萬有文庫

第一集一千種

王雲五主編

自然哲學之數學原理

(四)

牛頓著

鄭太朴譯

商務印書館發行

自然哲學之數學原理

(四)

牛頓 著
鄭太朴 譯

漢譯世界名著

第十一章　論球形物體之運動其間有向心力互相吸引

以前所論者,是傾向中心的物體之運動,此項中心係靜止不動的; 在自然界中此種狀況實可說不會有.蓋物體固可受引力之吸引,但按第三定律吸引與被吸引的物體之作用恆爲相互間的, 而且恆相等,故吸引者與被吸引者二者均不能靜止;倘祇有二個,則此二者必按定律系 4 以共同的重心爲心,環之而轉. 倘有多數物體, 其間祇有一個吸引其他一切或相互間均相吸引, 則此項物體必如是運動, 其共同的重心或則靜止或則以等速作直線運動. 在這個基礎上, 我將繼續說明物體之運動,此項物體均相互吸引; 於此, 我將向心力視爲吸引,雖然我們用物理學上的語言時,或者應當說是推撞(*Anstoss*)較妥. 我們現在是在數學的範圍

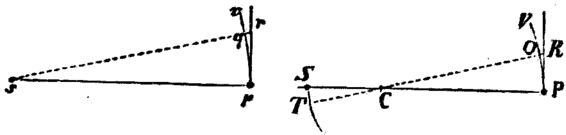
內從事，所以我們可放開物理上的爭論，應用我們所習慣的名稱，俾我們的意思更易爲有數學知識的讀者所易解。

§ 98. 定理. 互相吸引的物體，一面以共同的重心爲中心，一面交互的以一物體爲中心，作出相似的圖形。

離重心之遠相比，猶如物體相比之反，所以此項距離之間以及與二物體本身之距離間均有一定之比．此項距離可繞其共同的一端，以相等的角運動旋轉，因在直距離內之二物體，其相互的傾向不變．但相互間有一定比的直線，以其端以相等的角運動旋轉時，其所作之圖形必相似．所以由此項距離旋轉而成的圖形爲相似的。

此即所欲證者.

§ 99. 定理. 倘二物體以某種力互相吸引，並繞其共同的重心旋轉，則可以此種力，以一視爲固定的物體作中心，作一圖形，此圖形與二物體在前所述之運動下作出者相合。



第　一　百　圖

今設 S 與 P 二物體以共同的重心 C 環繞運動，其方向爲由 S 至 T 及由 P 至 Q. 由已知的點 s 作　　　sp 與 SP 相等並相平行，

sq 與 TQ 相等並相平行，

如是，則 p 點繞固定點 s 時所作之曲線 pqv, 與一其他曲線相等相似，此曲線即爲物體 S, P 互相環繞而作出者. 又按 § 98, 該曲線並與 ST, PQV 二曲線相似，此二曲線即爲該二物體環繞其共同的重心時所作者. 因 SC, CP 及 SP 或 sp 諸線相互間之比爲已知，故必如此；而共同的重心或則靜止着，或則以等速在直線上進行. 今設

第一事. 該重心靜止着. s 及 p 處有二物體，s 處的爲靜止的，p 處的則爲運動者，此二者與 S,P 二物體相等相似. 設 PR 及 pr 與曲線

PQ, pq 相切於 P 及 p，並將 CQ, sq 引長至 R 及 r.

因 $$CPRQ \sim sprq,$$

故有 $$RQ : rq = CP : sp;$$

所以前二者之比爲常數並爲已知者.

又如使物體 P 傾向物體 S（因而亦傾向其中間的重心 C）的力，與使物體 p 傾向 s 的力相比亦爲該已知的比，則在相等的時間內，此項力恆使物體由切線 PR, pr 傾向 PQ, pq 弧．第二力之作用，則使物體 p 在曲線 pqv 上進行，此曲線與一其他曲線 PQV（物體 P 以第一力之作用在此曲線上運動）相似，而其環繞時間則亦相同．不過該項力相比，不等於

$$CP : sp,$$

而爲相等（因 $S \cong s$, $P \cong p$, $SP = sp$）．所以二物體在等時間內離切線之度相等.

因第二物體 p 所經過的空間 rq 較大，故其所須時間亦較多，其比則爲空間之平方根，因按 §10，在開始時候所作的道路，其比猶如時間之平

方.所以我們可假定,物體 p 之速度與物體 P 者相比,如

$$\sqrt{sp} : \sqrt{CP},$$

俾於時間段內(其比與此相同),作成 PQ, pq 弧時,其比如

$$CP : sp.$$

如是則物體 P 與 p 恆被相等的力所吸引,以靜止的中心 C 與 s 爲心,作出相似的圖形 PQV, pqv. 在此二圖形中,pqv 與一其他圖形相合,該圖形卽爲物體 P 繞動的物體 S 作成者.此卽所欲證者.

第二事. 我們假定該共同的重心,與(物體在其內運動的)空間同時作等速的直線進行;如是,則按定律系 6, 該空間內之一切運動均與前無異,所以物體相互環繞而作成之圖形亦仍如前,故仍與 pqv 圖形相合.此亦卽所欲證者.

系 1. 由此可知,如二物體互相吸引,其力與二物體之距離相比,則此二物體卽環繞其共同重心及互相環繞作成同心的橢圓.反之,倘所作圖形如是,則力亦必與距離相比.

系 2. 又如該項力與距離之平方成反比,則二

物體環繞其共同重心及互相環繞作成圓錐曲線，其一焦點在圖形所繞的力之中心.反之，倘所作之圖形如是，則該項力亦必與距離之平方成反比.

系 3. 二任何物體繞其共同的重心運動時，其向重心及連結二物體之方向半徑，作出與時間相比的面積.

§ 100. 定理. 環繞共同重心 C 的兩個物體 S, P 之環繞時間，與二物體中其一（例如P）物體環繞其他物體之時間相比，如

$$\sqrt{S} : \sqrt{S+P};$$

於此，P 所作之軌道，與二物體互相環繞所作之圖形相合.

按以上所證明之理，作成相似弧 PQ, pq 之時間，其相比如

$$\sqrt{CP} : \sqrt{SP} = \sqrt{CP} : \sqrt{sp},$$

即是，如

$$\sqrt{S} : \sqrt{S+P}.$$

將此項比相加，即可知作成整個相似圖形的

時間，其比亦是如此。此即所欲證者。

§ 101. 定理. 二物體互相吸引，其力與其距離之平方成反比，此二物體並環繞其共同重心運動。如是則二物體中其一物體 P, 在此項運動中環繞其他物體 S 所作之橢圓，其大軸與一其他橢圓（此橢圓為 P 環繞靜止的 S 時於同時間內所可作成者）之大軸相比，如

$$\sqrt[3]{S+P} : \sqrt[3]{S}.$$

蓋如所作的二橢圓相等，則按前節其環繞時間相比，如

$$\sqrt{S} : \sqrt{S+P}.$$

今用 T 與 t 表此項時間，用 A 與 a 表大軸，則於 $A=a$ 時，有

$$(1)\quad T : t = \sqrt{S} : \sqrt{S+P}.$$

將第二橢圓之環繞時間減少之，以

$$\sqrt{S+P} : \sqrt{S}$$

為度，並設如是所有之環繞時間為 t', 俾

$$(2)\quad t : t' = \sqrt{S+P} : \sqrt{S},$$

則按(1),即有

$$T=t'.$$

今以 a' 表第二橢圓之新軸,則按 § 35,有

$$a:a'=t^{\frac{2}{3}}:t'^{\frac{2}{3}}=(S+P)^{\frac{1}{3}}:S^{\frac{1}{3}},$$

而因 $a'=A$,有

$$(3)\quad a:A=\sqrt[3]{S+P}:\sqrt[3]{S}.$$

此即所欲證者.

§ 102. 定理. 二物體以某種力互相吸引,其運動爲任意的,不受其他方面之推動或阻滯.在這種狀况下,物體之運動方式,一若相互間並不吸引,但爲一第三物體所吸引者然;此第三物體在二物體之共同重心處.對於此項吸引力,就物體之相互距離及其與共同重心之距離而言,其適用的定律相同.

二物體相互吸引的力,係向物體本身,因而亦向在其中間的共同重心.所以其作用,猶如由一在其間的物體出發的一樣.

又,一物體與共同重心之距離,與二物相互距

離之比爲已知，故前者之任何次方與後者同次方之比可以求得，前者與任何已知數量之結合與後者之同數量同方法的結合之比亦可求得．

所以一物體被他物體所吸引的力，倘其比如二物體距離之正或反，或如該距離之任何次方之正或反，或如其與任何已知數之結合之正或反，則使物體向共同重心的力，其比亦如該物體與該重心之距離之正或反，或如此距離之某次方（方數與前同），或如其與某項已知數之結合（此項已知數與前相類，其結合法亦相似）之正或反．故對於二種距離，吸引力所適用的定律均相同．

此即所欲證者．

§ 103. 問題．　二物體互相吸引，其力與二物體間距離之平方成反比，今由某二個已知的處所將此二物體放出之，試求其運動．

按前節所已證明者，可知此二物體之運動方式，一若被一第三物體所吸引者然；此第三物體在二物體之共同重心．因爲在開始運動時候此重心

係靜止的，故按定律系 4，此重心必恆靜止着.所以欲求此相互吸引的二物體之運動時，祇須將二物體視爲被某項力所推動，此項力則向着該重心者便得.

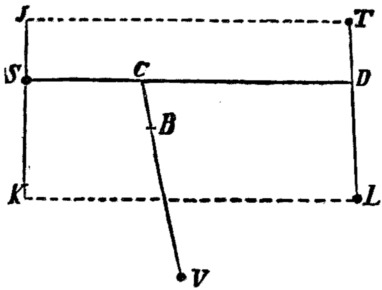
§ 104. 問題. 二物體互相吸引，其力與二物體間距離之平方成反比；此二物體由已知的處所，向一定的方向以一定的速度出發；今欲求其運動.

由物體開始時之已知運動，我們可求得其共同重心之等速運動，以及空間與該重心之同時的等速直線運動，並可知物體對於該空間之開始的運動.以下該空間內之運動，則其方式猶如後者本身與該重心均靜止着，物體相互間並無吸引力，但被一第三物體所吸引，此第三物體則在共同重心處.此二物體中其一物體在該動的空間內之運動，因其由一定的處所，向一定的方向，以一定的速度出發並被一向重心的力所影響，故可按 §§ 37, 77 求之；於是同時即可求得該其他物體之運動.以前所得者，須將其與此運動結合；而前者則於該空間

及其中之物體所合成的系統方面適用.如是,即可求得物體在不動的空間中之絕對運動.

§ 105. 問題. 諸物體互相吸引的力,與物體離

第一〇一圖



第一〇二圖

重心之距相比;今欲求諸物體本身間之運動.

試先取 T, L 二物體,其共同的重心為 D. 按 § 99 系 1, 此二物體所作之軌道為橢圓,其中心點在 D, 其大小可自 § 27 求之.

今有一第三物體 S, 對於前二者施以吸引並使其加速,其力為 ST, SL; 同時,此物體本身亦被前二物體所吸引.試將 ST 力析為 SD, DT 二支力,並將 SL 析為 SD, DL 二力.DT 與 DL 二力

與其和相比，故與加速的力相比；T, L 二物體即以此互相吸引．今將此二力加於 T,L 二物體之力上(前者加於前者，後者加於後者)，則所得之力與 DT, DL 距離相比，但較之以前爲大了．所以其作用則使物體仍如前作出橢圓，但其速度則增加．其餘的力 SD, SD 與(與物體相比的)運動力

$$SD\cdot T, SD\cdot L$$

一同吸引物體，其所循方向爲 JT, KL 二線；此二線均與 SD 相平行，故對於物體之相互位置並無影響，惟能使二物體等齊的與 JK 線接近，此 JK 線係經過物體 S 之中心，並與 SD 相垂直者．欲使其不能與 JK 線接近，則須使 T,L 二物體以及 S 物體以相當的速度環繞共同重心 C 運行．如是，S 即繞 C 作一橢圓，D 作一相似的橢圓，T 與 L 二物體則以 $SD\cdot T$, $SD\cdot L$ 之作用環繞動的點 D 作成橢圓如前．

今再加入一第四物體 V，則用相似的推論法可知此物體與 C 點環繞共同的重心 B 作成橢圓；

T, L, S 諸物體於此仍保持其環繞 D, C 之運動，但其速度則較大．用此項方法，尙可加入許多物體．

T, L 二物體間之吸引雖可較大或較小(按距離之比例，此二物體之互相吸引力可較其他諸物體爲大或小)，但其關係仍如此．倘諸物體間之相互吸引，其比如連結吸引物體之距離，則由以前所證明之定理中，可知諸物體於相等的環繞時間內，以諸物體之共同重心 B 爲中心，作成不同的橢圓，且均在一平面內．

§ 106. 定理． 有若干物體，其力隨着離重心之遠之平方而減少，則此項物體可很近似的在橢圓內運動，其向橢圓焦點的方向半徑所作之面積，很近似的與時間相比．

前節內所證明者，係正確的橢圓內之若干運動．倘力之定律與前所述者相去愈遠，則物體對於其運動上之變動亦愈甚，故在此處所假定的相互吸引定律下，祇有物體之相互距離間保有一定的

比例，纔能在正確的橢圓內運動. 在以下諸事內，軌道與橢圓之相差甚微.

