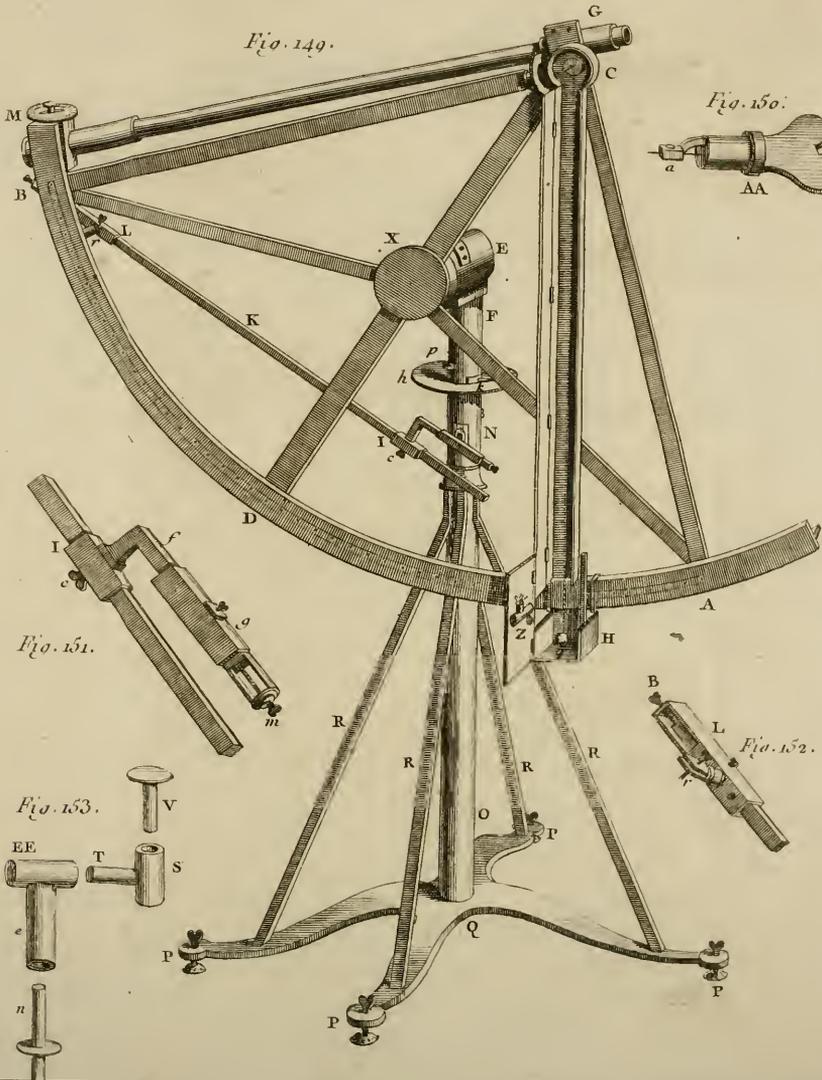




Fig. 149.

Fig. 150.



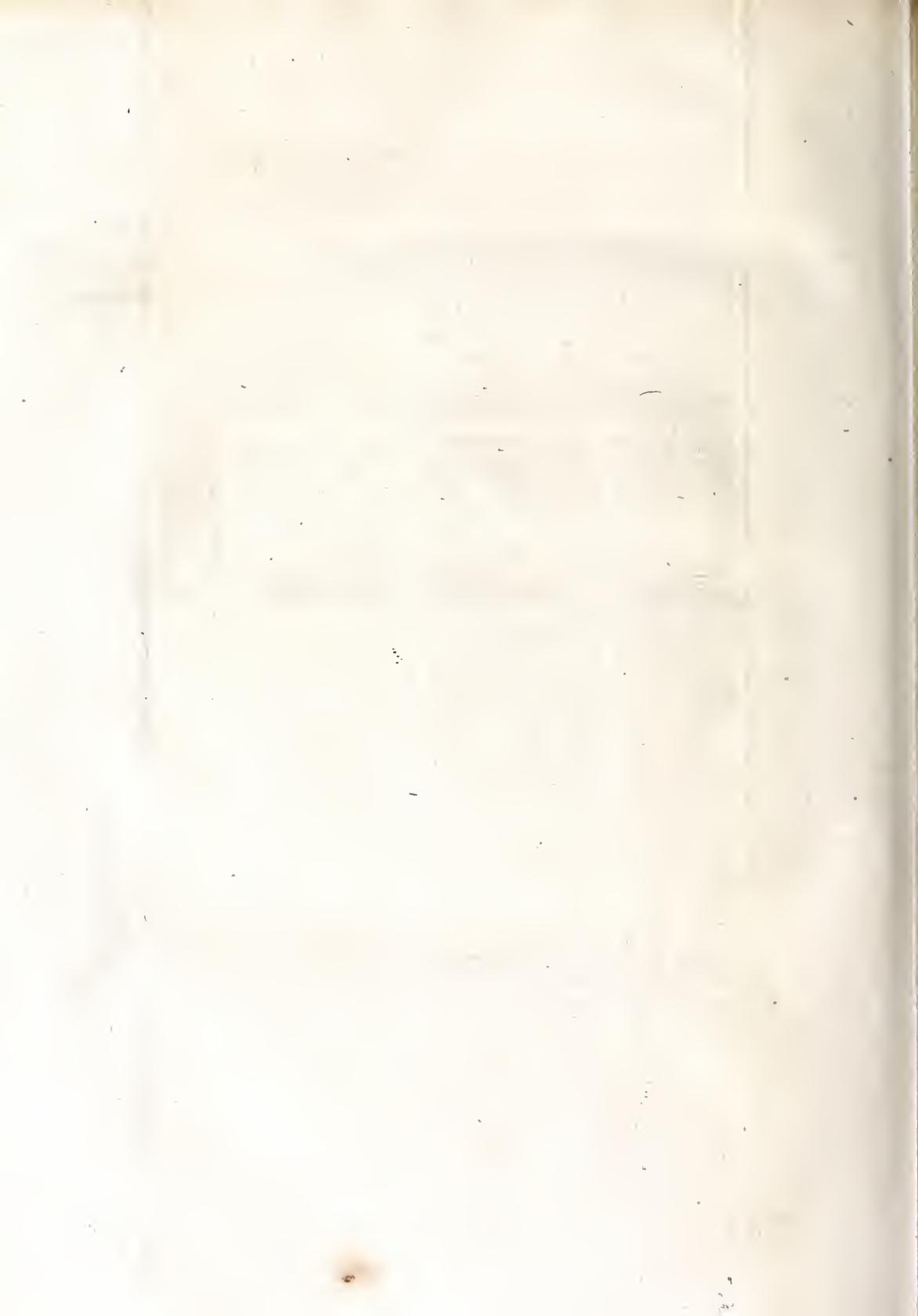


Fig. 154.

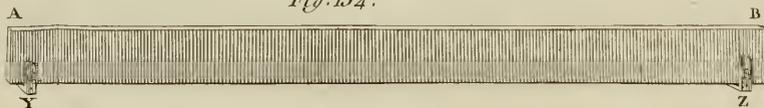
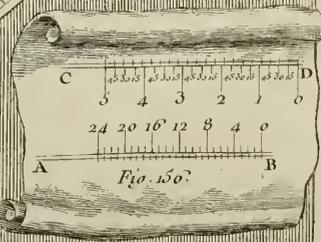
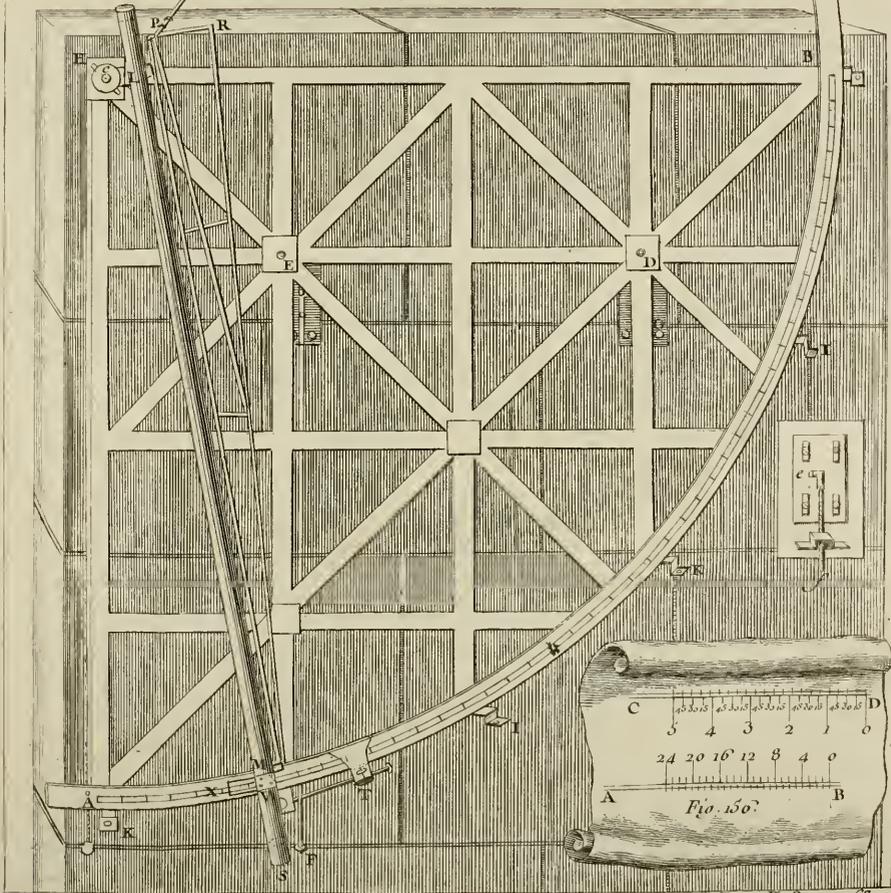
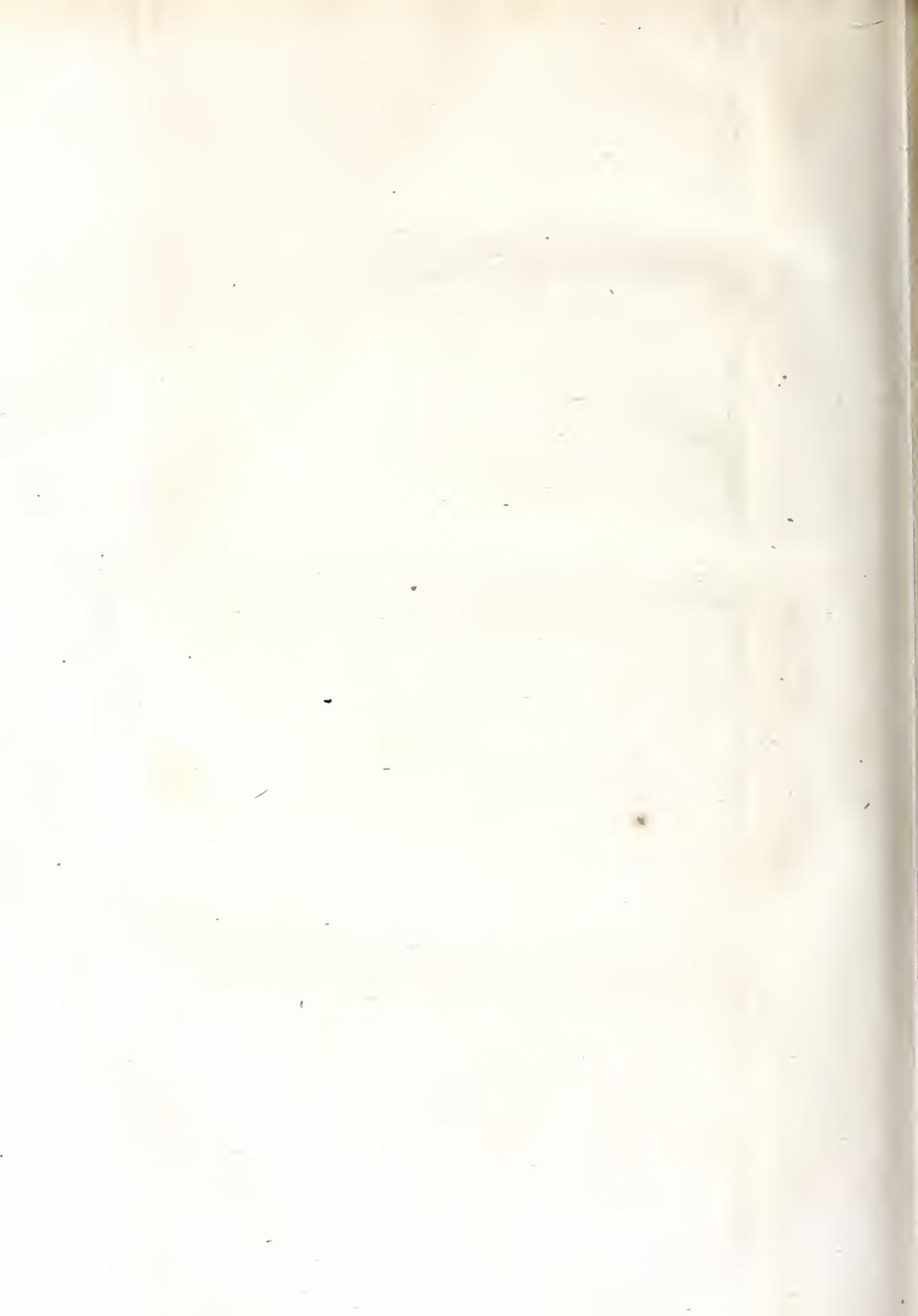


Fig. 155.





mités du fil; les deux pièces *mn* portent le curseur dans des entailles très-fines, faites à leur extrémité & sur leur épaisseur, afin que le fil *KL* puisse venir s'appliquer immédiatement contre le fil fixe *PO*. Le curseur *KL* est à l'extrémité du chassis mobile, il rase la platine du micromètre; car dans ce micromètre, les fils ne passent point l'un devant l'autre, comme dans celui du quart-de-cercle (2375); ils sont seulement dans un simple contact, quand l'index marque zéro, & commence la numération. Le fil fixe *OP* est aussi porté sur une petite lame *QR*, dont les deux bras ont à leur dernière extrémité & sur leur épaisseur, une très-petite rainure, pour recevoir seulement l'épaisseur du fil d'argent qui est $\frac{1}{560}$ de pouce; de cette manière le fil fixe regarde précisément le fil mobile, & peut en être touché immédiatement, sans qu'il y ait aucun jour entre deux.

Quant on veut placer les fils sur le micromètre, on dévise la lame *nm*; on la courbe tant soit peu, on ferre la vis *L* qui presse le fil; la lame se redresse ensuite par son élasticité, & opère une tension suffisante dans le fil. Il en est de même du fil fixe *OP*.

2360. La vis *CD* est une pièce très-difficile à faire, on exige que son diamètre soit très-gros pour qu'elle ne se fausse pas en la taraudant, que les filets soient très-fins pour qu'ils soient plus égaux. Un seul taraud ne suffit pas pour avoir une excellente vis; il faut pour bien corriger les inégalités des pas de vis, qu'un taraud serve à faire un écrou, ou des coussinets de filière: ces coussinets formeront un second écrou, cet écrou formera d'autres coussinets; par ce progrès, les inégalités des pas de vis vont toujours en diminuant, & le diamètre de la vis grossit de plus en plus. Quand la vis est faite, on doit la vérifier encore (2535), pour en connoître jusqu'aux moindres inégalités.

Attentions
pour la vis.

2361. Cette vis *CD* est reçue en *E* sur la pointe d'une grosse vis, qui passe au travers du taffau *E*, &

qui contient la vis CD dans une situation toujours constante. La grande vis CD est reçue par sa partie supérieure dans un collet de cuivre, fixé à l'angle de la platine, la tête de la vis passe au travers de la boîte cd , qui renferme la cadrature, & porte carrément une aiguille S , & un bouton b , ou rosette en grenetis, qui sert à faire tourner la vis.

Cadrature
pour compter
les tours de
vis.

2362. La boîte cd contient une cadrature composée de 3 roues & de 3 pignons, pour faire marquer les tours de vis que l'on voit au travers de l'ouverture e faite sur la boîte. La grande vis porte un pignon de 16, qui engrène dans une roue de 40 dents, laquelle a un pouce de diamètre, & porte sur un pivot fixé dans le fond de la boîte. Cette roue de 40, porte un pignon de 10, qui engrène dans une roue de 50, portée également sur un pivot, fixé dans le fond de la boîte; cette roue de 50 porte un autre pignon de 10, celui-ci conduit une roue de 80, qui est dans le milieu du cadran, & au travers de laquelle passe la tête de la vis. Sur cette roue de 80, est fixé un cadran qui a $2\frac{3}{4}$ pouces de diamètre, dont la circonférence est divisée en 100 parties, & dont les chiffres paroissent au travers de l'ouverture e pour marquer les tours de vis; ce cadran ne fait qu'un tour, tandis que la vis en fait 100.

2363. Cette manière de marquer les tours de vis est plus commode que celle de la *fig.* 159 (2367); car lorsque les pas de vis sont très-fins, comme d'un quart-de-ligne, il est difficile de les voir facilement; au lieu que sur le cadran chaque division est très-sensible, & le seroit encore davantage, si au lieu de diviser le cadran en 100, on le divisoit seulement en 50 parties, en lui donnant la 50^e partie du mouvement de la vis: il suffiroit pour cela de réduire à 40 dents, la roue de 80.

Mouvements
d'inclinaison.

2364. Le micromètre entier, c'est-à-dire, la vis CD , les fils, & la boîte dc sont portés sur une platine,

à laquelle on ménage un petit mouvement d'inclinaison (^a), représenté dans la *fig. 153*. Le micromètre y paroît dans l'autre sens, c'est-à-dire, par le côté de la platine fixe qui doit tenir au tuyau de la lunette, & qui regarde l'objectif; *AB* & *CD* sont deux plaques repliées, dont les ailes glissent dans les coulisses du porte-micromètre (*fig. 194*), pour soutenir le micromètre; *EPF* est une pièce en demi-cercle, dont le centre *G* est à l'intersection des fils fixes. Ce demi-cercle est fixé par des vis *E* & *F* sur la platine mobile du micromètre; mais il a un rebord qui s'applique sur la platine fixe pour la contenir par son frottement; il empêche aussi que la platine mobile ne descende vers *K*, tandis qu'une pièce *H* empêche qu'elle ne s'élève, au moyen de la vis *H*, qui passe au travers d'une longue rainure pratiquée dans la platine fixe *CDBA*, mais recouverte par la pièce *H*; cette rainure laisse à la platine mobile tout son mouvement latéral, la vis ne fait que passer au travers de la platine fixe pour entrer dans la platine mobile qui est au-delà.

Fig. 153.

La vis sans fin *ON*, portée sur la platine mobile, engrène dans une pièce dentée *L*, qui est portée sur la platine fixe; & tandis que cette partie *L* est immobile sur la lunette, la vis *NO* incline le micromètre de quelques degrés. La partie dentée étant de 16 à 17 lignes, elle donne environ 18° de mouvement, c'est-à-dire, 9° de chaque côté; & cela est plus que suffisant pour faire parcourir exactement à un astre le fil du micromètre, quand on s'apperçoit que la direction du fil s'écarte de celle du parallèle.

2365. Ce micromètre se conserve dans une boîte, & lorsqu'on veut en faire usage, on le place dans le porte-oculaire (*fig. 194*). Le bout du tuyau *AA* entre dans le tube de la lunette; il porte une plaque de cuivre *BB*, qui a deux coulisses *BC*, *BC*, dans lesquelles s'en-

Porte-tuyau
de l'oculaire.

Fig. 194.

(^a) J'ai vu à Londres, entre les mains de M. le Docteur Bévis, un très-ancien micromètre d'Hévelius, qui avoit un pareil mouvement d'inclinaison.

gagent les deux rebords, ou les ailes des plaques repliées, qu'on a vues sur le micromètre en AB & CD , *fig.* 158: elles y entrent à frottement dur, pour que le micromètre ne glisse pas. Le tube conique O (*fig.* 194); est celui qui porte l'oculaire; il se termine par un petit œillette E , c'est-à-dire, un petit trou auquel on applique l'œil, lequel doit entrer en E , dans un petit hémisphère concave. Ce tube O porte le verre oculaire, qui y est logé & recouvert sur les bords par une vis circulaire, & ce tube est vissé sur la traverse DD , qui a dans le milieu une ouverture circulaire. Cette traverse DD porte deux petites règles de cuivre, qui glissent dans deux coulisses CD , CD , afin qu'en plaçant des oculaires de différens foyers, on puisse toujours mettre le tube O de l'oculaire à la distance convenable par rapport aux fils du micromètre; les différentes vues des observateurs, qui peuvent regarder dans une même lunette, exigeroient seules cette attention, de rendre mobile le tuyau des oculaires.

Les usages du micromètre seront expliqués dans le livre XIV, art. 2519 & suiv.

Micromètre
du quart-de-
cercle.

2366. Après avoir décrit le plus simple & le plus parfait de tous les micromètres, je passe à la description de ceux qu'on applique aux quarts-de-cercles, & aux secteurs astronomiques (2380), du moins suivant la méthode Française. Cette méthode imaginée en 1714, par M. le Chevalier de Louville, a été perfectionnée successivement par différens astronomes de l'académie. Le micromètre que je vais décrire fait partie d'un sextant de 6 pieds, dont M. de la Caille se servoit avant moi, & avec lequel ce grand astronome a fait pendant dix ans ses meilleures observations.

Boîte du
micromètre.
Planche XXI.
Fig. 159.

Le micromètre est représenté séparément en AB (*fig.* 159), avec toutes ses parties extérieures; la boîte porte deux bouts de tubes C & D , l'un du côté de l'œil O , l'autre du côté de la lunette. Le premier a 3 pouces $\frac{1}{2}$, il sert à recevoir le tuyau de l'oculaire; cette alonge du micromètre se termine par un rebord EF , ou platine

carrée, dont les quatre oreilles sont percées, & se fixent sur le micromètre, avec quatre vis aux coins de cette embase; le bout de tuyau *D* a 2 pouces $\frac{1}{2}$ seulement de longueur, plus ou moins; il est destiné à entrer dans la lunette du sextant pour l'affujétir derrière le limbe; il tient à la boîte du micromètre, aussi bien que l'autre bout de tube, par une embase & par quatre vis; il a un pouce & demi de diamètre; c'est l'ouverture qu'exige une lunette ordinaire de six pieds; mais elle seroit plus considérable si l'on employoit une lunette achromatique (2298), & j'espère qu'on le fera, quand ces lunettes seront devenues plus communes.

2367. La boîte du micromètre a 5 pouces 5 lignes de hauteur de *G* en *H*, 2 pouces 4 lignes de largeur, & 1 pouce 3 lignes d'épaisseur *HH*: elle se termine en haut & en bas par deux petites boîtes *GP* & *HH*, qui embrassent de tout côté le haut & le bas de la boîte principale, & qui y sont fixées par des vis: on voit une de ces vis en *B*. La partie du haut, où le dessus du micromètre est représentée séparément en *V* dans la fig. 162, à côté du cadran *R* (fig. 161), que l'on attache sur cette boîte. Le fond du micromètre est la pièce sur laquelle portent les ressorts (2378).

On voit en *I* la plaque de l'index, qui porte vers son milieu une pointe, un trait, une fleur-de-lys, ou un index pour marquer l'élévation du fil mobile. Cette plaque tient au moyen d'une vis, sur le châssis intérieur & mobile (2378); elle monte & descend avec lui, & l'on voit une rainure sur le côté *MI* de la boîte, où la plaque de l'index a la liberté de se mouvoir.

