文科常識答問

下冊

文化書局出版

PART I

Important Rules of English Grammar

1. What is English grammar ?

Sample answer :—

English grammar is the science which deals with the form of words and the construction of sentences.

2. What is the purpose of English grammar ?

Sample answer :—

It shows us what is correct and what is incorrect in the language, and teaches us to speak and write correctly.

3. What is a sentence ?

Sample answer —

A sentence may be defined as a group of words that expresses a complete thought.

4. How may we identify a sentence ?

Sample answer :—

A sentence may be identified by three methods : (1) by its form (2) by its arrangement and (3) by its connecting words.

5. What are the essential parts of a sentence ?

Sample answer :—

There are two essential parts in every sentence : the subject and the predicate.

6. How many kinds of sentences are there ?

Sample answer :—

(A) There are three kinds of sentences according to their form : (1) simple sentence (2) compound sentence and (3) complex sentence.

(B) There are five kinds of sentences according to thier use : (1) declarative sentence (2) interrogative sentence (3) imperative sentence (4) exclamatory sentence and (5) optative sentence.

7. Name the parts of speach and give a definiton for each.

Sample answer :—

The parts of speach are noun, pronoun, verb, adverb, adjective, conjunction, preposition and interjection. A noun is the name of a person, place, or thing. A pronoun is a word used instead of a noun. A verb is a word which tells us what a person does or what an animal does, or what a thing does. An adverb is a word which modifies a verb, an adjective, or another adverb. An adjective qualifies a noun or pronoun. A conjunction connects word or group of words. A preposition is a word placed before a substantive to show its relation to some other words in the sentence. And an interjection is a cry or other exclamatory sound expressing surprise, anger, pleasure, or some other emotion or feeling.

8. How many kinds of nouns are there ?

Sample answer :

Different writers classify them differently; but they are commonly classified as follows :

(a) proper nouns,

(b) common nouns,

(c) collective nouns,

(d) abstract nouns.

9. Define and give an example for each kind of nouns.

Sample answer :—

A proper noun denotes one particular person or thing, as distinct from every other; as India, Rober, James, the New Testament, etc.

A common noun is a name which is given to all things of the same kind; as state, man, book, etc.

A collective noun denotes a group, collectien, or multitude, considered as one complete whole; as flock, army, asembly, etc.

An abstract noun denotes same quality, state, or action apart from anything possessing the quality, etc; as cleverness, pleasure, choice, and so on.

10. How are abstract nouns formed ?

Sample answer :—

Abstract nouns can be formed from adjectives, common nouns, or verbs; as wise, wisdom. honest, honesty; sweet, sweetness; friend. friendship; agent, agency; slave, slavery; choose, choice; move, motion; laugh, laughter.

11. How many kinds of genders are there? define them.

Sample answer :—

There are four kinds of genders: (1) masculine gender—denoting male animals (2) feminine gender—denoting female animals (3) common gender—denoting animals of either sex, and (4) neuter gender—denoting things of neither sex.

12. In what ways can we distinguish a masculine noun from a feminine ?

Sample answer :—

There are three different ways by which a masculine noun may be distinguished from a feminine: (1) by a change of word; as cow, bull; (2) by adding a word; as he-goat, she-goat; and (3) by adding "ess" to the masculine; as priest, priestess.

13. What is a nominative case? an objective case and a possessive case? Under what conditions may we omit the apostrophe "S" to the possessive case ?

Sample answer :—

When a noun is used as the subject to a verb or for the sake of adress, it is said to be in the nominative case; as *school* opens; where are *you* going, Mr. Wang? When a noun is the object to a verb or to a preposition, it is said to be in the objective case; as the woman reads a *newspaper*; The dog was seen by *me*.

The possessive case denotes ownership or possession; as the *lion's* head, The *horse's* name, *Mei's* father We omit the apostrophe "S" to the possessive case, when (1) for all plural nouns ending "S"; as birds' nests, horses' [illegible] (2) the last syllable of a singular noun begins and ends with "S"; as Moses' Law.

14. **What rules are there for forming the plural number of a noun ?**

Sample answer :

There are many rules for forming the plural number of a noun. The more important ones are : (1) by adding "S" to the singular; as hand, hands; (2) if the noun ends in "s", "x", "sh", or "ch", the plural is formed by adding "es" to the singular; as glass, glasses; box, boxes; lash, lashes; bench, benches; (3) if the noun ends in "y" and the "y" is preceded by a consonant, the plural is formed by changing the "y" into "ies"; as army, armies; duty, duties; (4) if the noun ends in "o", and the "o" is preceded by a consonant, the plural is generally formed by adding "es" to the singular; as potato, potatoes; hero, heroes, (5) if the noun ends in "f" or "fe", the pluaral is generally formed by changing "f" or "fe" into "ves"; as wolf, wolves; life, lives.

15. How many kinds of adjectives are there? give the meaning of each.

Sample answer:—

There are six different kinds of adjectives : (1) demonstrative—showing which or what thing is meant; (2) quantitative—showing how much of a thing is meant; (3) descriptive—showing of what quality or in what state a thing is; (4) numeral—showing how many things or in what order; (5) proper—describing a thing by some proper noun; and (6) distributive—showing that things are taken separately or in separate lots.

16. What are the two uses of adjectives? define them.

Sample answer:—

The two uses of adjectives are attributive and predicative: (a) attributive — An adjective is used attributively, when it qualifies its noun directly, so as to make a kind of compound noun; as a *brave* man; the *beautiful* flower; (b) predicative—An adjective is used predicatively, when it qualifies its noun indirectly; as his behaviour is *good;* these horses went *lame.*

17. How can we indicate the degrees of adjectives?

Sample answer —

We indicate the degrees of adjectives by comparison. There are three degrees of comparison in adjectives; namly, the positive, comparative and superlative. In all adjectives of more than two syllables, and in most adjectives of two syllables the comparative is formed by adding "more" and the superlative by adding most, as more important, most important. If the positive ends in two consonants, or in a single consonant preceded by two vowels, "er" and "est" are added: as deep, deeper, deepest; thick, thicker, thickest; small, smaller, smallest. If the positive ends in "e", only "r" and "st" are added and not "er" and "est"; as wise, wiser, wisest. If the positive ends in "y", and the "y" is preceded by a consonant, the "y" is changed into "i", then "er" and "est" are added; as dry, drier, driest. If the "y" is preceded by a vowel the "y" is not changed into "i"; as grey, greyer, greyest. Some adjectives form their comparatives and superlatives in an irregular way; as many, more, most; bad, worse, worst; little, less, least.

18. **How are compound personal pronouns and compound relative pronouns formed?**

Sample answer:—

Compound personal pronouns are formed by adding "self" to "my", "thy", "your", "him", "her", or "it", and "selves" to "ours" ,,your", or "them". Compound relative pronouns are formed by adding "ever" and "soever" to "who" "which", or "what".

19. **What is a personal pronoun? a relative prononn? an interrogative pronoun? and an adjective pronoun?**

Sample answer:—

(a) A personal pronoun is a pronoun that by its form denotes the speaker, the one spoken to, or the one spoken of.

(b) A relative pronoun is one that relates to some preceding word or words and connects clauses.

(c) An interrogative pronoun is one with which a question is asked.

(d) An adjective pronoun is one that performs the offices of both adjective and a noun.

20. **What is an antecedent? and what do the relatives "who", "which", and "that", always represent?**

Sample answer:—

The word, phrase, or clause in the place of which a pronoun is used is culled an antecedent. The relative "who" should always represent person; "which" brute animals and inanimate things; and "that" person, animals and things.

21. Make lists of reflexive personal pronouns for each person.

Sample:—

I The first person

case	singular	plural
nominative or objective	myself	ourselves
possessive	my or mine own	our own

II The second person

case	singular	plural
nominative or objective	thyself	yourselvse
possessive	thy or thine	your own

III The third person

case	singular			plural
	masculine	feminine	neuter	all genders
nom. or obj.	himself	herself	itself	themself
possessive	his own	her own	its own	their own

22. What is a transitive verb and an intransitive verb? a regular verb and an irregular verb?

Sample answer:—

(a) A transitive verb is one that require an object; as, Ho *had* much *bread*.

(b) An intransitive verb is one that does not require an object; as, These men *look at* me.

(c) A regular verb is one whose inflections are aways regular; as, connect (present), connected (past); continue (present), continued (past); etc.

(d) An irregular verb is one whose inflections are always different in form; as, write (present), wrote (past); speack (present), spoke (past); begin (present), began (past), etc.

23. What are she functions of an auxiliary verb?

Sample answer:—

The functions of an auxiliary verb are (a) helps to form a tense or mood of some principal verb, and (b) foregoes its own signification as a principal verb for that purpose.

24. How many kinds of perfect tenses are there? Give example for each.

Sample answer:—

There are three kinds of perfect tenses, namly: present perfect, future perfect, and past perfect, as:

(1) I have loved (present perfect)

(2) I shall have loved (future perfect)

(3) I had loved (past perfect)

25. What is a transposed order, and an usual order?

Sample answer:—

(a) When any word or phrase in the predicate stands out of its usual place, appearing either at the front of the sentence or at the end, we have what we may call the transposed order; as, Strange are the ways of a foreigner.

(b) An usual order occurs when the subject complements and object complements appear in their customary positions; as, I shall try to teach you a little English.

26. What rules have been given for the use of the capital letter?

Sample answer:—

(a) The first word of every sentence must begin with a capital letter.

(b) Proper, or individual names and words derived from them begin with capital letters.

27. What rules have been given for the use of the period?

Sample answer:—

(a) A period must be placed after every sentence that simply affirms, denies, or commands.

(b) Abbreviations generally begin with capital letters and are always followed by the period.

28. What is a modifier? What is a subject modifier, and predicate modifier?

Sample answer:—

(a) A modifier is a word or a group of wards joined to some part of the sentence, to qualify or limit the meaning.

(b) The subject with its modifier is called the subject modifier. The predicate with its modifier is called predicate modifier or logical predicate.

29. What is a phrase? What are adjectival and adverbial phrases?

Sample answer:—

A phrase is a group of words denoting related ideas, and expressing a thought. A phrase that does the work of an adjective is called an adjectival phrase. A phrase that does the work of an adverb is called an adverbial phrase.

30. What uses does the comma have?

Sample answer:—

Word or words that are placed out of their usual order and made emphatic, or lossly connected with the rest of the sentence, should be set off by the comma.

31. What is a compound subject and a compound predicate?

Sample answer:—

Two or more connected subjects having the same predicate form a compound subject. Two or more conuected predicats having the same subject from a compound predicate.

32. How many uses of the participle are there?

Sample answer:—

(1) The participle may be used as an adjective modifier.

(2) The participle may be used as an attributive complement.

(3) The participle may be used as an objective complement.

(4) The participle may be used as a principle word in a phrase.

(5) The participle may be used as a mere or a mere adjective.

(6) The participle may be used in independent phrases.

33. How may the infinitive phrase be used?

Sample answer:—

(a) The infinitive phrase may be used after a preposition as the principle term of another phrase; as My friend is about *to leave me*. Here the preposition "about" introduces the phrase used as attribute complement. The principle part is the infinitive phrase "to leave me."

(b) The infinitive phrase may be used as an explanatory modifier, as It is easy *to find fault*. Here the infinitive phrase *to find fault* explains the subject "it." Read the sentence without "it," and you will see the real nature of the phrase. This use of "it" as a substitute for the real subject is a very common idiom of the English language. It allows the real subject to follow the verb, and thus gives the sentence balance of parts

(c) The infinitive phrase may be used as objective complement; as He made me to wait. Here the infinitive "to wait" completes "made" and relates to me.

(d) The infinitive phrase may be used independently, as every object has several faces, *so to speack*. Here the infinitive phrase "so to speak" has no grammatic connection with the rest of the sentence.

34. What is an adjective clause?

Sample answer:—

A dependent clause that does the work of an adjective is called an adjective clause.

35. What is an adverb clause? What do adverb clauses express?

Sample answer:—

A clause that does the work of an adverb is an adverb clause. They express (a) time; as, *When pleasure calls*, we listen, (b) place; as, *Where the snow falls*, there is freedom. (c) degree or result; as, Washington was *as good as he was* great. (d) manner; as, He died *as he lived*. (e) real cause; as, The ground is wet *because it has rained* (f) condition; as, *If the air is quickly compressed*, enough heat is evolved to produce combustion, and (g) purpose, as, Language was given us *that we might say pleasant things to each other.*

36. What is a noun clause? How many uses of the noun clause are there.

Sample answer:—

A clause that does the work of a noun is a noun clause. There are five uses of noun clause. (1) Used as subject; as *that the earth is round* has been proved. (2) Used as object as, Galileo taught *that the earth moves.* (3) Used as attribute complement; as a peculiarity of English is *that it has so many borrowed words.* (4) Used explanatory modifier; as, It has been proved *that the earth is round.* (5) Used as principle term of a prepositional phrase; as, Have birds any sence of *why they sing?*

37. What is a coordinate conjunction and a subordinate conjunction?

Sample answer:—

A coordinate conjunction is one that connects words, phrases, or clauses of the same rank.

A subordinate conjunction is one that connects clauses of different rank.

38. What are the uses of a gerund?

Sample answer:—

A gerund may be used as: (1) the subject of a verb—*Writing* is my favorite occupation. (2) the object of a verb—I like [illegible] (3) the complement of a verb—Seeing is *believing*. (4) The object of preposition—He spoke to me about [illegible] an answer immediately.

PART II

Construction and Translation of sentences

1. Write sentences in which the following words are used as indirect object; as object of preposition:

   (a) me (b) us (c) him (d) them.

   Sample answer:—

   (1) He gives *me* a book. (indirect object)
   He laughed at *me*. (object of preposition)

   (2) They thought *us* to be the teachers. (indirect object)

   He made many benches for *us*. (object of preposition)

   (3) We made *him* the mayor of Wuchang. (indirect object)

   The office of the mayor of Wuchang was offered to *him*. (object of preposition)

   (4) Let me ask *them* to do it for themselves. (indirect object)
   Let me make it for *them*. (object of preposition)

2. Write sentences in which myself, yourself, yourselves, ourselves, themselves, are used for emphasis, and as reflexive object.

   Sample answer:—

(1) I *myself* shall write it. (emphasis)

I punished *myself* (reflexive)

(2) You yourself is on responsible for the error. (emphasis)

You will surprise yourself when you find your progress to be so fast. (reflexive)

(3) You *yourselves* take the charge of this work. (emphasis)

You must read for *yourselves*. (reflexive)

(4) We *ourselves* played tennies. (emphasis)

We will study it *ourselves*. (reflexive)

(5) They were impolite *themselves*. (emphasis)

They were saying something to *themselves*. (reflexive)

3. Construct sentences containing "whoever," "whomever," "Whatever," and "whom."

Sample answer:—

(1) *Whoever* loves me is the best fellow.

(2) You may give the book to *whomever* you please.

(3) I want *whatever* is necessary.

(4) The boy *whom* I know is named Li.

4. Construct five sentences with the relative "that" or "which."

Sample answer:—

(1) The point about him that I liked most is his frankness.

(2) The fine building that you saw is my friend's house.

(3) I have a house which stands on a hill.

(4) Give me the book that is on your shelf.

(5) The pen which he is holding is very beautiful.

5. Used the following words first as singular, then as plural:

(a) all (b) some, (c) half, (d) such.

Sample answer:—

(a) All is well. (singular)
All of boys and girls are very happily. (plural)

(b) Some of the time, I am tired. (singular)
Some of them are old and some are young (plural)

(c) Half of the composition is clear and interesting, but the other half is dull and insipid.

(d) The man is the judge appointed to hear this case, and as such you must not speak to him before the Trial. (singular)

(e) Kings are constituted such by law, and should be obeyed.

6. Write sentences containing an infinitive used as subject, as the object of a perposition, as an adjective modifying a noun, as an adverb modify 'g a verb, as a noun in apposition with another noun.

Sample:—

(a) *To tell a lie* is wrong. (used as subject)

(b) He does nothing but (*to*) *cry*. used as object of preposition)

(c) I have no time to play. (used as an adjective modifying a noun)

(d) We came here to study (used as an adverb modifying a verb)

(e) The work, to translate English into Chinese is difficult. (used as a noun in apposition with another noun.)

7. Write five compound or complex sentences containing the following verb phrases:

Having seen, am being taught, to be repaired, had spoken, had been written.

Sample:—

(a) Havining seen that the sun is about to set, the shepherd returned home with his sheep.

(b) I am being taught by my teacher who is a doctor.

(c) The wall, that has been defaced ought to be repaired.

(d) He had spoken of this matter before I came here.

(e) The book that you are reading had been written by my teacher.

8. Compose sentences in which each of following verbs shall have two complements—the one a subjective complement, the other an objective complement:

(a) Give (b) appoint, (c) consider, (d) call.

Sample:—

(a) We give him *happiaess.*

(b) He appoints you as a *ruler* of *Newland.*

(c) They condsider the reputation as his *life.*

(d) My friends call *me* a hapyy *man.*

9. Change the following sentences from the active to the passive voice:

(a) I shall never forget my friend.

(b) Your letter surprised me.

(c) The officer has punished the soldier.

(d) We cannot gain knowledge in one day.

(e) They had done their work when they went out.

(f) He was writing a letter.

(g) The old men has openned a little shop.

(h) I have asked him to help the beggar.

(i) The boy drinks two cups of tea everyday.

(j) When shall you buy this house?

Sample:—

(a) My friend shall be never forgotten by me.

(b) I was surprised by your letter.

(c) The soldier has been punished by the officer.

(d) Knowledge cannot be gained by us in one day.

(e) Their work had been done by them when they went out.

(f) A letter was written by him.

(g) A little shop has been opened by the old man.

(h) He has been asked by me to help the beggar.

(i) Two cups of tea are drunk by the boy everyday.

(j) When shall this house be bought by you?

10. Rearrange the following sentences, and punctuate them.

(a) A gentleman will let his house going abroad for the summer to a small family containing all the improvements.

(b) The town contains fifty houses, and one hundred inhabitants built of brick.

(c) Suits ready made of material cut by an experienced tailor handsomely trimmed at a bargain are offered cheap.

(d) Seated on the topmost brach of a tall tree busily engaged in gnawing an acorn we espied a squirrel.

(e) A poor child was found in the streets by a weathy and benevolent gentleman suffering from cold and hunger.

Sample:—

(a) A gentleman, going abroad for the summer, will let his house containing all the improvements to a small family.

(b) The town contains fifty houses, built of brick, and one hundred inhabitants.

(c) Ready made suits of cheap material, cut and trimmed handsomely, by an experienced tailor are offered at a bargain.

(d) We espied a squirrel, seated on the top-most branch of a tall tree, busily engaged in gnawing on acorn.

(e) A poor child suffering from cold and hunger, was found in the streets by a wealthy and benevolent gentleman.

11. Expand these by supplying the verb or some part of it:

(a) Nobody there

(b) Death to the tyrant.

(c) All abroad!

(d) When Adam thus to Eve.

(e) I must after him.

(f) Short, indeed, his carreer.

(g) All hands to the pumps!

(h) What fame to me?

Sample:—

(a) Nobody *is* there.

(b) Death *is* to the tyrant.

(c) All *are* abroad!

(d) When Adam thus *go* to Eve.

(e) I must *go* after him.

(f) Short, indeed, his career *is*.

(g) All hands *go* to the pumps!

(h) What *is* fame to me?

12. **Change the following simple sentences into complex** ones:

(a) He is a man of strong costitution.

(b) I took the man for a spy.

(c) Their explantion cannot be true.

Sample:—

(a) His a man who has a strong constitution.

(b) I thought that the man was a spy.

(c) The explanation that they have given cannot be true.

13. Chang the simple sentence into a compound sentence; "You must work hard to succeed".

Sample:—

You must work hard or you will fail.

14. Chang the following simple sentences into compound sentences:

(A) Wear the old coat. Buy the new book.

(B) He is a rich man. He is not proud of his wealth.

(C) I give him a watch. He carries it in his pocket.

(D) He went over to China last year.
He is still living there

Sample:—

(A) Wear the old coat, *and* buy the new book.

(B) He is a rich man, *but* he is not proud of his wealth

(C) I gave him a watch, *which* he carries in his pocket

(D) **Last year he went over to China,** *where* **he is still living.**

15. Combine two simple sentences into a simple sentence in the following.

(a) He woaked hard. He felt tired.

(b) The sun rose. The fog dispersed.

(c) He is sorrowful. He is still hopeful.

(d) He has a large family. He must provide for them.

(e) He fled from his creditors. This was very dishonest.

Sample:—

(a) Having worked hard, he felt tired.

(b) The sun having risen, the fog dispersed.

(c) In spite of this sorrow, he is still hopeful.

(d) He has a large family to provide for.

(e) He fled from his creditors,—a very dishonest act.

16. Combine the following simple sentences into complex ones:

(a) He is an honest boy. This is certain.

(b) I suffered anxiety. The anxiety was extreme.

(c) He found out his misiake. He was then very sorry.

Sample:—

(a) It is certain that he is an honest boy.

(b) The anxiety that I suffered was extreme.

(c) He was very sorry when he found out his mistake.

1. **Translate the following sentences:**

(a) 我希望明年能同你同入一個學校。

(b) 他想不給人看見自己個人偷偷的出去。

(c) 那船愈來愈快。

(d) 他們看見他橫在地上就攙他起來。

Sample:—

(a) I shall hope to enter the same school with you next year.

(b) He did not wish to be seen, so he went out stealthily.

(c) The nearer that boat comes the faster it goes.

(d) When they saw him lying on the ground, they helped him to get up.

2. Translate the following sentence.

(a) 他恐怕被人所笑所以沒有開口。

(b) 沒有幾個人肯到他去的地方去的。

(c) 我家裏幾張桌子如此做的。

(d) 說起他怎樣死的真是可慘。

Sample:—

(a) He was afraid of being laughed at so he remained silent.

(b) Few men would go where he had gone.

(c) In my house there are several tables which are made in this way

(d) It is sad to relate how he died.

Translate the following sentences:

(a) 你聽見那狗在外面吠嗎？

(b) 今夜的月光比向來的亮得多。

(c) 這種車子是用來載貨的不是坐人的。

(d) 有人說科學是大枯燥無味了，這是眞的嗎？

Sample:—

(a) Do you hear that dog barking outside?

(b) To-night the moon shines more brightly than ever before.

(c) This vehicle is used for carring goods and not for carring persons.

(d) Some say that science is very monotonous, is that true?

Translate the following sentences:

(a) 我尋見他們在此地。

(b) 他想自己夠不上辦這件事。

(c) 他做手勢叫我往前走一步。

(d) 我們有兩條路走：一是科學：一是文學，我選擇那一條路好呢？

Sample:—

(a) It was here that I found them.

(b) He thinks that he is not equal to the task.

(c) He made a sign with his hand to show that I was to go forward one step.

(d) There are two ways for us to go: One is science; and the other is literature. Which one of them shall I choose?

5. Translate the following sentences:

(a) 走進店門時我遇見一個老朋友。

(b) 被火鐘驚醒後他們都跑出去看去。

(c) 看起來他明天未必能來。

(d) 現在最困難一事是打聽他究竟在那裏。

(e) 究竟該去不該去，應由你自己決定的。

Sample

(a) On entering a shop I met one of my old friends.

(b) After they were awakened by the fire alarm, they ran out to see it

(c) It seems that he would not come to-morrow.

(d) Now the principal difficulty is to seek where he really is

(e) Wheather we should go or not is a question which you yourself must decided.

6. Translate the following sentences

(a) 你能坐在此地等我嗎？

(b) 他沒有一塊石頭沒有翻過來。

(c) 你不應該替他幫忙的

(d) 我不曉得你用不用功，如果用功，對於各科很有進步的

(e) 假使那位在學室堅持他的毅力，他將給我們一[illegible]自斷。

Sample:

(a) Can you sit here and wait for me?

(b) He left no stone unturned.

(c) You should not depend upon him for aid.

(d) I do not know whether you are diligent or not. If so, you would make great progress in every course.

(e) If that chemist perseveres in his labors, he will give us a new contribution.

7. Translate the following sentence:

(a) 以後這種事情不必再如此做。

(b) 我總盡我的力替你辦好這事就是。

(c) 以他的幫助把募款這件事做成了。

(d) 用心讀書是學生的責任。

(e) 你能告訴我養氣的性質?

Sample:

(a) Hereafter you need not to do so.

(b) I will do my best to finish that job for you.

(c) The levy succeeded by means of his assistance.

(d) To study hard is students' duty.

(e) Can you tell me what is the property of oxygen.

8. Translate the following sentences:

(a) 你不看見滿天星斗在天空中閃爍的亮嗎?

(b) 至於錢呢我也不要多只要夠用就是了。

(c) 他的成功靠他自己的能力固多靠金錢的力量也不少。

(d) 我要把這件事給你做。

(e) 化學亦是自然科學的一種，與物理學很有關係。

Sample:—

(a) Do you not see that the stars are aparkling in the sky?

(b) As to pay I do not want much, only sufficient to meet my expences

(c) His success was not only dependent on his own ability, but also dependent on the influence of money.

(d) I wish to give you this for to do

(e) Chemistry is olso one of the natural sciences and is very closely related to physics.

9. Translate the following sentences.

(a) 唉有幾個人知道我處境的難呀！

(b) 沒有那場雨我們都去得成功嗎？

(c) 沒有日光和空氣萬物怎得活呢？

(d) 做成這件事把他的心力都用盡了。

(e) 深山中往往有石上長着樹的。

Sample:—

(a) Oh, how many men know the difficult conditoin that I am in?

(b) If not for that rain, can we make a successful departure?

(c) How can nature survive, without sunlight and air?

(d) His spirit was worn out in finishing this work.

(e) Trees often grow out of the stones in the mountains.

10. Translate the following sentences:

(a) 他把他應盡的責任都推到我身上。

(b) 有幾個人記得他生前的事業呢！

(c) 小鳥在枝頭上唱歌歡迎春日之將至。

(d) 我所要的我們大家所要的都在此了。

(e) 那地方嗎？遠呢，不知道有多少里呢！

Sample:—

(a) He shifted on me the responsibility which he ought to bear himself.

(b) How many would remember the accomplishments of his lifetime!

(c) Birds are singing on the branches of the trees to welcome the coming of spring.

(d) What I and all of us want are all here.

(e) That place? It is far away; and I do not know how many miles away!

PART III

Idioms, Phrases and Words.

1. Explain these idioms "had better," "had rather," "has as lief," in the following sentences:—

   (a) You had better wait here. (b) He had rather go with you than with me. (c) They had as lief walk as ride.

   Explanation:

   In these sentences "had" is in the subjunctive mood; the tence is past though the meaning is present or future. "Better," "rather," and "as lief" are adverbs modifing "had," "wait," "go" and "walk" are infinitives without the sign "to;" used as object of "had." "Had" in "had rather" and "had as lief" are aften replaced by "would." "Lief" means "willingly." "Lief" and "rather" may be replaced by "soon" and "sooner."

2. Write a sentence with the idiom "the.........the" and explain it.

   Sample:—

   The farther he goes, the more slowly he walks. Here "the...... the" expresses a proportion between the degree of the distances and the rate of walking, or, in other words, "the slowness of his walking increases in the same proportion as the distance he goes increaces." The first "the" is a relative adverb of quantity; the second "the" is a simple adverb of quantity.

3. Write a sentence with the idiom "worth while" and explain it.

Sample:—

"This is not worth while," "while" is a noun meaning "time;" it is an adverbial object modifying the predicate adjective "worth." This sentence means "This is not worth the time that it takes to do it" or "This is not worth time that it takes to consider it. The same construction may be seen in this watch is worth ten dollars."

4. Make a distinction between the idioms "can but" and "can not but" and give examples.

Sample:—

"I can but obey you," "but" is an adverb modifying "can obey." Here "but" is equivalent to "only," so that the sentence means "I can only obey you." ("I can not do anything more than to obey you.")

5. Explain the use of the idiom "but that" and give examples.

Sample:—

A clause introduced by the idiom "but that" is frequently used after "know," "say," "doubt," or "am sure", in negative and interrogative sentences. For examples, "I do not know but that he will be came," "Who knows but that he will come?" "I do not say but that he is an honest man," "I do not doubt but that this is true," "I am not sure but that I shall go to-morrow." When used in this way, "but that" may be regarded as a conjunctive phrase.

6. Give reasons for using "whoever" and "who," but not "whomever" and "whom" the following sentences respectively.

(A) We should punish whoever is guilty, (B) The doubt as to who did this has never been removed. (C) A man who I thought was your brother called on me yesterday, (D) The person who we believed was guilty is in faith innocent.

Sample:—

In (A) "whoever" is not the object of "should punish" but the subject of "is." The object of "should punish" is the entire clause "whoever is guilty." In (B) "who" is not the object of "as to," but the subject of "did." The object of "as to" is the entire clause "who did this." In (C) "who" is not the object of "thought" but the subject of "was." The clause "I thought" is parenthetical. We may retain the objective form "whom," however, it we change "was" to "to be," for "whom" would then he the subject of "to be." In "A man whom I thought to be your brother called on me yesterday," "I thought" is not parenthetical. What has been said of (C) applies equally to (D).

7. Give examples for "than" used a preposition.

Sample:—

"Than" must be regarded as a preposition when it is followed by relative pronoun in the objective case. For example "He is a man than whom there is no one more honest in this town." "Than" may also be regarded as a preposition after "other," "else" and "rather," as I have no friend other than you, "This book is other than what I thought it was," I can do nothing else than obey you, "I will do this myself rather than you should do it." In these sentences "you," "what I thought it was," the infinitives "obey" and "that you should do it" may be regarded as the objects of "than."

8. Explain the uses of "as."

Sample:—

After the relative adverb "as" there is frequently an ellipsis. Sometimes, however, "as" is used merely to introduce an object complement, a predicate nominative, or a predicative. This construction is especially frequent after the verbs "consider," "regard," "acknowledge," and "accept." For examples "I consider him as my friend," They acknowledge him as the rightful owner of the house, "I regard him as honest," He is unwilling to accept my statement as true, "His statement was regarded as incorrect," "He is considered as having failed." "He is recognized as a patriotic citizen," When used merely to introduce a noun or an adjective "as" is an expletive. For examples "I consider him as my friend, "His statement was regarded as incorrect."

9. Explain the use of "Now that."

Sample:—

"Now that" is a conjunctive phrase equivalent to since ......now. For example, "Now that I have finished my lessons I intend to go for a walk. (=Since I have now finished my lessons I intend to go for a walk.)

10. Explain the meaning of the adverbial phrases "above all," and "above board" and write sentences with each of them.

Sample:—

"Above all" means "before every other consideration" For example, Above all (before anything else) beware of idleness. "Above board" means "without secret or underhand scheming." For example. Every thing that he did was open and above board.

11. Give the meanings of the adverbial phrase "by and by" and "by the by" and write sentences with each of them.

Sample:—

(a) "By and by" signifies "after an interval." Whether the interval is a long or a short one, is either left open, or depends on the context. For examples, "You will feel better by and by (after a time.) By and by (some time after wards) the teacher come into the room.

(b) "By the by" means "incidentally or in passing" For example, By the by (= let me remark in passing) I heard yesterday that there was a violent storm of wind at Calcutta two days ago.

12. Write sentences with the adverbial phrases "on the contrary" in each of them and give explanations.

Sample:—

These phrases are not identical in meaning, as may be seen from the following examples: I do not admire that man; on the contrary, (for from admiring him) I have a great contempt for him. I have nothing to say to the contrary (I have nothing to say against what you or some one else has said.)

13. Give a distinction between the adverbial phrases "once and again" and "now and again" and write sentences with each of them.

Sample:—

"Once and again" means "repeately," once and more than once. "Now and again" means "occasionally," for examples, Once and again the Parrot said, "come in." Now and again the Parrot bit the wire of its age.

14. Write sentences with each of the following prepositional phrases:

"By means of," "by virtue of," "by way of."

Sample:—

(1) He recovered his health *by means of* sea-air and sea-bathing.

(2) The dog was sleeping and they won the day, but only *by virtue of* hard fighting

(3) I mention this point by way of cautioning you.

15. Write sentences with each of the following prepositional phrases:

"in accordance with,"	"in (or on) behalf of,"
"in case of,"	"in consequence of,"
"in spite of,"	"in respect of,"
"in view of,"	"in sight of,"
"in favor of,"	"in lieu of"

Sample:—

(1) Your actions are not *in accordance with* common sence.

(2) This request is made to you *on behalf of* my son.

(3) I have kept a reserve fund *in case of* accidents.

(4) *In consequence of* that ship wreck many families are in mourning.

(5) *In spite of* all the advice that I gave him, he took to the practive of smoking.

(6) *In respect of* age he is my senior.

(7) We must make up our minds at once *in view of* the urgency of the case.

(8) We had now come *in sight of* land.

(9) He has resigned his post *in favor of* his son.

(10) You must take my subscription *in lieu of* his.

16. Write sentences with one of the following prepositional phrases:

(a) in order to, (b) in regard to, (c) in proportion to.

Sample:—

(1) Nothing should be left untried *in order to* accomplish this.

(2) What have you to say *in regard to* that subject?

(3) He is cleverer than you *in proportion to* his years.

17. Write sentences with each of the following prepositional phrases:

(a) on account of, (b) on the brink of, (c) on the ground of, (d) on the part of, (e) on the point of.

Sample:—

(1) The famine took place *on account of* the failure of the rain.

(2) The country is *on the brink of* a serious disaster.

(3) He declined the invitation *on the ground of* a previous engagement.

(4) Incompetence *on the part of* a judge can not but lead to miscarriage of justice.

(5) He was *on the point of* letting out the secret when he checked himself.

18. Write sentences with each of the following prepositional phrases:

(a) with a view to. (b) with an eye to, (c) with reference to.

Sample:—

(1) I said all I could *with a view to* proving his innocence.

(2) He is working hard now *with an eye to* the future.

(3) I have nothing to say *with reference to*, or with regard to, or with respect to this question.

19. Write sentences with the phrases "according as," and "in case," and give explanations respectivelly.

Sample:—

"The plan will succeed or not *according as* it is judiciously managed." Here the phrase according as "means" according to the extent to which, "or" according to the manner in which."

20. Distinguish between the phrases "other than" "other besides," and give examples.

Sample:—

(1) "No person *other than* a graduate need apply." the phrase "other than" means "different from," "except," or "but" "no one except a graduate," "no other person but a graduate." The word "than" is here a preposition, which compares or distinguishes a graduate from other men.

(2) "No other person besides my friend applied," the phrase "other besides" means "other in addition to," no one besides or in addition to my friend applied.

21. Explain the different uses of "so and so," "or so," "so so," and "so on" and give examples.

Sample:—

(1) "He asked what I meant, and I told him "so and so," The phrase "so and so" is the adverbial form of the indefinate adjective." "such and such" "I told him so and so," might be rewritten "I gave him such and such an answer."

(2) "I shall return in a week or so." The phrase "or so" is also used indefinitely, and the sentence might be rewritten, "I shall return in a weak or such-like."

(3) His work is only so so. The phrase "so so" means fairly well "and is used when the speaker does not wish to be more precise.

(4) As in "He desliked dances, plays, picnics, and so on;" the phrase "and so on" means "and such like," "etc," the adverb "on" means "forward."

22. Explain the distinct meaning of each of these expressions; (a) little, (b) a little. (c) the little, and give examples.

Sample:—

(a) "Little" is a negative adjective, and means "not much," for example—He had little money, =(not much money.)

(b) "A little" is an affirmative adjective, and means "some at least," — a certain quantity, however little, for example—He had a little money. = (Some money at least, although the amount was small.)

(c) "The little implies two statements — one negative, and the other affirmative. For example—He spent the little money he had. This is (1) the money he had was not much (negative). (2) He spent all the money that he had (affirmative).

23. Explain the distinct meanings and uses of "many a" and "a many" and give examples.

Sample:—

"Many a" is followed by singular noun and "a many" by plural ones, — many a — here "a" = "one;" maney "a man" means "many times one man," or "many men." Hence "many" has here the force of a multiplicative numeral — *many a youth* and *many a maid* go there. (b) A many — here "many" has the force of a collective noun, and of is understood after it — they have not shed a many tears.

24. Mention the various uses of "but."

Sample:—

"But" may be used as a conjunction an adverb, an adjective and a preposition; as, the hen is a bird but it cannot fly. He was all but dead. We meet but to part.

25. What are the uses of the connectives "when" and "where?" Give an example for each.

Sample:—

(a) When "may connect a clause expreissng time, cause, or condition, an adjective clause or a noun clause, or it may connect coordinate clauses; as (1) The boys were astonished when they saw the stranger. (2) November is the month when the deer sheds its hours. (3) When the future is uncertain, make the most of the present. (4) When the five great European races left Asia is a question. (5) When judes accept bribes what may we expect from common people? (6) The dial instituted a formal inquiry, when hands, whells and weights protested their innocence.

(b) "Where" my connect a clause expressing place, an adjective clause, or a noun clause; as, (1) No one knows the garden where a large house was built. (2) Where the man was killed is still question. (3) No one has been where the man was killed.

PART IV

Diagrams

1. Diagram the following sentences.

(a) A somewhat dangerous pass had been reached quite unexpeactedly.

(b) The Gulf stream can be traced along the shores of the United States by the blueness of the water.

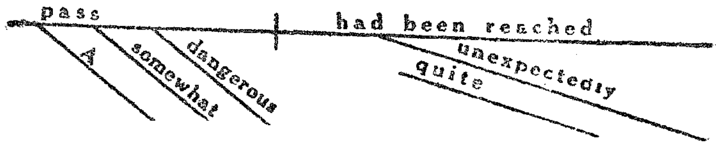
(c) The famaus Alexandrin library was burned.

(d) The great Spanish Armada was destroyed.

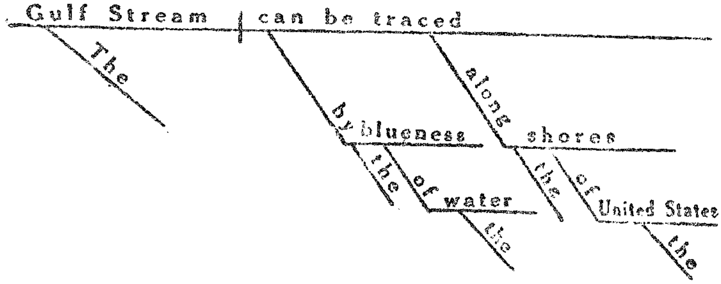
(e) Five large, ripe luscious, mellow apples were picked.

Sample:—

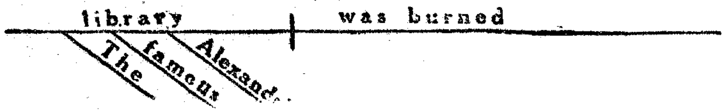
(a)



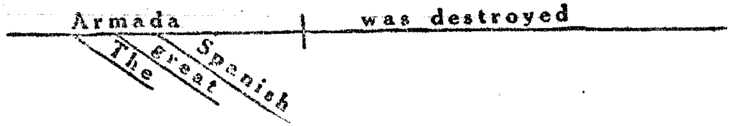
(b)



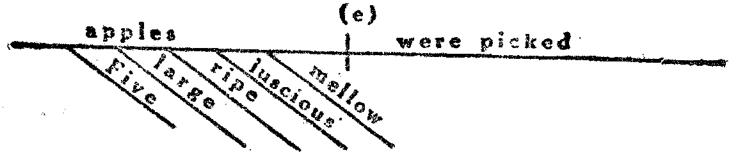
(c)



(d)



(e)



2. Diagram the following sentences:

(a) The stern, rigid puritans often worshiped there.

(b) You will undoubedly be very cordially welcomed.

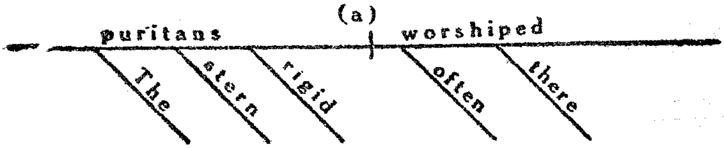
(c) The North pole has been approached in there principal directions.

(d) The first astronomical observatory in Europe was erected at Seville by the Saracens.

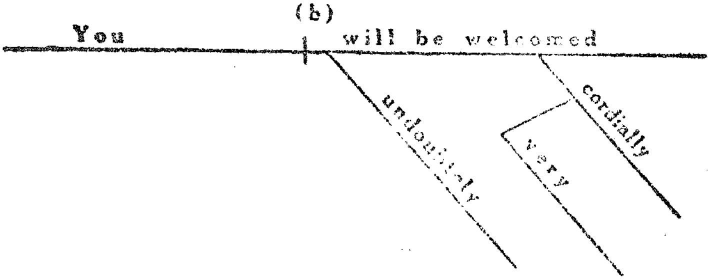
(e) The body of the great Napolean was carried back from St. Helena to Fr.ance.

Sample:—

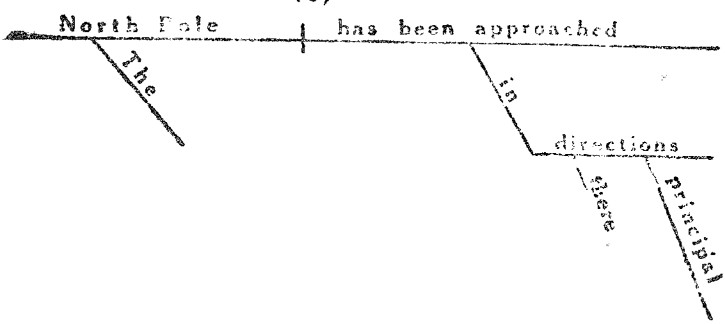
(a)



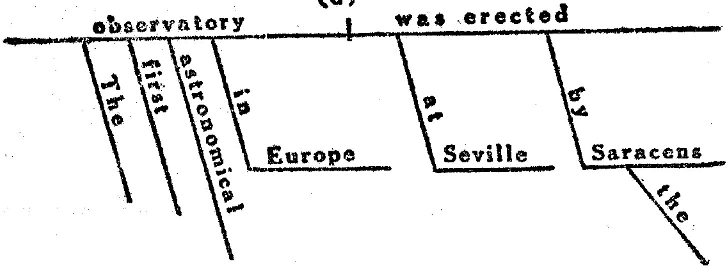
(b)



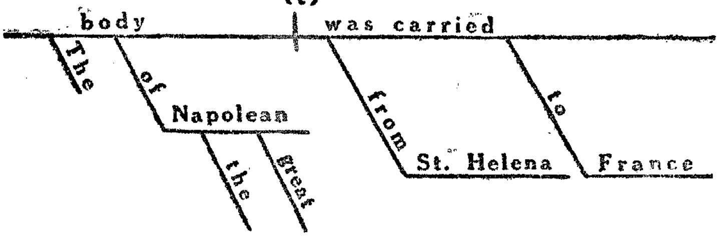
(c)



(d)



(e)



3. Diagram the following sentences:

(a) In a letter we may advise, exhort, comfort, request, and discuss.

(b) The mental, moral, and muscular are improved by use.

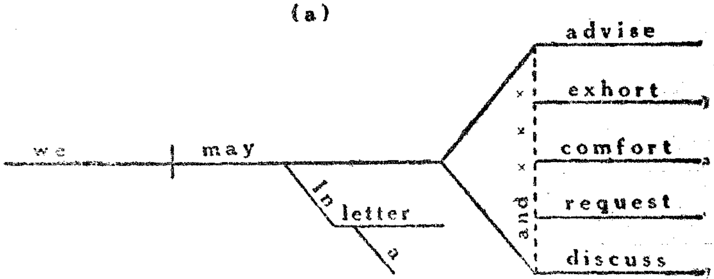
(c) The hero of the Book of Job came from a strange land and of a strange parentage.

(d) The optic nerve passes from the brain to the back of the eyeball, and there spreads out.

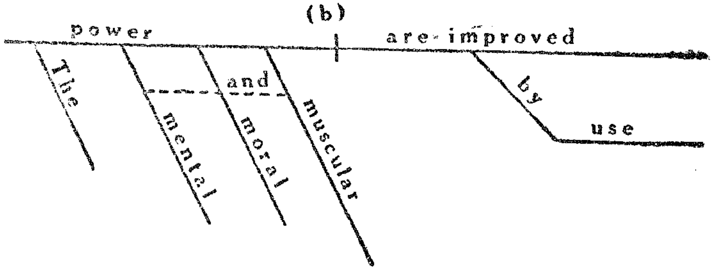
(e) Between the mind of man and the outer world are interposed the nerves of the human body.

Sample:—

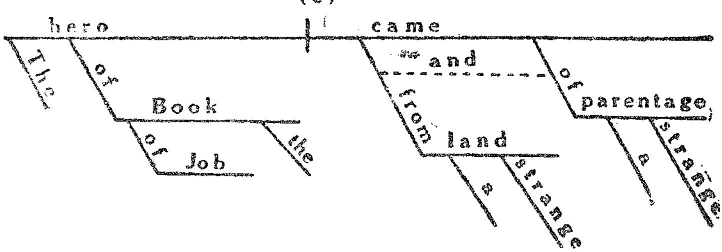
(a)


we
may
In
letter
a
advise
exhort
comfort
request
discuss
and

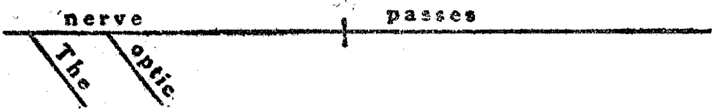
(b)


power
are improved
The
mental
and
moral
muscular
by
use

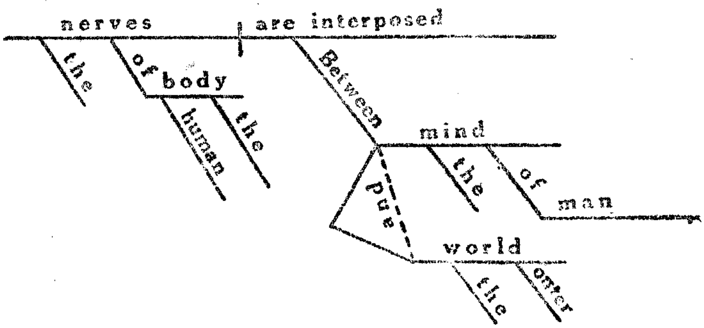
(c)


hero
came
The
of
Book
the
of
Job
and
from
land
a
strange
of
parentage
a
strange

(d)



(e)



4. Diagram the following sentences:

(a) All forms of the lever and all the principal kinds of hinges are found in the body.

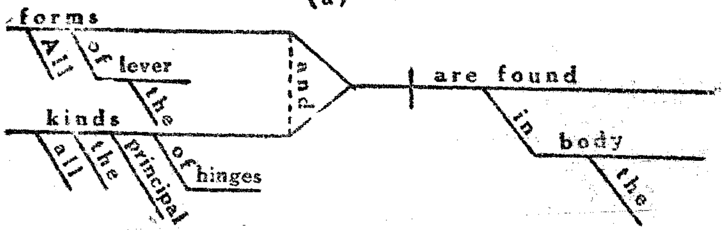
(b) By perfection is meant the full and harmonious development of the faculties.

(c) Ugh! I look forward with dread to to-morrow.

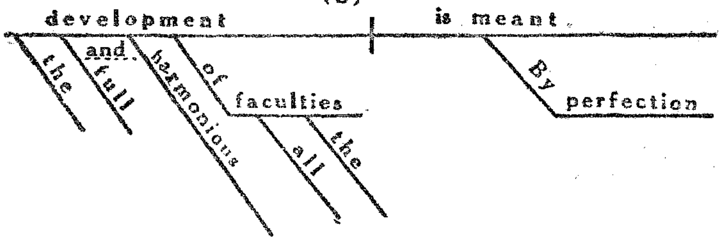
(d) Tush! tush! 't will not appear again.

Sample:—

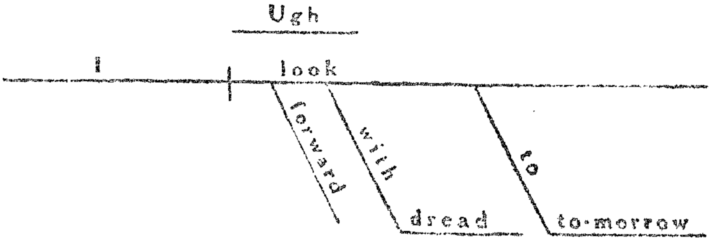
(a)


forms
All
of
lever
the
and
kinds
all
the
principal
of
hinges
are found
in
body
the

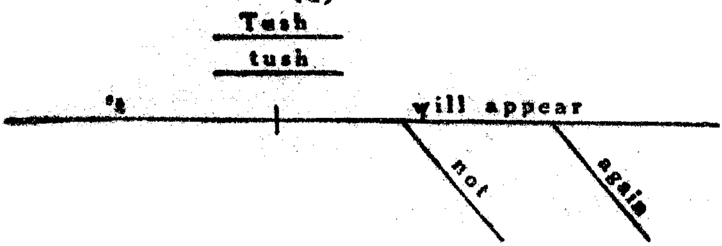
(b)


development
the
and
full
harmonious
of
faculties
all
the
is meant
By
perfection

(c)


Ugh
I
look
forward
with
dread
to
to-morrow

(d)



5. Diagram the following sentences:

(a) The Saxon words in English are simple; homely, and substantial.

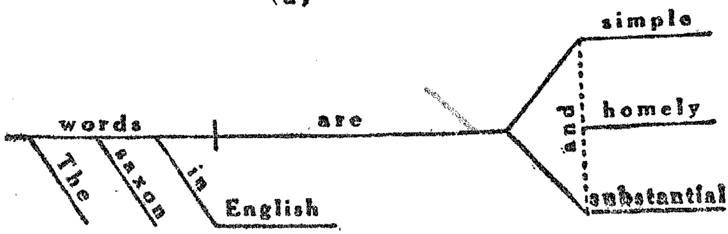
(b) Sir Philip Sydney lived and died the darling of the court, and the gentlemen and idol of the time.

(c) The president and the Senate appoint certain men ministers to foreign courts.

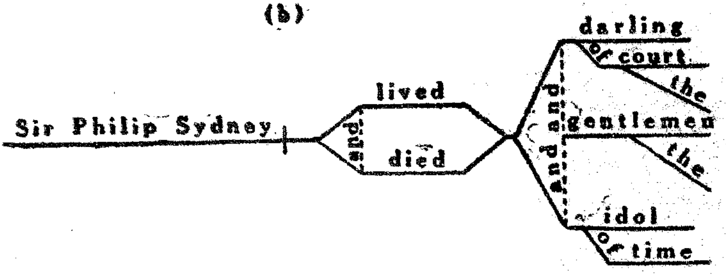
(d) Poetry is only the eloquence and enthusiasm of religion.

Sample:—

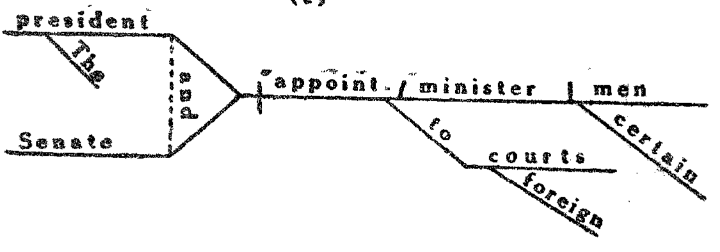
(a)



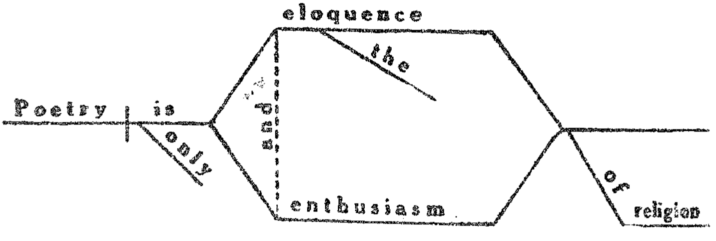
(b)



(c)



(d)



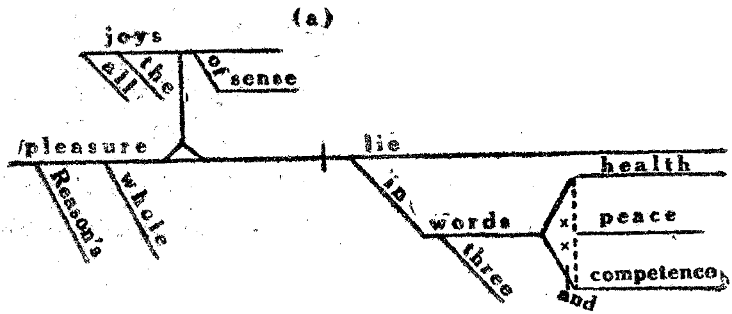
6. Diagram the following sentences:

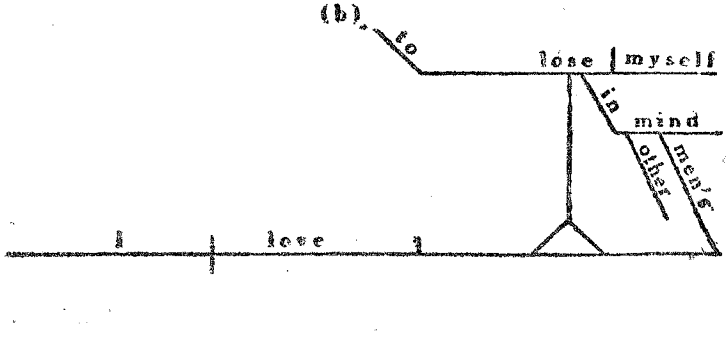
(a) Reason's whole pleasure all the joys of sense lie in three words—health, peace, and competence.

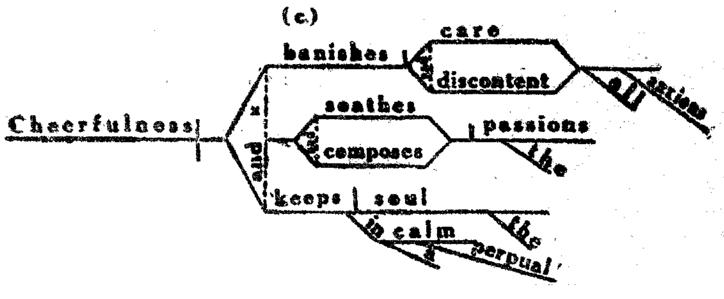
(b) I love to lose myself in other men's minds.

(c) Cheerfulness banishes all axious care and discotent. soathes and composes the passion and keep the soul in a perpeture calm.

Sample:—







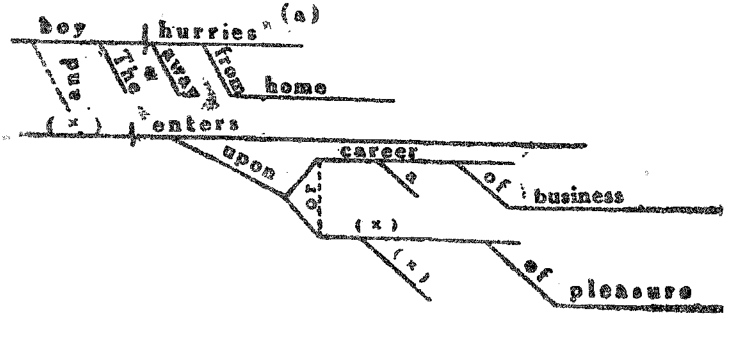
7. Daigram the following sentences:

(a) The boy hurries away from home, and enters upon a career of business or of pleasure.

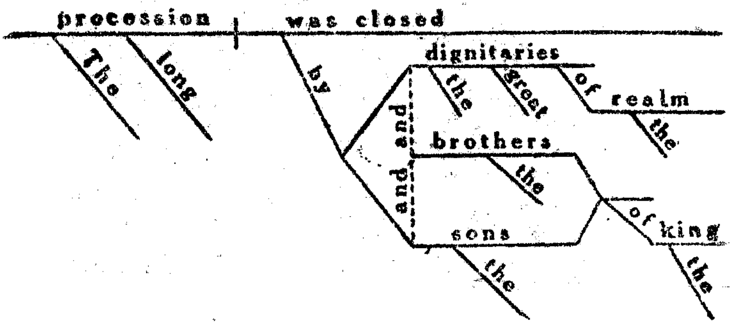
(b) The long procession was closed by the great dignitaries of the realm, and the brothers and sons of the king.

(c) Men and women and children stare cry out and run.

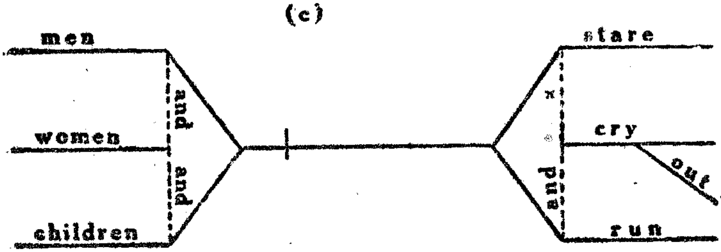
Sample:—



(b)



(c)



8. Diagram the following sentences:

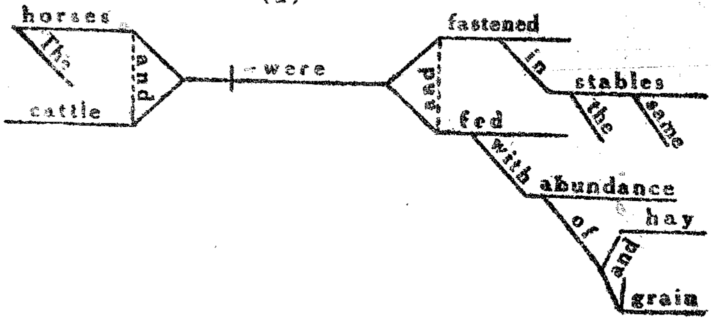
(a) The horses and the cattle were fastened in the same stables and were fed with abundance of hay and grain.

(b) Spring and summer, autumn and winter rush by in quick succession.

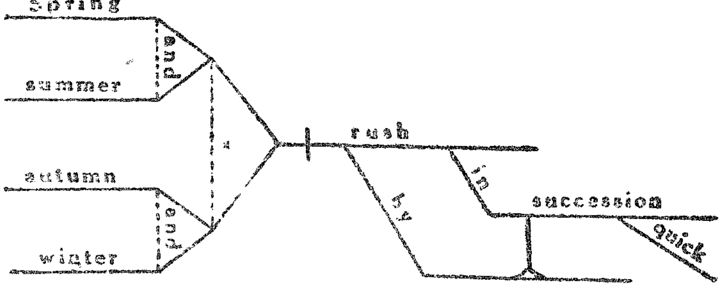
(c) The Hebrew is closely allied to the Arabic the Phoenicion the Syriac and the Chaldee.

Sample:—

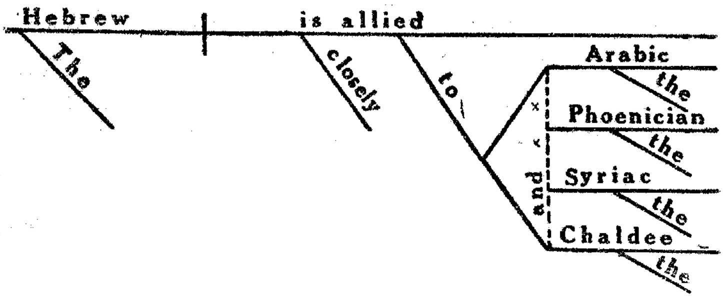
(a)



(b)



(c)



9. Diagram the following sentences:

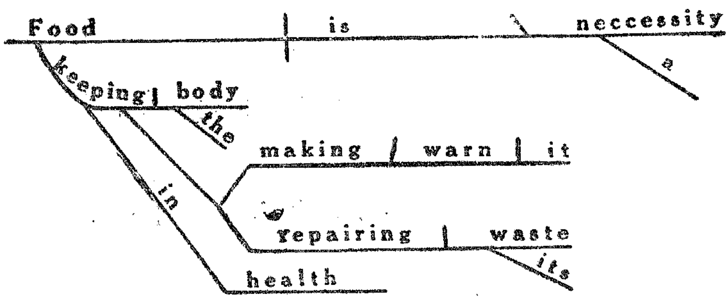
(a) Food, keeping the body in health by making it warn and repairing its waste, is a necessity.

(b) To be, or not to be,—that is the question.

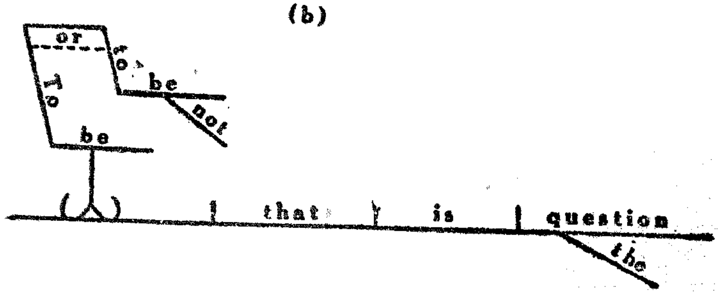
(c) I supposed him to be a gentlemen.

Sample:—

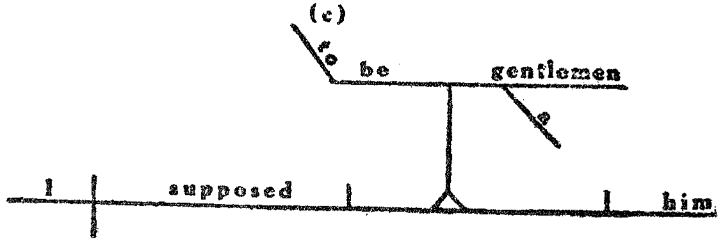
(a)



(b)



(c)



10. Diagram the following sentences:

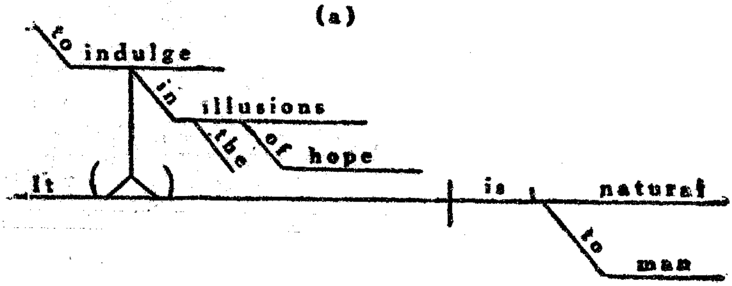
(a) It is natural to man to indulge in the illusions of hope.

(b) England's debt, to put it in round numbers is $4,000,000,000.

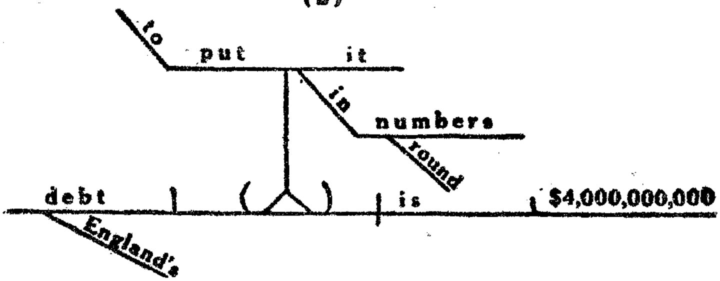
(c) I saw the leaves stir.

Sample:—

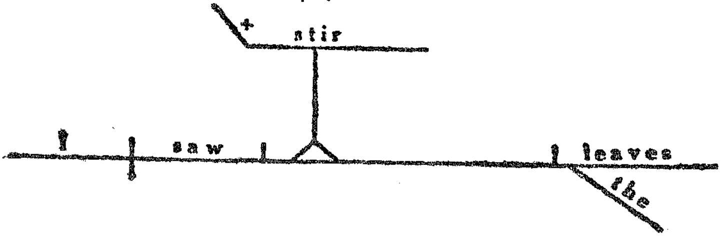
(a)


to indulge
in illusions
the
of hope
It
is
natural
to
man

(b)


to put it
in numbers
round
debt
England's
is
$4,000,000,000

(c)


t stir
I
saw
leaves
the

I 算 術

1. 一個長方柱體的三邊爲56尺，64尺，與392尺；若將此柱體改爲一個容積相同的立方體，問此立方體的邊和對角線各爲若干尺？ （對角線須算出小數三位）

解：長方柱體積爲

$$56\times64\times392=1404928\text{立方尺}$$

故與此長方柱體容積相同的立方體的一邊爲

$$\sqrt[3]{1404928}=112\text{尺}$$

又此立方體的對角線爲

$$\sqrt{3\times(112)^2}=112\sqrt{3}=112\times1.732=193.984\text{尺}$$

2. 兩個男人和五個小孩共作一件工作，經過六日才做得一半；以後加一個男人和一個小孩，經過三天又做得這件工作的三分之一，問須再加幾個男人方能使所餘工作在一日內做完？

解：兩個男人和五個小孩一日作工爲$\frac{1}{2}\div6=\frac{1}{12}$；

三個男人和六個小孩一日作工爲$\frac{1}{3}\div3=\frac{1}{9}$；

故一個男人和一個小孩一日作工爲$\frac{1}{9}-\frac{1}{12}=\frac{1}{36}$，

卽二個男人和二個小孩一日作工爲$2\times 1/36=1/18$，

又知一個男人和二個小孩一日作工爲$1/9\div 3=1/27$，

故一個男人每日能作工$1/18-1/27=1/54$；

而所餘工作爲

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-1/9=1/18$$

故 $1/18\div 1/54=1/18\times 54=3$

答：須再加男人三個。

3. 甲乙丙三人合股做買賣，甲與乙所出股銀之比爲 3:2；乙與丙所出股銀之比爲 4:5；至年終共得純利銀 1500元若按所出股銀之比例分派，問三人各得銀若干？

解：甲乙所出股銀之比爲3:2卽6:4

故甲乙丙三人所出股銀之比爲

$$6:4:5$$

卽甲應得利銀爲 $\dfrac{1500}{6+4+5}\times 6=600$元

乙應得利銀爲 $\dfrac{1500}{6+4+5}\times 4=400$元

丙應得利銀爲 $\dfrac{1500}{6+4+5}\times 5=500$元

4. 甲乙丙三人欲造一塔：設甲乙二人同造須360日完工；乙丙二人同造須 280日完工；丙甲二人同造須 315日完工，今若甲乙丙各自一人獨造，或甲乙丙三人同造須幾日完工？

解：甲乙二人同造每日能作工 1/360，

乙丙二人同造每日能作工 1/280，

丙甲二人同造每日能作工 1/315，

故甲乙丙三人同造每日能作工

$$\left(\frac{1}{360}+\frac{1}{280}+\frac{1}{315}\right)\div 2=\frac{7+9+8}{2520}\div 2=\frac{1}{210};$$

故知甲乙丙三人同造須

$$1\div\frac{1}{210}=1\times\frac{210}{1}=210\text{日}$$

而甲一人獨造一日作工1/210－1/280＝1/840，

乙一人獨造一日作工1/210－1/315＝1/630，

丙一人獨造一日作工1/210－1/360＝1/504，

故各自一人獨造甲須1÷1/840＝840日

乙須1÷1/630＝630日

丙須1÷1/504＝504日

5. 七人同耘一田，每日工作10時，六日可竣事；今以五人耘之，八日而竣，問每日須工作幾時？

解：設 x 為所求之時間　則

$$\left.\begin{matrix}7:5\\6:8\end{matrix}\right\}=x:10 \qquad \therefore x=\frac{7\times6\times10}{5\times8}=10\tfrac{1}{2}\text{時}$$

6. 空浴盆設有冷熱二水管，若二管齊開，則6分鐘注滿一盆，僅開冷水管則須 10 分鐘注滿一盆，問僅開熱水管須幾分鐘？

解：二水管齊開每分鐘能注入此浴盆之$\frac{1}{6}$，

僅開冷水管每分鐘能注入此浴盆之$^1/_{10}$，

故僅開熱水管每分鐘能注入此浴盆之$\frac{1}{6}-{}^1/_{10}$即$^1/_{15}$，

故僅開熱水管欲注滿此盆須

$1\div{}^1/_{15}=15$分鐘。

7. 銀500元分給與甲乙丙三人，甲乙所得之比為 6:5，若甲乙各用去80元，則其所餘之數恰等於丙所得之數。問三人各得若干元？

解：因500元中用去兩倍80元以後，所餘恰為丙所得數之兩倍故丙所得應為

$(500-2\times80)\div2=170$元

卽甲乙二人應共得$500-170=330$元

故甲所得爲$\frac{330}{6+5}\times 6=180$元

乙所得爲$\frac{330}{6+5}\times 5=150$元。

8. 甲乙二人以相等資本營商，甲獲利五分之一；乙虧損200元於是甲有金額適爲乙有金額之二倍。 問二人之資本若干？

解：甲獲利後所有金額之成數爲$1+{}^1/_5$

而乙虧損後金額之成數爲$(1+{}^1/_5)\div 2$

故乙虧損之200元恰與 $1-[(1+{}^1/_5)\div 2]$相當

卽 $200\div[(1+{}^1/_5)\div 2]=200\div{}^2/_5=200\times{}^5/_2=500$元

答：資本爲500元。

9. 某工程役使男15人，女12人，童子9人，須50日可成；其動作能率之比爲男3女2童1。 今有工程比前大四倍；雇用男9人，女15，童子18人。 問幾日可成？

解：因其動作能率之比爲男3女2童1，故男15人女12人童子9人能率之比等於$3\times 15+2\times 12+1\times 9=78$

又男9人女15人童子18人能率之比等於 $3\times 9+2\times 15+1\times 18=75$

故每日以78之能率作之則須$50\times4=200$日成之

今每日以75之能率作之若須 x 日完成，則得次之比

例式　$75:78=200:x$

$\therefore x=208$，　卽所求之日數。

10. 甲行5步時乙行6步；乙行7步時丙行8步；丙行9步時丁行10步；其各一步之長之比爲15:14:12:10。　問甲行63丈時丁行幾何？

解：令甲行63丈時丁行 x 丈則

$$\begin{array}{llcll}
\text{丁} & x & & \text{甲} & 63 \\
\text{甲} & 15\times5 & & \text{乙} & 14\times6 \\
\text{乙} & 14\times7 & & \text{丙} & 12\times8 \\
\text{丙} & 12\times9 & & \text{丁} & 10\times10
\end{array}$$

$$\text{故}\ x=\frac{63\times14\times6\times12\times8\times10\times10}{15\times5\times14\times7\times12\times9}=64\text{丈}$$

11. 甲地至乙地爲58里，某人由甲至乙已行距離之

$$\frac{2\frac{1}{2}-1\frac{1}{3}\times2\frac{1}{4}+1\frac{7}{9}}{(2\frac{1}{2}-1\frac{1}{3})\times(2\frac{1}{4}+1\frac{7}{9})}\times\frac{\frac{2}{11}+\frac{1}{2}}{\frac{4}{7}-\frac{3}{11}}$$

問至乙地尙有幾里？

解：

$$原分數式=\frac{{}^5/_2-{}^4/_3\times{}^9/_4+{}^{16}/_9}{({}^5/_2-{}^4/_3)\times({}^9/_4+{}^{16}/_9)}\times\frac{{}^{4+11}/_{22}}{{}^{44-21}/_{77}}$$

$$=\frac{{}^{23}/_{18}}{{}^7/_6\times{}^{145}/_{36}}\times\frac{{}^{15}/_{22}}{{}^{25}/_{77}}=\frac{23\times15\times6\times66\times77}{18\times22\times7\times145\times23}=\frac{18}{29}$$

故　$58\times(1-{}^{18}/_{29})=58\times{}^{11}/_{29}=22$里

答倘有22里

12. 今有男12人，女8人，童20人，共分銀232元：男一人之所得二倍於女一人之所得；女一人之所得三倍於童一人之所得。問各一人得銀若干？

解：由題意知男一人之所得六倍於童一人之所得；故男12人，女8人，童20人所得爲童一人所得之

$(6\times12+3\times8+20)$倍卽116倍

故童子一人所得爲

$232\div116=2$元。

女一人之所得爲$3\times2=6$元。

男一人之所得爲$6\times2=12$元。

13. 父年52歲，子年8歲，問幾年後，父年爲子年之5倍？又幾年前父年爲子年之12倍？

解：父子年齡之差爲 $52-8=44$ 歲，每年父子年齡各增加1歲，故無論何時其差恆爲44歲。今父年爲子年之5倍則父子年齡之差恰爲子年之4倍。而此時父子年齡之差仍爲44，卽子之年齡之4倍爲44歲

$$故子年=44\div 4=11歲$$

但子年現爲8歲，故 $11-8=3$，卽3年後也。

又 $(12\times 8-52)\div(12-1)=44\div 11=4$

卽4年前也。

14. 兎鶴同籠，頭數共爲60，足數共爲200。問各爲若干頭？

解：若60頭皆爲鶴，則因每鶴爲2足，故足數當爲 $2\times 60=120$ 隻是比此問題之足數少 $200-120=80$ 隻。

若於其中將兎與鶴換入一頭，則頭數無所增減；但兎爲4足與鶴相差 $4-2$ 卽2足，故足數當增加2隻，若欲將所少之80隻足數悉補之則必換入 $80\div 2=40$ 頭，此40頭卽兎之頭數。

故 $60-40=20$ 爲鶴之頭數也。

15. 有二舟同時甲自某河之下埠向上埠，乙自上埠向下埠划行，其划行速度甲舟爲每時45里乙舟爲51里，經9小時後

於兩埠距離中央之下流243里之處二舟相遇。問此河每時水流速度？

解：甲乙二舟划行速度之差爲$51-45=6$里而二舟自中央下流243里之處相遇，故甲舟所行比全距離之半多243里；乙所行比全距離之半少243里，是兩舟所行里數之差爲$2\times243=486$里而其時間之差爲9時，故知二舟每時所行里數之差爲$486\div9=54$里

又因甲舟所行爲逆流，故每時速度爲划行與水流速度之差乙舟所行爲順流，故每時速度爲划行與水流速度之和，故二舟每時之差54里，即划行速度之差6里與水流速度之2倍

故得　$54-6=48$爲水流速度之2倍

即水流速度爲　$48\div2=24$里。

16. 時計之長針與短針，4時至5時間相重爲何時？

解：短針指4時長針指12時，故長針若比短針多走20分，則短針當與長針相重，而長針走12分每比短針多走11分

故長針走 $^{12}/_{11}$ 分當追近短針1分

故長針走 $^{12}/_{11}\times20$分當追近短針20分，故所求之數爲

$^{12}/_{11}\times20$　即$21\ ^{9}/_{11}$分

即二針相重於4時21分49秒 $^{1}/_{11}$。

17. 試證明二數之最小公倍數與最大公約數之乘積等於原二數之相乘積。

證：設 G 爲二數之最大公約數

a, b 爲以 G 除二數之商；故二數爲 $G\times a$, $G\times b$.

