修正課程標準適用

初中代數教本

〔下冊〕

楊曉初　楊明軒　合編

教育部
審定

開明書店印行

修正課程標準適用

初中代數教本

〔下 册〕

楊曉初 楊明軒 合編

開明書店印行

下册目錄

第十二章 分方程式和文字方程式

分方程式(1) 定理(2) 解方程式時增根的來歷(2) 分式中分母不可爲零的限制(3) 分方程式的解法(3) 雜例的解法(5) 聯立二元分方程式解法(8) 聯立三元分方程式解法(11) 應用問題(13) 文字方程式(17) 行列式(19) 方程式聯立的條件(21)

第十三章 開方根式和虛數

開方的定義和開方的指數定則(24) 單項式的開方(26) 多項式的開平方法則(27) 多項式開立方的法則(31) 有理數無理數和牠們的性質(34) 不盡根式(34) 有理式和無理式(35) 定理(35) 雜根式(36) 根式的係數和次數(36) 純根式(36) 同類根式(37) 根式的加減(37) 同次根式乘法(38) 共軛根式(40) 同次根式除法(40) 虛數(42) 虛數的單位(42) 虛數的簡單運算(43) 複數(44)

第十四章

一元高次方程式和無理方程式

一元二次方程式(46) 不完全一元二次方程式的解

法(46) 用分解因式法解完全一元二次方程式(48) 配方法(50) 用配方法解完全一元二次方程式(51) 完全一元二次方程式解法的公式(53) 公式的用法(53) 一元二次方程式根的性質和判別式(55) 根與係數的關係(57) 簡易的一元高次方程式解法(58) 分解因式的解法(58) 代替法(59) 倒數方程式的解法(60) 三次二項方程式的解法(62) 應用問題(64) 無理方程式(67) 無理方程式的解法(68)

第十五章 不等式和不定方程式

不等式(72) 絕對不等式(74) 條件不等式(75) 條件不等式的解法(76) 不定方程式(78)

第十六章 高次聯立方程式

二元高次聯立方程式的解法(80) 代入法(80) 分解因式解法(81) 等次方程式的解法(83) 對稱方程式的解法(85) 特別解法(87) A種形式的解法(88) B種形式的解法(89) C種形式的解法(90) 應用問題(92)

第十七章 二次函數的圖解

一元二次式的圖解(97) 一元二次方程式的圖解(99) 二元二次方程式的圖解(101) $x^2+y^2=a^2$的圖解(101) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$的圖解(102) $y^2p=x$的圖解(103)

$x^2-y^2=a^2$的圖解(103)　$xy=a$的圖解(104)　二元二次聯立方程式的圖解(105)

第十八章　指數和對數

指數(108)　對數的意義(111)　對數的記法(113)　對數的定理(114)　常用對數(115)　常用對數的性質(116)　定位數和定值數(117)　定位數的法則(117)　對數表(120)　由原數求對數(120)　比例原理(121)　P.P.表的用法(122)　對數的運算(123)　由對數求原數(125)　對數的應用(126)　指數方程式的解法(130)

第十九章　比例和變數法

比(132)　比例(134)　求比例中項(135)　定理(135)　解方程式的應用(137)　變數法(138)　正變(138)　正變數的求法(140)　反變(140)　反變數的求法(141)

第二十章　級數和二項式定理

級數(145)　等差級數(147)　求等差級數的和與任意項(147)　求等差中項(149)　求等差內項(149)　等比級數(151　求等比級數的和與任意項(152)　求等比中項(154)　求等比內項(154)　調和級數(156)　求調和中項(156)　求調和內項(157)　三種中項的關係(157)　二項式定理(158)

附 錄

五位常用對數表……163
中西名詞對照表……182

修正課程標準適用

初中代數教本

下　冊

第十二章

分方程式和文字方程式

95. 分方程式

分式的分母含有未知數的方程式,叫做分方程式.

例如: $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}=\frac{2}{x+1}$ 是一元分方程式,

$\left.\begin{array}{l}\frac{15}{x}-\frac{8}{y}=1\\ \frac{9}{x}+\frac{10}{y}=8\end{array}\right\}$ 是二元聯立分方程式,

………………………………………….

分方程式化為整方程式後,未知數的次數,有時增加,有時減少.本章所講的分方程式,都是用一次方程式的解法所能解的.

96. 定理

乘積爲零時,其中的因式,至少有一個爲零.

$$\because \quad a\times 0=0. \qquad (\S 6)$$

$$\therefore \quad x(x+5)=0 \text{ 時},$$

不是 $x=0$, 便是 $x+5=0$;

$(x-5)(x+7)=0$ 時,

不是 $x-5=0$, 便是 $x+7=0$.

這就是兩個因式中,至少有一個因式爲零;否則,其乘積絕不能爲零.

有了這個定理,像 $(x-5)(x+7)=0$ 這樣的方程式,便能解了;就是由 $x-5=0$, 得 $x=5$; 由 $x+7=0$, 得 $x=-7$.

〔註〕 解 $(x-5)(x+7)=0$ 的方程式,詳第十四章.

97. 解方程式時增根的來歷

例如: 解 $x+7=0$, 知 $x=-7$.

若用 $x-5$ 乘兩端,得 $(x-5)(x+7)=0$; 把這方程式解之,得 $x=-7$ 或 $x=5$, 較原方程式增了一個根爲5, 這增根絕不會是原方程式 $x+7=0$ 的根; 因 $x=5$ 時, 則 $x-5=0$ 方程式兩端都乘以零,是不許可的.

所以解方程式時,倘若兩端乘過含未知數的因式,則其解答非經過核算不可,恐防有增根添入的緣故.

98. 分式中分母不可爲零的限制

在初等代數中,如分母爲零,就是用零作了除數,便是無意義的.所以在分式中分母爲零,是絕不容許的事件.

例如：在 $\frac{x+1}{x-1}+\frac{1}{x^2-1}=0$ 中,如 $x=1$,則得

$\frac{2}{0}+\frac{1}{0}=0$,便是無意義了.

所以 $x=1$ 不能爲這方程式的根.

99. 分方程式的解法

先舉例說明於下,然後再講法則.

〔例 1〕 解 $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}=\frac{2}{x+1}$.

解：用諸分母的 $L.C.M.$ $x(x+1)(x-1)$ 乘方程式的各項,得

$$\frac{1}{x-1}x(x+1)(x-1)+\frac{1}{x}x(x+1)(x-1)$$

$$=\frac{2}{x+1}x(x+1)(x-1).$$

即 $\qquad x(x+1)+(x+1)(x-1)=2x(x-1).$

去括弧,得 $\qquad x^2+x+x^2-1=2x^2-2x.$

移項,得 $\qquad 3x=1.$

$$\therefore\ x=\frac{1}{3}.$$

核算: 左端$=\dfrac{1}{\dfrac{1}{3}-1}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{3}}=\dfrac{1}{\dfrac{-2}{3}}+3=-\dfrac{3}{2}+3=\dfrac{3}{2}$,

右端$=\dfrac{2}{\dfrac{1}{3}+1}=\dfrac{2}{\dfrac{4}{3}}=2\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{2}$.

$\therefore\ x=\dfrac{1}{3}$ 合所求.

〔例 2〕 解 $\dfrac{2x-5}{x-3}+\dfrac{2(1-x)}{2x+1}=\dfrac{x-2}{x-3}$.

解: 用諸分母的 $L.C.M.$ $(2x+1)(x-3)$ 乘方程式的各項,得

$$\frac{2x-5}{x-3}(2x+1)(x-3)+\frac{2(1-x)}{2x+1}(2x+1)(x-3)$$
$$=\frac{x-2}{x-3}(2x+1)(x-3).$$

即 $(2x-5)(2x+1)+2(1-x)(x-3)=(x-2)(2x+1)$.

去括弧,得 $4x^2-8x-5+8x-2x^2-6=2x^2-3x-2$.

移項,合併同類項,得 $3x=9$.

$\therefore\ x=3$.

核算: 左端$=\dfrac{2\times3-5}{0}+\dfrac{2(1-3)}{2\times3+1}$,

右端$=\dfrac{3-2}{0}$.

因 $x=3$ 時,原方程式中分母有爲零的,故知 3 是增根,不適合原方程式,即原方程式無解答.

這個增根由於解方程式,乘諸分母的 $L.C.M.$ 時,混入的.

由上例得解法如下:

I. 用諸分母的 $L.C.M.$ 乘方程式的各項,即得一整方程式.

II. 解新得的整方程式.

III. 把解得的根代入原方程式中,凡使原方程式分母爲零的數,都棄去不作解答.

100. 雜例的解法

I. 如方程式的兩端各含一分式,化去分母時,可直寫左端的分母乘右端的分子於一端,右端的分母乘左端的分子於另一端.

例如: 解 $\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{x+1}{x+3}$.

解: 化去分母,得 $(x-2)(x+3)=(x+1)(x-1)$,

$$x^2+x-6=x^2-1.$$

$$\therefore\quad x=5.$$

II. 例如: 求上例中 x 的值,先實行除後,再解,還要便當.

$$\because\quad \frac{x-2}{x-1}=1+\frac{-1}{x-1},\quad \frac{x+1}{x+3}=1+\frac{-2}{x+3}.$$

$\therefore$ 原方程式可變爲 $1+\dfrac{-1}{x-1}=1+\dfrac{-2}{x+3}$.

即
$$\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x+3},$$
$$x+3=2x-2.$$
$$\therefore\quad x=5.$$

這種方法的簡便,全靠除得的商數能相消;如不能相消時,不但不簡便,還要更麻煩,故用這種方法的標準,須要除得的商數能相消.

例如: 解 $\frac{x-8}{x-10}-\frac{x-5}{x-7}=\frac{x-7}{x-9}-\frac{x-4}{x-6}.$

這方程式如先通分,運算時非常麻煩.各分母除分子所得的商數,恰能相消,故知用 II 方法較爲簡便.

解: $1+\frac{2}{x-10}-\left(1+\frac{2}{x-7}\right)=1+\frac{2}{x-9}-\left(1+\frac{2}{x-6}\right),$

$$\frac{2}{x-10}-\frac{2}{x-7}=\frac{2}{x-9}-\frac{2}{x-6},$$
$$\frac{1}{x-10}-\frac{1}{x-7}=\frac{1}{x-9}-\frac{1}{x-6},$$
$$\frac{x-7-(x-10)}{(x-10)(x-7)}=\frac{x-6-(x-9)}{(x-9)(x-6)},$$
$$\frac{3}{(x-10)(x-7)}=\frac{3}{(x-9)(x-6)},$$
$$(x-9)(x-6)=(x-10)(x-7),$$
$$x^2-15x+54=x^2-17x+70.$$
$$2x=16.$$
$$\therefore\quad x=8.$$

習　　題

解下列各方程式:

1. $\dfrac{x+4}{3x-8}=\dfrac{x+5}{3x-7}$.　　2. $\dfrac{7-5x}{1+x}=\dfrac{11-15x}{1+3x}$.

3. $\dfrac{6x+13}{5}=\dfrac{3x+5}{5x-25}+\dfrac{2x}{5}$.　4. $\dfrac{3x-1}{2x-1}-\dfrac{4x-2}{3x-1}=\dfrac{1}{6}$.

5. $\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{4}{x+6}=1$.

6. $\dfrac{2x-5}{5}+\dfrac{x-3}{2x-15}=\dfrac{4x-3}{10}-1\dfrac{1}{10}$.

7. $\dfrac{(2x-1)(3x+8)}{6x(x+4)-1}=0$.

8. $\dfrac{3}{4-2x}+\dfrac{30}{8(1-x)}=\dfrac{3}{2-x}+\dfrac{5}{2-2x}$.

9. $\dfrac{30+6x}{x+1}+\dfrac{60+8x}{x+3}=14+\dfrac{48}{x+1}$.

10. $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{x-8}{x-6}-\dfrac{x-9}{x-7}$.

11. $\dfrac{x+5}{x+4}-\dfrac{x-6}{x-7}=\dfrac{x-4}{x-5}-\dfrac{x-15}{x-16}$.

12. $\dfrac{x+3}{x+6}-\dfrac{x+6}{x+9}=\dfrac{x+2}{x+5}-\dfrac{x+5}{x+8}$.

13. $\dfrac{x+2}{x}+\dfrac{x-7}{x-5}-\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{x-6}{x-4}$.

14. $\dfrac{5x-8}{x-2}+\dfrac{6x-44}{x-7}-\dfrac{10x-8}{x-1}=\dfrac{x-8}{x-6}$.

15. $\frac{2x-3}{0.3x-0.4}=\frac{0.4x-0.6}{0.06x-0.07}$. 16. $\frac{x-2}{0.05}-\frac{x-4}{0.0625}=56$.

17. $\frac{0.3x-1}{0.5x-0.4}=\frac{0.5+1.2x}{2x-0.1}$. 18. $\frac{1-1.4x}{0.2+x}=\frac{0.7(x-1)}{0.1-0.5x}$.

101. 聯立二元分方程式解法

I. 特別解法.

$$\frac{5}{x}+\frac{6}{y}=3 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{15}{x}+\frac{3}{y}=4 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

如方程式是上邊的形狀時,不要化去分母,把 $\frac{1}{x}$ 和 $\frac{1}{y}$ 當作未知數看待,解之.

解: (1)×3, $$\frac{15}{x}+\frac{18}{y}=9 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3)−(2), $$\frac{15}{y}=5.$$

$$\therefore\quad y=3.$$

把 y 的數值代入(1),得

$$\frac{5}{x}+2=3,$$

$$\frac{5}{x}=1.$$

$$\therefore\quad x=5.$$

核算：(1) 的左端 $=\frac{5}{5}+\frac{6}{3}=3$,

(2) 的左端 $=\frac{15}{5}+\frac{3}{3}=4$.

$\therefore\ x=5,\ y=3$ 合所求.

(別法) 用 X 代 $\frac{1}{x}$, Y 代 $\frac{1}{y}$, 則原方程式變爲

$$5X+5Y=3 \quad \cdots\cdots(3)$$

$$15X+3Y=4 \quad \cdots\cdots(4)$$

解 (3) 和 (4) 求得 X 及 Y 的值以後,再求 x 及 y 的值.

II. 一般解法.

化爲整方程式解之,解得的根,除使分母爲零的以外,方爲原方程式的解答.

例如：解

$$\frac{5}{x+2y}=\frac{7}{2x+y} \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\frac{7}{3x-2}=\frac{5}{6-y} \quad \cdots\cdots(2)$$

解：去分母,得 $10x+5y=7x+14y \quad \cdots\cdots(3)$

$$42-7y=15x-10 \quad \cdots\cdots(4)$$

從 (3),得

$$3x=9y.$$

$$\therefore\ x=3y \quad \cdots\cdots(5)$$

把 (5) 中 x 的數值代入 (4),得

$$42-7y=15\times 3y-10,$$

$$52y=52.$$

$$\therefore\ y=1,$$

$$x=3.$$

核算:

(1) 的左端$=\frac{5}{3+2}=1$, (1) 的右端$=\frac{7}{2\times3+1}=1$;

(2) 的左端$=\frac{7}{3\times3-2}=1$, (2) 的右端$=\frac{5}{6-1}=1$.

$\therefore$ 知$x=3$, $y=1$合所求.

習 題

解下列各方程式:

1. $\begin{cases}\frac{12}{x}+\frac{4}{y}=2,\\ \frac{3}{x}-\frac{2}{y}=0.\end{cases}$

2. $\begin{cases}\frac{8}{x}-\frac{9}{y}=7,\\ 6\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1.\end{cases}$

3. $\begin{cases}\frac{1}{4x}+\frac{1}{3y}=2,\\ \frac{1}{y}-\frac{1}{2x}=1.\end{cases}$

4. $\begin{cases}2y-x=4xy,\\ \frac{4}{y}-\frac{3}{x}=9.\end{cases}$

5. $\begin{cases}\frac{3}{x}+\frac{5}{y}=\frac{8}{15},\\ 9y-22x=\frac{3xy}{25}.\end{cases}$

6. $\begin{cases}\frac{25}{x}+\frac{24}{y}=1,\\ 10\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)=7.\end{cases}$

7. $\begin{cases}3y+5x=\frac{8xy}{15},\\ 9y-22x=\frac{3xy}{25}.\end{cases}$

8. $\begin{cases}\frac{4}{x}+\frac{27}{y}=42,\\ \frac{14}{x}-\frac{15}{y}=1.\end{cases}$

9. $\begin{cases}\frac{x+1}{y}=7,\\ \frac{x}{1+y}=6.\end{cases}$

10. $\begin{cases}\frac{x-1}{y-2}-\frac{x-7}{y+2}=0,\\ \frac{x-1}{x}+\frac{1}{y}=1+\frac{1}{xy}.\end{cases}$

11. $\begin{cases}\dfrac{3x+1}{4-2y}=\dfrac{4}{3},\\ x+y=1.\end{cases}$

12. $\begin{cases}\dfrac{1}{3x+1}=\dfrac{1}{5y-4},\\ \dfrac{1}{4x-3}=\dfrac{1}{7y-6}.\end{cases}$

13. $\begin{cases}\dfrac{x+y}{x+y-5}=\dfrac{x+y+3}{x+y-3},\\ \dfrac{x+3\frac{1}{2}}{y+4}=\dfrac{x-1\frac{1}{2}}{y-6}.\end{cases}$

14. $\begin{cases}\dfrac{12}{x-3}+\dfrac{8}{y-1}=8,\\ \dfrac{27}{x-3}-\dfrac{15}{y-1}=3.\end{cases}$

15. $\begin{cases}\dfrac{13}{x+2y+3}+\dfrac{3}{4x-5y+6}=0,\\ \dfrac{3}{6x-5y+4}=\dfrac{19}{3x+2y+1}.\end{cases}$

16. $\begin{cases}\dfrac{xy}{y+2x}=\dfrac{1}{10},\\ \dfrac{xy}{4y+3x}=\dfrac{1}{20}.\end{cases}$

17. $\begin{cases}\dfrac{6x+9}{4}+\dfrac{3x+5y}{4x-6}=\dfrac{13}{4}+\dfrac{3x+4}{2},\\ \dfrac{8y+7}{10}+\dfrac{6x-3y}{2y-8}=4+\dfrac{4y-9}{5}.\end{cases}$

102. 聯立三元分方程式解法

解的方法,仍是化去分母,變爲整方程式,再解之;遇着特别形狀時,即以 $\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y},\dfrac{1}{z}$ 當作未知數看待,解之.

例如：解　$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{z}=-\dfrac{2}{3}$ ………………………(1)

$\dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{z}=2$ ………………………(2)

$\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=3$ ………………………(3)

解：(1)+(2),　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=\dfrac{4}{3}$ ………………………(4)

(4)×3, $\frac{3}{x}+\frac{6}{y}=4$ ……………………(5)

(5)−(3), $\frac{2}{y}=1$, 即 $y=2$.

把y的數值代入(2),得 $1+\frac{1}{z}=2$. ∴ $z=1$.

把z的數值代入(1),得

$$\frac{1}{x}-1=-\frac{2}{3},$$

$$\frac{1}{x}=-\frac{2}{3}+1=\frac{1}{3}.$$

$$\therefore\quad x=3.$$

核算:

(1) 的左端$=\frac{1}{3}-\frac{1}{1}=-\frac{2}{3}$,

(2) 的左端$=\frac{2}{2}+\frac{1}{1}=2$,

(3) 的左端$=\frac{3}{3}+\frac{4}{2}=3$.

∴ 知$x=3$ $y=2$, $z=1$合所求.

習　題

解下列各方程式:

1. $\begin{cases}\frac{1}{x}-\frac{3}{y}+4=0,\\ \frac{1}{y}-\frac{1}{z}=-1,\\ \frac{2}{z}+\frac{3}{x}=14.\end{cases}$

2. $\begin{cases}\frac{1}{x}-\frac{1}{z}=1,\\ \frac{2}{y}+\frac{1}{z}=5,\\ \frac{3}{x}+\frac{4}{y}=1.\end{cases}$

3. $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=36,\\[2mm] \dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}-\dfrac{1}{z}=28,\\[2mm] \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3y}+\dfrac{1}{2z}=20.\end{cases}$

4. $\begin{cases}\dfrac{3x+y}{z+1}=2,\\[2mm] \dfrac{3y+z}{x+1}=2,\\[2mm] \dfrac{3z+x}{y+1}=2.\end{cases}$

5. $\begin{cases}x-y-z=2,\\[2mm] \dfrac{x+y-z}{x-y-z}=8,\\[2mm] \dfrac{x+y+z}{x-y+z}=0.\end{cases}$

6. $\begin{cases}\dfrac{2x-2y}{2z-5}=1,\\[2mm] \dfrac{5z-3y}{2x-3z}=-3,\\[2mm] \dfrac{x-2y+2}{3x-2y+3}=\dfrac{3}{4}.\end{cases}$

7. $\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{y}=\dfrac{5}{z}-\dfrac{3}{x}=\dfrac{7}{y}+\dfrac{15}{2z}=4.$

103. 應用問題

解應用問題的手續與§43, §44和§51的相同,並沒有特別的地方.

1. 甲想在預定時間內行90里,但行40里後,計算速度若不加快,則在預定的時間內,只能行全路9分之8;如以後每小時的速度皆增加1里,才準時能到.問初行時的速度是多少?

解. 設初行時的速度$=x$里.

預定的時數 ＝ 預定的時數

(用初速行全路的$\frac{8}{9}$的時數) ＝ (先行的時數) ＋ (加速後行的時數)

$$\frac{\frac{8}{9}\times 90}{x}=\frac{40}{x}+\frac{90-40}{x+1}$$

解之,得　　　　$x=4$ 里.

2. 兩輪車行 18 尺的路,後輪比前輪少轉 9 次.若後輪的周圍增大 2 分之 1,前輪增大 1 倍,則後輪比前輪少轉 3 次.問前後兩輪周圍各長多少尺?

解: 設 x=前輪周圍的尺數,

y=後輪周圍的尺數.

(前輪所轉的次數)－9＝(後輪所轉的次數)

$$\frac{18}{x}-9=\frac{18}{y}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

(增大後,前輪所轉的次數)－3＝(增大後,後輪所轉的次數)

$$\frac{18}{2x}-3=\frac{18}{y+\frac{1}{2}y}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解之,得　　　　$x=1,\ y=2.$

前輪周圍長 1 尺,後輪周圍長 2 尺.

3. 某數減 1 的倒數,加牠的倒數,等於牠加 1 除 2 所得的商;求某數.

4. 某數加2除牠自己所得的商,加上牠加6除4所得的商等於1.

5. 某數加2的倒數,與牠減12的倒數相加爲零;求某數

6. 兩輪車行120尺的路,後輪比前輪多轉6次.如後輪周圍增大4分之1,前輪增大5分之1,則後輪比前輪多轉4次.求兩輪周長的尺數.

7. 一人旅行30里的地,坐馬車行12里後,坐人力車行之,共費6小時;回來坐馬車行18里,坐人力車行餘下的4分之3,下餘的步行,共費7小時.但知步行的速度爲人力車的一半,求各速度.

8. 一船逆水行3里,順水行5里,共費8小時;如逆水行2里,順水行4里,共費5小時35分.求這船在靜水中和水流每小時的速度.

9. 一工程,甲乙合作15日完成;若兩人合作6日後,由乙獨作,24日完成.問兩人獨作各需多少日?

10. 一水槽有A,B,C三管:若三管同時齊開,1小時可注滿水槽$\frac{7}{8}$;只開A,B兩管,$1\frac{1}{3}$小時可注滿;若開B,C兩管,2小時20分可注滿.問只開一管,各需多少小時才能注滿?

11. 有一分數,分母分子各加1,則等於$\frac{4}{9}$;若分子減1,分母加1,則爲$\frac{1}{3}$.求原分數.

12. 甲乙二人賽跑400碼.甲讓乙先跑25碼,甲還比乙早到15秒;若讓乙先跑36秒,則落後40碼.求甲乙跑400碼,各需多少小時?

13. 一工程,甲乙合作12日完成;若兩人作3日後,甲獨作15日完成.問二人獨作各需多少日?

14. 有上中下三等物品,每斤的價值,依次的一等比一等賤2角.用18元買上等物品的斤數,與用4.8元買下等物品斤數的和,等於用22.8元買中等物品的斤數.求這三等物品每斤的價值.

15. 甲乙二人相距120里,同時相向而行,甲比乙早到6日;返時甲每日增速5分之1,乙每日增速4分之1,於是甲比乙早到4日.求甲乙每日的速度.

16. 某人乘自行車,行至中途,車機損壞,因修理誤半小時.嗣後比前速度減半,全路30哩,費5小時;若修理在行10哩以後,則全路程費4小時可到.求損壞的地方,距起點多少哩,並求原速度是多少哩?

17. 甲乙二人,兩次競走880碼的距離:第一次甲讓乙先行10碼,勝15秒;第二次甲讓乙先行16秒,勝$4\frac{8}{11}$碼.求甲每秒鐘走多少碼?

18. 某人行12哩的距離:一半步行,一半騎馬,共費7小時;返時,仍一半步行,一半騎馬,其步行的速度,是去時步行4分之3,騎馬的速度,爲去時騎馬的2倍,共費6小時.問去時步行,騎馬每小時各多少哩?

19. 某人由甲市到乙市，若每小時加速一半，則比預定的時數少 2 小時；若每小時減速 4 分之 1，則比預定的時數多 2 小時．求甲乙兩市的距離和預定的時數．

104. 文字方程式

前邊講的一次方程式和聯立一次方程式，都是以數字作係數，其解為特殊的；現在要講的，是以文字作係數，這些文字假定為已知數，並以表方程式之解，故其解為普遍的．

方程式中各係數是文字的，叫做文字方程式，用例說明其解法如下：

I. 一元一次文字整方程式．

例如：解 $(x+a)(x+b)-c(a+c)=(x-c)(x+c)+ab$.

解：

$$x^2+ax+bx+ab-ac-c^2=x^2-c^2+ab,$$

$$ax+bx=ac,$$

$$(a+b)x=ac.$$

$$\therefore\quad x=\frac{ac}{a+b}.$$

II. 一元文字分方程式．

例如：解 $\dfrac{a}{x-a}-\dfrac{b}{x-b}=\dfrac{a-b}{x-c}$

解：

$$\frac{a(x-b)-b(x-a)}{(x-a)(x-b)}=\frac{a-b}{x-c},$$

$$\frac{(a-b)x}{(x-d)(x-b)}=\frac{a-b}{x-c}.$$

用 $a-b$ 除之,得 $\dfrac{x}{(x-a)(x-b)}=\dfrac{1}{x-c}$.

化去分母,得 $x(x-c)=(x-a)(x-b)$,

$$x^2-xc=x^2-ax-bx+ab,$$

$$(a+b-c)x=ab.$$

$$\therefore\quad x=\frac{ab}{a+b-c}.$$

習　　題

解下列各方程式:

1. $x^2+a^2=(b-x)^2$.　　2. $(x-a)(x+b)=(x-a+b)^2$.

3. $a^2(x-a)+b^2(x-b)=abx$.

4. $(a+x)(b+x)=x(x-c)$.　5. $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{b}$.

6. $\dfrac{a}{x}=c(a-b)+\dfrac{b}{x}$.　　7. $\dfrac{x-a}{b-x}=\dfrac{x-b}{a-x}$.

8. $b(x+a)-(a+x)(b-x)=x^2+\dfrac{bc^2}{a}$.

9. $\dfrac{x-a+b}{x-a}+\dfrac{x-b}{x-2b}=\dfrac{x}{x-b}+\dfrac{x-a}{x-a-b}$.

III. 聯立二元一次文字整方程式.

例如: 解　　$a_1x+b_1y=c_1$ ……………………(1)

$a_2x+b_2y=c_2$ ……………………(2)

a,b 和 c 的右下角寫的1和2,與運算沒有關係,僅是表明第一式的 a, b 和 c 與第二式的不同.

解：$(1)\times b_2$，　$a_1b_2x+b_1b_2y=b_2c_1$…………………(3)

$(2)\times b_1$，　$a_2b_1x+b_1b_2y=b_1c_2$…………………(4)

$(3)-(4)$，　$(a_1b_2-a_2b_1)x=b_2c_1-b_1c_2$.

$$\therefore\quad x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

$(1)\times a_2$，　$a_1a_2x+a_2b_1y=a_2c_1$…………………(5)

$(2)\times a_1$，　$a_1a_2x+a_1b_2y=a_1c_2$…………………(6)

$(6)-(5)$，　$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1$.

$$\therefore\quad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

105. 行列式

如有2,3,4和5四個數，寫成$\begin{vmatrix}2&5\\3&4\end{vmatrix}$式樣，計算的法則是2和4相乘，減去3和5相乘.這種式子，叫做行列式.

$\begin{vmatrix}2&5\\3&4\end{vmatrix}=2\times4-3\times5$，叫做行列式的展開.

2和3佔的位置，叫做行；2和5佔的位置，叫做列.如式中共有兩行兩列，叫做二級行列式；如有三行三列，叫做三級行列式；如此類推.

$$\begin{vmatrix}5&-7\\6&2\end{vmatrix}=5\times2-(-7)\times6=10+42=52.$$

注意：乘時連正負號要一齊計算.

行列式中的2,3,4,5等等數，叫做行列式的元.

如行列式的元是文字的，計算的法則也是一樣.

$$\therefore\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b,\ \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1c_2-a_2c_1.$$

由上節知道 $a_1x+b_1y=c_1$ 和 $a_2x+b_2y=c_2$ 的根,是

$$x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1} \text{ 和 } y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

如把上邊方程式的根,寫成行列式,則爲

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}\cdots\cdots\cdots\text{(I)}\qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}\cdots\cdots\cdots\text{(II)}$$

有了(I)和(II)公式以後,求聯立二元一次方程式的根時,便當的多了.如解聯立方程式:

$$3x+4y=10\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$4x+y=9\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$a_1=3,\ a_2=4,\ b_1=4,\ b_2=1,\ c_1=10,\ c_2=9.$$

$$\therefore\quad x=\frac{\begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 9 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{10-4\times 9}{3-16}=\frac{-26}{-13}=2.\qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}}{-13}=\frac{3\times 9-4\times 10}{-13}=\frac{-13}{-13}=1.$$

如解聯立文字方程式:

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$bx+ay=4ab\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$a_1=\frac{1}{a},\ a_2=b,\ b_1=-\frac{1}{b},\ b_2=a,\ c_1=0,\ c_2=4ab.$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{b} \\ 4ab & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} \\ b & a \end{vmatrix}}=\frac{0-\left(-\frac{1}{b}\times 4ab\right)}{1-(-1)}=\frac{4a}{2}=2a,$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ b & 4ab \end{vmatrix}}{2}=\frac{\frac{1}{a}\times 4ab-b\times 0}{2}=\frac{4b}{2}=2b.$$

106. 方程式聯立的條件

解：
$$a_1x+b\ y=c_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$
$$a_2x+b_2y=c_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$

得
$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_1 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

I. 因 $a_1b_2-a_2b_1=0$ 時，則

$$a_1b_2=a_2b.$$

即
$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

所以 x 和 y 的係數適合 (3) 時，則 (1) 和 (2) 右端的式子無意義，x 及 y 的值不能決定；即在這個情形時，(a) 和 (b) 兩方程式不能聯立.

例如：
$$5x+3y=8,$$
$$10x+6y=15.$$
$$\because\ \frac{5}{10}=\frac{3}{6}.$$

∴ 方程式不能聯立,即是矛盾方程式.

II. 假設 $b_2c_1-b_1c_2=0$ 和 $a_1c_2-a_2c_1=0$,則
$$b_2c_1=b_1c_2,\text{和}\ a_1c_2=a_2c_1.$$

即
$$\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\ \text{和}\ \frac{a_1}{a_2}=\frac{c_1}{c_2}.$$
$$\therefore\ \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\cdots\cdots(4)$$

所以 x 和 y 的係數適合 (4) 時,則 (a) 和 (b) 外形是兩方程式,實則是一個方程式,屬於同值方程式.

例如：
$$\begin{cases}6x+3y=9,\\12x+6y=18.\end{cases}$$

因
$$\frac{6}{12}=\frac{3}{6}=\frac{9}{18}.$$

故知是同值方程式.

III. 假設 $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ 時,則 (1) 和 (2) 兩式右端分母不為零,故知方程式 (a) 和 (b) 能聯立.這就是二元一次方程式聯立的條件.

例如：
$$5x+2y=7,$$
$$3x+8y=11.$$
$$\because\ \frac{5}{3}\neq\frac{2}{8}.$$

∴ 方程式能聯立.

習　　題

解下列各方程式:

1. $\begin{cases} ax+by=l. \\ bx+ay=m. \end{cases}$

2. $\begin{cases} ax=by, \\ bx+ay=c. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{x}{a_1}+\dfrac{y}{b_1}=\dfrac{1}{a_1b_1}, \\ \dfrac{x}{a_2}-\dfrac{y}{b_2}=\dfrac{1}{a_2b_2}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{m_1}=1, \\ \dfrac{x}{m_1}-\dfrac{y}{m}=1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} (a-b)x=(a+b)y, \\ x+y=c. \end{cases}$

6. $\begin{cases} (a-b)x+(a+b)y=2a^2-2b^2, \\ (a+b)x-(a-b)y=4ab. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=1, \\ \dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=\dfrac{a}{b}. \end{cases}$

8. 用本節的方法解 §47 的習題(1—10).

第十三章

開方根式和虛數

開　方

107. 開方的定義和開方的指數定則

由乘法知 $2^2=4$, 反回來求4是什麽數自乘得來的,就叫做開平方;由乘法知 $3^3=27$, 反回來求27是什麽數自乘三次得來的,就叫做開立方;由乘法知 $a^4=m$, 反回來求 m 是什麽數自乘四次得來的,就叫做開四方;餘類推.總之,求一個數是什麽數自乘幾次得來的,就叫做開幾方,但只有開二方通常稱開平方,開三方通常稱開立方.

4開平方得2,這個2叫做4的平方根;

27開立方得3,這個3叫做27的立方根;

m 開四方得 a, 這個 a 叫做 m 的四次根;餘類推.

開平方的符號是 $\sqrt{}$, 開立方的符號是 $\sqrt[3]{}$, 開四方的符號是 $\sqrt[4]{}$,餘類推.

$$\because\quad \sqrt{3^4}=3^2=3^{4\div 2},$$

$$\sqrt[3]{a^9}=a^3=3^{9\div3}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{3^4}=3^{\frac{4}{2}}=3^2,\ \sqrt[3]{a^9}=a^{\frac{9}{3}}=a^3.$$

同理,得 $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$, 卽使 m 除不盡 n, 亦可成立.

這 m 表一數開方的次數,叫做根指數.

由上例得指數定則 V (卽開方的指數定則):

某數乘方開平方時,用 2 除其指數;開立方時,用 3 除其指數;開 m 次方時,用 m 除其指數.

在代數學上,知兩個相等的正數或負數自乘起來,都是正數,所以正數的開平方,就有兩個根,絕對值相等,符號相反.