Index.

A côté de la plaque d'index *I*, on voit une autre plaque *KK*, fixée en dehors sur le côté de la boîte par deux vis; elle porte des divisions, qui sont de la même grandeur que les filets de la grande vis intérieure du micromètre, par exemple de 35 sur un espace de dix lignes; & l'index *I* qui monte & descend vis-à-vis de ces divisions, y fait voir le nombre des tours de vis. Les trous de cette plaque *KK* doivent avoir un peu plus

Divisions
pour les tours
de vis.

774 ASTRONOMIE, LIV. XIII.

de diamètre que les vis qui y entrent, afin qu'on puisse donner du jeu à cette plaque, & faire correspondre exactement le milieu des divisions avec le concours des fils.

2368. On voit en *L* un trou, dans lequel on passe une clef pour incliner le fil fixe du micromètre (2377), & le rendre parallèle à l'horizon; on voit en *M* un autre trou par lequel on incline le fil mobile, pour le rendre parallèle au fil fixe (2378); & au-dessus de la boîte en *N*, il y en a un troisième, par lequel on élève le fil fixe, ou on l'abaisse (2376).

Cadran des divisions.

Fig. 161.

2369. La boîte du micromètre est surmontée d'un cadran ou cercle de deux pouces & demi de diamètre, divisé en 100 parties, pour marquer les centièmes parties d'un tour de vis, au moyen de l'aiguille qui tourne avec la grande vis du micromètre; le cadran est représenté séparément dans la *fig.* 161 en *R*, on y voit des trous en *S* pour la grande vis, en *T* pour la vis qui élève le chaffis fixe, & en *tt* pour les vis qui attachent le cadran sur le haut de la boîte. L'aiguille qui paroît sur le cadran dans la *figure* 159 a la facilité de se mouvoir par un frottement dur sur l'arbre de la vis, afin qu'on puisse la mettre sur le commencement de la division quand les fils sont exactement d'accord; mais pour qu'en suite elle soit obligée de tourner avec la vis, on l'affermit contre la tête de cette grande vis par une autre petite vis de pression que l'on voit en *H* (*fig.* 166); le frottement entretient ainsi le collet *G* de l'aiguille assujéti sur la grande vis.

Fig. 166.

Au-dessus de la boîte en *A* on voit une rosette ou tête de cuivre en grenetis, qui entre carrément sur l'arbre de la grande vis & sert à la faire tourner; cette rosette est contenue sur l'arbre par une petite vis qui se voit au-dessus & qui l'empêche de sortir; la rosette est représentée séparément en *R* dans la *fig.* 167 au-dessus de l'aiguille.

Fig. 167.

2370. La boîte du micromètre qui est destinée à s'attacher derrière le limbe d'un sextant ou d'un quart-de-cercle, se termine en avant & en arrière par deux

rebords ou plaques de 6 à 7 lignes de large, on en voit une en *PP* (*fig. 159*); elle est percée de deux trous dans lesquels entrent les vis qui assujétissent sur l'instrument l'assemblage total du micromètre; on voit encore ces deux rebords en *DD* *fig. 160*.

On voit en *Q* à 2 pouces environ du milieu de la boîte la trace de l'oculaire, porté dans un tuyau mobile qui entre dans le tube *C* du micromètre.

2371. La boîte du micromètre est destinée à contenir les deux fils qui doivent mesurer les intervalles célestes, le fil fixe & le fil mobile ou curseur; ils sont portés sur deux chassis différens, & pour cet effet, l'épaisseur intérieure de la boîte est divisée en deux parties ou deux loges par des languettes latérales qui occupent toute sa hauteur, & dont on voit la coupe en *E, E*, (*fig. 160*). Cette figure contient le plan du micromètre, & de sa boîte qui est découverte par le haut; *AA* est le tube qui entre dans la lunette, *BB* celui qui reçoit le porte-oculaire, *CC* le tube de l'oculaire qui glisse dans le tube *BB* pour mettre l'oculaire à la distance convenable des fils; *DD* sont les deux rebords ou plaques de 6 à 7 lignes de large au travers desquelles passent des vis pour attacher le micromètre au sextant (2370); *EE* sont les deux languettes intérieures qui divisent en deux parties l'épaisseur *FG* de la boîte; la partie *F* de la capacité du micromètre qui est du côté de l'objectif reçoit le chassis fixe, & la partie *G* qui est vers l'oculaire, est pour le chassis du curseur; *Q* marque la place de l'oculaire, *ffff* sont les vis qui tiennent les bouts de tubes fixés sur la boîte du micromètre par leurs embases (2366).

2372. Au fond de cette boîte on place un quadruple ressort qui repousse continuellement en haut le chassis du curseur, & empêche le jeu de la vis. Pour former la pièce du ressort double on prend une plaque de cuivre *HH* (*fig. 164*), de 26 lignes de long sur 5 lignes de large, pour remplir exactement la largeur & l'épaisseur d'une des loges de la boîte (2371); elle porte sur chacune de ses faces deux ressorts *HR* qui

Fig. 159.

Fig. 160.

Reffort quadruple.

Fig. 164.

se croisent sans se toucher; chaque ressort est rivé par sa base sur la plaque *HH*, & l'autre l'extrémité est arrondie à l'extérieur pour soutenir & élever le châssis; sans que le frottement en soit dur & difficile; cette extrémité de chaque ressort s'élargit en *R* en forme de cuilleron pour occuper la largeur entière de la coulisse, afin d'éviter le jeu ou le balottement de ces ressorts; il en est de même des deux ressorts inférieurs qui portent sur le fond de la boîte, ils sont creusés en cuillerons & leur convexité seule porte sur une plaque d'acier qui tapisse le fond de la loge.

M. Canivet est dans l'usage d'égaliser ces 4 ressorts par le moyen d'un poids qu'on leur fait supporter horizontalement, & l'on affoiblit celui des deux ressorts qui en résistant trop d'un côté, feroit prendre une direction oblique au châssis du micromètre; par ce moyen le ressort pousse le châssis de bas en haut toujours verticalement.

2373. Il faut que ces ressorts soient doux & plians; & l'on ne doit jamais faire parcourir au curseur que quelques minutes; car le *P. Liesganig* croit avoir observé qu'il faut plus de parties de la vis pour un même nombre de secondes, quand le ressort est parvenu à sa plus forte tension qu'il n'en faut vers l'endroit de son relâchement, à cause de la trop grande résistance: il se contente de mettre sur une des faces du châssis mobile deux ressorts qui fassent un frottement latéral toujours uniforme dans la boîte, & il ne met point de ressorts au-dessous, à cause de l'inconvénient que je viens d'exposer.

Châssis du
fil fixe.
Fig. 163.

2374. Le châssis qui porte le fil fixe du micromètre est représenté en *AA* (fig. 163); il a 4 pouces 4 lignes de hauteur de *A* en *B*, 2 pouces 1 ligne $\frac{1}{2}$ de largeur *AA*; il porte par en bas un ressort courbé *CDC* qui s'appuyant sur un ressort semblable *CEC* mis au fond de la boîte du micromètre, repousse continuellement ce châssis vers le haut, tandis que la partie supérieure du châssis est retenue en *f* ou par le cadran seul,

Fig. 157.

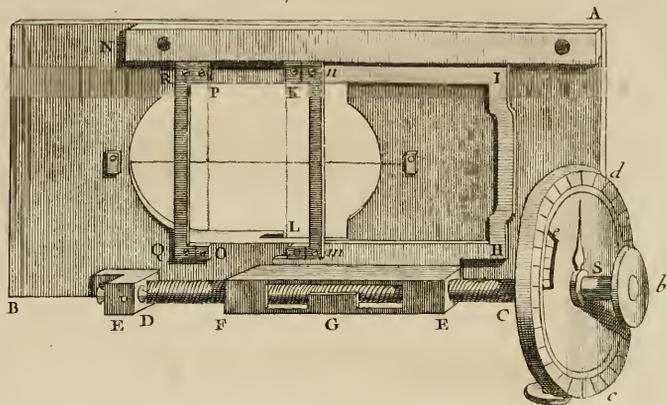
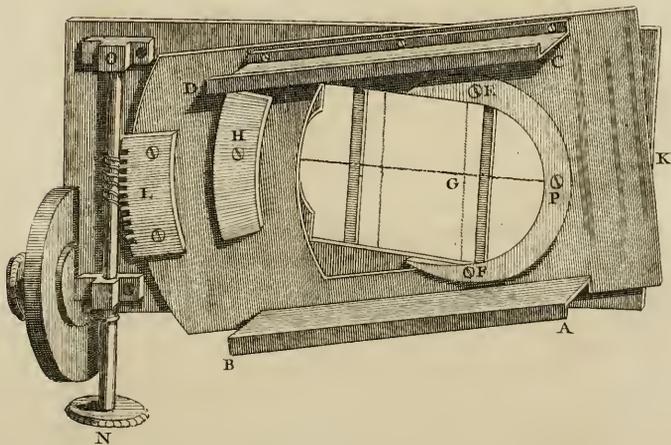


Fig. 158:





seul, ou par une plaque en équerre fixée sur la boîte du micromètre, & qui se replie sur la base de la vis pour empêcher qu'elle ne s'élève & ne forte par l'action du ressort *CDC* qui la repousse vers le haut. Cette vis *fg* passe dans une espèce d'équerre *h* qui tient sur le châssis avec un étoteau & une vis.

La vis supérieure *fg* sert à élever ou abaisser d'une petite quantité le châssis fixe & par conséquent le fil horizontal fixe *HH*, lorsque par la vérification du quart-de-cercle (2552), on a trouvé que l'axe de la lunette ne fait pas un angle droit avec le rayon du commencement de la division. C'est pour cela que nous avons fait remarquer un trou *N* (fig. 159), au-dessus du cadran (2368).

Fig. 159.

2375. Vers le milieu du châssis on voit le réticule; c'est un anneau de cuivre dont le diamètre extérieur *RR* est de 2 pouces, l'ouverture *HH* de 14 lignes, & qui porte deux fils à angles droits, un fil horizontal *HH*, & un fil vertical *VV*. Cet anneau de cuivre qui porte les fils, a une épaisseur assez considérable pour passer au-delà de la surface du châssis fixe *AABB*, afin que ces fils soient placés tout près du châssis mobile qui porte le curseur; il ne doit y avoir qu'un intervalle suffisant pour que le curseur n'accroche pas le fil fixe en passant près de lui; & pour cet effet, les fils doivent être presque noyés dans les rainures où ils sont placés.

Réticule fixe.

Le fil vertical *VV* est placé à la surface de l'anneau la plus voisine de l'oculaire (c'est le côté opposé à celui que montre la figure); il passe par les trous *uu* pour être serré par ses extrémités sous les pièces de cuivre *F* & *G* qui sont elles-mêmes serrées avec des vis contre le cercle du réticule; c'est la pression de ces vis qui tient le fil tendu: à l'égard du fil horizontal *HH* il passe aussi par les trous *K* & *L*, & ses extrémités sont reprises & arrêtées sous les mêmes pièces de cuivre qui sont serrées avec d'autres vis en *O* & en *P*; mais on a une attention de plus à l'égard du fil horizontal qui est le plus

Manière de tendre le fil. important dans un micromètre ; il faut que ce fil soit tendu très-exactement & d'une manière invariable ; pour cela on le fait passer aussi par le trou *i* d'une autre pièce de cuivre *QL* fixée en *Q* & qui fait ressort par son extrémité ; le fil ayant passé sur ce ressort est arrêté en *P*, & le ressort qui tend à s'élever au-dessus du châssis, retire le fil & le maintient toujours tendu.

2376. Le réticule entier *RR* a la liberté de tourner un peu sur la plaque du châssis fixe ; il est retenu seulement par deux pièces *dd* qui appuient sur le réticule sans l'empêcher de tourner ; on peut y substituer deux vis qui traverseroient l'épaisseur de l'anneau vers *dd* dans des trous allongés ; il est aussi contenu par un écrou *e* qui appuie sur sa partie inférieure ; mais en même temps cet écrou *e* porte un étoteau ou une cheville de cuivre qui entre dans une petite rainure faite de haut en bas sur le bord du réticule ; l'écrou *e* est mis en mouvement par la vis *ST* qui est tangente au réticule, & il oblige le réticule à tourner de quelques lignes. C'est ainsi qu'on redresse le fil *HH*, s'il se trouve n'être pas bien horizontal, ce qui doit se vérifier avec soin (2550).

2377. La vis *ST* tangente du réticule est arrêtée par son pied en *T* dans une base ou espèce de crapaudine sur laquelle elle tourne ; & par sa tête en *S* au moyen d'une embase *c* qui est arrêtée contre la paroi *AB* du grand châssis, renforcée dans cet endroit d'une petite épaisseur de cuivre. Quand le châssis est dans la boîte du micromètre & qu'on veut incliner le réticule par le moyen de cette vis *ST*, on passe une clef ou un carré de fer par un trou marqué *L* dans la fig. 159 ; sur le côté de la boîte du micromètre & qui répond à la tête de cette vis dans laquelle il y a un trou carré pour y introduire la clef (2368).

2378. Le châssis mobile, ou le châssis du curseur se voit de grandeur naturelle dans la fig. 165. Il est percé à jour, parce qu'il ne porte qu'un fil destiné à monter & à descendre, & qu'il ne doit point embar-

Châssis du
curseur.
Fig. 165.

raffer l'ouverture du réticule de la *fig.* 163. Le châssis du curseur à 3 pouces $\frac{1}{4}$ de hauteur de *C* en *D*, 2 pouces 2 lignes de largeur de *D* en *E*, 15 lignes d'ouverture de *H* en *K*, & 5 lignes d'épaisseur; le dessus est renforcé par un groupe *mn*, qui est une pièce soudée sous le châssis, & qui a 3 lignes d'épaisseur, pour recevoir la grande vis *VS* du micromètre, destinée à mouvoir le curseur: cette vis a une embase *f* qui l'empêche de sortir de la boîte, une partie arrondie *F* qui reçoit l'index représenté dans la *fig.* 166, & une tête carrée *V*, qui reçoit la rosette *R* de la *fig.* 167, pour mouvoir le curseur. Le châssis du curseur est encore garni par en-bas d'une semelle ou plaque d'acier poli *ED* sur laquelle agissent les ressorts de la *fig.* 164, afin qu'ils ne se gripent pas sur le cuivre; le bas de la boîte est également tapissé d'une semelle d'acier poli sur laquelle portent les ressorts. Au dedans du grand châssis *CDE* il y a un autre châssis *MNOP* qui porte le curseur, & qu'on incline un peu lorsqu'il est nécessaire, pour rendre le curseur horizontal & parallèle au fil fixe (2550); ce châssis intérieur & mobile tourne autour d'une vis *Q*; il est continuellement poussé vers la gauche par un ressort coudé *PM*, qui appuie contre une goupille, ou sur une pièce de cuivre *p* fixée sur le châssis mobile; il porte sur la gauche un écrou *N* qui est mobile dans son trou ou sur son axe; une vis *sr* qui passe dans cet écrou, repousse le châssis vers la droite pour incliner le curseur *HK*; cette vis a une embase qui l'arrête contre la paroi *CD* du châssis; pour la faire jouer on se sert d'une clef qui passe dans un trou, dont nous avons parlé (2368), ce trou est à côté de la boîte du micromètre en *M* (*fig.* 159). Il faut qu'il y ait aussi une vis *p* qui assujétisse le second châssis sur le premier, sans l'empêcher de tourner par l'effet de la vis *sr*.

2379. Le fil horizontal *HK* est porté sur deux petites plaques qui font une épaisseur au châssis intérieur *MNOP*, & qui sont faillie d'une ou de deux lignes du côté de l'objectif, (nous regardons ce châssis

Fils de soie
ou d'argent.

mobile par le côté de l'oculaire), pour aller joindre de plus près les fils du réticule qui font aussi faillie du côté de l'oculaire (2375) : par ce moyen le curseur glisse très-près de la surface des fils fixes, quoique les chassis qui les portent, soient séparés par des languettes assez épaisses (2371). Les deux extrémités du curseur *HK* passent dans des trous *a* & *b* du chassis, pour venir s'arrêter sous les pièces de cuivre ferrées par des vis *a* & *u* ; mais l'une des extrémités du fil passe en *t* dans le trou d'une pièce de cuivre qui fait ressort, & de-là va passer sous la pièce *u* où elle est arrêtée, tandis que le ressort *t* élève sans cesse la boucle *b t u*, & exerce sur le fil une tension qui lui est nécessaire : nous l'avons déjà remarqué (2375), en parlant du fil horizontal fixé de la *fig.* 163 ; mais tout cela suppose que l'on emploie des fils d'argent ; car si l'on emploie des fils de soie pris sur les cocons, il suffit de les tendre avec de la cire.

Le chassis mobile est aussi percé sur le côté de trois petits trous, pour recevoir les vis qui tiennent la pièce de l'index représentée en *I* (*fig.* 159).

On verra les vérifications & l'usage du micromètre que nous venons de décrire, dans le Livre suivant (2550 & *suiv.*).

DESCRIPTION D'UN GRAND SECTEUR.

2380. LES observations exactes & scrupuleuses qui ont été faites depuis 1725, pour l'aberration & pour la figure de la terre (2651), exigeoient des instrumens qui pussent faire distinguer une seconde avec certitude, c'est-à-dire, des instrumens de 10 ou 12 pieds de rayon ; & comme ces observations se font toujours à 3 ou 4 degrés du zénit tout au plus, on n'a besoin dans ces sortes d'instrumens que d'un très-petit arc, c'est pourquoi on les appelle *Secteurs*.

Des plus
grands secteurs
qu'on ait fait.

Le premier secteur qui ait été fait de la grandeur & de la bonté nécessaires pour des observations aussi déli-

cates, est celui que M. Graham fit en 1725, pour M. Molyneux, (2792) : il fut suivi bientôt après d'un autre pour M. Bradley, avec lequel ce grand astronome découvrit l'aberration & la nutation ; ce secteur est à l'Observatoire de Greenwich. En 1735, M. Graham en fit faire un autre pour la mesure de la terre en Laponie, M. de Maupertuis en a donné la description en 1740, dans son Livre intitulé : *Degré du Méridien* entre Paris & Amiens. Ce secteur est actuellement dans l'Observatoire de M. le Monnier à Paris.

2381. Entre les différens secteurs qui ont été construits, celui dont M. de la Condamine nous donne la description, (*Mesure des trois prem. deg.* 1751, pag. 110), est des plus simples, il a servi pour une des plus grandes opérations qu'on ait jamais faites avec un pareil instrument ; cela me suffit pour le préférer à celui qui est décrit dans le Livre de M. de Maupertuis : dans ce dernier on trouve plus d'art, un plus grand nombre de pièces, peut-être plus de commodités pour les observateurs, mais puisque l'on peut s'en passer, ce que nous allons dire est suffisant pour les besoins de l'astronomie. On peut consulter encore à ce sujet les ouvrages sur la figure de la terre de M. Bouguer, & de M. Cassini, celui du P. Boscovich, imprimé à Rome en 1755, & à Paris en 1770, & celui du P. Liesganig, imprimé à Vienne en 1770.

Auteurs qui en ont parlé.

2382. Le secteur que l'on voit dans la *fig.* 168, est composé de trois pièces principales, assemblées étroitement l'une avec l'autre ; savoir, un grand rayon vertical, un limbe placé horizontalement au bas de ce rayon, & une pièce qui sert à la suspension, en même temps qu'elle porte le centre de l'instrument. Le limbe ou l'arc du secteur est une règle de cuivre *AB*, qui a 2 pieds, sur un pouce & demi de hauteur & 3 lignes d'épaisseur ; elle est appliquée avec des clous de cuivre sur une bande de fer, garnie & fortifiée par derrière d'une règle de champ *ab* ; on peut se dispenser de donner au limbe une courbure circulaire, pourvu que sa

Planche XXII.
Fig. 168.

Limbe du secteur.

Fig. 168.

largeur du haut en bas soit suffisante pour contenir la courbure d'un arc de cercle de 7 à 8 degrés.

Ce limbe du secteur est attaché par le milieu avec des tenons & des vis, sur l'extrémité inférieure *C* d'une règle plate *CD* de 12 pieds de long, large de 3 pouces, épaisse de 2 lignes; la figure est brisée dans le milieu, & l'on doit suppléer d'imagination une longueur trois fois aussi grande que celle de la planche, pour que toutes les parties de la figure soient proportionnées. La règle *CD* est de 2 pièces, chacune de plus de six pieds, qui sont unies l'une sur l'autre dans une longueur de quelques pouces, avec des tenons ou espèces de pieds carrés, fixés sur l'une des barres, & qui passent au travers de l'autre pour recevoir par derrière des clavettes chassées à coups de marteau. Cette règle de fer qui forme le rayon de l'instrument, a par derrière une autre règle de champ, c'est-à-dire, qui lui est perpendiculairement adossée, & unie par plusieurs équerres de fer, pour en prévenir la flexion qui est d'une très-grande conséquence (2597).

Suspension
du secteur.

2383. La barre de fer qui forme le rayon s'élargit vers le haut, & reçoit sur sa face antérieure, limée en retraite, c'est-à-dire, diminuée d'épaisseur, une pièce de cuivre *EFG*, qui y est appliquée avec trois fortes vis que l'on voit en *e*; cette pièce de cuivre est percée vers *E* d'un trou rond, disposé pour recevoir un cylindre de cuivre, tourné avec soin, & qui sert de centre à l'instrument; il est semblable à celui de la fig. 150.

La tête *G* de la pièce de suspension est arrondie en forme de globe, & porte dans un collier de fer attaché à une forte poutre au plancher de l'observatoire, de manière cependant que la lunette du secteur n'en soit pas embarrassée au zénit; ce collier peut être mis à l'extrémité d'une potence de fer, ou traverser d'une poutre à l'autre; il porte l'instrument, en lui conservant la liberté de se mouvoir en *G*, comme le graphomètre d'un arpenteur tourne sur son genou.

2384. La règle de fer sur laquelle le limbe *AB*

est rivé, porte à sa partie inférieure deux oreilles, ou pièces en faillie *MM*, comme des tenons plats qui servent à retenir le secteur dans une situation fixe, & non pas à le porter; ces deux oreilles sont reçues librement dans les rainures ou coulisses de deux tasseaux de fer *mm*, enchâssés dans un fort madrier de bois *OO*; & lorsque cette pièce de bois est à peu-près dans la situation convenable, on peut, avec les vis qui sont dans les tasseaux, faire avancer tant soit peu le limbe de l'instrument, & l'arrêter sur le point qui est nécessaire pour observer une étoile donnée.

Le madrier ou la poutre *OO* doit avoir un mouvement du nord au sud, pour qu'on puisse changer la direction de la lunette, & l'incliner à 4 degrés de chaque côté du zénit; mais lorsqu'elle est à la place nécessaire pour une observation, elle doit être arrêtée avec des crampons de fer *RS*, *BS*, en forme d'étriers ou d'équerres doubles, sur un banc ou établi *QQ* fixé en terre, ou arrêté d'une manière inébranlable.

Chacun de ces étriers *RS*, *BS*, a trois vis, une par-dessus en *r*, pour comprimer & arrêter la pièce de bois *OO*, les deux autres devant & derrière, pour la mouvoir en avant & en arrière, afin de bien caler l'instrument, & le mettre dans le méridien (2598) : on voit en *SS* les vis de régie qui sont à la partie antérieure de chacun des deux étriers.

La lunette *TV* du secteur est attachée derrière le limbe, parallèlement au rayon *DC*; elle est embrassée par des fourchettes de fer *XX*, rivées sur le rayon *DC*; au bas de la lunette est le micromètre *V*, semblable à celui dont on vient de voir la description (2366 & suiv.).