因 a 與 b 必爲互素數，否則必有一他公約數，若此公約數爲 d，則 $G\times d$ 必能整除二數，但已設 G 爲最大公約數故 a 與 b 必再無公約數，卽有亦爲 $d=1$，因而二數之最小公倍數爲 $G\times a\times b$ 之形狀，故最大公約數與最小公倍數之乘積爲

$$G\times(G\times a\times b)=(G\times a)\times(G\times b)$$

等於原二數之相乘積甚明。

18. 某數以14除之餘13，以25除之餘24，以36除之餘35，試求某數最小時爲若干？

解：各剩餘皆爲比除數少1之數，故某數必爲14之倍數少1，同時爲25之倍數少1，爲36之倍數少1，卽某數必爲14，25，36 三數之最小公倍數少1，而此三數之最小公倍數爲 6300　　故某數爲

$$6300-1=6299。$$

19. 某船順流下駛，最初以18里之速度行5小時，其後4時行60里，又最後遇順風每時以30里之速度行若干小時，由是平均每小時之速度爲24里。問其當順風時行幾小時？

解：最初每小時行18里，其次每小時行 $^{60}/_{4}$ 里，卽15里，最後每小時行30里，平均每小時行24里，故得

	過或不足	時間
18里	6里不足	5
15里	9里不足	4
平均24里		
30里	6里　過	x

故 $x=(6\times5+9\times4)\div6=11$

答 11 小時。

20. 設分銀洋120元與甲乙丙三人，但知甲乙共得90元，甲丙共得80元。求各得若干？

解：因　$90+80=170$元爲甲所得之兩倍及乙丙之和

故　$170-120=50$元爲甲所得

$90\quad50=40$元爲乙所得

$80-50=30$元爲丙所得。

21. 連續5整數之和爲90，求各數若干？

解：連續整數必次第增1，故第二數比最小數多1，第三數

比最小數多2，第四數比最小數多3，第五數比最小數多4，故和數90爲最小數之5倍多 $1+2+3+4=10$，卽自90減10得80爲最小數之五倍，故最小數爲

$80\div5=16$，其他四數爲17，18，19，20。

22. 甲乙二人所有銀洋之比若3:7，若將乙所有銀之三分之一與甲次將甲所有銀之十八分之一與乙；則甲比乙多2元。問各原有銀洋若干？

解：甲爲3乙爲7，故乙將 $7/3$ 與甲，則甲爲 $3\,7/3$，而乙爲 $7-7/3=4\frac{2}{3}$ 次甲將 $3/18$ 卽 $1/6$ 與乙則甲爲 $3\,7/3-\frac{1}{6}=5\frac{1}{6}$，而乙爲 $4\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=4\,5/6$，由是甲比乙多 $5\frac{1}{6}-4\,5/6=\frac{1}{3}$，而相當於銀洋2元

故甲原有銀洋可如下求之

$\frac{1}{3}:3=2:x \qquad \therefore\ x=18$元（甲）

乙原有銀洋亦如下求得

$\frac{1}{3}:7=2:x \qquad \therefore\ x=42$元（乙）

23. 在5時與6時間表中之長針與短針成直角爲何時？

解：因在5時與6時間兩針成直角有兩次，其第一次可求之如下在5時之長針指XII短針指V，卽長針比短針多走

$25-15=10$分，則爲兩針成直角之時，但長針每行12分比短針多行$12-1=11$分，因有下之比例式

$$11:10=12:x \qquad \therefore x=10^{10}/_{11}\text{分}=10\text{分}54^{6}/_{11}\text{秒}$$

卽第一次兩針成直角之時爲 5時10分54秒 $^{6}/_{11}$

又第二次兩針成直角之比例式爲

$$11:25+15=12:x \quad \therefore x=43^{7}/_{11}\text{分}=43\text{分}38\text{秒}^{2}/_{11},$$

卽第二次兩針成直角之時爲5時43分38秒 $^{2}/_{11}$。

24. 某旅客晴一日行48里，陰一日行36里，雨一日行30里，今往某地有晴天7日陰3日平均每日行39里。問雨天有若干日？

解：由題意得下之混合式

	一日之行程	過或不足		比
晴	48	9	過	7
平均	39			
陰	36	3	不足	3
雨	30	9	不足	x

故晴天7日，陰天3日，則有$9\times7-3\times3=54$里之過剩，故若不加雨天$54\div9=6$日，則不得平均，故所求之雨天爲六日。

25. 試簡單下式:

$$\frac{2}{19}\times\frac{3}{5+\dfrac{2}{7-\frac{2}{3}}}$$

解: 原式等於

$$\frac{2}{19}\times\frac{3}{5+\dfrac{2}{19/3}}=\frac{2}{19}\times\frac{3}{5+6/19}$$

$$=\frac{2}{19}\times\frac{3}{\dfrac{105}{19}}=\frac{2}{19}\times\frac{3\times19}{105}=\frac{2}{35}。$$

26. 化簡下式

$$\frac{3+1/7-2-17/12}{2-13/14+8\,92/112}\times\frac{3}{4}$$

解: 原式$=\dfrac{1+1/7-7/12}{15/14+988/112}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{8/7-7/12}{120+988/112}\times\dfrac{3}{4}$

$$=\frac{47/7\times12}{1108/112}\times\frac{3}{4}=\frac{47\times3\times112}{7\times12\times4\times1108}=\frac{47}{1108}。$$

27. 化簡

$$\frac{(5/8+12\tfrac{1}{4}-10\tfrac{1}{3})\times(2\,3/7+10\,3/14)}{(\tfrac{1}{2}+7\tfrac{3}{4}-5/8)\times(1\,3/7-13\,2/7+\tfrac{1}{2})}$$

解: 原式$=\dfrac{(5/8+49/4-31/3)\times(17/7+143/14)}{(\frac{1}{2}+31/4-5/8)\times(10/7+23/7-\frac{1}{2})}=$

$$\frac{{}^{15+294-248}/_{24}\times{}^{34+143}/_{14}}{{}^{4+62-5}/_{8}\times{}^{20+46-7}/_{14}}=\frac{{}^{61}/_{24}\times{}^{177}/_{14}}{{}^{61}/_{8}\times{}^{59}/_{14}}=$$

$$\frac{61\times177\times8\times14}{24\times14\times61\times59}=1。$$

28. 米2石之價等於大豆3石之價，大豆4石之價等於麥 5石之價，今以大豆27石換米麥共20石，問米麥各幾石？

解：先求大豆27石等於米幾石，

$$\begin{array}{llllll} 米 & X & 石 & 豆 & 27 & 石 \\ 豆 & 3 & 石 & 米 & 2 & 石 \end{array}\qquad \therefore X=18石(米)$$

故有20－18＝2石之差，田是混入若干之麥而求同價之麥與米之比：

$$\begin{array}{llllll} 米 & X & 石 & 麥 & 1 & 石 \\ 麥 & 5 & 石 & 豆 & 4 & 石 \\ 豆 & 3 & 石 & 米 & 2 & 石 \end{array}$$

故X＝ ${}^{8}/_{15}$石(米)

若將麥1石與米交換則其量增 $1-{}^{8}/_{15}={}^{7}/_{15}$石

故欲令增2石，則須 $2\div{}^{7}/_{15}=4{}^{2}/_{7}$石

卽所求之麥之石數爲$4^2/_7$石，而米爲$20-4^2/_7=15^5/_7$石。

29. 有某數其3分之2大於其2分之1爲5. 求某數.

解：因5爲某數之$\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$，　故某數爲　$5\div(\frac{2}{3}-\frac{1}{2})=5\div\frac{1}{6}=30$。

30. 二數之和爲40，其差爲10.　求二數，

解：因　$40+10=50$ 爲大數之兩倍

故大數爲　$50\div2=25$。

小數爲　$40-25=15$。

Ⅱ 代 數

I. 整數及整式之性質及運算

1. 任何實正數及其倒數之和必不小於 2，試證之

解題：設a為一實正數　試證明　$a+1/a \geqq 2$

證：因　$a-1 \geqq 0$

$\therefore \quad (a-1)^2 \geqq 0$

即　$a^2-2a+1 \geqq 0$

$\therefore \quad a^2+1 \geqq 2a$

因a不為零故得以a除之

$\therefore \quad a+1/a \geqq 2$ 。

2. 若a,b二數不等，試證明 $a^2+b^2>2ab$.

證：若　$a \neq b$　　則　$a-b$為正或為負但 $(a-b)^2$必為正

即　$(a-b)^2>0$

即　$a^2-2ab+b^2>0$

$\therefore \quad a^2+b^2>2ab$。

3. 若a,b為同符號，則 $|a+b|=|a|+|b|$；又若 a,b為異符號時則$|a+b|<|a|+|b|$；　試證明之

證：(i)a, b為同號時

$a^2=|a|^2 \cdots\cdots(1)$

$b^2=|b|^2 \cdots\cdots(2)$

$2ab=2|a||b| \cdots\cdots(3)$

(1)(2)(3)相加得.

$(a+b)^2=(|a|+|b|)^2$

但 $(a+b)^2=|a+b|^2$

$\therefore$ $|a+b|^2=(|a|+|b|)^2$ $\therefore$ $|a+b|=|a|+|b|$

(ii)a, b為異號時則有

$2ab<2|a||b| \cdots\cdots(4)$

(1), (2), (4)相加得

$(a+b)^2<(|a|+|b|)^2$

即 $|a+b|^2<(|a|+|b|)^2$

$\therefore$ $|a+b|<|a|+|b|$。

4. 若$a+b+c=0$ 試證明 $a^3+b^3+c^3=3abc$

證： $a+b=-c$

三方之 $(a+b)^3=-c^3$

即 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=-c^3$

即 $a^3+b^3+c^3=-3ab(a+b)$

$\therefore$ $a^3+b^3+c^3=3abc$。

5. 今欲以x^4+3x^2-b得除盡$x^6+8x^4+5x^2-a$試決定a與b之值，

解：

$$\begin{array}{l|l} x^6+8x^4+5x^2-a & x^4+3x^2-b \\ \cline{2-2} 5x^4+(b+5)x^2-a & \quad x^2+5 \end{array}$$

得剩餘　$(b-10)x^2+(5b-a)$

故欲以x^4+3x^2-b除盡$x^6+8x^4+5x^2-a$必令剩餘爲零

卽令　$b-10=0,\quad 5b-a=0$

$\therefore\quad a=50\qquad b=10$。

6. 若n爲奇數試證明$n(n^2-1)$能被24除盡.

證：　$n(n^2-1)=n(n-1)(n+1)=(n-1)n(n+1)$

因n爲奇數故$n-1$及$n+1$均爲偶數且爲連續二偶數故其一可被2 除盡，他一可被4除盡，

又因$n-1,n,n+1$爲三個連續整數其中至少有一個能被3除盡，故$n(n^2-1)$能被$2\times4\times3=24$除盡。

7. 若n爲偶數則$n(n^2+20)$能被48除盡：試證明之。

證：

$$\begin{aligned} n(n^2+20)&=n(n^2-4+24)\\ &=n(n^2-4)+24n\\ &=n(n-2)(n+2)+24n。\end{aligned}$$

因n爲偶數,則n,$n-2$,$n+2$亦均爲偶數. 故$n(n-2)(n+2)$能爲$2\times2\times2=8$所除盡. 但$n-2$,n,$n+2$爲三個連續偶數故其中至少有一個能爲2除盡，且至少有一個爲4除盡，故$n(n-2)(n+2)$能以$8\times3\times2=48$除盡又24n能以48除盡 故$n(n^2+20)$能以48除盡。

8. 求 $(x4+1)^2$, $(x^2+1)^2$, $(x^2-1)^2$之連乘積.

解: $(x^4+1)^2(x^2+1)^2(x^2-1)^2=[(x^4+1)\ (x^2+1)(x^2-1)]^2=[(x^4+1)(x^4-1)]^2=(x^8-1)^2=x^{16}-2x^8+1$。

9. 試證明 $3^{2n}+7$爲8之倍數.

證: $3^{2n}+7=(3^2)^n+7=9^n+7$

$$=9^n-1^n+8$$

$$=(9-1)(9^{n-1}+\cdots\cdots+1)+8$$

$$=8(9^{n-1}+\cdots\cdots+1)+8$$

因$8(9^{n-1}+\cdots\cdots+1)+8$能以8除盡.

故$3^{2n}+7$爲8之倍數。

10. 試證明$n(n+1)(n+5)$能以6除盡。

證: $n(n+1)(n+5)=n(n+1(n-1+6)$

$$=n(n+1)[(n-1)+6]$$

$$=n(n+1)(n-1)+6n(n+1)$$

因 $n-1,n,n+1$ 爲連續三整故 $n(n+1)(n-1)+6n(n+1)$ 能以6除盡卽 $n(n+1)(n+5)$ 能以6除盡。

11. 試證明 $2^{4n}-1$ 爲15之倍數.

證: $2^{4n}-1=(2^4)^n-1=(16)^n-1^n$

$$=(16-1)(16^{n-1}+\cdots\cdots+1)$$

$$=15(16^{n-1}+\cdots\cdots+1)$$

故 $2^{4n}-1$ 爲15之倍數。

12. 應用分離係數法求 $(2x^3+5x^2+4)(3x^2-4x+5$ 之乘積

解:

$$\begin{array}{rrrrrr}
2 & +5 & 0 & +4 & & \\
3 & -4 & +5 & & & \\
\hline
6 & +15 & 0 & +12 & & \\
 & -8 & -20 & 0 & -16 & \\
 & & +10 & +25 & 0 & +20 \\
\hline
6 & +7 & -10 & +37 & -16 & +20
\end{array}$$

答 $6x^5+7x^4-10x^3+37x^2-10x+20$。

13. 應用分離係數法求 $(4x^5-12x^4+2x^3+9x^2-11x+3)\div(4x^3-2x+3)$ 之商

解：
$$
\begin{array}{rrrrrr|rrrr}
4 & -12 & +2 & +9 & -11 & +3 & 4 & 0 & -2 & +3 \\
\cline{7-10}
4 & +0 & -2 & +3 & & & 1 & -3 & +1 & \\
\cline{1-6}
 & -12 & +4 & +6 & -11 & & & & & \\
 & -12 & -0 & +6 & -9 & & & & & \\
\cline{1-5}
 & & 4 & 0 & -2 & +3 & & & & \\
 & & 4 & 0 & -2 & +3 & & & & \\
\hline\hline
\end{array}
$$

答x^2-3x+1。

II. 因數分解

14. 求$x^{4/3}y^{-1}+4xy^{-1/2}-2x^{2/3}-12x^{1/3}y^{1/2}+9y$ 之平方根

解： 原式$=x^{4/3}y^{-1}+4xy^{-1/2}+6x^{2/3}+4x^{1/3}y^{1/2}+y-$

$8x^{2/3}-16x^{1/3}y^{1/2}+8y$

$=(x^{2/3}y^{-1/2}+2x^{1/3}+y^{1/2})^2\ -8(x^{2/3}+2x^{1/3}$

$y^{1/2}+y)+16(y^{(1/2)})^2$

$=(x^{2/3}y^{-1/2}+2x^{1/3}+y^{1/2})^2\ -8(x^{2/3}y^{-1/2}+$

$2x^{1/3}y^{1/2}+y^{1/2})y^{1/2}+(4y^{1/2})^2$

$=[(x^{2/3}y^{-1/2}+2x^{1/3}+y^{1/2})-4y^{1/2}]^2$

$=(x^{2/3}y^{-1/2}+2x^{1/3}-3y^{1/2})^2$

故原式之平方根爲$x^{2/3}y^{-1/2}+2x^{1/3}-3y^{1/2}$。

15. 試分解$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$爲因數.

解：因 $(x-y)+(y-z)+(z-x)=0$

$$\therefore\quad (x-y)+(y-z)=-(z-x)$$

三方之得 $(x-y)^3+3(x-y)^2(y-z)+3(x-y)$

$$(y-z)^2+(y-z)^3=-(z-x)^3$$

卽 $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=-3(x-y)(y-z)$

$$[(x-y)+(y-z)]=3\underline{(x-y)(y-z)(z-x)}。$$

16. 求$5x^2+32xy-21y^2$之因數.

解：
$$\begin{aligned}&5x^2+32xy-21y^2\\&=5x^2+35xy-3xy-21y^2\\&=(5x^2+35xy)-(3xy+21y^2)\\&=5x(x+7y)-3y(x+7y)\\&=\underline{(5x-3y)(x+7y)}。\end{aligned}$$

17. 求$ax^3-x+a-1$之因數.

解：
$$\begin{aligned}ax^3-x+a-1&=(ax^3-a)-(x-1)\\&=a(x^3-1)-(x-1)\\&=a(x-1)(x^2+x+1)-(x-1)\\&=(x-1)[a(x^2+x+1)-1]\\&=(x-1)(ax^2+ax+a-1)。\end{aligned}$$

18. 求$a^2-b^2+c^2-d^2-2(ac-bd)$之因數.

解：原式$=a^2-b^2+c^2-d^2-2ac+2bd$

$$=(a^2-2ac+c^2)-(b^2-2bd+d^2)$$

$$=(a-c)^2-(b-d)^2$$

$$=(a-c+b-d)(a-c-b+d)$$

$$=(a+b-c-d)(a-b-c+d)$$

19. 求$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$之因數.

解：原式$=[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]-24$

$$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-24$$

$$=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24-24$$

$$=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)$$

$$=(x^2+5x)[x^2+5x+10]=\underline{x(x+5)(x^2+5x+10)}$$

20. 求　$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$之因數.

解：原式$=a^2b-a^2c+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$

$$=(a^2b-ab^2)-(a^2c-b^2c)+(ac^2-bc^2)$$

$$=ab(a-b)-c(a+b)(a-b)+c^2(a-b)$$

$$=(a-b)[ab-c(a+b)+c^2]$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a)。$$

21. $a(a-2b)^3-b(b-2a)^3$ 試分解因數。

解: $a(a-2b)^3-b(b-2a)^3$

$=a(a-b-b)^3-b(-2a+b)^3$

$=a(a-b-b)^3+b(a+a-b)^3$

$=a[(a-b)-b]^3+b[a+(a-b)]^3$

$=a(a-b)^3-3ab(a-b)^2+3ab^2(a-b)-ab^3$

$+a^3b+3a^2b(a-b)+3ab(a-b)^2+b(a-b)^3$

$=a(a-b)^3+b(a-b)^3+3a^2b(a-b)+3ab^2(a-b)$

$=(a+b)(a-b)^3+3ab(a-b)(a+b)+ab(a^2-b^2)$

$=(a+b)(a-b)[(a-b)^2+3ab+ab]$

$=(a+b)(a-b)(a+b)^2=(a-b)(a+b)^3$。

III. 化簡下列各式

22. $$\frac{\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{b-a}}{a+b}=\frac{\frac{a^2}{a-b}-\frac{b^2}{a-b}}{a+b}=\frac{\frac{a^2-b^2}{a-b}}{a+b}$$

$$=\frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)(a-b)}=1。$$

23. $$\frac{\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}}{a+b+c}$$

解：因 $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$

$$=-\frac{a^3}{(a-b)(c-a)}-\frac{b^3}{(b-c)(a-b)}-\frac{c^3}{(c-a)(b-c)}$$

$$=-\frac{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=-\frac{a^3b-a^3c+b^3c-ab^3+ac^3-bc^3}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=-\frac{(a^3b-ab^3)-(a^3c-b^3c)+(ac^3-bc^3)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=-\frac{ab(a^2-b^2)-c(a^3-b^3)+c^3(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=-\frac{(a-b)[ab(a+b)-c(a^2+ab+b^2)+c^3]}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=-\frac{a^2b+ab^2-a^2c-abc-b^2c+c^3}{(b-c)(c-a}$$

$$=-\frac{(b-c)(a^2+ab-bc-c^2)}{(b-c)(c-a)}$$

$$=+\frac{(c^2-a^2)+(bc-ab)}{(c-a)}=\frac{(c-a)(a+b+c)}{c-a}$$

$=a+b+c$。

$$\text{故}\ \frac{\dfrac{a^3}{(a-b)\ (a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-c)\ (b-a)}+\dfrac{c^3}{(c-a)\ (c-b)}}{a+b+c}$$

$$=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1。$$

24. $\dfrac{b\,c}{(a-b)\ (a-c)}(x-a)^2+\dfrac{c\,a}{(b-c)\ (b-a)}(x-b)^2+$

$\dfrac{a\,b}{(c-a)\ (c-b)}(x-c)^2$。

解：原式等於

$$-\frac{bc(b-c)\ (x-a)^2+ca(c-a)\ (x-b)^2+ab(a-b)\ (x-c)^2}{(a-b)\ (b-c)\ (c-a)}$$

$$=-\frac{[bc(b-c)+ca(c+a)+ab(a-b)]x^2-2abc[(b-c)+(c-a)+(a-b)]x+abc[a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)]}{(a-b)\ (b-c)\ (c-a)}$$

$$=-\frac{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}{(a-b)\ (b-c)\ (c-a)}x^2$$

$$=\frac{ab(a-b)+c^2(a-b)-c(a^2-b^2)}{(a-b)\ (b-c)\ (c-a)}x^2$$

$$=\frac{ab+c^2-c(a+b)}{(b-c)\ (c-a)}x^2=\frac{(b-c)\ (c-a)}{(b-c)\ (c-a)}x^2=x^2$$

25. $$\left\{\frac{x}{x+y}+\frac{x}{x-y}\right\}\div\left\{\frac{(x+y)^2}{x-y}+\frac{(x-y)^2}{x+y}\right\},$$

解：原式

$$=\frac{x(x-y)+x(x+y)}{(x+y)(x-y)}\div\frac{(x+y)^3+(x-y)^3}{(x+y)(x-y)}$$

$$=\frac{2x^2}{(x+y)(x-y)}\div$$

$$\frac{[(x+y)+(x-y)][(x+y)^2-(x+y)(x-y)+(x-y)^2]}{(x+y)(x-y)}$$

$$=\frac{2x^2}{(x+y)(x-y)}\times\frac{(x+y)(x-y)}{2\times[2(x^2-y^2)-(x^2-y^2)]}$$

$$=\frac{x}{x^2+3y^2}。$$

26. $$\left(\frac{X_p}{X_r}\right)^{q+r}\left(\frac{X_r}{X_p}\right)^{r+p}\left(\frac{X_p}{X_q}\right)^{p+q}$$

解：原式

$$=\frac{X_q^{q+r}\cdot X_r^{r+p}\cdot X_p^{p+q}}{X_r^{q+r}\cdot X_p^{r+p}\cdot X_q^{p+q}}$$

$$=X_q^{(q+r)-(p+q)}\cdot X_r^{(r+p)-(q+r)}\cdot X_p^{(p+q)-(r+p)}$$

$$=X_q^{r-p}\cdot X_r^{p-q}\cdot X_p^{q-r}$$

$$=\frac{X_q^{r}}{X_q^{p}}\cdot\frac{X_r^{p}}{X_r^{q}}\cdot\frac{X_p^{q}}{X_p^{r}}$$

$$=\left(\frac{X_r}{X_q}\right)^p\left(\frac{X_p}{X_r}\right)^q\left(\frac{X_q}{X_p}\right)^r$$

27. $\dfrac{X^2+Y^2+2XY-Z^2}{Z^2-X^2-Y^2+2XY}\div\dfrac{X+Y+Z}{Y+Z-X}$。

解：原式

$$=\frac{(X+Y)^2-Z^2}{Z^2-(X-Y)^2}\div\frac{(X+Y)+Z}{Z-(X-Y)}$$

$$=\frac{(X+Y+Z)(X+Y+Z)}{(Z+X-Y)(Z-X+Y)}\times\frac{Z-X+Y}{X+Y+Z}=\frac{X+Y-Z}{X-Y+Z}。$$

28. $$\frac{\dfrac{x+a}{x-a}+\dfrac{x+b}{x-b}+\dfrac{x+c}{x-c}-3\,\dfrac{(x+a)(x+b)(x+c)}{(x-a)(x-b)(x-c)}}{\dfrac{x}{x-a}+\dfrac{x}{x-b}+\dfrac{x}{x-c}-3\,\dfrac{x^3+(bc+ca+ab)}{(x-a)(x-b)(x-c)}}$$

解：因其分母

$$\frac{x}{x-a}+\frac{x}{x-b}+\frac{x}{x-c}-3\quad\frac{x^3+(bc+ca+ab)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{2x}{x-a}-1+\frac{2x}{x-b}-1+\frac{2x}{x-c}-1\right)-\right.$$

$$\left.3\left(\frac{2x^3+2(bc+ca+ab)}{(x-a)(x-b)(x--c)}-1\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}+\frac{x+c}{x-c}-3\right.$$

$$\left.\frac{2x^3+2(bc+ca+ab)-(x-a)(x-b)(x-c)}{(x-a)(x-b)(x-c)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}+\frac{x+c}{x-c}-3\right.$$

$$\left.\frac{x^3+(bc+ca+ab)x+(a+b+c)x^2+abc}{(x-a)(x-b)(x-c)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}+\frac{x+c}{x-c}-3\frac{(x+a)(x+b)(x+c)}{(x-a)(x-b)(x-c)}\right\}$$

故原分數式等於2。

IV. 解方程式

29. $$\sqrt{x+19}+\sqrt{x+10}=9.$$

解：兩邊自乘得

$$2x+29+2\sqrt{(x+19)(x+10)}=81$$

移項以2除之

$$\sqrt{(x+19)(x+10)}=26-x$$

各邊再自乘得

$$(x+19)(x+10)=(26-x)^2$$

整理之得　$81x=486$　$\therefore\ x=6$。

30. 解聯立方程式

$$\begin{cases} cy+bz=bc \cdots\cdots\cdots(1) \\ az+cx=ac \cdots\cdots\cdots(2) \\ bx+ay=ab \cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$$

解：以a乘(1)與以b乘(2)相減得

$$bcx-acy=0 \quad \text{即} \quad bx-ay=0 \cdots\cdots\cdots(4)$$

(3)加(4)得 $2bx=ba$ $\therefore x=\dfrac{a}{2}$。

以x之值代入(2)，(3)得$y=\dfrac{b}{2}$，$z=\dfrac{c}{2}$。

31. 解聯立方程式

$$\begin{cases} x^2+xy=6 \cdots\cdots\cdots(1) \\ xy+y^2=10\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解：(1)，(2)相加得

$$(x+y)^2=16 \quad \therefore\ x+y=\pm4\cdots\cdots\cdots(3)$$

但(1)，(2)可變爲

$$x(x+y)=6$$

及 $y(x+y)=10$

以(3)代a入之得

$$\pm4x=6 \text{ 及 } \pm4y=1$$

故得兩組根 $\begin{cases} x=\pm{}^3/_2 \\ y=\pm{}^5/_2 \end{cases}$。

32. 解 $\sqrt{7x-5}+\sqrt{4x-1}=\sqrt{7x-4}+\sqrt{4x-2}$。

解：各邊自乘

$$11x-6+2\sqrt{(7x-5)(4)x(-1)}=11x-6+2$$

$$\sqrt{(7x-4)(4x-2)}$$

整理之 $\sqrt{(7x-5)(4x-1)}=\sqrt{(7x-4)(4x-2)}$

各邊平方 $(7x-5)(4x-1=(7x-4)(4x-2)$

卽 $28x^2-27x+5=28x^2-30+x8$

$\therefore\ 3x=3 \quad \therefore\ x=1$。

33. 解分数式

$$\frac{2+x}{1-x}-\frac{3+x}{2-x}=0$$

以 $(1-x)(2-x)$乘之得

$$(2+x)(2-x)=(1-x)(3+x)$$

即 $4-x^2=3-2x-x^2$

$\therefore 2x=-1 \quad \therefore x=-\frac{1}{2}$。

34. 解聯立方程式

$$\begin{cases} x^2+pxy+y^2=p+2 \cdots\cdots(1) \\ qx^2+xy+Qy^2=2q+1 \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解：以p乘(2)從(1)減之得

$(x^2+y^2)-pq(x^2+y^2)=2(1-pq)$

$\therefore \quad x^2+y^2=2 \cdots\cdots(3)$

以q乘(1)從(2)減之得

$(1-pq)xy=2q+1-pq-2q=1-pq$

$\therefore \quad xy=1$ 或$2xy=2 \cdots\cdots(4)$

(3)加(4)得$(x+y)^2=4$

(3)減(4)得$(x-y)^2=0$

即$x+y=\pm2$

$x-y=0$

故得$\begin{cases} x=\pm1 \\ y=\pm1 \end{cases}$

$\therefore\quad ab(c-a)=a-b \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

(1),(2),(3),三式各邊相乘得

$$a^2b^2c^2(a-b)(b-c)(c-a)=(a-b)(b-c)(c-a)$$

$\therefore\quad (abc)^2=1$。

39. 設 $x^2+y^2+z^2=(yz+zx+xy)$ 求證 $x=y=z.$

證: $2x^2+2y^2+2z^2-2yz-2zx-2xy=0$

即 $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0.$

但 $(x-y)^2$ $(y-z)^2$,及$(z-x)^2$均為正絕不為負

故必 $x-y=0,\quad y-z=0,\quad z-x=0$

$\therefore\quad x=y=z$。

40. 解方程式 $\dfrac{1}{x^2-3x}-\dfrac{1}{9-x^2}=\dfrac{13}{16x}$

解: 原式可寫為 $\dfrac{1}{x(x-3)}+\dfrac{1}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{13}{16x}$

以 $16x(x+3)(x-3)$乘其兩邊得

$$16(x+3)+16x=13(x+3)(x-3)$$

$$32x+48=13x^2-117$$

$\therefore\quad 13x^2-32x-165=0$

卽 $(x-5)(13x+33)=0$

故 $x=5$ 或 $x=-\dfrac{33}{13}$。

41. 解聯立方程式

$$\begin{cases} a^2x+ay+z=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ b^2x+by+z=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \\ c^2x+cy+z=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3) \end{cases}$$

解：(1)減(2) $(a^2-b^2)x+(a-b)y=0$

或 $(a+b)x+y=0 \cdots\cdots (4)$

(2)減(3) $(b+c)x+y=0 \cdots\cdots (5)$

(4)減(5) $(a-c)x=0 \quad \therefore x=0$

將x之值代入(4)得 $y=0$

从(1)得 $z=1$。

42. 解聯立方程式

$$\begin{cases} y+z+t-x=a \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ z+t+x-y=b \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \\ t+x+y-z+c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3) \\ x+y+z-t=d \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4) \end{cases}$$

解：令x+y+z+t=s，故(1)，(2)，(3)，(4)變爲

$$\begin{cases} s-2x=a \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5) \\ s-2y=b \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6) \\ s-2z=c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7) \\ s-2t=d \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8) \end{cases}$$

(5)，(6)，(7)，(8)四式相加得 $4s-2(x+y+z+t)=a+b+c+d$

卽 $s=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$。

从(5)得$x=\frac{1}{2}(s-a)=\frac{1}{4}(-a+b+c+d)$

从(6)得$y=\frac{1}{2}(s-b)=\frac{1}{4}(a-b+c+d)$

从(7)得$z=\frac{1}{2}(s-c)=\frac{1}{4}(a+b-c+d)$

从(8)得$t=\frac{1}{2}(s-d)=\frac{1}{4}(a+b+c-d)$。

43. 有聯立方程式

$$\begin{cases} 2^{y-1}=16^{x-1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 3^{\frac{1}{x}}=9^{\frac{1}{z}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ \sqrt[x]{2^{y-3}}=\sqrt[2x]{8^{z-2}} \cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$$

求x，y，z之值。

解：由(1)　$2^{y-1}=(2^4)^{x-1}=2^{4(x-1)}$

$\therefore$ $y-1=4x-4$ 或 $4x-y-3=0$……$(1)'$

由(2)　$3^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{2}{z}}$　$\therefore$ $\frac{1}{x}=\frac{2}{z}$ 卽 $2x-z=0$……$(2)'$

由(3)　$2^{\frac{y-3}{x}}=8^{\frac{z-2}{2x}}=2^{\frac{3(z-2)}{2x}}$

$\therefore$ $\frac{y-3}{x}=\frac{3(z-2)}{2x}$　卽 $2y-3z=0$………$(3)'$

以3乘$(2)'$減$(3)'$得　$y-3x=0$　$\therefore$ $y=3x$

代入$(1)'$得　$4x-3x-3=0$　$\therefore$ $x=3$。

但 $y=3x$　$\therefore$ $y=9$

由$(2)'$　$z=2x$　$\therefore$ $z=6$。

故得答爲 $\begin{cases} x=3 \\ y=9 \\ z=6 \end{cases}$。

44. 解方程式　$8x^{\frac{3}{2n}}-8x^{-\frac{3}{2n}}=63$。

解：各邊乘以$x^{\frac{3}{2n}}$得

$$8x^{\frac{3}{n}}-8=63x^{\frac{3}{2n}}$$

或 $$8x^{\frac{3}{n}}-63x^{\frac{3}{2n}}-8=0$$

分解因子$\left(x^{\frac{3}{2n}}-8\right)\left(8x^{\frac{3}{2n}}+1\right)=0$

故 $$x^{\frac{3}{2n}}-8=0 \text{ 或 } 8x^{\frac{3}{2n}}+1=0$$

∴ $$x^{\frac{3}{2n}}=8 \text{ 或 } x^{\frac{3}{2n}}=-\frac{1}{8}$$

故 $$x=8^{\frac{2n}{3}}=(2^3)^{\frac{2n}{3}}=\left(\sqrt[3]{2^3}\right)^{2n}=2^{2n}\text{。}$$

或 $$x=\left(-\frac{1}{8}\right)^{\frac{2n}{3}}=\left(-\frac{1}{2^3}\right)^{\frac{2n}{3}}=\frac{1}{2^{2n}}\text{。}$$

45. 解方程式

$$2\sqrt{\frac{x}{a}}+3\sqrt{\frac{a}{x}}=\frac{b}{a}+\frac{6a}{b}.$$

解：令 $\sqrt{\frac{x}{a}}=y$ 則 $\sqrt{\frac{a}{x}}=\frac{1}{y}$

故原式變為$2y+\frac{3}{y}=\frac{b}{a}+\frac{6a}{b}$

以aby各邊乘之

$$2aby^2+3ab=b^2y+6a^2y$$

即 $2aby^2-6a^2y-b^2y+3ab=0$

$$(2aby^2-6a^2y)-(b^2y-3ab)=0$$

$$2ay(by-3a)-b(by-3a)=0$$

即 $(2ay-b)(by-3a)=0$ $\therefore$ $y=\frac{b}{2a}$ 或 $y=\frac{3a}{b}$

即 $\sqrt{\frac{x}{a}}=\frac{b}{2a}$ $\therefore$ $\frac{x}{a}=\frac{b}{4a^2}$ $\therefore$ $x=\frac{b}{4a}$

或 $\sqrt{\frac{x}{a}}=\frac{3a}{b}$ $\therefore$ $\frac{x}{a}=\frac{9a^2}{b^2}$ $\therefore$ $x=\frac{9a^3}{b^2}$。

46. 解方程式

$$(x-5)(x-7)(x+6)(x+4)=504$$

解：　$[(x-5)(x+4)][(x-7)(x+6)]=504$

$$(x^2-x-20)(x^2-x-42)=504$$

$$(x^2-x)^2-62(x^2-x)+840=504$$

卽　$(x^2-x)^2-62(x^2-x)+336=0$

分解因子　$(x^2-x-6)(x^2-x-56)=0$

$\therefore\ x^2-x-6=0$ 或 $x^2-x-56=0$

若　$x^2-x-6=0$ 卽 $(x-3)(x+2)=0$

$\therefore\ x=3$ 或 $x=-2$

若　$x^2-x-56=0$ 卽 $(x-8)(x+7)=0$

$\therefore\ x=-7$ 或 $x=8$

故x有四根3，-2，-7，8。

47. 解方程式

$$x^2-5x+2\sqrt{x^2-5x+3}=12.$$

解：加3於每邊則

$$x^2-5x+3+2\sqrt{x^2-5x+3}=15$$

或　$(\sqrt{x^2-5x+3})^2+2\sqrt{x^2-5x+3}-15=0$

令 $\sqrt{x^2-5x+3}=y$ 則 $y^2+2y+15=0$

即 $(y+5)(y-3)=0$ $\therefore$ $y=-5$ 或 $y=3$

即 $\sqrt{x^2-5x+3}=3$ 平方之

$x^2-5x+3=9$ 即 $x^2-5x-6=0$

即 $(x+1)(x-6)=0$ $\therefore$ $x=6$ 或 $x=-1$

或 $\sqrt{x^2-5x+3}=-5$ 平方之

$x^2-5x+3=25$ 即 $x^2-5x-22=0$

$$\therefore\quad x=\frac{5\pm\sqrt{25+88}}{2}=\frac{1}{2}\left\{5\pm\sqrt{113}\right\}。$$

48. 解方程式

$$\sqrt{3x^2-4x+34}+\sqrt{3x^2-4x-11}=9\cdots\cdots\cdots(1)$$

解：因$(3x^2-4x+34)-(3x^2-4x-11)=45\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

以(1)除(2)得

$$\sqrt{2x^2-4x+34}-\sqrt{3x^2-4x-11}=5\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1)加(3) $2\sqrt{3x^2-4x+34}=14$

即 $\sqrt{3x^2-4x+34}=7$

平方之　$3x^2-4x+34=49$

即　$3x^2-4x-15=0$

$$(x-3)(3x+5)=0$$

故　$x=3$　或　$x=-\frac{5}{3}$。

49. 解四次方程式

$$12x^4-56x^3+89x^2-56x+12=0$$

解：以x^2除全式

$$12x^2-56x+89-56\frac{1}{x}+\frac{12}{x^2}=0$$

整理之　$12(x^2+\frac{1}{x^2})-56(x+\frac{1}{x})+89=0$

令　$x+\frac{1}{x}=y$　则　$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$

故　$12(y^2-2)-56y+89=0$

$$12y^2-56y+65=0$$

即　$(2y-5)(6y-13)=0$

故　$y=\frac{5}{2}$　或　$y=\frac{13}{6}$

即 $\quad x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$ 或 $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{13}{6}.$

若 $\quad x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$ 得 $2x^2-5x+2=0$

即 $\quad (x-2)(2x-1)=0 \quad \therefore\ x=2$ 及 $\dfrac{1}{2}$

若 $\quad x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{13}{6}$ 得 $6x^2-13x+6=0$

即 $\quad (2x-3)(3x-2)=0 \quad \therefore\ x=\dfrac{3}{2}$ 及 $\dfrac{2}{3}$。

50. **解方程式**

$$(a+x)^{\frac{2}{3}}+4(a-x)^{\frac{2}{3}}=5(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

解:兩邊俱以$(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}}$除之得

$$\frac{(a+x)^{2/3}}{(a^2-x^2)^{1/3}}+\frac{4(a+x)^{2/3}}{(a^2-x^2)^{1/3}}=5$$

或 $$\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{3}}+4\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{\frac{1}{3}}-5=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

令 $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{3}}=y$ 则 $\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{y}$

故(2)可寫成

$$y+\frac{4}{y}-5=0 \quad 卽 \quad y^2-5y+4=0$$

$$\therefore \quad (y-1)(y-4)=0$$

$$\therefore \quad y=1 \quad 或 \quad y=4$$

卽 $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{3}}=1$ 或4

若 $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{3}}=1$

$$\frac{a+x}{a-x}=1$$

$$a+x=a-x$$

$\therefore$ $x=0$.

或 $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{3}}=4$

$$\frac{a+x}{a-x}=64$$

$$a+x=64a-64$$

$\therefore$ $65x=63a$ $\therefore$ $x=\frac{63a}{65}$.

51. 解聯立方程式

$$x^4+y^4=82\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x-y=2\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解：設$x=u+v, y=u-v$

由(2)知$v=1$

$\therefore\ x=u+1, y=u-1$ 代入(1)

$$(u+1)^4+(u-1)^4=82$$

$\therefore\ 2(u^4+6u^2+1)=82$

卽 $u^4+6u^2-40=0$

分解因子$(u^2-4)(u^2+10)=0$

$\therefore\ u^2=4$ 或 -10

故 $u=\pm2$ 或 $\pm\sqrt{-10}$

故x及y有下之四組根

$$u=2\text{時}\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}\quad u=-2\begin{cases}x=-1\\y=-3\end{cases}$$

$$u=\sqrt{-10}\begin{cases}x=1\pm\sqrt{-10}\\y=-1+\sqrt{-10}\end{cases}$$

$$u=-\sqrt{-10}\begin{cases}x=1-\sqrt{10}\\y=-1-\sqrt{10}。\end{cases}$$

52. 解聯立方程式

$$(x+y)^{\frac{2}{3}}+2(x-y)^{\frac{2}{3}}=3(x^2-y^2)^{\frac{1}{3}} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$3x-2y=13 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

解：以$(x^2-y^2)^{\frac{1}{3}}$ 或 $(x+y)^{\frac{1}{3}}(x-y)^{\frac{1}{3}}$ 除(1)之兩邊

得 $\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{1}{3}}+2\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^{\frac{1}{3}}=3$

以 $\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{1}{3}}$乘兩邊且移項得

$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{2}{3}}-3\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{1}{3}}+2=0$$

分解因子$\left\{\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right\}\left\{\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{1}{3}}-2\right\}=0$

$\therefore \left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{1}{3}}=1$ 或2

$\therefore \dfrac{x+y}{x-y}=1$ 或8　　$\therefore$ $7x=9y$ 或$y=0$

若$7x=9y$　得$y=\frac{7x}{9}$代入(2)得

$\underbrace{x=\frac{117}{7},及y=13}$　(為一組根)

若$y=0$ 代入(2)得 $x=\frac{13}{3}$

故$\underbrace{x=\frac{13}{3}及y=0}$　(為又一組根)

53. $\left.\begin{array}{l} xy^{1/2}+yx^{1/2}=20 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x^{3/2}+y^{3/2}=65 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{array}\right\}$試解之.

解：令$u=x^{1/2}$　$v=y^{1/2}$ 則

$u^2v+v^2u=20 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

$u^3+v^3=65 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

以3乘(3)加於(4)得

$(u+v)^3=125$

$\therefore\quad u+v=5 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

由(3)　$uv(u+v)=20$

$\therefore\quad uv=4 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$

解(5)及(6)得

$$u=1\text{或}4$$

$$v=4\text{或}1$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{若}u=1\\ v=4\end{array}\right\}\therefore\left\{\begin{array}{l}x=1\\ y=16\end{array}\right.\qquad\left.\begin{array}{r}\text{若}u=4\\ v=1\end{array}\right\}\therefore\left\{\begin{array}{l}x=19\\ y=1\end{array}\right.$$

已知 $\log 2=.30103$，$\log 3=.47772$，$\log 5=.69897$

及 $\log 7=.84510$ 求下列各题x，y之值。

54. $3^{x-2}=5$。

解：$\log(3^{x-2})=\log 5$

即 $(x-2)\log 3=\log 5$

$$\therefore\quad x=2+\frac{\log 5}{\log 3}=2+\frac{.69897}{.47712}=3.465$$

$$\therefore\quad x=3.465。$$

55. $5^{x}=10^{3}$

解：$x\log 5=3\log 10=3$

$$\therefore\quad x=\frac{3}{\log 5}=\frac{3}{.69897}=4.29。$$

56. $21^{x}=2^{2x+1}5^{x}$

解：$x\log 21=(2x+1)\log 2+x\log 5$

$=2x\log 2+\log 2+x\log 5$

$\therefore\ x(\log 21-2\log 2-\log 5)=\log 2$

$x(\log 3+\log 7-2\log 2-\log 5)=\log 2$

即 $x(.47712+.84510-.60206-.69897)=.30103$

$x(.02119)=.30103$

$\therefore\ x=\dfrac{.30103}{.02119}=\dfrac{30103}{2119}=14.206$。

57. $\begin{cases}2^{x+y}=6^{y} & \cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ 3^{x}=3.2^{y+1} & \cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

解：由 (1) $(x+y)\log 2=y\log 6$

即$x\log 2+y(\log 2-\log 6)=0$

或$x\log 2-y\log 3=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

由 (2) $x\log 3=\log 3+(y+1)\log 2$

即 $x\log 3-y\log 2-\log 3-\log 2=0\cdots\cdots(4)$

以 $\log 3$ 乘(4)減去以 $\log 2$ 乘(3)得

$x[(\log 3)^2-(\log 2)^2]=\log 3(\log 3+\log 2)$

$$\therefore \quad x=\frac{\log 3(\log 3+\log 2)}{(\log 3)^2-(\log 2)^2}=\frac{\log 3}{\log 3-\log 2}$$

$$=\frac{.47712}{.47712-.30103}=\frac{.47712}{.17609}=2,709.$$

以x之值代入(3)得

$$y\log 3=2.709\times\log 2$$

$$\therefore \quad y=\frac{2.709\times\log 2}{\log 3}=\frac{2.709\times.30103}{.47712}$$

$$=\frac{.81549027}{.47712}=1.79$$

$\therefore \quad y=1.79$。

58. $\begin{cases}3^{1-x-y}=4^{-y} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ 2^{2x-1}=3^{3y-x} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

解：由 (1) $(1-x-y)\log 3=-y\log 4=-2y\log 2$

$\therefore \quad x\log 3+y(\log 3-2\log 2)=\log 3 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

由 (2) $(2x-1)\log 2=(3y-x)\log 3$

$2x\log 2-\log 2=3y\log 3-x\log 3$

即 $\quad x(2\log 2+\log 3)-3y\log 3=\log 2 \cdots\cdots\cdots(4)$

以 $3\log 3$ 乘 (3) 得 $3x(\log 3)^2+3y(\log 3-2\log 2)\log 3=(\log 3)^2$ ………………………………………… (5)

以 $(\log 3-2\log 2)$ 乘 (4) 得 $x[(\log 3)^2-4(\log 2)^2]-3y(\log 3-2\log 2)\log 3=\log 2.\log 3$ ………………(6)

(5)及(6)相加得

$$4x[(\log 3)^2-(\log 2)^2]=(\log 3)^2+\log 2.\log 3$$

$$\therefore\quad x=\frac{\log 3(\log 3+\log 2)}{4[(\log 3)^2-(\log 2)^2]}=\frac{\log 3}{4(\log 3-\log 2)}$$

$$=\frac{.47712}{4(.47712-.30103)}=\frac{.47712}{.70436}=.677$$

將x之值代入(3)得

$$y=\frac{\log 3(1-.677)}{\log 3-2\log 2}=\frac{.15410976}{-.12494}=-1.24_{\circ}$$

V. 級 數 問 題

59. 自 1 起無論若干個連續奇數之和皆等於奇數數目之平方,試證明之

證: 設奇數數目爲n個則此奇數級數爲

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\cdots\cdots\cdots\cdots(2n-1)$$

故其和爲S則

$$S=\frac{1}{2}\{1+(2n-1)\}n=\frac{1}{2}\cdot 2n^2=n^2。$$

60. 求自1至1000間各奇數之和

解：此級數之首項爲1，末項爲999而公差爲2

故求得項數n

$$999=1+(n-1)\times 2$$

$$2n-2=998$$

$$\therefore\quad n=500$$

由前題知各奇數之和爲n^2卽$(500)^2=250000$。

61. 僅知一等差級之第二項爲第$7\frac{3}{4}$第三十一項爲$\frac{1}{2}$，末項爲$-6\frac{1}{2}$，求第一項及項數

解：若a爲首項d爲公差，n爲項數，l爲末項則

$$a+d=7\frac{3}{4}=\frac{31}{4},\quad a+30d=\frac{1}{2},$$

$$a+(n-1)d=l=-\frac{13}{2}$$

解上諸式得

$a=8,\quad n=59$。

62。有二數其和爲$2\frac{1}{6}$，今若於此二數中插入偶數個中項使成一等差級數，但此等中項之和較項數多1，求插入之項數·

解：設二數爲 a,l，插入項數爲2m於是

$$a+l=2\frac{1}{6}=\frac{13}{6}\quad \text{且插入項數之和}=2m\times\frac{a+l}{2}=$$

$$m(a+l)$$

但項數之和$=2m+1$

$$\therefore\quad m(a+l)=2m+1$$

即 $$\frac{13}{6}m=2m+1$$

$$\therefore\quad m=6$$

故知插入項數爲12。

63。成等差級數四數之和爲 24，並知四數之乘積爲 945 求此四數·

解：設四數爲

$a-3d,\ a-d,\ a+d,\ a+3d.$

故四數之和爲

$4a=24 \qquad \therefore\ a=6.$

又四數之乘積爲 $(a-3d)(a-d)(a+d)(a+3d)=945$

即 $(6-3d)(6-d)(6+d)(6+3d)=945$

$(36-12d-3d^2)(36+12d-3d^2)=945$

即 $(36-3d^2)^2-144d^2=945$

$(12-d^2)^2-16d^2=105$

$d^4-40d^2+39=0$

分解因子 $(d^2-1)(d^2-39)=0$

$\therefore\ d=\pm1$ 或 $d=\pm\sqrt{+39}.$

若 $d=1$ 則四數爲 3，5，7，9.

$d=-1$ 則四數爲 9，7，5，3.

$d=\sqrt{+39}$ 則四數爲 $6-3\sqrt{+39}$，$6-\sqrt{+39}$，

$6+\sqrt{+39}$，$6+3\sqrt{+39}$.

$d=-\sqrt{+39}$ 則四數爲 $6+3\sqrt{+39}$，$6+\sqrt{+39}$，

$6-\sqrt{+39}$，$6-3\sqrt{+39}$。

64. 成等比級數之三數之和爲 19，其連乘積爲 216. 試求此三數.

解：設三數爲 $\frac{a}{r}$，a，ar

則 $\frac{a}{r}\times a\times ar=216$

即 $a^3=216$ $\quad\therefore\quad a=6.$

故三數爲 $\frac{6}{r}$，6，6r

故 $\frac{6}{r}+6+6r=19$

$6-13r+6r^2=0$

分解因子 $(2-3r)(3-2r)=0$ $\quad\therefore\quad r=\frac{2}{3}$ 或 $\frac{3}{2}$

故知三數爲 4，6，9.

65. 等比級數之第五項爲81，第二項爲24，求此級數.

解： $ar^4=81$ $\quad ar=24$

$\therefore\quad \frac{ar^4}{ar}=\frac{81}{24}$ 即 $r^3=\frac{27}{8}$ $\quad\therefore\quad r=\frac{3}{2}$

$\therefore \quad a=16$

故此級數爲 16, 24, 36, 54, 81,…………。

66. 求循環小數 $.4\dot{2}\dot{3}$之値.

解: $.4\dot{2}\dot{3}=.4232323\cdots\cdots$

$$=\frac{4}{10}+\frac{23}{1000}+\frac{23}{100000}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{4}{10}+\frac{23}{10^2}+\frac{23}{10^5}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{4}{10}+\frac{23}{10^3}\left(1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\frac{4}{10}+\frac{23}{10^3}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{10^2}\right)}=\frac{4}{10}+\frac{23}{10^3}\cdot\frac{100}{99}=\frac{419}{990}。$$

67. 若a, b, c, d成等比級數試證明下式

$$(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2=(a-d)^2.$$

證: 因 $\frac{d}{c}=\frac{c}{b}=\frac{b}{a}$

$\therefore \quad b^2=ac,\ c^2=bd,\ ad=bc$

故 $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$

$=b^2+c^2-2bc+c^2+a^2-2ca+a^2+b^2-2ab$

$=a^2+2b^2+2c^2-2ad+d^2-2ac-2bd$

$=a^2-2ad+d^2+2ac-2ac+2bd-2bd$

$=(a-d)^2$。

68. 試於5及11二數之間插入兩個調和中項

解：$\frac{1}{11}$為等差級數之第四項其第一項為$\frac{1}{5}$

今設d為差則

$$\frac{1}{11}=\frac{1}{5}+3d \quad \therefore \quad d=-\frac{2}{55}$$

故二等差中項為

$$\frac{1}{5}-\frac{2}{55}=\frac{9}{55} \text{ 及 } \frac{1}{5}-\frac{4}{55}=\frac{7}{55}$$

故二調和中項為

$$\frac{1}{\frac{9}{55}}=\frac{55}{9}=6\frac{1}{9} \text{ 及 } \frac{1}{\frac{7}{55}}=\frac{55}{7}=7\frac{6}{7}。$$

69. 若a^2，b^2，c^2成等差級數

試證明 $b+c$，$c+a$，$a+b$ 成調和級數

證：因 a^2，b^2，c^2成等差級數若各項加上$ab+ac+bc$

則 $a^2+ab+ac+bc$，$b^2+ab+ac+bc$，

$c^2+ab+ac+bc$ 亦成等差級數

卽用分解因子法得

$(a+b)(c+a)$，$(b+c)(a+b)$，$(c+a)(b+c)$ 亦成等差級數

每項以 $(a+b)(b+c)(c+a)$ 除之得

$\frac{1}{b+c}$，$\frac{1}{c+a}$，$\frac{1}{a+b}$ 亦成等差級數

故 $\frac{1}{\frac{1}{b+c}}$，$\frac{1}{\frac{1}{c+a}}$ $\frac{1}{\frac{1}{a+b}}$ 成調和級數

卽 $b+c$，$c+a$，$a+b$ 成調和級數。

70. 在任何二數間插入兩個等差中項爲A_1，A_2；或插入兩個等比級數中項爲G_1，G_2 或插入兩個調和中項爲H_1，H_2

試證明 G_1G_2：$H_1H_2 = A_1+A_2$：H_1+H_2

證：設x,y爲任意二數則

$$y-A_2=A_1-x \text{ 或 } x+y=A_1+A_2 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{y}{G_2}=\frac{G_1}{x} \text{ 或 } xy=G_1G_2 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{1}{y}-\frac{1}{H_2}=\frac{1}{H_1}-\frac{1}{x} \text{ 或 } \frac{x+y}{xy}=\frac{H_1+H_2}{H_1H_2} \cdots(3)$$

以(2)除(1)得 $\frac{x+y}{xy}=\frac{A_1+A_2}{G_1G_2}$

從(3)故知 $\frac{A_1+A_2}{G_1G_2}=\frac{H_1+H_2}{H_1H^2}$

$\therefore$ $G_1G_2:A_1+A_2=H_1H_2:H_1+H_2$

卽 $G_1G_2:H_1H_2=A_1+A_2:H_1+H_2$

故本題已證明。

VI. 應用問題

71. 有二數，其和爲16，其積爲63；求二數

解：設一數爲x則他數爲16－x

故得方程式如下

$$x(16-x)=63$$

$$16x-x^2=63$$

即　$x^3-16x+63=0$

分解因子　$(x-7)(x-9)=0$

$\therefore\quad x=7$ 或 9.

故二數爲7及9。

72. 二個連續整數之立方差爲1519求二數.

解：設x爲小數 則x＋1爲大數

$$\therefore\quad (x+1)^3-x^3=1519$$

$$3x^2+3x=1519$$

即　$x^2+2-506=0$

分解因子　$(x+23)(x-22)=0$

$$\therefore\quad x=22 \text{ 或 } -23$$

故二數爲22及23；或−23及−22。

73. 某人欲造一個定長與定寬的長方形鐵箱.設箱之高與箱之長相等須用鐵板672平方寸；設箱之高與箱之寬相等須用鐵板512平方寸.問箱之長與寬各若干？

解：設x爲箱之長，y爲箱之寬，則箱之表面積前者爲

$$\left.\begin{array}{r} 2x^2+4xy=672 \\ \text{後者爲}\quad 2y^2+4xy=512 \end{array}\right\}$$

或寫成 $x^2+2xy=336\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$y^2+2xy=256\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$

以16乘(1)與以21乘(2)相減得

$$16x^2-10xy-21y^2=0$$

分解因子

$$(2x-3y)(8x+7y)=0$$

$\therefore\quad 2x-3y=0\qquad$ 或 $\quad 8x+7y=0$

$\therefore\quad y=\frac{2}{3}x\cdots\cdots(3)\qquad$ 或 $\quad y=-\frac{8}{7}\cdots\cdots(4)$

以$y=\frac{2}{3}x$代入(1)則

$$x^2+\frac{4}{3}x^2=336$$

卽 $\frac{7}{3}x^2=336$

$\therefore\quad x^2=144\qquad\therefore\quad x=12$ (只取正數)

由(3) $\quad y=\frac{2}{3}\times 13\qquad\therefore\quad y=8$

以$y=-\frac{8}{7}x$代入(1)則

$$x^2-\frac{16}{7}x^2=336$$

卽 $$-\frac{9}{7}x^2=336$$

解之得x爲虛數與題不合故棄去

故本題答案爲長一尺二寸寬八寸。

74. 父子年齡之和爲100而其年齡之積之十分之一較父年多180.問父子年齡各爲若干？

解：設x爲父年則　100－x爲子年

按題意得方程式

$$\frac{1}{10}(100-x)=x+180$$

$$\therefore \quad x^2-90x+1800=0$$

分解因子

$$(x-60)(x-30)=0$$

$\therefore \quad x=60$　　　　或　$x=30$

x之第二値雖爲正數然不合理，何則？以父年不能較子年爲少故也

卽父年爲60　　　　子年爲40。

75. 某人至某地每時之速度爲8里．而歸時因繞道至他處其路較往路遠3里其每時速度爲9里，但歸路所費之時較往路所費之時多$7\frac{1}{2}$分鐘．問往路及歸路各爲若干里？

解：設x爲往路里數，則歸路爲x＋3里

故 $\frac{x+3}{9}-\frac{x}{8}=\frac{7\frac{1}{2}}{60}=\frac{1}{8}$

即 $\frac{x+3}{9}-\frac{x}{8}=\frac{1}{8}$

以72乘之　　$8(x+3)-9x=9$

解之得　　$x=15$里　而$x+3=18$里

故往路爲15里　歸路爲18里。

76. 一長方形之對角線爲26，對角線與角頂之距離爲12．求垂線所分對角線兩段之長度．

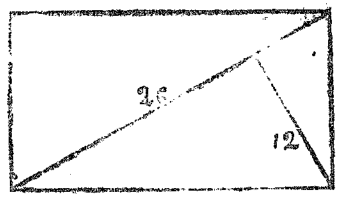
解：設x爲一段之長則他段爲26－x。

由相似三角形得比例式如下

$x:12=12:26-x$

$\therefore\quad x(26-x)=144$

即　$x^2-26+144=0$



分解因子　$(x-18)(x-8)=0$

$\therefore\quad x=18 \qquad$ 或 $\quad x=8$

卽一段爲 18 他段爲 8。

77. 甲乙二人工作，甲三天及乙兩天共作工爲$\frac{14}{15}$；甲兩天及乙三天共作工爲$\frac{9}{10}$. 問每人單獨作工各需幾時?

解: 設甲單獨工作所需日數爲x，

乙單獨工作所需日數爲y；

則甲每日所作之工爲$\frac{1}{x}$，

乙每日所作之工爲$\frac{1}{y}$；

故得方程式系如次

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}=\dfrac{14}{15} \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\[2ex] \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{9}{10} \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

由(1),(2)依$\frac{1}{x}$及$\frac{1}{y}$解之,

以3乘(1)得 $$\frac{9}{x}+\frac{6}{y}=\frac{14}{5}$$

以2乘(2)得 $$\frac{4}{x}+\frac{6}{y}=\frac{9}{5}$$

相減 $$\frac{5}{x}=\frac{5}{5}$$

卽 $$\frac{5}{x}=1 \quad \therefore \quad x=5.$$

以x之値代入(1)得

$$\frac{3}{5}+\frac{2}{y}=\frac{14}{15}$$

$$\frac{2}{y}=\frac{14}{15}-\frac{3}{5}=\frac{1}{3} \qquad \therefore \quad y=6.$$

答每人單獨工作甲需五日乙需六日。

78. 甲乙二旅人同時甲自P地動身,乙自Q地動身同方向而行,經若干時後甲追及乙,計其行程共15里.此時乙距P地以其每時速度算之相當於其9時間之行程.又甲過Q地時為距今四時前.問P,Q兩地距離為若干里?

解：設x爲P,Q兩地間距離里數，y爲乙每時速度里數則甲追及乙時之處爲與Q地距$(9y-x)$里故知甲每時速度爲$\frac{9y-x}{4}$里故得次之二方程式

$$2\times 9y-x=15\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{9y}{\frac{9y-x}{4}}=\frac{9y-x}{y}\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(2) $$9y^2=\frac{(9y-x)^2}{4}$$

$$\therefore\quad 3y=\pm\frac{9y-x}{2}\qquad\therefore\quad 6y=\pm(9y-x)$$

故 $y=\frac{x}{3}$ 或 $y=\frac{x}{15}$

以$y=\frac{x}{3}$代入(1)得

$$x=3.$$

若$x=3$里則由(1)得$y=1$里故甲每時速度爲

$$\frac{9-3}{4}=\frac{3}{2}\text{里}$$

而甲追及乙之時間恰爲6時間，故此時乙距甲地爲

$$\frac{3}{2}\times 6=9\text{里}$$

而以其速行之，則如題意需9時．故知$x=3$里爲本問題之答案．若$x=75$里則$y=5$里而甲每時之速度爲

$\dfrac{9\times 5-75}{4}=-\dfrac{30}{4}$里爲負數故 $x=75$ 爲不適於本問題之答案故$x=75$應棄去。

VII. 雜　題

79. 若a，b均爲正數且不等試證明

$$\frac{a^3+b^3}{2}>\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$$

證：因　$(a-b^2>0$ 及 $a+b>0$

$\therefore$　$(a+b)(a-b)^2>0$

卽　$a^3+b^3-a^2b-ab^2>0$

$\therefore$　$3(a^3+b^3-a^2b-ab^2>0$

卽　$4(a^3+b^3)-(a^3+b^3+3a^2b+3ab^2)>0$

$4(a^3+b^3)-(a+b)^3>0$

$$\therefore \quad 4(a^3+b^3)>(a+b)^3$$

$$故 \quad \frac{a^3+b^3}{2}>\left(\frac{a+b}{2}\right)^3。$$

80. 若a,b,c,d均爲正且不等試證

$$(a+b+c+d)(a^3+b^3+c^3+d^3)>(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

證：因 $(a+b+c+d)(a^3+b^3+c^3+d^3)-(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$

$$=ab(a-b)^2+ac(a-c)^2+ad(a-d)^2+bc(b-c)^2+bd(b-d)^2+cd(c-d)^2$$

因 $ab(a-b)^2+ac(a-c)^2+ad(a-d)^2+bc(b-c)^2+bd(b-d)^2+cd(c-d)^2>0$

$\therefore \quad (a+b+c+d)(a^3+b^3+c^3+d^3)-(a^2+b^2+c^2+d^2)^2>0$

故 $(a+b+c+d)(a^3+b^3+c^3+d^3)>(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$。

81. 解聯立方程式

$$\begin{cases} x^2-yz=a^2 \\ y^2-zx=b^2 \\ z^2-xy=c^2 \end{cases}$$

解：順次以y,z,x乘三式並相加得

$$c^2x+a^2y+b^2z=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

順次以z，x，y乘三式並相加得

$$b^2x+c^2y+a^2z=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

從(1)，(2)消去z：以a^2乘(1)與以b^2乘(2)相減得

$$(b^4-c^2a^2)x-(a^4-b^2c^2)y=0$$

$$\therefore\quad \frac{x}{a^4-b^2c^2}=\frac{y}{b^4-c^2a^2}$$

同理得 $$\frac{x}{a^4-b^2c^2}=\frac{z}{c^4-a^2b^2}$$

令 $$\frac{x}{a^4-b^2c^2}=\frac{y}{b^4-c^2a^2}=\frac{z}{c^4-a^2b^2}=k$$

$$\therefore\quad x=k(a^4-b^2c^2)\quad y=k(b^4-c^2a^2),\ z=k(c^4-a^2b^2)$$

代入原式得 $k^2(a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2)=1$

$$\therefore\quad k=\pm\frac{1}{\sqrt{a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2}}$$

故 $$\frac{x}{a^4-b^2c^2}=\frac{y}{b^4-c^2a^2}=\frac{z}{c^4-a^2b^2}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2}}。$$

82. 試證明 $\begin{vmatrix} b+c & a-b & a \\ c+a & b-c & b \\ a+b & c-a & c \end{vmatrix} = 3abc-a^3-b^3-c^3$

證：$\begin{vmatrix} b+c & a-b & a \\ c+a & b-c & b \\ a+b & c-a & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a & a \\ c & b & b \\ a & c & c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & b & a \\ c & c & b \\ a & a & c \end{vmatrix}$

$+\begin{vmatrix} c & a & a \\ a & b & b \\ b & c & c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{vmatrix}$

因右邊前三個行列式均等於零

故 $\begin{vmatrix} b+c & a-b & a \\ c+a & b-c & b \\ a+b & c-a & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{vmatrix}$

$= -[c(c^2-ab)+b(b^2-ca)+a(a^2-bc)]$

$= 3abc-a^3-b^3-c^3$。

83. 求下行列式之值

$$\begin{vmatrix} 67 & 19 & 21 \\ 39 & 13 & 14 \\ 81 & 24 & 26 \end{vmatrix}$$

解：

$$\begin{vmatrix} 67 & 19 & 21 \\ 39 & 13 & 14 \\ 81 & 24 & 26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10+57 & 19 & 21 \\ 0+39 & 13 & 14 \\ 9+72 & 24 & 26 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 10 & 19 & 21 \\ 0 & 13 & 14 \\ 9 & 24 & 26 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 57 & 19 & 21 \\ 39 & 13 & 14 \\ 72 & 24 & 26 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 10 & 19 & 21 \\ 0 & 13 & 14 \\ 9 & 24 & 26 \end{vmatrix} + 3\underbrace{\begin{vmatrix} 19 & 19 & 21 \\ 13 & 13 & 14 \\ 24 & 24 & 26 \end{vmatrix}}_{\shortparallel \atop 0}$$

$$= \begin{vmatrix} 10 & 19 & 21 \\ 0 & 13 & 14 \\ 9 & 24 & 26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 19 & 19+2 \\ 0 & 13 & 13+1 \\ 9 & 24 & 24+2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 10 & 19 & 2 \\ 0 & 13 & 1 \\ 9 & 24 & 2 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 24 & 2 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 19 & 2 \\ 13 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 20 - 63 = -43。$$

84. 試證明

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

證：原行列式

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

（第一行爲三行之和）

$$= (a+b+c) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c) \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c) \times \begin{vmatrix} -b-c-a & 0 \\ 0 & -c-b-a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c) \times \begin{vmatrix} a+b+c & 0 \\ 0 & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)^3。$$

85．試從下三方程式中消去x，y，z

$$y^2+z^2=ayz,\quad z^2+x^2=bzx,\quad x^2+y^2=cxy$$

解：順次以yz，zx，xy分除三式得

$$\frac{y}{z}+\frac{z}{y}=a,\quad \frac{z}{x}+\frac{x}{z}=b,\quad \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=c$$

後三式互乘得

$$2+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{z^2}{x^2}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=abc$$

但 $\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)^2=a^2$ $\quad\therefore\quad \frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{y^2}=a^2-2$

同理 $\frac{z^2}{x^2}+\frac{x^2}{z^2}=b^2-2$

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=c^2-2$$

代入前式得

$$2+(a^2-2)+(b^2-2)+(c^2-2)=abc$$

故得結果 $a^2+b^2+c^2-4=abc$。

86. 任何一元二次方程式如$ax^2+bx+c=0$之兩根若爲α, β,

試證明
$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

證：設 $\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $B=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$\therefore\ \alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{1}{2a}(-2b)=-\frac{b}{a}$$

又 $$\alpha\beta=\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$=\frac{1}{4a^2}\{b^2-(b^2 4ac)\}=\frac{1}{4a^2}(4ac)=\frac{c}{a}。$$

87. 已知二次方程式之二根爲 $2+\sqrt{3}$ 及 $2-\sqrt{3}$

求作方程式

解：因 $(x-\alpha)(x-\beta)=0$

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

但 $\alpha+\beta=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$

$\alpha\beta=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$

故方程式爲 $x^2-4x+1=0$。

88. 求$\frac{1}{3}(x+2)(x+3)$之最小值

解：$\frac{1}{3}(x+2)(x+3)=\frac{1}{3}\left\{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+6-\frac{25}{4}\right\}$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}$$

因 $(x+\frac{5}{2})^2$ 恆爲正，故欲上式有最小值必需

$(x+\frac{5}{2})=0$ 卽 $x=-\frac{5}{2}$

故知原式之最小值爲

$\frac{1}{3}\left(2-\frac{5}{2}\right)\left(3-\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{12}$。

89. 求$9+8x-7x^2$之最大值

解：$9+8x-7x^2=9-7\left(x^2-\frac{8}{7}x\right)$

$$=9-7\left\{x^2=\frac{8}{7}x+\left(\frac{8}{14}\right)^2\right\}+7\left(\frac{8}{14}\right)^2$$

$$=\frac{79}{7}-7\left(x-\frac{8}{14}\right)^2$$

因 $\left(x-\frac{8}{14}\right)^2$ 恆爲正，故欲上式有最大值必令

$$\left(x-\frac{8}{14}\right)=0 \quad 卽\ x=\frac{8}{14}=\frac{4}{7}$$

故原式之最大值爲 $\frac{79}{7}=11\frac{2}{7}$。

90. 試求 $\left(3x-\frac{1}{3}\right)^9$ 之第八項

解：第八項 $=9^{C}{}_{7}(3x)^2(-\frac{1}{3})^7$

$$=\frac{9\times8\times7\times6\times5\times4\times3}{7\times6\times5\times4\times3\times2}\times9x^2\left(-\frac{1}{3^7}\right)$$

$$=\frac{4}{27}x^2$$

91. $\left\{\frac{\left(9^{n+\frac{1}{4}}\right)\times\sqrt{3\times3^n}}{3\sqrt{3^{-n}}}\right\}^{\frac{1}{n}}$ 試簡單之

解：原式

$$=\left\{\frac{9^{\frac{4n+1}{4}}\times 3^{\frac{n+1}{2}}}{3\times 3^{-\frac{n}{2}}}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$=\left\{\frac{3^{\frac{4n+1}{2}}\times 3^{\frac{n+1}{2}}}{3^{\frac{2-n}{2}}}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$=\left\{\frac{3^{\frac{5n+2}{2}}}{3^{\frac{2-n}{2}}}\right\}^{\frac{1}{n}}=\left\{3^{\frac{(5n+2)-(2-n)}{2}}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$=\left\{3^{\frac{6n}{2}}\right\}^{\frac{1}{n}}=3^{3n\times\frac{1}{n}}=3^{3}=27。$$

92\. $\sqrt[3]{90+34\sqrt{7}}+\sqrt[3]{90-34\sqrt{7}}$試化爲最簡

解：$\sqrt[3]{90+34\sqrt{7}}=\sqrt[3]{27+27\sqrt{7}+63+7\sqrt{7}}$

$$=\sqrt[3]{(3+\sqrt{7})^{3}}=3+\sqrt{7}$$

同理 $\sqrt[3]{90-34\sqrt{7}}=3-\sqrt{7}$

$\therefore\ \sqrt[3]{90+34\sqrt{7}}+\sqrt[3]{90-34\sqrt{7}}$

$=(3+\sqrt{7})+(3-\sqrt{7})=6$。

93. 將下分數式化爲部分分數

$$\frac{2x^2-5x+7}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

解：設 $\dfrac{2x^2-5x+7}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x-3}$……(1)

但 $\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x-3}$

$$=\frac{A(x-2)(x-3)+B)(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$=\frac{(A+B+C)x^2+(-5A-4B-3C)x+6A+3B+2C}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

故若(1)式存在或成立則必有

$(A+B+C)x^2+(-5A-4B-3C)x+6A+3B+2C$

$=2x^2-5x+7$

且各項相當係有以下之關係

$$\begin{cases} A+B+C=2 \\ -5A-4B-3C=-5 \\ 6A+3B+2C=7 \end{cases}$$

解之得 $A=2$，$B=-5$，$C=+5$

代入(1)得

$$\frac{2x^2-5x+7}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{2}{x-1}-\frac{5}{x-2}+\frac{5}{x-3}$$

卽所求之部分分數也。

94. 化下式爲部分分數

$$\frac{2x+5}{(x-1)^3(x-3)}$$

解：設 $\dfrac{2x+5}{(x-1)^3(x-3)}$

$$=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x-3}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x-3}$$

$$=\frac{A(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)^2(x-3)+D(x-1)^3}{(x-1)^3(x-3)}$$

$$=\frac{(C+D)x^3+(B-5C-3D)x^2+(A-4B+7C+3D)x-3A+3B+3C-D}{(x-1)^3(x-3)}$$

故
$$\begin{cases} C+D=0 \\ B-5C-3D=0 \\ A-4B+7C+3D=2 \\ -3A+3B+3C-D=5 \end{cases}$$

解之得 $A=-\frac{7}{2}$, $B=-\frac{11}{4}$, $C=-\frac{11}{8}$, $D=\frac{11}{8}$

故
$$\frac{2x+5}{(x-1)^3(x-3)}=-\frac{7}{2(x-1)^3}-\frac{11}{4(x-1)^2}$$
$$-\frac{11}{8(x-1)}+\frac{11}{8(x-3)}$$

即所求之部分分數也。

95. 化下式爲部分分數

$$\frac{6x^3+2x^2+2x-2}{x^4-1}。$$

解：設 $\frac{6x^3+2x^2+2x-2}{x^4-1}$

$$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$=\frac{A(x-1)(x^2+1)(+B(x+1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)}{x^4-1}$$

$$=\frac{(A+B+C)x^3+(-A+B+D)x^2+(A+B+C)x-A+B-D}{x^4-1}$$

故得方程式系

$$\begin{cases} A+B+C=6 \\ -A+B+D=2 \\ A+B-C=2 \\ -A+B-D=-2 \end{cases}$$

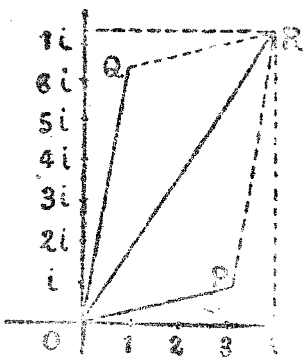
解之得　$A=2$，$B=2$，$C=2$，$D=2$

故　$$\frac{6x^3+2x^2+2x-2}{x^4-1}=\frac{2}{x+1}+\frac{2}{x-1}+\frac{2x+2}{x^2+1}$$

用作圖法求出下列三式之值。

96. $(3+i)+(1+6i)$

解:



先作兩點P,Q　令

$P=3+i$, $Q=1+6i$

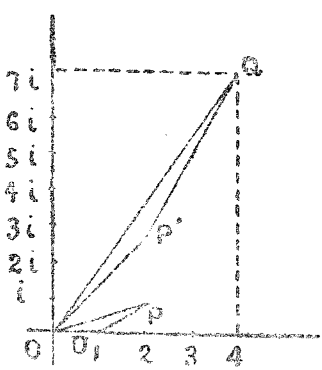
聯接OP,OQ 以OP,OQ 為兩邊作平行四邊形OPRQ. 則R為所求之點.

