

Mathematik für Anwender II

Vorlesung 33

Gewöhnliche Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

DEFINITION 33.1. Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g(t) \cdot h(y)$$

mit zwei Funktionen (dabei sind I und J reelle Intervalle)

$$g: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto g(t),$$

und

$$h: J \longrightarrow \mathbb{R}, y \longmapsto h(y),$$

heißt *gewöhnliche Differentialgleichung mit getrennten Variablen*.

Eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen ist auf der Produktmenge $U = I \times J$ definiert. Eine homogene lineare Differentialgleichung $y' = g(t)y$ besitzt offenbar getrennte Variablen (mit $h(y) = y$), dagegen besitzt eine inhomogene lineare Differentialgleichung im Allgemeinen keine getrennten Variablen. Die Differentialgleichungen mit getrennten Variablen lassen sich durch Integrieren lösen. Wenn $h(y_0) = 0$ ist, so bestätigt man direkt die konstante Lösung $y(t) = y_0$. Daher beschränken wir uns im Folgenden auf die Situation, dass h keine Nullstelle besitzt. Die Grundidee ist dann, in der Gleichung

$$\frac{y'(t)}{h(y(t))} = g(t)$$

die beiden Seiten zu integrieren, wobei man links die Substitutionsregel anwendet.

SATZ 33.2. *Es sei*

$$y' = g(t) \cdot h(y)$$

eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen mit stetigen Funktionen

$$g: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto g(t),$$

und

$$h: J \longrightarrow \mathbb{R}, y \longmapsto h(y),$$

wobei h keine Nullstelle besitze. Es sei G eine Stammfunktion von g und H eine Stammfunktion von $\frac{1}{h}$. Weiter sei $I' \subseteq I$ ein Teilintervall mit $G(I') \subseteq H(J)$. Dann ist H eine bijektive Funktion auf sein Bild $H(J)$ und die Lösungen dieser Differentialgleichung haben die Form

$$y(t) = H^{-1}(G(t)).$$

Wenn zusätzlich die Anfangsbedingung

$$y(t_0) = y_0 \text{ mit } (t_0, y_0) \in I \times J$$

gegeben ist, und wenn die Stammfunktionen die zusätzlichen Eigenschaften $G(t_0) = 0$ und $H(y_0) = 0$ erfüllen, so ist

$$y(t) = H^{-1}(G(t))$$

die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems.

Beweis. Da h stetig ist und keine Nullstelle besitzt, ist h bzw. $\frac{1}{h}$ nach dem Zwischenwertsatz entweder stets positiv oder stets negativ, so dass H nach Satz 15.7 streng monoton und daher nach Aufgabe 5.37 injektiv (also bijektiv auf sein Bild) ist. Sei $y(t) = H^{-1}(G(t))$ wie angegeben. Dann ist nach Satz 14.8 und Satz 14.9

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{G'(t)}{H'(H^{-1}(G(t)))} \\ &= \frac{g(t)}{\frac{1}{h}(H^{-1}(G(t)))} \\ &= g(t) \cdot h(H^{-1}(G(t))) \\ &= g(t) \cdot h(y(t)), \end{aligned}$$

so dass in der Tat eine Lösung vorliegt. Es sei nun $y(t)$ eine differenzierbare Funktion, die die Differentialgleichung erfüllt. Daraus folgt

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{y'(t)}{h(y(t))} dt = \int_{y(t_1)}^{y(t_2)} \frac{1}{h(z)} dz,$$

