大學用書

醫學與生物統計方法

郭祖超 著

正中書局印行

大學用書

醫學與生物統計方法

郭祖超著

正中書局印行

中華民國三十七年九月初版

醫學與生物統計方法

全一册　定價金圓劵二元二角五分
（精裝本定價另加金圓劵七角五分）
（外埠酌加運費匯費）

著者　郭祖超
發行人　蔣志澄
印刷所　正中書局
發行所　正中書局
（2327）

校整：向自

滬·本　2/2－0.15

序　　言

三十二年春著者承乏中央大學醫學院統計學講席時，即感醫學統計方法之參考書籍，在我國甚爲缺乏．從事研究工作者每借重於西籍．戰時西書難得，無待贅述．即戰後交通暢達，購置便利，而各書內容是否適合時代，符我國情，亦未敢必．余有鑒及此，爰不揣譾陋，在我國之醫學與生物科學雜誌中，儘量搜集統計資料，歷時兩載，粗具規模．經整理選擇後，乃以現代統計方法處理之，最後走筆爲文．書中所列參考文獻，計有專著三十册，論文九十二篇，其作者共一百四十一人．集此百餘位專家數十年之心血，始有本書之產生．著者得承諸先進之餘蔭，享文化之累積，其感與幸爲何如耶．

統計資料首貴眞實．故本書所舉例題悉係國內各專家之實驗結果，俾讀者有親切眞實之感，而無不合國情之弊．即習題資料亦必詳註出處，使初學者認識統計數字不得杜撰虛構，並冀於日常訓練中養成其求眞務實之習慣．此尤著者所深致意焉．

最近二十餘年來，歐美統計學之進步極速．此項新發展，就著者所知者，儘量列入本書，如自由度(degrees of freedom)、t 測驗(t-test)、變異數分析(analysis of variance)、共變數(covariance)以及有關之實驗設計(design of experiments)等，均爲國內流行之統計學書籍大多未備者．惟掛一漏萬，在所難免．尙祈海內賢達，不吝指教，曷勝欣幸．

書中所用醫學名詞，係根據中華醫學會出版之高氏醫學辭彙第九版；度量衡譯名則根據部頒名詞；統計學譯名亦大多採用部頒統計學名詞，其爲該書所未備或尚待商榷者則另譯之，以供參考．又章節前之編號在短畫以左者表示章次，右者表示節次，如1-1爲第一章第一節，7-4爲第七章第四節，餘類推．

本書所列統計資料，除大多錄自已發表之研究論文者外，其中關於肺活量及血液循環與呼吸速率者，蒙蔡翹、吳襄兩教授所供給，關於營養實驗者則蒙鄭集教授暨戴重光、王德寶二先生所供給，其他如成都進益高級助產職業學校附屬產院，及四川省立成都高級醫事職業學校附屬產院等，均供給不少寶貴資料．又在寫作過程中，蒙鄭集教授之多方鼓勵，俞煥文教授之惠借書籍，以及華大醫學院圖書室予以參考借閱上之便利．師友之賜，所惠良多．書成之日，均當深致謝意者也．

三十四年九月二日

欣逢抗戰勝利日，於錦城．

目　次

第一章 緒 論

1-1. 醫學上何以需要統計學 生物界的現象千差萬別，而在千差萬別之中也有共同的原則可尋，若干事物之間更有相互的關係存在着. 要推求共同的原則，搜尋事物的關係，研究差別的現象，進而測知所得結果的是否可靠: 凡此種種，都得借助於統計學. 最近二三十年來，統計學突飛猛進，更替實驗設計打下了鞏固的基礎. 因此研究工作者，從研究計畫的開始，到最後結果的整理，隨時都需要統計學的知識做參考.

醫學的對象是人，人體的構造非常複雜，人與人之間又差別很大; 而且醫療的結果，常受着無數獨立變化的小因子影響着. 如疾病的嚴重程度，患病部分的血管分布，組織反應的力量，病人過去的歷史，體質的強弱，環境的情形，醫學的處理及其他種種因子，都會影響疾病的痊愈與否. 即使我們認爲一批病情相同的患者，他們彼此之間還有許多很小的差別存在着，也許這些差別目前還是無法查出的. 在有些病人的情境中，剛好使他痊愈的因子占着優勢; 有些病人卻反是. 因此同樣的處理方法，對於各個病人未必產生同樣的效果. 這些無數獨立變化的小因子，總稱爲'機遇'(chance). 臨床的診斷、病情的預測，都需要機遇、機率(probability)等概念做參考. 可是醫學上對於這些概念，無論中外都不大注意. P. G. Edge 氏(1) 在中華醫

學會第一次年會時，曾宣讀一篇論文，題爲‘統計學與醫學研究’，其中有一段話大意如下：‘凡細菌學家、原生動物學家、病理學家、免疫學家以及醫學領域內其他專家的觀點和實驗結果，都受到相當的重視．但當有人建議採用統計學做一種工具的時候，卻常常被偏見和蔑視所阻止．統計學何以這樣受人懷疑，其原因何在？這是值得研究的一個問題．’氏認爲‘這原因可以分做三方面：一部分由於醫學界保守分子的成見；一部分由於錯誤的見解，認爲這是一門新穎而沒有試用過的科學；還有一部分卻應由統計學家自己負責，當他們呈現統計結果的時候，其所用方法，每使人感到統計學是些神祕而很艱難的數學計算，超乎常人知識以外的’．這三方面總括起來可以說是人的因子．D. Mainland 氏(2) 更從日常生活和科學性質兩方面闡明了醫學上忽視機遇的原因：‘一爲一切思想和活動所共有的現象，便是很多東西的計數，如錢幣、書籍、候診室中的病人等，只要數得不錯，就可得到確定的報告；又日常很多的測量，如距離、高度、重量等，在通常環境之下，可以正確到所需要的程度．還有一個原因卻是醫學與牙醫方面所特有的．因爲醫學上所用量的方法，主要是從物理和化學方面來的，而在這兩門科學中，實驗誤差(experimental error)常比所測量的相差爲小．’（舉例來說，把同一件東西用極精細的天秤稱上若干次，每次的結果，可能有細微的出入，這種出入叫做實驗誤差．若以輕重不同的甲乙兩物分別稱上幾次，甲物有它的實驗誤差，乙物也有它的實驗誤差，但這些‘實驗誤差’和甲乙兩物重量的‘相差’比較起來是無足輕重的．這種情形在物理化學方面是如此，而在生物科學卻不然，因爲生物科學中的實驗誤差常比較的大．）本書作

者認爲這些困難是有方法可以克服的. 只要使人認識生物現象變異(variation)之大, 機遇和實驗誤差占着很重要的勢力, 所以不容忽視; 同時用具體的例子表明統計學對於醫學研究確有幫助, 經過相當時候, 統計學在醫學上的應用或許可以逐漸展開吧.

1-2. 常識的判斷和統計的處理　有人說: 我們過去許多的實驗結果, 只要求得各組的平均數, 必要時再算幾個百分數, 根據平均數或百分數的大小, 憑我們的常識, 就可以看出各組的差別. 例如我國二十歲男子的平均體重爲 54 仟克(卽公斤), 同年齡女子的平均體重爲 48 仟克, 男比女重是沒有問題的, 何必再要經過一番統計的計算, 旣添麻煩, 又耗時間. 這種僅憑數字表面值的推論, 就是所謂常識的判斷. 當兩組間的相差很大, 而各組內的個別差異(individual difference)比較小的時候, 常識的判斷和統計處理所得的結論, 可能是一樣的. 但是現在有十八個男嬰的平均體重爲 2868 克(卽公分), 十四個女嬰的平均體重爲 2878 克, 男女相差 10 克. 你能說初生的女嬰確是重於男嬰麽? 又如某種疾病, 用甲種方法處理了五個病人完全痊愈, 另用乙種方法處理了五十個病人, 結果只醫好了四十五人. 倘以治愈的百分數計, 前者爲 100%, 後者爲 90%, 你能說甲種處理法確比乙種好麽? 常識判斷底主要缺點, 是沒有把機遇考慮在內, 其所下的結論, 難免有錯誤的, 尤其在數字表面值剛好迎合研究者的希望的時候, 更容易得到似是而非的論斷. 本書作者曾檢視過與醫學有關的各種實驗研究報告, 其中經驗豐富的專家, 以敏銳的觀察下審愼的結論的固然很多, 可是也有僅憑表面的看法, 匆遽地下了斷語, 但經統計處理以後, 所得結論恰恰相反的. 在本書中將略提一

二例以說明統計處理在研究工作上的重要.統計處理除顧到機遇和實驗誤差以外，並可供給我們更多的知識，而這些知識僅憑常識的判斷是無從知道的.讀者看了後面各章，自可明瞭.

1–3. 實驗設計的重要 一般人有個錯誤的觀念，認爲統計只是最後的整理和計算，至於事先的計畫、調查、實驗和紀錄等等是與統計無關的.殊不知在計畫一個實驗或調查的時候，就應該洞觀全局，知道將來的結果怎樣用統計方法去處理？那些資料(data)需要詳細記載，那些項目可以略去？記載的表式如何纔能便於整理與統計？尤其重要的問題，如參加實驗的被試者(subjects)應有多少？這些被試者有沒有代表性？實驗的步驟應該怎樣安排纔能免除持久的偏性(bias)？——偏性是統計學上的名詞，現在舉兩個例子來說明它的意義.在打靶時，鎗彈打在紅星四周的機遇是相等的；但若因爲鎗的內彈道欠正確，結果鎗子都打在紅星左邊.這是物理方面的偏性現象.又如調查某地中上等家庭的兒童，發現該地兒童對於白喉免疫性比他處爲低.這裏面也有偏性存在.因爲貧苦兒童終日邂逅街頭，與帶菌者時常接觸，獲得自動的後天免疫性(active acquired immunity)的機會較多，富家子弟保護周到，反而不容易獲得.祇根據富家子弟所得的結果，不能代表這社會中的全體兒童的.——現代統計學家，如R. A. Fisher氏等，對於上面這些問題，已有特殊的貢獻.氏所著The Design of Experiments (3)一書，詳述各種實驗的設計，其原理和方法可應用到各方面，爲從事研究工作者所不可不讀的.

我國過去所發表的各種實驗，設計得好的固然不少，而計畫未臻完善的也很多.其中比較普徧的缺點有如下述：

(1) 實驗的方法不一致　有一個營養實驗，其控制組(control group)和實驗組(experimental group)的實驗時間各分五期，但前者每期七天，後者則每期六天. 照理控制組與實驗組間，除所實驗的因子可以有計畫的變化而外，其他的因子應儘量使之相等. 該實驗的目的，是在比較幾種食品的營養價值，那麼飼養'時間'顯然是被控制的因子，而不是可變化的因子. 兩組時間不等，無疑是設計上的一個缺點.

(2) 各組被試者的數目不一致　某實驗比較平臥與坐着時循環方面的變化. 其女性被試者平臥時有41人，而坐着時僅7人，相差在五倍以上. 但在日常生活中，每人都有平臥和坐着的時候，所以坐臥二組的人數應該一樣多. 這實驗最好令同一批被試者在不同時間受平臥與坐着時的兩種測量，這樣的設計當更爲合理.

(3) 各組被試者性別年齡等的分配不一致　例如關於動物生長的實驗，假使第一組裏雄的動物多，而第二組裏雌的多. 這兩組生長的快慢，可能受到性別的影響，卻未必全是處理方法(如飼料)不同的結果. 年齡方面也是如此，年幼時生長很快，成年後增加很少；若各組年齡的分配不同，結果就不容易比較.

(4) 各組被試者錯雜互用　第一組裏用過的一部分動物，移到第二、第三組裏來用. 這裏就有兩種情形發生：(甲)一部分是一個動物先後受到幾種不同的處理；(乙)另一部分是不同的動物分別受到一種不同的處理. 統計學上對於這兩種情形的計算方法是不同的，混在一起，徒然增加計算時的麻煩.

要補救上述幾種缺點，作者有下面的建議：(1)實驗的步驟必須

一致；(2)相互比較的各組所用被試者的數目應相等，如果要維持不等的比例，必須有充分的理由；(3)各組被試者的性別、年齡等分配，以及動物的窩別、原始體重等，應儘量使之相等；(4)若不同的被試者分別受到一種處理，那麼各組實驗應同時舉行，實驗時間必須一律，若同一被試者先後受到不同的處理，則應使全體被試者參加所有實驗，不能缺少或遺漏；(5)事先應有一通盤的計畫，不可陸續拼湊，因為拼湊成功的實驗，在季節、材料、技術等方面，都不容易完全一致．總之，實驗的要旨在控制別的因子，而使一個實驗的因子單獨變化．若因控制不周密，而有別的因子夾雜在內，致影響實驗的結果，這便是上文所說的'偏性'．

參加實驗的被試者，只是從所欲研究的大團體中抽出來的小團體．假想的大團體叫做全體(population 或譯母體)，手頭的小團體叫做樣本 (sample)．實驗或調查時所能得到的都是樣本，而並不是全體．樣本有大有小，但其為樣本則一．我們要使樣本為一'具體而微'的全體，那麼這樣本纔有代表性．例如某社會的人口，中年人(十五至四十九歲)占50%，十五歲以下的占 33%，五十歲以上的占 17%．現在要研究某種疾病與年齡的關係，那麼被調查的一部分人口其年齡分配最好也近於這樣的比例，而後這樣本可以說是全體的縮影．假使我們對於全體的詳細情形，事先並不知道，那麼，用什麼方法纔能使樣本具有代表性呢？統計學上有一個'隨機化' (randomization)的原則，便是解決這個問題的．例如我們要抽取某地戶口的百分之五作為研究的樣本(這過程叫做抽樣 sampling)，可先將該地所有的門牌號數順次排起來——若有兩街相鄰，甲街的門牌號數只有155號，

則乙街的 1 號可作爲 156 號，餘類推.——然後每二十個抽取一個，結果就得百分之五. 在開始抽取以前，先用二十個小玻璃球(取其圓滑，易於混和；如無玻璃球，改用豌豆亦可)，每球上貼一號碼，從1起，至 20 爲止. 這些球放在袋裏徹底混和，然後取出一個，看它的號碼，假定是 13. 這便是要調查的第一個門牌號數. 以後每隔二十家就去調查一家. 所以被調查的門牌號數是 13, 33, 53, 73, …….當二十個小玻璃球在袋內徹底混和後，被抽取的機遇是相等的，換句話說，任何一家被調查的機遇是相等的，這樣就沒有好惡存於其間. 所以隨機化的原則，可以避免偏性的產生，沒有偏性的樣本，纔能代表它的全體.

實驗設計還有一個'重複'(replication)的原則，便是說，參加實驗的被試者，應當有好幾個，而不能祇有一個. 根據一個被試者所下的結論是相當危險的. 在適當範圍內重複愈多，則愈正確. 重複除增加正確性以外，並可使我們知道機遇的變異(chance variation)有多少. 假定我們選擇患某種病的十個病人，他們的性別、年齡、病情等都相同，今施以同一種處理方法，而各病人的反應並不完全一樣——有的復原快，有的復原慢. 各種可以控制的因子都相等，而所生的效果並不完全相等，這叫做機遇的變異. 如果另有十個同樣的病人受到第二種處理方法，同理，他們也有機遇的變異. 把兩種處理結果的相差和他們自身的機遇變異相比較，便可知道相差的是否可靠.

1-4. 學習統計學時應注意之點 任何科學都有它的特性，明白了它的特性，並知道本人應有的準備，那麼在學習歷程中，可以減少很多不必要的困難.

(1) 資料必須正確　調查的結果、實驗的紀錄，總稱爲資料(data).資料必須正確可靠，而後統計的處理，纔有價值.如果資料不可靠，隨你用怎樣精細的方法去統計，這些工夫都是白費的.記得某大學生做畢業論文，研究食物成分與牙病的關係，所得結果與文獻所載很有出入.他問我統計學上有無方法使結果更爲合理.我從他所敍述的實驗情形發現了癥結所在.原來他估計食物分量的方法是根據兒童的口頭報告：'今天飯吃了幾碗，肉吃了幾塊，靑菜吃了幾些，……'.這種報告是非常靠不住的.因爲我們日常用膳，飯的碗數比較容易記得，而菜肴的分量卻很少人能夠記得淸的.現在勉強要兒童報告，他難免隨便說個數目了事.縱使由於事前一再吩咐，他在吃飯時眞能用心記下，但是碗有大有小，盛的飯有淺有滿，湯匙的情形亦復如此.你有什麼方法來作正確的估計呢?要研究這個問題，非把各個兒童每天所進的食物作仔細的稱量不可.統計學對於不正確的資料是愛莫能助的.

(2) 應有整齊清潔並愛好數字的習慣　誰都會說，整齊清潔是好習慣，但未必人人都能做到.就本書作者幾年來的教學經驗，知道統計班的學生書寫潦草，數目脫漏，墨汚滿紙，凌亂無序等情形很多；又如數目的位置應該對齊，在小學裏早有這樣的訓練，可是大學生所列的統計表上，同一直行的數目愈寫愈斜，末了一數的單位數竟會和第一數的千位數或萬位數在一直線上；作圖畫線，理應用尺，可是很多人往往順手一揮，管它是曲是直；如果要打一張格子，每格寬定爲一厘米，打好後一看，格子的寬窄不一，相差二三毫米是常事.這種馬虎草率的習慣，實不配從事科學的硏究.又統計資料既然都

是數字，那麼學習統計者對於數目應養成愛好的態度，而不宜有厭惡的心理，這正與學醫者不該討厭病人是一樣的理由．如果他一見數目就感頭痛，這時他的心理上早已築了一道很厚的圍牆，那裏還能吸收統計學的知識呢！

(3) 應養成隨時核對與推理的習慣　數目的抄寫和計算，一不留心就會發生錯誤，這情形在有經驗者尙免不了，何況初學？不過有經驗者一遇錯誤，自己就會發覺立卽改正．發覺的方法，主要的是靠核對(check)和推理(reasoning)兩方面．核對可以把原來的計算過程重複一遍，也可以用不同的方法再算一遍．但重複計算，同一的錯誤有重複發生的可能，故統計上常用不同的方法來核對．例如一行數目相加，第一次可由上而下，核對時則可自下而上；又如原來用的是減法，核對時可用加法還原，看結果是否等於固有的被減數；又乘法與除法，開方與平方都可彼此核對；諸如此類，不勝枚舉．推理也是發現錯誤的好方法．例如求若干個數値的平均，各數都在 50 以上，而求得的平均數只有 48，這一望而知是錯了；又如 25.5×3.2 等於 81.6，而不是 8.16，因爲 25 的 3 倍是 75；又如我國成年男子的身高約在 160—190 厘米之間，若某人的身高紀錄在 200 厘米以上，其正確性也是値得考慮的．所以豐富的知識、過去的經驗，都能增加我們的推理力，而有利於錯誤的發現．

(4) 要明瞭公式的用途和計算的意義　初學者看見了統計公式，每喜歡追問來源．固然公式的來源爲講授統計學者所不可不知，但統計學上有很多公式是用高深的數學原理演化出來的，初學者如果沒有充分的數學根基而要追究公式來源是非常困難的．本書作者

對於求知慾特強的同學曾講解過不少次的公式演化，終因他們的數學根基不够，而不能充分了解. 本來公式的導源是屬於數理統計學(mathematical statistics)的範圍，在統計方法(statistical methods)中可略而不提. 初學者必須明瞭的，是各種公式的正當用途和計算的意義；至於公式的來源，必須有了相當根基纔能研究.

一批資料應該用什麽方法去處理，要看研究的問題而定. 假如研究身高體重生長的情形，那麽就要分別製成生長曲綫；假如想從身高來推算體重，就要求出它的方程式；假如研究性別差異，就要看男女的平均數有無眞正的相差. 所以我們先有待解答的問題，然後去選擇統計的方法，方法用得適當，所需的答案就能充分表現出來；方法用得不適當，那麽他的問題也許只能解答一部分，甚至會弄到牛頭不對馬嘴. 又統計學上同一類的公式往往有好幾個形式，應該用那一個形式，亦依資料的情形而定. 公式用得適當，計算時就非常簡便；否則就吃力不討好. 總之，每個統計公式都有它的正當用途，一切計算都有它的意義，在計算以前，必須弄清楚爲什麽要這樣算；切不可依樣畫葫蘆的盲算，盲算會使人墮入五里霧中!

(5) 學習要循次序要多做練習　統計學是一門應用數學，數學最注重先後的次序，故學習時必須循序前進，前面的都懂了，然後再看後面；千萬不要在中間翻出一段來看，因爲這樣看法，對於統計學沒有相當根基的人是有害無益的. 還有數學要做練習題，統計學也要做練習題，只有實地練習纔能眞正了解. 本書各章之末，附有練習題若干個，希望初學者能逐一演算. 全書的練習題做完以後，還要自己去找一批資料，仔細地分析與統計，因爲書本上的練習題是經過

一番洗煉的，應該怎樣做法，大多有說明或暗示，這些練習題是幫助你了解課文用的．至於你所找的實際資料應該怎樣處理，卻要你自己來決定，這樣可以培養你提煉資料，並活用公式的能力．經過兩三年的練習以後，那時你拿到一批統計資料，將不會看做一堆混沌的數字，而是可以條分縷析的東西了．

【參 考 文 獻】

(1) Edge, P. G., Statistics and medical research, Chinese Medical Journal, 46, 11 : 1071–1080 (1932).

(2) Donald Mainland, The Treatment of Clinical and Laboratory Data, pp. 5–6, Oliver and Boyd, Edinburgh and London (1938).

(3) Fisher, R. A., The Design of Experiments, Chapters I, II, III, Oliver and Boyd, London and Edinburgh (1937).

(4) Goulden, C. H., Methods of Statistical Analysis, Chapter V, John Wiley and Sons, Inc., New York (1939).

第二章　平均數

從實地測量的結果，我們得到一批資料，這批資料中的各數值，通稱爲量數(measures). 但原來資料量數繁多，爲便於敍述起見，我們必須求出幾個能代表這些資料的數值，這些具有代表性的數值，統計學上叫做平均數(averages). 平均數是一個總名詞，通常包括下列三種：(1)均數(mean)，卽通常所說的平均；(2)中位數(median)，卽居中的一數；(3)衆數(mode)，卽發現次數最多的一數. 茲分述如後.