即$R=4+7i$

故 $(3+i)+(1+6i)=4+7i$。

97. $(2+i)(3+2i)$

解:



先求二點P,P'　令

$P=2+i$, $P'=3+2i$

聯接 OP, OP' 於x軸取 OU 令 $OU=1$

連接PU得三角形OUP

以OP'與OU對應作與OUP相似之三角形 OP'Q 得Q點即所求之點也.

$\therefore$ $Q=4+7i$.

故$(2+i)(3+2i)=4+7i$。

98. $(2+i)^3$

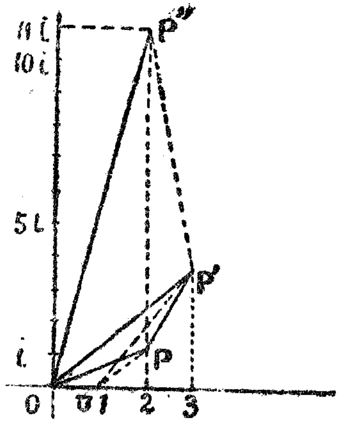
解：作P點$(=2+i)$，

連接OP，取OU＝1 得U點作△OUP．依OP作三角形△OPP' ∽ △OUP，得P'點．依 OP' 作三角形△ OP'P'' ∽ △ OUP' 得P''點

則 P'' 點卽爲所求之點

而$P''=2+11i$

故$(2+i)^3=2+11i$。



99. 作出下式之圖：

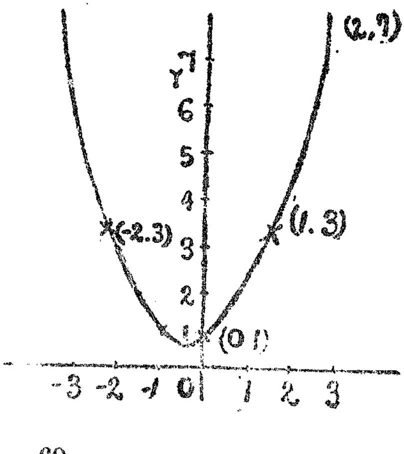
$$y=x^2+x+1$$

解：令$x=2$　　則$y=7$

$x=1\frac{1}{2}$，　$y=4\frac{3}{4}$

$x=1$，　　$y=3$

…………………………



故 得 下 表

x	2	$1\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$1\frac{1}{2}$	-2	………
y	7	$4\frac{3}{4}$	3	$1\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	1	$1\frac{3}{4}$	3	………

100. 已知$F(x)=x^3-2x^2+3x-7$

求 $F(i)$，$F(-i)$，$F(-1+2i)$，$F(-1-2i)$

解：$F(i)=i^3-2i^2+3i-7$

$=-i+2+3i-7=-5+2i$

$F(-i)=(-i)^3-2(-i)^2+3(-i)-7$

$=i+2-3i-7=-5-2i$

$F(-1+2i)=(-1+2i)^3-2(-1+2i)^2+3(-1+2i)-7$

$=11-2i-2(-3-4i)-3(-1+2i)-7$

$=11-2i+6+8i+3-6i-7$

$=13$

$F(-1-2i)=(-1-2i)^3-(2-1+2i)^2+3(-1-2i)-7$

$=11+2i+6-8i-3-6i-7$

$=7-12i$。

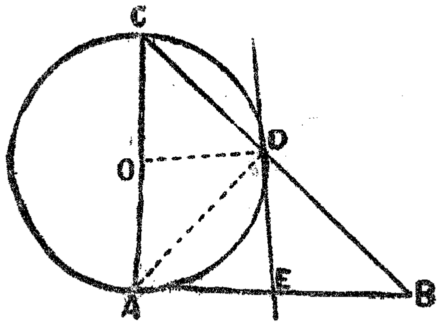
III 幾 何

第一　平面部

I. 直線及圓

1. 以直角三角形之一腰爲徑作圓，自其斜邊與圓周之交點作切線必平分第三邊

解：三角形ABC中∠A爲直角，以爲AC徑作圓與BC交於D點自D點作此圓之切線DE與AB交於E點求證AB被所平分



證：連接AD，則△DAB爲直角三角形

因 ∠A＝直角

故　BA切ADC圓於A點

∴　AE＝ED

∴ ∠EAD＝∠EDA　　∴ ∠R＝∠EDB

∴　EB＝ED　　∴　AE＝EB

故AB爲E點所平分。

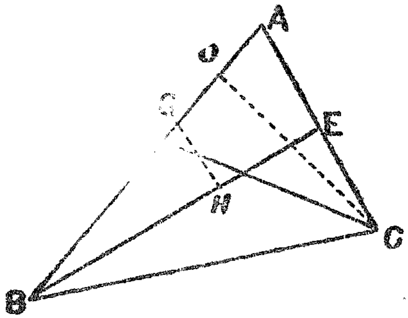
2. 三角形大角之二等分線小於小角之二等分線

解：三角形ABC之∠B＜∠C，∠B，∠C之二等分線爲

BE，CF

求證 BE＞CF

證：因 ∠ACF＞∠ABE



故自C點於AC，CF兩線間作CD直線令

∠DCF＝∠ABE

與AB交於D點，則D在A點與B點之間．

並因 ∠DBE＜∠DCB， CD＜BD

故於BD上取一點G令

BG＝CD

則G點在B點與D點之間． 自G點引GH ∥ CD與BE交於H點則H在B點與E點之間

∴ BH＜BE。

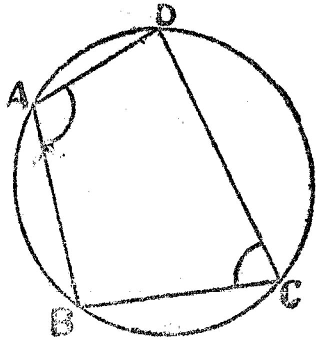
但從△AHG及△CFD兩三角形

知 BG＝CD， ∠GBH＝∠DCF， ∠BGH＝∠CDF

∴ △BHG≡△CFD ∴ BH＝CF

故 CF＜BE。

3. 四角形之對角若互爲補角則可作外接圓

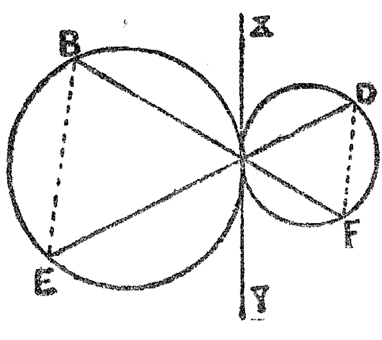


證: 四角形ABCD中, $\angle A + \angle C = 2\angle R$

通過 B, C, D 三點作一圓, 若角頂A不在BCD之圓周上, 則必依BD而在C點之異方或圓內或圓外. 故此時$\angle A$不等於對BCD弧之圓周角. 卽$\angle A$不能與$\angle C$互爲補角. 是背於假設而不合理. 故A不在於BCD之圓周上. 卽ABCD可作外接圓。

4. 由兩兩相交之四直線AB, BC, CD, DA所成之四個三角形BCE, CDF, ADE, ABF之外接圓會於一點

證: 因兩三角形BCE, CDF之外接圓必相交而不相切 (若謂此二圓外切於C點則可於此點作公切線XY



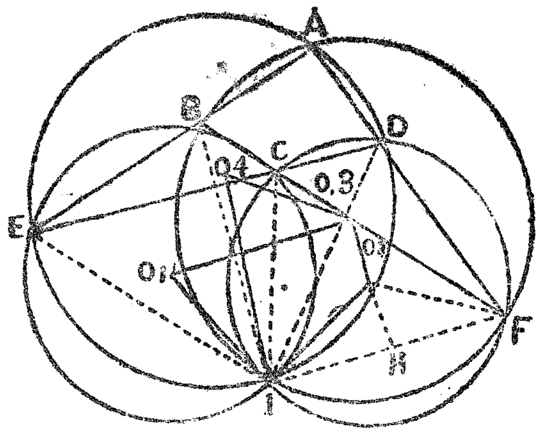
因 $\angle E = \angle BCX = \angle FCY = \angle D$

卽 $\angle E = \angle D$

$\therefore$ BE $\parallel$ DF

與假設不合. 以同理可證明此二圓亦不內切

故二圓必相交,)



於是令此二圓之第二交點爲I

今就四邊形AEID觀之, 連接CI, 則

$$\angle DIE = \angle DIC + \angle CIE$$

而 $\angle DIC = \angle DFC$, $\angle CIE = \angle ABF$

$\therefore$ $\angle DIE = \angle DFC + \angle ABF$

但 $\angle A + \angle DFC + \angle ABF = 2\angle R$

$\therefore$ $\angle A + \angle DIE = 2\angle R$

即四邊形AEID其對角互爲補角可作外接圓,

故$\triangle AED$之外接圓通過I點

又　$\angle DIF=\angle DCF=BCE=\angle BIE$

$\therefore$　$\angle DIE=\angle BIF$

$\therefore$　$\angle A+\angle BIF=2\angle R$

卽四邊形ABIF其對角互爲補角可作外接圓

故　$\triangle$ABF之外接圓通過I點

故四個三個角形 BCE,CDF,ADE,ABF之外接圓會於一點。

5. 前題之I點與四圓之圓心O_1,O_2,O_3,O_4共五點在一圓周上

證：連接O_2F直線，並延長O_3O_2與IF令交於H點（見前圖）

因IF爲O_2,O_3二圓之公弦　　故

$O_3H\perp IF$.

又　$\angle IO_2H=\frac{1}{2}\angle IO_2F=\angle ICF$

因　$\angle ICF$爲O_1圓之內接四邊形BCIE之外角

$\therefore$　$\angle ICF=\angle BEI$

但BI爲O_1,O_3兩圓之公弦

$\therefore$　$O_1O_3\perp BI$

$\therefore$　$\angle BEI=\angle IO_1O_3$

卽　$\angle IO_2H=\angle IO_1O_3$

故四邊形$IO_2O_3O_1$之對角$\angle IO_1O_3$及$\angle IO_2O_3$互爲補角

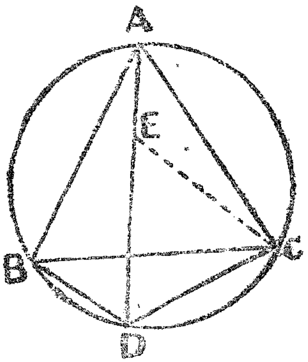
故四點 I, O_1, O_2 O_3 在一圓周上

同理得證 I, O_2 O_3 O_4 四點亦在一圓周上

故 I, O_1 O_2 O_3 O_4 點五在一圓周上。

6. 從圓內接等邊三角形ABC之角頂A作AD弦過BC弧於D

點則 $AD=BD+CD$



證：於DA上取

$DE=CD$ 則

$\angle EDC=\angle ABC\frac{2}{3}\angle R$

且$\angle DCE=\angle DEC=\frac{2}{3}\angle R$

故三角形DEC爲等邊三角形

$\therefore$ $CE=CD$, $AC=BC$, $\angle EAC=\angle DBC$

$\therefore$ $\triangle AEC\equiv\triangle BDC$ $\therefore$ $AE=BD$

故 $AD=AE+DE=BD+CE$。

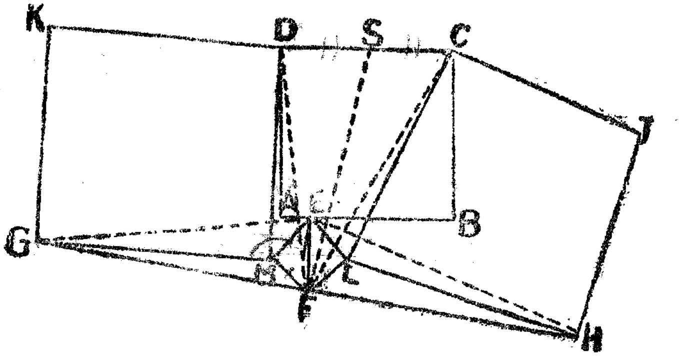
7. 於正方形之一邊AB上，取任意一點E，從E作AB之垂線

EF. 使$EF=\frac{1}{2}AB$. 以EF爲對角線作正方形 EMFZ. 以

DM, CZ 各爲一邊而於外方作正方形DMGK及CZHJ. 則

G, F H必在一直線上

證：



取 DS＝CS

因 GM＝DM；ME＝MF

又 $\angle$GME＝$\angle$R＋$\angle$DME，$\angle$DMF＝$\angle$R＋$\angle$DME

∴ $\angle$GME＝$\angle$DMF

∴ △MGE≌△△MDF ∴ GE＝FD

∴ $\angle$MEG＝$\angle$MFD

因 $\angle$AEM＝$\angle$MFE＝$\frac{1}{2}\angle$R

故 $\angle$AEG＝$\angle$DFE.

但 $\angle$DFE＝$\angle$ADF ∴ $\angle$AEG＝$\angle$ADF

又因 $\angle$GEF＋AEG＝$\angle$FDS＋$\angle$ADF＝$\angle$R

故　　　　$\angle GEF=\angle FDS$

因假設　　　　$EF=DS\frac{1}{2}AB$ 及 $GE=FD$

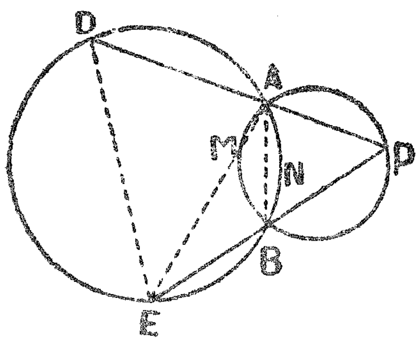
∴　　　　$\angle EFG=\angle FSD$

仿此得證明 $\angle EFH=\angle FSC$

∴　$\angle EFG+\angle EFH=\angle FSD+\angle FSC=2\angle R$

故G,F,H三點在一直線。

8. 兩圓交於A,B,自其一圓周上任意之點至他圓周作直線PAD及PBE則DE為定長.



證：因AMB為定弧，故對AMB弧之角APB為定角

連接AE,則$\angle AEB$以對定弧ANB故亦為定角.

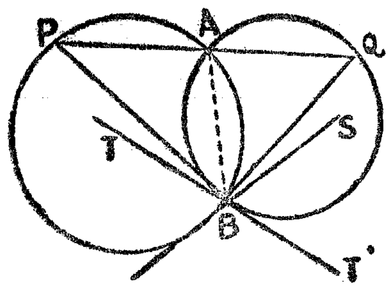
又對DE弧之 $\angle DAE=APB+\angle AEB$

故　$\angle DAE$亦為定角

即　DE弧為定長。

9. 過相交二圓之一交點引任意之直線， 將其再與二圓相交之點連接二圓之他交點， 則此二直線所成之角爲一定不易. 卽等於二圓交點二切線所成之角.

解: 二圓相交於A,B. 自A點引 PAQ 直線與二圓各交於P及Q二點連結PB,QB則 PBQ 角爲定角且等於兩切線之交角∠SBT'



證: 因 ∠APB＝定角,

∠AQB＝定角

故 ∠ABQ＝2∠R－∠APB－∠AQB＝定角

又 ∠SBA＝∠APB

∠TBA＝∠AQB

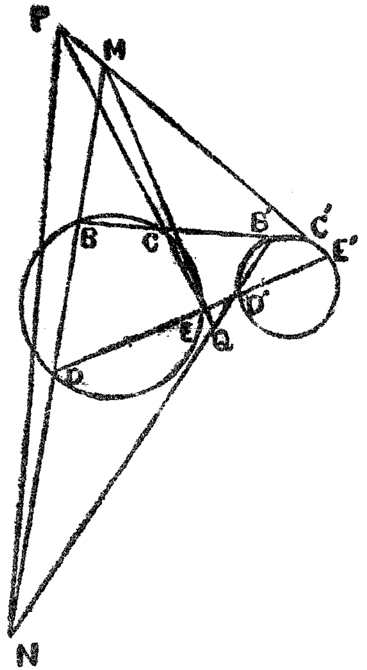
故 ∠PBQ＝∠SBT'。

10. 引長一圓之弦BC,DE截他圓於B',C'及D',E' .由是引長BD,DF,B'D',C'E'必相交而成圓之內接四邊形

證: 設RD及CE之引長線與E'C'及B'D' 之引長線相交之點爲N,M,P,Q.

則於三角形NDD'

知



$\angle MNQ = \angle MDE - \angle DD'N$

$= \angle MDE - \angle B'D'E'$

又於三角形PCC'

知

$\angle MPC = \angle PCB - \angle PC'C$

$= \angle MDE - \angle B'D'E'$

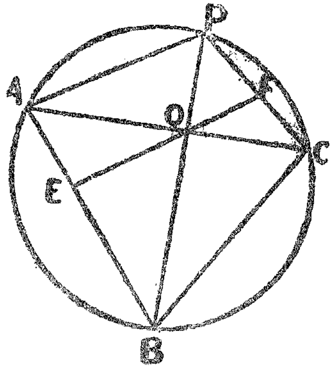
故 $\angle MNQ = \angle MPC$

卽 $\angle MNQ = \angle MPQ$

故 N,Q,M,P 四點在同一圓周上

卽 四邊形 NQMP 內接於一圓。

11. 圓內接四邊形ABCD之對角線AD，BC互為垂直，則自其交點O引AB之垂線EF則CD邊必為EF所平分.



證：設EF與CD之交點為F則

$\angle COF = \angle AOE = \angle ABO$

$= \angle OCF$

故 $CF = OF$

同樣 $DF = OF$ 故 $CF = DF$

卽CD邊為EF所平分。

12. 從圓外一點A作二切線 AB，AC 連結 BC 弦則 BC 與直徑所成之角等於$\frac{1}{2}\angle BAC$

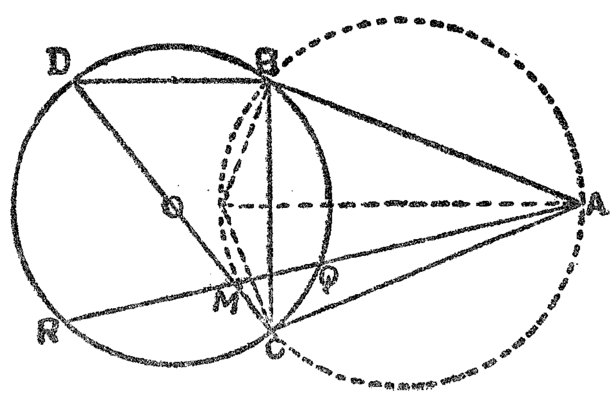
證：$\angle CBO+\angle ABC=ABO=\angle R$

又　三角形ABC爲二等邊三角形

$\therefore$　$\angle BAC+2\angle ABC=2\angle R$

卽　$\frac{1}{2}\angle BAC+\angle ABC=\angle R$

故　$\angle CBO=\frac{1}{2}\angle BAC$



13. 從圓外一點A至其圓作切線AB,AC. 又作任意之割線AQR自B點作BD弦平行於AQR. 則DC必二等分QR弦於M,但O爲中心.（用前圖）

證：因 $\angle ABC=\angle BDC$, $BD \parallel AR$

$\therefore$ $\angle BDC=\angle AMC=\angle ABC$

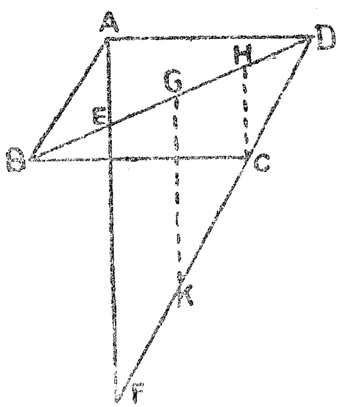
又 $\angle ACO=\angle R$

故 $\angle$ A,B,O,M,C五點在一圓周上

故 OM垂直於AM $\therefore$ $QM=RM$

故DC二等分QR於M。

14. 平行四邊形ABCD於其對角線BD上取一點E令$BE=\frac{1}{3}DE$. 引長AE與DC之引長線遇於F. 則CF=2AB



證：作 CH與AF平行

則 $\triangle ABE \equiv \triangle CDH$

$\therefore$ $BE=DH$

取 $EG=GH$

自G作 $GK \parallel AF$

則 $DC=CK=KF$

故 $CF=2DC=2AB$

即 $CF=2AB$。

15. 從三角形ABC之外接圓周上之一點P至三邊作垂線PQ PR,PS. 則Q,R,S在一直線上

證: $\angle PSA=\angle PRA=\angle R$

故四邊形PRAS可畫外接圓

即 $\angle PRS=\angle PAS$

因 APBC爲圓內接四邊形

$\therefore$ $\angle PBC=\angle PAS=\angle PRS.$

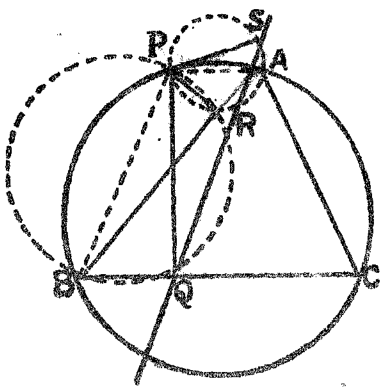
又 $\angle PQB=\angle R$

$\therefore$ $\angle PBQ+\angle PRQ=2\angle R$

即 $\angle PBC+\angle PRQ=2\angle R$

故 $\angle PRS+\angle PRQ=2\angle R$

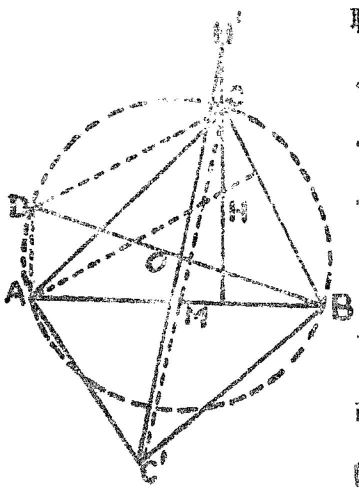
故 Q,R,S在一直線上。



16. 三角形ABC之垂心H對於一角頂C之對稱點爲H′，三角形之外心爲O. 將CA,CB爲二邊而作平行四邊形CAC′B，則H′,O,C′同在一直線上

證：設AB之中點爲M則M亦爲CC′之中點

因 OM ∥ CH



聯接BO與圓交於D則BD爲直經

∴ DA ∥ CH ∥ OM，CD ∥ AH

∴ ▱DAHC爲平行四邊形

∴ CH＝DA

但 DA＝2OM.

∴ $OM=\frac{1}{2}CH=\frac{1}{2}CH'$

故 O爲C′H′之中點

即 C′,O,H′ 同在一直線上。

II. 面積及比例

17. 自直角三角形之直角頂向對邊作垂線分對邊爲兩部分此兩部分之相乘積等於垂線之平方

解：自直角三角形ABC之直角頂A作BC邊之垂線與BC交於D 求證 $BD\cdot CD=AD^2$

證：∠B與∠C互爲餘角

∠B與BAD互爲餘角

∴ ∠C與∠CAD互爲餘角

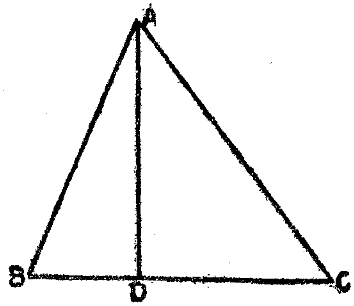
∴ ∠B＝∠CAD，

∠C＝∠BAD

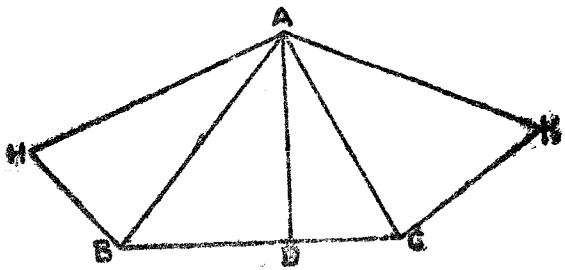
∴ △BAD與△CAD相似

∴ BD：AD＝AD：CD

故 BD.CD＝AD^2。



18. 設ABC爲任意三角形AD爲對BC邊之垂線．從B點作與CD等長與AB成垂直之BH線；從C作與BD等長與AC成垂直之CK線．試證明AH與AK等長．



證：$AH^2 = AB^2 + BH^2$

$= (AD^2 + BD^2) + CD^2$

又 $AK^2 = AC^2 + CK^2$

$= (AD^2 + CD^2) + BD^2$

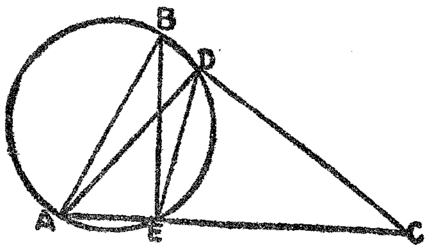
∴ $AH^2 = AK^2$

卽 AH＝AK。

19. 於三角形 ABC 內作 AD ⊥ BC, BE ⊥ AC 連結 DE

求證　△ABC與△CDE相似

證:



∠ADB＝∠AEB＝∠R

故　A,E,D,B四點在一圓周上

∴　∠CDE＝∠A, ∠CED＝∠B

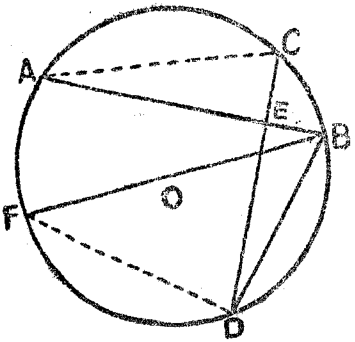
故　△ABC與△CDE相似。

20. 二弦AB,CD垂直相交E點則AE,BE,CE,DE四線段平方之和等於其圓之直徑之平方

證: 過B點作直徑BOF, 並連結AC,BD,DF. 則

弧AC＋弧BD＝弧AD＋弧BC＝半圓

＝弧BF＝弧BD＋弧DF



∴　弧AC＝弧DF

卽　AC＝DF

但　$BF^2=DF^2+DB^2$

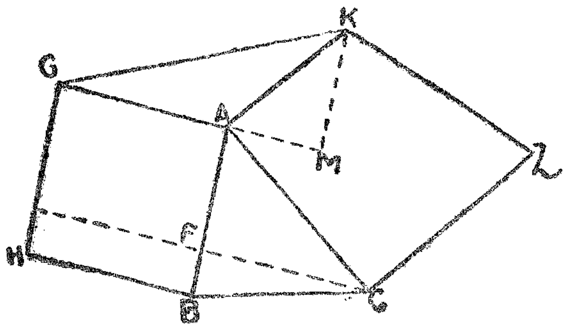
$=AC^2+DB^2$

$=AE^2+CE^2+BE^2+DE^2$

卽　$BF^2=AE^2+BE^2+CE^2+CE^2$。

21. 於銳角三角形ABC之兩邊AB及AC作正方形ABHG及ACLK 則$GK^2+BC^2=2(AB^2+AC^2)$

證： 從K至GA之延長線作垂線KM，作CF⊥AB



則∠KAM及∠CAF均爲∠CAM之餘角故相等

且　CF⊥AF，　　AK＝AC

∴　△KAM≡△CAF

$\therefore \quad AM = AF, \quad KM = CF$

於是 $GK^2 = KM^2 + GM^2 = KM^2 + (AM + AG)^2$

$= CF^2 + (AF + AB)^2 = CF^2 + AF^2 + 2AF \times AB + AB^2$

$= AC^2 + AB^2 + 2AF \times AB$

$= 2(AB^2 = AC^2) - (AB^2 + AC^2 - 2AF \times AB)$

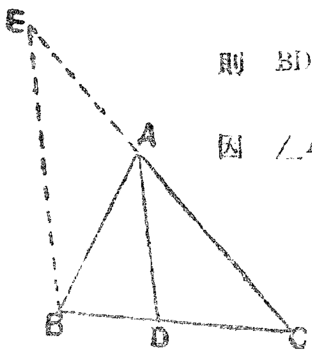
$= 2(AB^2 + AC^2) - BC^2$

故 $GK^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2)$。

22. 三角形一角之平分線將其對邊分成兩段與其兩鄰邊成比例試證之.

解：三角形ABC之$\angle$ A之平分線 AD分對邊BC爲兩段BD，DC. 求證 $BD:DC = AB:AC$.

證：作BE平行於AD與CA之延長線交於E.



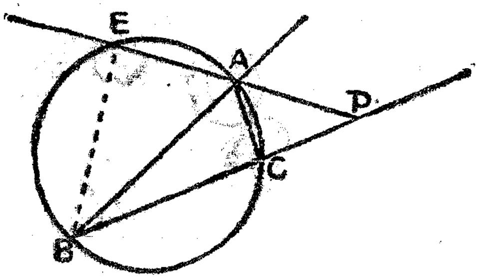
則 $BD:DC = AE:AC$

因 $\angle AEB = \angle CAD = \angle DAB = \angle ABE$

$\therefore \quad AB = AE$

故 $BD.DC = AB;AC$。

23. 三角形ABC中A角之外角二等分線交BC之延長線於P交外接圓於E. 則AP.AE＝AB.AC.



證：連結BE 則 $\angle CAP=\angle BAE$, $\angle AEB=\angle ACP$

故 $\triangle ABE$與$\triangle ACP$相似

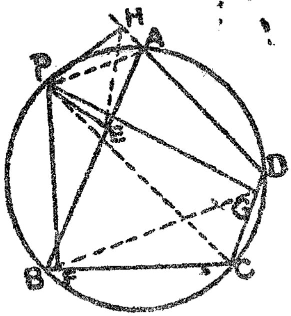
$\therefore$ $AE:AC=AB:AP$,

故 $AP.AE=AB.AC$. 已證本題。

24. 圓周上任意一點 P 至圓內接四邊形 ABCD 各邊作垂線 PE, PF, PG, PH. 則$PH\cdot PF=PE\cdot PG$

證：連結 HE, AP, FG, PC,

則 $\angle HPE+\angle HAB=\angle HPE+\angle BCD$



$=\angle GPF+\angle BCD$

$=2\angle R$

$\therefore \angle HPE=\angle GPF$

又$\angle HEP=\angle PAH$

$=\angle PCG=\angle PFG$

∴ △PEH與△PFG相似

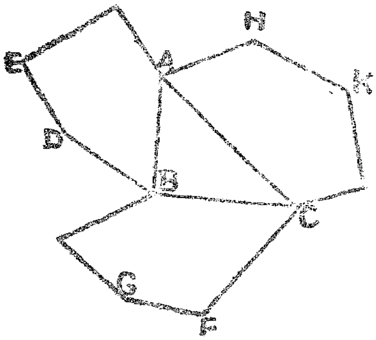
∴ $PH:PE=PG:PF$

故 $PH\cdot PF=PE\cdot PG$。

25. 於直角三角形ABC之三邊上作相似多邊形ABDE……，BCFG………，CAHK………。若AC爲斜邊

則 CAHK………＝ABDE………＋BCFG………

證：$AB^2:BC^2=$ ABDE……:BCFG……



卽 $AB^2+BC^2:BC^2$

＝ABDE…＋BCFG…

:BCFG……

又 $AC^2:BC^2=$ CAHK……

:BCFG……；

因 $AB^2+BC^2=AC^2$

∴ $AB^2+BC^2:BC^2=$

$AC^2:BC^2$

＝ABDE……＋BCFG……：BCFG……

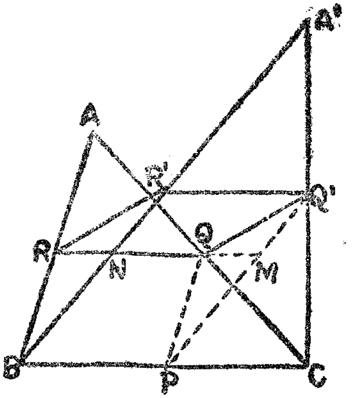
＝CAHK……：BCFG

卽 CAHK…:BCFG…＝ABDE…＋BCFG…:BCFG…

故 CAHK……＝ABDE……＋BCFG……

已證明本題。

26. 兩三角形ABC，A′BC爲同底，則連結其各邊中點所成之四邊形 RQQ′R′爲平行四邊形．而等於兩三角形面積之差之半．



證：令BC之中點爲P．RQ 截A′B，Q′P於N，M．則

平行四邊形 RQQ′R′

＝平行四邊形MQ′R′N

＝平行四邊形PQ′R′B

－平行四邊形PMNB

＝平行四邊形PQ′R′B－平行四邊形PQRB

$=\frac{1}{2}$三角形A′BC$-\frac{1}{2}$三角形ABC

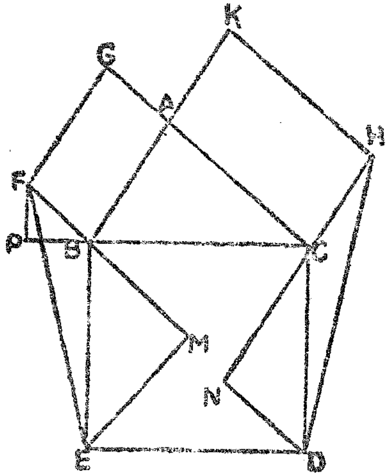
$=\frac{1}{2}(\triangle A'BC-\triangle ABC)$。

27. 於直角三角形之三邊上作正方形 BCDE, ABFG, ACHK

則　$EF^2+DH^2=5BC^2$

證：從 E 及 D 至 FB 及 HC 之延長線作垂線 EM 及 DN

則$\angle EBM=\angle R-\angle FBP=\angle ABC$，　$BE=BC$



$\therefore$ $BM=AB$, $EM=AC$

同理 $DN=AB$, $CN=AC$

故$EF^2=EM^2+FM^2=EM^2+(FB+BM)^2=AC^2+(2AB)^2$

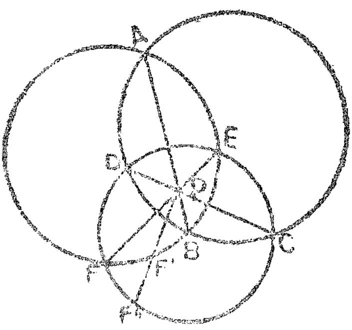
$DH^2=DN^2+HN^2=DN^2+(HC+CN)^2=AB^2+(2AC)^2$

故 $EF^2+CH^2=5(AB^2+AC^2)$

$=5(BC)^2$。

28. 三圓相交，則其公共三弦AB，CD，EF會於一點。

證：設AB，CD之交點爲P．則



$PA\cdot PB=PC\cdot PD$

而EF必通過P．若不然試引長EP而截圓周於F′及F″

則因$PA\cdot PB=PE\cdot PF'$

$PC\cdot PD=PE\cdot PF''$

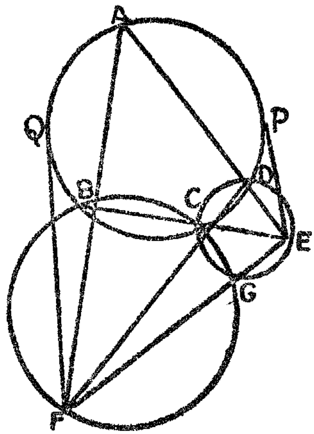
故 $PE\cdot PF'=PE\cdot PF''$

$\therefore$ $PF' = PF''$

卽 F′合於F″合於F

故 EF亦通過P點。

29. 圓之內接四邊形 ABCD 其兩對邊AD BC及AB,DC之交點爲E,F.從E及F作切線EP及FQ則$EF^2 = EP^2 + FQ^2$



證: $\angle FGC = \angle ABC = \angle CDE$

$\therefore$ $\angle FGC + \angle CGE =$

$\angle CDE + \angle CGE = 2\angle R$

故 FG,GE在一直線上

$\therefore$ $FG \cdot FE = FC \cdot FD = FQ^2$

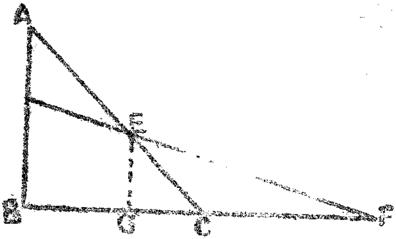
又 $EG \cdot EF = EC \cdot EB = EP^2$

$\therefore$ $EP^2 + FQ^2 = EF\,(FG + EG) = EF^2$

卽 $EF^2 = FP + FQ^2$。

30. 若一直線截三角形ABC之三邊AB,AC,BC於D,E,F.而BD=CE則 AB:AC::EF:DF.

證: 取EG ∥ AB. 則 BD:EG=DF:EF



即　$CE:EG::DF:EF$

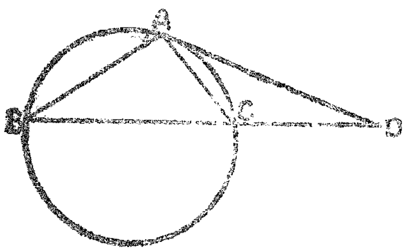
又　$CE:EG::AC:AB$

是故　$AC:AB::DF:EF$

或　$AB:AC::EF:DF$。

31. 圓內接三角形 ABC，畫A之切線與BC之延長線交於D點則 $CD:BD::CA^2:BA^2$

證：因$\angle DAC=\angle ABD$



故　$\triangle DAB$與$\triangle DCA$相似

∴　$CD:AD::CA:BA$

故　$CD^2:AD^2::CA^2:BA^2$

但　$AD^2=DC\cdot DB$

故　$CD:BD=CA^2:BA^2$。

III.　軌　跡

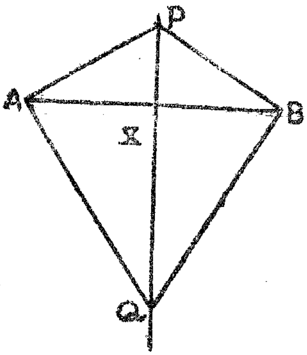
32. 試述點之軌跡之定義．但點之軌跡有爲直線者，有爲曲線者，有爲平面者試就所知各舉一例以明之

答：凡適合於幾何學上一定條件之點之集合圖形稱爲適於此定條件之點之軌跡

例(i)求平面上已知兩點之等距離之點之軌跡

解：設A,B爲二已知點

I. 自連結線AB之垂直二等分線上取一任意點P,連結AP,BP



則 $AX=BX, PX=PX$

$\angle AXP=\angle BXP=\angle R$

$\therefore$ $\triangle AXP\equiv\triangle BXP$

$\therefore$ $AP=BP$.

II. 設取任意點Q令 $AQ=BQ$

連結Q與AB之中點X

則$\triangle AXQ$,$\triangle BXQ$二三角形之各對應邊相等故爲全等

故 $\angle AXQ=\angle BXQ=\angle R$

故Q點在AB之垂直二等分線上。

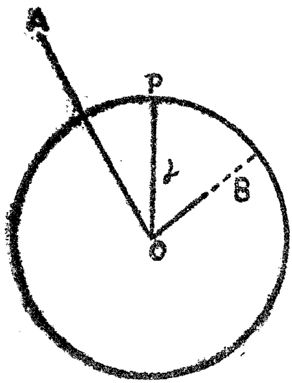
(決定)A,B等距離之點之軌跡爲AB之垂直二等分線

例(ii)求距一定點等於已知長之點之軌跡

解：以定點O爲圓心已知長r爲半徑作圓

I. 自圓周上任意點P至圓心O即OP恆等於已知長r

II. 自圓外任意A至圓心O之距離OA必澈圓周



故　OA＞圓之半徑

即　OA＞r，故A爲不合於條件之點

又自圓內任意點B至圓心O之直線OB不截圓周引長之則截圓周

故　OB＜圓之半徑

即　OB＜r　故B點亦爲不合條件之點

故圓外圓內任何之點至圓心O之距離不等於已知之距離

（決定）故距一定點等於已知長之點之軌跡爲以此定點爲圓心以已知長爲半徑之圓周

例(iii)求空間兩定點之等距離之點之軌跡

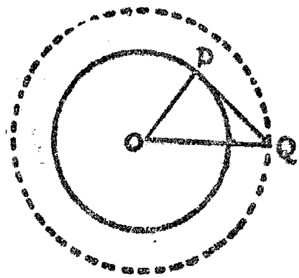
解：若A，B爲兩定點，則距此兩定點之等距離之點之軌跡爲AB直線之中點之垂直平面

證法同例(i)茲不贅

上三題之軌跡 ⎧ (i) 爲直線
　　　　　　 ⎨ (ii) 爲曲線
　　　　　　 ⎩ (iii) 爲平面。

33. 於已知圓引已知長之切線之端之軌跡如何？

解：於中心爲O之圓界上作等於已知長之切線PQ，聯結OP，OQ則



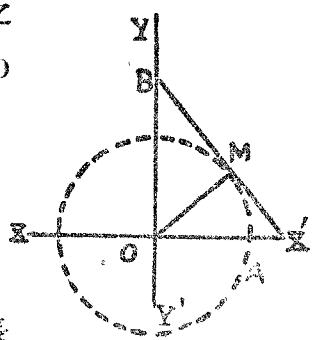
$OQ^2=OP^2+PQ^2$　因OP及PQ均爲已知

故OQ之長爲一定

故Q點之軌跡爲以O爲圓心，以OQ爲半徑之圓周。

34. 一定長之直線其端恆在互相垂直之已知二直線上而移動，求其中點之軌跡

解：定長之直線爲AB，其端A，B恆在互爲垂直之二已知直線XX′及YY′上．若M爲AB之中點；連結XX′，YY′之交點O



則　OM＝BM＝BM

$$\therefore\quad OM=\frac{1}{2}AB$$

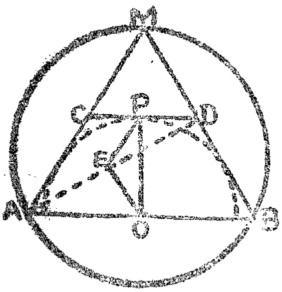
因AB爲定長，$\frac{1}{2}$AB亦爲定長

故OM為一定

故M點之軌跡為以O為圓心，OM為半徑之圓周。

35. 將一定圓周上任意點M連結此圓上二定點A,B於AM上取AC等於定長M,於BM上取BD等於定長M. 問CD之中點之軌跡如何?

解: 設CD, AB, AD之中點為P,O,E連結PE,OE,OP



則 $PE \parallel AC$ 且 $PE=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}m$

又 $OE \parallel BD$ 且 $OE=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}n$

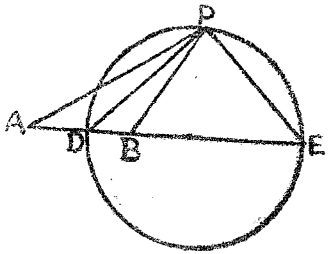
又 $\angle PEO=\angle PED+\angle OED=\angle MAO+\angle BAD+\angle ABD=\angle MAB+\angle MBA=2\angle R-\angle M=$定角

故三角形PEO之二邊EP及OE之長及其夾角PEO均為一定　即三角形△PEO為一定.　即PO為定長.

故P點之軌跡為以O為圓心，以PO為半徑之半圓，此半圓依AB與M點在同側.

36. 自二定點A,B至一動點之距離有定比. 問此動點之軌跡如何?

解: 軌跡上之一點P, 連結PA, PB. 引∠APB之外角及內角之二等分線 PE, PD. 與AB或其延長線交於E, D



則 PA : PB = AD : DB = AE : BE = 定比.

卽 D, E均爲定點 且 ∠DPE = ∠R

故 P點之軌跡爲以DE爲直徑之圓周。

37. 通過定三角形 ABC 底邊BC 上之任意一點D而於他二邊間作直線EF則兩三角形BDF, CDE之外接圓交點P之軌跡爲三角形ABC之外接圓之BC弧

證: ∠DPC + ∠DEC = 2∠R

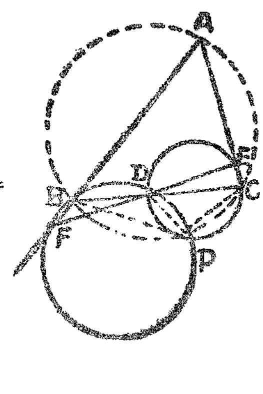
∠AFE∠A = ∠DEC

卽 ∠BPD + ∠A = ∠DEC.

∴ ∠DPC + ∠BPD + ∠A = ∠2R

故 ∠BPC + ∠A = 2∠R

故P點之軌跡爲BPC弧。



38. 在交於A,B兩點之兩圓周間作直線CD. 則CD之中點之軌跡爲通過AB,兩點之圓周

證: 設以OM之中點N爲圓心通過A,B之圓周與CD之交點爲P. 則作

NQ ⊥ CD

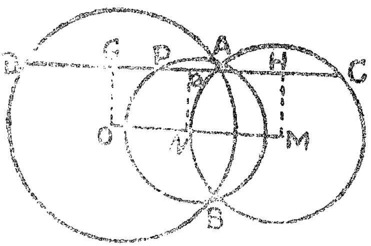
自 O,M作CD之垂線OG及MH

故 $QG = QH = \frac{1}{2}GH = \frac{1}{4}(AB + AC)$

又 $QA = QH - AH$

$= \frac{1}{4}(AD + AC) - \frac{1}{4}AC$

$= \frac{1}{4}(AD + AC)$



故 $PC = PA + PC = 2QA + AC$

$= \frac{1}{2}(AD - AC) + AC$

$= \frac{1}{2}(AD + AC)$

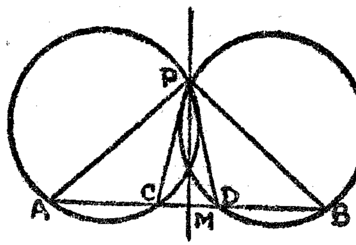
故 P爲CD之中點。

39. 於直線AB上取兩點C，D令AC＝BD　則AC，BD所對等角角點之軌跡爲AB之中點之垂線

證：以AC，BD爲弦作兩等圓其交點爲P.

則 $\angle APC=\angle BPC$

且 PM垂直於AB而平分AB於M點



故　AC，BD所對等角角點之軌跡爲AB之中點之垂線。

40. 從半圓之直徑AB之一端A，作直線AC截圓周於P令AP＝CP而中心O與C之連結線截BP弦於G則G之軌跡若何？

解：$AP=CP$，　$AO=BO$

故　G爲三角形ABC之重心

即　$OG=\frac{1}{3}OC=\frac{1}{2}CG$

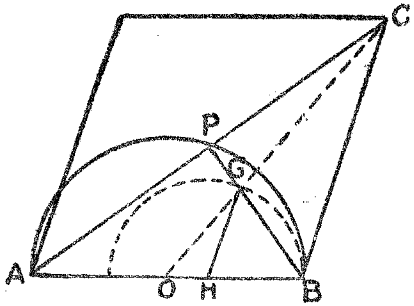
作　$GH \parallel BC$

則由相似三角形OBC及OHG

$OG:OC=OH:OB$

即　$1:3=HO:BO$

$\therefore\quad HO=\dfrac{1}{3}BO$



故所求之軌跡爲自圓心取半徑之三分之一之H點爲圓心以直徑之三分之一之HG爲半徑所作之半圓周。

41. 從圓周上一點A作AB弦其中點爲P. 則P點之軌跡若何?

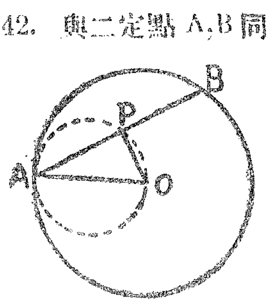
解: 圓心爲O連OP則

$OP\perp AB$

故　P點在以半徑OA爲直徑之圓周上

故　所求之軌跡爲自定點A所作半徑爲直徑之圓周

42. 與二定點A,B同在圓周上設任意一點Q;引長AQ弦至P令QP＝弦BQ問P點之軌跡如何?



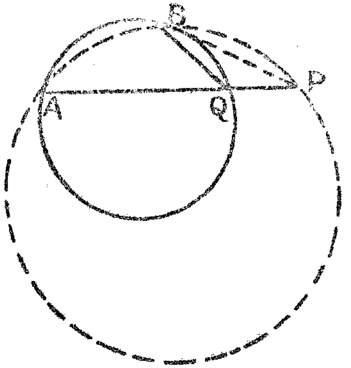
解: $BQ=PQ\quad\therefore\quad\angle QBP=\angle QPB$

故　$\angle AQB=\angle QBP+QPB$

$=2\angle QPB$

因$\angle AQB$爲對定弧AB之角故爲定角且$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AQB$故$\angle APB$亦爲定角

故所求之軌跡爲以AB爲弦而含有定角APB之弓形之弧。



43. 設AOB爲已知圓之直徑OC爲一半徑，CD爲由C至AB之垂線於OC上截取OM等於CD若OC繞O點旋轉求M點之軌跡

解：作半徑OE平行於CD連結EM

則 $\angle MOE=\angle OCD$

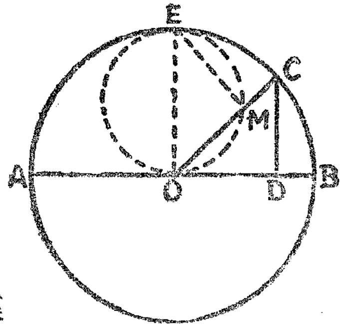
且 $OC=OE$，$OM=CD$

故 $\triangle MOE\equiv\triangle DCO$

故 $\angle OME=\angle CDO\angle R$

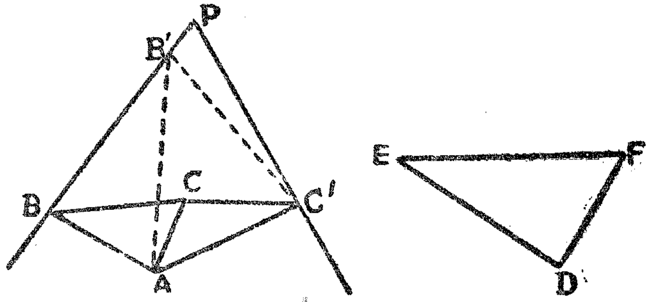
故 M點在以OE爲徑之圓周上

即 M點之軌跡爲以半徑OE爲直徑之圓周。



44. ABC，DEF 兩三角形相似A點爲定點而B點恆在一直線上運動，則C點之軌跡爲一直線.

證：



設B點運動所在之直線爲PB 則 AB ⊥PB於PB上取任意一點B′作三角形AB′C′ 相似於ABC則亦與DEF相似

且CC′ ⊥AC 故C′爲所求軌跡上之一點

又 $\angle ABB' = \angle ACC' = \angle R$ $\angle BAB' = \angle CAC'$ 故

三角形 ABB′與ACC′相似

$\therefore$ $AB : AB' = AC : AC'$

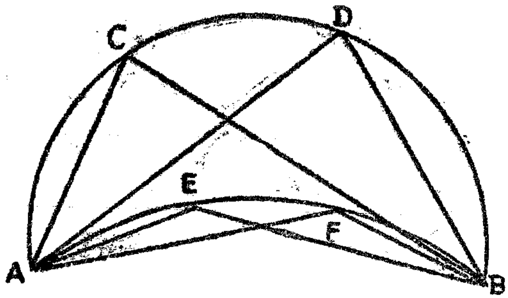
卽 $AB : AC = AB' ; AC'$ 且 $\angle BAC = \angle B'AC'$

故三角形AB′C′與ABC相似亦卽與DEF相似

故所求之C點之軌跡爲CC′直線。

45. 同底且頂角相等之二三角形，其底旁兩角之平分線相交於一點則此點之軌跡如何？（頂角在底邊同側）

解：



ACB及ADB二三角形以AB爲同底且$\angle C=\angle D$

ACB及ADB二三角形兩底旁角之等分線各交於E及F

因 $\angle CAB+\angle CBA=\angle DAB+\angle DBA=2\angle R-\angle C$

$=2\angle R-\angle D$

故 $\frac{1}{2}(\angle CAB+\angle CBA)=\frac{1}{2}(\angle DAB+\angle DBA)$

卽 $\angle EAB+\angle EBA=\angle FAB+\angle FBA$

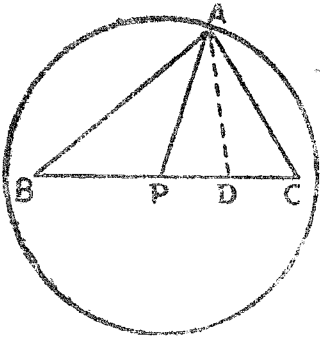
故 $\angle E=\angle F$

卽E及F均在以AB爲弦而含$\angle E$或$\angle F$之圓弧上

故E及F等點之軌跡爲一圓弧AB。

46. 從二定點B，C至一點A之距離平方之和若爲一定 則A點之軌跡爲以BC之中點P爲圓心以PA爲半徑之圓周.

證：作AD垂直於BC 則$\angle APB > \angle R$



且AP在BC上之正射影爲PD

$\therefore\quad AB^2 = BP^2 + AP^2 + 2BP \cdot DP \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$AC^2 = CP^2 + AP^2 - 2CP \cdot DP \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

因　$BP = CP$

$\therefore\quad 2BP \cdot DP = 2CP \cdot DP$

由(1)(2)故　$AB^2 + AC^2 = 2BP^2 + 2AP^2 =$ 一定

又　$BP = \frac{1}{2}BC$　$\therefore$　$2BP^2$爲一定　卽$2AP^2$爲一定

故　AP之長爲一定. 故所求A點之軌跡爲以BC之中點P爲圓心以PA爲半徑之圓周。

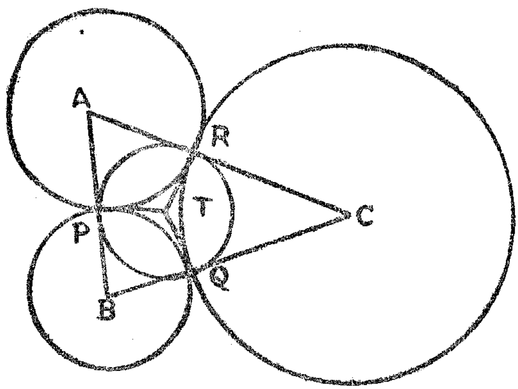
IV. 作 圖 題

47. 以任何三角形之三頂點爲心作互切之三圓

分析；以三角形 ABC 三頂點A,B,C爲心所作之三圓互相切於P,QR. 則

AP＝AR,　BP＝BQ,　CR＝CQ.

故知P,Q,R爲ABC內切圓之切點



作圖：於△ABC內作內切圓切三角形之三邊於P,Q,R三點. 以ABC各爲圓心以AP,BQ,CR各爲半徑順次作圓則此三圓卽爲所求之三圓。

48. 過二已知點作一半圓與已知之一直線相切.

解：AB爲二已知點，XY爲已知之一直線，過A,B切直線XY上之一點D作圓. 若A′爲A依XY之對稱點卽A′爲定點。

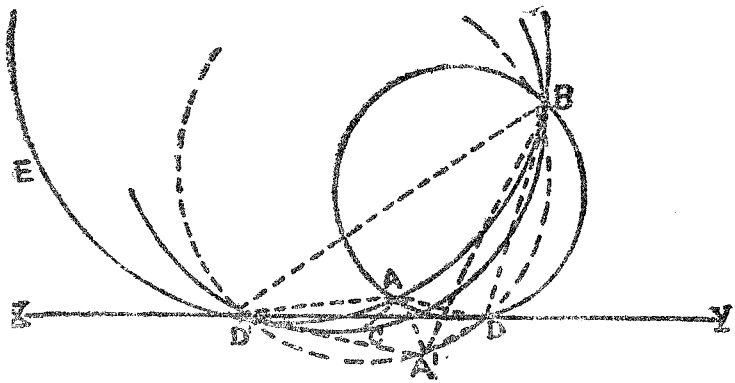
引長BA；交XY於C連結BD，AD，A′D.

則　$\angle DBA=\angle ADC=\angle A'DC$

故　$\angle A'DB=\angle CDB+\angle A'DC=\angle CDB+\angle ADC$

$=\angle CDB+\angle DBA=\angle BCD'=$定角

作圖：故將A′B爲弦於其上畫含定角BCD′之圓與XY交於D及D′二點卽此二點爲欲作之圓與XY 相切之切點故外接於△ABD及△ABD二三角形作圓．是二圓卽爲所求之圖



證：因　$\angle BDA'=\angle BDC+\angle ABD$

$\therefore\quad \angle ADC=\angle ABD$

故　ADB圓切XY於D

又　$\angle A'D'B=2\angle R-\angle A'DB=2\angle R-\angle BCD'=\angle BCD$

但 $\angle A'D'B - \angle CD'B = \angle BCD - \angle CD'B$

即 $\angle A'DC = \angle D'BC$ 故 $\angle AD'D = D'BA$

故 BAD′E圓切XY於D′

討論：(1) A,B在XY同側時：

(i) AB之延長線與XY相交時有二解

(ii) $AB \parallel XY$時則有一解

(2) A,B之一在XY之則上有一解

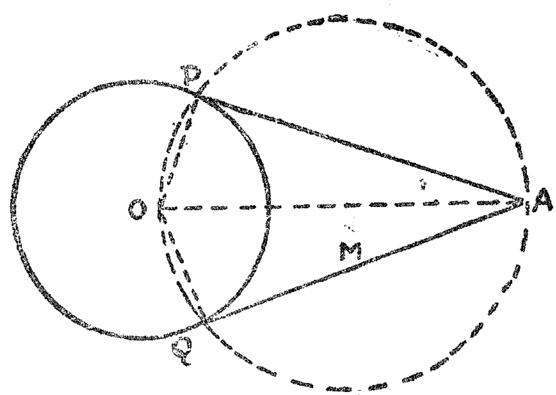
(3) A,B在XY之異側則無解

(4) A,B俱在XY之上則無解。

49. 由圓外之一點作切線於定圓。

分析：由圓外一點A作O圓之切線AP連結OP則 $OP \perp XP$。

故P切點在以OA為直徑之圓周上

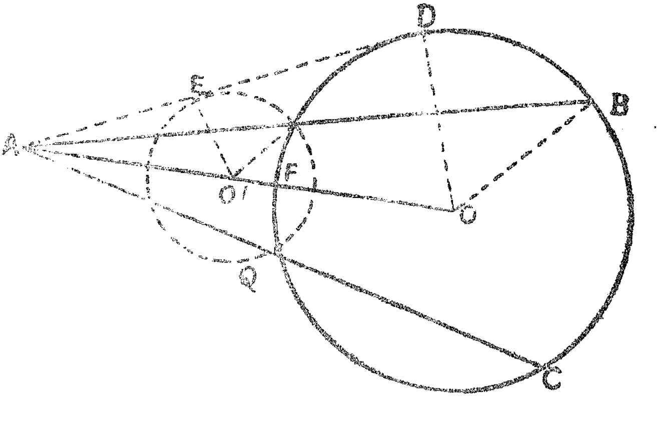


作圖：連結OA，平分OA得M點以M爲圓心以MO爲半徑作
圓與O圓交於P，Q二點連AP，AQ
則AP及AQ爲所求之切線。

50. 自圓外之一定點求作割線令其內外二部分之長相等

解：設定圓之圓心爲O，圓外之定點爲A
連結OA，求OA之中點得O，則以O'爲圓心以O圓之半
徑爲直徑作圓與O圓交於P，Q二點連結AP，AQ與O圓
交於他二點B，C。則

$AP=PB$，　　$AQ=QC$



證：由A引O圓之切線AD；O'之圓之切線AE
則 $OD \parallel O'E$ 且 $2O'E=OD$。

故　$AD \parallel AE$

但自一點引二直線不能平行故AP與AE重合

即　AED為二圓之公切線且

$$AE = ED$$

故O'圓通過AE之中點，即自A至O圓界之各直線均為圓O'所平分　故P點為AB之中點　即

$$AP = PB$$

同理　$AQ = QC$

討論：設OA與O圓周相遇之點為F令

$$OF = r, \qquad AF = d$$

而式圓半徑之和 $= r + \frac{1}{2}r$

$$OO' = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}r$$

$$\therefore \quad OO' < r + \frac{1}{2}r$$

(1) 可見此時二圓之中心距離小等半徑之和而大於其差故兩圓相交令其交為P，Q　則 APB，及AQC即所求之直線

(2)$d=2r$之時

$$OO'=r+\frac{1}{2}r$$

故兩圓外切於F是以所求之直線卽過中心之直線

(3) $a>2r$之時,

$$OO'>r+\frac{1}{2}r$$

故兩圓不相遇是以此問題爲不能。

51. 過一定點求作一直線與定圓相交令圓內截弦等於定長

解: 設P爲定點,O爲定圓之圓心,L爲定長

(i)L大於O圓之直徑時,問題爲不能

(ii)L等於O圓之直徑時,則所求之直線爲PO之連結線

(iii)L小於O圓之直徑時則有

(a) P點在圓周上:

作法: 以P爲圓心, 以L爲半徑作圓與O圓相交於A,B則PA,PB爲所求之弦. 有二解(見圖1)

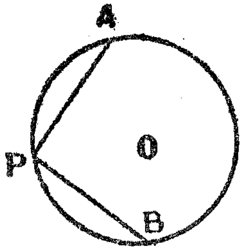
(b) P點不在圓周上:

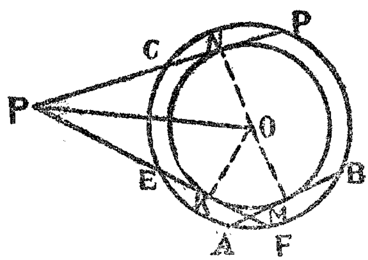
作法： 於O圓內作任意弦AB令AB＝L. 以O為圓心作圓與AB相切. 故過P作此第二圓之切線卽為所求之直線。(見圖2).

證： 令第二圓與AB之切點為M. 與過P之二切線PCD及PEF之切點為N, K.則

$$OM=ON=OK$$

$$\therefore \quad AB=CD=EF=L.$$





討論：(i) PO＞OM則P在MNK圓外故有二解卽PD, PF.

(ii) PO＝OM則P在MNK圓周上故只有一解

(iii) PO＜OM則P在MNK圓內故無解。

52. 有限直線AB試求三等分之。

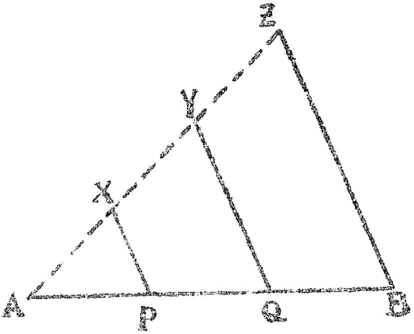
作法：自A作不與AB相重之直線AZ令

$AX = XY = YZ$

連BZ.自Y,X順次作YQ,XP令

$YQ \parallel XP \parallel ZB$

與AB相交之P,Q卽爲所求之分點.



證：$AP:PQ:QB$

$= AX:XY:YZ$

$= 1:1:1$

故$AP = PQ = QB$。

53. 已知三角形ABC之A角至對邊垂線AH,中線AM,A角之二等分線AD.求作ABC。

分析：令設ABC爲已求得之三角形,作外接圓之直徑AA'

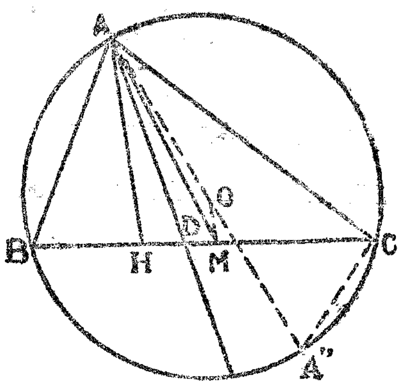
連結CA' 則三角形 AHB 與ACA'相似 卽$\angle BAH = \angle CAA'$

故AD爲$\angle A'AH$之二等分線.且$OM \perp BC$,

故$\triangle AHL$爲直角三角形。

作圖：先AHD三角形.

次以A爲圓心以M爲半徑作圓弧截HD之延長線於M.自M引HM之垂線OM.自A作AOA′直線令∠A′AD=∠HAD且截OM於O.則以O爲圓心以OA爲半徑作圓.延長HM與圓交於B,C.則ABC爲所求之三角形。



54. 有三定點A,B,C.試以A爲角頂且通過B,C作正方形.

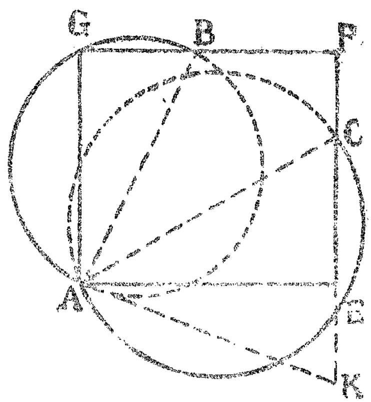
分解：AE＝AG,

AE⊥AG

作AK與EF交於K

令∠EAK

＝∠BAG



則$\triangle ABG \cong \triangle AEK$

$\therefore \quad AB = AK, \quad AB \perp AK$

作圖：連AB，由A作AK令

$AK \perp AB$，且$AK = AB$

連結CK與以AC爲徑之圓周交於E點連結AE.

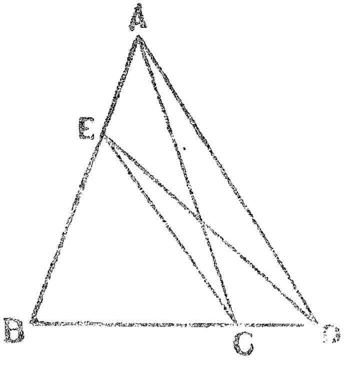
則AE爲所求正方形之一邊。

55. 三角形ABC之一邊BC延長至D求作DE截AB於E令三角形DBE＝ABC.

作圖：連結AD，自C作CE令

$CE \parallel AD$.

與AB相交於E連結DE卽爲所求.



證：AEC及CED二三角形同高且同CE底故相等。

三角形$ABC = BEC + AEC$

$= BEC + CED =$ 三角形DBE

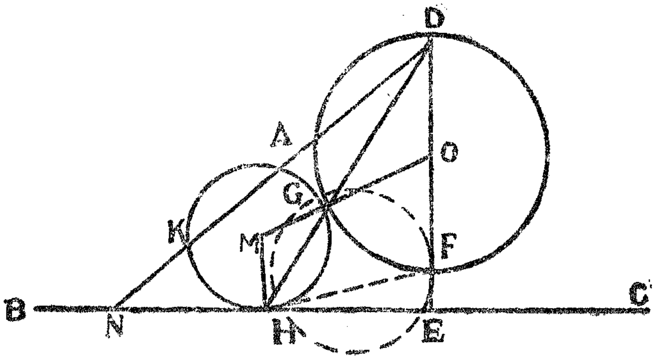
56. 求通過一定點A切於一定圓及定直線BC而畫圓.

解: AGH圓爲切於BC及定圓者·而此圓之圓心爲M定圓之圓心爲O. 連結OM. $MH \perp BC$延長定圓之直徑DF令與BC成垂直於E. 因G爲切點故MGO成一直線而

$$MH \parallel OD \quad \therefore \quad \angle HMG = \angle DOG$$

故 $\angle MGH = \angle OGD$

故 DGH成一直線。



因 $\angle HEF = \angle HGF = \angle R$

故 GHEF爲圓內接四邊形故

$$DG \cdot DH = DF \cdot DE$$

又 DA截HGA圓周於K 則

$DA \cdot DK = DG \cdot DH = DF \cdot DE$因DF, DA, DE均爲已知

故 DK亦爲已知，於是通過A,K切BC而作圓

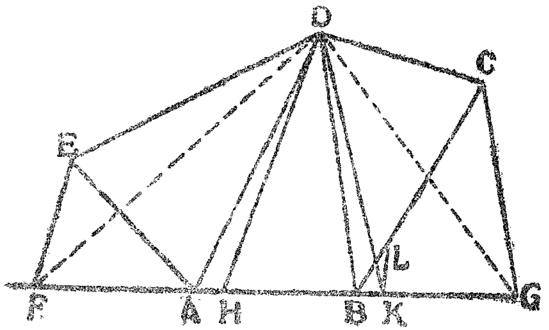
又因 $NK \cdot NA = NH^2$ 故H爲已知

故此圓即爲三角形 AKH之外接圓.

此AKH之外接圓 即所求之切於定圓及 B C 直線之圓也。

57. 從五角形之一角頂求作二直線之等分其原形.

解：於五角形ABCDE引長AB之兩端 作CG ∥ BD 及EF ∥ AD連結DF，DG而三等分FG於H，K. 若H在AB之上則



四邊形DEAH＝三角形DFH＝$\frac{1}{3}$DFG＝$\frac{1}{3}$五角形ABCDE。

又K在AB之延長線上，作KL ∥ BD截BC於L

則三角形 DBL＝DBK.

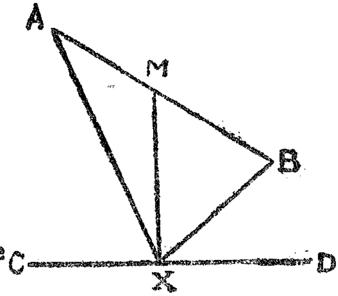
故四邊形DHBL＝三角形DHK＝$\frac{1}{3}$三角形DFG.

$$=\frac{1}{3}\text{五角形}ABCDE.$$

故DH及DK二直線卽爲三等分此五角形之直線。

V. 極 大 極 小

58. 從二定點A,B 至定直線CD上求一點X令 AX^2+BX^2 爲最小



解：連結AB，設AB中點爲M.

自M作

$MX \perp CD$.

則X爲所求之點

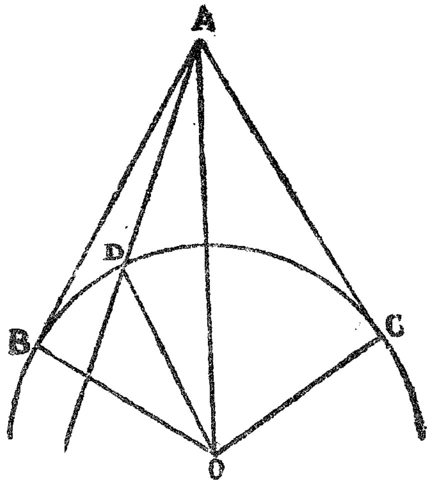
證：$AX^2+BX^2=2AM^2+2MX^2$

因 $AM=\frac{1}{2}AB=$一定 欲使AX^2+BX^2爲最小必需

令 MX爲最小， 但$MX\perp CD$時 則MX爲最小。

59. 從圓外一點 A，至圓周之凸出部分作直線，則切線爲最大·

證：AB，AC爲二切線，則A對凸部之弧爲BAC於兩三角形 ABO，ADO，



BO＝DO，OA爲公共邊

$\angle BOA > \angle DOA$

$\therefore$ AB＞AD．

故 AB爲最大

同理 AC亦爲最大。

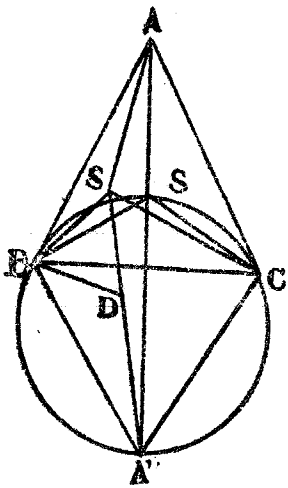
60. 設三角形ABC內一點S，若

$$\angle ASB = \angle BSC = \angle CSA$$

求證S至三頂點距離之和卽SA＋SB＋SC爲最小．

證：$\angle ASB = \angle BSC = \angle CSA = \frac{2}{3}\angle R$

作BSC三角形之外接圓，
延長AS與此外接圓交於
A′則 A′BC為等邊三角形
故　A′S＝BS＋CS.
又於ABC內設有一任意S′
　而$\angle BA'D=\angle BCS'$
　$\angle A'BD=\angle CBS'$
$\therefore \triangle A'BD\cong\triangle BCS'$.



