萬有文庫

第一集一千種

王雲五主編

自然哲學之數學原理

(八)

牛頓著

鄭太朴譯

上海圖書館藏書

商務印書館發行

萬有文庫

第一集一千種

總編纂者
王雲五

商務印書館發行

自然哲學之數學原理

（八）

牛頓著
鄭太朴譯

上海圖書館藏書

漢譯世界名著

上海图书馆藏书
A541 212 0004 0191B

第九章

論流體之圓形運動

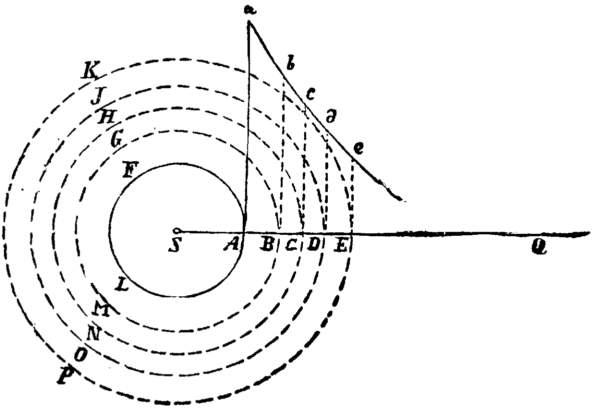
§ 73. 假設. 由流體各部分之不完全的滑性所發生的抵抗力，在尋常的狀況下，與速度爲相比的;此項速度即爲部分互相分開的速度.

§ 74. 定理. 設有一長爲無定的圓柱體，在一整勻而無限的流體內以等速運動環其軸旋轉，此軸之位置爲已定；流體本身亦爲此項運動所影響而旋轉,但不受其他的影響.倘流體之每一部分均能保持其運動,則流體各部分之環繞時間相比,如其離圓柱體軸之距離相比.

今設 AFL 爲繞其軸 S 而作等速旋轉的圓柱體,用同心圓 BGM, CHN, DJO, EKP 等將流體分割成爲無數同心的圓柱層.

因流體爲等質的,故相連的層之相互壓力,其

~~215227~~



第一八六圖

相比等於相互間的移動相比，並等於壓力所在的相連的面積相比．倘對於某一層之壓力在凹處較之在凸處爲大或小，則較強的壓力卽發生作用，而層之運動或則被加速，或則遲緩下去，此則視該項壓力在相同或相反的方向內發生影響而定．但如每層均能保持其運動，則兩面所受壓力必均相等，其方向恰相反．又因壓力與相連的面積及其移動相比，故後者與面積成反比，亦卽是，與面離軸之距離成反比．但環繞軸的角運動相比，如此項移

動被距離除後相比，亦即是，與距離之平方成反比．故如於無限的線 $SABCDEQ$ 之各點作垂線 Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, 等等，使其與 SA, SB, SC, SD, SE 等之平方相反比，並設想作一雙曲線經過該項垂線之端，則角運動之和，卽全部角運動，與相當的 Aa, Bb, Cc, Dd, Ee 等諸線之和相比．今將層之數增加至無限，將其寬減至無限，則角運動相比，如 AaQ, BbQ, CcQ 等雙曲線面相比，而與角運動成反比的時間亦與此項面成反比．故任何一部分 D 之環繞時間與 DdQ 面成反比，卽是，按已知的求曲線面積之法，與距離 SD 成正比．此卽所欲證者．

系 1. 從可知流體之微粒之角運動與其距軸之距離成反比，其絕對速度係相等．

系 2. 設有一圓柱形的器皿，其長無定，其內盛有水，並有一其他圓柱體在內．此二圓柱體均繞其共同軸旋轉，其環繞時間與其半徑相比．倘流體之每一部分保持其運動，則其各部分之環繞時間與

C64111

其離圓柱體軸之距離相比.

系 3.　倘在如此運動的圓柱體及流體上加以某種角運動或減去之，則因此項新運動不能改變流體各部分之相互摩擦，故各部分相互間之運動亦仍不變.

蓋相互間之移動係與相互間之摩擦有關，而每一部分能保持某種運動，此運動被兩面各部分所受相反的摩擦發生加速時,不能特爲大.

系 4.　故如於圓柱體及流體所成之系統方面取去其在外的圓柱體之一切角運動，則所得爲靜止的圓柱體內之流體運動.

系 5.　倘流體及在外的圓柱體均靜止，但在內的圓柱體以等速作旋轉，則流體之圓形運動亦參加,並能漸漸的傳達經過全流體.在流體之各部分未達到前系內所述之運動時,其增加不會停止.

系 6.　因流體有一種傾向，將其運動很廣的傳播出去,故在外的圓柱體,亦能爲此項傾向所影響而旋轉，其運動之環繞時間在未與在內的圓柱體

之環繞時間相等時,運動恆加速.倘在外的圓柱體被一力所牢固着，則即發生阻滯流體之運動的傾向，故如沒有外來的力將在內的圓柱體之運動保持,則此圓柱體之運動即漸失去.此種事實均可用試驗以證明之.

§ 75. 定理. 有一固定的球，在一均勻而無限的流體內環一軸旋轉,此軸之位置爲已知,其旋轉亦爲等速的.流體即被此項動力所推動而旋轉,但別無其他推動力. 倘流體之每一部分能保持其運動,則其環繞時間與距球心距離之平方相比.

第一事. 設 AFL 爲一球,環 S 軸以等速在圓內旋轉;作 BGM, CHN, DJO, EKP,等等諸圓將流體分割成爲無數同心層,其厚均相等.今設該項層成爲固定的,則因流體爲等質的,故相接的層之相互壓迫與其相互間之移動及相接觸的面積相比. 倘其中一層方面之壓力在凹處較凸處爲大或小,則較強的壓力必超過,而能使層之速度加速或遲緩,隨其方向之與運動相同或相異而別.欲使每

一層能保持其運動，則兩面所受之壓必相等相反而後可.因壓力與相接的面及相互間的移動相比，故移動與面積成反比，即是，與此項面積距心之距離平方相比. 但種種繞軸的角運動與此項移動成正比，與距離成反比，故卽與距離之三次方相比.

今如於無限線 $SABCDEQ$ 之各點作垂線 Aa, Bb, Cc, Dd, Ee 等等，使其與 SA, SB, SC, SD, SE 等等之三次方成反比，則各種角運動之和相與相當的 Aa, Bb, Cc, Dd, Ee 等等諸線之和相比.今將層之數增加至無限，將其寬厚同樣減小至無限，則全個角運動與雙曲線的面 AaQ, BbQ, CcQ, DdQ, EeQ 等等相比. 又，與角運動成爲反比的環繞時間亦與此項面成反比. 所以任何一層 DJO 之環繞時間與 DdQ 面成反比，即是(按已知的求曲線面積之法)，與距離 SD 之平方相比. 此卽所欲證者.

第二事. 今由中心點出發，作很多的直線，其長不定，與軸相交之角爲已知.將此項直線環軸

旋轉之，則上所述的各層均被分割成爲無數圓圈，而每一圓圈被其他四個圈所接觸，在內的一個，在外的亦一個，兩旁各一個．因在內的及在外的圈能發生摩擦，故每一圈在按照第一事之定律所發生的運動方面，祇能被其向相等相反的兩面所壓迫．此可由第一事之證以知之．所以由中心點出發在直線上進入無限的圓圈所成之列，即按照第一事之定律運動，祇須在兩旁的摩擦不將其阻止．不過在按照此項定律而發生的運動方面，兩旁的圓圈不能發生摩擦的阻力，所以不能對於此項運動有所妨害．倘距離中心點等遠的圓圈，其運動在極點較之在赤道附近爲速或遲，則遲者能因相互間之摩擦而加速，速者則被遲緩，故其環繞時間恆按照第一事之定律趨於相等．所以此項摩擦不能阻止按照該項定律所發生之運動，而在這裏亦仍如此．此即是，各個圓圈之環繞時間與其距中心距離之平方相比．

第三事．　今將該項圓圈每個分割成爲無數

的小部分,其中含有絕對而均匀的流質.因此項分割無關於圓形運動之定律,祇爲包含流體的方法,故其圓形運動仍繼續着.經過此項分割後,一切圓圈不問其大小如何,其相互間之摩擦或則全不變,或則以相同的程度變.故如其原因不變,則其結果亦不變;因而運動與環繞時間仍爲相比的.

此亦即所欲證者.

因爲圓形運動及由此發生的離心力在赤道部分較大,故必有某種原因存在,能將其部分拉住,不使其出離圓的軌道而與中心離開.

系 1. 從可知一切流體部分之角運動與其距心距離之平方相比,其絕對速度與此項平方被距離除後成反比.

系 2. 設有一球,在一靜止的,相似的,無限的流體內環一軸以等速旋轉,此軸之位置爲已知.如是,流體之運動即成爲漩渦形式,漸漸的傳出至無限.其各部分之加速,在環繞時間未與距中心之距離平方成爲相比時,不會中止.

系 3.　漩渦之內部速度較大，故能對於其外部發生摩擦及壓力使其運動；此項外部所得之運動又復傳至於其外部，故前者之運動不會增加，祇會將其所有者漸漸的向外傳出．因此，在漩渦方面，運動恆由中心向其外圈傳出，而因其外圈可擴至無限，故漸消失．其在漩渦之較內的圈，其運動並不能加速，因爲其由中心所得來的運動均傳出至外圈去．

系 4.　欲使漩渦恆保持其運動狀況，必須有一來源使球能保持其運動，俾得傳其運動於漩渦內之物質．倘沒有此項來源，能使球保持其運動，則因恆向外面傳出之故，球本身之運動及漩渦之運動必漸消失．

系 5.　倘另再投入一其他球於此漩渦內，與原來之中心稍離開，以一已知的軸旋轉，則流體內又形成一新漩渦．在開始時，此新漩渦幷其球環繞原來之中心旋轉，以後則漸漸的將其本身之運動傳布出去，以至於無限．如是，結果二漩渦互相分開

而環繞一共同的點旋轉；倘無一種力將此二者合在一塊，則必愈離愈遠。

倘後來使球繼續其運動的力消失，一切均任之於力學的定律，則結果二球之運動必漸消失，而漩渦亦即靜止。

系 6. 倘有若干球在已知的處所，以一定的軸在一定的速度之下旋轉，則所發生的漩渦之數亦如是多，每個均能擴張至無限。

蓋球雖多，但其傳布運動之方法，則與單獨的一個球無異．如是，此項漩渦不會互相分開，每個限於一區域的，而必相互交錯；因此項相互作用，故各球均不能不漸離其原來之處所，如前系內所已指出者．倘沒有某種力生作用於相間，則其相互間之位置即不能保持下去．但使各球保持其運動的力如消失，則如第三第四二系內所明，漩渦的運動亦必漸停止。

系 7. 一種相似的流體盛於一球形的器皿內，經中心處球之旋轉而發生漩渦；器皿本身亦與球

作同樣的旋轉,其軸及方向均同,其環繞時間則與半徑之平方相比.如是,則流體之部分,其環繞時間必須與其距中心之距離平方成正比,乃能保持其不加速亦不遲緩的運動.其他漩渦之方式均不能保持長久.

系 8.　倘器皿,其內的流體及球均保持此項運動,同時以共同的角運動環繞一已知的軸倒轉,則此新運動對於流體各部之摩擦不能發生變化.

各部分相互間之移動與摩擦有關,既每部分仍保持其原來的運動,則一面來的摩擦所發生之阻礙作用,不能較之他面來的加速作用爲大.

系 9.　故如器皿靜止不動,球之運動爲已知,則流體之運動亦即可求得.