2-1. 小樣本中均數之求法　大家都知道把所有的數目相加，以例數(number of cases)除之，卽得均數. 這是均數的基本計算法. 在小樣本(small sample)中很可適用的——樣本的大小原無一定的界限，在習慣上凡例數在三十以下的，都可以叫做小樣本. 例如有十八個初產(初次生產)男嬰之體重[1]，其數值如後：

【表 2-1】　我國十八個初產男嬰之體重(克)

2,670	2,815	2,295	3,095	2,960	3,070	2,330	3,187	2,200
1,993	3,130	2,680	2,245	3,290	3,220	3,325	4,854	2,270

這些量數的總和爲 51,629，以 18 除之，得 2,868.28 克，便是十八個男嬰的平均體重. 若以 X 代表各嬰兒的體重，ΣX 代表體重之

和（數學上常用 Σ 表示'總和'），N 代表嬰兒數，$\bar{x}$ 代表均數，即得公式如下：

$$\bar{x}=\frac{\Sigma X}{N}. \qquad \text{公式(2-1)}$$

將各數代入，得 $\bar{x}=\frac{51,629}{18}=2,868.28.$

上面的公式雖然簡單，但計算時未必便利，因爲十八個四位數相加，總和已是五位數．位數愈大，錯誤的機會愈多，因此統計學上常想法把數目縮簡(coding)．縮簡的時候，用減法、乘法或除法都可以，總以便利計算，不失正確性爲原則．這裏我們可以看到，十八個量數中約有一半是在 2,000 至 3,000 之間，在這範圍裏，我們任取一個熟悉的數目，假定是 2,500．於是把所有量數都減去 2,500，減剩下來的數目稱爲簡縮數(code number)．詳細計算過程如下表：

【表 2-2】 小樣本中求均數之簡法

X	2,670	2,815	2,295	3,095	2,960	3,070	2,330	3,187	2,200
$(X-2,500)$	170	315	−205	595	460	570	−170	687	−300
X	1,993	3,130	2,680	2,245	3,290	3,220	3,325	4,854	2,270
$(X-2,500)$	−507	630	180	−255	790	720	825	2,354	−230

簡縮數有正有負，正的方面總數是 8,296，負的方面總數是 1,667，兩數相差爲 $8,296-1,667=6,629$，以 18 除之，得 368.25，這是十八個量數各減去 2,500 後的均數．所以再加上 2,500，即得所求的均數 2,868.28．若以 G 代表任選的一數，即 2,500，則得公式爲

$$\bar{x}=G+\frac{\Sigma(X-G)}{N}. \qquad \text{公式(2-2)}$$

$$=2,500+\frac{6,629}{18}=2,868.28.$$

這裏所得的答數與前面相同．中間雖多一道減的手續，但縮簡以後，除有一例外而外，其餘都祇剩三位數．計算時就比較不容易錯．這裏祇舉了縮簡的一個例子，讀者看了下文，將愈見縮簡的便利．

2-2．次數表之製法　當例數較多，尤其在 100 以上時，用上述方法求均數是很麻煩的．因此必須把原來資料，先經過一番整理，然後用縮簡法求均數．下面是我國二十歲男子 160 人的身高紀錄(2)：

【表 2-3】 我國二十歲男子 160 人之身高紀錄(厘米)

180.5	168.6	168.8	164.2	169.8	170.6	170.2	169.5
166.0	170.5	164.6	162.0	166.0	173.5	159.5	172.6
167.0	174.0	160.5	163.0	171.2	162.0	174.0	165.5
160.0	165.0	167.0	160.3	163.0	169.0	164.5	169.0
169.5	159.7	167.0	173.0	163.5	169.5	170.2	162.0
171.0	166.0	164.5	171.4	164.6	168.0	165.5	162.5
171.0	157.5	166.0	177.0	163.5	164.5	168.1	164.0
162.0	160.0	160.2	157.5	160.5	157.5	171.5	162.2
164.9	161.5	166.0	176.8	167.0	167.7	163.2	159.6
158.0	171.3	170.8	161.5	164.5	157.5	160.0	167.5
154.1	168.5	167.7	165.5	163.0	163.0	162.5	165.0
167.5	165.0	157.0	172.0	168.5	164.5	171.5	168.0
165.0	171.9	156.5	168.5	169.0	168.0	161.0	166.0
158.0	160.9	171.5	166.0	167.2	169.0	164.0	155.0
161.5	167.3	160.0	162.9	168.5	160.5	161.0	174.7
169.5	165.0	170.5	172.5	166.5	171.0	155.0	162.0
167.0	157.0	172.0	165.0	165.0	161.0	171.0	168.0
161.0	168.0	175.0	165.0	158.0	161.0	169.5	163.0
159.0	161.4	167.3	165.6	173.0	169.5	172.5	167.5
166.0	162.5	173.6	165.5	170.0	166.3	170.5	170.5

整理的步驟，先要把它們分組. 我們從這 160 個量數裏，把最大和最小的一數都找出來，前者爲 180.5，後者爲154.1，相距爲 26.4. 再把這距離分成若干組：如果用 1 來分，得 27 組；用 2 來分，得 14 組；用 3 來分，得 9 組. 27 組似嫌稍多，9 組又嫌較少，這裏我們就用較爲適中的 14 組. 於是從 154（比最小量數略低）起每隔 2 爲一組，至能包含最大量數的一組爲止. 因得表 2–4 左首直行的形式. 毗鄰兩組間相隔的距離，即 2，稱爲組距(class interval). 凡自 154 起至 155.999…… 間所有的數目都包含在 '154—' 的一組距裏. 自156 起至 157.999……則包含在 '156—' 的一組距裏. 154 與 156 稱爲各該組距的下限(lower limit). 我們這樣寫法，只表明了各組距的'下限'而沒有把'上限' (upper limit) 寫出來. 有的書上也寫做

154—155.9

156—157.9

……………

……………

這樣寫法對於普通人也容易明瞭. 不過 155.9 還不是第一個組距的眞正上限，本書略而不寫，就是這個緣故.

組距分好以後，我們就可以把資料歸類，歸類的過程是畫線記數 (tally). 我們從左邊第一行開始，把左手食指指該行的第一數 180.5，這時以下各數都

【表 2–4】次數表的製法

組　距	畫 線 記 數	次數
154—	|||	3
156—	卌 ||	7
158—	卌 ||	7
160—	卌 卌 卌 ||||	19
162—	卌 卌 卌 |||	18
164—	卌 卌 卌 卌 ||||	24
166—	卌 卌 卌 卌 |||	23
168—	卌 卌 卌 卌 |||	23
170—	卌 卌 卌 卌	20
172—	卌 ||||	9
174—	||||	4
176—	||	2
178—		0
180—			1
		160

掩在食指底下，故不會混淆我們的祇線．同時右手就用筆在‘180—’的組距內畫一直線．畫好後左手食指下移指着該行第二數 166.0，右手在‘166—’的組距內作一直線．這樣畫下去，以後每逢第五線作一斜線，跨在已畫出的四條線上．這樣五線連在一起，計數時就非常便利．畫線記數完畢，就在線條的右邊註明線條數，這些數目叫做次數（frequency，或譯作頻率．‘次數’是人數、動物數等的通用名詞，亦即醫學上所常用的‘例數’）．這包括組距與次數兩行的表，叫做次數表（frequency table）；若從次數分布情形論，亦稱次數分配（frequency distribution）．最後再把次數相加起來，得 160，是稱為總次數（total frequency）．（注意總次數應與線條的總數相符，這裏就等於總人數．）

關於決定組距的大小，有好多方法，如 G.W. Snedecor(3)(4) 與 F.C. Mills(5)(6) 等各有建議．為免使初學者感到頭緒紛繁計，這裏不預備詳細介紹，只提供幾條簡而易行的原則：

（1）組數不宜過少也不必過多　分組的目的在使資料簡化而便於以後的計算，但同時要注意正確性的保持，俾所得的次數分配能代表原來的資料．組數少，以後計算時果然方便，但容易失去正確性；組數多，正確性易於保持，但計算太繁，與不分組相去無幾．要雙方顧到，祇有斟酌情形，使組數適乎其中．大抵總次數在 100 以下者，組數有十個左右即可；100 以上 400 以下者，組數可有十五個左右；總次數愈大，組數當愈多，必要時可多至二三十個．但這裏所說的組數，只是個大概情形，應用時不可過於拘泥，還要參照資料的實際情形而定．

（2）組距的下限要選擇得當　一個數目視資料的不同而可能

有三種意義：（甲）如有 4 個病人，這是指恰好 4 個，一點不多，也一點不少；（乙）計年齡時若以歲爲單位，那麼 4 歲可以包括自三歲半起至略小於四歲半，這裏所謂 4 是指 3.5—4.49……；（丙）我們也可以說 4 歲是從四歲起至略小於五歲，這時所謂 4 是指 4—4.99……．這三種情形，可圖示如下：

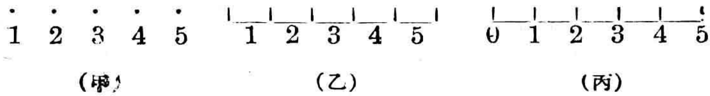


圖 2-1. 數之意義

（甲）種資料，在毗鄰兩數間是不相連續的，故稱不連續數列（discrete series），畫線計數時可不分組距（如右式）．假使數列很長，非分組不可，那時就把不連續數列看做連續數列（continuous series），但所用的下限最好降低半個單位，如 .5—2.5—4.5……． 在 '.5—' 一組內有 1 與 2 兩數（見中圖），均勻地分布在該組距內，若用 1—3—5……或 0—2—4……做下限，則各組距內數的分布就向左偏半個單位．至於（乙）（丙）兩種資料都是連續數列，惟（乙）的組距下限也要降低半個單位，理由見前，（丙）的組距下限則無需降低，因爲這時 '1' 的中點是在 1.5，'2' 的中點在 2.5，故我們用 0—2—4…… 或 0—5—10……等做下限，恰與它的意義相符．

1	|||
2	卌 |
3	卌 |||
…	……
…	……

（3）在可能範圍內組距最好用熟悉的或常用的數目　有些數目，如 2，5，10 等是日常用得最多，也是最熟悉的，我們如果用 5（2 或 10 等）做組距 0—5—10……，畫線時就很便利，並且錯誤的機會

也少. 又組距的下限在不違背上述原則下，也以用熟悉數目爲宜，故 0—5—10—…… 的組距下限較 1—6—11—…… 爲佳，因爲日常計數時，前者是用慣的，後者是不常用的.

2-3. 大樣本中均數之求法 我們用上節的方法把原來資料分組，製成次數表後，就可進行均數的計算了. 第一步，先猜一個數值，如 167，作爲假定均數(assumed mean or guessed mean). 在理論上假定均數可任意決定，不過假定均數如接近眞正均數，則計算時便利，否則就比較麻煩. 通常眞正均數的位置，大概在總次數一半的附近. 這裏共有160人，半數便是 80 人. 我們把表 2-5 的次數一行從上面加起，3+7+7+19+18+24=78. 總人數的一半(卽第八十名)，就在次一個組距裏，卽166—，我們就在這組距的橫行上寫一'0'. 這一組裏共有 23 人，假定這二十三人的身高都集中在(或平均等於)該組距的中點 167，此數與假定均數的相差爲零. 再看鄰近一組距 164—裏有 24 人. 這二十四人的平均身高爲 165，此數與假定均數之

【表 2-5】次數表上均數之計算法
(我國二十歲男子之身高，厘米)

組距	次數 f	差數 d	次數×差數 fd
154—	3	−6	−18
156—	7	−5	−35
158—	7	−4	−28
160—	19	−3	−57
162—	18	−2	−36
164—	24	−1	−24
166—	23	0	
168—	23	1	23
170—	20	2	40
172—	9	3	27
174—	4	4	16
176—	2	5	10
178—	0	6	0
180—	1	7	7
	160		−75

相差爲 165－167＝－2，若以組距爲單位，則爲(－2)÷2＝－1；同理 156— 的組距中點 157，此數與假定均數之相差爲 157－167＝－10，等於負 5 個組距. 又 180— 的組距中點爲 181，與假定均數之相差爲 181－167＝14，卽正 7 個組距. 表 2-5 '差數' 一行裏的數值是這樣來的，這些數值是各組距中點與假定均數之相差，而以組距爲單位的，也就是用減法與除法縮簡後的 X 值. 實際計算時，我們祗需在假定均數所在處寫一'0'字；比假定均數小的各組距就順次寫－1，－2，－3，……，比它大的各組距順次寫 1，2，3，……就行了. 第二步，將'次數' 與 '差數' 相乘，如 3(－6)＝－18，其意義爲：該組距內有 3 人，平均身高爲 155，此數與假定均數之相差爲 '－6' 個組距，故三人共相差 '－18' 個組距. 次一組距內有 7 人，其平均身高與假定均數之相差共爲 7(－5)＝－35 個組距，餘類推. 乘畢將正負兩方分別相加，負的總數爲 198，正的爲 123，正負相消 －198＋123＝－75. 化成原來單位則爲(－75)×2＝－150. 將此數以 160 除之，得－150÷160＝－.9375. 這是假定均數與眞正均數之相差，故假定均數加上此數(指代數和)卽得眞正均數爲 167－.9375＝166.0625 或 166.06.

若以 $\bar{x}$ 表示均數，G 表示假定均數，f 爲次數，d 爲組距中點與假定均數之相差，而以組距爲單位者，i 爲組距，N 爲總次數，則得公式爲

$$\bar{x}=G+\frac{\Sigma fd}{N}(i) \qquad \text{公式(2-3)}$$

$$=167+\frac{(-75)2}{160}=166.0625 \text{ 或 } 166.06.$$

此公式與公式(2–2)相似，因爲這裏的 d 是以組距爲單位，故須以 i 乘之，使化成原來單位，又同一組距內有數人，即須以 f 乘之，故這裏的 $\Sigma fd(i)$ 即相當於公式(2–2)的 $\Sigma(X-G)$，祇是形式稍異而已.

在次數表上，既假定各組距內所有人的平均身高等於該組距的中點，這假定與事實稍有出入，所以用此法求得的均數，與將 160 個量數相加後的平均，可能有些差別. 至於假定均數則可任意決定，讀者可另用 165 或 169 等爲假定均數，依法計算，所得答案應與公式(2–3)的結果相同.

2–4. 中位數 均數與資料中每個量數都有關係，這是均數的優點，但也是它的缺點. 假定這裏有五個人的身高是 153, 155, 156, 157, 159 厘米；另有五個人的身高是 153, 155, 156, 157, 179 厘米. 前五人的均數是156，後五人的均數是160. 我們仔細一看，就知道後者所以較高，完全受末了一人的影響，假使兩組中各把第五人除外，那麼這兩組人的平均身高就相等. 爲避免這種兩極端的影響起見，我們就要另外用一種代表數，即在一串量數中選出居中的一數，稱爲中位數(如總次數爲偶數時則將居中兩數平均即得). 上述兩組的身高中位數都是156，這表明兩組的中等身材的人是同樣高矮的. 若用統計學上的術語來說，中位數是次數分配中的一點，在這點之上下，各有總次數的一半分布着. 有些統計學家，如 C. W. Odell$_{(7)}$ 及 C. C. Peters$_{(8)}$等，將中位數與中間數(mid-score)分開. 中間數是一串量數裏居中的一數，如上例的 156，身高比他高的有兩人，比他矮的也有兩人. 至於中位數則在他上下的應各有總次數的一半，故中間數是占有距離的，而中位數則否.

在大樣本中,求中位數時也要用次數表.茲仍以我國男子 160 人的身高爲例. 這裏共有 160 人,故總次數的一半等於 80. 我們要在這次數分配上找出一點,使在這一點之上下,各有 80 人分布着. 我們先把'次數'一行,從組距值小的一端加起,把加得的和,逐一寫在累積次數 (accumulated frequency) 一行裏(表 2–6),如 $3+7=10$, $10+7=17$, $17+19=36$, ……, $54+24=78$(注意求累積次數時必須加到比 $N/2$ 略小,不能再加時爲止,在未達中位數所在的組距以前,不能停止). 如果從次一組距的 23 人中分 2 個人過來,即湊足總人數的一半 80. 因此,我們知道中位數就在'166—'的組距內,這中位數所在的組距,特稱爲中位數組距 (median interval). 假定在該組距內的 23 人均勻地分布着(圖 2–2),那麼,自 166 向右數

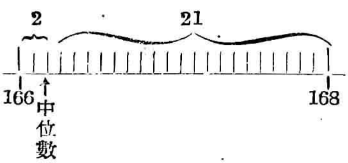


圖 2-2. 中位數計算法之圖解

$\frac{2}{23}$ 個組距,便是中位數的所

【表 2–6】 中位數之計算法
(我國二十歲男子之身高,厘米)

組　距	次　數	累積次數
154—	3	↓ 3
156—	7	10
158—	7	17
160—	19	36
162—	18	54
164—	24	78
166—	$23\begin{cases}2\\21\end{cases}$	
168—	23	59
170—	20	36
172—	9	16
174—	4	7
176—	2	3
178—	0	↑ 1
180—	1	1
	160	

$$\frac{N}{2}=80,$$

$$Md=166+\frac{80-78}{23}\times 2$$

$$=166+\frac{4}{23}=166.17.$$

在處了.故得

$$中位數=166+\frac{2}{23}(2)=166.17.$$

此數與上節求得的均數166.06非常接近.前面我們說過:'通常眞正均數的位置,大概在總次數一半的附近,'這句話現在證實了.

中位數既然把次數分配等分爲二,故從次數表的另一端算起,應得同樣的結果.我們從組距值大的一端,把次數加起來,加到累積次數爲59的地方,剛比$\frac{N}{2}$略小,不能再加了.我們若從168向左數$\frac{21}{23}$個組距(參看圖2-2),就找到中位數了.因得算式如下:

$$中位數=168-\frac{21}{23}(2)=166.17.$$

兩種方法的結果是一樣的,故可彼此核對.

茲以Md爲中位數,L(即166)爲中位數組距的下限,U(即168)爲中位數組距之上限(中位數組距之上限理論上爲167.999……,實際可寫作168),A_1(即78)爲小於L的各組距的累積次數,A_2爲大於U的各組距的累積次數,f_{md}(即23)爲中位數組距內的次數,N爲總次數,i爲組距,則得公式如下:

$$Md=L+\frac{\frac{N}{2}-A_1}{f_{md}}(i); \qquad 公式(2\text{-}4)$$

$$Md=U-\frac{\frac{N}{2}-A_2}{f_{md}}(i). \qquad 公式(2\text{-}5)$$

2-5. 衆數 衆數是發現次數最多的一數. 在次數表上, 便是次數最多的一組距的中點. 請查看表 2-6 最多的次數是 24, 我們假定這二十四人的身高平均等於(或集中在)165, 卽該組距的中點. 故衆數卽爲165. 至於不分組距的資料, 只要看那一數值發現的次數最多, 該數值便是衆數了. 這樣僅由觀察所得的衆數, 稱爲觀察的衆數(observed mode), 或概約衆數(crude mode). 同一資料常因所用的組距不同, 而使概約衆數稍有出入, 這是它的缺點. 與觀察衆數相對待的尙有理論衆數(theoretical mode), 理論衆數的算法視曲線的式樣而異. 詳見 W. P. Elderton: Frequency Curves and Correlation 等書. 又平均數除上述三者而外, 還有幾何均數(geometrical mean)與調和均數(harmonic mean), 前者在生命統計(vital statistics)中估計人口時所常用, 後者在工作相等而求平均速度等情形中用之, 讀者可參考其他統計書籍(13)(15), 玆不贅.

2-6. 直方圖與多邊圖 次數表製成以後, 就可知道量數分布的情形. 但爲醒目起見, 我們也時常把它製成統計圖. 統計圖的基本形式有二: 卽直方圖(histogram)與多邊圖 (polygon). 在製圖以前, 須根據資料的情形, 並參照紙張的大小, 以決定縱橫兩軸的單位. 普通以縱軸表示次數 (此處卽人數), 橫軸表示量數 (此處爲身高). 於是在兩軸上定好尺度, 每隔適當距離作一畫痕, 並註明數值——數值無須逐一寫出, 因爲數目太多, 排列過密, 反而看不淸楚. 接着我們在橫軸數值爲 154 的上面, 作一垂線, 其高度爲 3 (參看表 2-4 的次數表), 就在這垂線的頂端, 作一條平行於橫軸的線, 恰蓋在這組距上. 再在次一組距上高度等於 7 的地方作一橫線, 此橫線的左端

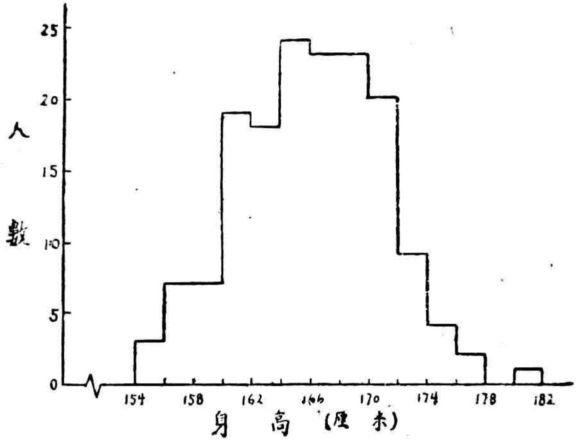


圖 2-3. 我國二十歲男子 160 人之身高分配圖(直方圖)

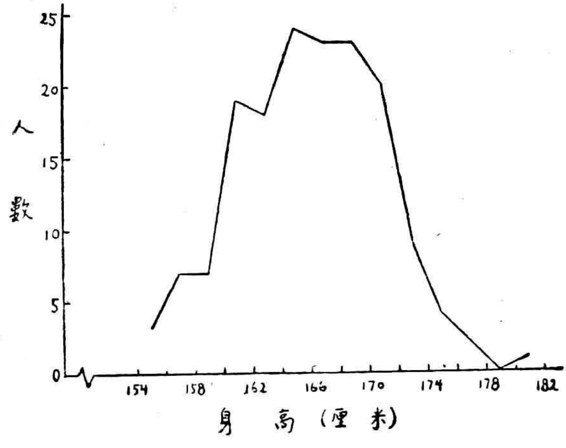


圖 2-4. 我國二十歲女子 160 人之身高分配圖(多邊圖)

與第一條橫線的右端間，以垂線相連，餘依此類推. 到最右邊的一組距，我們也在橫線的右端，作一線垂直於橫軸. 這樣在直方圖裏所包

含的面積，恰等於總次數.

畫多邊圖時，我們在橫軸各組距中點的上面，依次數的多寡，在適當高度處作一點子. 把這些點子用線連起來，即成多邊圖.

製圖時還有幾點需要注意的：(1)每圖應有一簡明扼要的標題，寫在下面；(2)圖內所表示的事實及其單位應逐一註明，如身高——厘米；(3)縱橫軸應標明尺度，同軸上須以相等的距離代表相等的數量. 倘數量過大時，可用鋸齒或波浪形線條以表明斷面，即中間曾截去一部分，這樣可使零點仍顯示出來；(4)圖上數目字以用亞剌伯字爲原則；(5)如圖中有兩種以上的事物，必須以不同的線條、顏色或圖形等表示出來，並須在圖例中逐一說明.

關於製圖的詳細情形，可參考統計製圖學專書(14)(16).

【練 習 題】

1. 下列資料爲十七個華北成年男子的坐高(厘米)(9)，試用公式(2-1)與(2-2)分別求其均數.

91.5	91.2	87.8	94.4	92.4	89.5	91.6	89.3	89.4
95.3	91.9	89.5	96.5	93.2	86.1	86.8	89.7	

2. 下列數值爲我國十四個初產女嬰的體重(克)(1)，試用公式(2-1)與(2-2)分別求其均數. 然後求各數與均數的相差，即$X-\bar{x}$，在這些相差中，正值共若干？負值共若干？正負相消後等於若干？

3,075	3,315	3,005	2,549	2,800	2,580	2,222
3,000	2,635	3,890	3,000	2,840	2,743	2,638

3. 下表爲我國成年男子120人的紅血球數(百萬/立方毫米)[10],試求其均數.計算時組距可用.150,自3.900起.

5.195	5.260	4.580	5.000	4.840	5.610	5.520	4.700
5.360	5.070	4.380	5.510	4.800	5.630	5.140	5.560
4.070	5.100	4.610	5.600	5.850	4.520	4.295	5.520
4.065	4.315	4.360	4.420	5.305	4.800	5.470	4.485
5.160	4.990	5.100	5.180	5.000	5.000	4.840	4.290
4.590	4.360	4.215	4.260	5.290	5.280	4.540	4.780
4.520	5.450	5.070	5.060	5.360	4.920	4.740	4.620
4.720	5.120	4.721	5.280	4.950	5.170	4.880	4.810
4.490	5.190	4.640	4.250	5.420	4.640	5.140	5.110
4.600	5.370	5.005	4.550	5.050	5.700	4.890	4.070
5.200	4.650	5.120	4.960	5.040	5.030	5.180	5.100
4.700	4.780	4.985	4.780	4.320	5.155	5.875	5.260
5.050	5.315	4.815	5.190	5.190	4.860	5.105	5.220
5.220	5.150	5.090	5.160	4.840	4.715	5.185	5.190
5.590	5.070	3.980	4.640	5.000	4.920	5.130	5.010

4. 下表爲我國成年女子 96 人每分鐘之脈搏數[10],試求其均數.組距可用4,自55.5起,何故?

82	100	72	92	60	72	68	69	90	86	70	82
84	68	68	87	96	80	83	79	76	84	66	77
62	76	88	88	84	76	80	78	76	78	83	76
80	78	86	72	64	80	88	75	76	92	88	86
78	94	85	70	76	92	78	90	89	80	76	69
92	56	66	79	78	72	80	68	74	72	66	76
86	35	84	68	68	65	74	76	63	82	84	76
70	76	69	80	67	72	88	76	90	76	82	79

5. 求第3,4兩題之中位數.

6. 右表爲四川省女子2,570人月經初臨之年歲(11),試求其均數、中位數及概約衆數.

初經年齡	人數
9—	15
10—	49
11—	188
12—	551
13—	639
14—	943
15—	126
16—	50
17—	4
18—	5
	2,570

7. 試將第6題材料作一多邊圖及直方圖,並各在横軸上,用箭頭標明均數、中位數及衆數三者之地位.

8. 下表爲河北定縣鄉村女子所生子女數(12),試求其均數.

所生子女數	產婦人數
1	38
2	62
3	80
4	124
5	152
6	160
7	139
8	120
9	71
10	29
11	10
12	10
13	4
14	1
	1,000

注意: 子女數爲不連續數列,故此處並無組距.假如求均數時的'0'點,放在子女數等於6的一組內,那麼假定均數卽等於6,並非6.5.

【參考文獻】

(1) Maxwell, J. P. and Wong, A. I. H., The elderly Primipara, China Medical Journal, 45: 113–125 (1931).

(2) Tsai, C. and Wu, C. H., A statistical study of the vital capacity of senior middle school and college students,

Chinese Journal of Physiology, 14, 1 : 95–116(1939). 原來資料係二氏所供給.

(3) Snedecor, G. W., Statistical Methods, pp. 88–90, The Iowa State College Press (1940).

(4) Tippett, L. H. C., Biometrika, 17 : 386 (1925).

(5) Mills, F. C., Statistical Methods, revised edition, p. 57, Henry Holt & Co. (1938).

(6) Sturges, H. A., The choice of a class interval, Journal of the American Statistical Association, 65–66 (1926).

(7) Odell, C. W., Statistical Methods in Education, Chapter V, D. Appleton-Century Co., N. Y..

(8) Peters, C. C. & Van Voorhis, W. R., Statistical Procedures and their Mathematical Bases, Chapter II, The Pennsylvania State College (1935).

(9) Benedict, F.G., Kung, L. C., and Wilson, S. D., The basal metabolism and urinary nitrogen excretion of Chinese, Manchus and others of the Mongolian race, Chinese Journal of Physiology, 12, 1 : 67–100 (1937).