$\therefore$　$DA'=S'C$，$BD=S'B$

而　$\angle DBS'=\angle DBC+\angle CBS'=\angle DBC+\angle A'BD$

$$=\angle A'BC=\frac{2}{3}\angle R$$

又　$BD=BS'$　$\therefore$　$\angle BDS'=\angle BS'D$

故　BDS′為等邊三角形　而　$S'D=S'D$

$\therefore$　$AA'<S'A+S'D+DA$

即　$AA'<S'A+S'B+S'C$

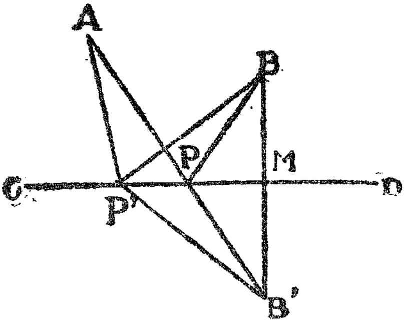
故　$SA+SB+SC<S'A+S'B+S'C$

故　SA＋SB＋SC為最小。

61. 在一直線CD之同側有二點A, B. 試於CD上求一點P令

AP＋BP為極小.

解：對於CD直線取B之對稱點B′，結連AB′與CD交於P點



連結AP 及 BP 則 AP＋BP

為極小.

證：因B, B′對稱，連結BB′

交CD於M

$\therefore$ $BM \perp B'M$,

且 $BM = B'M$

$\therefore$ $\triangle BPM = \triangle B'PM$

$\therefore$ $BP = B'P$.

$\therefore$ $AP + BP = AP + PB' = AB'$

於CD上取任意P′, 連結AP′, BP′, B′P′ 則 $BP' = B'P'$

$\therefore$ $AP' + BP' = AP' + B'P'$

但 $AP' + B'P' > AB'$

$> AP + BP$

故 $AP' + BP' > AP + BP$ 故 AP＋BP為極小。

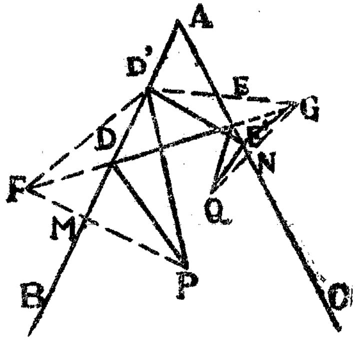
62. 定角BAC內有二點P,Q. 求作折線PDEQ爲極小.

解：作$PM \perp AB$, $PM=FM$

及$QN \perp AC$，$QN=GN$

連結FG截AB,AC於D,E

則 折線$PDEQ=PD+DE+EQ$爲極小.



證：於AB,AC取任意二點D′及E′ 則

$D'E'+E'G>D'G$

即 $D'E'+E'Q>D'G$

又 $FD'=D'P$

$FD'+D'G>FG$

故 $D'P+D'G>FG$

即 $PD'+D'E'+E'Q>FG$

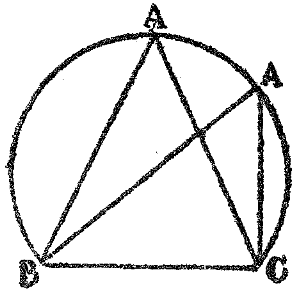
故 $PD'+D'E'+E'Q>PD+DE+EQ$

故 $PD+DE+EQ=PDEQ$爲極小。

63. 頂角爲一定，底邊亦爲一定之三角形其極大者爲等腰三角形.

證: 三角形ABC，A′BC爲同BC底邊 且 $AB=AC$,

及 $\angle A=\angle A'$ 則以BC爲弦含定角$\angle A$



作弓形. 因 弧AB＝弧AC

故 A 爲 BAC 弧之中點卽三角形ABC之高大於A′BC之高. 故三角形ABC大於A′BC

卽 等腰三角形爲極大。

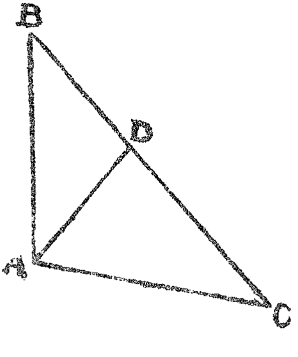
64. 直角三角形ABC之斜邊BC爲一定作垂線AD於BC

則 $AB^2+CD^2=BC^2$ 爲極大。

證: $AB^2+CD^2=BC^2-AC^2+CD^2$

$=BC^2-(AC^2-CD^2)$

$=BC^2-AD^2$



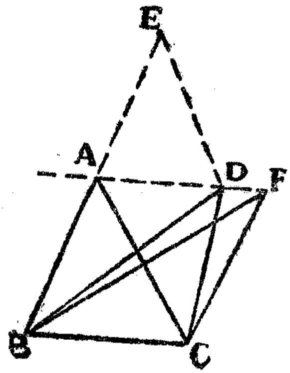
BC爲一定，故當$AD=0$時爲極大

$\therefore\ AB^2+CD^2=BC^2$,

65. 等底等高之諸三角形其周圍最小者爲二等邊三角形.

證: 設 ABC, DBC, FBC……諸三角形爲等底等高但

$AB=AC$.



$AD \parallel BC$ 且 AD 爲 A 外角之

平分線故延長 BA 至 E 點

令 $BA=AE$ 連結 DE 則

$CD=DE$.

但 $EB<BD+DE$

卽 $AB+AC<BD+DC$

故 $AB+BC+CA<DB+BC+CD$

同 $AB+BC+CA<FB+BC+CF$……………

故 ABC之周圍爲最小.

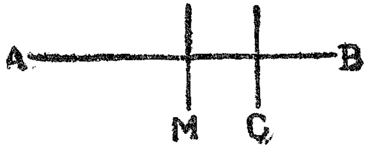
66. 求分一有限直線爲二分使其二部分所包之矩形爲最大.

解: 設有限直線爲AB其分點爲C. 且其中點令爲M

則 $AC \cdot CB=(AM+MC)(AM-CM)$

$=AM^2-CM^2$

$AM=\frac{1}{2}AB=$ 一定



故欲$AC\cdot CB$爲最大必需$CM^2=0$

卽C當與M重合而上式變爲$AC\cdot CB=AM^2$.

故將AB分爲二分使其二部分之所包矩形爲最大則將

AB二等分於M卽得。

第二　立體部

67. 一直角之在一平面上之正射影若欲成直角,則其必要且

充分之條件爲其一邊平行於平面,而他邊不垂直於平面。

證：設$\angle BAC=\angle R$. 平面P.其正射影在P上AB爲$A'B'$,

AC爲$A'C'$.若AC不垂直於P且AB爲平行於平面P者

則　　$\angle B'A'C'=\angle R$.

此卽$\angle BAC$等於直角之正射影$\angle B'A'C'$亦成直角之

充分之要件也。

若AC不平行於P,而$A'B'$垂直於AA',$A'C'$二直線.卽

垂直於平面AC'.

故　平面$AB'\perp$平面AC'

今設過 A 點且垂直於 AC

之平面爲Q則AB爲平面Q

及平面AB′之交線

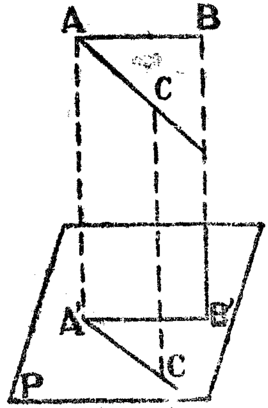
但平面Q⊥平面AC′

故　AB⊥平面AC′

卽　AB ∥ A′B′

故　AB ∥ 平面P,

此卽本題必要之條件也。



68. 在空間有四點 A,B,C,D若AB=CD,BC=DA,AC=BD 則

$\angle BAC+\angle CAD+\angle DAB=\angle ABC+\angle CBD+\angle DBA$

$=\angle ACB+\angle BCD+\angle DCA$

$=\angle ADB+\angle BDC+\angle CDA=2\angle R.$

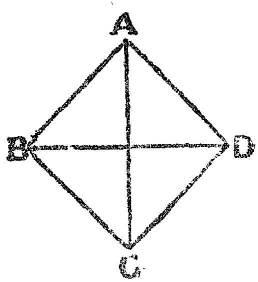
證: $\triangle ABC\cong\triangle ADC\cong\triangle DCB\cong$

$\triangle ABD.$

∴　$\angle BAC=\angle BDC,$

$\angle CAD=\angle CBD$

及　$\angle BAD=\angle BCD$

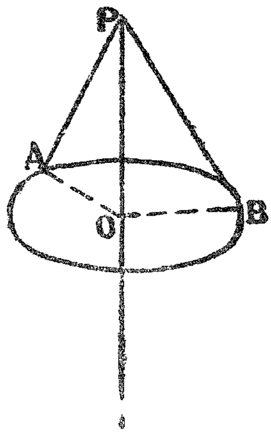


故 $\angle BAC+\angle CAD+\angle DAB=\angle BDC+\angle CBD+\angle BCD=2\angle R$

同理 $\angle ABC+\angle CBD+\angle DBA=\angle ACB+\angle BCD+\angle DCA=\angle ADB+\angle BDC+\angle CDA=2\angle R$。

69。一點在空間與一圓周上諸點之距離相等求此點之軌跡

解：設一點P與O圓周上各點之距離相等，則P點之軌跡爲連結P與圓心O之直線.



證：於圓周上取任意A,B,連結PA, PB, OA, OB 則由二三角形POA, POB 知 $OA=OB$, $PA=PB$ 且PO公用

$\therefore \triangle POA \cong \triangle POB$

$\therefore \angle POA=\angle POB=\angle R$

故 OP垂直於包含O圓周之平面

即 OP上任何一點至圓周上諸點之距離恆相等

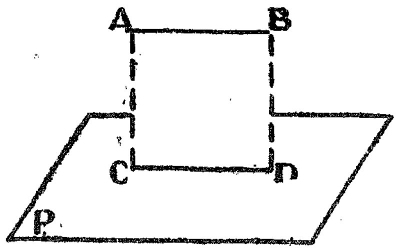
故 P點之軌跡爲OP直線。

70. 平分三面角之三二平面角之平面必相交於一直線。

證：設三面角爲S—ABC其三稜爲SA,SB,SC. 則於SA稜平分相交二平面SAC及SAB之二面角之平面，在二平面SAC及SAB之等距離之位置. 同理於SB稜平分二平面SAB及SBC之二面角之平面在平面SAB及SBC爲等距離. 故二平面之交線若爲SP則SP於三平面SAB, SBC,SCA有等距離.故於SC相交二平面SAC,SBC之等距離之平面，卽平分此二面所成之二面角之平面通過SP.故平分三面角之三二平面角之平面相交於一直線。

71. 一直線在一平面上之射影等於原線之長試明此直線與此平面相關之位置.

解：設一直線爲AB其對於P平面之射影爲CD



連結，AC，BD，則

AC ⊥ 平面P

BD ⊥ 平面P

∴ AC ∥ BD

且CD垂直於AC及BD，爲二平行線間之距離

因 AB=CD

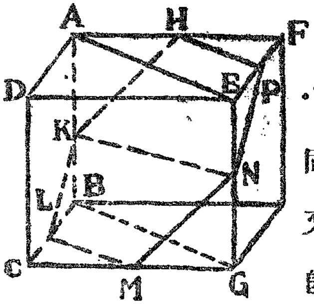
故　AB亦垂直於AC及BD

$\therefore$　$AB \parallel CD$

卽　AB平行於平面P。

72. 作一平面使與一正方體相交于正六角形。

解：設AF，AB；BC，CG，GE，EF 爲正方體之邊其各邊中點順次爲H，K，Z，M，N，P．則



$LM \parallel BG$，$HP \parallel AE$，

$\therefore$　$AE \parallel BG$　$\therefore$　$LM \parallel HP$.

同理知　$KL \parallel PN$ 及 $HK \parallel MN$

又　$AE \parallel KN$　$\therefore$　$HP \parallel KN$

卽　KH，HP，PN 三直線同在一平面上

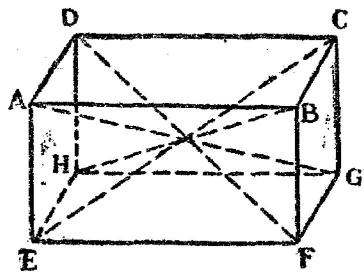
由此三鄰邊皆在同一平面上

再　$\triangle AKH \equiv \triangle BKL \equiv \triangle CLM \equiv \cdots\cdots$ 卽 $HK = KL = LM = \cdots\cdots = PA$

且　$HM = PL = KN$ 故HKLMNP爲正六角形．故所求之平面爲過不過相對二角頂之邊之中點之平面，共有四解。

73. 平行六面體之四對角線之平方和等於其十二稜之平方和.

解: 設平行六面體爲 ABCDEFGH. 四對角線爲 AG, BH, CE, DF



則 $AG^2 = AE^2 + EG^2 =$

$AE^2 + EF^2 + FG^2$

$BH^2 = DH^2 + BD^2 =$

$DH^2 + AB^2 + AD^2$

$CE^2 = CG^2 + GE^2 =$

$CG^2 + EH^2 + HG^2$

及 $DF^2 = BF^2 + BD^2 =$

$BF^2 + BC^2 + CD^2$

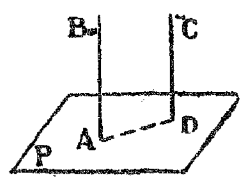
故 $AG^2 + BH^2 + CE^2 + DF^2$

$= AB^2 + BC^2 + CD + DH^2 + AE^2 + BF^2 + CG^2 + EF^2$

$+ FG^2 + GH^2 + AD^2 + EH^2$.

74. 已知平面P上之已知點A,求過A作P平面之垂線。

解: 於P平面外任取一點 C 作 CD 直線垂直於平面P次從A點作 CD之平行線AB則AB爲所求之垂線



證: 因通過 CD 直線之一切平面均垂直於P

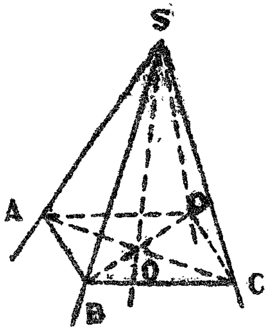
故通過AB,CD之平面亦垂直於P

故通過AB之一切平面因與CD平行均垂直於P

卽AB爲平面P之垂線。

75. 求作一平面使與一四面角相交于平行四邊形。

解：設於通過SA,SC之平面及通過SB,SD之平面之交線SO上取一點O於ASC及BSD二平面上作二直線AOC,BOD



令　AO＝CO,　BO＝DO.

則AOC,BOD二直線所決定之平面卽爲所求之平面

證：聯結四邊形ABCD，因其對角線AC,BD互相平分，故ABCD爲平行四邊形。

76 自三角錐底面上一點作三直線與三稜各各平行，則此三直線爲三面所截其每一部分與其相當稜之比之和等於1

解：設三角錐爲S－ABC，自其底面ABC上取一點P平行於SA,SB,SC作直線與三面各交於A′,B′,C′則

$$\frac{PA'}{SA}+\frac{PB'}{SB}+\frac{PC'}{SC}=1.$$

證：過P作DE令 DE ∥ AC

作PF 令 PF ∥ AB

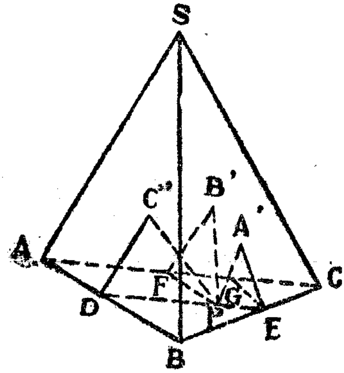
過E作EG 令 EG ∥ AB

因 SC ∥ PC′， AC ∥ DP

故 二平面PDC′ 及 SAC

平行

∴ SA ∥ C′D



即二三角形 SAC 與 C′DP 相似

∴ PC′ : SC = PD : CA

即 $\frac{PC'}{SC}=\frac{PD}{CA}$

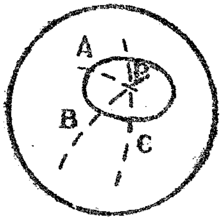
同理得 $\frac{PB'}{SB}=\frac{PF}{AB}=\frac{EG}{AB}=\frac{CG}{CA}$ 及 $\frac{PA'}{SA}=\frac{PE}{CA}$

∴ $\frac{PA'}{SA}+\frac{PB'}{SB}+\frac{PC'}{SC}=\frac{PE+CG+PD}{CA}$

$=\frac{DE+CG}{CA}=\frac{CA}{CA}=1$。

77. 過球面三已知點作圓.

解: 求P點,使P點與三已知點A,B,C成等距



即 PA=PB=PC

以P爲圓心以PA爲半徑於球上作圓

通過A,B,C

則ABC圓爲所求之圓

證: 因P點爲ABC圓之極.故通PA,PB,PC各作大圓之派與ABC圓交於A,B,C 即 PA=PB=PC.

78. 設T爲正直圓柱體之全面積 H 爲其高求其半徑R及其體積V.

解: $T=2\pi RH+2\pi R^2$ 以2π乘之,並移次

$$4\pi^2R^2+4\pi^2RH+\pi^2H^2=2\pi T+\pi^2H^2$$

$$\therefore \quad 2\pi R+\pi H=\sqrt{2\pi T+\pi^2H^2}$$

$$故 \quad R=\frac{-H}{2}+\frac{1}{2\pi}\sqrt{2\pi T+\pi^2H^2}$$

$$又 \quad V=\pi R^2H=\pi H\left(-\frac{H}{2}+\frac{1}{2\pi}\sqrt{2\pi T+\pi^2H^2}\right)^2$$

$$=\pi H\left(\frac{H^2}{4}-\frac{H}{2\pi}\sqrt{2\pi T+\pi^2H^2}+\frac{1}{4\pi^2}\right.$$

$$\left.(2\pi T+\pi^2H^2)\right)$$

$$=\pi H\left(\frac{H^2}{2}-\frac{H}{2\pi}\sqrt{2\pi T+\pi^2H^2}+\frac{T}{2\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\pi H^3-H^2\sqrt{2\pi T+\pi^2H^2}+HT\right)。$$

79. 設T爲正直圓錐體之全面積，R爲其底之半徑求其體積V

解：設高爲H，斜高爲L則

$$L=\sqrt{H^2+R^2}$$

$$\therefore\quad T=\pi RL+\pi R^2$$

$$=\pi R\sqrt{H^2+R^2}+\pi R^2$$

$$\therefore\quad \sqrt{H^2+R^2}=\frac{T-\pi R^2}{\pi R}\qquad\therefore\quad H^2+R^2$$

$$=\frac{T^2-2\pi RT+\pi^2R^4}{\pi^2R^2}$$

$$\therefore\quad H=\frac{1}{\pi R}\sqrt{T(T-2\pi R^2)}$$

$$故V=\frac{1}{3}\pi R^2H=\frac{1}{3}\pi R^2\times\frac{1}{\pi R}\sqrt{T(T-2\pi R^2)}$$

$$=\frac{R}{3}\sqrt{T(T-2\pi R)^2}。$$

80. 球之體積與其內接正方體之體積之比爲$\pi\sqrt{3}:2$

證：若R爲球之半徑則球之體積等於$\frac{4}{3}\pi R^3$

今令其內接正方體之邊等於a則

$$a^2+2a^2=4R^2$$

$\therefore\quad a=\frac{4}{\sqrt{3}}R$ 且正方體之體積爲

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}R\right)^8=3\frac{8}{\sqrt{3}}R^3$$

故所求體積之比爲

$$\left(\frac{4}{3}\pi F\right)^3\cdot 3\frac{8}{\sqrt{3}}R^3=\pi\sqrt{3}:2。$$

Ⅳ 三 角（平 面）

I. 恆 等 式

1. $Sec^2\Theta Cosec^2\Theta = tan^2\Theta + Cot^2\Theta + 2$

證：$Sec^2\Theta Cosec^2\Theta = \left(\frac{1}{Sin\Theta\ Cos\Theta}\right)^2 = \left(\frac{Sin^2\Theta + Cos^2\Theta}{Sin\Theta\ Cos\Theta}\right)^2$

$= \left(\frac{Sin\Theta}{Cos\Theta} + \frac{Cos\Theta}{Sin\Theta}\right)^2 = (tan\Theta + Cot\Theta)^2$

$= tna^2\Theta + Cot^2\Theta + 2$

2. $Sin^2\Theta tan\Theta + Cos^2\Theta Cot\Theta + 2Sin\Theta Cos\Theta = tan\Theta + Cot\Theta$

證：原式左邊 $= Sin\Theta Cos\Theta\left(\frac{Sin^2\Theta}{Cos^2\Theta} + \frac{Cos^2\Theta}{Sin^2\Theta} + 2\right)$

$= Sin\Theta Cos\Theta\left(\frac{Sin^2\Theta + Cos^2\Theta}{Sin\Theta Cos\Theta}\right)^2$

$= \frac{1}{Sin\Theta Cos\Theta} = \frac{Sin\Theta}{Cos\Theta} + \frac{Cos\Theta}{Sin\Theta} = tan\Theta + Cos\Theta$。

3. $tan(45^0 + A) - tan(45^0 - A) = 2tan2A$

證 $tan(45^0 + A) - tan(45^0 - A)$

$= \frac{tan45^0 + tanA}{1 - tan45^0 tanA} - \frac{tan45^0 - tanA}{1 + tan45^0 tanA}$

$$=\frac{1+\tan A}{1-\tan A}-\frac{1-\tan A}{1+\tan A}$$

$$=\frac{\operatorname{Cos}A+\operatorname{Sin}A}{\operatorname{Cos}A-\operatorname{Sin}A}+\frac{\operatorname{Cos}A-\operatorname{Sin}A}{\operatorname{Cos}A+\operatorname{Sin}A}$$

$$=\frac{(\operatorname{Cos}A+\operatorname{Sin}A)^2-(\operatorname{Cos}A-\operatorname{Sin}A)^2}{\operatorname{Cos}^2A-\operatorname{Sin}^2A}$$

$$=\frac{4\operatorname{Sin}A\operatorname{Cos}A}{\operatorname{Cos}2A}=\frac{2\operatorname{Sin}2A}{\operatorname{Cos}2A}=2\tan 2A。$$

4. $\operatorname{Sin}3A\operatorname{Cosec}A-\operatorname{Cos}3A\operatorname{Sec}A=2.$

證：$\operatorname{Sin}3A\operatorname{Cosec}A-\operatorname{Cos}3A\operatorname{Sec}A$

$$=\frac{3\operatorname{Sin}A-4\operatorname{Sin}^3A}{\operatorname{Sin}A}-\frac{4\operatorname{Cos}^3A-3\operatorname{Cos}A}{\operatorname{Cos}A}$$

$$=3-4\operatorname{Sin}2A-4\operatorname{Cos}^2A+3$$

$$=6-4(\operatorname{Sin}^2A+\operatorname{Cos}^2A)=6-4=2。$$

5. $\dfrac{\operatorname{Sin}A+2\operatorname{Sin}3A+\operatorname{Sin}5A}{\operatorname{Sin}3A+2\operatorname{Sin}5A+\operatorname{Sin}7A}=\dfrac{\operatorname{Sin}3A}{\operatorname{Sin}5A}.$

證：左邊

$$=\frac{\operatorname{Sin}A+\operatorname{Sin}5A+2\operatorname{Sin}3A}{\operatorname{Sin}3A+\operatorname{Sin}7A+2\operatorname{Sin}5A}=\frac{2\operatorname{Sin}3A\operatorname{Cos}2A+2\operatorname{Sin}3A}{2\operatorname{Sin}5A\operatorname{Cos}2A+2\operatorname{Sin}5A}$$

$$=\frac{2\mathrm{Sin}3A(\mathrm{Cos}2A+1)}{2\mathrm{Sin}5A(\mathrm{Cos}2A+1)}=\frac{\mathrm{Sin}3A}{\mathrm{Sin}5A}。$$

6. $\mathrm{Sin}4A=4\mathrm{Sin}A\,\mathrm{Cos}^3A-4\mathrm{Cos}A\mathrm{Sin}^3A$

證：$\mathrm{Sin}4A=2\mathrm{Sin}2A\mathrm{Cos}2A$

$$=2\cdot 2\mathrm{Sin}A\mathrm{Cos}A(\mathrm{Cos}^2A-\mathrm{Sin}^2A)$$

$$=4\mathrm{Sin}A\mathrm{Cos}^3A-4\mathrm{Cos}A\mathrm{Sin}^3A。$$

7. $\dfrac{\mathrm{Cos}A-\mathrm{Cos}3A}{\mathrm{Sin}3A-\mathrm{Sin}A}=\tan 2A$

證 $\dfrac{\mathrm{Cos}A-\mathrm{Cos}^3A}{\mathrm{Sin}3A-\mathrm{Sin}A}=\dfrac{\mathrm{Cos}A-4\mathrm{Cos}^3A+3\mathrm{Cos}A}{3\mathrm{Sin}A-4\mathrm{Sin}^3A-\mathrm{Sin}A}$

$$=\frac{2\mathrm{Cos}A(1-\mathrm{Cos}^2A)}{\mathrm{Sin}A(1-2\mathrm{Sin}^2A)}=\frac{2\mathrm{Sin}^2A\mathrm{Cos}A}{\mathrm{Sin}A(\mathrm{Cos}^2A-\mathrm{Sin}^2A)}$$

$$=\frac{\mathrm{Sin}2A}{\mathrm{Cos}2A}=\tan 2A。$$

8. $\mathrm{Cos}^2(A-B)+\mathrm{Cos}^2B-2\mathrm{Cos}(A-B)\mathrm{Cos}A\mathrm{Cos}B=\mathrm{Sin}^2A$

證：左邊

$$=\mathrm{Cos}^2(A-B)-2\mathrm{Cos}(A-B)\mathrm{Cos}A\mathrm{Cos}B+\mathrm{Cos}^2A\mathrm{Cos}^2B$$

$$+\mathrm{Cos}^2B-\mathrm{Cos}^2A\mathrm{Cos}^2B$$

$$=[\mathrm{Cos}(A-B)-\mathrm{Cos}A\mathrm{Cos}B]^2+\mathrm{Cos}^2B(1-\mathrm{Cos}^2A)$$

$$=\mathrm{Sin}^2A\mathrm{Sin}^2B+\mathrm{Sin}^2A+\mathrm{Cos}^2B$$

$$=\mathrm{Sin}^2A(\mathrm{Sin}^2B+\mathrm{Cos}^2B)=\mathrm{Sin}^3A$$

9. $\tan A+\tan(60^\circ+A)+\tan(120^\circ+A)=3\tan 3A$

證：左邊

$$=\tan A+\frac{\tan 60^\circ+\tan A}{1-\tan 60^\circ\tan A}+\frac{\tan 120^\circ+\tan A}{1-\tan 120^\circ\tan A}$$

$$=\tan A+\frac{\sqrt{3}\ \ \tan A}{1-\sqrt{3}\tan A}+\frac{-\sqrt{3}+\tan A}{1+\sqrt{3}\tan A}$$

$$=\tan A+\frac{\sqrt{3}+4\tan A+\sqrt{3}\tan^2A-\sqrt{3}+4\tan A-\sqrt{3}\tan^2A}{1-3\tan^2A}$$

$$=\tan A\left(1+\frac{8}{1-3\tan^2A}\right)=\frac{\mathrm{Sin}A}{\mathrm{Cos}A}\left(\frac{9-3\tan^2A}{1-3\tan^2A}\right)$$

$$=3\frac{\mathrm{Sin}A}{\mathrm{Cos}A}\ \frac{3-3\mathrm{Sin}^2A-\mathrm{Sin}^2A}{\mathrm{Cos}^2A-3+3\mathrm{Cos}^2A}=3\frac{3\mathrm{Sin}A-4\mathrm{Sin}^3A}{4\mathrm{Cos}^3A-3\mathrm{Cos}A}$$

$$=3\frac{\mathrm{Sin}3A}{\mathrm{Cos}3A}=\tan 3A。$$

10. $\mathrm{Sin}3A\,\mathrm{Sin}^3A+\mathrm{Cos}3A\,\mathrm{Cos}^3A=\mathrm{Cos}^3 2A.$

證：左邊

$=(3\mathrm{Sin}A-4\mathrm{Sin}^3A)\mathrm{Sin}^3A+(4\mathrm{Cos}^3A-3\mathrm{Cos}A)\mathrm{Cos}^3A.$

$=3\mathrm{Sin}^4A-4\mathrm{Sin}^6A+4\mathrm{Cos}^6A-3\mathrm{Cos}^4A$

$=3\mathrm{Sin}^4A-3\mathrm{Sin}^6A-\mathrm{Sin}^6A-3\mathrm{Cos}^4A+3\mathrm{Cos}^6A+\mathrm{Cos}^6A$

$=\mathrm{Cos}^6A-3\mathrm{Cos}^4A(1-\mathrm{Cos}^2A)+3\mathrm{Sin}^4A(1-\mathrm{Sin}^2A)$

$-\mathrm{Sin}^6A$

$=\mathrm{Cos}^6A-3\mathrm{Cos}^4A\,\mathrm{Sin}^2A+3\mathrm{Sin}^4A\,\mathrm{Cos}^2A-\mathrm{Sin}^6A$

$=(\mathrm{Cos}^2A-\mathrm{Sin}^2A)^3=\mathrm{Cos}^3 2A$。

11. $\mathrm{Cos}^3A\dfrac{\mathrm{Sin}3A}{3}+\mathrm{Sin}^3A\dfrac{\mathrm{Cos}3A}{3}=\dfrac{\mathrm{Sin}4A}{4}$

證：左邊

$=\dfrac{\mathrm{Cos}^3A(3\mathrm{Sin}A-4\mathrm{Sin}^3A)}{3}+\dfrac{\mathrm{Sin}^3A(4\mathrm{Cos}^3A-3\mathrm{Cos}A)}{3}$

$=\dfrac{1}{3}(3\mathrm{Sin}A\,\mathrm{Cos}^3A-4\mathrm{Sin}^3A\,\mathrm{Cos}^3A+4\mathrm{Sin}^3\mathrm{Cos}^3A$

$-3\mathrm{Sin}^3A\,\mathrm{Cos}A)$

$\mathrm{Sin}A\,\mathrm{Cos}^3A-\mathrm{Sin}^3A\,\mathrm{Cos}A=\mathrm{Sin}A\,\mathrm{Cos}A(\mathrm{Cos}^2A-\mathrm{Sin}^2A)$

$=\dfrac{1}{2}\mathrm{Sin}2A\cdot\mathrm{Cos}2A=\dfrac{\mathrm{Sin}4A}{4}$。

12. $\cos nA \cos(n+2)A-\cos^2(n+1)A+\sin^2A=0.$

證：因 $\cos nA\cos(n+2)A$

$=\cos[(n+1)A-A]\cos[(n+1)A+A]$

$=\cos^2(n+1)A-\sin^2A$

$\therefore\ \cos nA\cos(n+2)A-\cos^2(n+1)A+\sin^2A$

$=\cos^2(n+1)A-\sin^2A-\cos^2(n+1)A+\sin^2A=0.$

13. $\dfrac{\sin A\pm\sin nA+\sin(2n-1)A}{\cos A\pm\cos nA+\cos(2n-1)A}=\tan nA.$

證：左邊

$=\dfrac{2\sin nA\cos(n-1)A\pm\sin nA}{2\cos nA\cos(n-1)A\pm\cos nA}$

$=\dfrac{[2\cos(n-1)A\pm1]\sin nA}{[2\cos(n-1)A\pm1]\cos nA}=\dfrac{\sin nA}{\cos nA}=\tan nA.$

14 $\cos10A+\cos8A+3\cos4A+3\cos2A=8\cos A\cos^3 3A$

證：左邊

$=2\cos9A\cos A+3(2\cos3\cos A)$

$$=2\operatorname{Cos}A(4\operatorname{Cos}^3 3A-3\operatorname{Cos}3A)+6\operatorname{Cos}3A\operatorname{Cos}A$$

$$=8\operatorname{Cos}A\operatorname{Cos}^3 3A-6\operatorname{Cos}3A\operatorname{Cos}A+6\operatorname{Cos}3A\operatorname{Cos}A$$

$$=8\operatorname{Cos}A\operatorname{Cos}^3 3A。$$

15. $\operatorname{Cos}^6 A-\operatorname{Sin}^6 A=\operatorname{Cos}2A(1-\frac{1}{4}\operatorname{Sin}^2 2A)$

證：$\operatorname{Cos}^6 A-\operatorname{Sin}^6 A=(\operatorname{Cos}^2 A-\operatorname{Sin}^2 A)(\operatorname{Cos}^4 A+\operatorname{Sin}^2 A\operatorname{Cos}^2 A+\operatorname{Sin}^4 A)$

$$=\operatorname{Cos}2A[(\operatorname{Cos}^2 A+\operatorname{Sin}^2 A)^2-\operatorname{Sin}^2 A\operatorname{Cos}^2 A]$$

$$=\operatorname{Cos}2A(1-\frac{1}{4}\operatorname{Sin}^2 2A)。$$

16. $(\tan A+\operatorname{Cot}A)2\tan\frac{A}{2}(1-\tan^2\frac{A}{2})=(1+\tan^2\frac{A}{2})^2.$

證：左邊

$$=\left(\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}+\frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{2\tan\frac{A}{2}}\right)2\tan\frac{A}{2}(1-\tan^2\frac{A}{2})$$

$$=(2\tan\frac{A}{2})^2+(1-\tan^2\frac{A}{2})^2=(1+\tan^2\frac{A}{2})^2。$$

17 $4\mathrm{Sin}^2\frac{\theta}{2}(1-\mathrm{Sin}\frac{\theta}{2})=(1-\sqrt{1+\mathrm{Sin}\theta})^2$.

證：左邊

$$=4\mathrm{Sin}^2\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(1-\mathrm{Sin}\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=4\left(\frac{1-\mathrm{Cos}\frac{\theta}{2}}{2}\right)\left(1-\mathrm{Sin}\frac{\theta}{2}\right)=2\left(1-\mathrm{Cos}\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\left(1-\mathrm{Sin}\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=2-2\left(\mathrm{Sin}\frac{\theta}{2}+\mathrm{Cos}\frac{\theta}{2}\right)+\mathrm{Sin}\theta$$

$$=1-2\sqrt{1+\mathrm{Sin}\theta}+1+\mathrm{Sin}\theta$$

$$=(1-\sqrt{1+\mathrm{Sin}\theta})^2。$$

18. $\mathrm{Cos}(\alpha+\beta+\gamma)+\mathrm{Cos}(\alpha+\beta-\gamma)+\mathrm{Cos}(\alpha+\gamma-\beta)+\mathrm{Cos}$
$(\beta+\gamma-\alpha)=4\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Cos}\beta\mathrm{Cos}\gamma$.

證：左邊$=2\mathrm{Cos}(\alpha+\beta)\mathrm{Cos}\gamma+2\mathrm{Cos}\gamma\mathrm{Cos}(\alpha-\beta)$

$$=2\mathrm{Cos}\gamma[\mathrm{Cos}(\alpha+\beta)+\mathrm{Cos}(\alpha-\beta)]$$

$$=2\mathrm{Cos}\gamma(2\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Cos}\beta)=4\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Cos}\beta\mathrm{Cos}\gamma。$$

19. $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma+\cos 2(\alpha+\beta+\gamma)=4\cos(\alpha+\beta)$
$\cos(\beta+\gamma)\cos(\gamma+\alpha)$

證：左邊

$$=2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+2\cos(\alpha+\beta+2\gamma)\cos(\alpha+\beta)$$

$$=2\cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta+2\gamma)]$$

$$=2\cos(\alpha+\beta)2\cos(\beta+\gamma)\cos(\gamma+\alpha)$$

$$=4\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta+\gamma)\cos(\gamma+\alpha)。$$

20. $$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)}+\frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta-\alpha)}+\frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)}=0.$$

證：左邊

$$=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)}-\frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\gamma)\sin(\alpha-\beta)}+\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha-\gamma)\sin(\beta-\gamma)}$$

$$=\frac{\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)-\sin\beta\sin(\alpha-\gamma)+\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\sin(\beta-\gamma)}$$

$$=\frac{0}{\mathrm{Sin}(\alpha-\beta)\mathrm{Sin}(\alpha-\gamma)\mathrm{Sin}(\beta-\gamma)}=0。$$

若A＋B＋C＝π，試證明下列各題

21. $\mathrm{Cot}\frac{A}{2}+\mathrm{Cot}\frac{B}{2}+\mathrm{Cot}\frac{C}{2}=\mathrm{Cot}\frac{A}{2}\mathrm{Cot}\frac{B}{2}\mathrm{Cot}\frac{C}{2}.$

證：因$\mathrm{Cot}\frac{A}{2}+\mathrm{Cot}\frac{B}{2}=\frac{\mathrm{Cos}\frac{A}{2}}{\mathrm{Sin}\frac{A}{2}}+\frac{\mathrm{Cos}\frac{B}{2}}{\mathrm{Sin}\frac{B}{2}}$

$$=\frac{\mathrm{Cos}\frac{A}{2}\mathrm{Sin}\frac{B}{2}+\mathrm{Cos}\frac{B}{2}\mathrm{Sin}\frac{A}{2}}{\mathrm{Sin}\frac{A}{2}\mathrm{Sin}\frac{B}{2}}$$

$$=\frac{\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(A+B)}{\mathrm{Sin}\frac{A}{2}\mathrm{Sin}\frac{B}{2}}=\frac{\mathrm{Cos}\frac{C}{2}}{\mathrm{Sin}\frac{A}{2}\mathrm{Sin}\frac{B}{2}}.$$

故$\mathrm{Cot}\frac{A}{2}+\mathrm{Cot}\frac{B}{2}+\mathrm{Cot}\frac{C}{2}=\mathrm{Cos}\frac{C}{2}\left\{\frac{1}{\mathrm{Sin}\frac{A}{2}\mathrm{Sin}\frac{B}{2}}+\frac{1}{\mathrm{Sin}\frac{C}{2}}\right\}$

$$=\mathrm{Cos}\frac{C}{2}\left\{\frac{\mathrm{Sin}\frac{C}{2}+\mathrm{Sin}\frac{A}{2}\mathrm{Sin}\frac{B}{2}}{\mathrm{Sin}\frac{A}{2}\mathrm{Sin}\frac{B}{2}\mathrm{Sin}\frac{C}{2}}\right\}$$

$$=\frac{\mathrm{Cos}\frac{C}{2}}{\mathrm{Sin}\frac{A}{2}\mathrm{Sin}\frac{B}{2}\mathrm{Sin}\frac{C}{2}}\left(\mathrm{Cos}\frac{1}{2}(A+B)+\mathrm{Sin}\frac{A}{2}\mathrm{Sin}\frac{B}{2}\right)$$

$$=\frac{\mathrm{Cos}\frac{C}{2}}{\mathrm{Sin}\frac{A}{2}\mathrm{Sin}\frac{B}{2}\mathrm{Sin}\frac{C}{2}}\left(\mathrm{Cos}\frac{A}{2}\mathrm{Cos}\frac{B}{2}\right)$$

$$=\frac{\mathrm{Cos}\frac{A}{2}\mathrm{Cos}\frac{B}{2}\mathrm{Cos}\frac{C}{2}}{\mathrm{Sin}\frac{A}{2}\mathrm{Sin}\frac{B}{2}\mathrm{Sin}\frac{C}{2}}=\mathrm{Cot}\frac{A}{2}\mathrm{Cot}\frac{B}{2}\mathrm{Cot}\frac{C}{2}。$$

22. $\mathrm{Sin}A+\mathrm{Sin}B+\mathrm{Sin}C=4\mathrm{Cos}\frac{A}{2}\mathrm{Cos}\frac{B}{2}\mathrm{Cos}\frac{C}{2}$

證：因$\mathrm{Sin}A+\mathrm{Sin}B=2\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(A+B)\mathrm{Cos}\frac{1}{2}(A-B)$

$$=2\mathrm{Cos}\frac{C}{2}\mathrm{Cos}\frac{1}{2}(A-B)$$

且 $\mathrm{Sin}C=2\mathrm{Sin}\frac{C}{2}\mathrm{Cos}\frac{C}{2}$

故 $\mathrm{Sin}A+\mathrm{Sin}B+\mathrm{Sin}C=2\mathrm{Cos}\frac{C}{2}\left\{\mathrm{Cos}\frac{1}{2}(A-B)\right.$

$$\left.+\mathrm{Sin}\frac{C}{2}\right\}$$

$$=2\mathrm{Cos}\frac{C}{2}\left\{\mathrm{Cos}\frac{1}{2}(A-B)+\mathrm{Cos}\frac{1}{2}(A+B)\right\}$$

$$=2\mathrm{Cos}\frac{C}{2}\left\{2\mathrm{Cos}\frac{A}{2}\mathrm{Cos}\frac{B}{2}\right\}$$

$$=4\mathrm{Cos}\frac{A}{2}\mathrm{Cos}\frac{B}{2}\mathrm{Cos}\frac{C}{2}。$$

23. $1+\mathrm{Cos}A\mathrm{Cos}B\mathrm{Cos}C=\mathrm{Cos}A\mathrm{Sin}B\mathrm{Sin}C+\mathrm{Cos}B\mathrm{Sin}A\mathrm{Sin}C+\mathrm{Cos}C\mathrm{Sin}A\mathrm{Sin}B$

證：因 $\mathrm{Cos}(A+B+C)=\mathrm{Cos}\pi=-1$

$\therefore\quad 1+\mathrm{Cos}A\,\mathrm{Cos}B\,\mathrm{Cos}C=-\mathrm{Cos}(A+B+C)+\mathrm{Cos}A\,\mathrm{Cos}B\,\mathrm{Cos}C=\mathrm{Cos}A\,\mathrm{Sin}B\,\mathrm{Sin}C+\mathrm{Cos}B\,\mathrm{Sin}C\,\mathrm{Sin}A+\mathrm{Cos}C\,\mathrm{Sin}A\,\mathrm{Sin}B$。

24. $\mathrm{Cot}A+\mathrm{Cot}B+\mathrm{Cot}C=\mathrm{Cot}A\,\mathrm{Cot}B\,\mathrm{Cot}C+\mathrm{Csoec}A\,\mathrm{Cosec}B\,\mathrm{Cosec}C$

證：$\mathrm{Cot}A+\mathrm{Cot}B+\mathrm{Cot}C$

$$=\frac{\mathrm{Cos}A\,\mathrm{Sin}B\,\mathrm{Sin}C+\mathrm{Cos}B\,\mathrm{Sin}C\,\mathrm{Sin}A+\mathrm{Cos}C\,\mathrm{Sin}A\,\mathrm{Sin}B}{\mathrm{Sin}A\,\mathrm{Sin}B\,\mathrm{Sin}C}$$

由23題知分子等於 $\mathrm{Cos}A\,\mathrm{Cos}B\,\mathrm{Cos}C+1$

故 $$\mathrm{Cot}A+\mathrm{Cot}B+\mathrm{Cot}C=\frac{\mathrm{Cos}A\,\mathrm{Cos}B\,\mathrm{Cos}C+1}{\mathrm{Sin}A\,\mathrm{Sin}B\,\mathrm{Sin}C}$$

$=\mathrm{Cot}A\,\mathrm{Cot}B\,\mathrm{Cot}C+\mathrm{Cosec}A\,\mathrm{Cosec}B\,\mathrm{Cosec}C$。

25. 若$A+B+C+D=\pi$試證明

$\tan A\tan B\tan C\tan D=$

$\tan(A+B+C)\tan(A+B+D)\tan(A+C+D)\tan(B+C+D)$

證：

$$因\begin{cases}\tan A=\tan(\pi-\overline{B+C+D})=-\tan(B+C+D)\\ \tan B=\tan(\pi-\overline{A+C+D})=-\tan(A+C+D)\\ \tan C=\tan(\pi-\overline{A+B+D})=-\tan(A+B+D)\\ \tan D=\tan(\pi-\overline{A+B+C})=-\tan(A+B+C)\end{cases}$$

故 $\tan A\tan B\tan C\tan D$

$=\tan(A+B+C)\tan(A+B+D)\tan(A+C+D)\tan(B+C+D)$。

II 解三角方程式

26. $2\text{Sin}^2\theta=3\text{Cos}\theta$.

解：$2(1-\text{Cos}^2\theta)-3\text{Cos}\theta=0$

即 $2\text{Cos}^2\theta+3\text{Cos}\theta-2=0$

分解因子 $(2\text{Cos}\theta-1)(\text{Cos}\theta+2)=0$

$\therefore\ \text{Cos}\theta=\dfrac{1}{2}\quad\therefore\ \theta=60^\circ$.

但 $\text{Cos}\theta=-2$ 爲不合故棄去。

27. $\operatorname{Sin}\theta+\operatorname{Cos}\theta=1.$

解：$\operatorname{Sin}\theta+\sqrt{1-\operatorname{Sin}^2\theta}=1,$

$$1-\operatorname{Sin}\theta=\sqrt{1-\operatorname{Sin}^2\theta}$$

方之　$1-2\operatorname{Sin}\theta+\operatorname{Sin}^2\theta=1-\operatorname{Sin}^2\theta$

卽　$2\operatorname{Sin}^2\theta-2\operatorname{Sin}\theta=0$

$$2\operatorname{Sin}\theta(\operatorname{Sin}\theta-1)=0$$

$\therefore$　$\operatorname{Sin}\theta=0$　或　$\operatorname{Sin}\theta=1$

故得　$\theta=90^\circ$　或　$\theta=0^\circ$。

28. $\operatorname{Sin}^2\theta-2\operatorname{Cos}\theta+\frac{1}{4}=0.$

解：$1-\operatorname{Cos}^2\theta-2\operatorname{Cos}\theta+\frac{1}{4}=0$　或　$\frac{5}{4}-2\operatorname{Cos}\theta-\operatorname{Cos}^2\theta=0$

卽　$\left(\frac{1}{2}-\operatorname{Cos}\theta\right)\left(\frac{5}{2}+\operatorname{Cos}\theta\right)=0$

$\therefore$　$\operatorname{Cos}\theta=\frac{1}{2}$　或　$\operatorname{Cos}=-\frac{5}{2}$(不合)

故$\theta=90^\circ$

29. $\tan\Theta+\mathrm{Cot}\Theta=2$

解：$\tan\Theta+\dfrac{1}{\tan\Theta}=2$

或 $\tan^2\Theta-2\tan\Theta+1=0$

$\therefore\quad (\tan\Theta-1)^2=0 \quad \therefore\quad \tan\Theta-1=0$

$\therefore\quad \tan\Theta=1 \qquad \therefore\quad \Theta=45^{0}$

30. $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\Theta\right)+\mathrm{Cot}\left(\dfrac{\pi}{4}-\Theta\right)=4$

解：$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\Theta\right)+\dfrac{1}{\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\Theta\right)}=4$

$\therefore\quad \tan^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\Theta\right)-4\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\Theta\right)+1=0$

$\therefore\quad \tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\Theta\right)=\dfrac{4\pm\sqrt{16-4}}{2}=2\pm\sqrt{3}$

故 $\dfrac{\pi}{4}-\Theta=15^{0}$ 或 $\dfrac{\pi}{4}-\Theta=-105^{0}$

$\therefore\quad \Theta=30^{0}$ 或 $\Theta=150^{0}$。

31. $\mathrm{Sin}4\theta+\mathrm{Sin}\theta=0$

解： $2\mathrm{Sin}\frac{5}{2}\theta\ \mathrm{Cos}\frac{3}{2}\theta=0$

$\therefore\ \mathrm{Sin}\frac{5}{2}\theta=0$ 或 $\mathrm{Cos}\frac{3}{2}\theta=0$

若 $\mathrm{Sin}\frac{5\theta}{2}=0\quad\therefore\ \frac{5\theta}{2}=n\pi\quad\therefore\ \theta=\frac{2n\pi}{5}$

若 $\mathrm{Sos}\frac{3\theta}{2}=0$ 則 $\frac{3\theta}{2}=(n+\frac{1}{2})\pi=\frac{(2n+1)\pi}{2}$

$\therefore\ \theta=\frac{(2n+1)\pi}{3}$

32. $\mathrm{Sin}7\theta-\mathrm{Sin}\theta=\mathrm{Sin}\theta=\mathrm{Sin}3\theta$

解：$2\mathrm{Sin}3\theta\mathrm{Cos}4\theta=\mathrm{Sin}3\theta$

卽 $\mathrm{Sin}3\theta(2\mathrm{Cos}4\theta-1)=0$

$\therefore\ \mathrm{Sin}3\theta=0$ 或 $2\mathrm{Cos}4\theta-1=0$

$\therefore\ 3\theta=n\pi$ 卽 $\theta=\frac{n\pi}{3}$

或 $4\theta=\frac{\pi}{3}$， 卽 $4\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}\quad\therefore\ \theta=\frac{(6n\pm1)\pi}{12}$。

33. $\mathrm{Sin}\theta+\mathrm{Cos}\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$

解：以$\frac{1}{\sqrt{2}}$乘兩邊 得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Sin}\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Cos}\theta=\frac{1}{2}$$

即 $\mathrm{Cos}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$

$\therefore\quad \theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}\qquad\therefore\quad \theta=\frac{7\pi}{12}$

或 $\theta-\frac{\pi}{4}=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$

$\therefore\quad \theta=\frac{3(8n+1)\pm4}{12}\pi$。

34. $\mathrm{Sin}5\theta=16\mathrm{Sin}^5\theta$

解：因 $\mathrm{Sin}5\theta=5\mathrm{Sin}\theta-20\mathrm{Sin}^3\theta+16\mathrm{Sin}^5\theta$

故原式變爲

$5\mathrm{Sin}\theta-20\mathrm{Sin}^3\theta=0$

即 $5\sin\theta(1-4\sin^2\theta)=0$

$\therefore$ $\sin\theta=0$ 或 $\sin\theta=\pm\frac{1}{2}$

若 $\sin\theta=0$ 則 $\theta=n\pi$

若 $\sin\theta=\pm\frac{1}{2}$ 則 $\theta=\pm(n\pi\pm\frac{\pi}{6})$

$$=\pm\frac{(6n\pm1)}{6}\pi。$$

35. $\cos3\theta+\cos2\theta+\cos\theta=0$

解：$\cos3\theta+\cos\theta+\cos2\theta=2\cos2\theta\cos\theta+\cos2\theta=0$

$\therefore$ $\cos2\theta(2\cos\theta+1)=0$

$\therefore$ $\cos2\theta=0$ 或 $2\cos\theta+1=0$

若 $\cos2\theta=0$ 則 $2\theta=\frac{\pi}{2}$ $\therefore$ $\theta=\frac{\pi}{4}$

或 $2\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$

$\therefore$ $\theta=\frac{4n\pm1}{\pi}\pi.$

若 $2\mathrm{Cos}\theta+1=0$ 則 $\theta=\dfrac{2\pi}{2}$ 或 $=\dfrac{2(3n+1)\pi}{3}$。

36. $\mathrm{Cot}\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)=3\mathrm{Cot}\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)$

解：因 $\mathrm{Cot}\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)=\dfrac{\mathrm{Cot}\dfrac{\pi}{4}\mathrm{Cot}\theta+1}{\mathrm{Cot}\theta-\mathrm{Cot}\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{\mathrm{Cot}\theta+1}{\mathrm{Cot}\theta-1}$

又 $\mathrm{Cot}\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)=\dfrac{\mathrm{Cot}\theta-1}{\mathrm{Cot}+1}$.

故原式變爲

$$\frac{\mathrm{Cot}\theta+1}{\mathrm{Cot}\theta-1}=\frac{3(\mathrm{Cot}\theta-1)}{\mathrm{Cot}\theta+1}$$

$\therefore\ (\mathrm{Cot}\theta+1)^2-3(\mathrm{Cot}\theta-1)^2=0$

$\mathrm{Cot}^2\theta+2\mathrm{Cot}\theta+1-3\mathrm{Cot}^2\theta+6\mathrm{Cot}\theta-3=0$

即 $\mathrm{Cot}^2\theta-4\mathrm{Cot}\theta+1=0$

$\therefore\ \mathrm{Cot}\theta=2\pm\sqrt{3}$

$\theta=n\pi+\dfrac{\pi}{12}$ 或 $\theta=n\pi+\dfrac{5\pi}{12}$。

37. $\operatorname{Sin}3\theta+\operatorname{Sin}2\theta+\operatorname{Sin}\theta=0$

解：$(\operatorname{Sin}3\theta+\operatorname{Sin}\theta)+\operatorname{Sin}2\theta=2\operatorname{Sin}2\theta\operatorname{Cos}\theta+\operatorname{Sin}2\theta=0$

$\therefore\quad \operatorname{Sin}2\theta(2\operatorname{Cos}\theta+1)=0$

$\therefore\quad \operatorname{Sin}2\theta=0$ 或 $\operatorname{Cos}\theta=-\dfrac{1}{2}$.

若 $\operatorname{Sin}2\theta=0$ 则 $\theta=\dfrac{n\pi}{2}$.

若 $\operatorname{Cos}\theta=-\dfrac{1}{2}$ 则 $\theta=n\pi\pm\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{(3n\pm2)\pi}{3}$。

38. $\operatorname{Sin}^3\theta+\operatorname{Cos}^3\theta=0$

解：以$\operatorname{Cos}^3\theta$除之得

$\tan^3\theta+1=0 \quad \therefore\quad \tan\theta=-1$

故 $\theta=n\pi\pm\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{(4n\pm3)\pi}{4}$。

39. $2\operatorname{Sin}^2A-5\operatorname{Cos}A-4=0.$

解：$2-2\operatorname{Cos}^2A-5\operatorname{Cos}A-4=0$

即 $2\operatorname{Cos}^2A+5\operatorname{Cos}A+2=0$

$(2\operatorname{Cos}A+1)(\operatorname{Cos}A+2)=0$

$\therefore\quad \mathrm{Cos}A=-\dfrac{1}{2}$ 或 $\mathrm{Cos}A=-2$ (不合)

故 $A=\dfrac{(3n\pm 2)}{3}$。

40. $\tan 2\theta=8\mathrm{Cos}^2\theta-\mathrm{Cot}\theta.$

解: $\dfrac{\mathrm{Sin}2\theta}{\mathrm{Cos}2\theta}=8\mathrm{Cos}^2\theta-\dfrac{\mathrm{Cos}\theta}{\mathrm{Sin}\theta}$

即 $8\mathrm{Cos}2\theta\mathrm{Sin}\theta\mathrm{Cos}\theta=4\mathrm{Sin}2\theta\mathrm{Cos}2\theta=1$

$\therefore\quad 2\mathrm{Sin}4\theta=1\quad\therefore\quad \mathrm{Sin}4\theta=\dfrac{1}{2}$

故 $4\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $4\theta=2n\pi+\dfrac{\pi}{6}$ 或 $=2(n+1)\pi-\dfrac{\pi}{6}$

$\therefore\quad \theta=\dfrac{(12n+1)\pi}{24}$ 或 $=\dfrac{12(n-1)\pi}{24}$。

III. 逆三角函數

41. 試證 $\tan^{-1}\dfrac{3}{4}=2\tan^{-1}\dfrac{1}{3}$。

證: 設 $\tan^{-1}\dfrac{3}{4}=x$ 則

$\tan x=\frac{3}{4}$. 且 $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{3}{4}=\frac{x}{2}$.

$$\therefore\quad \tan x=\tan 2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore\quad 3\tan^2\frac{1}{2}x+8\tan\frac{x}{2}-3=0$$

$$\left(3\tan\frac{x}{2}-1\right)\left(\tan\frac{x}{2}+3\right)=0$$

$$\therefore\quad 3\tan\frac{x}{2}-1=0$$

即 $\tan\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$

即 $\frac{x}{2}=\tan^{-1}\frac{1}{3}$ $\therefore$ $x=2\tan^{-1}\frac{1}{3}$

故 $\tan^{-1}\frac{3}{4}=2\tan^{-1}\frac{1}{3}$。

42. 求 $\mathrm{Sin}\left(\mathrm{Sin}^{-1}\frac{1}{2}+\mathrm{Cos}^{-1}\frac{1}{2}\right)$之值

解：設 $\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{2}=x$ 及 $\mathrm{Cos}^{1-}\dfrac{1}{2}=y$

$\mathrm{Sin}\,x=\dfrac{1}{2}$　$\mathrm{Cos}\,y=\dfrac{1}{2}$　∴　$\mathrm{Cos}\,x=\dfrac{5}{2}$　$\mathrm{S{\cdot}y}=\dfrac{5}{2}$

∴　$x=30^0$;　$y=60^0$

卽　$\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{2}=30^0$　及　$\mathrm{Cos}^{-1}\dfrac{1}{2}=60^0$

∴　$\mathrm{Sin}\left(\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{2}+\mathrm{Cos}^{-1}\dfrac{1}{2}\right)=\mathrm{Sin}(x+y)$

$=\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,y+\mathrm{Cos}x\mathrm{Sin}=y\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}=1$。

43.　求 $\tan\left(\tan^{-1}x+\mathrm{Cot}^{-1}x\right)$ 之值

解：設 $\tan^{-1}x=4$　及　$\mathrm{Cot}^{-1}x=\theta$

則　$\tan4=x=\mathrm{Cot}\theta$

∴　$\tan\left(\tan^{-1}x+\mathrm{Cot}^{-1}x\right)=\tan\left(4+\theta\right)$

$$=\frac{\tan\theta+\tan4}{1-\tan\theta\tan4}=\frac{x+\frac{1}{x}}{1-x\frac{1}{x}}=\frac{x+\frac{1}{x}}{0}=\infty。$$

44. 求 $\mathrm{Sin}^{-1}x+\mathrm{Cos}^{-1}x$之值

解：設 $\mathrm{Sin}^{-1}x=A$， $\mathrm{Cos}^{-1}x=B$

則 $\mathrm{Sin}A=x=\mathrm{Cos}B$

$\mathrm{Sin}A=\sqrt{1-\mathrm{Cos}^2B}=\sqrt{1-x^2}$

$\mathrm{Cos}B=\sqrt{1-x^2}$

$\therefore\quad \mathrm{Sin}(A+B)=x^2+1-x^2=1$

$\therefore\quad A+B=\frac{\pi}{2}$

卽 $\mathrm{Sin}^{-1}x+\mathrm{Cos}^{-1}x=\frac{\pi}{2}$。

45 試證$\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$

證：設 $\tan^{-1}\frac{1}{3}=\theta$，$\tan^{-1}\frac{1}{5}=\beta$，$\tan^{-1}\frac{1}{7}=\Upsilon$，

$\tan^{-1}\frac{1}{8}=\delta$

則 $\tan\alpha=\frac{1}{3},\tan\beta=\frac{1}{5},\tan\gamma=\frac{1}{7},\tan\delta=\frac{1}{8}$

故 $$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\times\tan\beta}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{15}}=\frac{4}{7}$$

及 $$\tan(\gamma+\delta)=\frac{3}{11}$$

又 $$\tan(\alpha+\beta+\gamma\delta)=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\gamma+\delta)}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan(\gamma+\delta)}$$

$$=\frac{\frac{11}{7}+\frac{3}{11}}{1-\frac{12}{77}}=\frac{65}{65}=1$$

$$\therefore\quad \alpha+\beta+\gamma+\delta=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$$

故 $$\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}。$$

46. 試證 $\tan(2\tan^{-1}a)=2\tan(\tan^{-1}a+\tan^{-1}a^3)$

證：設 $\tan^{-1}a=x$， $\tan^{-1}a^3=y$

則 $a=\tan x$， $a^3=\tan y$

故 $2\tan(\tan^{-1}a+\tan^{-1}a^3)$

$$=2\tan(x+y)=\frac{2(\tan x+\tan y)}{1-\tan x\tan y}=\frac{2(a+a^3)}{1-a^4}$$

$$=\frac{2a}{1-a^2}=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\tan 2x=\tan(2\tan^{-1}a)。$$

47. 試證 $\frac{2b}{2}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\text{Cos}^{-1}\frac{a}{b}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\text{Cos}^{-1}\frac{a}{b}\right)$

證：設 $\frac{1}{2}\text{Cos}^{-1}\frac{a}{b}=x$

則 $\frac{a}{b}=\text{Cos}2x=2\text{Cos}^2x-1$

$\therefore$ $\tan\left(\frac{1}{2}\text{Cos}^{-1}\frac{a}{b}\right)=\tan x=\sqrt{\frac{1-\text{Cos}2x}{1+\text{Cos}2x}}=\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}$

又 $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\text{Cos}^{-1}\frac{a}{b}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{1+\tan x}{1-\tan x}$

$$=\frac{\sqrt{(b+a)}+\sqrt{(b-a)}}{\sqrt{(b+a)}-\sqrt{(b-a)}}=\frac{2b+2\sqrt{(b^2-a^2)}}{2a}$$

$$=\frac{b+\sqrt{(b^2+a^2)}}{a}$$

同樣$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\mathrm{Cos}^{-1}\frac{a}{b}\right)=\frac{b-\sqrt{(b^2-a^2)}}{a}$

故　$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{Cos}^{-1}\frac{a}{b}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\mathrm{Cos}^{-1}\frac{a}{b}\right)$

$$=\frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}+\frac{b-\sqrt{b^2-a^2}}{a}=\frac{2b}{a}。$$

48. 解方程式 $\mathrm{Sin}^{-1}x+\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}$

解：$\mathrm{Sin}^{-1}x=\mathrm{Cos}^{-1}\sqrt{(1-x^2)}$

$\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{2}=\mathrm{Cos}^{-1}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}$

$\therefore\quad \mathrm{Sin}^{-1}x+\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{2}=\mathrm{Cos}^{-1}\sqrt{(1-x^2)}$

$$+\mathrm{Cos}^{-1}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}$$

$$=\mathrm{Sin}^{-1}\left\{x\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}+\frac{x}{2}\sqrt{(1-x^2)}\right\}$$

$$=\mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore\quad x\sqrt{(1-\frac{x^2}{4})}+\frac{x}{2}\sqrt{(1-x^2)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

或 $x\sqrt{(4-x^2)}+x\sqrt{(1-x^2)}=\sqrt{2}$

卽 $x\sqrt{(4-x^2)}=\sqrt{2}-x\sqrt{(1-x^2)}$

兩邊自乘 $x^2(4-x^2)=2-2\sqrt{2}\,x\sqrt{(1-x^2)}+x^2(1-x^2)$

卽 $3x^2-2=-2\sqrt{2}\,x\sqrt{(1-x^2)}$

再各邊自乘 $(3x^2-2)^2=8x^2(1-x^2)$

$\therefore\quad 17x^4-20x^2+4=0$

故 $x=\pm\sqrt{\dfrac{10\pm4\sqrt{2}}{17}}$。

49. 解方程式 $\tan^{-1}(x-1)+\tan^{-1}x+\tan^{-1}(x+1)=\tan^{-1}3x$

解：設 $\tan^{-1}(x-1)=\alpha, \tan^{-1}x=\beta, \tan^{-1}(x+1)=\gamma$;

$\tan^{-1}3x=\delta$

則 $x-1=\tan\alpha, x=\tan\beta, x+1=\tan\gamma, 3x=\tan\delta$

$\therefore \quad \alpha+\beta+\gamma=\delta, \qquad \alpha+\beta=\delta-\gamma$

$\therefore \quad \tan(\alpha+\beta)=\tan(\delta-\gamma)$

卽 $$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\tan\delta-\tan\gamma}{1+\tan\delta\tan\gamma}$$

$$\frac{x-1+x}{1-x(x-1)}=\frac{3x-x-1}{1+3x(x+1)}$$

$$(2x-1)(3x^2+3x+1)=(2x-1)(1+x-x^2)$$

卽 $$(2x-1)(4x^2+2x)=0$$

$$2x(2x-1)(2x+1)=0$$

$\therefore \quad x=0$ 或 $x=\frac{1}{2}$ 或 $x=-\frac{1}{2}$。

50. 解方程式 $\tan^{-1}\frac{1}{a-1}=\tan^{-1}\frac{1}{x}+\tan^{-1}\frac{1}{a^2-x+1}$

解：設 $\tan^{-1}\frac{1}{a-1}=\alpha, \tan^{-1}\frac{1}{x}=\beta, \tan^{-1}\frac{1}{a^2-x+1}=\gamma$

則　$\tan\alpha=\frac{1}{a-1}, \tan\beta=\frac{1}{x}, \tan\gamma=\frac{1}{a^2-x+1}$

故　$\tan\alpha=\tan(\beta+\gamma)$

卽　$$\frac{1}{a-1}=\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{a^2-x+1}}{1-\frac{1}{x(a^2-x+1)}}=\frac{a^2+1}{x(a^2-x+1)}$$

卽　$x(a^2-x+1)=(a-1)(a^2+1)$

$\therefore$　$x^2-x(a^2+1)+(a^2+1)(a-1)=0$

故　$x=\frac{1}{2}\{a^2+1\pm\sqrt{(a^2+1)(a-5)(a+1)}\}$。

IV. 三角形之邊角之關係

51. 三角形之三邊爲 x^2+x+1, $2x+1$, 及 x^2-1 試證其最大角爲 120°

證：設 $x^2+x+1=a$, $2x+1=b$, $x^2-1=c$

因　$x^2+x+1>2x+1$

$x^2+x+1>x^2-1$

$\therefore$　a 邊爲最大；卽 A 角爲最大. 由公式

$$\mathrm{Cos}A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{(2x+1)^2+(x^2-1)^2-(x^2+x+1)^2}{2(2x+1)(x^2-1)}$$

$$=\frac{(2+1)^2+(2x^2+x)(-x-2)}{2(2x+1)(x^2-1)}$$

$$=\frac{(2x+1)\left\{2x+1-x^2-2x\right\}}{2(2x+1)(x^2-1)}$$

$$=\frac{-(2x+1)(x^2-1)}{2(2x+1)(x^2-1)}=-\frac{1}{2}$$

卽 $\mathrm{Cos}A=-\dfrac{1}{2}$ 故 $A=120^\circ$。

52. 若 $\mathrm{Cos}B=\dfrac{\mathrm{Sin}A}{2\mathrm{Sin}C}$ 則此三角形爲二等邊

證：因 $\mathrm{Cos}B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

及 $\dfrac{\mathrm{Sin}A}{\mathrm{Sin}C}=\dfrac{a}{c}$

故原式變為 $\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\dfrac{a}{2c}$

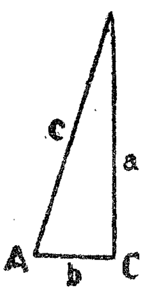
即 $c^2+a^2-b^2=a^2$

$\therefore\quad c^2-b^2=0\qquad$ 即 $\quad c^2=b^2\qquad\therefore\quad c=b$

故此三角形為二等邊。

53. 直角三角形C為直角則 $\operatorname{Cot}\dfrac{A}{2}=\dfrac{b+c}{a}$

證： $\operatorname{Sin}A=\dfrac{a}{c}$



$\therefore\quad \operatorname{Sin}\dfrac{A}{2}\operatorname{Cos}\dfrac{A}{2}=\dfrac{a}{2c}$……………………(1)

又 $\operatorname{Cos}A=\dfrac{b}{c}$，或 $2\operatorname{Cos}^2\dfrac{A}{2}-1=\dfrac{b}{c}$

$\therefore\quad \operatorname{Cos}^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{b+c}{2c}$……………………(2)

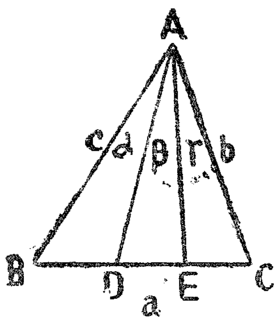
以(1)式除(2)式得

$\operatorname{Cot}\dfrac{A}{2}=\dfrac{b+c}{a}$。

54. 假設一三角形之底邊被分成三等分，且令其各部分對於頂點所包含之角之正切爲 t_1 t_2, t_3, 則

$$\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)\left(\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right)=4\left(1+\frac{1}{t_2^2}\right)$$

證．設三角形ABC之底邊BC三等分於D,E.卽 $BD=DE=EC$



且設 $BAD=\alpha, DAE=\beta, EBC=\gamma$

則由三角形ABE得

$$\frac{\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)}{\operatorname{Sin}AED}=\frac{BE}{AB}=\frac{2a}{3c}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

同樣 $\dfrac{\operatorname{Sin}\gamma}{\operatorname{Sin}AEC}=\dfrac{EC}{AC}=\dfrac{a}{3b}$

卽 $$\frac{\operatorname{Sin}\gamma}{\operatorname{Sin}AED}=\frac{a}{3b}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

以(2)除(1) $$\frac{\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)}{\operatorname{Sin}\gamma}=\frac{2b}{c}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

同樣得 $$\frac{\operatorname{Sin}(\gamma+\beta)}{\operatorname{Sin}\alpha}=\frac{2c}{b}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(4).(3)相乘 $$\frac{\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)\operatorname{Sin}(\gamma+\beta)}{\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\gamma}$$

$$=4=4(\operatorname{Cos}^2\beta+\operatorname{Sin}^2\beta)$$

$\therefore\ (\mathrm{Cos}\beta+\mathrm{Sin}\beta\mathrm{Cot}\alpha)(\mathrm{Cos}\beta+\mathrm{Sin}\beta\mathrm{Cot}\gamma)$

$$=4(\mathrm{Cos}\beta+\mathrm{Sin}^2\beta)$$

以 $\mathrm{Sin}^2\beta$ 除全式兩邊得

$$(\mathrm{Cot}\alpha+\mathrm{Cot}\beta)(\mathrm{Cot}\beta+\mathrm{Cot}\gamma)=4(1+\mathrm{Cot}^2\beta)$$

因 $\mathrm{Cot}\alpha=\frac{1}{t_1}$, $\mathrm{Cot}\beta=\frac{1}{t_2}$, $\mathrm{Cot}\gamma=\frac{1}{t_3}$

故上式變爲 $\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)\left(\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right)=4\left(1+\frac{1}{t_2{}^2}\right)$。

55. 三角形之三角爲 α, β, γ 三邊爲 a, b, c 則

$$a\mathrm{Cos}\alpha+b\mathrm{Cos}\beta+c\mathrm{Cos}\gamma=2a\mathrm{Sin}\beta\mathrm{Sin}\gamma$$

證: $a\mathrm{Cos}\alpha+b\mathrm{Cos}\beta+c\mathrm{Cos}\gamma=a\mathrm{Cos}\alpha+\frac{a\mathrm{Sin}\beta}{\mathrm{Sin}\alpha}\mathrm{Cos}\beta$

$$+\frac{a\mathrm{Sin}\gamma}{\mathrm{Sin}\alpha}\mathrm{Cos}\gamma$$

$$=a\mathrm{Cos}\alpha+\frac{a(\mathrm{Sin}2\beta+\mathrm{Sin}2\gamma)}{2\mathrm{Sin}\alpha}$$

$$=a\mathrm{Cos}2+\frac{2a\mathrm{Sin}(\beta+\gamma)\mathrm{Cos}(\beta-\gamma}{2\mathrm{Sin}\alpha}$$

$$=a\mathrm{Cos}\alpha+\frac{2a\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Cos}(\beta-\gamma)}{2\mathrm{Sin}\alpha}$$

$$= a\mathrm{Cos}\,\alpha + a\mathrm{Cos}(\beta+\gamma) = a[\mathrm{Cos}(\beta-\gamma) - \mathrm{Cos}(\beta+\gamma)]$$

$$= 2a\mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Sin}\,\gamma。$$

56. 於任意一三角形中若 $a\tan A + b\tan B = (a+b)\tan\dfrac{A+B}{2}$ 時則 $A=B$

證：$a\tan A + b\tan B = a\tan\dfrac{A+B}{2} + b\tan\dfrac{A+B}{2}$

即 $$a\left(\tan A - \tan\frac{A+B}{2}\right) + b\left(\tan B - \tan\frac{A+B}{2}\right) = 0$$

或 $$a\left(\frac{\mathrm{Sin}\left(A-\frac{A+B}{2}\right)}{\mathrm{Cos}A\,\mathrm{Cos}\frac{A+B}{2}}\right) + b\left(\frac{\mathrm{Sin}\left(B-\frac{A+B}{2}\right)}{\mathrm{Cos}B\,\mathrm{Cos}\frac{A+B}{2}}\right) = 0$$

$$a\left(\frac{\mathrm{Sin}\frac{A-B}{2}}{\mathrm{Cos}\,A} - b\right)\frac{\mathrm{Sin}\frac{A-B}{2}}{\mathrm{Cos}\,B} = 0$$

即 $$\mathrm{Sin}\frac{A-B}{2}\left(\frac{a}{\mathrm{Cos}\,A} - \frac{b}{\mathrm{Cos}\,B}\right) = 0$$

∴ $\mathrm{Sin}\dfrac{A-B}{2} = 0$ 或 $\dfrac{a}{\mathrm{Cos}A} - \dfrac{b}{\mathrm{Cos}B} = 0$

若 $\sin\frac{A-B}{2}=0$ 則 $\frac{A-B}{2}n\pi$

但 $\frac{A-B}{2}<\pi$ $\therefore$ $A-B=0$ 故 $A=B$

若 $\frac{a}{\cos A}-\frac{b}{\cos B}=0$ 亦得$a=b$ 卽 $A=B$也

57. 設一三角形之外角爲 A',B',C'則

$$2bc\ \mathrm{vers}A'+2ca\ \mathrm{vers}B'+2ab\ \mathrm{vers}C'=(a+b+c)^2$$

證: $2bc\ \mathrm{vers}A'=2bc(1-\cos A^1)=2bc(1+\cos A)$

$$=2bc+2bc\cos A$$

$$=2bc+b^2+c^2-a^2$$

同樣 $2ca\ \mathrm{vers}B'=c^2+a^2-b^2+2ca$

及 $2ab\ \mathrm{vers}C'=a^2+b^2-c^2+2ab$

故 $2bc\ \mathrm{vers}A'+2ca\ \mathrm{vers}B'+2ab\ \mathrm{vers}C'$

$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2,$$

58. 設 a,b,c 爲一三角形之三邊且其各邊之對角爲 $2\theta,3\theta,4\theta$

則 $\tan^2\theta=\left(\frac{2b}{a+c}\right)^2-1$

證: $\frac{a}{\sin 2\theta}=\frac{b}{\sin 3\theta}=\frac{c}{\sin 4\theta}=\frac{a+c}{\sin 4\theta+\sin 2\theta}$

$$=\frac{a+c}{2\sin 3\theta\cos\theta}$$

即 $\frac{b}{\sin 3\theta}=\frac{a+c}{2\sin 3\theta\cos\theta}$

$\therefore\quad b=\frac{a+c}{2\cos\theta}$

$\therefore\quad \cos\theta=\frac{a+c}{2b}$

$$\cos^2\theta=\left(\frac{a+c}{2b}\right)^2$$

$$\sec^2\theta=\left(\frac{2b}{a+c}\right)^2$$

$$\tan^2\theta+1=\left(\frac{2b}{a+c}\right)^2$$

故 $\tan^2\theta=\left(\frac{2b}{a+c}\right)^2-1$。

59. 試證$a(b\cos C-c\cos B)=b^2-c^2$

證：$a(b\cos C-c\cos B)$

$$=a\left(b\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-c\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)$$

$$=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}-\frac{c^2+a^2-b^2}{2}$$

$$=\frac{2(b^2-c^2)}{2}=b^2-c^2。$$

60. 試證 $1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\frac{2C}{a+b+c}$

證：$1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1-\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\cdot\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$

$$=1-\sqrt{\frac{s-c}{s}}\cdot\sqrt{\frac{s-c}{s}}=1-\frac{s-c}{s}$$

$$=\frac{s-(s-c)}{s}=\frac{c}{s}=\frac{2c}{a+b+c}。$$

V. 三角形之解法及其高及距離之計算

61. 已知SinB＝0.25，a＝5，b＝2.5求A角之值.