第一事. 今設有若干小的物體環繞一大的物體運動，其距離不等，向着各個物體有絕對的力生作用，此項力與各個物體爲相比的. 因諸物體之共同重心或則靜止着或則以等速運動在直線上進行，故可假定該項小物體如是之小，俾大物體與該共同重心之距離甚微，簡直不能分別. 於是大物體可視爲靜止的或以等速作直線運動者，而小物體則環繞大物體在橢圓內運動，其向大物體所作之方向半徑，作成與時間相比的面積；不過在這裏，我們係假定大物體與共同重心之距離及小物體間之相互作用，不致發生什麼影響於運動上. 我們可將小物體如是縮小之，使該距離及小物體間之相互作用小至於任何已知小的數量，並使其軌道之面積與橢圓之面積相等. 如是則面積即與時間相當，其差可小於任何小的已知數量.

第二事. 我們試設想一系統，含有若干小物

體，按以前所述的方式，環繞一極大的物體運動；又設想一其他系統，爲二物體所成，此二物體相互環繞，但此系統則等速的在直線上進行，並被一極大但距離很遠的物體之力所影響，使其向側進行。因爲在平行的線上推動物體的相等的力，不能改變物體相互間之位置，但能使物體所成的整個系統，在保持其各部相互間之運動下，向前進行，所以傾向此極大物體的引吸力，不能使被吸引的物體相互間之運動有所改變，除非該項吸引有所偏畸，或平行的線有所傾斜。

因此，我們可假定一切加速的吸引力(傾向該極大物體的吸引)，與距離該物體之遠之平方成反比，並將該距離如是放大之，使由該物體至各物體之線，其差及其互相傾向之度小於任何可知之數。如是則系統內各部分間之運動仍保存着，其差小於任何小的已知數。又因各部分間之距離甚小，故整個的系統之被吸引，猶如一個物體然，而其運動亦即如一個物體之運動，即是，此系統之重心環繞

該大物體作一圓錐曲線(倘吸引弱,則爲一雙曲線或拋物線,吸引強時即爲橢圓).其向大物體所作的方向半徑,則作成與時間相比的面積,其所能發生的差率,不能超過部分間之距離所引起者(此項差率甚微,並可任意減小之).

用同樣的方法,可將各種複合的事項研究,以至於無限.

系 1. 在以上之第二事項內,大物體與二物體或多物體所成之系統愈接近,則系統內各部分間運動之失調愈甚,因爲由各部分至大物體所作各線間之相傾較大而且不能相等了.

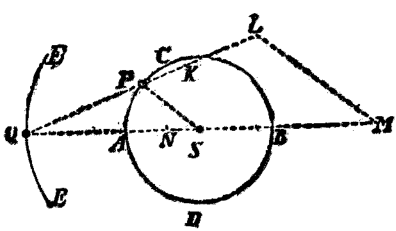
系 2. 但如假定系統內各部分傾向大物體的吸引不與距離之平方成反比,則各部分間運動之失調即更甚,尤其是,當此項力之參差不等較之各距離之不等更大時,失調特爲利害.

蓋如該項力能使物體間之運動失調,則由不等的作用上,必然發生一種失調,其大小隨該項作用之大小而異.較大的諸動力之盈餘,能作用於若

干物體上，但不能作用於其他物體，所以必然的使物體相互間之位置改變．今將此項失調增加於由距離之不等及傾斜所引起者之上，則所得者自較大了．

系 3．所以該系統之部分如不受若何擾亂而在橢圓或圓內運動時，此項部分即能爲向其他物體的力所推動，但可很輕或很近似的相等而在平行的線上生作用．

§ 107．定理．今有三物體，互相吸引，其吸引的力以距離之平方減少，其中二物體傾向第三物體的加速吸引力，相互間之比如距離之平方之反．又，兩個較小的物體，環繞較大的第三物體在共同的平面內運動．在此種狀況下，較在內的物體環繞更在其內且更大的物體運動，其向此物體的方向半徑作成近似與時



第一〇三圖

間相比的面積並作一圖形；倘大物體由此項吸引所推動，一若不受小物體所吸引而靜止者然，則該圖形與橢圓甚相近，而此橢圓之焦點則在半徑之交點。

此事實不難由 §106 系 2 以知之；但亦可用某種較廣的證法以證明其理。

第一事． 小物體 P,Q 與大物體 S 同在一平面內，而且 P 的軌道 PAB 較在內，Q 的軌道 EQE 則較在外．今設 P 與 Q 的平均距離爲 QK，P 傾向 Q 的吸引力，在此平均距離上亦即以此線表之．試取

$$QL:QK=QK^2:QP^2,$$

則 QL 所表者爲 P 傾向 Q之 QP 距離內的吸引．今作 PS，並作

$$LM \text{ 與 } PS \text{ 相平行},$$

而且 LM 與 QS 之引長相交於 M，如是則 QL 吸引力(按定律系 2)可析成爲 QM 與 LM 二者．

如是，物體 P 爲一三重的吸引力所推動，其

中之一係向着 S 而由 S 與 P 二物體之互相吸引所發生.單由後者之力所推動時, P 必須繞 S (S 或則不動或則因此項吸引力之推動而前進) 作成與時間相比的面積以及橢圓, 而此橢圓之焦點則在 S 點.此可由 § 29, § 99 系 2, 3 以知之.

其第二力係 LM. 此力之方向係由 P 向 S, 故與前所述之力同向,可相加之.按 § 99 系 3 可知其作用亦在作成與時間相比的面積. 但因其不與距離 PS 之平方成反比,故與第一力相結合時得一新力;倘 LM 力與第一力之比愈大, 則此新力與該比例之相差愈甚.又按 § 33 系 1, § 99 系 2, 使物體環繞焦點 S 作成橢圓的力係傾向該點,且必與 PS 距離之平方成反比,故該項新力旣與該比例不相當,其作用必使所作的軌道 PAB 與焦點在 S 的橢圓相差.倘該力與該比例之相差愈大,則軌道之去橢圓亦愈甚.又因第三力 QM 之吸引物體,係沿着與 QS 相平行的線,故其與前二力相結合而得的新力,不再由 P 向 S, 而且第三力與

前二者之比愈大，則其去此方向亦愈遠．此力之作用，使物體 P 之方向半徑所作之面積不再與時間相比，而且與前相同，第三力與前二者之比愈大，則此項相差亦愈遠．PAB 軌道之去上述的橢圓，因此第三力之影響而愈甚，其理由有二，一因其不由 P 向 S，一因其不與距離 PS 之平方成反比．倘第三力儘可能的小，其餘二力不變，則所作之面積亦能儘與時間相比．倘第二力與第三力，尤其是第三力儘量的小，第一力不變，則 PAB 軌道亦能與前述的橢圓儘相接近．

物體 S 傾向 Q 的吸引力可用 QN 線以表之．假如吸引力 QM 與 QN 相等，則因其在相平行的線上同等的吸引物體 S 及 P，故於二物體之相互位置上不能有若何影響．按定律系 6，物體之運動仍照常前進，一若未受該項力之作用者然．倘 QN 較之 QM 爲小，則其一部分 QN 被抵消，所餘者祇有 MN，此部分即使時間與面積之相比以及軌道之橢圓形式失調．又如 QN 較 QM 爲大，則亦

如此,祇有其差 MN 使比例性及軌道失調.

由此,以前所提的第三力 QM 恆因 QN 而減爲 MN,而第一第二兩吸引則不變.倘 $MN=0$ 或儘量的小,則面積與時間之相比性,以及軌道之橢圓形式亦儘量的接近.祇須 P,S 傾向 Q 之吸引儘可能的相等,即是,QN 不等於 0,而且較之 QM 中之最小者不更小,但在最大的 QM 及最小的 QM 之中間,亦即是,較之 QK 不過大或過小,則即得上述之事項.此亦即所欲證者.

第二事. 今設小物體 P 與 Q 環繞大物體於不同的平面內旋轉,則 LM 仍在 APB 軌道的平面內之 PS 線上生作用,其效果一如以前,不能使物體 P 出離其軌道之平面.其他的力 MN 則在與 QS 相平行的線上生作用,故除了以前說過的長的方面之失調作用外,兼在寬的方面亦發生此項影響,因爲此力使物體 P 出離其軌道的平面.不問 P 與 S 之位置如何,此項失調恆與 MN 力相比,故如 MN 極小則此失調亦極小,或亦可說,

如 QN 較之 QK 不過大或過小，則失調之程度亦即甚小。即此所證者。

系 1. 由此可知，倘有多個小物體 $P, Q, R,$ 等環繞大物體 S 運動，則在最裏面的物體 P 之運動不致因在其外的物體之吸引而有大的失調，祇須該大物體 S 之被其他物體所吸引及推動，其強度與諸物體間之互相吸引相同便可。

系 2. 今有一系統爲三物體所成，倘其中之任何二者對於第三者之吸引與距離之平方成反比，此三物體爲 $P,Q,S,$ 則 P 之方向半徑 $PS,$ 在 A,B 之附近作成面積所須之時間較短，在 C,D 之附近較長。

蓋因對於 P 生作用，但不能影響 S 的力，不在 PS 線上生作用，故能使面積之作成加速或緩遲，至其分別則在該力之作用於運動方向，在其前或後而定。NM 即爲此項力之一。在 P 由 C 至 A 時，此力之作用與運動同向，故使其加速；但由 A 至 D 時，則在與運動相反之方向內生作用，故使

運動遲緩；由 D 至 B 時亦加速，由 B 至 C 時則亦遲緩.

系 3. 由同法，我們可以知道，在一切均仍舊的狀況下，A, B 處之運動，較 C, D 處之運動爲速.

系 4. 在一切其他均如常的狀況下，物體 P 之軌道在 C,D 處之曲率較強，A, B 處之曲率較弱，因爲物體運動速時，其離直線方向之度卽較弱.此外，KL 或 NM 力在 A,B 處，與 S 吸引 P 的力相反，故能使後者之力減小.但 P 之傾向 S 既弱，則其離直線之度亦愈弱.

系 5. 在一切其他均如常的狀況下，物體 P 在 C,D 處離 S 較遠，在 A,B 處離 S 較近.除了偏心的運動以外，恆是如此.

蓋如物體 P 之軌道爲偏心的，則當回歸點落在對衝點 (*Syzygien*) 時，其偏心率即爲最大.所以物體 P 到上回歸點時，在該處與 S 相距較之在 C, D 處與 S 相距爲遠.

系 6. 使物體 P 不能出離其軌道的中心物體

S 之向心力,在 C,D 處因 LM 力之補充故增大,在對衝點則因 KL 之抵消故減小,且因 KL 力之大,故減小較之增加爲多.按 § 18 系 2, 該項向心力之比,如 SP 半徑之正,如環繞時間之反.所以此複合的比例,能爲 KL 之作用所減小,而在 SP 半徑不變的狀况下,環繞時間隨該項減小而增加,以其平方根爲度.倘此半徑增大或減小,則環繞時間之增加,其比大於 $R^{\frac{3}{2}}$, 或則以一比例減小, 此比例小於 $R^{\frac{3}{2}}$.如中心物體之力稍減,則物體 P 之被吸引即稍弱,其與中心 S 之距離亦即較遠.反之,倘力增加, 則其與中心之距離亦即逼近.所以能使該項力減小的 Q 之効率,如交互的增加或減小,則 SP 半徑亦即同時增加或減小,同樣爲交互的,而環繞時間亦隨之增加或減小,其比爲半徑之 $\frac{3}{2}$ 次方與增加或減小的平方根之組合, 此增加或減小亦即爲中心物體 S 受 Q 之增加的或減小的影響而發生者.

<u>系 7.</u> 由以上所明,並可知物體 P 所作的橢圓

之回歸線必交互的前移或後退；但其前移之度較爲強，故在物體之環繞中，此線以物體運動之方向前進。

蓋因使物體 P 於 C, D 處傾向物體 S 的力，是由 LM 力與 S 對於 P 之向心力所合成。LM 力當距離 PS 增大時差不多以同比增加，但第二力則以其平方爲比而減小，所以二者之和，仍是減小，惟其比則小於平方，因而其作用能使上回歸點向後退。在 A, B 處使物體 P 傾向 S 的力，等於由 S 至 P 的向心力與 KL 力之差，而因 KL 差不多以同比與 PS 一同增加，故此差之減小，其比大於 PS 之平方，其結果使上回歸點向前運動。在對衝點與 C, D 之中間處，回歸點之運動與二個理由有關，故隨着其一理由或其他之較有力，回歸點本身即向前或向後運動。因 KL 力在對衝點較之 C, D 處之 LM 約大一倍，故在一整個的環繞內 KL 較有力量，而其結果使上回歸點向前進。

我們如設想一二物體 S, P 所成的系統，爲

EQE 軌道上若干物體所包圍，則本節與前節之理，更易明白了．蓋因後者之作用，物體 S 之力即大爲減小，其比較之距離之平方爲大．

系 8. 回歸點之前進或後退與以下之事實有關，即當物體由下回歸點至上回歸點時，向心力之減小，其比大於或小於距離 SP 之平方，而當物體回至下回歸點時，則與其相似的增加有關．所以，倘上回歸點之力與下回歸點之力相比，儘可能的與距離之平方之反比相差，則其前進或後退亦即最大．很明顯的，回歸點在對衝點時，因

$$KL = NM - ML$$

之作用，故較速的前進，而在 C, D 時則因 LM 之作用，因而較遲的後退．又因較速的向前與較遲的向後有一較長時間的繼續，故此項不等能很明顯的表現出來．

系 9. 設有任何一物體受某種力之作用，在一橢圓內運動，此力則與物體離心之遠之平方成反比；倘由上回歸點至下回歸點時，該力恆增加，且

其比較之距離之平方爲大，則因該物體受增加的力之作用，故與中心更相接近，較之僅受一力(此力以距離之平方爲比增加)之推動尤甚.其所作之軌道，在橢圓之內面，而在下回歸點較之以前更與中心相接近.所以新的力增加時，軌道之偏心率亦更大.倘物體由下回歸點復回至上回歸點時，該力逐漸減小，其程度與以前之增加相同，則其距離亦恢復以前之狀；假如其減小之度較大，其距離亦即因吸引力之減小而較遠，軌道之偏心率因之亦更大了.所以在各個環繞內，力之增加與其減小之比如增加，則偏心率亦增大，反之，倘該比減小，偏心率亦即減小.

