

**Grundkurs Mathematik II****Arbeitsblatt 50****Die Pausenaufgabe**

AUFGABE 50.1. Sei  $K$  ein Körper und sei  $K[X]$  der Polynomring über  $K$ . Wie lautet das Ergebnis der Division mit Rest, wenn man ein Polynom  $P$  durch  $X^m$  teilt?

**Übungsaufgaben**

AUFGABE 50.2. Setze in das Polynom  $2X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{2}{5}X + \frac{3}{4}$  die Zahl  $\frac{2}{3}$  ein.

AUFGABE 50.3. Setze in das Polynom  $2X^4 + X^3 - 3X^2 + X + 5$  die Zahl  $\sqrt{2}$  ein.

AUFGABE 50.4. Schreibe das Polynom

$$X^3 + 2X^2 - 3X + 4$$

in der neuen Variablen  $U = X + 2$ .

AUFGABE 50.5.\*

(1) Berechne das Produkt

$$(2 - 3X + X^2) \cdot (-5 + 4X - 3X^2)$$

im Polynomring  $\mathbb{Q}[X]$ .

(2) Berechne das Produkt

$$(2 - 3\sqrt{2} + \sqrt{2}^2) \cdot (-5 + 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2}^2)$$

in  $\mathbb{R}$  auf zwei verschiedene Arten.

AUFGABE 50.6. Sei  $K$  ein Körper und sei  $K[X]$  der Polynomring über  $K$ . Es sei  $a \in K$  ein fixiertes Element. Bestimme den Kern des Einsetzungshomomorphismus

$$K[X] \longrightarrow K, X \longmapsto a.$$

## AUFGABE 50.7.\*

Man gebe ein Polynom  $P \in \mathbb{Q}[X]$  an, das nicht zu  $\mathbb{Z}[X]$  gehört, aber die Eigenschaft besitzt, dass für jede ganze Zahl  $n$  gilt:  $P(n) \in \mathbb{Z}$ .

AUFGABE 50.8. Bestimme die Hintereinanderschaltungen  $\varphi \circ \psi$  und  $\psi \circ \varphi$  für die Abbildungen  $\varphi, \psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch

$$\varphi(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \text{ und } \psi(x) = x^2 + 5x - 3$$

definiert sind.

AUFGABE 50.9. Bestimme die Hintereinanderschaltungen  $\varphi \circ \psi$  und  $\psi \circ \varphi$  für die Abbildungen  $\varphi, \psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch

$$\varphi(x) = x^4 + 3x^2 - 2x + 5 \text{ und } \psi(x) = 2x^3 - x^2 + 6x - 1$$

definiert sind.

AUFGABE 50.10. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung (also das Einsetzen eines Polynoms in ein weiteres) von zwei Polynomen wieder ein Polynom ist.

## AUFGABE 50.11.\*

Es seien

$$f, g, h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen.

a) Zeige die Gleichheit

$$(h \cdot g) \circ f = (h \circ f) \cdot (g \circ f).$$

b) Zeige durch ein Beispiel, dass die Gleichheit

$$(h \circ g) \cdot f = (h \cdot f) \circ (g \cdot f)$$

nicht gelten muss.

AUFGABE 50.12. Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und es sei  $P(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i$  eine Polynomfunktion. Es sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge in  $K$  mit Grenzwert  $x$ . Zeige durch Induktion über  $d$ , dass dann auch die durch

$$y_n := P(x_n)$$

definierte Folge konvergiert, und zwar gegen  $P(x)$ .

AUFGABE 50.13. a) Für welche reellen Polynome  $P \in \mathbb{R}[X]$  ist die zugehörige polynomiale Abbildung

$$(\mathbb{R}, 0, +) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0, +), x \longmapsto P(x),$$

ein Gruppenhomomorphismus?

b) Für welche reellen Polynome  $Q \in \mathbb{R}[X]$  ist allenfalls 0 eine Nullstelle und die zugehörige polynomiale Abbildung

$$(\mathbb{R}^\times, 1, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}^\times, 1, \cdot), x \longmapsto Q(x),$$

ein Gruppenhomomorphismus?