例如: $$\sqrt{4}=\pm2;$$
$$\sqrt{a^2}=\pm a.$$

因任何實數(或正或負)的偶次方都是正數,所以正數的偶次方根有兩個實數(虛根除外,見後),絕對值相等,符號相反.

例如: $$\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=\pm2^{\frac{4}{4}}=\pm2;$$
$$\sqrt[8]{a^{16}}=\pm a^{\frac{16}{8}}=\pm a^2.$$

絕對值相同的數自乘三次,正數仍得正數,負數仍得負數;所以一數的立方根只有一個實數,根的符號如其原數符號,正者仍正,負者仍負.

例如: $$\sqrt[3]{27}=3;$$
$$\sqrt[3]{-64}=-4.$$

因任何正數的奇次方仍爲正數，負數的奇次方仍爲負數;所以正負數的奇次方根，只有一個實數，正者仍得正，負者仍得負(虛根除外，見後).

例如:
$$\sqrt[5]{-32}=\sqrt[5]{-2^5}=-2^{\frac{5}{5}}=-2;$$
$$\sqrt[7]{\pm a^{14}}=\pm a^{\frac{14}{7}}=\pm a^2.$$

因任何實數的偶次方不能爲負數，所以負數的偶次方根不能存在(虛根除外，見後).

例如:
$$\sqrt{-4}\neq\pm 2;$$
$$\sqrt[4]{-a^{16}}\neq\pm a^4.$$

習　　題

化簡下列各式:

1. $\sqrt{x^{16}}$.　　2. $\sqrt[3]{y^{15}}$.　　3. $\sqrt[7]{m^{14}}$.
4. $\sqrt[n]{x^{2n}}$.　　5. $\sqrt[m]{y^{3m^2}}$.　　6. $\sqrt[2n]{a^{8n}}$.

108. 單項式的開方

$$\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}.\qquad\text{§ 107 (定則 V)}$$

由上式得開方法則如下:

I. 數字係數的開方，用算術上的方法求之;附以應得的符號.

II. 文字的開方，用根指數除被開方各文字的方指數.

〔例 1〕 $\sqrt{9x^2y^6}=\pm 3x^{\frac{2}{2}}y^{\frac{6}{2}}=\pm 3xy^3$.

〔例 2〕 $\sqrt[5]{c^{20}d^{10}}=c^{\frac{20}{5}}d^{\frac{10}{5}}=c^4d^2$.

如單項式係分式開方時,分子和分母別開方.

〔例 3〕 $\sqrt{\dfrac{81x^{10}}{25a^4}}=\dfrac{\sqrt{81x^{10}}}{\sqrt{25a^4}}=\pm\dfrac{9x^5}{5x^2}$.

習　題

求下列各式的平方根:

1. $81a^6b^8$.　　2. $a^{20}b^{16}c^4$.　　3. $a^8b^2x^{12}$.

4. $\dfrac{324x^{12}}{169y^6}$.　　5. $\dfrac{81a^{18}}{36b^{12}}$.　　6. $\dfrac{400a^{40}b^{20}}{81x^{10}y^{18}}$.

求下列各式的立方根:

7. $27a^6b^3c^3$.　　8. $-8a^{12}x^9$.　　9. $-27a^{12}b^{18}$.

求下列各式的根:

10. $\sqrt[4]{a^8x^{12}}$.　　11. $\sqrt[7]{x^{14}y^{21}}$.　　12. $\sqrt[5]{-x^{10}y^{15}}$.

13. $\sqrt[7]{\dfrac{128}{a^{63}b^{56}}}$　　14. $\sqrt[10]{\dfrac{a^{80}b^{50}}{x^{100}}}$.

109. 多項式的開平方法則

I. 用公式求平方根.

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2. \qquad \text{§64 (公式 I)}$$

例如: 求 $4x^2+12xy+9y^2$ 的平方根.

$$\because\quad 4x^2+12xy+9y^2=(2x)^2+2(2x)(3y)+(3y)^2$$
$$=(2x+3y)^2.$$

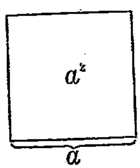
故知平方根為 $\pm(2x+3y)$.

II. 一般的法則.

開平方的意思,在實際應用上,就是知道正方形的面積,求每邊是多少.故要找出開平方的法則,須先研究平方時的情形.

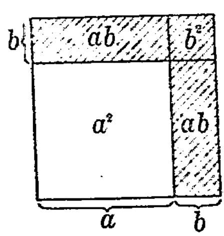
平方

正方形的一邊是a,牠的面積是a^2,其圖如下:



如每邊增長b,牠的面積要增加$2ab+b^2$.

故邊增長b後,牠的面積是$(a+b)^2$,其圖如下:



上圖中有記號的地方,就是邊增長b後,面積所增加的.

開平方

由乘算,知面積$a^2+2ab+b^2$是面積a^2加面積$2ab+b^2$得來的,又由乘算公式知$a^2+2ab+b^2$的平方根爲$a+b$,故開平方時,係照牠的來源.先減去a^2(根的第一項的平方),後要減去$2ab+b^2$(2倍根的第一項與根的第二項的乘積加根的第二項的平方).

由先減去a^2得求第一項根的方法:

把原式首項開平方便是.

由第二次減去$2ab+b^2$,得求根的第二項的方法:

把根的第一項2倍後,除第一餘式首項的商數便是.

算式寫法如下:

$$\text{平方根}=a+b$$

$$\begin{array}{r|l}
\text{原　式}= & a^2+2ab+b^2 \\
\sqrt{a^2}=a,\quad a^2= & a^2 \\ \hline
2ab\div 2\times a=b, & 2ab+b^2 \\
(2\times a+b)b= & 2ab+b^2 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

$$\therefore\ \text{原式的平方根}=a+b.$$

由上邊得法則如下:

I. 用一文字的升冪或降冪排列之.

II. 把首項開平方得根的第一項,自乘後在被開方的式中減去,得第一餘式.

III. 2倍根的第一項除第一餘式的首項,得什麼數,卽用什麼數做根的第二項.

IV. 根的第一項的2倍加上根的第二項後,再用根的第二項乘之,所得的乘積從第一餘式中減去.

V. 如有餘時,再用上法繼續求之.

〔例 1〕 求 $49n^4-42n^3-19n^2+12n+4$ 的平方根.

$$\text{平方根}=7n^2-3n-2$$

$$\begin{array}{r|l}
\text{原　式}= & 49n^4-42n^3-19n^2+12n+4 \\
\sqrt{49n^4}=7n^2,\quad (7n^2)^2= & 49n^4 \\ \hline
-42n^3\div 2\times 7n^2=-3n, & -42n^3-19n^2+12n+4 \\
-3n[2\times 7n^2+(-3n)]= & -42n^3+9n^2 \\ \hline
-28n^2\div 2\times 7n^2=-2, & -28n^2+12n+4 \\
[2(7n^2-3n)+(-2)]\times(-2)= & -28n^2+12n+4 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

$\therefore$ 原式的平方根$=7n^2-3n-2$.

〔例 2〕 求 $\dfrac{16y^2}{x^2}-\dfrac{32y}{x}+24-\dfrac{8x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2}$ 的平方根.

$$\text{平方根}=\frac{4y}{x}-4+\frac{x}{y}$$

$$\text{原　式}=\frac{16y^2}{x^2}-\frac{32y}{x}+24-\frac{8x}{y}+\frac{x^2}{y^2}$$

根的第一項爲 $\dfrac{4y}{x}$, $\left(\dfrac{4y}{x}\right)^2=\dfrac{16y^2}{x^2}$

$$-\frac{32y}{x}+24-\frac{8x}{y}+\frac{x^2}{y^2}$$

根的第二項爲-4,

$$\left[2\frac{4y}{x}+(-4)\right]\times(-4)=-\frac{32y}{y}+16$$

$$8-\frac{8y}{y}+\frac{x^2}{y^2}$$

根的第三項爲 $\dfrac{x}{y}$,

$$\left[2\left\{\frac{4y}{x}+(-4)\right\}+\frac{x}{y}\right]\times\frac{x}{y}=8-\frac{8x}{y}+\frac{x^2}{y^2}$$

$$0$$

$\therefore$ 原式的平方根$=\dfrac{4y}{x}-4+\dfrac{x}{y}$.

習　　題

求下列各式的平方根:

1. $x^2-10xy+25y^2$.　　2. $1-2a^3+a^6$.

3. $81x^2+18xy+y^2$.　　4. $25x^2-30xy+9y^2$.

5. $x^4-4x^3+6x^2-4x+1$.　　6. $4x^4-12x^3+29x^2-30x+25$

7. $1-10x+27x^2-10x^3+x^4$.

8. $4x^2+9y^2+25z^2+12xy-30yz-20xz$.

9. $16x^6+16x^7-4x^8-4x^9+x^{10}$.

10. $67x^2+49+9x^4-70x-30x^3$.

11. $\frac{x^2}{4}-3x+9$.

12. $4-\frac{4x}{y}+\frac{x^2}{y^2}$.

13. $\frac{x^2}{y^2}+\frac{10x}{y}+25$.

14. $x^4+2x^3-x+\frac{1}{4}$.

5. $x^4-2x+\frac{1}{9}+\frac{29}{3}x^2-6x^3$.

16. $\frac{a^4}{4}+\frac{a^3}{x}+\frac{a^2}{x^2}-ax-2+\frac{x^2}{a^2}$.

17. $x^4-2x^3+\frac{3x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{16}$.

18. $\frac{x^4}{4}+4x^2+\frac{ax^2}{3}+\frac{a^2}{9}-2x^3-\frac{49x}{3}$.

110. 多項式開立方的法則

I. 用公式求立方根.

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$. § 66 (公式IV)

例如: 求 $8x^3+36x^2y+54xy^2+9y^3$ 的立方根.

$$\because\ 8x^3+36x^2y+54xy^2+9y^3$$
$$=(2x)^3+3(2x)(3y)+3(2x)(3y)^2+(3y)^3$$
$$=(2x+3y)^3.$$

$\therefore$ 知立方根爲 $2x+3y$.

II. 一般的法則.

$$a\text{ 的立方}=a^3,$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

由上兩式知道 a 式上多了一項 b, 立方後的式子,就

多了$3a^2b+3ab^2+b^3$三項,所以反回來求立方根時,先減去a^3,還要減去$3a^2b+3ab^2+b^3$,由這兩次應減去的式中,便可找出求根的第一項和根的第二項的方法.其法則如下:

I. 用一文字的升羃或降羃排列之.

II. 把首項開立方,得根的第一項,立方後,在被開方的式中減去,得第一餘式.

III. 3倍根的第一項的平方,除第一餘式首項,得根的第二項.

IV. 3倍根的第一項的平方,加上3倍根的第一項與根的第二項的乘積,再加上根的第二項的平方,然後用根的第二項乘牠們的和,得下的乘積,從第一餘式中減去.

V. 如有餘時,再用上法繼續求之.

〔例 1〕 求$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$的立方根.

$$\text{立方根}=a+b$$

$$\begin{array}{r|l}
\text{原　式}= & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
\text{首項開立方得}a,\ a^3= & a^3 \\
\hline
3a^2b\div3\times a^2=b, & 3a^2b+3ab^2+b^3 \\
(3a^2+3ab+b^2)b= & 3a^2b+3ab^2+b^3 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

$$\therefore\ \text{原式的立式根}=a+b.$$

〔例 2〕 求$1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6$的立方根.

立方根$=1+x+x^2$

$$
\begin{array}{rl}
\text{原　　式}= & 1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6 \\
\text{首項的立方根爲}1,\ 1^3= & 1 \\ \hline
3x\div 3\times 1^2=x, & 3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6 \\
x(3\times 1^2+3\times 1\times x+x^2)= & 3x+3x^2+x^3 \\ \hline
3x^2\div 3\times 1^2=x^2, & 3x^2+6x^3+6x^4+3x^5+x^6 \\
x^2\{3(1+x)^2+3(1+x)x^2+(x^2)^2\}= & 3x^2+6x^3+6x^4+3x^5+x^6 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore$ 原式的立方根$=1+x+x^2$.

習　　題

求下列各式的立方根:

1. a^3+3a^2+3a+1.　　2. $8m^3-12m^2+6m-1$.

3. $a^3x^3-3a^2x^2y^2+3axy^4-y^6$.

4. $64a^3-144a^2b+108ab^2-27b^3$.

5. $1-6x+21x^2-44x^3+63x^4-54x^5+27x^6$.

6. $8a^6-36a^5+66a^4-63a^3+33a^2-9a+1$.

7. $27+108x+90x^2-80x^3-60x^4+48x^5-8x^6$.

8. $\frac{x^3}{8}-\frac{3x^2}{4}+\frac{3x}{2}-1$.　　9. $x^3-9x+\frac{27}{x}-\frac{27}{x^3}$.

10. $\frac{x^6}{y^3}-6x^4+12x^2y^3-8y^6$.

11. $\frac{x^3}{27}-\frac{x^2}{3}+2x-7+\frac{18}{x}-\frac{27}{x^2}+\frac{27}{x^3}$.

12. $\frac{x^3}{a^3}-\frac{12x^2}{a^2}+\frac{54x}{a}-112+\frac{108a}{x}-\frac{48a^2}{x^2}+\frac{8a^3}{x^3}$.

根式

111. 有理數無理數和牠們的性質

開平方時,遇到要求 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ 和 $\sqrt{6}$ 等等,總是開不盡;開立方時,遇到要求 $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[3]{3}$ 和 $\sqrt[3]{25}$ 等等,也是開不盡.這樣的數就叫做無理數.反之,本書以前所講的數,都叫做有理數.

無論正有理數或負有理數,總可以用分數來表示.

例如:
$$\pm 5 = \pm\frac{10}{2},$$
$$\pm 0.15 = \pm\frac{3}{20},$$
$$\pm 0.\dot{6} = \pm\frac{2}{3}.$$

無論正無理數或負無理數,不能用分數來表示.

例如: $\pm\sqrt{3} = \pm 1.7\cdots\cdots$沒有一個分數能代表牠.

112. 不盡根式

例如: $\sqrt{2}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{a^3}$, $a+\sqrt{b}$ 和 $\sqrt{a^2+2ab+b^2}$,都是含有根號的式子.但有些式子化簡後,根號可以化去,如像 $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{a^3}$ 和 $\sqrt{a^2+2ab+b^2}$ 化簡爲 ± 2, a 和 $\pm(a+b)$.然 $\sqrt{2}$ 和 $a+\sqrt{b}$ 就不能化得沒有根號.把這種式子,叫做不盡根式,以後簡稱爲根式.

$\sqrt{2}$ 和 $\sqrt[3]{4}$,叫做數字不盡根式;

$\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a^2}$ 和 $\sqrt{a+b}$,叫做文字不盡根式.

如把文字所代替的數值,代入文字不盡根式內,是不是不盡根式,那就不一定了,要看所代替的數值來定.

例如:　$a=4$時,　$\sqrt{a}$ 就不是根式;

$a=3$時,　$\sqrt{a}$ 仍是根式.

所以數字的不盡根式,必定是無理數;文字的不盡根式,如以數值代入,就不一定爲無理數.

113. 有理式和無理式

式中含有不盡根的,叫做無理式.反之,叫做有理式.

例如: $\sqrt{a}+bc$ 和 $\sqrt{2}+\sqrt{a}$ 都是無理式;

ax^2+bx+c 和 $\sqrt{a^2+2ab+b^2}$ 都是有理式.

114. 定理

I. 知 $\sqrt{36}=6$,

$$\sqrt{36}=\sqrt{4\times 9}=\sqrt{4}\times\sqrt{9}=2\times 3=6.$$

同樣, $\sqrt{a^2b^2}=ab$,

$$\sqrt{a^2b^2}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{b^2}=ab.$$

所以,先乘後開方,與先開方後乘,是一樣的.

II. 知 $\sqrt{\frac{16}{4}}=\sqrt{4}=2$,

$$\sqrt{\frac{16}{4}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}}=\frac{4}{2}=2.$$

同樣, $\sqrt{\frac{a^4}{a^2}}=\sqrt{a^2}=a$,

$$\sqrt{\frac{a^4}{a^2}}=\frac{\sqrt{a^4}}{\sqrt{a^2}}=\frac{a^2}{a}=a,$$

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}=\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}}=\frac{a}{b}.$$

所以,先除後開方,與先開方後除,是一樣的.

115. 雜根式

根號內的式子,如有一部分因式,能開盡時,叫做雜根式.

例如:
$$\because\quad \sqrt{8}=\sqrt{2\times4}=2\sqrt{2},$$
$$\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\sqrt{b}=a\sqrt{b}.$$
$\therefore$ $\sqrt{8}$ 和 $\sqrt{a^2b}$ 都是雜根式.

116. 根式的係數和次數

根號前邊的乘數,叫做根式的係數.

例如: $2\sqrt{2}$ 和 $a\sqrt{b}$ 的係數是2和a.根號上的指數,叫做根式的次數.

例如: $\sqrt{5}$ 叫做2次根式, $\sqrt[3]{7}$ 叫做3次根式,如此類推.

117. 純根式

根號內沒有能開盡的因式,並且牠的係數是1時,叫做純根式.

例如: $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{a+b}$ 都是純根式.

118. 同類根式

根號內的式子和根式的次數完全相等時,叫做同類根式.

例如: $\sqrt{5}$ 和 $7\sqrt{5}$ 是同類根式; $m\sqrt[3]{a+b}$ 和 $\sqrt[3]{a+b}$ 也是同類根式.但 $\sqrt{a}$ 和 $\sqrt[3]{a}$ 不是同類根式,因根式的次數不同;又如 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 也不是同類根式,因根號內的數不同.

119. 根式的加減

I. 化爲雜根式. II. 仿 §9, §10 計算.

〔例 1〕 $\sqrt{5}+7\sqrt{5}=(1+7)\sqrt{5}=8\sqrt{5}.$

〔例 2〕 $a\sqrt{b}-\sqrt{b}=(a-1)\sqrt{b}.$

〔例 3〕 $4\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$
$=(4-2)\sqrt{3}+(1+3)\sqrt{2}$
$=2\sqrt{3}+4\sqrt{2}.$

〔例 4〕 $\sqrt{8}+\sqrt{2}-2\sqrt{27}+\sqrt{3}$
$=2\sqrt{2}+\sqrt{2}-2\times3\sqrt{3}+\sqrt{3}$
$=(2+1)\sqrt{2}+(-6+1)\sqrt{3}$
$=3\sqrt{2}-5\sqrt{3}.$

[練習] $\sqrt{2}+\sqrt{5}=\sqrt{2+5}=\sqrt{7}$, 對不對?

習 題

化簡下列各式:

1. $3+2\sqrt{3}.$

2. $\sqrt{a}+3\sqrt{a}.$

3. $a\sqrt{x}+\sqrt{x}$. 4. $13\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{98}$.

5. $3\sqrt{45}-2\sqrt{20}-7\sqrt{5}$. 6. $\sqrt{44}-5\sqrt{176}+2\sqrt{99}$.

7. $4\sqrt{128}+4\sqrt{75}-5\sqrt{162}$. 8. $5\sqrt{24}-2\sqrt{54}-\sqrt{6}$.

9. $\sqrt{252}-\sqrt{294}-48\sqrt{\frac{1}{6}}$.

10. $3\sqrt{147}-\frac{7}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{27}}$.

11. $5\sqrt[3]{81}+4\sqrt{63}-4\sqrt[3]{648}+5\sqrt{7}$.

12. $8\sqrt{a}+5\sqrt{x}-7\sqrt{a}+4\sqrt{a}-6\sqrt{x}-3\sqrt{a}$.

13. $3\sqrt{a}+\sqrt{8}-3\sqrt{2}+\sqrt{18}-\sqrt{4a}$.

14. $\sqrt{a-b}+\sqrt{16a-16b}-\sqrt{ax^2-bx^2}-\sqrt{9(a-b)}$.

15. $\sqrt{a^2m+a^2n}+\sqrt{4a^2m+4a^2n}+\sqrt{b^2c}-\sqrt{9b^2c}$.

120. 同次根式乘法

不管根號內的式子,只要根次數相同時,就叫做同次根式.

例如: $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{a}$; $\sqrt[3]{x}$ 和 $\sqrt[3]{a+b}$ 都是同次根式.

同次根式相乘時,先把根號內的式子乘起來,以後再化簡.

例如: $\sqrt{3}\sqrt{8}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$.

如根式的次數不同,要相乘時,只能用連乘的式樣記之,不能再化簡.

例如: $\sqrt[5]{5}\times\sqrt{3}=\sqrt[5]{5}\sqrt{3}$.

根式相乘的法則如下:

用乘式的每項分乘被乘式的各項後,依 §119 計算.

〔例 1〕 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{5}$

$=\sqrt{2}\sqrt{5}+\sqrt{3}\sqrt{5}=\sqrt{10}+\sqrt{15}.$

〔例 2〕 $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{2})$

$=(\sqrt{5}+\sqrt{3})\sqrt{7}+(\sqrt{5}+\sqrt{3})\sqrt{2}$

$=\sqrt{5}\sqrt{7}+\sqrt{3}\sqrt{7}+\sqrt{5}\sqrt{2}+\sqrt{3}\sqrt{2}$

$=\sqrt{35}+\sqrt{21}+\sqrt{10}+\sqrt{6}.$

〔例 3〕 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(c-\sqrt{d})$

$=(\sqrt{a}+\sqrt{b})c-(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{d}$

$=c\sqrt{a}+c\sqrt{b}-\sqrt{a}\sqrt{d}-\sqrt{b}\sqrt{d}$

$=c\sqrt{a}+c\sqrt{b}-\sqrt{ad}-\sqrt{bd}.$

[練習] 1. $\sqrt[3]{8}\sqrt{7}=\sqrt[3]{8\times 7}=\sqrt[3]{56}$, 對不對?

2. $\sqrt{8}\sqrt[3]{2}=\sqrt{8\times 2}=4$ 對不對?

3. $(\sqrt{3}+\sqrt{4})\sqrt{5}=\sqrt{(3+4)5}=\sqrt{35}$, 對不對?

習　　題

求下列各式的乘積:

1. $2\sqrt{14}\times\sqrt{21}.$
2. $3\sqrt{8}\times\sqrt{b}.$
3. $5\sqrt{a}\times 2\sqrt{3}.$
4. $a\sqrt{b^3}\times b^2\sqrt{a}.$
5. $\sqrt{x+2}\sqrt{x-2}.$
6. $(3\sqrt{5}-5)\times 2\sqrt{x}.$
7. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})\times\sqrt{ab}.$
8. $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2.$
9. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}).$
10. $(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2.$
11. $(\sqrt{7}+5\sqrt{3})(2\sqrt{7}-4\sqrt{3}).$
12. $(3\sqrt{a}-2\sqrt{x})(2\sqrt{a}+3\sqrt{x}).$

13. $(2\sqrt{a}-\sqrt{1+4a})^2$. 14. $(\sqrt{a+x}-2)(\sqrt{a+x}-1)$.

15. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})$.

16. $(\sqrt{5}+3\sqrt{2}+\sqrt{7})(\sqrt{5}+3\sqrt{2}-\sqrt{7})$.

121. 共軛根式

兩個二項二次根式,如僅兩項中間的符號相異時,則互稱爲共軛根式.

例如: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是 $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ 的共軛根式;

$3\sqrt{7}-5\sqrt{11}$ 是 $3\sqrt{7}+5\sqrt{11}$ 的共軛根式.

因 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})=(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2=-1$,

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b$.

所以互爲共軛根式的兩個二次根式相乘的積,總是有理式.

122. 同次根式除法

I. 非根式除根式.

除根式的係數,即是結果.

〔例 1〕 $m\sqrt{a}\div n=\dfrac{m}{n}\sqrt{a}$.

〔例 2〕 $m\sqrt{a}\div(a+b)=\dfrac{m}{a+b}\sqrt{a}$.

II. 除式是單項根式.

法則:

(i) 除式和被除式有公因式時,先約去,再把除式化爲有理式;

(ii)　用I的法則計算.

〔例 1〕　$$\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{ab}\times\sqrt{c}}{\sqrt{c}\times\sqrt{c}}=\frac{1}{c}\sqrt{abc}.$$

〔例 2〕　$$\frac{\sqrt{ac}+\sqrt{bc}}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{a}\sqrt{c}+\sqrt{b}\sqrt{c}}{\sqrt{c}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

III.　除式是兩項式.

法則與II相同.

例如：　$$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$$

$$=\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{(\sqrt{5})^2-1^2}$$

$$=\frac{(\sqrt{5})^2+2\sqrt{5}+1}{4}$$

$$=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

習　　題

計算下列各式：

1. $\frac{48}{\sqrt{b}}$.　　2. $\frac{\sqrt{27}}{3\sqrt{24}}$.　　3. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

4. $\frac{1}{2\sqrt{3}}$.　　5. $\frac{1}{\sqrt{2}}$　　6. $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

7. $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$.　　8. $\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-2}$.　　9. $\frac{5+\sqrt{3}}{4+\sqrt{15}}$.

10. $\dfrac{\sqrt{7}+2}{9+2\sqrt{14}}$.　　11. $\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$.

12. $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}+a}$.　　13. $\dfrac{y^2}{x+\sqrt{x^2-y^2}}$.

14. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}\div\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

15. $\dfrac{3+\sqrt{b}}{5\sqrt{3}-2\sqrt{12}-\sqrt{32}+\sqrt{50}}$.

123. 虛數

由§20,知正負數系是

$$\cdots\cdots\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \cdots\cdots\cdots.$$

正數開平方,得正負兩個根數;負數開平方,依開方的定義知旣不能得正根數,又不能得負根數.卽在正負數系內找不出負數開平方這一種數.所以負數的開平方,必定是一種新的數,於是就命名爲虛數.

例如 $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-\frac{1}{2}}$ 和 $\sqrt{-25}$ 都是虛數.

有了虛數,就把前面所講的有理數和無理數,都叫做實數.

124. 虛數的單位

任何實數,都是1(或$\sqrt{+1}$)的倍數.所以定實數的單位爲1(或$\sqrt{+1}$),運算上最爲便當.同理因任何虛數,都是$\sqrt{-1}$的倍數,所以定$\sqrt{-1}$爲虛數的單位,通常用i記之.這樣選定單位,則實數的一切法則,在虛數的運

用上仍能適用.

例如: $\sqrt{-4}=\sqrt{4}\sqrt{-1}=\pm 2i,$

$\sqrt{-2}=\pm\sqrt{2}\,i.$

式中i是代表虛數的單位$\sqrt{-1}$的符號.

125. 虛數的簡易運算

虛數的運算和根式的運算一樣;惟a和b非正數時,$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$不能適用,讀者務必注意!

〔例 1〕 $\sqrt{-4}+\sqrt{-9}=\sqrt{4}\sqrt{-1}+\sqrt{9}\sqrt{-1}$

$=2i+3i=5i.$

〔例 2〕 $\sqrt{-16}-\sqrt{-9}=4i-3i=i.$

〔例 3〕 虛數單位的乘冪:

$$
\begin{aligned}
i &= \sqrt{-1},\\
i^2 &= (\sqrt{-1})^2=-1,\\
i^3 &= i^2\times i=-1\times i=-i,\\
i^4 &= i\times i^3=(-1)\times(-1)=1,\\
i^5 &= i^4\times i=i,\\
i^6 &= i^4\times i^2=-1,\\
i^7 &= i^6\times i=-i,\\
i^8 &= i^4\times i^4=1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

從上式知i的方次由1到4,和由5到8,是一樣的.如再繼續乘方,仍依次得$i,\ -1,\ -i,\ 1,$由此得虛數單位的

高次方的化簡法如下：

把方次數的整4倍除去了以後,再計算之.

例如：　$i^{127}=i^{31\times4+3}=i^3=-i.$

〔例 4〕　$\sqrt{-25}\times\sqrt{-36}=5i\times6i=30i^2=30(-1)=-30.$

〔例 5〕　$\sqrt{-36}\div\sqrt{-9}=6i\div3i=2.$

〔練習〕　$\sqrt{-25a^2}\times\sqrt{-36b^2}=\sqrt{(-25a^2)(-36b^2)}$

$=\sqrt{25\times36a^2b^2}=30ab$, 對不對?

126. 複數

如拿一個實數和一個虛數,相加或相減,因單位不同,故不能得一簡單的結果.

例如：　2與$3i$相加,得$2+3i$,

2與$\sqrt{3}i$相減,得$2-\sqrt{3}i$.

這又是一種以前沒有遇到過的數,數學上把這實數與虛數的代數和,叫做複數.

例如：　a和b都是實數,則$a+bi$和$a-bi$都是複數.

若 $b=0$, 則 $a\pm bi=a$;

$a=0$, 則 $a\pm bi=bi$.

所以實數和虛數都是複數的特例.至於複數的研究,詳高等代數學中.

習　題

化簡下列各式 (1—13)：

1. $3\sqrt{-4}+5\sqrt{-9}$.　　　2. $5\sqrt{-16}-3\sqrt{-9}$.

3. $\sqrt{-27}-\sqrt{-32}+\sqrt{-18}$.

4. $(5+\sqrt{-2})(5-\sqrt{-2})$.

5. $(\sqrt{7}+3\sqrt{-2})(\sqrt{7}-3\sqrt{-2})$.

6. $(4+2\sqrt{-8})^2$. 7. $(\sqrt{a}+\sqrt{-b})(\sqrt{a}-\sqrt{-b})$.

8. $\sqrt{-12}\times\sqrt{-8}$. 9. $1\div\sqrt{-1}$.

10. $\sqrt{-10}\div\sqrt{-2}$. 11. $\sqrt{-a}\div\sqrt{-b}$.

12. $\sqrt{-50}\div\sqrt{-8}$. 13. $(a+bi)^2+(a-bi)^2$.

14. $x=\sqrt{-2}$ 時,求 x^2+4 的數值.

15. 求 i^5, i^6, i^7, i^8, i^9 的數值.

第十四章

一元高次方程式和無理方程式

127. 一元二次方程式

一個方程式整理後，只含一個未知數，牠的最高方次是二次時，叫做一元二次方程式.

例如：$x^2+3x=8$，$x^2=16$ 和 $x^2+5x=0$ 都是一元二次方程式.

一元二次方程式最多有三項：

(1) x平方項；(2) x項；(3) 不含x項(即絕對項).

如缺x項或不含x項時，叫做不完全一元二次方程式；都不缺時，叫做完全一元二次方程式.

128. 不完全一元二次方程式的解法

〔例 1〕 解 $4x^2-25=0$.

解　移項，　　$x^2=\frac{25}{4}$.

開方，　　$x=\pm\frac{5}{2}$.

核算：　　$左端=4\left(\pm\frac{5}{2}\right)^2-25=0.$

〔例 2〕 解 $a^2x^2+b^2=0.$

解：移項，得　　$a^2x^2=-b^2,$

$$x^2=-\frac{b^2}{a^2}.$$

開方，得　　$$x=\pm\sqrt{-\frac{b^2}{a^2}}$$

$$=\pm\frac{b}{a}i.$$

解這種方程式時，先求 x^2 的值，然後再開方，即得 x 的數值．

〔例 3〕 解 $x^2-5x=0.$

解：分解因式，　$x(x-5)=0.$

$$x=0,\ 或\ x-5=0.$$

$$\therefore\ x=0\ 或\ 5.$$

核算：　$x=0$ 時，左端$=0^2-5\times0=0;$

$x=5$ 時，左端$=5^2-5\times5=0.$

故知 $x=0$ 或 5 都合所求．

〔例 4〕 解 $ax^2-bx=0.$

解：分解因式，　$x(ax-b)=0,$

$$x=0,\ 或\ ax-b=0.$$

$$\therefore\ x=0\ 或\ \frac{b}{a}.$$

解這種方程式時，把 x 分解出來，取每一個因式等

於零,可得x的兩個數值;但有一個是零.

由上邊知一元二次方程式有兩個根.

習題

解下列各方程式:

1. $x^2-1=0$.
2. $x^2+1=0$.
3. $x^2-3=61$.
4. $2x^2=1$.
5. $(x+2)(x-2)=12$.
6. $(x-a)(x+a)=5a^2$.
7. $5(x^2-6)=2(x-15)$.
8. $(2x-3)^2=8x+9$.
9. $(3x^2-4)^2+(4x-3)^2=0$.
10. $(3x-2)^2=8x^2+12x+7$.
11. $\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{x}=0$.
12. $\dfrac{x+1}{x+4}=\dfrac{2x-1}{x+6}$.

129. 用分解因式法解完全一元二次方程式

〔例 1〕 解 $x^2-6x+9=16$.

解: 移項, $x^2-6x+9-16=0$,

$$x^2-6x-7=0,$$

$$(x-7)(x+1)=0,$$

$$x-7=0,\text{ 或 } x+1=0.$$

$$\therefore\quad x=7 \text{ 或 } -1.$$

核算: $x=7$時, 左端$=7^2-6\times7+9=16$;

$x=-1$時, 左端$=(-1)^2-6(-1)+9=16$.

故知 $x=7$ 或 -1 都合所求.

〔例 2〕 解 $x^2-2mx+m^2-n^2=0$.

解:
$$\because \quad m^2-n^2=(m-n)(m+n);$$
$$\{x-(m-n)\}\{x-(m+n)\}=0,$$
$$x-(m-n)=0, \text{ 或 } x-(m+n)=0.$$
$$\therefore \quad x=m-n \text{ 或 } m+n.$$

核算: $x=m-n$ 時,
$$\text{左端}=(m-n)^2-2m(m-n)+m^2-n^2$$
$$=m^2-2mn+n^2-2m^2+2mn+m^2-n^2=0;$$

$x=m+n$ 時,
$$\text{左端}=(m+n)^2-2m(m+n)+m^2-n^2$$
$$=m^2+2mn+n^2-2m^2-2mn+m^2-n^2=0.$$

故知 $x=m-n$ 或 $m+n$ 都合所求.

〔例 3〕 解 $21x^2-29x-72=0$.

解:
$$(3x-8)(7x+9)=0,$$
$$3x-8=0, \text{ 或 } 7x+9=0.$$
$$\therefore \quad x=\frac{8}{3} \text{ 或 } -1\frac{2}{7}.$$

核算省略.

習　　題

解下列各方程式:

1. $x^2+33=14x$.　　**2.** $x^2-8x=33$.

3. $x^2-4x-12=0$.　　**4.** $x^2+x=156$.

5. $x^2-4x=117$.　　**6.** $x^2+18x=115$.

7. $x^2-11x=26$. 8. $x^2+16x=260$.

9. $x^2-12x=85$. 10. $3x^2+5x+2=0$.

11. $3x^2+14x=5$. 12. $6x^2-7x=3$.

13. $3x^2=14-19x$. 14. $8x^2+35=38x$.

15 $15x^2+224x-15=0$. 16. $15x^2+10=77x$.

17. $52x^2+99=179x$. 18. $10x^2+29x=10$.

19. $\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}=\frac{1}{6}x$. 20. $4x^2=\frac{4}{15}x+3$.

21. $x^2-2=\frac{23}{12}x$. 22. $\frac{1}{15}x^2+\frac{1}{4}=\frac{4}{15}x$.

23. $x(16x+5)+3=7x^2-(2x-45)$.

24. $(x-1)^2=a(x^2-1)$. 25. $a^2x^2+a(b+c)x=-bc$.