(10) Wu, C. H. and C. Tsai, Haematological standards for the Chinese, Chinese Journal of Physiology, 15 : 289(1940). 此原來資料係由二氏供給.

(11) Puh, Y. Chiung, The menstruation cycle of Chinese in Szechwan, Pro. Chinese Physiol., Soc. Chengtu Branch

2, No. 2 (1943).

(12) Ch'en, C. C., A practical survey of rural health, Chinese Medical Journal, 47, 680–688 (1933).

(13) Whipple, G. C., Vital Statistics, pp. 145–147, John Wiley & Sons (1923).

(14) Willard Cop Brinton, Graphic Presentation, Brinton Associates, New York City (1939).

(15) 艾偉:高級統計學,第七章,第八章,商務,二十八年.

(16) 陳善林:統計製圖學,商務,二十五年.

第三章 離勢量數

兩組資料的平均數相等，其分配的情形不一定完全相同. 例如有甲乙兩組數值如下:

甲組	96	98	100	102	104
乙組	80	90	100	110	120

雖然它們的均數都等於 100，但分布的情形卻不同，換句話說，甲組比較密集，而乙組比較分散. 因此我們要描寫一批量數的情形，除須求得平均數以外，還要知道量數的散布或參差的狀況. 表示量數參差情形的數值，叫做離勢量數(measures of dispersion)，或變異量數(measures of variation). 離勢量數的種類雖然很多，但其有一個共通的特性，即離勢量數大表示參差甚，散布廣；離勢量數小表示參差少，而較爲整齊.

3-1. 全距(range) 這是離勢量數中最簡單的一種，即最大數與最小數的相差. 如上列甲組的全距是 $104-96=8$，乙組的全距是 $120-80=40$，可見乙組的參差較甲組爲甚. 又如表 2-1，十八個初產男嬰之體重，其最大值爲 4,854 克，最小值爲 1,993 克，全距爲 2,861 克. 又如表 2-3，我國二十歲男子之身高紀錄，最大值爲 180.5 厘米，最小值爲 154.1 厘米，其全距爲 26.4 厘米. 全距的寫法，常把差數寫在前面，而把最小值與最大值寫在括弧裏，如:

2,861(1,993—4,854) 與 26.4(154.1—180.5).

3-2. 四分位數間距 (inter-quartile range) 在第二章裏,我們已講過,中位數是次數分配中的一點,在這點之上下,各有總次數的一半分布着.現在我們再找出兩點:一是下四分位數(lower quartile)亦稱第一四分位數(first quartile),小於此點或與之相等的量數,占總次數的四分之一;還有一個是上四分位數(upper quartile)亦稱第三四分位數(third quartile),小於此點或與之相等的量數,占總次數的四分之三.其實中位數就是第二四分位數(second quartile),不過這名詞不常用,且不若'中位數'三字的簡單,所以也就很少見了.

下四分位數的符號是 Q_1, 上四分位數的符號是 Q_3. 其計算過程與中位數相似, 不過前者用 $\frac{N}{4}$, 而後者用 $\frac{3N}{4}$ 來代替中位數公式裏的 $\frac{N}{2}$ 罷了.

這裏所用的資料還是 160 人的身高紀錄,總次數的四分之一是 40. 我們把次數相加, 至累積次數爲 36 時, 恰比 $\frac{N}{4}$ 略小, 不能再加了. 若在次一組距的18人中分 4 人過來, 卽湊成總次數的四分之一. 故將 $\frac{4}{18}\times 2$(卽組距)加在 162(卽 Q_1 所在組距之下限) 上卽得下四分位數. 上四分位數之計算與此例同. 詳見表 3-1.

上下四分位數間的相差卽爲四分位數間距. 今

$$Q_3=169.65,\quad Q_1=162.44,$$

$$\therefore\quad Q_3-Q_1=169.65-162.44=7.21.$$

有人把四分位數間距折半，而稱爲四分位數間半距(semi-interquartile range)或四分位數差(quartile deviation)，其符號爲 Q.

$$Q=\frac{Q_3-Q_1}{2}=\frac{7.21}{2}=3.605.$$

3-3. 均差 (mean deviation) 全距只顧次數分配的兩極端，故爲最粗率的看法. 四分位數間距，是在次數分配裏選擇上下各占總次數四分之一的兩點來比較，所以比全距要精細一些了. 但它依舊只是兩點的相差，而與全部量數沒有直接關係的. 因此很早就有人想到求各量數與均數的相差，取其絕對值而平均之，這便是均差. 若量數密集，則各數與其均數的相差小，故均差亦小；若量數分散，則均差大. 茲就十八個初產男嬰的體重，求其均差如下：

【表 3-1】上下四分位數之計算法
(我國二十歲男子之身高，厘米)

組距	次數	累積次數
154—	3	3
156—	7	10
158—	7	17
160—	19	36
162—	18	54
164—	24	78
166—	23	101
168—	23	124
170—	20	
172—	9	
174—	4	
176—	2	
178—	0	
180—	1	
	160	

$$\frac{N}{4}=40,\quad \frac{3N}{4}=120.$$

$$Q_1=162+\frac{40-36}{18}(2)=162.44.$$

$$Q_3=168+\frac{120-101}{23}(2)=169.65.$$

【表 3-2】 均差之計算(我國十八個初產男嬰之體重，克)

X	2,670	2,815	2,295	3,095	2,960	3,070	2,330	3,187	2,200
$X-\bar{x}$	-198.28	-53.28	-573.28	226.72	91.72	201.72	-538.28	318.72	-668.28
X	1,993	3,130	2,680	2,245	3,290	3,220	3,325	4,854	2,270
$X-\bar{x}$	-875.28	261.72	-188.28	-623.28	421.72	351.72	456.72	1,985.72	-598.28

在第二章裏，已求得這十八個男嬰的平均體重爲 2,868.28 克. 將各量數減去均數所得的較，稱爲離均差(deviation from the mean)，卽 $(X-\bar{x})$ 一行的數值，如

$$2,670-2,868.28=-198.28,$$

$$3,095-2,868.28=226.72,$$

餘類推. 若將離均差總和起來，正負相消後，結果應等於零. 用符號表示之，則爲

$$\Sigma(X-\bar{x})=0. \qquad \text{公式(3-1)}$$

這是均數的特性，在有些統計學書上(1)，就把它當做均數的定義的. 這裏負的離均差總數爲 4,316.52，正的離均差總數爲 4,316.48，兩數相差爲 $-.04$. 這是因爲均數 2,868.28 的末一位小數是由四捨五入而來，實際上以人數除體重總和爲 $51,629\div18=2,868.27777\cdots$，商數中的 7 是循環小數，所以始終除不盡的. 爲實用計，均數取兩位小數已夠，但四捨五入以後，與眞正均數就有細微的相差，遂使離均差的代數和不能恰等於零了.

各量數與均數相差的代數和既然等於零，所以離均差的代數和不能表示差異情形的. 於是就有人主張用離均差的絕對值，便是只取數值，不計符號，將絕對值平均，卽得均差. 此例絕對值的總和爲 8,633.00，以18除之，得均差爲479.61. 在次數表上，求均差另有幾個公式(11)，因爲均差用得很少，所以本書不詳細介紹了.

3-4. 標準差(standard deviation)**的意義** 求均差時只取各量數與均數相差的絕對值，而不計符號，仔細想來，總覺得不大妥當. 爲補救此弊病起見，可以把離均差平方，因爲負數平方後就得正數，

這樣可免去符號上的麻煩. 若將表 3–2 的離均差平方,而求其總和,卽得

$$(-198.28)^2+(-53.28)^2+\cdots\cdots+(1,985.72)^2+(-598.28)^2$$
$$=39,314.9584+2,838.7584+\cdots\cdots+3,943,083.9184$$
$$+357,938.9584=7,378,945.6112.$$

此值以 $N-1=17$(註)(稱自由度 degrees of freedom,詳後)除之,卽得均方(mean square,意卽離均差平方和 sum of squares of deviations from meams的平均)或變異數(variance,意卽表示變異情形的數値).

$$7,378,945.6112\div 17=434,055.62.$$

將變異數開方,卽爲標準差

$$\sqrt{434,055.62}=658.8\text{ 克}.$$

玆以 V 表示變異數, S 表示標準差,則其公式爲

$$V=\frac{\Sigma(X-\bar{x})^2}{N-1};\qquad \text{公式(3–2)}$$

$$S=\sqrt{\frac{\Sigma(X-\bar{x})^2}{N-1}}.\qquad \text{公式(3–3)}$$

若各量數間的分散廣, 那麼離均差($X-\bar{x}$)就大, 其平方和當然大, 於是變異數與標準差也隨着增大了. 反之,各量數間的參差小,那麼變異數與標準差就小, 讀者可用本章第一段甲乙兩組數値證實之. 總之,變異數與標準差的大小,就表示量數的分散或密集,以後我們

〔註〕: 舊日統計學上以 N 除離均差之平方和. 至今統計學家,如 F.C.Mills(2)等,認爲樣本之描寫則用 N, 對於全體之估計則用 $N-1$. 本書爲使前後一貫計,一律採用自由度.

討論差異情形時要常常用到，所以這點必須牢記。

3–5. 自由度 自由度一概念，從1908年(3)起纔應用到統計學上來。它本是數學上的名詞，現在爲使讀者易於明瞭計，我們先從日常生活中舉幾種常見物體的運動自由，作爲初步的說明。但這裏每種物體，都祇當做運動的點，而無大小體積的。一滴油在盤繞的彈簧上流動，一顆佛珠在繩子上移動，不論路線怎樣迂迴曲折，它只能在一度的路線(one-dimensional path)上運動，所以只有一個自由度。同理，火車（我們也把它當做一個運動的點）在鐵軌上駛行，也只有一個自由度。至於一滴水銀在瓷盤裏滾動，它可以向前後滾，也可以向左右滾，這裏就有縱橫二方向，所以有兩個自由度。其他在二度空間(two-dimensional space)的平面裏的東西，如平地上的汽車，水面上的木船等，行駛時都有兩個自由度。再看鳥在天空裏面飛，魚在池塘裏遨游，這時就有前後、左右、上下三方向，所以有三個自由度。其他在三度空間(three-dimensional space)裏的東西，如飛機、潛水艇等，運動時也有三個自由度。

現在我們再談幾何學上的點。在平面裏的一點，通常用(x, y)表示之。若沒有任何條件去限制它，那麼這點就可順着縱橫二軸任意移動，換句話說，x可任給一數值，y也可任給一數值，這時對於兩數中的每一數值，都有給與的自由，故有兩個自由度。假如我們要選一對數值，其總和等於7，卽$x+y=7$。這時只有一數能夠隨意選擇了。當$x=1$，y非等於6不可；$y=12$，x非等於-5不可。在這情形之下雖有兩個變數，但只有一個是獨立的，故其自由度爲$2-1=1$了。從幾何學方面來解釋，經'兩數之和等於7'的條件限制以後，(x, y)點

只能在 $x+y=7$ 的直線上運動，而不能隨處自由運動了(圖 3-1 中，$A, B, C, D,$ ……等點子表示在沒有條件限制時，該點可任意運動)．這直線是在原來的兩度空間裏的一度空間．

如果現在要選擇一對數值，其平方之和爲 25，卽

$$x^2+y^2=25,$$

這時也祇有一個數目可以隨意選擇，第一數選好以後，第二數就被固定了．這對數值所代表的點子必須在一圓周上，其圓心在原點(origin)處，半徑爲 5．這圓周也是在原來的二度平面裏的一度空間．本來被選擇的數值有兩個($N=2$)，受到一個條件的限制($r=1$)，結果自由度便變爲 $N-r=2-1=1$ 了．

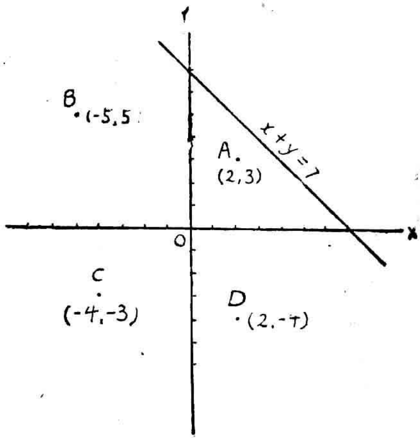


圖 3-1．平面上點的運動

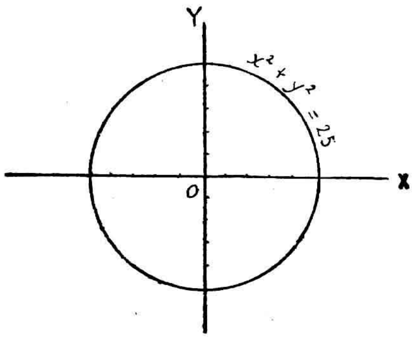


圖 3-2．圓周上點的運動

假如我們同時加上兩個條件 $x+y=7$ 和 $x^2+y^2=25$．若把這兩個方程式解出來，得兩組可能的答案，卽

$$x=3, y=4;\ 或\ x=4, y=3.$$

這時沒有一個數值可以任意選擇的了．以前能够沿着縱横兩方向自由運動的點子，現在

既限於 $x+y=7$ 的直線上運動，又限於 $x^2+y^2=25$ 的圓周上運動；同時能適合這兩個條件的，就祇有直線與圓周的兩個交點. 這兩點是不能自由運動的了，所以 $N=2$，$r=2$. 自由度的數目便等於 $N-r=2-2=0$.

再看在三度空間裏的一點 (x, y, z). 若此點不受任何限制，它可以順着三個方向自由運動，故有三個自由度，這時三個變數都是獨立的. 假如加上 $x+y+z=c$ 一個限制（c 爲任何常數），那麼只有兩個數目能夠自由選擇，卽祇有兩個獨立變數了. 例如此限制爲 $x-y-z=10$，若取 $x=7$ 和 $y=9$，則 z 非等於 -12 不可. 按 $x+y+z=c$ 是三度空間裏的一個平面方程式，這平面上的一點，有兩個自由度 $(N=3, r=1, N-r=2)$. 若使 (x, y, z) 點的坐標(coordinates)，合於 $x^2+y^2+z^2=k$ 的條件，那麼這點子必須在一球面上，它的球心在原點，半徑爲 $\sqrt{k}$，這球面亦爲一個兩度空間 $(N=3, r=1, N-r=2)$. 若上述兩個條件同時引用，那麼這點只能在球面和平面相交的圓周上運動，而這圓周是在原來的三度空間裏的一度的圖形了 $(N=3, r=2, N-r=1)$.

這些觀念再行推廣，那時我們所討論的空間，已超於我們日常生活的三度空間了. 因此，它的形狀就無從想像. 但這種抽象的推廣是必要的. 任何一組的 N 個數目如 $(X_1, X_2, \cdots\cdots, X_N)$ 代表 N 度空間裏的一個點，每一數目便是這點的坐標. 這些數目之間，若無關係存在，那麼每個數目能夠獨立變化，故自由度爲 N. 每加上一個必需的關係，其自由度便減少一個. 如含有 N 個變數的一次方程式

$$X_1+X_2+X_3+\cdots\cdots+X_N=c \quad \text{或} \quad \Sigma X=c,$$

此式即爲各數之總和,是代表一個超級平面(hyperplane),而爲 $N-1$ 度的空間,而在這空間裏的點,有 $N-1$ 個自由度($r=1$,故自由度爲 $N-1$).又如

$$(X_1-\bar{x})^2+(X_2-\bar{x})^2+\cdots\cdots+(X_N-\bar{x})^2=k \quad \text{或} \quad \Sigma(X-\bar{x})^2=k,$$

此式即爲離均差之平方和,並爲一超級球面(the surface of a hypersphere),其球心在($\bar{x}, \bar{x}, \cdots\cdots, \bar{x}$),半徑爲 $\sqrt{k}$.這也是一個 $N-1$ 度的空間,在這空間裏的點,有 $N-1$ 個自由度.倘若我們要使這些點子同時在超級平面和超級球面上,那麼就受到兩個條件的限制(即有兩個必需的關係存在),所以自由度只有 $N-2$ 了.依此類推,若有 r 個條件同時加上去,那麼這些點子只限於 $N-r$ 度的空間裏,就祇有 $N-r$ 個自由度了.

好了,讓我們回到統計學方面來.若有五個量數

X:	46	78	53	65	58

我們可以把它看做五度空間裏的一點,這五數的總和爲300,均數爲60.其離均差爲

$X-\bar{x}$:	-14	18	-7	5	-2

在前面已經說過離均差的代數和爲零,即 $\Sigma(X-\bar{x})=0$.現在我們要問,在五度空間裏的點,若加上 $\Sigma(X-\bar{x})=0$ 一條件的限制,其自由度爲若干?我們要使五個數值的總和爲零,其中只有四數可以自由選擇的,例如任選四數

$$-9 \qquad 6 \qquad 13 \qquad -17$$

以後,餘下一數必須等於正7,纔能使總和爲零.故知這時的自由度爲 $5-1=4$.又如表3-2的十八個離均差,其代數和亦爲0.其中能

自由選擇的只有 17 個數值，故自由度為 $18-1=17$. 在求變異數與標準差時，我們用 $N-1$ 來除，便是這個理由.

此外還有一個理由. 當我們從樣本來估計全體(見第一章第1-3節)的變異數與標準差時，若除數用 N，往往低估(underestimate)了這些數值. 最初發現此種現象的為 'Student' 氏(3)，他建議用($N-1$)來除，則可免除這個弊病. 後來 W. A. Shewhart(4)氏做了一個實驗，實驗中全體的標準差等於1，是預先知道的. 他從這全體內抽取了一千個樣本，每個樣本的總次數為 4. 當他求出每個樣本的標準差時，開方根號裏的分母用 N. 結果這一千個標準差值的衆數為 .717，均數為 .801，顯然較全體的標準差 1 為低. 最近 C. H. Goulden 氏也做了一個性質相同的實驗(5)，實驗中每個樣本的總次數為 20. 結果若用 N 為除數時，平均的變異數值僅及其眞正值的 95.43%，若用 $N-1$ 為除數時則為 99.94%. 證明前者為低估，而後者頗為接近.

基於上述兩點理由，我們求標準差與變異數時，都要用自由度 $N-1$ 來除，而不用總次數 N. 在大樣本中，用 N 與 $N-1$ 所得的答數，幾乎是相等的，而在小樣本中則很有出入.

3-6. 小樣本中標準差之計算法 上面第 3-4 節所述標準差的計算法是最基本的方法. 你們看了表 3-2 有五、六位數字的離均差，平方後就得八、九位以上的數字，就可知道這方法的麻煩了. 所以在實際計算時，我們另有縮簡的方法. 茲舉二例如下:

(甲) 化克為仟克並略去末位數.——將表 3-2 的 X 值，各以 1,000 除之，即化成仟克. 為使數目更加簡單計，再用四捨五入法略去末位數. 普通所用的四捨五入法是指逢四捨去，逢五進一. 目的在

使簡縮數儘量與原數接近，如 2.674 縮簡爲 2.67; 2.676 縮簡爲 2.68. 但 2.675 恰在 2.67 與 2.68 的中點，它和兩數的距離是相等的，因此可縮簡爲 2.67，也可爲 2.68. 如果所有 5 都向前進一位，那麼簡縮數的總和有略微提高的傾向. 爲補救此缺點計，可採用一種折衷的辦法，便是 5 字前面一位的數字若爲奇數，5 就進一位，偶數

【表 3-3】 標準差之計算法(一)

(我國十八個初產男嬰之體重)

原數	簡縮數 X	X^2
2,670	2.67	7.1289
2,815	2.82	7.9524
2,295	2.30	5.2900
3,095	3.10	9.6100
2,960	2.96	8.7616
3,070	3.07	9.4249
2,330	2.33	5.4289
3,187	3.19	10.1761
2,200	2.20	4.8400
1,993	1.99	3.9601
3,130	3.13	9.7969
2,680	2.68	7.1824
2,245	2.24	5.0176
3,290	3.29	10.8241
3,220	3.22	10.3684
3,325	3.32	11.0224
4,854	4.85	23.5225
2,270	2.27	5.1529
	51.63	155.4601

$$S=\sqrt{\frac{\Sigma(X-x)^2}{N-1}}=\sqrt{\frac{\Sigma X^2-\frac{(\Sigma X)^2}{N}}{N-1}} \qquad \text{公式(3-4)}$$

$$=\sqrt{\frac{155.4601-\frac{(51.63)^2}{18}}{18-1}}=\sqrt{\frac{155.4601-148.0920}{17}}$$

$$=\sqrt{\frac{7.3681}{17}}=\sqrt{.4334}=.6583\text{ 仟克，或 }658.3\text{ 克.}$$

就不進(0是當做偶數的).這樣四捨六入,附以5字前奇進偶捨的辦法,比一味四捨五入,結果要更正確些.照上述方法,2.815應縮簡爲2.82;而2.245則縮簡爲2.24.餘類推.各數化成簡縮數後,我們就直接求簡縮數的標準差,最後只要把單位化一下就行了.表3–3的X值卽爲簡縮數,單位爲仟克.右邊的X^2行裏的數值卽爲各X值的平方,如

$$(2.67)^2=7.1289\text{(註)}$$

等.然後把X行的數值相加,得$\Sigma X=51.63$,再把X^2行的數值相加,得$\Sigma X^2=155.4601$.在此值內減去校正數$(51.63)^2/18$,卽得離均差之平方和7.3681.此數以$(18-1)$除之,開方後,卽得標準差.6583仟克,化成原來單位則爲658.3克.

關於公式(3–4)根號裏的分子部分,這裏可作簡單的證明.

$$\Sigma(X-\bar{x})^2=\Sigma(X^2-2\bar{x}X+\bar{x}^2)=\Sigma X^2-2\bar{x}\Sigma X+N\bar{x}^2.$$

上式中$\bar{x}$爲常數,故可按代數上分解因子(factorize)的原理,移至ΣX的外面,又N個$\bar{x}^2$的總和爲$N\bar{x}^2$.又因$\bar{x}=\dfrac{\Sigma X}{N}$,代入上式,得

$$\Sigma X^2-2\frac{\Sigma X}{N}(\Sigma X)+N\left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2=\Sigma X^2-2\frac{(\Sigma X)^2}{N}+\frac{(\Sigma X)^2}{N}$$

$$=\Sigma X^2-\frac{(\Sigma X)^2}{N},$$

$$\therefore\quad \Sigma(X-\bar{x})^2=\Sigma X^2-\frac{(\Sigma X)^2}{N}.\qquad\text{公式(3–5)}$$

〔註〕:平方與平方根等數値,可査 Barlow's Tables of Squares, Cubes, Square Roots, Cube Roots and Reciprocals, Spon., London (1930).

這樣可以省去先求均數與離均差的麻煩，只須先求各量數平方的總和 ΣX^2，然後減去各量數總和的平方除以 N 的商數 $(\Sigma X)^2/N$. 公式 (3-5) 簡便而正確，以後我們要時常用到，讀者必須牢記.

這裏有兩點要注意的：ΣX^2 是先平方而後總和；$(\Sigma X)^2$ 是先總和而後平方，在此例中 $\Sigma X^2 = 155.4601$，而 $(\Sigma X)^2 = (51.63)^2$，二者並不相等，切勿混淆；又校正數必較 ΣX^2 爲小，故 $\Sigma(X-\bar{x})^2$ 決不會有負數，在下面公式(3-6)，(3-7)，(3-8)等情形亦同.

(乙) 減去一假定值 2,500. ——還有一個縮簡方法，是仿照求均數時的式樣，先假定一個均數 2,500. 求各量數與假定均數之相差，如 $2,670-2,500=170$；將各差數自乘，如 $(170)^2=28,900$ 等. 然後各求其總和，得

$$\Sigma(X-2,500)=6,629,$$

$$\Sigma(X-2,500)^2=9,820,259.$$

再求校正數 $(6,629)^2/18=2,441,313.39$，於是得離均差之平方和爲

$$9,820,259-2,441,313.39=7,378,945.61.$$

請看第 3-4 節所得的離均差平方和，亦等於此值. 故知方法雖不同，而結果卻相同.〔本節(甲)法因縮簡時略去末位數，故結果稍有出入.〕表 3-4 的簡縮數中，除有一個爲四位數外，其餘都是三位數. 在 Barlow's Tables 上面，三或四位數的平方，一查卽得. 可是表 3-2 內的離均差大部分有五、六位數目，而這些數值的平方，在 Barlow's Tables 等，是不能直接查出來的. 兩相比較，還是以用縮簡法來得便利.