我們試設想一平面經過球之軸,以相反的運動旋轉,幷假定平面的及球的環繞時間之和與後者相比,如器皿之半徑之平方與球之半徑之平方相比.如是,則流體各部之環繞時間對於此平面而言,與其距球心距離之平方相比.

系 10. 倘器皿亦環繞球之軸旋轉，或以某種任意的軸旋轉，其速度爲已知，則流體之運動亦即可求得。

蓋如由全系統上減去器皿之運動，則其餘一切運動亦均仍舊.按系 9 即可求得該項運動.

系 11. 倘器皿與流體均靜止着，球以某種速度作等速運動，則流體及器皿均能漸漸的被此項運動所影響而運動.流體及器皿之環繞時間未與球之環繞時間相等之前，其加速不會中止.倘器皿被一力所阻止，使其不能運動，或作等速的常運動，則中介物即漸漸的得到 8, 9, 10 三系內所說之運動狀況，不會停留在其他狀況內.倘能使器皿及球運動的力消失，將全個系統放任於力學定律之下，則器皿與球藉流體之中介而互相影響，在其環繞時間未相等以前，其相互影響不會中止.

§ 76. 附註. 在這些研究中，我假定流體（就其密度及流動性而言）係由等質的物質所成.所以此項物體有此屬性，即，相同的球在同樣的時間內作

相等的運動時，其在同距離內所傳出之運動亦相似相等，不問球在何處均如此．因環繞軸的圓形運動，物質有離開軸之傾向，因而對於在其外的物質能施以壓力．由於此項壓力，其部分間之摩擦即增加，因而其分離亦即更難；所以流體之流動性即減小．倘流體之部分於某處較爲厚或大，則此流體之流動性即減少，因爲部分於此能互相分開的面，其數目已減少了．我假定，在此種流動性減少的狀況下，我們可用部分間之滑性或其他柔性以代之．倘不如此，則凡缺少流動性之處，其物質必緊相接連，惰性亦較大，因而其接受運動較遲，其傳布較遠．倘器皿非爲球形，則流體之部分不會在圓而在其他曲線內運動，此項曲線與器皿之形相似，其環繞時間與其距中心之平均距離之平方相比．在中心及周之中間，空間較爲寬，故運動較遲，在狹處則較速．不過較速的部分不會向周方面接近；其所作之線曲率較小，其求離中心之傾向能因此項曲率之小而減小，亦猶因速度之增加而增大一般．當

其由狹的空間進至寬的空間時，其離心亦增加，同時，其運動亦減小；再由寬處入於狹處時，其運動又復加速，因而各部分交互的加速及遲緩．在固定的器皿內，其狀況大率如是；至於無限的流體內之漩渦狀況，前系 6 中已知道了．

在本定理內，我曾經研究了漩渦之屬性，其目的在求明白，天體方面的現象，是不是可用此項屬性以求其解．我們知道環繞木星而運動的衛星，其環繞時間與其距木星中心距離之 $\frac{3}{2}$ 次方相比；環繞太陽運動的行星，亦適用此項規律．據天文學上一直到現在所有的觀察，此項規律在該項衛星及行星方面均十分準確．

故如該項天體被木星及太陽四圍之漩渦所推動而旋轉，則其本身必服從關於此的定律．漩渦部分之環繞時間與其距運動中心距離之平方相比；倘漩渦之物質，不隨其距離運動中心之遠而稀薄，由流體部分之缺少滑性而發生的抵抗力，其增加率亦不大於速度（流體部分互相分開的速度）之增

加，則此項比例不能減小至於 $\frac{3}{2}$ 次．就理性上看來，二者均不能實現．較厚而較不流動的流體之部分，倘不向中心發生吸引作用，必向外圈出離．在本章之初，我因爲證法上之需要，曾假定抵抗力與速度相比；但事實上，抵抗力與速度之比或者不如是之大．倘我們承認這一層，則漩渦各部分之環繞時間與其距中心之距離相比，其方數實大於二．倘漩渦在接近中心處運動較速，向外即較遲，但超過一定的界限至外周時重復較速，則決不能有一固定的比例，如 $\frac{3}{2}$ 次或某次．所以研究自然的人很可以注意一下，該項 $\frac{3}{2}$ 次的現象，如何能用漩渦之理以解釋之．

§ 77. 定理．　倘物體能在漩渦內作圓形環繞，則其密度與漩渦之密度相等；其運動之方向及速度，均服從漩渦部分之定律．

我們試假定漩渦之一小部分凝結成爲固體，但其微粒間之位置則仍不變；則因此小部分之密度，所受之力及其形狀均仍不變，故其運動亦仍按

上海圖書館

以前定律．反之，倘漩渦之一固體的部分，其密度與其他部分無異，成爲流體了，而如其部分間之相互狀況仍不變，則其運動亦仍如前．今如不論各微粒間之運動，視之爲與全體的運動無關者，則後者之狀況自不受影響而無變動．如是，固結的部分雖已成爲流體，但其運動與其他離心等遠的部分完全一樣，因爲此項部分間并無什麼分別．所以固體之密度如與漩渦物質之密度相同，則與漩渦之其他部分作同樣的運動而前進．倘物體之密度較爲大，則有離心的傾向，一方面漩渦亦有力影響之，使其不能離開其軌道；但如漩渦之力不勝，則物體即離開其中心，在螺旋線上運動，因而與漩渦之中心愈去愈遠．反之，倘物體之密度不及漩渦物質密度之大，則發生向心的運動．所以，祇有物體之密度與流體之密度相同，乃能在圓內環繞漩渦之中心而旋轉；於此，其所循定律，與其他等距的部分所循的相同．此即所欲證者．

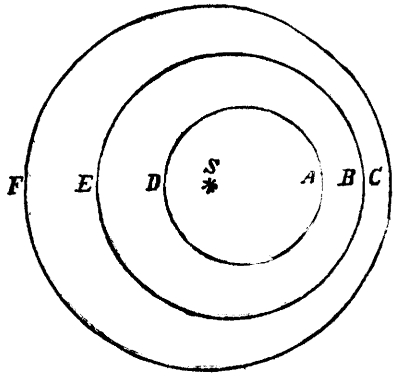
系 1. 一固體在一漩渦內運動，其所作圓不變，

則對於在其內的流體而言，爲靜止的.

系 2. 倘漩渦之密度爲均勻的，則上所述的物體，在距心之任何遠處，均能作環繞運動.

§ 78. 附註. 由此可知行星之廻旋，非爲物質的漩渦所推動. 蓋按哥白尼 (*Corpernicus*) 之假說，環繞太陽而運動的行星，其軌道爲橢圓；此橢圓之焦點即爲太陽，其向太陽所作之半徑，作出與時間相比的面積.

漩渦各部分之運動，不能作如此的方式. 今設 AD, BE, CF 爲三個繞太陽 S 的軌道；最在外的 CF 爲與太陽同心的圓，其在內的二軌道之遠日點爲 A, B，近日點則爲 D, E. 在 CF 軌道內運動的物體，以其向太陽的半徑作成與時間相比的面積，其運動爲等速的. 在 BE 軌道內運動的物體，按之天文上定律，在遠日點 B 處運動較遲，在近日點 E 處則較爲速；但按之力學上的定律，漩渦之物質在 A 與 C 中間之狹的空間內，其運動當較速，在 D 與 F 之間則當較遲，即是，應當在



第一八七圖

遠日點較速而在近日點較遲.此二者適爲相反.

在處女宮之開始時即係如此,於此,火星與金星的軌道間之距離,與雙魚宮開始時之距離相比,約爲 3：2, 因此,漩渦之物質在雙魚宮方面在其軌道間運動時,必較之處女宮方面爲大,其比例亦爲 3：2. 蓋空間愈狹,則在同時間內通過同量物質之速度自必愈大.倘地球在此項物質內前進,并與之同繞太陽,則在雙魚宮之開始,其速度大於處女宮開始時之速度,其比爲 3：2. 所以每天我們所見的太陽之運動在處女宮當 $>70'$ 而在雙魚宮

之開始 $<48'$；但按之經驗，太陽之該項運動在雙魚宮較之在處女宮爲大，故地球在處女宮之運動亦較之雙魚宮爲大.

從可知漩渦的假設與天文上所得之現象相矛盾，故不能對於說明天體現象有所幫助，反而足使其模糊. 至於該項運動在自由的空間內如何沒有漩渦而進行，此可由第一編知之；在下編論宇宙系統內當更詳述之.

此页空白

第 三 編

論 宇 宙 系 統

在前兩編內，我已將自然理論之原則敍述過了，但非爲物理的而係數學的；由這些原則內，我們可於物理研究方面推得若干結論．這些就是運動及力之定律及條件，主要的是關於自然理論方面者．爲使此項原則不致落空，我曾經引了許多物理的說明；在這裏面，我所引的主要的可說是關於物理學之基本者，如物體之密度，抵抗力，沒有物體的眞空，以及光與聲之運動等．所尙須論及者，是用該項原則以求了解宇宙系統之構造．

因爲這層理由，這第三編我曾用較通俗的形式寫出，期能使許多人都能讀．不過對於上所述的原則沒有了解的人，對於其所得結論亦不能理解，故他們向來所得的偏見不能因此消除．因爲這個

緣故，我將這編之內容重復按照數學方法釋爲定理，俾好多糾紛不致發生，而讀者亦須了解上述原則之後乃能閱讀.但這裏所遇到的好多定理，即在懂數學的讀者亦頗耗費時間，所以我不欲使人逐條的複演之.讀者祇須將本書開首的說明，運動定律，以及第一編之前三章詳細閱過，即可讀本編；其餘本編內所引的定理，可隨意查閱之便行.

研究自然之規律

第一規律. 求自然事物之原因時，除了眞的及解釋現象上必不可少的以外，不當再增加其他.

物理學者說：自然無虛事，所謂虛事是許多人去做，但極少人能成功的事.自然是簡單的，不會浸淫於不必要的事物之原因內.

第二規律. 所以在可能的狀況下，對於同類的結果，必須給以相同的原因.

例如人與畜之呼吸，歐洲及美洲之隕石下墜，

竈火之光及太陽之光，光在地球上及其他行星上之反射，等等，均不須給以不同的原因.

第三規律. 物體之屬性，倘不能減少亦不能使其加強者，而且為一切物體所共有，則必須視之為一切物體所固有之屬性.

物體之屬性祇能由試驗以知之，所以在試驗上普通恆一致者，而且既不能減少又不能消失者，必須視之為普通的屬性.自然，我們不能背棄試驗而從事於空想，亦不能離開自然之類同性，因為自然是簡單的，恆與其自己一致的. 物體之廣袤，祇能由官覺知之，但非在一切物體方面均能感覺到；不過凡能感覺到的物體都有廣袤，所以我們對於沒有感覺到的，亦假定其有廣袤.有若干物體是硬的，這是我們可由試驗知之. 全體之硬，由其部分之硬所積成，因此，我們可推論到，不僅可感知的物體部分是硬的，其極小不可分的微粒亦是硬的. 物體之不可透性，亦非由理性所推知. 而由試驗所得，一切手中所有的及能捉摸的，均有不可透

性．故我們即假定不可透性爲一切物體所共有的屬性．一切物體均能運動，因爲某種力之作用，即我們所謂惰性者，能保持其運動狀態，或靜止，這亦是一個推論，因爲我們所能觀察到的物體均有此屬性．全體之廣袤，硬性，不可透性，能動性及惰性均由其部分所成，因此，我們推論到物體之極小的部分亦均有此項屬性．全部自然理論之基本即在於是．此外，我們從現象方面又知道相互接觸的物體之部分能相互分開．至於物體之部分能析成爲更小的部分，這是由數學方面知道的；此項設想其爲能析小的部分是否有自然的力可以做到之，這是不很確實的．但如能用一試驗，將未析開的部分或微粒析開之，則我們即可推論出，不僅已析開的部分可分開，而且未析開的部分之可析性亦爲無限．

倘一切物體在地球之附近爲重的，即對於地球有重量，而且其重量與物質之量相比；又如月球對於地球亦有重量，亦以其質量爲比，而我們地球

上的海洋對於月球亦同樣的有重量;同時,我們又能用試驗及天文上的觀察,以證明行星相互間有重量,彗星對於太陽亦有重量,則按此處之規律,我們可假定一切物體相互間均有重量.關於此項普遍重力之證明,較之物體之不可透性之證明較爲有力量,因爲關於後者,我們對於天空中之天體未能作若何試驗,亦未有若干觀察.但我亦不敢下斷語,說重力爲物體之固有的力.所謂固有的力,是指物體之惰性力,因爲此力是不變的;至於重力則隨其距離地球之遠而異.