26. $(a-x)^2+(b-x)^2=a^2+b^2+2ab$.

130. 配方法

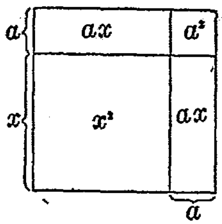
於方程式兩端各加一數,使右端x^2+29x成為完全平方時,叫做配方法.加什麼數才能適合配方的條件,說明於下:

想把x^2+6x補成平方,非加9不可;因x^2+6x+9等於$x+3$的平方.

同樣,把x^2+8x補成平方,非加16不可.

由上邊看來,9和16恰是x係數一半的平方.

把x^2+29x畫成圖,不是四方形,缺着一小方塊.



這小方塊巧是 a^2，故在 x^2+2ax 式中要補成平方時，應加的數仍是 x 係數一半的平方．所以加 x 係數一半的平方於 x^2+2ax，即能配成平方．

131. 用配方法解完全一元二次方程式

I. 化方程式為 $x^2+bx=c$ 形狀，就是把含 x 的項，都移到一端（如 x^2 的係數不是 1 時，用牠除全式，即得需要的形狀）．

II. 兩端各加 x 係數一半的平方．

III. 兩端開方，得一元一次方程式．

IV. 解一元一次方程式，得 x 的數值．

〔例 1〕 解 $x^2=6x-8$.

解：移項，　$x^2-6x=-8$.

配方，　$x^2-6x+\left(\frac{6}{2}\right)^2=-8+\left(\frac{6}{2}\right)^2$,

$x^2-6x+9=1$.

開方，　$x-3=\pm1$.

$\therefore\ x=3\pm1=4$ 或 2.

核算：　$x=4$ 時，左端 $=4^2=16$,

右端 $=6\times4-8=16$;

$x=2$ 時，左端 $=2^2=4$,

右端 $=6\times2-8=4$.

故知 $x=4$ 或 2 都合所求．

〔例 2〕 解 $3x^2-3=-4x$.

解: 移項. $$3x^2+4x=3,$$

$$x^2+\frac{4}{3}x=1.$$

配方, $$x^2+\frac{4}{3}x+\left(\frac{\frac{4}{3}}{2}\right)^2=1+\left(\frac{\frac{4}{3}}{2}\right)^2.$$

開平方,得 $$x+\frac{2}{3}=\pm\sqrt{1+\frac{4}{9}}=\pm\frac{\sqrt{13}}{3}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{-2\pm\sqrt{13}}{3}.$$

習　　題

解下列各方程式:

1. $x^2+3x+4=0$.　　2. $x^2+2x-48=0$.

3. $x+22-6x^2=0$.　　4. $21+x=2x^2$.

5. $12x^2=29x-14$.　　6. $19x=15-8x^2$.

7. $21x^2+22x+5=0$.　　8 $50x^2-15x=27$.

9. $18x^2-27x-26=0$.　　10. $5x^2=8x+21$.

11. $15x^2-2ax=a^2$.　　12. $6x^2=11kx+7k^2$.

13. $2(x-3)=3(x+2)(x-3)$.

14. $(3x-5)(2x-5)=x^2+2x-3$.

15. $\frac{5x+7}{x-1}=3x+2$.　　16. $\frac{3x-8}{x-2}=\frac{5x-2}{x+5}$.

17. $\frac{x-3}{2x-7}-\frac{2x-1}{x-3}=0$.　　18. $\frac{1}{1+x}-\frac{1}{3-x}=\frac{6}{35}$.

19. $\dfrac{1}{2x-5a}+\dfrac{5}{2x-a}=\dfrac{2}{x}$.

20. $\dfrac{a^2b}{x^2}+\left(1+\dfrac{6}{x}\right)a=2b+\dfrac{a^2}{x}$.

132. 完全一元二次方程式解法的公式

解: $$ax^2+bx+c=0.$$

移項, $$ax^2+bx=-c,$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

配方, $$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2$$

$$=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

$$=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

開方, $$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

$$\therefore\quad x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

這是解一元二次方程式的公式.

133. 公式的用法

把方程式的各項,都移到左端,用x^2的係數代公式

中的 a, x 的係數代 b, 絕對項代 c (都要連正負號一齊代入才對). 代入公式, 即可算出方程式的根.

例如: 解 $x^2-4x=4$.

解: 移項, $x^2-4x-4=0$.

$$a=1,\ b=-4,\ c=-4.$$

$$\therefore\quad x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(-4)}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{32}}{2}$$

$$=\frac{4\pm4\sqrt{2}}{2}=2\pm2\sqrt{2}.$$

核算: $x=2+2\sqrt{2}$ 時, 左端 $=(2+2\sqrt{2})^2-4(2+2\sqrt{2})$

$$=4+8\sqrt{2}+4\times2-8-8\sqrt{2}$$

$$=4;$$

$x=2-2\sqrt{2}$ 時, 左端 $=(2-2\sqrt{2})^2-4(2-2\sqrt{2})$

$$=4-8\sqrt{2}+4\times2-8+8\sqrt{2}$$

$$=4.$$

故知 $x=2\pm2\sqrt{2}$ 合所求.

習題

解下列各方程式:

1. $x^2+10x+5=0$.
2. $5x^2+14x=55$.
3. $3x^2+121=44x$.
4. $3x^2+35=22x$.
5. $5x^2=8x+21$.
6. $(x+1)(2x+3)=4x^2-22$.
7. $21x^2=2ax+3a^2$.
8. $12x^2+23kx+10k^2=0$.
9. $12x^2-cx-20c^2=0$.
10. $\dfrac{x+3}{2x-7}-\dfrac{2x-1}{x-3}=0$,

11. $\frac{x+4}{x-4}+\frac{x-2}{x-3}=6\frac{1}{3}$.　12. $\frac{1}{3-x}-\frac{4}{5}=\frac{1}{9-2x}$.

13. $\frac{4}{x-1}+\frac{5}{x+2}=\frac{3}{x}$.　14. $\frac{5}{x-2}-\frac{4}{x}=\frac{3}{x+6}$.

15. $\frac{2}{3x-2c}+\frac{3}{2x-3c}=\frac{7}{2c}$.

16. $\frac{x-2}{x-3}+\frac{3x-11}{x-4}=\frac{4x+13}{x+1}$.

17. $x^2-2ax+4ab=2bx$.

18. $3x^2-2ax-bx=0$.　19. $ax^2+2x=bx$.

20. $(p^2-q^2)(x^2+1)=2(p^2+q^2)x$.

134。一元二次方程式根的性質和判別式

解 $ax^2+bx+c=0$, 得 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

I.　$b^2-4ac=0$ 時, $x=\frac{-b}{2a}$, 故知兩根相等.

II.　$b^2-4ac>0$ 時 $\sqrt{b^2-4ac}$ 是實數,

$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 也是實數,故知兩根都爲實數.

$b^2-4ac>0$ 的情形可分爲兩種:

(i) b^2-4ac 爲完全平方時,兩根爲有理數;

(ii) b^2-4ac 不是完全平方時, 兩根爲無理數.

III.　$b^2-4ac<0$ 時, $\sqrt{b^2-4ac}$ 是虛數,

$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 是複數, 故知兩根都爲複數.

根是實數或複數,以及相等不相等,全靠 b^2-4ac 的值來定.所以把 b^2-4ac 叫做一元二次方程式的判別式.

〔例 1〕 $4x^2+12x+9=0.$

$\because\quad 12^2-4\times4\times9=144-144=0.$

$\therefore$ 知兩根相等.

〔例 2〕 $x^2+10x+5=0.$

$\because\quad 10^2-4\times1\times5=80>0.$

$\therefore$ 知根爲實數.

又 $\because$ 80 非完全平方數.

$\therefore$ 知根爲無理數.

〔例 3〕 $x^2-6x+8=0.$

$\because\quad 6^2-4\times1\times8=4>0$, 是完全平方數.

$\therefore$ 知根爲有理數.

〔例 4〕 $x^2-x+7=0.$

$\because\quad 1^2-4\times7=-27<0.$

$\therefore$ 知根爲複數.

習　題

判別下列各方程式的根是什麽數:

1. $x^2+11x=7x.$
2. $2x^2+5x-53=0.$
3. $3x^2-2x+1=0.$
4. $12x^2+x-6=0.$
5. $x^2-x-7=0.$
6. $21+8x^2=26x.$
7. $35-4x=4x^2.$
8. $x^2+x=1.0956.$

9. $4x^2=\frac{4}{15}x+3.$　　10. $16\left(x+\frac{1}{x}\right)=257.$

11. $x^2+2x=3.2.$　　12. $x^2-3x-3.51=0.$

13. $x^2+\frac{a^2b^2}{x^2}=a^2+b^2.$　　14. $12x^2-11ax=36a^2.$

135. 根與係數的關係

設 α, β 為 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根.

由公式,得
$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$
$$\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$
$$\alpha+\beta=\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=-\frac{b}{a},$$
$$\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

由 $ax^2+bx+c=0$, 得
$$x^2+\underbrace{\frac{b}{a}}_{-(\alpha+\beta)}x+\underbrace{\frac{c}{a}}_{\alpha\beta}=0.$$

由上邊得 x^2 的係數是1時,根與係數的關係:

I. 兩根的和,等於 x 係數的反號數.

II. 兩根的乘積,等於絕對項.

例如: 知兩根的和為8,積為15,求原方程式.

$$\because\quad \alpha+\beta=8,\ \alpha\beta=15.$$

$$\therefore\quad 原方程式為\ x^2-8x+15=0.$$

習　題

用下列兩根的關係求原方程式:

1. $\alpha+\beta=-5,\ \alpha\beta=6.$　　2. $\alpha+\beta=13,\ \alpha\beta=42.$

3. $\alpha+\beta=\frac{3}{5},\ \alpha\beta=\frac{1}{3}.$　　4. $\alpha+\beta=b,\ \alpha\beta=c.$

5. $\alpha+\beta=2.8,\ \alpha\beta=1.6.$　　6. $\alpha+\beta=a+b,\ \alpha\beta=ab.$

136. 簡易的一元高次方程式解法

一般的一元高次方程式,沒有一定的方法去解,只有幾個簡易的形狀能解,講在下邊:

I. 分解因式的解法.

〔例 1〕 解 $x^4-13x^2+36=0.$

解:
$$(x^2-9)(x^2-4)=0,$$
$$x^2-9=0,\ 或\ x^2-4=0.$$
$$\therefore\quad x=\pm3\ 或\ \pm2.$$

〔例 2〕 解 $x^4-6x^3+11x^2-6x=0.$

解:
$$x(x^3-6x^2+11x-6)=0,$$
$$x=0,\ 或\ x^3-6x^2+11x-6=0.$$

由 §79, 知 $x-1$ 為 $x^3-6x^2+11x-6=0$ 的一個因式.

$$\therefore\quad x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x^2-5x+6)$$
$$=(x-1)(x-2)(x-3)=0.$$
$$\therefore\quad x=0,\ 1,\ 2\ 或\ 3.$$

故原方程式的根爲 0, 1, 2 或 3.

〔例 3〕 解 $x^3-1=0$.

解:
$$(x-1)(x^2+x+1)=0,$$
$$x-1=0,\ 或\ x^2+x+1=0.$$
$$\therefore\quad x=1\ 或\ \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}.$$

II. 代替法.

有些方程式,另用一未知數代替式中的一部分,方程式便容易解了.

例如: 解 $8\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}+3\dfrac{x^2-1}{x^2+2x}-11=0$.

解: 設 $\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}=m$, 則 $\dfrac{x^2-1}{x^2+2x}=\dfrac{1}{m}$.

$$\therefore\quad 8m+3\frac{1}{m}-11=0.$$

即
$$8m^2+3-11m=0,$$
$$(m-1)(8m-3)=0,$$
$$m=1\ 或\ \frac{3}{8}.$$

$$m=1\ 時,\ \frac{x^2+2x}{x^2-1}=1,\ 即\ x^2+2x=x^2-1.$$
$$\therefore\quad x=-\tfrac{1}{2}.$$

$$m=\frac{3}{8}\text{時,}\ \frac{x^2+2x}{x^2-1}=\frac{3}{8}.$$

即 $$8x^2+16x=3x^2-3,$$

$$5x^2+16x+3=0,$$

$$(5x+1)(x+3)=0,$$

$$5x+1=0,\ \text{或}\ x+3=0.$$

$$\therefore\quad x=-\frac{1}{5}\ \text{或}\ -3.$$

故原方程式之根爲 $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{5}$ 或 -3.

III. 倒數方程式的解法.

有一種方程式 $f(x)=0$, 其係數自最高次項起和自最低次項起,順序各各相等,或絕對值相等而符號相反,如

$$ax^4\pm bx^3+cx^2\pm bx\pm a=0,$$

$$ax^5\pm bx^4+cx^3\pm cx^2\pm bx\pm a=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

這種方程式叫做倒數方程式(在高等代數學中,我們可以證明倒數方程式之一切根,兩兩互爲倒數,就是如有一根爲 a, 必有另一根爲 $\frac{1}{a}$).

倒數方程式的解法,要看牠的最高次項指數爲偶數或爲奇數,茲分別討論於下:

(1) 最高次指數爲偶數的,先用 $x^{\frac{\text{最高次指數}}{2}}$ 去

除，再用代替法.

例如：　解 $2x^4-3x^3-4x^2-3x+2=0$.

解：　用 x^2 除之，得

$$2x^2-3x+4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=0.$$

即
$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0.$$

設 $m=x+\frac{1}{x}$，則

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=m^2-2.$$

$$\therefore\quad 2(m^2-2)-3m+4=0,$$

$$2m^2-3m=0,$$

$$m(2m-3)=0.$$

$$\therefore\quad m=0 \text{ 或 } \frac{3}{2}.$$

即
$$x+\frac{1}{x}=0 \text{ 或 } \frac{3}{2}.$$

$$x^2+1=0,\ \text{或}\ 2x^2+2=3x.$$

$$\therefore\quad x=\pm\sqrt{-1}=\pm i,$$

或
$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-16}}{2\times 2}=\frac{3\pm\sqrt{7}\,i}{4}.$$

(2)　最高次指數爲奇數的，先求 $x+1$ 或 $x-1$ 因式（如方程式係數自最高次項和最低次項依次相等時，則有 $x+1$ 因式；如係數的絕對值依次相等而符號相反時，則有 $x-1$ 因式）；另一因式必爲偶次倒數方程式，再照前例解之.

例如: 解 $x^3+5x^2-5x-1=0$.

解: 此式有$x-1$因式甚明,故

$$\begin{aligned}原式&=(x^3-1)+(5x^2-5x)\\&=(x-1)(x^2+x+1)+5x(x-1)\\&=(x-1)(x^2+6x+1)=0.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad x=1 \text{ 或 } x=-3\pm2\sqrt{2}.$$

IV. 三次二項方程式的解法.

方程式之形爲$x^n\pm a=0$者,叫做二項方程式.其次數高於三次的,解法詳見高等代數學中.玆僅討論三次二項方程式的解法,卽$x^3\pm a=0$之解法.

設 $x^3-a=0$ 中之 $a=1$, 則

$$x^3-1=0.$$

解之, $$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0.$$

$$\therefore\quad x=1 \text{ 或 } x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}.$$

設 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, 則 $\omega^2=\dfrac{(-1+\sqrt{3}i)^2}{4}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$;

又設 $\omega=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, 則 $\omega^2=\dfrac{(-1-\sqrt{3}i)^2}{4}=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

$$\therefore\quad x=1,\ \omega,\ \omega^2.$$

由此得$x^3-a=0$之解法如下:

$$x^3-a=x^3-(\sqrt[3]{a})^3=0.$$

用$(\sqrt[3]{a})^3$除之, $$\left(\frac{x}{\sqrt[3]{a}}\right)^3-1=0.$$

$$\therefore\quad \frac{x}{\sqrt[3]{a}}=1,\ \omega,\ \omega^2.$$

$$\therefore\quad x=\sqrt[3]{a},\ \sqrt[3]{a}\,\omega,\ \sqrt[3]{a}\,\omega^2.$$

有些高次方程式,可藉這種方程式去解的.

例如: 解 $x^6+7x^3-8=0$.

解:
$$x^6+7x^3-8=(x^3-1)(x^3+8)=0.$$
$$x^3-1=0,\ \text{則}\ x=1,\ \omega,\ \omega^2;$$
$$x^3+8=0,\ \text{則}\ x=\sqrt[3]{-8},\ \sqrt[3]{-8}\,\omega,\ \sqrt[3]{-8}\,\omega^2$$
$$=-2,\ -2\omega,\ -2\omega^2.$$

故原方程式共有六個根為: $1, -2, \omega, \omega^2, -2\omega, -2\omega^2$.

習　題

解下列各方程式:

1. $2x^3-3x^2-3x+2=0$.
2. $3x^4-29x^2+18=0$.
3. $(x^2+x)^2+4(x^2+x)=0$.
4. $x^3+1=0$.
5. $x^3+a=0$.
6. $x^3-5x^2+5x-1=0$.
7. $x^2+3x-\dfrac{20}{x^2+3x}=8$.
8. $\dfrac{x^2}{x+1}+\dfrac{x+1}{x^2}=0$.
9. $y^2+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{17}{4}$.
10. $x^2+\dfrac{1}{x^2}=a^2+\dfrac{1}{a^2}$.
11. $x^2+x+1=\dfrac{4^2}{x^2+x}$.
12. $x(x-2a)=\dfrac{8a^4}{x^2-2ax}+7a^2$.
13. $x^6-5x^4+9x^3-9x^2+5x-1=0$, $x-1$ 是一個因式.

14. $x(2b-x)=\dfrac{8b^4}{2bx-x^2}-2b^2$.

15. $\dfrac{a-x}{b+x}+\dfrac{4(b+x)}{a-x}=5$.

16. $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$.

17. $x^6-1=0$.　　18. $x^6+14x^3+24=0$.

19. $x^3-27=0$.　　20. $x^6-19x^3=216$.

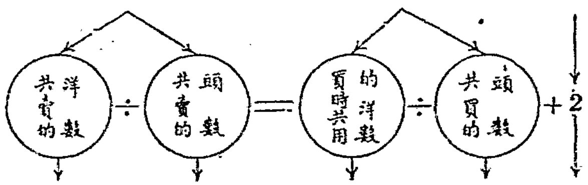
21. 求125的三個立方根數.

137. 應用問題

〔例 1〕 某人用洋50元,買牛不知多少頭,出賣時死去3頭.每頭多賣2元,總計起來,還要虧本1元.問原來買了多少頭?

解: 設$x=$原來買牛的頭數.

每頭的賣價 ═══ 每頭的買價 加2元



$$(50-1)\div(x-3)=50\div x+2$$

即　$$49x=50(x-3)+2x(x-3).$$

解之,得　$$x=10 \text{ 或 } -\frac{15}{2}.$$

核算: $x=10$時, 左端$=(50-1)\div(10-3)=7$,

右端$=50\div10+2=7$;

$$x=-\frac{15}{2}\text{時, 左端}=(50-1)\div\left(-\frac{15}{2}-3\right)$$

$$=49\times\left(-\frac{2}{21}\right)=-\frac{14}{3},$$

$$\text{右端}=50\div\left(-\frac{15}{2}\right)+2$$

$$=-50\times\frac{2}{15}+2=-\frac{14}{3}.$$

故知$x=10$或$-\frac{15}{2}$適合原方程式.

解應用問題時,求出方程式的根後,用核算法,只能證明運算時有無錯誤;但不能就作爲問題的解答,還要看合理不合理.如在上題中$-\frac{15}{2}$不能合理,因事實上買牛的頭數,不會是負分數的.所以只有$x=10$是合理的解答.

〔例 2〕 某童子3年後的年齡,恰等於3年前的平方.問他現年多少?

解: 設$x=$某童子現在的歲數.

依題意,得方程式

$$x+3=(x-3)^2.$$

解之,得　　$x=6$ 或 -1.

$x=6$合理,$x=-1$不合理.

故某童子現年6歲.

習　題

1. 二數的和爲14,牠們的平方和爲100;求這二數.

2. 二數的差爲4,牠們的平方和爲106;求這二數.

3. 二數的和爲15,二數的積爲56;求這二數.

4. 連續三整數的平方和爲245,求這連續三數.

5. 連續三奇數的平方和爲35,求這連續三數.

6. 把144元分給若干人,若人數少2,則每人多分1元;求人數是多少?

7. 在靜水中每小時行8里的船,在長8里的河中,行一個來回,共費2小時24分.求水流的速度.

8. 一矩形的公園,長比寬多20步;園周有一等寬的馬路,牠的寬比公園的寬少1倍,面積爲4000平方步.求馬路寬多少?

9. 一水桶有甲乙二管:如二管齊開,4時可注滿.知單開乙管比甲管多費6小時.求單開甲乙二管各注滿的時數.

10. 一事,甲乙合作一日後,乙獨作之,九日半作成;但知甲獨作這事,需要的日數比乙少4日.求甲乙獨作的日數.

11. 一工程,甲乙合作,12日可成.知甲獨作這工程,比乙獨作要少10日.問甲乙獨作的日數.

12. 有甲乙兩工人,甲比乙多作8日,得工資42元,乙得工資40元;如交換甲乙工作的日數,則二人工資的和,增加4元.求甲乙各作的日數.

13. 有一兩輪車,前後兩輪周圍的差爲20寸,行2520

尺的道路,兩輪旋轉次數的差爲60次.求兩輪周長各多少?

14. 兩車同行200里,甲車比乙車每小時快7里,還先到1小時45分鐘.求兩車的速度.

15. 兩地相距120里,甲乙二人各從一地同時起身,相向而行;甲每日比乙多走4里;兩人相會所需的日數,恰等於甲每日所行里數的一半.問二人每日各行多少里?

16. 有一矩形,長比寬多1寸;若長增加7寸,寬減少5寸,面積的大小仍然不變.問這矩形長寬各幾寸?

17. 用洋3角6分,買物若干打.如每打加價3分,就少買一打.問每打原價多少?

18. 兵一隊,整列進行,側面人數比前列多14人;到了前敵展開後,前列增加828人,側面的人數爲5.求此隊中的兵數.

19. 一直角三角形的地面,周圍長30丈,斜邊長13丈;求其餘二邊的長.

20. 一水桶有甲乙二管,知單開甲管注水,比單開乙管少h小時可注滿;如兩管齊開,a小時可注滿.求單開一管注滿的時數.

無理方程式

138. 無理方程式

方程式中含有根式的,叫做無理方程式.

例如：　$\sqrt{x+1}=x-5$ 和 $\sqrt[3]{x^2+1}=1$，都是無理方程式.

139. 無理方程式的解法

解無理方程式的主要目的，是化去根式；然後用解有理方程式的方法解之.但求得的根，須經過核算，適合方程式的才能選為解答；否則棄之（理由看例 3 便可明白）.

(a) 整無理方程式化去根式法.

I. 如含的根式是 2 次的，就要全式平方；3 次的，就全式立方；如此類推.

II. 如方程式只含一項根式，把根式留在一端，其餘的項，都移到另一端，再用(i)的方法化去根式；如含兩項根式，就要有一端留一項含根式的，再用(i)的方法化去根式，如此類推.

〔例 1〕 解 $\sqrt{x+1}=2$.

解：　平方，得　$x+1=4$.

$$\therefore\quad x=3.$$

〔例 2〕 解 $2\sqrt{x}-\sqrt{4x-11}=1$.

解：　移項，得　$-\sqrt{4x-11}=1-2\sqrt{x}$.

平方，得　$4x-11=1-4\sqrt{x}+4x$,

$$4\sqrt{x}=12,$$

$$\sqrt{x}=3.$$

$$\therefore\quad x=9$$

核算：　左端$=2\sqrt{9}-\sqrt{4\times9-11}=2\times3-5=1.$

故知 $x=9$ 合所求.

〔例 3〕　解 $\sqrt{x+1}=x-5.$

解：　平方，得　$x+1=x^2-10x+25,$

$$x^2-11x+24=0,$$

$$(x-8)(x-3)=0.$$

$$\therefore\quad x=8 \text{ 或 } 3.$$

核算：　$x=8$，左端$=\sqrt{8+1}=3,$

右端$=8-5=3.$

∴　知 $x=8$ 合題.

$x=3$，左端$=\sqrt{3+1}=2,$

右端$=3-5=-2.$

∴　知 $x=3$ 不合題.

由此知解無理方程式所得的根，核算後才能定爲解答，把不適合方程式的根，叫做增根.

增根是由於解無理方程式時，兩邊自乘添入的，說明於下：

∵　$\sqrt{x+1}=x-5$，自乘得 $x+1=x^2-10x+25$；

$-\sqrt{x+1}=x-5$，自乘也得 $x+1=x^2-10x+25.$

∴　$x^2-11x+24=0$ 的根包含 $\sqrt{x+1}=x-5$ 與 $-\sqrt{x+1}=x-5$ 的根.

故解得之根，對於 $\sqrt{x+1}=x-5$ 來說，只能有一個根合題.

(b) 分無理方程式化去根式法.

I. 去分母.

II. 依(a)法化去根式解之.

〔例 4〕 解 $\frac{6\sqrt{x}-11}{3\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+6}$.

以 $3\sqrt{x}(\sqrt{x}+6)$ 乘兩端,得

$$6x+25\sqrt{x}-66=6x+3\sqrt{x}.$$

即
$$25\sqrt{x}-3\sqrt{x}=66,$$
$$22\sqrt{x}=66,$$
$$\sqrt{x}=3.$$
$$\therefore\quad x=9.$$

核算: 令 $x=9$,則原方程式的

$$左端=\frac{6\sqrt{9}-11}{3\sqrt{9}}=\frac{7}{9},$$

$$右端=\frac{2\sqrt{9}+1}{\sqrt{9}+6}=\frac{7}{9}.$$

故知 $x=9$ 合題.

習　　題

解下列各方程式:

1. $\sqrt{x-5}-3=0$.　　2. $7-\sqrt{x-4}=3$.

3. $x+\sqrt{x+3}=3$.　　4. $\sqrt{x+9}=2\sqrt{x}-3$.

5. $\sqrt{5x+1}=2\sqrt{x+3}$.　　6. $\sqrt{x+3}-5-\sqrt{x}=0$.

7. $2\sqrt{3-7x}-3\sqrt{8x-12}=0$.

8. $\sqrt{9x^2-11x-5}=3x-2$.

9. $\sqrt{x-4}+3=\sqrt{x+11}$.　10. $13-\sqrt[3]{5x-4}=7$.

11. $\sqrt[3]{x^3-3x^2+7x-11}=x-1$.

12. $\sqrt{x+4a^2}-2a=\sqrt{x}$.　13. $\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{3\sqrt{x}-5}{3\sqrt{x}-13}$.

14. $\sqrt{1+x}+\sqrt{x}=\dfrac{2}{\sqrt{1+x}}$.

15. $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=\dfrac{10}{\sqrt{x}}$.　16. $\sqrt{x}-\sqrt{x-8}=\dfrac{2}{\sqrt{x-8}}$

17. $2\sqrt{x}\quad\sqrt{4x-3}=\dfrac{1}{\sqrt{4x-3}}$.

18. $\sqrt{x}=\dfrac{8}{\sqrt{9x-32}}+\sqrt{9x-32}$.

19. $\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}=0$.

20. $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=3+\dfrac{\sqrt{x}+1}{2}$.

21. $3+\sqrt{x^2+x-1}=2x$.

第十五章

不等式和不定方程式

140. 不等式

假如知道甲生是18歲,乙生是15歲,問甲生年齡大,還是乙生年齡大?誰都知道甲生的年齡大.如要用一個式子把他們二人年齡的大小的關係表示出來,便是

$$18>15.$$

這種式子就叫做不等式.

同樣,知 $a>b$ 時,就是 a 代的數大於 b 代的數.

在上題中,問他們5年前的年齡大小怎樣?自然還是甲生的大,算式是

$$18-5>15-5,$$

即 $$13>10.$$

在上題中,問他們5年後的年齡大小怎樣?也自然還是甲生的大.算式是

$$18+5>15+5,$$

即 $$23>20.$$

同理,假設 $a>b$, c 代的數是正的時,則

$$a-c>b-c,$$

$$a+c>b+c.$$

所以,在不等式兩端同加上或同減去任何正數,牠的不等方向和符號都不變.

假如知道甲班有學生48人,乙班有42人,那一班的學生多?自然是甲班的學生多.用式子表示出來,便是

$$48>42.$$

如問甲班學生的2倍與乙班學生的2倍,那一班人數多?自然還是甲班2倍的人數多.用式子表示出來,便是

$$48\times2>42\times2,$$

即 $$96>84.$$

如把甲乙兩班都分爲6組,甲班每組的人數多,還是乙班每組的人數多?自然還是甲班每組的人數多.用式子表示出來,便是

$$(48\div6)>(42\div6),$$

即 $$8>7.$$

同理,假如 $a>b$, c 是正數,則

$$a\times c>b\times c,$$

即 $$ac>bc;$$

$$(a\div c)>(b\div c),$$

即 $$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}.$$

所以,把不等式的兩端用正數乘之或除之,牠的不等方向和符號都不變.

因負數的絕對值愈大,其值愈小.

$$\therefore\quad -3>-4,$$
$$-4>-5,$$
$$-5>-6,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

我們任取一不等式,假如是

$$5>4.$$

用 -1 乘兩端,則得左端爲 -5,右端爲 -4,不等式就要寫爲

$$5(-1)<4(-1),$$

即 $$-5<-4.$$

同理,$5>4$,則 $5\div(-1)<4\div(-1)$,即 $-5<-4$.

由此知用負數乘或除不等式的兩端,牠的不等方向和符號都要變.

同理,假設 $a>b$,則

$$a\times(-c)<b\times(-c),\ 即\ -ac<-bc;$$

$$a\div(-c)<b\div(-c),\ 即\ -\frac{a}{c}<-\frac{b}{c}.$$

不等式的範圍很廣,這裏講的是最初步的,將來在高等代數學上再詳論之.

141. 絕對不等式

不等式兩端的文字,若以任何實數代之,不等式都能成立,叫做絕對不等式.

例如: 若a代替任何實數,則

$$a^2+1>0.$$

這就是絕對不等式.

下邊敍述兩個重要的絕對不等式:

I. 假設a和b爲不相等的任何實數,則

$$(a-b)^2>0,$$

即 $$a^2-2ab+b^2>0.$$

$$\therefore\quad a^2+b^2>2ab.$$

這就是任何兩實數的平方和,常大於牠們乘積的2倍.

II. $\because\quad a^2+2ab+b^2>4ab.$

兩端開平方取主根,得

$$a+b>2\sqrt{ab}.$$

$$\therefore\quad \frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}.$$

這就是任何兩實數相加的一半,常大於牠們乘積的平方根.

這裏所講的數,指實數而言;假若是虛數,那就不然了,學者務必記住!

這樣的絕對不等式,不止兩個,將來在高等代數學上再討論,這裏從略.

142. 條件不等式

不等式中某文字所代表的數,要合某種條件,不等

式才能成立,這就叫做條件不等式.

例如：在$x+2>0$中,x的值必須大於-2的,才能使這個不等式成立.故這不等式是條件不等式.

143. 條件不等式的解法

求條件不等式中未知數在某界限內,能使條件不等式成立的數,叫做解條件不等式.這裏只講一元一次條件不等式的解法.

〔例 1〕 解 $3x+5>x+17$.

解：移項,得　$3x-x>17-5$,

即　$2x>12$.

用2除兩端,　$x>6$.

〔例 2〕 解 $\frac{2}{x+2}>\frac{1}{2x-3}$.

解：去分母,得　$2(2x-3)>x+2$,

$$4x-x>2+6,$$

$$3x>8.$$

$$\therefore\quad x>2\frac{1}{3}.$$

〔例 3〕 分21爲兩個整數：要小數的2倍小於大數；小數的3倍大於大數加2.求這兩個整數.

設x爲大數,則$21-x$就爲小數.依題意得條件不等式：

$$2(21-x)<x \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$3(21-x)>x+2 \cdots\cdots\cdots (2)$$

由 (1),得　　$x>14.$

由 (2),得　　$x<15\frac{1}{4}.$

$$\therefore\quad 14<x<15\frac{1}{4}.$$

由題意知大數爲 15, 小數爲 6.

習　　題

1. 設 a, b 和 c 爲不相等的三正數,試證明

$$(a+b)(b+c)(c+a)>8abc.$$

2. 假設 $x>1$, 則 $x+\frac{1}{x}>2$; 試證之.

解下列各條件不等式:

3. $-2x>-24.$

4. $\frac{1}{12}x<5\frac{1}{2}.$

5. $7x-8<2x+1.$

6. $x+7>\frac{3}{4}x-8.$

7. $x-\frac{5}{6}>\frac{1}{2}x+2.$

求下列各式中 x 的正整數值:

8. $\frac{1}{7}(x+1)<x+\frac{1}{3}<2x-\frac{1}{2}.$

9. $\frac{1}{4}x>\frac{1}{3}x-2;\ \frac{1}{5}x<\frac{x}{2}-2\frac{1}{2}.$

10. $10(x-1)<7x+18<10x.$

11. 分 73 爲兩部分,各部分都是整數: 大的部分的

3倍,大於5與小的部分之和的5倍;大的部分與8之差的3倍,小於小的部分的7倍.問有幾種分法,各部分都是多少?

144. 不定方程式

在$x+y=6$中,

$$x=1\text{ 時},\ y=5;\quad x=2\text{ 時},\ y=4;$$
$$x=3\text{ 時},\ y=3;\quad x=4\text{ 時},\ y=2;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots;\quad \cdots\cdots\cdots\cdots.$$

一個方程式中,有兩個未知數時,適合方程式的x和y的值不止一對,有無窮組對應值,這種方程式,叫做不定方程式.

§49所講的同值方程式,實際上是一個方程式,也就是不定方程式.

例如: 有鷄兔一籠,只知牠們的足數共是20個;問有幾隻鷄?幾隻兔?

設x和y為鷄和兔的隻數,依題意得方程式如下:

$$2x+4y=20,$$

即
$$x+2y=10.$$
$$\therefore\ x=10-2y.$$

這個方程式是不定方程式.本來x和y有無窮組對應值能適合方程式;但在這問題中,x不能為零,因$x=0$,就是沒有鷄的意思;y不能大於5,因$y>5$時,x的對應值為負的,不能合題意;並且x和y的值,只許是

正整數,不許爲負數的分數.有了這這些限制,得解答如下:

$$
\begin{aligned}
\text{設 } y&=1, &\text{則 } x&=8;\\
y&=2, & x&=6;\\
y&=3, & x&=4;\\
y&=4, & y&=2.
\end{aligned}
$$

此外再沒有適合題意的答數了.

即籠中有鷄2隻,兎4隻;鷄4隻,兎3隻;鷄6隻,兎2隻;或鷄8隻,兎1隻.

習　　題

求適合下列各方程式的 x 和 y 之正整數值:

1. $x+3y=8$.　　2. $3x-y=10$.

3. $\frac{1}{2}x-y=4$.　　4. $x-\frac{1}{5}y=7$.