在 S, P, Q 三物體所成的系統內，倘其回歸點(PAB 軌道之回歸點)在 C, D 點，則該項增加與減小之比爲最小；反之，倘回歸點在對衝點，則其比爲最大.試設想回歸點在 C, D 點，則該比於回歸點之附近較之距離之平方爲小，而於對衝點之附近，較其爲大；由較大的比，可知上回歸點之直接

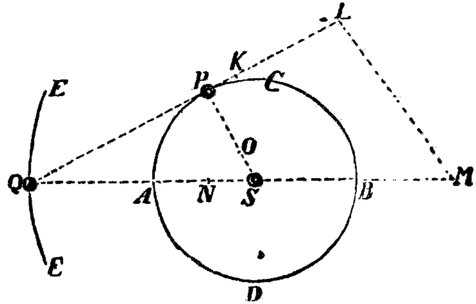
運動，此亦爲前所說過者．試研究回歸點間運動時之整個的增加與減小之比，即可知此比較之距離之平方爲小．下回歸點之力，其比小於一其他比，此比由上回歸點距橢圓焦點之遠之平方與下回歸點距該點之遠之平方所成．試另設想回歸點在對衝點，則下回歸點之力與上回歸點之力相比，其率大於距離之平方．因爲 LM 在 C, D 點時與 S 之力相加後，得一合力，其比較小．反之，對衝點之力 QL 由 S 之力減去後得一新力，其比較大．所以在回歸點中間的運動方面，整個的增加與減小之比，於 C, D 點爲最小，於對衝點爲最大．當回歸點由 C, D 轉移至對衝點時；此比恆增加，因而橢圓之偏心率亦增加；反之由對衝點至 C, D 時，該比與偏心率均減小．

系 10. 爲研究寬的方面失調之比，我們可設想，QES 軌道之平面爲靜止不動的．由以前所說明的失調之原因，可以知道，使失調發生的 NM, NL 二力中，後者之作用恆在 PAB 平面內，故對

於寬的方面之運動,全無影響.反之.倘黃道交切點落在對衡點,則 NM 亦在該平面內生作用,故亦不生失調影響.但如黃道交切點落在 C, D 處,則此力對於運動之失調作用爲最甚,而且此力使物體 P 恆出離其軌道之平面,故能減小物體由 C, D 至對衡點時之平面的傾斜,反之,當物體由對衡點至 C, D 時,兼能使傾斜增加.倘物體在對衡點,傾斜於是成爲最小,而當物體達到其次的黃道交切點時,該傾斜亦即恢復其原來的大小.今如將黃道交切點置於 C 與 A, D 與 B 之間,則由以上之說明,可知物體由其一黃道交切點轉至離此 $90°$ 時,傾斜恆減小,再經 $45°$ 時又增加,於是又復減小,至次一黃道交切點爲止.所以減小之度恆較之增加爲甚,而在以下的黃道交切點恆較之在以前的爲小.反之亦可知倘黃道交切點在 A 與 D, B 與 C 之間,則傾斜之增加多於減小;而如交切點在對衡點時,傾斜即爲最大.當交切點由對衡點至 C, D 時,物體經過各個的交切點之際,傾斜

即減小;但最小的,是交切點在 C, D 處物體則在對衡點.自此以下,傾斜重復增加,其度與其以前之減小一樣,而當交切點達到次對衡點時,仍復其原來之大小.

系 11. 倘黃道交切點落在 C,D 點,則物體 P 恆被吸引而出離其軌道之平面,且當其由 C 經過 A 向 D 運動時,物體恆向 Q 的一面傾向;反之,倘運動由 D 經過 B 至 C, 則卽向其相反之面被吸引.當物體由 C 運動時,一直至 D 爲止,物體



第一〇四圖

恆出離其軌道之平面 CD, 而因其在此點與 CD 平面相離最遠,故物體經過 QES 軌道之平面,不

在該平面內之其他交切點，而在一其他點，此點稍傾向 Q，且爲交切點之新的較在後的處所。在物體由一至其他時，交切點以同樣的方法後退。故如我們設想黃道交切點在 C, D 處，則恆退後；在對衝點時靜止着，在中間的處所則因二者兼而有之，故緩緩的向後，所以在各個環繞中，或則後退，或則緩緩的向後移動。

系 12. 此處所述之一切運動，均於 A 點爲較大，於 B 點爲較小，其原因則因 NM 與 ML 爲較大。

系 13. 因此處各系內所說明的狀况與物體 Q 之大小無關，故如將此物體放大，使 S 與 P 均繞之運行，以上所證明者亦均可適用不變。倘將 Q 並其向心力放大，則此項一切，在相同的距離下，均將較以前 Q 繞 S, P 時爲大。

系 14. 倘 Q 與 S 相距甚遠，則 NM 與 ML 二力，很接近的與 QK 及 $PS:QS$ 之組合相比。

所以倘 PS 距離以及 Q 之絕對力爲常數，則

此項力與 QS^3

成反比.

但如前各系內所已說明者, NM 與 ML 二力實爲引起一切失調及作用之原因, 故如 S,P 仍舊, 祇有 SQ 距離及 Q 之絕對力改變, 則該項一切作用之比均將很近似的如

Q 之絕對力之正,

QS 距離之三次方之反.

倘 S 與 P 所成之系統繞很遠的物體 Q 運動, 則該項力 NM, ML 及其作用, 其比如環繞時間之平方之反. 所以倘 Q 之大小與其絕對力相比, 則 NM, ML 二力以及其作用, 其比如遠處物體 Q 之徑之三方, 惟此徑係由 S 出發望 Q 時所得者, 故不必符於事實; 反之亦然. 此比是與以前之比相同者.

系 15. 今如軌道 EQE, PAB 之相互傾向, 形狀, 及比例均不變, 祇變其大小. Q,S 之力或則不變, 或則按照一定的比例稍變, 則此項力之作用仍

如舊,其比例亦仍不變.所必須者是一切作用均相似相比,且其所須時間亦為相比的;此卽是說,一切直線的失調,其比如軌道之徑,角的失調與前相同,相似的直線失調或相等的角失調,其時間與整個軌道之環繞時間相比.

系 16. 所以,倘軌道之相互傾向及形狀為已知,而且可用某種方法將大小,力,及距離改變之,則可由某種狀況下之已知的失調及其所需時間,以推知任何他種狀況下之失調及時間,其差失不致很大.用以下之方法較為簡單.

倘一切其他均不變,則 NM 與 ML 二力之半徑 SP 相比;前者之週期的影響,其比如力與 P 之環繞時間之平方之組合.此係 P 之直線的失調,其由 S 出發所可望見的角失調,在 P 之每一環繞方面,其比與環繞時間之平方甚相接近.今將此項比與系 14 中之比相結合,則在每個 S, P, Q 所成之系統方面(於此,P 繞其較近的物體 S 運行,S 則繞遠物體 Q 運行),對於中心 S 而言的 P

之可見的角失調，在 P 之各個環繞內，其比如

P 之環繞時間之平方之正，

S 之環繞時間之平方之反。

將偏心率放大或減小時，並將 PAB 軌道之傾斜亦放大或減小時，黃道交切點與近日點之運動不會顯著的改變。

系 17. 因 LM 有時大於 PS 有時則較之爲小，故可取其平均値，且卽以 PS 半徑表之。如是則此力與平均的力 QK 或 QN 相比，猶如 PS 比 QS(QS 即爲 QK 或 QN 之平均値).又，QS 爲使物體 S 恆在其軌道內繞 Q 運行之力，故此力與使 P 繞 S 之力相比，猶如 QS : PS 以及 P 繞 S 的時間之平方與 S 繞 Q 的時間之平方相比二者之合。

仿此，LM 之平均力，與使物體 P 在其軌道內繞 S 運行的力相比，亦等於該項環繞時間之平方相比。所以倘環繞時間與距離 PS 均爲已知，則平均的力 LM 亦即可求得，此力求得後，又可自

PS 與 MN 之比例內以求得 MN 力，但爲近似的。

系 18. 按照 P 環繞 S 的定律，可設想有若干流體的物體，亦環繞 S 運動，且其距離相等。今設此項物體互相接觸，因而發生一流體的，圓的圈環繞着 S，則其各部分之運動均按照 P 之定律，而與 S 稍接近，在 A, B 點運動較速，在 C, D 則較遲。圈與 Q 或 S 之軌道平面之交點，在對衡點時靜止着，在此外則向後退，而且在 C, D 時爲最速，其他點時較遲。圈之傾斜可以變動，其軸在各個環繞時擺動，但在一環繞之末仍回復其原處。

系 19. 試設想由非流體的物質所成之物體 S，漸漸的放大擴張至於此圈。此物體之週上有一溝，其中含有水，以同等的週期運動旋轉。如是，此流體即交互的加速及遲緩，在對衡點時較速，在 C,D 時較緩，故必在溝內流蕩，猶如海潮一般。倘水繞靜止的中心點運動，則當 Q 之吸引力消失時，水不會再有流蕩運動。此種狀況，在球之等速直線進

行，並同時自身旋轉上亦是如此，倘球漸漸的等速的出離其直線運動，此種狀況亦保存着（按定律，系 5，及系 6）.

倘 Q 逼近，則其不等的吸引力卽使水失調．逼近愈甚，則其被吸引亦愈甚，稍遠時卽較弱．LM 力使水在 C,D 點被向下吸引，一直到對衡點恆向下退，但 KL 力則於對衡點使水向上，因而適使向下被阻，一直到 C,D 點恆向上．自然，水之流蕩可爲溝及摩擦所阻滯，則此又當別論．

系 20. 倘圈固定，球稍小，則流蕩的運動即消失，但傾斜的擺動以及黃道交切點之前移均保存．今設球之軸與圈之軸同，並在同時間內經過其軌道，又設球之面與圈之內環相接觸並繫於其上；如是則球參與圈之運動，而此兩體所成之系統擺動，交切點則後退．當交切點達對衡點時，圈之傾斜角爲最大；交切點再前進到 C,D 時，此角即漸減，並因整個的球之推進，有一運動參加．此項運動，直至圈有相反的推進將前者消失時方停止，於是有

一新的運動在相反的方向內進行．當交切點達到C,D時，傾斜減小的強制力亦爲最大，傾角本身則在C,D後之階段內爲最小．過此後，傾斜又復有增加之勢，在對衝點時爲最大，而傾角本身亦於對衝點後之階段內爲最大．在沒有圈的球方面，此種道理亦適用，不過須假定球之赤道較高，其兩極略低，或亦可假定赤道之物質較密，蓋其重量之增加，亦可視爲一圈．雖然球之向心力增大時，其上一切部分猶如地球上之重物一樣，均向下傾，但前系及本系內之一切現象均不致有變動．水於是恆在其軌道內流動，不過使其不出離軌道者非爲向心力而爲溝之作用．此外，$KL=NM-LM$一力吸引水向上，於對衝點爲最甚，LM則吸其向下，於C,D點爲最甚．二力相合時能使向下被吸引停止，在對衝點之前階段時使其向上的被吸引；反之，在其後時即使其向下的被吸引．所以最大的潮，是在對衝點之後的階段內，最小的潮則在C,D之後；於此，自須假定水本身所有之力以及溝之阻力不

致會發生大的阻礙，使其受影響而變動。

系 21. 赤道上物質過多的作用，使交切點後退，故如將物質再增加，則其後退亦愈甚，減少其分量後，亦即能使後退較弱，而如繼續減少其物質，使赤道上物質較平常狀況下更少，因而赤道陷下兩極伸出，則交切點即前移。

系 22. 反之，我們亦可由交切點之移動以知球之形狀。蓋如兩極不變，而其移動向後，則必赤道之物質過多，不然，赤道即無過多量之物質。試設想一均勻的全圓的球，開始時在空間內靜止着。於是此球經一斜的撞擊而運動了，一方面以直線進行，一方面則旋轉。因爲此球對於經過其中心的一切軸之關係均同，不對於某個軸有傾斜，故不會將其軸改變。今將此球再斜的撞擊一下，其方向一如前，則因撞擊之先後次序並無關係，故此二撞仍可組合成爲一撞，其運動一如此一次的撞擊所產生。即使第二次撞擊落在赤道上之任何點，或第一次撞擊落在赤道上之一點，均無若何關係。

一個均勻的整圓，不會將若干不同的運動同時保存着，而將其組合成為一單純的運動．其軌道恆為單純的等速的運動所作成，其軸亦祇有一個，軸之傾斜亦為已知不變者．向心力之作用，不能改變軸之傾斜亦不能改變其旋轉速度．

試設想此球為一經過其中心點及力之方向點的平面所分割成為二半球，則該力對於此兩半球之作用恆相等，故就旋轉運動而言，球不會有偏向．今試於兩極及赤道之間的任何處加一堆新物質，猶如山一樣，則因此堆有離心傾向，故能使球之運動失調，其結果則兩極亦運動，而且每極均繞其自己並其他極運動作成圓．欲免去此項不規則，祇有將山移至兩極中之任何一極，如是則赤道之交切點即向前移動，或亦可將山移在赤道上，則交切點即後退．尚有一第三方法亦可糾正此不規則，即是，再加一個山於軸之對面，使其對於運動上之作用相抵消．如是則交切亦必前移或後退，視山之離兩極或赤道何者較為近而定．

§108. 定理. 在同前的吸引定律之假定下,物體 Q 對於 S 與 P 之共同重心 O, 所作與時間相比的面積及以 O 爲焦點的橢圓,較之其僅繞 S 所作者爲正確.