Sur le limbe *AB*, M. de la Condamine avoit fait tracer en 1739 un arc, dont le centre étoit en *E*, & sur cet arc on avoit porté une ouverture de compas égale à la dix-septième partie du rayon, ce qui faisoit $3^{\circ} 22' 15''$, parce qu'on n'avoit besoin que d'observer l'étoile ϵ d'Orion qui étoit à $1^{\circ} 40' \frac{1}{2}$ du zénit de Tar-

Division du
limbe.

qui. En prenant de la même manière d'autres parties aliquotes du rayon comme un vingtième, &c. suivant les arcs qu'on vouloit observer dans le Ciel, on faisoit la même chose qu'avec un instrument qui eût été bien divisé en minutes; l'opération étoit plus facile & plus exacte; mais le limbe *AB* doit être divisé en minutes, lorsqu'on en a la facilité; cela est plus commode pour observer en général différentes étoiles.

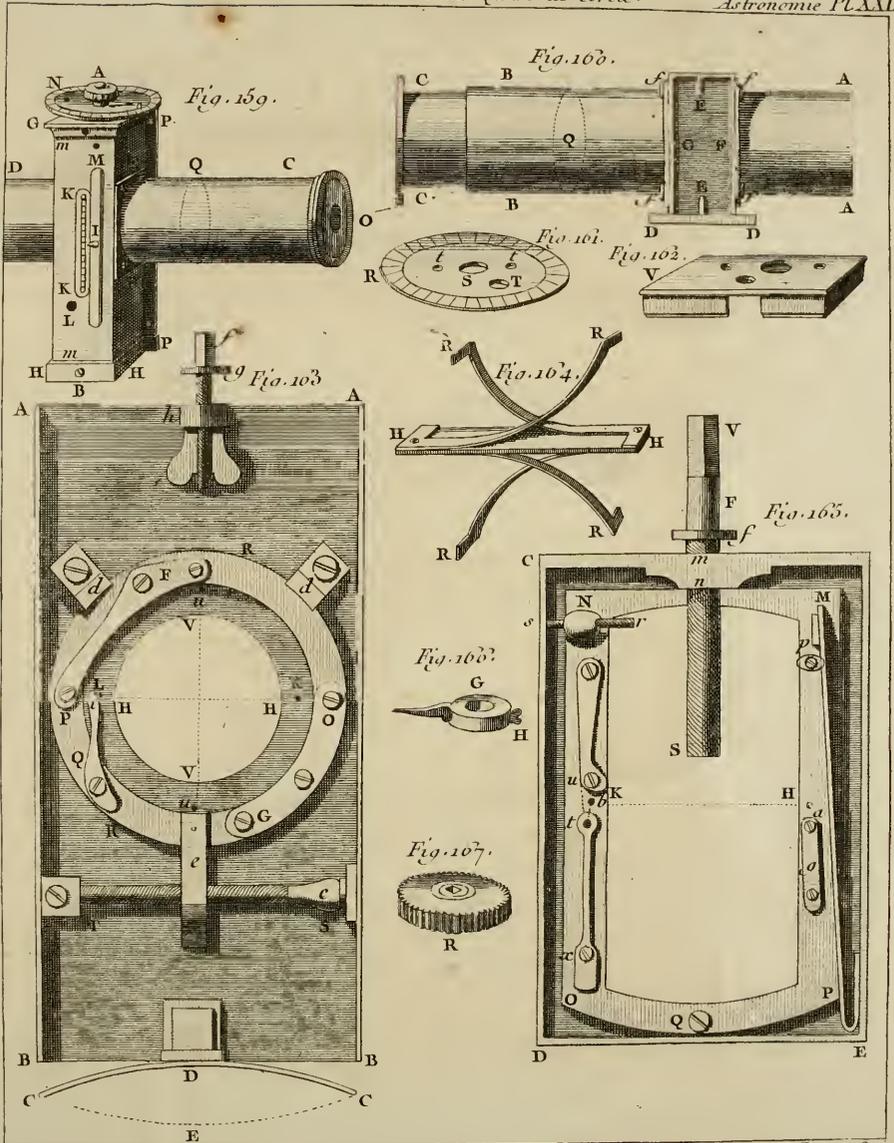
Suspension du
fil à-plomb.

2385. C'est une chose très-essentielle & très-délicate que la suspension du fil dans un secteur, tel que nous venons de le décrire: la suspension qui se fait avec une boucle, qui passe sur une aiguille (*fig. 150*), est la plus simple, mais il est dangereux que le frottement du fil sur l'aiguille, ou contre le cylindre du centre, ne gêne la liberté du fil à-plomb; on en a vu des exemples fâcheux dans des observations importantes, comme dans celles qui furent faites en 1761, à Sainte Hélene.

Dans le secteur de M. Bradley qui est à l'observatoire de Gréenwich, il y a une plaque au centre, dans laquelle est une légère entaille, & le fil à-plomb se loge dans l'entaille qui est le centre même de la division; mais il est à craindre qu'un tel centre ne soit sujet à varier; & que cette entaille faite dans une plaque très-mince, ne soit pas constamment & exactement à sa véritable place; & cela est difficile à vérifier, quand on n'a pas un point dans lequel on puisse placer une des pointes du compas. Il est aussi dangereux que le fil à-plomb ne soit gêné dans cette entaille, & qu'il n'y prenne une courbure, qui causeroit de l'erreur dans la mesure des angles.

Méthode la
plus exacte.

2386. La meilleure suspension pour le fil d'un secteur est celle où le fil ne touche point au centre, mais où le centre tourne, sans cesser de répondre au fil; c'est ainsi que M. Bird l'a pratiquée dans un très-beau secteur que j'ai vu à Londres en 1763, destiné pour les observations qui devoient régler les limites du Maryland & de la Pensilvanie; dans ce secteur de M. Bird, la
pièce





pièce de suspension *S* (fig. 170) restant immobile, le limbe & le corps entier du secteur tournent sur un axe qui forme le centre; on voit en *A*, l'un des pivots de cet axe; au centre de ce pivot est un point qui est le centre même de la division du limbe du secteur; ce pivot tourne sur des coussinets *BB*, à peu-près comme une lunette méridienne (2389); le fil à-plomb *SP* est suspendu en *S*, où il est ferré sous une vis de pression, & il passe sur le centre *A*, dont il est extrêmement proche, sans le toucher; l'instrument tourne sur son pivot, sans que le centre *A* cesse de répondre au fil à-plomb, & l'on a soin d'examiner avec un microscope, à chaque observation, si le fil répond exactement au centre. La pièce de cuivre qui porte le fil en *S*, est mobile dans une coulisse, au moyen d'une vis *V* qui sert à conduire le fil vis-à-vis du centre *A*, si l'on apperçoit qu'il n'y réponde pas exactement.

La vérification d'un secteur se fait comme celle du quart-de-cercle (2556), les usages en seront expliqués, art. 2596 & suiv., & les avantages que l'on en a retirés, art. 2652 & 2792.

DESCRIPTION DE LA LUNETTE

MÉRIDIENNE.

2387. LA nécessité où sont les astronomes d'observer sans cesse les différences d'ascension droite entre les planètes & les étoiles, leur a fait chercher un instrument qui pût être placé bien exactement dans le méridien; le quart-de-cercle mural (2328), quelque soin qu'on prenne à le dresser exactement, ne sauroit avoir un plan assez régulier & assez parfait, pour que la lunette décrive le méridien à 2'' près, depuis le zénit jusqu'à l'horizon; pour obtenir cette précision dans les passages au méridien, il faut recourir à une lunette montée sur un axe qui soit tourné avec grand soin; c'est ce que nous appellons LUNETTE MÉRIDIENNE; ou instrument des passages.

M. Romer
en fut le pre-
mier Auteur.

2388. Le premier dont on ait parlé, ce me semble, est celui de M. Romer, (Horrebow, *Basis astronomiæ*, 1735, pag. 49). Romer s'étoit fait en 1689, à son retour en Dannemarck, un observatoire, dans lequel il avoit placé plusieurs instrumens, & entr'autres; une lunette fixée à angles droits sur un axe de 5 pieds de long & d'un pouce de diamètre; il y avoit un arc pour indiquer les hauteurs, & un poids qui soutenoit le milieu de l'axe pour empêcher la flexion (2396). Halley fit faire dans la suite un pareil instrument, que l'on conserve encore dans un petit cabinet qui donne sur la terrasse de l'observatoire royal de Gréenwich; mais Graham, vers l'an 1735, en ayant fait construire de plus parfaits, M. le Monnier en donna la description dans son histoire céleste en 1741. Celui que je vais décrire, & dont je me fers habituellement, avoit été construit en 1760, pour M. de la Caille, qui s'en est servi pendant deux ans. Il y en a un à l'observatoire de Gréenwich, qui est beaucoup plus considérable, mais celui que je vais décrire est d'une exactitude suffisante.

Dimensions
de l'instru-
ment.

Planc. XXIII.

Fig. 174.

2389. L'AXE AB (fig. 174), a 2 pieds & demi de long, la lunette CD a 4 pieds de long sur 18 lignes de diamètre. Les deux pivots A & B , sur lesquels tourne l'axe, sont deux cylindres de 9 lignes de diamètre sur autant de longueur; ils sont formés d'une composition de cuivre & d'étain, plus dure que les métaux naturels, & moins sujette à être rongée par le frottement & par la rouille; l'axe est formé de deux cones de cuivre AE ; FB , qui ont chacun 13 pouces de longueur, & dont le diamètre décroît depuis 28 lignes jusqu'à 11 lignes; c'est-à-dire, que près des pivots l'axe n'a que 11 lignes de diamètre. Ces deux cones sont assemblés à vis & soudés dans un noyau ou forte pièce de cuivre G , qui a deux pouces & demi de large & trois pouces de long, cette pièce est percée pour laisser passer la lunette au travers.

2390. Le dé ou la masse G de forme à peu-près cubique, sert de noyau à toute la machine; non-seulement elle assemble les deux cones AE , BF qui compo-

font l'axe, elle tient encore les deux porte-lunettes ou les deux canons *S*, *T*, de 15 à 16 pouces, dont chacun a une base carrée, fixée par 4 vis sur le dé; ces canons sont fendus de deux côtés sur un espace de 8 pouces, pour laisser passer plus aisément le tuyau de la lunette; mais lorsque le tuyau est entré, on resserre l'extrémité de chacun des porte-lunettes avec un brasselet ou collier de cuivre, qui se serre par des vis en *K* & en *H*. Ces porte-lunettes servent à empêcher que la lunette ne vacille dans le dé, & qu'elle ne se courbe sur sa longueur.

2391. Si la lunette n'étoit pas bien en équilibre sur le milieu de son axe, en sorte qu'elle fût plus pesante par une extrémité que par l'autre, on desserrerait les vis des porte-lunettes, & on repousserait le tuyau vers le côté trop léger: de même, si le fil vertical de la lunette se trouvoit un peu oblique à la verticale, on seroit obligé de desserrer les vis & de tourner un peu le tuyau, jusqu'à ce que le fil fût exactement vertical.

On place dans cette lunette, au foyer des deux verres, un réticule composé de deux fils qui se croisent à angles droits, ou bien un réticule de 45° (2350), ou enfin un réticule rhomboïde (2353); celui-ci est le plus commode en plusieurs occasions.

Pour diriger la lunette méridienne à la hauteur donnée où l'on veut observer un astre, on a fixé un demi-cercle *AN* sur l'un des supports; ce demi-cercle a 8 pouces & demi de diamètre, & il est divisé en degrés; l'alidade *O* fixée sur l'axe *MQ*, se termine par un vernier qui sous-divise le degré en douze parties, & nous fait distinguer cinq minutes; cette alidade est ferrée sur l'axe par une vis de pression, que l'on peut lâcher, si l'on est obligé de mettre cette alidade plus exactement sur la division.

2392. Les coussinets ou supports, dans lesquels tourne l'axe de la lunette, sont quelquefois composés de deux plans, quelquefois circulaires, ainsi que les pivots; ils sont faits d'une composition d'étain & d'an-

Supports de l'axe.

G g g g ij

Fig. 174. timoine, plus douce que celle des pivots; on y met une goutte d'huile, ou un peu de suif, pour adoucir le frottement.

On observe de donner à l'un des supports *B* un petit mouvement du haut en bas, dans une coulisse, au moyen d'une vis *V* qui peut élever & abaisser la pièce où porte le pivot de l'axe, afin de placer cet axe dans une situation parfaitement horizontale, & de l'y ramener lorsqu'il a pu s'en écarter par le mouvement des bois ou des murs qui portent l'instrument.

Mouvement
vertical.

Fig. 172.

On voit séparément dans la *fig. 172*, le mouvement vertical du couffinet; la vis *VR* passe dans un écrou *T* qui est fixé au support; elle passe dans un collet *X* qui est percé cylindriquement de la grosseur de la vis; sous le collet *X* il y a une base fixée à la vis, & qui oblige le collet *X* de monter avec la vis. Pour obliger le collet *X* de descendre aussi avec la vis, il y a un canon de cuivre chauffé carrément sur la tige de la vis, dont la base s'appuie sur *X*, & qui est arrêté en *V* au-dessus de la tige par une vis de pression qui entre dans la tige.

Le collet *X* est fixé sur une pièce de cuivre qui glisse de haut en bas, dans la grande pièce du support où elle est logée, le long d'une rainure en queue d'aronde; c'est-à-dire, dont les deux faces sont entaillées en sens contraire; cette pièce de cuivre porte le couffinet de métal qui est engagé fixement dans une autre rainure faite dans cette pièce de cuivre qui porte le collet *X* du support.

Mouvement
horizontal.

Fig. 173.

2393. Il faut aussi qu'un des supports ait la facilité de se mouvoir horizontalement d'une petite quantité, en avant ou en arrière, comme on le voit dans la *fig. 173*; où l'on voit la base d'un des pivots placée horizontalement. La vis horizontale *A* est destinée à ramener la lunette dans le plan du méridien; car elle s'en écarte souvent par l'action de la chaleur sur les pièces de maçonnerie ou de charpente qui portent la machine (2609); mais pour ne pas nuire à l'immobilité que doivent avoir les supports, on a recours à la pratique suivante: on

compose la base du support de deux plaques, dont l'une peut glisser horizontalement sur l'autre; la plaque horizontale mobile F , dont le plan est FG , est arrêtée sur l'autre par quatre vis qui passent dans des trous ovales, en sorte qu'elle ait la liberté d'avancer ou de reculer d'une ligne, lorsqu'on lâche les 4 vis de chaque côté, mais en même temps qu'elle puisse être assujétie & fixée, en resserrant les vis qui la tiennent sur la plaque immobile $BCDE$; celle-ci est scellée en plomb, ou arrêtée fixement dans la base de pierre ou de fer qui porte tout l'instrument; un ressort placé en F repousse sans cesse la platine FG , pour l'appliquer contre la tête de la vis AG , qui sert à la repousser en arrière lorsque cela est nécessaire: à la place du ressort F on peut mettre en F une vis opposée à la vis A , & qui pousse dans une direction contraire; alors on est obligé de faire jouer à la fois les deux vis G & F , pour rétablir l'instrument dans le méridien: il ne faut faire ce changement que dans le cas où il est devenu nécessaire par une variation de 5 à 6'' de temps; car si le changement est plus petit, il vaut mieux le calculer, & en tenir compte dans les observations (2610).

Lorsqu'on place l'instrument dans le méridien pour la première fois, il faut que les deux supports P & R , (*fig. 174*) soient assemblés par une règle de fer, qui sera fixée par des vis à l'un & à l'autre; & quand l'on aura un mouvement un peu considérable à donner au support mobile P , il faudra y remettre la règle de fer, pour que les deux supports marchent ensemble, & soient toujours perpendiculaires à l'axe.

Fig. 174.

2394. Pour pouvoir fixer la lunette à une hauteur invariable pendant la durée d'une observation, on emploie quelquefois une vis de pression avec un collet qui embrasse l'axe près d'un de ses supports, mais tout ce qui peut forcer l'axe étant d'une conséquence dangereuse, j'aime mieux la méthode suivante. Au-dessous de l'axe de la lunette méridienne, on place un autre axe ou rouleau qui peut n'être qu'en bois, & qui tient

sur un chassis horizontal que l'on peut avancer ou reculer ; on met perpendiculairement à ce rouleau une verge ou tringle de bois qui vient joindre la lunette près des oculaires où elle entre dans un carré fixé sur la lunette ; on peut la contenir dans le carré avec une vis de pression ; où bien on fera seulement reposer la lunette sur l'extrémité de la tringle de bois ; & cette tringle sera mobile dans le rouleau de bois , & pourra s'y arrêter par une vis de pression.

Trappe dans le méridien.

La partie d'un observatoire qui répond au-dessus de la lunette méridienne doit être ouverte dans le sens du méridien , & l'ouverture fermée par une trappe. Afin d'ouvrir aisément cette trappe, elle peut être soutenue par une tringle dont l'extrémité inférieure porte sur un levier, fort près du point d'appui autour duquel ce levier tourne dans la muraille ; ce levier *le* étant relevé & accroché contre le mur , la tringle s'élève & tient la trappe *t* ouverte ; on en aura une idée dans la Planche XXIII , au-dessus de la lunette.

Machine pour éclairer les fils.

2395. On ajoute quelquefois à la lunette méridienne une machine pour éclairer les fils ; c'est un collet de bois qui environne l'axe vers *Q* ou *F* sans y toucher , & qui est porté par un bras de fer qui part de terre ou du mur voisin ; autour de ce collet tourne un autre cercle ou collet de bois qui porte un bras assez long pour atteindre l'objectif *C* de la lunette ; à l'extrémité de ce bras on met une lanterne , & l'on adapte à l'extrémité de la lunette un carton ou une plaque de cuivre , blanchie , qui réfléchisse la lumière sur l'objectif ; le carton doit être percé d'un trou suffisant pour admettre les rayons de lumière & s'incliner à volonté pour donner à l'objectif plus ou moins de lumière.

Méthode pour diminuer le frottement des pivots.

2396. Lorsqu'une lunette méridienne n'a que 4 pieds & l'axe $2\frac{1}{2}$, comme dans la description précédente, le poids n'est pas considérable , il n'y a pas d'inconvénient sensible dans le frottement des pivots sur leurs coussinets. Mais dans un grand instrument tel que celui de l'observatoire de Greenwich dont la lunette a près

de 8 pieds; le poids, le frottement & l'usure méritent une attention : on suspend l'axe en *M* & en *Q* vers le milieu des deux bras, par des crochets de bois qui portent l'axe de l'instrument; chacun de ces crochets est attaché supérieurement à l'extrémité d'un levier mobile dont l'autre extrémité est chargée d'un poids, ces deux poids ne font pas tout à fait équilibre avec l'instrument, mais quelques onces de plus suffiroient pour le tenir en l'air; par ce moyen les pivots ne portent sur leurs coussinets qu'avec une force de quelques onces, & ces parties délicates qu'il importe de conserver avec soin dans toute leur intégrité ne sont exposées presque à aucun frottement; M. Bradley qui a employé cet artifice à l'imitation de M. Romer (2388); l'a appliqué même à l'instrument de M. Halley qui se conserve à Gréenwich.

2397. Quand on veut faire servir une lunette méridienne en voyage, on place la pièce de fer où tiennent les supports sur un axe vertical; cet axe tourne en bas dans une crapaudine, & en haut dans un collet mobile, qui donne la facilité de le placer; on en trouvera la figure dans l'histoire céleste de M. le Monnier.

2398. La nécessité de rendre l'axe de la lunette méridienne exactement horizontal, exige que nous parlions ici du niveau qu'on emploie à cet usage. On peut se servir d'un fil à-plomb suspendu en *C* (fig. 174), à une petite tête de cuivre fixée au haut de la lunette, on fait tomber le fil vis-à-vis d'un point placé au bas de la lunette, sur une autre petite tête de cuivre en *L*. On peut aussi employer un niveau formé par un fil à-plomb avec 2 pieds qu'on place sur les pivots *A* & *B*; mais si l'on considère qu'un cheveu, qui est à peu près la 35^e. partie d'une ligne, occupe 8'' sur un rayon de 5 pieds: on verra qu'il est bien difficile de placer un axe à 3 ou 4'' près, avec le fil à-plomb.

LE NIVEAU à bulle d'air, représenté dans la fig 175 est un instrument plus commode & qui peut être plus exact; mais il est aussi très-difficile à bien faire. La

Niveau pour
vérifier l'instrument.

Fig. 174.

Niveau à
bulle d'air.
Fig. 175.

règle de bois *BA* est destinée à s'appuyer sur les pivots de l'instrument ; pour cela les pieds *B* & *A* sont garnis de cuivre, arrondis comme les tourillons de l'axe ; pour s'y appuyer. Un tube de cuivre *FE*, qui renferme un tube de verre, est retenu en *D* & en *C* dans deux pièces de cuivre, dont l'une fait charnière en *D* tandis que l'autre *C* est percée pour introduire une vis qui entre dans la règle inférieure ; la tête de la vis quand on la tourne, fait baisser la partie *C* du niveau ; tandis qu'un ressort placé dessous le tube tend à l'élever, & l'applique sans cesse contre la tête de la vis.

Difficultés à les bien faire.

2399. Dans les niveaux à bulle d'air, plus la bulle est longue, plus elle est sensible, & plus son mouvement est prompt. M. Chezy a observé dans un niveau fait par Langlois, que la bulle changeoit de longueur lorsqu'il faisoit plus ou moins chaud, & que sa marche devenoit différente, à cause des irrégularités intérieures du tube ; il a cherché les moyens de dresser la surface intérieure du tube ; il y a réussi avec un cylindre de verre, dressé & arrondi dans un demi-cylindre de cuivre ; il fait tourner ce cylindre de verre dans le tube qui doit servir de niveau, avec de l'émeril très-fin qui ait employé une minute à descendre dans l'eau, de trois pouces de hauteur. M. Chezy emploie de l'émeril de plus en plus fin, & quand le tube est adouci il colle du papier sur le cylindre de verre, & avec du tripoli il achève de polir l'intérieur du tube. Par ce moyen il est parvenu à faire un niveau d'un pied, dont la bulle d'air a 9 pouces & un tiers, & parcourt uniformément une ligne pour chaque seconde d'inclinaison, il l'auroit fait encore plus sensible s'il eût voulu ; mais il a mieux aimé ne lui donner que ce degré de sensibilité. Il travaille ses tubes avec un cylindre de verre plus court que le tube ; & c'est ce qui donne une courbure longitudinale à l'intérieur du tube, parce qu'alors le tube est plus usé vers le milieu que vers les bords. (*Mém. présentés à l'acad. Tom. V, pag. 254*) :

Niveau d'une extrême sensibilité.

Pour être sûr qu'un niveau est bien sensible & qu'il est

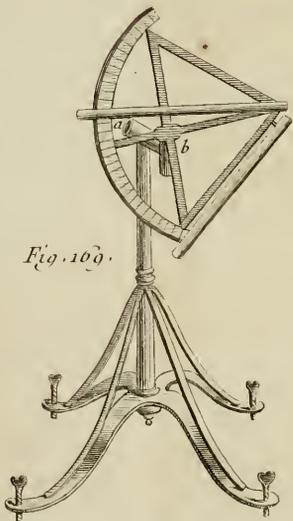


Fig. 169.