5. 有兩位數,牠的值是牠的兩個數字和的7倍;求這個兩位數.

6. 有一孔,2孔和4孔的器具,共72件,總孔數是102個.求牠們各種的件數.

第十六章

高次聯立方程式

145. 二元高次聯立方程式的解法

二元高次聯立方程式,現在還沒有普遍的方法去解,下邊所討論的,僅是幾個特別形式的解法.

A. 代入法.

如兩個方程式中,一個是一次的,一個是二次的,解法如下:

I. 先求出x或y的數值(求y時,假定x爲已知數;求x時,假定y爲已知數).

II. 把已求出的x或y的數值,代入另一方程式中,得一元二次方程式.

III. 依一元二次方程式解法解之,得一未知數的數值;餘一未知數的數值,即可求出.

例如: 解 $$3x^2-2xy=5 \cdots\cdots (1)$$
$$x-y=2 \cdots\cdots (2)$$

解: 由(2),得$y=x-2$,代入 1),得
$$3x^2-2x(x-2)=5,$$

$$x^2+4x-5=0$$

$$(x+5)(x-1)=0.$$

$$\therefore\quad x=-5 \text{ 或 } 1.$$

$x=1$ 時，

$y=x-2=1-2=-1.$

$x=-5$ 時，

$y=x-2=-5-2=-7.$

B. 分解因式解法.

如有一方程式能分解因式時，解法如下：

I. 先把能分解的方程式分解，求出一未知數的值.

II. 用代入法解之.

例如：解
$$x^2+6y^2-5xy=0 \quad\cdots\cdots(1)$$
$$x^2+y^2+x-11y-2=0 \quad\cdots\cdots(2)$$

解：分解 (1)，得 $(x-2y)(x-3y)=0.$

$$\therefore\quad x=2y \text{ 或 } 3y.$$

把 $x=2y$ 代入 (2)，得

$$4y^2+y^2+2y-11y-2=0,$$

$$5y^2-9y-2=0,$$

$$(5y+1)(y-2)=0.$$

$$\therefore\quad y=-\frac{1}{5} \text{ 或 } 2.$$

$y=-\frac{1}{5}$，則 $x=-\frac{2}{5}$；

$y=2$，則 $x=4.$

把 $x=3y$ 代入 (2)，得

$$9y^2+y^2+3y-11y-2=0,$$

$$10y^2-8y-2=0,$$

$$5y^2-4y-1=0,$$

$$(5y+1)(y-1)=0.$$

$$\therefore\quad y=-\frac{1}{5} \text{ 或 } 1.$$

$y=-\frac{1}{5}$，則 $x=-\frac{3}{5}$；

$y=1$，則 $x=3.$

習　　題

解下列各方程式:

1. $\begin{cases} 7y^2-6xy=5, \\ 3x+6y=1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x^2-3xy-y^2-8y+48=0, \\ 3x-y=8. \end{cases}$

3. $\begin{cases} xy=1, \\ 3x-5y=2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 6xy=1, \\ 3x-2y=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2+x=4y^2, \\ 3x+6y=1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x-5y=1, \\ x^2+y^2-3x+2y=1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2+x=4(x+y)-22, \\ 5x-y=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2+xy-6=0, \\ x^2-5x-6=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x^2-4xy+2y^2+3x-6y=2, \\ x^2-3xy+2y^2=0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+y=9, \\ x^2+xy+y^2=61. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2+y^2=185, \\ x-y=3. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x-y=8; \\ xy=513. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x+y=28, \\ xy=187. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{7}{12}, \\ xy=12. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2, \\ x+y=2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} ax+by=2, \\ abxy=1. \end{cases}$

146. 等次方程式的解法

方程式含未知數的各項的次數相等時,叫做等次方程式.

例如:
$$x^2-2xy=21 \quad\cdots\cdots(1)$$
$$xy+y^2=18 \quad\cdots\cdots(2)$$

次數都是2,所以是等次方程式.

解法:

I. 設$y=mx$,代入原方程式後,兩式相除,消去x,得一未知數m的方程式.

II. 解之,得m的數值.

III. 用求得m的數值,求x的數值.

IV. m和x求出後,由$y=mx$的關係,y的數值,即可求出.

例如:解
$$x^2-2xy=21 \quad\cdots\cdots(1)$$
$$xy+y^2=18 \quad\cdots\cdots(2)$$

解:設$y=mx$,代入(1)和(2),得
$$x^2-2mx^2=21 \quad\cdots\cdots(3)$$
$$mx^2+m^2x^2=18 \quad\cdots\cdots(4)$$

(3)÷(4),　$(1-2m)\div(m+m^2)=21\div18,$
$$6-12m=7m+7m^2,$$

$$7m^2+19m-6=0,$$

$$(7m-2)(m+3)=0.$$

$$\therefore\quad m=\frac{2}{7}\text{ 或 }-3.$$

把 $m=\frac{2}{7}$ 代入 (3)，得 $x^2-2x^2\times\frac{2}{7}=21$，$3x^2=147$.

$$\therefore\quad x=\pm 7.$$

$x=\pm 7$ 時，則 $y=mx=\frac{2}{7}\times(\pm 7)=\pm 2.$

把 $m=-3$ 代入 (3)，得 $x^2-2x^2(-3)=21$，$7x^2=21$.

$$\therefore\quad x=\pm\sqrt{3}.$$

$x=\pm\sqrt{3}$ 時，則 $y=mx=-3(\pm\sqrt{3})=\mp 3\sqrt{3}.$

習　　題

解下列各方程式：

1. $\begin{cases} x^2+xy=15, \\ x^2-xy=6. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3\frac{1}{4}, \\ 2x^2-3xy+2y^2=2\frac{3}{4}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^3+y^3=152, \\ x^2y+y^2x=120. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^3-y^3=208, \\ xy(x-y)=48. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2-3xy+y^2=-1, \\ 3x^2-xy+3y^2=13. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=37, \\ x^2-y^2=40. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 7xy-8x^2=10, \\ 8y^2-9xy=18. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2+3xy=130, \\ 3xy+y^2=154. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2-2xy=21, \\ xy+y^2=40. \end{cases}$　　10. $\begin{cases} x^2+3xy=54, \\ xy+4y^2=115. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^3-y^3=127, \\ x^2-xy^2=42. \end{cases}$　　12. $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ 2xy-y^2=8. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^2+xy=a, \\ y^2+xy=b. \end{cases}$　　14. $\begin{cases} x^2y=a, \\ xy^2=b. \end{cases}$

147. 對稱方程式的解法

如在方程式中,把x和y互換後,方程式的值不變時,叫做x和y的對稱方程式.

例如:　$x^2+y^2=18-x-y$ ……………… (1)

$xy=6$ ……………… (2)

互換後,得　$y^2+x^2=18-y-x,$

$yx=6.$

與原方程式一樣,所以是x和y的對稱方程式.

解法:

I. 設$y=m-n$, $x=m+n$. 代入原方程式中,得m和n爲未知數的方程式.

II. 求m和n的數值.

III. 由$y=m-n$和$x=m+n$的關係,求x和y的數值.

例如: 解　$x^2+y^2=18-x-y$ ……………… (1)

$xy=6$ ……………… (2)

解: 設$x=m+n$, $y=m-n$, 代入(1)和(2), 得

$$2(m^2+n^2)=18-2m \cdots\cdots(3)$$

$$m^2-n^2=6 \cdots\cdots(4)$$

由 (4), 得 $\qquad n^2=m^2-6.$

把 n^2 的值代入 (3), 得

$$2(m^2+m^2-6)=18-2m,$$

$$2m^2+m-15=0,$$

$$(2m-5)(m+3)=0.$$

$$\therefore \quad m=\frac{5}{2} \text{ 或 } -3.$$

$m=\frac{5}{2}$ 時,	$m=-3$ 時,
$n^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2-6$	$n^2=(-3)^2-6$
$=\frac{1}{4}.$	$=3.$
$\therefore \quad n=\pm\frac{1}{2}.$	$\therefore \quad n=\pm\sqrt{3}.$
$\therefore \begin{cases} x=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}, \\ y=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}. \end{cases}$	$\therefore \begin{cases} x=-3\pm\sqrt{3}, \\ y=-3\pm\sqrt{3}. \end{cases}$

習　　題

解下列各方程式:

1. $\begin{cases} 2x^2+2y^2=5xy, \\ 4x+4y=xy. \end{cases}$　　2. $\begin{cases} xy(x+y)=30, \\ x^3+y^3=35. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4(x+y)=xy+13, \\ x-y=2000. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4xy=96-x^2-y^2, \\ x+y=6. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2y^2+5xy=84, \\ x+y=8. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2+y^2=xy+37, \\ x+y=xy-17. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^3+y^3=53-3xy, \\ x+y=5. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2+y^2=3xy-1, \\ 3x^2-xy+3y^2=13. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=76, \\ x+y=14. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+y=15, \\ x^2+y=125. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{7}{12}, \\ xy=12. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2+y^2=89, \\ xy=40. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x+y=a, \\ x^3+y^3=bxy. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=2a, \\ x^2-xy+y^2=2b. \end{cases}$

148. 特別解法

A 種形式

I. $\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ x\pm y=b. \end{cases}$　　$\begin{cases} x^2\pm Pxy+y^2=a, \\ x\pm y=b. \end{cases}$

II. $\begin{cases} x^3+y^3=a, \\ x+y=b. \end{cases}$　　$\begin{cases} x^3-y^3=a, \\ x-y=b. \end{cases}$

B 種形式

$\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ Pxy=b. \end{cases}$　　$\begin{cases} x^2\pm Pxy+y^2=a, \\ Qxy=b. \end{cases}$

C 種形式

I. $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=a, \\ x^2\pm xy+y^2=b. \end{cases}$ II. $\begin{cases} x^2\pm Pxy+y^2=a, \\ x^2\pm Qxy+y^2=b. \end{cases}$

上邊各式中 a, b, P 和 Q 代表任意數值.

上邊的方程式,用§145, §146 和 §147 的解法都可以,這裏另講一種解法.

解上邊形式的方程式,如能求得

$$x+y=?\text{ 和 }x-y=?$$

後相加減,用 2 除之,卽得 x 和 y 的數值.

怎樣能求出 $x\pm y=?$ 只要能求出

$$x^2\pm 2xy+y^2=?$$

方後便可求得.

A 種形式的解法

(a) 形式 I 的解法:

I. 如已知 $x+y$ 的數值,只求 $x-y=?$ 如已知 $x-y$ 數值只求 $x+y=?$

II. 無論求 $x+y=?$ 或 $x-y=?$ 都要先求出 $xy=?$

III. 求出 $xy=?$ 後,便可求得 $x^2\pm 2xy+y^2=?$

例如: 解 $x^2+y^2=185$ ………………………… (1)

$x+y=17$ ………………………………(2)

解: 需要求出 $x-y=?$

平方(2),得 $x^2+2xy+y^2=289$ …………………… (3)

(3)−(1),得 $2xy=104$ ……………………………(4)

(1)－(4), 得　　$x^2-2xy+y^2=81.$

開方,得　　$x-y=\pm 9.$

由 $\begin{cases}x+y=17,\\ x-y=9;\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=13,\\ y=4.\end{cases}$ | 由 $\begin{cases}x+y=17,\\ x-y=-9;\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=4,\\ y=13.\end{cases}$

(b) 形式 II 的解法:

I. 用低次方程除高次方程式.

II. 其餘的手續與形式 I 的解法一樣.

例如: 解　　$x^3-y^3=218 \cdots\cdots (1)$

$x-y=2 \cdots\cdots (2)$

解: 需要求 $x+y=?$

(1)÷(2), 得　　$x^2+xy+y^2=109 \cdots\cdots (3)$

平方 (2), 得　　$x^2-2xy+y^2=4 \cdots\cdots (4)$

(3)－(4), 得　　$3xy=104,$

$xy=35 \cdots\cdots (5)$

(3)＋(5), 得　　$x^2+2xy+y^2=144.$

開方,得　　$x+y=\pm 12.$

由 $\begin{cases}x+y=12,\\ x-y=2;\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=7,\\ y=5.\end{cases}$ | 由 $\begin{cases}x+y=-12,\\ x-y=2;\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-5,\\ y=-7.\end{cases}$

B 種形式的解法

I. 需要求出 $x\pm y=?$

II. xy 的値已知道,先求 $x^2\pm 2xy+y^2=?$

例如: 解　　$x^2+y^2=74 \cdots\cdots (1)$

$$3xy=105 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

解：由(2),得　$xy=35 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

(3)×2,得　$2xy=70 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

(1)+(4),得　$x^2+2xy+y^2=144.$

開方,得　$x+y=\pm 12.$

(1)−(4),得　$x^2-2xy+y^2=4.$

開方,得　$x-y=\pm 2.$

由 $\begin{cases} x+y=12, \\ x-y=2; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=12, \\ x-y=-2; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=-12, \\ x-y=2; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=-12, \\ x-y=-2; \end{cases}$

得 $\begin{cases} x=\pm 7, \\ y=\pm 5; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 5, \\ y=\pm 7. \end{cases}$

C 種形式的解法

I. 解形式 I 時,用低次的除高次的以後,其餘的手續,與解形式 II 的一樣.

II. 需要求出 $x\pm y=?$ 故先求 $xy=?$

再求 $x^2\pm 2xy+y^2=?$

例如：解　$x^4+x^2y^2+y^4=2923 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

$$x^2-xy+y^2=37 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

解：(1)÷(2),得　$x^2+xy+y^2=79 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

(3)−(2),得　$2xy=42,$

$$xy=21 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

(2)−(4),得　$x^2-2xy+y^2=16.$

開方，得　$x-y=\pm4.$

(3)+(4)，得　$x^2+2xy+y^2=100.$

開方，得　$x+y=\pm10.$

由 $\begin{cases}x+y=10,\\x-y=4;\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=10,\\x-y=-4;\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=-10,\\x-y=4;\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=-10,\\x-y=-4;\end{cases}$

得 $\begin{cases}x=\pm7,\\y=\pm3;\end{cases}$ $\begin{cases}x=\pm3,\\y=\pm7.\end{cases}$

習　題

解下列各方程式：

1. $\begin{cases}x+y=28,\\xy=187.\end{cases}$

2. $\begin{cases}x-y=5,\\xy=126.\end{cases}$

3. $\begin{cases}x-y=8,\\xy=513.\end{cases}$

4. $\begin{cases}x+y=84,\\xy=923.\end{cases}$

5. $\begin{cases}x^2+y^2=80,\\xy=40.\end{cases}$

6. $\begin{cases}x^2+y^2=178,\\x+y=16.\end{cases}$

7. $\begin{cases}x-y=41,\\x^2+y^2=106.\end{cases}$

8. $\begin{cases}x^2-xy+y^2=76,\\x+y=14.\end{cases}$

9. $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2,\\x+y=2.\end{cases}$

10. $\begin{cases}\dfrac{1}{10}(x-y)=1,\\x^2-xy+y^2=52.\end{cases}$

11. $\begin{cases}ax+by=21,\\abxy=1.\end{cases}$

12. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2\dfrac{1}{2},\\x+y=6.\end{cases}$

13. $\begin{cases} x^3+y^3=407, \\ x+y=11. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^3-y^3=998, \\ x-y=4. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^3+y^3=126, \\ x^2-xy+y^2=21. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 4(x^2+y^2)=17xy, \\ x-y=6. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x^3+y^3=637, \\ x+y=13. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \frac{1}{x^3}\quad\frac{1}{y^3}=91, \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=2128, \\ x^2+xy+y^2=76. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=9211, \\ x^2-xy+y^2=61. \end{cases}$

149. 應用問題

1. 二數和爲8,二數平方和爲34;求這二數.

解: 設x和y爲二數,依題意得方程式:

$$x+y=8 \quad\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$x^2+y^2=34 \quad\cdots\cdots\cdots (2)$$

解之,得 $\begin{cases} x=5, \\ y=3; \end{cases}$ $\begin{cases} x=3, \\ y=5. \end{cases}$

故知二數爲5與3.

2. 二數差爲1,二數平方與乘積的和爲37;求二數.

3. 有二數,其和、積、平方差都相等;求這二數.

4. 二數和加上牠們平方的和爲18;牠們的差加上牠們平方的差爲6.求這二數.

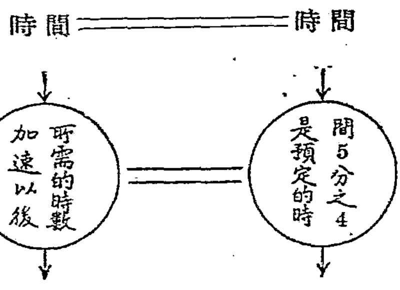
5. 二數和加上牠們的乘積為23；從牠們的平方和減去牠們的和,等於26.求這二數.

6. 有兩位整數加上27後,則數字易位;用牠的數字的乘積除牠,得商為2.求這兩位數.

7. 父子年齡的和為100,父子年齡的乘積比子年齡的10倍多1800；求父子的年齡.

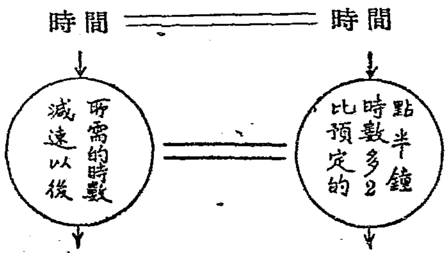
8. 某人從A地往B地旅行;若每小時增加半里,用預定的時間5分之4便可達到;若每小時減半里,比預定的時間要多用2點半鐘.求預定的時間,每小時的速度和A,B兩地的距離.

解：設A,B兩地的距離$=x$里,每小時的速度$=y$里,則$\frac{x}{y}=$預定的時數.



$$\frac{x}{y+\frac{1}{2}}=\frac{x}{y}\times\frac{4}{5}$$

即　$$xy-2x=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$



$$\frac{x}{y-\frac{1}{2}}=\frac{x}{y}+2\frac{1}{2}$$

即 $$10y^2-5y-2x=0 \cdots\cdots (2)$$

解之,得 $$y=2,\quad x=15.$$

故知 A, B 兩地的距離爲 15 里,每小時的速度爲 2 里,預定的時數爲 $7\frac{1}{2}$ 小時.

9. 某馬車走 5280 尺的路,牠的前輪比後輪多轉 132 次;假如前後輪的周長都增大 2 尺,則其旋轉次數的差爲 88 次.求前後兩輪的周長.

10. 甲乙二人競走 160 步的距離.甲競走完時,乙尙差 20 步.知甲的 3 步,等於乙的 4 步的距離;甲走 4 步時,乙能走 5 步.求甲乙二人每步的距離.

11. 乙由 A 市出發,甲由 B 市出發,同時、同方向而行,經若干時後,甲追及乙,算其行程,二人共行 15 里;復一同轉身,乙 9 小時到 B 市,甲 4 小時到 A 市.求 A, B 兩市的距離和乙每小時的速度.

12. 東西兩地相距 25 里.甲乙二人同時從兩地相向而行,5 小時後相遇;知甲行 1 里所需的時間,比乙

行1里所需的時間多18分.求甲乙二人每小時的速度.

13. 甲乙兩車從東西相距240里的兩站,同時相向而行.相遇後,甲經4小時到西站,乙經9小時到東站.求甲乙兩車每小時的速度.

14. 某鐵路有一號,二號,三號的車,其速度:一號比二號快10里,二號比三號快10里.今一號與三號在甲車站,二號在乙車站,相向而行,二號與一號相會後45分,二號與三號相會.知甲乙兩車站相距180里,求各車每小時的速度.

15. 一汽車駛行某地,行若干里後,每小時增速5里,比平日早到40分鐘;若減5里,就要遲到一小時.求原速度.

16. 買甲乙兩種布,甲種每尺價比乙種價貴4分;乙種比甲種多買10丈;甲種共價36元,乙種共價32元.求各買的尺數

17. 某人將布若干疋,增高買價5分賣之,得利16元;若想每疋得2角5分的利賣之,則所得利息的10元鈔票之張數,等於每疋買價的5角鈔票的張數.求疋數和每疋的價值.

18 有矩形和正方形的面積相等,知正方形的一邊比矩形的長邊短6寸;今若把矩形的寬增1寸,長減2寸,其面積仍不變.求矩形的長寬各多少?

19. 面積17000方丈的矩形小花園,其外周圍有寬

3 丈的道路,面積爲 261 方丈.求小花園的長寬各多少?

20. 水槽有甲乙大小兩管:若兩管齊開,則 $1\frac{1}{5}$ 小時可注滿;若單開一管,知用大管比用小管早滿 1 小時.求單開 1 管的時數.

21. 前三年 16 元所買的米,比今年多買 3 斗 9 升;又知今年 4 斗米價比前三年貴 15.6 元.求今年每升的米價(把元化爲分易算).

第十七章

二次函數的圖解

150. 一元二次式的圖解

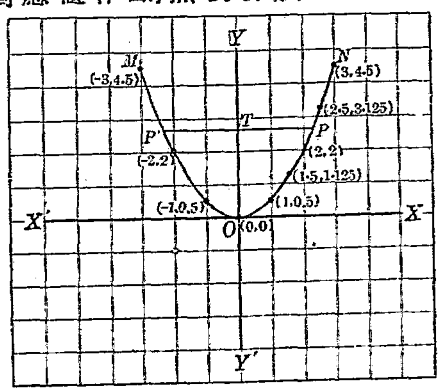
在上編中,我們知道一次函數的變迹爲直線.現在研究二次函數的圖解如何?茲先討論一元二次式的圖解.

〔例 1〕 圖解 $y=f(x)=\frac{1}{2}x^2$.

先作 x, y 的對應值表如下:

x	….3	2.5	2	1.5	1	0	-1	-2	-3
y	…4.5	3.125	2	1.125	0.5	0	0.5	2	4.5

取各組對應值作點,然後聯成平滑曲線如下圖:



這種曲線叫做拋物線.在此有三點須得注意的:

(1) 因 $x=\pm\sqrt{2y}$, 故每一 y 之值,可有 x 之對應值兩

個,絕對値相同,符號相反;故知從MON曲線上的任一點P作垂線PT到y軸,再引長PT到P',令$TP'=PT$,則P'亦必是MON曲線上的一點.於是y軸便成為MON曲線的'對稱軸'.

(2) 因x之值無論正負,x^2之值均為正,故$y=\frac{1}{2}x^2$亦常為正,故知MON曲線,完全位於x軸之上方.

(3) 當x之值(無論正負)無限增大時,y之值亦無限增大,故MON曲線在I, II象限均向外無限伸張.

現在討論一般的　元二次式的圖解,即是

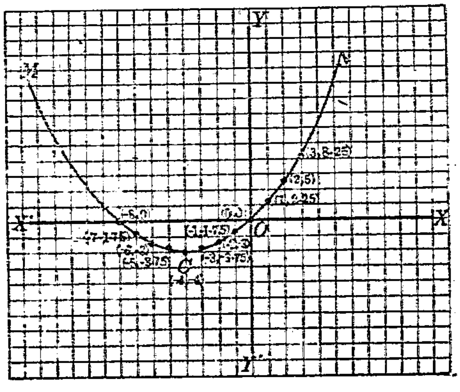
$$y=f(x)=ax^2+bx+c \text{ 的變迹為何?}$$

〔例 2〕 圖解 $y=f(x)=\frac{1}{4}x^2+2x$.

照例1列表如下:

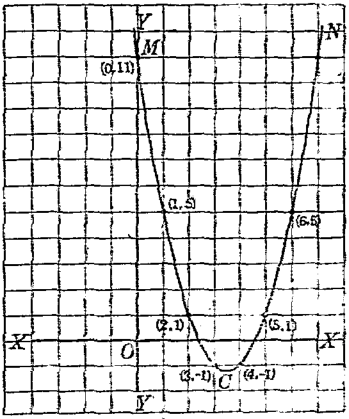
x	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8
$2x$	6	4	2	0	−2	−4	−6	−8	−10	−12	−14	−16
$\frac{x^2}{4}$	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4	6.25	9	12.25	16
y	8.25	5	2.25	0	−1.75	−3	−3.75	−4	−3.75	−3	−1.75	0

將各點聯成平滑曲線如下圖:



〔例 3〕 圖解 $y=f(x)=x^2-7x+11$.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	11	5	1	-1	-1	1	5



由上各例可知凡一元二次函數的變迹為拋物線.

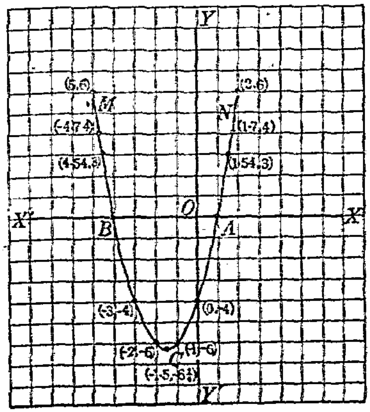
151. 一元二次方程式的圖解.

由前節例 2, 當 $y=0$ 時, $\frac{1}{4}x^2+2x=0$, 由此所得 x 之二值 (0 和 -8), 卽為方程式 $\frac{1}{4}x^2+2x=0$ 之實根, 故一元二次方程式之實根, 可依下法求得近似值: 先作 $y=f(x)$ 的圖解, 然後在 x 軸上量得 $f(x)$ 曲線的橫截值. 這些橫截值 (x 之值) 能使 $y=f(x)=0$, 所以為 $f(x)=0$ 之根.

〔例 1〕 圖解 $x^2+3x-4=0$.

先作 $y=f(x)=x^2+3x-4$ 的圖解.

x		y
-1	-2	-6
-3	0	-4
1.54	-4.54	3
1.7	-4.7	4
2	-5	6
-1.5		$-6\frac{1}{4}$

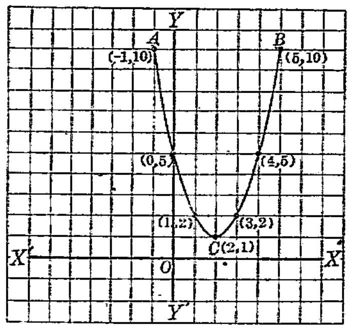


MCN曲線代表 $y=x^2+3x-4$. 這個曲線與 x 軸的交點爲 A 和 B. A 和 B 的坐標爲 $(1,0)$ 和 $(-4,0)$, 故知原方程式的根爲1和 -4.

〔例 2〕 圖解 $x^2-4x+5=0$.

先作 $y=f(x)=x^2-4x+5$ 的圖解

x		y
2		1
3	1	2
4	0	5
5	-1	10

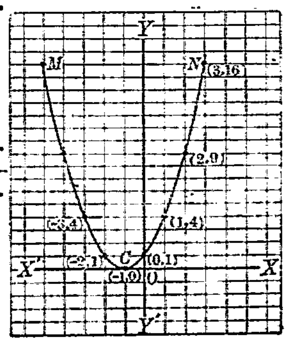


ACB 曲線代表 $y=x^2-4x+5$. 因牠與 x 軸不相交,故知原方程式無實數根.

〔例 3〕 圖解 $x^2+2x+1=0$.

先作 $y=f(x)=x^2+2x+1$ 的圖解.

x	⋯-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$⋯⋯⋯
y	⋯$+4$	$+1$	0	$+1$	$+4$	$+9$	$+16$⋯⋯⋯



$f(x)$ 的曲線 MCN 與 XX' 相切於 $C(-1,0)$，即 $f(x)=0$ 有二實根相等.

由上得拋物線與 XX' 軸的相關情形約有三種:

(1) 有二交點時,原方程式有二不等實根.

(2) 只有一點相切時,原方程式有等根.

(3) 互不相交時,原方程式沒有實根,而爲二虛根

152. 二元二次方程式的圖解

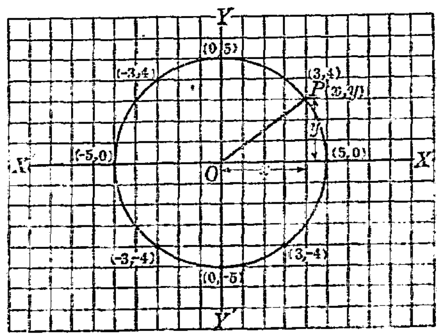
所謂含 x,y 二元方程式的圖解,就是圖解上任一點的 x 和 y 之值,都適合於這方程式;不是圖解上的點,牠的 x 和 y 之值,必不適合於這方程式.二元二次方程式的圖解大都是曲線,或閉或開,玆分論之如下:

I. $x^2+y^2=a^2$ 的圖解.

例如: 圖解 $x^2+y^2=25$.

(1) $x=\pm\sqrt{25-y^2}$, 或 (2) $y=\pm\sqrt{25-x^2}$.

x	y
0	±5
±5	0
3	±4
-3	±4



由上式,$y=\pm\sqrt{25-x^2}$, 欲得 y 爲實數值,則 x 之值在

+5 與 -5 之間;同理,由 $x=\pm\sqrt{25-y^2}$,欲得 x 爲實數值,y 之值在 +5 與 -5 之間.又任一點 P 與原點的距離 $OP=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{25}=5$. 故方程式 $x^2+y^2=25$ 的圖解爲圓,牠的圓心爲 O,圓半徑爲 5.

一般的,凡 $x^2+y^2=a^2$ 的變迹皆爲圓,圓心爲原點 O,圓半徑爲 a.

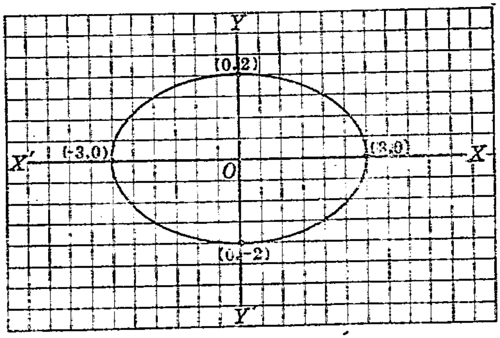
II. $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 的圖解.

例如: 圖解 $4x^2+9y^2=36$.

y	x
0	±3
±1.48	±2
±2	0

(1) $y=\pm\frac{2}{3}\sqrt{(3+x)(3-x)}$,

(2) $x=\pm\frac{3}{2}\sqrt{(2+y)(2-y)}$.



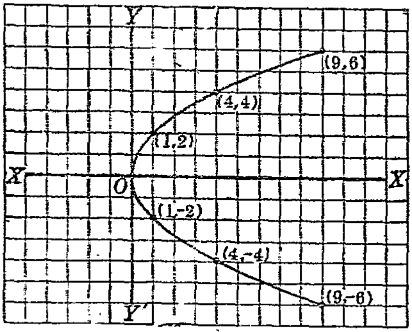
由前面 (1),(2) 兩式,知 x 之值在 +3 與 -3 之間,y 之值在 +2 與 -2 之間,故 $4x^2+9y^2=36$ 的圖解爲一閉曲線,這曲線叫做橢圓,牠的長半徑爲 3,短半徑爲 2,橢圓心爲 O.

一般的，凡 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 的變迹皆爲橢圓，橢圓心爲原點 O，長半徑爲 a，短半徑爲 b.

III. $y^2=px$ 的圖解.

例如：圖解 $y^2=4x$.

y	x
0	0
±2	1
±4	4
±6	9



由前式 $y^2=Px$，可知 x 之值不能與 P 之值異號；故 P 之值如爲負，則這一曲線完全位於 YY' 之左方；如 P 之值爲正，則這一曲線完全位於 YY' 之右方.

又因 $y=\pm\sqrt{Px}$，故知這曲線以 XX' 而對稱，且在其上下無限伸張.

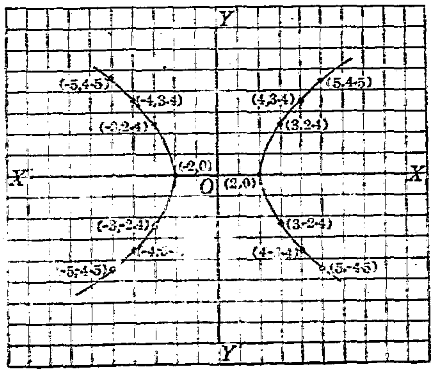
這種曲線叫做拋物線.凡 $y^2=Px$ 的變迹皆爲拋物線.

IV. $x^2-y^2=a^2$ 的圖解.

例如：圖解 $x^2-y^2=4$.

$y=\pm\sqrt{x^2-4}$.

x	y
±2	0
3	±2.4
−3	±2.4
4	±3.4
−4	±3.4
±5	±4.5



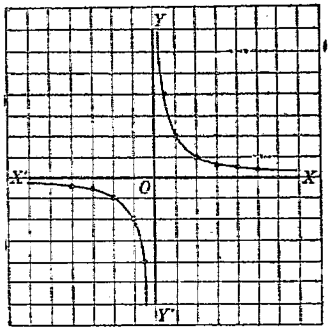
由上式，$y=\pm\sqrt{x^2-4}$，知 x 之絕對值不能小於2、而 y 之值則無限增大，這種曲線叫做雙曲線，凡 $x^2-y^2=a^2$ 的變迹皆爲雙曲線.

V. $xy=a$ 的圖解.

例如：圖解 $xy=2$.

$$y=\frac{2}{x}.*$$

x	y
±0	$\pm\infty$ *
±0.5	±4
±1	±2
±2	±1
±3	±0.6
±4	±0.5
±5	±0.4
$\pm\infty$ *	±0



由上例可知當 x 之值漸近於0時，y 之值增大無窮而爲正；當 x 之值無窮增大而爲正時，y 之值漸近於0而爲正；當 x 之值爲負而無窮增大時，y 之值亦爲負而漸近於0；當 x 之值爲負而漸近於0時，y 之值亦爲負而無窮增大；故這曲線必在第一象限與第三象限，而以二坐標軸爲其漸近線.這種曲線叫做雙曲線，凡

---

*分式 $\frac{a}{x}$ 之 x 逐漸變小，則 $\frac{a}{x}$ 之值逐漸變大：

$$\frac{a}{0.1}=10a,\ \frac{a}{0.001}=1000a,\ \frac{a}{0.000001}=1000000a,\cdots\cdots.$$

故如 x 之值小至不可名言，則 $\frac{a}{x}$ 之值大至不可名言，這種數值、叫做無窮大，以符號"∞"表之.

$xy=a$ 之變迹皆爲雙曲線.

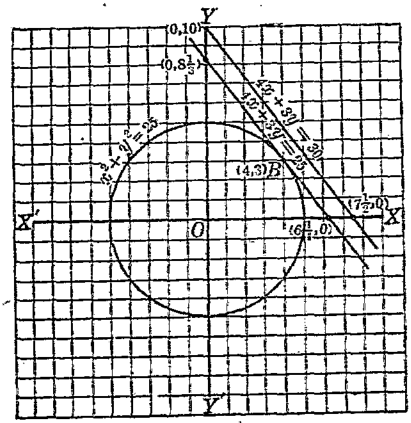
〔註〕 當一曲線連續趨近某一直線而在無窮遠點相遇,則這直線叫做這曲線的漸近線.

153. 二元二次聯立方程式的圖解

所謂圖解二元聯立方程式,就是求兩方程式圖象交點的坐標.先分別作圖解,讀出交點的坐標,即爲所求的解,有相交、相切、不相交三種情形.