wobei wir die Substitution $z = y(t)$ angewendet haben. Für die zugehörigen Stammfunktionen (mit den unteren Integralgrenzen t_1 bzw. $y(t_1)$) bedeutet dies $G(t) = H(y(t))$, also ist $y(t) = H^{-1}(G(t))$. Um die Anfangsbedingung zu erfüllen, kann man t_0 bzw. y_0 als untere Integralgrenzen wählen. Wir zeigen, dass dies die einzige Lösung ist. Seien also H und \tilde{H} zwei Stammfunktionen zu $\frac{1}{h}$ und G und \tilde{G} zwei Stammfunktionen zu g derart, dass sowohl $y(t) = H^{-1}(G(t))$ als auch $\tilde{y}(t) = \tilde{H}^{-1}(\tilde{G}(t))$ die Anfangsbedingung erfüllen. D.h. die beiden Funktionen stimmen zum Zeitpunkt t_0 überein. Da sich Stammfunktionen nur um eine Konstante unterscheiden, können wir $\tilde{H} = H + c$ und $\tilde{G} = G + d$ mit zwei Konstanten $c, d \in \mathbb{R}$ ansetzen. Es gilt also einerseits $H(y(t)) = G(t)$ und andererseits $H(\tilde{y}(t)) + c = \tilde{H}(\tilde{y}(t)) = \tilde{G}(t) = G(t) + d$, so dass $H(\tilde{y}(t)) - H(y(t)) = d - c$ gilt, woraus wegen $\tilde{y}(t_0) = y(t_0)$ sofort $c = d$ folgt. Also ist $H(\tilde{y}(t)) = G(t) = H(y(t))$ und somit wegen der Injektivität von H auch $\tilde{y}(t) = y(t)$ für alle t . \square

Wegen

$$(H + c)^{-1}(G(t) + d) = H^{-1}(G(t) + d - c)$$

(wende $H + c$ an) genügt es, bei der Stammfunktion zu $g(t)$ eine Konstante zuzulassen, um die allgemeine Lösung zu erhalten. Durch einen Übergang von

G nach $G + c$ mit einer geeigneten Konstanten c kann man auch erreichen, dass es ein (echtes) Intervall I' gibt mit

$$G(I') \subseteq H(J).$$

Sowohl orts- als auch zeitunabhängige Differentialgleichungen kann man als Differentialgleichung mit getrennten Variablen auffassen. Für zeitunabhängige Differentialgleichungen erhält man den folgenden Lösungsansatz.

KOROLLAR 33.3. *Es sei*

$$y' = h(y)$$

eine zeitunabhängige Differentialgleichung mit einer stetigen Funktion

$$h: J \longrightarrow \mathbb{R}, y \longmapsto h(y),$$

ohne Nullstelle. Es sei H eine Stammfunktion von $\frac{1}{h}$ mit der Umkehrfunktion

$$H^{-1}: J' \longrightarrow J.$$

Dann sind die Funktionen

$$y(t) = H^{-1}(t + c) \text{ mit } c \in \mathbb{R}$$

die Lösungen dieser Differentialgleichung auf dem Intervall¹ $H(J) - c$.

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 33.2. □

BEISPIEL 33.4. Wir betrachten die zeitunabhängige Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{y}$$

für $y > 0$. Es ist also $h(y) = \frac{1}{y}$ und damit müssen wir nach Korollar 33.3 y integrieren, eine Stammfunktion dazu ist

$$H(y) = \frac{1}{2}y^2.$$

Die Umkehrfunktion berechnet sich aus dem Ansatz $z = \frac{1}{2}y^2$ zu $y = \sqrt{2z} = H^{-1}(z)$. Also haben die Lösungskurven die Gestalt

$$y(t) = \sqrt{2(t + c)}$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

BEISPIEL 33.5. Wir betrachten die zeitunabhängige Differentialgleichung

$$y' = \sin y$$

für $y \in J =]0, \pi[$. Nach Korollar 33.3 müssen wir also $\frac{1}{\sin y}$ integrieren, eine Stammfunktion dazu ist nach Beispiel 27.6 (Analysis (Osnabrück 2014-2016)) die Funktion

$$H: J \longrightarrow J' = \mathbb{R}, y \longmapsto H(y) = \ln \left(\tan \frac{y}{2} \right).$$

¹Mit $I + c$ ist das um c verschobene Intervall gemeint. Es ist also $I + c = \{x \in \mathbb{R} \mid x - c \in I\}$. Bei $I = [a, b]$ ist also $I + c = [a + c, b + c]$, bei $I = \mathbb{R}$ ist $\mathbb{R} + c = \mathbb{R}$.