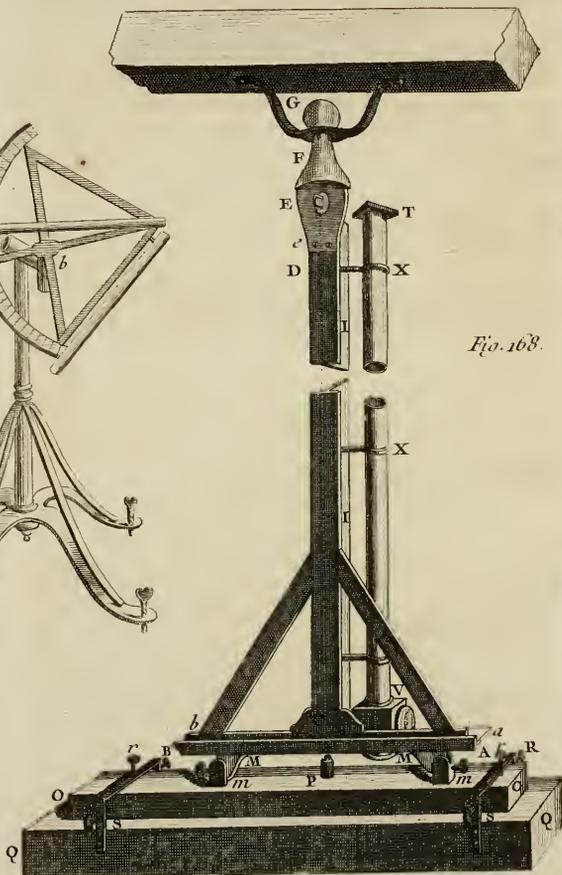
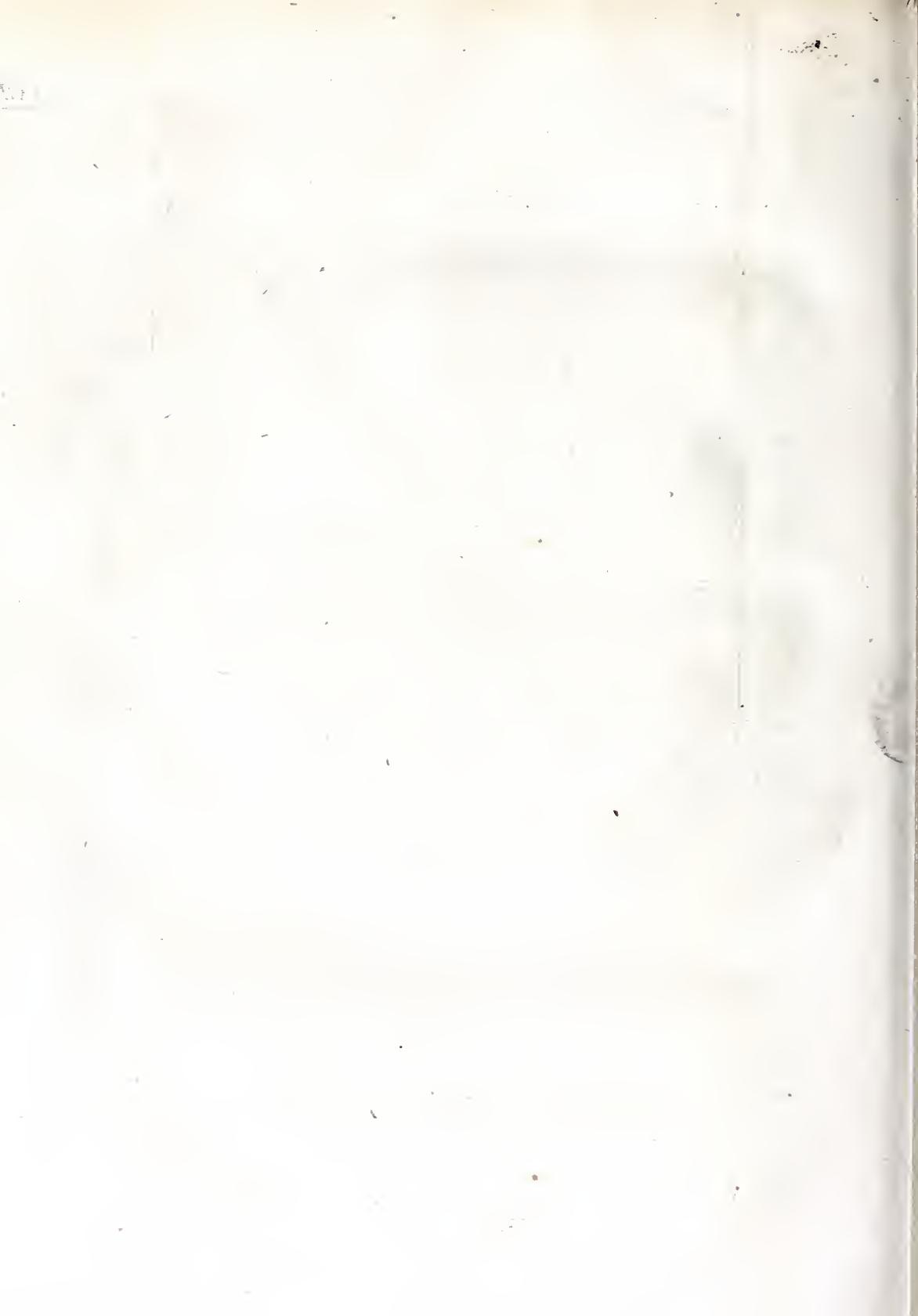
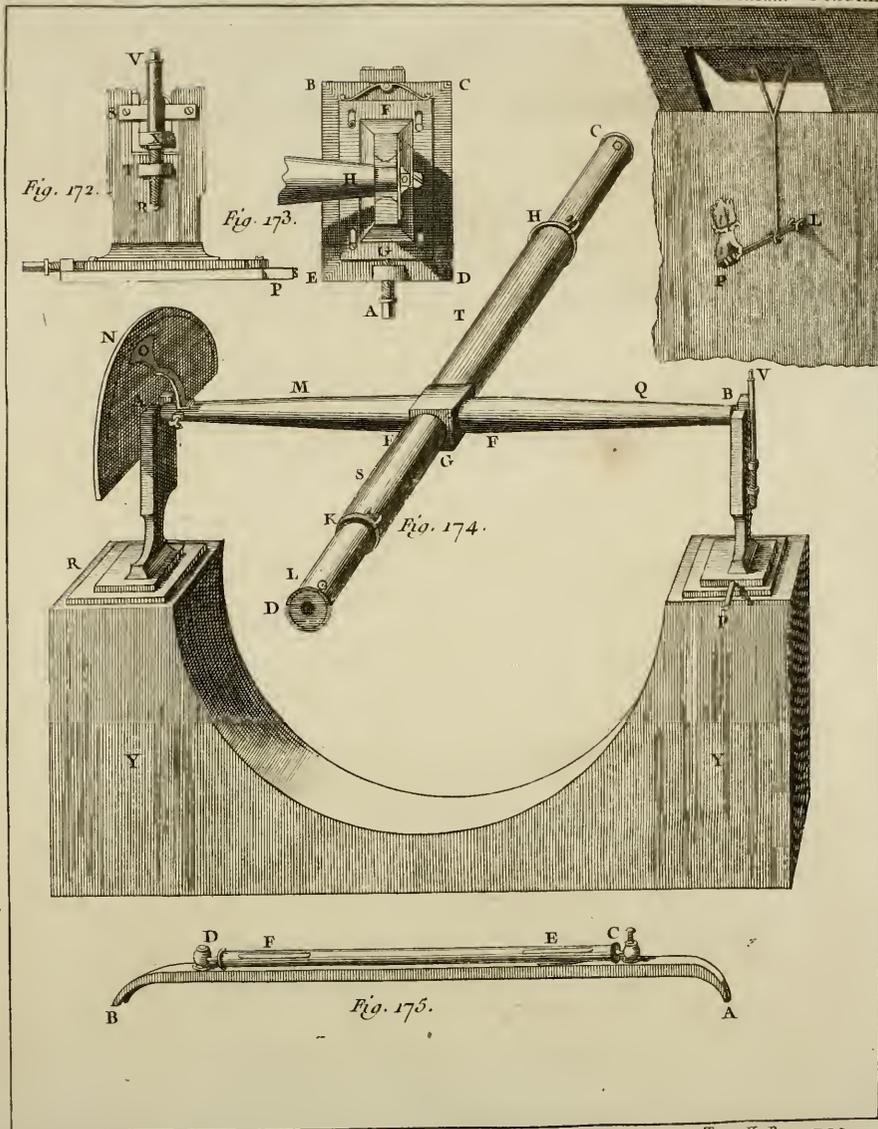


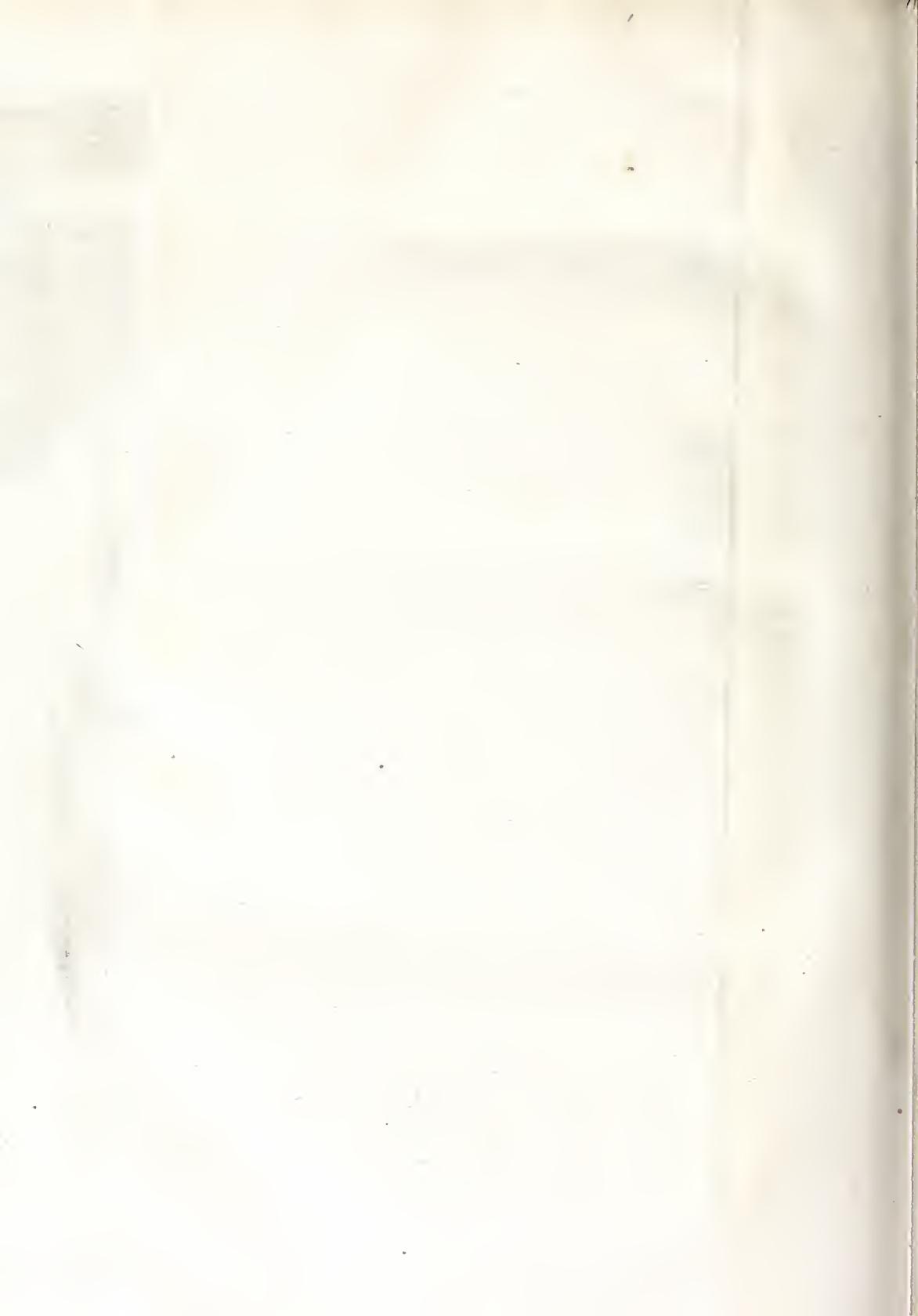
Fig. 168.



Fig. 170.







est bien régulier, on place le tube, aussi-tôt qu'il est rempli, sur des supports fixés dans une règle que l'on peut incliner par le moyen d'une vis, dont la régularité soit éprouvée (2360); on fait tourner la vis lentement & par degrés égaux, & l'on voit si la marche de la bulle est uniforme, si elle ne va point d'un mouvement accéléré & par soubresauts; quand le tube est inégal, on le tourne sur différens points de sa surface, & l'on choisit le côté le plus régulier: c'est tout ce qu'on peut faire de mieux lorsqu'on est forcé d'employer de mauvais tubes.

Il importe que l'éther qu'on emploie dans les niveaux, soit très-bien rectifié, sans cela il est sujet à deux inconvéniens, que j'ai remarqués de même que M. Chezy: premièrement, quand on agite le tube, l'éther se divise en plusieurs bulles qui ne se réunissent ensuite que difficilement: secondement, l'éther se décompose avec le temps, & produit de très-petites gouttes d'une substance huileuse qui s'attachent au tube, & arrêtent la marche de la bulle: ces inconvéniens me feroient choisir l'esprit-de-vin par préférence à l'éther. Voyez l'usage & les vérifications du niveau (2615).

DESCRIPTION DE LA LUNETTE PARALLATIQUE.

2400. LA LUNETTE PARALLATIQUE, appelée aussi *Machine parallatique*, est destinée à suivre le parallèle d'un astre, ou son mouvement diurne d'orient en occident, en décrivant le même *parallèle*; lorsque l'astre est placé une fois sur le fil de la lunette, il le décrit sans s'en écarter, & à quelque heure du jour qu'on dirige la lunette vers l'astre, on voit toujours celui-ci parcourir le fil de la lunette. Pour remplir cet objet, il ne s'agit que de placer la lunette sur un axe qui soit parallèle à l'axe du monde, & qui tourne sur lui-même dans le sens & dans la position du globe de la terre; lorsque cet axe tourne, il emporte avec lui la lunette,

Ancienneté
de cette ma-
chine.

& par ce moyen il accompagne l'astre dans son mouvement qui se fait autour du même axe. La plus ancienne que je connoisse, est celle que décrivait en 1626 le Pere Scheiner (*Rosa Ursina*, pag. 347); il l'appelle *Instrumentum Telioscopicum*, & en attribue l'invention au Pere Gruenberger; elle fut d'un très-grand usage pour observer les taches du soleil; M. Cassini le pere s'en servit beaucoup; M. Cassini le fils la perfectionna, & en donna la description dans les *Mémoires de 1721*, pag. 18.

Cet instrument s'appelle *parallatique*, parce qu'il est destiné à suivre le parallèle d'un astre, & non point parallaétique, car ce dernier nom est consacré à l'instrument dont se servit Ptolomée pour observer les parallaxes (2275). Je vais décrire une lunette parallatique, de la grandeur & de la forme la plus usitée aujourd'hui parmi les astronomes de Paris, avec tous les détails nécessaires pour qu'on puisse l'exécuter ailleurs; mais on peut bien en faire de plus grandes, & il n'y a point de Charpentier qui ne fit une machine parallatique de 6 pieds de haut, dont on se serviroit avec avantage pour porter une lunette de dix pieds avec son micromètre.

Fig. 176.

2401. Le pied est formé de 3 pièces de bois; d'abord un montant *AB* placé verticalement, d'environ 2 pieds de haut, 2 pouces & demi de largeur & 18 lignes d'épaisseur, est assemblé d'équerre avec une traverse *DE*, de 22 pouces de long sur 2 pouces & demi de largeur & 15 lignes d'épaisseur; cet assemblage est maintenu par deux arcs-boutans *FE*, *FD*, de 15 à 16 pouces de long sur 15 lignes d'écarrissage.

Une autre pièce *BK*, est encore assemblée d'équerre à tenon & à mortaise, dans la traverse *DE*, & maintenue par un autre arc-boutant qui va de *G* en *H*, mais qui est masqué dans la figure par la pièce *FE*; la partie *BKN* a 20 pouces de long sur 10 lignes d'écarrissage. Cet assemblage composé des trois pièces *AB*, *BK*, *DE*, avec leurs arcs-boutans, forme le pied de la machine;

La règle *BKN* est destinée à être mise le long d'une ligne méridienne.

Fig. 176.

L'axe *CYS* est la partie essentielle de l'instrument ; il fait avec la base *BKN* un angle égal à la hauteur du pôle ; l'extrémité supérieure *A* de la règle verticale *BA* porte un coussinet en forme de demi-cylindre concave, de cuivre, incliné dans la direction de l'axe, pour recevoir le collet *Y* qui est logé dans la concavité de ce coussinet ; le collet *Y* de l'axe est recouvert d'un autre demi-cylindre de cuivre qui l'embrasse exactement ; celui-ci porte deux oreilles que l'on fixe par 4 vis sur les oreilles du coussinet inférieur ; ces deux gouttières ou demi-cylindres de cuivre forment un collet de deux ou trois pouces de long, dans lequel l'axe tourne à frottement. Il importe que cette partie soit bien faite, que le frottement soit doux, que les pièces ne grippent point & que la lunette ne fasse point de soubresauts, comme cela arriveroit si tout étoit en bois ; il faut que le frottement soit assez fort pour que la lunette reste en place sans tourner autour de l'axe, ou par son poids ou par les petits coups de vent. A l'autre extrémité de l'axe il y a une crapaudine *C* ou concavité hémisphérique pour recevoir le pivot de l'axe, qui se termine ordinairement par une tétine, ou espèce de petite boule, de matière dure, qui tourne facilement.

2402. Au-delà du collet *Y*, par lequel l'axe repose sur le montant *BA*, ce même axe porte deux renforts ou platines de cuivre, qui font comme une mâchoire, de 3 pouces de long, pour recevoir & ferrer le demi-cercle *VZ* qui doit servir de charnière, en même temps qu'il représentera le cercle horaire. Le centre *S* du demi-cercle *VZ* est traversé par un axe ou petit cylindre de cuivre, portant une rosette qui en fait la tête ou la base, & dont l'autre extrémité se termine en vis ; on serre cette vis par un écrou, en mettant une platine entre deux, pour fixer le demi-cercle, & l'arrêter entre les deux plaques ou mâchoires qui terminent l'axe *CS* de la machine ; à mesure qu'on serre cette vis les deux

Cercle de déclinaison.

H h h h h ij

plaques de la mâchoire sont poussées en sens contraire entre les deux rosettes, & contre le plan du demi-cercle, ce qui sert à le fixer plus ou moins fortement suivant le besoin. On peut aussi rendre le cylindre du centre plus court que l'épaisseur des mâchoires, en lui laissant un quart de ligne de tirage; alors on introduit une vis dans son extrémité, la tête de la vis sert de rosette, & presse le centre contre la mâchoire. Pour que la rosette ne se dévise pas, on ajuste un pied ou une goupille contre la tête de l'axe *S*, pour entrer dans la mâchoire. Le diamètre *VT* du demi-cercle entre dans une coulisse de cuivre, où il est pris par deux vis *T* & *V*, & cette coulisse forme par-dessus une gouttière de cuivre de 8 pouces, qui est fixée par 4 vis sur la gouttière de bois *LL* qui doit recevoir la lunette; cette gouttière est taillée en-dedans en forme d'angle droit, pour admettre les lunettes de différentes grosseurs, dont les tuyaux sont carrés.

On divise en degrés le demi-cercle *TZV* qui n'a que deux pouces un quart de rayon; mais on place vis-à-vis de sa division un arc *Z* qui forme un vernier; il embrasse 11° du demi-cercle & il est divisé en 12 parties (2344), de sorte qu'on apperçoit aisément les minutes de cinq en cinq; le demi-cercle *TZV* est évidé ou creusé circulairement en forme de rainure à jour, comme on le voit en *Z*, pour avoir la liberté de tourner, malgré la vis de pression, qui traverse son plan pour l'arrêter entre les pièces de la mâchoire.

Cercle
équatorial.

2403. L'extrémité inférieure de l'axe *YC*, avant que d'être reçue dans la règle *BK*, traverse par le centre un cercle *OC*, de trois pouces de rayon, destiné à représenter l'équateur, & à marquer l'ascension droite de l'étoile qu'on observe. Ce cercle équinoxial est de cuivre, son plan est perpendiculaire à l'axe; il est soutenu en *K* sur les deux côtés de la règle *BK*, par deux supports de cuivre coudés, qui tiennent avec des vis sur la règle *BK*, & sur lesquels le cercle est arrêté par six vis; ces supports ont deux empattemens chacun, pour

se vifser fur la règle *NB*, & trois empattemens pour s'appliquer contre le plan de l'équateur, & le contenir exactement.

On divife ce petit cercle équinoxial en degrés ; mais on y marque les heures à la place des degrés, c'est-à-dire qu'on met 0^h à la partie supérieure du cercle ; on met 1 heure à 15° de-là, tant à droite qu'à gauche, 2^h à 30° , &c. ainsi le temps y est marqué de 4 en 4 minutes ; mais au moyen d'un vernier qui est fur l'alidade *CO*, on y apperçoit aisément un tiers de minute, c'est-à-dire, $20''$ de temps. Pour cet effet, on prend fur l'alidade une portion de cercle, qui embrasse 11 divisions de l'équateur, & l'on divife cet arc en douze parties ; cela forme un vernier (2344) qui marque les $20''$.

Quand la lunette parallatique est dirigée dans le méridien, l'index de l'alidade *O* répond à la partie supérieure du cercle inférieur qui représente l'équateur, & marque zéro pour l'angle horaire, ou pour la distance au méridien, parce qu'il marque le point où l'équateur représenté par le cercle *C* est coupé par le méridien du lieu ; mais si l'on fait faire un quart-de-tour à l'axe *CY*, & par conséquent à la lunette, l'index *O* marquera 6 heures sur le même cercle ; il en est ainsi des autres angles horaires. Ce cercle équatorial est fort commode pour trouver les astres dans le crépuscule, & même pendant le jour (2622).

Mesure des
angles horai-
res.

2404. Sur la règle *DE*, l'on ajoute aussi deux pièces de bois *EN*, *DN*, en retour d'équerre, de cinq pouces de long, qui servent à empêcher le déverfement de la machine. Ces deux alonges sont traversées par des vis *N*, *N*, qui sont nécessaires pour caler la machine, c'est-à-dire, pour remettre la règle *AB* dans une position exactement verticale ; on est obligé d'appliquer aussi pour le même effet une troisième vis à caler, à l'extrémité méridionale de la règle *BKN*, pour redresser la machine du nord au sud, quand l'axe est trop ou trop peu incliné, & ne se dirige pas à la hauteur du pôle ; les deux autres vis ne servent qu'à

Vis à caler.

redresser l'axe d'orient en occident, pour qu'il soit exactement dans le plan du méridien. Ces vis doivent se terminer en pointes, ou porter sur des coquilles, pour que la machine ne charie pas quand on les tourne.

Niveaux à bulle d'air.

2405. On ajoute quelquefois deux niveaux à bulle d'air P, Q (2398); le premier sert à reconnoître si la règle qui doit être verticale AB , n'incline point vers l'orient, ou vers l'occident. Le niveau Q sert à reconnoître & à corriger l'inclinaison qu'elle pourroit avoir du nord au sud; mais on y supplée facilement avec un niveau ordinaire en forme d'équerre, qui porte un fil à-plomb, & qu'on présente sur les deux règles DE & BK , lorsqu'on veut disposer une lunette parallatique; on suppose que ces règles sont bien d'équerre avec la pièce verticale AB .

Placer la machine sous d'autres latitudes.