〔例 1〕 圖解 $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ 4x+3y=25. \end{cases}$

〔例 2〕 圖解 $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ 4x+3y=30. \end{cases}$



(1) $4x+3y=25.$

x	0	$6\frac{1}{4}$
y	$8\frac{1}{3}$	0

(2) $4x+3y=30.$

x	0	$7\frac{1}{2}$
y	10	0

$x^2+y^2=25$ 的圖解爲圓; $4x+3y=25$, $4x+3y=30$ 的圖解均爲直線.在例1中,直線與圓相切於一點 $B\,(4,3)$,

故得一組解 $x=4,\ y-3.$

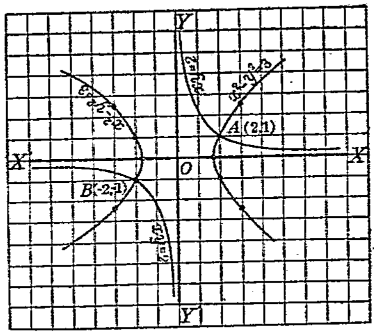
在例2中，直線與圓不相交，故爲無解，即無實根。

〔例 3〕 圖解 $\begin{cases} x^2-y^2=3. \\ xy=2. \end{cases}$

$$y=\pm\sqrt{x^2-3}.$$

$x=\pm\sqrt{3}$ 時，$y=0$. x 之絕對值 $<\sqrt{3}$ 時，y 爲虛數.

x	y
$\pm\sqrt{3}$	0
±2	±1
3	$\pm\sqrt{6}$
-3	$\pm\sqrt{6}$
4	$\pm\sqrt{13}$
-4	$\pm\sqrt{13}$



$x^2-y^2=3$, $xy=2$ 的圖解均爲雙曲線，相交於二點 $A(2,1)$, $B(-2,-1)$，故得兩組解 $\begin{cases} x=2, \\ y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2, \\ y=-1. \end{cases}$

習　　題

圖解下列各方程式：

1. $x^2-2x=4.$
2. $2x^2+7-9x=0.$
3. $x^2=4x+5.$
4. $8x^2=x+7.$
5. $\dfrac{x^2}{4}+x-2=0.$
6. $4x^2-16x-9=0.$

7. $y^2=-4x$. 8. $y^2=8x$.

9. $y^2+x=0$. 10. $y^2=12x$.

11. $xy=8$. 12. $x^2+y^2=a^2$.

13. $x^2+y^2=64$ 和 $x^2+25y^2=25$.

14. $x^2-y^2=1$. 15. $y=(x-1)(x-2)$.

16. $x^2+y^2=100$ 和 $4x^2+25y^2=100$.

17. $\begin{cases} x^2+y^2=100, \\ x+y=14. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} xy=36, \\ x+y=15. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x^2+y^2=74, \\ xy=36. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x^2-y^2=5, \\ xy=6. \end{cases}$

第十八章

指數和對數

154. 指數

I. 正指數.

定則 I: $a^m \times a^n = a^{m+n}$. §5

定則 II: $a^m \div a^n = a^{m-n}$. §14

若 $m=n$, $a^m \div a^m = a^{m-m}$

$$=a^0$$

$$=1.$$

定則 III. $(a^m)^n = a^{mn}$. §63

II. 負指數.

$$\because \quad a^2 \div a^3 = a^{2-3} = a^{-1},$$

但 $a^2 \div a^3 = \dfrac{a^2}{a^3} = \dfrac{1}{a}.$

$$\therefore \quad a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

同樣,得 $a^{-2} = \dfrac{1}{a^2},$

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3},$$

………………

由上例,得定則IV: $a^{-m}=a^{\frac{1}{m}}$.

III. 分指數.

定則V: $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$. §107

由定則V, 知 $a^{-\frac{1}{m}}=\dfrac{1}{a^{\frac{1}{m}}}=\dfrac{1}{\sqrt[m]{a}}$.

$$\because \quad \sqrt[m]{a}=a^{\frac{1}{m}}$$

$$=a^{\frac{n}{mn}}.$$

由上例,得定則VI: $\sqrt[m]{a}=\sqrt[mn]{a^n}$.

由上邊定則,知道指數可以爲整數或分數;也可以爲正數或負數,都是有意義的.因用負指數,可以變除算爲乘算;用分指數,可以變開方爲乘方.

〔例 1〕 $\dfrac{3x}{5my}=3x\times5^{-1}m^{-1}y^{-1}$.

〔例 2〕 $\dfrac{3m}{m^2+1}=3m\times(m^2+1)^{-1}$.

關於 $(m^2+1)^{-1}=$? 在高等代數上再講牠的計算法.

〔例 3〕 $\sqrt[5]{a^{-8}}\div\sqrt[5]{a^7}=a^{-\frac{8}{5}}\div a^{\frac{7}{5}}$

$$=a^{-\frac{8}{5}-\frac{7}{5}} \qquad \text{定則II}$$

$$=a^{-\frac{15}{5}}=a^{-3}.$$

〔例 4〕 $(x^{\frac{1}{a-c}})^{a^2-c^2}=x^{\frac{1}{a-c}\times(a^2-c^2)}=x^{a+c}$.

〔例 5〕 $\{(a-b)^k\}^{-l}\times\{(a+b)^{-k}\}^l=(a-b)^{-kl}\times(a+b)^{-kl}$

$$=\{(a+b)(a-b)\}^{-kl}$$

$$=(a^2-b^2)^{-kl}.$$

〔例 6〕 $\left(\dfrac{a^{\frac{2}{3}}\sqrt{b^{-1}}}{b\sqrt[3]{a^{-2}}}\div\sqrt{\dfrac{a\sqrt{b^{-4}}}{b\sqrt{a^{-2}}}}\right)^6=\left(\dfrac{a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{2}}}{ba^{-\frac{2}{3}}}\div\sqrt{\dfrac{ab^{\frac{-4}{2}}}{ba^{\frac{-2}{2}}}}\right)^6$

$$=\{a^{\frac{2}{3}-(-\frac{2}{3})}b^{-\frac{1}{2}-1}\div\sqrt{b^{-2-1}a^{1-(-1)}}\}^6$$

$$=(a^{\frac{4}{3}}b^{-\frac{3}{2}}\div b^{\frac{-3}{2}}a^{\frac{2}{2}})^6$$

$$=(a^{\frac{4}{3}-1}b^{-\frac{3}{2}-\frac{-3}{2}})^6$$

$$=(a^{\frac{1}{3}})^6=a^2.$$

習　　題

把下列各式的負指數變爲正的:

1. $2x^{-\frac{1}{4}}$.　　2. $4x^{-2}a^3$.　　3. $3\div a^{-2}$.

4. $\dfrac{1}{4a^{-2}}$.　　5. $\dfrac{x^{-3}}{5y^{-2}}$.

用根號和正指數記下列各式:

6. $x^{\frac{3}{5}}$.　　7. $5x^{-\frac{1}{2}}$.　　8. $2x^{-\frac{1}{2}}$.

9. $\dfrac{2}{5^{-\frac{2}{4}}}$.　　10. $7a^{-\frac{1}{2}}\times3a^{-1}$.　　11. $2a^{-2}\div a^{-\frac{3}{2}}$.

12. $x^{\frac{1}{2a}}\times x^{-\frac{2}{a}}$.

化簡下列各式,並變負指數爲正的:

13. $(\sqrt{a^2b^3})^6$.　14. $(\sqrt[9]{x^{-4}y^3})^{-3}$.　15. $(x^ay^{-b})^3\times(x^3y^2)^{-a}$.

16. $\left(\frac{16x^2}{y^{-2}}\right)^{-\frac{1}{4}}$.　17 $\left\{\sqrt[4]{(x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}})^3}\right\}^{-\frac{2}{3}}$.　18. $\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x-1}}$.

19. $(x\div\sqrt[n]{x})^n$.　20 $\left(x\times\sqrt[n]{x^{-\frac{1}{n}}}\right)^{\frac{n^2}{1-n}}$.

21. $\sqrt{a^{-2}b}\times\sqrt[3]{ab^{-3}}$.　22. $\sqrt[3]{ab^{-1}c^{-2}}\times(a^{-1}b^{-2}c^{-4})^{-\frac{1}{6}}$.

23. $(a^{-\frac{1}{2}}\sqrt[3]{x})^{-3}\times\sqrt{x^{-2}\sqrt{a^{-6}}}$.　24 $\sqrt[3]{(a+b)^5}\times(a+b)^{-\frac{2}{3}}$.

25. $\{(x-y)^{-3}\}^4\div\{(x+y)^n\}^3$.　26. $\left(a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{3}}\sqrt{ax^{-\frac{1}{3}}\sqrt[4]{x^{\frac{4}{3}}}}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

27. $\sqrt[4]{(a+b)^6}\times(a^2-b^2)^{-\frac{1}{2}}$.　28. $\left(\frac{a^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{2}}}{x^{-1}a}\right)^2\div\sqrt[3]{\frac{a^{-1}}{x^{-3}}}$.

29. $(a^{n^2-1})^{\frac{n}{n+1}}+\frac{\sqrt[n]{a^{2n}}}{a}$.　30. $\left(\sqrt[5]{\frac{a^{\frac{1}{2}}x^{-2}}{x^{\frac{1}{2}}a^{-2}}}\times\sqrt[3]{\frac{a\sqrt{x}}{x^{-1}\sqrt{a}}}\right)^{-4}$.

31 $\left(\frac{y^{-3}}{x^{\frac{2}{7}}z^{-1}}\right)^{-\frac{3}{2}}\times\left(\frac{y^{\frac{14}{3}}x^{-1}}{z^{-\frac{21}{4}}}\right)^{\frac{2}{7}}$.　32. $\frac{2^n\times(2^{n-1})^n}{2^{n+1}\times2^{n-1}}\times\frac{1}{4^{-n}}$.

33. $\frac{2^{n+1}}{(2^n)^{n-1}}\div\frac{4^{n+1}}{(2^{n-1})^{n+1}}$.　34. $\frac{3\times2^n-4\times2^{n-2}}{2^n-2^{n-1}}$.

35. $\frac{3^{n+4}-6\times3^{n+1}}{3^{n+2}\times7}$.

155. 對數的意義

下式中有"?"的地方,就是需要求的數.

I.　　$8^2=?$

由乘法,得　　$8^2=64$.

8叫做基數,也叫做底數,64是乘積,2是指數.知道

基數和指數,由乘法便可求出乘積.

II. $?^2=64.$

由開方,得 $\sqrt{64}=8.$

$?^3=27.$

由開方,得 $\sqrt[3]{27}=3.$

知道乘積和指數,由開方便可求出基數.

III. $8^?=64.$

沒有法則去求,但能猜着是2.

$$3^?=1.732\cdots\cdots.$$

不但沒有法則去求,還不容易猜,所以必須研究出來一種求法,就是研究知道基數和乘積,怎樣求指數,這種法則,又叫做求對數.

在 $8^?=64$ 式中,求 ? 的意思,就是求用8作基數,64的對數是多少?

爲讀者明瞭乘方、開方和對數三者的關係起見,再重複的說明於下:

例如: $8^2=64.$

用乘方的術語來說:

8的平方爲64.

用開方的術語來說:

64的平方根爲8.

用對數的術語來說:

用8作基數,64的對數是2.

由此得對數之定義:

當甲數之乘冪等於乙數時,則這冪指數叫做以甲數作底,乙數之對數.設 $a^x=N$, 則 x 爲以 a 作底, N 之對數.

156. 對數的記法

通常用 log (Logarithms 的縮寫) 代對數, $8^2=64$, 用對數的記法是 $\log_8 64=2$, 讀爲用 8 作基數, 64 的對數是 2, 對於 2 說, 64 就叫做牠的原數.

同樣, $5^3=125$.	$\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}=1.732\cdots\cdots$.
用對數記之,爲	用對數記之,爲
$\log_5 125=3$.	$\log_3 1.732\cdots\cdots=\frac{1}{2}$.

假設　　$a^x=b$.

用對數記之,則爲　$\log_a b=x$.

可見對數和指數是同一的數,不過用不同的方法表示出來罷了.

例如: 求 $\log_3 27=?$

設 $\log_3 27=x$, 則 $3^x=27$, 但知 $3^3=27$.

$$\therefore\quad x=3.$$

故知　　$\log_3 27=3$.

這裏應當加以說明的,就是對數的基數可以爲任意數,但 1 和負數須除外. 1 的任意若干次乘方都是 1, 如 $1^x=81$, 則 $\log_1 81=x$, 但 x 這個數不能存在.所以若把

1 做基數,則任何數的對數都不能存在.負數的偶次乘方是正數,如 $(-2)^4=16$, 則 $\log_{-2}16=4$; 但 $\log_2 16=4$. -2 與 2 將從何區別?並且可知把負數來做對數的基數實不必要的.

習　題

用對數的記法記下列各式:

1. $3^4=81$.　　2. $11^2=121$.　　3. $5^3=125$.

4. $2^a=c$.　　5. $a^0=1$.　　6. $\sqrt{4}=2$.

7. $\sqrt[3]{27}=3$.　　8. $11^3=1331$.

用乘算式子記下列各式:

9. $\log_3 27=3$.　　10. $\log_3 9=2$.　　11. $\log_4 64=3$.

12. $\log_{10}10000=4$.　　13. $\log_a a=1$.　　14. $\log_a 1=0$.

求下列各對數:

15. $\log_5 25$.　　16. $\log_2 \frac{1}{64}$.　　17. $\log_3 81$.

18. $\log_{32}\frac{1}{2}$.　　19. $\log_{10}100000$.　　20. $\log_{10}0.00001$.

157. 對數的定理

I. 1 的對數是 0.

$$\because\ a^0=1,\qquad \therefore\ \log_a 1=0.$$

II. 基數的對數是 1.

$$\because\ a^1=a,\qquad \therefore\ \log_a a=1.$$

III. 正數之積的對數是各因數的對數之和.

設 $a^m=M$ 和 $a^n=N$, 則 $m=\log_a M$, $n=\log_a N$.

$$\because \quad a^m\times a^n=a^{m+n}=MN,$$

$$\therefore \quad \log_a(MN)=m+n=\log_a M+\log_a N.$$

IV. 兩個正數之商的對數, 是被除數的對數減去除數的對數之差.

$$\because \quad a^m\div a^n=a^{m-n}=M\div N,$$

$$\therefore \quad \log_a(M\div N)=m-n=\log_a M-\log_a N.$$

V. 一個正數之冪的對數, 是這個數的對數與其冪指數之積.

$$\because \quad (a^n)^p=a^{np}=N^p,$$

$$\therefore \quad \log_a N^p=np=p\log aN.$$

VI. 一個正數之正實根的對數, 是這個數的對數除以其根指數所得的商.

$$\because \quad \sqrt[r]{a^n}=a^{\frac{n}{r}}=\sqrt[r]{N},$$

$$\therefore \quad \log_a\sqrt[r]{N}=\frac{n}{r}=\frac{1}{r}\log_a N.$$

VII. 一個正數之倒數的對數, 是這個數的負對數, 也叫做餘對數 (Cologarithms), 記爲 colog.

$$\because \quad \frac{1}{a^n}=a^{-n}=\frac{1}{N},$$

$$\therefore \quad \log_a\frac{1}{N}=-n=-\log_a N=\operatorname{colog}_a N.$$

158. 常用對數

$$10^2=100,$$

即　　$\log_{10} 100=2.$

通常寫作 $\log 100=2$, 把 10 省略.

同樣,　　$10^3=1000,$

就寫作　　$\log 1000=3.$

這種用 10 作基數的對數, 叫做常用對數. 以後不說明用什麼數作基數的對數, 都是常用對數.

159. 常用對數的性質

我們由乘算式子和對數式子的關係, 知道:

$$\because\ 10^1=10, \qquad \therefore\ \log 10=1;$$

$$10^2=100, \qquad \log 100=2;$$

$$10^{-1}=\frac{1}{10}, \qquad \log\frac{1}{10}=-1;$$

$$10^{-2}=\frac{1}{100}, \qquad \log\frac{1}{100}=-2.$$

假如我們已經知道 $\log 12=1.0792$, 那末,

$$\log 120=\log(12\times 10)=\log 12+\log 10$$
$$=1.0792+1=2.0792;$$

$$\log 1200=\log(12\times 100)=\log 12+\log 100$$
$$=1.0792+2=3.0792;$$

$$\log 1.2=\log\frac{12}{10}=\log 12-\log 10$$
$$=1.0792-1=0.0792;$$

$$\log 0.12=\log\frac{12}{100}=\log 12-\log 100$$
$$=1.0792-2=\bar{1}.0792.$$

$\bar{1}.0792$ 的意思是：1 是負數，792 是正數．

可見常用對數，只要有效數字相同，牠們的對數差常是一個整數．至於對數的小數部分，完全相同．這就是常用對數方便的地方．

160. 定位數和定值數

一個數的對數，是整數部分和小數部分組成的：整數部分，叫做定位數；小數部分，叫做定值數．

例如：$\log 12=1.0792$ 中的 1，是定位數；0.0792 是定值數．

有時一個數的對數，只有定值數，牠的定位數爲零．

例如：$\log 1.2=0.0792$，只有定值數 0.0792，定位數就是零．

數學上，常把定值數寫爲正數；至於定位數，可以爲正數，也可以爲負數．負定位數的負號，通常寫在該數的上邊．

例如：$\log 0.12=\bar{1}.0792$ 中的 1 是負的，0.0792 是正的．所以有時候可寫 $\log 0.12=0.0792-1$．

假如定值數也是負數，我們就得把牠先化爲正數．

例如：
$$\begin{aligned}-\log 120&=-2.0792=-(2+0.0792)\\&=-2-0.0792=-2+1\quad 0.0792-1\\&=\bar{3}.9208.\end{aligned}$$

161. 定位數的法則

I. 正定位數.

$$\because\ 10^0=1,\qquad \therefore\ \log 1=0;$$
$$10^1=10,\qquad \log 10=1;$$
$$10^2=100,\qquad \log 100=2;$$
$$10^3=1000,\qquad \log 1000=3;$$
$$10^4=10000,\qquad \log 10000=4.$$

1 的對數爲 0,

10 的對數爲 1.

故知個位數的對數比 1 小,比 0 大;所以單位數的對數的整數部分是 0.

10 的對數爲 1,

100 的對數爲 2.

故知兩位數的對數比 2 小,比 1 大;所以兩位數的對數的整數部分是 1.

100 的對數爲 2,

1000 的對數爲 3.

故知三位數的對數比 3 小,比 2 大;所以三位數的對數的整數部分是 2.

同樣,知四位數的對數的整數部分是 3; 五位數的對數的整數部分是 4. 餘類推.

由上知任何正整數的對數,牠的定位數爲正,比其位數總是少 1.

如知對數的定位數是 1 便知牠的原數是兩位數,

如定位數是 2，便知牠的原數是三位數．餘類推．

II. 負定位數．

$$\because\ 10^{-1}=\frac{1}{10}=0.1,\qquad \therefore\ \log 0.1=-1;$$

$$10^{-2}=\frac{1}{100}=0.01,\qquad \log 0.01=-2;$$

$$10^{-3}=\frac{1}{1000}=0.001,\qquad \log 0.001=-3;$$

$$10^{-4}=\frac{1}{10000}=0.0001,\qquad \log 0.0001=-4;$$

$$\cdots\cdots\cdots,\qquad \cdots\cdots\cdots.$$

故知　　0.1 的對數爲 -1，

0.01 的對數爲 -2，

0.001 的對數爲 -3，

0.0001 的對數爲 -4，

……………………．

由上邊知原數是正小數時，牠的對數的定位數是負的，其絕對值比原數上小數點右邊第一位有效數字左邊零的個數多 1．

例如：0.0000125 的對數的定位數爲 -5；0.0000105 的對數的定位數也是 -5．

習　題

求下列各數的對數的定位數：

1. 78.　　2. 87.92.　　3. 1310.012.　　4. 0.589002.

5. 8.007. 6. 0.000056. 7. 89325. 8. 8.

9. 0.0001002. 10. 5000.0006.

162. 對數表

本書最後所附的常用對數表,是五位對數表.

因爲常用對數的定位數容易推知,所以製表時只載定值數.但定值數大部分都是無限小數,所以把第六位以下的數,用四捨五入法棄掉,僅列五位定值數.

因爲對數表上只載定值數,於是也就把小數點省略不載;所以求對數時,仍須加上.

對數表上左邊一行和頂頭一列是原數,中間是各原數的定值數,右邊是比例部分(P.P.小表).

定值數首兩位相同時,表上只列一次,其餘的僅列後三位數.

如原小數第六位爲5或大於5,則於第五位加1;如原小數第五位起小於5而大於$4\frac{1}{2}$,則第五位爲$\overline{5}$,表明這個5是由第六位進來的,叫做小5;有"*"記號的,表明牠的首兩位數是用下邊的首兩位數.

163. 由原數求對數

〔例 1〕 求1234的對數.

(1) 由定位數的法則,知道1234是四位數,牠的對數的定位數爲3.

(2) 由表左邊一行內找出123前三位數,再從頂頭

一列內查得末位數4;從這一行向下推尋到和123同列的數09132,加上小數點,得0.09132,即是1234的對數的定值數.

$$\therefore\quad \log 1234=3.09132.$$

〔例 2〕 求 log 0.01234.

(1) 由定位數的法則,知道第一位有效數字和小數點中間有一個0,牠的定位數是 −2.

(2) 定值數和例1相同.

$$\therefore\quad \log 0.01234=\bar{2}.09132.$$

〔例 3〕 求 log 1.234.

(1) 原數是整數帶小數時,只由整數的位數決定對數的定位數,所以1.234的對數的定位數爲0.

(2) 定值數和例1相同.

$$\therefore\quad \log 1.234=0.09132.$$

〔例 4〕 求 log 1234.5.

本書所附的對數表,不能直接查得五位有效數字各數的對數,須用比例原理或P.P.表(P.P.表也是從比例原理求得的).現在依本例說明於下:

log 1234.5 的定位數爲 3.

I. 比例原理　從對數表,檢得1234的定值數爲0.09132,又檢得1235的定值數爲0.09167.而1234.5在1234和1235之間,所以牠的對數的定值數,也必定在0.09132和0.09167之間.從原數差和牠們的對數差殆

成正比例(實則不是正比例,因爲所差甚微,無妨看作正比例).這個原理知道原數差 1 (1235−1234), 牠們的對數差 0.00035(0.09167−0.09132).現在設原數差 0.5(1234.5−1234) 的對數差爲 x, 得下式:

$$1:0.5=0.00035:x.$$

解之,得 $x=0.000175$, 四捨五入,爲 0.00018.

$$\therefore\quad \log 1234.5=3.09132+0.00018=3.09150.$$

II. P.P.表的用法　從對數表同頁右邊 P.P. 表內,檢得表差 35 (卽 0.09167 與 0.09132 之差); 又從 35 的左邊,檢得 5 同列的定値數爲 17.5, 就是要找的定値差數,把這個定値差數加到 1234 的定値數上; 但定値差號小數點的左一位,須與 1234 的定値數的第五位相當; 第五位以後的數,用四捨五入法截去,運算法如下:

檢表,得　　$\log 1234=3.09132$, 表差$=35$,

　　5 的定値數差$=0.000175$

$$\therefore\quad \log 1234.5=3.09150$$

〔例 5〕 求 $\log\frac{1}{123}$

$$\log\frac{1}{123}=\text{colog}\,123=-\log 123,$$

但　　$\log 123=2.08991,$

$$\therefore\quad \log\frac{1}{123}=-2.08991=-2-0.08991$$

$$=-3+1-0.08991$$

$$=\bar{3}.91009.$$

習　題

求下列各號的對數:

1. 347.　2. 1259.　3. 1001.　4. 11.01.

5. 0.0034.　6. 879000.　7. 34.5.　8. 0.0000001.

9. $\frac{1}{347}$.　10 $\frac{1}{1259}$.　11. $\frac{1}{0.0001}$.

12. 求1—8的餘對數.

化下列各數爲正小數的同値數:

13. -0.125　14. -8.9127.　15. -2.1897.

16. $5-7.898$.　17. $5-7.417$　18. -0.8975.

19. -0.0001.　20 $1-0.00009$.

164. 對數的運算

我們知道一個數的對數,牠的定値數恆是正的;但是定位數可正可負,若果定位數和定値數都是正的,牠們的四則運算,就和算術上的法則相同;若果定位數是負數,定値數是正數時,那末,牠們的四則運算,就和算術上的法則不同了,務必特別注意!現在舉幾個例子於下:

〔例 1〕 求 2.73754 與 $\bar{4}.58973$ 的和.

$$\begin{array}{r} 2.73754 \\ +)\ \bar{4}.58973 \\ \hline \bar{1}.32727 \end{array}$$

這裏,小數點後進上去的數是+1,所以定位數是

$$+2-4+1=-1.$$

〔例 2〕 求 $\bar{3}.13792-\bar{2}.79106=?$

$$\begin{array}{r} \bar{3}.13792 \\ -)\ \bar{2}.79106 \\ \hline \bar{2}.34686 \end{array}$$

這裏,小數點後第一位不夠減,從上位借去1,所以定位數成了

$$-3-1-(-2)=-2.$$

〔例 3〕 求 $\bar{1}.89721$ 與 6 的乘積.

$$\begin{array}{r} 0.89721 \\ \times)\quad\ \ 6 \\ \hline 5.38326 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \bar{1} \\ \times)\ 6 \\ \hline -6 \end{array}$$

$$\therefore\ \bar{1}.89721\times 6=\bar{1}.38326.$$

〔例 4〕 求四除 $\bar{4}.87251$ 的商.

$$\begin{array}{r} 4)\underline{\bar{4}.87251} \\ \bar{1}.21813 \end{array}$$

$$\therefore\ \bar{4}.87251\div 4=\bar{1}.21813.$$

〔例 5〕 求 3 除 $\bar{2}.39729$ 的商.

$$\begin{aligned} \bar{2}.39729\div 3 &= (\bar{2}.39729+1-1)\div 3 \\ &= (\bar{3}+1.39729)\div 3 \\ &= \bar{1}+0.46576=\bar{1}.46576. \end{aligned}$$

這裏,定位數 $\bar{2}$ 不能被 3 除盡,又因爲 $\bar{2}.3$ 這兩位數一負一正,也不能求牠的商,所以給被除數上同時加 1 減 1,使定位數變成 -3,用 3 除牠得商 -1,而定値數變爲 1.39729,用 3 除牠,得商仍爲正數 0.46576.

習　　題

求下列各式的值,使小數部分常爲正數:

1. $1.23456+\bar{2}.34567$.　　2. $\bar{3}.98765+\bar{1}.72519$.

3. $4.32191+\bar{1}.87632$.　　4. $2.34125-3.78910$.

5. $0.93152-\bar{2}.89710$.　　6. $\bar{2}.13419-\bar{4}.78917$.

7. 2.31452×3.　　8. $\bar{3}.98014\div 3$.

9. $\bar{5}.98125\times 4$　　10. $\bar{1}.35741\times 5$.

11. $\bar{2}.79131\div 4$　　12. $\bar{1}.15791\div 6$.

165. 由對數求原數

原數對於對數,也叫做反對數.求反對數的方法,就是由原數求對數的方法,反其道而行之,卽得.

〔例 1〕 求對數 2.69984 的原數.

設
$$\log x=2.69984,\ 求\ x.$$

(1) 由定位數法則,知道 x 是三位數.

(2) 在表上定值數部分中找出 69984 左邊所對的原數是 50,頂頭所對的數爲 1.

$$\therefore\quad x=501.$$

〔例 2〕 求 $\bar{2}.37849$ 的反對數.

設
$$\log x=\bar{2}.37849,\ 求\ x.$$

由定位數的法則,知道 x 是小數點後有一個 0 的小數.

查表,得　2390 的對數的定值數是 37840 ………… (1)

　　　　　2391 的對數的定值數是 37858 ………… (2)

(1) 用比例原理的算法.

表上查不出來定值數 37849,故先把 (1) 和 (2) 的定值數查出來.因之,知道原數相差是 1 時,牠們的對數的

定值數相差爲0.00018；原來定値數和(1)的定值數相差爲0.00009，牠們原數相差假設爲y，得下式：

$$0.00018 : 0.00009 = 1 : y,$$

$$18 : 9 = 1 : y.$$

$$\therefore \quad y = 0.5.$$

故知所對的原數爲0.023905.

(2) 用P.P.表的算法.

求(1)和(2)定値數的差爲18，即表差.再把原來定値數和(1)的定值數相差求出來，知爲9.在P.P.表上查出18.下邊9左邊所對的數是5.

$$\therefore \quad x = 0.02390 + 0.000005 = 0.023905.$$

習　　題

求下列各對數的原數：

1. 1.0926.　2. 4.27068.　3. 3.21942.

4. $\bar{2}.71600$.　5. $\bar{3}.21325$.　6. 0.71263.

166. 對數的應用

有了對數的法則，我們就可以用加、減、乘和除，順次來代替乘除、乘方和開方.所以我們要計算數字的乘、除、乘方和開方等，可以先用對數演算，由所得的結果，再求反對數，即得所要求的數值.

讀者須注意：(1)數字加減的運算，不能應用對數；(2)負數不能求對數，但遇一式，其中含有負數相乘除

時,亦可用對數計算;先用對數求這式的絕對值,然後再定符號,例如求 $58.4\times(-0.856)$,可先求 58.4×0.856 之值,再加"$-$"號;求 $(-57.3)\div(-0.42)$,可先求 $\frac{57.3}{0.42}$ 之值,再加"$+$"號;(3) 用對數計算,所得的結果,牠的精確數值,總比所用的對數表的位數少 1 位.如本書用五位對數表,只有小數四位數精確,這因為定值數大都是近似值的原故.

〔例 1〕 計算 $\frac{2.38\times3.91}{4.8}$ 至四位小數.

$$\log\frac{2.38\times3.91}{4.8}=\log(2.38\times3.91)-\log 4.8 \qquad \text{§157}$$
$$=\log 2.38+\log 3.91-\log 4.8$$
$$=0.37658+0.59218-0.68214$$
$$=0.28662.$$

$\because$ 0.28662 所對的原數是 1.9347……,

$$\therefore\quad \frac{2.38\times3.91}{4.8}=1.9347.$$

〔例 2〕 求 $x=(0.878)^8$ 中的 x 至三位小數.

$$\log x=8\log 0.878$$
$$=8\times\bar{1}.94349$$
$$=8(-1+0.94349)$$
$$=-8+7.54792=\bar{1}.54792.$$

$\because$ $\bar{1}.54792$ 所對的原數為 0.352……,

$$\therefore\quad x=0.352.$$

〔例 3〕 求 $x=\sqrt[5]{0.716}$ 中的 x 至小數三位.

$$\log x=\frac{1}{5}\log 0.716=\frac{1}{5}(\bar{1}.85491)$$

$$=\frac{1}{5}(-1+0.85491)$$

$$=\frac{1}{5}(-1-4+4.85491)$$

$$=\bar{1}.97098.$$

$\because$ $\bar{1}.97098$ 所對的原數是 0.935……,

$\therefore$ $x=0.935$

〔例 4〕 年利 5.5 釐 (5.5 %), 複利計算, 600 元 10 年的本利和是多少?

我們設 P 為本金, r 為年利率, n 為年數, S 為本利和,由算術上知道:

$$S=P(1+r)^n.$$

我們又知道複利若是每半年一結算,則公式應變為

$$S=P\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}.$$

若複利是每季一結算,則公式又須變為

$$S=P\left(1+\frac{r}{4}\right)^{4n}.$$

公式中 n 若是帶分數,應先化為假分數,再計算.用對數計算時,則公式可寫作

$$\log S=\log P+n\log(1+r).$$

現在來計算本題如下:

$$P=600,\ r=0.055,\ n=10.$$

$$\therefore\quad S=600(1+0.055)^{10}=600\times(1.055)^{10}.$$

兩端取對數,得

$$\log S=\log 600+10\log 1.055$$
$$=2.77815+10\times 0.02325$$
$$=2.77815+0.2325=3.01065.$$

$\therefore\quad S=1024.8$, 即本利和合計約 1024 元 8 角.

〔例 5〕 今有本金 500 元,年利率是 8%,每季以複利結算;求 10 年後所得的本利和是多少?

$$P=500,\ r=\frac{8}{100},\ n=10.$$

$$S=500\left(1+\frac{1}{4}\times\frac{8}{100}\right)^{4\times 10}$$
$$=500(1.02)^{40}.$$

$$\log S=\log 500+40\log 1.02$$
$$=2.69897+40\times 0.0086$$
$$=3.04297.$$

$\therefore\quad S=1104$, 即本利和合計約 1104 元.

習　　題

計算下列各式:

1. $1927\times 0.2501.$
2. $175.6\times 0.2132.$
3. $0.231\times 2.394\times 0.0157$
4. $5.2\times 3.81\times 17.31.$
5. $7.3\times 0.73\times 0.0073.$
6. $23\times 1.7\times 3.35\times 0.62.$

7. $2.503 \div 0.0634$.

8. $16.83 \div 24.76$.

9. $0.01254 \div 0.4105$.

10. $\dfrac{14.72 \times 33.5}{38.7}$.

11. $\dfrac{15.38 \times 0.0137}{276 \times 0.0038}$.

12. $(0.094)^4$.

13. $(1.73)^{11}$.

14. $\sqrt[4]{0.00225}$.

15. $\dfrac{1}{0.0001345}$.

16. $\sqrt{\dfrac{2}{3}} \times \sqrt[3]{7}$.

17. 今有本金345元,年利率是百分之5,每半年以複利計算;問100年後的本利和是多少?

18. 今有本金1000元,年利率是百分之7,每年以複利計算;問9年7月後,本利和是多少?

19. 設有本金100元,年利率是百分之5,每季以複利計算;問百年後本利和是多少?

20. 用年利5分的複利息每年一結算,問幾年後本利和爲本金的10倍?

167. 指數方程式的解法

有了對數定理以後,$3^{?}=1.732$ 式中的"?"可以求得,方法如下:

用 x 代 ?,得 $\qquad 3^x=1.732$.

兩端取對數,得 $\log 3^x=\log 1.732$,

即 $\qquad x\log 3=\log 1.732$,

$$x=\frac{\log 1.732}{\log 3}=\frac{0.23855}{0.47712}=0.5.$$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{2}.$$

故 $3^{\frac{1}{2}}=1.732$, 即 $\sqrt{3}=1.732$.

$3^x=1.732$, 叫做指數方程式; 求 x, 叫做解指數方程式.

所以方程式中的指數,是未知數時,就叫做指數方程式.解的法則,兩端取對數,即可求出未知數的數值.

〔例 1〕 解 $2^x=128$.

解:
$$x\log 2=\log 128,$$
$$\therefore \quad x=\frac{\log 128}{\log 2}=\frac{2.10721}{0.30103}=7.$$

〔例 2〕 解 $5^{x-3}=8$.