第四規律.　在實驗物理學內,由現象經歸納而推得的定理,倘非有相反的假設存在,則必須視之爲精確或近於眞的,如是,在沒有發見其他現象,將其修正或容許例外以前,恆當如此視之。

我們必須如是,俾歸納的論據,不致爲其他假設所取消.

現　象

<u>第一現象</u>. 木星的衞星,用其向木星之中心的半徑,作成與時間相比的面積,其環繞時間與其距該中心的距離之 $\frac{3}{2}$ 次方相比.

此可由天文的觀察以知之.此項衞星之軌道,與圓相差不遠,而此項圓則係與木星同心,其在此項圓內之運動爲等速的.至於其環繞時間與此項軌道半徑之 $\frac{3}{2}$ 次方相比,此爲一般天文學者所公認的;由以下之表內,亦可得此事實.

木星衞星之環繞時間

I.	*II.*
$1^d18^h27^m34^s$;	$3^d13^h13^m42^s$;
III.	*IV.*
$7^d3^h42^m36^s$;	$16^d16^h32^m9^s$.

衞星與木星中心點間之距離

(以木星半徑爲度)

按波來羅(*Borellus*)之觀察:

I.	*II.*	*III.*	*IV.*
5,667	8,667	14,	24,667;

按頓來(*Townley*)之觀察:

I.	*II.*	*III.*	*IV.*
5,52	8,78	13,47	24,72;

按卡西尼(*Cassini*)用遠鏡之觀察:

I.	*II.*	*III.*	*IV.*
5,	8,	13,	23;

又按卡氏由衞星蝕方面之觀察:

I.	*II.*	*III.*	*IV.*
5,667	9,	14,383	25,3;

由環繞時間所推得:

I.	*II.*	*III.*	*IV.*
5,667	9,017	14,384	25,299.

木星衞星之差離(*Elongation*)旁德(*Pound*)曾用最精確的測微計如下法測過．第四衞星之最大日心差離，他用一測微計在一十五英尺長的望遠鏡內測量過；在木星與地球之平均距離內，所得結果約爲 $8'16''$.

第三衞星之差離，他曾用 123 英尺長的望遠鏡測過；在同樣的木星與地球之距離內，結果爲 $4'42''$. 其餘二衞星之最大差離，亦在同樣的木星，與地球之距離內，由環繞時間上推得爲 $2'56''47'''$ 及 $1'51''6'''$.

木星之徑亦用該項測微計在 123 英尺長的望遠鏡內屢次測過，所得結果在木星與太陽或地球之平均距離內恆 $<40''$, 從未 $<38''$, 多次爲 $<39''$. 在較短的望遠鏡內爲 $40''$ 或 $41''$.

木星之光因其屈折率之不同，故較爲展開；此項展開與其徑之比，在較大較完備的望遠鏡內比較在較小較不完備的鏡內爲小．第一及第三二衞星經過木星前之時間，亦曾用該項大望遠鏡自其

開始進入至完全退出觀察過．木星之徑，在其與地球之平均距離內，

由第一衛星之經過木星方面推得爲 $37'',125$

由第三衛星之經過木星方面推得爲 $37'',375$.

第一衛星之影離去木星所須之時間，亦經觀察過；在以上所云之距離內，其徑約爲 $37''$. 今設此徑很近似的爲 $37''25$, 則四衛星之最大差離以木星半徑爲度時，爲 5,965; 9,494; 15,141; 26,630.

第二現象． 土星之衛星，以其向土星之中心的半徑，作成與時間相比的面積，其環繞時間與其距該中心的距離之 $\frac{3}{2}$ 次方相比．按卡西尼之觀察，推得該項衛星與土星中心之距離以及其環繞時間如下：

土星衛星之環繞時間

I.	*II.*
$1^d21^h18^m27^s$;	$2^d17^h41^m22^s$;

III.	*IV.*
$4^d 12^h 25^m 12^s$;	$15^d 22^h 41^m 14^s$;

V.

$79^d 7^h 48^m 0^s$.

衞星與土星中心間之距離

(以其圈之半徑爲度)

由觀察所得者:

I.	*II.*	*III.*	*IV.*	*V.*
1,95	2,50	3,50	8,	24;

由環繞時間所推得者:

I.	*II.*	*III.*	*IV.*	*V.*
1,93	2,47	3,45	8,	23,35.

第四衞星之差離,按觀察所得可假定其爲 8 半徑,相差當不甚遠.但用極精確的測微計在 123 英尺長的遠鏡內測之,得 8,7 半徑.按此項觀察及環繞時間,衞星之距離以圈之半徑爲度時,得

2,1; 2,69; 3,75; 8,7; 25,35(25,39).

土星之徑與其圈之徑相比，在同樣的望遠鏡內為 3：7, 而圈之徑在一七一九年五月二十八及二十九測得為 43″. 今用土星與地球之平均距離，則得 42″, 土星之徑為 18″.

這些都是在極長而且極好的望遠鏡內所得之結果，因為在此項鏡內，天體之外觀的量與光之展開相比，較之在小的鏡內為大。今將差誤的光除去，則土星之徑不能大於 16″.

第三現象． 水星，金星，火星，木星，土星，這五個行星並其軌道將太陽包圍在其中。水星與金星之繞太陽運動，此可由其盈虧知之．當其在太陽之對面時，為其盈的時候，在這面時成為新月形，在中間一個區域內，有半虧的現象．由火星在太陽會合點附近時之全明現象，及由直角距離附近時之彎凸現象，亦可確定其繞太陽之運動．木星與土星之繞太陽運動亦可由其自太陽所得之光以知之。

第四現象． 五行星之環繞太陽的時間，以及太

陽繞地球或地球繞太陽的時間，與其距太陽的平均距離之 $\frac{3}{2}$ 次方相比.

這個爲開柏萊(*Kepler*)所發見的關係,已沒有人疑惑.不問太陽繞地球或地球繞太陽運動,其環繞間時及軌道之度恆相同.關於環繞時間之測量,一切天文學者亦均無異議.開柏萊及波利亞爾德(*Bullialdus*)對於此項軌道之大小，尤曾做過一番觀察及測量,與該項環繞時間相當的平均距離,與二人所得的距離亦相差不遠，而且恆在二人所得者之中間.

環繞太陽的時間(以日爲度)

土星	木星
10759,275;	4332,514;
火星	地球
686,9785;	365,2565;
金星	水星

224,6176;	87,9692.

與太陽之平均距離

按開柏萊:

土	木	火
951000;	519650;	152350;
地球	金	水
100000;	72400;	38806;

按波利亞爾德:

土	木	火
954198;	522520;	152350;
地球	金	水
100000;	72398;	38585;

由環繞時間所推得:

土	木	火
954006;	520096;	152369;
地球	金	水

100000; 72333; 38710.

關於水星及金星之距離，已無可論爭，因爲由其與太陽之差離方面亦已測定過．其餘諸星與太陽之距離，雖有可爭論處，但由木星衛星之蝕亦可解決．蓋由此項星蝕，我們可測定木星影之位置，如是即可求得日心之長．由木星之日心的及地心的長，將其相互比較後，即可推得其距離．

第五現象． 行星以其向地球所作的半徑，不能作成與時間相比的面積；但如此項半徑向太陽時，其所作面積即與時間相比．

蓋對於地球而言，此項行星有時向前，有時中止，有時則向後退．但就太陽而言，則行星恆向前，其運動差不多爲等速的，不過在遠日點較遲，在近日點則較速，因而在等時間內所作之面積恆相等．此爲天文學者所熟知的定理，而在木星衛星之蝕方面能很精確的證明之，同時並可於此推得其距太陽之遠．

第六現象． 月球以其向地球所作的半徑，作成

與時間相比的面積.

此可由比較月球之外觀的運動及徑以知之.不過因太陽之影響,月球稍有失調;在這裏,此項小的不顯見的差失,我且將其略去不論.

第　一　章

論宇宙系統之原因

§1. 定理. 使木星之衛星恆離開直線運動而留在其軌道內的力,係向着木星之中心,並與其距該點的距離之平方成反比.

此定理之第一部分可由第一現象及第一編§14或§16以知之.其餘的部分則可由該現象及第一編 §18 知之.

土星方面之相同的事實,可由第二現象知之.

§2. 定理. 使行星恆離開直線運動而留在其軌道內的力,係向着太陽,並與其距此的距離之平方成反比.

此定理之第一部分可由第五現象及第一編§14 知之;其餘部分則可由第四現象及第一編§18以知之.但此部分之最有力的證明,實為回歸

點之靜止．蓋按第一編 §85 之系 1，則雖極小的差，即，與平方之差，在各個環繞方面能發生可感知的回歸點之運動，在多次環繞方面，即能發生很顯明的運動。

§3. 定理。 使月球不能離開其軌道的力，係向着地球，並與其離地心的距離之平方成反比．

此定理之第一部分，可由第六現象及第一編 §14 或 §16 知之；其餘部分則可由其遠地點之極遲的運動以知之．蓋該項運動在各個環繞內約爲 3°3′，故可略去不計．由第一編 §106 之系 1，可知，倘月球與地心的距離，與後者之半徑相比，如 $D:1$，則發生該項運動的力與

$$\frac{1}{D^2+\frac{4}{243}}$$

相比，亦即是，較平方稍大的反比，但此比與平方的比較之與三方的比更爲接近，其度爲 $59\frac{3}{4}$ 倍．

此項運動之發生，在於太陽之影響，故可略去不計；此當於後明之．太陽之影響月球，使其離開

地球，與後二者間之距離差不多爲相比的，故按第一編 § 106 之系 2，其與月球之向心力相比，約如 2 : 357,45 = 1 : 178,725.

倘將此極小的力略去不計，則其餘使月球不能出離其軌道的力與 D^2 成反比.倘將此力與重力相比較，更可明白此理之無誤；下節內當明之.

系. 使月球留在其軌道內的平均向心力，倘將其先按 177,725 : 178,725 放大之，再將其按地球半徑與月心離地心之平均距離之平方比放大之，則得地面上之月球向心力；不過我們須假定，當其與地面接近時，該項力恆以距離平方之反比增加.

§ 4. 定理. 月球對於地球有重量，其離開直線運動而留在其軌道內，係此項重力之作用.