2406. La règle BK étant placée sur une méridienne, & AB étant exactement verticale; si l'angle ACB est parfaitement égal à la hauteur du pôle; par exemple, de $48^{\circ} 50'$ pour Paris, l'axe CY se trouve dirigé vers le pôle du monde, & représente l'axe de la terre. Delà il suit que si l'on transportoit cette machine à 25 lieues de Paris, du côté du nord, il faudroit relever d'un degré l'axe CY , c'est-à-dire, éloigner la règle AB de la verticale du côté du midi. Pour se ménager cette facilité, on adapte au bas de la règle AB un arc de cuivre R , de quelques degrés; on place en haut une petite pièce de cuivre r , de laquelle pend un fil à-plomb sur les divisions de l'arc R ; en sorte que le point de suspension de ce fil soit en même temps le centre de ces divisions); lorsque ce fil à-plomb marque zéro sur l'arc R , la règle AB lui est parallèle, & se trouve être verticale; mais il marque 1 ou 2 degrés; lorsque la règle AB est inclinée de la même quantité: alors l'axe AC est disposé pour une latitude différente. Le niveau Q ne peut servir dans ce cas-là; mais le fil à-plomb rR en tient lieu.

2407. Quelquefois une vis I , engrène dans les dentelures du demi-cercle TZV , qui pour lors est taraudé,

ou ftrié fur fa circonférence ; cette vis fert à donner un petit mouvement lent à la lunette LL ; mais on fe paffe aifément de cette vis. La règle LX fert à maintenir la lunette dans la fîtuation qu'elle doit avoir par rapport à l'axe ; & la vis que l'on voit au milieu de la mâchoire S fur le demi-cercle VZ , fert auffi à preffer le demi-cercle entre les deux pièces de la mâchoire S , pour fixer la lunette quand elle eft mife fur un certain degré de déclinaifon.

On place enfuite une lunette de 4 à 5 pieds fur la machine que nous venons de décrire ; on affujettit cette lunette fur la gouttière LL , avec des brides ou colliers. Le tuyau eft de bois, ordinairement carré, terminé aux deux extrémités par des frètes de cuivre, ou boîtes carrées, qui affemblent & fortifient les pièces de bois, & qui portent les verres. Quand la lunette eft perpendiculaire à l'axe SYC , elle décrit un cercle perpendiculaire à l'axe du monde, c'eft-à-dire, l'équateur ; ainfi dans ce cas-là on fuivroit un afre qui feroit dans l'équateur, avec la lunette arrêtée à angles droits fur fon axe SC . Si l'afre eft plus près du pôle boréal, ou qu'il ait, par exemple, 30° de déclinaifon boréale, on incline la lunette en la faifant tourner fur fon centre S , jufqu'à ce qu'elle fe dirige à 60° du pôle, ou qu'elle faffe avec SC un angle de 60° du côté de L ; ainfi de quelque côté que tourne l'axe avec fa lunette, celle-ci étant toujours à 30° de l'équateur, ou à 60° du pôle, décrira néceffairement le parallèle d'une étoile qui auroit 30° de déclinaifon ; alors le demi-cercle marquera en Z 30° , de la même manière qu'il marquoit zéro dans le cas où la lunette étoit perpendiculaire à fon axe, & qu'elle fe dirigeoit dans l'équateur. Les vérifications & l'ufage de la lunette parallatique fe trouveront dans le Livre fuivant (2618).

Ufage.



DESCRIPTION DU TELESCOPE.

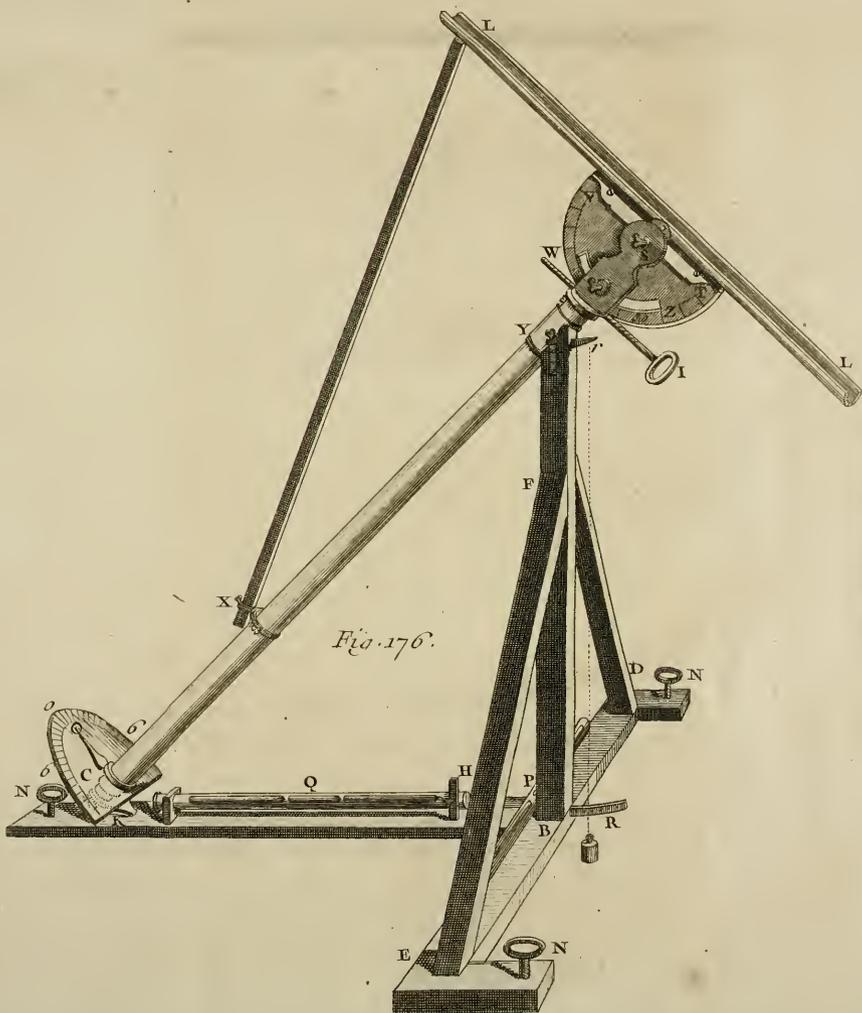
2408. LE TÉLESCOPE (a) est un instrument composé de deux miroirs de métal & d'un oculaire à réfraction, disposés pour bien voir les objets éloignés. Quoiqu'en Latin le mot de *Telescopium* s'applique également aux lunettes d'approche, sa signification est bornée en François aux instrumens à réflexion, ou aux lunettes catoptriques. La première invention du télescope est de Jacques Gregori, (*Opt. promot. Londini, 1663*). Newton perfectionna cette invention, plusieurs années après, comme on le voit dans son optique.

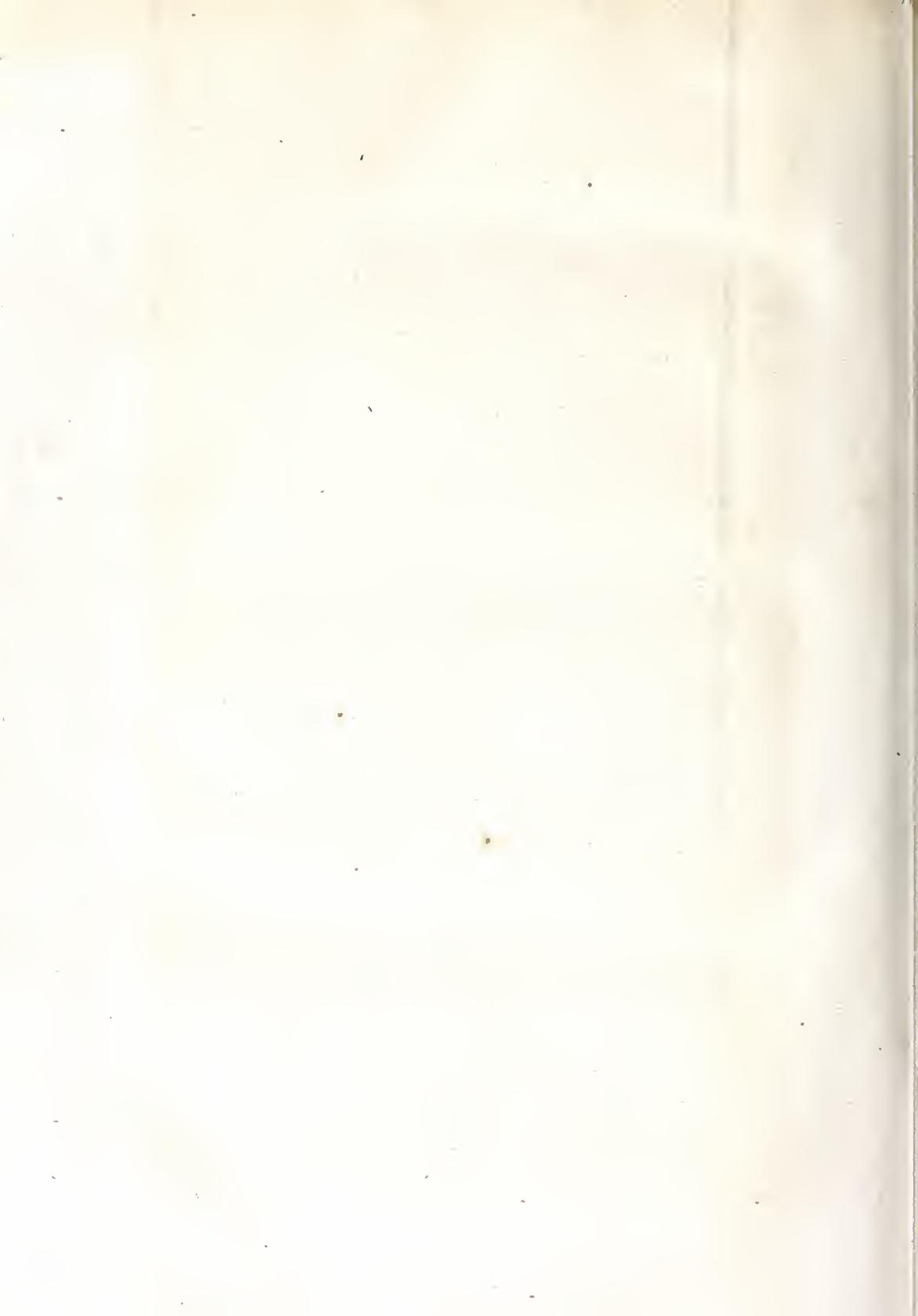
Planche XXV.
Fig. 177.

Effet du Télescope Gregorien.

Un miroir concave RR , (*fig. 177*), dont la courbure fait partie d'une sphère de 4 pieds de rayon, a son foyer F , éloigné de 2 pieds de la surface du miroir; les rayons parallèles SR , SR , qui arrivent d'un astre ou d'un point lumineux, sont réfléchis de R en F , & ils se réunissent au point F ; au-delà de ce point de réunion ils vont en divergeant; on les reçoit sur un petit miroir concave HH de 3 pouces de foyer, dont le foyer G soit éloigné du foyer F d'une quantité qui se trouve par cette proportion: le foyer du grand miroir est à celui du petit, comme ce dernier est à l'intervalle FG qu'il doit y avoir entre les deux miroirs: dans notre exemple on dira, 24 pouces sont à 3, comme 3 sont à $\frac{3}{8}$ de pouce, qui est l'intervalle FG : dans cet état les rayons tombant en H sur le petit miroir, vont se réunir au point C , où est placé le foyer de l'oculaire D ; en supposant qu'il n'y ait qu'un seul oculaire. Ces rayons partant du point C , traversent l'oculaire D , & arrivent à l'œil O parallèles entre eux; c'est ce qui est nécessaire à un œil bien constitué pour voir distinctement un point lumineux. Dans les télescopes ordinaires, il y a deux oculaires dont le premier reçoit les rayons du petit miroir avant leur réunion, & les rassemble au foyer C du second oculaire.

(a) Τέλεστρον, *procul, speculatio, video.*





2409. Dans les télescopes Newtoniens le petit miroir *HH* est un miroir plan, incliné de 45° & qui réfléchit les rayons à l'œil placé sur le côté du télescope ; on voit le miroir en *M* (fig. 183), & l'oculaire dans le tube *OL*.

Télescopes
Newtoniens.

Fig. 183.

2410. La quantité dont le télescope grossit, est exprimée par le carré du foyer du grand miroir, divisé par le produit des foyers du petit miroir & de l'oculaire ; ainsi dans l'exemple précédent si l'on suppose en *D* un oculaire de 2 pouces de foyer, on divisera le carré de 24 par le produit de 3 & de 2, l'on aura 96 ; & ce télescope grossira 96 fois le diamètre de l'objet, le fera paroître sous un angle 96 fois plus grand qu'à l'œil nud, ou de la grandeur dont on le verroit s'il étoit 96 fois plus près de nous ; s'il y a deux oculaires il faut une formule plus compliquée pour calculer l'amplification.

Combien
grossissent les
Télescopes
Grégoriens.

Dans le télescope Newtonien on divise simplement le foyer du grand miroir par le foyer de l'oculaire, comme dans les lunettes ordinaires (2286), & l'on a la force amplificative.

2411. On se sert ordinairement de deux oculaires dans un télescope, pour être en état d'avoir plus d'ouverture ; l'oculaire qui est du côté de l'objet, est large & d'un plus long foyer, il rassemble dans un plus petit espace les rayons venus de divers points de l'objet, tandis que ceux qui viennent d'un seul & même point de l'objet, sont rassemblés en un point au foyer d'un second oculaire plus petit, qui les transforme en autant de faisceaux de rayons parallèles entre eux qu'il y a de points dans l'objet : quand aux rayons venus de divers points, le petit oculaire fait converger ces divers faisceaux sous un plus grand angle, d'où résulte l'amplification ou le grossissement. On choisit pour oculaire un ménisque, ou un verre concave du côté de l'œil, & convexe du côté de l'objet, parce que les rayons qui passent sur ses bords, sont moins obliques à sa surface, qu'ils ne le seroient dans une lentille biconvexe.

Des deux
oculaires.

Champ du
Télescope.

2412. Pour connoître le champ d'un télescope Newtonien, ou l'étendue de l'objet qu'il embrasse, il faut savoir combien la largeur du petit miroir occupe de minutes de degré par rapport au milieu du grand miroir, & l'on dira pour cet effet. La distance du grand miroir au petit, est à la largeur du petit miroir, comme le rayon est à la tangente de l'angle qui exprime le champ du télescope. Je suppose que l'ouverture des oculaires n'est pas moindre que la largeur du petit miroir, car cela restreindroit le champ, c'est ce qui arrive dans les télescopes Grégoriens, le trou du grand miroir ne pouvant être fort large, le champ du télescope est limité par les oculaires.

Télescope
monté.
Fig. 178.

2413. Le télescope Grégorien est représenté avec sa monture & son pied dans la *fig. 178*; *ABCD* est un tuyau de cuivre ou de bois, *AB* la place du grand miroir, *CD* l'ouverture qui reçoit les rayons; *E* la place du petit miroir qui est au-dedans du tube; *EFG* la tringle qui sert à rapprocher le petit miroir du grand pour mettre le télescope à l'usage de ceux qui ont la vue basse; *P* le tuyau des oculaires qui entre à vis dans la base *AB* du grand tuyau; *O* la place de l'œil. *HH* est une pièce de cuivre qui est représentée séparément en *hh* (*fig. 182*); elle se termine par deux rainures dans lesquelles passent des vis qui la fixent sur le tuyau du télescope; cette pièce porte une petite boule de cuivre *I* qui est ferrée dans la concavité *KK* du genou (*fig. 178*), recouverte d'une calotte de cuivre qui est seulement percée pour laisser passer & mouvoir la tige *I*; cette calotte est ferrée par trois vis dont deux paroissent en *K* & donnent un frottement dur à la boule qui porte le télescope. La tige du pied se termine en bas par une vis *N* que l'on ferre en-dessous; au moyen d'un écrou, ou que l'on visse dans la base *LL* du pied. Sur cette base, il y a 3 pieds *LM*, *LM*, qui tournent à charnière pour pouvoir se rapprocher de la tige *N*, & se placer commodément dans une boîte. On verra dans la figure 188 une monture plus com-

posée pour le pied d'un télescope (2417).

2414. Le petit miroir du télescope est représenté séparément en *Q* (fig. 181), porté à l'extrémité d'une tige de cuivre, pour le faire mouvoir quand on veut ajuster le télescope pour des vues courtes, ou pour des objets plus voisins; cette tige passe dans un écrou, auquel tient une pièce de cuivre *SR* qui s'applique contre la paroi intérieure du télescope où elle glisse dans une rainure ou coulisse faite en queue d'aronde; elle reçoit son mouvement par la tringle extérieure *EFG* (fig. 178) au moyen d'un écrou qui sert du tuyau vers le point *E* (fig. 178), & que l'on voit encore mieux en *G* (fig. 184). Cet écrou passe au travers de la pièce *SR* fig. 181, & au-dedans du télescope, il se termine par un collet dans lequel on fait passer une pince *X* qui l'empêche de quitter le trou de la pièce *SR*.

Fig. 178,
181 & 184.

Dans les télescopes qui portent un micromètre objectif (2434), on est obligé d'avoir en *E* une division de vernier (2343) pour reconnoître facilement & en tout temps la situation du petit miroir; cette division est représentée dans la figure 184, de la grandeur convenable à un télescope d'un pied. *AB* est une pièce de cuivre fixée à l'extérieur du tuyau, à l'endroit où répond le petit miroir; elle est divisée sur un espace de deux pouces, en vingtièmes de pouce; pour subdiviser ces 20^{es}. de pouce chacune en 25 parties, on a pris 24 divisions sur *AB* qu'on a partagées en 25, comme on le voit de *C* en *D* sur une pièce de cuivre qui se meut avec le petit miroir, par le moyen de l'écrou *G* qui passe au travers du tuyau & de la plaque qui porte le petit miroir, pour l'obliger de monter & de descendre quand la tringle tourne dans son écrou. *HI* marque une rainure pratiquée dans le tube du télescope pour le mouvement de l'écrou *G*. Afin d'empêcher que cet écrou ne vacille, on le fait passer au travers d'une pièce *KL* qui recouvre la largeur de la rainure, & sur laquelle est fixé par deux vis le vernier *OD*. Dans les petits télescopes à la main, on produit le mouve-

Divisions du
Vernier dans
le télescope.

ment par une pièce en spirale qui se voit dans la figure 179.

2415. Le grand miroir du télescope est contenu dans la culasse du tuyau par un couvercle de cuivre vissé, & par une pièce de cuivre *T* (fig. 180); triangulaire & un peu convexe, qui fait ressort sur le miroir sans le gêner dans sa situation; quelquefois aussi l'on fixe dans l'intérieur du couvercle, 3 petits ressorts qui pressent le miroir quand on ferme le tuyau; autrefois on y mettoit des vis de pression qui passaient au travers du couvercle; mais on a reconnu que ces vis pouvoient quelquefois forcer le miroir, lui faire prendre une situation gênée, & rendre les objets confus.

Œilleton.

2416. A l'extrémité du tuyau des oculaires on place un petit œilleton, ou une pièce concave, dans laquelle se loge le globe de l'œil, percée au centre d'un très-petit trou; cet œilleton empêche que l'œil ne reçoive les rayons extérieurs, & l'oblige de se placer toujours sur l'axe du télescope où la vision est plus distincte: on voit en *OL* (fig. 183) le tube des oculaires sur un télescope Newtonien avec son œilleton; on y voit aussi la vis *V* qui fait mouvoir le petit miroir *M* (2414).

Télescope
Newtonien.
Fig. 183.

Autre pied
plus com-
posé pour les
grands Télé-
scope.

Pl. XXVII.
Fig. 188.

2417. Dans les télescopes de 3 à 4 pieds l'on pratique souvent une autre espèce de pied ou de support destiné à leur donner des mouvemens doux & réglés par le moyen des vis de rappel; on en voit le dessein dans la fig. 188. *RR* est un demi-cercle de cuivre fixé sur le tuyau du télescope par 4 bras perpendiculaires au plan du demi-cercle, qui reçoivent chacun une vis pour les fixer contre le tuyau; ce demi-cercle tourne sur un axe *X*, & il est reçu dans l'épaisseur d'un mâchoire double *XZ* qui forme une charnière, après quoi elle se termine par une tige qui descend jusques dans celle du pied, c'est-à-dire, de *X* en *Y*; la base *ef* est d'une seule pièce avec la tige *XZ*. Le demi-cercle *RR* est garni sur l'épaisseur de sa circonférence de filets égaux à ceux de la vis *V*, qui engrene dans cette circonférence & l'oblige à tourner lentement, ce qui fait

mouvoir verticalement le télescope, pour suivre les astres qui montent ou qui descendent. Fig. 188.

2418. Outre le mouvement lent que cette vis V procure au demi-cercle RR & par conséquent au télescope, on est maître de donner un mouvement prompt au télescope en faisant désengrener la vis V ; pour cela on desserre la vis a , on l'élève au-dessus de son point d'appui e ; cette vis demeurant ainsi sans action, le chassis cbd qui porte l'autre vis V n'est plus pressé contre le demi-cercle; & parce que le même chassis n'est plus soutenu alors que par une charnière portée par la base ef , & dans laquelle il tourne à frottement dur, on l'abaisse facilement avec la main; la vis V se trouve ainsi totalement désengrenée, & le télescope en état de tourner à la main aussi promptement que l'on veut. Mouvement lent ou prompt.

2419. Pour pouvoir donner au télescope un mouvement horizontal, on se sert d'un autre canon qui entre dans le pied Y du télescope & qui porte une base ghk : ce canon intérieur reçoit la tige XZ dont nous avons parlé, & il est reçu lui-même dans le pied de l'instrument, où on l'arrête par le moyen d'une vis de pression m . L'extrémité de la base khg porte un écrou cylindrique g mobile autour d'un axe; au travers de l'écrou passe une vis de rappel gf fixée en f dans un petit cylindre qui tourne sur la pièce ef à cause des différentes inclinaisons de la vis gf . Cette vis de rappel en tournant dans l'écrou g oblige l'extrémité f de la pièce ef , de se rapprocher du point g en tournant dans le canon intérieur de la pièce ghk , & celle-ci est arrêtée & immobile dans le pied Y du télescope par la vis m , lorsqu'on veut donner le mouvement lent par le moyen de la vis gf . Si l'on veut donner un mouvement prompt à tout le télescope horizontalement, on lâche la vis de pression m , alors le canon de la pièce ghk tourne librement dans le pied Y , & emporte avec lui le pivot ou la tige XZ liée à ce canon par la vis fg , & par conséquent obligée d'en suivre les mouvemens. Mouvement horizontal.

2420. Le sieur Navarre a exécuté des télescopes où l'on peut donner le mouvement prompt par un simple cercle qui est à frottement dur, & le mouvement lent par le moyen d'une vis, mais cela n'est guère pratique dans de grands télescopes.

Dimensions
d'un Télescope
de 2 pieds
de foyer.

2421. Les télescopes de 32 pouces de longueur qui sont ceux dont on fait le plus d'usage, ont le foyer du grand miroir de deux pieds, le diamètre 5 pouces; le foyer du petit miroir concave 3 pouces, ou 1 pouce $\frac{1}{2}$, suivant que l'on veut faire grossir plus ou moins; le diamètre du petit miroir, qui est égal au diamètre du trou fait dans le grand miroir, a ordinairement un pouce; le tuyau des oculaires en renferme deux, l'un de 4 pouces & l'autre de 2 pouces de foyer, placés à 3 pouces l'un de l'autre; mais quand on veut grossir davantage les objets on a un plus fort équipage ou un tuyau de rechange, dont les deux oculaires sont de 3 pouces, & de 14 lignes de foyer, placés à 2 pouces l'un de l'autre; l'œil se place environ à 6 lignes du dernier oculaire.