解:
$$(x-3)\log 5=\log 8,$$
$$x-3=\frac{\log 8}{\log 5}=\frac{0.90309}{0.69897}=1.29\cdots\cdots,$$
$$\therefore \quad x=4.29\cdots\cdots.$$

習 題

解下列各方程式:

1. $3^x=241$.
2. $12^x=1723$.
3. $\frac{1}{2x}=\frac{1}{256}$.
4. $5^{2x}=30625$.
5. $3^{x+2}=405$.
6. $10^{5-3x}=2^{7-2x}$.
7. $5^{x-3}=8$.
8. $13^{2x+5}=14^{x+7}$.
9. $6^{3-4x}\times 8^{x+5}=8$.
10. $3^x=9^{y-1}$; $16^{3-x}=8^{y-2}$.

第十九章

比例和變數法

168. 比

分式$\frac{a}{b}$可寫作$a:b$，讀爲a比b，a叫做前項，b叫做後項；前後項合起來叫做比式.

$\frac{a}{b}$既等於$a:b$，在分式中$\frac{ma}{mb}=\frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}}=\frac{a}{b}$，

$$\therefore\quad a:b=ma:mb$$

$$=\frac{a}{m}:\frac{b}{m}.$$

【定理】 若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{c}{f}=\cdots\cdots$，則

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots=\frac{a+c+e+\cdots\cdots}{b+d+f+\cdots\cdots}.$$

證明： 設$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots=k$，則

$$a=bk,\ c=dk,\ e=fk,\cdots\cdots,$$

$$\therefore\quad a+c+e+\cdots\cdots=bk+dk+fk+\cdots\cdots$$

$$=(b+d+f+\cdots\cdots)k,$$

即 $$\frac{a+c+e+\cdots\cdots}{b+d+f+\cdots\cdots}=k,$$

$$\therefore\quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e+\cdots\cdots}{b+d+f+\cdots\cdots}.$$

〔例 1〕 假設 $\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$, 求 $\frac{5x-3y}{7x+2y}$ 的值.

$$\frac{5x-3y}{7x+2y}=\frac{\frac{5x-3y}{y}}{\frac{7x+2y}{y}}=\frac{\frac{5x}{y}-3}{\frac{7x}{y}-2}$$

$$=\frac{5\times\frac{3}{4}-3}{7\times\frac{3}{4}+2}=\frac{3}{29}.$$

〔例 2〕 兩數的比爲5與8; 假設各加9, 則其比爲8與11. 求兩數.

解: 設 $5x$ 和 $8x$ 爲兩數, 則

$$\frac{5x+9}{8x+9}=\frac{8}{11},$$

$$55x+99=64x+72,$$

$$9x=27.$$

$$\therefore\quad x=3.$$

故知兩數爲15和24.

習　　題

1. 假設 $x:y$ 爲 $5:7$, 求 $(x+y):(y-x)$ 的數值.

2. 假設 $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$ 和 $\frac{x}{y}=\frac{5}{7}$, 求 $\frac{3ax-by}{4by-7ax}$ 的數值.

3. 假設 $\dfrac{2a^2-3b^2}{a^2+b^2}=\dfrac{2}{41}$, 求 $a:b=?$

4. 假設 $(7x-4y):(3x+y)=5:13$, 求 $x:y=?$

5. 假設 $b:a=2:5$, 求 $(2a-3b):(3b-a)=?$

6 如 $\dfrac{p}{b-c}=\dfrac{q}{c-a}=\dfrac{r}{a-b}$, 求證 $p+q+r=0$.

7. 如 $\dfrac{x}{b+c}=\dfrac{y}{c+a}=\dfrac{z}{a-b}$, 求證 $x-y+z=0$.

8. 假設 $\dfrac{2x-3y}{3z+y}=\dfrac{z-y}{z-x}=\dfrac{x+3z}{2y-3x}$, 求證每一比式等於 $x:y$.

169. 比例

如兩個比式相等時,叫做比例式. 如 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ 時, 可寫為 $a:b=c:d$, 或 $a:b::c:d$; a 和 d 叫做外項, b 和 c 叫做內項.

$$a:b=c:d,$$

即 $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

$$\therefore\ ad=bc.$$

所以兩外項的積,等於兩內項的積.

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}=\cdots\cdots$ 叫做連續比例式.

在 $a:b=b:d$ 式中, b 叫做 a, d 的比例中項.

170. 求比例中項

$$\because\quad a:b=b:d,$$

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{d},$$

$$b^2=ad.$$

$$\therefore\quad b=\sqrt{ad}.$$

由上式,知兩外項爲已知時,比例中項便可求得.

例如: 求 $2x^3$ 和 $8x$ 的比例中項.

$$\sqrt{2x^3\times 8x}=\sqrt{16x^4}$$

$$=4x^2.$$

$4x^2$ 是 $2x^3$ 和 $8x$ 的比例中項.

171. 定理

I. 假如 $a:b=b:d,$

則 $a:d=a^2:b^2.$

證明: $\because\quad a:b=b:d,$

即 $\frac{a}{b}=\frac{b}{d}.$

$$\frac{a}{d}=\frac{a\times b}{d\times b}=\frac{a}{b}\times\frac{b}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2},$$

即 $a:d=a^2:b^2.$

II. 假如 $a:b=c:d$ 和 $e:f=g:h,$

則 $ae:bf=gc:dh.$

證明： $\because \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d},$

$$\frac{e}{f}=\frac{g}{h}.$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}\times\frac{e}{f}=\frac{c}{d}\times\frac{g}{h},$$

即 $ae : bf = gc : dh.$

III. 假如 $a : b = c : d,$

則 $b : a = d : c.$

證明： $\because \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d},$

$$1\div\frac{a}{b}=1\div\frac{c}{d},$$

即 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}.$

$$\therefore \quad b : a = d : c.$$

IV. 假如 $a : b = c : d,$

則 $a : c = b : d.$

證明： $\because \quad a : b = c : d.$

$$\therefore \quad ad = bc.$$

用 cd 除之得 $\frac{ad}{cd}=\frac{bc}{cd},$

即 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}.$

$$\therefore \quad a : c = b : d.$$

V. 假如 $a : b = c : d,$

則 $a+b:b=c+d:d.$

證明: $\because \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$

兩端加1,得 $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1,$

即 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}.$

$\therefore \quad a+b:b=c+d:d.$

VI. 假如 $a:b=c:d,$

則 $a-b:b=c-d:d.$

證明: $\because \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$

兩端減1,得 $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1,$

即 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}.$

$\therefore \quad a-b:b=c-d:d.$

VII. 假如 $a:b=c:d,$

則 $a+b:a-b=c+d:c-d.$

證明: $\because \quad a:b=c:d,$

$a+b:b=c+d:d,$ (定理V)

$a-b:b=c-d:d.$ (定理VI)

$\therefore \quad a+b:a-b=c+d:c-d.$

172. 解方程式的應用

例如: 解 $\frac{x^2+x-2}{x-2}=\frac{4x^2+5x-6}{5x-6}.$

解：
$$\frac{x^2}{x-2}=\frac{4x^2}{5x-6}, \qquad \text{(定理VI)}$$
$$x^2(x+2)=0.$$
$$\therefore\quad x=0 \text{ 或 } -2.$$

習　　題

1. 求 $27a^2b^3$ 和 36 的比例中項.

假設 $a:b=c:d$，求證下列各式：

2. $ab+cd : ab-cd=a^2+c^2 : a^2-c^2$.
3. $a:b=\sqrt{3a^2+5c^2} : \sqrt{3b^2+5d^2}$.
4. $\dfrac{a}{p}+\dfrac{b}{q} : a=\dfrac{c}{p}+\dfrac{d}{q} : c$.

解下列各方程式：

5. $3x-1 : 6x-7=7x-10 : 9x+10$.
6. $x-12 : y+3=2x-19 : 5y-13=5 : 14$.
7. $x^2-2x+3 : 2x-3=x^2-3x+5 : 3x-5$.
8. $2x-1 : x^2+2x-1=x+4 : x^2+x+4$.
9. 如 $a+b : b+c=c+d : d+a$，證明
$$a=c \text{ 或 } a+b+c+d=0.$$
10. 如 $a:b=x:y$，證明
$$al+xm : bl+ym=ap+xq : bp+yq.$$

173. 變數法

變數法分正變和反變兩種：

I. 正變.

某人4點鐘能寫8000字,問8點鐘能寫多少字?

設8點鐘所寫的字數爲x個,得比例式如下:

$$4:8=8000:x.$$

$$\therefore\quad x=8\times 8000\times\frac{1}{4}=16000.$$

卽8點鐘能寫16000字.

同理,知兩點鐘能寫4000字,12點鐘能寫24000字.

上題如改爲某人4點鐘能寫8000字,問y點鐘能寫多少字?

設y點鐘所寫的字數爲x個,則得

$$4:y=8000:x.$$

$$\therefore\quad x=\frac{y\times 8000}{4}=2000y,$$

卽
$$\frac{x}{y}=2000.$$

由上例看來,寫字的速率一定,所寫字數的多寡和鐘點數成正比例:卽鐘點數變大幾倍,寫的字數也變大幾倍;點鐘數變小幾倍,寫的字數也變小幾倍,而4點鐘寫8000字,卽每點鐘能寫2000字,在題中常是一定不變的數,叫做常數.

這種變數法,叫做正變.設變數爲x和y,常數爲k,變的符號$\propto$,則上式可寫作

$$x\propto y,\text{或}\ \frac{x}{y}=k.$$

即一量對於他量的比爲常數時,這兩個量叫做互爲正變.

II. 正變數的求法.

有了一對x和y相應的數値,k就可以求得. k求得後,任一數知道了,他數也就知道了.

例如: 設x與y互爲正變. y是3時,x是6000;求y是11時,x是多少?

由 $x\div y=k$, 得, $6000\div 3=2000=k.$

$$\therefore\quad x=2000\times y$$
$$=2000\times 11=22000.$$

III. 反變.

8人4日能做完的工程,問16人幾日可成?

設16人做完工程的日數爲x,則

$$8:16=x:4.$$

$$\therefore\quad x=\frac{4\times 8}{16}=2.$$

即16人兩日就可完成該工程.

同理,知4人做完的日數爲8日,2人做完的日數爲16日.

上題如改爲8人4日能做完的工程,問y個人幾日可成?

設y個人做完工程的日數爲x,則

$$8:y=x:4.$$

$$\therefore \quad x=\frac{4\times 8}{y}=32\times\frac{1}{y}, \text{ 卽 } xy=32.$$

由上例看來,工程一定,完成的日數和做工的人數成反比例:卽人數增加幾倍,完成的日數反變小幾倍;人數減少幾倍,完成的日數反變大幾倍.8人4日完成的工程,卽1人32日能完成,在題中常是一定不變的數,叫做常數.

這種變數法,叫做反變.設變數爲x和y,常數爲k,則上式可寫作

$$x\propto\frac{1}{y} \text{ 或 } xy=k, \text{ 卽 } x=\frac{k}{y}.$$

卽一量和他量的相乘積是常數時,這兩個量叫做互爲反變.

IV. 反變數的求法.

有了x和y相應的一對數值,k就可以求得;k求得後,知道任一數,就可求得他一數.

例如:$\sqrt{x}$依y反變.x是4時,y是3;求y是$\frac{1}{2}$時,x是多少?

由$\sqrt{x}=\frac{k}{y}$,得 $2=\frac{k}{3}$,卽 $k=6$.

$$\therefore \quad \sqrt{x}=\frac{6}{\frac{1}{2}}, \text{卽} \sqrt{x}=12. \quad \therefore \quad x=144.$$

〔例一〕 火車8小時可行480里,問幾時可行1500里?

因火車的速率一定,所行的里數和時數爲正變,故設里數爲x,時數爲y,由$x/y=k$,得

$$k=\frac{480}{8}=60\text{ 里……速率.}$$

以1500和60代入$x=ky$中,得

$$1500=60y.$$

$$\therefore\quad y=25\text{ 小時.}$$

〔例二〕 上等酒每斤3元6角,中等酒每斤2元4角.某人用買上等酒18斤的錢買中等酒,可買多少?

因斤數和每斤的價值爲反變,故設斤數爲x,每斤的價值爲y角,由$xy=k$,得

$$k=36\times18=648.$$

以24和648代入$xy=k$中,得

$$x=\frac{648}{24}=27\text{ 斤.}$$

習題

1. 假設$x\propto y$,當$x=18$,則$y=7$;問$y=21$,$x=$?
2. 假設$y\propto x$,當$y=3$,則$x=2$;問$x=18$,$y=$?
3. 假設$x\propto\frac{1}{y}$,當$x=15$,則$y=4$;求$x=6$時,$y=$?
4. 假設$y\propto\frac{1}{x}$,當$x=1$,則$y=1$;求$y=5$時,$x=$?
5. 假設$x\propto\frac{1}{y}$和$y\propto\frac{1}{z}$,求證$z\propto x$.
6. 假設$x\propto z$和$y\propto z$,求證$x^2-y^2\propto z^2$.

7. 假設 $3a+7b\propto 3a+13b$, 求 $a=5$, $b=3$ 時, a 和 b 的方程式.

$$3a+7b=m(3a+13b) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$3\times 5+7\times 3=m(3\times 5+13\times 3).$$

$$\therefore\quad m=\frac{2}{3}.$$

把 m 的數值代入(1)後,整理之,即得 a 和 b 的方程式.

8. 假設 $5x-y\propto 10x-11y$; 求 $x=7$, $y=5$ 時, x 和 y 的方程式.

9. 假設 $x\propto y+a$, a 是定數,當 $y=1$, 則 $x=15$; $y=5$ 時, 則 $x=35$. 求 $y=2$ 時, $x=$?

$$\because\quad x=m(y+a).\quad \therefore\quad 15=m(1+a),\ 35=m(5+a).$$

由後邊兩式可以求出 a.

10. 假設 $a\propto b$, 求證 $a^2-b^2\propto ab\left[k-\frac{1}{k}=\text{定數}\right]$.

11. 假設 $a+b\propto a-b$, 求證 $a^2+b^2\propto ab$.

12. 有一工程, 14 人合做, 24 日可成. 知人數和日數是反變,想早 3 日趕做完,應添多少人?

13. 糖的斤數與總價值爲正變, 知 16 斤值 1.56 元; 問 24 斤值多少元?

14. 時間確定後,本金和利息成正變. 知本金 100 元, 利息爲 5.5 元; 問本金 820 元,利息是多少?

15. 速度確定後,時間和距離是正變. 今有一火車每 18 秒鐘行 $\frac{1}{4}$ 哩; 問行 120 哩, 需多少小時?

16. 某學校開支的多少,一部分是定數,一部分看學生多少來定.知150個學生,就得用1000元;120個學生,就得用840元;問330個學生時,需用多少?

17. 圓的面積與半徑的平方是正變.知半徑是7寸時,面積是154方寸;求半徑是9寸6分時,面積是多少?

18. 三角形的高與面積是正變,與底是反變.高是$2\frac{2}{3}$吋時,面積是2方碼,底是$13\frac{1}{3}$呎;求底是1呎4吋,面積是2方呎96方吋時,高應當是多少?

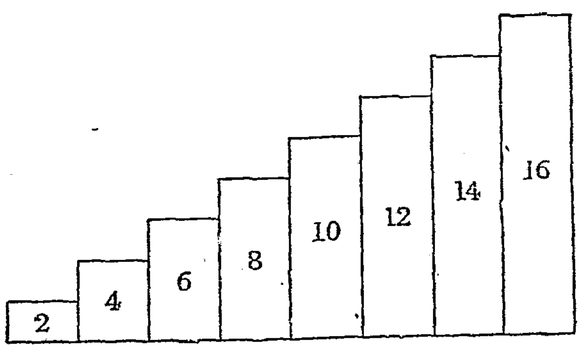
第二十章

級數和二項式定理

174. 級數

〔例 1〕 有一樓梯共 8 層,每層高 2 尺;問梯共高多少尺?

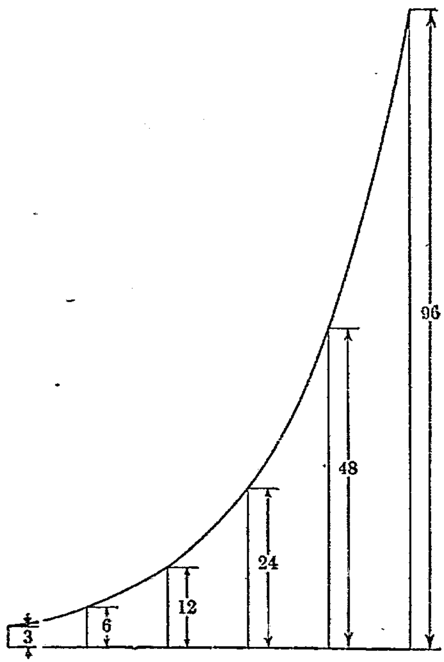
各層離地面的尺數



答: 樓梯共高 16 尺.

〔例 2〕 如有一坡地共 6 層,從地面算起,一層比一層高 1 倍. 知第一層離地面 3 尺,問第六層距地面多少尺?

各層離地面的尺數



答：第六層距地面96尺.

如樓梯或坡地的層數增加到50或100,用上邊的算法,就太麻煩了,故不得不研究一個簡便方法計算.觀察各層離地面的尺數,增加的很有規則,就是我們着手研究的地方.

$$2\underbrace{\quad\ }_{\text{相差是2}}4\underbrace{\quad\ }_{\text{相差是2}}6\underbrace{\quad\ }_{\text{相差是2}}8\underbrace{\quad\ }_{\text{相差是2}}10\underbrace{\quad\ }_{\text{相差是2}}12\underbrace{\quad\ }_{\text{相差是2}}14\underbrace{\quad\ }_{\text{相差是2}}16$$

$$3\underbrace{\qquad}_{\text{相比是2}}6\underbrace{\qquad}_{\text{相比是2}}12\underbrace{\qquad}_{\text{相比是2}}24\underbrace{\qquad}_{\text{相比是2}}48\underbrace{\qquad}_{\text{相比是2}}96$$

上邊兩羣數,都稱爲級數.

所以,在一羣數中,每相鄰兩數,都有同樣的關係時,就稱這羣數爲級數.

175. 等差級數

在一級數中,每相鄰兩數的差都是一樣時,叫做等差級數,又叫算術級數.

例如: 上節樓梯各層離地面的尺數,即爲等差級數: 2爲首項,16爲末項,公差爲2. $a, a+d, a+2d, a+3d,$ ……級數中,每相鄰兩數的差都是 d, 所以是等差級數.

相差的數,叫做公差;起首的數,叫做級數的首項;最後的數,叫做級數的末項.

176. 求等差級數的和與任意項

I. 求末項的公式.

如級數的首項爲 a, 公差爲 d, 則項數與公差的關係爲:

項數	首項	第二項	第三項	第四項
項	a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$

由上表,知公差的係數比項數少1,故第 n 項爲 $a+(n-1)d$.

假設 $l=$ 第 n 項,則 $l=a+(n-1)d$……………(公式 I)

例如: 知級數首項為5,公差為3,求第50項.

$$a=5,\ d=3,\ n=50.$$

$$\therefore\quad l=5+(50-1)3=5+147=152.$$

II. 求和的公式.

設級數的首項為a,公差為d,共有n項,S代表n項的和,

$$\begin{array}{rcccccccc}
 & S= & a & + & a+d & +\cdots\cdots+ & [a+(n+2)d] & + & [a+(n-1)d] \\
+) & S= & [a+(n-1)d] & + & [a+(n-2)d] & +\cdots\cdots+ & a+d & + & a \\
\hline
 & 2S= & [2a+(n-1)d] & + & [2a+(n-1)d] & +\cdots\cdots+ & [2a+(n-1)d] & + & [2a+(n-1)d]
\end{array}$$

$=n[2a+(n-1)d]$. (因共有n項

$$\therefore\quad S=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式II})$$

如末項知道,(公式II)變為

$$S=\frac{n}{2}[a+a(n-1)d]$$

$$=\frac{n}{2}(a+l)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式III})$$

公式(I),(II),(III)都含有四個未知量,如已知三量,餘一量便可求出.

〔例 1〕 求1,2,3……等差級數150項的和.

$$a=1,\ n=150,\ 2-1=1,\ \text{即}\ d=1.$$

$$\therefore\quad S=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$=\frac{150}{2}[2\times1+(150-1)\times1]$$

$$=\frac{150}{2}\times151=11325.$$

〔例 2〕 知首項爲$\frac{1}{2}$,第十五項爲$\frac{15}{2}$,求15項的和.

$$a=\frac{1}{2},\quad n=15,\quad l=\frac{15}{2}.$$

由(公式III),得 $S=\frac{15}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{15}{2}\right)=\frac{15}{2}\times\frac{16}{2}=60.$

177. 求等差中項

如三個數成等差級數,中間的數叫做等差中項,又叫做算術平均數.

假設A是a和b的等差中項,則

$$A-a=\text{公差},$$

$$b-A=\text{公差}.$$

$$\therefore\quad A-a=b-A,$$

即 $$2A=a+b.$$

$$\therefore\quad A=\frac{a+b}{2}\text{..................(公式IV)}$$

例如: 求13和21的等差中項.

$$A=\frac{13+21}{2}=17.$$

178. 求等差內項

在等差級數首末兩項中間的數,都叫做等差內項.

求法:

I. 由(公式I),求出公差.

II. 由等差級數的定義,得等差內項.

〔例 1〕 在1和6中間,插入9個等差內項.

因要插入9個等差內項,故共有11項,即

$$n=11,\ a=1,\ l=6.$$

$$\therefore\quad 6=1+(11+1)d,\quad \therefore\quad d=\frac{1}{2}.$$

故所求的9個等差內項,是 $1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, 3, 3\frac{1}{2}, 4, 4\frac{1}{2}, 5, 5\frac{1}{2}$.

〔例 2〕 在a和b中間,插入m個等差內項.

$$a=\text{首項},\ b=\text{末項},\ n=m+2,$$

$$b=a+(m+2-1)d.$$

$$\therefore\quad d=\frac{b-a}{m+1}.$$

故所求的等差內項,是 $a+\frac{b-a}{m+1}, a+2\frac{b-a}{m+1}, a+3\frac{b-a}{m+1}, \cdots\cdots a+(m-1)\frac{b-a}{m+1}, a+m\frac{b-a}{m+1}$.

習　　題

1. 求級數 $-6, -2, 2, \cdots\cdots 100$ 項的和.
2. 知 $a=4, l=34, n=11$; 求 d 和 S.
3. 知 $a=4, d=3, S=246$; 求 l 與 n.
4. 在 1 與 50 中間插入 5 個等差內項.
5. 在 $a+b$ 與 $b-c$ 中間插入3個等差內項.
6. 求 $m+n$ 與 $m-n$ 的等差中項.

7. 求 $(x+y)^2$ 與 $(x-y)^2$ 的等差中項.

8. 等差級數三項的和為27,各項的平方和為293;求各項是多少?

9. 等差級數的首項為4,7項的和為175;問何項是60?

10. 50和250中間的奇數,共有多少個?

11. 墜體第一秒墮4.9尺,以後每秒較前秒快9.8尺;問一分鐘共墜多少尺?

12. 桃子百個,分給若干童子,第一童子得10個,以後的童子,依次每人多得5個,求童子的人數.

13. 若干人分300元,第一人分得5元,以後的人,一個比一個多分得10元,問人數是多少?能分完不能?

14. 甲乙二人同由某處起行,甲以每日10里的等速前進;乙第一日行8里,以後每日增加12里;幾日後兩人相遇?

15. 某國貨公司開張之日,獲利10元;以後每日增加10元利,共計獲利1700元.問公司共營業多少日?

179. 等比級數

在一級數中,如每相鄰兩數的比都是一樣的,叫做等比級數,又叫做幾何級數;一樣的比,叫做公比.

例如: §174 坡地的每層離地面的尺數,是等比級數,公比是2.

$\frac{1}{5}, \frac{1}{15}, \frac{1}{45}, \cdots\cdots$是等比級數,因每相鄰兩數的比是$\frac{1}{3}$.

同樣,$a, ar, ar^2, ar^3, \cdots\cdots$是等比級數;首項是$a$,公比是$r$.

180. 求等比級數的和與任意項

I. 求末項的公式.

如級數的首項爲a,公比爲r,則項數與公比之關係爲:

項數	首項	第二項	第三項	第四項
項	a	ar	ar^2	ar^3

由上表,知公比的乘方數比項數少1,首項是a,第n項是ar^{n-1}.

假設 $l=$第n項,則$l=ar^{n-1}$ ……………………(公式V)

例如: 知首項爲5,公比爲$\frac{1}{3}$,求20項是多少?

由(公式V),得 $l=5\times\left(\frac{1}{3}\right)^{19}$.

II. 求和的公式.

假設首項$=a$,公比$=r$,項數$=n$,$S=n$項的和,則

$S=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}$ ……………(1)

$rS=\quad ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}+ar^n$ ………(2)

(1)−(2),得 $S-rS=a-ar^n$,

$$S(1-r)=a(1-r^n).$$

$$\therefore \quad S=\frac{a(1-r^n)}{1-r} \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式 VI)}$$

(公式 VI) 適用於 $r<1$.

(2)−(1), 得 $\quad rS-S=ar^n-a.$

$$\therefore \quad S=\frac{a(r^n-1)}{r-1} \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式 VI')}$$

(公式 VI') 適用於 $r>1$.

〔例 1〕 求 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots\cdots$ 等比級數 10 項的和.

$a=1,\ r=\frac{1}{2},\ n=10$. 由(公式 VI), 得

$$S=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1-\frac{1}{1024}}{\frac{1}{2}}=\frac{1023}{1024}\times\frac{2}{1}=1\frac{511}{512}.$$

〔例 2〕 求 $3, 6, 12, \cdots\cdots$ 等比級數 18 項的和.

$a=3,\ r=6\div 3=2,\ n=18$. 由 (公式 VI'), 得

$$S=\frac{3(2^{18}-1)}{2-1}=3\times 2^{18}-3.$$

由(公式 V), 得 $\quad S=\dfrac{a-rl}{1-r} \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式 VII)}$

或 $\quad S=\dfrac{rl-a}{r-1} \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式 VII')}$

例如: 知首項爲 1, 公比爲 $-\frac{1}{3}$, 第七項爲 $\frac{1}{729}$, 求七項的和.

$a=1,\ r=-\frac{1}{3},\ l=\frac{1}{729}$. 由(公式 VII), 得

$$S=\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{729}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{1+\frac{1}{3\times729}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3\times729+1}{3\times729}\times\frac{3}{4}$$

$$=\frac{2188}{4\times729}=\frac{547}{729}.$$

181. 求等比中項

三個數成等比級數,中間的一項,叫做等比中項;又叫做幾何平均數.

假設 G 爲 a 和 b 的等比中項,則

$$\frac{G}{a}=\text{公比},$$

$$\frac{b}{G}=\text{公比}.$$

$$\therefore\quad \frac{G}{a}=\frac{b}{G},$$

即 $$G=\pm\sqrt{ab}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{公式 VIII})$$

例如: 求1和 $\frac{1}{4}$ 兩數的等比中項.

$$G=\pm\sqrt{1\times\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2}.$$

故知 $\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$, 都是1和 $\frac{1}{4}$ 的等比中項.

182. 求等比內項

在等比級數首末兩項中間的數,都叫做等比內項.

求法:

I. 由(公式V),求出公比.

II. 由等比級數的定義,得等比內項.

例如: 在1和16兩數中,插入3個等比中項.

因要插入3項,故共有5項,即 $n=5$, $a=1$, $l=16$.

$$\therefore \quad 16=1\times r^{5-1},\ r^4=16.$$

$$\therefore \quad r=\pm 2.$$

故所求的內項是2, 4, 8或 -2, -4, -8.

習 題

1. 求級數3, 6, 12……的第7項與第10項.
2. 求0.008, 0.04, 0.2的第8項.
3. 求 x, 1, $\frac{1}{x}$,……的第30項.
4. 求 y, 1, $\frac{1}{y}$,……的第 m 項.
5. 在 $\frac{1}{8}$ 與128中間,插入3個等比內項.
6. 在 a 與 b 中間,插入2個等比內項.
7. 求 $x+1$ 和 $\frac{1}{x+1}$ 的等比中項.
8. $\frac{1}{\sqrt{2}}$, -2, $\frac{8}{\sqrt{2}}$, ……7項的和.
9. $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, $3\sqrt{2}$, ……12項的和.
10. $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{a^5}$,……a項的和.

11. 某人營業,第一日獲利5元,以後逐日所獲的利,爲前一日的2倍;兩月後共得利多少元?

12. 甲乙兩人相距726里,同時由兩地相向而行:甲一日行4里,以後逐日加倍;乙第一日行128里,以後逐日減半.問幾日後兩人相遇?

183. 調和級數

在一級數中,各項的倒數成等差級數時,叫做調和級數.

例如: 4, 6, 12 的倒數爲 $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$.

$$\because \quad \frac{1}{6}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{12}, \quad \frac{1}{12}-\frac{1}{6}=-\frac{1}{12}.$$

知 $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$ 是等差級數,故 4, 6, 12 是調和級數.

$\frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d}, \cdots\cdots \frac{1}{a+(n-1)d}$ 是調和級數,因各項的倒數是等差級數.

184. 求調和中項

三個數成調和級數,中間的一項,叫做調和中項,又叫做倒數平均數.

假設 H 爲 a 和 b 的調和中項,則

$$\frac{1}{H}-\frac{1}{a}=\frac{1}{b}-\frac{1}{H}=\text{公差},$$

$$\frac{2}{H}=\frac{a+b}{ab}.$$

$$\therefore\quad H=\frac{2ab}{a+b}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式 IX)}$$

例如: 求 $a+b$ 和 $a-b$ 的調和中項.

$$H=\frac{2(a+b)(a-b)}{(a+b)+(a-b)}=\frac{a^2-b^2}{a}.$$

185. 求調和內項

在調和級數首末兩項中間的數,都叫做調和內項.

求法:

I. 先求出相當之等差級數的內項.

II. 取倒數卽得調和內項.

例如: 在1和 $\frac{1}{5}$ 中間,插入3個調和內項.

因要插入3項,故知項數爲5,卽 $n=5$. 先求相應等差級數的內項,則首項爲1,卽 $a=1$,末項爲5,卽 $l=5$.

$$\therefore\quad 5=1+(5-1)d,\quad \therefore\quad d=1.$$

故插入的三等差內項爲2, 3, 4.

故所求得的調和內項是 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.

186. 三種中項的關係

$$A=\frac{a+b}{2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$G=\pm\sqrt{ab}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$H=\frac{2ab}{a+b} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1)×(3),得 $AH=ab$

$$=G^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{公式X})$$

由上邊知等比中項,是等差中項與調和中項的比例中項,即

$$A:G=G:H.$$

習　　題

求下列各式的調和中項:

1. $\frac{1}{a}$和$\frac{1}{b}$.　2. $\frac{1}{x+y}$和$\frac{1}{x-y}$.　3. $(x+y)$和$(x-y)$.

在下列兩數中各插入3個調和內項:

4. 4和12.　5. $2\frac{2}{5}$和12.　6. m和n.

7. 求1, $1\frac{3}{4}$, $3\frac{1}{16}$,……6項的和.

8. 求$2a+x$, $3a$, $4a-x$,……p項的和.

9. 如a, b, c是調和級數,證明$\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$也是調和級數.

187. 二項式定理

我們由第八章乘算公式中,知道

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2. \qquad (\text{公式I})$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \qquad \text{(公式IV)}$$

現在我們要推廣開去,研究二數和的四個同因式相乘,五個同因式相乘,以至於 n 個同因式相乘的法則.換句話說,就是我們現在要研究二項式任意次數展開的法則.

$$\begin{array}{rl}
 & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
\times) & a+b \\ \hline
 & a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3 \\
+) & \qquad a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 \\ \hline
 & a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4
\end{array}$$

$$\therefore \quad (a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

假如我們把上邊這三個恆等式的右端,寫成下邊的樣子,馬上就能找出牠們各項係數的關係來:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+\frac{2\cdot1}{1\cdot2}b^2,$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+\frac{3\cdot2}{1\cdot2}ab^2+\frac{3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3}b^3,$$

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+\frac{4\cdot3}{1\cdot2}a^2b^2+\frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}ab^3+\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}b^4.$$

〔註〕講到這裏,教者須和讀者把各項指數和各項係數的關係,討論清楚;再繼續用討論式的方法,令讀者口述,教者在黑板上寫出下列的公式(A).

同樣,得

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}a^{n-3}b^3$$
$$+\cdots\cdots+b^n \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

因之,得二項式的定理如下:

I 項數爲$n+1$.

II. 首項爲a^n,以下a的指數逐項減1;b的一次方見於第二項中,以下b的指數逐項加1.各項a和b的指數的和爲n.

III. 任一項的係數,等於前一項係數,乘a的指數,被b的指數加1除之.

IV. n爲偶數時,中項只有一個;n爲奇數時,就有兩個中項.

V. 距中項等遠的前後兩項的係數相等.

所以,展開二項式,寫到中項時,就可依前列諸項係數,簡直反其次序把牠們寫出來.

系一 $$(b+a)^n=b^n+nb^{n-1}a+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}b^{n-2}a^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}b^{n-3}a^3+\cdots\cdots+a^n \cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

(B)和(A),除將a,b的位置互換外,完全相同.

系二 $$(a-b)^n=a^n-na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}b^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}a^{n-3}b^3+\cdots\cdots+(-1)^nb^n \cdots\cdots(C)$$

(C)和(A),除b的奇次項爲負外,完全相同.

系三 $$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\cdots\cdots+x^n \cdots\cdots\cdots\cdots(D)$$

(D) 是以 1 代 (A) 中的 a, x 代 (A) 中的 b 得來的；是二項式最簡的公式，應用甚廣，讀者務須記得純熟，才能運用自如．

〔例 1〕 求 $(x+y)^5$ 的展開式．

$$(x+y)^5=x^5+5x^4y+\underbrace{\frac{5\cdot4}{1\cdot2}x^3y^2+\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}x^2y^3}_{\text{中項}}+5xy^4+y^5$$

$$=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10^2y^3+5xy^4+y^5.$$

〔例 2〕 展開 $(a-2x)^6$.

$$(a-2x)^6=a^6-6a^5\times2x+\frac{6\cdot5}{1\cdot2}a^4(2x)^2-\underbrace{\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}a^3(2x)^3}_{\text{中項}}+\cdots\cdots$$

$$=a^6-12a^5x+60a^4x^2-160a^3x^3+240a^2x^4-192ax^5$$

$$+64x^6.$$

〔練習〕 例 2 中距中項等遠的前後兩項的係數，爲什麼不相等？

〔註〕 二項式定理非常複雜，要是嚴格的證明起來，也非常繁難，讀到高等代數，自然會完全領悟，這裏不過爲高中一年級學三角級數之應用，僅僅粗略的敍述出幾個簡易的公式罷了．

習　　題

展開下列各式：

1. $(x+2)^4$.　　2. $(2+x)^5$.　　3. $(a+x)^7$.

4. $(a-x)^8$. 5. $(1-2y)^5$. 6. $\left(2x+\frac{y}{2}\right)^4$.

7. $\left(2-\frac{1}{2}x\right)^6$. 8. $\left(a-\frac{3}{b}\right)^5$. 9. $(1+2y)^9$.