倘以 G 表示任意假設的數値，則離均差之平方和可寫成：

$$\Sigma(X-\bar{x})^2=\Sigma(X-G)^2-\frac{[\Sigma(X-G)]^2}{N}. \qquad \text{公式(3–6)}$$

此式實爲公式(3–5)的推廣．當 $G=0$ 時，即變成公式(3–5)．

【表 3–4】 標準差之計算法(二)

(我國十八個初產男嬰之體重)

X	$X-2,500$	$(X-2,500)^2$
2,670	170	28,900
2,815	315	99,225
2,295	−205	42,025
3,095	595	354,025
2,960	460	211,600
3,070	570	324,900
2,330	−170	28,900
3,187	687	471,969
2,200	−300	90,000
1,993	−507	257,049
3,130	630	396,900
2,680	180	32,400
2,245	−255	65,025
3,290	790	624,100
3,220	720	518,400
3,325	825	680,625
4,854	2,354	5,541,316
2,270	−230	52,900
	6,629	9,820,259

$$S=\sqrt{\frac{9,820,259-\frac{(6,629)^2}{18}}{18-1}}=658.8 \text{ 克}.$$

3-7. 大樣本中標準差之計算法　在大樣本中，求標準差的方法和求均數時很相像，只多一個步驟而已. 通常均數與標準差的計算，每放在一張表上，這樣時間和紙張都很經濟. 表 3-5 最左一行是身高的組距，f 行是次數. 這兩行是次數表上原來有的. 計算時也先定一個假定均數 167，於是在 166— 的組距內寫一 '0' 字，比假定均數小的各組距順次寫 $-1, -2, -3, \cdots\cdots$，比它大的順次寫 $1, 2, 3, \cdots\cdots$.

【表 3-5】　標準差之計算法(三)

(我國二十歲男子之身高，厘米)

	f	d	fd	fd^2
154—	3	−6	−18	108
156—	7	−5	−35	175
158—	7	−4	−28	112
160—	19	−3	−57	171
162—	18	−2	−36	72
164—	24	−1	−24	24
166—	23	0		
168—	23	1	23	23
170—	20	2	40	80
172—	9	3	27	81
174—	4	4	16	64
176—	2	5	10	50
178—	0	6	0	0
180—	1	7	7	49
	160		−75	1,009

$$S=\sqrt{\frac{1{,}009-\frac{(-75)^2}{160}}{160-1}}\,(2)=\sqrt{\frac{1{,}009-35.16}{159}}\,(2)$$

$$=\sqrt{\frac{973.84}{159}}\,(2)=2.475\times2=4.95.$$

這是各組距中點與假定均數的相差而以組距爲單位的．然後將同一組距內的 f 與 d 相乘，得 fd．以上步驟與求均數時完全相同，我們在第二章第2–3節裏已講過，這裏不必多說．至於最右邊的 fd^2 一行是求標準差時所特有的．這是 d 與 fd 值相乘的積，如

$$(-6)(-18)=108, \quad \cdots\cdots, \quad (1)(23)=23, \quad \cdots\cdots$$

等．若將 d 值先平方，再與 f 相乘，結果當然一樣，如 $3(-6)^2=108$，但不及將 d 與 fd 相乘的便利．這裏必須注意，fd^2 並不等於 $(fd)^2$，後者卽爲 f^2d^2，自與前者不同；初學者常把 fd 行的數值，平方後塡入 fd^2 行內，這是一個很大的錯誤．又 fd^2 行內的數值，都是正數，沒有負數的，這點也要注意．再次求各行的總和，得

$$N=160, \quad \Sigma fd=-75, \quad \Sigma fd^2=1,009.$$

這裏的 Σfd^2 相當於公式 (3–5) 的 ΣX^2，又 Σfd 相當於 ΣX，因得

$$1,009-\frac{(-75)^2}{160}=973.84.$$

此值相當於離均差的平方和，但這裏的 d 是以組距爲單位的，故此值欲化爲原來單位，必須以組距平方（因爲 d^2）乘之，如

$$973.84\times(2)^2=3,895.36.$$

這纔是以平方厘米爲單位的離均差之平方和．不過我們在求標準差的時候，還要經過開方，所以不必預先化做原來單位．我們以自由度 $(160-1)$ 除 973.84，開方後，再以組距乘之，得 4.95，這就是以厘米爲單位的標準差了．

若以 S 表示標準差，f 爲次數，d 爲各組距中點與假定均數之相差而以組距爲單位者，N 爲總次數，i 爲組距，則在次數表上求標

準差之公式如下:

$$S=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2-\frac{(\Sigma fd)^2}{N}}{N-1}}(i). \qquad \text{公式(3–7)}$$

又變異數之公式爲

$$V=\frac{\left[\Sigma fd^2-\frac{(\Sigma fd)^2}{N}\right](i)^2}{N-1}. \qquad \text{公式(3–8)}$$

求標準差的公式至此已有三個,卽公式(3–3),(3–4)和(3–7),其實後面兩公式是從公式(3–3)化出來的.它們都是離均差的平方和除以自由度後的平方根.三者形式雖不同,實際是一樣東西,這是讀者必須知道的.

3–8. 差異係數(coefficient of variation or variability) 上面已經說過標準差表示量數間的變異或散布的情形,量數分散則標準差大,量數密集則標準差小.但在有些情形之下,只用標準差來說明變異現象是不夠的.例如前述我國二十歲男子160人,其身高的標準差爲4.95厘米,又求得其體重的標準差爲4.96仟克.

【表3–6】 差異係數之用法(一)

(我國二十歲男子160人之身高與體重)

	身 高(厘米)	體 重(仟克)
均數	166.06	53.72
標準差	4.95	4.96
差異係數	2.98	9.23

身高與體重的單位不同,兩個數字是不能放在一起比較的.但

既然同是這 160 人的身高體重，我們問二者之中，那一個變異（或參差）較大呢？要解決這個問題，就不得不有一個公共的標準作爲比較的根據．最自然的比較標準，要算是各自的均數了．因此我們把標準差化做均數的百分數

$$\text{C.V.}=\frac{S}{x}\times 100, \qquad \text{公式(3-9)}$$

如
$$\frac{4.95}{166.06}\times 100=2.98.$$

卽身高的標準差爲其均數的 2.98%．同理，體重的標準差爲其均數的 9.23%．差異係數既然是百分數，所以它是沒有單位的，於是這兩個百分數就可以彼此比較了．這裏我們可以看到體重的差異係數較大，就表示在同年齡的一羣人中，體重間的變異要比身高的變異大些．

又如比較不同年齡的兩羣兒童，其身高（或體重）的變異有何差別，我們也可以用差異係數．下面是北平男嬰實足年齡一月組與一歲組的身高之比較(6)：

【表 3-7】 差異係數之用法（二）

（北平嬰兒一月組與一歲組身高之比較）

年　齡	嬰兒數	均　數	標準差	差異係數
1 月	164	54.6	2.15	3.9
12 月	92	73.5	2.82	3.8

此表若只從標準差看，好像一歲組的變異要大些．不過我們要注意；一歲組的身高均數也比一月組的爲大．均數較大必因各量數比較的

大，而數值大的，其間的變異也可能大些. 因此就需要把均數化為相等後再來比較. 差異係數就具有這個作用，即假定兩組的身高均數都是 100，那麼一月組的標準差將為 3.9，一歲組的將為 3.8，可見若兩組均數相等時，其變異情形也幾乎相等.

上面舉了兩個例子說明標準差的用途，其他如比較男女身高(或體重)的變異，心臟與腎上腺重量的變異，健康人與貧血病患者紅血球數的變異等等例子很多，不必一一列舉了.

差異係數，已往用得很多，可是濫用的結果，遂使若干統計學家貶抑了它的價值. 還有它的可靠性難於決定，也是缺點之一.［過去所用差異係數的標準誤(standard error，解釋見後)等公式，祇是近似值.］不過差異係數自有它的價值，初學者也有知道的必要，但應用時必須謹慎，切忌把風馬牛不相及的東西硬拉在一起比較，以致鬧成笑話.

【練　習　題】

1. 用第二章第 3，4 兩題之資料，求全距及四分位數間距.

2. 仿照求 Q_1 與 Q_3 的方法，求上題之百分之十位數 P_{10}，與百分之九十位數 P_{90}. 前者以 $\frac{N}{10}$ 代 Q_1 中之 $\frac{N}{4}$，後者以 $\frac{9}{10}N$ 代 Q_3 中之 $\frac{3}{4}N$，餘可類推. 最後求此二數之相差.

3. 下表為正常嬰兒與患硬皮病(sclerema)者之脫脂皮膚(fat-free skin)所含磷質之百分數(7). 試分別求其均數、標準差及差異係

數，並加以解釋.

正常嬰兒	.638	.491	.495	.640				
患硬皮病之嬰兒	.369	.644	.518	.484	.499	.498	.495	.686

4. 求下列資料之均數及標準差. 問呼吸次數在均數加減一個標準差的範圍以內的，即 $\bar{x}\pm S$，約占總人數的百分之幾？

校工三十七人每分鐘之呼吸次數(8)

12	20	16	18	20	28	12	18	23	15	24	17	18
18	20	17	12	22	16	21	24	20	16	20	18	18
24	21	24	18	20	20	18	18	24	18	24		

5. 下表爲自產(spontaneous delivery)與手術產(operative delivery) 產婦之坐骨結節(tubera ischii)間的距離(厘米)(9). 試比較各組內的變異情形. 比較時可先求均數，若兩均數很接近，即可用標準差直接比較，否則須求差異係數.

坐骨結節間的距離	自產者	手術產者
6.5—	2	——
7.0—	32	7
7.5—	188	28
8.0—	437	51
8.5—	857	107
9.0—	421	52
9.5—	56	11
	1,993	256

6. 下表爲64位正常男子血漿內中性脂肪(neutral fat)的重量

(毫克/百立方厘米)(10). 試求其均數及標準差.

正常男子血漿內中性脂肪之重量

419	162	149	219	248	313	211	169	91	281
264	172	124	235	94	62	224	58	92	205
132	145	305	285	174	107	240	269	396	416
662	703	249	179	133	157	198	95	100	178
145	199	54	407	166	94	248	235	66	120
239	128	560	233	80	557	217	542	252	175
103	165	351	107						

7. 試以代數方法, 證明 $\Sigma(X-\bar{x})=0$. 先令 $x=X-\bar{x}$, 等號兩邊各求總和, 然後以 $\Sigma X=N\bar{x}$ 代入, 即得 $\Sigma x=0$.

8. 離均差的平方和爲最小, 即 $\Sigma(X-\bar{x})^2<\Sigma(X-G)^2$, 式中 G 代表任意假定之值, 且不等於均數. 本章第 3–4 節求得 $\Sigma(X-\bar{x})^2=7,378,945.61$, 而表 3–4 求得 $\Sigma(X-2,500)^2=9,820,259$; 此值大於離均差之平方和. 讀者可另假定一 G 值, 以證實此原理.

【參 考 文 獻】

(1) Peters, C. C. and Van Voorhis, Statistical Procedures and their Mathematical Bases, Chapter II, The Pennsylvania State College (1935).

(2) Mills, F. C., Statistical Methods, revised edition, p. 146, Henry Holt & Co. (1938).

(3) 'Student', The probable error of the mean, Biometrika, 6 : 1–25 (1908).

(4) Shewhart, W. A., Economic Control of Quality of Manufactured Product, New York, Van Nostrand, 163–173, 185–186 (1931).

(5) Goulden, C. H., Methods of Statistical Analysis, pp. 35-37, John Wiley and Sons Inc., New York (1939).

(6) Guy, R. A., Chiang, C. C., Huang, H. H. and Yeh, K. S., Physical traits of Peiping children, Chinese Medical Journal, 52 : 507–518 (1937).

(7) Chen, T. T., A chemical study of sclerema neonatorum, National Medical Journal of China, 16 : 360–364(1930).

(8) Cruickshank, E.W.H., Physiological standards in North China, Supplement to the China Medical Journal, 37 : 1-44 (1923).

(9) Eula Eno, Chinese female pelvis, Chinese Medical Journal, 47 : 179–186 (1933).

(10) Page, I. H., Kirk, E., Lewis, W. H., Thompson, J. W. R. and Van Slyke, D. D., The Journal of Biological Chemistry, 111 : 613 (1935).

(11) 艾偉:高級統計學,第十章,商務.

第四章　均數之顯著性

4-1. 一個臨床的實驗　某種疾病經過治療以後，如果病狀減輕，那麼這治療有效，否則便是無效．這是大家都知道的．下表左邊兩行的數字，爲黑熱病(kala-azar)兼貧血症患者十四人，以尿素斯銻巴民(urea stibamine)治療前後之紅血球數(百萬/立方毫米)(1)，第三行的 X，爲治療後增加的紅血球數，即第二行減去第一行所得之差．這裏我們可以看到，除末第二位病人的紅血球數維持原狀外，其

【表4-1】　黑熱病兼貧血症患者以尿素斯銻巴民治療前後之紅血球數(百萬)

治療前	治療後	增加數(X)	平方(X^2)
2.25	3.00	.75	.5625
2.56	4.00	1.44	2.0736
3.00	3.50	.50	.2500
2.50	4.00	1.50	2.2500
3.50	4.00	.50	.2500
3.25	4.00	.75	.5625
2.25	3.50	1.25	1.5625
2.50	3.00	.50	.2500
1.50	3.25	1.75	3.0625
3.00	4.25	1.25	1.5625
3.00	4.00	1.00	1.0000
3.50	4.25	.75	.5625
4.00	4.00	0	0
4.00	4.75	.75	.5625
		12.69	14.5111

$$\bar{x}=\frac{12.69}{14}=.9064,$$

$$S=\sqrt{\frac{14.5111-\frac{(12.69)^2}{14}}{14-1}}$$

$$=\sqrt{\frac{14.5111-11.5026}{13}}$$

$$=\sqrt{\frac{3.0085}{13}}$$

$$=.4811.$$

餘都有相當增加，而且大多數已與健康人差不多. 十四人的平均增加數爲.9064，標準差爲.4811 (係用第 3-6 節公式 3-4 計算). 若第二批另有患者十四人，其病情與第一批相同，他們也受到同樣的治療，但結果不會和第一批完全一樣，因此所得均數不會剛等於.9064. 第三批的結果，大概和前兩批也有些出入. 餘可類推. 這種現象叫做抽樣變異 (sampling variation) 或抽樣變動 (sampling fluctuation)，亦稱機遇變動 (chance fluctuation)，意謂此種變動現象純由機遇使

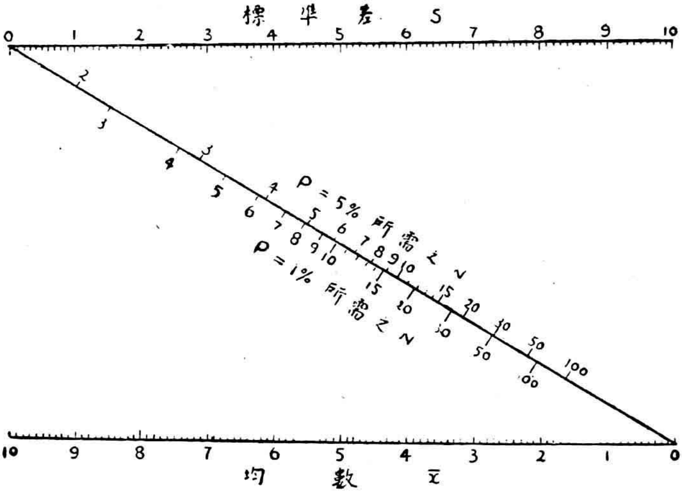


圖 4-1. 均數顯著性之圖解法.

然. 假定在黑熱病兼貧血症患者的'全體'中，經過尿素斯銻巴民治療以後，紅血球數並不增加，即全體均數 (population mean) 爲 0 [此假設有被推翻的可能，故 R. A. Fisher 氏稱之爲無效假設 (null hypothesis)(2)]，可是由於機遇變動的影響，很可能得到或正或負的

均數. 這裏我們要問, 從均數為 0 的全體中抽取現有樣本的機率有多少? 若機率很小, 那麼我們可以說這樣本均數與 0 的相差為顯著(significant); 反是, 則為不顯著(non-significant). 照統計學上的習慣, 機率大小的分界點在 5%. 便是說, 從均數為 0 的全體中抽取現有樣本的機率, 於 100 次中如在 5 次以上, 那麼我們便接受這假設, 而承認治療以後紅血球數並不增加; 若抽取現有樣本的機率, 100次中在 5 次以下, 那麼我們便推翻這個假設, 而說治療前後紅血球數確有不同. 若所求機率在 100 次中不滿 1 次, 那麼這均數與 0 的相差是非常顯著(highly significant), 使我們更相信治療的功效了.

測驗均數之顯著性(significance of the mean)的簡便方法可利用圖 4-1 (3, p.37), 該圖上面的橫線表示標準差, 下面的橫線表示均數. 把樣本均數與標準差所在處的兩點, 用細線或直尺相連, 遇中間斜線於一點, 這點的數值表示需要多大的樣本纔能使均數顯著. 上例標準差為 .4811, 均數為 .9064, 假如我們在圖上標準差等於 .48, 均數等於 .91 的兩點間連一直線, 該線遇斜線於一點, 這點的數值表示均數 '顯著' 與 '非常顯著' 時所需的人數. 本實驗共有 14 個病人, 超過了斜線上 $P=1\%$ 所需的人數, 故知結果為非常顯著. 若從斜線上的兩種刻度來看, 此連線與斜線的交點, 在 $P=5\%$ 方面係在 3 與 4 之間, 故知從 4 個病人的結果, 若得均數為 .91, 標準差為 .48, 即可承認治療後紅血球數的增加. 又在 $P=1\%$ 方面, 交點係在 5 與 6 之間, 故知從 6 個病人得到現有結果, 可目為非常顯著. 但須注意小樣本中變動甚大, 下結論時應當謹慎從事, 不可操切.

圖 4-1 還有其他用法. 若將標準差為 .48, 斜線上 $P=1\%$ 的刻

度爲 14 的兩點，用線連起來，延長後與下面的橫線相交處約爲 .4. 這是說，從 14 個病人的結果，若得標準差爲 .48，那麼均數只要等於 .4 就非常顯著了. 若用 $P=5\%$ 的刻度，則可得均數顯著時的數值 又圖 4–1 是根據均數與標準差之比例 $\bar{x}/S$ 而編造的. 所以 $\bar{x}$ 與 S 都可用相同的數值來乘或除，使能適合圖上的刻度，只要比例不變就行了. 例如 $\bar{x}=8, S=12$，可各以 2 除之，於是把 4 與 6 兩點連起來即得.

4–2. 樣本均數的分配　前面我們說過，從同一個全體中抽出的許多樣本，因爲機遇變動的關係，所得均數總不免有些出入. 本節要用實驗方法，把這個現象仔細討論一下. 表 4–2 所載，是 100 個數

【表 4–2】抽樣實驗中所用之全體，其均數爲 30，標準差爲 10.

3	7	11	12	13	14	15	16	17	17	18	18	18	19	19
19	20	20	21	21	21	22	22	23	23	24	24	24	25	25
25	26	26	26	26	27	27	27	28	28	28	29	29	29	29
30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	31	31	31	31	32
32	33	33	33	33	33	34	34	34	35	35	35	36	36	36
37	37	38	38	39	39	39	40	40	41	41	41	42	42	42
43	43	44	45	46	47	48	49	53	57					

目，其均數爲 30，標準差爲10. 我們把每個數目寫在一顆豌豆上，或用極小的紙寫好數目後，貼上去亦可（用豌豆的好處，在形圓而光滑，易於混和. 普通用的紙團，摩擦力大，而且不經久，卡片更不易混和）. 於是把這一百顆豌豆放在口袋或匣子裏，徹底混和後，取出一顆，記下數目，再放回去；第二次再混和，又取一顆，手續如前. 注意每取一

顆必須隨即放回袋內,這樣使取出任何一顆的機率爲 1%.如果我們要每個樣本包含十個數目，那麼取滿了十數便是第一個樣本。假定這十個數目如下:

19　20　21　24　28　30　33　35　38　49

它們的總和是 297，均數是 29.7，這是第一個樣本的均數．若依法再取十數，又得第二個樣本,同樣也求其均數．如此繼續進行,至取滿了所需的多少個樣本纔停止．據 G. W. Snedecor 氏的實驗結果(3,ch.3),500 個樣本均數的分配如表 4–3.這五百個樣本均數的散布很廣,最小的僅在 19.5—20.5 之間,最大的卻在 37.5—38.5 之間,但大多數則集中在全體均數 30 附近．我們可用標準差來表示這些均數散布的情形.計算的步驟即附於表 4–3.結果得標準差爲 3.09,這是一批均數的標準差,特稱爲標準誤(standard error)．標準誤表示均數的散布情形,正像前章中量數的標準差表示量數的分散情形一樣.

不過上述標準誤的計算,是一種理想的方法．我們通常祇有一個樣本，事實上不能把很多的樣本均數彙集起來求得標準誤，因此不得不從手頭的樣本來估計標準誤的數值,其公式爲

標準誤: $$S_{\bar{x}}=\frac{S}{\sqrt{N}}=\sqrt{\frac{\Sigma(X-\bar{x})^2}{N(N-1)}}.$$ 公式(4–1)

標準誤的平方即均數之變異數(variance of the mean),其公式爲

均數的變異數: $$V_{\bar{x}}=\frac{V}{N}=\frac{\Sigma(X-\bar{x})^2}{N(N-1)}.$$ 公式(4–2)

上列二公式中,最右邊的一項是把標準差 S 與變異數 V 的公式分別

【表 4-3】 樣本均數之分配及其標準差

	f	d	fd	fd^2
19.5—	1	−9	−9	81
20.5—	1	−8	−8	64
21.5—	7	−7	−49	343
22.5—	3	−6	−18	108
23.5—	16	−5	−80	400
24.5—	13	−4	−52	208
25.5—	34	−3	−102	306
26.5—	36	−2	−72	144
27.5—	57	−1	−57	57
28.5—	71	0		
29.5—	66	1	66	66
30.5—	51	2	102	204
31.5—	46	3	138	414
32.5—	42	4	168	672
33.5—	28	5	140	700
34.5—	18	6	108	648
35.5—	5	7	35	245
36.5—	4	8	32	256
37.5—	1	9	9	81
	500		351	4,997

$$\text{S.D.}=\sqrt{\frac{4,997-\frac{(351)^2}{500}}{500-1}}\,(1)=3,085 \text{ 或 } 3.09.$$

入卽得,讀者可自證之.本節抽樣實驗所抽取的第一個樣本,其標準差爲 9.43(讀者可用前章第 3-6 節的方法求得),又 N 爲 10,把這些數值代入公式(4-1),則得

$$S_{\bar{x}}=\frac{9.43}{\sqrt{10}}=2.98.$$

這是根據一個樣本來推測樣本均數的散布情形，此值與前面從五百個均數求得的 3.09 是很接近的，不過在實驗中很可能得到與 3.09 相去較遠的結果，因爲樣本與樣本間的變異是自然的現象.

所謂標準誤的'誤'字，有它歷史上的淵源. 最初在固定溫度與壓力之下測量一根白金棒的長度，繼續很多次的測量結果，發現或正或負，或大或小的誤差(error). 這些誤差大多集中在 0 的附近，並且對稱地伸展開去，離 0 點愈遠，則次數愈少. 這樣一個鐘形的對稱曲線，叫做常態分配(normal distribution)曲線(見圖 4-4). 關於常態分配，在第七章裏我們要詳細討論，這裏不必多說. 這樣很多次測量結果的均數，是眞正長度的最佳估計值(best estimate)，而估計值的不確定情形，則用標準誤表示之. 在統計學上，全體均數相當於白金棒的眞正長度，而樣本均數相當於測量所得的長度. 樣本均數間的變異正像測量時的有誤差一樣，而標準誤便是這種變異的量的表示了.

4-3. t 分配 樣本均數與全體均數間的距離，我們還可以用標準誤表示之. 前例樣本均數爲 29.7，全體均數爲 30，標準誤爲 2.98. 因得

$$\frac{29.7-30}{2.98}=-.10.$$

便是說，樣本均數與全體均數相差負十分之一個標準誤. 統計學上稱此值爲 t. 其公式爲

$$t=\frac{\bar{x}-m}{S_{\bar{x}}}. \qquad \text{公式(4-3)}$$

公式中的 m 是已知的或假定的全體均數，若用文字敍述，則 t 爲樣本均數與全體均數的相差，相當於標準誤的若干倍. Snedecor 氏$_{(3,ch.3)}$

曾將500個樣本各求 $S_{\bar{x}}$ 與 t,其 t 值的分配如下圖:

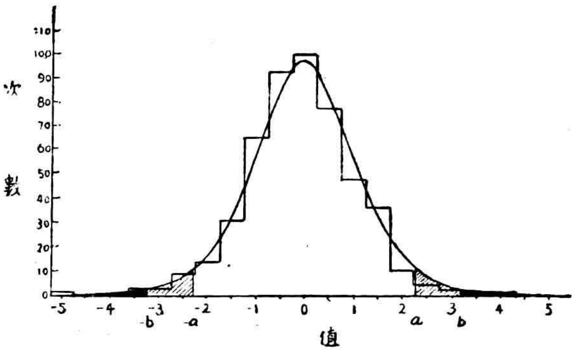


圖 4-2. 500個 t 值之直方圖及其理論曲線(自由度為9).

直方圖是實際的分配,而曲線是理論的 t 分配. 在 t 值為2.262與 -2.262(卽圖中之 a 與 $-a$)處的縱坐標以外,這理論曲線的面積為全面積之5%,換句話說,由於抽樣時的機遇變動而得到 t 值等於或大於2.262的機率,在100次中有5次,我們簡稱2.262為'自由度等於9時 t 之5%點(5% point)'. 上例中所得 t 值為 $-.10$,就在0的附近,其發生的機率很多(卽 $t=\pm.10$ 以外的面積很大),故知樣本均數與全體均數並無眞正的差別. 又在 t 等於3.250與 -3.250(卽圖中之 b 與 $-b$)處的縱坐標以外,該曲線的面積為1%,故簡稱3.250為1%點(1% point).