Equipages
plus ou moins
forts.

2422. On verra dans la table ci-jointe les ouvertures que le célèbre Short donnoit en 1763 à ses télescopes, depuis qu'il étoit parvenu à leur donner une forme assez approchante de la parabole, pour que les aberrations fussent insensibles malgré ces grandes ouvertures; ces dimensions sont en pouces & en centièmes de pouces, mesure d'Angleterre ^(a); la troisième colonne de cette table fait voir quel foyer Short avoit coutume de donner aux petits miroirs de ses télescopes Grégoriens. Le télescope de 144 pouces, ou 12 pieds de

Dimensions
de Short.

Foyer du Miroir.	Ouverture du grand Miroir.	Foyer du petit Miroir.
pouces.	pouces.	pouces.
12	3, 30	1 & 2
24	5, 57	2 & $4\frac{1}{2}$
36	7, 70	$2\frac{1}{2}$ & 6
48	9, 50	3 & 7
144	21, 50	$4\frac{1}{2}$ & 12

Télescope
de 12 pieds.

(a) Le pied d'Angleterre est à 4000 est à 4263. (*Phil. transf.* 1763, pag. 326).
celui de France à peu-près comme
15 est à 16, plus exactement comme

foyer, n'a jamais été exécuté qu'une fois; ce télescope le plus grand & le meilleur qui ait jamais été fait, étoit en 1763 à Londres à l'hôtel de Malboroug, mais il étoit démonté, & personne n'en faisoit usage. Depuis la mort de ce célèbre artiste, la construction des télescopes est un peu négligée.

2423. Un télescope Grégorien peut se mettre sous la forme Newtonnienne (2409), en y substituant un petit miroir plan, & faisant au tuyau une ouverture latérale; alors on voit les objets plus clairs, parce qu'on diminue la dispersion des rayons qui se fait sur le petit miroir; mais le télescope grossit moins (2410).

2424. La force du petit miroir & des oculaires d'un télescope consiste à grossir les objets, mais la partie essentielle du télescope consiste dans la quantité de rayons que reçoit le grand miroir, ainsi c'est l'ouverture du télescope qui décide principalement de sa force & de sa perfection, d'où il suit que plus on augmentera les ouvertures, plus on perfectionnera le télescope (2431). Il est inutile de faire grossir beaucoup un télescope; celui de 7 à 8 pieds qui pourroit grossir mille fois en y mettant un petit miroir & des oculaires d'un court foyer, fait mieux, donne plus de distinction & de clarté quand on se contente de le faire grossir 100 fois.

2425. Quelquefois on emploie un petit miroir convexe au lieu du miroir concave *HH* (fig. 177); & c'est ce qu'on appelle télescope de *Cassegrain*; on met le petit miroir *HH* plus près de l'œil que n'est le foyer *F* du grand miroir; les rayons réfléchis *RF* atteignent le petit miroir avant leur réunion; ils sont réfléchis & deviennent convergens; on les arrête avant leur réunion par le grand oculaire placé en *D*; les rayons qui arrivent à cet oculaire en convergeant se réunissent (avant que d'être à son foyer) en un point *E*, où l'on place le foyer du petit ménisque ou du dernier oculaire, en sorte que les rayons en sortent parallèles pour arriver à l'œil.

Les télescopes dont le petit miroir est convexe ont

Il est inutile de faire grossir un télescope.

Télescope de Cassegrain.
Fig. 177.

Force de cette espèce de télescope.

Fig. 177.

l'avantage sur les télescopes Grégoriens d'être plus courts du double du foyer du petit miroir ; dans un télescope de 3 pieds de foyer, dont l'ouverture est de 6 pouces $\frac{1}{2}$, la convexité du petit miroir peut être de $3^{\text{p}} \frac{1}{4}$ de rayon, & il grossira 173 fois (Smith *tom. II*, pag. 151, édit. du P. Pézenas) : dans un télescope Grégorien de même foyer, le petit miroir auroit $3 \frac{1}{2}$ de foyer, & le télescope grossiroit 165 fois : un télescope de $15 \frac{1}{2}$ pouces de foyer dont le petit miroir est convexe, grossit 92 fois, & un télescope de 5 pieds, environ 243 fois.

2426. Pour juger de la bonté d'un télescope on y met un oculaire d'un très-court foyer, c'est-à-dire, on le force, autant qu'il est possible, pourvu qu'on voie distinctement la lune, Saturne & Jupiter, & qu'on leur trouve assez de lumière lorsque l'air est pur & tranquille ; on cherche alors par expérience (2427) combien le télescope amplifie ou grossit les objets ; & l'on voit par-là s'il approche beaucoup de la perfection des bons télescopes que nous avons cités (2421, 2425).

Si plusieurs télescopes de même forte ont à peu-près la même longueur, ou s'ils sont de différentes espèces & qu'ils grossissent également, on jugera de l'avantage qu'ils peuvent avoir l'un sur l'autre en lisant la même écriture avec les différens télescopes. On voit dans l'Optique de Smith qu'avec les télescopes de 4 pouces de foyer on voyoit les satellites de Jupiter, & on lisoit les Transactions Philosophiques dont le caractère est le même que celui de cet ouvrage, à 125 pieds de distance ; on les lisoit à 160 pieds avec 6 pouces, à 220 avec 9 pouces, à 500 pieds avec 15 pouces ; & M. Maclaurin assure qu'on avoit vu plusieurs fois les 5 satellites de Saturne ensemble, avec ce télescope de 15 pouces de foyer, comme M. Cassini les avoit vus quelquefois avec une lunette de 17 pieds.

A quelle
distance on
doit lire avec
des télescopes.

Expérience
pour l'ampli-
fication d'un
télescope.

2427. Le moyen dont Hauksbée se servoit pour déterminer par expérience la force amplificative de son télescope, & qu'il éprouya conjointement avec Folkes,

&

Fig. 177.

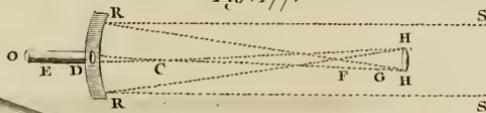


Fig. 178.

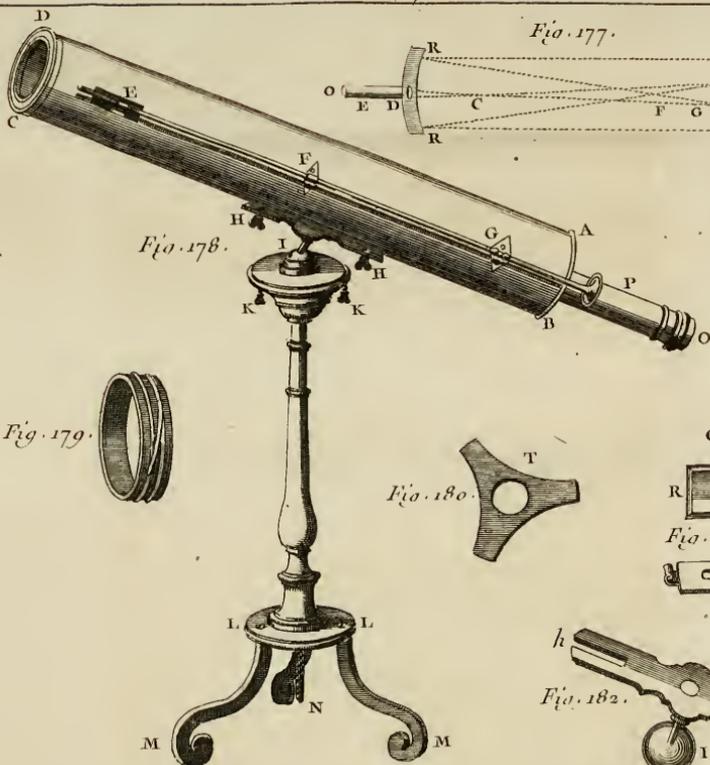


Fig. 179.



Fig. 180.

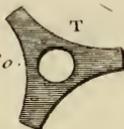


Fig. 181.

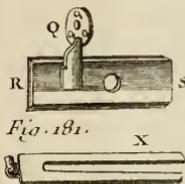


Fig. 182.

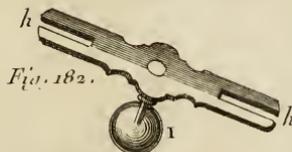


Fig. 184.

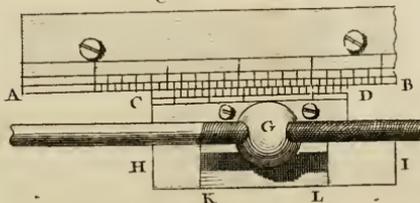
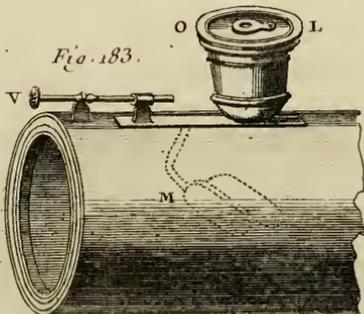


Fig. 183.





ces machines étoient bien imparfaites avant que M. Huygens eût imaginé en 1656 d'y appliquer le seul régulateur fixe qu'il y ait dans la nature; je veux dire les oscillations du pendule, (voyez *Horologium oscillatorium* 1673, & le *Traité d'Horlogerie* de M. Lepaute; pag. 273).

2461. Je n'entrerai pas ici dans le détail de la construction des horloges à pendule (a), il faut en voir la description dans les *Traités d'horlogerie* de M. Thiouft, du Pere Alexandre, de M. Lepaute, de M. Berthoud. Je dirai seulement que pour avoir une bonne horloge à secondes, la plus simple de toutes, on peut se contenter de 4 roues, de 120, 100, 60, 30 dents, & de 3 pignons de 10 ailes chacun. L'échappement de Graham est celui que je conseillerois, parce qu'il a la propriété de conserver l'huile; encore est-il nécessaire de lui en donner tous les trois ans, ou à peu près.

2462. LES VERGES DE PENDULE qui ne sont composées que d'une simple règle de fer, s'allongent d'environ un cinquième de ligne pour 30 degrés du thermomètre, en sorte qu'étant réglées en été elles peuvent avancer en hiver de 20" par jour; il est donc important pour un astronome d'avoir une verge de pendule qui soit composée de manière à corriger cette dilatation des métaux; on trouvera plusieurs méthodes pour cet effet dans les livres que je viens de citer; voici celle que Harrifon imagina dès 1726 & qui est sans contredit la plus sûre de toutes celles qui ont été proposées. M. Graham l'exécuta en 1740 pour Milord Maclesfield: toutes les horloges de l'observatoire royal d'Angleterre & des meilleurs astronomes de Londres, sont composées sur ce principe; M. Lepaute, Horloger

Composition
du pendule.

(a) Bien des personnes les appellent simplement des *Pendules*, en prenant la partie pour le tout; mais le pendule n'est que le régulateur de l'horloge, (fig. 197); & les astronomes plus exacts dans l'usage des termes, disent souvent une *Horloge à pendule*, & non pas simplement une *Pendule*.

du Roi, & M. Berthoud, à Paris, en ont fait pour un grand nombre d'astronomes & de curieux; elles réussissent de la manière la plus complète (2465).

Dimensions
du pendule
composé.
Fig. 197.

2463. Le pendule composé de 9 verges est représenté dans la figure 197, ou il est supposé coupé par le milieu à cause de sa trop grande hauteur; le ressort de suspension *SR* a 27 lignes depuis la goupille *R* jusqu'à la goupille *S*; mais le point où est ferré le ressort dans une pince de la cage du mouvement est 5 lignes $\frac{1}{2}$ plus bas que la goupille *R*. La traverse *AA* étant de cuivre & les verges de fer *AB* arrêtées chacune par un écrou au-dessus de la traverse de cuivre, il y a 5 lignes $\frac{1}{2}$ de cuivre depuis la goupille *S* jusqu'au dessus de la traverse *AA*. De-là il se trouve 33 pouces 2 lignes de fer jusqu'au bas de la traverse inférieure de cuivre *BB* où les verges de fer sont également arrêtées; le châssis extérieur *AABB* est suspendu au ressort *BS*. Les verges de cuivre 1, 1, sont assemblées en *DD* par une traverse de cuivre qui porte simplement sur la première traverse *BB*; depuis le dessous de la traverse inférieure de cuivre *BB* jusqu'au sommet des verges de cuivre, 1, 1, il y a 32 pouces 3 lignes; c'est sur le sommet ou à l'extrémité supérieure de ces premières verges qu'est appuié le dessous de la traverse de cuivre *FF* qui assemble le second châssis de fer; le sommet de ces verges n'est point arrêté dans la traverse; il est reçu seulement dans deux petites concavités pratiquées dans son épaisseur. Les 2 verges de fer marquées 2, 2, sont vissées & goupillées dans la traverse *FF*, de même que dans la traverse inférieure de cuivre *OO*. A compter du dessous de cette traverse *FF* il y a 31 pouces 7 lignes de fer jusqu'au milieu de la traverse inférieure *OO* où elles sont goupillées pour former avec la traverse supérieure un second châssis, au dedans du premier. Depuis le milieu de l'épaisseur de la traverse inférieure *OO* jusqu'au milieu de la troisième traverse supérieure *GG* qui est appuyée sur les verges de cuivre 3, 3, & qui porte la lentille, il y a 31 pouces 5 lignes

de cuivre ; les secondes verges de cuivre 3, 3, sont goupillées dans leur base *OO*, & elles supportent en haut le dessous de la traverse *GG*, où elles entrent dans deux petites cavités. A cette même traverse *GG* est goupillée la verge de fer *PE* qui descend en passant librement dans les traverses inférieures & qui porte la lentille ; elle a 39 pouces $\frac{1}{4}$ jusqu'au bord inférieur de la lentille ; mais sur cette longueur il y a 35 $\frac{3}{4}$ pouces de fer, & 3 $\frac{1}{2}$ de cuivre, à cause d'une pièce de cuivre *LLMM*, dont nous allons parler. Le diamètre *CE* de la lentille est de 6 pouces 11 lignes, son épaisseur 1 pouce 10 lignes $\frac{1}{2}$; elle pèse 14 livres $\frac{1}{2}$ & la verge composée en pèse 5 $\frac{1}{2}$, le total est de 20 livres.

2464. Suivant les expériences de M. Berthoud, (*Essai sur l'Horlogerie* 1763, 2 vol. in-4°), la dilatation du cuivre est à celle de l'acier, comme 121 est à 74 ; en conséquence de ce rapport il composoit des pendules semblables avec 1297 lignes d'acier & 293 de cuivre ; mais les proportions deviennent différentes dans la description que j'ai donnée (2463). Dans celle-ci la lentille est tenue par dessous & a la liberté de se dilater vers le haut, ce qui exige une compensation ; il y a de plus un ressort de suspension *RS* dont il faut corriger la dilatation ; c'est par expérience qu'il a fallu trouver les dimensions précédentes ; mais elles peuvent varier un peu à cause de l'épaisseur ou du diamètre de la lentille, ou parce que le métal des verges sera plus ou moins forgé & plus ou moins dilatable ; il faudra donc mettre en expérience un pendule construit sur ces principes pour être assuré de son exactitude, ou par le moyen d'une étuve, ou par un examen fait en hiver & en été. On peut rendre d'abord les châssis plus longs que je ne l'ai dit, & diminuer ensuite les verges intérieures de cuivre 3, 3, si l'on trouve que la correction soit trop forte & que le pendule avance quand il fait chaud. Lorsque la différence n'est plus que d'environ 1" par jour, on acheve de régler la compensation par la pièce suivante.

Dilatation
du cuivre &
de l'acier.

La verge de fer *PE* qui porte la lentille est terminée par une chappe de cuivre qui la reçoit, & s'y adapte avec une goupille *CC*, ou *LL*; cette chappe de cuivre est taraudée en *E* & supporte la lentille; lorsqu'on observe que le pendule composé s'allonge en été, ou, dans une étuve d'expérience, on en est quitte pour mettre la goupille *CC* un peu plus bas, par exemple, en *MM*; alors la verge qui porte la lentille se trouve avoir une partie *CM* en fer, laquelle auparavant étoit de cuivre, par conséquent la dilatation totale devient un peu moindre; cette dernière partie de la correction est extrêmement sensible: car en élevant de 3 pouces la place de la goupille on ne fera retarder que d'une seconde par jour le pendule de l'hiver à l'été; ainsi l'on corrigera facilement une erreur d'un dixième de seconde.

De la précision des horloges.

2465. M. Short, à l'occasion du passage de Mercure observé en 1754, assure qu'il avoit trouvé par plusieurs observations que son horloge n'avoit pas varié de plus d'une seconde depuis le 22 Février jusqu'au 6 Mai jour de l'observation (*Philos. transf.* 1753); en sorte qu'avec un pendule semblable il est possible d'avoir une exactitude qui jusqu'alors paroissoit incroyable. Les astronomes d'Angleterre m'ont assuré plusieurs fois qu'on faisoit par ce moyen des horloges à pendule qui ne varioient pas de plus de 5" par année; on doit tout espérer des ressources de l'art, sur-tout après avoir vu la montre marine de M. Harrison ne varier que de 2' en 147 jours de navigation, (*Connoiss. des mouv. cél.* 1765; pag. 240). M. Berthoud & M. le Roi ont exécuté à Paris de semblables ouvrages, & soutiennent la gloire de l'horlogerie en France. Nous voyons que M. Picard en 1672 avoit une horloge qui ne varioit pas de 1" en deux mois, (*Voyage à Uranibourg*, art. VII). Mais quelle que fut dès ce temps-là l'habileté des horlogers de Paris, on ne pouvoit avoir une semblable exactitude que par un hazard bien singulier, ou une égalité de température qui est fort rare; actuellement

l'exactitude de nos horloges est une suite nécessaire des principes sur lesquels elles sont construites.

2466. Lorsqu'on aura perfectionné les horloges à pendule, au point d'être assuré d'une ou deux secondes par année, on aura peut-être un moyen de rechercher les petites inégalités de la rotation de la terre (951).

Elles feront connoître les inégalités de la rotation.

2467. Lorsqu'un astronome est seul pour compter les secondes en observant, il est bon, pour ne pas se tromper, de regarder le cadran des secondes avant & après l'observation. Il est encore important de s'accoutumer à compter si aisément, qu'on puisse marcher, observer, écrire, & même parler, sans cesser de compter les secondes, & sans s'y tromper.

2468. Lorsqu'on a une horloge dont l'échappement a peu de chute, & qui fait trop peu de bruit pour qu'on puisse en entendre les vibrations d'un peu loin, il faut nécessairement avoir un *compteur* ou *valet*, c'est-à-dire, une espèce d'horloge à timbre, composée grossièrement d'un pendule à secondes & de trois roues. La roue qui porte la poulie du poids engrène dans la roue d'échappement; l'arbre de l'échappement porte une autre roue garnie de chevilles des deux côtés, ces chevilles levent alternativement de chaque côté la queue d'un des marteaux des secondes; cette roue porte sur son plan un coq ou un bras, qui à chaque tour, c'est-à-dire, à chaque minute, rencontre la queue du marteau des minutes qui frappe sur un second timbre, & par ce coup double avertit que la minute commence: c'est ainsi que l'on peut entendre de loin les vibrations de l'horloge astronomique, aussi-tôt que le compteur est d'accord avec l'horloge à pendule.

Compteur.

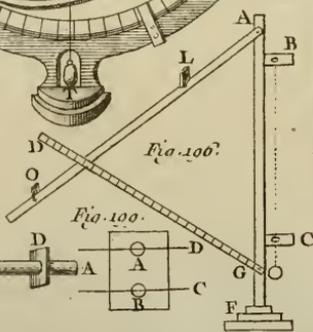
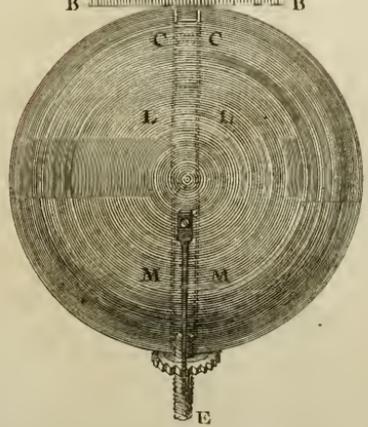
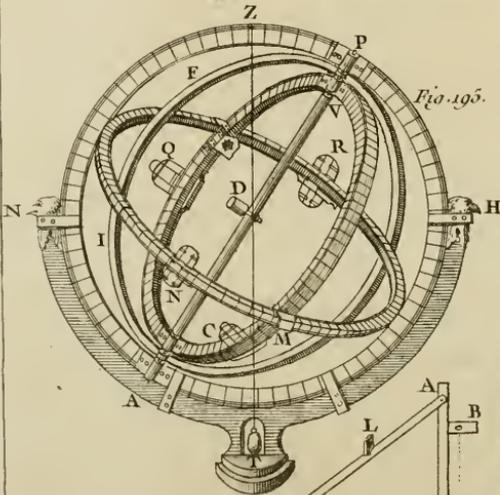
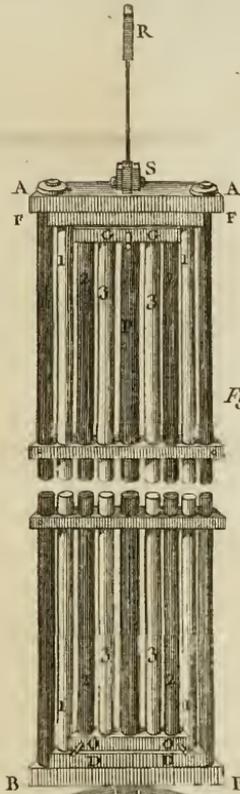
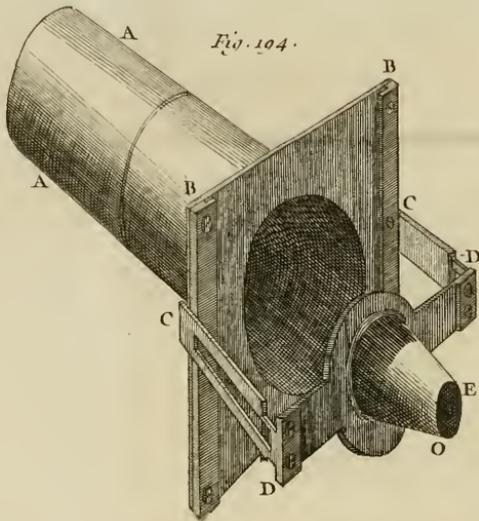
2469. On a souvent proposé de faire servir les horloges à conduire une lunette pour suivre les astres aisément malgré le mouvement diurne; cela seroit très-utile pour dessiner la figure des taches de la lune, pour avoir toujours un astre au centre même de la lunette,