S 與 P 二物體對於 Q 之吸引,其組合傾向於 O 者較之僅傾向於 S 者爲多,故與 QO 之平方相比較之與 QS 之平方成反比爲接近. 此種道理當很易明白.

§109. 定理. 仍在以前的假定下,而如最在內並最大的物體與其他物體一樣, 同爲此項吸引力所推動,並不是完全未被吸引而靜止着,或其被吸引較強或較弱因而被推動亦較多或較少, 則在外的物體 Q 繞 O 時所作的與時間相比之面及以 O 爲焦點的橢圓較爲正確.

此定理之證法差不多與 §107 中之證法相同,但太冗長了,故不再贅,祇於以下略述便足.

由前節之證,可知 Q 所被吸引而推動的中心,與該二物體之共同重心甚相接近. 倘此中心落在

共同重心處，且此三物體之共同重心靜止着，則一方面 Q 本身，他方面其餘二物體之共同重心，環繞此三物體之共同重心作成較正確的橢圓．此理可由 § 99 系 2, 與 §§ 105, 106 諸節知之．因 Q 所傾向的點與其他二物體之共同重心微有差，故該項橢圓運動亦微有失調．又如三物體之共同重心非爲靜止而運動，則其失調亦更甚；靜止時，此項失調即爲最小．

系． 倘有若干小物體環繞一極大物體運動，則由以上所證明者，可知所作的軌道之接近橢圓，以及面積作成時之均齊性，在一切物體間有力互相吸引並推動的狀況下(此項力與絕對力成正比，與距離之平方成反比)，而且每個軌道之焦點在其內面的軌道之共同重心點時，較爲正確(所謂焦點在共同重心點，亦即是說，第一而且最在內的軌道之焦點，在極大物體與最在內的物體之共同重心點，第二軌道之焦點，在最在內的二物體之共同重心點，第三軌道之焦點，在最在內的三物體之共同重

心點等等），而如最在內的物體靜止着不動且爲一切軌道之共同焦點，則較不正確。

§ 110. 定理. A,B,C,D, 等諸物體所成的系統內，倘有其一物體 A 以加速的力吸引其餘一切物體（此項力與距離之平方成反比），而且對於 A,C, D, 等物體而言，物體 B 亦有此屬性，則 A 與 B 之絕對力相比，如物體 A 與 B 本身相比.

按所設，B,C,D 等對於 A 之吸引力，在相等的距離下爲相等者；各物體對於 B 之吸引亦然. A 之絕對吸引力與 B 之絕對吸引力相比，猶如一切物體對於 A 之吸引與一切物體對於 B 之吸引相比；此二者均在相等的距離下用之.在 B 對於 A 以及 A 對於 B 之吸引方面，亦適用此比例.但 B 對於 A 之吸引與 A 對於 B 之吸引相比，如 A 之質量與 B 之質量相比，因爲運動的力係由（對於被吸引的物體而言）加速的力所成，而爲相等者. 所以 A 之絕對的吸引力與 B 之絕對的吸引力相比，猶如 A 之質量與 B 之質量相比. 此即所欲

證者.

系 1. 所以倘 A,B,C,D 等各個物體均能以加速的力吸引其餘一切物體，此項力與距離之平方成反比，則該項物體之絕對力相比，如該項物體之本身相比.

系 2. 倘系統內各個物體均能以加速的力吸引其餘一切物體，此項力與距離之任何次方成反比或正比，而且可按照某種共同的定律由距離以決定之，則該項物體之絕對吸引力相比，猶如前者相比.

系 3. 設有一物體所成的系統，其力隨距離之平方而減小，其中小物體環繞一極大物體在儘可能接近橢圓的軌道內運動，此項軌道之共同焦點在大物體之中心點，而且由物體至大物體所作的方向半徑，其作成的面積很接近的與時間相比，則該項物體之絕對力相比，或則正確的或則很近似的如該項物體本身相比；反之亦然.

此可由 § 109 之系與本節之系 1 以知之.

§ 111. 附註. 由此項定理,我人乃得到了中心力與中心物體間之相似處(中心物體即爲中心力所傾向者). 與我們理性上所推知者一貫,該項傾向物體的力,與前者之性質大小有關,此在磁的方面亦然.此項事實既常遇到,故我們必須能估量物體之吸引力,其法在給予物體之各部分以力,然後求其總和.所謂吸引者,我此處用以廣泛的指物體間相互接近的企圖,不問此項企圖之出於物體本身抑或出於物體中間媒介物,例如以太,空氣或任何有體無體的媒介物之作用. 推擴這個用語的意義,其廣泛亦略同此,蓋在這書內,我並不想論力之物理的種類及屬性,我祇想研究及其數學的量及關係而已,此則我於說明內所已經弄清楚了的.

在數學內,我們研究力之量,以及在某種假定的狀況下之力的關係.倘進入物理學的範圍,則須將此項關係與現象相較,以知某種能吸引的力有某種狀況. 於是可論及力之種類以及其物理的原因與關係.

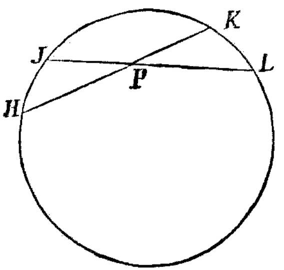
今試再一研究球形物體（此項物體係由上所述能引吸的部分所合成）間互相作用的力以及其所發生的運動是如何。

第十二章

論球形物體之吸引力

§ 112. 定理. 倘向一球面之各點作諸向心力，此項力與離點距離之平方相減小，則在球面內的小物體不會受此項力之作用而向某一方面被吸引.

今設 $HJKL$ 爲此球面，P 爲在其內的小物體. 試作 HK, JL 二線經過 P 至球面，其間函有 HJ, KL 二短弧. 按 § 7 系 3,



第一〇五圖

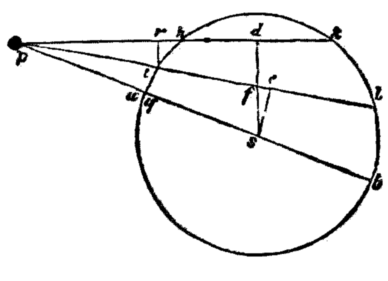
$$\triangle HPJ \sim \triangle KPL,$$

故該項弧與 HP, LP 相比，而 HJ, KL 處的任何球面部分，爲經過 P 的直線所界者，其相比

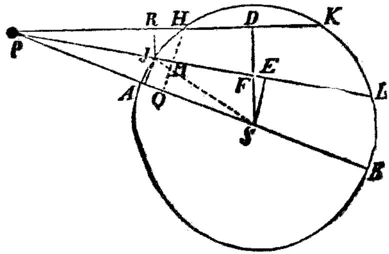
爲該項距離之平方相比.所以對於 P 生作用的該項球面部分之力,必均相等,因爲此項力與部分成正比,與其距離之平方成反比,而將此二比相結合時卽得一等比. 緣此, 向不同方向的相反吸引適相等,而互相抵消.

仿此, 可知全球面上一切吸引力均有相反相等者與之抵消,故物體 P 不會受此項吸引之作用而向某一方面被吸引.此即所欲證者.

§ 113. 定理. 在同樣的條件下,一在球面外的小物體能爲一力向球心被吸引, 此力與物體離球心距離之平方成反比.



第一〇六圖



第一〇七圖

今設 $AHKB$, $ahkb$ 爲二個相等的球面，其中心爲 S, s, 徑爲 AB, ab. 又設 P 與 p 爲二小物體，在球外直徑之引長上．試由物體出發作 PHK, PJL, phk, pil 諸線，與大圓 AHB, ahb 相交，得所函之弧爲

$$HK,\ hk,\ JL,\ il.$$

試作垂線

$$SD,\ sd,\ SE,\ se,\ JR,\ ir$$

垂於該項線上，此垂線中之首二者與 PL, pl 相交於 F, f. 又作垂線 JQ, iq 垂於直徑上。

因

$$\left.\begin{aligned} DS&=ds\\ ES&=es\end{aligned}\right\}(1),$$

而將成爲零的角 $DPE=dpe$, 故可設

$$\left.\begin{aligned} PE&=pe\\ PF&=pf\\ DF&=df \end{aligned}\right\}(2),$$

蓋 DPE 與 dpe 同時等於零時,此項線之最後比爲等比.既設此後,即有

$$PJ:PF=RJ:DF$$

$$pf:pi=df:ri$$

而因 $df=DF$, 故將此二比結合時,得

$$\begin{aligned} PJ\cdot pf:PF\cdot pi&=RJ:ri\\ &=\frown JH:\frown ih. \quad (3) \end{aligned}$$

又, $$PJ:PS=JQ:ES,$$

$$ps:pi=es:iq,$$

而 $es=ES$, 故可得

$$PJ\cdot ps:PS\cdot pi=JQ:iq \quad (4).$$

又將(3)與(4)結合時,即得

$$\begin{aligned} &PJ^2\cdot ps\cdot pf:pi^2\cdot PS\cdot PF\\ &=JQ\cdot JH:iq\cdot ih, \quad (5) \end{aligned}$$

於此，該比之最後二項，表圓形的面，此項面爲 JH, ih 二弧以 AB, ab 爲軸旋轉半圓 AKB, akb 時所作成者。

按所設，該項面沿向此的線以吸引 P, p 的力，與

此項面成正比，

物體離後者距離之平方成反比，

此即是說，如

$$pf\cdot ps : PF\cdot PS \qquad (6).$$

又此項力與支力(此項支力係按定律系 2 所析成，沿 PS, ps 線向中心者)相比，

如　$PJ : PQ$ 以及 $pi : pq$,

而因　$\triangle PJQ \sim \triangle PSF$,

如　$PS : PF$ 以及 $ps : pf$ (7).

所以 P 向 S 之吸引與 p 向 s 之吸引相比，

如
$$\frac{PF}{PS}\cdot pf\cdot ps : \frac{pf}{ps}\cdot PF\cdot PS$$
$$= ps^2 : PS^2 \qquad (8).$$

仿此可知 KL, kl 弧旋轉時所作成的面，其吸

引物體的力相比，如

$$ps^2 : PS^2.$$

一切圓形的面之力，其比均同此；經組合後，即知整個的球面所影響於小物體的力，其比亦同此。

§ 114. 定理． 倘向一球之各點作諸向心力，此項力與離點距離之平方相減小，同時，球之密度，以及球徑與小物體離球心之距離之比爲已知，則小物體被吸引的力，與球之半徑相比。

試設想二小物體，分別的爲二球所吸引，並假定離中心之距離各與直徑相比，球則析成爲各部分，均相似而且對於物體而言其所在處所相同．如是，其一物體對於一球各部分之吸引與其他物體對於其他球相當的各部分之吸引相比，如

部分之和之正，

距離之平方之反．

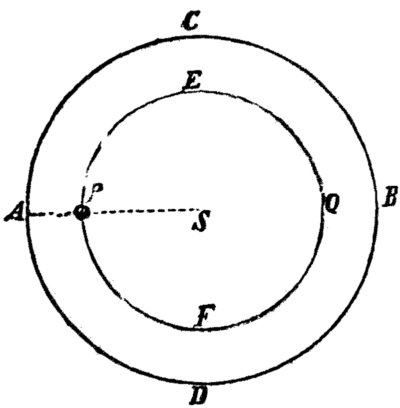
但部分之和與球相比，亦即與直徑之三次方相比，距離則與直徑相比，故力與直徑相比．

系 1. 倘物體繞球在圓內旋轉，球則由吸引相

等的物質所成，而且其距中心之距離與直徑相比，則諸環繞時間必均相等。

系 2. 反之，倘環繞時間均相等，則該項距離亦必與直徑相比。

系 3. 倘向二物體之各點作相等的向心力，此二物體爲任意的，但相似而且其密度亦相等，力則隨距點之距離平方而減小，則其吸引小物體（此項小物體對於該固定物體之位置相似）的力，其比如吸引物體之直徑。