AUFGABE 50.14. Führe in  $\mathbb{Q}[X]$  die Division mit Rest „ $P$  durch  $T$ “ für die beiden Polynome  $P = 3X^4 + 7X^2 - 2X + 5$  und  $T = 2X^2 + 3X - 1$  durch.

AUFGABE 50.15.\*

Führe in  $\mathbb{Z}/(5)[X]$  die Division mit Rest „ $P$  durch  $T$ “ für die beiden Polynome  $P = X^3 + 4X^2 + 3X + 4$  und  $T = 3X^2 + 2X + 1$  durch.

AUFGABE 50.16. Führe in  $\mathbb{Z}/(7)[X]$  folgende Polynomdivision aus.

$$X^4 + 5X^2 + 3 \text{ durch } 2X^2 + X + 6.$$

AUFGABE 50.17. Führe in  $\mathbb{Z}/(7)[X]$  die Division mit Rest „ $P$  durch  $T$ “ für die beiden Polynome  $P = 5X^4 + 3X^3 + 5X^2 + 3X + 6$  und  $T = 3X^2 + 6X + 4$  durch.

AUFGABE 50.18. Es sei  $K \subseteq L$  eine Körpererweiterung und seien  $P, T \in K[X]$  Polynome. Zeige, dass es für die Division mit Rest „ $P$  durch  $T$ “ unerheblich ist, ob man sie in  $K[X]$  oder in  $L[X]$  durchführt.

AUFGABE 50.19. Vergleiche die Division mit Rest in  $\mathbb{Z}$  und in  $K[X]$  ( $K$  ein Körper).

AUFGABE 50.20.\*

Zeige, dass

$$z = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{2}}$$

eine Nullstelle des Polynoms

$$X^3 + 3X + 2$$

ist.

AUFGABE 50.21.\*

Es sei

$$P = X^3 + bX^2 + cX + d$$

ein normiertes Polynom über einem Körper  $K$ . Es seien  $u, v, w$  drei (verschiedene) Zahlen aus  $K$ . Zeige, dass diese drei Zahlen genau dann Nullstellen von  $P$  sind, wenn sie das Gleichungssystem

$$uvw = -d,$$

$$\begin{aligned} uv + uw + vw &= c, \\ u + v + w &= -b, \end{aligned}$$

erfüllen.

AUFGABE 50.22.\*

Bestimme die  $x$ -Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen der beiden reellen Polynome

$$P = X^3 + 4X^2 - 7X + 1$$

und

$$Q = X^3 - 2X^2 + 5X + 3.$$

AUFGABE 50.23. Sei  $K$  ein Körper und sei  $K[X]$  der Polynomring über  $K$ . Zeige, dass jedes Polynom  $P \in K[X]$ ,  $P \neq 0$ , eine Produktzerlegung

$$P = (X - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (X - \lambda_k)^{\mu_k} \cdot Q$$

mit  $\mu_j \geq 1$  und einem nullstellenfreien Polynom  $Q$  besitzt, wobei die auftretenden verschiedenen Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  und die zugehörigen Exponenten  $\mu_1, \dots, \mu_k$  bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt sind.

AUFGABE 50.24.\*

Sei  $K$  ein Körper und sei  $K[X]$  der Polynomring über  $K$  und sei  $P \in K[X]$  ein Polynom, das eine Zerlegung in Linearfaktoren besitze. Es sei  $T$  ein Teiler von  $P$ . Zeige, dass  $T$  ebenfalls eine Zerlegung in Linearfaktoren besitzt, wobei die Vielfachheit eines Linearfaktors  $X - a$  in  $T$  durch seine Vielfachheit in  $P$  beschränkt ist.

AUFGABE 50.25.\*

Es seien  $P$  und  $Q$  verschiedene normierte Polynome vom Grad  $d$  über einem Körper  $K$ . Wie viele Schnittpunkte besitzen die beiden Graphen maximal?