月球與地球在朔望點之平均距離，按托勒未 (*Ptolemäus*) 及多數天文學者之計算爲 59 地球半徑，按凡德林 (*Vendelinus*) 爲 60 半徑，許根司 (*Huygens*) 亦得此結果，按哥白尼爲 $60\frac{1}{3}$ 半徑，按

司德利德(*Streetus*)爲 $60\frac{2}{5}$, 而按提果(*Tycho*)則爲 $56\frac{1}{2}$ 半徑. 提果及其餘用屈折表的天文學者, 均假定太陽及月之折光差較之其他恆星之折光差爲大, 約大 4 至 5 分鐘, 此實與光之性質不合; 他們並將月之視差放大, 至全視差之 $\frac{1}{12}$ 或 $\frac{1}{15}$. 倘將此項差誤糾正, 即得 $60\frac{1}{2}$ 地球半徑, 與其他天文學者所得相近, 我們現在假定此項距離爲 60 地球半徑, 其環繞時間爲 $27^d\ 7^h\ 43^m$, 此亦爲一般天文學者所確定的. 又如我們按法國人之測定, 設地球之週爲 12 249600 巴黎尺, 並設想月球之一切運動均失去, 讓其自然, 則使其在軌道內運動的力, 即使月球下墜至地球, 而其每分鐘內所經過之道路爲 $15\frac{1}{12}$ 尺. 此項關係, 我們可按第一編 § 76 或同編 § 18 之系 9 以計算之. 月球在距離地球 60 半徑內作平均的運動時, 其一分鐘內所作的弧之矢, 約爲 $15\frac{1}{12}$ 尺, 或 15 尺 1 寸 $1\frac{4}{9}$ 分(巴黎尺). 但該項力在接近地球時與距離之平方之反同增加, 故在地面上較之在月球方面大 60·60 倍. 所

以，以該項力在地球附近下墜的物體，一分鐘內所作之道路爲 $60 \cdot 60 \cdot 15\frac{1}{12}$ 尺，一秒鐘內所作者爲 $15\frac{1}{12}$ 尺，或 15 尺 1 寸 $1\frac{4}{9}$ 分(巴黎尺).

在地球上，重物體之下墜實由於該項力.按許根司之研究，一寬爲巴黎秒所定的擺錘之長，爲 3 尺 8,5 寸(巴黎尺).

一下墜的重物在一秒鐘內所經過之高與擺錘長之半相比，等於一圓之周與其徑相比之平方，所以爲 15 尺 1 寸 $1\frac{7}{9}$ 分.使月球留在其軌道內的力，當月球下墜至地時，亦即等於重力，所以我們亦可稱之爲重力，而在實際上亦即是此力.倘此力與重力不同，則由此二力之相合的作用，物體向地下墜時，其速度必加倍，因而所經過之道路，一秒鐘內當爲 $30\frac{1}{6}$ 尺.但此與經驗不符.

以上之計算，是假定地球爲靜止的.倘地球與月球均繞太陽運行，同時並繞其共同重心運動，則重力之定律不變時，其中心距離爲 $60\frac{1}{2}$ 地球半徑，此可由第一編 §101 以計算之.

§5. 附註.　此定理之證並可如下詳細明之.倘繞地球的月球有多個,如木星及土星方面,則其環繞時間亦必服從開柏萊所發見的定律，因而其向心力與其距地球中心之距離平方成反比.倘其中離地最近的爲最小，差不多與地球高山之巔相接觸，則其向心力(即使其恆不能離開其軌道的力)按以上之計算，與該高山巔上物體之重力差不多相等.今如將此小月球之向心力奪去,則此月球不能在其軌道內運行,而向地球下墜,其速度亦與山巔上物體下墜之速度相等,因爲其所受之力相等.倘小月球下墜的力與重力不同,同時,此月球對於地球亦有重量,則因此二力之同時的作用,月球下墜之速度必加倍.但此二種力均向地球,而且相似並相等,故其原因按第一第二二規律亦必相同.因此,使月球不能出離其軌道的力,與我們所稱的重力相一致，而小月球在山巔上或則一切重力都沒有,或則其下墜速度較之物體之下墜速度大一倍.

§6. 定理.　木星之衛星向木星發生吸引作用,

土星之衛星向土星，行星向太陽；此項星均因其重力之作用，恆離開直線運動而留在其曲線的軌道內。

木星衛星之環繞木星，土星衛星之環繞土星，以及水星金星等行星之環繞太陽，係同類的現象，故按第二規律，其原因亦爲同類的；尤其是因爲與該項運動有關的力，均係向着木星，土星及太陽之中心，而且其與該項中心之距離的關係，服從相同的比例及定律，即，地球重力之比例及定律。

系 1. 所以重力向一切行星及衛星均發生作用。

蓋金星，水星及其他行星與木星及土星等爲同種類的星，這是人所共認的。因爲每一吸引均按運動之第三定律爲相互的，故木星對於其一切衞星，土星對於其一切衞星，地球對於月球，太陽對於一切行星均有重力。

系 2. 向各個行星的重力，與各個處所離其中心的距離之平方成反比。

系 3. 按系 1 及系 2, 一切行星相互間均有重力;所以木星與土星在會合點之附近互相吸引,使其相互間之運動失調.同樣的,太陽能使月球之運動失調,太陽與月球能使我們的海洋失調;此均於以後明之.

§ 7. 附註. 一直到現在,使天體不能出離其軌道的力,我們名之爲向心力.我們已知道此項力與重力是一物,所以此後即稱之爲重力.使月球不能出離其軌道的該項力之原因,按第一,第二及第四諸規律,可推至於一切行星.

§ 8. 定理. 一切物體對於各個行星均有重力,前者對於每個行星之重量, 在與後者中心相等之距離內,與物體之物質量相比.

一切重物向地球之下墜 (倘將由不同的空氣之抵抗力所發生的阻力除去),其時間均相等, 這是很早以前就有人觀察到了,而在擺錘方面,尤可很精確的見到這一層.我曾經用金,銀, 鉛, 玻璃,沙,鹽,木,水等各物體做過試驗.我所用的係兩個

圓的空盒，其大小相等，其一盛以木，於其他之振動點則繫以等重的金.此二盒所成之擺錘，其線長爲11尺；就其重量，形狀，空氣之抵抗力等而言，此二者完全相等.其振動的時間均很長.金之物質量與木之物質量相比，如其一之重量與其他之重量相比；其餘的物質亦是如此.在重量相同的物體方面，物質之差即使小於其全部之 $\frac{1}{1000}$，在此項試驗方面亦易觀察到.

向行星的重力之性質與向地球之重力相同，此亦爲無可疑惑者.我們試設想，將地球上的物體高舉入月球之軌道，同時並將月球之一切運動均奪去，俾讓其與該項物體一同向地下墜，則我們前已說過，在同時間內，二者下墜所經過之道路必相等；故該項物體與月球物質之量相比，如其重量與月球之重量相比.

又因木星衛星之環繞時間，與其距木星中心的距離之 $\frac{3}{2}$ 次方相比，故其加速的重力，向着木星而與此項距離成反比.所以在相等的距離內，其加

速的重力亦相等.而如由相等的高下墜時,在同時間內所經過之道路亦相等；此與地球上物體下墜的情形一致.

仿此,繞太陽運行的行星,倘在相等的距離內由此脫去,則其向太陽前進的時間如相同,其所經過之道路亦必相同.但能使不相等的物體作相等加速的力,與物體是相比的,即是,重量與行星之物質量相比.至於木星及其衛星對於太陽之重量亦與其所含的物質量相比,此可由衛星之極規則的運動按第一編§106系3之理以知之.倘其中有若干,按物質量之比例,較其他為較強的被吸引,則衛星之運動因此項不同的吸引力必致失調.倘在相等的距離內,一衛星對於太陽的重力,按之物質量的比例,較之木星為大,其較大的度為 $d:e$, 則太陽中心及衛星軌道中心間之距離,恆較之太陽中心與木星中心間之距離為大,其比為上述的比例之平方根;此為我所曾經計算過者.反之,倘一衛星對於太陽之重力為輕,其比例亦為 $d:e$, 則

其軌道中心點，亦以該項比例之平方根，與太陽中心點之距離減小．故如在離太陽等遠處，任何一衞星對於太陽之加速力，較之木星之加速力爲大或小，其大小之度雖祗爲全力之 $\frac{1}{1000}$，但衞星之中心點與太陽之距離，較之木星之距離亦卽大或小 $\frac{1}{2000}$，卽是，大或小 $\frac{1}{5}$ 的最外的衞星與木星間之距離．軌道方面發生此項離心率必能爲我人所容易觀察到．但衞星繞木星的軌道，係同心的，故木星及其衞星對於太陽之重力的加速必相等．因爲這個理由，土星及其衞星對於太陽之重量，在相同的距離內，與其物質之量相比．此外，月球與地球對於太陽或則完全沒有重量，或則其重量必與其質量完全相比．按之 § 6, 系 1 及 3, 月球及地球必有重量．所以，任何一行星之各部分，其對於一其他行星之重量，其相比等於物質之量相比．蓋如其中有一部或多部分，其吸引作用較之其物質量之比例爲大或小，則此全個行星之重力必較之與其物質量相比的爲大或小；至於此項部分爲行星

之外面的或內面的部分，全無關係。

今如設想將地球上之物體高舉入月球之軌道，則可將其與月球上之物體相比較。倘其重量與月球外部之重量相比，如物質之量相比，但與內部之重量相比，其比率較大或小，則此項物體與全月球之重量相比，其比率必較大或較小。然此與我們以前所已證明者相矛盾。

系 1. 所以物體之重量與其形狀或組織無關。

蓋如物體之重量能隨其形狀而改變，則一時可很大，一時又可很小，雖物質之量相等，而重量無有一定。此與經驗完全不合。

系 2. 一切圍於地球四周的物體對於地球有重量，倘其與地球之距離相等，則其重量與其所含之物質量相比。

在一切可得到的物體方面，此均可用試驗證明之，而按第三規律，我們卽可將其推廣至一切物體視之爲普遍的。倘有某種物體完全沒有重量，或其吸引作用小於其物質量之比率，則因此項物體

與其他物體之不同處祇在其部分之形狀（按亞里士多德，笛卡爾及其他諸人），則經形狀改變後，此項物體可轉變成爲與普通一般的物體，其重力與其物質之量相比．反之，很重的物體亦可經若干時間後成爲無有重量的物體．如是，重量即與形狀有關，隨形狀而變，此即與系 1 中所言者相矛盾．

系 3. 一切空間，不是以相同的強度被佔滿．

倘然如此，則在空氣附近的流體之比重，因其物質密度之大，不會對於水銀，金或其他密度較大的物體退讓．因之，金或其他物體在空氣內不會下降；蓋物體在流體內能下降，祇因其比重較大的緣故．但如將某一部空間內之物質量稀薄化至某種程度，使其減小，則亦必可將其稀薄化至於無限．

系 4. 倘一切物體之一切固定的微粒，其密度均相等，非有細管發生不會稀疏，則可有一眞空．

倘微粒之惰性力與其大小相比，則我斷定此項微粒爲等密的．

系 5. 重力與磁力之性質不同．

蓋磁力不與所吸引的物質之量相比．有若干種的物體，其被磁力之吸引較強，若干種較弱，有的物體則完全不受其吸引．同一物體之磁力可增加或減少之；有時候，就其與質量之比而言，較之重力為強．其與距離之關係，亦非為隨距離之平方而減小，差不多與其三次方同減小，此為我用粗的試驗所測過者．

§ 9. 定理．　一切物體均有重力，而且與其所含的物質之量相比．

以上我們已經證明，一切行星相互間均有重力，而如將其中之某一個特別提出，則其他行星對此的重力，均與距此的距離之平方成反比，因而一切行星之重力均與其所含物質之量相比．又，一行星 A 之一切部分對於一其他行星 B 均有重力；任何一部分之重力與其全體之重力相比，等於前者之物質量與後者之物質量相比．此外，則按運動第三定律，作用與其反作用恆相等；所以，B 對於 A 之一切部分亦均有重力，其對於任何一部之重力

與其對於全行星之重力相比，如此部分之物質與全行星之物質相比.此即所欲證者.