第一〇八圖

§ 115. 定理. 倘向球之各點作相等的向心力，此項力隨距點之距離平方而減小，則在球內的小物體即被一力所吸引，此力與

物體離心之距離相比。

今設 $A\ BD$ 爲球，其心爲 S，在其內的物體爲 P，試設想仍以 S 爲心，作一內球 $PEQF$，其半徑爲 SP. 按 § 112 可知同心的球面不能對於 P 發生作用，因爲其吸引力相等相反故適相抵消。所以祇有內球 $PEQF$ 的吸引力餘下，而按 § 114 此則與距離 PS 相比。此即所欲證者。

§ 116. 附註。 此處所述構成固體的面，並不是純粹數學的，乃是極薄的片，其厚簡直等於零。此項等於零的片，其數目增至無窮，其厚亦減至無窮時，即可構成一球面，此種方法，開始時在補題內已說明過了。仿此，構成線，面，體的點。亦須視爲其量無限小的微粒。

§ 117. 定理。 在與前相同的假定下，一在球外的小物體能爲一力所吸引，此力與物體離心距離之平方成反比。

試設想將球分割成爲無數同心的球面，如是，則按 § 113，每面所影響於物體的吸引，與離中心

點距離之平方成反比．所以經組合後，其總和，亦即是整個的球之吸引，亦同此比．此即所欲證者．

系 1. 所以等質的球於等距離內所施之吸引，其比與球之比同．

蓋如該項距離與直徑相比，則按 §114，力之比與直徑之比同．今如將較大的距離按該項比例減小之，則吸引力即以其平方增加，所以與其他吸引相比，爲三次方的比，亦即是與球同比。

系 2. 在任意的距離內，吸引力與

球成正比，

離中心距離之平方成反比。

系 3. 倘一在等質球外的小物體被一力所吸引，此力與物體距中心距離之平方成反比，球本身亦由吸引的部分所成，則每一部分之力，均以其距離之平方爲比而減小。

§118. 定理． 倘向一球之各點作諸向心力，此項向心力均相等，且以距離之平方爲比而減小，則一其他相似的球即被一力所吸引，此力與二球中

心之距離之平方成反比.

蓋每一部分之引吸力,其比均如其(距吸引的球之中心的)距離平方之反,所以其作用,猶之此力出於該球心處之物體者然.此力之大小恰如該物體自身被其他球吸引時所當受者然,因而後者亦與距離之平方成反比.所以與之相等的力亦為同比.此即所欲證者.

系 1. 球對於其他球所施之吸引,與

吸引的球成正比,

二球中心間距離之平方成反比.

系 2. 倘被吸引的球亦能吸引,其關係仍如此.

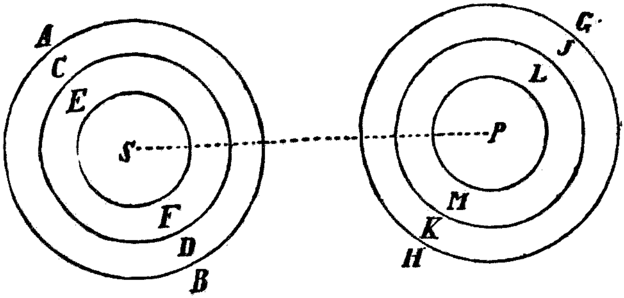
蓋後者各點所施於前者各點之吸引,其力等於後者自身被吸引時所受之力.按定律 3 在每個吸引方面吸引者與被吸引者均被推動,故交互吸引的力即加倍,而其比則仍不變.

系 3. 倘吸引的力在焦點,物體在球之外運動,則以前所證明的一切關於物體繞圓錐曲線焦點而運動的定理,於此均仍適用.

系 4. 但如物體在球內運動，則祇有關於繞圓錐曲線中心而運動的一切纔能保存其適用.

§ 119. 定理. 倘有若干球體，其由中心至面的方向內爲任意不相似者，但在與心之同距離內則均相似，其每一點之吸引力隨其離被吸引物體的距離之平方而減小. 如是則此項球吸引一其他此種球的全力，與兩球中心距離之平方成反比.

今設 AB, CD, EF 等爲若干同心球，其中在裏面的一個爲向心較密的物質，或反之，倘將其取去後，即餘下較疏的物質在內. 按 § 118, 此中每個球，均對於其他相似的同心球 GH, JK, LM 等以某種力吸引之，此項力與距離 SP 成反比. 經組合或分割後可知一切該項力之總和或其一與其他之差均爲此同比. 今將同心球之數增加至於無限，使物質之密度與吸引力同時（在由面至中心的方向內）按照某種定律增加或減小. 其密度不足之度，可用不能吸引的物質補充之，使球之形狀能如我們所欲者. 如是則其一吸引其他的力亦即與距



第一〇九圖

離之平方成反比.此即所欲證者.

系 1. 倘有若干同類的球互相吸引，則每個球對於其他球在相等的距離內所施之吸引，其比如吸引的球相比.

系 2. 在不等的距離內，其相比如

吸引的球之正，

距離的平方之反.

系 3. 但各球對於其他球之重量或其運動的吸引,在相等的距離內,其相比如吸引者與被吸引者之合,即是,如其乘積.

系 4. 在不等的距離內,其比如

該項乘積之正,

其中心距離之平方之反.

系 5. 倘吸引是由二球之吸引的交互生作用的力所成,此項定理仍適用.

蓋由於二力,吸引即增加一倍,其比則仍不變.

系 6. 倘有若干此類的球環繞其他靜止的旋轉,其中每個環繞其他一個,而且旋轉的與靜止的球之中心距離與後者之直徑相比,則其環繞時間均相等.

系 7. 反之,倘環繞時間相等,則其距離與直徑相比.

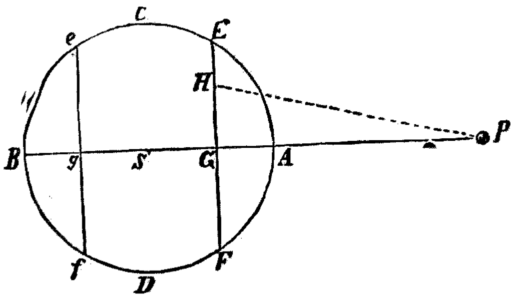
系 8. 以前關於物體繞圓錐曲線之焦點而運動的一切,此處仍適用,祇須吸引的球(其形式及狀況如上所述)在此焦點便行.

系 9. 倘運動的球,自身爲上述屬性的球,能吸引者,此亦均適用.

§ 120. 定理. 倘向球之各點作向心力,此項力與點離被吸引的物體之距離相比,則二球相互吸

引的力之合，與二球中心距離相比．

第一事．今設 $ACBD$ 爲一球，其中心點爲 S, P 爲被吸引的小物體，$PASB$ 爲經過小物體之中心的球軸．又設 EF 與 ef 爲二平面，與球相割，其離球心之距離亦等，且與上所述的球軸相



第一一〇圖

垂直．g, G 爲此二平面與球軸之相交點，H 爲 EF 平面內之任何點．

H 點對於 P 沿 PH 線所施之向心力，與 PH 距離相比，而按定律之系 2, 沿 PG 線傾向中心 S 的力，亦與 PG 線相比．所以 EF 平面內一切點(亦即是全平面)使物體傾向 S 的力，與該項點之數相比，並與 PG 距離相比，亦即是與 EF 平

面本身乘 PG 距離之積相比。仿此，ef 平面使物體 P 向中心 S 的力，亦與 ef 平面乘 Pg 距離之積相比，而因

$$ef = EF,$$

亦即是與 $EF \cdot Pg$

相比。由此可知二平面合起來使物體 P 傾向中心 S 的力與

$$EF(PG+Pg) = 2 \cdot EF \cdot PS$$

相比。

用同法，可知球內兩旁距心等遠的一切平面之力，與一切平面之和乘 PS 距離之積相比，

亦即是說，與球乘 PS 距離之積相比。

此即所欲證者。

第二事． 倘物體 P 亦吸引 $ABCD$ 球，則亦可知球被吸引的力亦與 PS 距離相比。

此亦即所欲證者。

第三事． 試設想有一第二球，爲無數小物體 P 所成。因每一物體被吸引的力，與其距吸引的球

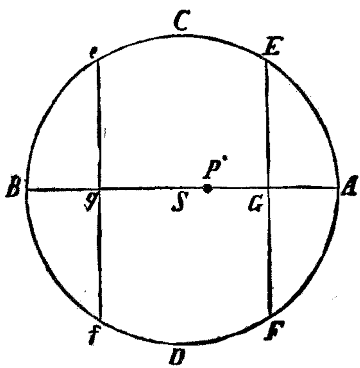
之心之距離乘其本身之積相比，因而此力之作用猶如由球心之單一物體所出發者然，所以第二球被吸引的全力，一若由第一球中心之小物體所出發者然.故此力與二球之中心距離相比.

此即所欲證者.

第四事.　倘二球互相吸引,則其倍大的力之比仍如前不變.

此即所欲證者.

第五事.



第一一一圖

今設物體 P 在 $ACBD$ 球之內部.如是則 ef 吸引物體的力與

$$ef \cdot PG$$

相比;而 EF 之相反力,與

$$EF \cdot PG$$

相比　.此二者相合而得的力，即與二乘積之差相

比,亦即是與

$$\pm[EF\cdot PG-ef\cdot Pg]$$
$$=\pm EF[PG-Pg] \quad (因\ EF=ef)$$
$$=\pm 2EF\cdot PS$$
$$=\pm(EF+ef)\cdot PS\ 相比、$$

由此可知全球之吸引與球乘 PS 距離之積相比。

此亦即所欲證者。

第六事。 試設想有一第二球,為無數小物體 P 所成,在 $ACBD$ 之內,則如前所證明者,可知一球所施於他球之單純引吸,以及兩球互相影響之雙倍吸引,均與距離 PS 相比。

此亦即所欲證者。

<u>§121. 定理</u>。 設有二球,在中心至面的方向內不相似且不相等,但在距心相等之處均相似,其每點之吸引力則與其離被吸引的物體之距離相比。如是,此類的二球之互相吸引力,與其中心之距離相比。

此定理之證可由 § 120 得之,一如前節之證可得自 § 118 一樣。

系. §§ 27 及 105 內所證明關於物體繞圓錐曲線之中心而運動的一切,於此亦均適用,祇須一切吸引均由上所述的球形物體之力所產生者而且被距離的物體亦如是便可.

§ 122. 附註. 兩種吸引力之特殊狀況,已詳細說明了,此即是:向心力隨距離之平方而減小,以及向心力隨距離而增加.在兩種狀況下,向心力均能使二物體在圓錐曲線內運動,並將球形力之向心力組合,此項力亦按照相同的定律在向心的方向內增加及減小.此爲可注意者.

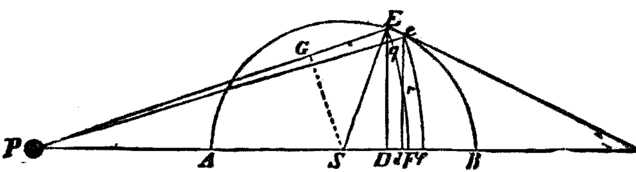
其餘諸事項不能有若何可觀的推論,故爲避繁冗計,不須詳論了.以下我僅用一廣泛的方法將其總括的一論之.

§ 123. 定理. 以 S 爲中心作一圓 AEB, 並以 P 爲心作圓弧 EF, ef, 與以上之圓相交於 E, e, 與 PS 線相交於 F, f. 再作垂線 ED, ed 垂於 PS

上,則將 EF 與 ef 之距離減至無限小後,將成爲零的線 Dd 與將成爲零的線 Ff 之最後比,即等於 $PE:PS$.

Pe 線與 EF 弧相交於 q, 我們並設想將 Ee 線(此線與將成爲零的弧 Ee 相合)引長,使其與 PS 相交於 T. 再由 S 作 SG 垂於 PE 上,則

$$\triangle EDT \sim \triangle edT \sim \triangle EDS,$$



第一一二圖

因而 $$Dd:Ee=DT:ET=DE:ES \quad (1).$$

按 §8 及 §7, 系 3, 有

$$\triangle Eqe \sim \triangle ESG,$$

故 $$Ee:eq=ES:GS \quad (2),$$

而因 $eq=Ff$, 故將此二比相結合時,即得

$$Dd:Ff=DE:GS \quad (3),$$

又因　　$\triangle PDE \sim \triangle PGS$,

並有　　$Dd:Ff = PE:PS$　(4).

此即所欲證者.

§ 124. 定理. 將成爲零的面 $EFfe$ (參觀前節之圖)以 PS 爲軸旋轉時產生一凹凸的球;今向其各部分作相等的向心力.如是,此球對於 P 處小物體之吸引力,其比爲

$$DE^2 \cdot Ff$$

與一其他力所合成,此力即爲 Ff 上一部分吸引該物體之力.

試先研究球面 EF 之力(此球面係由弧 EF 旋轉時所產生者), EF 弧則爲 de 線於 r 點相割.如是, rE 弧旋轉時所產生的面之一部分即與 Dd 線相比,祇須 PE 半徑不變.(此爲亞儿默德 Archimedes於其研究球及圓柱體之著作內所證明者).