不過我們要注意: t 分配的形狀隨自由度而變遷,其5%與1%點也隨之而異. 圖4-3所示為500個 t 值的理論分配,實線為自由度等於3時的情形,虛線為自由度等於9時的情形(後者與圖4-2的曲線完全相同),前者的最高峯比後者矮些,而且散布要廣些,所以它

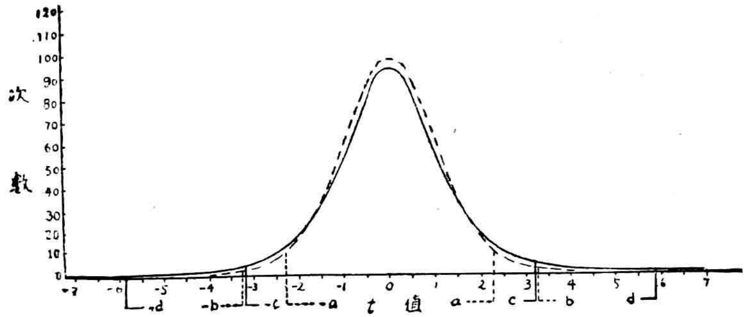


圖 4-3. 自由度爲 3 與 9 時 500 個 t 值之理論分配.

5%點爲 3.182(卽 c 與 $-c$)，又 1%點爲 5.841(卽 d 與 $-d$)，較由度等於 9 時的 5%點(a 與 $-a$)及1%點(b 與 $-b$)要散得開些.

【表 4-4】 相當於機率 50%，5%與 1%之 t 值(t 值表)

自由度	50%	5%	1%	自由度	50%	5%	1%
1	1.000	12.706	63.657	25		2.060	2.787
2	.816	4.303	9.925	26		2.056	2.779
3	.765	3.182	5.841	27		2.052	2.771
4	.741	2.776	4.604	28		2.048	2.763
5	.727	2.571	4.032	29		2.045	2.756
6	.718	2.447	3.707	30	.683	2.042	2.750
7	.711	2.365	3.499	35		2.030	2.724
8	.706	2.306	3.355	40		2.021	2.704
9	.703	2.262	3.250	45		2.014	2.690
10	.700	2.228	3.169	50		2.008	2.678
11	.697	2.201	3.106	60		2.000	2.660
12	.695	2.179	3.055	70		1.994	2.648
13	.694	2.160	3.012	80		1.990	2.638
14	.692	2.145	2.977	90		1.987	2.632
15	.691	2.131	2.947	100		1.984	2.626
16	.690	2.120	2.921	125		1.979	2.616
17	.689	2.110	2.898	150		1.976	2.609
18	.688	2.101	2.878	200		1.972	2.601
19	.688	2.093	2.861	300		1.968	2.592
20	.687	2.086	2.845	400		1.966	2.588
21		2.080	2.831	500		1.965	2.586
22		2.074	2.819	1,000		1.962	2.581
23		2.069	2.807	∞	.6745	1.960	2.576
24		2.064	2.797				

表 4-4 所載係在各自由度下相當於機率 50%, 5% 與 1% 之 t 值. 我們可以看到: 當機率相等時, 自由度愈大, 則 t 值愈小; 又在同一自由度之下, t 值愈大, 則機率愈小.

4-4. 均數顯著性之測驗 講過 t 分配以後, 我們可以討論測驗均數顯著性的詳細方法了. 表 4-5 爲三十名華人在美與返國後(相隔約三年)血壓之比較(5)及均數顯著性之測驗法. 例如第一位被試

【表 4-5】 華人在美與返國後心縮血壓(毫米, 水銀柱)之比較

在美時	返國後	降低之血壓(X)	平方(X^2)	在美時	返國後	降低之血壓(X)	平方(X^2)
114	94	20	400	114	90	24	576
115	92	23	529	110	106	4	16
118	90	28	784	110	108	2	4
120	100	20	400	130	120	10	100
110	90	20	400	117	100	17	289
116	100	16	256	115	90	25	625
110	104	6	36	108	100	8	64
106	94	12	144	104	106	−2	4
105	90	15	225	120	108	12	144
118	112	6	36	116	100	16	256
110	106	4	16	100	110	−10	100
110	108	2	4	112	102	10	100
105	110	−5	25	108	100	8	64
120	108	12	144	118	108	10	100
110	96	14	196	116	100	16	256
						343	6,293

均數 $\bar{x}=\frac{343}{30}=11.43$, 標準差 $S=\sqrt{\frac{6,293-\frac{(343)^2}{30}}{30-1}}=11.6288$,

均數之標準誤 $S_{\bar{x}}=\frac{11.6288}{\sqrt{30}}=2.123$, $t=\frac{11.43-0}{2.123}=5.384$,

自由度 $=29$, 1% 點 $=2.756$.

者在美時的血壓爲 114 毫米水銀柱，返國後則爲 94，降低了 20 毫米；第二位降低了 23 毫米．但也有少數在返國後血壓反而增高的(卽降低之血壓爲負數者)．就所有被試者合計，每人平均降低了 11.43 毫米．在此三十人中旣是有降有升，究竟返國後血壓是否降低，那麼就要看均數 11.43 與零是否有眞正的差別．這裏就含有一個‘無效假設’，卽假定返國後的血壓與在美時並無差別，斯時全體均數爲 0．我們先用第三章第 3–6 節的方法，求得標準差爲 11.6288，又用本章公式(4–1)求得均數之標準誤爲 2.123．t 值爲 5.384，卽謂樣本均數與 0 的相差爲標準誤的 5.384 倍．查 t 值表，當自由度爲 $30-1=29$ 時，5% 點爲 2.045，又 1% 點爲 2.756．我們求得的 t 值 5.384 比 1% 點要大，故樣本均數與 0 的相差爲非常顯著，這便是說：如果全體均數爲 0，由於機遇變動而求得一 t 值爲 5.384 的機率，在 100 次中還不到一次，這機率很小，因此上面的無效假設就不得不放棄了．於是華人返國後的血壓確較在美時爲低，至此得一統計上的證據．

根據上述顯著性測驗的結果，我們說：華人返國以後，血壓的降低非常顯著．這裏大家都知道‘返國’不是‘血壓降低’的原因．同樣‘黑熱病兼貧血症患者以尿素斯銻巴民治療後，紅血球數有顯著的增加’，這句話也並不等於說：‘尿素斯銻巴民確使紅血球數增加’．兩種說法的差別雖微，但必須辨別淸楚．前者只說治療以後紅血球數增加，後者卻肯定的說尿素斯銻巴民就是增加的原因．我們要知道，顯著性的測驗只能告訴我們實驗結果是否由機遇使然；用通俗的話來說，這結果是否碰巧得來．若有機遇以外的任何因子影響實驗的結果，那麼所得 t 值便是顯著．至於是否有其他因子夾雜在裏面，卻

無從知道.所以在實驗設計的時候,必須把其他因子一律控制,只讓一個因子單獨負責,這樣纔能說,實驗結果是由這個因子產生的.所以決定那一個因子產生實驗的結果,是設計方面的事情,而不是顯著性測驗法的分內事.因此,若有某實驗的紀錄,經 t 值測驗以後得到顯著的結果,可是別人把這個實驗重做,或從其他種種的證據,知道這結果是錯誤的.那時我們不能歸咎於顯著性的測驗,因為資料本身不可靠而產生的錯誤,不能教統計學來負責的.

測驗均數的顯著性,至此已有兩個方法:一是前面的圖解法,一是本節的 t 值,其實二者是一樣的.例如表 4-1 黑熱病兼貧血症患者的治療紀錄,其 $\bar{x}=.9064$, $S=.4811$,由此求得

$$S_{\bar{x}}=.4811/\sqrt{14}=.1286,$$

$$t=.9064/.1286=7.048.$$

查 t 值表,自由度為 $14-1=13$ 時,1% 點為 3.012.故知治療後紅血球數之增加為非常顯著.此結論與前相同.又表 4-5 的資料,亦可用圖解法測驗其顯著性,讀者可自為之.

4-5. 可信限(fiducial limits) 上節假定全體均數 $m=0$,經顯著性測驗後,樣本均數與 0 的相差為非常顯著,換句話說,這樣本大概不是從均數為 0 的全體中取出來的.現在假定全體均數 $m=5$,則得 $t=(11.43-5)/2.123=3.029$,仍較 1% 點為大.所以這樣本大概也不是從均數為 5 的全體中取出來的.再試 $m=6$, $t=(11.43-6)/2.123=2.558$,此值在 5% 點與 1% 點之間,故仍有顯著的差別.再試 $m=8$, $t=(11.43-8)/2.123=1.550$,此值小於 5% 點,其相差已不顯著,表示這樣本可能從均數為 8 的全體中取出來的了.若再試

$m=9$, $m=10$ 等, 也得同樣的結果.

這樣一個個的嘗試是很麻煩的. 爲簡便起見,我們可以利用 t 值表求得 m 的數值,使它剛在顯著性分界的地方. 當自由度爲 29 時, t 的 5% 點爲 2.045. 應用下列算式, 卽可求得 m,

$$\frac{11.43-m}{2.123}=2.045, \quad 或 \quad \frac{m-11.43}{2.123}=2.045;$$

解之得 $$m=7.09, \quad 或 \quad m=15.77.$$

這表示全體均數 m 可以比 11.43 小, 也可以比它大, 但當 m 小到 7.09 或更小時,卽與樣本均數有顯著的差別,而無效假設就被推翻; 反之,若 m 大到 15.77 或更大時亦然. 故此例 7.09 與 15.77 爲顯著性的分界處, R. A. Fisher 氏稱之爲可信限$_{(6)(2)}$. 在可信限以內的任何 m 值, 與樣本均數沒有顯著的差別, 其無效假設都可以接受的.

我們可以把上面求可信限的兩個方程式併在一起, 成爲

$$\frac{\bar{x}-m}{S_{\bar{x}}}=\pm t, \quad 簡之爲 \quad m=\bar{x}\pm S_{\bar{x}}t. \qquad 公式(4–4)$$

這公式裏的 t, 也可以用 1% 點代進去, 那麼解得的 m 是'非常顯著'的可信限了.

4–6. 個別的比較與團體的比較 上面所舉的兩個例子: 一是黑熱病兼貧血症患者在治療前後紅血球數的比較; 一是華人在美與返國後血壓的比較. 這兩個實驗都是對於一羣被試者作先後兩次的觀察, 第一次受觀察的是這些人, 第二次受觀察的還是這些人, 於是同一個人的兩次觀察結果, 就可以求其相差. 與此情形很相似的, 是實驗設計上配對的方法. 例如在動物飼養實驗(feeding experiment)中, 凡性別、年齡、體重相同的動物, 若別的情形一樣, 那麼它們體重

的增加，大致很相近的．在設計時就可利用這些知識，把性別、年齡、體重相同或相近的兩個動物，配成一對．再用豌豆一百顆，黑白色各半，承入袋內，徹底混和．今以白色代表飼料甲，黑色代表飼料乙．設第一對動物爲 A 與 B，現在要指定它們的飼料，那麽在口袋裏摸出一顆豌豆，若爲黑色，就給動物 A 以乙種飼料，而給 B 以甲種飼料．於是把取出的那顆豌豆放回袋內，混和後再取一顆，以指定第二對動物的飼料．這樣可使兩組動物，在性別、年齡和體重三方面完全相同；至於某鼠應得何種飼料，卻完全碰機會，主試者沒有主觀的意見夾在裏面．所以配對後再隨機化的設計，比不配對而完全隨機化的要控制得更爲嚴密些．在同一對中的兩個動物，各得一種不同的飼料，這情形與一個動物先後受到兩種不同處理的相彷彿，故顯著性的測驗也用第 4–1 或 4–4 兩節的方法(實例見本章練習題 7)．上述種種實驗的設計或是對於同一被試者先後作兩次觀察，或是根據某種特性把每兩個被試者配成一對，這些都叫做個別的比較 (individual comparison)．

倘若我們要比較華南與華北人的身高體重或其他生理特質，有無差別，我們似乎沒有理由把姓李的華南人和姓張的華北人配做一對．此外，有些實驗也不能對於同一被試者先後作兩次觀察．例如某病有兩種治療法，任何一種都能生效，只是遲速有些不同，這樣就不能把兩種治療法施於同一個病人；又如兩種處理方法有相互影響，或因其他條件的限制，致兩種處理必須同時進行，而不可先後；又如實驗所用動物經過一次處理後就被犧牲．在這些情形之下，我們不能對於同一被試者先後施以兩種的處理．同時我們對於實驗結果無

從預料，究竟有些什麼因子與結果有密切的關係（這方面若有充分的知識當然可以配對），我們也不很清楚，因此配對的辦法就沒有適當的根據．於是我們就不得不對於兩組不同的被試者作團體的比較(group comparison)了．

在團體比較時，我們可以選擇一批被試者，他們各方面的情形大致相等．各被試者應受何種處理，我們也可用上面所說的一袋豌豆來決定．今以白色代表甲種處理法，黑色代表乙種處理法．將豌豆徹底混和後，取出一顆，若爲黑色，那麼第一位被試者就歸入乙組，受到乙種處理法；於是將豌豆放回袋內，混和後再取出一顆，若爲白色，那麼第二位被試者就歸入甲組，受到甲種處理法；餘類推．這樣兩組被試者的數目就不一定相等，而且甲組內被試者的次序與乙組內的次序是沒有關係的，所以祇能作團體的比較．關於團體比較的統計處理法，我們在下節將有詳細說明．

4–7. 兩均數相差之顯著性 兩組被試者未經配對，每組就各有一均數，此二均數有無顯著的差別，這是本節所要討論的問題．表4–6係自犬之副甲狀腺(parathyroid)被摘去後至搐搦發生所經過的時間(7)．被試者分爲控制與截除結腸(colectomize)兩組．前者用犬十頭，祇摘去副甲狀腺，後者另用犬八頭，在摘去副甲狀腺的前幾天或同時把結腸割去．每犬自副甲狀腺被摘後至搐搦發生所經過的時間都記錄下來．結果控制組平均經過 56.5 小時，截除結腸組則平均經過 59.125 小時．我們要問後者是否確實較前者歷時久些，換句話說，這兩均數的相差是否顯著．測驗的方法也用 t 值，不過計算過程和前面稍有不同．先用第三章公式(3–5)的方法，求得各樣本的離均差

【表 4–6】 兩均數相差之顯著性

(犬之副甲狀腺被摘去後至搐搦發生所經過之時間)

控制組		截除結腸組	
X_1(小時)	X_1^2	X_2(小時)	X_2^2
54	2,916	48	2,304
48	2,304	42	1,764
48	2,304	48	2,304
96	9,216	48	2,304
45	2,025	120	14,400
96	9,216	48	2,304
20	400	53	2,809
68	4,624	66	4,356
45	2,025		
45	2,025		
565	37,055	473	32,545

$$N_1=10,\qquad N_2=8.$$

$$\bar{x}_1=\frac{565}{10}=56.5,$$

$$\bar{x}_2=\frac{473}{8}=59.125,$$

$$\bar{x}_1-\bar{x}_2=56.5-59.125=-2.625.$$

$$\Sigma(X_1-\bar{x}_1)^2=37,055-\frac{(565)^2}{10}=5,132.5,$$

$$\Sigma(X_2-\bar{x}_2)^2=32,545-\frac{(473)^2}{8}=4,578.88.$$

$$S=\sqrt{\frac{5,132.5+4,578.88}{10+8-2}}=\sqrt{\frac{9,711.38}{16}}=24.637.$$

$$S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=24.637\sqrt{\frac{10+8}{(10)(8)}}=11.686.$$

$$t=\frac{56.5-59.125}{11.686}=\frac{-2.625}{11.686}=-.225.$$

自由度＝16，　5％點＝2.120.

平方和，計控制組爲 5,132.5，而截除結腸組爲 4,578.88．將此二值相加，得 9,711.38，然後以自由度除之，開方卽得標準差．這裏關於自由度的計算法需要解釋一下．控制組的自由度爲 10－1，截除結腸組爲 8－1，故二者合計爲 10＋8－2．我們還可以用另一種說法：在求離均差平方和的時候，控制組用了一個均數 $\bar{x}_1$，截除結腸組也用了一個均數 $\bar{x}_2$，因爲求一個均數就是受到一個條件的限制，現在求兩個均數就有兩個條件的限制，故自由度爲 $N_1+N_2-2=10+8-2=16$（參閱第三章第 3–5 節）．從樣本求得的均數、標準差等，我們總稱之爲統計數(statistic)，而全體的均數、標準差等，則總稱之爲參數(parameter 或譯母體數)．統計數只是相當的參數的估計值，又統計數時有抽樣變動，而參數是相當穩定的．前面討論樣本均數時已經提到，這裏只加以推廣而已．至此關於自由度的計算法，我們得到一個普徧的原則，卽每用去一個統計數，則自由度就減少一個．這與第 3–5 節的原理相同，只是換了一種說法而已．

上述兩組的離均差平方和相加，得 9,711.38，以自由度 16 除之，開方得 24.637．這個合併的標準差是全體標準差的最佳估計值．所謂全體是指由很多離均差所構成的全體．雖離均差所根據的樣本均數儘可不同，但所得的離均差每爲自此全體中取出的樣本．其次，將合併的標準差乘以 $\sqrt{(N_1+N_2)/N_1N_2}$，卽得兩均數相差之標準誤，$S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=11.686$．此值表示兩均數相差的變異情形．明白的說：如果我們做了很多次的實驗，每次控制組用犬 10 頭，截除結腸組用犬 8 頭，結果得兩均數的相差 $(\bar{x}_1-\bar{x}_2)$．做了很多次實驗，就得到很多個 $(\bar{x}_1-\bar{x}_2)$．這些 $(\bar{x}_1-\bar{x}_2)$ 的散布情形，我們以標準差表示之．但事實

上我們只有一次實驗的結果，因此對於 $(\bar{x}_1-\bar{x}_2)$ 的標準差就不得不設法估計，上面所得的 $S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=11.686$ 就是它的估計值.

'兩均數的相差'除以'相差的標準誤'，即得 t 值為 $-.225$，此值遠較自由度為 16 時的 5% 點(2.120)為小（注意求得的 t 值與 5% 點或 1% 點相比較時，只取其絕對值，而不計正負號，例如這裏 .225 小於 2.120)，故兩均數的相差為不顯著；易言之，自摘去副甲狀腺至搐搦發生所經過的時間，在控制組與截除結腸組並無早遲之分——不顯著的意義只是說：證據不充分，不能證明這效果. 因此就沒有理由來相信，截除結腸可以延遲搐搦的發生. 假如第二次實驗的結果，控制組的時間反而稍長，也不足為怪. —— 原著者蔡翹與徐豐彥兩氏在結論中說：'割去大腸之犬在摘除副甲狀腺以後，搐搦症狀如常發現，…… 一切與未割大腸而單摘去副甲狀腺之犬無大差異'. 這裏用顯著性測驗的結果與二氏的結論相符.

茲將測驗兩均數相差的顯著性時所用公式列後.

合併標準差：
$$S=\sqrt{\frac{\Sigma(X_1-\bar{x}_1)^2+\Sigma(X_2-\bar{x}_2)^2}{N_1+N_2-2}}. \qquad \text{公式(4-5)}$$

兩均數相差之標準誤：
$$S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=S\sqrt{\frac{N_1+N_2}{N_1N_2}}. \qquad \text{公式(4-6)}$$

兩均數相差之 t 值：
$$t=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}};\ \text{自由度}=N_1+N_2-2. \qquad \text{公式(4-7)}$$

本實驗的結果，兩組均數相差 2.625 為不顯著. 如果有人問：那麼兩組均數要相差多少，纔有真正的差別呢？這問題可以應用第 4-5

節的可信限來解決.當自由度為 $10+8-2=16$ 時(見前),5% 點為 2.120.這裏仍假定全體均數為 0,我們要算出$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)$的數值,使與 0 有顯著的相差,即

$$\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-0}{11.686}=2.120, \quad (\bar{x}_1-\bar{x}_2)=24.774.$$

所以控制組與截除結腸組的均數,必須相差 24.774 小時以上,統計學上纔能承認它們有眞正的差別.

4–8. 機差(probable deviation)**與機誤**(probable error) 以前學過統計的讀者,都知道機差與機誤這些名詞.機差是標準差的 .6745 倍,它也表示量數的散布情形,其公式為

$$\text{P.D.}=.6745S. \qquad \text{公式(4–8)}$$

在常態曲線上,全體均數上下各一個機差(即 $m\pm$P.D.)的範圍內(圖 4–4 兩虛線之間),有 50% 的量數散布着,而在全體均數上下各

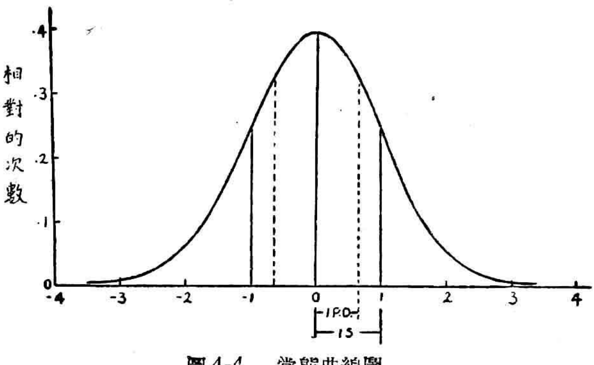


圖 4-4. 常態曲線圖.

一個標準差的範圍內(圖 4–4左右兩實線之間),則有68%的量數散布着

機誤的解釋與機差相似，不過機誤表示樣本均數（而不是量數）的散布情形，所以它是相當於標準誤的，其公式為

$$\mathrm{P.E.}_{\bar{x}} = .6745\,S_{\bar{x}}. \qquad \text{公式(4–9)}$$

若從一個不很偏態的全體中，隨機地抽取很多樣本，這些樣本的均數，大約有 50% 落在 $m \pm \mathrm{P.E.}_{\bar{x}}$ 的範圍內．現在舉個實例來說明．第 4–2 節的抽樣實驗，其全體均數為 30，第一個樣本為

19 20 21 24 28 30 33 35 38 49

這樣本的標準差為 9.43，因得機差為 $\mathrm{P.D.} = .6745 \times 9.43 = 6.36$，在 $m \pm \mathrm{P.D.} = 30 \pm 6.36$，即 23.64 至 36.36 的範圍內有五個數目，占總次數的一半（在小樣本中有時不會剛好一半的）．又均數的標準誤為 2.98，故機誤為 $\mathrm{P.E.}_{\bar{x}} = .6745 \times 2.98 = 2.01$，故在 $m \pm \mathrm{P.E.}_{\bar{x}} = 30 \pm 2.01$，即 27.99 至 32.01 的範圍內，約有 50% 的樣本均數落在裏面．關於機誤還有一種解釋，上述‘第一個樣本’的均數為 29.7，今機誤為 2.01，則全體均數在 29.7 ± 2.01（即 $\bar{x} \pm \mathrm{P.E.}_{\bar{x}}$）之內與外的機率為 50 : 50．但是如果說有 50% 的樣本均數落在 $\bar{x} \pm \mathrm{P.E.}_{\bar{x}}$ 的範圍內，那就錯了，因為這裏誤把樣本均數 $\bar{x}$ 代替了全體均數 m 的緣故．

在常人的思想裏，半數 50% 好像比 68% 容易理解些，這是機差與機誤的惟一好處，可是在其他方面，卻被標準差與標準誤的許多優點所掩蓋了．因此在現代統計學上，尤其是生物統計學上，機差與機誤幾乎已經不用 (3, p.41, p.61) (4)，不過至今守舊的統計學家依然把機誤放在均數的後面，如 29.7 ± 2.01．而在現代統計學上卻把標準誤放在均數的後面了，如 29.7 ± 2.98．因此我們在研究報告裏

應當說明在正負號後面的是什麼東西，這樣可以不致引起誤會了.

【練 習 題】

1. 黑熱病兼貧血症患者十四人以尿素斯銻巴民治療前後之血色素(hemoglobin, %)如下(1). 試以圖解及 t 值兩法測驗其顯著性.

治療前	36	45	55	55	65	60	42	45	25	55	50	65	60	70
治療後	45	65	66	85	70	55	70	45	50	80	80	70	60	85

2. 初產婦(primiparae)五人，在注射 1 立方厘米之 thymophysin 前後，其心舒血壓(diastolic blood pressure, mm. Hg)如下(8). 試以圖解及 t 值兩法測驗其顯著性，並解釋統計之結果.

注射前	98	86	88	98	72
注射後	102	96	100	98	90

3. 李瑞克(9)氏用未長成之鼠，喂以不同量之黃豆鷄蛋粉或全奶粉，以作平衡試驗. 其實驗情形可分為兩部分：第一部分有鼠 9 頭，各鼠先後飼以上述兩種食料；第二部分則分甲乙兩組，甲組有12鼠，飼以黃豆鷄蛋粉，乙組有 9 鼠，飼以全奶粉. 茲將各鼠每日鈣之存留量(calcium retention, mg.)錄後. 試依照實驗情形，分別用 t 值測驗其顯著性，並解釋之.