Die Umkehrfunktion H^{-1} berechnet sich über $u = \ln\left(\tan\frac{y}{2}\right)$ zu

$$H^{-1}(y) = 2 \arctan(e^u).$$

Also haben die Lösungskurven die Gestalt

$$y(t) = 2 \arctan(e^{t+c})$$

mit einem $c \in \mathbb{R}$.

Nach diesen zeitunabhängigen Differentialgleichungen besprechen wir weitere Beispiele für Differentialgleichungen mit getrennten Variablen.

KOROLLAR 33.6. *Eine Differentialgleichung der Form*

$$y' = g(t) \cdot y^2$$

mit $y > 0$ und einer stetigen Funktion

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto g(t),$$

besitzt auf $I' \subseteq \mathbb{R}$ die Lösungen

$$y(t) = -\frac{1}{G(t)},$$

wobei G eine Stammfunktion zu g mit $G(I') \subseteq \mathbb{R}_+$ sei.

Beweis. Siehe Aufgabe 33.17. □

BEISPIEL 33.7. Wir betrachten die Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$y' = t \cdot y^3$$

für

$y > 0$. Eine Stammfunktion zu $\frac{1}{y^3}$ ist $H(y) = -\frac{1}{2}y^{-2} = z$ (z ist also negativ) mit der Umkehrfunktion

$$y = H^{-1}(z) = \sqrt{-\frac{1}{2}z^{-1}}.$$

Die Stammfunktionen zu $g(t) = t$ sind $\frac{1}{2}t^2 + c$. Daher sind die Lösungen der Differentialgleichung von der Form

$$y(t) = \sqrt{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t^2 + c\right)^{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{t^2 + 2c}}.$$

Hierbei muss c negativ gewählt werden, damit diese Lösung einen nichtleeren Definitionsbereich besitzt. Der Definitionsbereich ist dann das Intervall $]-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}[$. Insbesondere sind die Lösungen nur auf einem beschränkten offenen Intervall definiert, obwohl die Differentialgleichung auf ganz \mathbb{R}^2 definiert ist. An den Intervallgrenzen strebt $y(t)$ gegen $+\infty$, d. h., die Lösung „entweicht“.

BEISPIEL 33.8. Wir betrachten die Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$y' = -t \cdot y^3$$

für $y > 0$. Eine Stammfunktion zu $\frac{1}{y^3}$ ist $H(y) = -\frac{1}{2}y^{-2} = z$ (z ist also negativ) mit der Umkehrfunktion

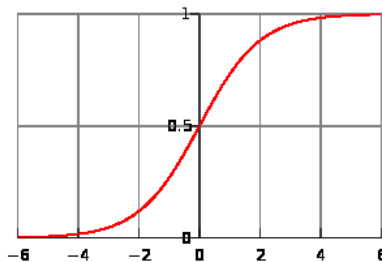
$$y = H^{-1}(z) = \sqrt{-\frac{1}{2}z^{-1}}.$$

Die Stammfunktionen zu $g(t) = -t$ sind $-\frac{1}{2}t^2 + c$. Daher sind die Lösungen der Differentialgleichung von der Form

$$y(t) = \sqrt{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}t^2 + c\right)^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{t^2 - 2c}}.$$