沿 PE 或 Pr 線生作用的力,其比與 rE 所產生的面之部分同,即是說,與 Dd 之比同,亦即

是與 PE 乘 Dd 之比同.沿 PS 線向中心 S 生作用的力則與

$$PE\cdot Dd\cdot\frac{PD}{PE}=PD\cdot Dd$$

相比.

試設想將 DF 線分割成爲無數小段,其每段均以 Dd 名之.如是,則 EF 面亦即分割成爲等多的圈,其力與一切 $PD\cdot Dd$ 之和相比.因一切 Dd 均相等,故可視爲已知者;所以該力與一切 PD 之和乘 Dd 相比,即是,與

$$\tfrac{1}{2}(FP^2-PD^2)=\tfrac{1}{2}(PE^2-PD^2)$$
$$=\tfrac{1}{2}DE^2,$$

或簡單的與

$$DE^2$$

相比.

今將 EF 面與 Ff 相乘,則 $EFfe$ 物體所施於 P 的吸引力,與

$$DE^2\cdot Ff$$

及一其他力之組合相比,而此其他力倘爲已知者,

即係 Ff 上一部分所施於 P 的吸引力．倘非已知，則第一吸引力與 $DE^2\cdot Ff$ 乘此未知力之積相比．

此即所欲證者．

§ 125. 定理． 以 S 爲中心作一球 AEB，向其各相等的部分作相等的向心力．在球之軸 AB 上有一小物體 P，今於其上取諸點 D 作垂線 DE，與球面相交於 E；於此項垂線上並取 DN 長，其比與

$$\frac{DE^2\cdot PS}{PE}$$

及一其他力之組合同，此力爲 PE 距離內軸上球之部分所施於 P 的力．如是則 P 被球所吸引的全力與一面相比，此面爲 AB 軸及 ANB 曲線所圍．

今用與前二節內之相同的作法，設想將 AB 軸分割成爲無數相等的段 Dd，同時，整個的球亦被分割成爲等多的凹凸層 $EFfe$，並作 DN，dn 垂線．按 § 124，$EFfe$ 層吸引小物體 P 的力，其比如 $DE^2\cdot Ff$

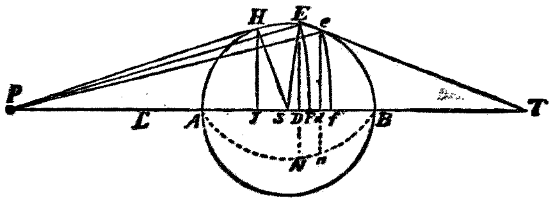
及一其他力之組合，此其他力爲 PE 或 PF 距離內一部分所施者．按 § 123, 有

$$Dd:Ff=PE:PS,$$

故
$$Ff=\frac{PS\cdot Dd}{PE},$$

而
$$DE^2\cdot Ff=Dd\cdot\frac{DE^2\cdot PS}{PE}.$$

從可知 $EFfe$ 層之力其比如



第一一三圖

$$Dd\cdot\frac{DE^2\cdot PS}{PE}$$

及一其他力之組合，此其他力即爲一部分於 PF 距離內所施者．

按所設 DN 與

$$\frac{DE^2\cdot PS}{PE}$$

相比，故前一力之比如

$$Dd \cdot DN,$$

即此是說，如將成爲零的面 $DNnd$.

所以由一切層所施於 P 的力，與全面 $ABNA$ 相比。

此即所欲證者.

系 1. 倘向各部分的向心力不問距離之如何均相等，而且 DN 與

$$\frac{DE^2 \cdot PS}{PE}$$

相比，則小物體被球所吸引的力，其比如 $ABNA$ 面.

系 2. 倘各部分之向心力，與其距被吸引的物體之距離成反比，而且 DN 與

$$\frac{DE^2 \cdot PS}{PE^2}$$

相比，則球吸引物體 P 的全力，其比如 $ABNA$ 面.

系 3. 倘各部分之向心力與距離之三方相比，而且 DN 與

$$\frac{DE^2 \cdot PS}{PE^4}$$

相比，則全球之力與 $ABNA$ 面相比。

系 4. 倘由各部分所施於物體之向心力與 V 成反比，而且 DN 與

$$\frac{DE^2\cdot PS}{PE\cdot V}$$

相比，則物體被球所吸引的全力，其比如 $ABNA$ 面。

§ 126. 問題。 在以前所假定的狀況下，試求 $ABNA$ 之面積。

今由 P 作切線 PH 至球，由 H 作垂線 HJ 垂於 AB 軸上。於是於 L 平分 PJ 線，則有

$$PE^2=PS^2+SE^2+2PS\cdot SD \quad (1).$$

因 $$\triangle SPH\sim\triangle SHJ,$$

故 $$SE^2=SH^2=PS\cdot JS \quad (2),$$

因而 $$\begin{aligned}PE^2&=PS^2+PS\cdot JS+2PS\cdot SD\\&=PS[PS+JS+2SD]\\&=PS[PL+LJ+JS+JS+2SD].\end{aligned}$$

又因 $PL=JL,\ PL+JS=LJ+JS=LS,$

故 $$PE^2=PS[2\cdot LS+2SD],$$

即 $$PE^2=PS\cdot 2LD \quad (3).$$

又，

$$DE^2=SE^2-SD^2$$

$$=SE^2-LD^2+2LD\cdot LS-LS^2,$$

而 $$LS^2-SE^2=LS^2-SB^2=LB\cdot LA,$$

故 $$DE^2=2LD\cdot LS-LD^2-LB\cdot LA \quad (4).$$

從可知

$$\frac{DE^2\cdot PS}{PE\cdot V}=\frac{2LD\cdot LS\cdot PS}{PE\cdot V}-\frac{LD^2\cdot PS}{PE\cdot V}-\frac{LA\cdot LB\cdot PS}{PE\cdot V}.$$

試以向心力之反比代替 V，又以 PS 與 $2LD$ 之中比代 PE，則以上之三部分即轉成爲等多的曲線之縱坐標，而此項曲線之面積即可按常法求之。

<u>第一例</u>. 倘向球各部分的向心力，其比如距離之反，則可設

$$V=PE,\ PE^2=2PS\cdot LD,$$

於是 DN 與

$$\frac{2LD\cdot LS\cdot PS}{2PS\cdot LD}-\frac{LD^2\cdot PS}{2PS\cdot LD}-\frac{LB\cdot LA\cdot PS}{2PS\cdot LD}$$

$$=LS-\tfrac{1}{2}LD-\frac{LA\cdot LB}{2AD}$$

相比。

今設 DN 與此式之二倍相等，即

$$DN=2LS-LD-\frac{LA\cdot LB}{LD},$$

則 $2LS$ 經過 AB 長而作成

$2LS\cdot AB$ 長方形。

其餘不定的部分 LD 則在連續的經過 AB 時作成一面

$$LS\cdot AB=\frac{LB^2-LA^2}{2}.$$

將此由以前所得的 $2LS\cdot AB$ 減去後，尙餘

$LS\cdot AB$.

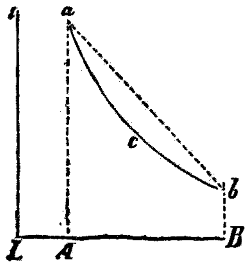
第三部分 $\frac{AL\cdot LB}{LD}$ 經過 AB 時，作成一雙曲線的面，將其自 $LS\cdot AB$ 減去後，即可得 $ABNA$ 之面積。

所以問題之作法如下．於 L, A, B 點作垂線

$$Ll,$$

$$Aa=LB,$$

$$Bb=LA,$$



第一一四圖

並以 Ll, LB 爲漸近線作雙曲線經過 a, b, 並引弦線 a, b, 如是則

$$acba\text{ 面}=ABNA.$$

<u>第二例</u>． 倘向各部分的向心力與距離之三方成反比，或即是，與

此項三方成反比，

一不變的面成正比，

則可設
$$V=\frac{PE^3}{2\cdot AS^2},$$

$$PE^2=2PS\cdot LD.$$

如是則 DN 與

$$\frac{2LS\cdot LD\cdot PS}{PE\cdot\frac{PE^3}{2AS^2}}-\frac{LD^2\cdot PS}{PE\cdot\frac{PE^3}{2AS^2}}-\frac{LA\cdot LB\cdot PS}{PE\cdot\frac{PE^3}{2AS^2}}$$

$$=\frac{LS\cdot AS^2}{PS\cdot LD}-\frac{AS^2}{2PS}-\frac{LA\cdot LB\cdot AS^2}{2PS\cdot LD^2}$$

相比，或因

$$PS:AS=AS:SJ,\ \frac{AS^2}{PS}=SJ,$$

與
$$\frac{LS\cdot SJ}{LD}-\tfrac{1}{2}JS-\frac{LA\cdot LB\cdot SJ}{2LD^2}$$

相比。

此三部分經過 AB 長時，其第一部分產生一雙曲線形的面，其第二部分產生一長方形

$$\tfrac{1}{2}AB\cdot JS,$$

其第三部分則產生一面

$$\frac{AL\cdot LB\cdot JS}{2LA}-\frac{AL\cdot LB\cdot JS}{2LB}$$

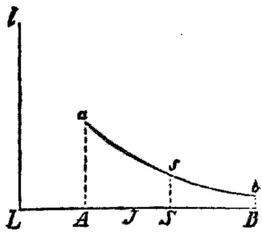
$$=\tfrac{1}{2}(LB-LA)JS=\tfrac{1}{2}AB\cdot JS.$$

後二者之和爲

$$AB\cdot JS=2AS\cdot JS,$$

今將其自第一面減去之，則所餘者即爲 $ABNA$ 之面積。

由此即可得問題之作法如下。



第一一五圖

於 L, A, S, B 諸點作垂線 $Ll, Aa, Ss=JS, Bb$, 以 Ll, LB 爲漸近線經過 S 作雙曲線 asb, 與 Aa, Bb 相交於 a, b. 今由雙曲線形的面 $AasbB$ 減去長方形 $2AS\cdot JS$, 則所餘者即爲 $ABNA$ 之面積.

<u>第三例</u>.　倘向球之各部分的向心力與距離之四次方成反比,則可設

$$V=\frac{PE^4}{2AS^3}.$$

而　$$PE=\sqrt{2PS\cdot LD},$$

於是 DN 即與

$$\frac{LS\cdot JS^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}\cdot LD^{\frac{3}{2}}}-\frac{JS^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2}\cdot LD^{\frac{1}{2}}}-\frac{LA\cdot LB\cdot JS^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2}\cdot LD^{\frac{5}{2}}}$$

相比.仍將此三部分各經過 AB 時,則得以下之三面:

$$\frac{\sqrt{2}\cdot LS\cdot JS^{\frac{3}{2}}}{LA^{\frac{1}{2}}}-\frac{\sqrt{2}\cdot LS\cdot JS^{\frac{3}{2}}}{LB^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{LB^{\frac{1}{2}}\cdot JS^{\frac{3}{2}}-LA^{\frac{1}{2}}\cdot JS^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{LA\cdot LB\cdot JS^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2}LA^{\frac{3}{2}}}-\frac{LA\cdot LB\cdot JS^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2}LB^{\frac{3}{2}}}.$$

將後二者由前一式減去後，即得

$$\frac{4\cdot SJ^3}{3\cdot LJ}.$$

從可知物體 P 傾向中心被吸引的力，因

$$LJ=\tfrac{1}{2}PJ,$$

與
$$\frac{SJ^3}{PJ}$$

相比，或因

$$SJ=\frac{AS^2}{PS},\ 即\ \frac{SJ^3}{PJ}=\frac{AS^6}{PS^3\cdot PJ}$$

$(AS$ 爲常數)，

故與　　$PS^3\cdot PJ$ 成反比。

用同樣的方法，可求得一在球內的物體之吸引。用以下之定理尤爲簡單。

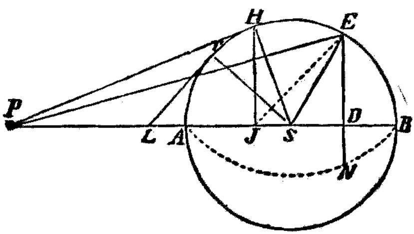
§ 127. 定理. 試取連續的相比的諸線

$$SJ,\ SA,\ SP$$

(用前節之圖)，則在球之內部 I 點的物體，其所受的吸引與 P 點者相比，如

JS 與 PS 之平方根以及 P 點與 J 點之向心力之平方根.