第一部分 一鼠先後飼以兩種食料者

鼠之號碼	1	2	3	4	5	6	7	8	9
飼以黃豆鷄蛋粉時	31.1	33.1	26.8	36.3	39.5	30.9	33.4	31.5	28.6
飼以全奶粉時	36.7	28.8	35.1	35.2	45.8	25.7	36.5	35.9	28.7

若將鼠數加多，能否得顯著的差別？那時需鼠幾頭？

第二部分　甲乙兩組各得一種食料者

甲組（黄豆鷄蛋粉）	29.7	26.7	28.9	31.1	33.1	26.8	36.3	39.5	30.9	33.4	31.5	28.6
乙組（全奶粉）	28.7	28.3	28.1	29.3	32.2	31.1	30.0	36.2	36.8			

4. 李瑞克氏在上述平衡試驗中，同時計算各鼠每日氮之存留量(nitrogen retention, mg.). 玆僅錄第二部分之結果，問兩均數須相差若干始爲顯著？

甲組（黄豆鷄蛋粉）	87.9	94.6	90.6	95.2	89.0	75.9	123.6	159	103.6	143.3	148.9	122.6
乙組（全奶粉）	90.8	84.4	87.8	52.1	101.3	87.4	94.6	60.5	154.3			

甲組之均數爲 111.18，乙組之均數爲 90.36，相差 20.82. 但因各組自身之差異過大，故經 t 值測驗後，此相差爲不顯著，即謂兩組之氮存留量，並無眞正的差別. 原文謂：'黄豆鷄蛋粉所致之氮留滯較全奶粉爲大.' 此結論係只看均數的表面值，而並未將機遇因子考慮在內，於此可見統計處理的重要.

5. 下表爲我國成年男子 24 人，在冬夏兩季尿中所含男性激素之每日分泌量（毫克）(10). 原著者周啓源與吳憲二氏謂：夏季男性激素之每日分泌量平均較冬季爲多. 試以統計方法證實之.

被試者號碼	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
冬季	10.5	9.2	12.4	7.9	6.7	5.4	13.0	10.7	8.0	14.9	14.8	8.7
夏季	16.0	9.5	8.0	9.4	7.7	5.8	18.0	16.4	18.3	16.6	13.8	10.8
被試者號碼	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
冬季	5.1	8.2	6.3	9.5	10.4	9.2	11.1	6.6	9.1	10.7	13.4	8.3
夏季	7.3	11.6	11.6	12.3	17.3	15.8	13.5	11.1	16.4	18.5	17.0	10.9

6. 戚壽南與李鉅(11)兩氏曾作心臟電傳導的收縮期(electrical systole)之研究,茲摘錄其一部分資料如下.計有健康華人39名,內男性25人,女性14人.問男女間有無顯著的差別?

健康華人在仰臥時之心縮期時間(秒)

男	.318	.309	.346	.379	.352	.320	.352	.332	.325	.376
	.324	.344	.360	.322	.343	.359	.358	.321	.385	.362
	.333	.350	.376	.326	.344					
女	.325	.320	.362	.359	.334	.323	.320	.369	.300	.319
	.359	.360	.380	.381						

7. Mitchell氏(12)等用鼠10對研究生花生及炒花生之蛋白質生理價值(biological value),根據現有均數與標準差推測,若欲使二者有顯著的差別,問至少須用動物若干對?

對別(號碼)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
生花生	61	60	56	63	56	63	59	56	44	61
炒花生	55	54	47	59	51	61	57	54	62	58

8. 需肇唐氏編一心理健康問答表,內列問題243個(此係統計時實際所用題數).若被試者有一病態答案,即得一分,故分數愈多,表示心理愈不健康.下表為某校高中三年級十九歲之男女生所得分數(13),試比較十九歲時兩性之差異.

男生	58	100	127	53	68	93	40	57	99	59
	83	68	60	82	124	60	122	108		
女生	61	119	48	47	88	61	96	75	101	94
	88	73	90							

【參考文獻】

(1) Keefer, C. S., Khaw, O. K. and Yang, C. S., The Anemia of Kala-azar, with special reference to treatment, National Medical Journal of China, 15 : 731–742 (1929).

(2) Fisher, R. A., The Design of Experiments, Oliver and Boyd, London and Edinburgh (1937).

(3) Snedecor, G. W., Statistical Methods, The Iowa State College Press, Ames, Iowa (1940).

(4) Mills, F. C., Statistical Methods, revised edition, p. 466, Henry Holt & Co. (1938).

(5) Tung, C. L., The blood pressure of Chinese in China and in the United States of America, Chinese Journal of Physiology, Report Series, No. 1, pp. 93–96 (1928).

(6) Fisher, R. A., Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 26, 528 (1930).

(7) Tsai, C. and Hsu, F. Y., Studies on the pathogenesis of parathyroid tetany, 1. The effect of removal of large intestine, Chinese Journal of Physiology, 3, 2 : 183–196 (1929).

(8) Der Brucke, M. G., Amer. Journ. Surg., 19, 429 (1933).

(9) Reid, E., The calcium, phosphorus, and nitrogen retention of rats on soybean-egg powder and whole milk powder diets, Chinese Journal of Physiology,

9, 4 : 307–314 (1935).

(10) Chou, C. Y. and Wu, H., Contents of sex hormones in normal and pathological urine, Chinese Journal of Physiology, 11, 4 : 429–436 (1937).

(11) Cheer, S. N. and Li, R. C., Studies on the electrical systole (‘*Q–T*’ interval) of the heart, 1. The duration of electrical systole in normal Chinese, Chinese Journal of Physiology, 4, 2 : 191–212 (1930).

(12) Mitchell, H. H., Burroughs, W. and Beadles, J. R., Journal of Nutrition, 11, 257 (1936).

(13) 雷肇唐、郭祖超、陳馭歐：戰時中國大中學生之心理健康狀況，國立中央大學醫科研究所公共衛生學部研究報告之三（三十四年十二月）.

第五章　直線迴歸

以上各章所討論的實驗，在每個問題裏，都只有一個變數，如問題甲研究身高，問題乙研究體重，問題丙研究血壓等等．即使有兩組放在一起比較，但所比較的還是同一個變數．我們知道生物界有不少現象是有相互關係的，即以人類而論，雖然有高的瘦子和矮的胖子，但一般說來，身材高的，體重也要重些．又在兒童與青年時期，身高體重都隨着年齡而增加．動物方面也有很多類似的例子．因此，我們所研究的問題不能祇限於一個變數，我們必須把以前的觀念推廣，將兩個變數間的關係用方程式表示出來，這樣便可從這個變數來推算另外一個變數．這種推算式的求得，總稱爲迴歸(regression，此名詞有歷史的意義，見後)．直線迴歸(linear regression)是最簡單的一種．

5-1．迴歸方程式(regression equation)之計算法　我們要找出一個方程式，可以從 X 來推算 Y，那麼在做實驗時必須把 X 和 Y 的各個數值都記錄下來，成爲一對一對的量數(注意：只有一方面的量數是不行的)．下表 X 爲白鼠之食物消費量，Y 爲在九週內所增加的體重(1)．例如第一鼠的食物消費量爲 568 克，體重增加爲 106 克，每鼠有一對數值，六鼠便有六對．

白鼠之食物消費量(克，X)及九週間增加之體重(克，Y)

X	568	608	636	636	660	684
Y	106	126	134	134	128	158

依數學上的習慣，用橫坐標表示 X 值，縱坐標表示 Y 值，每一對數値就定一個點子，一共有六點，如圖 5–1 所示. 圖中六個小圓點有構成一條直線的趨勢. 最初統計學家用一根直線在這些點子間慢慢移動，移到一個位置，使各點與該線的距離（如 PP'）爲最小的時候，就

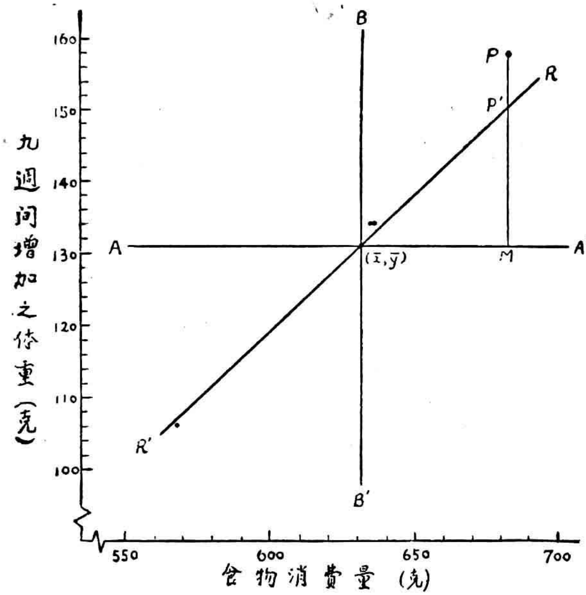


圖 5-1. 由白鼠食物消費量推算所增體重之迴歸線.

用這根線來表示 X 與 Y 兩變數間的關係. 現在統計學上應用最小二乘方 (the least squares) 的原理，已有很簡便的方法把這根線的方程式找出來，有了方程式，就可以很快的把直線畫下來了.

迴歸方程式的計算法見表 5–1. 第 1, 3 兩行爲 X 與 Y 的原來資料，同一對中的兩數要寫在同一橫行上，第 2, 4 兩行爲其平方，第 5

【表 5-1】 迴歸方程式之計算

白鼠之食物消費量(克, X)及九週間增加之體重(克, Y)

(1) X	(2) X^2	(3) Y	(4) Y^2	(5) XY
568	322,624	106	11,236	60,208
608	369,664	126	15,876	76,608
636	404,496	134	17,956	85,224
636	404,496	134	17,956	85,224
660	435,600	128	16,384	84,480
684	467,856	158	24,964	108,072
3,792	2,404,736	786	104,372	499,816

$$\bar{x}=\frac{3,792}{6}=632,\qquad \bar{y}=\frac{786}{6}=131.$$

$$\Sigma(X-\bar{x})^2=2,404,736-\frac{(3,792)^2}{6}=8,192.$$

$$\Sigma(Y-\bar{y})^2=104,372-\frac{(786)^2}{6}=1,406.$$

$$\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})=499,816-\frac{(3,792)(786)}{6}=3,064.$$

$$b=\frac{3,064}{8,192}=.3740.$$

迴歸方程式:

$$Y_e-\bar{y}=b(X-\bar{x}),\quad Y_e-131=.374(X-632)=.374X-236.37.$$

$$Y_e=.374X-236.37+131=.374X-105.37.$$

行爲同對中 X 與 Y 的乘積，如 $568\times106=60,208$. 然後求各行的總和，如 $\Sigma X=3,792$, $\Sigma X^2=2,404,736$，餘類推. 在前兩章裏，我們已屢次用下面的公式(第三章公式 3-5)求離均差平方和

$$\Sigma(X-\bar{x})^2=\Sigma X^2-\frac{(\Sigma X)^2}{N}.$$

同理，在 Y 方面，這公式就成爲

$$\Sigma(Y-\bar{y})^2=\Sigma Y^2-\frac{(\Sigma Y)^2}{N}.$$

讀者在做練習題時，已經很熟悉，這裏不需要再解釋. 至於離均差積之和(sum of products of deviations from means)卻是新用的，其公式爲

$$\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})=\Sigma XY-\frac{(\Sigma X)(\Sigma Y)}{N}. \qquad \text{公式}(5\text{–}1)$$

此例均數 $\bar{x}=632$, $\bar{y}=131$. 將各量數減去其相當的均數，然後相乘，得總和爲 3,064，與用公式(5–1)的結果相同.

$X-\bar{x}$	-64	-24	4	4	28	52	
$Y-\bar{y}$	-25	-5	3	3	-3	27	
$(X-\bar{x})(Y-\bar{y})$	1,600	120	12	12	-84	1,404	總和 $=3,064$

我們還可以用代數方法來證明:

$$\begin{aligned}\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})&=\Sigma(XY-\bar{x}Y-\bar{y}X+\bar{x}\bar{y})\\&=\Sigma XY-\bar{x}\Sigma Y-\bar{y}\Sigma X+N\bar{x}\bar{y}\\&=\Sigma XY-\frac{\Sigma X}{N}(\Sigma Y)-\frac{\Sigma Y}{N}(\Sigma X)+N\frac{\Sigma X}{N}\frac{\Sigma Y}{N}\\&=\Sigma XY-\frac{(\Sigma X)(\Sigma Y)}{N}.\end{aligned}$$

以後我們就用公式 (5–1) 來求離均差積之和，而不用先求離均差 $(X-\bar{x})$ 與 $(Y-\bar{y})$，然後相乘的方法，因爲當均數有小數時，這樣算

法是很麻煩的.

離均差積之和被 X 的離均差平方和除,得迴歸係數(regression coefficient),以符號 b 代之:

$$b=\frac{\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})}{\Sigma(X-\bar{x})^2}. \qquad \text{公式(5–2)}$$

又由 X 推算 Y 的迴歸方程式爲

$$Y_e-\bar{y}=b(X-\bar{x}). \qquad \text{公式(5–3)}$$

這裏的 Y_e 是 Y 的估計值 (estimated value). 公式(5–2)與(5–3)是根據最小二乘方演化而來的,這裏不預備詳細介紹,免使讀者益感紛繁. 本例求得的迴歸係數爲 .3740, 連 $\bar{x}$, $\bar{y}$ 代入公式(5–3), 化簡後得迴歸方程式爲

$$Y_e=.374X-105.37. \qquad \text{(a)}$$

把 X 的數值代入此式,即得 Y 的估計值,如

$$X=568, \quad Y_e=.374(568)-105.37=107.06;$$

又 $$X=660, \quad Y_e=.374(660)-105.37=141.47.$$

我們知道,兩點定一直線,所以有了任何兩點(X 的數值不限於已知的),就可以把迴歸線(regression line)畫出來. 這裏爲簡便計,就用(568, 107.06)和(660, 141.47)兩點作一直線,即爲圖5–1的 RR' 線.

迴歸線有二個特性: (1)它通過($\bar{x}$, $\bar{y}$)點(參閱圖5–1),這裏可以用數字來說明. 將 $\bar{x}=632$ 代入迴歸方程式(a)的 X,則得

$$Y_e=.374(632)-105.37=131.$$

這便是 $\bar{y}$, 故知迴歸線通過($\bar{x}$,$\bar{y}$)點. (2)當 X 與 Y 各用原來單位時,迴歸線的坡度(slope)就是迴歸係數 b. 它的意義是: 當 X 增減一個

單位時,Y 平均增減 b 個單位. 就本例言,當食物消費量增減一克時,體重方面平均增減 .374 克.

5–2. 標準估計誤差(standard error of estimate) 將表 5–1 所列 X 值,逐一代入迴歸方程式(a),即得 Y_e 的各數值. 我們把白鼠實際增加的體重叫做觀察值(observed value),算出的 Y_e 值叫做估計值. 各鼠體重的觀察值與估計值見表 5–2 第 2, 3 兩行. 觀察值與估

【表 5–2】 估計誤差之計算

食物消費量	體重(觀察值)	體重(估計值)	估計之誤差	誤差之平方
(1) X	(2) Y	(3) Y_e	(4) $Y-Y_e$	(5) $(Y-Y_e)^2$
568	106	107.06	−1.06	1.1236
608	126	122.02	3.98	15.8404
636	134	132.49	1.51	2.2801
636	134	132.49	1.51	2.2801
660	128	141.47	−13.47	181.4409
684	158	150.45	7.55	57.0025
			.02	259.9676
				或259.97

計值的相差叫做估計之誤差 (error of estimate),見第 4 行. 誤差有正有負,理論上正負相消後,其總和應爲 0, 這裏誤差的總和是.02, 這是因爲計算估計值時小數四捨五入的結果. 將各誤差平方,即得第 5 行的數值,其總和爲 259.9676 或 259.97. 按最小二乘方的原理,此值爲最小. 讀者可將迴歸方程式(a)的數值改變一下,把表 5–1 所列的 X 值代入,得體重的估計值, 於是仿表 5–2 的步驟求得誤差之平方和, 不論迴歸方程式的數值怎樣改變, 所得誤差之平方和總

比 259.97 爲大.

我們在第三章第 3–3 節說'離均差的總和爲零',又該章練習題 8 說'離均差的平方和爲最小'. 這兩個特性在迴歸線方面也有類似的情形. 請看圖 5–1, AA' 爲經過$(\bar{x},\bar{y})$的水平線,這線上任何一點的縱坐標都等於 $\bar{y}$,故各點與該線的距離(如 PM),卽爲離均差 $Y-\bar{y}$. 圖中六個點子,有些在 AA' 線上面,其離均差爲正;有的在它的下面,其離均差爲負,這些離均差的總和爲 0. 其實任何一線通過$(\bar{x},\bar{y})$的都有這個性質,各點與該線距離之總和總是等於 0 的. 所以各點與迴歸線 RR' 距離(如 PP',卽上述'估計之誤差')的總和也等於 0. 其次,我們如果在圖 5–1 上再任意作一水平線,那麼各點與該線距離的平方和必大於離均差平方和. 故當單獨考慮體重增加量 Y 的變異情形的時候,用均數做根據最爲合宜. 但是我們現在知道,體重增加量的變異與食量大小有關係,表示這種關係的便是迴歸線. 倘若我們把 AA' 線依逆時針方向繞着 $(\bar{x},\bar{y})$ 點旋轉,那麼各點與該線距離的平方和便逐漸減少,當旋到一個位置,其距離的平方和爲最小的時候,便是所求的迴歸線了. 所以迴歸線的觀念,可以說是均數水平線 AA' 的推廣.

估計值誤差的平方和,還有一種簡便的計算法. 在表 5–1,我們已求得

$$\Sigma(X-\bar{x})^2=8,192,$$

$$\Sigma(Y-\bar{y})^2=1,406,$$

$$\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})=3,064.$$

把這些數値代入下列公式,卽得估計值誤差的平方和

$$\Sigma(Y-Y_e)^2=\Sigma(Y-\bar{y})^2-\frac{[\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})]^2}{\Sigma(X-\bar{x})^2}$$

$$=1,406-\frac{(3,064)^2}{8,192}=259.99. \qquad \text{公式}(5\text{–}4)$$

表 5–2 所得的誤差平方和，比這裏的差 .02，這是因爲小數四捨五入的關係，在理論上二者應當相等的.

離均差平方和爲 $\Sigma(Y-\bar{y})^2=1,406$，而估計值誤差的平方和爲 $\Sigma(Y-Y_e)^2=259.99$. 後者比前者減少 1,146.01，這是由於用迴歸線代替了均數水平線的結果. 所以體重增加量的總變異1,406，可分做兩部分：一部分 1,146.01（若求表 5–2 估計值 Y_e 的離均差平方和，應等於此值）是與迴歸有關係的，卽可以用食物消費量來解釋的；而另一部分 259,99（若求表 5–2 $Y-Y_e$ 之離均差平方和，應等於此值，按估計值誤差之均數應等於 0，故其離均差平方和卽爲誤差之平方和）卻是與迴歸無關的. 在直線迴歸的假設下，這部分的變異只能歸之於抽樣變動了.

估計值誤差的總和旣爲 0，又其平方和爲最小. 這個特性與離均差相似，前面已說過了. 若仿照求變異數與標準差的方法，將誤差的平方和以自由度除之，卽得估計的變異數(variance of estimate)，開方後卽爲標準估計誤差. 不過這裏的自由度與以前不同. 剛纔說過，離均差平方和 1,406 降低爲估計值誤差之平方和 259.99，是用了迴歸線的結果. 決定迴歸線方向的是迴歸係數. 前者用了一個均數，後者又用了一個迴歸係數，所以計算 259.99 時一共用了兩個統計數. 按第四章第 4–7 節的原則‘每用去一統計數，自由度便減少一個’. 那麼這裏的自由度是 $N-2$. 因得兩公式如下:

估計之變異數: $$V_{y\cdot x}=\frac{\Sigma(Y-Y_e)^2}{N-2}.$$ 公式(5-5)

標準估計誤差: $$S_{y\cdot x}=\sqrt{\frac{\Sigma(Y-Y_e)^2}{N-2}}.$$ 公式(5-6)

上兩式中 $\Sigma(Y-Y_e)^2$ 的計算以用公式 (5-4) 爲便. 這兩公式表示當 x 的影響被扣去以後 y 方面所剩的變異, 故其符號用 $y\cdot x$. 又 $V_{y\cdot x}$ 與變異數 V_y 相當, 而 $S_{y\cdot x}$ 則與標準差 S_y 相當. 由表 5-1, 可得

$$S_y=\sqrt{\frac{1,406}{6-1}}=\sqrt{281.2}=16.769.$$

又自公式(5-6), 得

$$S_{y\cdot x}=\sqrt{\frac{259.99}{6-2}}=8.062.$$

這裏可以看到在所增體重的標準差中, 其數值的一半是與食物消費量有關係的, 餘下的一半則是由於抽樣變動而來.

5-3. 修正值(adjusted value) 在飼養實驗中往往需要把動物的食量化做相等, 然後比較各組(或各動物)生長的情形. 迴歸線既然表示食量與所增體重的正確關係, 我們就可以利用它作爲比較的根據. 例如表 5-2 第一鼠的食物消費量爲 568 克, 其體重觀察值比估計值少 1.06 克. 當食物消費量爲 632 克(卽 $\bar{x}$)時, 由迴歸方程式求得所增體重爲 131 克(卽 $\bar{y}$, 見第 5-1 節末), 但此鼠較估計值少 1.06 克, 故爲 $131-1.06=129.94$ 克, 此值稱爲 Y 之修正值. 卽指各鼠的食量化爲相等($\bar{x}$)時所增的體重. 計算修正值的公式爲

$$Y_a=Y-b(X-\bar{x}).$$ 公式(5-7)

如 $106-.374(568-632)=129.94$, 與上述 $131-1.06$ [卽 $\bar{y}+(Y-$

Y_e)] 的結果相同。各鼠所增體重之觀察值及修正值如下. 這裏可以看到: 當食量相等的時候,第五鼠的體重增加得最少 (117.53 克), 原因何在? 也值得我們研究的.

增 加 之 體 重

(觀察值) Y	(修正值) Y_a
106	129.94
126	134.98
134	132.51
134	132.51
128	117.53
158	138.55
786	786.02

修正值的總和應與觀察值的總和相等,此處相差 .02,亦因小數四捨五入的結果. 又各修正值平方之和爲 103,231.16, 故按公式(3-5),得修正值之離均差平方和爲

$$103,231.16-\frac{(786.02)^2}{6}=259.92.$$

理論上此值應等於 $\Sigma(Y-Y_e)^2=259.99$, 又其自由度爲 $N-2$(理由詳上節), 故知修正值之標準差爲

$$S_a=\sqrt{\frac{259.99}{6-2}}=8.062.$$

此值卽爲上節之標準估計誤差 $S_{y\cdot x}$, 讀者並可以代數方法證明之.

本章介紹修正值,至此爲止. 在第十章裏,我們還要繼續討論.