系 1. 所以對於某一行星之整個的重力，係由對於其各部之重力所合成.

在磁力及電力的吸引方面,我們可見其例,因爲對於整個的吸引,是由對於各部的吸引所合成.倘我們設想將幾個小的星合成爲一大的行星，則其重力之關係亦是如此;因爲在這裏,全個的力亦由其組成的各部分之力所合成.

倘然有人對於此作反對之論，謂按照這個定律則地球上之一切物體間亦必有互相吸引力，但事實上我們却不能看到;則我可以如此回答之:此項物體間之重力與其對於地球之重力相比，等於前者之質量與後者之質量相比.因之,相互間的重力雖存在,但因其太小之故,不能爲吾人所觀察到.

系 2. 對於一物體任何部分之重力，與其距此部分的距離之平方成反比.

此可由第一編 § 117 之系 3 以知之.

§ 10. 定理． 兩個球之物質相互間有重量．今如此項物質在其距中心相等處爲均勻的，則其一球對於其他球之重量與二中心點間距離之平方成反比．

我們既已知道對於一整個行星之重力係由對於其各部分的重力所合成，又知道每一部分之力與其距離之平方成反比；但尙不能確定者，即，此項相比性，是否對於由諸部分力所合成的全力亦適用，或祇能近似的適用．我們很可以相信，此項相比性對於較大的距離可以完全適用，但在行星之面的附近必須受顯著的改變，其原因則在距離之不同以及位置之不同．不過由第一編 § 118 及 § 119，我們已可知道，此項相比性即在該項狀況下亦仍準確．

系 1. 由此，我們可求得物體對於各個行星之重量，並將其互相比較．

在圓的軌道內繞行星而運動的相等物體之重量，其相比等於(按第一編 § 18 之系 2)此項徑相

比之正，環繞時間之平方之反．其在行星面上之重量，或在某種距離內之重量，其大或小均決定於距離平方之反比．

金星繞日的環繞時間爲

$$224\text{ 日 }16\tfrac{3}{4}\text{ 小時},$$

木星之第四衛星繞木星之環繞時間爲

$$16\text{ 日 }16\tfrac{8}{15}\text{ 小時},$$

土星之第六衛星（許根司所發見）繞土星之時間爲

$$15\text{ 日 }22\tfrac{2}{3}\text{ 小時},$$

而月球繞地球之時間則爲

$$27\text{ 日 }7\text{ 小時 }43\text{ 分}.$$

我應用此項環繞時間，金星與太陽之平均距離，木星第四衛星之最大差離 $8'16''$，許氏衛星之差離 $3'4''$ 以及月球之差離 $10'33''$，即可知在相等的距離內，相等的物體對於太陽，木星，土星，地球之中心的重量．與

$$1,\ \frac{1}{1067},\ \frac{1}{3121},\ \frac{1}{169282}$$

諸數各各相比．

在不相等的距離內,此項重量之改變,以距離之平方之反爲比例.例如相等的物體在

太陽,　木星,　土星,　地球

上,各與其中心相距

10000,　997,　791,　109

時,亦即是,在其面上時,各與

10000,　943,　529,　435

諸數相比.

以下我們可以知道,月球面上之物體,其重量爲何如.

系 2.　我們於是亦可求得此項天體所含之物質量.

蓋此項物質之量相比,等於距中心等遠的距離內之吸引力相比,或卽是,

太陽,木星,土星,地球之質量,

各與以下之數相比:

$$1,\quad \frac{1}{1067},\quad \frac{1}{3021},\quad \frac{1}{169282}.$$

倘太陽之視差大於或小於 $10''30'''$,則地球所含之

物質量,必須將其放大或縮小,以三次方爲度.

系 3. 行星之密度亦可求得之.

相等而且同類的物體對於同類的球之重量,按第一編 § 114, 是與後者之徑爲相比的,故不同類的球之密度相比,等於此項重量爲其徑所除後相比.但我們已知道,太陽,木星,土星及地球之徑,各與

10000, 997, 791, 109

相比,而對於此之重量各與

10000, 943, 529, 435

相比,故其密度各與

100; 94,6; 66,9; 399

相比.

由此項計算所得的地球之密度,與太陽之視差無關,而係由月球之視差所決定,故很準確.從可知太陽較木星爲密,木星較土星爲密,地球則較之太陽更密,而且密四倍.太陽之較稀薄,其原因在於其熱.月球則較之地球更密,此於以下明

之.

系4.　因此,行星愈小,則在尋常的狀況下,其密度愈大;故重力在其面上必與相等更接近.

在尋常的狀況下,與太陽較近者,其密度亦較大;所以地球較之木星爲密,木星較之土星爲密.其與太陽之距離不相同,能使每個行星,按照其密度爲比,受太陽之熱較多或較少.倘地球落入土星之軌道,則地面上的水必恆凍結;反之,倘地球在水星軌道內,其水必立即蒸發.熱與之相比的光,在水星面上較之在地面上強七倍(6,674倍);我曾用熱度表試驗過,倘太陽之熱較之現在的夏天增加七倍,則地面上之水立即沸騰.

水星上的物質必與其所受之熱相適當,這是無可疑的,故必較地球上之物質爲密.蓋物質愈密則其所需之熱量亦愈多,俾物質能受同樣的作用.

§11. 定理.　在行星之內部,重力之減小,差不多與距中心的距離之平方成反比.

倘行星之物質,其密度均相等,則按第一編

§ 115，此定理必完全準確。因此，關於此之差失，均由密度之不相等所發生。

§ 12. 定理。 行星在天空中之運動，可繼續至很久。

在第二編 § 61 內，我們已證明，一凍結的水球在空氣內運動時，因空氣之抵抗力，當其經過半徑長的道路時，失去其運動之 $\frac{1}{4586}$. 在較大的球方面，倘其速度亦較大，則其比亦必仍是如此。

地球較之水球之密度要大的多；此可以下法明之。倘地球全爲水所成，則可有密度較小的物體，因其比重之小，能自然浮至水面在其上浮動。因此理由，倘地球完全爲水所包圍，則因其較水爲疏，故必於一處向上浮，而水即向其相反的處所聚積。我們的地球既大部爲海洋所包圍，亦必可適用此定理。故如地球之密度不較水爲大，則必向上浮，而且按照其疏密之度，一部分透出水面，而水則向其相反的處所聚積。

用同樣的推論法，可知太陽上之黑斑，較之其

發光的物質爲輕，故浮在其上．此外，我們可知行星開始時如爲流體，則以後陸續必將較重的物質推入中心．

地球較之水尋常重二倍，而如深掘入地時，則可發見其較水重 3 倍, 4 倍乃至 5 倍之處．因此，地球較同樣大的水球，物質量必多 5 至 6 倍，尤因我們已知其密於木星四倍，故可如此推論．如後者之物質亦較水爲密，則在 30 日的時間內，經過其 459 半徑長的道路時，在與空氣同樣密的中介物內，必失去其運動之 $\frac{1}{10}$，但中介物之抵抗力隨其重量及密度而減小，例如水之重量較水銀小 $13\frac{5}{8}$ 倍，故其所發生的抵抗力亦少 $13\frac{5}{8}$ 倍，空氣較水之重又小 860 倍，故其抵抗力亦小於水者 860 倍．在天空中，星球在其內運行的中介物，其重量爲無限小，故其抵抗力差不多等於 0.

在第二編第 § 31 內，我們已知道，在高出地面 200 英里處，其空氣密度與我們四周的空氣密度相比，如

$$0,0000000000003998 : 30$$

$$= 1 : 75 \ Billion.$$

所以木星倘在如是密的中介物內運行，則雖經 1000000 年之長久，亦不會失去其運動之 $\frac{1}{1000000}$. 我們所知道的，祇是空氣，水蒸氣等在地面附近之抵抗力．倘用一玻璃筒，將其內的此項氣抽去，則物體在其內下墜時不受若何抵抗力，雖金與羽之輕重截然不相同，但其下墜速度相等，於同一時候達到底上，其所經之高爲 4, 6 或 8 英尺都可以；這是我們曾用試驗證明過的．因此，行星及彗星等在沒有空氣抵抗力的自由空間中運動時，其所歷時間必能很長久．

§ 13. 假設 *I*. 宇宙系統之中心係靜止不動的．

關於此點，一般都承認，不過有的人以地球爲宇宙之中心，有的人則以太陽爲宇宙之中心而已．我們現在試研究，由此可得若何的結果．

§ 14. 定理． 太陽與一切行星之共同重心係靜止的．

按之運動定律之系 4, 此重心或則靜止,或則作直線的等速運動.倘此重心恆向前進,則宇宙系統之中心不能靜止,此卽與假設相矛盾.

§ 15. 定理. 太陽恆作運動，但其與一切行星之共同重心相去甚微.

按 § 10 之系 2, 太陽之質量與木星之質量相比,如 1067 : 1. 木星與太陽之距離，與後者之半徑相比,其率較大.故此二天體之共同重心，落在一點,此點稍在太陽之面以上.同樣的推論，因太陽之質量與土星之質量相比,如 3021 : 1, 而後者與前者之距離，與太陽之半徑相比，其率較此略小,故並可知此二天體之共同重心落在一點,此點稍在太陽面之下.今如將此項計算法推至於其他各行星,則可知,倘地球及其他諸行星均在太陽之一面,此項星球之共同重心,其距太陽之中心不能超過太陽之徑的遠.在其他事項下,太陽之中心與此共同重心間之距離必更爲小，而且後者恆爲靜止的，故太陽之運動，按各行星位置之不同而異，

但決不能與該重心相去很遠.

系. 所以太陽，地球，及一切行星之共同重心必須視爲宇宙之中心.

蓋此項星球相互間有吸引力，而按運動之定律,因該項重力之作用，必恆爲動的.所以其動的中心點不能視爲靜的宇宙之中心.今如宇宙之中心處有一物體,一切物體對此之重力較爲強,如一般人的見解,則此優越的狀況必爲太陽所有.但太陽係動的,故必另取一點以爲宇宙之中心,此點當爲靜止的,而且與太陽之心相距甚微;尤其是，倘太陽之體較大,密度亦較大，則其相距尤微，因爲在此狀況下,太陽之運動更有限.

§16. 定理. 行星在橢圓內運行；此橢圓之一焦點,在太陽之中心.繞此點所作之面積，係與時間相比.

以前,我們已討論過此項現象.倘我們能知其原理,則天體之運動，不難推論而得.故如我們知道,行星對於太陽之重量與其距離之平方成反比,

則按第一編之 §13, §29, 及 §32 之系 1, 即可知,倘太陽靜止着,行星之相互間亦無作用,其軌道均爲橢圓無疑,其共同的一焦點在太陽之中心,繞此所作之面積,均與時間相比.但事實上,行星間並非無有相互作用,祇是很弱,故可將其略去不計,而按第一編之 §107, 此項作用對於橢圓軌道之影響亦甚小,倘我們假定太陽爲動的,則其影響尤小.

不過如木星對於土星之影響,則我們不能將其完全略去.對於木星的重力與對於太陽者(在同距離內)相比,如 1 : 1067. 故在木星與土星會合點之附近,二者間之距離與土星與太陽之距離相比,約如 4 : 9, 土星對於木星之重力與其對於太陽之重力相比,如 81 : 16·1067, 亦即是,約如 1 : 211.