解：$\frac{\mathrm{Sin}A}{a}=\frac{\mathrm{Sin}B}{b}$

$\therefore\quad \mathrm{Sin}A=\frac{a\mathrm{Sin}B}{b}=\frac{5\times .25}{2.5}$

$=\frac{1.25}{2.5}=\frac{1}{2}$

即 $\mathrm{Sin}A=\frac{1}{2}\qquad\therefore\quad A=30^{\circ}$

或 $A=150^{\circ}$。

62. 一三角形之兩邊：一邊爲他邊之半且其夾角爲60°，求餘兩角之值.

解：設 $a=\frac{1}{2}b$ 且 $C=60^{\circ}$

則 $\frac{\mathrm{Sin}A}{a}=\frac{\mathrm{Sin}B}{b}=\frac{\mathrm{Sin}A+\mathrm{Sin}B}{a+b}=\frac{\mathrm{Sin}A+\mathrm{Sin}B}{3a}$

$\therefore\quad \mathrm{Sin}A=\frac{\mathrm{Sin}A+\mathrm{Sin}B}{3}$

即 $2\mathrm{Sin}A=\mathrm{Sin}B=\mathrm{Sin}(120^{\circ}-A)$

$=\mathrm{Sin}120^{\circ}\mathrm{Cos}A-\mathrm{Cos}120^{\circ}\mathrm{Sin}A$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{Cos}A+\frac{1}{2}\mathrm{Sin}A$$

$$3\mathrm{Sin}A=\sqrt{3}\mathrm{Cos}A=\sqrt{3}\sqrt{1-\mathrm{Sin}^2A}$$

$$\therefore\quad 9\mathrm{Sin}^2A=3-3\mathrm{Sin}^2A$$

$$\therefore\quad 4\mathrm{Sin}^2A=1$$

$$\therefore\quad \mathrm{Sin}A=\frac{1}{2}\quad\therefore\quad A=30°$$

但 $A+B=120°$ $\therefore$ $B=90°$。

63. 已知$a=18, b=20, c=22$; $\log2=0.3010300$, $\log3=0.4771213$.

求$\log\ \tan\frac{A}{2}$

解: $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\sqrt{\frac{(30-20)(30-22)}{30\times(30-18)}}$

$$=\sqrt{\frac{1\times8}{3\times12}}=\frac{1}{3}\sqrt{2}$$

$$\therefore\quad \tan\frac{A}{2}=\frac{1}{3}\sqrt{2}$$

故　$\log\tan\frac{A}{2}=\log\sqrt{2}+\log\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{2}\log2-\log3=0.150515-0.4771213$

$=9.6733937-10$。

64. 已知$A=18°, a=4, b=4+\sqrt{80}$解三角形.

解：$\frac{\text{Sin}A}{a}=\frac{\text{Sin}B}{b}$

$\therefore\quad \text{Sin}B=b\frac{\text{Sin}A}{a}=(4+\sqrt{80})\frac{\text{Sin}18°}{4}$

$=(1+\sqrt{5})\frac{\sqrt{5}-1}{4}=1$

即　$\text{Sin}B=1\qquad\therefore\quad B=90°$

又　$A+C=90°,\quad\therefore\quad C=72°$

由公式　$b^2=c^2+a^2-2Ca\text{Cos}B$

知　$(4+\sqrt{80})^2=C^2+16-0$

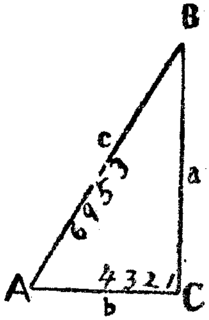
$\therefore\quad C^2=(4+\sqrt{80})^2-16$

$=80+8\sqrt{80}$

故　$C=4\sqrt{5+2\sqrt{5}}$。

65. 已知三角形ABC之C角爲直角，b＝4321，C＝6953

求A及B.



解：$\text{SinB}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{4321}{6953}$

$\therefore\quad \log \text{SinB}=\log 4321-\log 6953$

$=3.63558-3.84712$

$=-0.20659$

即 $\log \text{SinB}=10-0.20659=9.79341$

但 $\log \text{Sin}38^{0}25^{1}=9.79335$

$\therefore$ 欲檢之比例分＝6

5,3＝20″之比例分

又 欲檢之比例分＝.7

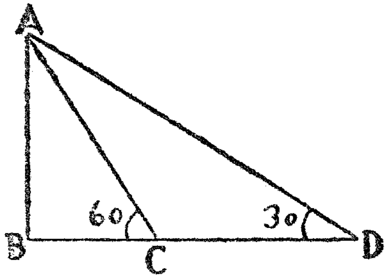
.8＝3″

故 $\log \text{Sin}38^{0}25'23''=9.79341 \quad \therefore$、$B=38^{0}25'23''$

因後 $A=51^{0}34'37''$。

66. 一人立於河岸測得對岸一樹之視角爲60⁰. 若退後40呎又測得爲30⁰. 求對岸樹之高及河之寬.

解：設樹高等於AB，河寬爲BC



則 $\angle ACB = 60^0$當此人退至

D處時　　$CD = 40$,

且 $\angle ADB = 30^0$

$\angle CAD = \angle ACB -$

$\angle ADB = 30^0$

$\therefore \quad \angle CAD = \angle ADB = 30^0$

$\therefore \quad AC = CD = 40$

故　$AB = AC\,\text{Sin}\,ACB = 40\,\text{Sin}\,60^0 = 40 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$= 20\sqrt{3}$呎

故樹高　$20\sqrt{3}$呎

又　$BC = AC\,\text{Cos}\,60^0 = 40 \times \dfrac{1}{2} = 20$呎

即河寬20呎。

67. 河岸一塔高200呎，塔上一石像高30呎，則於對岸測得石像之視角與立於塔根6呎高之人之視角相等，求河寬。

解：設塔高爲AB＝200 呎

石像高爲AC＝ 30 呎

人高爲 BD＝ 6 呎

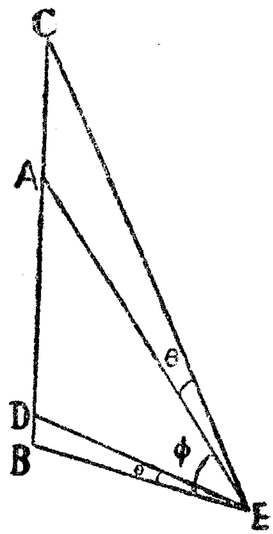
若視點爲E則 ∠AEC＝

∠BED＝θ

今令河寬 BE＝X

且 ∠AEB＝φ

因 ∠CBE＝直角



$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{B\pi}{BE} = \frac{6}{X}$$

$$\tan\phi = \frac{AB}{BE} = \frac{200}{X}$$

$$\tan(\theta+\phi) = \frac{BC}{BE} = \frac{230}{X}$$

但 $\tan(\theta+\phi) = \dfrac{\tan\theta+\tan\phi}{1-\tan\theta\tan\phi}$

$$= \frac{\dfrac{6}{X}+\dfrac{200}{X}}{1-\dfrac{1200}{X^2}} = \frac{206X}{X^2-1200}$$

$$\therefore \quad \frac{206X}{X^2-1200}=\frac{230}{X}$$

$$206X^2=230X^2-276000$$

卽 $24X^2=276000$

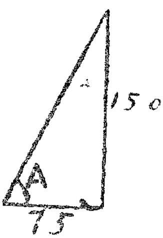
$$X^2=11500$$

$$\therefore \quad X=10\sqrt{115}$$

故河寬爲 $10\sqrt{115}$ 呎。

68. 一塔高150呎其映於地平面上之陰影長75呎求太陽之高度，已知$\log 2=.30103$，$\log\tan 63^{\circ}26'=10.3009994$，

解：$\log\tan 63^{\circ}27'=10.3013153$



$$\log\tan A=10+\log\frac{150}{75}=10+\log 2=10.30103$$

$\log\tan A$與$\log\tan 63^{\circ}26'$之差爲.0000306

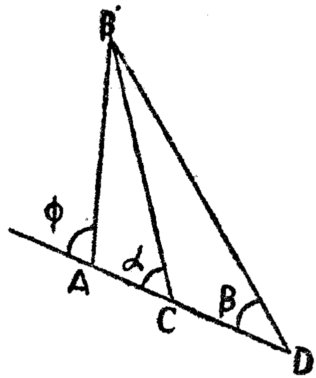
檢表得比例分爲 $6''$

$$\therefore \quad \log\tan 63^{\circ}26'6''=10.30103$$

$$\therefore \quad A=63^{\circ}26'6''$$

卽太陽之高度爲六十三度廿六分六秒。

69. 一塔AB立於斜坡上A點成ϕ角，令自C點望AB之視角爲α，連結AC自AC之延長線上取一點D令AC＝CD，自D望AB之視角爲β. 則 $\operatorname{Cot}\phi=2\operatorname{Cot}\alpha-\operatorname{Cot}\beta$



證：$\angle ABC=\phi-\alpha$

$\angle CBD=\alpha-\beta$

$$CD=\frac{BC\operatorname{Sin}CBD}{\operatorname{Sin}\beta}$$

$$=\frac{BC\operatorname{Sin}(\alpha-\beta)}{\operatorname{Sin}\beta}$$

$$=BC(\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Cot}\beta-\operatorname{Cos}\alpha)$$

$$\text{又}AC=\frac{BC\ \operatorname{Sin}\ ABC}{\operatorname{Sin}BAC}=\frac{BC\operatorname{Sin}(\phi-\alpha)}{\operatorname{Sin}(\pi-\phi)}=\frac{BC\operatorname{Sin}(\phi-\alpha)}{\operatorname{Sin}\phi}$$

$$=BC(\operatorname{Cos}\alpha-\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Cot}\phi)$$

因 $AC=CD$

故 $BC(\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Cot}\beta-\operatorname{Cos}\alpha)=BC(\operatorname{Cos}\alpha-\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Cot}\phi)$

即 $\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Cot}\beta-\operatorname{Cos}\alpha=\operatorname{Cos}\alpha-\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Cot}\phi$

以 $\operatorname{Sin}\alpha$除之

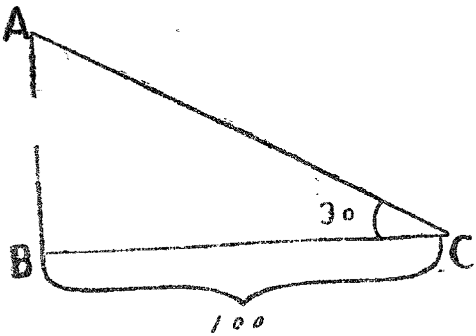
$$\operatorname{Cot}\beta-\operatorname{Cot}\alpha=\operatorname{Cot}\alpha-\operatorname{Cot}\phi$$

$\therefore$ $\operatorname{Cot}\phi=2\operatorname{Cot}\alpha-\operatorname{Cot}\beta$。

70. 自一塔根地平線100碼之距離之處測得塔之視角爲30^0.

求塔高

解：令塔等於AB，視點C，其與塔根B之距離爲100碼



$$\therefore \quad AB = BC\tan C$$

$$= 100\tan 30^0$$

$$= 100\times\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{100}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{100\sqrt{3}}{3}\text{碼}$$

故塔高爲 $\frac{100}{3}\sqrt{3}$碼。

VI. 三角形之性質

71. 一三角形之三邊爲24，30，18：求面積.

解：$S=36$，$S-a=12$，$S-b=6$，$S-C=18$

故三角形之面積$=\sqrt{36\times12\times6\times18}$

$$=\sqrt{216^2}=216.$$

72. 一三角形之兩角為15^0及45^0此兩角之夾邊為10呎求面積

解：設$A=15^0, C=45^0$　則 $b=10, B=\pi-15^0-45^0=120^0$

由公式

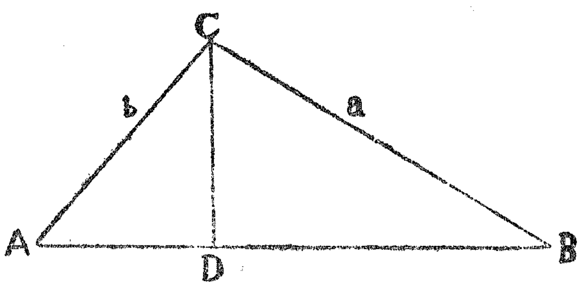
$$三角形之面積=\frac{b^2 \mathrm{Sin}A\mathrm{Sin}C}{2\mathrm{Sin}B}=\frac{100\mathrm{Sin}15^0\mathrm{Sin}45^0}{2\mathrm{Sin}120^0}$$

$$=\frac{50\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{100\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}\right)}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{25(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}}=25\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)平方呎。$$

73. 試證三角形之面積$=\frac{1}{4}(a^2\mathrm{Sin}2B+b^2\mathrm{Sin}2A)$

證：



$CD=b\mathrm{Sin}A=a\mathrm{Sin}B$

$AD = b\cos A$ 及 $BD = a\cos B$

今BCD之面積 $= \frac{1}{2} CD \cdot BD$

$$= \frac{1}{2} a^2 \sin B \cos B = \frac{1}{4} a^2 \sin 2B$$

又 ACD之面積 $= \frac{1}{2} AD \cdot CD = \frac{1}{2} b^2 \sin A \cos A$

$$= \frac{1}{4} b^2 \sin 2A$$

故 三角形ABC之面積 $= \triangle BCD + \triangle ACD$

$$= \frac{1}{4}(a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A)。$$

74. 設A爲三角形內切圓之面積； A_1, A_2, A_3，爲三个傍切圓之面積求證

$$\frac{1}{\sqrt{A}} = \frac{1}{\sqrt{A_1}} + \frac{1}{\sqrt{A_2}} + \frac{1}{\sqrt{A_3}}$$

證：設γ_1爲A_1圓之半徑，S爲三角形之面積則

$$\gamma_1 = \frac{S}{s-a}$$

$\therefore\quad A_1=\gamma_1^2\pi \quad \therefore \sqrt{A_1}=\sqrt{\pi}\,\gamma_1=\dfrac{\sqrt{\pi}\,S}{s-a}$

即 $\dfrac{1}{\sqrt{A_1}}=\dfrac{s-a}{\sqrt{\pi}\,S}$

同樣 $\dfrac{1}{\sqrt{A_2}}=\dfrac{s-b}{\sqrt{\pi}\,S},\ \dfrac{1}{\sqrt{A_3}}=\dfrac{s-c}{\sqrt{\pi}\,S}$

故 $\dfrac{1}{\sqrt{A_1}}+\dfrac{1}{\sqrt{A_2}}+\dfrac{1}{\sqrt{A_3}}$

$$=\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{\sqrt{\pi}\,S}$$

$$=\frac{3s-(a+b+c)}{\sqrt{\pi}\cdot S}=\frac{s}{\sqrt{\pi}\,S}$$

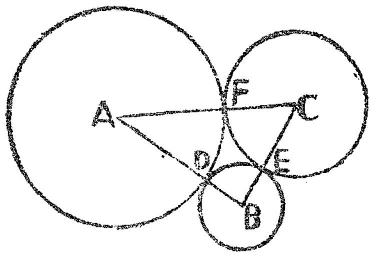
但 $A=\gamma^2\pi \quad \therefore \quad \sqrt{A}=\sqrt{\pi}\,\gamma=\dfrac{\sqrt{\pi}\,S}{s}$

$$\therefore\quad \frac{1}{\sqrt{A}}=\frac{s}{\sqrt{\pi}\,S}$$

故 $\dfrac{1}{\sqrt{A}}=\dfrac{1}{\sqrt{A_1}}+\dfrac{1}{\sqrt{A_2}}+\dfrac{1}{\sqrt{A_3}}$。

75. 三圓外切，連結此三圓心成一三角形則此三角形面積之平方等於此三圓半徑之和與此三半徑乘積之乘積。

證:



設 A,B,C三圓外切於D,E,F三點其圓心三角形爲ABC

且設 $AD=AF=r_a$

$BD=BE=r_b$

$CE=CF=r_c$

設 $2S=$三邊之和

則 $2S=AB+BC+CA$

$=2(r_a+r_b+r_c)$

$\therefore \quad S=r_a+r_b+r_c$

又 $\begin{cases} BC+CA-AB=2r_c \\ AB+CA-BC=2r_a \\ BC+AB-CA=2r_b \end{cases}$ 故 $\begin{cases} S-AB=r_a \\ S-BC=r_b \\ S-CA=r_c \end{cases}$

故三角形ABC之面積若爲S則

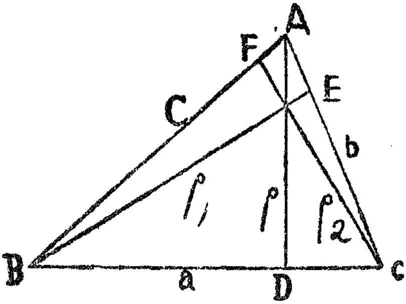
$$S=\sqrt{S(S-AB)(S-BC)(S-CA)}$$

$$=\sqrt{(\Upsilon a+\Upsilon b+\Upsilon c)\cdot\Upsilon a\Upsilon b\Upsilon c}$$

故 $S^2=(\Upsilon a+\Upsilon b+\Upsilon c)\cdot\Upsilon a\Upsilon b\Upsilon c$。

76. 若一三角形之三邊成等比級數則自各頂點至對邊之垂線所作成之三角形與原三角形相似

證:



設 $a\Upsilon^2=b\Upsilon=C\cdots(1)$

其Υ為公比

且 $AD=P$, $BE=P_1$,

$CF=P_2$

則 $aP=bP_1=CP_2$

$\therefore$ $aP=a\Upsilon P_1=a\Upsilon^2P_2$

即 $P=\Upsilon P_1=\Upsilon^2P_2$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

(1)與(2)相比得

$$\frac{a}{P_2}=\frac{b}{P_1}=\frac{c}{P}$$

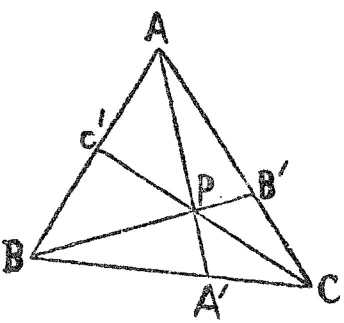
即 ABC之三邊與P_2,P_1,P成比例

故 ABC與以P,P_1,P_2作成之三角形相似。

77. 自三角形ABC之三頂點經過形內任意點P作三直線各與對邊相交於A,'B,'C' 則

$$AB'\cdot BC'\cdot CA = AC'\cdot BA'\cdot CB'$$

證:



$\triangle ABP : \triangle ACP = BA' : CA'$

$\triangle BCP : \angle BAP = CB' : AB'$

$\triangle ACP : \triangle BCP = AC' : BC'$

故 $(\triangle ABP . \triangle ACP)(\triangle BCP . \triangle BAP)(\triangle ACP : \triangle BCP)$

$= (BA' : CA')(CB' : AB')(AC' : BC')$

因 $(\triangle ABP : \triangle ACP)(\triangle BCP . \triangle BAP)(\triangle ACP \; \triangle BCP) = 1$

故 $(BA' : CA')(CB' : AB')(AC' . BC') = 1$

故 $AB'\cdot BC'\cdot CA' = AC' \; BA'\cdot CB'$。

VII. 雜　題

78. 已知$\tan(A+B)=\sqrt{3}$ 及 $\tan(A-B)=1$ 求A及B

解: $\tan(A+B)=\sqrt{3}$, 則 $A+B=60^0$ ………… (1)

$\tan(A-B)=1$, 則 $A-B=45^0$ ……………… (2)

由(1)(2)　$2A=105^0$　$\therefore$　$A=52\frac{1}{2}^0$

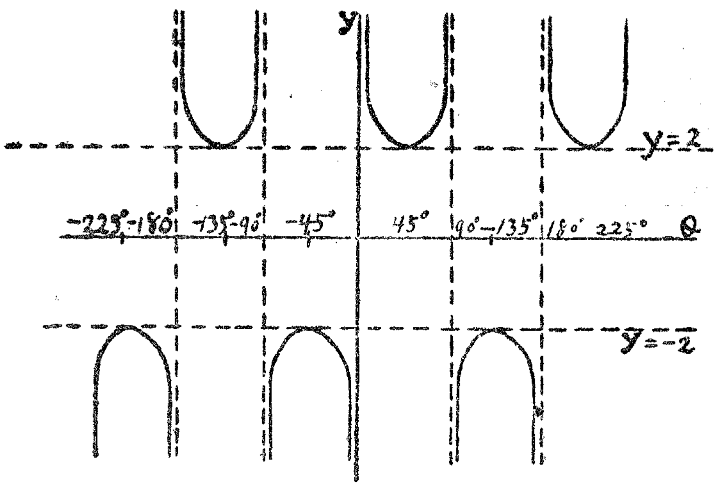
$B=60^0-A=7\frac{1}{2}^0$

79. 畫出函數$\tan\Theta+\mathrm{Cot}\Theta$之圖

解:

$$\text{若}\begin{cases}\Theta=0^0\\ \Theta=45^0\\ \Theta=90^0\\ \Theta=135^0\\ \Theta=180^0\\ \Theta=225^0\end{cases}\qquad \text{則}\begin{cases}\tan\Theta+\mathrm{Cot}\Theta=0+\infty\ ;\\ \tan\Theta+\mathrm{Cot}\Theta=1+1=2;\\ \tan\Theta+\mathrm{Cot}\Theta=\infty+0\ ;\\ \tan\Theta+\mathrm{Cot}\Theta=-1-1=-2;\\ \tan\Theta+\mathrm{Cot}\Theta=0+\infty\ ;\\ \tan\Theta+\mathrm{Cot}\Theta=1+1=2;\end{cases}$$

由上表得下圖：　　令　$Y = \tan\theta + \cot\theta$



80. 若$a \neq b$則下式能成立否？

$$\sec^2\theta = \frac{4ab}{(a+b)^2}$$

證：若$a \neq b$ 則

$$(a-b)^2 > 0$$

卽　$a^2 + b^2 > 2ab$

或　$a^2 + 2ab + b^2 > 4ab$

卽　$(a+b)^2 > 4ab$

$$\therefore \quad 1 > \frac{4ab}{(a+b)^2}$$

由原式 $\text{Sec}^2\theta > 1$

但 $\text{Sec}^2\theta 1$ （不大於1）

故方程式 $\text{Sec}^2\theta = \frac{4ab}{(a+b)^2}$ 不能成立。

81. 試分一已知角爲二部分使此兩部分之餘弦之比等於已知之比

解：設已知角爲A，分成一部爲X則他一部分爲A－X

m爲已知比

則 $\frac{\text{Cos}X}{\text{Cos}(A-X)} = m$ 或 $\text{Cos}X = m\text{Cos}(A-X)$

以 CosX除兩邊 則

$$1 = m(\text{Cos}A + \text{Sin}A\tan X)$$

$$1 = m\text{Cos}A + m\text{Sin}A\tan X$$

$$\therefore \quad \tan X = \frac{1 - m\text{Cos}A}{m\text{Sin}A}$$

$$\therefore \quad X = \tan^{-1}\left(\frac{1 - m\text{Cos}A}{m\text{Sin}A}\right)。$$

82. 若$\alpha=\dfrac{\pi}{17}$ 求 $\dfrac{\text{Cos}\alpha\,\text{Cos}13\alpha}{\text{Cos}3\alpha+\text{Cos}5\alpha}$之值。

解: $\dfrac{\text{Cos}\alpha\,\text{Cos}13\alpha}{\text{Cos}3\alpha+\text{Cos}5\alpha}=\dfrac{\text{Cos}\alpha\,\text{Cos}13\alpha}{2\text{Cos}\alpha\,\text{Cos}4\alpha}$ ……………(1)

因 $17\alpha=\pi$ $\therefore$ $13\alpha=\pi-4\alpha$ 代入(1)式

則 $\dfrac{\text{Cos}\alpha\,\text{Cos}13\alpha}{\text{Cos}3\alpha+\text{Cos}5\alpha}=\dfrac{\text{Cos}\alpha\,\text{Cos}(\pi-4\alpha)}{2\text{Cos}\alpha\,\text{Cos}4\alpha}$

$=\dfrac{-\text{Cos}4\alpha}{2\text{Cos}4\alpha}=\dfrac{1}{2}$。

83. 若$\text{Sec}(\phi+\alpha)+\text{Sec}(\phi-\alpha)=2\text{Sec}\phi$ 則

$\text{Cos}\phi=\sqrt{2}\,\text{Cos}\dfrac{\alpha}{2}$ 求證

證: $\dfrac{1}{\text{Cos}(\phi+\alpha)}+\dfrac{1}{\text{Cos}(\phi-\alpha)}=\dfrac{2}{\text{Cos}\phi}$

$\dfrac{\text{Cos}(\phi+\alpha)+\text{Cos}(\phi-\alpha)}{\text{Cos}(\phi+\alpha)\text{Sos}(\phi-\alpha)}=\dfrac{2}{\text{Cos}\phi}$

即 $\dfrac{2\text{Cos}\phi\,\text{Cos}\alpha}{\text{Cos}^2\phi-\text{Sin}^2\alpha}=\dfrac{2}{\text{Cos}\phi}$

$\because \quad \cos^2\phi\cos\lambda = \cos^2\phi - \sin^2\lambda$

$$\therefore \quad \cos^2\phi = \frac{\sin^2\lambda}{1-\cos\lambda} = \frac{1-\cos^2\lambda}{1-\cos\lambda}$$

$$= 1+\cos\lambda = 2\cos^2\frac{\lambda}{2}$$

$$\therefore \quad \cos\phi = \sqrt{2}\cos\frac{\lambda}{2}。$$

84. 將函數$\cos 5\theta$以$\cos\theta$表之

解：$\cos 5\theta = \cos 3\theta\cos 2\theta - \sin 3\theta\sin 2\theta$

$$= \cos(2\theta+\theta)(2\cos^2\theta-1) - 2\sin\theta\cos\theta\sin(2\theta+\theta)$$

$$= (\cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta)(2\cos^2\theta - 1)$$

$$- 2\sin\theta\cos\theta(\sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta)$$

$$= \cos\theta(2\cos^2\theta-1)^2 - 2\sin^2\theta\cos\theta(2\cos^2\theta-1)$$

$$- 4\sin^2\theta\cos^3\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta(2\cos^2\theta-1)$$

$$= 4\cos^5\theta - 4\cos^3\theta + \cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)(2\cos^3\theta$$

$$-\cos\theta)$$

$$- 4(1-\cos^2\theta)\cos^3\theta - 2(1-\cos^2\theta)(2\cos^3\theta$$

$$-\cos\theta)$$

$$= 14\cos^5\theta - 18\cos^3\theta + 5\cos\theta。$$

85. 從下列方程式中消去θ及ϕ

$$\mathrm{Sin}\theta+\mathrm{Sin}\phi=a,\ \mathrm{Cos}\theta+\mathrm{Cos}\phi=b,\ \mathrm{Cos}(\theta-\phi)=c$$

解：$(\mathrm{Sin}\theta+\mathrm{Sin}\phi)^2=a^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$(\mathrm{Cos}\theta+\mathrm{Cos}\phi)^2=b^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

由(1)(2) $\therefore$ $(\mathrm{Sin}\theta+\mathrm{Sin}\phi)^2+(\mathrm{Cos}\theta+\mathrm{Cos}\phi)^2$

$=a^2+b^2$

即 $2+2\mathrm{Cos}\theta\mathrm{Cos}\phi+2\mathrm{Sin}\theta\mathrm{Sin}\phi=a^2+b^2$

即 $2+2\mathrm{Cos}(\theta-\phi)=a^2+b^2$

即 $2+2C=a^2+b^2$

故 $\dfrac{a^2+b^2}{1+C}=2$。

86. 從下列三方程式中消去 x及y：

$\tan x+\tan y=a\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$\mathrm{Cot}\,x+\mathrm{Cot}\,y=b\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$x+y=c\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

解：從(2) $\mathrm{Cot}\,x+\mathrm{Cot}\,y=\dfrac{1}{\tan x}+\dfrac{1}{\tan y}$

$$=\frac{\tan x+\tan y}{\tan x\tan y}=b$$

即 $\frac{a}{\tan x\tan y}=b$ $\therefore$ $\tan x\tan y=\frac{a}{b}$

$\therefore$ $1-\tan x\tan y=1-\frac{a}{b}=\frac{b-a}{b}$……………(4)

以(4)除(1)得

$$\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=\frac{a}{\frac{b-a}{b}}=\frac{ab}{b-a}$$

即 $\tan(x+y)=\frac{ab}{b-a}$時(3)式之值代入得

$\tan c=\frac{ab}{b-a}$。

87. 已知$\operatorname{Sec}\alpha\operatorname{Sec}\theta+\tan\alpha\tan\theta=\operatorname{Sec}\beta$.

求$\tan\theta$

解：$\operatorname{Sec}\alpha\operatorname{Sec}\theta=\operatorname{Sec}\beta-\tan\alpha\tan\theta$

平方之 $\operatorname{Sec}^2\alpha\operatorname{Sec}^2\theta=(\operatorname{Sec}\beta-\tan\alpha\tan\theta)^2$

$$\operatorname{Sec}^2\alpha(1+\tan^2\theta)=\operatorname{Sec}^2\beta-2\operatorname{Sec}\beta\tan\alpha\tan\theta+\tan^2\alpha\tan^2\theta$$

$$\therefore\quad(\operatorname{Sec}^2\alpha-\tan^2\alpha)\tan^2\theta+2\operatorname{Sec}\beta\tan\alpha\tan\theta$$

$$=\operatorname{Sec}^2\beta-\operatorname{Sec}^2\alpha$$

即 $\tan^2\theta+2\operatorname{Sec}\beta\tan\alpha\tan\theta+\operatorname{Sec}^2\alpha-\operatorname{Sec}^2\beta=0$

解之得

$$\tan\theta=\frac{-\operatorname{Sin}\alpha\pm\operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Cos}\beta}。$$

88. 求 $\theta=0$ 時 $\dfrac{\tan^2\theta}{\operatorname{Sec}2\theta-1}$ 之極限值

解：$$\frac{\tan^2\theta}{\operatorname{Sec}2\theta-1}=\frac{\tan^2\theta}{\dfrac{1-\operatorname{Cos}2\theta}{\operatorname{Cos}2\theta}}=\frac{\operatorname{Sin}^2\theta}{\operatorname{Cos}^2\theta}\cdot\frac{\operatorname{Cos}2\theta}{1-\operatorname{Cos}2\theta}$$

$$=\frac{\operatorname{Sin}^2\theta\operatorname{Cos}2\theta}{\operatorname{Cos}^2\theta 2\operatorname{Sin}^2\theta}=\frac{\operatorname{Cos}2\theta}{2\operatorname{Cos}^2\theta}$$

$$=\frac{1-2\operatorname{Sin}^2\theta}{2-2\operatorname{Sin}^2\theta}$$

$$\therefore\quad\lim_{\theta=0}\frac{\tan^2\theta}{\operatorname{Sec}2\theta-1}=\lim_{\theta=0}\frac{1-2\operatorname{Sin}^2\theta}{2-2\operatorname{Sin}^2\theta}=\frac{1}{2}。$$

89. 若$X_r=\mathrm{Cos}\frac{\pi}{2^r}+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\frac{\pi}{2^r}$，　$r=1,2,3,\cdots\cdots\cdots\cdots$

試證明

$X_1\cdot X_2\cdot X_3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$至無窮$=-1$

證：$X_1\cdot X_2\cdot X_3\cdot X_4\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$至無窮

$$=\left(\mathrm{Cos}\frac{\pi}{2^1}+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\frac{\pi}{2^1}\right)\left(\mathrm{Cos}\frac{\pi}{2^2}+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\frac{\pi}{2^2}\right)$$

$$\left(\mathrm{Cos}\frac{\pi}{2^3}+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\frac{\pi}{2^3}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{至無窮}$$

$$=\mathrm{Cos}\left(1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots\right)\frac{\pi}{2}+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}$$

$$\left(1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots\right)\frac{\pi}{2}$$

$$=\mathrm{Cos}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)\frac{\pi}{2}+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)\frac{\pi}{2}$$

$$=\mathrm{Cos}\pi+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\pi=-1。$$

90. 試證

$$[\operatorname{Cos}\theta+\operatorname{Cos}\phi+\sqrt{-1}(\operatorname{Sin}\theta+\operatorname{Sin}\phi)]^n$$

$$+[\operatorname{Cos}\theta+\operatorname{Cos}\phi-\sqrt{-1}(\operatorname{Sin}\theta+\operatorname{Sin}\phi)]^n$$

$$=2^{n+1}\left(\operatorname{Cos}\frac{\theta-\phi}{2}\right)^n\operatorname{Cos}\frac{n(\theta+\phi)}{2}$$

證： 左邊 $=2^n\operatorname{Cos}^n\frac{\theta-\phi}{2}\left\{\left(\operatorname{Cos}\frac{\theta+\phi}{2}+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\frac{\theta+\phi}{2}\right)^n\right.$

$$\left.+\left(\operatorname{Cos}\frac{\theta+\phi}{2}-\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\frac{\theta+\phi}{2}\right)^n\right\}$$

$$=2^n\operatorname{Cos}^n\frac{\theta-\phi}{2}\left\{\operatorname{Cos}^n\frac{\theta+\phi}{2}+\sqrt{-1}\operatorname{Sin} n\frac{\theta+\phi}{2}\right.$$

$$\left.+\operatorname{Cos}^n\frac{\theta+\phi}{2}-\sqrt{-1}\operatorname{Sin} n\frac{\theta+\phi}{2}\right\}$$

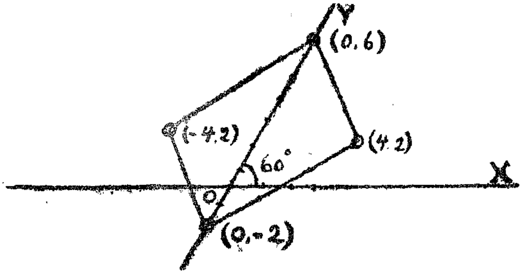
$$=2^n\operatorname{Cos}^n\frac{\theta-\phi}{2}\cdot 2\operatorname{Cos} n\frac{\theta+\phi}{2}$$

$$=2^{n+1}\left(\operatorname{Cos}\frac{\theta-\phi}{2}\right)^n\cdot\operatorname{Cos} n\frac{\theta+\phi}{2}。$$

V 解析幾何

1. 若兩座標軸成 60^0，求作四頂點爲 $(0,-2)$，$(4,2)$，$(0,b)$，$(-4,2)$之四邊形

解：



2. 求連結兩點$(-4,-4)$，$(1,3)$之直線之長

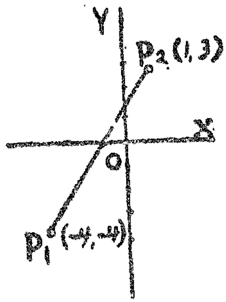
解：由兩點之距離之公式得

$$P_1P_2=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$$\text{即}P_1P_2=\sqrt{(-4-1)^2+(-4-3)^2}$$

$$=\sqrt{(-5)^2+(-7)^2}$$

$$=\sqrt{74}$$



故P_1P_2之長等於$\sqrt{74}$。

3. 三角形之三頂點爲(0,6),(1,2),(3－5,)求各邊之長

解：令(0,6)爲P_1,(1,2)爲P_2,(3,－5)爲P_3則

$$P_1P_2=\sqrt{(0-1)^2+(6-2)^2}$$

$$=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$$

$$P_2P_3=\sqrt{(1-3)^2+(2+5)^2}=\sqrt{4+49}=\sqrt{53}$$

$$P_3P_1=\sqrt{(3-0)^2+(-5-6)^2}=\sqrt{9+121}=\sqrt{130}$$

故此三角形之三邊順次爲$\sqrt{17}$, $\sqrt{53}$, $\sqrt{130}$。

4. 試證(2,2),(－2,－2),($2\sqrt{3}$,$-2\sqrt{3}$ 爲等邊三角形之三頂點

證：此三點令爲P_1,P_2,P_3 則此三角形之三邊順次爲 P_1P_2, P_2P_3,P_3P_1

因 $P_1P_2=\sqrt{(2+2)^2+(2+2)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$$P_2P_3=\sqrt{(-2-2\sqrt{3})^2+(-2+2\sqrt{3})^2}$$

$$=\sqrt{4+8\sqrt{3}+12+4-8\sqrt{3}+12}$$

$=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$P_3P_1=\sqrt{(2\sqrt{3}-2)^2+(-2\sqrt{3}-2)^2}$

$=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

故 $P_1P_2=P_2P_3=P_3P_1=4\sqrt{2}$

故 $(2,2),(-2,-2),(2\sqrt{3}$ 爲等邊三角形之三頂點。

5. 一線段長爲 13. 其一端之座標爲 $(-4,8)$；而他端之縱座標爲3. 求他端之橫座標

解：設兩點爲 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_1y)$

則 $P_1P_2=13$, $(x_1,y_1)=(-4,8)$, $(x,y)=(x,3)$

代入公式 $P_1P_2=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$

$\therefore\ 13=\sqrt{(x+4)^2+(3-8)^2}$

平方之 $169=(x+4)^2-25$

卽 $(x+4)^2=169-25=144$

開方 $\therefore\ x+4=\pm12$

故 $x=8$ 或 $x=-16$

故他端之橫座◦爲8或-16。

6. 連結(1,3),(2,7)兩點之線段,其傾斜如何?

解：令$(x_1,y_1)=(1,3)$, $(x_2,y_2)=(2,7)$則

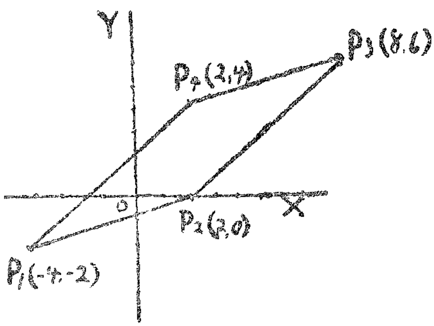
由傾斜之公式

$$m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{3-7}{1-2}=\frac{-4}{-1}=4$$

答傾斜爲 4。

7. 應用直線之傾斜試證 (−4,−2),(2,0),(8,6),(2,4) 爲平行四邊形之四頂點

證：設此四點順次爲 P_1,P_2,P_3,P_4則此四邊形$P_1P_2P_3P_4$之四邊爲P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_1



則 P_1P_2 之傾斜

$$=\frac{-2-0}{-4-2}=\frac{-2}{-6}=\frac{1}{3}$$

P_2P_3之傾斜$=\dfrac{0-6}{2-8}$

$$=\frac{-6}{-6}=1$$

$$P_3P_4\text{之傾斜}=\frac{4-6}{2-8}=\frac{-2}{-6}=\frac{1}{3}$$

$$P_4P_1\text{之傾斜}=\frac{4+2}{2+4}=\frac{6}{6}=1$$

故P_1P_3與P_3P_4平行；P_2P_3與P_4P_1平行

故$P_1P_2P_3P_4$爲平行四邊形

故$(-4,-2),(2,0),(8,6),(2,4)$爲平行四邊形平之四頂點。

8. 設有三點$P_1(3,0),P_2(6,4),P_3(-1,3)$；則$P_1P_2P_3$爲一直角三角形求證

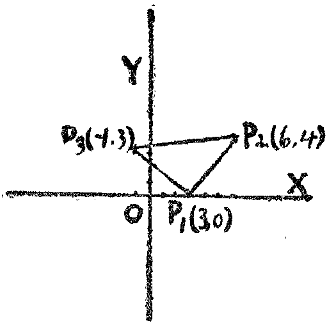
證：P_1P_2之傾斜

$$=\frac{0-4}{3-6}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$$

P_3P_1之傾斜

$$=\frac{3-0}{-1-3}=\frac{3}{-4}$$

$$=-\frac{3}{4}$$



故 P_1P_2 之傾斜等於 P_3P_1傾斜之倒數而符號相反

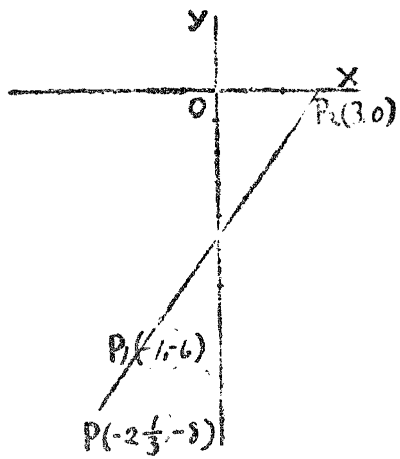
故　P_1P_2與P_3P_1互相垂直於P_1點

即　$P_1P_2P_3$爲直角三角形。

9. 設有二點$P_1(-1,-6)$，$P_2(3,0)$求一點P使分P_1P_2爲$\lambda=-\frac{1}{4}$之比

解：設$P=(x,y)$

$P_1(-1,-6)=(x_1,y_1)$, $P_2(3,0)=(x_2,y_2)$



代入公式

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

$$得x=\frac{-1-\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{-\frac{7}{4}}{\frac{3}{4}}$$

$$=-\frac{7}{3}=-2\frac{1}{3}$$

$$y=\frac{-6-\frac{1}{4}0}{1-\frac{1}{4}}=\frac{-6}{\frac{3}{4}}=-8$$

故 $P=(-2\frac{1}{3},-8)$。

10. 連結(4,−6),(−2,−4)求其中點之座標

解: $x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=\frac{1}{2}(4-2)=1$

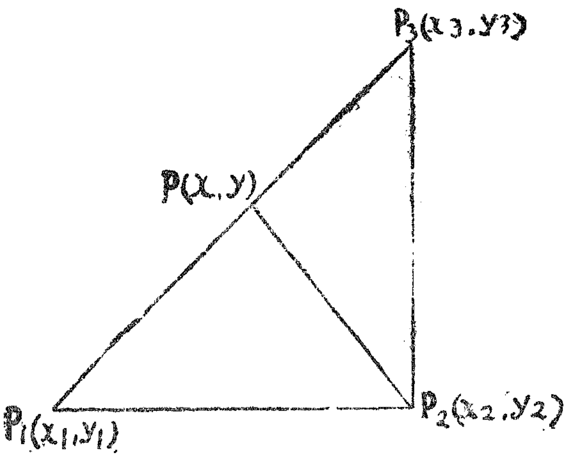
$y=\frac{1}{2}(y_1+y^2)=\frac{1}{2}(-6-4)=-5$

故中點之座標爲(1,−5)

11. 任何直角三角形斜邊之中點與各頂點之距離皆相等

證: 設 $P_1P_2P_3$爲直角三角形但P_2爲直角頂其座標 $P_1=(x_1,y_1)$,$P_2=(x_2,y_2)$,$P_3=(x_3,y)$ 其斜邊 P_1P_3之中點爲 $P(x_1y)$

則 P_1P_2之傾斜$=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ P_2P_3之傾斜$=\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}$



則 $$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{1}{\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}}=\frac{x_3-x_2}{y_2-y_3}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又$P(x_1y)$爲P_1P_3之中點故得以$x_1,y_1)$及(x_3,y_3)表之

卽 $x=\frac{1}{2}(x_1+x_3)$ $y=\frac{1}{2}(y_1+y_3)$

$$\therefore\quad P(x_1y)=P\left\{\frac{1}{2}(x_1+x_3),\frac{1}{2}(y_1+y_3)\right\}$$

由是知$PP_1=\sqrt{[x_1-\frac{1}{2}(x_1+x_3)]^2+[y_1-\frac{1}{2}(y_1+y_3)]^2}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}$$

又$PP_2=\sqrt{\left(\frac{1}{2}(x_1+x_3)-x_2\right)^2+\left(\frac{1}{2}(y_1+y_3)-y_2\right)^2}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1+x_3-2x_2)^2+(y_1+y_3-2y_2)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{([(x_1-x_2)+(x_3-x_2)])^2+[(y_1-y_2)+(y_3-y^2)]^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(x_3-x_2)^2+2(x_1-x_2)(x_3-x_2)+(y_1-y_2)^2+(y_3-y_2)^2+2(y_1-y_2)(y_3-y_2)}$$

由(1)式知$(x_1-x_2)(x_3-x_2)=(y_1-y_2)(y_2-y_3)$

$$\therefore\quad PP_2=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(x_3-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(y_3-y_2)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}$$

$\therefore\quad PP_1=PP_2$ 但 $PP_1=PP_3$

$\therefore\quad PP_1=PP_2=PP_3$。 卽已證明本題

12. 三角形之三頂點爲

$P_1(x_1,y_1)=(2,3)$

$P^2(x_2,y_2)=(1,5)$

$P_3(x_3,y_3)=(-1,2)$ 求面積

解: 由面積公式

$$\triangle P_1P_2P_3=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

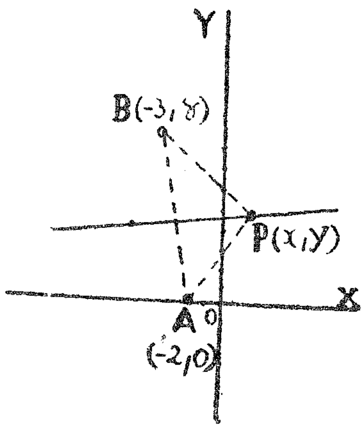
$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(10-2-3+5+4-3)$$

$$=\frac{1}{2}(11)=\frac{11}{2}$$

卽 $\triangle P_1P_2P_3=\dfrac{11}{2}$。

13. 一點P(x_1y)於二定點A$(-2,0)$,B$(-3,8)$等距離之處運動求其運動之軌跡之方程式

解：設P(x_1y)爲軌跡上任意一點．則 $PA=PB$



但 $PA=\sqrt{(x+2)^2+(y-0)^2}$

及 $PB=\sqrt{(x+3)^2+(y-8)^2}$

故 $\sqrt{(x+2)^2+(y-0)^2}$

$=\sqrt{(x+3)^2+(y-8)^2}$

卽 $(x+2)^3+y^2=(x+3)^3+(y-8)^2$

去括弧而整理之得

$2x-16y+69=0$.

卽所求之方程式也。

14. 一點P(x_1y)距一定點C$(-1,2)$之距離恆等於4．求P點之軌跡之方程式

解：設P(x,y)爲軌跡上任意一點，連結 PC 則

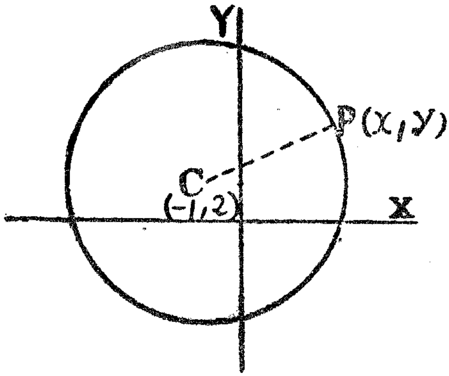
$$PC=4$$

但 $PC=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$

$\therefore\ \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=4$

平方之 $(x+1)^2+(y-2)^2=16$

簡之 $x^2+y^2+2x-4y+11=0$



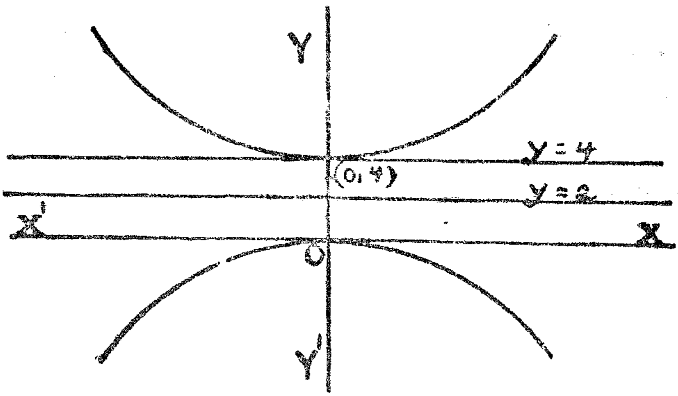
此卽所求之方程式也。但此爲以$(-1,2)$爲圓心以4爲半徑之圓之方程式。

15. 討論方程式

$$x^2-4y^2+16y=0$$

並畫其圖

解:



(a) 因無常數項故此方程式之曲線經過原點

(b) 令$y=0$則x軸之截斷$x=0$

令$x=0$則得y軸之截斷$y=0$及4

(c) 因方程式中x無奇指數故此曲線對於YY'爲對稱

(d) 依x解之得

$$x=\pm 2\sqrt{y^2-4y}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

因$y^2-4y=0$時有$y=0$及$y=4$二根，故凡在0與4間y之值均應除去

故畫二直線$y=0$及$y=4$，則此曲線均不經過此二直線之間

依y解之得

$$y=2\pm\frac{1}{2}\sqrt{x^2=16}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

因x^2+16常爲正,故x之任何值均能適合此方程式

(e) 由(2)知x增大時y亦隨之增大故此曲線離二軸而延伸至無窮遠

由 (1)式計算 x,y 之對應各值而作曲線此曲線爲雙曲線。

16. 作方程式$2x+3y=6$之圖並求其傾斜

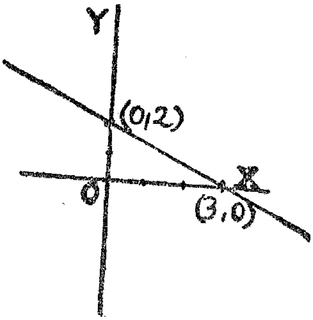
解: 令 $y=0$ 則 $x=3=x$軸上之截斷

令 $x=0$ 則 $y=2=y$軸上之截斷

故所求之圖爲通過

(3,0),(0,2)兩點

之直線



且 $A=2,B=3,$

$C=-6$

故其傾斜

$$m=-\frac{A}{B}=-\frac{2}{3}。$$

17. 於下列四直線方程式中選出互相平行及互相垂直者

$$\begin{cases} L_1: & y = 2x-3, \\ L_2: & y=-3x+2; \\ L_3: & y = 2x+7; \\ L_4: & y = \dfrac{1}{3}x+4. \end{cases}$$

解：L_1之傾斜 $= 2$

L_2之傾斜 $= -3$

L_3之傾斜 $= 2$

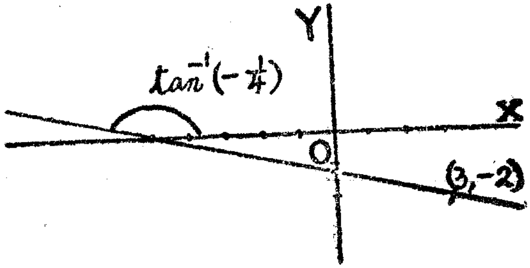
L_4之傾斜 $= \dfrac{1}{3}$

故　$L_1 \parallel L_3$ 及 $L_2 \perp L_4$。

18. 通過$P_1(3,-2)$求作傾斜爲$-\dfrac{1}{4}$之直線方程式。

解：將$(x_1,y_1)=(3,-2)$，　$m=-\dfrac{1}{4}$

代入公式



$$y-y_1=m(x-x_1)$$

故

$$y+2=-\frac{1}{4}(x-3)$$

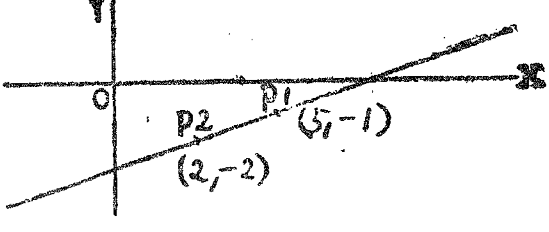
$$\therefore\quad 4y+8=-x+3$$

卽　　$x+4y+5=0$　爲所求之方程式。

19. 通過$P_1(5,-1)$,$P_2(2,-2)$二點求作直線方程式

解：將$P_1(x_1,y_1)=P_1(5,-1)$,$P_2(x_2,y_2)=P_2(2,-2)$

代入公式



$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

故 $\frac{y+1}{x-5}=\frac{-1+2}{5-2}=\frac{1}{3}$

卽 $x-3y-8=0$ 爲所求之方程式。

20. 求自原點至直線 $12x+5y-26=0$ 之距離

解: 此處 $A=12, B=5, C=-26$

代入公式

$$-p=\frac{c}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

卽 $-p=\frac{-26}{\sqrt{144+25}}=\frac{-26}{\sqrt{169}}=-\frac{26}{13}=-2$

$\therefore\ p=2$

故自原點至直線$12x+5y-26=0$之距離爲2。

21. 求一點(2,1)至直線 $4x-3y+15=0$ 之距離

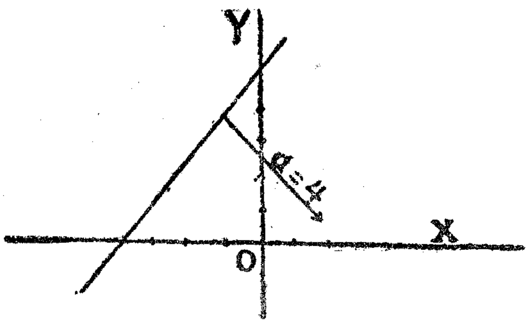
解: 將原方程式以$-\sqrt{16+9}=-5$除之化成法式且使之

$$d=\frac{4x-3y+15}{-5}$$

代入以 $x=2$, $y=1$. 則

$$d=\frac{8-3+15}{-5}=-4$$

故自(2,1)至直線 $4x-3y+15=0$ 距離之長爲4



22. 求下列二直線交角平分線之方程式

L_1: $x+3y-6=0$;

L_2: $3x+y+2=0$.

解: 設P(x,y)爲所求之平分線L_3上之任意點

卽P至已知二直線之距離相等，若此二距離以 d_1,d_2

表之

則 $|d_1|=|d_2|$

但因P點在二直線及原點之同側 卽

$$-d_1=-d_2 \quad \therefore \quad d_1=d_2$$

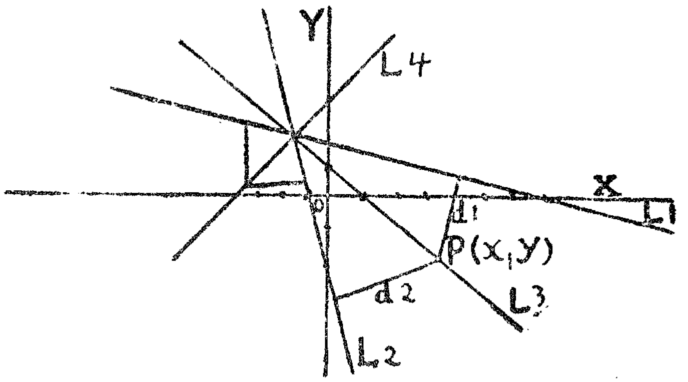
又 $d_1=\dfrac{x+3y-6}{\sqrt{10}}$, $d_2=\dfrac{3x+y+2}{-\sqrt{10}}$

$\therefore\quad x+3y-6=-3x-y-2$

故　$x+y-1=0$　卽爲所求之平分線方程式L_3

又若　$d_1=-d_2$　如前得第二平分線

L_4：$x-y+4=0$。



23．求兩直線 $3x-y+2=0$ 及 $2x+y-2=0$ 之交角

解：設 $L_1=(3x-y+2=0)$ $L_2=(2x+y-2=0)$

則L_1之傾斜$m^1=3$；L_2之傾斜$m^2=-2$

由公式　$\tan\theta=\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\dfrac{3+2}{1-6}=\dfrac{5}{-5}=-1$

$\theta=\dfrac{3\pi}{4}$　則他一角$=\dfrac{\pi}{4}$。

24. 求作通過 $P_1(2,1)$ 及兩直線 L_1：$3x-5y-10=0$ 及 L_2：$x+y+1=0$ 之交點之直線之方程式

解：設經過L_1及L_2之交點之任意直線以

$$3x-5y-10+K(x+y+1)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

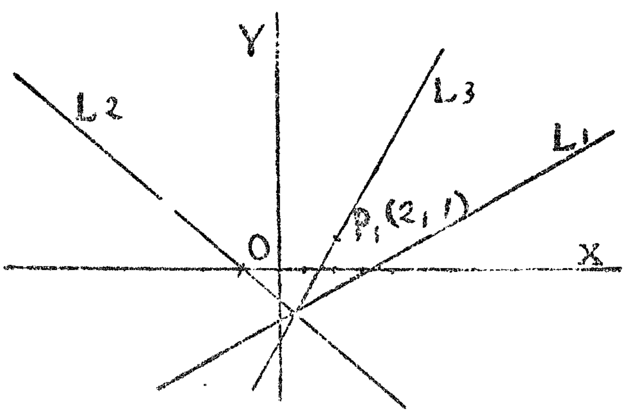
表之. 若此直線通過$P_1(2,1)$，則以$x=2$，$y=1$

代入(1) 得 $6-5-10+K(2+1+1)=0$

$$\therefore\ K=\frac{9}{4}$$

以K之值代入(1)式 則有

L_3：$21x-11y-31=0$ 此卽所求之方程式也。



25. 一圓經過兩點$P_1(0,-3)$, $P_2(4,0)$且圓心在直線 $x+2y=0$上求此圓之方程式

解：設所求之圓之方程式爲

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

因P_1及P_2均在此圓周上　故

$$9-3E+F=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

及　$$16+4D+F=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

又因(1)之圓心爲$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$且在已知直線$x+2y=0$上

故　$-\frac{D}{2}+2\left(-\frac{E}{2}\right)=0$　卽　$D+2E=0\cdots\cdots\cdots(4)$

由(2), (3), (4)解出

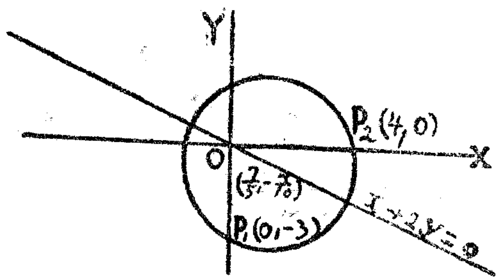
$$D=-\frac{14}{5},\ E=\frac{7}{5},\ F=-\frac{24}{5}$$

代入(1)式得

$$x^2+y^2-\frac{14}{5}x+\frac{7}{5}y-\frac{24}{5}=0$$

卽　$5x^2+5y^2-14x+7y-24=0$　爲所求之圓之方程式也

其圓心為$\left(\frac{7}{5},-\frac{7}{10}\right)$，半徑為$\frac{1}{2}\sqrt{29}$。



26. 作下式之圖

$$p^2=a^2\mathrm{Cos}2\theta$$

〔討論〕 (1)因Cos2θ之極大值為1，故p之極大值為a

故此式之圖必為閉合曲線

(2)當Cos2θ為負時則p為虛．今若2θ在第二式第三象限時則Cos2θ為負 即 當

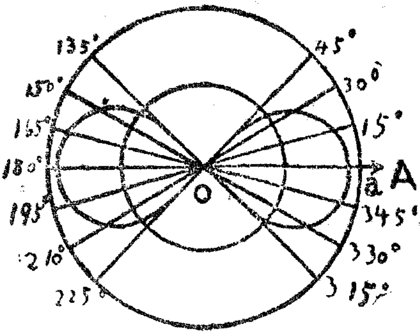
$90^0<2\theta<270^0$ 或 $45^0<\theta<135^0$

p為虛．故此曲線不通45^0與135^0間之部分

(3)若將θ變為$-\theta$則與原方程式無關係故此曲線對極座標軸為對稱．

〔作圖〕

$p^2=a^2\text{Cos}2\theta$			
θ	2θ	Cos2θ	p
0	0	1	$\pm a$
15^0	30^0	.866	$\pm .93a$
30^0	60^0	.500	$\pm .7a$
45^0	90^0	0	0



27. 當兩座標軸移動45^0時則方程式$x^2-y^2=16$之變化如何?

解: 因 $\text{Sin}45^0=\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

及 $\text{Cos}\,45^0=\frac{1}{\sqrt{2}}$

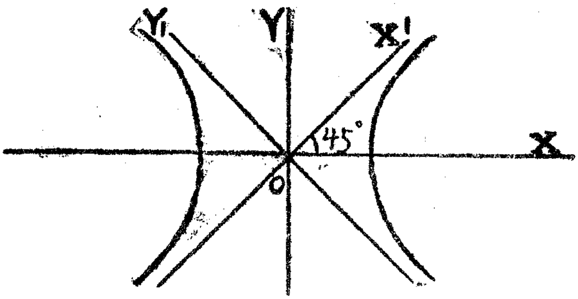
代入公式 $\begin{cases} x=x'\text{Cos}\theta-y'\text{Sin}\theta \\ y=x'\text{Sin}\theta+y'\text{Cos}\theta \end{cases}$

得 $\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y') \\ y=\frac{1}{2}(x'+y') \end{cases}$ 代入原方程式

得 $\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2=16$

簡之卽　$x'y'+8=0$　或　$xy+8=0$

卽變化後之方程式也。



28. 求雙曲線$4x^2-y^2=36$之漸近線之方程式

解: 令　$4x^2-y^2=0$

則　$(2x+y)(2x-y)=0$

$\therefore$　$2x+y=0$　　或　$2x-y=0$

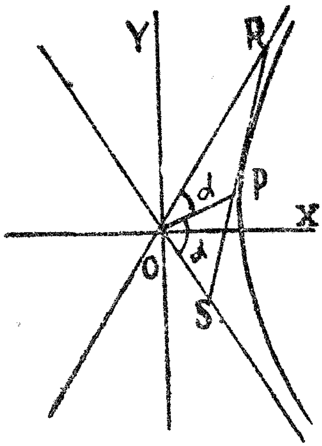
此卽所求之漸近線之方程式也。

29. 一雙曲線之切線與其二漸近線所成之三角形之面積爲一常數

證: 三角形ROS之面積

$$=\frac{1}{2}OS\times OR\ \mathrm{Sin}\ ROS$$

因 $\mathrm{Sin}\ ROP=\dfrac{RP}{OP}=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$



$$\mathrm{Cos}POS=\frac{PS}{OP}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

但 $\angle ROP=\angle POS=\alpha$

$$\therefore\ \frac{1}{2}OS\times OR\ \mathrm{Sin}\ ROS$$

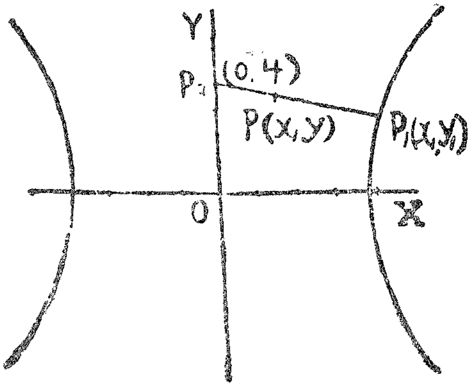
$$=\frac{1}{2}OS\times OR\cdot 2\ \mathrm{Sin}\alpha\,\mathrm{Cos}\alpha$$

$$=\frac{1}{2}(a^2+b^2)\times\frac{2ab}{a^2+b^2}=ab$$

故三角形ROS之面積爲一常數ab

30. 自一點(0,4)至雙曲線$x^2-4y^2=16$引直線有一點P(x,y)分此直線爲1:2求P點之軌跡之方程式

解：



$$\frac{P_2P}{PP_1}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad x=\frac{\frac{1}{2}x_1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{x_1}{3}$$

$$y=\frac{4+\frac{1}{2}y_1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{8+y_1}{3}$$

代入原方程式

得 $\left(\frac{x_1}{3}\right)^2-4\left(\frac{8+y_1}{3}\right)^2=16$

簡之 $3x_1{}^2-12y_1{}^2+64y_1-90\frac{2}{3}=0$

或 $3x^2-12y^2+64y-90\frac{2}{3}=0$. 卽所求之方程式也。

31. 圓$x^2+y^2-2ax=0$之弦OP_1遇直線$x=2a$於A點弦上有一點P若$OP=P_1A$時則P之軌跡如何?

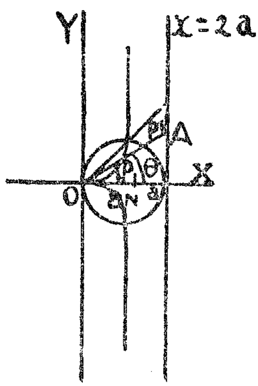
解: 於直角三角形PON中 $ON=x$, $PN=y$

$x=OP\cos\theta=P_1A\cos\theta$

但 $P_1A\times OA=(2a\tan\theta)^2$

而 $OA=2a\sec\theta$

故 $x=\frac{4a^2\tan^2\theta\cos\theta}{2a\sec\theta}=2a\sin^2\theta$



$y=OP\sin\theta$

$=OP\cos\theta\tan\theta=2a$。

32. 求等邊雙曲線之切線與過原點而垂直於此切線之直線之交點之軌跡

解：等邊雙曲線之切線之方程式爲

$$y=mx+\sqrt{a^2(m^2-1)}\cdots\cdots(1)$$

過原點且垂直於此切線之直線之方程式爲

$$y=-\frac{1}{m}x\cdots\cdots(2)$$

(1)式各邊自乘

$$y^2-2mxy+m^2x^2=a^2(m^2-1)\cdots\cdots(3)$$

(2)式各邊自乘

$$m^2y^2+2mxy+x^2=0\cdots\cdots(4)$$

(3),(4)相加得

$$(1+m^2)y^2+(m^2+1)x^2=a^2(m^2-1)\cdots\cdots(5)$$

從(2)式知

$m=-\frac{x}{y}$代入(5)式

$$\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)y^2+\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)x^2=a^2\left(\frac{x^2}{y^2}-1\right)$$

$$\left(x^2+y^2\right)+x^2+\frac{x^4}{y^2}=a^2\left(\frac{x^2-y^2}{y^2}\right)$$

故 $(y^2+x^2)^2=a^2(x^2-y^2)$

即所求軌跡之方程式也。

VI 微積分

I. 微分問題

微分下列各函數：

1. $y=6x^4-4x^3+x+3$

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}(6x^4-4x^3+x+3)$

$$=\frac{d}{dx}(6x^4)+\frac{d}{dx}(-4x^3)+\frac{d}{dx}(x)+\frac{d}{dx}2。$$

$$=6\frac{d}{dx}x^4-4\frac{4}{dx}x^3+1$$

$$=24x^3-12x^2+1$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=24x^3-12x^2+1。$$

2. $y=\sqrt{a^2-x^2}$

解：設 $Z=a^2-x^2$ 則

$$y=\sqrt{Z}$$

故 $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\sqrt{Z}=\frac{d}{dz}\sqrt{Z}\frac{dz}{dx}$

$$=\frac{1}{2\sqrt{Z}}\cdot(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

故 $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$。

3. $y=x(2x-1)(3x+2)$

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left\{x(2x-1)(3x+2)\right\}$

$$=x(2x-1)\frac{d}{dx}(3x+2)+x(3x+2)\frac{d}{dx}(2x-1)$$

$$+(2x-1)(3x+2)\frac{d}{dx}x$$

$$=3x(2x-1)+2x(3x+2)+(2x-1)(3x+2)$$

$$=18x^2+2x-2$$

故 $\quad \frac{dy}{dx}=18x^2+2x-2$。

4. $x^2+y^2=a^2$

解：$\frac{d}{dx}x^2+\frac{d}{dx}y^2=\frac{d}{dx}a^2$

即 $2x+2y\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$。

5. $y=\text{Sin}(\log x)$

解：設 $\log x=Z$ $\therefore \frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}$

則 $y=\text{Sin}Z$

故 $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\text{Sin}Z=\frac{d}{dz}\text{Sin}Z\frac{dz}{dx}$

$=\frac{\text{Cos}Z}{x}=\frac{\text{Cos}(\log x)}{x}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\text{Cos}(\log x)}{x}$。

6. $y=\text{Cos}^{-1}\frac{4-3x^2}{x^3}$

解：設 $\frac{4-3x^2}{x^3}=Z$ 則 $y=\text{Cos}^{-1}Z$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

因 $$\frac{dy}{dz}=\frac{d}{dz}\mathrm{Cos}^{-1}Z=-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{4-3x^2}{x^3}\right)^2\right)}}=\frac{-x^3}{\sqrt{x^6-9x^4+24x^2-16}};$$

又 $$\frac{dz}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{4-3x^2}{x^3}\right)=\frac{-6x^4-3x^2(4-3x^2)}{x^6}$$

$$=\frac{3(x^2-4)}{x^4};$$

代入(1)式得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^3}{\sqrt{x^6-9x^4+24x^2-16}}\cdot\frac{3(x^2-4)}{x^4}$$

$$=\frac{-3(x^2-4)}{x\sqrt{(x^2-1)(x^2-4)^2}}=-\frac{3}{x\sqrt{x^2-1}}$$

故 $$\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{x\sqrt{x^2-1}}。$$

7. $y=\sqrt{\dfrac{ax(x-3a)}{x-4a}}$

解：各邊取對數 則

$$\log y=\frac{1}{2}\left\{\log a+\log x+\log(x-3a)-\log(x-4a)\right\}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{x}+\frac{1}{x-3a}-\frac{1}{x-4a}\right\}$$

$$=\frac{x^2-8ax+12a^2}{2x(x-3a)(x-4a)}$$

$$故\quad \frac{dy}{dx}=\frac{x^2-8ax+12a^2}{2x(x-3a)(x-4a)}\sqrt{\frac{ax(x-3a)}{x-4a}}$$

$$=\frac{\sqrt{a}\cdot(x^2-8ax+12a^2)}{2[x(x-3a)]^{1/2}(x-4a)^{3/2}}。$$

8. $y=L^{x^x}\tan^{-1}X$

解：$\dfrac{dy}{dx}=L^{x^x}\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}X+\tan^{-1}X\dfrac{d}{dx}L^{x^x}$

$$=L^{x^x}\frac{1}{1+x^2}+L^{x^x}\tan^{-1}X\frac{d}{dx}X^x$$

$$=L^{x^x}\frac{1}{1+x^2}+L^{x^x}\tan^{-1}X.\ X^x(\log x+1)$$

$$=L^{x^x}\left\{\frac{1}{1+x^2}+X^x\tan^{-1}X(\log x+1)\right\}。$$

9. $y=L\tan^{-1}X$

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}L\tan^{-1}X=L\tan^{-1}X\frac{d}{dx}\tan^{-1}X$

$$=L\tan^{-1}X\frac{1}{1+x^2}=\frac{L\tan^{-1}X}{1+x^2}$$

故 $\frac{dy}{dx}=\frac{L\tan^{-1}X}{1+x^2}$。

10. $y=2V^2-4;\qquad V=3x^2+1$

解：$\frac{dy}{dV}=4V,\qquad \frac{dV}{dx}=6x$

故 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dV}\ \frac{dV}{dx}=4V\cdot 6x$

$$=24x(3x^2+1)$$

11. $x^y - y^x = 0$

解: $x^y = y^x$ 取對數 則

$$y \log x = x \log y$$

故 $$\frac{d}{dx} y \log x = \frac{d}{dx} x \log y$$

即 $$y \frac{d}{dx} \log x + \log x \frac{dy}{dx} = x \frac{d}{dx} \log y + \log y \frac{d}{dx} x$$

$$\frac{y}{x} + \log x \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} + \log y$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}\left(\log x - \frac{x}{y} \right) = \log y - \frac{y}{x}$$

故 $$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x\, y \log y}{x^2 - x\, y \log x} = \frac{y(y - x \log y)}{x(x - y \log x)}$$

12. 求曲線 $y = x^3$ 上於點 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$ 之切線方程式

解: $$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \quad \therefore \quad \frac{dy_1}{dx_1} = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{\substack{x = 1/2 \\ y = 1/8}}$$

$$= \left[3x^2\right]_{x = 1/2} = \frac{3}{4}$$

代入公式

$$y-y_1=\frac{dy_1}{dx_1}(x-x_1)$$

得 $y-\frac{1}{8}=\frac{3}{4}(x-\frac{1}{2})$

卽 $3x-4y-1=0$ 爲切線之方程式。

13. 試證明雙曲線$x^2-y^2=5$及橢圓$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$ 之交角爲$90°$

證：解二方程式 得兩交點$(3,2)$ 及 $(-3,-2)$

由第一式$\frac{d}{dx}x^2-\frac{d}{dx}y^2=\frac{d}{dx}5$

卽 $2x-2y\frac{dy}{dx}=0$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$$

故 $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=\pm3\\y=\pm2}}=\left(\frac{x}{y}\right)_{\substack{x=\pm3\\y=\pm2}}=\frac{3}{2}$

由第二式 $\frac{d}{dx}\frac{x^2}{18}+\frac{d}{dx}\frac{y^2}{8}=\frac{d}{dx}1$

即 $\frac{x}{9}+\frac{y}{4}\frac{dy}{dx}=0$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{4x}{9y}$$

$$故 \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=\pm 3 \\ y=\pm 2}}=\frac{-12}{18}=-\frac{2}{3}$$

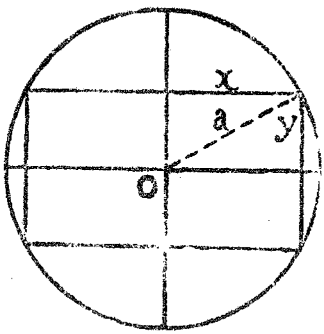
$$故 \quad \tan\Theta=\frac{\frac{3}{2}+\frac{2}{3}}{1-\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}}=\frac{\frac{13}{6}}{0}=8$$

$\therefore \quad \Theta=90$。

14. 求圓內接之最大距形

解：設圓之方程式爲

$$x^2+y^2=a^2$$



其半徑等於 a

若其內接矩形之兩邊爲2x,2y 而面積以u表之

則 $u=4xy$

$$\therefore\quad \frac{du}{dx}=4\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

及 $2x+2y\dfrac{dy}{dx}=0$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

代入(1)式　則

$$y-\frac{x^2}{y}=0\qquad\therefore\quad y=x$$

故圓內接之最大矩形爲正方形。

15. 求下列函數n次之微分係數

$$y=\mathrm{Sin}\ x$$

解:
$$\frac{dy}{dx}=\mathrm{Cos}\ x=\mathrm{Sin}\left(x+\frac{\pi}{2}\right);$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\mathrm{Sin}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\mathrm{Cos}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\mathrm{Sin}\left(x+\frac{2\pi}{2}\right);$$

同樣 $\dfrac{d^3y}{dx^3}=\mathrm{Sin}\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)$,

故 $\dfrac{d^ny}{dx^n}=\mathrm{Sin}\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$。

16. 求$y=a^x$之n次微分係數

解：$\frac{dy}{dx}=a^x\log a$；　$\frac{d^2y}{dx^2}a^x(\log a)^2$

同樣　$\frac{d^3y}{dx^3}=a^x(\log a)^3$

故　$\frac{d^ny}{dx^n}=a^x(\log a)^n$

17. 於三角形內求一點使其距三頂點距離之和爲極小

解：設ABC爲已知三角形，$BC=a$，$CA=b$，$AB=C$

取任意點P引$PM\perp AB$，令$AM=x$，$PM=y$

且　$AP=u$；$BP=v$，$CP=w$ 及

$\angle APM=\theta$，$\angle BPM=\phi$，$\angle CPM=\psi$.