倘球各部分之向心力與其距所吸引的物體之距離平方成反比，則物體在 J 點被球吸引的力，與



第一一六圖

其在 P 點被吸引的力相比，如

$$\sqrt{JS} : \sqrt{PS},$$

以及如

$$\frac{1}{\sqrt{JS}} : \frac{1}{\sqrt{PS}}$$

此二比之合爲

$$1:1,$$

故由全球出發施於 J, P 的吸引爲相等的。

倘球各部分之力相比，如距離之平方之反，則用相似的方法，可知 J 點的吸引與 P 點者相比，如

$$SP:SA.$$

倘該項力與距離之三方相比，則 J, P 點之吸引，其相互的比爲

$$SP^2:SA^2.$$

倘該項力與距離之四次方相比，則其比爲

$$SP^3:SA^3.$$

在此最後的事項內，P 點之吸引與 $SP^3\cdot PJ$ 成反比，即是，與

$$\frac{1}{SP^3\cdot PJ}$$

成正比。

因此，J 點的吸引與

$$\frac{SP^3}{SA^3}\cdot\frac{1}{SP^3\cdot PJ}=\frac{1}{SA^3\cdot PJ}$$

相比，而因 SA^3 爲常數，即與 PJ 成反比．用相似的方法，可推至於無限。

此定理可如下證之。

今如在以前的作法下，物體在任何點 P；如是則 DN 縱坐標與

$$\frac{DE^2 \cdot PS}{PE \cdot V} \quad (1)$$

相比。

今試作 JE 線，則對於與 J 點相當的縱坐標，有以下之比：

$$\frac{DE^2 \cdot PS}{JE \cdot V} \quad (2).$$

但如假定，由任意點 E 所發生的向心力，在 JE, PE 的距離內相比時，如

$$PE^n : JE^n,$$

則該項縱坐標即與

$$\frac{DE^2 \cdot PS}{PE \cdot PE^n} \text{ 及 } \frac{DE^2 \cdot JS}{JE \cdot JE^n}$$

相比．所以此二縱坐標相比，如

$$PS \cdot JE \cdot JE^n : JS \cdot PE \cdot PE^n. \quad (3)$$

但　$\triangle SPE \sim \triangle SEJ$,

故　$JE : PE = JS : SE = JS : SA$,

而　$PE \cdot JS = JE \cdot SA \quad (4)$

今將 $PE \cdot JS$ 之值代入(3)內，即得

$$PS \cdot JE^n : SA : PE^n \quad (5).$$

但　$PS : SA = \sqrt{PS} : \sqrt{SJ}$,

而　$JE^n : PE^n$

爲 PS, JS 距離內力之半比，所以縱坐標，其所作的面積以及與此相比的吸引，其相比如

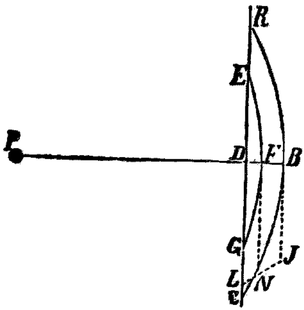
$$\sqrt{PS} \cdot JS^{\frac{n}{2}} : \sqrt{JS} \cdot PS^{\frac{n}{2}}$$

$$= \sqrt{PS} \cdot \frac{1}{PS^{\frac{n}{2}}} : \sqrt{JS} \cdot \frac{1}{JS^{\frac{n}{2}}}.$$

此卽所欲證者。

§ 128. 問題. 試求一力，能使在球心處之小物體被吸引而向球之一弓形.

今設 P 爲球心之物體，$RBSD$ 爲球之弓形，其界爲 RDS 平面及球面 RBS. 今以 P 爲心再作



第一一七圖

一球面 EFG, 交 DB 於 F 並將原來的弓形分割成爲 $BREFGS$, $FEDG$ 二部分，此球面非爲純粹數學的，而爲物理的，但甚薄，其厚可以 0 表之。如是，則按亞几默德所證明者。此面與

$$PF \cdot DF \cdot 0$$

相比。

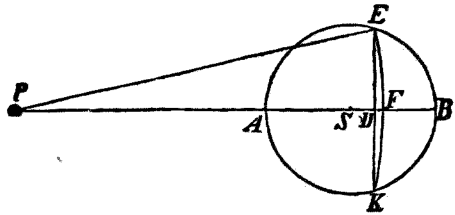
今如假定球各部分之吸引力，與距離之 n 次方成反比，則 GFE 面吸引物體 P 的力，按 §125 與

$$\frac{DE^2 \cdot 0}{PF^n} = \frac{2DF \cdot 0}{PF^{n-1}} - \frac{DF^2 \cdot 0}{PF^n}.$$

相比.

今如垂線 FN 乘 0 之積與此值相比，則 FN 連續的運動經過 DB 時所作的面 $BDLJB$, 其比如 $RBSR$ 弓形吸引 P 的力.

§ 129. 問題. 試求一力，能使一小物體被球之一弓形所吸引者；此小物體在中心點之外，並在球軸上，弓形之位置，亦屬於此軸.



第一一八圖

在 ADB 軸上的物體 P, 能為弓形 EBK 所吸引.今以 P 為中心以 PE 為半徑，作球面 EFK 將弓形分成為 $EBKFE$, $EFKE$ 二部分.與第一部分相當的力可按 § 126 求之，與第二部分相當者則可按 § 128 求之，其和即為全部分 $EBKE$ 之力.

§ 130. 附註. 我們既將球形物體之吸引敘述過後，即可進而研究某項其他物體之吸引定律，此項物體係由相似的吸引的部分所成. 但按本書之計劃，實在不能專研究這些問題.所以我們祇能略

一論及此項物體方面的力之一般的定律，以及由此所發生的運動，因爲這些在物理學上都須應用.

第十三章

論非球形物體之吸引力

§ 131. 定理. 倘一物體與其他一吸引的物體相接觸時，其被吸引較之二者間有極小的距離時遠為大，則吸引物體之力，當被吸引物體離開時，其減小之比，大於距離之平方.

蓋如此項力以距離之平方減小，則其對於球形物體之吸引不會因接觸而有顯然的增加，因此項吸引係與離球心距離之平方成反比者. 倘吸引之減小，其比小於距離之平方，則更不會有增加的現象發生. 所以在吸引的球體方面，此定理之無誤，可以瞭然.

在凹形的球層方面，倘球層吸引在其外的物體，其理亦同此. 如球層吸引在其內的物體，其理更明，因為球層各部分所施之吸引為其他部分之

相反吸引所抵消,故在接觸時反而成爲零.

今於此項球及球層方面，在其與接觸點相距離之處，任意取去其若干部分并任意補上一些新部分,則此項吸引物體之形狀可任意改變,但被取去或新增加的部分,因其與接觸點相距離,不會顯然的增加接觸時之吸引.

所以此定理於任何形式之物體均瞭然可見．此即所欲證者.

§132. 定理． 設有一吸引的物體,爲各部分所合成，其各部之力，在被吸引的物體距離較遠時，以距離之三次方或多次方爲比而減小，則當吸引者與被吸引者相接觸時，其吸引遠較之二物體間有一些距離時爲大.

當被吸引的物體向吸引的球接近時，吸引可放大至於無限,此則可由 § 126 第二第三例知之.將此項例與 § 127 相比較時，即可知在物體對於凹凸層的吸引方面,此理亦易證明;不問物體在灣處之內或外均無關係.

今如於此項球或層之距離接觸點處，任意取去或加上若干物質，則此項球或層可成爲任意的形式．如是，此定理在一切物體方面均可適用．此即所欲證者．

§133. 定理． 今有二物體，由同樣吸引的物質所成而且相似，此二物體各自吸引若干小物體，而此項小物體則與其自身相比，其位置亦相似．如是則小物體之加速的吸引，其比如前者對於後者各部之加速的吸引．

試設想將此項物體割成爲部分，與其全體相比，而且其位置相似．如是則對於第一物體各部分之吸引與對於第二物體之相當者相比，如對於第一物體任何一部分之吸引與對於第二物體之相當者相比．經組合後，對於整個的第一物體之吸引與對於整個的第二者相比亦同此比．此即所欲證者．

系 1. 倘將被吸引的小物體之距離放大，而各部分之吸引力以距離之某次方減小，則對於全物體之加速的吸引，其比如

後者之正，

距離之該次方之反.

今如各部分之力以距離之平方爲比減小，而物體相比則如

$$A^3 : A^3,$$

即，與之相等的立方體之邊以及被吸引的小物體與吸引者之距離均如

$$A : B,$$

則對於物體之加速的吸引，其比如

$$\frac{A^3}{A^2} : \frac{B^3}{B^2} = A : B.$$

倘各部分之力以距離之三次方減小，則對於全物體之加速的吸引，其比如

$$\frac{A^3}{A^3} : \frac{B^3}{B^3},$$

即是說，爲相等者.

倘前者以距離之四次方減小，則後者之比，如

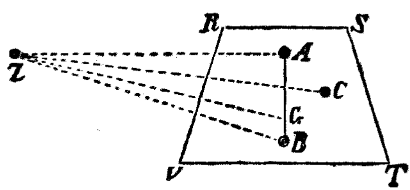
$$\frac{A^3}{A^4} : \frac{B^3}{B^4} = \frac{1}{A} : \frac{1}{B},$$

此即是說，如立方體邊之反．餘不再贅．

系 2. 所以，由相似物體之吸引其他（對之亦相似的）小物體的力，可以推知一種比例，此項比例，在被吸引的物體移開時，爲各吸引部分之力隨之減小的比．至力之減小，須以距離之某次方爲正或反的比．

§ 134. 定理． 倘一任何物體之相等的部分，其吸引力之比如此項部分方面被吸引的點之距離，則全物體之力係傾向其重心，而且與一力相等，此力爲一中心點在物體之重心而由相似相等的物質所成的球所當有者．

A 與 B 爲物體 $RSTV$ 上之二部分，Z 爲一任意的小物體，被其所吸引，其力之比在



第一一九圖

$$A=B$$

時爲 $$AZ:BZ,\quad (1)$$

在 $$A \gtrless B$$

時,爲 $$A\cdot AZ:B\cdot BZ.\quad (2)$$

所以此二力均可以 $A\cdot AZ$, $B\cdot BZ$ 表之.今作 AB 線,幷於 G 分割之,使

$$AG:BG=B:A,\quad (3)$$

則 G 即爲 A, B 之共同重心。

$A\cdot AZ$ 一力可析之爲

$$A\cdot GZ \text{ 與 } A\cdot AG$$

二支力，$B\cdot BZ$ 可析成爲

$$B\cdot GZ \text{ 與 } B\cdot BG.$$

按(3)有

$$A\cdot AG=B\cdot BG,$$

而因此二力之方向適相反,故即相抵消,而祇餘下

$$A\cdot GZ \text{ 及 } B\cdot GZ$$

二力.此二力係由 Z 向 G 者,相合時得

$$(A+B)\cdot GZ,$$

此即是說,猶如 A 與 B 二部分合在其共同重心點 G 而在該處構成一球一般。

用同法加入一第三部分 C 并將其力與向 G 的力

$$(A+B)\cdot GZ$$

相加,則所得的合力,其方向係向 G 及 C 之共同重心,亦即是向

$$A,\ B \text{ 與 } C \text{ 三部分}$$

之共同重心,而此則猶如該三部分合在其共同重心而於此構成一較大的球一般。用此方法可推至於無限.所以該任意物體一切部分之全力,與保存其原來重心而成為球形後無異。

系. 由此可知倘吸引的物體 $RSTV$ 成為一球形時,被吸引的物體之運動狀況亦是如此.所以倘吸引者靜止着或以直線作等速運動,則被吸引者即在一橢圓內運動,此橢圓之中心在吸引者之重心點。

§ 135. 定理. 倘有若干物體為相等的部分所

成,其各部分之力與其距被吸引點之距離相比,則由一切此項部分所合成之力,能吸引任意物體者,係向着此項部分之共同重心,而且其作用與各部分保持其共同重心而合成爲一球時一般.

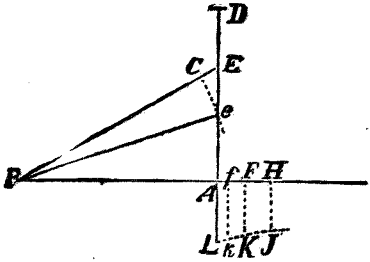
此定理可仿前節之法證之.

系. 所以被吸引的物體之運動狀況,一如該吸引者保持其共同重心而成爲一球形無異. 倘此重心靜止着或以直線作等速運動,則被吸引的物體在橢圓內運動,此橢圓之中心在吸引的物體之共同重心點.

§ 136. 問題. 向圓之各點作諸相等的向心力,此項力以距離之某次方增加或減小.今欲求一力,能使一小物體恆在一直線上被吸引,此直線係與圓之平面相垂直而且經過其中心點.

今設想以 A 爲中心點,AD 爲半徑作一圓,其平面與 AP 相垂直.所欲求者是一力,能使物體 P 向之被吸引者.