故土星之軌道在該點附近必與木星同失調,天文學者當能注意到.隨此行星在會合點附近位置之不同,其偏心率或則增加或則減小.其遠日點

有時向前,有時則向後,而其運動則交互的加速並遲緩.按第一編 §108, 如假定其軌道之在下的焦點落在太陽與木星之共同重心處, 則木星之吸引所發生的土星運動之失調,差不多可以完全除去,不過其平均運動之失調亦不能免去.如是,最大的失調, 可使其不超出 2 分鐘. 每年的平均運動方面之最大的失調,亦不能超出二分鐘.

在木星與土星之會合點,太陽對於土星,木星對於土星,木星對於太陽之加速的重力相比,約如

$$16:81:\frac{16\cdot 81\cdot 3021}{25}$$

$$=16:81:156609.$$

太陽與木星對於土星的重力之差與木星對於太陽的重力相比,如

$$65:156609=1:2409.$$

土星對於木星運動所能發生的最大之失調作用,其力與此項差相比;因此,木星軌道之失調,遠較之土星軌道之失調爲小.

其餘諸行星之軌道失調更爲小, 不過地球不

在內,因爲月球對於地球之失調影響頗爲大.地球與月球之共同重心,繞着太陽在橢圓內運動,其一焦點即在太陽處，其繞此所作之面積，與時間相比.地球繞此共同重心所需之時間約爲一月.

§ 17. 定理.　軌道上之遠日點及交點係靜止的.

按第一編 § 29, 遠日點係靜止的，而按該編 § 13, 其平面亦靜止的,故其交點亦必如此.不過我們亦須承認，行星及彗星間之交互作用能發生某種參差;但因此項參差甚小,故於此可不論.

系 1.　恆星爲靜止的.

因爲對於遠日點及交點而言，此項星之位置係不變的.

系 2.　因爲地球之每年的運動，不引起某種可見到的視差，故其吸引力在太陽系之區域內不引起若何可見的作用，此則因其相互間之距離極大之故. 或者恆星間之相互作用亦因其相反的吸引力而抵消.此可由第一編之 § 22 知之.

§ 18. 附註. 與太陽相距最近的諸行星間之交互影響,如水星,金星,地球及火星等間之交互影響,因過於小,不能注意到,故其交點及遠日點均靜止着,但木星,土星及其他星之影響倘未計算入內.由重力之理論,我們可推知,遠日點對於恆星而言實稍有向後的運動,其率以距離太陽的遠之 $\frac{3}{2}$ 次方爲比.故如火星之遠日點在一百年內對於恆星而言向後運動至 33′20″,則地球之遠日點,以及金星水星之遠日點,在該項時間內,各經過 17′40″, 10′53″ 及 4′16″. 在前節內,我們對於此項不顯著的運動,並未注意過.

§ 19. 問題. 試求諸軌道之主要的徑.

按第一編 § 35, 可假定其與環繞時間之 $\frac{2}{3}$ 次方相比.於是可按該編 § 101, 將其徑放大之,其率等於行星及太陽之質量之和之三次方根,與太陽質量之三次方根之比.

§ 20. 問題. 試求諸軌道之偏心率及遠日點.

此問題之解法可由第一編 § 39 以得之.

§ 21. 定理. 行星之私轉係等速的，月之秤動係由其私轉所發生.

此可由運動之第一定律及第一編 § 107 之系 22 以知之.

對於恆星而言，木星完成其私轉之時間爲 9^h 56^m，火星爲 24^h39^m，金星爲 23^h，地球爲 23^h56^m，太陽爲 $25\frac{1}{2}$ 日，月球爲 27 日 7^h45^m. 此可由其現象以知之. 因爲太陽面上之黑斑，對於地球而言，必須經 $27\frac{1}{2}$ 日然後回復原處，故對於恆星而言，太陽之私轉爲 $25\frac{1}{2}$. 月球之私轉約須一月，故其向遠處的焦點之面，差不多恆一定，而隨此點之位置定其與地球之相背關係. 此即是長的方面之月球秤動. 至其寬的方面之秤動，則由其寬及其軸對於黃道二傾斜所致. 此項秤動的理論，曼爾開托(*Mercator*)曾根據我所給他的信，於其所著天文學一書內詳細論過(書出版於 1676 年).

土星之最遠的衛星，即第六衛星，似乎亦作相似的運動，繞其軸旋轉，其向土星之面恆不變. 當

其與該行星軌道之東部相接近時,即不易看到,有時竟完全不見.所以此星對於地球能有其面之一部分向之,在此部分上有黑斑存在.此爲卡西尼所首先注意到的.

木星之最遠的衞星,似乎亦以相同的方法繞其軸旋轉.在其與木星相背的面上,有一黑斑,而當此衞星落在木星及吾人視線之中間時,此黑斑在吾人看來,好像是在木星上的.

§22. 定理. 行星之軸小於其赤道之徑.

倘行星無私轉,則因其各部分之重力均相等,故必爲球形.但其私轉的結果,能使其求離旋轉軸的物質,向赤道高起.但如其物質爲流體的,則其向赤道之高起,必使此圓之半徑增大,同時,因兩極沈下故軸即縮短.由天文上的觀察,可知木星之連結兩極的徑,較之其連結東西的徑爲小.用同樣的理論法,可知,我們的地球倘非赤道高於兩極,則後者處之海洋下沈因而能將陸地淹沒.

§23. 定理. 試求一行星兩軸之比.

我們同國的人諾爾吳 (*Norwood*) 曾於 1635 年測量過倫敦與約克(*York*)間之長爲 905751 英尺；他又測定兩處之緯度差爲 2°28′，故每度爲 367196 英尺，即，57300 *Toisen*.

皮卡(*Picard*) 又曾於阿米安 (*Amiens*) 及馬伏新(*Malvoisin*)間測過 1°22′55″ 的弧，得每度之數爲 57060 *Toisen*.

卡西尼 (其父) 測過可利烏爾 (*Collioure*) 及巴黎天文臺間之度數，其子又加上了天文臺至鄧開欣 (*Dünkirchen*) 的塔中間之距離.如是所得之全部距離爲 486156½ *Toisen*, 而可利烏爾與鄧開欣間之度差爲 8°31′12⅚″, 故得每度爲 57061 *Toisen*.

由此項平均值，即 57060 *Toisen*，得地球之周爲

123249600 巴黎尺，

其半徑爲 19615800 巴黎尺.

不過在這裏，我們係假定地球爲圓形的.

以上我們已知道，在巴黎的緯度下，重物下墜

時一秒鐘內所經過之道路爲 15 尺 1 寸 $1\frac{7}{9}$ 分，即，$2173\frac{7}{9}$ 分.但物體之重量能爲其四周空氣之重量所減小. 今設所減小者爲其全重量的一萬分之一，則物體在眞空內下墜時，一秒鐘內所經過之道路，當爲 2174 分.倘物體在一圓內運動，此圓之半徑爲 19615800 巴黎尺，其環繞時間爲 $23^h56^m4^s$，則一秒鐘內所經過之弧爲 1433,46 尺. 此弧之矢爲 0,0523656 尺，即 7,54064 分.

在巴黎的緯度下，物體下墜時之重力與赤道下之離心力相比，如

$$2174:7,54064.$$

赤道下的離心力與巴黎緯度下的離心力相比，等於該緯度之半徑之平方與其餘弦之平方相比，即是，如

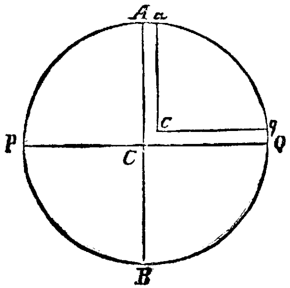
$$7,54064:3,267.$$

今將此項力加於一其他力上（此其他力即在巴黎的緯度下使物體下墜的力），則其所經過的空間，一秒鐘爲 2777,267 分，即，15 尺 1 寸 5,267

分.又,此緯度下之全部重力與赤道下之離心力相比,如

$$2777,267 : 7,54064 = 289 : 1.$$

今設 $APBQ$ 爲地球之形,此形並非爲球形,而係一橢圓形,卽將一橢圓環其小軸 PQ 旋轉而產生者.又設 $ACQqca$ 爲一孔道,由 Qq 極通至中心 Cc,復由此通至赤道 Aa,其內盛有水.如是則 $ACca$ 內之水,其重量與 $QCcq$ 內水之重量相比,如 $289 : 288$,其原因則因旋轉運動所發生的離心力能將 289 之一部分抵消,故 $ACca$ 內之 288 部分水能與其他 289 部分相當.



第一八八圖

按第一編 § 137 系 2 之方法,我求得,倘地球爲均匀的物質所成,沒有一切運動,而且其 PQ 軸與 AB 徑相比,如 $100 : 101$,則 Q 處之重力與

(中心爲 C, 半徑爲 CP 或 CQ 的)球上 Q 處之重力相比,如 126∶125.

用同樣的推論法,可知,將 $APBQ$ 橢圓環其 AB 軸旋轉而作成的卵形上 A 點之重力,與以 C 爲中心 CA 爲半徑而作成的球上 A 點之重力相比,如 125∶126.

又,地球上 A 點之重力,爲該卵形上重力及球上重力之中比.蓋如將後者之徑按 101∶100 減小之,則即成爲地球之形,而將此形以同比例減小其一徑時,即成爲該項卵形.在前一事及後一事,A 點之重力即差不多以此率減小.

所以球上 A 點之重力與地球上 A 點之重力相比,如 126∶125,5, 而以 CQ 爲半徑的球上 Q 點之重力,與以 CA 爲半徑的球上 A 點之重力相比,如其徑相比,即,如 100∶101.

今將　　126∶125,

126∶125,5,

100∶101

三比例相結合，即得地球上 Q 點之重力與其 A 點之重力相比為 501：500.

按第一編 §137 系 3, $ACca$ 及 $QCcq$ 內之重力，與各該處所距地心的距離相比.故如將此項孔道用橫的相距等遠的面分割成為若干段，則其任何多的段（在一孔道內者）之重量，與其他等多的段（在他孔道內者）之重量相比，等於

$$101\cdot500:100\cdot501=505:501$$

所以 $ACca$ 內任何一段的離心力，即由私轉所發生的離心力，與此段之重量相比，如 4：505, 而由此 505 部分上減去其 4, 則二孔道內之重量即相等，而流體成為均勢.

不過任何一段之離心力與其重量相比，如 1：289, 即，離心力當為重量之 $\frac{4}{505}$, 但實際上祇為 $\frac{1}{289}$. 因此，我們可用一簡單的比例以知道，倘因離心力 $\frac{4}{505}$ 之作用能將 $ACca$ 內水之高超過 $QCcq$ 內水高之 $\frac{1}{100}$, 則離心力 $\frac{1}{289}$ 祇能引起相似的差 $\frac{1}{229}$ 高.於是，地球之軸與赤道之徑相比，如

229：230.

按皮卡之計算，地球之平均半徑爲 19615800 巴黎尺＝3923,16 英里；所以地球在赤道上較之其極爲高，所超出的爲 85472 尺＝$17\frac{1}{10}$ 英里，而

赤道本身之高約爲 19658600 尺，

兩極本身之高約爲 19573000 尺。

倘有一行星較之地球爲小或大，但其密度及私轉之時間仍如此，則離心力與重力之比亦仍如此，因而其軸與赤道徑之比亦不變。

倘私轉之速度以某種比率增加或減小，則離心力以其平方增加或減小，因而徑之差亦差不多以同樣的平方比增加或減小。倘其密度亦以某種比率增加或減小，則對此的重力亦以同樣的比例增加或減小，但徑之差則以此比減小或增加，適與此相反。對於恆星而言，地球之私轉爲 23^h56^m，木星爲 9^h56^m，故此項時間之平方相比，如 29：5，而其密度相比，如 400：94,5.