則　$u^2=x^2+y^2$

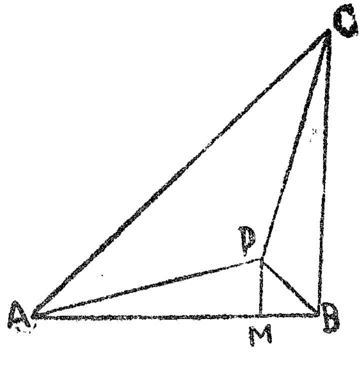
$v^2=(c-x)^2+y^2$

$w^2=(b\,\mathrm{Cos}\,A-x)^2$

$+(b\,\mathrm{Sin}\,A-y)^2$

若欲$u+v+w$之値

爲極小 則必有



$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

及 $$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

令 $$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{u}=\mathrm{Sin}\theta; \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{c-x}{v}=-\mathrm{Sin}\phi; \\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial x}=-\dfrac{b\,\mathrm{Cos}\,A-x}{w}=-\mathrm{Sin}\psi; \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y}{u}=\mathrm{Cos}\theta; \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{y}{v}=\mathrm{Cos}\phi; \\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial y}=-\dfrac{b\,\mathrm{Sin}\,A-y}{w}=\mathrm{Cos}\psi. \end{cases}$$

將以上各值代入(1)及(2)得

$$\mathrm{Sin}\theta=\mathrm{Sin}\phi+\mathrm{Sin}\psi\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

及 $$\mathrm{Cos}\theta=-\mathrm{Cos}\phi-\mathrm{Cos}\psi\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(3)式各邊自乘加(4)式各邊自乘

即 $1=2+2\operatorname{Cos}(\psi-\phi)$

故 $\operatorname{Cos}(\psi-\phi)=-\dfrac{1}{2}=\operatorname{Cos}120^0$

故 $\psi-\phi=120^0$

但 $\psi-\phi=\angle CPM-\angle BPM=\angle CPB$

故 $\angle CPB=120^0$

同理 $\angle APB$ 及 $\angle APC$ 均等於120^0

故P爲以三角形之三邊爲弦均含120^0之圓周之交點。

II. 積 分 問 題

18. 求多項式 $a+bx+cx^2$ 之積分

解: $\int(a+bx+cx^2)dx=\int adx+\int bxdx+\int cx^2dx$

$$=a\int ax+b\int xdx+c\int x^2dx$$

$$=ax+b\frac{x^2}{2}+c\frac{x^3}{3}+c。$$

19. 求$\int\sqrt{a+bx}\,dx$

解：設 $a+bx=y$　則 $bdx=dy$　$\therefore$ $dx=\frac{1}{b}dy$

代入原式　得

$$\int\sqrt{a+bx}\,dx=\int\sqrt{y}\,\frac{1}{b}dy=\frac{1}{b}\int y^{1/2}dy=\frac{1}{b}\,\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c$$

即　$$\int\sqrt{a+bx}\,dx=\frac{2\sqrt{(a+bx)^3}}{3b}+c_{\circ}$$

20. 求$\int Cos^2\theta d\theta$

解：$$\int Cos^2\theta d\theta=\int\frac{1}{2}(1+Cos2\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int(1+Cos2\theta)d\theta=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}Sin2\theta+c$$

即　$$\int Cos^2\theta d\theta=\frac{1}{2}(\theta+Sin\theta Cos\theta)+c_{\circ}$$

21. 求$\int\frac{d\Theta}{\operatorname{Sin}\Theta}$

解：$\int\frac{d\Theta}{\operatorname{Sin}\Theta}=\int\frac{\operatorname{Sin}\Theta d\Theta}{\operatorname{Sin}^2\Theta}=-\int\frac{d\operatorname{Cos}\Theta}{1-\operatorname{Cos}^2\Theta}$

$$=-\frac{1}{2}\log\frac{1+\operatorname{Cos}\Theta}{1-\operatorname{Cos}\Theta}+c$$

但 $\frac{1+\operatorname{Cos}\Theta}{1-\operatorname{Cos}\Theta}=\frac{\operatorname{Cos}^2\frac{\Theta}{2}}{\operatorname{Sin}^2\frac{\Theta}{2}}=\operatorname{Cos}^2\frac{\Theta}{2}$

故 $\int\frac{d\Theta}{\operatorname{Sin}\Theta}=-\frac{1}{2}\log\operatorname{Cot}^2\frac{\Theta}{2}+c$

$$=\log\tan\frac{\Theta}{2}+c。$$

22. 求$\int xe^x dx$

解：令$u=x$, $dv=e^x$

$\therefore$ $du=dx$, $v=\int e^x dx=e^x$

代入公式 $\int udv=uv-\int vdu$

得 $\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=(x-1)e^x+c$。

23. 求 $\int \log x dx$

解：$u=\log x$， $dv=dx$

$$\therefore \quad du=\frac{1}{x}dx, \quad v=x$$

故由式 $\int \log x\,dx = x\log x - \int x\frac{dx}{x} = x(\log x - 1) + c$。

24. 求抛物線 $y=x^2$ 之弧之長

解：$dy=2xdx$

$$\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

$$\therefore \quad S=\int\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

$$=2\int\sqrt{\frac{1}{4}+x^2}\,dx = x\sqrt{\frac{1}{4}+x^2}+\frac{1}{4}\log\left(x+\sqrt{\frac{1}{4}+x^2}\right)+c$$

欲決定C，則令$x=0$，$s=0$

$$\therefore \quad O=\frac{1}{4}\log\frac{1}{2}+c \quad \therefore \quad c=\frac{1}{4}\log^2。$$

故 $S=\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2}+\frac{1}{4}\log\left(2x+\sqrt{1+4x^2}\right)$

即 $y=x^2$之弧長。

25. 求定积分$\int_0^2 \frac{1}{2}(4-x^2)dx$

解： $\int \frac{1}{2}(4-x^2)dx = 2x - \frac{x^3}{6}$

$$\therefore \int_0^2 \frac{1}{2}(4-x^2)dx = \left[2x - \frac{x^3}{6}\right]_{x=0}^{x=2}$$

$$= \left[2x - \frac{x^3}{6}\right]_{x=2} - \left[2x - \frac{x^3}{6}\right]_{x=0} = 2\frac{2}{3}$$

26. 求定积分$\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx$

解：$\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx = \left[\int x\sqrt{9-x^2}\,dx\right]_{x=0}^{x=3}$

$$= \left[-\frac{1}{3}(9-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{x=3}$$

$$= \left[-\frac{1}{3}(9-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{x=3}$$

$$- \left[-\frac{1}{3}(9-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0} = 9。$$

27. 一火車頭曳力9噸，拖一重200噸之貨車行駛於軌道上，

但因軌道之磨擦，故火車頭減少5噸之力

求此火車一分鐘之末應得之速

解：火車之重　$m = 200 \times 2000 = 400000$磅

火車之力　$f = 9 \times 2000 - 5 \times 2000 = 8000$磅

又其加速度爲 $\frac{dv}{dt}$ 故由公式

$$m\frac{dv}{dt} = f$$

得　$400000\frac{dv}{dt} = 8000 \times 32$

$\therefore$　$\frac{dv}{dt} = \frac{16}{25}$

即　$dv = \frac{16}{25}dt$

故　$v = \int \frac{16}{25}dt = \frac{16}{25}t + c$

$$\therefore \quad v=\frac{16}{25}t+c$$

因 $t=0$ 時 $v=0$ $\therefore$ $c=0$

$$\text{卽} \quad v=\frac{16}{25}t$$

但t爲一分鐘之末 卽 $t=60$

故 $v=\frac{16}{25}\times 60=38.4$ 呎每秒速。

28. 試計算橢圓體

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

之體積

解：設以$x=x'$之平面截此橢圓體之截口爲一橢圓

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x'^2}{a'^2}$$

$$\text{或} \quad \frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x'^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x'^2}{a^2}\right)}=1。$$

故此橢圓兩半徑之長爲

$$b\sqrt{1-\frac{x'^2}{a^2}} \quad 及 \quad c\sqrt{1-\frac{x'^2}{a^2}}$$

故其面積

$$A=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

但橢圓體之體積

$$V=\int_{-a}^{a} A\,dx$$

即 $$V=\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{x^3}{a^2}\right)dx$$

$$=\pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx$$

$$=\left\{\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\right\}_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc$$

即所求之體積也。

物理問答

I. 總論

1. 試述物理學研究之範圍。

物理學者。研究物體因力之作用。所生形式上而非性質上之變化。物體所具之特性。及聲。光。熱。磁電等現象。尤要者。為講求諸現象間之關係。務以實驗所得之少數明確事實。說明多數現象。

2. 何謂物質。何謂能力。試區別之。

凡佔據一定空間者。謂之物質。 凡能顯工作之能。謂之力。

3. 試說明物質之通性。

(a) 佔有性。…………凡物質。皆佔有一定之空間。

(b) 不可入性。………二物質。不能佔有同一之空間。

(c) 有孔性。…………凡物質。皆有多數微細之空隙。

(d) 惰性。……………無力之作用。物質不能變更其動靜之狀態。

(e) 重量。……………重量者。促使物質向地之力也。凡物質皆有之。

(f) 常住性。…………凡物質。皆不生不滅。

4. 物質不滅定律。及能力不滅定律之解說。並舉例以明之。

(a) 物質不滅定律。

物質無論受何種變化。其質量不能增加。亦不能消滅。如木一塊。無論槌敲至何形狀。不能增減其質量。卽燃之於空氣中。亦得由化學方法。測知其所生之灰燼。及殘氣等物質之質量。等於此木塊及空氣之質量。

(b) 能力不滅定律。

能力可以變遷。而其總量不能增減或消滅。如燃定量煤。於機器之火爐中。則煤之熱能力。一變爲汽鍋中水蒸汽之漲力。此漲力復開動機器。以任工作。如此機械力及磨擦力等。有精確測定時。適等於該定量煤所蓄熱之工作當量。

5. 何謂物質之態。

宇宙間之物質。每因情況不同，遂生有固體。液體。氣體。三種狀態。謂之物質三態。

(1) 固體。……凡物質不易變化其形狀。分子之位置亦一定。而不流動。受壓力難變其容積。分割之而有抵抗力。曰固體。如冰，金，鐵，石等。

(2) 液體。……凡物之分子。更相流動。其形狀隨容器變化。卽受壓力亦難變其體積。靜止之際。成水平面者。曰液體。如水，油，等。

(3) 氣體。……凡物質之分子流動。比液體更甚。能擴散於四方。容之於器而充滿。一受壓力。卽大減其體積者。曰氣體。如水蒸氣，空氣等。

6. 何謂C. G. S. 單位。

物理學所用之量。種類雖多。而所表之單位。究由長。質量。時間。之單位所組成。此長。質量。時間之單位。稱曰

基本單位。若長用糎。(Centimeter)；質量用克。(Gram)；時間用秒。(Second)者。曰 C. G. S 單位。

7. 試述運動速度之界說。

(1) 運動。……物體繼續變其位置。曰運動。就其速率與路形分之。有等速運動。不等速運動。直線運動。曲線運動。等之別。

(2) 速度。……物體單位時間內。所經過之距離曰速。又合速與方向而言者。曰速度。若知所經之路為 s。及所需之時為 t。速度為v。則 v.t.s.三者之關係為

$$v=\frac{s}{t} \quad 或 \quad s=vt。$$

8. 某物體於$\frac{1}{10}$秒間。運動150糎。求其速。

解：依公式。 $v=\frac{s}{t}$

得。 $v=\dfrac{150}{\frac{1}{10}}=150\times10=1500$ 糎/秒 (答)。

9. 一人駕舟。速度每小時10里。與岸綫成30^0角。問此舟沿岸之速度爲何？離岸之速度爲何？

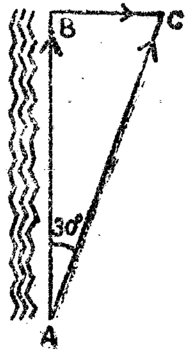
解：AC＝10 里/時。………駕舟之速。

則 $AB = AC \times \text{Cos}30^0 = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{3}$

$= 8.66$ 里/時。……沿岸之速度。

及 $BC = AC \times \text{Sin}30^0 = 10 \times \frac{1}{2}$

$= 5$ 里/時………離岸之速度。

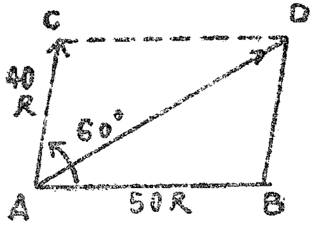


10. 試述速度之平行四邊形之法則。

答：先畫表已知二速度之二直線。再以此二直線爲二邊。作一平行四邊形。則此二直線之對角線。卽所求之表合成速度之線。此卽速度之平行四邊形之法則。或稱速度之中斜法。

11. 一石塊。以每秒40尺之速度。由一正航行舟中。與水面成60^0角拋出。設該舟速度爲每秒50尺。問此石塊之眞速度。

解：依速度之平行四邊形法。則以AB為舟行之速度。以AC為石塊拋出之速度。則AD為石塊之合成速度。即眞速度



按三角公式

$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+2\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\text{Cos}$ BAC

$\therefore\quad \overline{AD}^2=50^2+40^2+2\times50\times40\times\text{Cos}60^\circ$

$$=4100+4000\times\frac{\sqrt{3}}{3}=7564\cdots\cdots\cdots$$

$\therefore\quad \overline{AD}=87$尺強

此卽石塊之合成速度。約為每秒87尺。

12. 試舉加速度之界說。及其運算之公式。

物體為不等速運動時。單位時間內。速度變化之平均數。曰加速度。

卽 $\dfrac{\text{終速度}-\text{初速度}}{\text{時間}}=$加速度。

今以a表加速度。以t表時間。以v表初速度。以V'表終速度。

其式如次。 $a=\frac{V'-v}{t}$ ……………………(1)

更由(1)式去分母移項。得變爲次之二式。

$V'=v+at$ ……………………(2)

$v=V'-at$ ……………………(3)

卽速度與時間相關之公式。

此外更可得所經之路s。與速度及時間相關之公式。

$S=Vt+\frac{1}{2}at^2$ ……………(4)

若將以上公式合併之。則得所經之路。與速率相關之公式。 爲 $V'^2-v^2=2as$ ……………(5)。

13. 一球由一傾斜面滾下。在某時有每秒60糎(cm)之速度。11秒後。該球得每秒181糎之速度。問加速度爲何。

解：由公式 $a=\frac{V'-v}{t}$ 則得

$a=\frac{181-60}{11}=\frac{121}{11}=11$ 糎/秒^2 (答)。

14. 有物體由靜止而運動。每秒增980糎/秒之加速度。問5秒後之速度若干?

解: 由上題之公式 $V'=v+at$

因本題 $v=0 \quad a=980 \quad t=5$

故 $V'=980\times5=4900$ 糎/秒 (答)。

15. 以2糎/秒²之加速度運動之物體。5秒之後得10糎/秒之速度。問其初速度若干

解: 以所求之速度爲v。由上題之公式。$v=V'-at$

因本題中 $v'=10 \quad a=2 \quad t=5$

故 $v=10-2\times5=0$

故初速度爲零。

16. 一球由一斜面滾下。經某點時得速度。每秒25呎。5秒後得速度。每秒50呎。問再經3秒後。自某點起所經斜面之長爲若干

解: 依公式 $a=\dfrac{V'-v}{t}=\dfrac{50-25}{5}=5$ 呎/秒²

故 $s=vt+\dfrac{1}{2}at^2=25\times(5+3)+\dfrac{1}{2}\times[5\times(5+3)^2]$

$=200+160=360$ (答)。

17. 有一運動體。每秒減50糎/秒之速度。而其初速度爲28糎/秒。問至此物體靜止時。其經過之路程若干。

解：依公式 $V' - v = 2as$

就題意負加速度爲50糎/秒²。初速度爲280糎/秒。終速度爲0。設所求之距離爲s

則 $290^2 - 0^2 = 2 \times 50 \times s$

$\therefore$ s=780糎 （答）。

18. 試舉力，及外力運動量之界說。

1. 力。………凡改變物體動靜之狀態者。謂之力。以式表之。爲$f = ma$。

2. 外力。(或曰擡擊力)。………施力於一定質量時。其速度之變化恆以此力之大小。及施力時間之長短而定。而力之大小與施力時間之相乘積。稱曰擡擊力。若以f表力。以t表時。則擡擊力之公式爲。

擡擊力$= ft$。

3. 運動量。………物體受撞擊力之作用時。質量小者。速度之變化大。質量大者。速度之變化小。故撞擊力之測定。恆依動物體之質量。及速度而定。此質量與速度之相乘積。謂之運動量。
以m表質量。v表速度。 則
運動量＝mv。

19. 試舉力之單位。

力之單位分絕對單位及重力單位兩種。分別述之如次。

1. 絕對單位。………作用於質量1克 或1磅之物體。附與加速度1糎/秒^2。或1呎/秒^{2}之力。爲力之絕對單位。稱之爲1達(dyne)或1磅度 (ponndal)。
2. 動單位。………實用上作用於1克。或1磅度之質量。附與加速度980糎/秒^2。或32呎/秒之力。爲力之動單位。稱曰一克或一磅之力。

20. 設有甲乙二物體。甲物體重15磅。每秒行300呎。乙物體重3磅。每秒行1260呎。問此二物體之運動量。何者爲大。

解: 甲物體之運動量。＝mv＝15×300＝4500。
乙物體之運動量。＝mv＝3×1260＝3780。
故甲物體之運動量爲大。

21. 一重2000磅之升降機。以3000磅之力向上提起。問加速度爲何。如得上升速度2呎/秒。問所經時間若干?

解: 由公式。$F=ma$

$$F=(3000-2000)\times 32\text{磅特爾}$$

$$\therefore\quad \text{加速度}\ a=\frac{F}{m}=\frac{1000\times 32}{2000}=16\ \text{呎/每秒}^2$$

$$\text{又因}\qquad F=m\frac{v}{t}\qquad \left(a=\frac{v}{t}\right)$$

$$\therefore\qquad t=\frac{v}{a}=\frac{2}{19}=\frac{1}{8}\text{秒}\quad \text{(答)。}$$

22. 有一物體。在地面秤之。爲3000瓩。如距地面500哩處秤之。問重若干瓩?

解: 因自地心至地面爲4000哩。

$$\text{故}\quad (4000+500)^2:4000^2=3000:X.$$

$$\therefore\quad X=\frac{4000^2\times 3000}{4500^2}=\frac{1600\times 3000}{2025}$$

$$=2374=\text{瓩}\quad \text{(答)。}$$

23. 以1000達因之力。作用於靜止之物體。10秒後。以每秒米之速度進行。求物體之質量。

解：由公式 $F=\frac{mv'-mv}{t}$

因物體由靜而動。即 $v=0$

$\therefore \quad F=\frac{mv'}{t}$

$\therefore \quad m=\frac{Ft}{v'}=\frac{1000\times 10}{100}=100$克（答）

24. 有質量80克之物體。以250每秒/糎之速度前進。此時若以100達因之力。加於運動之方向。10秒後之速度為何？

解：由公式 $f=\frac{mv'-mv}{t}$

$\therefore \quad 100=\frac{80\times v'-80\times 250}{10}$

$\therefore \quad v'=\frac{21000}{80}=262.5$每秒糎(答)。

25. 作用於質量5克之物體。使其生20每秒/糎之加速度之力若干。試用絕對單位。及重力單位表之?

解: 絕對單位:。力$=ma=5\times20=100$達

重力單位: 因1克之力等於980達

故所求之力$=\dfrac{100}{980}=.102$克 (答)

26. 試述牛頓運動之定律三則?

1. 一切物體不受外力。則靜者恆靜。動者恆以等速進行於一直線上。

2. 物體受一定力作用。無論現在之速度如何。常順力之方向。生一定之加速度。以公式表之。則為

$$F=Kma.$$

但F為作用於質量m之力。a為加速度。K為一常數。若取適宜之單位。可使K等於1。

3. 有他動。則必有反動。卽云二物體間之相互作用。大小相等方向相反。

27. 試舉數例以明運動之第一定律。

1. 疾走之車。忽行停止。車中之人。恆倒向前方。

2. 車如驟然開動。車中之人。恆向後傾倒。

3. 欲除去衣服蓆毯之灰塵。須以棒敲打之。

28. 放鎗時。則肩上感擂擊者何故。

由彈丸發射之反作用。鎗身退向後方。打擊於肩際。

29. 試述牛頓之萬有引力之定律。並以公式表之。

牛頓之萬有引力之定律曰。兩物體間必具相引之力。其引力以兩物體質量之相乘積爲正比。以其間距離之平方爲反比如以公式表之 則

$$f \propto \frac{mm'}{\gamma^2} \quad 或 \quad f=K\frac{mm'}{\gamma^2}.$$

但K爲常數

30. 兩物體之質量。各爲1000瓩。相距1米。問其間引力爲若干達因?

解: 由公式 $F=K\frac{mm'}{\gamma^2}$

因　$K=6\cdot5\times10^{-8}$

$\therefore\quad F=6\cdot5\times10^{-8}\times\dfrac{1000\times1000\times1000\times1000}{100^2}$

$=6.5\times10^{-8}\times10^{-4}\times10^{12}=6\cdot5\times1$

$=6\cdot5$達因　（答）。

31. 試由運動之定律。與重力之定律。以證明落體之加速度。與其重量之大小無關。而常爲一定？

由重力之定律。 在同一地方上。物體之重量。與其質量爲正比例。

又由運動之定律。 力常正比例於質量。與加速度之相乘積。

設二物體之質量各爲m,m'。

二物體之重量各爲F,F'。

則　$F:F'=m:m'$。

又此二物體落下時之加速度各爲g,g'。

則　$F=mg,\quad F'=m'g'$。

$\therefore\quad m:m'=mg:m'g'$

$m'mg=mm'g'$

$g=g'$

32. 試說明物體之落下運動及其公式。

物體之落下。實因地球吸力之牽引。而吸力之作用。無時或懈。故第一秒間。物體受此吸力之牽引。所生之速度。隨慣性定律。仍保有之。次秒間更受牽引。因之速度比前加大。是爲落下之加速度。每秒約980秒糎。通常以G表之。至於其公式則。因落下運動之狀態不同。可分爲墜落。投落。拋上三種。記之於下。

(i) 墜落。

初速=0

1. $v' = gt$

2 $s = \frac{1}{2}gt^2$

3. $v' = 2gs$

(ii) 投落。

初速=v

4. $v' = v + gt$

5. $s = vt + \frac{1}{2}gt^2$

6. $v'^2 - v^2 = 2gs$

(iii) 拋上。

初速=v 加速度=$-g$

7. $v' = v - gt$

8. $s = vt - \frac{1}{2}gt^2$

9. $v^2 - v'^2 = 2gs$。

33. 一球以每秒64呎速度。垂直上拋。問該球須經時間幾何。始可着地。其最高點。離地若干呎。經最高點之半途時。速度為何?

解: 因球達于最高點時。速度等於零。然其初速度為每秒64呎。

由 $s=\frac{v^2}{2g}=\frac{64^2}{2\times 32}=64$呎……最高點離地呎數

又由 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 而得

$$t=\sqrt{\frac{2\times 64}{32}}=2\text{秒}$$

∴ $2\times 2=4$秒…為自拋上時至着地所共經之時間

又由 $v^2=2gs$

∴ $v=\sqrt{2\times 32\times \frac{64}{2}}=32\sqrt{2}$

$=32\times 1.414$

$=45.248$呎……在半途之速度 (答)。

34. 一落體有初速度。每秒200糎。問該物體有速度每秒10000糎之前。宜落下若干距離?

解: 由公式

$$2gs = v'^2 - v^2$$

$$\therefore \quad s = \frac{v'^2 - v^2}{2g}$$

$$= \frac{10000^2 - 200^2}{2 \times 980}$$

$= 51000$糎 (答)。

35. 一球自一塔頂落下。經時6秒。始達地面。問塔之高有若干呢?

解: 由公式

$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

$$\therefore \quad s = \frac{1}{2} \times 32 \times 6^2$$

$= 576$呎 (答)。

36. 以200米之速度。由高196米處。水平發一彈丸。問彈丸達地經時幾何。且與高地之水平距離幾何?

解: 因彈丸水平射出時。其垂直速度等於零。故彈丸之落下。直與落體無異。試由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

$\therefore \quad t=\sqrt{\frac{2s}{g}}=\sqrt{\frac{2\times196}{9.8}}=40$秒……達地所經之時

又由 $s_1=vt$

$\therefore \quad s_1=200\times40=8000$米 …與高地水平之距離。

37. 以每秒50米之速度。向下投一物體。問時經3秒之距離若干?

解: 由公式

$$s=vt+\frac{1}{2}gt^2$$

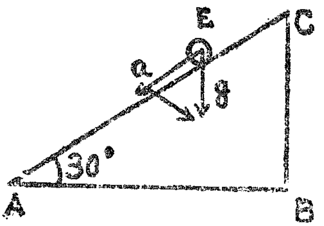
$$\therefore \quad s=50\times3+\frac{1}{2}\times9.8\times3^2$$

$=194.1$米…………距離之長 (答)。

39. 有長5米之斜面。與水平面成30^0之角。今有初速度爲零之物體。從其上端滑下。問至下端時之速度幾何?

解: 設物體E。沿斜面下落時加速度爲a。則g與a之關係。等於斜邊AC與高CB之比。卽等於傾斜角30^0之正弦。然

$$正弦30^0 = \frac{1}{2}$$



故　$a:g=1:2$。

$\therefore\quad a=\frac{g}{2}=4.9$米/秒^2

設達於下端時之速度爲v

由$v^2=2as$而得

$$v^2=2\times4.9\times5$$

$\therefore\quad v=7$米/秒　(答)。

40. 試說物體之拋射運動。及其公式?

拋射物體。常由瞬間衝擊力。及不斷之動作用而成之運動。此二力之方向相反。而在同一直線上者。爲拋上運動或二力互成直角者。曰水平運動。或二力互成銳角者。爲斜向運動。今若將物件以v之速度與地成θ角斜射。則

得用三角法。可得下之公式。

1. 射出t時間後物體之位置

$$s=(\text{水平距離})=v\text{Cos}\theta t$$

$$h=(\text{高})=v\ \text{Sin}\theta t-\frac{1}{2}gt^2$$

2. 達到之水平距離

$$s=\frac{v^2\,\text{Sin}2\theta}{g}$$

若θ等於90°則爲拋上運動。又若θ等於0則爲水平運動。

41. 水由一水平管中射出。該管離地4呎。水於離水平距離20呎之點落地。問此水射出之速度？

解：由公式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 而得

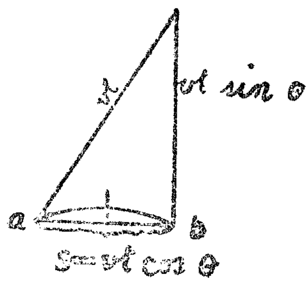
$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}}=\sqrt{\frac{2\times4}{32}}=\frac{1}{2}\text{秒}$$

$$\therefore\ \text{所求速度}=\frac{20}{\frac{1}{2}}=40\text{呎每秒。}$$

42. 一砲彈以每秒4000呎之速度由仰角45^0之砲身發射如空氣抵抗不及外。問此彈着地之點與砲身之距離及其最高點之高度?

解：ab爲砲彈着地之點與砲身之距離

則由 $s=\dfrac{v^2\mathrm{Sin}2\Theta}{g}$，



$\Theta=45^0$而得

$$ab=\frac{v^2}{g}=\frac{16000000}{32}$$

$$=500000\text{呎}$$

又因砲彈昇至最高處所費之時間爲

$$t=\frac{500000}{2v\mathrm{Cos}\Theta}$$

$$\therefore\quad h=\frac{500000}{2}\tan45^0-\frac{1}{2}\times32=\frac{(500000)^2}{4\times16000000\times\frac{1}{2}}$$

$$=250000-8\times250000/16$$

$$=250000-125000$$

$$=125000\text{呎}\quad(\text{答})$$

43. 有與水平成30^0，50米秒之速度拋射之物體問3秒後之位置如何？

解：3秒後之水平距離爲

$$s = v\ \mathrm{Cos}\ t = 50 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3$$

$$= 130米$$

3秒後之高爲

$$h = v\mathrm{Sin}\Theta t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$= 50 \times \mathrm{Sin}30^0 \times 3 - \frac{1}{2} \times 9.8 \times 3^2$$

$$= 50 \times \frac{1}{2} \times 3 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 3^2$$

30.9米 （答）。

44. 由水平以30^0之傾角斜向上方放砲彈其速度每秒百米問砲彈與砲身水平之距離若干？

解：由公式 $s = \dfrac{v^2\mathrm{Sin}2\Theta}{g}$

因　$\theta=30^{0}$　$\therefore$　$\sin 2\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore\ S=\frac{100^{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{9.8}=\frac{10000\times\sqrt{3}}{9.8\times 2}$$

$=888^{1}$米……………(答)。

45. 試說明圓運動及其公式?

物件之圓運動乃循心運動之一種 該物體以一定速度在圓周上運動僅變其速度之方向勢必須垂直于軌道 問圓中心之力 是爲向心力此力與質量m 及速度v 自乘之相乘積成正比例與軌道之半徑r爲逆比例以式表之則爲

$$F=\frac{mv^{2}}{r}$$

或以其週期爲T 則

$$F=m\times\frac{\left(\dfrac{2\pi r}{T}\right)^{2}}{r}=4\pi^{2}\frac{mr}{T^{2}}。$$

46. 以100克之物體於長20cm之絲之一端以50秒糎之速度爲圓運動。問絲之張力若干?

解：由公式 $F=\frac{mv^2}{r}$

$\therefore \quad F=\frac{100\times 50^2}{20}=12500$達因………絲之張力。

47. 地球之半徑在赤道上爲6377粁 問赤道上一克之物體因地球自轉所需之向心力若干?

解：由公式 $F=\frac{4\pi^2 mr}{T^2}$

$\therefore \quad F=\frac{4\times(3.1416)^2\times 1\times 6377\times 10^5}{(24\times 60\times 60)^2}=3.37$達因(答)

48. 一重50克之質量當旋轉成一半徑60糎之元周時有速度每秒750糎 問加速度之方向與數量及向心力若干?

解：加速度 $a=\frac{v^2}{r}=\frac{750^2}{60}=9375$0糎/秒^2

其方向則對中心。

又向心力　$F=\frac{mv^2}{r}=50\times93750$

$=468750$達因。

49. 有一單弦運動其最大加速度爲25糎/秒^{2}振幅爲16糎 試求其週期?

解: 由公式　$T=2\pi\sqrt{\frac{r}{a}}=2\times3.14\times\sqrt{\frac{16}{25}}$

$=5.024$秒…………週期之時間。

50. 試說明振子運動及振子等時性?

以線懸質量于一定點使其能以此定點爲中心 自由擺動于圓弧上者曰振子運動實亦由於地心引力之故 且振幅甚小時振子運動之週期爲　$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ 但l爲懸振子之線之長。

可知振子之週期與其長之平方根爲正比例 與重力之加速度爲反比例又週期無關於振幅 及質點之質量常相等是爲振子之等時性。

51. 試述振子之應用?

振子所以供實用者甚廣兹舉其顯而易見者述之於下

1. 用以調整時鐘之旋轉。 於一定地方定長之振子其振動時間常不變故可用以調整時鐘之旋轉。

2. 用以測重力之強。 欲測某地重力之強可以已知其長之振子於該地擺動而測其週期則由公式卽得重力之強。

52. 在北平長99.2糎之振子週期爲2秒問北平之重力加速度若干?

解: 由公式 $T=2\pi\times\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

則 $g=\dfrac{4\pi^2L}{T^2}$

∴ $g=\dfrac{4\times(3.1416)^2\times99.2}{4}$

$=979.5$糎/秒^2 （答）。

53. 有鐘擺一其長爲50糎問振動時之週期?

解: 由公式 $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

$\therefore \qquad T=2\times3.14\times\sqrt{\frac{50}{980}}=1.413$秒………(答)。

54. 有一晝夜遲5秒之時鐘今欲使其準確須將振子之長短縮若干?

解: 1晝夜之秒數………………$24\times60\times60=86400$秒

此時鐘所示一月之秒數 ……$86400-5=86395$秒

因振子之振動數與週期爲反比例而週期又與振子之長之平方根爲正比例

今設正確時鐘之振子之長爲L所用時鐘之振子之長爲L′

則 $86400:86395=\sqrt{L'}:\sqrt{L}$

$\therefore \qquad L=0.999884\ L'$

$\therefore \qquad L'-L=0.000116\ L'$

即將振子之長縮短 0.000116 倍卽可。

55. 一鐘擺當＝980 時週期適爲1秒今移至g＝981 之地問此鐘每日將加速或減緩若干?

解：由公式　$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

若　$T=1$　　$g=980$

則　$1=2\pi\sqrt{\frac{L}{980}}$ ………………(1)

若　$g=981$

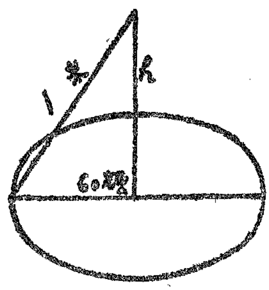
則　$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{981}}$ ………………(2)

以(1)除(2)得　$T=\sqrt{\frac{980}{981}}=.9995$

＝　每秒快　$1-.9995=0.0005$秒

＝　每日快　$0.0005\times24\times60^2=43.2$秒（答）。

56. 一懸空之錐形鐘擺之綫長1米依一半徑60糎之水平圓旋轉求週期



解：由公式　$T=2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$

但因　$h=\sqrt{100^2-60^2}$

$=80$糎

$$\therefore \quad T = 2 \times 3.14 \times \sqrt{\frac{80}{980}}$$

$$= 1.794\text{秒。}$$

57. 何謂力之三要素?

作用於物體之力以其大小與方向及力所作用於物體之一點即力之作用點三者而定因名為力之三要素。

58. 試述力之平行四邊形法?

由力所作用之一點引二直線而以二直線之方向表力之方向以其長表力之大小復以此二直線為二邊作一平行四邊形則其對角線即表合力之方向與大小是為力之平行四邊形法。

59. 何謂力之平衡?

數力同時作用於一質點而該質點不起運動與未受外力作用者同斯之謂力之平衡。

60. 兩個10磅之力作用於一點具合力等於一10磅之力求此兩之作用線所夾之角.

解: 用力之平行四邊形法

設以AC, AB, 表二力之方向及大小

AD爲合力且等於AC

則 $CD = AB = AC = AD$

然在三等邊三角形ACD中每角必爲60^0

$\therefore \quad \angle DAC = 60^0$

同樣 $\angle BAD = 60^0$

$\therefore$ 此二力之作用線所成之角爲

$60^0 + 60^0 = 120^0$。

61. 有2與4兩力作用於一水平板各距左端2尺與4尺使板向上復有3與1兩力各距左端1尺與5尺使板向下求一平衡力之數與着力點.

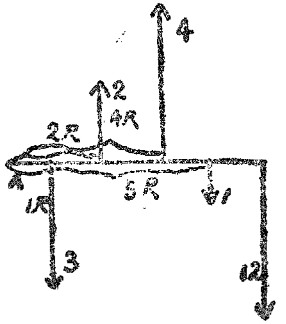
解: 向上力爲$2+4=6$

向下力爲$3+1=4$

$\therefore$ 上下兩合力之差爲$6-4=2$.

若以A點爲軸使板順鐘向之力距爲正使板逆鐘向之力距爲負

則 $\left.\begin{aligned} -2\times2 &= -4 \\ -4\times4 &= -16 \\ 3\times1 &= 3 \\ 1\times5 &= 5 \end{aligned}\right\}$ 總和$=-12$逆鐘向



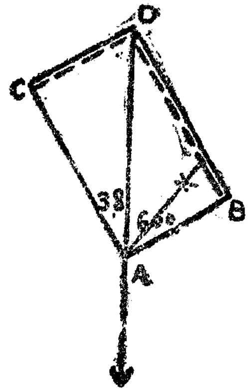
故欲使板平衡必須加一順鐘向之力距12然上下兩合力之差爲2

$\therefore \quad \dfrac{12}{2}=6$尺.爲應加之力12之着力點距 A點之距離。

62. 有重200磅之物體可以與垂直方向成30°及60°之二力支持之問二力之大若干?

解: 今於與200磅相反之方向上取一與此相等之力AD爲

對角線以與AD爲30^0角之AC線及與AD爲60^0角之AB線爲二邊作ABCD平行四邊形則



AB，AC卽所求之兩力可知

$$AB = AD \times \cos 60^0 = 200 \times \frac{1}{2}$$

$=100$磅

$$AC = AD \times \cos 30^0 = 200 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$=100$磅。

63. 有二力作用於同一直線上其合力之法如何?

1. 方向相同時其合力爲二力之和其方向與原二力之方向同

2. 方向相反時其合力爲二力之差其方向等於二力中較大者之方向。

64. 三力作用於剛體適相平衡 問各力之方向 及其大小之關係如何

1. 三力之方向不同時

三力中二力之合力必與他一力之大相等方向相反

三力之大小相等則各作用線間之角必爲120°

2. 三力互相平行時

某方向二力之和必與反對方向之力之大相等。

65. 試舉重心之界說

物體各部因地球之引力咸受垂直向下之力之作用諸作之力得視爲平行力故其合力之作用線爲一定之方向且不論位置如何通常過一定點此點爲物體之重心。

66. 試舉物體之三種平衡

1. 安定平衡　物體之重心甚低者置之頗爲穩定雖稍推之仍能復其原位是曰安定平衡.

2. 不安定平衡　物體之重心甚高者置之不甚穩定稍推卽倒是曰不安定平衡.

3. 中立平衡　物體之重心不高不低者則其平衡之位置亦無一定稍推之使改變其地位卽能安於其新地位不復原位亦不傾倒者曰中立平衡。

67. 試求等物質之棒,三角板及圓環之重心之位置?

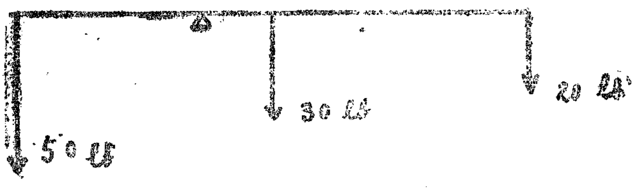
1. 棒之重心　等粗之棒其重心在中央點.

2. 三角板之重心　等厚之三角板其重心在三中央線之交點上.

3. 圓環之重心　圓環重力之合力通過其中心故圓環之重心在其中心.

68. 有長20尺重30磅之槓桿兩端各懸以重20磅及50磅之物體適成平衡問支點在何處?

解: 因槓桿之重量作用於該桿之中點而中點至兩端之距離各爲10尺.



設支點至中央之距離爲X

則　$50\times(10-X)=30\times X+20(10+X)$

$\therefore$　$X=3$尺

即支點在左且距中點3尺。

69. 試舉工作之界說並其運算之公式?

物體受力作用循力之方向移動若干距離時稱曰此力所生之工作而工作W之大小由作用於物體之力F與物體循其作用線所移之距離S之相乘積而定以式表之如下

$$W = F \times S$$。

70. 試舉工作之單位?

工作之單位有四種

1. 愛格………以一達因之力作用於物體而使物體移動一糎之工作.

2, 呎磅度……以一磅度之力作用於物體而使物體移動一英尺之工作.

3. 克糎………以一克之力作用於物體而使物體移動一糎之工作.

4. 呎磅………以一磅之力作用於物體而使物體移動一英呎之工作。

71. 設有一銀圓重267.3克 今舉之使高100糎 問其工作爲若干爾格

解：由公式　$W=F\times S$

今　$S=100$糎

$F=267.3\times980=261954$達因

$\therefore$　$W=261954\times100$

$=26195400$爾格　　（答）。

72. 設有50磅度之力加於物體上使之移動10英尺問其工作若干

解：由公式　$W=F\times S$

今　$F=50$磅度

$S=10$英尺

$\therefore$　$W=50\times10=500$呎磅度　　（答）。

73. 設有一馬以150磅之力拖一重物上100英尺高之山問其所顯之工作若干

解：由公式　$W=F\times S$

今　$F=150$磅

$S=100$英尺

$\therefore \quad W = 150 \times 100$

$= 15000$呎磅。

74. 試舉工率之界說及其單位？

單位時間內所成之工作謂之工率測量工率之大小特定有二種單位如下

1. 馬力……卽於1秒內成550呎磅之工作者曰馬力而每秒75瓩米之工作適等於一馬力.

2. 瓦德……卽於1秒內成10^7愛格之工作者曰一瓦德。

75. 有一打水機每秒能將5500磅重之水打至高10英尺之處問此機有若干馬力？

解：由公式　$W = F \times S$

今　$F = 5500$呎磅.　　$S = 10$英尺.

故得　$W = 5500 \times 10 = 55000$ 呎磅此卽在每秒內所成之工作.

然每秒550呎磅工作爲一馬力故5500呎磅當爲$\dfrac{55000}{550}$

$= 100$馬力。

76. 有一機械一小時內所作之工作爲500瓩米問此機械有若干馬力?

解: 馬力者卽每秒75瓩米之工作之謂也.

故 $\frac{500}{60\times 60}\div 75=\frac{1}{540}$馬力　（答）。

77. 試舉能力之界說及其種類?

物體能工作者必有生此工作之要素此要素是曰能力按能力可分爲二大類曰位置能力曰運動能力

1. 位置能力……凡物體因位置之故所起之能力曰位置能力其計算之公式爲位置能力 $=Wh$ $=mgh$.

但W爲物體之重量 m 爲其質量 h爲其所移之距離.

2. 運動能力……凡物體因運動之故所起之能力曰運動能力其計算之公式爲運動能力

$$=\frac{1}{2}mv^2$$

但 m爲物體之質量v爲其運動之速度。

78. 設有一物重100磅離地10英尺問此物之位置能力若何?

解: 因位置能力$=Wh$.

今　　$W=100$磅　　$h=10$英尺.

$\therefore$　位置能力$=100\times10=1000$呎磅。

79. 設有一運動之彈丸其質量爲15克其速率爲每秒150糎問其運動能力若干

解: 因 運 動 能 力$=\frac{1}{2}mv^2$

今　　$m=15$　　$v=150$

$\therefore$　運動能力$=\frac{1}{2}15\times150^2=168750$愛格。

80. 100克之彈丸以每秒400米之速度進行中的後速度全失即落下問該彈丸失去運動能力幾何?

解: 運動能力$=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times100\times40000^2$

$=80,000,000,000$ 愛格。

81. 有質量25克之石靜止於離地400米高處。問該石所具位置能力之愛格數 又此石落下五秒後 位置及運動能力各若干又達地面時位置及運動能力又各若干?

解: 靜止於離地高400米時

位置能力$=mgh=25\times40{,}000\times980$

$=980{,}000{,}000$愛格

落下五秒後

$S=\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}\times980\times5^2=12250$糎

$v=gt=980\times5=4900$糎秒

$\therefore$ 位置能力$=25\times980\times(40000-12250)$

$=679{,}875{,}000$愛格

$\therefore$ 運動能力$=\frac{1}{2}\times25\times4900^2$

$=300{,}125{,}000$愛格

該石達地面時所具位置能力悉變爲運動能力

$U=\sqrt{2gs}=\sqrt{2\times980\times40000}$

$\therefore$ 運動能力$=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times25\times2980\times40000$

$=980{,}000{,}000$愛格。

82. 欲使一重300噸之火車得每小時30哩之速度問須費若干呎磅之能力？如機車工率為100馬力需時幾何方能使車得此速度

解：1噸＝2000磅　　1馬力＝550呎磅/秒

$$E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times 300\times 20000\times\left(\frac{30\times 5280}{62^2}\right)^2$$

$=580,800,000$呎磅度

$$=\frac{580,800,000}{32}$$

$=18,150,000$呎磅

若工率為100馬力時則需時

$$\frac{18,150,000}{550\times 100}=330\text{秒}\quad\text{或}\frac{330}{60}=5\frac{1}{2}\text{分。}$$

83. 試述機械之意義及其種類？

一種器械以力施於此器之一處而使其在他處能發生一力以作有用之工者謂之機械分單式機械及複式機械單式機械……如槓杆滑車輪軸斜面螺旋及尖劈等複式機械即由單式機械之應用組合而成者。

84. 試述槓桿之種類並繪圖以明之!

槓桿係以一堅固之桿所製成 其有三點 卽支點重點力點是也因此三點之位置不同可分爲三種槓桿 (1)支點在力點與重點之間 (2)重點在力點與支點之間 (3)力點在重點與支點之間

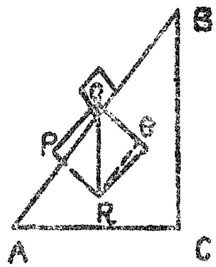
85. 試述定滑車及動滑車之區別?

解: 滑車亦係簡單機械之一種 有定滑車 及動滑車之區別卽定滑車 祇能變力之方向 不能使抵力大於主力動滑車 則可使抵力加主力一倍 卽所用之主力祇須抵力之半。

86. 試述利用斜面之利益?

解 斜面者欲以小力與大力平衡時所利用者也

今置物體於斜面 ABC 其重爲W而以OR表W 之作用線則可將 OR 分解爲平行於斜邊之力OP 與垂直於斜邊之力 OQ 但 OQ與斜面之抵抗相消故支此物體之力祇須與OP相等方向相反 圖中三角形 OPR 與 ABC爲相似形



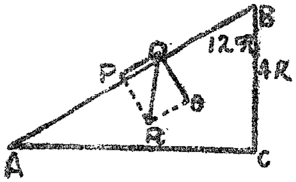
故　$OP=OR\times\frac{BC}{AB}=W\times\frac{BC}{AB}$

若　BC較AB愈小（即∠ABC愈小）則OP較W更小

故用斜面時可用小力以運起較重之物體也。

87. 將180磅之桶由長12呎高4呎之斜面滚上間須用力及工作若干如該斜面長20呎高度相同時又須用力及工作若干?

解:（1）圖中三角形OPR與ABC為相似形



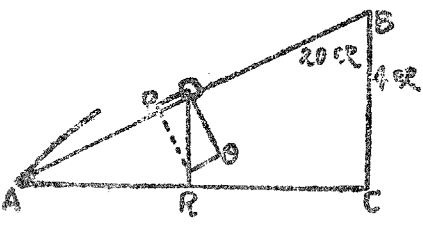
$\therefore\quad P:180=4:12$

$\therefore\quad P=\frac{180\times4}{12}=60$磅

$\therefore\quad W=180\times4=720$呎磅

或　$W=60\times12=720$呎磅

（2）圖中三角形OPR與ABC為相似形



$\therefore\quad P:180=4:20$

$\therefore\quad P=\frac{180\times4}{20}=36$磅

$\therefore\quad W=180\times4=720$ 呎磅

或　$W=32\times20=720$ 呎磅

88. 有螺旋其螺距6分附3尺之柄於其一端加以8斤之力問螺旋生壓力若干?

解: 設所生之壓力爲P

則 $P=8\times\dfrac{2\times3.1416\times300}{6}=2513.3$斤。

89. 試述毛霖之摩擦定律

一物體動於他物體之面上時

1. 最大摩擦力正比例於物體之直壓力

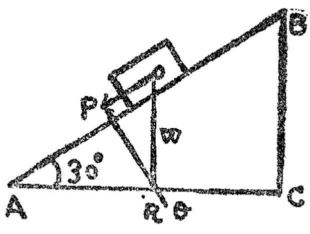
2. 最大摩擦力關於二物體之性質不關於摩擦面之大小、

90. 斜面上置一物體後將此斜面之傾斜角漸增至30^0時物體經微力推動後。隨卽滑下(但無加速度)問物體與斜面間之最大摩擦力及摩擦係數?

解: 以W代物體之重量

則最大摩擦力爲

$W\,\mathrm{Sin}\,30^0=\dfrac{1}{2}W$



又因二物體間之摩擦

係數等於其間之摩擦限角之正切

故摩擦係數爲 $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$。

91 有20瓩重之物體靜止於水平面之地上若物體與地上之摩擦係數爲$\frac{1}{5}$問欲推動此物體須力若干？

解．在水平面上之物體欲推之使動所加之力要比最大摩擦力大今以其最大摩擦力爲N以物體之直壓力爲P以摩擦係數爲u則

$N = Pu$

於本題 $u = \frac{1}{5}$ 又直壓力等於物體之重即20瓩

故 $N = 20 \times \frac{1}{5} = 4$瓩 （答）。

III. 流 體 力 學

92. 何謂巴斯加Phscal之原理

施壓力於流體之一部分時此壓力之強不增不減傳達於各方向是爲巴斯加之原理

93. 某水壓機小筒之面積爲二方寸大筒之面積爲一方尺設小筒受3斤之總壓力問大筒所生之壓力爲若干？

解：小筒每平方寸所受之壓力爲3斤

則大筒每平方寸所受之壓力亦爲3斤

然大筒之面積爲一方尺卽一百方寸

故大筒所生之壓力爲$3\times100=300$斤　　（答）。

94. 各邊十米之大箱內充水使滿問壓於其底面及各側面之全壓力若干　（大氣壓力不計）

解：1立方糎之水重＝1克　∴　立方粉之水重＝1瓩

但　1米＝10粉

∴　底面之全壓力$=100\times100\times100=1000000$粉之水重

又　$=1000000$瓩

又由側面之頂至其底其所受之壓力不等頂上爲零而底下者則每平方粉爲100瓩

故其平均壓力$=\dfrac{04100}{2}$瓩$=50$瓩/粉^2

∴　側面之全壓力$=50\times100^2=50000$瓩。

95. 用亞幾美德氏之原理（Archimedes' principle）說明物體在水中浮沉之現象

物體於水中所受水之浮力等於與物體同體積之水重若物體之重過於所排開之水重卽物體之重大於浮力則沉反是若重力小於浮力則浮。

96. 何謂比重何謂密度

某物質之單位體積之重爲密度

某物質之重與$4^{\circ}c$時同體積之水重之比謂之比重。

97. 有直圓錐形之木片高爲5糎半徑爲4糎密度爲0.8克/糎^{3}使沈於水銀中間須加若干力（水銀之密度爲13.6克/糎^3）設以r爲半徑b爲高d與d'爲木片水銀之密度則

解：此木片之重$=\frac{1}{3}\pi r^2bd$

所排開水銀之重$=\frac{1}{3}\pi r^2bd'$

$\therefore$ 所須之力 $P=\frac{1}{3}\pi r^2 bd'-\frac{1}{3}\pi r^2 bd$

$$=\frac{1}{3}\pi r^2 b(d'-d)$$

$$=\frac{1}{3}\pi r^2 b\times(13.6-0.8)$$

$$=\frac{1}{3}\times3.14\times4^2\times5\times12.8$$

$=1072$克　　(答)。

98　U字管之一脚盛水銀他脚盛入某液體由境界面至水銀面之高爲0.175米由境界面至他液面之高爲 0.42 米求此液對水銀之比重及對水之比重設水銀對水之比重爲13.6?

解：設某液體之密度爲d

則 $\frac{0.175}{0.42}=\frac{d}{13.6}$

但 $\frac{d}{13.6}$ 卽爲該液對水銀之比重

$\therefore$ $\frac{d}{13.6}=\frac{0.175}{0.42}=0.416$

又　某液體對水之比重$=0.416\times13.6=5.6576$。

99. 有金屬物一片於空氣中秤之得300克於水中秤得260克問該金屬之體積比重密度為何?

解: 因金屬物之體積與其所排出之水之體積相等而水之密度為一故

體積 $= 300 - 260 = 40$ 糎^3

$$比重 = \frac{300}{300 - 260} = \frac{300}{40} = 7.5$$

密度 $= 300/40 = 7.5$ 克。

100 浮體(例如船)安隱之要件為何試申言之

物體浮於液體表面時有重心及浮心之存在重心者該物體所受地心引力之總着力點也浮心者液體對於該物體之浮力之總着力點也若浮心居重心之上則十分安全雖浮體有傾斜而浮力與重力所成之偶力能使浮體復原位若重心居浮心之上則浮體稍有偏倚重心受力作用向下浮心受浮力作用向上則恰使浮體顛覆。

101. 何謂波以耳氏定理（Boyle's low）設有圓筒活塞其直徑爲20cm 欲使筒內空氣之體積縮爲原有之$\frac{1}{2}$問須壓力若干？

波以耳定理：一溫度不變時氣體之體積與其所受之壓力成反比例

筒內空氣不加 壓力時已受有一大氣之壓力 依波以耳定律體積減成$\frac{1}{2}$則壓力須加一倍 卽二大氣壓力 卽於活塞上加一760粍之壓力。

102. 用上提抽水機於井中取水常有不能得水現象試言其故？

上提抽水機 乃利用空氣之壓力 將水壓升於抽水機之水管中然空氣之壓力有限若水井過深 水管過長 則空氣之壓力已不能將水送上故常有不能得水之現象。

103. 試說明毛細管現象

解：以兩端開口之細管插於液中卽呈下之二現象

(1) 液能濕管時（如水 與 玻璃）液卽上昇管中液面作凹形

(2) 液不能濕管時（如水銀與玻璃）管中液面較管外液面爲低其液面作凸形

此種現象管愈細愈著故曰毛管現象又管內外液面之差與管之半徑爲反比例。

IV. 熱 學

104. 攝氏表上爲50^0時問列氏華氏及絕對溫度各爲若干？

$50^0+273^0=323^0$……………絕對溫度

$X:50=4:5$

$$X=\frac{50\times4}{5}=40^0\ \text{…………}\ \text{列氏}$$

$X:50=9:5$

$$X=\frac{50\times9}{5}=90^0$$

$90^0+32^0=123^0$…………華氏。

105. 簡單說明熱比熱及熱容量？

熱爲由物體分子之振動所生之運動故能振動激烈則暖緩慢則冷比熱者乃一定質量之物體上昇一度所須之熱

量與同質量之水上昇一度所須熱量之比也

熱容量者爲物體之溫度上升1^0所須之熱量卽爲該物體之熱容量。

106. 以溫度100^0之鉛200克投於10^0之水100克中混合後之溫度爲15^0求鉛之比熱

解：設鉛之比熱爲S

則鉛所失之熱量爲$S \times 200 \times (100-15)$

水所得之熱量爲$100 \times (15-10)$

則得下式

$$S \times 200 \times (100-15) = 100 \times (15-10)$$

$$S = 0.0294。$$

107. 溫度90^0比熱0.45之液10克與比熱0.25溫度16^0之液若干克混合後混合液之溫度爲$43^0.75$問第二液之質量若干？

解：設第二液之質量爲m

則　$10 \times 0.45 \times (90^0 - 43^0.75) = m \times 0.25 \times (43^0.75 - 16^0)$

$$\therefore \quad m = \frac{0.45 \times 10 \times 46.25}{0.25 \times 27.75} = 30\text{克} \qquad (\text{答})。$$

108. 熱之傳播方法有幾並舉實例以明之?

熱之傳播方法有三

A.傳導　凡熱由物體之一部漸次移至其他較冷之部者曰傳導如金屬棒灸其一端則他端亦不可握.

B.對流　凡流體受熱之部分與其較冷部分相交代者曰對流如水之沸騰風之流動.

C.輻射　凡熱不借媒介而傳播於周圍者曰輻射如太陽之熱傳于地面

109. 有玻璃球於15^0c時測之得300c.c.問於0^0c.時當爲若干?

(設玻璃之膨脹係數爲0.000089)

解: 依體積膨脹之公式　$V=Vo(1+3at)$

已知　$V=300$c.c.,　$a=0.000089$　$t=15^0c$

$\therefore$　$300=Vo(1+3\times15\times0.000089)=Vo\times1.0107$

$\therefore$　$Vo=300/1.0107=296.824$糎^3　(答)。

110. 有20^0 c之銅塞直徑爲5cm試置於鐵板之孔內其直徑尙大$\frac{1}{100}$耗問於何溫度此塞始能通過?

解: 依線膨脹之公式 $L=Lo(1+at)$

已知 $L=5cm$ $Lo=5-0.001=4.999cm.$

$a=.0000189$

$\therefore \quad 5=4.999(1+.0000189\times t)$

$$\frac{5}{4.999}-1=.0000189t$$

$$\frac{1}{4.999\times .0000189}=t$$

$$\frac{1}{0.0945}=t$$

$t=10.58^0$ c (答)

111. 試述查耳氏定律設某氣體在標準溫壓時爲100cc 問溫度50^0 c壓力750耗時之體積爲若干?

查耳氏定理:- 壓力一定時氣體之體積每因溫度增加一

度必增加其全體積$\frac{1}{273}$或氣體之體積 常與絕對溫度成

正比例

又 所求體積$=100\times\left(1+\frac{50}{273}\right)\times\frac{760}{750}=119.8$cc (答)。

112. 何謂溶解熱及氣化熱並用分子說說明此現象?

1. 溶解熱者 一克物質由固體全變為同溫度之液體 所須之熱量也

2. 氣化熱者 一克物質在一氣壓之下 由液體全變為同溫度之氣體時所吸收之熱量也

物質之組成均為細小之粒子 所謂分子是也 分子居物體內並非死守不動 乃左右前後 彼此碰撞飛動物體之所以有三態者 卽分子運動 之弛急有以致之也液體分子飛動 速於固體氣體之分子飛動 更急於液體物體變態吸熱或放熱 而於溫度不變者 亦增加或減少其分子運動之能力故也此能力卽熱。

113. 何謂臨界溫度及臨界壓力?

氣體未冷至一定溫度以下 唯壓縮之 决不能使其液化此一定溫度曰臨界溫度 卽某氣體 在此溫度以上僅增壓力决不能液化也 對此溫度之最大壓力 卽於該溫度時所加壓力恰足使液化者爲臨界壓力。

114. 何謂寒劑試舉例以說明之?

冰與食鹽相混合卽溶解爲鹽水 此時冰與食鹽 均須吸收熱故能生寒冷而成寒劑。

115. 以100^0之水蒸氣100克通於-5^0 之冰500克中 問其結果之溫度如何?

解: 設結果之溫度爲 t 又因水之氣化熱爲536 加路里冰之融解熱爲80加路里

故 $100\times536+(100-t)\times100=5\times0.5\times500+500\times80+500t$ $\therefore$ $t=37^0$ (答。)

116. 何謂濕度何謂露點?

1. 濕度 現存空氣中之水蒸氣壓力與同溫度時之最大水蒸氣壓力之比曰濕度
2. 露點 不飽和之水蒸氣漸次冷却達於飽和狀態卽開始液化此時之溫度曰露點。

117. 何謂熱之工作當量 並求10瓩之落體 以200米/秒之速度與地面衝突所生之熱量爲若干?

發生單位熱量所用之工作量曰熱之工作當量

又10瓩落體所有之動能爲

$\frac{1}{2}10000\times(20000)^2=2\times10^{12}$爾

$\therefore$ 熱量$=2\times10^{12}\div(4.2\times17^{12})=4.76\times10^4$加路里(答)。

V. 聲 學

118. 試述成聲之理

因物體之急速振動傳聲之媒介中 發生聲浪 分密部與稀部四方傳達於吾人之耳膜如是耳膜 亦起振動 吾人乃覺有聲此成聲之理也。

119. 橫波與縱波之異點何在?

橫波乃媒質之各質點 直垂於波之進行方向 振動時之波動也.

縱波乃媒質之各質點順波之進行方向振動時之波動也。

120. 何謂波長波相設有速度150尺/秒之波其波長爲3尺問週期及振動數爲若干?

質點在振動路上之位置 稱曰質點運動之波相 而在傳波之媒質中其振動狀況相同之點曰相同之點

同相相隣二點間之距離曰波長

又所求之週期與振動數爲

$$週期=\frac{3}{150}=\frac{1}{50}秒$$

$$振動數=\frac{1}{\frac{1}{50}}=50尺/秒$$ (答)。

121. 聲浪進行遇他物阻礙後當起何種之作用?

聲浪進行時 若遇阻礙 除發生升沉或干涉之現象外倘有反射及屈折二種玆將後兩種略爲說明之

1. 反射 聲浪進行遇他物體而折回之現象謂之反射如回聲亦因所發之聲遇他種物體如高牆大樹之類以致反射而使吾人復聞原聲也.

2. 屈折 聲浪由一種媒介物傳入他種媒介物時其進行之方向常被改變是謂之屈折如聲浪經過充滿二氧化碳之袋則被折聚於一點。

122. 設音在水中之速度較空氣中快四倍在鐵中較空氣中快一五倍今有每秒振動數256之音波若在空氣中水中及鐵中其波長各若干

解：空氣中之波長＝340（在空氣中音之速度）÷256

＝1.33米強

故在水中之波長＝1.33×4＝5.32米強

故在鐵中之波長＝1.33×15＝19.95米強。

123. 何謂強廹振動及感應振動？

1. 強廹振動　舍自己本來之振動週期而隨他物體之振動週期以振動者謂之強廹振動如琴弦下之板因弦之振動而起同樣之振動故聲更明響．

2. 感應振動　一種物體因他物體振動時其週期與之相同而亦起振動者謂之感應振動如取振動週期相同之二音義只擊一音義使之發聲數秒後停止之則聞未擊之他音義反發聲甚響藉感應振動可以說明共鳴現象卽甲物體振動時乙物體因感應而起振動則乙物體所發之聲可助甲物體所發之聲而聲遂分外明瞭此種現象謂之共鳴。

124. 有一音義每秒振動340次試與他一音義同時擊動每秒祇聞六次之昇沉若將第二音義之臂加以臘塊每秒可得七次之昇沉試求第二音義之振動數

解：二音義昇沉之數卽二振動數相差之數而第一音義之振動數已知爲340則第二音義必爲340－6或340＋6. 然第二音義加以臘塊後昇沉之數增加是第二音義之原振動數必較第一音義爲慢故其原振動數必爲

$340-6=334$次

125. 石墜井中2秒後始聞擊水之聲問井口至水面之深若干？

解：設所求之深爲S米石達水面之時間爲t又因重力加速度爲每秒9.8米故由落下公式可得

$$S=\frac{1}{2}gt^2=\frac{9.8}{2}t^2$$

$$\therefore\quad t=\sqrt{\frac{S}{4.9}}$$

又以音從水面達於耳所須之時間爲t'

則 $t'=\dfrac{S}{340}$

但 $t+t'=2$

$$\therefore \sqrt{\frac{S}{4.9}}+\frac{S}{340}=2$$

$S=15$米 (答)

126. 噪音樂音單純音之區別若何?

1. 噪音爲不規則振動繼續而成之音 令人生不快之感 如車馬之音等

2. 樂音爲週期振動繼續而成之音 可令人生快感 如諸樂器之音是也

3. 單純音者發音體爲單弦運動 所成之樂音也 如音義之音等。

127. 樂音之要素爲何

樂音之要素
- 1. 高低……與音波振數之大小有關係振動數愈大則音愈高
- 2. 強弱……與音波振幅之大小有關係
- 3. 音色……與音波之形狀有關係。

128. 距發音體漸近其音卽漸高距發音體漸遠其音亦漸低者何故?

音之高低由於每秒間振動數之多少人向發音體前進時入於耳內之音波較靜止時爲多而每次所多之數爲其前進距離上所排列之音波故其音漸高離發音體漸遠則反是。

129. 兩樂音相調和之要件若何?

兩樂音調和之要件爲二比爲1:2, 2:3, 3:4等之簡單整數之比其合成波之形狀亦有規則足令人生愉快之感。

130. 樂器可分爲管弦板三種試分別說明此三種樂器發音之要件

樂器
- 管…聲之高低與管之長短及開閉有關係
- 弦…聲之高低與弦之長短及張力質量等有關係
- 板…聲之高低與板之厚薄及面積等有關係。

131. 笛簫等所以能發音者何故?

笛簫等之口稍呈楔形吹時空氣與楔形部相遇而生種種振動此種種振動中之一與氣柱振動數同一時卽起共鳴而發音。

132. 笛簫之孔可變化音之高低者何故?

放開笛簫之孔時 其處卽生振動腹而氣柱 亦減爲由笛口至此處之長故振動增加卽發高音。

133. 琴琵琶等音之變換方法如何?

琴琵琶等皆由琴柱 以增減絃之長短 或變換絃之粗細且用指壓弦以變換其長或張力使其生各種之振動數。

134. 試將留聲機器之大要釋明之?

留聲機之簡單構造 係置蠟板于小箱上 藉箱內轉動機旋轉之復以堅硬之針觸於蠟板 當蠟板尙未堅硬時 人若向喇叭口發音 則其中薄膜振動傳之於針 而旋轉之蠟板卽依振動之形狀 刻有深淺不同之細紋 若將蠟板取下使之堅硬後復置箱上 則機開後蠟板旋轉 板上之針照細紋之深淺起相同之振動而傳之於薄膜遂 使空氣亦如此振動而本來之音仍舊發出 此留聲機之大要也 此外更有共鳴裝置等可使發出之聲格外明響。

VI. 光　學

135. 近世科學家同認光爲一種波浪試說明光浪發生之根源光浪之狀況及其傳達之媒介

1. 光浪發生之根源	由於發光體中微點之振動其振動次數每秒約有四百兆兆至八百兆兆之多
2. 光浪傳達之媒介	光浪之媒介物爲人目所不能見之能媒(卽以太)
3. 光浪之狀況	光浪中質點之振動方向確係橫振動。

136. 有燭光直照若干距離之紙屏若將此燭移遠三倍距離且傾斜紙屏使與其前之位置成$60°$問前後紙屏照度之比

解 設前之距離爲1則後之距離爲3 (若直射者) 若前後皆爲直射則前後之照度L, L'可表之以 $L:L'=3^2:1$

卽 $\dfrac{L'}{L}=\dfrac{1}{9}$

然紙屏已傾$60°$ 若以此時照度爲L'_1

則　$L'_1 = L_1 \cos 60^0 = L^1/_2$

$$\therefore \quad \frac{L'_1}{L} = \frac{L^1/_2}{L} = \frac{1}{2}\frac{L_1}{L} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{18} \qquad (答)。$$

137. 有槍彈以每秒2000呎之速度飛行 問光走一里時彈行若干又光行25000哩後彈行幾何?

解：光之速度爲186000哩　卽982,000,000呎

$$2000 : 982000000 = X : 5280$$

$$X = \frac{2000 \times 528 \times 12}{982000000} 时 = 0.13 时$$

又　$2000 : 982000000 = X : 132000000$

$$X = \frac{2000 \times 132000000}{982000000} = 2呎。$$

138 有十六枝光之燈置於紙屏前十呎之處 問八枝光之燈應距若干呎其光度始可相等

解：　$8 : 16 = X^2 : 100$

$$X^2 = \frac{8 \times 100}{16} = 50$$

$$\therefore \quad X = \sqrt{50}$$

$X = 7 \cdots\cdots\cdots 呎。$

139. 試舉光之反射定律?

光反射時其投射光線反射光線與由投射點所畫之境界面之垂線同在一平面上且投射角與反射角相等。

140. 有半吋高之物置於半徑3吋之凹鏡前四4吋試求此影之位置及大小

解：依凹面鏡公式 $\frac{1}{P}+\frac{1}{Q}=\frac{1}{r}$

因本題 $P=4 \quad r=3$

故 Q（相與鏡之距離）$=\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}$吋

又依相大之公式 $O:I=P:Q$

因題中 $P=4,\quad Q=2\frac{2}{5},\quad O=\frac{1}{2}$

而得 $\frac{1}{2}:I=4:\frac{12}{5}$

$\therefore$ 相之高 $I=\dfrac{\frac{12}{5}\times\frac{1}{2}}{4}=\frac{12}{40}=\frac{3}{10}$吋。

141. 以一物體置於半徑2尺 之凸面鏡前4尺 其像之位置及長

各若干?

解: 依凸面鏡公式 $\frac{1}{Q}-\frac{1}{P}=\frac{2}{r}$

因題中 $P=4$ $r=2$

$\therefore\ Q=\frac{4}{5}$尺

又設物體之長爲1像之長爲I

$1:I=4:\frac{4}{5}$

$\therefore\ I=\frac{1}{5}$ (答)。

142. 以4吋長物體置於凹鏡前2呎之處 則生長10吋之實像 求

鏡之焦點距離?

設所求之距離爲Q

則 $2:Q=4:10$

$\therefore\ Q=5$呎

由公式得 $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{1}{f}$

$\therefore$ $f=\frac{10}{7}=1\frac{3}{7}$呎 （答）。

143. 有焦點距離 20 cm 之凸面鏡置一物於鏡前 40 cm 之處其位置如何?

解：由公式 $\frac{1}{Q}-\frac{1}{P}=\frac{1}{f}$

$$\frac{1}{Q}-\frac{1}{40}=\frac{1}{20}$$

$\therefore$ $Q=\frac{40}{3}$cm （答）。

144. 有人立於一焦點距爲2英尺之凹鏡前欲求其人之面影直立且大一倍其人當立於何處?

因像與實物之比等於2與1之比而知

$P:Q=1:2$

$\therefore$ $Q=2P$

又因人之面影直立此必為一虛像故透鏡之公式宜為

$$\frac{1}{P}-\frac{1}{Q}=\frac{1}{f}$$

故 $\frac{1}{P}-\frac{1}{2P}=\frac{1}{2}$ $\therefore$ P＝1英尺。

145. 試舉光之屈折定律

1. 投射線屈折線法線三者同在一平面上而投射線與屈折線則在法線之兩側

2. 投射角正弦與屈折角正弦之比（於二物質間）不論投射角之大小常為一定。

146. 光由空氣入水時之屈折率為$\frac{4}{3}$由水入冰為$\frac{50}{51}$問由空氣入冰時之屈折率

解：空氣入冰之屈折率$=\frac{4}{3}\times\frac{50}{51}=1.31$。

147. 由空氣入某物質之屈折率爲1.45問全反射之界角

解：由公式 $\frac{\mathrm{Sin}\ i}{\mathrm{Sin}\ r}=n$

今 $i=90^0$ $n=1.45$

$\therefore$ $\mathrm{Sin}\ r=\frac{\mathrm{Sin}90^0}{n}=\frac{1}{1.45}=0.689$

$\therefore$ $\angle r=43^0\,36'$ （答）。

148. 有光線一條於空氣中每吋中有光波50000問此光條通入水中每吋有光波若干

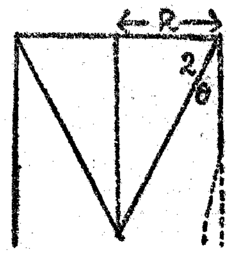
解：光在水中之速度爲空氣中¾即光行空氣中時速於水中故水中之光波密而空氣中疏由是而得

水中光波每吋之數$=50000\times\frac{4}{3}=66666$。

149. 有盛滿某液之器深3寸由其底面一點輻射之光線於液面爲全反射而其軌跡成一元形問元之半徑但該液體之屈折率爲$\frac{5}{4}$

解：由公式 $\frac{\mathrm{Sin}\ i}{\mathrm{Sin}\ r}=n$

今　$i=90^{\circ}$　$n=\frac{5}{4}$



$\therefore$　$\text{Sin}\, r=\frac{\text{Sin}90^{\circ}}{n}=\frac{4}{5}=.8$

$\therefore$　$r=53^{\circ}10'$　$Q=90^{\circ}-53^{\circ}10'=36^{\circ}50'$

$\frac{R}{3}=\tan 36^{\circ}50'$

$\therefore$　R＝4.寸。

150. 以屈折率$\frac{3}{2}$之玻璃 所作之凸透鏡 其兩面之曲率半徑相

等則其焦點距離等於曲率半徑試證明之

解：設其曲率半徑爲R.　依公式

$$(n-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)=\frac{1}{f}$$

今　$n=\frac{3}{2}$　　$R=R'$

$$\therefore\ \left(\frac{3}{2}-1\right)\times\frac{2}{R}=\frac{1}{f}$$

卽 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{R}=\dfrac{1}{f}$

$\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{f}$

$R=f$。

151. 焦點距離8糎之凹透鏡與焦點距離6糎之凸透鏡相組合時其組合透鏡之焦點距離為何?