10. $(1-x)^n$.

用二項式定理,求下列各數的數值:

11. 11^5. 12. 99^4. 13. 9997^3.

14. $1{\cdot}05^6$.

附　　錄

常用對數表

1—100

N	log	N	log	N	log	N	log	N	log
0	——	**20**	1.30 103	**40**	1.60 206	**60**	1.77 815	**80**	1.90 309
1	0.00 000	21	1.32 222	41	1.61 278	61	1.78 533	81	1.90 849
2	0.30 103	22	1.34 242	42	1.62 325	62	1.79 239	82	1.91 381
3	0.47 712	23	1.36 173	43	1.63 347	63	1.79 934	83	1.91 908
4	0.60 206	24	1.38 021	44	1.64 345	64	1.80 618	84	1.92 428
5	0.69 897	25	1.39 794	45	1.65 321	65	1.81 291	85	1.92 942
6	0.77 815	26	1.41 497	46	1.66 276	66	1.81 954	86	1.93 450
7	0.84 510	27	1.43 136	47	1.67 210	67	1.82 607	87	1.93 952
8	0.90 309	28	1.44 716	48	1.68 124	68	1.83 251	88	1.94 448
9	0.95 424	29	1.46 240	49	1.69 020	69	1.83 885	89	1.94 939
10	1.00 000	**30**	1.47 712	**50**	1.69 897	**70**	1.84 510	**90**	1.95 424
11	1.04 139	31	1.49 136	51	1.70 757	71	1.85 126	91	1.95 904
12	1.07 918	32	1.50 515	52	1.71 600	72	1.85 733	92	1.96 379
13	1.11 394	33	1.51 851	53	1.72 428	73	1.86 332	93	1.96 848
14	1.14 613	34	1.53 148	54	1.73 239	74	1.86 923	94	1.97 313
15	1.17 609	35	1.54 407	55	1.74 036	75	1.87 506	95	1.97 772
16	1.20 412	36	1.55 630	56	1.74 819	76	1.88 081	96	1.98 2[illegible]7
17	1.23 045	37	1.56 820	57	1.75 587	77	1.88 649	97	1.98 677
18	1.25 527	38	1.57 978	58	1.76 343	78	1.89 209	98	1.99 123
19	1.27 875	39	1.59 106	59	1.77 085	79	1.89 763	99	1.99 564
N	log	N	log		log		log	N	log

1000—1500

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	00 000	043	087	130	173	217	260	303	346	389
101	432	475	518	561	604	647	689	732	775	817
102	860	903	945	988	*030	*072	*115	*157	*199	*242
103	01 284	326	368	410	452	494	536	578	620	662
104	703	745	787	828	870	912	953	995	*036	*078
105	02 119	160	202	243	284	325	366	407	449	490
106	531	572	612	653	694	735	776	816	857	898
107	938	979	*019	*060	*100	*141	*181	*222	*262	*302
108	03 342	383	423	463	503	543	583	623	663	703
109	743	782	822	862	902	941	981	*021	*060	*100
110	04 139	179	218	258	297	336	376	415	454	493
111	532	571	610	650	689	727	766	805	844	883
112	922	961	999	*038	*077	*115	*154	*192	*231	*269
113	05 308	346	385	423	461	500	538	576	614	652
114	690	729	767	805	843	881	918	956	994	*032
115	06 070	108	145	183	221	258	296	333	371	408
116	446	483	521	558	595	633	670	707	744	781
117	819	856	893	930	967	*004	*041	*078	*115	*151
118	07 188	225	262	298	335	372	408	445	482	518
119	555	591	628	664	700	737	773	809	846	882
120	918	954	990	*027	*063	*099	*135	*171	*207	*243
121	08 279	314	350	386	422	458	493	529	565	600
122	636	672	707	743	778	814	849	884	920	955
123	991	*026	*061	*096	*132	*167	*202	*237	*272	*307
124	09 342	377	412	447	482	517	552	587	621	656
125	691	726	760	795	830	864	899	934	968	*003
126	10 037	072	106	140	175	209	243	278	312	346
127	380	415	449	483	517	551	585	619	653	687
128	721	755	789	823	857	890	924	958	992	*025
129	11 059	093	126	160	193	227	261	294	327	361
130	394	428	461	494	528	561	594	628	661	694
131	727	760	793	826	860	893	926	959	992	*024
132	12 057	090	123	156	189	222	254	287	320	352
133	385	418	450	483	516	548	581	613	646	678
134	710	743	775	808	840	872	905	937	969	*001
135	13 033	066	098	130	162	194	226	258	290	322
136	354	386	418	450	481	513	545	577	609	640
137	672	704	735	767	799	830	862	893	925	956
138	988	*019	*051	*082	*114	*145	*176	*208	*239	*270
139	14 301	333	364	395	426	457	489	520	551	582
140	613	644	675	706	737	768	799	829	860	891
141	922	953	983	*014	*045	*076	*106	*137	*168	*198
142	15 229	259	290	320	351	381	412	442	473	503
143	534	564	594	625	655	685	715	746	776	806
144	836	866	897	927	957	987	*017	*047	*077	*107
145	16 137	167	197	227	256	286	316	346	376	406
146	435	465	495	524	554	584	613	643	673	702
147	732	761	791	820	850	879	909	938	967	997
148	17 026	056	085	114	143	173	202	231	260	289
149	319	348	377	406	435	464	493	522	551	580
150	609	638	667	696	725	754	782	811	840	869
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

PP

	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30
1	4.4	4.3	4.2	4.1	4.0	3.9	3.8	3.7	3.6	3.5	3.4	3.3	3.2	3.1	3.0
2	8.8	8.6	8.4	8.2	8.0	7.8	7.6	7.4	7.2	7.0	6.8	6.6	6.4	6.2	6.0
3	13.2	12.9	12.6	12.3	12.0	11.7	11.4	11.1	10.8	10.5	10.2	9.9	9.6	9.3	9.0
4	17.6	17.2	16.8	16.4	16.0	15.6	15.2	14.8	14.4	14.0	13.6	13.2	12.8	12.4	12.0
5	22.0	21.5	21.0	20.5	20.0	19.5	19.0	18.5	18.0	17.5	17.0	16.5	16.0	15.5	15.0
6	26.4	25.8	25.2	24.6	24.0	22.4	22.8	22.2	21.6	21.0	20.4	19.8	19.2	18.6	18.0
7	30.8	30.1	29.4	28.7	28.0	27.3	26.6	25.9	25.2	24.5	23.8	23.1	22.4	21.7	21.0
8	35.2	34.4	33.6	32.8	32.0	31.2	30.4	29.6	28.8	28.0	27.2	26.4	25.6	24.8	24.0
9	39.6	38.7	37.8	36.9	36.0	35.1	34.2	33.3	32.4	31.5	30.6	29.7	28.8	27,9	27.0

1500—2000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
150	17 609	638	667	696	72$\bar{5}$	754	782	811	840	869
151	898	926	955	984	*013	*041	*070	*099	*127	*156
152	18 184	213	241	270	298	327	355	384	412	441
153	469	498	526	554	583	611	639	667	696	724
154	752	780	808	837	86$\bar{5}$	893	921	949	977	*005
155	19 033	061	089	117	145	173	201	229	257	28$\bar{5}$
156	312	340	368	396	424	451	479	507	53$\bar{5}$	562
157	590	618	645	673	700	728	756	783	811	838
158	866	893	921	948	976	*003	*030	*058	*085	*112
159	20 140	167	194	222	249	276	303	330	358	38$\bar{5}$
160	412	439	466	493	520	548	57$\bar{5}$	602	629	656
161	683	710	737	763	790	817	844	871	898	92$\bar{5}$
162	952	978	*005	*032	*059	*085	*112	*139	*165	*192
163	21 219	245	272	299	325	352	378	40$\bar{5}$	431	458
164	484	511	537	564	590	617	643	669	696	722
165	748	77$\bar{5}$	801	827	854	880	906	932	958	98$\bar{5}$
166	22 011	037	063	089	115	141	167	194	220	246
167	272	298	324	350	376	401	427	453	479	505
168	531	557	583	608	634	660	686	712	737	763
169	789	814	840	866	891	917	943	968	994	*019
170	23 04$\bar{5}$	070	096	121	147	172	198	223	249	274
171	300	325	350	376	401	426	452	477	502	528
172	553	578	603	629	654	679	704	729	754	779
173	80$\bar{5}$	830	85$\bar{5}$	880	90$\bar{5}$	930	95$\bar{5}$	980	*00$\bar{5}$	*030
174	24 05$\bar{5}$	080	10$\bar{5}$	130	15$\bar{5}$	180	204	229	254	279
175	304	329	353	378	403	428	452	477	502	527
176	551	576	601	625	650	674	699	724	748	773
177	797	822	846	871	895	920	944	969	993	*018
178	25 042	066	091	115	139	164	188	212	237	261
179	285	310	334	358	382	406	431	45$\bar{5}$	479	503
180	527	551	575	600	624	648	672	696	720	744
181	768	792	816	840	864	888	912	935	959	983
182	26 007	031	05$\bar{5}$	079	102	126	150	174	198	221
183	245	269	293	316	340	364	387	411	43$\bar{5}$	458
184	482	505	529	553	576	600	623	647	670	694
185	717	741	764	788	811	834	858	881	90$\bar{5}$	928
186	951	97$\bar{5}$	998	*021	*04$\bar{5}$	*068	*091	*114	*138	*161
187	27 184	207	231	254	277	300	323	346	370	393
188	416	439	462	485	508	531	554	577	600	623
189	646	669	692	715	738	761	784	807	830	852
190	875	898	921	944	967	989	*012	*035	*058	*081
191	28 103	126	149	171	194	217	240	262	28$\bar{5}$	307
192	330	353	375	398	421	443	466	488	511	533
193	556	578	601	623	646	668	691	713	735	758
194	780	803	825	847	870	892	914	937	959	981
195	29 003	026	048	070	092	11$\bar{5}$	137	159	181	203
196	226	248	270	292	314	336	358	380	403	42$\bar{5}$
197	447	469	491	513	535	557	579	601	623	64$\bar{5}$
198	667	688	710	732	754	776	798	820	842	863
199	885	907	929	951	973	994	*016	*038	*060	*081
200	30 103	125	146	168	190	211	233	25$\bar{5}$	276	298
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

PP

	29	28
1	2.9	2.8
2	5.8	5.6
3	8.7	8.4
4	11.6	11.2
5	14.5	14.0
6	17.4	16.8
7	20.3	19.6
8	23.2	22.4
9	26.1	25.2

	27	26
1	2.7	2.6
2	5.4	5.2
3	8.1	7.8
4	10.8	10.4
5	13.5	13.0
6	16.2	15.6
7	18.9	18.2
8	21.6	20.8
9	24.3	23.4

	25
1	2.5
2	5.0
3	7.5
4	10.0
5	12.5
6	15.0
7	17.5
8	20.0
9	22.5

	24	23
1	2.4	2.3
2	4.8	4.6
3	7.2	6.9
4	9.6	9.2
5	12.0	11.5
6	14.4	13.8
7	16.8	16.1
8	19.2	18.4
9	21.6	20.7

	22	21
1	2.2	2.1
2	4.4	4.2
3	6.6	6.3
4	8.8	8.4
5	11.0	10.5
6	13.2	12.6
7	15.4	14.7
8	17.6	16.8
9	19.8	18.9

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP

2000—2500

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
200	30 103	12$\bar{5}$	146	168	190	211	233	25$\bar{5}$	276	298
201	320	341	363	384	406	428	449	471	492	514
202	535	557	578	600	621	643	664	685	707	728
203	7$\bar{5}$0	771	792	814	835	856	878	899	920	942
204	963	984	*006	*027	*048	*069	*091	*112	*133	*154
205	31 175	197	218	239	260	281	302	323	34$\bar{5}$	366
206	387	408	429	4$\bar{5}$0	471	492	513	534	555	576
207	597	618	639	660	681	702	723	744	76$\bar{5}$	785
208	806	827	848	869	890	911	931	952	973	994
209	32 01$\bar{5}$	035	056	077	098	118	139	160	181	201
210	222	243	263	284	30$\bar{5}$	325	346	366	387	408
211	428	449	469	490	510	531	552	572	593	613
212	634	654	675	69$\bar{5}$	715	736	756	777	797	818
213	838	858	879	899	919	940	960	980	*001	*021
214	33 041	062	082	102	122	143	163	183	203	224
215	244	264	284	304	32$\bar{5}$	34$\bar{5}$	36$\bar{5}$	385	405	425
216	445	465	486	506	526	546	566	586	606	626
217	646	666	686	706	726	746	766	786	806	826
218	846	866	885	905	925	945	965	98$\bar{5}$	*00$\bar{5}$	*02$\bar{5}$
219	34 044	064	084	104	124	143	163	183	203	223
220	242	262	282	301	321	341	361	380	400	420
221	439	459	479	498	518	537	557	577	596	616
222	635	65$\bar{5}$	674	694	713	733	753	772	792	811
223	830	8$\bar{5}$0	869	889	908	928	947	967	986	*005
224	35 02$\bar{5}$	044	064	083	102	122	141	160	180	199
225	218	238	257	276	295	31$\bar{5}$	334	353	372	392
226	411	430	449	468	488	507	526	545	564	583
227	603	622	641	660	679	698	717	736	755	774
228	793	813	832	851	870	889	908	927	946	96$\bar{5}$
229	984	*003	*021	*040	*059	*078	*097	*116	*135	*154
230	36 173	192	211	229	248	267	286	30$\bar{5}$	324	342
231	361	380	399	418	436	455	474	493	511	530
232	549	568	586	60$\bar{5}$	624	642	661	680	698	717
233	736	754	773	791	810	829	847	866	884	903
234	922	940	959	977	996	*014	*033	*051	*070	*088
235	37 107	125	144	162	181	199	218	236	254	273
236	291	310	328	346	36$\bar{5}$	383	401	420	438	457
237	47$\bar{5}$	493	511	530	548	566	58$\bar{5}$	603	621	639
238	658	676	694	712	731	749	767	785	803	822
239	840	858	876	894	912	931	949	967	98$\bar{5}$	*003
240	38 021	039	057	075	093	112	130	148	166	184
241	202	220	238	256	274	292	310	328	346	364
242	382	309	417	435	453	471	489	507	52$\bar{5}$	543
243	561	578	596	614	632	6$\bar{5}$0	668	686	703	721
244	739	757	77$\bar{5}$	792	810	828	846	863	881	899
245	917	934	952	970	987	*005	*023	*041	*058	*076
246	39 094	111	129	146	164	182	199	217	23$\bar{5}$	252
247	270	287	30$\bar{5}$	322	340	358	375	393	410	428
248	445	463	480	498	515	533	550	568	585	602
249	620	637	65$\bar{5}$	672	690	707	724	742	759	777
250	794	811	829	846	863	881	898	915	933	950
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

PP

	22	21
1	2.2	2.1
2	4.4	4.2
3	6.6	6.3
4	8.8	8.4
5	11.0	10.5
6	13.2	12.6
7	15.4	14.7
8	17.6	16.8
9	19.8	18.9

	20	19	18	17
1	2.0	1.9	1.8	1.7
2	4.0	3.8	3.6	3.4
3	6.0	5.7	5.4	5.1
4	8.0	7.6	7.2	6.8
5	10.0	9.5	9.0	8.5
6	12.0	11.4	10.8	10.2
7	14.0	13.3	12.6	11.9
8	16.0	15.2	14.4	13.6
9	18.0	17.1	16.2	15.3

2500—3000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP
250	39 794	811	829	846	863	881	898	915	933	950	
251	967	985	*002	*019	*037	*054	*071	*088	*106	*123	**18**
252	40 140	157	175	192	209	226	243	261	278	295	
253	312	329	346	364	381	398	415	432	449	466	1 | 1.8
254	483	500	518	535	552	569	586	603	620	637	2 | 3.6
											3 | 5.4
255	654	671	688	705	722	739	756	773	790	807	4 | 7.2
256	824	841	858	875	892	909	926	943	960	976	5 | 9.0
257	993	*010	*027	*044	*061	*078	*095	*111	*128	*145	6 | 10.8
258	41 162	179	196	212	229	246	263	280	296	313	7 | 12.6
259	330	347	363	380	397	414	430	447	464	481	8 | 14.4
											9 | 16.2
260	497	514	531	547	564	581	597	614	631	647	
261	664	681	697	714	731	747	764	780	797	814	**17**
262	830	847	863	880	896	913	929	946	963	979	
263	996	*012	*029	*045	*062	*078	*095	*111	*127	*144	1 | 1.7
264	42 160	177	193	210	226	243	259	275	292	308	2 | 3.4
											3 | 5.1
265	325	341	357	374	390	406	423	439	455	472	4 | 6.8
266	488	504	521	537	553	570	586	602	619	635	5 | 8.5
267	651	667	684	700	716	732	749	765	781	797	6 | 10.2
268	813	830	846	862	878	894	911	927	943	959	7 | 11.9
269	975	991	*008	*024	*040	*056	*072	*088	*104	*120	8 | 13.6
											9 | 15.3
270	43 136	152	169	185	201	217	233	249	265	281	
271	297	313	329	345	361	377	393	409	425	441	**16**
272	457	473	489	505	521	537	553	569	584	600	
273	616	632	648	664	680	696	712	727	743	759	1 | 1.6
274	775	791	807	823	838	854	870	886	902	917	2 | 3.2
											3 | 4.8
275	933	949	965	981	996	*012	*028	*044	*059	*075	4 | 6.4
276	44 091	107	122	138	154	170	185	201	217	232	5 | 8.0
277	248	264	279	295	311	326	342	358	373	389	6 | 9.6
278	404	420	436	451	467	483	498	514	529	545	7 | 11.2
279	560	576	592	607	623	638	654	669	685	700	8 | 12.8
											9 | 14.4
280	716	731	747	762	778	793	809	824	840	855	
281	871	886	902	917	932	948	963	979	994	*010	**15**
282	45 025	040	056	071	086	102	117	133	148	163	
283	179	194	209	225	240	255	271	286	301	317	1 | 1.5
284	332	347	362	378	393	408	423	439	454	469	2 | 3.0
											3 | 4.5
285	484	500	515	530	545	561	576	591	606	621	4 | 6.0
286	637	652	667	682	697	712	728	743	758	773	5 | 7.5
287	788	803	818	834	849	864	879	894	909	924	6 | 9.0
288	939	954	969	984	*000	*015	*030	*045	*060	*075	7 | 10.5
289	46 090	105	120	135	150	165	180	195	210	225	8 | 12.0
											9 | 13.5
290	240	255	270	285	300	315	330	345	359	374	
291	389	404	419	434	449	464	479	494	509	523	**14**
292	538	553	568	583	598	613	627	642	657	672	
293	687	702	716	731	746	761	776	790	805	820	1 | 1.4
294	835	850	864	879	894	909	923	938	953	967	2 | 2.8
											3 | 4.2
295	982	997	*012	*026	*041	*056	*070	*085	*100	*114	4 | 5.6
296	47 129	144	159	173	188	202	217	232	246	261	5 | 7.0
297	276	290	305	319	334	349	363	378	392	407	6 | 8.4
298	422	436	451	465	480	494	509	524	538	553	7 | 9.8
299	567	582	596	611	625	640	654	669	683	698	8 | 11.2
											9 | 12.6
300	712	727	741	756	770	784	799	813	828	842	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP

3000—3500

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
300	47 712	727	741	756	770	784	799	813	828	842
301	857	871	885	900	914	929	943	958	972	986
302	48 001	01$\bar{5}$	029	044	058	073	087	101	116	130
303	144	159	173	187	202	216	230	244	259	273
304	287	302	316	330	344	359	373	387	401	416
305	430	444	458	473	487	501	515	530	544	558
306	572	586	601	61$\bar{5}$	629	643	657	671	686	700
307	714	728	742	756	770	78$\bar{5}$	799	813	827	841
308	855	869	883	897	911	926	940	954	968	982
309	996	*010	*024	*038	*052	*066	*080	*094	*108	*122
310	49 136	150	164	178	192	206	220	234	248	262
311	276	290	304	318	332	346	360	374	388	402
312	415	429	443	457	471	485	499	513	527	541
313	554	568	582	596	610	624	638	651	665	679
314	693	707	721	734	748	762	776	790	803	817
315	831	84$\bar{5}$	859	872	886	900	914	927	941	95$\bar{5}$
316	969	982	996	*010	*024	*037	*051	*06$\bar{5}$	*079	*092
317	50 106	120	133	147	161	174	188	202	215	229
318	243	256	270	284	297	311	32$\bar{5}$	338	352	365
319	379	393	406	420	433	447	461	474	488	501
320	51$\bar{5}$	529	542	556	569	583	596	610	623	637
321	651	664	678	691	70$\bar{5}$	718	732	745	759	772
322	786	799	813	826	840	853	866	880	893	907
323	920	934	947	961	974	987	*001	*014	*028	*041
324	51 05$\bar{5}$	068	081	09$\bar{5}$	108	121	13$\bar{5}$	148	162	17$\bar{5}$
325	188	202	215	228	242	255	268	282	295	308
326	322	335	348	362	375	388	402	41$\bar{5}$	428	441
327	45$\bar{5}$	468	481	49$\bar{5}$	508	521	534	548	561	574
328	587	601	614	627	640	654	667	680	693	706
329	720	733	746	759	772	786	799	812	825	838
330	851	86$\bar{5}$	878	891	904	917	930	943	957	970
331	983	996	*009	*022	*035	*048	*061	*07$\bar{5}$	*088	*101
332	52 114	127	140	153	166	179	192	205	218	231
333	244	257	270	284	297	310	323	336	349	362
334	37$\bar{5}$	388	401	414	427	440	453	466	479	492
335	504	517	530	543	556	569	582	595	608	621
336	634	647	660	673	686	699	711	724	737	750
337	763	776	789	802	81$\bar{5}$	827	840	853	866	879
338	892	90$\bar{5}$	917	930	943	956	969	982	994	*007
339	53 020	033	046	058	071	084	097	110	122	135
340	148	161	173	186	199	212	224	237	2$\bar{5}$0	263
341	275	288	301	314	326	339	352	364	377	390
342	403	415	428	441	453	466	479	491	504	517
343	529	542	55$\bar{5}$	507	580	593	605	618	631	643
344	656	668	681	694	706	719	732	744	757	769
345	782	794	807	820	832	84$\bar{5}$	857	870	882	895
346	908	920	933	945	958	970	983	995	*008	*020
347	54 033	045	058	070	083	095	108	120	133	145
348	158	170	183	195	208	220	233	245	258	270
349	283	29$\bar{5}$	307	320	332	34$\bar{5}$	357	370	382	394
350	407	419	432	444	456	469	481	494	506	518
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

PP

	15
1	1.5
2	3.0
3	4.5
4	6.0
5	7.5
6	9.0
7	10.5
8	12.0
9	13.5

	14
1	1.4
2	2.8
3	4.2
4	5.6
5	7.0
6	8.4
7	9.8
8	11.2
9	12.6

	13
1	1.3
2	2.6
3	3.9
4	5.2
5	6.5
6	7.8
7	9.1
8	10.4
9	11.7

	12
1	1.2
2	2.4
3	3.6
4	4.8
5	6.0
6	7.2
7	8.4
8	9.6
9	10.8

3500—4000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
350	54 407	419	432	444	456	469	481	494	506	518
351	531	543	555	568	580	593	605	617	630	642
352	654	667	679	691	704	716	728	741	753	765
353	777	790	802	814	827	839	851	864	876	888
354	900	913	925	937	949	962	974	986	998	*011
355	55 023	035	047	060	072	084	096	108	121	133
356	145	157	169	182	194	206	218	230	242	255
357	267	279	291	303	315	328	340	352	364	376
358	388	400	413	425	437	449	461	473	485	497
359	509	522	534	546	558	570	582	594	606	618
360	630	642	654	666	678	691	703	715	727	739
361	751	763	775	787	799	811	823	835	847	859
362	871	883	895	907	919	931	943	955	967	979
363	991	*003	*015	*027	*038	*050	*062	*074	*086	*098
364	56 110	122	134	146	158	170	182	194	205	217
365	229	241	253	265	277	289	301	312	324	336
366	348	360	372	384	396	407	419	431	443	455
367	467	478	490	502	514	526	538	549	561	573
368	585	597	608	620	632	644	656	667	679	691
369	703	714	726	738	750	761	773	785	797	808
370	820	832	844	855	867	879	891	902	914	926
371	937	949	961	972	984	996	*008	*019	*031	*043
372	57 054	066	078	089	101	113	124	136	148	159
373	171	183	194	206	217	229	241	252	264	276
374	287	299	310	322	334	345	357	368	380	392
375	403	415	426	438	449	461	473	484	496	507
376	519	530	542	553	565	576	588	600	611	623
377	634	646	657	669	680	692	703	715	726	738
378	749	761	772	784	795	807	818	830	841	852
379	864	875	887	898	910	921	933	944	955	967
380	978	990	*001	*013	*024	*035	*047	*058	*070	*081
381	58 092	104	115	127	138	149	161	172	184	195
382	206	218	229	240	252	263	274	286	297	309
383	320	331	343	354	365	377	388	399	410	422
384	433	444	456	467	478	490	501	512	524	535
385	546	557	569	580	591	602	614	625	636	647
386	659	670	681	692	704	715	726	737	749	760
387	771	782	794	805	816	827	838	850	861	872
388	883	894	906	917	928	939	950	961	973	984
389	995	*006	*017	*028	*040	*051	*062	*073	*084	*095
390	59 106	118	129	140	151	162	173	184	195	207
391	218	229	240	251	262	273	284	295	306	318
392	329	340	351	362	373	384	395	406	417	428
393	439	450	461	472	483	494	506	517	528	539
394	550	561	572	583	594	605	616	627	638	649
395	660	671	682	693	704	715	726	737	748	759
396	770	780	791	802	813	824	835	846	857	868
397	879	890	901	912	923	934	945	956	966	977
398	988	999	*010	*021	*032	*043	*054	*065	*076	*086
399	60 097	108	119	130	141	152	163	173	184	195
400	206	217	228	239	249	260	271	282	293	304
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

PP

13	
1	1.3
2	2.6
3	3.9
4	5.2
5	6.5
6	7.8
7	9.1
8	10.4
9	11.7

12	
1	1.2
2	2.4
3	3.6
4	4.8
5	6.0
6	7.2
7	8.4
8	9.6
9	10.8

11	
1	1.1
2	2.2
3	3.3
4	4.4
5	5.5
6	6.6
7	7.7
8	8.8
9	9.9

10	
1	1.0
2	2.0
3	3.0
4	4.0
5	5.0
6	6.0
7	7.0
8	8.0
9	9.0

PP

4000—4500

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
400	60 206	217	228	239	249	260	271	282	293	304
401	314	325	336	347	358	369	379	390	401	412
402	423	433	444	455	466	477	487	498	509	520
403	531	541	552	563	574	584	595	606	617	627
404	638	649	660	670	681	692	703	713	724	735̄
405	746	756	767	778	788	799	810	821	831	842
406	853	863	874	885̄	895	906	917	927	938	949
407	959	970	981	991	*002	*013	*023	*034	*045̄	*055
408	61 066	077	087	098	109	119	130	140	151	162
409	172	183	194	204	215̄	225	236	247	257	268
410	278	289	300	310	321	331	342	352	363	374
411	384	395̄	405	416	426	437	448	458	469	479
412	490	500	511	521	532	542	553	563	574	584
413	595	606	616	627	637	648	658	669	679	690
414	700	711	721	731	742	752	763	773	784	794
415	805̄	815	826	836	847	857	868	878	888	899
416	909	920	930	941	951	962	072	982	993	*003
417	62 014	024	034	045̄	055	066	076	086	097	107
418	118	128	138	149	159	170	180	190	201	211
419	221	232	242	252	263	273	284	294	304	315̄
420	325̄	335	346	356	366	377	387	397	408	418
421	428	439	449	459	469	480	490	500	511	521
422	531	542	552	562	572	583	593	603	613	624
423	634	644	655̄	665̄	675	685	696	706	716	726
424	737	747	757	767	778	788	798	808	818	829
425	839	849	859	870	880	890	900	910	921	931
426	941	951	961	972	982	992	*002	*012	*022	*033
427	63 043	053	063	073	083	094	104	114	124	134
428	144	155̄	165̄	175̄	185̄	195	205	215	225	236
429	246	256	266	276	286	296	306	317	327	337
430	347	357	367	377	387	397	407	417	428	438
431	448	458	468	478	488	498	508	518	528	538
432	548	558	568	579	589	599	609	619	629	639
433	649	659	669	679	689	699	709	719	729	739
434	749	759	769	779	789	799	809	819	829	839
435	849	859	869	879	889	899	909	919	929	939
436	949	959	969	979	988	998	*008	*018	*028	*038
437	64 048	058	068	078	088	098	108	118	128	137
438	147	157	167	177	187	197	207	217	227	237
439	246	256	266	276	286	296	306	316	326	335
440	345	355	365	375̄	385̄	395̄	404	414	424	434
441	444	454	464	473	483	493	503	513	523	532
442	542	552	562	572	582	591	601	611	621	631
443	640	650	660	670	680	689	699	709	719	729
444	738	748	758	768	777	787	797	807	816	826
445	836	846	856	865	875	885̄	895̄	904	914	924
446	933	943	953	963	972	982	992	*002	*011	*021
447	65 031	040	050	060	070	079	089	099	108	118
448	128	137	147	157	167	176	186	196	205	215̄
449	225̄	234	244	254	263	273	283	292	302	312
450	321	331	341	350	360	369	379	389	398	408
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

PP

	11
1	1.1
2	2.2
3	3.3
4	4.4
5	5.5
6	6.6
7	7.7
8	8.8
9	9.9

	10
1	1.0
2	2.0
3	3.0
4	4.0
5	5.0
6	6.0
7	7.0
8	8.0
9	9.0

	9
1	0.9
2	1.8
3	2.7
4	3.6
5	4.5
6	5.4
7	6.3
8	7.2
9	8.1

4500—5000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
450	65 321	331	341	350	360	369	379	389	398	408
451	418	427	437	447	456	466	475	485	495	504
452	514	523	533	543	552	562	571	581	591	600
453	610	619	629	639	648	658	667	677	686	696
454	706	715	725	734	744	753	763	772	782	792
455	801	811	820	830	839	849	858	868	877	887
456	896	906	916	925	935	944	954	963	973	982
457	992	*001	*011	*020	*030	*039	*049	*058	*068	*077
458	66 087	096	106	115	124	134	143	153	162	172
459	181	191	200	210	219	229	238	247	257	266
460	276	285	295	304	314	323	332	342	351	361
461	370	380	389	398	408	417	427	436	445	455
462	464	474	483	492	502	511	521	530	539	549
463	558	567	577	586	596	605	614	624	633	642
464	652	661	671	680	689	699	708	717	727	736
465	745	755	764	773	783	792	801	811	820	829
466	839	848	857	867	876	885	894	904	913	922
467	932	941	950	960	969	978	987	997	*006	*015
468	67 025	034	043	052	062	071	080	089	099	108
469	117	127	136	145	154	164	173	182	191	201
470	210	219	228	237	247	256	265	274	284	293
471	302	311	321	330	339	348	357	367	376	385
472	394	403	413	422	431	440	449	459	468	477
473	486	495	504	514	523	532	541	550	560	569
474	578	587	596	605	614	624	633	642	651	660
475	669	679	688	697	706	715	724	733	742	752
476	761	770	779	788	797	806	815	825	834	843
477	852	861	870	879	888	897	906	916	925	934
478	943	952	961	970	979	988	997	*006	*015	*024
479	68 034	043	052	061	070	079	088	097	106	115
480	124	133	142	151	160	169	178	187	196	205
481	215	224	233	242	251	260	269	278	287	296
482	305	314	323	332	341	350	359	368	377	386
483	395	404	413	422	431	440	449	458	467	476
484	485	494	502	511	520	529	538	547	556	565
485	574	583	592	601	610	619	628	637	646	655
486	664	673	681	690	699	708	717	726	735	744
487	753	762	771	780	789	797	806	815	824	833
488	842	851	860	869	878	886	895	904	913	922
489	931	940	949	958	966	975	984	993	*002	*011
490	69 020	028	037	046	055	064	073	082	090	099
491	108	117	126	135	144	152	161	170	179	188
492	197	205	214	223	232	241	249	258	267	276
493	285	294	302	311	320	329	338	346	355	364
494	373	381	390	399	408	417	425	434	443	452
495	461	469	478	487	496	504	513	522	531	539
496	548	557	566	574	583	592	601	609	618	627
497	636	644	653	662	671	679	688	697	705	714
498	723	732	740	749	758	767	775	784	793	801
499	810	819	827	836	845	854	862	871	880	888
500	897	906	914	923	932	940	949	958	966	975
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

PP

	10
1	1.0
2	2.0
3	3.0
4	4.0
5	5.0
6	6.0
7	7.0
8	8.0
9	9.0

	9
1	0.9
2	1.8
3	2.7
4	3.6
5	4.5
6	5.4
7	6.3
8	7.2
9	8.1

	8
1	0.8
2	1.6
3	2.4
4	3.2
5	4.0
6	4.8
7	5.6
8	6.4
9	7.2

PP

5000—5500

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
500	69 897	906	914	923	932	940	949	958	966	975
501	984	992	*001	*010	*018	*027	*036	*044	*053	*062
502	70 070	079	088	096	105	114	122	131	140	148
503	157	165	174	183	191	200	209	217	226	234
504	243	252	260	269	278	286	295	303	312	321
505	329	338	346	355	364	372	381	389	398	406
506	415	424	432	441	449	458	467	475	484	492
507	501	509	518	526	535	544	552	561	569	578
508	586	595	603	612	621	629	638	646	655	663
509	672	680	689	697	706	714	723	731	740	749
510	757	766	774	783	791	800	808	817	825	834
511	842	851	859	868	876	885	893	902	910	919
512	927	935	944	952	961	969	978	986	995	*003
513	71 012	020	029	037	046	054	063	071	079	088
514	096	105	113	122	130	139	147	155	164	172
515	181	189	198	206	214	223	231	240	248	257
516	265	273	282	290	299	307	315	324	332	341
517	349	357	366	374	383	391	899	408	416	425
518	433	441	450	458	466	475	483	492	500	508
519	517	525	533	542	550	559	567	575	584	592
520	600	609	617	625	634	642	550	659	667	675
521	684	692	700	709	717	725	734	742	750	759
522	767	775	784	792	800	809	817	825	834	842
523	850	858	867	875	883	892	900	908	917	925
524	933	941	950	958	966	975	983	991	999	*008
525	72 016	024	032	041	049	057	066	074	082	090
526	099	107	115	123	132	140	148	156	165	173
527	181	189	198	206	214	222	230	239	247	255
528	263	272	280	288	296	304	313	321	329	337
529	346	354	362	370	378	387	395	403	411	419
530	428	436	444	452	460	469	477	485	493	501
531	509	518	526	534	542	550	558	567	575	583
532	591	599	607	616	624	632	640	648	656	665
533	673	681	689	697	705	713	722	730	738	746
534	754	762	770	779	787	795	803	811	819	827
535	835	843	852	860	868	876	884	892	900	908
536	916	925	933	941	949	957	965	973	981	989
537	997	*006	*014	*022	*030	*038	*046	*054	*062	*070
538	73 078	086	094	102	111	119	127	135	143	151
539	159	167	175	183	191	199	207	215	223	231
540	239	247	255	263	272	280	288	296	304	312
541	320	328	336	344	352	360	368	376	384	392
542	400	408	416	424	432	440	448	456	464	472
543	480	488	496	504	512	520	528	536	544	552
544	560	568	576	584	592	600	608	616	624	632
545	640	648	656	664	672	679	687	695	703	711
546	719	727	735	743	751	759	767	775	783	791
547	799	807	815	823	830	838	846	854	862	870
548	878	886	894	902	910	918	926	933	941	949
549	957	965	973	981	989	997	*005	*013	*020	*028
550	74 036	044	052	060	068	076	084	092	099	107
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