830 ASTRONOMIE, LIV. XIII.

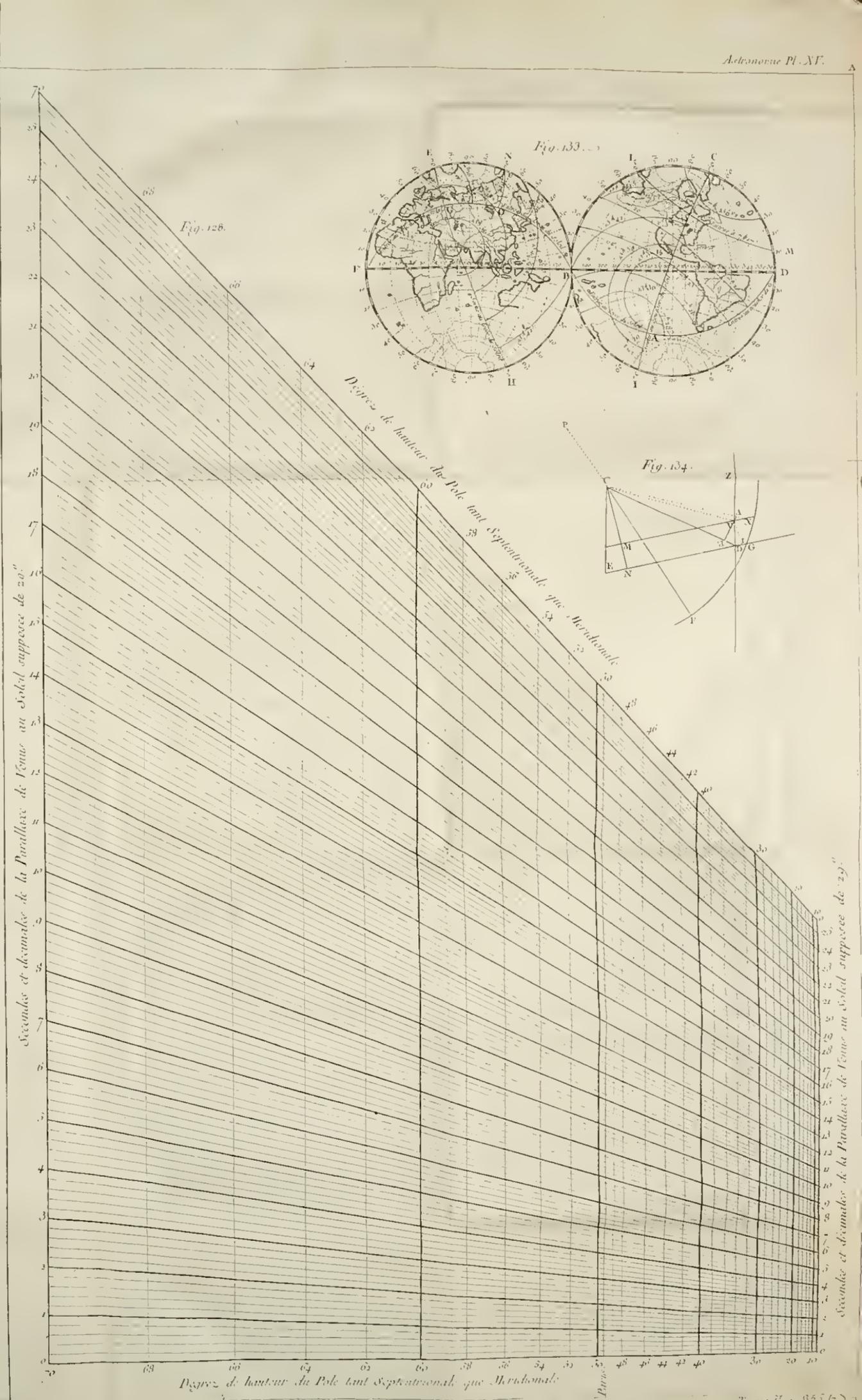
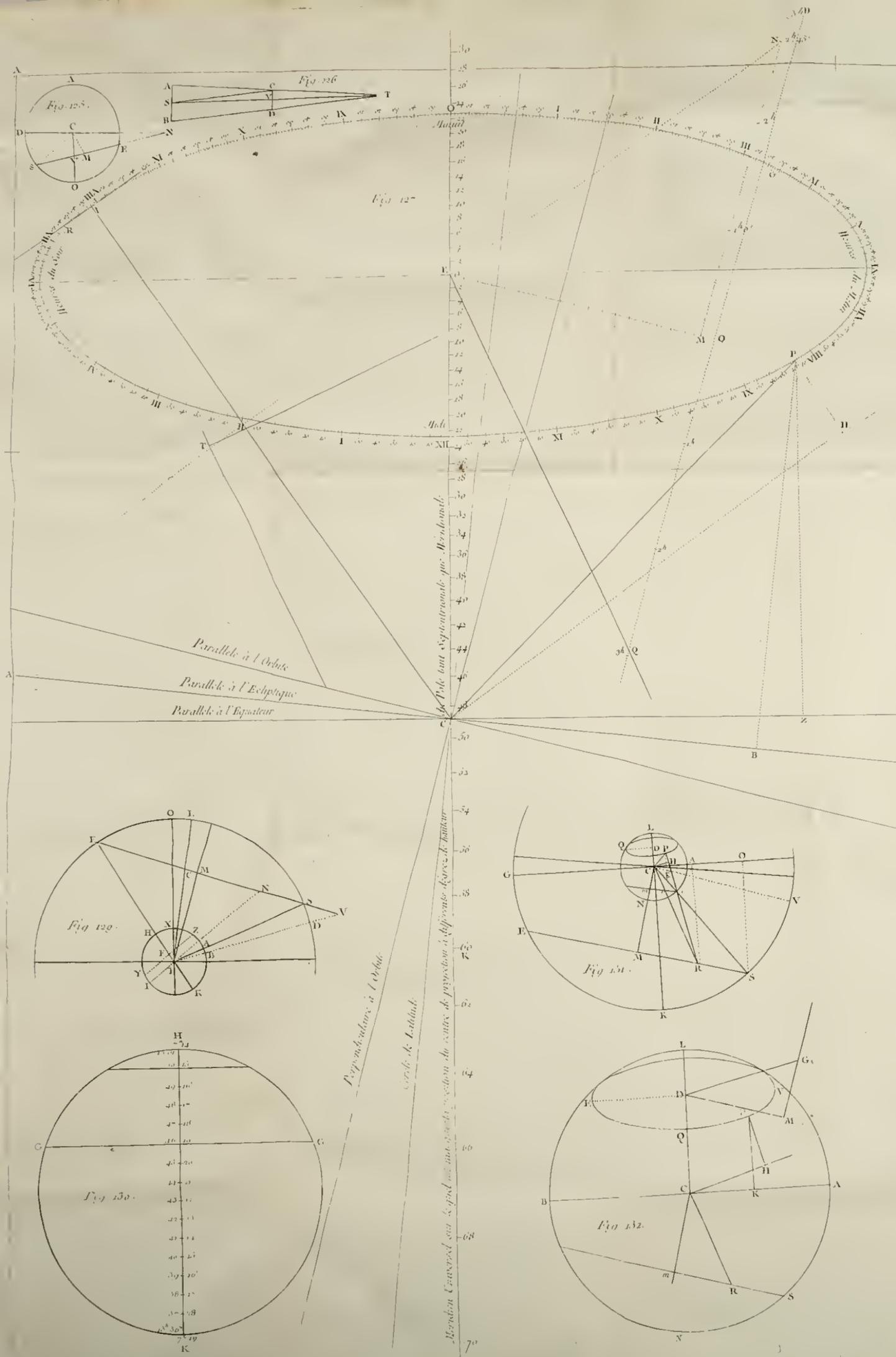
Héliostat. &c. M. Passemant a exécuté plusieurs instrumens semblables, on les appelle HÉLIOSTATES; & il y en a un dans le cabinet de Physique du Roi, près le château de la Meute.

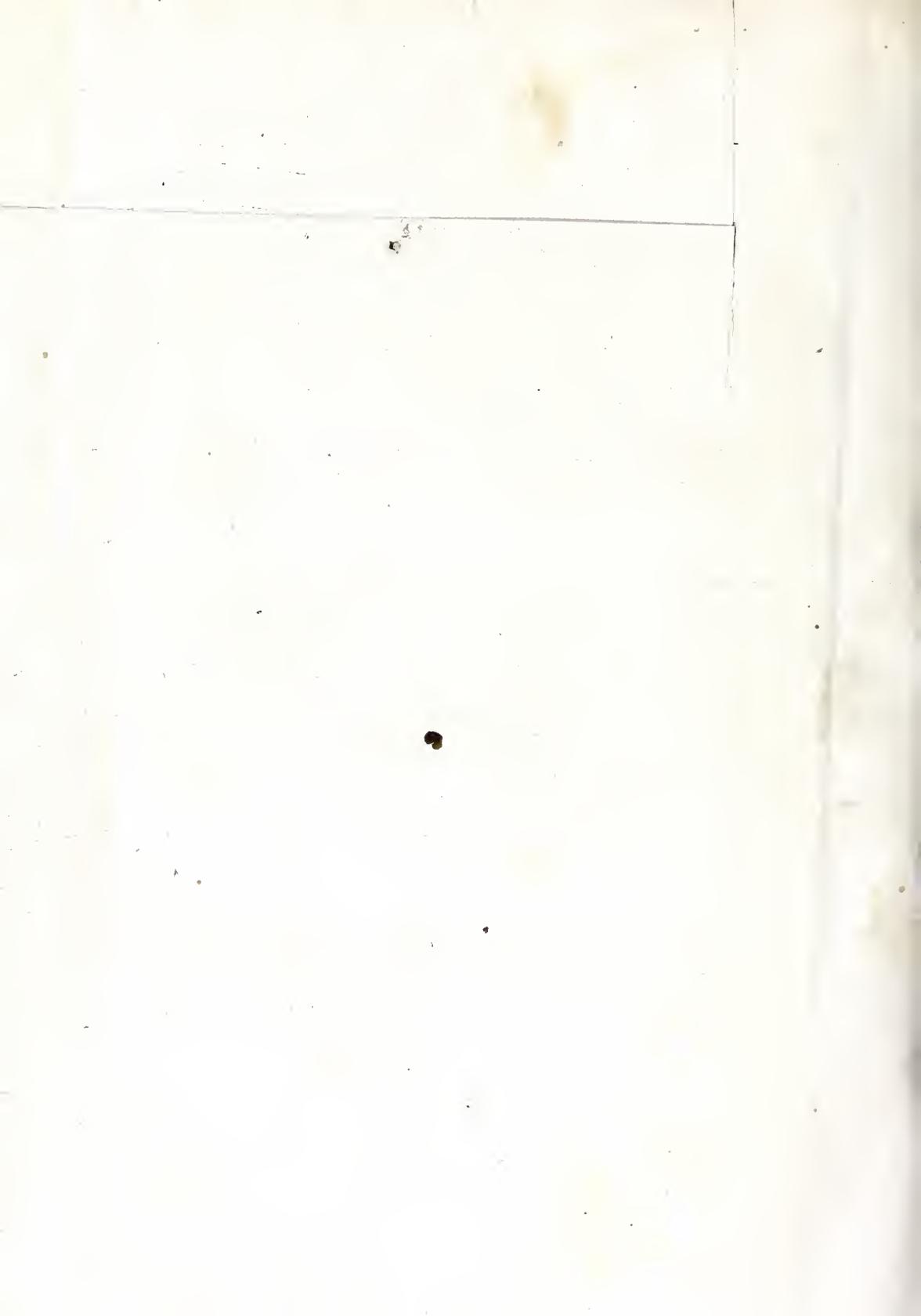
Je finis ici la description des instrumens d'astronomie; il me suffit d'avoir fait connoître ceux qui sont usités actuellement parmi les astronomes; la manière de les construire sera détaillée par celui qui fera la description de l'art des instrumens de mathématiques. Il me reste à expliquer les différentes vérifications qu'on est obligé de faire avant que d'employer ces instrumens, avec leur usage dans l'astronomie, pour donner une connoissance exacte de la pratique des observations; ce sera l'objet du Livre XIV.

FIN DU TOME SECOND.









qui est dentée pour procurer le mouvement de rotation du micromètre. La platine du micromètre porte un collet circulaire ou un bout de tuyau qui est foudé de champ, & que l'on infère dans l'extrémité *B* du télescope; ce collet répond exactement à l'ouverture circulaire *fLaG* de la *fig.* 187: il y a un autre collet *H* qui embrasse le tuyau du télescope à quelques lignes de son extrémité, il y est fixé par des vis & il porte un cercle, ou espèce de roue dont une partie est dentée & le reste solide; cette roue sert à retenir le micromètre par le moyen de trois crochets comme *L*, *K*, qui sont fixés à la grande platine du micromètre & viennent reprendre par-dessous la roue dentée en tournant librement sur sa circonférence; il y a deux de ces crochets qui comme *L*, sont arrêtés par leur base à la platine du micromètre, chacun au moyen d'une vis *M*, qui passe dans la platine du micromètre, & par leur rebord *N* viennent embrasser la roue dentée qui est fixée au tube du télescope.

2444. Le troisième crochet en double équerre que l'on voit en *K*, est plus composé parce qu'il sert au mouvement de rotation que doit avoir le micromètre; il renferme une petite roue ou pignon, dont un pivot est arrêté dans la platine du micromètre, l'autre pivot se termine par une tige d'acier taillée carrément, qui passe hors de la chappe ou du tenon, sur laquelle on place une clef *O*, dont le trou carré s'engage sur la tige & qui sert à faire tourner la petite roue au moyen d'une tringle *PQ*.

Mouvement
de rotation.

2445. La chape qui est représentée en *K* dans la *fig.* 188, se voit séparément en *R* (*fig.* 189). La partie *S* est celle qui tient à la platine du micromètre; la partie *R* contient le pignon, & la tige *T* est celle où l'on place la clef; la clef brisée qui sert à donner le mouvement est aussi exprimée à part dans la *fig.* 190; c'est une espèce de charnière double formée par deux axes qui se croisent à angles droits & qui sont mobiles chacun sur ses pivots; c'est ainsi que l'on suspend

les boussoles pour leur donner la liberté de se mouvoir en tout sens, & c'est ce qu'on appelle lampe de cardan. Le premier de ces deux axes AX , sert à faire tourner le micromètre, & l'autre axe qui lui est perpendiculaire sert au mouvement de la clef & de la tige qui s'étend jusqu'à la portée de la main de l'observateur. Lorsqu'on tourne la clef & qu'on fait tourner le pignon contenu dans la chappe R (*fig. 189*), la roue dentée VX , étant arrêtée sur le télescope & ne pouvant avoir aucun mouvement, le pignon est obligé de changer de place en roulant sur la circonférence VX , & il fait tourner la platine entière du micromètre sur laquelle le pignon est fixé; par ce moyen l'on place la ligne des centres sur laquelle se meuvent les deux verres, dans la direction de l'objet que l'on veut mesurer, à quelle inclinaison que ce soit, par exemple, pour mesurer la distance de Vénus au bord du soleil, qui en est le plus proche (2131).

Fig. 189.

Mesure de
l'inclinaison.
Fig. 189.

2446. Pour connoître l'inclinaison que donne au micromètre le mouvement du pignon R (*fig. 189*), sur la circonférence dentée VX , le bord de l'équerre se termine en biseau & porte un trait qui sert d'index & marque sur les divisions de la circonférence VX les degrés d'inclinaison; on marque zéro sur cette circonférence quand la platine est située verticalement & que les deux verres ont leurs centres sur une ligne perpendiculaire à l'horizon; car alors les distances que l'on mesure avec ce micromètre sont des portions du vertical; au contraire on marque 90° sur la roue dentée lorsque les deux règles mobiles sont situées horizontalement ou font avec le vertical un angle droit; car alors les lignes qu'on mesure avec le micromètre sont parallèles à l'horizon; on est obligé de connoître cette inclinaison quand on mesure les diamètres de la lune, parce que la ligne des cornes est plus ou moins inclinée à l'horizon, ce qui produit une réfraction plus ou moins grande sur le diamètre de la lune (2246).

2447. Le télescope que nous venons de décrire

avec son micromètre objectif, est celui que le P. Pezanas fit faire à Londres vers 1755, pour l'observatoire de la marine à Marseille; il a deux pieds de foyer & l'objectif en a 40; nous allons en décrire un autre de Dollond, qui n'a qu'un pied de foyer, & dont la structure est un peu différente, il est de 1760; nous abrègerons la description, dont on doit avoir une idée par celle qui précède.

Le micromètre objectif que Dollond avoit coutume d'appliquer à ses télescopes d'un pied est représenté dans la *fig. 193*, il est vu dans une situation renversée; ce qui fait qu'on ne distingue pas les deux platines mobiles. Le cercle *AB* a 2 pouces 5 lignes de diamètre, mesure de Paris, & les verres *C, D*, 1 pouce 11 lignes d'ouverture lorsqu'ils sont réunis. Le cercle de cuivre *ES* a 4 lig. de hauteur pour s'ajuster dans le tuyau du télescope, & la platine fixe du micromètre est arrêtée par plusieurs vis sur ce bout de tuyau qui s'ajuste au télescope.

Héliomètre
d'un pied.
Fig. 193.

Les deux vis *G, H*, sont à 14 lignes de distance l'une de l'autre, elles ont 18 lignes de longueur & 3 lignes de diamètre, & elles portent 42 pas ou filets sur chaque pouce. Ces vis sont appuyées par leur base sur deux pointes *I & K*, fixées dans des tenons qui tiennent sur la plaque fixe du micromètre: elles passent ensuite dans des écrous *L, M*, mobiles, qui conduisent chacun une des deux platines mobiles du micromètre au travers d'une longue ouverture pratiquée dans la platine fixe pour laisser passer les écrous; ces deux vis tournent à contre-sens pour qu'un des écrous puisse monter pendant que l'autre descend.

2448. Chaque tour de vis est divisé en 35 parties par le moyen de l'aiguille qui tourne sur le cadran *N* & qui est fixée carrément sur la tête d'une des vis *X*. Au-dedans de la boîte *OP*, chaque vis porte une roue dentée de 54 dents; ces roues ont 13 lig. de diamètre, elles engrènent l'une dans l'autre, afin qu'une vis ne puisse tourner sans l'autre, & que les deux mouvemens soient contraires, mais égaux.

Pour pouvoir faire marquer les tours de vis sur le cadran Q , tandis que l'aiguille N divise chaque tour en 35 parties, la tige de la vis HX porte un pignon de 14 qui engrène dans une roue de 35, portée sur un pont entre les deux vis; cette roue de renvoi porte un pignon de 5, & engrène dans une roue de 50 dont on voit une portion en Q , par une ouverture de la boîte; cette roue fait un tour quand l'aiguille N en fait 25; & comme la roue qui paroît en Q a sa circonférence divisée en 25 parties, chacune marque un tour des vis G & H : chaque écrou L, M , est précédé par une lame en forme de petit écrou plus mince, qui sert à nettoyer la vis, & à diminuer le jeu, en faisant ressort contre les pas de la vis.

2449. Lorsque les verres CD sont d'accord dans le centre de l'ouverture AB , l'une des platines mobiles qui porte le verre C , tombe sur l'extrémité V de la platine fixe, & l'autre en est éloignée de 13 lignes; mais à mesure qu'on éloigne les verres, la platine du verre C remonte, comme l'indique la ligne ponctuée RS , & la platine du verre D descend pour concourir avec le bord TV de la platine fixe.

Les vis G & H que nous avons représentées à découvert, pour en faire voir la situation & le jeu, sont recouvertes chacune par une petite boîte de cuivre représentée séparément en X (*fig. 191*), qui tient avec plusieurs vis sur le tenon I ou K , & sur la boîte OP qui renferme la cadrature.

Fig. 191.

Dimensions
de cet héliomètre.

2450. Le grand miroir du télescope a 8 pouces $\frac{2}{3}$ de foyer, 2 pouces $\frac{1}{3}$ d'ouverture, & un trou de 9 lig.; le petit miroir a 9 lignes de diamètre, 18 lignes de foyer, il est à 10 pouces $\frac{1}{4}$ du grand miroir, quand on regarde sans héliomètre, & 5 lignes plus près quand le micromètre y est. L'oculaire a 3 pouces 7 lignes de foyer, il est placé 9 lignes en-deçà de la surface du grand miroir, du côté de l'œil; le diaphragme est placé 17 lignes plus loin, il a 6 lignes d'ouverture; le petit oculaire qui a 9 lig. de foyer, est à 2 pouces $\frac{1}{2}$ de l'autre oculaire,

il a 7 lignes d'ouverture ; les deux oculaires ensemble équivalent à un feul qui auroit six lignes de foyer. L'équipage le plus fort a deux oculaires de 2 pouces 4 lig. & de 10 lig. $\frac{1}{2}$ de foyer, à 25 lig. l'un de l'autre ; ils équivalent ensemble à un oculaire de 3 lig. de foyer. L'ocilleton est à 9 lig. du dernier oculaire dans l'équipage le plus foible, & a 6 lig. dans l'équipage le plus fort. L'objectif qui sert de micromètre, a 10 ou 12 pieds de foyer environ.

245 1. L'objectif que l'on applique au télescope, & qui en forme le micromètre, détermine feul la valeur des angles que l'on mesure, par la distance des deux moitiés d'objectif comparée à la longueur focale de cet objectif ; il est vrai que les miroirs accourcissent cette longueur du foyer, puisqu'un objectif de 40 pieds se réduit à un télescope de 2 pieds ; mais les miroirs ne font qu'abrégger le chemin que les rayons ont à faire pour se réunir, fans changer l'angle que les rayons font entre eux ; ainsi l'écartement des deux moitiés d'objectif fera exactement le même pour mesurer le diamètre du soleil, que si ces verres étoient employés à former un simple héliomètre en forme de lunette ordinaire (2435). (*Mém. de Marseille* 1755, pag. 93).

245 2. En effet les miroirs du télescope, aussi bien que les oculaires d'une lunette ordinaire, contribuent à grossir, à étendre les images, mais ils ne changent rien à la mesure des angles, compris entre les différentes parties de l'objet ; on a vu (2435) que dans l'héliomètre simple l'écartement des objectifs, nécessaire pour mesurer le diamètre du soleil, est égal à l'espace même qu'occupe au foyer du verre le diamètre du soleil : quelque nombre d'oculaires qu'on applique à ce foyer pour rendre les rayons plus convergens, on ne change point cet espace absolu, on le voit seulement sous un plus grand angle ; il en est de même de ceux qu'on applique au télescope ; les deux rayons venus parallèlement par les centres des objectifs, détermineront encore l'angle sous lequel doit paroître la distance

de ces deux rayons ; les miroirs & les oculaires ne feront qu'en dilater les différentes parties, fans en changer l'angle visuel.

2453. De-là vient l'avantage d'appliquer à l'héliomètre un objectif d'un très-long foyer ; les images y sont plus grandes, plus distinctes, plus lumineuses, & par conséquent plus aisées à mesurer exactement ; la distance des objectifs étant plus grande, ils auront plus d'espace à parcourir pour mesurer les angles ; un cinq centième de pouce qui est à peu-près la plus petite quantité dont on puisse s'assurer sur une division, ne répond qu'à 51''' avec un objectif de 40 pieds (2447).

Méthode
pour essayer
des verres.

2454. Comme il est extrêmement difficile d'employer, de faire mouvoir & d'essayer une lunette de 40 pieds, M. Short se servoit d'un télescope ; en effet les objectifs étant adaptés à un télescope qui en raccourcit le foyer, on juge de la bonté du verre par la netteté avec laquelle on voit l'objet, & l'on estime la longueur de son foyer par la quantité dont il faut rapprocher le petit miroir du grand, pour voir distinctement, lorsque l'objectif y est adapté.

Attentions
nécessaires.