解: 依 $\dfrac{1}{f_1}+\dfrac{1}{f_2}=\dfrac{1}{F}$ 但凹鏡之f爲負數

$\therefore\ \dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{F}$

$4F-3F=24Cm$

$F=24Cm$。

152. 明視距離10糎之近視眼宜用幾度之眼鏡?

解: 依公式

$-\dfrac{1}{P}+\dfrac{1}{Q}=\dfrac{1}{F}\qquad P=25,\qquad Q=10$

$$\therefore \quad \frac{1}{10}-\frac{1}{25}=\frac{1}{F}$$

$$\frac{5-2}{50}=\frac{1}{F}$$

$$\therefore \quad F=\frac{50}{3}=16.6\text{cm}$$

又因通常眼鏡之度數 爲透視鏡之焦點距離 所表米突之逆數

$$\therefore \quad \text{題中眼鏡之度數}=\frac{1}{.166}=6。$$

153. 何謂餘色又物質如何有色?

凡二種顏色合併後 使吾人認爲白色者 則此二類顏色互爲餘色

物體有色 乃物體受光源之光時 爲選擇之吸收惟將某色之光反射吾人遂認該物體爲某色。

154. 試舉虹之成因及正虹負虹之別?

日光經過三稜鏡時 因各色光之速度不同 遂分爲各種顏色是爲光之分散雨點浮游於空中 受日光之直射 亦可呈

分散之現象 吾人若背向太陽 使其視線與太陽投射於雨點之光線成 適宜之角度 則見在此適宜角度之圓弧上之諸雨點均能將所分散之各色光帶 成半圓形 現於空際是卽爲虹

正虹者日光在雨點內僅經一度反射而成者

負虹者日光在雨點內經二度反射而成者。

155. 冰或玻璃爲無色透明體 研爲粉末時 何以忽現白色而不透明?

冰或玻璃研爲粉末則成無數小粒 皆有細小平面 光線通過時漸此反射遂不透明而現白色。

156. 有擴大鏡一其焦點距離爲5cm而明視距離爲 25cm 問其倍率爲何?

解: 依公式 $M=1+\frac{P}{f}$

而得 $M=1+\frac{25}{5}$

$=1+5$

$=6$ （答）。

157. 試舉複式顯微鏡之構造?

復式顯微鏡之最簡單者 係由二個凸透鏡而成 其放大之力較單顯微鏡爲尤大 故雖極微之物 爲人目所不能見者可藉複式顯微鏡以觀之其大要 係取內部塗黑之黃銅管鑲短焦點距離之凸透鏡 於其一端作爲對物鏡 他端亦鑲一凸透鏡眼由此透鏡窺之因名曰接眼鏡此外則有

I 支管之台 顯微鏡全體架於其上又於支臺之柱頭設一測微螺旋使得絲微上下.

II 物　臺 設於支管之下物臺之中央穿孔欲檢視之物件可置於此處.

III 迴光鏡 物臺之下設有凹面鏡迴轉此鏡可使光線返射透光於物體。

VII. 磁　電　學

158. 磁石吸引鐵片試說明其理

因磁感應作用鐵片變爲磁石 其接近之端 成異名極他端成同名極按庫倫定律二極間之引力 或斥力 與其間距離自乘爲反比例 今異名極間之引力 較同名極間之斥力爲強故相吸引。

159. 試舉磁石之種類?

磁石
- 天然磁石……磁鐵鑛Fe 3^0 4
- 人造磁石……磁鐵造法 以鋼鐵爲原料 製成所需之形 以磁石摩擦之 或使電流環繞鋼鐵之周圍。

160. 電子說之概說若何?

電子說謂在中和狀態之物體 其各個原子 係由若干陽電荷與等數之電子所造成陽電荷 位於原子中心 不能移動而電子之質量 約爲輕氣原子之 $\frac{1}{1850}$ 富於移動性能在導體中自由運動 或由一物體移諸他物體 如以陰荷電體近之則電子因同性相斥而驅之 遠端如以陽荷電體近之 則陰電子因異性相吸 而被引至近端 當一原子失去一陰電子則呈陽性多得一陰電子則呈陰性。

161. 試述庫倫定律並以數學式表之?

庫倫定律……兩荷電體 相互之引力或體力 與兩體所荷電量之積爲正比與兩體之距離之平方爲反比

如以公式表之　則

$$F=\left(K\frac{q\,q}{r^2}\right)=\frac{qq^1}{Kr^2}$$ 但爲通感常數。

.162. 正負性電量是否發生於同時其量是否相等試解說之

將兩不同之物體相摩擦後 均持近金箔驗電器 此時器內金箔 並不張開如使二者之一分近此器 則金箔立開由此可知兩物因摩擦所生之電量相等 而性相反 合之則兩相中和 金箔不蒙其影響分之則各表其特性 可以感應金箔故正負電量之發生必爲同時且其量相等。

163. 試略解尖端放電現象並說明避雷針之原理

尖端之所以易於放電者 實因尖端電量之密度最濃 足使附近空氣分子電 化成爲正負兩種離子 一爲所斥一爲所吸而與尖端之異性電中和 故尖端電量 極易消失至避雷針實尖端放電之應用避雷針 常置屋頂 以導綫連於溫地當含電之雲近屋時 感應尖端 使生極強之異性電而此異性電復使電化附近空氣分子 使之遊離 後吸引異性之離子驅逐同性之離子 使與雲中之電相中和 故房屋附近不致有劇烈雷震。

164. 試舉電位差之意義及其測量法

電位差者 所以比較兩電荷電位之高低 猶水之在容器而水面之有高低也水 面高者 必有向低流之傾向電位亦然設將兩荷電體連以導綫則電位高者亦必向低者流動(吾人謂一導體之電位 較高於他體者 即前導體失去正電荷時)

兩導體間之電位差 恆以將一單位電荷 由一導體移於他導體所需工作之愛格數測之 依此測法 所得者爲靜電單位約爲實用單位之300弗打最簡便法則以荷電體接於金箔驗電器觀金箔之張度(或移近兩荷電體觀其所生火花之長短)以定兩體之電位差。

165. 試述來頓瓶及電容器之構造及原理

來頓瓶之構造 爲一玻璃瓶內外各貼不相連屬之錫箔 內部有導綫通出外部則連於地電容器之構造爲兩(不相接觸)金屬片間隔以絕緣體而已兩者之構造實相彷彿而容電之量 則較諸單獨絕緣金屬片 大爲激增因來頓瓶及電容器至少 各具兩金屬片 此兩片因感應生電及異性相吸之理不徒容電之量可以增加電量亦不易消失焉。

166. 電容器並聯及串聯時之電容量各為若何且以算式表之

電容器並聯時 實無異增加其金屬片之面積 故總電容量為各個電容量之和設以各電容器之容量為 $C_1C_2 \cdots\cdots Cn$ 其總電容量為C 則

$$C=C_1+C_2+\cdots\cdots\cdots\cdots+Cn$$

電容器串聯時之總電容量之倒數 為各個電容量倒數之和其算式為

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{Cn}$$。

167. 電容器所容之電量與所加電壓及本身電容量有何關係?並述明電容器之容量之計算式法

電容器充電愈多則其間電位差愈大 如以公式表之 則為

$Q=Uc$

但Q為電量 U為其兩片間之電位差 C為電容器之電容量

電容器之電容量視其面積S之大小而定且與其間通感體

之厚d爲反比如以算式表之　則爲

$$C=\frac{SK}{4\pi d}$$

但K爲一常數視兩金屬片間通感體之性質而定名曰通感常數。

168. 一來頓瓶之直徑爲14糎厚爲3粍高爲20糎問此瓶之電容量

解：依公式　$C=\frac{SK}{4\pi d}$

$$\therefore\quad C=\frac{14\times\pi\times20+\pi\times\left(\frac{14}{2}\right)^2\times6}{4\pi\times.3}$$

$=47.8$　　C.G.S.靜電單位(電容量)。

169. 將一電容量 300 單位之來頓瓶充電至電壓 20 單位復以7200單位之電量將他瓶充電至30單位後並聯之求接後每瓶之結果電壓與電量

解：依公式　$Q=UC$

$\therefore$　一瓶之$Q=20\times300=6000$單位電量

他瓶之電容量　$C=\dfrac{Q}{U}=\dfrac{7200}{30}=240$單位電容量

兩瓶相接後之總電量卽爲兩者之和

∴　總電量$=6000+7200=13200$單位

兩瓶並聯後之總電容量亦爲兩者之和

∴　總電容量$=300+240=540$單位

∴　兩瓶連接後之電壓$=\dfrac{Q}{C}=\dfrac{13200}{540}=24.45$單位

∴　一瓶連接後電量爲$24.45\times300=7335$單位

他瓶連接後電量爲$24.45\times240=5868$單位。

170. 一來頓瓶有電容量600 單位與其他一電容量400 單位之瓶相串聯問總電容量若干？

解：依公式　$\dfrac{1}{C}=\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}$

$$\therefore\quad C=\frac{C_1\ C_2}{C_1+C_2}=\frac{600\times400}{600+400}=240\text{單位。}$$

171. 一電容量800單位之來頓瓶與他一電容量200單位者串聯之後充至電壓20單位求每瓶之電量及兩者之電位差?

解：依公式 $\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$

$$C=\frac{C_1\ C^2}{C_1+C^2}$$

$$\therefore\quad C=\frac{800\times200}{800+200}=160\text{單位}$$

$\therefore$ 總電量$Q=UC=20\times160=3200$單位

因電容器串聯後之充電每瓶所得電量相同

$\therefore$ 3200單位卽爲每瓶之電量

$$\text{一瓶之電壓}=\frac{Q}{C_1}=\frac{3200}{800}=4\text{單位}$$

$$\text{他瓶之電壓}=\frac{Q}{C^2}=\frac{3200}{200}=16\text{單位}$$

$\therefore$ 兩瓶之電位差$=16-4=12$單位。

172. 電動力之解說電池之電動力如何測量其與池內金屬片之大小及形狀有無關係又與何者有關係?

電動力者 電池之正負極間所生極大之電位差 或電壓力

電池之電動力 爲電池所能發生之最大電位差 故可於兩極未接 毫無電流 而化學作用業已停止時測定之其電動力之大小 與金屬片之大小 及形狀絕無關係所關係者電池之質料耳。

173. 電流之方向與其所生磁場之方向其關係究如何表明之?

電流所生磁場之方向 可以右手規則表明之 即如以右手握導綫大指向電流之方向 則繞導綫之四指 均指示所生之磁力綫圈。

174. 試略述電流表及電壓表之原理及構造?

電流表及電壓表 均藉電流發生之磁力 以測定電流之大小及電壓之高低也 電流表接於電路中間 以測電流故電阻宜小 使其影響不及于路綫之電流 電壓表則接於電源之兩端以測電壓故電阻宜大 使經過之電流極微 不至影響於電源之電壓 至電流表之構造 係以導綫纏爲綫圈使磁針自由運動其中 或將磁極固定 令綫圈自由運動於磁極中此外又以一指針 裝於自由運動之磁針或綫圈 當電

流通過時 察其偏角之大小 以定電流之多寡電壓表之構造路與電流表同 惟電壓表 用繞數極多之綫圈及磁極以增加其電阻。

175. 試舉歐姆定律之界說並以公式及實用單位表之?

歐姆定律…在一定電路內 所加之電壓力 與所生電流之比爲一常數卽該路之電阻力

卽 $\frac{E}{I}=R=1$常數

但E爲電動力 I爲電流 R 爲該路之電阻力如以實用單位表之 則爲

$$電流之安培數=\frac{電動力之佛打數}{電阻之歐姆數}。$$

176. 試述阻力與溫度之關係

大凡物質因溫度之增加 其電阻隨亦增加 惟液體適與之相反溫度增加時 電阻減少 其他炭質等亦因溫度之增加而減少電阻如熱燈絲卽其一例。

177. 導體串聯與並聯後之總電阻若何並以算式表之?

導體串聯後之總電阻卽爲各個導體電阻之和

卽 $R=R_1+R_2+\cdots\cdots+Rn$

導體並聯後之總電阻之倒數爲各個導體之倒數之和

卽 $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{Rn}$。

178. 試略解釋簡單電池作用之理論?

簡單電池之製造 可用兩種異質金屬 同浸於酸性液體或鹽性液體內卽成 如以鋅與銅 同浸於稀酸溶液內因硫酸與水混合時 其中某分子游離成荷正電之輕氣H_2伊洪及荷負電之So_4伊洪當鋅浸入酸液卽受消蝕而鋅分子所帶正電與液內荷負電之So_4伊洪化合而成硫酸鋅遺負電於鋅板 同時將荷正電之輕氣伊洪 向銅片授正電於銅片後卽成無電性之輕氣泡 倘梓銅二片外接以導綫 電流卽由銅片傳至鋅片 而電池亦繼續作用 以供給之直至鋅片及酸耗盡爲止

179. 設有數電池聯成一組 外接導線 成一電路如外面綫路之電阻甚大 此數電池須用何種接法爲佳 如外面綫路之電阻甚小又以何種接法爲佳 試述明其理由 但須顧及電池之內電阻?

因串聯接法之電動力 爲數個電池之和 若以一電池之電動爲e則n個電池聯絡後之合電動力爲ne

$$\therefore \quad I=\frac{ne}{Re+nRi} \qquad (1)$$

又並聯接法之電動力爲一個電池之電動力

$$\therefore \quad I^1=\frac{e}{Re+\frac{Ri}{n}} \qquad (2)$$

但Re爲外路電阻Ri爲電池內電阻n爲電池數

若外綫之電阻較電池之電阻甚大則(1),(2)兩式中之Ri可以略去而(1),(2)變爲

$$I=\frac{ne}{Re} \qquad I'=\frac{e}{R}$$

即I雖比例于電池之個數而I' 僅爲一電池之電流之強

故Re甚大於Ri時以串接法爲佳

又若外線之電阻較電池之電阻甚小則(1),(2)兩式中之Re可以從略而(1),(2)變爲

$$I=\frac{e}{Ri} \qquad I'=\frac{ne}{Ri}$$

卽幷結時之電流大于串結時之n倍故此時以幷結法爲佳。

180. 設某式電池之內阻4歐姆 電動力爲2佛打 如用40個此種電池串聯使之通過500歐姆電阻之電綫問所生電流若干如以40個此種電池並聯之 問電流爲若干 如用此式電池一個問通過此電綫之電流爲若干?

解: 設爲串聯時則依公式

$$I=\frac{N\ E}{Re+N\ Ri}=\frac{40\times2}{500+40\times4}=\frac{80}{660}=.12\text{安倍}$$

設爲並聯時則依公式

$$I=\frac{E}{Re+\frac{Ri}{N}}=\frac{2}{500+\frac{4}{40}}=.004\text{安倍}$$

設一個電池則依公式

$$I=\frac{E}{Re+Ri}=\frac{2}{500+4}=\frac{2}{504}=.0039\text{安倍。}$$

181. 試述明蓄電池之製法及其作用之原理?

取鉛片兩塊絕緣而隔之浸於稀硫酸液中 用發電機或電池送入電流輕氣泡 即發生於陰極 而陽極漸成棕黑色蓋因電流送入時 水被電解 而成輕氣與養氣輕氣聚於陰極養氣與陽極之鉛化合成二養化鉛 (Pbo^2) 而蓄電池即成工業上製法 常以二養化鉛 及鬆鉛壓入鉛片面上之間隙至其作用之原理可以公式表之

下　放電

正極　$Pbo_2 + H_2 + H_2So_4 \longrightarrow PbSo_4 + 2H_2o.$

負極　$Pb + So_4 \longrightarrow PbSo_4$

兩片均成硫酸鉛.

上　充電

正極　$PbSo_4 + So_4 + 2H_2o \longrightarrow Pbo_2 + 2H_2So_4$

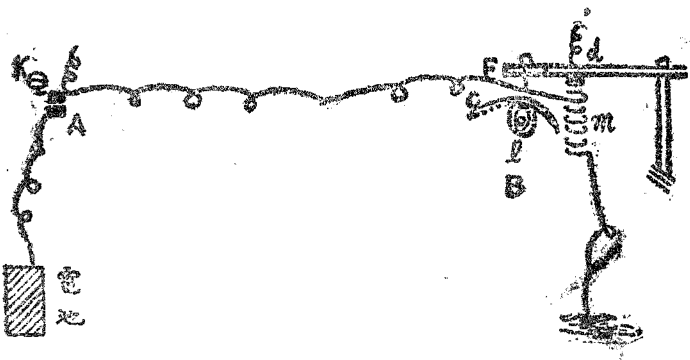
負極　$PbSo_4 + H_2 \longrightarrow Pb + H_2So_4$

182. 試述明電流通過螺線圈時該圈所生磁力場之方向?

電流通過螺綫圈時 該圈所生磁力線之方向 可以右手握圈 令手指順電流之方向 則拇指必指磁力綫之方向或逼視該圈如電流之方向為順鐘向 則磁力綫之方向 必與視綫方向一致即近端為南極遠端為北極反之則方向亦反。

183. 試略說電報之原理及其用法?

電報應用電流通過綫圈而生磁力卽電磁石之作用而成其主要部分爲發信機受信機及連結二機之導線至其用法之大概可用下圖說明之



設由A處發電時按鑰K以閉電路則電流將由電報綫流至B處經磁石上之圈綫m而入地復還A處此時電磁石遂發生磁性吸引鐵片b使筆尖F下降如將紙條C置於旋轉體E上則筆尖F在旋轉體之紙片上依鑰K按時之久暫所登之線亦有長短遂可藉傳達消息。

化學問答

第一篇

1. 何謂化學變化試舉例以明之

一種或多種物質變化之後成一種或多種完全不同之物質此種變化謂之化學變化依其種類分爲下列四種

(1) 化　合……凡二物質或多物質合成一新物質此種變化謂之化合如鉄與硫化合則成硫化鉄.

(2) 分　解……一種物質分成二種性質互異之物質如一氧化銾熱之分成液體金屬銾及無色氣體氧.

(3) 複分解……二種以上物質之各成分化合俱起分解交換而成新物質如氫氧化鈉加鹽酸則各成分交換而成氯化氫和水.

(4) 置　換……一物質與另一物質化合該物質之某成分與另一物化成新物質而分出他成分如鉄與硫酸銅化合則得硫酸鉄與銅。

2. 試說明元素化合物及混合物之區別

元　素……物質不能用已知方法所分解者謂之元素.

化合物……二種以上之物質 合成一新物質 其性質完.
全與原物質不同者謂之化合物.

混合物……二種以上之物質 合成一新物質 其成分各
具有原有之性質謂之混合物。

3. 何謂養化還原試舉例以說明之

(1) 氧化……凡與養化合者謂之養化

$$2\,Mg + O_2 \longrightarrow 2\,Mg\,O.$$

(2) 使化合物中金屬原子價增高亦曰氧化

$$Sn\,Cl + Cl_2 \longrightarrow Sn\,Cl_4.$$

還原　1. 減少化合物中之氧謂之還原例如

$$Cuo + H_2 \longrightarrow Cu + H_2o$$

$$S + H_2 \longrightarrow H_2\,S.$$

2. 使化合物中之金屬原子價減低亦曰還原例如

$$2\,Fe\,cl_3 + H_2 \longrightarrow 2\,Fe\,cl_2 + 2\,H\,cl.$$

4. 試舉普通之化氧劑與還原劑

1. 氧化　凡能放出氧以氧化他物者曰氧化劑最普通者為濃硝酸,硝酸鉀,氯酸鉀.

2. 還原　二氧化錳,過氧化氫,過養化鈉,二氧化鉛,過錳酸鉀等.

凡能奪取化物質中之氧而化合者曰還原劑最普通者為氫,炭,一氧化炭等。

5. 何謂接觸作用

接觸作用　凡藉他物為媒介始起化學作用而他物毫無變化之作用謂之接觸作用如由氯酸鉀製造養氣而加二氧化錳然二氧化錳毫無變化僅作觸媒而已亦為明顯之一例。

6. 試述昇華風化及潮解之意義

1. 昇華　固體加熱時並不先鎔為液體而能直接變為氣體又氣體遇冷時亦然直接凝為固體而並不先成液體此種作用謂之昇華如氯化氫即具此種特異之性.

2. 風化　含水化合物之蒸氣張力大於空氣中之蒸氣壓力時則化合物之水分自然揮發而變爲白色粉末此種現象謂之風化如用炭酸鈉結晶作實驗時極爲明顯.

3. 潮解　化合物之蒸氣張力小於空氣中之蒸氣壓力時則吸收空氣中之水分此種現象謂之潮解如氯化鈣極易吸收水分。

7. 何謂加水分解試舉例說明

加水分解　凡鹽類遇水生成一種鹽基類及一種酸類之作用曰加水分解如

$Cu\,cl_2+2\,H_2o \longrightarrow Cu(OH)_2+2\,H\,cl$。

8. 試辨別下列諸名詞:— 同質體,同分異性體,電解質,電解,離子,溶劑,溶質,溶液,飽和溶液,過飽和溶液.

1. 同　質　體　單體所含原質同而性質異者謂之同質體如氧氣與臭氧氣所含原質同而性質不同.

2. 同分異性體　有同一分子式而構造式不同之化合物.

3. 電解質　氯化鈉硫酸等 若溶解於水中所成之溶液爲良導體此種物質稱爲電解質.

4. 電解　電流通過電解質 時常起化學變化此種變化謂之電解.

5. 離子　在水溶液中帶有電性之物質曰離子.

6. 溶劑　溶解物體之媒質曰溶劑.

7. 溶質　溶解於溶劑中物質曰溶質.

8. 溶液　固體液體或氣體 和某液體混合之液體謂之溶液 如取少許食鹽投入水中則鹽溶解爲全部均勻之液體 而得食鹽之水溶液.

9. 飽和溶液　在一定溫度溶液之最大濃度 有一定之界限 若溶質達於此種界限時之溶液曰飽和溶液.

10. 過飽和溶液　於某溫度已經飽和之溶液 若冷之則固體 雖在冷液較在熱液溶解爲少然有時並無固體 由該飽和溶液析出此種溶液稱爲過飽和溶液。

9. 試述金素元屬與非金屬元素之區別

金屬元素　比重高有展性和延性並有金屬光澤而不透明對於熱及電爲良導體其作化合物時多構成陽性部分電則爲陽離子除錸以外概爲固體如金銀銅錫等是.

非金屬元素　比重低展性和延性不顯無金屬光澤對於熱及電多爲不良導體其作化合物多構成陰性部分除氫以外電離則爲陰離子在尋常溫度時有爲固體者有爲氣體者如輕氣氯氣淡氣硫磺磷等是。

10. 試說明金屬化學性和非金屬化學性不同之要點

A. 投鈉或鋅於稀鹽酸中即時分解而生氫氣投鋅或鎂於稀硫酸時亦然故通常金屬能爲稀薄的酸所溶解發生氫氣而成鹽類非金屬不受稀鹽酸之侵犯而能和氫結合成安定之化合物此乃金屬化學性與非金屬化學性不同之要點一。

B. 金屬氧化物和水作用便呈鹼性如投氧化鈉氧化鉀於水便生氫氧化鈉氫氧化鉀非金屬氧化物和水作用便呈酸性如投SO_2於水便成亞硫酸此乃金屬化學性和非金屬化學性不同之第二要點。

11. 定比例定律如何試說明之

定比例定律:— 凡化合物不論其由生成或由分解而成其成分元素之重量常成一定比例無所變更謂之定比例定律如水之組成常以1克輕氣和8克氧氣之比例化合而生9克之水又如氯化氫之組成常以一克輕氣和35.5克。

12. 倍比定律如何試說明之

倍比定例:— 甲乙二元素之化合物如有數種則數個甲量對於同一乙量之比例互爲簡單整數曰倍比定律例如氫與氧化合可成水又可成二氧化二氫水之組成爲氫1與氧7.94之比二氧化二氫之組成爲氫1與氧15.88之比此二種化合物中氫之分量相同而氧之分量則爲7.94與15.88之比簡單之卽1:2也。

試述給呂薩克(Gay-Lussac)氏之氣體反應定律

氣體反應時體積間互有簡單之比例謂之氣體反應定律

例如 $2H_2+O_2 \longrightarrow 2H_2O$(體積間比例爲2:1:2)

$H_2+cl_2 \longrightarrow 2Hcl$ (體積間比例爲1:1:2)。

14. 何謂亞佛加德羅氏學說

等體積諸氣體在同溫度同壓力之下含有同數之分之。

15. 試述波義耳定律 Law of Boyle

設溫度不變則氣體之體積與壓力成反比例謂之波義耳氏定律 設P爲舊壓力P′爲新壓力V爲舊體積 V′爲新體積則依定律$P:P'=V':V$ 故 $PV=P'V'$。

16. 試述查理氏定律 Law of Charles

設壓力不變氣體之溫度每升高或減低一度時則該氣體之體積亦增加或減少其在零度時所佔體積之$\frac{1}{273}$

設 V_0爲某氣體在$0^\circ C$時之體積.

則　$V_0 + \frac{t}{273} V_0$ 爲某氣體在t^0C時之體積.

故　$V = V_0\left(1 + \frac{t}{273}\right)$……求某氣體在$t^0C$時之體積之公式.

故　$V_0 = \frac{273V}{273 + t}$……求某氣體在$O^0C$時之體積之公式。

17. 何謂分子及原子幷述其內容

物質由大小 形狀性質重量全相一致之細粒組合而成 此細粒名曰分子 分子由大小 形狀性質重量全相一致之微粒子組合而成 此微粒子之性質與分子相異 名曰原子換言之 分子爲形成物質之理想單位 原子爲構成分子之理想的單位.

分子與原子之內容

(1)　同物質之分子皆有同一之性質異物質之分子其性質全異.

(2)　同一元素之原子其大小形狀性質重量皆相等異元素之原子則否.

(3)　單體之分子由同一種之原子一個或數個組合而成化合物之分子由異種原子二個以上組合成。

18. 何謂分子量原子量克分子克原子及當量

分子量……某物質一分子與氧一分子之比較重量曰分子量($O_2=32$做標準)或爲一分子中所含各原子之原子量之和.

原子量……某元素一原子與氧一原子之比較重量曰原子量.

克分子……用克單位表分子重量曰克分子如32克之氧爲氧之一個克分子(凡一克分子之氣體在標準溫度($0^{\circ}C$)標準壓力(76cmm)之下占有22.4立升之體積.

克原子……用克單位表原子重量曰克原子如16克之氧爲氧之一個克原子.

當　量……某元素與1克氫相化合所需之重量曰當量又

$$\frac{\text{原子量}}{\text{原子價}}=\text{當量}。$$

19. 何謂原子價并舉例以說明之

某元素一原子能與若干氫原子相化合之數曰該元素之原子價(氫爲一價元素作爲標準).

凡元素之一元子 與氫一原子相化合者 此種元素謂之一價元素 如氟氯溴碘鉀鈉等是也 凡元素之一元子能與氫之二原子或其他一價元素（如氟氯等）之二元子相化者 此種元素 均謂之二價元素如鈣鋅鎂氧等是也 此外尚有三價四價五價六價等元素。

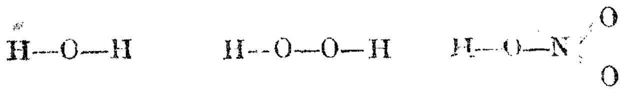
20. 何謂分子式并舉例以說明之

用以表示物質 每分子中所含何種原子 及原子之數之式曰分子式如氫H_2，氧O_2，水H_2O，硫酸H_2SO_4等是。

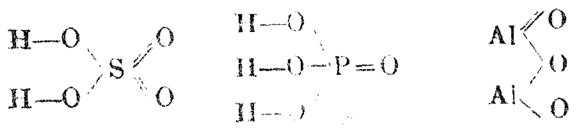
21. 何謂構造式并舉例以說明之

用以表示一分子中所含各原子 如何排列之式曰構造式（構造式中之橫線曰價標）.

例如水H_2O 二氧化二氫H_2O_2 硝酸HNO_3



硫酸H_2SO_4 燐酸H_3PO_4 氧化鋁Al_2O_3



22. 試述酸之定義及其特性

A. 定義 凡物質溶化於水能電離生(H)陽離子者則此物質名曰酸.

B. 特性 (1) 各種酸類皆有酸味.

(2) 凡屬酸類皆能使藍色石蕊質液變紅.

(3) 各種酸內均各含有氫元素若與某種金屬元素氧化物氫氧化物或炭酸鹽等相遇時則氫之一部或全體卽與其金屬元素相置換。

23. 試述鹽基之定議及其特性

A. 定議 凡物質溶化於水能電離生 (OH) 陰離子者則此物質名曰鹽基.

B. 特性 (1) 鹽基類之溶液皆有膩滑性及澀味,

(2) 凡屬鹽基類之溶液皆能青變紅色石蕊質液,

(3) 各種鹽基物均各含有氫氧根若與酸類中和後能成二種新物體卽鹽類及水是也。

24. 何謂中和作用幷舉例說明之

A. 定義 酸中之(H 陽離子與鹽基中之(CH)陰離子相化合成水之變化曰中和作用.

B. 舉例 用離子表方程式同時可表其原子價.

(1) $Na;OH' + H;cl' \longrightarrow Na;Cl' + H_2O$.

(2) $K;OH' + H;NO^{3'} \longrightarrow K;NO_3' + H_2O$.

(3) $Ca;\cdot(OH)_2'' + H_2\cdot\cdot SO_4'' \longrightarrow Ca;\cdot 3O_4'' + H_2O$。

25. 何謂鹽類幷述其特性

A. 定義 由酸之陰離子(酸根)鹽基之陽離子(金屬)相化合而成之物質名曰鹽.

B. 特性 (1) 無一種公共之特別嘗味.

(2) 呈中性反應(對於紅藍色Litmus 溶液或試驗紙均不變色).

(3) 溶化於水能電離生金屬陽離子及酸根陰離子.

C. 舉例 氯化鈉 Na cl 硫酸鈉 Na_2SO_4 硝酸鉀KNO_3。

26. 試述明正鹽酸性鹽鹽基性鹽有何異同

A. 正鹽 酸與鹽基完全中和所成之鹽曰正鹽

例如 硫酸鈉Na_2SO_4炭酸鉀K_2CO_3等.

B. 酸性鹽 酸中之僅H有一部分為鹽基之金屬所置換者則所成之鹽曰酸性鹽.

例如 $NaOH + H_2SO_4 \longrightarrow NaHSO_4 + H_2O$

硫酸氫鈉

$H_3PO_4 + 2NaOH \longrightarrow Na_2HPO_4 + 2H_2O$

燐酸氫鈉.

C. 鹽基性鹽 鹽基中之(OH)根僅有一部分能與酸中之(H)化合成水者則所成之鹽仍有(OH)根而帶鹽基之性質曰鹽基性鹽.

例如 $Bi(OH)_3 + HNO_3 \longrightarrow Bi(OH)_2NO_3 + H_2O$。

27. 何謂濃度及稀釋度

溶液單位體積內所溶溶質之量 謂之該溶液之濃度 通常以溶液1立升中含有一克分子量之溶質者作為濃度之單位此溶液之濃度稱之為1. 例如溶食鹽(NaCl＝58.46克) 58.46 克於1立升之液中 則此食鹽溶液之濃度為1; 以同

量食鹽溶於$\frac{1}{2}$立升之液中則此溶液之濃度爲2；又若以同量食鹽溶於2立升之液中則其濃度爲$\frac{1}{2}$矣。

含有溶質1克分子量之溶液而以立升表其體積之數者此數謂之該溶液之稀釋度 換言之稀釋度者 濃度之逆數也 $\frac{1}{\text{濃度}}$＝稀釋度 如2立升之溶液中 含有溶質1克分子者之稀釋度爲2 又同體積之溶液中含有$\frac{1}{3}$克分子者 之稀釋度爲6。

28. 何謂溶解度

在某溫度 飽和溶液之溶劑 百分中所溶化溶質之克數稱爲該溶質在此溫度時之溶解度 溶解度之大小 與溶劑之種類溫度之高低有密切關係 例如硝酸鉀KNO_3在10^0C時之溶解度爲20 在70^0C時之溶解度爲140。

29. 何謂可逆化應試舉例以說明之

兩物質高溫度 則化成一物低溫度 則仍析爲兩物謂之可逆反應

例如 $H_2O+CO_2 \rightleftarrows H_2CO_3$

$CaO+CO_2 \rightleftarrows CaCO_3$。

30. 何謂化變速率

物質在單位時間中所變化之量曰化變速率

$$化變速率 = \frac{受化變之一物質之濃度}{時間} 卽 V = \frac{X}{t}$$

影響完全化變速率之主因

(1) 親和力　親和力愈大則化變速率亦愈大.

(2) 溫 度　溫度增高則化變速率亦增大.

(3) 觸 媒　觸媒能使化變速率增加或減緩.

(4) 濃 度　分子之濃度愈大則化變速率亦愈大。

31. 何謂化學平衡及其三大特點

在可逆反應中 正反應與逆反應之速率相等時 謂之化學平衡化學平衡之三大特點

a. 常有相反之二趨勢互相平衡.

b. 當平衡時二者仍各自前進而不稍衰.

c. 當平衡時外界狀況如有變遷(如溫度壓力或濃度之變遷)則平衡點亦有變遷。

32. 試述化學平衡變遷之原因

1. 溫度之關係　當平衡時溫度增高則平衡點向吸熱作用之方向而變遷換言之卽平衡時一方吸熱一方放熱兩方熱量必相等若自外加熱則可促進放熱之化變而平衡點向吸熱作用之方向變遷　例如$2\ SO_2+O_2 \rightleftarrows 2\ SO_3+2\times 22600$ Cals此變化自左至右爲放熱反應自右至左爲吸熱反應在平衡時兩方熱量相等若再增加溫度則利於$2\ SO_3$之分解而不利於$2\ SO_2$之產生平衡點向吸熱作用之方向變遷卽欲解除外施力之效力故工業上欲多得SO_3當降底溫度.

2. 壓力之關係　壓力增加則平衡點向體積縮小之化變而變遷壓力減少則平衡點向體積張大之化變而變遷　例如$2\ SO_2+O_2 \rightleftarrows 2\ SO_3$此變化中左方之體積爲$2+1=3$右方體積爲2故自左至右體積上減縮之

比例爲3:2 若增加壓力則利於2 SO_3之產生而不利於2 SO_3之分解 平衡點向體積縮小之方向(右方)變遷故工業上欲多得SO_3當增加壓力.

3. 濃度之關係　增加甲種分子濃度則平衡點向消耗甲種分子之方向而變遷　例如

$2\,SO_2+O_2 \longrightarrow 2\,SO_3$ 此變化在平衡時左右兩方之分子濃度相等設將氧之分子增加則利於 2 SO_2 之產生而不利於 2 SO_3 之分解 平衡點向消耗氧分子之方向（右方）變遷故工業上欲多得SO_3可增加氧量。

33. 何謂加水分解試舉例以說明之

凡鹽類遇水生成一種鹽基類 及一種酸類之作用 曰加水分解　如:

$BiCl_3+2H_2O \rightarrow Bi(OH)_2Cl+2HCl$

$Bi(NO_3)_3+2H_2O \longrightarrow Bi(OH)_2NO_3+2HNO_3$。

34. 試釋右例諸術語: 標準溫度 臨界溫度 絕對溫度加路里
標準壓力 臨界壓力比重 比熱發生機
媒染劑乾燥劑.

標準溫度 以攝氏溫度計之零度曰標準溫度.

臨界溫度 適足使氣體受壓成液體時之一定溫度曰臨界溫度.

絕對溫度 自絕對零度起計算之溫度曰絕對溫度 卽 $(273+t)$.

加 路 里 一克重之水由 $0^{\circ}C$ 熱至 $1^{\circ}C$ 所需之熱量謂之一加路里係熱量單位.

標準壓力 760 mm謂之標準壓力.

臨界壓力 在臨界溫度之壓力曰臨界壓力.

比 重 a. 固體及液體之比重係以攝氏寒暑表4度時之蒸餾水爲標準卽一物之重量與同體水之重量之比是謂此物之比重.

b. 氣體之比重係以攝氏寒暑表零度時之空氣爲標準卽一氣體之重量與同體積空氣之重量之比是謂此氣體之比重.

發生機　凡氣體物質初發生之時謂之發生機其初發生時之化合力較之已發生一時後爲詳如氯之能漂白者因其與水作用能放出發生機氧故也.

$$Cl_2+H_2O \longrightarrow 2HCl+O$$

比　熱　凡一物質由零度熱至一度所用之熱與同量之蒸餾水由零度熱至一度所用之熱量之比謂之此物質之比熱.

媒染劑　卽用布帛與媒料染合之劑也.

乾燥劑　凡能吸收水氣而使空氣乾燥者曰乾燥劑常用乾燥劑如氯化鈣生石灰濃硫酸等。

35. 何謂強酸及弱酸

凡電離度大者之酸曰強酸電離度小者之酸曰弱酸。

36. 試述氫氣之製法及性質用途

製法（1）投鈉於水 $2Na+2H_2O \longrightarrow 2NaOH+H_2$.

（2）加稀鹽酸或稀硫酸於鋅

$$Zn+2HCl \longrightarrow ZnCl_2+H_2$$

$$Zn+H_2SO_4 \longrightarrow ZnSO_4+H_2.$$

(3) 加硫酸數滴於水中而電解之.

$$2H_2O \rightleftarrows 2H_2+O_2.$$

(4) 通水蒸氣經過赤熱之鐵屑.

$$3Fe+4H_2O \rightleftarrows Fe_3O_4+4H_2$$

性質 氫係無色無味無臭之氣體爲元素中之最輕者(1立升重0.09克)能自燃燒而不能助燃若氫氧或與空氣混合燃燒之則爆鳴通氧入已燃之氫中則生氫氧火焰溫度可達2000°C可截斷鋼板.

用途 製輕氣球製氫氧火焰漂白油類又因其極易與氧化合故可用作還原劑。

37. 試述氧氣之製法性質及用途

製法 (1) 氯酸鉀加熱(用二氧化錳作接觸劑)

$$2KClO_3 \rightarrow 2KCl+3O_2.$$

(2) 強熱氧化水銀

$$2HgO \longrightarrow 2Hg+O_2.$$

(3) 將水電解之

$$2H_2O \longrightarrow 2H_2+O_2.$$

〔性質及用途〕 氧爲無色無味無臭氣體較空氣重十分之一無可燃性而助燃性甚強元素中除氟氬氦等外皆易與氧化合成化合物其用途(1)爲人類及動物必需之氣體(2)有殺菌之能力醫療上多用之。

38. 試述臭氧之製法及性質

製法 (1) 通電於氧$3O_2 \rightleftarrows 2O_3$.

(2) 氧化溼燐

性質 臭氧有一種特臭一分臭氣在五十萬分之空氣中尙可臭出爲較氧更活潑之氧化劑其氧化力褪色力消毒力俱強。

39. 試述水之種類

(1) 軟　水 不含炭酸鈣$CaCO_3$硫酸鈣$CaSO_4$等鹽類之水曰軟水.

(2) 暫時硬水 含有酸性炭鈣而不含硫酸鈣硫酸鎂之水曰暫時硬水.

(3) 永久硬水 含有硫酸鈣之水曰永久硬水。

40. 試述氮之製法性質及其用途

製法（1）將亞硝酸錏加熱

$NH_4NO_2 \longrightarrow N_2+2H_2O$.

（2）將重鉻酸鉀與氯化錏混合熱之

$K_2Cr_2O_7+2NH_4Cl \longrightarrow Cr_2O_3+2KCl+4H_2O+N_2$.

〔性質及用途〕氮爲無色無味無臭氣體略能溶於水無可燃性亦無助燃性化學性質極鈍空氣中含此種氣體甚多其用途爲植物重要之肥料充氮入電燈炮中可省電并可增加光亮。

41. 試證明空氣爲混合物而非化合物

（1）空氣中氮氧氬等各保其固有性質絲毫未變.

（2）空氣中氧較氮易溶化於水若係化合當一同溶化.

（3）液態空氣中氮較氧先行氣化若係化合當一同氣化.

（4）空氣中氮氧氬等分量之比常有改變。

42. 試述氯氣之製法性質及用途

製法（1）以食鹽水溶液電解之

$2NaCl+2H_2O \longrightarrow 2NaOH+H_2+Cl_2$.

(2) 二氧化錳加鹽酸熱之

$4HCl + MnO_2 \longrightarrow MnCl_2 + 2H_2O + Cl_2$.

(3) 食鹽與二氧化錳及硫酸三者同熱

$2NaCl + 2H_2SO_4 + MnO_2 \longrightarrow Na_2SO_4 + MnSO_4 + 2H_2O + Cl_2$.

〔性質及用途〕氯爲黃綠色有刺劇性氣體劇毒歐戰時利用之製氯氣炮以殺敵人比空氣重二倍半能溶於水與水作用則放出發生機氧故能作漂白之用又能直接與鈉銅等金屬合成氯化物其用途可製漂白粉及殺蟲。

43. 試述漂白粉($CaOCl_2$)之製法及其作用

製法 通氯於熟石灰中卽得

$Ca(OH)_2 + Cl_2 \longrightarrow CaOCl_2 + H_2O$.

作用 將漂白粉浸水中加鹽酸或硫酸或硝酸數滴則放出發生機氧而漂白

$CaOCl_2 + 2HCl \longrightarrow CaCl_2 + Cl2 + H_2O$

$CaOCl_2 + H_2SO_4 \longrightarrow CaSO_4 + Cl_2 + H_2O$。

44. 列舉造鹽元素族的性質而比較之

性形 元素	分子式	原子量	比重	色	狀態	化學作用	氫化物	金屬化合物
氟	F_2	19	1.14	淡黃綠	氣	最強	HF	NaF, KF
氯	Cl_2	35.5	1.33	黃綠	氣	次之	Hcl	NaCl, KCl
溴	Br_2	79.9	3.18	赤褐	液	又次之	HBr	NaBr, KBr
碘	I_2	126.9	4.97	紫黑	固	最弱	HI	NaI, KI

45. 試述氯化氫之製法性質及用途

製法 食鹽加硫酸熱之

$$2\,NaCl+H_2SO_4 \longrightarrow Na_2SO_4+HCl.$$

〔性質及用途〕 氯化氫爲無色劇臭氣體溶化於水則成鹽酸爲強酸之一與錏精相遇則生氯化錏之白烟其用途爲工業上重要藥品。

46. 何謂王水何時用之

三分鹽酸與一分硝酸配合則成王水此水能放出發生機之氯溶

解黃金其作用如下

$$3HCl+HNO_3 \longrightarrow 2\,H_2O+NO+3\,Cl$$

$$Au+3\,Cl \longrightarrow AuCl_3。$$

47. 試比較一氧化碳(Co)二氧化碳(Co_2)之性質及用途·

質性　一氧化碳 爲無色氣體有毒比空氣輕不溶化於水燒之成青色火燄還原力甚強·

二氧化碳 爲無色氣體無毒比空氣重易溶化於水成炭酸并易被氫氧化鉀或氫氧化鈉吸收·

用途　一氧化碳因其還原力甚強故可用作還原劑 二氧化碳因其無可燃性亦無助燃性 故能滅火 又製造汽水啤酒用之。

48. 試述二氧化二氫 H_2O_2)硫化二氫(H_2S)二硫化炭(CS^2)之用途·

二氧化二氫 漂白象牙羽毛及洗面部粉搬用之·

硫 化 二 氫 以其易溶於易吸收氧故爲極佳還原劑且通入金屬鹽類中能生各種顏色之金屬硫化物沉澱分析化學上用之.

二 硫 化 碳 其蒸氣能殺蟲防穀米生虫用之善能溶解黃燐硫黃等爲極佳溶劑。

49. 試述火焰之成因組成及其所發光亮何以有強弱之別.

成因 凡物質燃燒時如能與助燃之氣化合成氣體者則生火焰

組成 (1) 氧化焰 爲餤之最外層因空氣供給充足其間炭質完全與氧化合成Co_2氣體 以物置入此層焰中燃燒之極易起氧化作用故名氧化焰.

(2) 還原焰 爲餤之內層因空氣供給不足其間炭質僅少量與氧化合成Co氣體若置金屬氧化物入此層餤中燃燒之則易失氧而使金屬還原故名還原焰.

焰光何以有強弱之故

(1) 火焰熱度之關係 熱能高光亮強熱度低光亮弱.

(2) 火焰密度之關係 密度大光亮強密度小光亮弱.

(3) 有無固體質點之關係 有固體質點光亮強無固體質點光亮弱。

50. 試述二氧硫化之製法性質及用途

製法 (1) 燃燒硫黃 $S+O_2 \longrightarrow SO_2$.

(2) 燃燒硫鐵礦 $4\,FeS_2+11\,O_2 \longrightarrow 2\,Fe_2O_3+8\,SO_2$.

(3) 銅加濃硫酸熱之 $Cu+2\,H_2SO_4 \longrightarrow CuSO_4+SO_2+2\,H_2O$.

〔性質及用途〕二氧化硫係無色有刺激性氣體比空氣重2.2倍 易溶於水 呈酸性反應卽因與水化合成亞硫酸故也又因其與水相遇時能放出發生機氫富還原性故可作漂白顏色物之用又可用之作消毒劑。

51. 試述三氧化硫之製法性質及用途

製法 (1) 以二氧化硫與氧之混合氣體通過一裝有白金石綿之玻璃管熱至400°C左右則得三氧化硫。

〔性質及用途〕三氧化硫係無色之液體與空氣相遇則放烟霧如與水化合則放嘶聲及大熱而變成硫酸。

52. 亞硫酸有何特性？

亞硫酸之特性有四

1. 酸性　有酸之各種特性.

2. 還原性　其溶液爲一極良之還原劑

$$H_2SO_3 + O \longrightarrow H_2SO_4$$

$$H_2SO_3 + H_2O_2 \longrightarrow H_2SO_4 + H_2O.$$

3. 漂白性　能令各種顏色物變爲無色.

4. 止腐性　可用以止發酵而爲保護劑。

53. 試述硫之形性及其同素體

形性　硫黃爲淡黃色脆性固體不溶於水易溶於二硫化碳在空氣中燃燒呈青色火焰能直接與多種金屬化合成硫化物如 HgS CnS Ag_2S等.

同素體 (1) 結晶形硫　如斜方硫長針硫.

(2) 不結晶硫　如橡皮形硫白硫。

54. 試比較氧與硫之性質

硫與氧爲同族其相似之點甚多二者均能與氫相化合而成同式之化合物如 H_2O H_2S 且氧能成二氧化二氫(H_2O_2)硫亦能成二硫化二氫)H_2S_2)。

55. 試述硫酸之製法性質及用途

製法（1）接觸法　此法與上述三氧化硫之製法相同藉白金石棉之接觸作用使二氧化硫與氧化合成三氧化硫加水或水蒸氣卽成硫酸

$SO_2+O \longrightarrow SO_3$

$SO_3+H_2O \longrightarrow H_2SO_4$.

（2）鉛室法　將SO_2氣體空氣水蒸氣及No_2四者導入鉛室中則成硫酸

$2SO_2+O+H_2O+2NO_2 \longrightarrow 2SO_2(OH)NO_2$

$2SO_2(OH)NO_2+H_2O \longrightarrow 2H_2SO_4+NO_2+NO$。

〔性質及用途〕純粹之硫酸係由狀體故又稱之曰礬油在平常溫度時紙及木村或其他種有機物遇之卽變焦黑蓋因此酸有吸取水分之力也若與水相合則生大熱又與多種金屬有作用如$ZnSO_4$, $FeSO_4$ $CuSO_4$等是其用途爲工業上重要藥品如製造鹽酸硝酸炭酸鈉及過燐酸石灰用之。

56. 試述硇精之製法及性質用途

製法 1. 將氯化錏與石灰混合熱之

$$2NH_4Cl+CaO \rightarrow CaCl_2+2NH_3+H_2O$$

$$2NH_4Cl+Ca(OH)_2 \rightarrow CaCl_2+2NH_3+2H_2O.$$

2. 將氮與氫混合用電火花燒之

$$N_2+3H_2 \rightarrow 2NH.$$

〔性質及用途〕硇精爲無色氣體有特異臭氣易溶化於水成氫氧化錏若與氯化氫相遇則生白烟而成氯化錏受強壓時變成液體去壓則吸收周圍之熱復變氣體故利用之以造冰其用途爲造冰及醫藥之用。

57. 試述硝酸之製法性質及用途

製法 (1) 取智利硝石(硝酸鈉)或硝石(硝酸鉀)與濃硫酸同熱卽得

$$NaNo_3+H_2So_4 \rightarrow NaHSo_4+HNo_3 \text{(低温)}$$

$$2NaNo_3+H_2So_4 \rightarrow Na_2So_4+2HNo_3 \text{(高温)}$$

$$KNo_3+H_2So_4 \rightarrow KHSo_4+HNo_3 \text{(低温)}$$

$$2KNo_3+H_2So_4 \rightarrow K_2So_4+2HNo_3 \text{(高温)}$$

(2) 通電於空氣則氮與氧化合成No，此No與氧化合成No_2，此No_2溶於水則成硝酸此法盛行於挪威因其地多瀑布易於發電也.

〔性質及用途〕 硝酸有酸之各種性質與金屬之氧化物作用生成一種鹽類及水受熱分解時卽放氧令他物氧化故爲極良之氧化劑，以濃硝酸滴於布草木上卽被腐蝕故爲極強酸之一，其用途在用以製炸藥假象牙染料又爲化學實驗室中極重要之藥品。

58. 試述黑火藥之製法及其爆發時之變化

製法 取硝酸鉀75份硫黃10份木炭15份混合之

燃燒時之變化

$$2KNo_3+3C+S\longrightarrow 3Co_2+N_2+K_2S$$

59. 試述燐之所在製法及用途

所在 燐無單體存在多成燐酸鈣$Ca_3(Po_4)_2$而存於動物骨中及植物果實中又地殼中有燐灰石礦產出.

製法 (1) 取骨灰硫酸及木炭混合熱之則得黃燐

$Ca_3(Po_4)_2+3H_2So_4 \longrightarrow 3CaSo_4+2H_3Po_4$

$H_3Po_4-H_2o \longrightarrow H\ Po_3$

$4H\ Po_3+12C \longrightarrow 2P_2+12Co+2H_2$.

(2) 取燐灰石砂及焦炭同置電爐中強熱之則得黃燐

$Ca_3(Po_4)_2+3SiO_2 \longrightarrow 3CaSiO_3+P_2O_5$

$2P_2O_5+10C \longrightarrow 10Co+P_4$.

(3) 取黃燐在無空氣處熱至250°C則成赤燐

用途 製造火柴及肥料

60. 試比較黃燐赤燐之性質

性 質	赤 燐	黃 燐
顏 色	紫 紅 色	幾 無 色
晶 形	斜方六面體	立 方 形 體
露於空氣中	不放燐光,不起氧化	放燐光,易起氧化
融 解 點	500°C – 600°C	44°C
關於衛生上	無 毒	極毒(1克可以致命)
比 重	2.05 – 2.39	1.83 – 1.85
溶 化 性	不溶化於CS^2中	易溶化於CS_2中
發 火 點	240°C	60°C

61. 試述燐化三氫之製法及墟墓間黑夜鬼火之成因

製法 黃燐與氫氧化鉀或氫氧化鈉溶液同熱

$$P_4+3KoH+3H_2O \longrightarrow 3KH_2Po_2+PH_3$$

此氣體遇空氣能自行燃燒 愈上昇白圈愈大 頗美觀墟墓間夜見鬼火者卽因朽骨內含有PH_3遇空氣有以然之也。

62. 試述中砒霜毒之解法

中其毒者宜服氫氧化第二鐵$Fe(oH)_3$之新鮮沉澱或雞蛋白，牛乳，氧化鎂等。

63. 試述馬氏驗砷法

氫氣發生器中製出氫氣 被檢物溶於鹽酸 注入氫氣發生器中氫氣焰如爲青色以磁器觸其焰生黑點 光輝如鏡 漂白粉溶液能溶之者爲砷質之證是謂馬氏驗砷法。

64. 試比較鈉玻璃鉀玻璃鉛玻璃之原料成分性質及用途

種　類	原　料	成　分	性　質	用　途
普通玻璃（鈉玻璃）	$Si\,O_2$ $Na_2\,Co_3$ $Ca\,Co_3$	$Na_2\,Si\,O_3$ $Ca\,Si\,O_3$ $Si\,O_2$	易溶帶青綠色抵抗藥劑之力弱於鉀玻璃	製窗板杯瓶及普通器具
硬玻璃（鉀玻璃）	$Si\,O_2$ K_2Co_3 $Ca\,Co_3$	$K_2\,Si\,O_3$ $Ca\,Si\,O_3$ $Si\,O_2$	難溶無色抵抗藥劑之力甚強	製裝飾品及化學等器具
鉛玻璃	$Si\,O_2$ K_2Co_3 Pbo	$K_2\,Si\,O_3$ $Pb\,Si\,O_3$	易融光線屈折力極強	製光學器具及裝飾品

65. 試述氟化氫侵蝕玻璃之理

氟化氫性極猛烈能腐蝕玻璃其變化如下

$SiO_2+4HF \longrightarrow SiF_4+2H_2O$。

66. 金屬第一第二化合物的區別試舉例以說明之

同一金屬有二種化合物 其原子小者謂第一化合物 大者爲第二化合物 如爲鹽類則稱第一鹽及第二鹽 如 CuO第一氧化銅，CuO_2第二氧化銅；$FeCl_2$第一鐵鹽，$FeCl_3$第二鐵鹽。

67. 試述金銀之製法

金之製法 (1) 淘汰法 取砂金於水中淘洗之因砂質輕金質重自然取得.

(2) 混銖法 將石英岩擊碎混以水銀則金與銖成合金取出熱之水銀昇化而金可得.

(3) 電解法 取金礦打碎加鏽化鉀溶液則成鏽化金鉀 $KAu(CN)_2$ 將此物電解之卽得.

(4) 氯化法 取金礦擊碎加水通以氯氣則成

氯化金 $AuCl_3$ 次加硫酸第一鐵

則純金析出.

$AuCl_3+3FeSo_4 \longrightarrow FeCl_3+Fe$

$(So_4)_3+Au.$

銀之製法 (1) 混 汞 法 將銀礦擊碎加水銀攪和而熱

之卽得

$Ag_2S+Hg \longrightarrow HgS+2Ag.$

(2) 派克氏法 欲將方鉛礦中之銀提出可先

熱礦燦融次加鋅則鋅與銀成

合金浮於表面取出熱之鋅被

氧化而銀可得矣.

(3) 電 解 法 接欲鍊之銀於電池陽極接純

銀片於陰極二者同浸於䴏化

銀溶液中通以電流則銀鍍於

銀片上。

68. 試比較黃金白金之性質

同點 1. 富延展性 2. 溶點高 3. 比重大 4. 在空氣中或用氧化劑皆不能氧化之 亦不溶於普通之酸類惟水銀能溶解之.

異點 1 黃金呈金黃色 有光澤 質柔軟製造貨幣及裝飾品用之.

2. 白金爲灰白色金屬質較硬 用以製造坩堝 蒸發皿白金絲及電極等。

69. 試就物理作用化學作用分別說明照像之理

以玻璃片之一面 塗以有感光性之藥膜（如氯化銀等)將此片裝入照相器中使呈受光之影像 卽起化學變化 然此時片上尙無影像 須浸入一種具有還原性之溶液中 洗之則片上光暗各部 以次現出 或淺或深各部不同因游離之銀有多有少也 此謂之顯影 其未受變化之氯化銀洗時不受影響 然一見光 卽全變黑故必以一硫酸鈉之溶液洗之使溶去未受變化之銀鹽 其影像始定 此謂之定影如此所得之影像 謂之反影 另以一種塗有感光性藥膜之紙置此影片之下 在日光或電光中灑之 則正像卽感受於紙上然仍須在暗室中依前法顯影及定影乃得像片。

70. 冶鐵術述要

冶鉄方法從理論上言之極其簡單分為二段

(1) 原礦如爲氧化物 則此段工作可缺 如爲炭酸鐵則先燒灼成氧化鐵如：$4FeCo_3 + O_2 \longrightarrow 2Fe_2O_3 + 4Co_2$.

(2) 氧化鐵和炭或焦煤燒灼由一氧化碳還原而成鐵如：$Fe_2O_3 3Co \longrightarrow 2Fe + 3Co_2$.

實際鐵礦含有矽燐等質 故氧化鐵焦煤以外 復混石灰石 在熔鐵礦中 氧化鉄還原爲鐵挾雜的矽燐等質與石灰石熔融 狀如玻璃浮於上面 鐵則熔融集於底部得以分離之。

71. 試比較鑄鐵鍛鐵鋼鐵之性質

鑄鐵　含炭 3－5％性硬而脆 無延展性融解點1100°C供鑄鍋釜用.

鍛鐵　含炭 0.5％ 性硬不脆 有延展性 能鍛接 融解點1000°C供製鐵板鐵絲用.

鋼鐵　含炭 0.5—1％性硬有延展性富彈力 融解點1400—1500°C供製刀,劍,鎗,炮,鐵軌,機械等用。

72. 試述鐵銹生成之理

吾人試取鐵銹而分析之 則知其含有三氧化二鉄等 故乾燥空氣不易使熱生銹 濕空氣中含有二氧化碳 則生銹甚易鐵遇碳酸先成炭酸 二氫亞鐵此物與氧相遇 卽被氧化而生二氫氧炭酸氫鉄 此物又被水分解 而成三氫氧化鐵 最後此三氫氧化鐵 脫水而成三氧化二鐵 此卽鐵之生銹之原因也。

73. 試述銅之提鍊法

(1) 將氧化銅或灰酸銅與灰強熱之

$$Cu_2O + C \longrightarrow 2Cu + Co$$

$$CuCo_3 + 2C \longrightarrow Cu + 3Co.$$

(2) 欲置純銅可將硫酸銅電解之。

74. 試述鎳錳鉻之普通形性及用途

鎳 鎳爲銀白色金屬 富延展性 置空氣中不氧化故可用鍍銅鐵之面又可製造合金.

錳　錳爲赤灰色有光澤金屬 質脆而軟 在空氣中易氧化能使水蒸氣分解生氫其化合物 mnO_2 可用作氧化劑及製造氧氯用之.

鉻　鉻爲灰黑色似鋼金屬 質堅不易融解 鉻與鉄之合金稱用鋼鉻作用軍艦之甲板。

75. 試述鎂,鋅,汞之普通形性及用途。

鎂　鎂爲銀白色之金屬 有延展性 在空氣中熱之則放白光而燃燒 在高溫度極富還原力 能自他種金屬氧化物奪去其氧.

鋅　鋅爲灰白色金屬 性脆 置空氣中表面生鹽基性炭酸鋅而不及於內部故可 (1) 製板蓋屋 (2) 鍍鐵板(免生銹) (3)製合金及其他用途.

汞　在常溫時爲灰白色流體 易與他金屬 接合成汞齊 不溶解於鹽酸及冷硫酸 而溶解於硝酸 因其膨脹性甚敏故製造溫度計 晴雨計用之 他如提鍊金銀製醫藥亦用之。

76. 詳述錫,鉛,鋁之普通形性及用途

錫　錫爲銀白色 有光澤金屬 爲金屬中之最易溶解者 展性甚大 在空氣中無變化 故用以鍍鐵面免生鐵銹 對於酸之濃溶液均能溶化 用途可製錫箔洋鐵及各種合金.

鉛　鉛爲銀白色之軟金屬 其化合物通具有毒性 能溶於硝酸而不溶於鹽酸及硫酸因其比重甚大(11.4)可製鎗彈 又因其不受種種藥品之侵犯 故可製化學用具 鉛室及水導管 此外鉛與錫熔合可製合字金.

鋁　鋁爲土壤岩石之主要成分 色銀白而質堅 富延展性置空氣中受氧化而不及內部 可製日用器具 及飛機等能溶於鹽酸 及鹼類鋁融接劑 爲鋁粉與三氧化二鉄之混合物著火則發生3000°C溫度。

77. 鋅白與鉛白俱爲白色顏料試比較其優劣

鋅白(Zno)無毒遇硫化物不變黑;鉛白〔$2PbCo_3,Pb(OH)_2$〕有毒然可以供製造磁器之釉面工業上之用途甚大。

78. 何謂合金有何特性

意義　以二種或二種以上之金屬共熔融之而使凝固名曰合金

性質　(1) 延展性　合金之延展性多不及純金屬.

(2) 硬　度　合金之硬度多勝於純金屬.

(3) 融解點　合金之融解點低於純金屬.

(4) 電及熱之傳導度　合金低於純金屬。

79. 試寫出下列各化合物之分子式幷述其用途 a. 硝酸銀 b. 氯化銀 c 四氧化三鐵 d 鉻酸鉀 e. 氧化鎂 f. 硫酸鎂 g. 炭酸鎂 h. 硫酸鋅 i 氯化鋅 j. 一氧化鉛 k. 氯化鈣 l. 炭化鈣 m 硫化鈣.

a. 硝酸銀　Ag No_3 爲白色結晶觸光變黑可染毛髮有腐蝕性.

b. 氯化銀　AgCl爲白色沉澱觸光變黑照相用之.

c. 四氧化三鉄　Fe_3O_4有磁性能吸鐵.

d 鉻酸鉀　$K_2 cro_4$ 爲極佳氧化劑 $2K_2 cro_4 \longrightarrow$

$2K_2O.cr_2O_3.3(O)$

e. 氧　化　鎂 MgO 硬度足以截斷鋼板耐火力甚強可製耐火器具.

f. 硫　酸　鎂 $MgSO_4 \cdot 7H_2O$ 有苦味用作瀉藥.

g. 硫　酸　鋅 $ZnSO_4 \cdot 7H_2O$ 有收斂防腐効能常供製眼藥之原料.

h. 炭　酸　鎂 $MgCO_3$ 爲白色結晶不溶於水爲牙粉中之重要原料.

i. 氯　化　鋅 $ZnCl_2$ 與 ZnO 相混能成堅硬之質補牙用之.

j. 一氧化鉛 PbO 俗稱密陀僧製鉛玻璃用之.

k. 氯　化　鈣 $CaCl_2$ 爲極佳乾燥劑.

l. 炭　化　鈣 CaC_2 與水作用則發二炭炔車燈多用之.

m. 硫　化　鈣 CaS 曝日光久之移置暗處放燐光故用製鐘表及門牌面之字。

80. 記下金屬之名：a. 最富於展性及延性者 b. 在常溫時能與水相作用者 c. 最能導熱及電者 d 在常溫時爲液體者 e. 比重最小與最大者 f. 融點最高與最低者.

a. 最富於展性者曰錫曰金最富於延性者曰鉑.

b. 鈉在常溫時能與水相作用.

c. 銀最能導熱銅最能導電.

d. 水銀在常溫時爲液體.

e. 比重最小者曰鋁比重最大者曰鉑.

f. 融解點最高者 曰鉑(1750°C) 融解點最低者 曰錫 (233°C)。

81. 試述明礬之種類及鉀明礬之用途.

明礬分四種 曰鉀明礬 鈉明礬錏明礬鉄明礬四種鉀明礬可供染色之用。

82. 試述石灰之製法及其在工業上之用途

製法 生石灰可用炭酸鈣(石灰石)置大窰中燒之卽得。

$CaCo_3 \rightleftarrows CaO + Co_2$

以生石灰加水卽得熟石灰 $CaO + H_2O \rightarrow Ca(OH)_2$

石灰在工業界上之用途 (1) 製肥料 (2) 塗料用 (3) 製漂白粉。

83. 試述鐳之放射性質

性質 (1) 能自放光 (2) 能自放熱 (3)能使空氣變為導電體 (4) 能放出數種放射線 (Q,B,R 三種放射線) (5) 能逐漸變成多種他原質。

84. 試比較鉀鈉之性質

同點 (1) 為如蠟之金屬 可以刀切 其切口有光澤作銀色.

(2) 觸濕空氣被氧化失光澤常貯於石油中.

(3) 投入水中則放氫

$$2K+2H_2O \longrightarrow 2KOH+H_2$$

$$2Na+2H_2O \longrightarrow 2NaOH+H_2$$

85. 試述炭酸鈉之二大製法

(1) 路布蘭法 此法共分三步先將食鹽與濃流酸同熱繼將所成之硫酸鈉與炭及石灰石共熱再次則將所成之硫化二鈉與石灰石作用卽得炭酸鈉矣其變化如次:

$Na_2So_4+2c \longrightarrow Na_2S+2Co_2$

$Na_2S+CaCo_3 \longrightarrow Na_2Co_3+CaS$

$CaS+Co_2+H_2O \longrightarrow CaCo_3+H_2S$

此法可得多量之鹽酸等副產物。

(2) 索爾末氏法 通硫精氣二氧化碳及水蒸氣入食鹽濃溶液中製成

$NH_3+Co_2+H_2O \longrightarrow NH_4HCo_3$

$NH_4HCo_3+NaCl \longrightarrow NaHCo_3+NH_4Cl$

$2NaHCo_3 \longrightarrow Na_2Co_3+H_2O+Co_2$。

此法優點在原料能循環應用 如Co_2可以復用 而NH_4Cl再與石灰熱之使成NH_3亦可復成。

86 試述重要元素置換之次第表并舉例以說明之

下列元素凡在前者能使在後者由鹽質溶液中析出而置換之

鉀,鈉,鋰,鈣,鎂,鋁,錳,鋅,鉻,鎘,鐵,鈷,鎳,錫,鉛,氫,銅,砷,鉍,銻,鎵,銀,鉑,金。

舉例 $Cu + Ag_2So_4 \longrightarrow CuSo_4 + 2Ag$

$Zn + CuSo_4 \longrightarrow ZnSo_4 + Cu$

$Mg + ZnSo_4 \longrightarrow MgSo_4 + Zn$。

87. 試說明週期律及其用途

週期律乃元素之天然分類法考原子量之輕重與原素性質之遞變有一定之關係如將各元素依原子量輕重順序排列則可察知每隔若干種而性質一復學者可於同類之元素中研究其一則可略知其餘誠便舉也。

88. 試述寫化學方程式時應注意之點

(1) 當察知化學變化未起之先所用各物質之組成.

(2) 當審知應在何種情形時始起變化.

(3) 當審知化學變化已起之後所成何種物質及其組成此外有無他物質.

(4) 變化前與變化後物質之總重量必相等故化學方程式等號兩邊之重量必等.

(5) 方程式各物質當寫其分子式.

(6) 化學方程式非代數方程式 當必先以實驗考知該化學變化之內容情形若何 確實決定後 始可以方程式表之幷非以方程式而推測某種未知之化學變化也。

89. 試記全下列各化學變化之方程式

a. $NH_3+HCl=$

b. $2NaBr+Cl_2=$

c. $2NaNo_3+H_2So_4=$

d. $Co_2+H_2O=$。

答 a. $NH_3+HCl=NH_4Cl$

b. $2NaBr+Cl_2=2NaCl+Br_2$

c. $2NaNo_3+H_2So_4=Na_2So_4+2HNo_3$

d. $Co_2+H_2O=H_2Co_3$。

90. 下舉化學反應以方程表之

a. 以鹽酸水溶液加炭酸鈣

b. 通Co_2於石灰水中

c. 骨炭和硫酸加熱

d. So_2,NH_3溶於水。

答 a. $CaCo_3 + 2HCl = CaCl_2 + H_2O + Co_2$

b. $Ca(oH)_2 + Co_2 = CaCo_3 + H_2O$

c. $Ca_3(Po_4)_2 + 2H_2So_4 \longrightarrow CaH_4(Po_4)_2 + 2CaSo_4$

(因骨灰內含有燐酸鈣)

d. $So_2 + H_2O = H_2So_3$

$NH_3 + H_2O = NH_4oH$。

91. 物質在空氣中燃燒係與何質化合 燃燒之後 其重量有變更否?

物質在空氣中燃燒係與氧化合 燃燒後 重量常稍加此所增之重量卽等於燃燒時所用之氧之重量也。

92. 燃燒之要素安在?

燃燒之要素有二 其一物質須屬可燃體如油類及柴灰等是 其二須助燃體包圍於其周圍如氧及空氣等是。

93. 木塊難燒木片易燃試易其理

氧爲助燃體 同體積木片較同體積木塊面積大 卽木片所含之氧氣多於同體積木塊 所含之氧氣 故木片較木塊易燃燒。

94. 爐火扇之則旺燭扇之則火滅試言其理

爐火扇之則旺 以增多氧氣故 燭火扇之則其四圍之氧驅而他走終至光滅。

95. 動物在氮氣中能生活否?

動物入氮氣中卽窒息而死蓋動物之生存全賴氧氣耳。

96. 冰雪雲霧之組成各如何?

冰雪雲霧俱係水之同素體卽由氫氧化合而成。

97. 試說明水係化合物而非混合物

1. 水乃氫氧二氣直接化合而成其性質與氫氧全異故爲化合物.

2. 水之配合量 有一定之比例 卽氫1與氧7.94之比 故爲化合物.

3. 水非用化學上之方法(電離)不能分解故爲化合物。

98. 炭之同素體有幾種試擧其名

(1) 無定形炭 如木炭骨炭油烟煤等.

(2) 結晶形炭 如石墨金剛石。

99. 炭在空氣中燃燒成一氧或二氧化碳試各用化學方程式表明之

$2C+O_2 \longrightarrow 2Co$

$C+O_2 \longrightarrow Co_2$。

100. 用墨寫字於紙上久置空氣中有無變化

墨等黑色顏料俱由油烟製成油烟係無定形炭之一因炭在空氣中無變化故墨寫字於紙上可以耐久。

101. 煤由古代植物變成其說確否?

古代植物埋沒地中又因空氣缺乏不能腐蝕歷時旣久則成碳俗稱爲煤因煤爲含炭物質而炭爲植物之主要成分故煤由古代植物變成其說甚確。

102. 試述碳之製法

(1) 燃燒糖類可得純炭.

(2) 密閉木材骨頭而灼燒之則得木炭或骨炭.

(3) 取鐵與純炭置電爐中強熱而急冷之則炭因鐵之凝固受強壓力卽成金剛石或石墨。

103. 試述木炭濾水之理

木炭質鬆而多隙孔能吸取水內之微生物而使水潔淨又能吸着極多量之氣體故可除去惡臭及色質。

104. 試述一氧化碳及二氧化碳之製法

一氧化碳之製法

（1）加濃硫酸於草酸而熱之用氫氧化鈉除去Co_2則得純粹之一氧化碳　$H_2C_2O_4 \longrightarrow Co_2 + Co + H_2O$.

（2）通水蒸氣於碳火上　$C + H_2o \longrightarrow Co + H_2$

（3）取炭與二氧化碳混合熱之　$C + Co_2 \longrightarrow 2Co$.

二氧化碳之製法

（1）注稀硫酸或稀鹽酸於大理石（炭酸鈣）卽得

$$CaCo_3 + H_2So_4 \longrightarrow CaSo_4 + H_2O + Co_2$$

$$CaCo_3 + 2HCl \longrightarrow CaCl_2 + H_2O + Co_2$$。

105. 有何法可以證明空氣中含有二氧化碳氣？

以澄清之石灰水盛於玻杯中暴露空氣內或變爲白濁色則空氣中有二氧化碳存在其反應如下：

$$Ca(oH)_2 + Co_2 = CaCo_3 + H_2o$$。

106. 投鼠入一氧化碳或二氧化碳之中皆能致死致死之理是否相同試詳述之?

一氧化碳極毒空氣中含有萬分之五之一氧化碳卽有害於人體故鼠入之必死鼠在二氧化碳中亦窒息而死此非因該氣有毒所致蓋因缺乏氧氣使然也空氣中含該氣百分之十卽覺呼吸喘急若至百分之二十五時不數小時卽可斃命。

107. 略述救火器構造之原理?

二氧化碳無維持燃燒能力故如將二氧化碳注於火上火卽熄滅救火器乃臨時發生二氧化碳之裝置由該器之壓力使溶解液噴出滅火。

108. 述炭酸氣之存在與動植物生育之關係?

自然界雖不絕生成二氧化碳然空氣中所含二氧化碳則略有一定(約占萬分之三至四體積)因植物葉吸收空氣中之二氧化碳藉日光作用分解爲炭及氧將碳構成體質而放出氧氣故空氣中之二氧化碳不致增多而植物於節調空氣成分及動物生育頗有必要。

109. 有機物俱可燃燒試述其理?

有機物係碳 氫氧三元素構成 炭氫係可燃體氧爲助燃體故統可燃燒。

110. 試述安全燈之理?

物質之燃燒 須達一定之燃度 又二氣體相遇亦須達一定之燃度 始能燃燒而發火焰 今試以本生燈燃點之以鐵絲網罩入火焰中 則見氣體祗在網之下面燃燒 而網上面則無火焰 蓋因逃至網上之氣體 冷至燃度下故也今若將火吹滅之 而在網上以火點之 則見火僅在上面燃燒而下面則否 亦因下面氣體 冷至燃度下故也安全燈卽藉此理製成 以鐵絲網罩油燈外 以之入礦中則網外之沼氣氧氣均在燃度下故不至燃燒而起爆烈也。

111. 試述有機物與無機物今昔意義不同之點?