AUFGABE 50.26.\*

Man finde ein Polynom

$$f = a + bX + cX^2$$

mit  $a, b, c \in \mathbb{R}$  derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

$$f(-1) = 2, f(1) = 0, f(3) = 5.$$

AUFGABE 50.27. Man finde ein Polynom

$$f = a + bX + cX^2 + dX^3$$

mit  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

$$f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 0, f(-1) = 1.$$

AUFGABE 50.28.\*

- (1) Bestimme ein Polynom  $P$  vom Grad  $\leq 3$  mit

$$P(-1) = -4,$$

$$P(0) = 2,$$

$$P(1) = 2$$

und

$$P(2) = 3$$

- (2) Bestimme ein normiertes Polynom  $Q$  vom Grad 3 mit

$$Q(0) = 1,$$

$$Q(2) = 3$$

und

$$Q(3) = 10.$$

- (3) Bestimme die Schnittpunkte der Graphen zu  $P$  und zu  $Q$ .

AUFGABE 50.29. Es sei  $K[X]$  der Polynomring über einem Körper  $K$ . Zeige, dass die Menge

$$\left\{ \frac{P}{Q} \mid P, Q \in K[X], Q \neq 0 \right\},$$

wobei zwei Brüche  $\frac{P}{Q}$  und  $\frac{P'}{Q'}$  genau dann als gleich gelten, wenn  $PQ' = P'Q$  ist, mit einer geeigneten Addition und Multiplikation ein Körper ist.

Den in der vorstehenden Aufgabe eingeführten Körper nennt man den *Körper der rationalen Funktionen*.

AUFGABE 50.30. Es sei  $K$  ein angeordneter Körper,  $K[X]$  der Polynomring und

$$Q = K(X)$$

der Körper der rationalen Funktionen über  $K$ . Zeige unter Verwendung von Aufgabe 49.8, dass man  $Q$  zu einem angeordneten Körper machen kann, der *nicht* archimedisch angeordnet ist.

AUFGABE 50.31. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung von zwei rationalen Funktionen wieder rational ist.

AUFGABE 50.32. Berechne die Hintereinanderschaltungen  $f \circ g$  und  $g \circ f$  der beiden rationalen Funktionen

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 3}{x - 2} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 4}.$$

AUFGABE 50.33. Es sei  $K$  ein archimedisch angeordneter Körper und seien  $P(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i$  und  $Q(x) = \sum_{i=0}^e b_i x^i$  Polynome mit  $a_d, b_e \neq 0$ . Man bestimme in Abhängigkeit von  $d$  und  $e$ , ob die durch

$$z_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$$

(für  $n$  hinreichend groß) definierte Folge konvergiert oder nicht, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 50.34. (3 (1+2) Punkte)

(1) Berechne das Produkt

$$\left(1 - \frac{5}{3}X + \frac{1}{2}X^2\right) \cdot \left(2 - \frac{3}{4}X + \frac{1}{3}X^2 - X^3\right)$$

im Polynomring  $\mathbb{Q}[X]$ .

(2) Berechne das Produkt

$$\left(1 - \frac{5}{3}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{5}^2\right) \cdot \left(2 - \frac{3}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{3}\sqrt{5}^2 - \sqrt{5}^3\right)$$

in  $\mathbb{R}$  auf zwei verschiedene Arten.

AUFGABE 50.35. (3 Punkte)

Führe in  $\mathbb{Q}[X]$  die Division mit Rest „ $P$  durch  $T$ “ für die beiden Polynome  $P = 5X^4 - 6X^3 + \frac{3}{5}X^2 - \frac{1}{2}X + 5$  und  $T = \frac{1}{7}X^2 + \frac{3}{7}X - 1$  durch.

AUFGABE 50.36. (3 Punkte)

Führe in  $\mathbb{Z}/(7)[X]$  die Division mit Rest „ $P$  durch  $T$ “ für die beiden Polynome  $P = 6X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 2X + 5$  und  $T = 5X^2 + 3X + 2$  durch.

AUFGABE 50.37. (2 Punkte)

Beweise die Formel

$$X^u + 1 = (X + 1)(X^{u-1} - X^{u-2} + X^{u-3} - \dots + X^2 - X + 1)$$

für  $u$  ungerade.

AUFGABE 50.38. (4 Punkte)

Man finde ein Polynom  $f$  vom Grad  $\leq 3$ , für welches

$$f(0) = -1, f(-1) = -3, f(1) = 7, f(2) = 21$$

gilt.

## Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7