5-4. 用縮簡法求迴歸方程式 表 5-1 迴歸方程式的計算法用於總次數較少,且數值的位數不多的資料時較爲便利,否則就要用縮簡法(表 5-1 的資料, 當然也可以用縮簡法計算的). 下表爲海氏袋(Heidenhain-pouch)犬,每半小時內,分泌之胃液容積(立方厘米, X)及其鹽酸之重量(毫克, Y)(5). 若將表內第 1,4 兩行的各對(X,Y)值繪成圖形,則所有點子都集中在一條直線的附近. 故原著者柳安昌、

𥫗貽瑾、林可勝三氏謂鹽酸重量與胃液容積呈直線關係．他們並求𠀤了迴歸方程式製成迴歸線．茲用縮簡法計算如後(表 5–3)．

【表 5–3】 用縮簡法求迴歸方程式

海氏袋犬每半小時內分泌之胃液容積(立方厘米，X)
及其鹽酸之重量(毫克，Y)

(1) X	(2) $X-14$	(3) $(X-14)^2$	(4) Y	(5) $Y-2$	(6) $(Y-2)^2$	(7) $(X-14)\times(Y-2)$
8.0	−6.0	36.00	.890	−1.110	1.232,100	6.6600
8.0	−6.0	36.00	1.160	−0.840	.705,600	5.0400
9.3	−4.7	22.09	1.139	−0.861	.741,321	4.0467
10.0	−4.0	16.00	1.350	−0.650	.422,500	2.6000
11.6	−2.4	5.76	1.595	−0.405	.164,025	0.9720
12.0	−2.0	4.00	1.560	−0.440	.193,600	0.8800
13.9	−0.1	0.01	1.946	0.054	.002,916	0.0054
14.0	0	0	2.048	0.048	.002,304	0
14.0	0	0	1.905	−0.005	.000,025	0
14.0	0	0	2.012	0.012	.000,144	0
14.6	0.6	0.36	2.226	0.226	.051,076	0.1356
14.9	0.9	0.81	2.198	0.198	.039,204	0.1782
15.0	1.0	1.00	2.149	0.149	.022,201	0.1490
15.7	1.7	2.89	2.218	0.218	.047,524	0.3706
16.7	2.7	7.29	2.380	0.380	.144,400	1.0260
18.0	4.0	16.00	2.736	0.736	.541,696	2.9440
19.4	5.4	29.16	2.910	0.910	.828,100	4.9140
20.0	6.0	36.00	3.025	1.025	1.050,625	6.1500
21.5	7.5	56.25	3.025	1.225	1.500,625	9.1875
	4.6	269.62		0.762	7.689,985	45.2590

$$\bar{x}=14+\frac{4.6}{19}=14.242,\qquad \bar{y}=2+\frac{.762}{19}=2.040,$$

$$\Sigma(X-\bar{x})^2=269.62-\frac{(4.6)^2}{19}=268.51,\ \Sigma(Y-\bar{y})^2=7.69-\frac{(.762)^2}{19}=7.6594,$$

$$\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})=45.259-\frac{(4.6)(.762)}{19}=45.0745,$$

$$b=\frac{45.0745}{268.51}=.168,\qquad Y_e=2.04+.168(X-14.242)$$
$$=.168X-0.351.$$

這裏 X 方面的假定均數是 14, Y 方面的假定均數爲 2. 本表中第 1—3, 及第 4—6 各行的計算與第三章表 3-4 的過程相同,不必再加說明,第 7 行是將 $(X-14)$ 與 $(Y-2)$ 相乘,如 $(-6.0)(-1.110)=6.6600$,乘時必須注意乘積的正負號. 這些乘積的總和爲 45.2590, 在此值內減去校正數 $(4.6)(.762)/19$, 卽得離均差積之和 45.0745. 若以 G 代表 X 的假定均數, H 代表 Y 的假定均數,則離均差積總和之公式爲

$$\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})=\Sigma(X-G)(Y-H)-\frac{\Sigma(X-G)\cdot\Sigma(Y-H)}{N}$$

公式(5-8)

至於 X 與 Y 兩個離均差之平方和,係應用第三章公式(3-6)求得,不贅. 計算結果如下:

$$\bar{x}=14.242,\quad \bar{y}=2.040,\quad \Sigma(X-\bar{x})^2=268.51,$$

$$\Sigma(Y-\bar{y})^2=7.6594,\quad \Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})=45.0745.$$

將各值代入公式(5-2)及(5-3),卽得所需之迴歸方程式:

$$Y_e=.168X-0.351.$$

5-5. 大樣本中迴歸方程式之計算法 上述兩種迴歸方程式的計算法,用在小樣本中非常便利,但在大樣本中卻需要更簡便的方法. 表 5-4 爲我國二十歲男子 160 人之身高與體重(6),我們要根據這批實測的資料來求一個從身高(X)推算體重(Y)的迴歸方程式.

在計算以前,我們要把這批資料按組距歸類. 在身高方面,其全距爲 154.1—180.5; 體重方面爲 43.0—74.0. 爲計算便利計,身高的組距用 2,體重的組距用 4. 組距定後,把身高的組距寫在上端,從

【表 5-4】 我國二十歲男子160人之身高(厘米)與體重(仟克)

身高	體重	身高	體重	身高	體重	身高	體重	身高	體重
180.5	68.5	169.5	50.0	164.9	49.0	165.0	55.3	167.0	57.0
168.6	56.4	159.7	47.5	161.5	52.5	171.0	57.0	157.0	54.0
168.8	53.5	167.0	52.0	166.0	43.0	156.5	53.5	172.0	54.0
164.2	52.5	173.0	55.5	176.8	53.2	168.5	58.8	165.0	51.0
169.8	56.5	163.5	47.5	167.0	60.7	169.0	59.0	165.0	52.0
170.6	53.5	169.5	52.0	167.7	46.5	168.0	57.0	161.0	48.5
170.2	56.5	170.2	52.0	163.2	52.5	161.0	47.0	171.0	60.0
169.5	55.0	162.0	55.8	159.6	51.5	166.0	52.0	168.0	54.6
166.0	51.0	171.0	50.5	158.0	51.3	158.0	46.6	161.0	54.6
170.5	53.5	166.0	52.2	171.3	55.6	160.9	53.0	168.0	56.4
164.6	54.0	164.5	53.5	170.8	59.0	171.5	58.0	175.0	58.0
162.0	46.5	171.4	56.5	161.5	47.5	166.0	53.5	165.0	45.0
166.0	49.5	164.6	54.5	164.5	51.0	167.2	54.7	158.0	47.3
173.5	53.5	168.0	57.0	157.5	54.5	169.0	59.8	161.0	45.0
159.5	52.5	165.5	57.0	160.0	48.0	164.0	52.5	169.5	54.0
172.6	51.8	162.5	54.5	167.5	55.8	155.0	52.0	163.0	50.0
167.0	58.0	171.0	58.0	154.1	48.5	161.5	56.5	159.0	49.5
174.0	63.0	157.5	46.0	168.5	58.0	167.3	48.4	161.4	54.6
160.5	58.5	166.0	52.0	167.7	60.0	160.0	53.5	167.3	47.5
163.0	52.0	177.0	62.6	165.5	55.5	162.9	48.9	165.6	60.0
171.2	52.0	163.5	49.5	163.0	49.4	168.5	60.0	173.0	55.0
162.0	54.0	164.5	46.0	163.0	55.8	160.5	51.0	169.5	63.5
174.0	66.5	168.1	51.5	162.5	51.5	161.0	51.5	172.5	56.5
165.5	53.0	164.0	53.5	165.0	55.0	174.7	61.5	167.5	54.0
160.0	51.0	162.0	44.0	167.5	52.5	169.5	59.8	166.0	52.5
165.0	58.0	160.0	52.0	165.0	51.8	165.0	55.8	162.5	44.4
167.0	55.0	160.2	43.5	157.0	44.0	170.5	62.5	173.6	52.3
160.8	50.3	157.5	51.0	172.0	57.5	172.5	59.0	165.5	52.0
163.0	47.5	160.5	49.6	168.5	56.0	166.5	55.8	170.0	63.5
169.0	55.5	157.5	52.0	164.5	51.0	171.0	51.7	166.3	50.5
164.5	53.5	171.5	58.0	171.5	58.0	155.0	46.6	170.5	74.0
169.0	54.0	162.2	46.5	168.0	49.5	162.0	54.5	170.5	57.4

154 起，自左而右；體重的組距寫在左側，從 40 起自下而上．於是看表 5-4 第一對數值爲(180.5, 68.5)，180.5 應在 X 爲 180— 的組距內，而 68.5 應在 Y 爲 68— 的組距內，我們就在這兩組距相交的方格(cell)內，畫一線條．再看第二對數值爲(168.6, 56.4)，我們就在 168— 與 56— 兩組距的相交處作一線條．餘類推．同一方格內，五線畫成一組，以便計數．最後把每一橫行內的線條數總加起來，寫在右

【表 5-5】 相關表之畫線計數

身高 (X)

體重 (Y)	154-	156-	158-	160-	162-	164-	166-	168-	170-	172-	174-	176-	178-	180-	f
72									𝍷						1
68														𝍷	1
64											𝍷				1
60						𝍷	𝍷𝍷	𝍷𝍷	𝍷𝍷𝍷		𝍷𝍷	𝍷			11
56				𝍷𝍷		𝍷𝍷	𝍷𝍷	𝍸𝍸	𝍸𝍷𝍷𝍷𝍷	𝍷𝍷𝍷	𝍷				29
52	𝍷	𝍷𝍷𝍷𝍷	𝍷	𝍸𝍷	𝍸𝍷𝍷	𝍸𝍸𝍷𝍷𝍷𝍷	𝍸𝍸𝍷𝍷	𝍸𝍷𝍷	𝍸	𝍸		𝍷			63
48	𝍷	𝍷	𝍷𝍷𝍷	𝍸𝍷𝍷	𝍸	𝍸	𝍷𝍷𝍷𝍷	𝍷𝍷𝍷𝍷	𝍷𝍷	𝍷					33
44	𝍷	𝍷𝍷	𝍷𝍷𝍷	𝍷𝍷𝍷	𝍸𝍷	𝍷𝍷	𝍷𝍷								19
40				𝍷			𝍷								2
f	3	7	7	19	18	24	23	23	20	9	4	2	0	1	160

側的 f 行內；又將每一直行的線條數總加起來，寫在下端的 f 行內．前者爲 160 人體重的次數分配，後者爲 160 人身高的次數分配．故若用第二章第 2-2 節的畫線記數法將體重與身高分別製成次數表，結果應與這裏的兩個次數分配相同．(注意第 2-2 節的次數表，組距

之值小的在上面，而表 5–5 的組距排列則稍有不同，Y 值小的在下面，X 值小的在左邊.）所以這是一種很好的核對方法，初學者可藉此發現各方格內的畫線計數有無錯誤.這樣由縱橫兩種次數分配聯合構成的方格表，習慣上叫做相關表（correlation table），因爲一向是用來計算相關係數(correlation coefficient，詳下章)的.

畫線計數完畢，經核對無誤後，就把各方格內線條數改成亞刺伯字，如表 5–6 的中間部分.於是各在總次數一半附近的組距中點，取定 X 與 Y 的假定均數.這裏 X 的假定均數爲 167，Y 的假定均數爲 54.在假定均數所在的組距各畫兩條線(最好用紅色)，作爲 X 與 Y 兩軸.兩軸既定，就可進行計算，先看相關表下端的四行.第 1 行是 X 的次數分配.第 2 行是各組距中點與假定均數的相差，而以組距爲單位的.實際上，這行的數值只要在假定均數所在的組距寫一 '0' 字，左邊 X 值較小的各組距內順次寫 $-1, -2, -3, \cdots\cdots$，右邊 X 值較大的各組距內順次寫 $1, 2, 3, \cdots\cdots$ 就成了.這行的數值用小寫的 x 代表之.第 3 行是第 1,2 兩行之積，卽 fx.第 4 行爲第 2,3 兩行之積，卽 fx^2.將第 3,4 兩行分別求其總和，得 $\Sigma fx=-75$，$\Sigma fx^2=1{,}009$.再看相關表右翼各行，其中第 1—4 行與 X 方面的情形相似，不過這裏 Y 組距值的排列，大的在上，小的在下，故右翼第 2 行裏小寫的 y 值，正的在上，負的在下.這樣縱橫二坐標的符號，恰與數學上的習慣相符.右翼第 5 行裏的數值是各個 Y 組距內的 ΣfX，這行又分做兩小行，負值寫在左邊，正值寫在右邊.例如在 Y 爲 72—，X 爲 170—的方格內有次數 '1'，其相當的 x 值是 2，$1\times 2=2$，此值寫在右半行內，又如 Y 爲 56—的組距內，縱軸的左邊有 4 個次數，各次數與其相

【表 5-6】 相關表之計算法

我國二十歲男子 160 人之身高體重相關表

		身高(厘米)													(1)	(2)	(3)	(4)	(5)		(6)	(7)
體重(仟克)		154-	156-	158-	160-	162-	164-	166-	168-	170-	172-	174-	176-	178-	180-	f	y	fy	fy^2	Σfx −	Σfx +	Σfx	Σfxy
	-72									1						1	5	5	25		2	2	10
	-68														1	1	4	4	16		7	7	28
	-64											1				1	3	3	9		4	4	12
	-60						1	2	2	3		2	1			11	2	22	44	1	21	20	40
	-56				2		2	2	10	9	3	1				29	1	29	29	8	41	33	33
	-52	1	4	1	6	7	14	12	7	5	5		1			63	0			76	37	−39	
	-48	1	1	3	7	5	5	4	4	2	1					33	−1	−33	33	59	11	−48	48
	-44	1	2	3	3	6	2	2								19	−2	−38	76	51		−51	102
	-40				1			1								2	−3	−6	18	3		−3	9
(1)	f	3	7	7	19	18	24	23	23	20	9	4	2	0	1	160		−14	250	1 8	123	−75	282
(2)	x	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7								
(3)	fx	−18	−35	−28	−57	−36	−24		23	40	27	16	10	0	7	−75							
(4)	fx^2	108	175	112	171	72	24		23	80	81	64	50	0	49	1,009							

當的 x 值相乘而總和之，得 $2(-3)+2(-1)=-8$，將'8'字寫在右翼第 5 行的左半邊.同理在縱軸右邊的 23 個次數，與各 x 值相乘後總和之，得 $10(1)+9(2)+3(3)+1(4)=41$，將此值寫在右翼第 5 行的右半邊. 演算時爲減少視線上下往復移動的麻煩計，可將 x 值寫在一張橫的紙條上，0 點所在的組距亦用雙線標明，當計算某一橫行的 Σfx 時，只要把這紙條放在該橫行的下面，將紙條上的零點與相關表上的零點對齊，這樣就可很快的計算. 右翼第 6 行係將第 5 行同組距內的正負值相消後的結果，第 7 行則爲第 2 行與第 6 行之積，乘積的正負號不可忽略.最後將各行總和，得

$$\Sigma fy=-14,\quad \Sigma fy^2=250,\quad \Sigma fxy=282.$$

在計算過程中，右翼第 5 行最容易發生錯誤，故必須注意核對:(1)相關表下端第 3 行 fx 的負值總和爲

$$-(18+35+28+57+36+24)=-198,$$

正值總和爲

$$23+40+27+16+10+0+7=123,$$

此兩數應與右翼第 5 行 Σfx 的兩個總和相等; 所以(2)下端第 3 行 fx 的總和 -75 應與右翼第 6 行的總和相等.如果兩方面核對無誤，就知道右翼第 5 行的計算沒有問題了.上述計算過程都是縮簡法的應用，如果讀者對於第 2–3 及 3–7 等節的原理都已明白，那麼表 5–6 的計算步驟也很容易了解的.

有了表 5–6 的結果，就可進一步求均數、離均差平方和與離均差積之和，茲分列於下:

均數的計算法，係根據第二章公式(2–3)，

$$\bar{x}=167+\frac{-75}{160}(2)=167-.94=166.06,$$

$$\bar{y}=54+\frac{-14}{160}(4)=54-.35=53.65.$$

離均差平方和的計算，則應用第三章公式(3-8)的分子部分，

$$\Sigma(X-\bar{x})^2=\left[1,009-\frac{(-75)^2}{160}\right](2^2)=973.85(4)=3,895.40,$$

$$\Sigma(Y-\bar{y})^2=\left[250-\frac{(-14)^2}{160}\right](4^2)=248.78(16)=3,980.48.$$

求離均差積之和，則應用下列公式，

$$\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})=\left[\Sigma fxy-\frac{(\Sigma fx)(\Sigma fy)}{N}\right](i_x)(i_y)$$

$$=\left[282-\frac{(-75)(-14)}{160}\right](2)(4)$$

$$=275.44(2)(4)=2,203.52. \qquad \text{公式}(5\text{-}9)$$

此處 i_x 爲 X 的組距，i_y 爲 Y 的組距，因表 5-6 在計算時都用組距做單位，這裏以$(i_x)(i_y)$乘之，纔化成原來單位，故上式實爲公式(5-8)的變相.

將離均差積之和及離均差平方和之值，代入公式(5-2)，得迴歸係數爲

$$b=\frac{2,203.52}{3,895.40}=.5657.$$

其迴歸方程式爲

$$Y_e-53.65=.5657(X-166.06)=.5657X-93.94.$$

$$\therefore\quad Y_e=.5657X-40.29,$$

或 $$體重(仟克)=.5657身高(厘米)-40.29. \tag{c}$$

其標準估計誤差爲

$$S_{y \cdot x}=\sqrt{\frac{3,980.48-\dfrac{(2,203.52)^2}{3,895.40}}{160-2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2,734.01}{158}}=4.1598.$$

根據上列迴歸方程式(c)，就可編造由身高推算體重的對照表．編造時先看原來資料中身高的全距，其值爲 154.1—180.5，我們就從 154（或其附近的數值）開始．將 154 代入(c)式的身高項內，得體重爲 46.8278，以後身高每增加一厘米，體重便增加 .5657 仟克，故

$$46.8278+.5657=47.3935,$$

爲相當於身高 155 厘米的體重．這樣逐步加下去，即得所需的對照表．若爲經濟篇幅計，身高每次增加 2 厘米，則體重即增加 2(.5657) =1.1314，餘類推．最後可再用一次乘法以核對累次加法有無錯誤，

【表 5–7】 由身高推算體重之對照表舉例

身　高(厘米)	體　重(仟克)	身　高(厘米)	體　重(仟克)
154	46.8	163	51.9
155	47.4	164	52.5
156	48.0	165	53.0
157	48.5	166	53.6
158	49.1	....	....
159	49.6	....	....
160	50.2	180	61.5
161	50.8	181	62.1
162	51.4	182	62.7

例如以身高 182 代入(c)式，得體重為 62.6674，此值與累次加法之和相等. 又在計算過程中，所有小數均須保存，但在對照表上則寫一位小數卽可. 在此要請讀者注意的，便是這對照表是根據由身高推算體重之迴歸方程式編造的. 若須由體重推算身高，則將體重為 X，身高為 Y，依法重算，另求一迴歸方程式，故由身高 154 厘米求得估計之體重為 46.8 仟克；但由體重 46.8 仟克以估計身高，其答數未必恰為 154 厘米. 在實用上，因體重變動甚大，故常用前者而少用後者.

本書作者曾檢視我國過去對於身高體重的研究，大多只求出各年齡的平均身高與體重而止. 如二十歲男子的平均身高為 166.1，體重為 53.6；二十一歲男子的平均身高為 167.6，體重為 54.4. 這結果雖可表示一般的情形，但同年齡的人，身高體重的變異都很大；就這裏的160人而論，身材最矮的僅 154.1 厘米，最高的卻有 180.5 厘米. 現在如果有兩位二十歲的男子，一位的身高是 155 厘米，另一位的身高是175厘米，他們的體重應有多少纔算合式呢？只有身高體重的均數是無從解答這個問題的. 另有人把同年齡的被試者按身高的高低，分做若干組，求每組的平均身高與體重，此法雖稍勝一籌，但仍舊犯着同樣的毛病。還有人曾建議了下面一個公式(7)

$$\frac{44\text{ 仟克}}{150\text{ 厘米}}+\frac{4\text{ 仟克}}{5\text{ 厘米}},$$

它的意義是：'我國成人之身高為 150 厘米者，其理想的平均體重為 44 仟克；身高每增加 5 厘米，體重就加 4 仟克'. 這方法略具迴歸方程式的雛形，不過這公式的求得，並非根據最小二乘方的原理，故估

計值的誤差難免要大些. 又此式的寫法,不若(c)式的一目了然,如果不加說明,恐怕很少人能够懂得吧. 由此可見,各種資料有它正當的處理方法. 統計學能够供給我們種種技術,使實驗所獲的資料得以充分利用,而這些資料所蘊藏的事實也可以獲得正確的認識.

關於迴歸方程式的應用也有其限度,外國人的方程式固不適用於中國,即使根據華南人的資料求得的迴歸方程式也未必適用於華北. 同理,男子與成人的迴歸方程式也不適用於女性與兒童. 總之,迴歸方程式的求得是根據怎樣的一個團體,那麼其應用範圍最好不超出同性質的大團體以外. 這裏又要提到前面所說的樣本與全體的關係,我們所直接測量的小團體是個樣本,由這樣本求得的迴歸方程式最多能適用於此樣本所代表的全體(即上述同性質的大團體),卻不能用於此全體以外.

5-6. 迴歸係數之顯著性 迴歸係數也是一個統計數(參閱第四章第 4-7 節),它是根據樣本來估計全體的參數的. 各樣本的統計數總有相當的變異. 迴歸係數亦不能例外,其抽樣變異以標準誤 S_b 表示之. S_b 描寫迴歸係數的變異情形,正像 $S_{\bar{x}}$ 描寫均數的變異情形一樣. 又顯著性的測驗亦用 t 值. 茲將公式及計算法列後:

$$S_b=\frac{S_{y\cdot x}}{\sqrt{\Sigma(X-\bar{x})^2}}. \qquad \text{公式(5-10)}$$

$$t_b=\frac{b}{S_b},\quad \text{自由度}=N-2. \qquad \text{公式(5-11)}$$

上述白鼠飼養實驗,其標準估計誤差爲 $S_{y.x}=8.062$,食量之離均差平方和爲 $\Sigma(X-\bar{x})^2=8,192$,迴歸係數爲 $b=.374$. 代入公式,得

$$S_b=\frac{8.062}{\sqrt{8,192}}=.0891,$$

$$t_b=\frac{.3740}{.0891}=4.198.$$

查 t 值表(表 4–4)，當自由度$=6-2=4$ 時，5％點$=2.776$，1％點$=4.604$. 假定在全體中由食物消費量推算所增體重之迴歸係數為 0（此即無效假設，見第四章第4–1節），則此樣本自此全體中隨機取出之機率，在 100 次中少於 5 次，而多於 1 次. 因知此樣本似並非由迴歸係數為 0 之全體中取出，易言之，食物消費量與所增體重間似有關係之存在.

又由身高推算體重一例，其 $S_{y.x}=4.1598$，$\Sigma(X-\bar{x})^2=3,895.40$，$b=.5657$. 代入公式，得

$$S_b=\frac{4.1598}{\sqrt{3,895.40}}=.06665,$$

$$t_b=\frac{.5657}{.06665}=8.488.$$

當自由度$=160-2=158$ 時，1％點約為 2.609（t 值表上自由度未列 158，茲取其最近一值 150 代之），故知迴歸係數 .5657 與 0 之相差為非常顯著，是以身高與體重間有極密切之關係.

若有兩迴歸係數 b_1 與 b_2，前者之標準誤為 S_1，自由度為 N_1-2，後者之標準誤為 S_2（S_1 與 S_2 係由公式5–10求得），自由度為 N_2-2，則兩迴歸係數相差之標準誤為

$$S_{1-2}=\sqrt{S_1^2+S_2^2}. \qquad \text{公式(5–12)}$$

其顯著性亦用 t 值測驗之，

$$t=\frac{b_1-b_2}{S_{1-2}},\quad 自由度=(N_1-2)+(N_2-2).\quad 公式(5\text{–}13)$$

實例見本章末練習題 3.

5-7. '迴歸'之歷史的意義 Galton 氏在他的遺傳研究中，產生了迴歸的觀念. 他說(8): '一個人的每一特性，爲其親屬所共有，但就平均言，後裔所具之是項特性，其程度較輕'. 一批有大種子的植物，其後代的種子，平均沒有親體那樣的大. 父親矮的，其兒子的平均身高比父親的均數要高些. 總之，兒童的每一特性，向着種族的均數而迴歸. 氏以爲這種迴歸普通約爲三分之一，卽謂兒女輩某特性的均數與種族均數的距離約抵親體方面距離的三分之一. 例如父親輩的平均身高較種族均數矮三寸，那麼兒子們的平均身高較種族均數大約祇矮一寸. 因爲生物界有這種迴歸的現象，所以某種特性歷代相傳不會愈趨愈遠. 否則父親本來高的，兒子比父親高，孫兒比兒子更高，那麼生物學上所謂'種'(species)，統計學上所謂 '平均' 等概念，恐怕都不會存在了. 這是 '迴歸' 一名詞的由來. 不過現代統計學上所謂迴歸方程式，僅指由一個或一個以上的變數來推算另一個變數的式子，其中並不包含迴向種族均數的意義，所以仍用 '迴歸' 者，只是因爲用慣並作爲紀念罷了.

【練　習　題】

1　下表爲一飼養實驗中(2)白鼠之原始(initial)體重(克)及 42 日內增加之體重(克). 試求一由原始體重估計所增體重之迴歸方程式，並測驗迴歸係數之顯著性.

原始體重(X)	52	49	57	57	55	60	54	62
所增體重(Y)	59	58	59	60	50	60	53	70

2. 下表爲另一飼養實驗中(3)白鼠之原始體重(克)及八週間增加之體重(克). 試仿上題求迴歸方程式, 並測驗迴歸係數之顯著性.

原始體重(X)	49	37	35	35	32
所增體重(Y)	92	94	99	107	108

3. 上列二題所得之迴歸係數有無顯著之差別? 易言之, 原始體重與所增體重間之關係在此二樣本中是否爲相同? 又此項差別有無意義? 計算時可以第1題之迴歸係數爲 b_1, 其標準誤爲 S_1, 自由度爲 N_1-2; 第二題者分別爲 b_2, S_2 及 N_2-2. 將各值代入公式(5-12)與(5-13)卽可.

4. 若第1題各鼠食量相等, 其所增體重各爲若干? 並求修正值之標準差 S_a, 其值與標準估計誤差 $S_{y.x}$ 相等否?

5. 以第2題資料用表 5-2 及公式(5-4)兩種方法, 求估計值誤差之平方和, 結果相等否?

6. 下表爲變性卵蛋白(albumin)在 38°C. 與 25°C. 時之凝固百分數(9). 試各求一由時間推算凝固百分數之迴歸方程式. 兩迴歸係數有顯著之差別否?