2455. Pour reconnoître si les deux moitiés d'objectif sont bien disposées sur leurs platines, si elles sont bien dans le même plan, si elles ne sont ni trop éloignées ni trop voisines de l'axe du mouvement ; il faut voir si quand elles sont réunies en un seul objectif elles forment une seule image, sans aucune duplication ni confusion ; pour cela on regarde une petite étoile, les deux verres étant d'abord écartés, on la voit aussitôt double ; mais en rapprochant les deux verres, les deux étoiles doivent se réunir en une seule, qui est exactement de même grandeur que chacune des deux étoiles que l'on voyoit auparavant ; si on les apperçoit passer l'une à côté de l'autre sans se toucher ou sans se confondre parfaitement, on en conclut que les verres ont besoin d'être un peu changés par le moyen des vis de pression : on verra par diverses épreuves, s'il faut les serrer ou les relacher, les éloigner ou les rapprocher ;

peut-être sera-t-on obligé d'user les verres pour pouvoir les approcher l'un de l'autre, ou d'augmenter l'épaisseur des lames qui les séparent pour écarter leurs centres, ce qui seroit nécessaire si l'on avoit trouvé que les images se croisent & se débordent, en sorte que l'image rendue par le verre supérieur, soit plus basse que celle du verre inférieur; mais avant que de recourir à ces remèdes qui sont plus difficiles, il faudra s'assurer parfaitement que la duplicité d'image ne vient pas du plan dans lequel sont les verres, car on pourroit la corriger en lâchant les vis de pression, ou en éloignant de la platine un des côtés du verre, par l'épaisseur d'un papier ou d'un corps encore plus mince.

2456. Le plus grand inconvénient du micromètre objectif dans le télescope, est la parallaxe optique des objets que l'on regarde : je suppose que les deux images du soleil se touchent parfaitement lorsqu'elles sont au milieu du champ, & sur l'axe même du télescope; les deux bords se quitteront lorsque le soleil s'éloignera du milieu, ou que l'œil de l'observateur changera, parce que le rayon visuel passera entre les deux images; quelquefois même il arrive que sans changer la situation de l'œil ni de l'objet, on voit les deux bords de l'objet se mordre & se quitter alternativement. Pour éviter, autant qu'il est possible, le danger de cette parallaxe, il faut avoir une croisée de fils au foyer des verres, & n'observer le contact des objets que quand on les voit sur cette croisée, c'est-à-dire, au milieu du champ du télescope; il faut aussi mettre à l'extrémité du tuyau des oculaires un *ailleton* ou un très-petit trou qui assujétisse tellement l'œil au même point, qu'on ne puisse jamais voir l'objet obliquement.

Parallaxe
optique.

Le réticule
& l'ailleton
y remédient.

2457. Il arrive aussi par l'effet de la chaleur sur le tuyau que le diamètre du soleil paroît plus grand le soir que le matin, & l'on est obligé alors de rapprocher le petit miroir du grand pour rendre les images plus nettes, & retrouver dans le diamètre du soleil les mêmes parties. Ainsi le même nombre de parties ne

vaut pas toujours le même nombre de secondes , & il faut tenir compte de cette différence dans les comparaisons que l'on fait entre le diamètre du soleil & les autres quantités mesurées, ou ne comparer entre elles que des mesures faites à un même degré de chaleur. *Mém. présentés à l'acad.* V. 375.

2458. J'aurois souhaité de parler ici des instrumens propres à observer sur mer, & sur-tout de l'octant à réflexion; mais ce livre n'est déjà que trop long: voyez le *Traité de Navigation* de M. Bouguer, édition de M. de la Caille, l'*Optique* de Smith, & le P. Pezenas, (*Mém. de Math. & de Phys. redigés à l'observatoire de Marseille année 1755, première partie; à Avignon*).

DES HORLOGES ASTRONOMIQUES.

2459. Pour connoître le temps vrai d'une observation (960), l'on n'avoit autrefois d'autre moyen que d'observer la hauteur du soleil ou d'une étoile (1030). Ce fut vers l'an 1300 que commença l'usage des horloges à roues dentées, (voyez le *Traité d'Horlogerie* de M. le Paute, 1755 in-4°. chez Samson); mais ce ne fut que deux siècles après qu'elles furent assez communes pour être employées par des astronomes.

2460. Dans les observations de Waltherus faites vers l'an 1500 & publiées par Schoner en 1544, on lit, (pag. 50) que l'horloge dont il se servoit étoit très-bien réglée, que d'un midi à l'autre elle se retrouvoit parfaitement d'accord avec le soleil, & que les temps marqués sur l'horloge étoient presque les mêmes que ceux qu'on tiroit du calcul. Je crois qu'il ne faut entendre ceci que de la précision d'environ une minute.

Tycho-Brahé avoit 4 horloges qui marquoient les minutes & les secondes de temps; la plus grosse n'avoit que trois roues; dont la première & la plus grande avoit 3 pieds de diamètre, & 1200 dents; on se servoit toujours de deux horloges à la fois. Hévélius employa aussi les meilleures horloges de son temps; mais

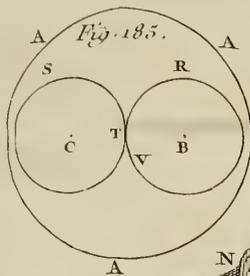


Fig. 186.

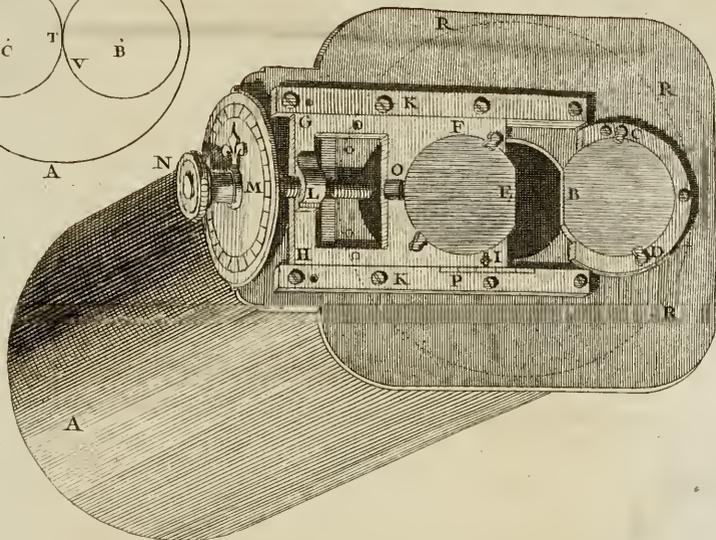
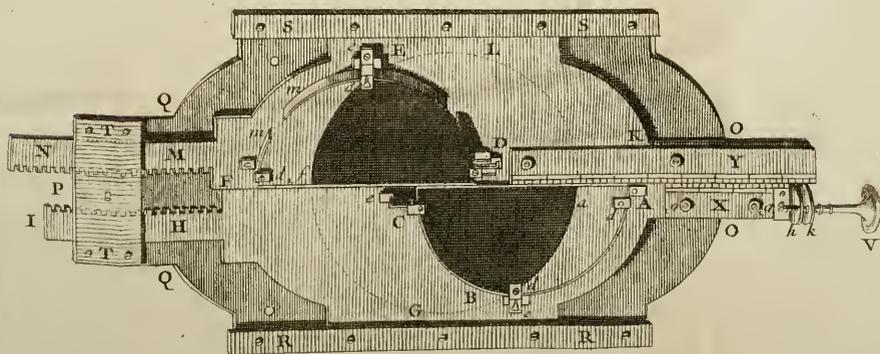


Fig. 187.



& Jurin, est rapporté dans Smith, & il suffit réellement pour ces sortes d'expériences. Ayant placé un cercle de papier d'un pouce de diamètre à la distance de 2674 pouces de l'oculaire dans la direction du telescope, on tire 2 lignes parallèles sur un papier à un pied d'intervalle l'une de l'autre, on place ces 2 lignes à côté du telescope, on les regarde à la fois des deux yeux, un œil dans le telescope & l'autre en dehors, on fait rapprocher peu-à-peu les deux lignes de l'œil jusqu'à ce qu'elles paroissent toucher les deux bords du cercle d'un pouce, c'est-à-dire, que les 12 pouces vus à l'œil nud, paroissent de la même grandeur qu'un pouce vu dans le telescope; & dans cet état l'on mesure la distance des deux parallèles à l'œil; si elle se trouve de 142 pouces seulement, l'angle visuel du telescope est réellement augmenté dans le rapport composé de 12 à 1, & de 2674 à 142, c'est-à-dire, 226 fois, c'est ainsi que Hauksbée reconnut que son telescope de $3\frac{1}{4}$ pieds de foyer augmentoit 226 fois le diamètre des objets.

2428. M. Pound raconte (*Phil. transf. n^o. 378*), Comparaison avec la lunette de 123 pieds. qu'il avoit comparé conjointement avec M. Bradley un telescope de M. Halley, dont le foyer n'avoit pas 5 pieds $\frac{1}{4}$, avec le fameux objectif d'Huygens, qui avoit 123 pieds de foyer; ils trouverent que le telescope grossissoit autant de fois & rendoit les objets aussi distincts, quoiqu'ils ne fussent pas aussi clairs & aussi lumineux que dans la lunette; ils attribuoient cette différence en partie à l'ouverture qui étoit plus petite dans le telescope que dans la lunette d'Huygens, & en partie à certaines petites taches du miroir qui n'avoient pu se polir aussi bien que le reste. Malgré cette différence de lumière dans les objets, ils voyoient avec le telescope tout ce qu'ils avoient vu avec la lunette d'Huygens.

2429. Le telescope qui avoit été travaillé par Hauksbée, quoiqu'il eût 3 pieds $\frac{1}{2}$ de foyer, grossissoit 226 fois, & par conséquent différoit peu de celui de

Halley, quoique celui-ci eût près de 5 pieds $\frac{1}{4}$ de foyer ; en employant l'oculaire qui le faisoit grossir 226 fois, on voyoit avec une clarté parfaite les plus petites taches de la lune dans son premier croissant, les bandes de Jupiter & le trait noir de l'anneau de Saturne : pour voir ce dernier objet on lui donnoit une ouverture de 3 pouces $\frac{1}{2}$ ou 4 pouces ; mais lorsque le temps étoit obscur il falloit, pour mieux voir les objets terrestres, laisser à découvert la surface entière du miroir qui avoit quatre pouces $\frac{1}{2}$ de diamètre mesure d'Angleterre.

2430. Dans un miroir exactement sphérique il n'y a que les rayons voisins du centre qui se réunissent exactement à un même foyer, les rayons des bords s'en écartent sensiblement ; c'est ce qui fait qu'un miroir de 2 pieds de foyer ne peut pas avoir plus de 5 $\frac{1}{2}$ pouces de diamètre. Short est celui qui est parvenu à donner à ses télescopes la plus grande ouverture (2422) ; mais la figure de ses miroirs ne doit pas être sphérique ; ils ne supporteroient pas des ouvertures aussi larges, ils auroient des aberrations & une confusion trop sensibles.

2431. Il est possible d'étendre cet art beaucoup plus loin, il n'est pas encore à sa perfection, & probablement la force des télescopes augmentera de plus en plus ; si jamais l'industrie des artistes, la curiosité des savans, & la puissance des Souverains vont assez loin pour faire entreprendre un télescope qui ait quelques pieds de diamètre & qu'on y réussisse, nous verrons peut-être dans le ciel des choses toutes nouvelles.

Polémoscope. 2432. On peut regarder comme une dépendance du télescope le *polémoscope* d'Hévélius, (*Selenog. pag. 28*) ; c'est un instrument qui a deux réflexions & deux réfractions, il sert à observer les objets situés derrière l'observateur ou de côté ; on en applique quelquefois à des instrumens d'astronomie pour observer au zénit d'une manière plus commode, comme on emploie des miroirs plans dans l'octant des marins, pour faire toucher en

apparence les images des deux objets dont on observe la distance (2458).

HÉLIOMÈTRE OU MICROMÈTRE OBJECTIF.

2433. L'HÉLIOMÈTRE ou micromètre objectif est une des plus belles inventions modernes, & des plus utiles pour l'astronomie, aussi bien que celle des verres achromatiques ; on n'auroit pas cru il y a 30 ans qu'il restoit à trouver deux choses aussi curieuses & aussi importantes, & qu'on les trouveroit sitôt. M. Bouguer est le premier qui nous ait appris la manière de faire un micromètre objectif, (*Mém. acad.* 1748, pag. 11). Il l'appella HÉLIOMÈTRE ou ASTROMÈTRE, parce que cet instrument lui servit d'abord à mesurer exactement le diamètre du soleil.

2434. On voit dans la *fig.* 186 un héliomètre monté sur un bout de tuyau *A* qui fait l'extrémité d'une lunette de 18 pieds, dont je me fers depuis 1753 ; *B* est un des deux objectifs de 18 pieds de foyer, il est logé dans une feuillure circulaire de cuivre, collé avec du mastic & recouvert par deux têtes de vis *C* & *D* ; le verre mobile *E* qui est égal à l'autre, de même ouverture & de même foyer, est porté dans un châssis *FGHI* mobile entre deux coulisses *K* & *K*, formées en queue d'aronde ; ce châssis est taraudé en *L* & reçoit une vis *NMLO* dont la tête est arrêtée en *M* sur la platine fixe. Lorsqu'on tourne la tête de la vis par le moyen de la rosette *N*, le châssis qui porte le verre *E* est obligé de s'approcher du verre dormant *B*, ou de remonter vers *L* jusqu'à ce qu'il rencontre l'extrémité de la vis en *O* ; c'est le terme de son plus grand écartement. Le châssis mobile porte sur le côté en *I* un trait de burin qui sert d'index, & qui marque sur une petite échelle *P* les tours de la vis, & l'écartement des deux objectifs.

Pl. XXVI.
Fig. 186.

Le châssis mobile est évidé entre *L* & *O* pour qu'il soit plus léger ; mais afin que la vis ne se rouille pas à

Fig. 186.

l'humidité de l'air, on la recouvre d'une plaque de cuivre qui tient avec deux vis sur les coulisses K, K ; on doit aussi recouvrir l'intervalle EB qui est entre les deux verres avec un papier noir ou un morceau de drap, pour empêcher l'introduction des rayons; qui ne passeroient point au travers des objectifs.

2435. L'effet du micromètre objectif consiste à donner deux lunettes dans un seul tuyau & avec un seul oculaire; le cercle RRR marque la largeur du tuyau de la lunette vers l'objectif, ce tuyau va en diminuant vers l'oculaire, où l'on peut le rétrécir à volonté; car l'on n'a pas besoin d'avoir un grand champ dans cette sorte de lunette.

Fig. 185.

On voit dans la fig. 185 un cercle AAA qui représente le champ de la lunette ou le cercle visible au foyer commun des deux objectifs & de l'oculaire; ST est un cercle qui représente l'image du soleil formée par l'un des objectifs de l'héliomètre; RV est l'image que donne l'autre objectif. Quand on veut mesurer le diamètre du soleil on approche les deux verres jusqu'à ce que les deux images se touchent en un point T ; & l'écartement des deux objectifs, évalué en secondes (2532), donne la distance des deux centres C & B , c'est-à-dire, le diamètre du soleil; cet écartement des objectifs est toujours égal au diamètre de l'image qui se forme à leur foyer.

Lorsqu'un héliomètre est fort long il seroit très-utile de pouvoir approcher ou éloigner les objectifs l'un de l'autre, sans cesser de regarder dans la lunette; cela se peut faire avec une tringle qui se termineroit par un pignon & qui engrèneroit dans une roue de champ fixée sur la tête de la vis; j'en ai donné la figure dans les *Mém. de l'acad.* 1754, pag. 597.

Avantages de l'héliomètre.

2436. L'invention de M. Bouguer a trois avantages considérables sur les micromètres ordinaires (2358); il donne un moyen d'observer le diamètre d'un astre malgré le mouvement diurne; en effet, un astre qui est sur les fils d'un micromètre n'y reste qu'un instant, & il

faudroit pouvoir observer les deux bords & les deux fils à la fois, ce qui est très-difficile, au lieu qu'avec l'héliomètre quand les deux images se touchent, elles restent toujours en contact, quel que soit le mouvement de la sphère, celui de la lunette, ou de l'œil, & l'on a tout le temps de vérifier & de constater l'exactitude de la mesure. Les micromètres ordinaires ne peuvent s'appliquer à de grandes lunettes pour mesurer les diamètres du soleil ou de la lune, parce que le champ de ces lunettes ne peut contenir 30' de diamètre; mais le micromètre objectif mesure les astres lors même que le champ de la lunette n'en contient qu'une petite partie. Enfin les micromètres nous font voir les deux bords du soleil ou de la lune sur les bords de la lunette, au lieu que le micromètre objectif nous les donne toujours au centre & sur l'axe même de la lunette, où l'on peut faire toucher les deux images. On verra la vérification & l'usage de cet héliomètre avec ceux des micromètres ordinaires, 2519 & suiv.

Héliomètre appliqué au Télescope.

2437. L'INVENTION de l'héliomètre faite par M. Bouguer, fut appliquée en Angleterre aux télescopes, comme je le fus par une lettre de Short à Don Georges Juan, écrite au mois de Janvier 1754; mais ce fut d'une manière un peu différente; elle consiste à partager un objectif en deux parties égales, que l'on fait mouvoir en sens contraire, & que l'on place à l'extrémité d'un télescope; Short & Dollond furent les premiers qui en firent construire, & ils en attribuèrent la première invention à Savery; Short assure que cette invention avoit été déposée en 1743 à la société royale, (*Philos. transf. tom. 48. Mémoires de Marseille année 1755*); mais du moins cette invention ne fut répandue & employée en Angleterre qu'après M. Bouguer, à peu-près comme il étoit arrivé à l'occasion du micromètre de M. Auzout (2349).

Deux moitiés
d'objectif.
Fig. 187.

2438. Les demi-cercles ABC , DEF (fig. 187), représentent les deux moitiés de l'objectif, qui se meuvent parallèlement, le long de la ligne AF ; le segment ABC est fixé sur une platine de cuivre $AGHI$, & le segment DEF sur une autre platine $KLMN$; ces deux platines se terminent chacune par une crémaillère HI & MN dont les dentures se regardent : un pignon fixé vers P , sous un coq à l'extrémité de la monture de l'héliomètre ou de la platine qui lui sert de base, engrène dans les deux crémaillères, en sorte que l'une montant l'autre est forcée de descendre, pour qu'elles aient des mouvemens égaux, en sens contraire, & que les centres des deux portions d'objectifs soient toujours l'un & l'autre à même distance de l'axe du télescope. On fait tourner le pignon P par le moyen d'une tringle Q (fig. 188).

2439. Les deux platines AGH , KLM qui portent les verres, glissent sur une platine fixe & plus grande $OSSQRRRO$, qui forme l'assemblage de la pièce entière & qui s'adapte au télescope; cette platine du fond porte deux coulisses RR , SS , entre lesquelles se meuvent les deux platines mobiles; ces deux coulisses doivent être parfaitement parallèles à la ligne AF sur laquelle se meuvent les deux verres. Afin que les centres des verres soient toujours maintenus sur cette même ligne AF , le coq ou la chappe de cuivre TT fixée sur la grande platine, & qui porte le pignon P , reçoit aussi les crémaillères des deux platines & les assujétit contre le pignon, pour empêcher qu'elles ne s'écartent l'une de l'autre. Le mouvement se communique aux deux crémaillères par le moyen du pignon qui est en P . Les deux crémaillères tiennent aux platines des verres, & ont le même mouvement; c'est pourquoi les divisions qu'on y voit marquent le mouvement des verres; la règle Y est divisée en pouces & dixièmes de pouces Anglois; chaque trait qu'on voit sur le bord de cette règle marque un vingtième de pouce; la règle X doit occuper 24 divisions de la règle Y ,

Mesure de
leur distance.

& être divisée en 25 parties, suivant la méthode de Vernier (2343); par ce moyen elle subdivise en 25 parties chaque vingtième de pouce, c'est-à-dire; qu'elle donne en cinq centièmes parties de pouce, la distance d'un verre à l'autre.

2440. L'arc de Vernier *X*, est attaché sur l'une des platines mobiles *XAGHI* par deux vis *gg*, qui passent dans des ouvertures ovales, pour avoir la facilité de faire concourir & coïncider les divisions, quand les verres sont bien d'accord & ne donnent qu'une seule image de l'objet; mais ces vis *gg* doivent être ferrées dans l'usage ordinaire du micromètre objectif. Le vernier porte aussi une oreille *h*, perpendiculaire à son plan, qui sert d'écrou à la vis *V*; celle-ci tourne dans une oreille *k*, fixée à la platine mobile & qui arrête le collet de la vis, de sorte que quand la vis tourne, l'écrou *h* est obligé de se mouvoir & entraîne avec lui l'arc de Vernier, lorsqu'on est obligé de lui donner un petit mouvement pour accorder l'index avec la réunion des images (2455).

Lorsque les deux segmens de verre concourent ensemble pour ne former qu'un seul verre, un seul centre, une seule image, ils sont compris l'un & l'autre dans la circonférence *LaBGf*, qui désigne l'ouverture du telescope, & celle de la grande platine fixe *OOQQ*, sur laquelle glissent les deux platines des verres. Quand les deux verres sont éloignés du centre du telescope, comme on le voit dans la figure, il n'y a plus qu'une portion *CBa*, *DEf*, de chaque verre qui réponde à l'ouverture du telescope, & par laquelle on puisse voir les objets; ce sont ces deux parties de chaque demi-cercle qu'on a teinté plus fortement dans la figure, pour indiquer l'obscurité de l'intérieur du tuyau; le reste des verres, c'est-à-dire, les segmens *ABa* & *FEf* portent sur le cuivre de la grande platine & ne peuvent servir à la vision.

2441. Les verres sont arrêtés sur leurs platines, chacun par trois petites équerres doubles, de cuivre, Comment
on assujétit
les verres.

où il y a des vis & un ressort à chacune : une des vis de chaque équerre telle que *ed*, sert à la fixer sur la platine ; la seconde *e*, sert à contenir le verre horizontalement, la troisième *d* à presser sur le verre pour l'assujétir sur la platine ; les vis qui retiennent les verres horizontalement, c'est-à-dire, parallèlement à la platine ; telles que *ee*, buttent contre des ressorts tels que *mm* qui entourent la circonférence des verres & les retiennent par leur épaisseur ; ces ressorts font une pression modérée & constante, qui ne gêne point les verres. Les équerres *A* & *F*, n'ont point de vis pour presser horizontalement, parce qu'il suffit que les verres soient pressés d'un côté par les équerres *C* & *D*, qui ont chacune dans leur montant une vis horizontale ou parallèle aux platines, & qui presse aussi contre des ressorts, comme les vis des équerres *B* & *E*.

2442. Les verres sont appuyés le long de leur diamètre ou de la ligne *YF* contre de petites lames de cuivre mises de champ & soudées sur le bord intérieur de chacune des platines mobiles ; pour que cette épaisseur de deux petites lames, ne forme pas une distance entre les centres des deux verres, on peut les user chacun de l'épaisseur d'une de ces lames, afin qu'étant l'un vis-à-vis de l'autre, quoique séparés par l'épaisseur des deux lames ils ne fassent qu'un seul objectif : il est vrai qu'une petite partie de cet objectif est interceptée le long du diamètre, mais les objets ne sont pas moins visibles & moins distincts.

Héliomètre
monté.
Pl. XXVII.
Fig. 188.

2443. Le télescope garni de son micromètre objectif, est représenté dans la fig. 188 ; *AB* est le tuyau du télescope, *CD* est la platine fixe du micromètre (2439), vue par dessous ; *EE* est un *chercheur* ou une petite lunette qui a un grand champ & qui est destinée à trouver plus facilement les objets que l'on veut observer ; *F* est le tuyau des oculaires, *G* la vis qui sert à changer la distance du petit miroir suivant la vue de l'observateur ou la distance de l'objet (2414) ; *HH* est la circonférence de l'extrémité du tube du télescope, qui