向來稱酒精 脂肪等自動植物產生之物質爲有機物 以與礦物質卽無機物區別 其意義以有機物爲有生活機之生物體所產出者 其生成之原因 由於生活體內靈妙神祕之生活力 不能以人工合成之 於是以研究有機物之組成及

性質者爲有機化學 而稱研究無機物之化學爲無機化學然因研究有機物之結果 證物有機物與無機物之學 爲無機化學然因研究有機物之結果 證物有機物 與無機物之組成相類而以人工合成有機物之方法 亦陸續發明 生活力說之障壁遂破 有機化學與無機化學之區別 遂無意義可言然今仍因襲前名稱者 其意義實與前大異 實際上當稱爲碳化物化學。

112. 食鹽係氯與鈉化合而成氯有劇毒食鹽何無毒?

凡由二種以上之物質 化合而成之化合物 其成分之固有形色性質 完全改變 非經化學方法不能再由該新物質中析出原成分故氯雖具劇毒而食鹽因係化合物之故 故與氯性質截異。

113. 乾燥的氯不能漂白何故?

氯之漂白作用 并不能直接生效 須含有水分時其功效始著 蓋綠先分解水使發生氧氣 此新生之氧氣活動力極強與色質相遇卽起氧化作用使之脫色。

114. 乾燥硇精何以不能使紅色 Litmus 變藍?

凡能使紅色 Litmus 變藍者須爲鹼性物乾燥之硇精不具鹼性通常所稱硇精水(氫氧化錏)卽係一種具有鹼性之溶液。

115. 普通火柴與安全火柴異點安在?

普通火柴　木柴端……膠水,蠟油,黃燐,氯酸鉀

　　　　　盒　面……玻璃粉,膠水.

安全火柴　木柴端……膠水,蠟油,硫磺,硫化銻,氯酸鉀

　　　　　盒　面……赤燐,硫化銻,膠水.

116. 我國農夫耕田常用牛骨灰爲肥料是取其中何種成分?

磷酸爲植物之必要養分 故種植每用燐酸鹽爲肥料 以補磷分之缺乏 因動物骨中 主成分爲磷灰石 〔$3Ca_3(Po_4)_2 \cdot CaF_2$〕而磷灰石之主成分 又以磷酸鈣爲主 故牛骨灰可以肥田。

117 用藍墨水寫字初時甚淡少頃始濃何故?

藍墨水由綠礬(硫酸亞鐵)而製成 初寫時甚淡 繼因綠礬在空氣中易受氧化故色質轉濃。

118 冶金術上何以能利用水銀?

水銀為常溫時呈液態之一種金屬 能溶解種種金屬而生錸齊故冶金術多用之。

119. 歐戰時使用氯以毒敵人 防時用頭巾保護器 其中盛有包紗的石灰和氫氧化鈉的粉狀混合物 此種保護器 甚為有用何故? 試說明其作用

消石灰遇綠氣 則綠氣為所吸收 而生漂白粉氫氧化鈉遇綠氣則互相作用 復變為氯化鈉 故用之可免受綠氣之侵害。

120. 試述洋灰之製法性質及用途?

製法　焙燒粘土及礆石混合物而研碎之

性質　不溶於水，加水調和則固結如岩石

用途　為極佳建築材料 所謂鐵筋混凝土 即用鉄桿為骨洋灰為面之物也。

121. 舊時用草木灰質洗衣是利用其中何種成分?

植物取土中或水中之鉀 以為養分 故如燒植物成灰則鉀變為炭酸鹽 而存留舊時洗衣者 即利用草木灰中之炭酸鉀。

122. 由植物灰中取鉀之方法如何?

以草木灰與木炭混合入鐵器強熱之

$K_2Co_3+2C \longrightarrow 2K+3Co$。

123. 氫養化鉀露於空氣中有何反應?

因此物置於空氣中易吸收空氣中水分 及炭酸氣 其反應如下:

$2K\ oH+Co_2 \longrightarrow K_2Co_3+1+_2O$。

124. 氫氧化鈉置於空氣中有何反應?

同上理得其反應如下:

$2Na\ oH+Co_2 \longrightarrow Na_2Co_3+H_2O$。

125. 硝酸鉀能用製火藥而硝酸何以不能?

答: 硝酸鉀置空氣中不潮解 故可用製火藥 硝酸鈉置空氣中易潮解故不能製火藥。

126. 使200克之硝酸鉀 溶於120立糎之沸水中 而令所成溶液冷至20^0間硝酸鉀析出若干重量?

設x爲硝酸鉀在120立糎水下20^0c溫度時所溶之克數

$$100:120=31.6:x$$

$$\therefore \quad x=\frac{31.6\times 120}{100}=37.92g$$

∴ 硝酸鉀於120立糎水20^0 c溫度析出之重量爲

$200-37,92=162,09g\ (KNo_3)$。

127. 將食鹽10克溶于水中而將其溶液蒸乾間所餘固體之重量若干？將鋅10克溶於硫酸中而將其溶液蒸乾間所餘之重量若干？

答：食鹽10克溶于水中其溶液不起化學變化故所餘固體之重量仍爲10克之食鹽.

鋅10克溶於硫酸中則起化學變化故蒸乾後所得之固體爲硫酸鋅

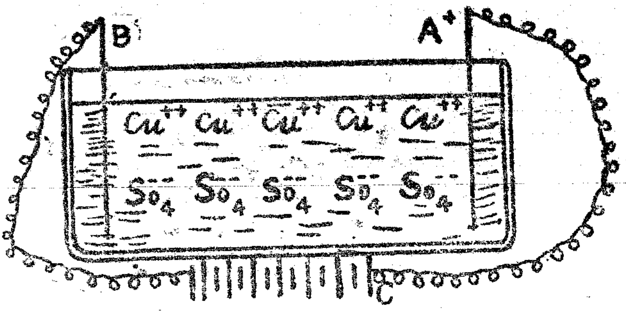
$$H_2So_4+Zn \longrightarrow ZnSo_4+H_2\uparrow$$

設x爲所餘硫酸鋅之重　則

$$65.38:10=161.44:x$$

$$x=\frac{161.44\times 10}{65.38}=\frac{1614.4}{65.38}24.69g(ZnSo_4)。$$

128. 若以電流通過硫酸銅($CuSO_4$)之水溶液中問有何變化發生試作圖解之?



$CuSO_4 \longrightarrow Cu^{++} SO_4^{--}$

(在B^-) $Cu^{++} + 2\oplus \longrightarrow Cu$(原質)

(在A^+) $SO_4^{--} + 2\ominus \longrightarrow SO_4$

$2SO_4 + 2H_2O \longrightarrow 2H_2SO_4 + O_2\uparrow$。

129. 試計綠氣10立升之重量 欲制10立升之綠氣問須 H Cl之重量若干?

氯1立升之重爲3.1674g

$\therefore$ 10立升之綠氣重$10 \times 3.1674 = 31.674g$

$4HCl + O_2 \longrightarrow 2H_2O + 2Cl_2$

$4(1.008 + 35.46)$ $\qquad\qquad$ 4×35.46

設x爲須HCl之重量　則

$145.872:141.84=x:31.674$

$$\therefore\quad x=\frac{145.872\times31.674}{141.84}=32.57g(HCl)。$$

130. 用百兙氯化鈉能製綠氣若干體積?

$2\ NaCl+MnO_2+2\ H_2SO_4\longrightarrow Na_2SO_4+MnSO_4$

$+2\ H_2O+Cl_2$

$2(22,997+35.457)$　　　　　　2×35.457

$2\times58.454:2\times35.457=100\times1000:x$

$$x=\frac{35.457\times100\times1000}{58.454}=\frac{17728500}{29.227}g(Cl)$$

$$\frac{17728500}{29.227}\div3.1674=\frac{17728500}{29.227\times3.1674}$$

$$=\frac{8864250}{46.2867999}L(Cl)。$$

131. (a) 今有鹽酸含有30%氯化氫問其密度如何?

(b) 該酸一立升之重量若干?

(c) 該酸含氯化氫若干重量?

(d) 製此重量之氯化氫須氯化鈉若干重量?

答：(a) 鹽酸中含有HCl30％其密度爲1.1526g/c.c.

(b) 該酸一立升重量$1.1526\times1000=1152.6g.$

(c) 該酸含HCl之重量爲$1152.9\times\frac{3}{10}=345.78g.$

(d) $2\times58.454:2\times36.465=x:345.78$

$$\therefore\quad x=\frac{2\times58.454\times345.78}{2\times36.465}$$

$$=\frac{58.454\times345.78}{36.465}g(NaCl)。$$

132. 欲製一瓩之鈉須氫氧化鈉之重量若干？

Na oH電解中　　40克(Na oH)可成23克(Na)

$\therefore\quad 40:23=x:1000$

$$\therefore\quad x=\frac{40\times1000}{23}=1739g(NaoH)。$$

133. 當鈉與水作用時每耗一克之鈉可放出輕氣若干體積？

$2Na+2H_2O\longrightarrow2NaoH+H_2$

46　　　　　　　　　2

$46:2=1:x$

$$\therefore\quad x=\frac{2}{46}=\frac{1}{23}=.435g(H)。$$

134. 欲製一噸之苛性蘇打須氯化鈉若干磅?

$2Na + 2H_2O \longrightarrow 2NaoH + H_2$

46 80

$46:30 = x:2000$

$\therefore \quad x = \frac{46 \times 200}{8} = 1150\ lb(Na)$。

135. 從500克之炭酸鈉能得氫氧化鈉重量若干?

$Na_2Co_3 + Ca(oH)_2 \longrightarrow CaCo_3 + 2\ NaoH$

92 80

$92:80 = 500:x$

$\therefore \quad x = \frac{80 \times 500}{92} = 434.8g(Na\ oH)$。

136. 試命下諸程式所表之各化合物之名並述其各屬於何類化合物:

$Mg(oH)_2$, H BY, H_2So_3, $CaSo_3$, Na BY, $PbSo_4$,

HI, $NaNo_2$, KNo_3, H_2Co_3, $NaCo_3$, $FeCl_3$.

$Mg(oH)_2$ 氫氧化鎂,鹽基類化合物.

HBY 溴化氫,酸類化合物.

H_2So_3 亞硫酸,酸類化合物.

$CaSo_3$　亞硫酸鈣,鹽類化合物.

NaBr　溴化鈉,鹽類化合物.

$PbSo_4$　硫酸鉛,鹽類化合物.

HI　碘酸,酸類化合物.

$NaNo_2$　亞硝酸鈉,鹽類化合物.

KNo_3　硝酸鉀,鹽類化合物.

H_2Co_3　碳酸,酸類化合物.

$NaCo_3$　碳酸鈉,鹽類化合物.

$FeCl_3$　三氯化鐵,鹽類化合物。

137. 設有一種溶液每立升含氫氧化鈉40克曾查悉須此溶液。

138. 立糎,始可使25立糎之鹽酸中和問此鹽酸溶液之強度若干(以每立升中若干克表之)?

$NaoH + HCl \longrightarrow NaCl + H_2O$

40　　36.5

$\frac{40}{1000} \times 25 = 1g.$ (所用25c.c.氫氧化鈉之重)

$40 : 36.5 = 1 : x$

$$\therefore \quad x = \frac{36.5}{40} = \frac{7.3}{8} g(HCl)$$

$$25 : \frac{7.3}{8} = 1000 : x$$

$\therefore$ $x = 7.3 \times 5 = 36.5g$. (每立升之克數)。

139. 假定在下列各例中第一化合物中之鈉或鈣與第二化合物中之氫置換試將其方程式完成之並使兩邊相等?

$NaOH + HCl \longrightarrow NaCl + H_2O$

$2NaOH + H_2SO_4 \longrightarrow Na_2SO_4 + 2H_2O$

$3NaOH + H_3PO_4 \longrightarrow Na_3PO_4 + 3H_2O$

$Ca(OH)_2 + 2HCl \longrightarrow CaCl_2 + 2H_2O$

$Ca(OH)_2 + H_2SO_4 \longrightarrow CaSO_4 + 2H_2O$

$3Ca(OH)_2 + 2H_3PO_4 \longrightarrow Ca_3(PO_4) + 6H_2O$。

140. 銀所成之硝酸物中銀之原子價係一鈣所成之氯化物中鈣之原子價係二 (a) 試書硝酸銀及氯化鈣之式 (b) 以上二鹽之溶液若混合之則銀與鈣易位試書其反應之方程式?

(a) $AgNO_3$, $CaCl$

(b) $2AgNO_3 + CaCl_2 \longrightarrow Ca(NO_3)_2 + 2AgCl$。

141. 試照電離理論書方程式以表氫氧化錏與硫酸間及氫氧化錏與硝酸間之反應?

$$2NH_4{}^{+}oH^{-}+H_2{}^{+}SO_4{}^{--}\longrightarrow(NH)_2{}^{+}So_4{}^{--}$$
$$+2H_2o$$

$$NH_4{}^{+}oH^{-}+H^{+}No_3{}^{-}\longrightarrow NH_4{}^{+}No_3{}^{-}+H_2O。$$

142. 試舉由空氣與水製硝酸之步驟

由水與空氣製酸之步驟爲先以電光穿經空氣則有小部分氮氧化物變成再使氮氧混合物通過磁石放大之電弧光中如此所得之氧化物與水合卽成稀硝酸也。

143. 10克硝酸錏能製一氧化二氮若干立升?

此體積是依標準狀況量定者

$$NH_4No_3\longrightarrow 2H_2O+N_2O$$

$$(14+4+14+48)\qquad\qquad(28+16)$$

$$80:44=10:x$$

$$\therefore\quad x=\frac{44\times10}{80}=5.5g\,(N_2O)。$$

144. 今欲使一瓩之市上濃硝酸中和問須氫氧化鈉重量若干?

試計其所成化合物之重量

$HNo_3 + Na\,oH \longrightarrow NaNo_3 + H_2O$

$(1+14+48)\,(23+16+1)\quad(23+14+48)\,(2+16)$

$1\times\frac{68}{100}=680g\,(HNo_3)$

$63:40=680:x$

$\therefore\quad x=\frac{40\times680}{63}=40\times10.8=432g\,(Na\,oH)$

$63:85=680:y$

$\therefore\quad y=\frac{85\times680}{63}=918g.$ ($NaNo_3$即其所成化合物之重量)。

145. 以40c.c.市上之濃硝酸加於25克之鋅俟其反應停止後將其所成物質中之水蒸去試計其殘渣之重量?

$40\times\frac{68}{100}=27.2$

$27.2\times1.56=42.432g$ (40c.c.市上硝酸之重)

$$3Zn + 8HNo_3 \longrightarrow 3Zn(No_3)_2 + 4H_2O + 2No$$

196.2　504　568.2　72　60

$196.2:504 = x:42.432$

$$\therefore\quad x = \frac{196.2 \times 42.432}{504} = 196.2 \times .084 = 16.48g$$ (42.432 HNo_3所處之Zn)

$504:568.2 = 42.432:x_1$

$$\therefore\quad x_1 = \frac{568.2 \times 42.432}{504} = 47.7288g$$ (所餘之$Zn(No_3)_2$)

$504:60 = 42.432:x_2$

$$\therefore\quad x_2 = \frac{60 \times 42\ 432}{504} = 5.04g$$ (所餘之No)

$25 - 16.4 = 8.52g$ (所餘之鋅)

$47.7288 + 8.52 + 5.04 = 61.2888g$ (殘渣之重量)。

146. 將硝酸銀加入氯化鈉(食鹽)之溶液中間能生沉澱否? 若然則與硝酸銀加入鹽酸時 所生沉澱之成分 有何區別否?

$AG\ No_3 + Na\ Cl \longrightarrow Ag\ Cl + Na\ No_3$

Ag Cl卽爲其所生之沉澱

$Ag\ No_3 + H\ Cl \longrightarrow Ag\ Cl + H\ No_3$

AgCl 爲其沉澱前反應所生之沉澱相同故成分無區別。

147. 有一四價金屬2公分適與氧0.54公分化合 求該金屬之原子量並書其氧化物氯化物硫酸化合物之分子式

$1:8 = x:0.54$

$\therefore \quad x = \frac{.54}{8} = .0675$(.54公分氧與氫化合氫之重因1g氫化合之量謂之當量)

$2:.0675 = y:1$

$\therefore \quad y = \frac{2 \times 1}{.0675} = 29.6$(此金屬之當量)

原子量＝當量×原子價 $= 29.6 \times 4 = 118.4$（此金屬之原子量）與此原子量相等之金屬爲SN 故知此金屬爲SN

$SN\ Cl_4, S\ No_2, S\ N(So_4)_2$.（三種化合物之分子式）。

148. 試製硫化二氫使適足以飽和在15^0及標準壓力下之20立升之水所需之材料重量若干?

$20\times3.05=61$立升 (因1體積之水在15^0時溶化該氣體3.05體積

$$\frac{V}{V_1}=\frac{T}{T_1} \qquad \frac{Vo}{61}=\frac{273}{273+15}$$

$$\therefore \quad Vo=\frac{16653}{288}=58L$$

$58\times1.5392=89.3g$

$$FeS+2HCl\longrightarrow FeCl_2+H_2S$$

88 73 127 34

$88:34=x:89.3$

$$\therefore \quad x=\frac{88\times89.3}{34}=231.1g.(FeS)$$

$73:34=x_1:89.3$

$$\therefore \quad x=\frac{73\times89.3}{34}=235.9g.(HCl)$$

故所需材料爲$231.1+235.9=467g$。

149. 以50克胆礬溶於水中使流化二氫通過此溶液至溶液中之銅鹽成沉澱為止試計其沉澱之重量?

$H_2S + CuSo_4 \longrightarrow CuS + H_2So_4$

34　　159.6　　95.6

$CuSo_4.5H_2O : 249.6$　　　$CuSo_4 : 159,6$

$249.6 : 159.6 = 50 : x$

$$\therefore \quad x = \frac{159.6 \times 50}{249.6} = 32g(CuSo_4)$$

$159.6 : 95.6 = 32 : y$

$$\therefore \quad y = \frac{95.6 \times 32}{159.6} = 19.0.8g.$$ (沉澱CuS)。

150. 試由書碘,燐,及水製碘化氫所起反應之方程式?

$H_2S + I_2 \longrightarrow 2HI + S$

$2P + 3I_2 \longrightarrow 2PI_3$　　$PI_3 + 3H_2O \longrightarrow H_3Po_3 + 3HI$

$H_2 + I_2 \longrightarrow 2HI$。

151. 金屬溶於下列各酸中所成者為何質?

硝酸,稀硫酸,濃硫酸,鹽酸,王水.

$$\left.\begin{array}{l} 3Zn + 8HNo_3 \rightarrow 3Zn(No_3)_2 + 4H_2O + 2No \\ 3Cu + 8HNo_3 \rightarrow 3Cu(No_3)_2 + 4H_2O + 2No \end{array}\right\}$$ 金屬溶於硝酸.

$Zn+H_2So_4 \longrightarrow ZnSo_4+H_2\uparrow$（稀硫酸與電化次序表中氫以上金屬之作用過氫以下金屬則無作用）

$$\left.\begin{array}{l} Zn+2H_2So_4 \longrightarrow ZnSo_4+2H_2O+So_2 \\ Cu+2H_2So_4 \longrightarrow CuSo_4+2H_2O+So_2 \end{array}\right\}\text{金屬溶於硫酸.}$$

$Fe+2HCl \longrightarrow FeCl_2+H_2\uparrow$（金屬溶於鹽酸）

$$\left.\begin{array}{l} Au+3HCl+HNo_3 \longrightarrow 2H_2O+No+AuCl_3 \\ 3Pe+12HCl+4HNo_3 \rightarrow 3PlCl_4+8H_2O+4No \end{array}\right\}\text{金屬溶於王水.}$$

152. 如何區別氯化物，溴化物，及碘化物？

其區別之法可加硫酸知之　　其方程式如下：

$2NaCl+H_2So_4 \longrightarrow 2HCl+Na_2So_8$

$2NaBr+H_2So_4 \longrightarrow 2HBr+Na_2So_4$

$2NaI+H_2So_4 \longrightarrow 2HI+Na_2So_4$.

又可以三種化學行爲活潑否區別之

氯化物加溴，碘，不起變化

溴化物加氯則氯將代溴而將溴分出

碘化物則氯溴兩種加入皆可使其代而析出。

153. 以氯化鈉製氯化氫所得之氯化氫足使1立升水於標準溫壓時飽和問需氯化鈉之重量若干?

1立升水於標準溫壓時能溶氯化氫500立升

氯化氫1立升重1.6398g

$506\times1.6398=829.7388g$

$2NaCl+H_2SO_4\longrightarrow Na_2SO_4+2HCl$

$2(23+35.5)\qquad\qquad 2(1+35.5)$

$117:73=x:829.7388$

$$\therefore\quad x=\frac{117\times829.7388}{73}g(NaCl)。$$

154. 商用濃鹽酸之密度爲1.20而含有氯化氫40% 欲製此酸100瓩問需食鹽及硫酸重量若干?

$1000\times40=40000g$

$2NaCl+H_2SO_4\longrightarrow Na_2SO_4+2HCl$

$117\quad(2+32+64)\qquad 73$

$117:73=x:40000$

$$\therefore \quad x = \frac{40000 \times 117}{73} g \ (NaCl)$$

$98:73 = x_1:40000$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{78 \times 40000}{73} g \ (H_2So_4)。$$

155. 欲製氯酸鉀1瓩問需氯及氫氧化鉀各若干?

且此法是否經濟.

$6\,KoH + 3\,Cl_2 \longrightarrow KClO_3 + 5\,KCl + 3\,H_2O$

$6(39+17) \ \ 3(71) \quad (39+35.5+48)$

$366:122.5 = x:1000$

$$\therefore \quad x = \frac{366 \times 1000}{122.5} g \ (KoH)$$

$213;122.5 = y:1000$

$$\therefore \quad y = \frac{213 \times 1000}{122.5} g \ (Cl_2)。$$

156. 若100立升鹽酸分解將放氫及氯各若干立升?

$40 = 40$ 立升 (HCl)

$1.6398 \times 40 = 65.592g$

$36.5:1 = 65.592:x$

$$\therefore \quad x=\frac{1\times 65.592}{36.5}\,g\ (H)$$

$$36.5:35.5=65.592:x_1$$

$$\therefore \quad x_1=\frac{35.5\times 65.592}{36.5}\,g\ (Cl)$$

$$\frac{65.592}{36.5}\div 0.08987=\frac{65.592}{36.5+.08987}\,L\ (H)$$

$$\frac{35.5\times 65.592}{36.5\times 3.1674}\,L\ (Cl)。$$

157. 以螢石製商用氟氫酸1瓩問需螢石之重量若干?

普通商用之氟氫酸約含氟化氫50%

$$\therefore \quad 1000\times\frac{50}{100}=500g$$

$$CaF_2+H_2So_4\longrightarrow CaSo_4+H_2F_2$$

$$(40+38)\qquad\qquad (2+38)$$

$$78:40=x:500$$

$$\therefore \quad x=\frac{50\times 78}{4}=975g\ (CaF_2)。$$

158. 方程式$2H_2+0_2 \longrightarrow 2H_20$所表之反應是否為可逆反應若然試述所以使其向各方變遷之狀況

解：$2H_2+0_2 \longrightarrow 2H_20$為可逆反應其變遷狀況為低溫可使$H_2$,O代合為水蒸氣($H_4O$)高温則可分解$H_2O$為氫$_2$氧。

159. 於一實驗將10克鉄屑與8克硫混合加熱以至開始反應問反應中所成硫化鉄之重量若干?

解：$Fe+S \longrightarrow FeS$

$55.84 \quad 32 \quad 87.84$

$55.84:87.84=10:x$

$$\therefore \quad x=\frac{10\times 87.84}{55.84}=10\times 1.573=15.73g \ (FeS)$$

160. 設欲製造100瓩之膽礬試計其所須物料之重量?

$CuSo_4:63.6+32+64+159.6$

$CuSo_4:5H_2O:159.6+90=249.6$

$249.6:159.6=100:x$

$$\therefore \quad x=\frac{159.6\times 100}{249.6}=63.9\text{瓩} \ (CuSo_4)\text{。}$$

博　　物

I. 生 物 學 問 答

I. 生　　物

1. 試舉生物之特徵

茲將生物之特徵列舉如下:一

1. 生物體以細胞爲單位而構成.
2. 行代謝機能如消化呼吸排泄等.
3. 能生長.
4. 能生植.
5. 能運動.
6. 能感應外界之刺激。

2. 試述生物之起源

如何發源在今日之學術上,仍未解决,有創造說,流星說及進化說,種種之假說而已,但地球上之有生物,在地球冷却以後,多數學者主張進化說,謂生物來源,出自無機物,卽某種無機物質,因其外界物理狀況,——如光熱水分等——至適合無機物化,爲生物之程度時,則發生特殊能力,而開始活動,不過無機物之變成有機物,非可一蹴而至,其間經過種種階級,生出無生物之中間物,漸次進化始成吾人之所謂生物也。

3, 說明細胞之構造

細胞之形狀，雖種種不同，而其構造則大同小異，今繪一模式細胞，將一切重要構造表明如下：—

a. 小核.

b. 染色綱.

c. 綫綱.

d. 染色小核.

e. 後含物.

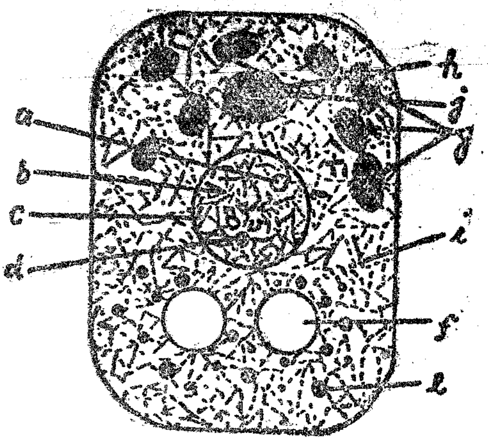
f. 空胞.

g. 體質.

h. 中心球.

i. 粒綫體.

j. 中心體。



4. 細胞及原形質之發明始於何人始於何時?

西歷1665年賀克(Robert Hook)氏將軟木及接骨木之髓，切成薄片，置顯微鏡下窺之，見有無數小室，狀如蜂窩，遂名其小室曰細胞，至 1839 年許萊典 (Schleiden) 許旺

(Schwaun)二氏，就動植物之細胞，廣爲查考推測，知細胞乃組成生物體之單位，但二氏於其之含有物，仍無深刻之研究，後至1844年馮慕爾(Vonwohe)，始確認細胞內所含粘液狀物質乃有生命之物質，遂以原形質名之。

5. 細胞之分裂方法若何?

細胞數目之增殖，實賴乎細胞分裂作用，因其核之分裂方法不同，可區爲直接分裂，與間接分裂，分別述之於次:

(1) 直接分裂

爲核分裂作用中最簡單之方法，卽核稍延長，其中央部之周圍，生出凹溝狀，凹度漸進，遂分爲二。

(2) 間接分裂

其分裂方法，甚爲複雜，靜止核將分裂之初，其所含染色質之量大增，凝集成爲組狀，後則緊縮增其粗度，再橫裂爲數斷，稱之曰染色體，其始染色體排列不一，後則排列於赤道部，形成核板，再由各染色體縱裂爲二，向兩極進行，達於極部，隨及互相癒合成爲塊狀，周圍生出核膜，其內部生出一個或數之仁，於是新核告成，由一核而分裂爲兩核矣。

6. 何謂細胞之集合特化與合作?

(1) 集化:細胞膜繼續分裂後,仍將細胞膜聯成一氣,共同生活,是謂細胞之集合.

(2) 特化:當細胞發成極早時均爲同樣,至後團結在一處之細胞,漸漸變化,因之細胞之構造與機能,亦各不同,是謂細胞之特化.

(3) 合作:特化後之細胞,僅能作有限之工作,必須集合具有他種機能之細胞,共同生活,是謂細胞之特化。

7. 生物之分類方法有幾並比較其優劣?

生物之分類法有二,人爲分類與自然分類是也,人爲分類法者,僅比較生物體之一部分,而分類之方法也,自然分類法者,考察生物體諸器官之形狀,位置及其生殖以類別之方法也,人爲分類法之最大缺點,僅以生物體一部分爲標準而分類,不問其他之部分如何,故往往至以天然相似之生物,爲別種類,而全無親緣者,反包括於一類之中,至於自然分類法,以生物之全體形態構造爲標準,故得明生物眞正之系統,是以自然分類法,較人爲分類法爲優,不過人爲分類法於檢索名稱上較爲便利耳。

8. 試述動植物相互之關係

動物與植物相互之關係舉其大者約有四端:—

(1) 養氣與淡氣之交換

動物呼吸作用，呼出之炭養氣，可爲植物炭素同化作用之用，植物同化作用排出之養氣，又可供動物呼吸作用之需.

(2) 淡氣之交換

植物與動物均不能卽時利用空中之淡氣，植物由地中攝取硝酸，鹽，經同化作用而成蛋白質，動物則取爲食物，然動物所排泄之淡素化合物，大抵成阿姆尼亞形，高等植物雖不能吸收，但賴細菌之作用，變爲亞硝酸，硝酸，卽可吸收，可見淡素亦循環於植物與動物之間.

(3) 媒介花粉

虫媒植物與昆虫間，在授粉上有不可離之關係.

(4) 散佈果種

植物種子散佈之法，雖有種種，而賴動物散佈甚多。

9. 生殖作用乃普通生物界共有之生活現象，但生殖方法，隨其種類而不同，試舉以明之

生物界之生殖法，雖隨其種類而不同，各有特殊之點，然可大別爲下之二種：—

(1) 無性生殖

卽親體分離，係簡單之生殖法，更可分爲分體生殖，萌芽生殖，胞子生殖三種.

(2) 有性生殖

較無性生殖爲複雜，又得分爲兩性生殖，與單性生殖兩種。

II. 植　　物

10. 試述動物與植物之區別

(1) 植物不能運動，動物則能之.

(2) 植物以無機物質爲養料，動物則以有機物質爲養料

(3) 植物有葉綠素，動物則無之.

(4) 植物諸器官顯於體外，動物則存於體內.

(5) 植物細胞膜中有細膜質，動物則有機丁質.

動植之區別在高等生物雖甚容易，然於下等生物，則極困難，上舉區別之標準，只適用於一部分生物之間，而不能概括生物全體不待言也。

11，何謂顯花植物與隱花植物？

(1) 顯花植物，總括開花結實以生種子者，如無花果，石刁，銀杏，赤松．

(2) 隱花植物，指不生花，由他種器官以繁殖者，如木賊，木耳，鳳尾草，蕨，蘋，土馬騌，地錢，蕈，海帶，石花菜，地柏。

12，何謂有莖植物與通長植物？

凡植物之體，具有根莖葉三部或二部者，謂之有莖體，無根莖葉之區別者，謂之通長體，具有莖體之植物，曰有莖植物，具通長體之植物，曰通長植物。

13．根莖葉三者皆爲植物之重要器官試註明其位置及特性？

(1) 根：爲植物之下行部其生長久而不息決不生葉．

(2) 莖：爲植物之上行部其生長久而不息必生葉．

(3) 葉：側生於莖，而於所生之莖，異其形狀，生長達一定之程度卽休止。

14. 子葉之意義若何，並比較單子葉植物，與雙子葉植物不同之點：

植物之種子，藏有幼小之植物體曰胚，種子蒔於地中，胚卽生長，而爲幼植物，胚所具之葉曰子葉，子葉之數，因植物之種類而不同，有一枚者曰單子葉，植物如竹，稻，麥，建蘭，芭蕉，蝴蝶花，水仙花，薯蕷，天門冬，石刁，柏，百合，青芋，有二枚者曰雙子葉，植物如桃，柿，蒲公英，菊，南瓜，車前，紫蘇。

單子葉植物　1. 胚具一個子葉.

2. 維管束散在莖中，無形成層，不能行粗大成長.

3. 葉大抵狹長有平行脈.

雙子葉植物　1. 發芽之際生兩個子葉.

2. 維管束生於莖中，排列爲輪狀，有形成層漸行粗大成長.

3. 葉有綱狀脈。

15. 根冠之任務若何?

根冠之任務可分三點述之於下:—

(1) 根之生長點,爲極軟弱之組織而成,生長之際穿石入土,難免損傷之慮,故根冠位於先端,以保護之.

(2) 根之生長點之細胞,富於含有物其膜甚薄,與水接觸則起交流作用,有亡失多量含有物之慮,故根冠位於其外部以範之.

(3) 根冠內部細胞,次第崩潰,變爲粘液,故根之先端,常粘滑,便於進行土中。

16. 何謂纏繞莖並舉例以明之?

纏繞莖者,其莖卷纏繞他物以上昇者之謂,因其旋繞之方向,區爲左卷與右卷兩種,牽牛之莖爲左卷之例,葎草爲右卷之例,何首烏則爲左右卷之例。

17. 何謂完全葉及完全花?

葉之全體可區爲三部:—

(1) 綠色扁平之部曰葉身.

(2) 支持葉身者之柄曰葉柄.

(3) 葉柄之基部每有二綠色小片曰葉托.

備具上述三種者曰完全葉，如櫻，梅，枇杷之葉，若三種中缺其一種或二種者，曰不完全葉，例如臘梅缺托葉，薺則僅具葉身，而缺托葉及葉柄.

花之具萼，花冠，雄蕊，雌蕊四部者，曰完全花，例如桃，梅，薹台之花，以上四部中若缺其一或三部者曰不完全花，例如蕎麥之花缺花冠，胡椒之花缺萼及花冠，桑花缺花冠及雄蕊，或雌蕊赤松之花則缺萼及花冠又缺雄蕊或雌蕊。

18. 葉序之意義若何並其種類共有若干?

各種植物其葉之排列法，必有一定，名此排列之狀態，曰葉序，區分之有下列數種：—

(1) 每節生兩葉，相對而生者曰對生葉，如茉莉，紫蘇等.

(2) 一節祇生一葉，各葉交互而生曰互生葉，如稻，麥等.

(3) 一節生三葉以上，圍繞於莖之週圍者曰輪生葉，如豬殃殃，問荊等.

(4) 節間極短，葉叢集而成束狀者，曰叢生葉，乃互生葉之變態也，如小蘗。

10. 葉脈之種類共有若干?

葉脈分歧之狀態,大別之爲兩類,如梅之葉,其葉脈交錯而成網狀,曰網狀脈,如竹之葉其葉脈互相平行者,曰平行脈.

網狀脈複別爲:—

(1) 羽狀脈:如梅之葉,主脈兩側生多數側脈狀若羽毛者曰羽狀脈.

(2) 掌狀脈:如楓槭等之葉,自葉柄頂端射出數條主脈展成掌狀者曰掌狀脈.

平行脈更分爲:—

(1) 直行脈:如稻之葉,自葉之基部直走尖端其脈始終平行者曰直行脈.

(2) 射出脈:如棕櫚之葉,其脈均自葉柄頂端向前左右三面射出者曰射出脈.

(3) 側出脈:如芭蕉之葉,自主脈兩側橫生多數平行側脈,直達葉緣者曰側出脈。

20. 單葉與複葉之區別若何各種例以明之?

葉身祗有一枚，而葉柄與葉身之間，無節者謂單葉，如桃，梅等

葉身有二枚以上或葉柄與葉身之間有節者，皆謂之複葉，如柚，柑，豌豆等。

21. 說明落葉樹?秋季落葉之理由。

秋季落葉，乃普通樹木一般之現象，其理由甚爲複雜，然而不外受外界影響，所起之適應性也，約略述之於次:—

(1) 寒氣之侵襲

落葉樹葉質薄，而無禦寒之裝置，當秋冬之時，氣溫漸降，難勝外界凜冽之寒氣，旋成枯萎之現象，且植物生理上，各種作用須各有適當之溫度，溫度過低，因之作用遲滯，或全停止，而呈休止狀態，葉亦無存在之必要，故雖脫落而植物生活無防礙也。

(2) 根部吸收作用之低減

水爲植物必要物質之一，生活植物體，必保有定量之水分，不足定量，則防礙生活作用，若過少時，

則原形質之構造，卽破壞而枯死，植物體內水分，乃由根吸自土中，上昇至莖，進達葉內，其中最大部分，復由葉之蒸發作用，散於外界，至秋季地溫下降，根之吸收作用因而低減，所吸水分，不足以敷葉之所蒸發，於是葉片漸次枯萎，終至脫落，不然體內所入不敷所出，全體必有乾枯之虞，則是落葉不但與植物無損而且有益.

(3) 離層組織之形成

落葉樹葉之脫落，乃廹於外界之影響而起，每至秋季卽行彫謝，習之旣久，於是適應落葉之組織生焉，當葉未脫落之先，葉柄或葉片基部，發生離層之特別組織，離層由柔膜細胞組織而成，各細胞之原形質，完全消失，惟含脂肪體，旣爲枯萎之細胞，其膜壁甚易推折，維管束亦自此折斷，而葉遂脫離莖枝相繼而落下者，亦有離層細胞中之中層，起黏液之變化，葉遂由此脫落者，又有葉未脫落之先，其離層部分發生栓皮，遮隔水分之通路，葉遂乾枯而脫落者凡此種種皆適應落葉而生也。

22. 花冠之種類共有若干，其區別如何？

花冠可分三種分別述之如下：—

(1) 十字形花冠

如蕓苔，萊菔之花冠，形如十字名曰十字花冠.

(2) 蝶形花冠

如豌豆，紫藤之花冠，形如蛺蝶曰蝶形花冠，可分瓣，外面之一花瓣，具形最大曰旗瓣，內面兩花瓣，擁護雄雌蕊者曰龍骨瓣，兩側之二花瓣曰翼瓣.

(3) 脣形花冠

如野芝麻，紫蘇之花冠，下部結合如筒，上部上下二裂，翕如上下兩脣，名曰脣形花冠，其上脣爲二瓣結合，下脣則三瓣結合也。

23. 雄蕊可分爲若干種？

雄蕊分三種茲表列於下：—

(1) 二強雄蕊：屬離生雄蕊，蓋雄蕊四支，二長二短，如野芝麻，紫蘇。

(2) 四強雄蕊：亦屬離生雄蕊，蓋雄蕊六支，四長二短，

如薹苔，萊菔.

(3) 聚約雄蕊：如蒲公英，向日葵以五雄蕊之約，合成一

束曰聚約雄蕊。

24. 試述植物子房之位置

1. 子房位置在萼之下者曰下位子房.

2. 萼之位置在子房之下部者謂之半下位子房.

3. 子房之位置在萼之上者謂之子房上位。

25. 何謂胎座，共分若干種?

胚珠着生之處，曰胎座，胎座着生之狀態，可分四種

1. 單子房而有一室，胚珠沿生於房之內縫線，成一縱列

名曰邊緣胎座，例如豆類.

2. 複子房而僅有一室胚珠沿側膜而生，有數縱列名曰

側膜胎座，例如罌粟.

3. 子房有數室，胚珠附着於中軸之周圍者曰中軸胎座，

如山茶.

4. 子房一室，中央特生柱狀體，胚珠着生於其周圍者曰

特立中央胎座。

26. 花序之意義若何,並舉其種類?

花之生於莖上,有一定之排列,名此排列之狀態曰花序,並因其着生方法不同,可區爲無限花序,與有限花序,茲分述於下:

(1) 無限花序:自下部或周圍之花先開,漸及於上部或中央之謂.

(2) 有限花序:自頂端或中央之花先開,漸及於下部或中央之謂。

27. 形成層之意義若何?

雙子葉植物,及裸子植物之維管束中,木質部與靱皮部之間,有一層柔薄之組織,名曰形成層,此層之內外,年生新細胞,內方新細胞成長,則造成新木質部,外方新細胞成長,則造成新靱皮部,使莖枝年年粗大,單子葉植物之維管束中無形成層,故其莖祗能伸長不能加粗。

28. 植物之維管束約可分爲幾種?

木質部與靱皮部,其排列之狀態,常隨植物之種類及部分而異,約可分爲四種

(1) 並生維管束：韌皮部在維管束之外方，木質部在內方例如馬兜鈴之莖。

(2) 複並生維管束：每一維管束中有二個韌皮部，在內外兩方，一個木質部嵌入其中，例如南瓜之莖。

(3) 輪狀維管束：木質部在維管束之中央，韌皮部包圍之，或韌皮部在維管束之中央，木質部包圍之，例如蕨。

(4) 放射維管束：木質部以中心射出成放射狀，而韌皮部錯列於其間，例如白菖之根。

29. 說明年輪生成之理

寒暖迭遷之地，所生雙子葉植物及裸子植物，其莖之橫斷面，有與莖之生長年數相符之輪層，曰年輪，蓋春初之交，形成層生長特甚，莖之木質部，所生細胞膜壁較薄，導管粗大，故材質疎鬆，而秋季所生者，細胞膜厚，導管細小，故材質緻密，一年間所生之材部，其春秋之遞嬗，雖屬徐徐不易辨識，然至翌春所發生之春材，與前一年之秋材相接，兩者之間界限甚明，而年輪現出焉。

30. 春材與秋材之區別若何?

春材 (1) 木質疎鬆.

(2) 細胞膜較薄.

(3) 導管口徑大,供液汁運搬之用.

(4) 木纖維之數甚少.

秋材 (1) 木質緻密.

(2) 細胞膜甚厚.

(3) 導管口徑小者居多,專司堅整幹之用.

(4) 富有木纖維。

31. 試述風媒花與虫媒花之區別

凡植物之花粉,藉風力輸送者,謂之風媒植物,稱其花曰風媒花,其花形態概小而不美麗,且無芳香,惟所生之花粉極多,概呈球狀,表面平滑,無粘着性,如松柏類之花粉,特生兩個氣囊,以便易於乘風飛去.

凡植物之花粉,藉昆虫轉達者,曰虫媒植物,稱其花曰虫媒花,其花形態必較大,有美麗之顏色,或放芳香或具蜜腺,以引誘昆虫,其花粉之量,常較風媒花爲少,形態亦較風媒花大異,表面粗糙,而有多數突起或被有粘液,以便易於附着昆虫之肢體。

32. 何謂植物之世代交替?

植物之繁殖每以有性無性二世代，交互循環，生生不已名曰世代交替，如羊齒類之蕨，其世代交替最爲明晰，當具充分生長於葉背之緣部，作多數子囊，生無性胞子於其內，此時全無雌雄生殖器，故名曰無性世代，迨此無性胞子落地，成爲綠色心臟形之扁平體，此時謂之有性世代，蓋此扁平體之下面，生有雌器及雄器，雌器中之卵球，與雄器中之精子結合，遂成卵子，卵子發芽，終複爲無性世代之植物。

33. 植物生長之要素爲何，試舉其名?

植物生長之要素有四，玆舉其名於下:

1. 原料:如蛋白質小粉等用以造成新原形質及細胞膜。
2. 水 : 水不僅能造成化合物，溶解原料，輸送養分，且能使細膜十分膨脹，促進細胞生長。
3. 養氣:爲呼吸之要素，又爲生活作用上所不可缺者也。
4. 溫度:植物生長必需適當之溫度，種子發芽時，溫度亦居要素之一。

34. 試述炭素同化作用由何而命名，及其造成物.

同化作用有廣狹二義，以廣義言之，爲生物攝取外界之簡單物質，以造成複雜物質之謂也，以狹義言之，爲綠色植物取外界之炭素養氣，及水分爲原料，以造成有機化合物之謂也，二者惟恐混淆，故後者特名曰炭素同化作用，茲分述其作用之方法，及其造成物如下：

(1) 炭素同化作用之方法

綠色之葉，由氣孔吸入炭養氣，由根吸入水分，由葉綠素藉原質形之作用，并藉日光之力，以炭養氣及水爲原料，造成有機化合物，此時有多量不用之養素，再由氣孔排出於空氣中.

(2) 同化作用之造成物

由炭素同化作用，造成之有機化合物，或爲糖類或爲小粉，糖類可卽移送至植物他部，以供需用小粉，至夜間則亦化爲糖類，移送他部，但晝間如需用小粉時，亦卽化爲糖類以應急需者。

35. 試比較呼吸作用與炭素同化作用之異同?

茲將呼吸作用與炭素同化作之別表列於下

呼吸作用	同化作用
1. 吸取養氣呼出炭養氣	1. 吸取炭養氣呼出養氣
2. 不需日光	2. 需要日光
3. 不需葉綠素	3. 需要葉綠素
4. 不論晝夜	4. 惟晝間能行
5. 增加生活力	5. 造成營養分

36. 細菌與人生之關係若何?

細菌與人生之關係，可分爲有益細菌，與病原細菌二類，茲分別述之於下:—

(1) 有益細菌:

a. 醋酸細菌: 常在酒液中，使酒液起酵醱作用，造成醋酸。

b. 硝化細菌: 多在土壤中，使鹽精變爲硝酸，鹽類以供植物之營養。

(2) 病原細菌:

a. 霍亂細菌: 能使人腹痛吐瀉，四肢厥冷，且手指之螺紋凹陷，俗稱癟螺痧，此菌於夏時發育最盛。

b. 傷寒細菌: 使人體劇熱,不省人事,醫治甚難

c. 白喉編菌: 能使人之咽喉腫痛,聲音嘶啞,小兒患此最多.

d. 黑死病細菌:使人身體發熱,精神昏亂,以鼠為此病菌之媒介;故亦稱為鼠疫.

e. 赤痢細菌: 能使人腹痛且下痢而帶血色之黏液。

37. 何謂寄生植物及共生植物試舉例以明之?

(1) 寄生植物:凡植物之不能獨立生活,必著於他生物或有機物質,而吸取養料以營生活者,謂之寄生植物,如菟絲子寄生於灌木之莖以吸取其養分.

(2) 共生植物:與寄生植物異,蓋寄生植物對於被寄生之植物有害而無益,而共生植物則彼此互有利益也,如根瘤細菌,攝取空氣中游離氫素,造成養料,似供豆科植物之吸收,然此種細菌,亦吸收豆科植物中之養液,而為其生長之養料。

III. 動　物

38. 脊椎動物何綱爲溫血何綱爲冷血，又溫血與冷血之差異如何，試撮要述之?

脊椎動物中，哺乳類，鳥類兩綱爲溫血，爬虫類，兩生類，魚類三綱爲冷血，溫血云者卽血液有一定之溫度，不受外界溫度之影響，而昇降者也，冷血云者其血液無一定之溫度，隨外界之溫度，而昇降者也，至其差異之原因，則由於循環系統之構造不同。

39. 試述哺乳動物之特徵?

哺乳動物之特徵有七玆列舉如下:

(1) 哺乳　(2) 有橫隔　(3) 神經有胼胝體與腦橋　(4) 皮膚生毛　(5) 溫血　(6) 胎生　(7) 畢生以肺營呼吸。

40. 反芻類胃之構造若何

反芻類之胃，分爲四房，其嚥下之食物先入第一房瘤胃，飽受濕潤，次移入第二房蜂巢胃，食物由蜂巢胃再返口腔，細加咀嚼後，更下食道，循蜂巢胃壁之一溝，而入第三房重瓣胃，經第四房皺胃至此始入於腸。

41. 試舉鯨非魚之證明

(1) 以肺臟管呼吸　(2) 胎生　(3) 骨骼與獸類等

(4) 哺乳　(5) 血溫　(6) 幼兒生毛。

42. 試舉蝙蝠非鳥之證明?

(1) 體生柔毛　(2) 有齒　(3) 胎生　(4) 以乳哺子。

43. 試述鳥類之特徵

鳥類之特徵有以下之七點:

(1) 前肢變翼　(2) 體被羽毛　(3) 有羽脂肪

(4) 具角質鞘之嘴　(5) 兩顎無齒　(6) 卵生

(7) 具龍骨突起。

44. 鳥類之胃分爲幾部各部之功用若何?

鳥胃分爲前胃，與砂囊兩部，前者分泌胃液，用以消化食物，後者常具沙粒，藉以磨碎食物，而使易於消化也。

45. 試舉駱駝適於沙膜之性質?

駱駝習性温和，聽視嗅三覺，俱銳敏，其適於沙膜之特性尙有如下之五點:

1. 毛色　駱駝之毛色爲沙色，使他動物不易認視，以資避難。

2. 眼鼻　嗅覺特別發達，能嗅知三里外之水源，便於覓水，且有特別裝置，嚴防砂塵之侵入.

3. 蹠形　連結二趾之足蹠膨成墊狀，且富彈力，故能於易埋沒之沙膜中步行，而支其體重.

4. 水脬　胃內有水脬，可貯多量之水，隨駱駱之意志，可輸入瘤胃，自備其用，頗適於沙膜生活.

5. 駱峯　駱峯爲堆積脂肪之處，遇饑餓時，得隨時取用，可耐饑餓。

46. 鳥類何以能飛行試述其適應飛行之構造?

鳥爲自動之飛機，藉空氣之抵抗力，得以前進，其適應飛行之構造，略分四點說明於下:

1. 鳥翼

相當於飛機之浮揚面，由翼骨筋肉神經血管及飛羽構造而成，適於空中飛翔之用.

2. 最輕而最堅之構製

鳥之骨骼，由最少量之物質製成，統合各骨成一無縫之箱，爲最堅牢之器官.

3. 轉向及平衡構造

鳥尾及舵羽，用以轉向，舉其羽尾可以斜上，降其羽尾可以下轉，此外擴展或束合其羽尾，得增加或遞減舵之勢力.

4. 具有絕大支持力

鳥之體温極高，影響於力之發生極大，且鎖骨與龍骨等有絕大之支持力，胸筋亦甚發達，能久動而不疲勞。

47. 鰾爲魚類所獨具之器官，其作用安在?

魚類之鰾，有呼吸，共鳴，發聲，準水等作用之記載，就中以後者爲最主要，卽保存魚體之重，與其所排除之水量之重相等，魚類得此平均，在水中浮游時可大減其筋肉之勢力，此外與魚類之下沈及上昇亦稍有作用。

48. 何謂候鳥，漂鳥，留鳥？

(1) 鳥類中應氣候之變化，而易其居處者，謂之候鳥，如雁鳧等之秋日南渡，春日北歸是也.

(2) 鳥類中之逐食而漂流附近者，謂之漂鳥，如啄木，伯勞是也.

(3) 鳥類中之有定處者謂之留鳥，如雀鳥等是也。

49. 蛙之發生及變態若何？

蛙產卵於水田，池溝等處，其卵爲黏物質所包，富於卵黃，發育而爲蝌蚪，蝌蚪口小尾大，而側扁藉以游泳水中用鰓呼吸，無異魚類，嗣後首生後肢，次生前肢，尾與鰓乃漸歸消滅，同時遂發達肺臟，上陸而生活，凡動物發生經此之變化者名曰變態。

50. 昆虫之口器共有若干不同之種類各種口器之構造若何？

昆虫之口器，因其形狀及功用不同，可區爲三種分別述之於下：

(1) 咀嚼性口器：上下唇各一片有一對強而銳之大顎與一對極發達之小顎其咀嚼面有齒狀之缺刻以爲咀食植物之用如蝗虫等是.

(2) 吸收性口器：口之基部多延長，而成管狀，其大小二顎變化如銳針，以爲通過動物之皮膚，及植物表皮之用，如蟬等是.

(3) 中間性口器：卽在咀嚼性及吸收性二者之中間者，如蜜蜂，其口器能吸收液汁，同時亦能食堅硬之物。

51. 試述昆蟲成長所經之狀態.

(1) 無變態： 除翅未成長外，其餘形態悉似親虫者，名曰無變態，如衣魚是也.

(2) 不完全變態：成虫與幼虫非有重要之差異，而幼虫之體質，附屬物，能直接轉爲成虫之體質，及附屬物者，曰不完全變態如蝗.

(3) 完全變態： 成虫與幼虫，其外形之附屬物，及內部之體制，迥然不同，幼虫雖經過蛹期，始臻完全之變化，而成成虫者，是曰完全變態，如蝶蛾類是也。

52. 試比較蝶與蛾類之區別?

蝶類與蛾類之區別以表比較如下

異別 種類	飛翔時間	休息時翅之狀態	觸鬚	翅色	體形
蝶類	晝	直豎	絲狀	外美	細長
蛾類	夜	水平	羽毛狀	內美	肥大

53. 試述螢發光之構造及其發光之原因

螢之腹部有發光器，內充脂肪小粒，外被硬質薄膜，周圍具有多數小管枝，空氣由氣孔而入氣枝，更透入發光器內，器內小粒卽起養化而發螢光。

54. 昆蟲複眼之構造若何?

複眼，爲集合無數六角形之單眼所成，由單眼接受外界傳達之光線，各部匯合而入於眼神經，卽能感知一物，而映出其全形焉。

55. 試述蜜蜂與白蟻之社會組織

(1) 蜜蜂之社會組織

蜜蜂之社會，由蜂后，雄蜂，職蜂組織而成，其所以成三種個體之原因如下:

1. 受精之卵……成雌性蜂

(甲) 主以花蜜飼養者……成蜂后

(乙) 主以花粉飼養者……成職蜂.

2. 不受精之卵……成雄蜂.

(2) 白蟻社會之組織

1. 雄王……有眼有翅不完全變態.

2. 雌王……有眼無翅不完全變態.

3. 職蟻……頭圓無眼無翅無變態.

4. 兵蟻……頭尖顎大無眼無翅無變態。

56. 述昆虫類與人生之關係?

昆虫類與人身之關係,可分利害兩方言之

(1) 有利方面

1. 防礙害虫害草之發生,如瓢虫之食蚜虫,或寄生蜂生卵於蛾之幼虫體內等是也.

2. 媒介花粉蜜蜂等是也.

3. 掃除汚物如蟻類等是也.

4. 供給衣食材料如蠶蜜蜂等是也.

5. 可作鳥類魚類之食餌.

(2) 有害方面

1. 害栽培植物.

2. 害家畜.

3. 食品製造品之傷害，如蠹食穀類，房屋，衣服，毛羽，器具之昆虫是也.

4. 傷害人類如瘧蚊，臭虫等是也。

57. 何謂昆虫之保護色，警戒色，及擬態，試舉例以明之

1. 保護色　止於葉之昆虫，其色常綠，止於樹幹之昆虫，其色常褐，又如木葉蝶，及竹節虫等全體肖他物之形狀，使他動物不易認視，而藉以保護其體，此種顏色曰保護色.

2. 警戒色　昆虫之大敵爲鳥，鳥嘴甚銳，舉凡昆虫之防禦器官，皆不足以禦之，故凡昆虫有臭味不堪食者，多生長毛，或顯著色彩，使鳥類一見其不可食，不致輕於下喙，以傷其生，此種彩色曰警戒色.

3. 擬　態　例如王蝶，味極惡，爲攀鳥所不食，又有一種總督蝶者，並無惡味，惟形擬似王蝶，鳥不能辨別，賴以自全，是謂擬態。

58. 試舉五種寄生人體內之寄生虫

1. 條虫 種類極繁，常見者，有擴節裂頭條虫，無鈎條虫，與實條虫，寄生於體之腸中，有礙消化，長者時達二丈乃至三丈，爲人大患.

2. 包虫 包蟲之形狀不一，小自粟粒，大至人頭，見於人體各處，若在心臟辨膜阻礙血進，或在腦髓中，使神經系統起障礙之時，往往致人於死地.

3. 蛔蟲 本蟲爲人體寄生蟲最普通之一，尾端稍彎曲，長有六寸乃至尺餘者，普通寄生於小孩腹內，但富於移動性，往往在他處發現.

4. 蟯蟲 是爲白色絲狀之小蟲寄生於直腸主見於小兒

5. 十二指腸蟲 本蟲爲被害最著之一線蟲，多寄生於十二指腸及小腸上，強吸腸之內面，故往往腸破而出血。

59. 試舉六種傳染疾病最著名之昆虫

1. 鼠蚤或蝨，傳播瘟疫.

2. 蒼蠅傳播傷寒與霍亂痢症病菌.

3. 雀雀蠅傳播睡眠病菌.

4. 黃熱傳播黃熱病菌.

5. 瘧蚊傳播瘧疾.

6. 飛蠅傳播眼炎及各種目疾。

60. 試比較章魚與烏賊之區別?

章魚與烏賊之區別以表比較於下

異別 種類	腕	吸盤	甲殼	肉鰭
烏賊	五對	有柄	發達	甚大
章魚	四對	無柄	僅留痕跡或缺如	小或無

61. 試說明眞珠之成因及造眞珠之製法

某種物質若滲入珠母之膜,與殼之間,而以膜內所分泌之殼質物,漸次包裹之,遂爲眞珠,人造眞珠之製法,則先用粘土或其他物質,製成佛像等,插入於珠母之外套膜,與介殼之間,數年後表面全爲眞珠層所掩覆取去卽得。

62. 試說明變形蟲之構造營養行動生植及刺激性

1. 構造　變形蟲爲一形狀常變之細胞,顯分內外兩層外層卽外胚葉質,極透明,包圍其外部,內層卽內胚葉,其中顆粒甚多,爲細胞核,食物胞,水胞卽縮胞,後含物等.

2. 營養　如遇有食物時卽伸出假足將食物包圍再用原形質消化其可食之部分而棄去其餘渣.

3. 行動　變形蟲之行動全賴伸出之假足.

4. 生植　普通生植法爲分裂生植亦有由胞子生成者.

5. 刺激性　變形蟲能感化學品之刺激及熱度之變更與光之強弱藉此便於選擇食物。

II. 生理學問答

IV. 生理

63. 試述人體骨絡之種類並列表以明之?

人體有二百零六個骨片連絡而成人形茲分別述之於下:

(1) 骨頭
- 頭盍骨……前頭骨後頭骨顱頂骨顳顬骨蝴蝶骨篩骨
- 顏面骨……上顎骨顴骨淚骨鼻骨下甲骨鋤骨下顎骨
- 耳骨………槌骨砧骨鐙骨
- 舌骨

(2) 軀幹骨 ⎧ 脊椎骨……頸椎胸椎腰椎薦骨尾骶骨
⎨ 肋骨………眞肋骨假肋骨浮肋骨
⎩ 胸骨………

(3) 四肢骨 ⎧ 上肢骨
⎩ 下肢骨

64. 說明關節之構造

凡可動關節之兩端 皆包有軟骨富有彈力 防其互相摩擦衝擊 而損傷也 關節之外圍有白色紐狀之韌帶以連繫之以防其脫離而外逸 韌帶之內面 及關節面俱覆以薄膜常分泌一種滑液以滑潤骨之末端 減少摩擦 宛如塗油於輪軸以利其運轉焉。

65. 骨之功用若何?

骨之功用約可分三點說明

(1) 能保護身體內柔軟之器官如頭腔之包藏腦髓脊椎之儲藏脊髓肋骨之保護心臟與肺臟等是也.

(2) 能助筋肉以運動全身蓋人身之長骨恰如槓桿故能使附着筋肉收縮而起運動.

(3) 能保持身體之形狀。

66. 骨之成分若何?

骨由有機物與無機物質所成,即由35%之骨素與65%之燐酸鈣,與炭酸鈣,所組成,兩者相合,其堅無比。

67. 筋肉之種類有幾其區別如何?

筋肉之種類二,一曰隨意筋,筋纖維具,無數橫紋,附着於骨骼,能隨意運動,自由伸縮,如咀嚼筋,僧帽筋等是,一曰不隨意筋,爲細長有核之細胞,無橫紋而平滑,構成腸胃膀胱之周壁,不能隨意伸縮。

68. 人死後強直之理由安在?

人死後筋肉頗硬固,關節不易屈曲,是謂死後僵直,蓋因筋肉中,蛋白質凝固之故。

69. 筋肉之槓桿作用如何,試詳述之?

(1) 頭之運動,載域爲支點,頭爲重點,頭前或頸後之筋肉爲力點,即第一種槓桿也。

(2) 跂足之際,關節爲重點,趾端貼地爲支點,踵部爲力點,即第二種槓桿也。

(3) 手持重物,以屈前膊時,二頭膊筋之着於撓骨處,爲力點,肘關節爲支點,手爲重點,第三種槓桿也。

70. 試述疲勞之原因及補救方法

吾人運動過度，則疲，勞其原因有三

(1) 肌肉及淋巴中之養分已罄，肌肉細胞，因養分缺乏，而疲勞.

(2) 肌肉細胞中缺乏養氣.

(3) 肌肉運動，生某種廢物，堆積於細胞及淋巴中，而起疲勞.

疲勞後需休息，或睡眠，斯時肌肉動作極少，可以排泄廢物，並貯藏養分。

71. 何謂頡頏，並述其功作若何?

隨意筋收縮後，能卽復原位者，蓋因一方之筋肉，弛緩，一方之筋肉卽起收縮，此等筋肉，互爲反對之運動，名曰頡頏筋，凡隨意筋皆具此筋，以相配偶，故能協助，以營一切運動之官能。

72. 試舉消化腺之名稱並其功用

(1) 唾線……耳下線，頸下線，舌下線，……分泌唾液，消化小粉.

(2) 胃線……胃液，胃液素，……………消化蛋白質.

(3) 肝臟……膽汁……………………………消化脂肪.

(4) 膵臟……膵液膵液素……………消化小粉,脂肪
蛋白質.

(5) 腸腺……腸液………………………補助膽汁,膵液
之消化。

73. 試述消化之經過

食物入口,經舌及口腔諸筋肉之翻動,上下齒之咀嚼,和以唾腺分泌之唾液,使食物柔軟,而易於嚥下,且能使食受唾液素之作用,變化小粉質,爲糖類,咀嚼之後,藉舌及口壁諸筋肉之運動,送之於咽頭,至食道,又經食道筋肉之蠕動,收縮輸送至胃,胃乃分泌,胃液藉筋肉層之收縮,與食物相攪和,胃液素與游離之鹽酸共同作用,能使肉類及卵等之蛋白質,變爲液體,被吸收於胃壁之微血管中,食後約十五分鐘,幽門屢屢弛放,以胃中食物輸送於小腸,凡二小時後,食物中蛋白質,脂肪,小粉等,悉被消化成爲乳糜,滲透小腸壁,而入於血中,達於身體各部。

74. 試述腸中食物腐敗之原因

食物未完全消化時，則留於腸中，因腸中之大腸菌，使之醱酵，遂生腐敗，含水炭素醱酸生，蟻酸，醋酸，乳酸，沼氣等蛋白質，醱酵時，除生阿姆尼亞硫化輕外，尚生石灰酸等毒質，通常爲血所吸收，由肺臟排泄，其餘由肛門而出，所謂屁者是也。

75. 何謂共同養分之直接吸收法與間接吸收法?

由外界攝取之蛋白質，澱粉，各種相異之成分，經消化後，變爲體內到處可通融之養分，藉血管之吸收，或滲透，直接入毛細管者，則爲直接法，乳化後之脂肪，及油，不與他食物同吸收，藉乳糜管及淋巴管之吸收，變爲人脂者，則爲間接法。

76. 心之構造若何試詳述之

心臟約如本人之拳大，位於肺臟之間，心尖傾於左面，及前面外有膜，曰心囊，內有賦滑液體，可減少運動時之磨擦，心內部分四室，曰左耳，右心耳，左心室，右心室，

心耳與心室相通，其間有瓣，曰僧帽瓣，與三尖瓣，瓣之排列祇准血液向一方行，心耳心室，各與血管相通，名出心臟者，曰動脈，入心臟者，曰靜脈，動脈基部，有半月瓣，離心臟後，愈分愈細，卒成毛細管，後愈合愈大，終成靜脈，而返心臟。

77. 試解釋血液循環之理

人體成於無數細胞，而各細胞不能行動以索食，欲維持其生活，需藉血液，在體內循環，一面運養於各細胞，一面移出廢物質，及無用之部分，此卽血液循環之理。

78. 大循環與小循環之行程若何？

(1) 大循環之行程⟶左心耳⟶左心室⟶大動脈⟶動脈⟶微血管⟶靜脈⟶大靜脈⟶右心耳.

(2) 小循環之行程⟶右心耳⟶右心室⟶肺動脈微血管⟶肺靜脈⟶左心耳。

79. 血液之成分若何?

血液之成分,有液體與固體兩種,茲分別述之於下:

- 血液
  - 液狀成分……血漿
    - 纖維素
    - 血清
  - 固形成分
    - 赤血球……爲扁圓形無核,由基質及血色素而成.
    - 白血球……名無色血球,比赤血球大有核,能捕殺細菌.
    - 血小板……形比赤血球更小,質類白血球之核。

80. 試述血液凝固現象及其生理之値價

血液接觸空氣時,卽由血漿形成名纖維素之細線,纏絡血球成固體塊,是謂血液凝固現象,在生理上,大有價値,因要防血液從傷處迸出,致人於死地,卽賴血液凝成血餅,密閉血管之傷口故也。

81. 試述淋巴之形狀及其功用若何?

淋巴爲無色透明之液體,身體各部到處皆有,人體之各活動細胞,所需之各種養分.乃仰給淋巴.當血液循環全體時,取之於血液,同時炭酸氣,及廢物,亦賴淋巴移於血液內。

82. 何謂外呼吸與內呼吸分別說明之

(1) 外呼吸者自空氣中,吸取酸素,與血液中之炭酸素,互相交換之謂也,司此作用者爲肺臟與皮膚。

(2) 內呼吸者,爲血液中之酸素,與組織之炭酸,交換之謂也,司此作用者,爲全身組織之毛細管。

83. 肺臟呼吸之形式分爲若干種試分別說明之

肺臟呼吸之形式 分腹式 與胸式兩種茲分別說明之如下

(1) 腹呼吸 横隔膜,筋纖維之收縮,自減其穹隆之度,下壓腹部,此時之胸腔上下廣而容積自增,肺內空氣稀薄,於是空氣進入肺臟,造横隔膜,回復常態,胸腔減小,則肺臟亦依彈力而收縮,排出空氣於體外,此等呼吸,因横隔膜之作用,而起者,名曰腹呼吸.

(2) 胸呼吸 肋骨之前端,引而上擧,則肋間擴充,而胸腔增大,空氣自氣管而流入肺中,迨肋骨低下,則胸腔縮小,壓廹肺臟,肺中空氣,復自氣管流出,此等呼吸作用,名曰胸呼吸。

84. 試述皮膚之構造及其功用

皮膚爲覆於身體全面柔靱之膜，爲天然無縫之衣，分表皮與眞皮兩層，前者爲由皮細胞排列而成，含有色素，後者由緻密之結締組織所構成，具有血管與神經，其下面有脂肪層，名曰皮下脂肪組織，至於皮膚之功用，有五分別述之於下：

皮膚之功用
1. 保護作用……分泌脂肪遮隔光線
2. 排泄作用……增減汗液.
3. 調節作用……增減體温.
4. 觸覺作用……皮膚內有感覺神經之末梢
5. 呼吸作用……略能吸酸素而排炭酸素.
6. 吸收作用……吸收力甚微。

85. 試說明出汗之原因及其作用

吾人之體温，常有一定温度數目，過高過低，均有礙於健康，故於外界温度增高時，皮膚之血管張開，由汗線排出多量之汗液，藉行蒸發作用，減去温體，故卽出汗，卽所以調節體温也。

86. 試述神經系統之概略

神經系統，負調節支配，及融和身體各細胞，與各器官之動作力者，其中樞器官，爲腦髓，脊髓，及出自腦髓脊髓之神經，就事實言，在體中有最高之統治權，玆將腦髓脊髓分別言之.

(1) 腦髓爲思想器官，并爲意識所在之處，使吾人能視，能聽，能嗅，能觸，能記憶，能象思考，及愛憎，誠人類靈魂之器官也，腦複分大腦小腦，及延髓三部，大腦專管精神運動，感覺作用，小腦平衡身體，延髓管反射作用.

(2) 脊髓，爲一細長之柱體，上接延髓，下端至第一腰椎止，前後有溝，所以分爲左右兩部，脊髓之機能，爲傳達消息及反射運動.

(3) 交感神經，爲腦脊髓分出之枝綫，其功用爲聯絡身體與腦脊髓。

87. 試舉人體特殊感覺器官並述其作用如何?

1. 皮膚(觸覺) 眞皮中有乳頭,內具觸覺器,能感痛,感溫,感位置,感壓力,及物之重量.

2. 舌 (味覺) 舌表面之粘膜,內有三種乳頭,能感苦甜酸鹹四味,所感部分亦略有分掌.

3. 鼻 (嗅覺) 鼻內有嗅毛,空氣與之接觸時,能辨別空氣,預防中毒,便於求食,及愉快精神等作用.

4. 耳 (聽覺) 耳分外中內三部,前二部傳音,後一部感音,並感身體之位置.

5. 眼 (視覺) 感覺器官中最重要者,爲眼,深藏眼窩中,防其受傷,外界光線入眼球後,經各種屈折,體成倒像於網膜之上,像刺激神經末端,經視神至大腦,即有所感。

88. 眼之正視近視遠視之分別如何

正視 凡水晶體之凸度,適宜者物體之映像,恰當網膜之上視覺,頗爲明明瞭,即正視眼.

近視　凡水晶體之原徑增大，或眼球前後之直徑過長，變爲長圓形，則映像生於網膜之前，不能明視，必令眼與物近以調節之乃得見，卽近視眼也.

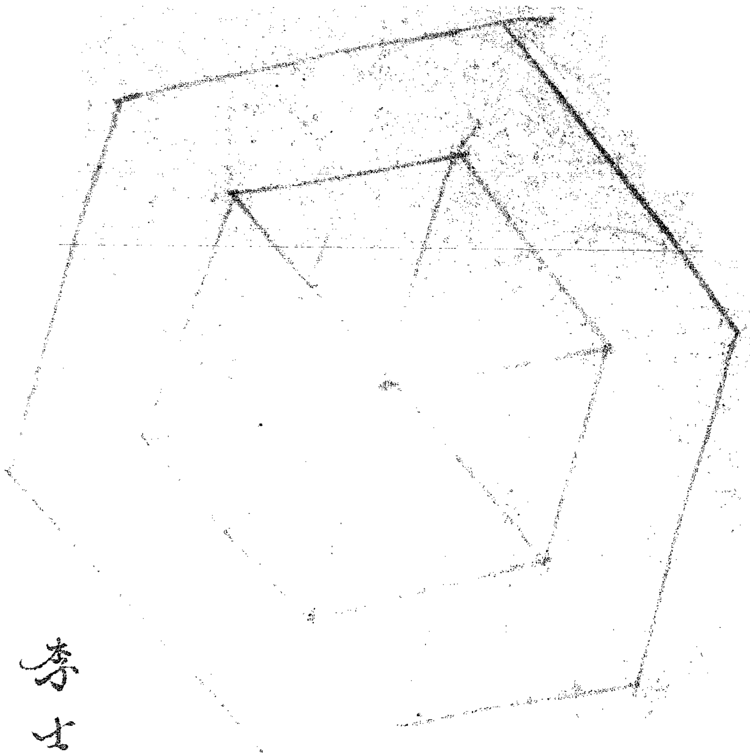
遠視　凡水晶體之原徑減小，或眼球前後之直徑過短，變爲扁圓形，則映物像生於網膜之後，亦不能明視，必令物遠以調節之乃得見，卽遠視眼也。

89. 試述生活素之種類及其分布

各種營養物質，除蛋白質，脂肪，含水炭素，鹽類等，外尙有一種特殊化學物質，亦占動物及人類，營養上發育成長上重要之位置者，卽生活素是也，據學者之研究，已由各種之動物，及病症上之試驗，證明日常食物中，若缺乏生活素，必發生脚氣病，佝僂病，及壞血病，故活生素，亦依其缺乏，而起之疾病種類，分而爲三，一曰脚氣病，生活素，此種生活素，幾爲全體自然物食中所含有，就中以各種植物之種子，胚芽，及動物之卵中爲最多，二曰佝僂病，生活素，僅存新鮮蔬菜及一定之動物脂肪中，三曰壞血病，生活素，含於新鮮之蔬菜及動物組織中。

◎編者附言

黨義題解分下列六項。（一）三民主義，（二）孫文學說，（三）實業計劃，（四）民權初步，（五）建國大綱，（六）其他，總計共有問題一百條。內中所選材料，均係依據中山先生遺教，以三民主義（演講錄），五權憲法（演講錄），建國方略，建國大綱，地方自治開始實行法，軍人精神教育（演講錄）及其他著述，為編輯之規範；並于必要之處，節錄中山先生遺教中原文，以示眞諦而免有誤。此外尚參考有關係之書籍，如法制經濟史地等科，酌為補充材料，以供閱覽之便。



李士鶴阅

中華民國十九年八月初版

各科常識答問

兩冊定價貳元

編輯者　王傅中　邱楚良　張天民　曹紹濂
　　　　胡崑　弘毅　趙家鵬　劉熙安

校閱者　葉志　張鏡澄　時紹瀛　吳南董
　　　　王葆心　張有桐　譚戒甫　韋潤珊
　　　　范鴻乾

總發行者　武昌文化書局　察院坡
　　　　　南京文化書局　太平街
　　　　　上海文化書局　棋盤街

代售處　各埠各大書局

古骸的埋葬

盈昂作
錢君匋作封面

大家常挨身過去的人物事象，被體念出意味來，吐育紙上，也許很平凡罷。可是像「寺巷裏人物底消長」輕鬆又惆悵，「從薄暮到黃昏」落寞兼陰暗之感叫人能夠得到看「史先生及其故事」要從心底咒詛一樣不平常。至於「一個外國人在中國」却像是作者一個人碰着的怪現像了。而筆調風格更足咀嚼：篇中找不着直接對話。這，沈從文先生應用過，原是最不易取用的。格調和題材同時一換，另去刻畫一種相對的事象。一篇「趣味底完成」是從另一種場合觀察新舊底衝突了。

（實洋四角）

文化書局出版

總局 上海棋盤街

分局 武昌察院坡

南京花牌樓