Insbesondere erhält man bei $c = 0$ die auf \mathbb{R}_+ definierte Lösung

$$y(t) = \frac{1}{t}.$$



Eine logistische Funktion

BEISPIEL 33.9. Es sei $p(t)$ die Größe einer Population zu einem Zeitpunkt t . Wie setzen voraus, dass die Populationsentwicklung differenzierbar ist; die Ableitung $p'(t)$ repräsentiert dann das (infinitesimale) Bevölkerungswachstum zum Zeitpunkt t . Den Quotienten

$$r(t) = \frac{p'(t)}{p(t)}$$

nennt man die *Wachstumsrate* zum Zeitpunkt t . Wir fragen uns, inwiefern man den Populationsverlauf aus der Wachstumsrate rekonstruieren kann. Die Wachstumsrate kann von der Zeit (Jahreszeit, Nahrungsvorkommen, Entwicklung von anderen Populationen etc.) abhängen, aber auch von der aktuellen Populationsgröße p . Die Zeitabhängigkeit der Wachstumsrate beruht auf äußeren Einflüssen, während die Abhängigkeit von der aktuellen Populationsgröße eine innere Dynamik ausdrückt. Sie beruht darauf, dass eine große Population sich hemmend auf die Fortpflanzung auswirkt.

Wir beschränken uns auf eine Situation, wo die Wachstumsrate nur von der Populationsgröße abhängt, nicht aber von sonstigen Einflüssen. Dann wird die Wachstumsrate durch eine Funktion $w(p)$ beschrieben, und die Wachstumsrate zum Zeitpunkt t ist demnach durch $r(t) = w(p(t))$ gegeben. Die Wachstumsrate wirkt sich auf die Populationsentwicklung aus. Gemäß dem oben formulierten Zusammenhang gilt

$$p'(t) = p(t) \cdot r(t) = p(t) \cdot w(p(t)).$$

Es liegt also eine Differentialgleichung der Form

$$p' = p \cdot w(p)$$

vor, die zeitunabhängig ist, so dass insbesondere getrennte Variablen vorliegen (mit der Funktion $h(p) = p \cdot w(p)$). Bei *konstanter Wachstumsrate*

$$w(p) = a$$

liegt die Differentialgleichung $p' = ap$ vor, deren Lösungen die Funktionen ce^{at} sind. Das bedeutet *exponentielles Wachstum*.

Wenn wir die Wachstumsrate so ansetzen, dass es bei einer gewissen Populationsgröße g kein Wachstum mehr gibt, und bei sehr kleiner Bevölkerung die Wachstumsrate maximal gleich s ist, und dazwischen die Wachstumsrate linear von p abhängt, so erhält man die Wachstumsrate

$$w(p) = s \left(1 - \frac{1}{g}p \right)$$

und die Differentialgleichung

$$p' = sp \left(1 - \frac{1}{g}p \right) = sp - \frac{s}{g}p^2.$$

Eine solche Differentialgleichung nennt man *logistische Differentialgleichung*. Gemäß dem Lösungsansatz für Differentialgleichungen mit getrennten Variablen müssen wir eine Stammfunktion zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{sp \left(1 - \frac{1}{g}p \right)} &= \frac{g}{s} \cdot \frac{1}{p(g-p)} \\ &= \frac{1}{s} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{g-p} \right) \end{aligned}$$

finden. Eine solche Stammfunktion ist

$$H(p) = \frac{1}{s} (\ln p - \ln(g-p)) = \frac{1}{s} \ln \frac{p}{g-p}.$$

Zur Berechnung der Umkehrfunktion H^{-1} lösen wir die Gleichung

$$u = \frac{1}{s} \ln \frac{p}{g-p}$$

nach p auf. Es ergibt sich

$$\exp(su) = \frac{p}{g-p}$$

und daraus

$$g \cdot \exp(su) = p + p \cdot \exp(su)$$

und damit

$$p = \frac{g \cdot \exp(su)}{1 + \exp(su)} = \frac{g}{1 + \exp(-su)}.$$

Da die Differentialgleichung zeitunabhängig ist, ist

$$p(t) = \frac{g}{1 + \exp(-st)}$$

eine Lösung. Bei $t = 0$ ist $p(0) = \frac{g}{2}$, für $t \rightarrow +\infty$ strebt die Lösung gegen g (die Grenzbevölkerung) und für $t \rightarrow -\infty$ gegen 0.

Abbildungsverzeichnis

- Quelle = Logistic-curve.svg , Autor = Benutzer auf Commons, Lizenz = 5
- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 9
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 9