所以木星方面徑之差與較小的徑相比，如

$$\frac{29}{5}\cdot\frac{400}{94,5}\cdot\frac{1}{229}:1,$$

或差不多如

$$1:9\tfrac{1}{3}.$$

木星自東至西的徑與兩極間之徑相比，差不多如 $10\frac{1}{3}:9\frac{1}{3}$.

但觀察上所得的最大的徑爲 $37''$，故最小的爲 $33''25'''$；因光線上所生錯誤之故，每個上均增加 $3''$，則此行星之表面上可見的徑爲 $40''$ 及 $36''25'''$，故其相比差不多如 $11\frac{1}{6}:10\frac{1}{6}$.

不過在這裏，我們須假定，木星之一切物質，其密度均相同.倘在赤道附近物質較密，則其徑相比，可爲 $12:11$，或 $13:12$，或 $14:13$.

一六九一年時，卡西尼觀察到木星東面方向內之徑，較之兩極間之徑超過 $\frac{1}{15}$. 我們同國的人旁德 (*Pouud*) 亦曾用 123 尺長的遠鏡及精確的測微計於一七一九年時測量過木星之徑，所得如下：

(1) 一月 28 號 6^h，得

大徑爲 13,40,

小徑爲 12,28,

其比爲 12 : 11;

(2) 三月 6 號 7^h, 得

大徑爲 13,12,

小徑爲 12,20,

其比爲 $13\frac{3}{4} : 12\frac{3}{4}$;

(3) 三月 9 號 7^h, 得

大徑爲 13,12,

小徑爲 12,08,

其比爲 $12\frac{2}{3} : 11\frac{2}{3}$;

(4) 四月 9 號 9^h, 得

大徑爲 12,32,

小徑爲 11,48,

其比爲 $14\frac{1}{2} : 13\frac{1}{2}$.

此理論與事實相符，而行星在其赤道處受日光之熱亦較強。

因地球之私轉,赤道下之重力必減小,此亦可

用擺錘試驗證明;以下當明之.

§ 24. 問題. 試求地球各處之物體重量，將其比較之.

以前曾指出,孔道 $ACQqca$ (圖 188)兩管內所有水之重量,係相等的，其部分之重量 (此項部分與管相比,其在全部中之位置相同) 相比，如其全重量相比,故相等. 所以此項相等，在兩管內位置相同的重量，其相比如 230 : 229. 凡同類而相等的物體,其關係均如此;祇須此項物在管內之位置相同;其重量之相比,如此項管相比之反,即,如此項物體與地心之距離之反比.又,在地面上的物體之重量,其相比亦如其距地心之遠相比之反.

從可知地面上任何處之重量，與該處距地心之遠成反比,故如假定地球爲扁圓形,則其比可即求得.由此，我們可得以下之定理: 由赤道向兩極所,重量之增加,差不多與其度數之正弦之平方相比. 子午線內緯度之弧，其增加差不多亦以此比. 巴黎的緯度爲 48°50′, 赤道下的緯度爲 0°0′, 兩極

下的緯度爲 90°; 故其倍長的弧之正矢爲 11334, 0, 20000, 而半徑則爲 10000. 兩極下的重力與赤道下的重力相比, 爲 230 : 229, 故前者之超過後者爲 1 : 229. 從可知巴黎緯度下的重力之超出爲

$$1 \cdot \frac{11334}{20000} : 229,$$

而二處全部重力相比,如

$$2295667 : 2290000.$$

但振動時間相同的擺錘之長相比, 等於重力之相比, 而巴黎的緯度下之秒擺錘, 其長爲 3 尺 $8\frac{1}{2}$ 分,或因空氣之重,當爲 3 尺 $8\frac{5}{9}$ 分,故赤道下擺錘之長,必短 1,087 分.

用相似的算法,我得到以下之表:

所在地之緯度	擺錘之長		子午度之長
度數	尺	分	*Toisen*
0	3	7,468	56637
5	3	7,482	56642
10	3	7,526	56659

15	3	7,596	56687
20	3	7,692	56724
25	3	7,812	56769
30	3	7,948	56823
35	3	8,099	56882
40	3	8,261	56945
41	3	8,294	56958
42	3	8,327	56971
43	3	8,361	56984
44	3	8,394	56997
45	3	8,428	57010
46	3	8,461	57020
47	3	8,494	57035
48	3	8,528	57048
49	3	8,561	57061
50	3	8,594	57074
55	3	8,756	57137
60	3	8,907	57196

65	3	9,044	57250
70	3	9,162	57295
75	3	9,258	57332
80	3	9,329	57360
85	3	9,372	57377
90	3	9,387	57382

由此表可知其相差極微，故在地理學上可將地球視爲一球形；尤其是，倘赤道處之物質較兩極爲密，即無甚大差發生。

有若干天文學者，曾在極遠處作過天文視察的，都注意到擺錘鐘在赤道處走得較慢。首先注意到此者爲利休(*Richer*)在開恩島(*Insel Cayenne*)之視察。他於八月中觀察恆星之經過子午線，注意到他的鐘對於太陽之平均運動而言走得慢了，其每日之差爲 2^m28^s。

他於是作一單純的擺錘，使其振動與極好的鐘之振動同時，然後求其長；如是，他反復作了極多次的試驗，共歷十個月之久，每星期試驗幾次。

當他回至法國時，他將此擺錘之長與巴黎秒擺錘鐘之長相比較，知道此擺錘之長較之巴黎者短約 $1\frac{1}{4}$ 分.

自此以後，我們的同國人哈雷 (*Halley*) 於一六七七年又發見，聖海倫那 (*St. Helena*) 擺錘鐘之行走，較倫敦爲慢. 他雖沒有將其差測定，但他將擺錘縮短至 $\frac{1}{8}$ 寸或 $1\frac{1}{2}$ 分.

至一六八二年時，凡林 (*Varin*) 及德海 (*Deshayes*) 又於巴黎天文臺上測定秒擺錘鐘之長爲 3 尺 $8\frac{5}{9}$ 分，並用同樣的方法，測定哥利亞 (*Gorea*) 島上等時的擺錘之長爲 3 尺 $6\frac{5}{9}$ 分. 所以其差爲二分.

同年，他們又測定古德洛 (*Guadeloupe*) 及馬丁尼克 (*Martinique*) 二島上擺錘之長爲 3 尺 $6\frac{1}{2}$ 分.

古柏萊 (*Couplet*) 於一六九七年時在巴黎天文台上將他的擺錘鐘按照平均太陽時間對準，使其與太陽之平均運動相符合. 後來於次年十一月

他到利沙棚(*Lissabon*)時，發見該鐘之行走慢了，在二十四小時內慢 2^m13^s.

翌年三月，他又於巴呂波 (*Paraïbo*) 發見該鐘於二十四小時內慢 4^m12^s.

他測定利沙棚之擺錘當較巴黎者短 $2\frac{1}{2}$ 分.而巴呂波者則當短 $3\frac{2}{3}$ 分.按他所觀察到的時間之差，此項擺錘長之差當爲 $1\frac{1}{3}$ 分及 $2\frac{5}{9}$ 分.因此，他的試驗或者有不精確處.

一六九九及一七〇〇年時，德海又於美洲之開恩及格拉那大(*Granada*)島測定秒擺錘之長不到 3 尺 $6\frac{1}{2}$ 分.在聖克利司托夫(*St. Christoph*)島上，他測得此長爲 3 尺 $6\frac{1}{4}$ 分，而在聖杜明古(*St. Domingo*)島上，爲 3 尺 7 分.

一七〇四年時，弗依安(*Feuillén*)於美洲之保托倍羅(*Portobello*)測得秒擺錘之長爲 3 尺 $5\frac{7}{12}$ 分，差不多較巴黎者短 3 分，不過在他的觀察方面，恐有錯誤，因爲當他後來到馬丁尼克時，他發見等時的擺錘之長爲 3 尺 $5\frac{10}{12}$ 分.

在　巴呂波，緯度爲 $-6°38'$，

保托倍羅，緯度爲 $+9°33'$，

開恩，緯度爲 $+4°55'$，

哥利亞，緯度爲 $+14°40'$，

古德洛，緯度爲 $+14°0'$，

格拉那大，緯度爲 $+12°6'$，

聖克利司托夫，緯度爲 $+17°19'$，

聖杜明古，緯度爲 $+19°48'$，

巴黎擺錘之長超過這些地方之長的數目，較之以前所得表上之數略爲大。因此，地球赤道部分之凸起，必較之以前所推得者爲高，而地心處之物質亦必較之地面爲密；不過同時我們又須假定，赤道熱帶區域之溫度，不致使擺錘之長增加。

皮卡曾觀察過，在冰凍氣候下一尺長的鐵條，將其在火上烤熱時，其長增加至一尺 $\frac{1}{4}$ 分。以後，拉依耳(*la Hire*)又注意到，嚴冬時長爲 6 尺的鐵條，至盛夏置於日光下時，其長卽增至 6 尺 $\frac{2}{3}$ 分。但是鐘之擺錘從不將其置在日光下，而且其所受

外來之熱，還不及人身所受者．因此，擺錘夏天時長之增加，不能較之冬天超過 $\frac{1}{4}$ 分．所以在各地所得擺錘長之差，不能歸之於氣候之溫度．我們亦不能將此項差歸之於觀察之錯誤，因為此項錯誤縱然不免，但亦非極大者，故儘可略去．這些試驗，一致的證明赤道下擺錘之長須縮短，較之巴黎天文臺者短一些，而且由各個觀察所得者，此項差恆 $>1\frac{1}{4}$ 分而 $<2\frac{2}{3}$ 分．在利休於開恩之觀察方面，得此項差為 $1\frac{1}{4}$ 分；據德海之觀察，當為 $1\frac{1}{2}$ 或 $1\frac{3}{4}$ 分，而據其他諸人的觀察，為 2 分左右．此項結果之不同，可歸之於觀察者本身所作之錯誤，地球內部之不一致，山嶺之影響，空氣溫度之不同，等等原因．

據我所能判斷者，3 尺長的鐵條，在英國的氣候下，冬天較之夏天短 $\frac{1}{6}$ 分．今將此項由溫度所發生的差由 $1\frac{1}{4}$ 分上減去，則尚餘 $1\frac{1}{12}$ 分的差；此與以前理論上所推得的 $1\frac{87}{1000}$ 分相符合．利休氏於開恩島作了極多次的試驗，經十月之久，每星期

必試驗幾次，將該處所得擺錘之長與法國所定者相比較.其他諸人之試驗，沒有利氏那樣細心，故我們可將利氏的觀察作爲較可靠的材料;如是,我們可推定,地球之赤道處,較之其兩極約高十七英里;此與以前理論上所得者亦一致.

§25. 定理. 二分點恆向後退，而在每年的環繞方面,地球之軸恆作章動，緣此，恆二次向黃道接近而二次返其原來的位置.

此可由第一編 §107, 系 20 以知之.不過此項章動極弱,差不多不能注意到.

§26. 定理. 月球之一切運動及一切差失，均由以上之原則發生.