今由圓上任何一點 E 向被吸引的物體 P 作



第一二〇圖

PE 線，並於 PA 上取

$$PF=PE,$$

於 F 點作垂線 FK，與 E 點吸引 P 之力相比。又設 JKL 爲一曲線，K 點恆在其內，與圓之平面則相交於 L. 再取

$$PH=PD,$$

幷作 HJ 垂線，與上述的曲線相交於 J，則小物體 P 向圓之吸引，即與 $AHJL$ 面相比。

今於 AE 上取極短的線 Ee，作 Pe 幷於 AP 上作

$$Pf=Pe=PC.$$

按所設，E 點吸引物體 P 的力與 FK 線

相比，故該點吸引 P 使其向 A 的力與

$$\frac{AP}{PE}\cdot FK$$

相比，而諸 E 點所成的圓圈，其吸引 P 之力，與

$$\text{圓圈及 } \frac{AP}{PE}\cdot FK$$

之合相比。

但此圓圈係與一長方形相比，此長方形之邊為 AE 及 Ee，而因

$$PE:AE=Ee:CE,$$

故此長方形

$$=PE\cdot CE=PE\cdot fF.$$

所以該圓圈吸引物體 P 使其向 A 的力，與

$$PE\cdot fF\cdot\frac{AP}{PE}\cdot EK$$

$$=fF\cdot AP\cdot FK$$

相比，亦即是與 $FKkf$ 面乘 AP 之積相比，而此項一切圓圈吸引 P 使其向 A 的力與全面 $AHJKL$ 乘 AP 之積相比．此即所欲求者。

系 1. 倘力以距離之平方減小，即是，FK 與 $\frac{1}{PF^2}$ 相比，$AHJKL$ 面與

$$\frac{1}{PA}-\frac{1}{PH}$$

相比,則 P 向圓之吸引與

$$1-\frac{AP}{PH}=\frac{AH}{PH}$$

相比。

系 2. 倘 D 距離內點之力與該距離之某次方成反比,即是，FK 與 $\frac{1}{D^n}$ 相比，$AHJKL$ 與

$$\frac{1}{AP^{n-1}}-\frac{1}{PH^{n-1}}$$

相比,則 P 向圓的吸引力與

$$\frac{1}{AP^{n-2}}-\frac{AP}{PH^{n-1}}$$

相比。

系 3. 倘將圓之徑放大至於無限,而

$$n>1,$$

則 P 向此無限平面之吸引如

$$AP^{n-2}$$

之反；因為在這裏，

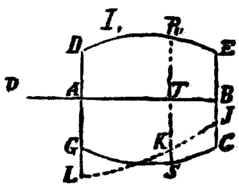
$$\frac{PA}{PH^{n-1}}$$

成為零了。

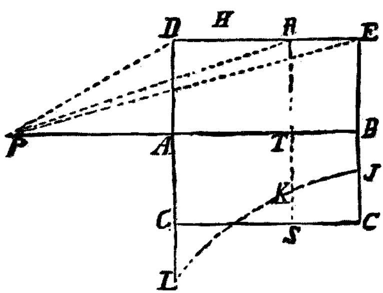
§ 137. 問題。　一固着的圓物體之軸上有一小物體，今欲求此小物體由此物體所受之吸引；向該物體之各點則作有向心力，以距離之某種比減小。

今設 $DECG$ 為固着的物體 (*Fig I*)，AB 為其軸，P 為一小物體在其上，向固着的物體被吸引。又設 RTS

(1)



(2)



第一二一圖

爲一任意的圓與此軸垂直，將該物體分割成爲二部，今於 TS 上取 TK 長，須在 $PALJB$ 平面內；此長與使 P 向圓被吸引的力相比．但 K 點在 LKJ 曲線上，此曲線則與最在外的圓 DG, EC 之平面相交於 L,J．如是則 P 向固定物體之吸引與 $LABJ$ 面相比．

系 1. 倘固定的物體爲一圓柱，由旋轉 $ADEB$ 平行方形（以 AB 爲軸，見 *Fig II*）所成，而向其各點的向心力與距離之平方成反比，則 P 向此圓柱之吸引，其比如

$$BA-PE+PD.$$

蓋 TK 與

$$1-\frac{PT}{PR}$$

相比，而將其第一部分經過 AB 時（見 §136 系 1），得一面積 $1\cdot AB$,

其第二部分經過 PB 時，作成

$$1\cdot(PE-AD)$$

面（將 LKJ 曲線之面積求出時即易知之）．同樣

的，倘將其經過 PA 時，即得

$$1\cdot(PD-AD)$$

面，故如將其經過

$$PB-PA=AB$$

時，即有

$$1\cdot(PE-PD)$$

面。

今由第一面 $1\cdot AB$ 上減去第二面 $1\cdot(PE-PD)$ 所餘為

$$LABJ=1\cdot(AB-PE+PD),$$

故與此面相比的力，其比如

$$AB-PE+PD.$$

系 2. 由此，我們亦可求得 $AGBCD$ 卵狀物體吸引物體 P 之力。此物體在前者之外兼在其軸 AB 上。

今設 $NKRM$ 為一圓錐曲線，其與 EP 相垂直的縱線 ER 恆與 PD 相等，此後者之線係向 D 引出者，而 D 點則為該縱線與卵狀物體之相交

處.今於卵狀物體之頂點 A, B 作

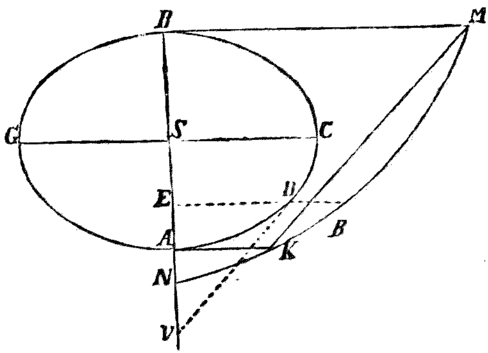
$$AK=PA,$$

$$BM=PB$$

二垂線與 AB 軸相垂直，且與圓錐曲線相交於 M, K. 今再作 KM 線,則可得一弓形 $KMRK$. 設 S 爲該物體之中心點，SC 爲其大軸之半,則卵狀物體吸引 P 之力,與 AB 上所作球吸引 P 之力相比,如

$$\frac{AS\cdot CS^2-PS\cdot KMRK}{PS^2+CS^2-AS^2} : \frac{AS^3}{3PS^2}.$$

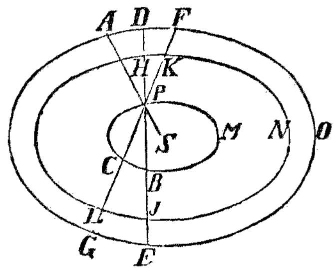
用同樣的力法,並可求得卵狀物體方面弓形之力.



第一二二圖

系 3. 倘小物體在卵狀物體之內部且在其一定的徑上，則其吸引與其距中心點之距離相比。

此可如下證明之。



第一二三圖

設 $AGOF$ 爲能吸引的卵狀物體，S 爲其中心點，P 爲被吸引的物體．今作半徑 APS 經過 P，並作二任意直線 DE FG，與卵狀物體相交於 D, E, F, G。又設 PCM，HLN 爲二在内的卵狀物體之面，與在外者相似而且同心；此二者中之第一個係經過 P，且與 DE，FG 相交於 B, C；第二個則交此二線於 H, J, K, L. 倘諸卵狀物體有一共同軸，則二面所割下的直線之部分均相等，即

$$DP = BE,$$

$$FP = CG,$$

$$DH = EJ,$$

$$FK = GL,$$

因爲 DE, PB, HJ 諸線均在同一點被平分.今試設想 DPF, EPG 所表者爲二相反的圓錐體,DH 與 EJ 則爲無限小.由卵狀物體所割下的錐體之部分 $DHKF, GLJE$, 因

$$DH = EJ,$$

故其相比如其離物體 P 距離之平方,而其吸引力則等強.由同樣的理由,我們如設想將 DPF, $EGCB$ 用無數相似,同心而且同軸的卵狀物體之面分割之,則所得的一切部分均由兩面吸引物體 P, 其力相等相反.所以 DPF, $EGCB$ 之力適相等相反而互相抵消.在 $PCBM$ 卵狀物體之外的一切物質,其力之關係均同此.

所以物體 P 祇被在內的卵狀物體所吸引,而其吸引力與 $AGOD$ 全體吸引 A 之力相比,如

$$PS : AS.$$

§ 138. 問題. 今有一能吸引的物體爲已知;向其各點的向心力以某種比減小,試求此比.

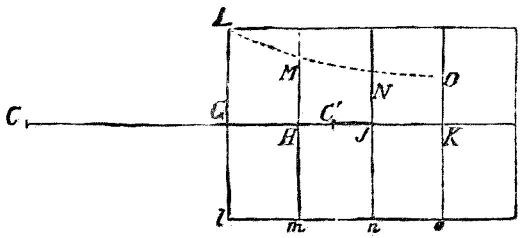
今將此物體構成為一球，或圓柱體，或其他有規則的物體，其以某種比減小的吸引定律，可求而得．於是用試驗之法於各種距離內測定吸引力．如是所得的向全物體之吸引定律，可用以求得減小之比，此項關係，亦即為其各部分之力所有者．

§139. 定理． 今有一固定的物體，其一面為一平面所界，其餘各面均沒有界，此物體為相等的各部分所成，其各部分之吸引亦相等．當距此物體之距離增加時，其力之減小大於此項距離平方之比．在平面之一面或他面有一小物體，為該物體之全部所吸引．如是則在距平面之任何距離內，固定物體之吸引力以被吸引的物體距該平面距離之某次方減小，其方數較距離之方數小 3.

第一事． 今設 LGl 為此平面，與固定體相界，後者則在平面之 J 面，並析之成為無數的平面

$$mHM,\ nJN,\ \text{等等},$$

均與 lGL 相平行．試先假定被吸引的物體 C 在



第一二四圖

固定物體之外．今作 $CGHJ$ 垂於該項無數平面上，並假定固定物體之點，其吸引力以其距離之 n 次方減小，n 爲不小於 3 的數．按 § 136 系 3，可知 mHM 平面吸引物體 C 的力，與

$$CH^{n-2}$$

成反比．今於 mHM 上取 HM 長與 CH^{n-2} 成反比；如是則該力即與 HM 相比．仿此，並於

lGL, nJN, oKO, 等各平面內

取 GL, JN, KO, 等諸長，

使其各與

CG^{n-2}, CJ^{n-2}, CK^{n-2}, 等

成反比．如是則此項平面之力與該項長相比，所以

其和亦與線之和相比，此即是，全個固定物體之力與 $GLOK$ 面相比，此面向 OK 可推至於無限．但此面與

$$CG^{n-3}$$

成反比，所以全物體之力亦與

$$CG^{n-3}$$

成反比．此卽所欲證者．

第二事．設物體 C 在固定體內部的 lGL 之面上，在於 C^1 處，令取

$$C^1K=C^1G.$$

固定體之 $LGloKO$ 部分，為 lLG, oKO 二平面所界者，不能吸引在中間的小物體 C^1 使其傾向任何方面，因為相反的點之相反作用適相等，故互相抵消．所以祇有在 OK 平面以外的固定物體，其力能吸引 C^1，而此力則與 C^1K^{n-3} 成反比，或因

$$C^1G=C^1K,$$

與 $$C^1G^{n-3}$$

成反比．此即所欲證者．

系 1. 倘固定體 $LGJN$ 兩面均爲無限的平面 LG, JN 所界，此二平面相平行，則由全個無界的物體 $LGKO$ 之吸引力上減去 $NJKO$ 部分（此部分在平面以外，向 KO 可推至於無限）之吸引力後，所得即爲該固定體之吸引力。

系 2. 倘在平面外的固定體之部分，其吸引力與平面內者相較簡直不足算可以略去，則當距離增加時，平面內的部分之吸引力，很近似的以 CG^{n-3} 爲比而減小。

系 3. 今有一物體，爲界所限，其一面爲平的；另有一小物在該平面之區域內被其所吸引，被吸引的物體離該平面之距離與吸引者之大小相較爲甚小者。吸引的物體本身係由均勻的部分所成，其吸引力以大於距離之四次方的比減小。如是則全物體之吸引力，其減小之比，與一方數甚相接近，此方數之根爲該甚小的距離，其指數較之以前的小 3.

倘物體之部分，其吸引力以距離之三次方減

小，則此定理不能適用，因爲在這裏，在平面外的部分之吸引（如系 2 中所說過者）較之在內者可爲無限大。

§ 140. 附註。　一物體垂直的向一平面被其所吸引．今欲由已知的吸引定律上，求其運動。

解此問題的方法，可先求以直線向此平面的物體之運動，將其與一其他等速運動相組合，此等速運動係沿着與平面相平行的直線進行。與平面垂直的線上之吸引，可在物體於已知曲線上運動的條件下求其定律；如是，此問題即可仿 § 23 之例以解之。

倘將縱坐標析成爲收斂的級數，運算方法即可簡便．在任意的坐標角下，對於橫坐標 A，有一縱坐標 B 與之相當，且與 A 之任何方數

$$A^{\frac{m}{n}}$$

相比．今求物體在一曲線上運動的力，而縱坐標之上端則恆在該曲線內．假定將橫坐標放大一些，其量爲 0；如是則其相當的縱坐標，

$$(A+0)^{\frac{m}{n}}$$

即可化成爲一級數

$$A^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}A^{\frac{m-n}{n}}\cdot 0+\frac{m^2-mn}{2n^2}A^{\frac{m-2n}{n}}\cdot 0^2$$

$$+\cdots\cdots,$$

並設 $$\frac{m^2-mn}{2n^2}A^{\frac{m-2n}{n}}\cdot 0^2$$

與力相比.如是則所求的力與

$$\frac{m^2-mn}{2n^2}A^{\frac{m-2n}{n}}=\frac{m^2-mn}{2n^2}B^{\frac{m-2n}{n}}$$

相比.

倘就一拋物線而言,則

$$m=2,\quad n=1,$$

而力與 $$2B^0$$

相比,故爲常數.所以倘力爲常數,則物體即在拋物線內運動,此爲葛里雷 (*Galilei*) 所已經證明者.

倘就雙曲線而言,則

$$m=-1,\ n=1,$$

而力與

$$2B^{-3}=\frac{2}{B^{3}}$$

相比.所以力與 B 之三次方成反比時，物體即在雙曲線內運動。

此項定理之敍述，姑以此爲止；我今進而研究運動之其他定理，此項定理尙未經提出過。