PP

	9	8	7
1	0.9	0.8	0.7
2	1.8	1.6	1.4
3	2.7	2.4	2.1
4	3.6	3.2	2.8
5	4.5	4.0	3.5
6	5.4	4.8	4.2
7	6.3	5.6	4.9
8	7.2	6.4	5.6
9	8.1	7.2	6.3

5500—6000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP
550	74 036	044	052	060	068	076	084	092	099	107	
551	115	123	131	139	147	155̄	162	170	178	186	
552	194	202	210	218	225	233	241	249	257	265̄	
553	273	280	288	296	304	312	320	327	335	343	
554	351	359	367	374	382	390	398	406	414	421	
555	429	437	445̄	453	461	468	476	484	492	500	
556	507	515	523	531	539	547	554	562	570	578	
557	586	593	601	609	617	624	632	640	648	656	
558	663	671	679	687	695̄	702	710	718	726	733	
559	741	749	757	764	772	780	788	796	803	811	
560	819	827	834	842	850	858	865	873	881	889	8
561	896	904	912	920	927	935̄	943	950	958	966	
562	974	981	989	997	*005̄	*012	*020	*028	*035	*043	1 0.8
563	75 051	059	066	074	082	089	097	105̄	113	120	2 1.6
564	128	136	143	151	159	166	174	182	189	197	3 2.4
											4 3.2
565	205̄	213	220	228	236	243	251	259	266	274	5 4.0
566	282	289	297	305̄	312	320	328	335	343	351	6 4.8
567	358	366	374	381	380	397	404	412	420	427	7 5.6
568	435̄	442	450	458	465	473	481	488	496	504	8 6.4
569	511	519	526	534	542	549	557	565̄	572	580	9 7.2
570	587	595	603	610	618	626	633	641	648	656	
571	664	671	679	686	694	702	709	717	724	732	
572	740	747	755̄	762	770	778	785	793	800	808	
573	815	823	831	838	846	853	861	868	876	884	
574	891	899	906	914	921	929	937	944	952	959	
575	967	974	982	989	997	*005̄	*012	*020	*027	*035̄	
576	76 042	050	057	065̄	072	080	087	095̄	103	110	
577	118	125	133	140	148	155	163	170	178	185	
578	193	200	208	215	223	230	238	245	253	260	
579	268	275	283	290	298	305	313	320	328	335	
580	343	350	358	365	373	380	388	395	403	410	7
581	418	425	433	440	448	455̄	462	470	477	485̄	
582	492	500	507	515̄	522	530	537	545̄	552	559	1 0.7
583	567	574	582	589	597	604	612	619	626	634	2 1.4
584	641	649	656	664	671	678	686	693	701	708	3 2.1
											4 2.8
585	716	723	730	738	745	753	760	768	775̄	782	5 3.5
586	790	797	805̄	812	819	827	834	842	849	856	6 4.2
587	864	871	879	886	893	901	908	916	923	930	7 4.9
588	938	945	953	960	967	975̄	982	989	997	*004	8 5.6
589	77 012	019	026	034	041	048	056	063	070	078	9 6.3
590	085	093	100	107	115̄	122	129	137	144	151	
591	159	166	173	181	188	195	203	210	217	225̄	
592	232	240	247	254	262	269	276	283	291	298	
593	305	313	320	327	335̄	342	349	357	864	371	
594	379	386	393	401	408	415	422	430	437	444	
595	452	459	466	474	481	488	495	503	510	517	
596	525	532	539	546	554	561	568	576	583	590	
597	597	605̄	612	619	627	634	641	648	656	663	
598	670	677	685̄	692	699	706	714	721	728	735	
599	743	750	757	764	772	779	786	793	801	808	
600	815	822	830	837	844	851	859	866	873	880	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP

6000—6500

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
600	77 815	822	830	837	844	851	859	866	873	880
601	887	895	902	909	916	924	931	938	945	952
602	960	967	974	981	988	996	*003	*010	*017	*025
603	78 032	039	046	053	061	068	075	082	089	097
604	104	111	118	125	132	140	147	154	161	168
605	176	183	190	197	204	211	219	226	233	240
606	247	254	262	269	276	283	290	297	305	312
607	319	326	333	340	347	355	362	369	376	383
608	390	398	405	412	419	426	433	440	447	455
609	462	469	476	483	490	497	504	512	519	526
610	533	540	547	554	561	569	576	583	590	597
611	604	611	618	625	633	640	647	654	661	668
612	675	682	689	696	704	711	718	725	732	739
613	746	753	760	767	774	781	789	796	803	810
614	817	824	831	838	845	852	859	866	873	880
615	888	895	902	909	916	923	930	937	944	951
616	958	965	972	979	986	993	*000	*007	*014	*021
617	79 029	036	043	050	057	064	071	078	085	092
618	099	106	113	120	127	134	141	148	155	162
619	169	176	183	190	197	204	211	218	225	232
620	239	246	253	260	267	274	281	288	295	302
621	309	316	323	330	337	344	351	358	365	372
622	379	386	393	400	407	414	421	428	435	442
623	449	456	463	470	477	484	491	498	505	511
624	518	525	532	539	546	553	560	567	574	581
625	588	595	602	609	616	623	630	637	644	650
626	657	664	671	678	685	692	699	706	713	720
627	727	734	741	748	754	761	768	775	782	789
628	796	803	810	817	824	831	837	844	851	858
629	865	872	879	886	893	900	906	913	920	927
630	934	941	948	955	962	969	975	982	989	996
631	80 003	010	017	024	030	037	044	051	058	065
632	072	079	085	092	099	106	113	120	127	134
633	140	147	154	161	168	175	182	188	195	202
634	209	216	223	229	236	243	250	257	264	271
635	277	284	291	298	305	312	318	325	332	339
636	346	353	359	366	373	380	387	393	400	407
637	414	421	428	434	441	448	455	462	468	475
638	482	489	496	502	509	516	523	530	536	543
639	550	557	564	570	577	584	591	598	604	611
640	618	625	632	638	645	652	659	665	672	679
641	686	693	699	706	713	720	726	733	740	747
642	754	760	767	774	781	787	794	801	808	814
643	821	828	835	841	848	855	862	868	875	882
644	889	895	902	909	916	922	929	936	943	949
645	956	963	969	976	983	990	996	*003	*010	*017
646	81 023	030	037	043	050	057	064	070	077	084
647	090	097	104	111	117	124	131	137	144	151
648	158	164	171	178	184	191	198	204	211	218
649	224	231	238	245	251	258	265	271	278	285
650	291	298	305	311	318	325	331	338	345	351
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

PP

8	
1	0.8
2	1.6
3	2.4
4	3.2
5	4.0
6	4.8
7	5.6
8	6.4
9	7.2

7	
1	0.7
2	1.4
3	2.1
4	2.8
5	3.5
6	4.2
7	4.9
8	5.6
9	6.3

6	
1	0.6
2	1.2
3	1.8
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	4.8
9	5.4

6500—7000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
650	81 291	298	30$\bar{5}$	311	318	32$\bar{5}$	331	338	34$\bar{5}$	351
651	358	36$\bar{5}$	371	378	38$\bar{5}$	391	398	40$\bar{5}$	411	418
652	42$\bar{5}$	431	438	44$\bar{5}$	451	458	46$\bar{5}$	471	478	48$\bar{5}$
653	491	498	50$\bar{5}$	511	518	52$\bar{5}$	531	538	544	551
654	558	564	571	578	584	591	598	604	611	617
655	624	631	637	644	651	657	664	671	677	684
656	690	697	704	710	717	723	730	737	743	750
657	757	763	770	776	783	790	796	803	809	816
658	823	829	836	842	849	856	862	869	875	882
659	889	895	902	908	91$\bar{5}$	921	928	93$\bar{5}$	941	948
660	954	961	968	974	981	987	994	*000	*007	*014
661	82 020	027	033	040	046	053	060	066	073	079
662	086	092	099	105	112	119	125	132	138	14$\bar{5}$
663	151	158	164	171	178	184	191	197	204	210
664	217	223	230	236	243	249	256	263	269	276
665	282	289	295	302	308	31$\bar{5}$	321	328	334	341
666	347	354	360	367	373	380	387	393	400	406
667	413	419	426	432	439	445	452	458	46$\bar{5}$	471
668	478	484	491	497	504	510	517	523	530	536
669	543	549	556	562	569	575	582	588	59$\bar{5}$	601
670	607	614	620	627	633	640	646	653	659	666
671	672	679	685	692	[illegible]	70$\bar{5}$	711	718	724	730
672	737	743	7$\bar{5}$0	756	763	769	776	782	789	795
673	802	808	814	821	827	834	840	847	853	860
674	866	872	879	885	892	898	90$\bar{5}$	911	918	824
675	930	937	943	9$\bar{5}$0	956	963	969	975	982	988
676	99$\bar{5}$	*001	*008	*014	*020	*027	*033	*040	*046	*052
677	83 059	065	072	078	08$\bar{5}$	091	097	104	110	117
678	123	129	136	142	149	15$\bar{5}$	161	168	174	181
679	187	193	200	206	213	219	225	232	238	24$\bar{5}$
680	251	257	264	270	276	283	289	296	302	308
681	315	321	327	334	340	347	353	359	366	372
682	378	38$\bar{5}$	391	398	404	410	417	423	429	436
683	442	448	45$\bar{5}$	461	467	474	480	487	493	499
684	506	512	518	525	531	537	544	550	556	563
685	569	575	582	588	594	601	607	613	620	626
686	632	639	645	651	658	664	670	677	683	689
687	696	702	708	71$\bar{5}$	721	727	734	740	746	753
688	759	765	771	778	784	790	797	803	809	816
689	822	828	83$\bar{5}$	841	847	853	860	866	872	879
690	88$\bar{5}$	891	897	904	910	916	923	929	935	942
691	948	954	960	967	973	979	985	992	998	*004
692	84 011	017	023	029	036	042	048	05$\bar{5}$	061	067
693	073	080	086	092	098	10$\bar{5}$	111	117	123	130
694	136	142	148	15$\bar{5}$	161	167	173	180	186	192
695	198	20$\bar{5}$	211	217	223	230	236	242	248	25$\bar{5}$
696	261	267	273	280	286	292	298	30$\bar{5}$	311	317
697	323	330	336	342	348	354	361	367	373	379
698	386	392	398	404	410	417	423	429	435	442
699	448	454	460	466	473	479	48$\bar{5}$	491	497	504
700	510	516	522	528	53$\bar{5}$	541	547	553	559	566
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

PP

7	
1	0.7
2	1.4
3	2.1
4	2.8
5	3.5
6	4.2
7	4.9
8	5.6
9	6.3

6	
1	0.6
2	1.2
3	1.8
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	4.8
9	5.4

7000—7500

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP
700	84 510	516	522	528	535	541	547	553	559	566	
701	572	578	584	590	597	603	609	615	621	628	
702	634	640	646	652	658	665	671	677	683	689	
703	696	702	708	714	720	726	733	739	745	751	
704	757	763	770	776	782	788	794	800	807	813	
705	819	825	831	837	844	850	856	862	868	874	
706	880	887	893	899	905	911	917	924	930	936	7
707	942	948	954	960	967	973	979	985	991	997	
708	85 003	009	016	022	028	034	040	046	052	058	1 0.7
709	065	071	077	083	089	095	101	107	114	120	2 1.4
710	126	132	138	144	150	156	163	169	175	181	3 2.1
711	187	193	199	205	211	217	224	230	236	242	4 2.8
712	248	254	260	266	272	278	285	291	297	303	5 3.5
713	309	315	321	327	333	339	345	352	358	364	6 4.2
714	370	376	382	388	394	400	406	412	418	425	7 4.9
715	431	437	443	449	455	461	467	473	479	485	8 5.6
716	491	497	503	509	516	522	528	534	540	546	9 6.3
717	552	558	564	570	576	582	588	594	600	606	
718	612	618	625	631	637	643	649	655	661	667	
719	673	679	685	691	697	703	709	715	721	727	
720	733	739	745	751	757	763	769	775	781	788	
721	794	800	806	812	818	824	830	836	842	848	6
722	854	860	866	872	878	884	890	896	902	908	
723	914	920	926	932	938	944	950	956	962	968	1 0.6
724	974	980	986	992	998	*004	*010	*016	*022	*028	2 1.2
725	86 034	040	046	052	058	064	070	076	082	088	3 1.8
726	094	100	106	112	118	124	130	136	141	147	4 2.4
727	153	159	165	171	177	183	189	195	201	207	5 3.0
728	213	219	225	231	237	243	249	255	261	267	6 3.6
729	273	279	285	291	297	303	308	314	320	326	7 4.2
730	332	338	344	350	356	362	368	374	380	386	8 4.8
731	392	398	404	410	415	421	427	433	439	445	9 5.4
732	451	457	463	469	475	481	487	493	499	504	
733	510	516	522	528	534	540	546	552	558	564	
734	570	576	581	587	593	599	605	611	617	623	
735	629	635	641	646	652	658	664	670	676	682	
736	688	694	700	705	711	717	723	729	735	741	5
737	747	753	759	764	770	776	782	788	794	800	
738	806	812	817	823	829	835	841	847	853	859	1 0.5
739	864	870	876	882	888	894	900	906	911	917	2 1.0
740	923	929	935	941	947	953	958	964	970	976	3 1.5
741	982	988	994	999	*005	*011	*017	*023	*029	*035	4 2.0
742	87 040	046	052	058	064	070	075	081	087	093	5 2.5
743	099	105	111	116	122	128	134	140	146	151	6 3.0
744	157	163	169	175	181	186	192	198	204	210	7 3.5
745	216	221	227	233	239	245	251	256	262	268	8 4.0
746	274	280	286	291	297	303	309	315	320	326	9 4.5
747	332	338	344	349	355	361	367	373	379	384	
748	390	396	402	408	413	419	425	431	437	442	
749	448	454	460	466	471	477	483	489	495	500	
750	506	512	518	523	529	535	541	547	552	558	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP

7500—8000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP
750	87 506	512	518	523	529	535	541	547	552	558	
751	564	570	576	581	587	593	599	604	610	616	
752	622	628	633	639	645	651	656	662	668	674	
753	679	685	691	697	703	708	714	720	726	731	
754	737	743	749	754	760	766	772	777	783	789	
755	795	800	806	812	818	823	829	835	841	846	
756	852	858	864	869	875	881	887	892	898	904	
757	910	915	921	927	933	938	944	950	955	961	
758	967	973	978	984	990	996	*001	*007	*013	*018	
759	88 024	030	036	041	047	053	058	064	070	076	
760	081	087	093	098	104	110	116	121	127	133	
761	138	144	150	156	161	167	173	178	184	190	**6**
762	195	201	207	213	218	224	230	235	241	247	
763	252	258	264	270	275	281	287	292	298	304	1 | 0.6
764	309	315	321	326	332	338	343	349	355	360	2 | 1.2
											3 | 1.8
765	366	372	377	383	389	395	400	406	412	417	4 | 2.4
766	423	429	434	440	446	451	457	463	468	474	5 | 3.0
767	480	485	491	497	502	508	513	519	525	530	6 | 3.6
768	536	542	547	553	559	564	570	576	581	587	7 | 4.2
769	593	598	604	610	615	621	627	632	638	643	8 | 4.8
											9 | 5.4
770	649	655	660	666	672	677	683	689	694	700	
771	705	711	717	722	728	734	739	745	750	756	
772	762	767	773	779	784	790	795	801	807	812	
773	818	824	829	835	840	846	852	857	863	868	
774	874	880	885	891	897	902	908	913	919	925	
775	930	936	941	947	953	958	964	969	975	981	
776	986	992	997	*003	*009	*014	*020	*025	*031	*037	
777	89 042	048	053	059	064	070	076	081	087	092	
778	098	104	109	115	120	126	131	137	143	148	
779	154	159	165	170	176	182	187	193	198	204	
780	209	215	221	226	232	237	243	248	254	260	
781	265	271	276	282	287	293	298	304	310	315	**5**
782	321	326	332	337	343	348	354	360	365	371	
783	376	382	387	393	398	404	409	415	421	426	1 | 0.5
784	432	437	443	448	454	459	465	470	476	481	2 | 1.0
											3 | 1.5
785	487	492	498	504	509	515	520	526	531	537	4 | 2.0
786	542	548	553	559	564	570	575	581	586	592	5 | 2.5
787	597	603	609	614	620	625	631	636	642	647	6 | 3.0
788	653	658	664	669	675	680	686	691	697	702	7 | 3.5
789	708	713	719	724	730	735	741	746	752	757	8 | 4.0
											9 | 4.5
790	763	768	774	779	785	790	796	801	807	812	
791	818	823	829	834	840	845	851	856	862	867	
792	873	878	883	889	894	900	905	911	916	922	
793	927	933	938	944	949	955	960	966	971	977	
794	982	988	993	998	*004	*009	*015	*020	*026	*031	
795	90 037	042	048	053	059	064	069	075	080	086	
796	091	097	102	108	113	119	124	129	135	140	
797	146	151	157	162	168	173	179	184	189	195	
798	200	206	211	217	222	227	233	238	244	249	
799	255	260	266	271	276	282	287	293	298	304	
800	309	314	320	325	331	336	342	347	352	358	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP

8000—8500

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP
800	90 309	314	320	325	331	336	342	347	352	358	
801	363	369	374	380	38$\bar{5}$	390	396	401	407	412	
802	417	423	428	434	439	44$\bar{5}$	4$\bar{5}$0	455	461	466	
803	472	477	482	488	493	499	504	509	51$\bar{5}$	520	
804	526	531	536	542	547	553	558	563	569	574	
805	580	585	590	596	601	607	612	617	623	628	
806	634	639	644	6$\bar{5}$0	655	660	666	671	677	682	
807	687	693	698	703	709	714	720	725	730	736	
808	741	747	752	757	763	768	773	779	784	789	
809	79$\bar{5}$	800	806	811	816	822	827	832	838	843	
810	849	854	859	86$\bar{5}$	870	875	881	886	891	897	
811	902	907	913	918	924	929	934	940	94$\bar{5}$	950	
812	956	961	966	972	977	982	988	993	998	*004	
813	91 009	014	020	025	030	036	041	046	052	057	
814	062	068	073	078	084	089	094	100	105	110	
815	116	121	126	132	137	142	148	153	158	164	
816	169	174	180	18$\bar{5}$	190	196	201	206	212	217	
817	222	228	233	238	243	249	254	259	26$\bar{5}$	270	
818	275	281	286	291	297	302	307	312	318	323	
819	328	334	339	344	3$\bar{5}$0	35$\bar{5}$	360	365	371	376	
820	381	387	392	397	403	408	413	418	424	429	
821	434	440	44$\bar{5}$	450	455	461	466	471	477	482	
822	487	492	498	503	508	514	519	524	529	53$\bar{5}$	
823	540	545	551	556	561	566	572	577	582	587	
824	593	598	603	609	614	619	624	630	63$\bar{5}$	640	
825	645	651	656	661	666	672	677	682	687	693	
826	698	703	709	714	719	724	730	73$\bar{5}$	740	745	
827	751	756	761	766	772	777	782	787	793	798	
828	803	808	814	819	824	829	834	840	84$\bar{5}$	850	
829	855	861	866	871	876	882	887	892	897	903	
830	908	913	918	924	929	934	939	944	9$\bar{5}$0	955	
831	960	965	971	976	981	986	991	997	*002	*007	
832	92 012	018	023	028	033	038	044	049	054	059	
833	06$\bar{5}$	070	07$\bar{5}$	080	085	091	096	101	106	111	
834	117	122	127	132	137	143	148	153	158	163	
835	169	174	179	184	189	19$\bar{5}$	200	205	210	215	
836	221	226	231	236	241	247	252	257	262	267	
837	273	278	283	288	293	298	304	309	314	319	
838	324	330	33$\bar{5}$	340	345	350	355	361	366	371	
839	376	381	387	392	397	402	407	412	418	423	
840	428	433	438	443	449	454	459	464	469	474	
841	480	48$\bar{5}$	490	495	500	505	511	516	521	526	
842	531	536	542	547	552	557	562	567	572	578	
843	583	588	593	598	603	609	614	619	624	629	
844	634	639	64$\bar{5}$	6$\bar{5}$0	65$\bar{5}$	660	665	670	675	681	
845	686	691	696	701	706	711	716	722	727	732	
846	737	742	747	752	758	763	768	773	778	783	
847	788	793	799	804	809	814	819	824	829	834	
848	840	84$\bar{5}$	8$\bar{5}$0	8$\bar{5}$5	860	865	870	875	881	886	
849	891	896	901	906	911	916	921	927	932	937	
850	942	947	952	957	962	967	973	978	983	988	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PP

PP

6	
1	0.6
2	1.2
3	1.8
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	4.8
9	5.4

5	
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0
5	2.5
6	3.0
7	3.5
8	4.0
9	4.5

8500—9000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
850	92 942	947	952	957	962	967	973	978	983	988
851	993	998	*003	*008	*013	*018	*024	*029	*034	*039
852	93 044	049	054	059	064	069	075	080	085	090
853	095	100	105	110	115	120	125	131	136	141
854	146	151	156	161	166	171	176	181	186	192
855	197	202	207	212	217	222	227	232	237	242
856	247	252	258	263	268	273	278	283	288	293
857	298	303	308	313	318	323	328	334	339	344
858	349	354	359	364	369	374	379	384	389	394
859	399	404	409	414	420	425	430	435	440	445
860	450	455	460	465	470	475	480	485	490	495
861	500	505	510	515	520	526	531	536	541	546
862	551	556	561	566	571	576	581	586	591	596
863	601	606	611	616	621	626	631	636	641	646
864	651	656	661	666	671	676	682	687	692	697
865	702	707	712	717	722	727	732	737	742	747
866	752	757	762	767	772	777	782	787	792	797
867	802	807	812	817	822	827	832	837	842	847
868	852	857	862	867	872	877	882	887	892	897
869	902	907	912	917	922	927	932	937	942	947
870	952	957	962	967	972	977	982	987	992	997
871	94 002	007	012	017	022	027	032	037	042	047
872	052	057	062	067	072	077	082	086	091	096
873	101	106	111	116	121	126	131	136	141	146
874	151	156	161	166	171	176	181	186	191	196
875	201	206	211	216	221	226	231	236	240	245
876	250	255	260	265	270	275	280	285	290	295
877	300	305	310	315	320	325	330	335	340	345
878	349	354	359	364	369	374	379	384	389	394
879	399	404	409	414	419	424	429	433	438	443
880	448	453	458	463	468	473	478	483	488	493
881	498	503	507	512	517	522	527	532	537	542
882	547	552	557	562	567	571	576	581	586	591
883	596	601	606	611	616	621	626	630	635	640
884	645	650	655	660	665	670	675	680	685	689
885	694	699	704	709	714	719	724	729	734	738
886	743	748	753	758	763	768	773	778	783	787
887	792	797	802	807	812	817	822	827	832	836
888	841	846	851	856	861	866	871	876	880	885
889	890	895	900	905	910	915	919	924	929	934
890	939	944	949	954	959	963	968	973	978	983
891	988	993	998	*002	*007	*012	*017	*022	*027	*032
892	95 036	041	046	051	056	061	066	071	075	080
893	085	090	095	100	105	109	114	119	124	129
894	134	139	143	148	153	158	163	168	173	177
895	182	187	192	197	202	207	211	216	221	226
896	231	236	240	245	250	255	260	265	270	274
897	279	284	289	294	299	303	308	313	318	323
898	328	332	337	342	347	352	357	361	366	371
899	376	381	386	390	395	400	405	410	415	419
900	424	429	434	439	444	448	453	458	463	468
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

PP

	6
1	0.6
2	1.2
3	1.8
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	4.8
9	5.4

	5
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0
5	2.5
6	3.0
7	3.5
8	4.0
9	4.5

	4
1	0.4
2	0.8
3	1.2
4	1.6
5	2.0
6	2.4
7	2.8
8	3.2
9	3.6

9000—9500

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
900	95 424	429	434	439	444	448	453	458	463	468
901	472	477	482	487	492	497	501	506	511	516
902	521	525	530	535	540	545	550	554	559	564
903	569	574	578	583	588	593	598	602	607	612
904	617	622	626	631	636	641	646	650	655	660
905	665	670	674	679	684	689	694	698	703	708
906	713	718	722	727	732	737	742	746	751	756
907	761	766	770	775	780	785	789	794	799	804
908	809	813	818	823	828	832	837	842	847	852
909	856	861	866	871	875	880	885	890	895	899
910	904	909	914	918	923	928	933	938	942	947
911	952	957	961	966	971	976	980	985	990	995
912	999	*004	*009	*014	*019	*023	*028	*033	*038	*042
913	96 047	052	057	061	066	071	076	080	085	090
914	095	099	104	019	114	118	123	128	133	137
915	142	147	152	156	161	166	171	175	180	185
916	190	194	199	204	209	213	218	223	227	232
917	237	242	246	251	256	261	265	270	275	280
918	284	289	294	298	303	308	313	317	322	327
919	332	336	341	346	350	355	360	365	369	374
920	379	384	388	393	398	402	407	412	417	421
921	426	431	435	440	445	450	454	459	464	468
922	473	478	483	487	492	497	501	506	511	515
923	520	525	530	534	539	544	548	553	558	562
924	567	572	577	581	586	591	595	600	605	609
925	614	619	624	628	633	638	642	647	652	656
926	661	666	670	675	680	685	689	694	699	703
927	708	713	717	722	727	731	736	741	745	750
928	755	759	764	769	774	778	783	788	792	797
929	802	806	811	816	820	825	830	834	839	844
930	848	853	858	862	867	872	876	881	886	890
931	895	900	904	909	914	918	923	928	932	937
932	942	946	951	956	960	965	970	974	979	984
933	988	993	997	*002	*007	*011	*016	*021	*025	*030
934	97 035	039	044	049	053	058	063	067	072	077
935	081	085	090	095	100	104	109	114	118	123
936	128	132	137	142	146	151	155	160	165	169
937	174	179	183	188	192	197	202	206	211	216
938	220	225	230	234	239	243	248	253	257	262
939	267	271	276	280	285	290	294	299	304	308
940	313	317	322	327	331	336	340	345	350	354
941	359	364	368	373	377	382	387	391	396	400
942	405	410	414	419	424	428	433	437	442	447
943	451	456	460	465	470	474	479	483	488	493
944	497	502	506	511	516	520	525	529	534	539
945	543	548	552	557	562	566	571	575	580	585
946	589	594	598	603	607	612	617	621	626	630
947	635	640	644	649	653	658	663	667	672	676
948	681	685	690	695	699	704	708	713	717	722
949	727	731	736	740	745	749	754	759	763	768
950	772	777	782	786	791	795	800	804	809	813
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

PP

	5
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0
5	2.5
6	3.0
7	3.5
8	4.0
9	4.5

	4
1	0.4
2	0.8
3	1.2
4	1.6
5	2.0
6	2.4
7	2.8
8	3.2
9	3.6

9500—10000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
950	97 772	777	782	786	791	795	800	804	809	813
951	818	823	827	832	836	841	845	850	$85\bar{5}$	859
952	864	868	873	877	882	886	891	896	900	$90\bar{5}$
953	909	914	918	923	928	932	937	941	946	950
954	$95\bar{5}$	959	964	968	973	978	982	987	991	996
955	98 000	$00\bar{5}$	009	014	019	023	028	032	037	041
956	046	050	$05\bar{5}$	059	064	068	073	078	082	087
957	091	096	100	105	109	114	118	123	127	132
958	137	141	146	150	$15\bar{5}$	159	164	168	173	177
959	182	186	191	195	200	204	209	214	218	223
960	227	232	236	241	245	$2\bar{5}0$	254	259	263	268
961	272	277	281	286	290	$29\bar{5}$	299	304	308	313
962	318	322	327	331	336	340	$34\bar{5}$	349	354	358
963	363	367	372	376	381	385	390	394	399	403
964	408	412	417	421	426	430	$43\bar{5}$	439	444	448
965	453	457	462	466	471	475	480	484	489	493
966	498	502	507	511	516	520	$52\bar{5}$	529	534	538
967	543	547	552	556	561	565	570	574	579	583
968	588	592	597	601	605	610	614	619	623	628
969	632	637	641	646	650	$65\bar{5}$	659	664	668	673
970	677	682	686	691	695	700	704	709	713	717
971	722	726	731	735	740	744	749	753	758	762
972	767	771	776	780	784	789	793	798	802	807
973	811	816	820	$82\bar{5}$	829	834	838	843	847	851
974	856	860	$86\bar{5}$	869	874	878	883	887	892	896
975	900	$90\bar{5}$	909	914	918	923	927	932	936	941
976	$94\bar{5}$	949	954	958	963	967	972	976	981	985
977	989	994	998	*003	*007	*012	*016	*021	*025	*029
978	99 034	038	043	047	052	056	061	$06\bar{5}$	069	074
979	078	083	087	092	096	100	$10\bar{5}$	109	114	118
980	123	127	131	136	140	$14\bar{5}$	149	154	158	162
981	167	171	176	180	$18\bar{5}$	189	193	198	202	207
982	211	216	220	224	229	233	238	242	247	251
983	255	260	264	269	273	277	282	286	291	295
984	300	304	308	313	317	322	326	330	$33\bar{5}$	339
985	344	348	352	357	361	366	370	374	379	383
986	388	392	396	401	405	410	414	419	423	427
987	432	436	441	$44\bar{5}$	449	454	458	463	467	471
988	476	480	484	489	493	498	502	506	511	515
989	520	524	528	533	537	542	546	550	$55\bar{5}$	559
990	564	568	572	577	581	585	590	594	599	603
991	607	612	616	621	$62\bar{5}$	629	634	638	642	647
992	651	656	660	664	669	673	677	682	686	691
993	$69\bar{5}$	699	704	708	712	717	721	726	730	734
994	739	743	747	752	756	760	$76\bar{5}$	769	774	778
995	782	787	791	795	800	804	808	813	817	822
996	826	830	$83\bar{5}$	839	843	848	852	856	861	865
997	870	874	878	883	887	891	896	900	904	909
998	913	917	922	926	930	$93\bar{5}$	939	944	948	952
939	957	961	965	970	974	978	983	987	991	996
1000	00 000	004	009	013	017	022	026	030	$03\bar{5}$	039
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

PP

	5
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0
5	2.5
6	3.0
7	3.5
8	4.0
9	4.5

	4
1	0.4
2	0.8
3	1.2
4	1.6
5	2.0
6	2.4
7	2.8
8	3.2
9	3.6

中西名詞對照表

二次函數 Quadratic function
二次方程式 Quadratic equation
二項式 Binomial expression
二項式定理 Binomial theorem
三項式 Trinomial expression
已知數 Known quantity
比 Ratio
比例 Proportion
不等式 Inequality
不盡根式 Surd
不定方程式 Indeterminate equation
元 Variable; Unknown
公比 Common ratio
公差 Common difference
公理 Axiom
公項 Common term
公分母 Common denominator
分子 Numerator
分母 Denominator
分式 Fraction
分解因式 Resolution into factors
分方程式 Fractional equation
分配定則 Distributive law
反變 Inverse variation
升冪 Ascending power
文字方程式 Literal equation
方次 Power
方程式圖解 Graph of an equation
矛盾方程式 Inconsistent equations
主根 Principal root
代替法 Method of substitution
代數式 Algebra c expression
代數和 Algebraic sum
加減消元法 Elimination by addition and subtraction
末項 Last term
正變 Direct variation
正整數 Positive integer
共軛根式 Conjugate surds
行 Column
行列式 Determinate
列 Row
自變數 Independent variable
同類項 Like term
同類根式 Like surd
同次根式 Radicals of a common index
同值方程式 Dependent equations
因式 Factor
多項式 Polynomial
有理式 Rational expression
有效數字 Significant figure
交換定則 Commutative law

曲線 Curve
坐標 Coördinates
坐標軸 Coördinate axes
判別式 Discriminate
拋物線 Parabola
依變數 Dependent variable
函數值 Functional value
直角坐標 Rectangular coördinates
奇數 Odd number
定位數 Characteristic
定值數 Mantissa
底數 Base
性質符號 Sign of quality
近似值 Approximate value
係數 Coefficient
恆等式 Identity
指數 Index; Exponent
指數定則 Law of index
約分 Reduction of a fraction
負數 Negative number
降冪 Descending power
首項 First term
乘方 Involution
倍式 Multiple
倒數方程式 Reciprocal equation
原點 Origin
根式 Radical
根指數 Index of radical
配方 Completing squar
被除式 Dividend
除式 Divisor
偶數 Even number
商式 Quotient
結合定則 Associative law
異類項 Unlike term
開方 Evolution
常數 Constant
常用對數 Common logarithm
條件不等式 Conditional inequality
符號定則 Rule of signs
單項式 Monomial
最低公倍式 Lowest common Multiple
最高公因式 Highest common Facter
最小公分母 Least common Denominator
無理式 Irrational expression
無窮大 Infinity
無理方程式 Irrational equation
等比級數;幾何級數 Geometrical progression
等比中項 Geometrical mean.
等差級數;算術級數 Arithmetical progression
等差中項 Arithmetical mean
等次方程式 Homogeneous equation
絕對值 Absolute value
絕對不等式 Absolute inequality
虛數 Imaginary number
虛數單位 Imaginary unit
象限 Quadrant
運算符號 Sign of operation
實數 Real nnmber
對稱方程式 Symmetric equation

數系 number system

數字係數 numerical coefficient

調和級數 Harmonical progression

調和中項 Harmonical mean

質因式 Prime factor

橫軸 Horizontal axis

橫坐標 Abscissa

餘式 Remainder

餘對數 Cologarithm

逆對數 Antilogarithm

插數法 Interpolation

縱軸 Vertical axis

縱坐標 Ordinate

複數 Complex number

雜根式 Complex surd

純根式 Simple surd

繁分式 Complex fraction

變數法 Variation

增根 Extraneous root

聯立方程式 Simultaneous equation

簡易方程式 Simple equation

初中代數教本　下册

二十八年七月初版　三十七年九月八版

每册定價金圓四角三分

編著者　楊曉初　楊明軒

發行者　上海福州路　開明書店　代表人范洗人

印刷者　開明書店

軒 (94 P.) W　(1.00)

B課代數下