大的行星一方面繞太陽運行,同時,亦帶有小的行星在其軌道內運動；此項小行星之軌道亦爲橢圓,其一焦點即爲該項大行星之所在.此可由第一編 §106 以知之.小行星之運動,以多種方式爲太陽所影響致失調，因爲太陽對於此項運動必能使其發生種種差失，此可由我們的月球之運動方

面見到.在朔望點方面，月球之運動較速，以其向地球的半徑,在等時間內所作之面積較大,其軌道之曲率較小，故較之在直角距離方面與地球之距離爲近.月球之偏心率,當其遠地點落在朔望點時爲最大,而如落在直角距離處則爲最小.所以月球在近地點時運動最速，而與地球亦較接近；反之，在遠地點時運動較慢,亦與地球距離較遠. 又，遠地點向前移動,但交軌點則向後退,不過其運動並不相等. 在朔望點方面，遠地點之向前移動較速，而在直角距離處,其向後退較遲；因此項前進較之後退爲速,故每年必向前進.但交軌點在朔望點方面係靜止着,而在直角距離處很快的向後退.至於月球之最大緯度,則在直角距離方面,較之在朔望點爲大. 其平均運動. 在地球之近日點方面較遲，在其遠日點方面較速. 此爲天文學者在月球運動方面所觀察到的最顯著的差失.

但此外尙有些其他的現象，爲以前天文學者所未觀察到,而且其對於月球運動之失調影響,不

能歸納之在一定的定律支配之下.這些現象中,如月球之遠地點及交軌點之運動速度，朔望點方面最大偏心率及直角距離點方面最小偏心率二者間之差,以及某種差失，即尋常所稱為變差者.此項量之增減,均與太陽之外觀的徑之三次方相比.其變差之增加及減少，則差不多與直角距離點中間所經過的時間之平方相比.在天文測算方面,此項差失通常均將其與月球之中心均差相結連.

§ 27. 問題.　試由月球之運動，以推論木星及土星的衛星運動方面之差失.

由我們的月球之運動方面，可推得木星衛星亦即木星之月球之相似的運動.其法如下.

按第一編 § 107 之系 16, 木星之最在外的衛星,其交軌點之平均運動,與我們月球方面的此項運動相比，等於地球之環繞時間比木星環繞時間之平方，以及木星衛星環繞木星的時間比月球環繞地球的時間,二者之合.由此可知,在 100 年內,第四衛星之交軌點向後運動至 8°24′.

按同系，並可知在內的衛星之交軌點之平均運動與上述的運動相比，等於該項環繞時間與此衛星之環繞時間相比．因此，我們可視之爲已知者．

同時，並可知道上回歸點之前進的運動與其交軌點之後退的運動相比，如月球遠地點之運動與其交軌點之運動相比．所以亦可視爲已知者．不過如是所得的上回歸點之運動，必須以 5 : 9 或差不多 1:2 的比率減小之，其理由這裏不能詳論了．

任何一衛星之交軌點及上回歸點之最大的均差，與月球之交軌點及遠地點之最大均差相比，差不多等於前二者在其環繞時間內之運動與後二者在其環繞時間內之運動相比．

衛星之變差，如我們於木星方面所見者，與月球之變差相比，等於兩面的交軌點之全部運動（在衛星及月球繞太陽的時間內者）相比．此亦可由該系知之．而在第四衛星方面，此項變差不能超出 5,2″．

§ 28. 定理. 海洋之潮落潮漲，係由於太陽及月球之影響.

按第一編 § 107 系 19 及 20,可知在一太陽日及月球日之內,海洋之潮漲及落必有二次,而且最大的潮漲,係跟着星球之經過子午線,其時間不出六小時. 在大西洋及愛提沃皮 (*Aethiopisches*) 海方面確是如此,其地帶為法國及好望角之間;而在太平洋智利及祕魯附近亦是如此. 在這些海岸方面,潮漲恆在第二,第三,及第四小時內,祗有極少數地方,則因海底關係而遲發. 此處所謂小時,係由星球經過子午線算起，其大小則為一時間之$\frac{1}{24}$，此時間為月球於其外觀的私轉上回到子午線時所必須者.

太陽或月球使海洋潮漲之最大的力，係在此項星球達到子午線之際. 此項力能繼續至相當的時間,以後復有力增加,使海洋之潮漲至最高度為止.在海岸方面，其時間可歷一，二或有時候至三小時;倘海洋多沙牀,則其時間可更久.

此項星球所引起的運動,有此二種,但不能分別觀察到,而恆合而爲一.在二星球之會合點或對點,其影響爲最大,因爲其影響合併在一起.在直角距離方面,太陽之漲潮作用適在月球之落潮作用的時間內;所以潮之漲落爲此二作用之差之結果.故影響爲最小.但我們經驗上知道,月球對於潮之影響較之太陽爲大,故有時候在第三月球小時之際,亦能有最大的潮漲.在朔望點及直角距離以外,單由月球之影響,潮必須於第三月球小時內達到最高,面如單由太陽之影響,則亦須於第三太陽時發生.但如由二者之組合的影響,則其最高的潮漲,在此項時間之中間,而且與月球之第三時較爲接近.當月球由朔望點轉至直角距離時,第三太陽時在第三月球時之前,最大的潮漲亦即在第三月球時之前.由直角距離至朔望時,適爲相反,最大的潮漲在第三月球時之後.

這是大海洋內之潮漲潮落之定律;在河海入口之處,尋常潮漲較遲.星球之影響,與其距地球

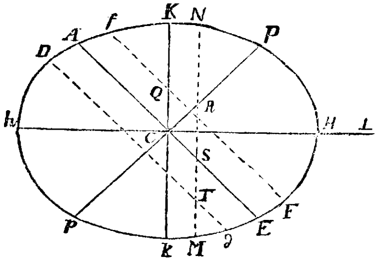
之遠近有關.在距離較近處，其影響自較大，而在遠處即較小. 此項影響與其外觀的徑之三次方相比. 在冬季，太陽落入其近地處,故其對於海洋之影響較大，所以朔望點之潮漲作用在冬季較夏季爲大,直角距離點者則反之.

月球每月落入近地點一次,故當此時,潮漲亦較其餘的日子大.因爲這個緣故,所以在兩個相接的朔望點方面，其最大潮漲，不能完全互相連接.

此二星球之影響亦與距赤道之遠有關. 蓋如其一星球在極處，則其對水之各部其吸引力爲不變的,故其作用不會有大小,而不能引起交互的運動.故如星球離開赤道而向兩極,則其影響必漸減小,所以在二至的朔望點時，其影響小，而在二分的朔望點，其影響大. 但在二至的直角距離時,影響反大,在二分的直角距離時，影響又小，此則因月球當赤道，其影響超過太陽所致. 所以在二分時，最大的影響在朔望點，而在直角距離點爲最小.同時，由經驗上可以知道，朔望點之最大影響

後，必隨以直角距離點的最小影響.

因爲冬季時太陽與地球較接近，故最大的及最小的潮之漲落，多在春分之前，少在其後，多在秋分之後，少在其前.



第一八九圖

又，星球之影響，亦與所在地之緯度有關. 今設 $ApEP$ 爲地球，其上各處均有甚深的海洋，C 爲其中心點，P, p 爲兩極，AE 爲赤道.試於赤道外任取一點 F, Ff 線與赤道相平行，Dd 則爲在赤道對面與此相當的平行線.設 L 爲一處所，月球於三小時前曾在該處，H 爲由此垂直至地球之點，h 則爲地球對面之相當點.K, k 二處與前者相距 90°, CH 及 Ch 則爲海洋之最高度，CK 及 Ck 爲其最低度，均由 C 出發量之.今以 Hh 及 Kk 爲軸作一橢圓，則此橢圓環其大

軸 Hh 旋轉時,產生一卵形 $HPKhpk$, 很可以代表海洋之形狀. CF, Cf, CD, Cd 爲 F, f, D, d 各點海洋之高.

在橢圓之旋轉時,其任何點 N 作成一圓 MN, 與 Ff, Dd 相交於 R 及 T, 與赤道 AE 相交於 S; 如是則圓上各點 R, S, T 處海洋之高均爲 CN. 在 F 之每日的私轉方面, F 處水之最高,在月球達其上升最高處後之第三小時,其最低處則在 Q, 在月球落下後之第三小時. 此後則 f 處亦爲最高, 在月球達其落下最低處後之第三小時, 於是其最低又復在 Q, 亦在月球上升後三小時.第二次的水之高較之第一次爲小.

今設想將全部海洋, 分割成爲兩個半球形的流,其一向北, 在 KHk 半球上, 其他則向南,在 Khk 半球上. 此二流恆相反, 依次進入地球上每一處之子午線,其時間爲 12 月球小時.但在北的處所, 受向北的流爲多, 在南者則受向南者爲多, 故可有組合的潮漲,在赤道外的處所,爲二星球所

升降下落者,其大或小爲交互的.當月球向該處天頂時,最大的潮漲約在月球達到天頂後之第三小時.反之,潮即成爲最小.此項潮漲之最大的差在二至時間內;尤其是,當上升的月球之交軌點落在白羊宮之第一點時.此與經驗亦相符合,因爲在冬季時,朝潮較之夜潮爲大;在夏季則反之.哥柏辣司(*Colepress*)及司徒母(*Sturm*)曾於柏利毛(*Plymouth*)觀察到此項差別達 1 尺,於不列司土(*Bristol*)爲 15 寸.

以上所論的海洋之運動,因潮之交互的力能有所改變,蓋在星球之影響消失後,潮尚能繼續至若干時.此項運動之保存,能減小交互的潮漲之差,使適在朔望點後發生的較大,而適在直角距離之後發生的較小.因此,上述二處潮漲之差,不能超過 1 尺或 15 寸,而該二處之最大潮漲非爲朔望後之第一而爲其第三日.倘海潮經過沙磧,此項運動即能減小,因而在某種海峽及海流會合處,最大的潮常在朔望後之第四乃至第五日.

有時候，大洋的潮亦能經過各處的海峽而同至一處，其經過某個海峽時可較之其他爲速或緩如是，此項潮漲即分成爲數部，相繼而至，因而發生各種新的運動．試設想有兩注相等的潮，由不同的處所向某處來，其一在前六小時，於月球抵天中後之第三小時達到．倘月球之天中時在赤道方面，則每六小時有相等的潮來，而與潮落適相遇．如是，其影響使海水無有起伏，終日平靜．倘月球離赤道，則潮即交互的時大時小，而有二次大潮二次小潮．二次大潮的影響使水在其中間的一個時候能達到最高度．在一次大一次小的中間，水所達到的高度亦爲中平，而在二次小的中間，水亦落入最低之度．所以在二十四小時之間，水不如尋常那樣的有二次高二次低，但祇有一次最高一次最低．倘月球由赤道離開，則水之最高在月球達到天中後之第六或第十三小時．

在倍休姆(*Batsham*)港的一個領港人之觀察中，哈雷氏發見了此項現象之許多的例；該港屬於

虹口法院移交
陳公博案內圖書

敦昆(*Tunquin*)王國,其緯度爲北 20°50′. 在這一個港方面,當月球經過赤道後之一天內,完全沒有潮漲.當月球開始向北時,卽可看到潮之漲落,但不如在他處那樣的有二次,而祇有一次.月落下時,潮漲,上升時,潮落.潮之漲隨月球之向北而增加,一直至第七或第八天,於是在以後的七天內,重復減小,其度與以前增加之度一樣.倘月球向相反的方向,則潮之漲轉而爲落;此項潮落在月落時發生,在月上時則潮漲.此種狀況一直繼續至月球重復改變其方向.欲到此港及其附近區域有二路,一在中國海在大陸及羅考尼亞(*Luconia*)島之間,一在印度洋在大陸及波奈河(*Borneo*)島之間.

故如海潮經過此項海峽,由印度洋在 12 小時內,由中國海在六小時內達到,則卽構成組合的運動.此二海洋是否有其他的屬性,此可由觀察以知之,我且不論.此項觀察則可於附近海岸去做.

以上,我已論述過月球及海洋之運動.尙須研究者,是此項運動之大小.

上海圖書館

上海图书馆藏书
A541 212 0004 0191B