時間 (分鐘)		3	6	9	12	15	18
凝固	38°C.	12	30	44	53	66	81.5
百分數	25°C.	7.2	18.4	30	40	49	58

7. 下表爲我國華北人民之原始心縮血壓(毫米, 水銀柱)及運動後之最高心縮血壓(10). 試求一迴歸方程式, 由原始心縮血壓以推

算運動後之最高值. 其迴歸係數顯著否?

原始心縮血壓	83.8	86	90	90	93.9	98.9
運動後最高之心縮血壓	98	102	104.2	104.2	107	115.8
原始心縮血壓	101.9	105	107.9	110	110.8	111
運動後最高之心縮血壓	114	119	122.1	126.8	133	133

8. 玆以 N 表示人數, X 爲身高(市尺之分), Y 爲體重(市斤), G 爲 X 之假定均數, H 爲 Y 之假定均數. 試根據下列所示數值(4), 用第 5-4 節的方法, 各求一由身高推算體重的迴歸方程式. 又同年齡男女兩迴歸係數有顯著的差別否?

	N	G	H	$\Sigma(X-G)$	$\Sigma(Y-H)$
十一歲男	781	400	55	−5,417	1,566.6
十二歲男	824	400	60	6,178	1,358.1
十一歲女	563	400	60	488	−960.0
十二歲女	519	400	60	9,967.5	4,197.5

	$\Sigma(X-G)^2$	$\Sigma(Y-H)^2$	$\Sigma(X-G)(Y-H)$
十一歲男	433,889	53,411.90	64,651.60
十二歲男	887,723	92,460.21	174,697.64
十一歲女	576,690	66,243.12	97,729.50
十二歲女	487,778.25	248,368.50	159,977.50

9. 下表爲我國二十一歲男子 226 人之身高(厘米)與體重(仟克)(6). 試用第 5-5 節的方法求一由身高推算體重之迴歸方程式, 並求其標準估計誤差. 身高之組距可用156—158—……—182—, 體重

之組距可用 44—48—……—72—.

身 高	體重	身 高	體重	身 高	體重	身 高	體重	身 高	體重
165.0	53.5	171.5	64.0	164.0	55.5	166.5	52.8	161.0	53.0
165.0	48.9	170.4	52.0	162.5	47.5	162.7	52.5	163.0	46.0
170.0	46.5	161.0	49.2	164.0	53.0	163.0	51.2	167.0	63.0
160.5	47.5	162.7	51.8	176.5	57.5	167.8	47.0	181.0	60.8
171.0	55.0	169.5	57.0	178.0	57.5	172.4	62.0	166.5	56.9
170.0	57.0	167.5	56.0	182.5	60.5	172.4	62.5	167.5	49.5
159.0	52.0	175.5	53.5	162.6	48.0	160.5	51.0	165.5	48.5
163.0	46.0	173.5	51.5	162.5	56.0	172.0	55.0	163.4	53.5
170.5	62.6	162.0	48.0	159.0	55.5	158.5	50.0	170.0	67.5
165.0	47.5	160.5	49.0	167.0	48.5	158.0	52.0	165.0	58.0
156.0	46.5	165.5	49.0	167.5	56.0	170.0	58.0	180.0	58.0
169.0	47.5	172.0	56.5	179.5	57.0	161.0	48.5	162.0	51.0
164.5	54.0	165.0	43.4	165.5	54.5	162.5	58.0	159.2	49.0
173.6	60.5	174.5	59.8	168.5	55.5	164.5	50.5	168.0	47.5
162.5	44.0	163.0	44.5	168.5	58.0	167.5	52.8	163.0	48.9
170.5	63.0	170.0	57.0	170.0	53.5	166.2	59.0	161.7	52.0
161.0	44.0	163.0	50.8	170.5	56.0	163.5	60.5	161.5	47.0
170.4	50.0	161.5	47.8	164.5	47.3	175.0	56.5	174.0	58.0
175.0	60.0	168.5	53.5	163.0	50.7	166.0	60.8	167.0	50.0
167.0	51.5	168.0	55.9	166.0	51.8	164.4	56.5	156.0	50.5
170.0	53.0	177.9	58.2	162.0	53.0	167.5	52.0	161.0	52.5
165.6	50.2	172.0	61.0	172.5	52.5	168.2	58.7	171.5	58.5
179.0	65.5	164.3	49.3	170.5	60.3	166.0	58.5	159.5	49.8
168.4	57.5	159.0	50.0	159.5	60.5	156.5	47.0	158.5	49.5
183.0	62.0	178.5	60.0	167.0	57.0	165.5	57.5	163.3	46.1
161.0	49.6	167.0	57.5	166.5	51.5	175.0	52.5	170.1	55.3
173.8	62.0	175.0	56.5	171.0	63.0	170.5	59.0	169.7	56.0
174.7	62.1	171.0	56.5	166.2	53.5	175.0	62.0	161.4	46.1
169.0	52.5	167.2	54.0	167.0	54.0	172.4	48.0	163.5	52.0
166.3	54.0	167.7	54.2	171.8	61.0	160.8	48.5	170.5	59.2
161.4	54.5	162.0	61.0	161.5	47.0	166.5	53.5	166.2	54.3
161.0	51.2	178.7	62.0	161.5	52.0	166.0	53.0	166.0	48.7
171.5	54.6	167.8	54.5	168.0	53.0	163.0	55.0	174.0	54.0
165.8	55.0	169.0	51.0	160.0	49.5	166.0	52.0	166.6	51.0
171.0	55.0	160.4	51.0	164.0	56.4	177.0	54.0	159.3	50.0
166.0	50.5	157.3	48.0	169.0	54.5	162.0	60.3	169.0	51.2
171.5	53.0	165.0	52.0	162.5	54.5	166.0	53.5	170.0	52.3
174.3	56.0	180.5	68.5	169.5	52.5	163.4	55.0	167.5	61.5
164.5	62.0	176.0	62.8	163.5	51.5	171.5	57.0	165.5	58.0
175.4	56.0	163.5	68.0	157.0	44.0	178.5	73.5	163.0	47.8
170.3	55.0	164.5	54.6	159.0	44.0	165.5	61.0	161.0	51.0
168.7	61.0	165.5	55.0	176.5	54.5	162.5	53.5	165.5	48.0
165.0	49.0	166.0	54.0	161.5	54.0	164.6	58.5	169.5	57.5
173.5	66.1	166.5	56.0	173.5	63.5	167.5	52.5	177.8	57.0
173.0	53.5	170.0	57.0	167.5	60.0	176.0	61.0	166.5	55.0
173.5	61.0								

【參 考 文 獻】

(1) 陳朝玉: 蠶蛹營養價值之研究, 營養專報, 第一號, 1-7 頁, 國立四川大學農學院, 三十年五月.

(2) 陳朝玉: 各種蛋黃中乙種維生素含量之研究, 營養專報, 第一號, 8-11 頁, 國立四川大學農學院, 三十年五月.

(3) 陳朝玉: 人造代乳粉與天然全乳粉營養價值之比較研究, 營養專報, 第三號, 1-9 頁, 國立四川大學農學院, 三十二年五月.

(4) 周妙靈: 四川省學齡兒童身長體重研究經過, 現代醫學, 第一卷, 第三期(本題資料係錄自該文底稿).

(5) Liu, A. C., Yuan, I. C. and Lim, R. K. S., Quantitative relationships between the oxyntic and other gastric component secretions, Chinese Journal of Physiology, 8, 1: 1-36 (1934).

(6) Tsai, C. and Wu, C. H., A statistical study of the vital capacity of senior middle school and college students, Chinese Journal of Physiology, 14, 1: 95-116 (1939). 原來資料係二氏所供給.

(7) Tung, C. L., Physical measurements in Chinese, Chinese Journal of Physiology, Report Series, No. 1, pp. 107-118 (1928).

(8) Francis Galton, Natural Inheritance, Macmillan and Company, London (1889).

(9) Wu, H. and Ling, S. M., Studies in denaturation of proteins, V. Factors controlling coagulation of proteins by shaken, Chinese Journal of Physiology, 1, 4: 407–430 (1927).

(10) Cruickshank, E. W. H., Physiological standards in North China: 1. Blood pressure studies, II. Alveolar air gases, Supplement to the China Medical Journal, 37, 12: 1–44 (1923). 此處僅錄其一部分,各數值係由原圖觀察而得.

第六章　相關

6-1. 相關係數(correlation coefficient)　前章曾討論過兩個變數間的關係，如食量與體重、身高與體重等，我們可以很合理地說：身體的輕重，視食量多寡或身材高矮而定．這便是把體重當做因變數(dependent variable)，而把食量或身高當做自變數(independent variable)．但有些情形是不便這樣說的，例如兄弟與姊妹間的身高，因爲都受着遺傳的影響，其中不無關係存在着，但是我們不能把兄弟或姊妹的身高當做因變數，而把另一個當做自變數．因此迴歸方程式就不能把二者的關係適當地表示出來．這時我們就需要另一種統計數來表示兄弟與姊妹間身高共同變異的情形——這種共同變異的情形一向稱爲相關(correlation)，在現代統計學上則稱爲共變(covariation)——這便是本章所要討論的相關係數．

相關係數亦稱積差相關(product moment correlation)或總相關(total correlation)，它的符號是 r，大概是取自 relationship 的第一個字母．相關係數有正有負，在 $+1$ 與 -1 的時候，稱爲完全相關(perfect correlation)，等於 0 的時候，則稱爲零相關或無相關(zero correlation or no correlation)．通常相關係數總在 -1 與 $+1$ 之間，決不會超過 -1 或 $+1$．又相關係數祇是一個數值，它並沒有單位的．現在舉幾個例子來說明這些情形．

例甲	X	1	2	3	4	5	……
	Y	3	5	7	9	11	……

這例子當 X 增加一個單位的時候，Y 就增加兩個單位，而且無一例外. 這是正的完全相關，即 $r=1$. 在物理學上，若壓力不變，則溫度與體積的關係，也屬於這種情形.

例乙	X	1	2	3	4	5	……
	Y	5	3.5	2	.5	−1	……

此例當 X 增加一單位時，Y 就減少 1.5 單位，而且無一例外. 所以 X 與 Y 之間呈着反比例的關係，即 X 愈大，Y 愈小；X 愈小，Y 愈大. 這是負的完全相關，即 $r=-1$. 在物理學上，若溫度不變，則壓力與體積間的關係，便是負的完全相關.

若將甲、乙兩例製成圖形，則如圖 6–1 所示. 該圖中的橫軸表示 X 值，縱軸表示 Y 值. 甲例各點都在甲線上，乙例各點都在乙線上.

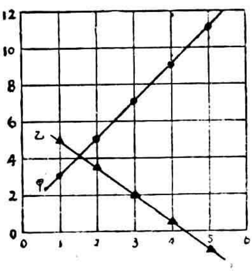


圖 6-1. 完全相關.

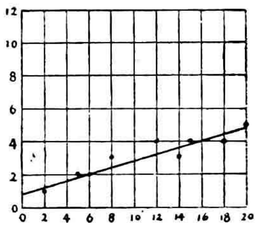


圖 6-2. $r=0.91$.

這是完全相關的情形. 甲線的坡度(slope)是正值，故爲正相關，乙線的坡度是負值，故爲負相關. 至於坡度數值的大小，要看 X 每增加一單位時，Y 增減單位的多少，以及縱橫二軸所用的尺度而定.

在生物科學上，r 的數值大多在 -0.95 與 0.95 之間，很少有完全相關的.相關係數絕對值的大小，視各點與迴歸線的距離(即前章第 5-2 節所謂估計之誤差)而定.若各點離迴歸線愈遠，則相關係數的絕對值愈小.圖 6-2 的各點都在迴歸線的附近，其 $r=0.91$.圖 6-3 的各點離迴歸線較遠，尤其在線上面的兩點，故 $r=0.40$.不過 r 所

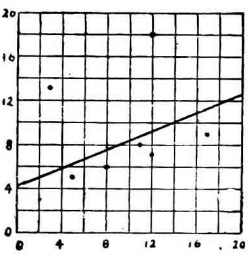


圖 6-3.　$r=0.40$.

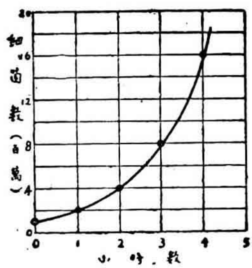


圖 6-4.　$r=0.93$.

表示的祇是 X 與 Y 間直線的關係，若其關係爲曲線時，即使所有點子都在一條曲線上，那時的 r 也並不等於 1.例如圖 6-4 表示在適於生長的情形下，細菌繁殖的狀況.今以 B 爲細菌數(單位爲百萬)，t 爲時間(小時)，則二者的關係爲

$$B=2^t.$$

將各 t 值代入，得

t	0	1	2	3	4
B	1*	2	4	8	16

這些點子都在曲線 $B=2^t$ 的上面，但求得的 r，祇等於 0.93，這是因爲 B 與 t 兩變數間呈曲線關係的緣故.關於曲線的關係，留待本書後

* $2^0=1$，詳代數學.

面再講，本章所討論的以直線的關係爲限.

6-2. 小樣本中相關係數之計算法　相關係數的計算過程有大部分是與求迴歸方程式時相同的. 表 6-1 爲我國產婦十三人的生產

【表 6-1】 生產時間（小時，三期合計，Y）與每克胎盤所含乙醯膽素（微克，X）量之關係

(1) X	(2) Y	(3) X^2	(4) Y^2	(5) XY
15.0	72.2	225.00	5,212.84	1,083.00
18.2	24.1	331.24	580.81	438.62
18.9	50.5	357.21	2,550.25	954.45
26.6	72.1	707.56	5,198.41	1,917.86
26.1	106.0	681.21	11,236.00	276.66
32.0	37.0	1,024.00	1,369.00	1,184.00
36.7	15.2	1,346.89	231.04	557.94
36.3	21.9	1,317.69	479.61	794.97
38.0	17.5	1,444.00	306.25	665.00
38.0	28.0	1,444.00	784.00	1,064.00
44.4	11.5	1,971.36	132.25	510.60
52.3	11.5	2,735.29	132.25	601.45
87.5	8.5	7,656.25	72.25	743.75
470.0	476.0	21,241.70	28,284.96	10,792.20

$$\Sigma(X-\bar{x})^2=21,241.70-\frac{(470)^2}{13}=4,249.39,$$

$$\Sigma(Y-\bar{y})^2=28,284.96-\frac{(476)^2}{13}=10,856.04,$$

$$\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})=10,792.20-\frac{(476)(470)}{13}=-6,417.03.$$

時間與其每克胎盤所含乙醯膽素(acetylcholine)量之關係(1). 這裏我們可以看到乙醯膽素含量愈多，則生產時間愈短，二者呈相反的

關係，故應爲負相關．該表第 1, 2 兩行爲原來資料，第 3, 4 兩行爲平方值，第 5 行爲 XY 之積．各行數值的總和寫在橫線下面．然後求 X 與 Y 的兩個離均差平方和及離均差積之和，得

$$\Sigma(X-\bar{x})^2=4,249.39,$$

$$\Sigma(Y-\bar{y})^2=10,856.04,$$

$$\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})=-6,417.03.$$

以上計算方法，與前章表 5–1 相同，不必再多解釋．把這些數值代入相關係數的公式

$$r=\frac{\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(X-\bar{x})^2}\sqrt{\Sigma(Y-\bar{y})^2}}, \qquad \text{公式(6–1)}$$

得

$$r=\frac{-6,417.03}{\sqrt{4,249.39}\sqrt{10,856.04}}=-.9448.$$

這裏 r 爲負值，表示兩變數間呈相反的關係，又其絕對值近於 1，表示關係之密切．

公式(6–1)的分母與分子，若各以 $N-1$ 除之，則爲

$$r=\frac{\dfrac{\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})}{N-1}}{\sqrt{\dfrac{\Sigma(X-\bar{x})^2}{N-1}}\sqrt{\dfrac{\Sigma(Y-\bar{y})^2}{N-1}}}=\frac{CV}{\sqrt{(V_x)(V_y)}}. \qquad \text{公式(6–2)}$$

以數值代入，得

$$r=\frac{\dfrac{-6,417.03}{13-1}}{\sqrt{\dfrac{4,249.39}{13-1}}\sqrt{\dfrac{10,856.04}{13-1}}}$$

$$=-\frac{534.75}{\sqrt{(354.12)(904.67)}}=-.9448.$$

上式分母方面 354.12 是 X 的變異數(參閱第三章公式 3-2)表示乙醯膽素含量的變異情形，904.67 是 Y 的變異數，表示生產時間的變異情形，此兩數相乘後開方得兩變異數的幾何均數*. 至於分子方面 -534.75，稱為共變數(covariance)，表示乙醯膽素含量與生產時間二者共同變異的情形. 至此相關係數又得到一種意義，便是共變數與平均變異數間的比例. 因為共同的變異不會大於自身的變異，故相關係數不會超過 $+1$ 或 -1.

小樣本中求相關係數也可以用縮簡法，其離均差平方和與離均差積之和的計算步驟，與前章表 5-3 相同，從略.

6-3. 大樣本中相關係數之計算法 在大樣本中求相關係數，也是先把成對的數值並列在一起，如前章表 5-4 的式樣. 再把各對數值用畫線計數法編成相關表(注意：若總次數 N 小於 30 或 40 時，不宜用相關表)，其步驟與表 5-5 相同，不贅. 表 6-2 為北平協和醫學院病人的體溫與脈搏的紀錄(2). 這是已經製成的相關表，我們就用這資料來求相關係數. 這樣本的總次數很多，故 X 與 Y 兩方面的組距最好還分得細些，卽使各有二十幾個組距也是無妨. 這裏因為原文所載如此，故祇得仍舊. 計算的過程與前章表 5-6 大部相同. 下端四行與右翼的最初四行是求標準差時所常用的. 右翼第 5 行是同一橫行內各方格的次數與相當的 x 值乘積之和，負值寫在左邊，正值寫在右邊(詳前章第 5-5 節)，第 6 行為第 5 行正負值相消後的結果，第 7 行為第 2、第 6 兩行的乘積，乘時須注意正負號. 最後求各行

*兩數之幾何均數為其乘積之平方根. 例如 4 與 9 之幾何均數為 $\sqrt{(4)(9)}=6$. 除根號內之兩數相等外，幾何均數常較均數(此例為 6.5)為小.

【表 6–2】 體溫與脈搏之相關

		體			溫			(1)	(2)	(3)	(4)	(5)		(6)	(7)
		96°F.	97°F.	98°F.	99°F.	100°F.	101°F.	f	y	fy	fy^2	Σfx −	Σfx +	Σfx	Σfxy
脈	140—			7	8	4	32	51	4	204	816		112	112	448
	130—	2	2	9	15	14	22	64	3	192	576	6	109	103	309
	120—	8	6	40	109	53	9	309	2	618	1,236	22	494	472	944
	110—	11	14	82	182	84	67	440	1	440	440	36	55	515	515
搏	100—	11	30	216	330	102	69	758	0			52	741	689	
	90—	20	44	266	216	50	35	631	−1	−631	631	84	421	337	−537
	80—	28	59	374	247	20	9	737	−2	−1,474	2,948	115	314	199	−398
	70—	19	72	195	79	7	1	373	−3	−1,119	3,357	110	96	−14	12
	60—	12	46	82	15		2	157	−4	−628	2,512	70	21	−49	196
(1)	f	111	273	1,271	1,201	334	330	3,520		−2,398	12,516	495	2,859	2,364	1,719
(2)	x	−2	−1	0	1	2	3								
(3)	fx	−222	−273		1,201	668	990	2,364							
(4)	fx^2	444	273		1,201	1,336	2,970	6,224							

$$r=\frac{1{,}719-\dfrac{(2{,}364)(-2{,}398)}{3{,}520}}{\sqrt{6{,}224-\dfrac{(2{,}364)^2}{3{,}520}}\sqrt{12{,}516-\dfrac{(-2{,}398)^2}{3{,}520}}}=.4687.$$

的總和，寫在各該行的末了. 這裏要注意兩處可以核對的數值，卽下端第 3 橫行的負值總和 $-(222+273)=-495$，此值應與右翼第 5 行的負值總和 $-(495)$ 相等. 同理正值總和 $1,201+668+990=2,859$ 應與右翼第 5 行的正值總和 2,859 相等. 因此，下端第 3 行的總和 2,364 應等於右翼第 6 行的總和. 這兩處核對無誤，其他地方只要計算時細心一點，錯誤的機會就較少.

我們記得在求迴歸方程式時，離均差平方和與離均差積之和都要化做原來單位，但在求相關係數時卻可不必. 故用相關表，求 r 時的公式可直接寫成下式:

$$r=\frac{\Sigma fxy-\frac{(\Sigma fx)(\Sigma fy)}{N}}{\sqrt{\Sigma fx^2-\frac{(\Sigma fx)^2}{N}}\sqrt{\Sigma fy^2-\frac{(\Sigma fy)^2}{N}}}. \qquad \text{公式(6–3)}$$

此式分子方面以 (i_x) (i_y) 乘之，卽爲離均差積之和，分母方面，左右兩根號裏分別用 $(i_x)^2$ 與 $(i_y)^2$ 乘之，卽爲 X 與 Y 的兩個離均差平方和. 但分母開方後，其 $(i_x)(i_y)$ 恰與分子方面的相抵消，所以不必化做原來單位. 將表 6–2 的結果代入公式(6–3)，得相關係數爲 .4687.

6–4. 相關係數之抽樣變異 相關係數和其他統計數一樣，也有抽樣的變異. 若從同一個全體內抽取若干大小相同的樣本，各樣本的相關係數總有些上下. 相關係數分配的形狀，不僅與自由度有關，且與全體的相關係數值有關. 今以 ρ（讀如 rho）表示全體的相關係數，r 表示樣本的相關係數（按習慣凡參數的符號用希臘字，統計數的符號用拉丁字）. 若從 $\rho=0$ 的全體中，抽取很多樣本，每樣本包含 8 對數值，那麼這些 r 值的分配，如圖 6–5 (3, Section 35) 內左邊的

曲線.若從 $\rho=0.8$ 的全體中,抽取含有8對數值的許多樣本,那麼它們的 r 值就分布成一很偏的曲線(skew curve).其所以偏的理由也

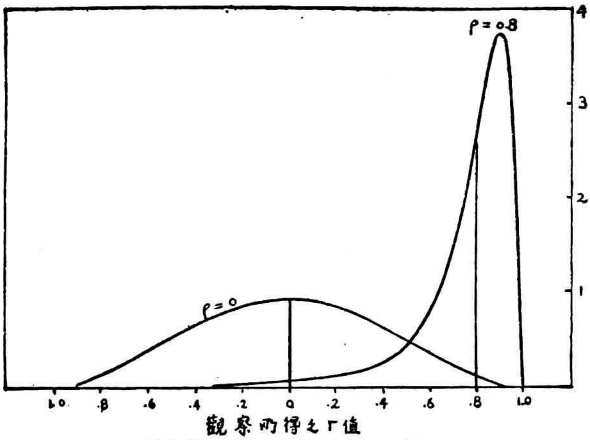


圖 6-5. 相關係數值之分配圖.

很簡單.因為全體的相關係數等於 0.8 時,樣本的 r 值大於0.8的範圍是從0.8到+1,可是小於0.8的範圍卻是從0.8經0到−1.前者都擠在很短的距離(0.2)內,後者可散布在相當長的距離(1.8)內,偏態(skewness)的現象當然會產生.

6–5. 相關係數之顯著性 R. A. Fisher 氏(3)曾指出:在小樣本中,r 的分配呈偏態曲線,若全體的相關係數 ρ 有高的數值時,即在大樣本中依然偏態,因此不好用標準誤或機誤來測驗 r 的顯著性了.現代統計學上測驗相關係數的顯著性是用 t 值的,其公式為

$$t_r=\frac{r\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r^2}},\quad \text{自由度}=N-2. \qquad \text{公式(6–4)}$$

求相關係數時也用去兩個統計數,即 $\bar{y}$ 與 b,雖然計算 r 時不必先把

b 求出，但在 r 公式裏有 $\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})$，這裏面就包含着 b，讀者把公式(5-2)與(6-1)對照一下，就知道了．按第 4-7 節的原則，這裏的自由度為 $N-2$（$\bar{x}$ 已包含在 b 內，不另占一自由度）．茲以本章第 6-2 節生產時間與乙醯膽素含量的相關係數為例，其 $r=-.9448$，$N=13$．代入公式，得

$$t_r=\frac{-.9448\sqrt{13-2}}{\sqrt{1-(-.9448)^2}}=-9.564,\quad 自由度=13-2=11.$$

查 t 值表（表 4-4），當自由度 $=11$ 時，1% 點為 3.106．此處所得 t 的絕對值大於 1% 點，所以知此 r 為非常顯著．這裏也包含着一個無效假設，就是假定全體的相關係數為 0，測驗結果知樣本的相關係數 $-.9448$ 與 0 有非常顯著的差別，所以生產時間與每克胎盤所含乙醯膽素量確有很密切的關係存在着，乙醯膽素含量愈多，則生產時間愈短．

若用同一的資料求迴歸係數及相關係數，則兩個 t 值應相等，即 $t_b=t_r$，我們可以用代數方法證明公式(5-11)等於(6-4)．例如前章白鼠食物消費量與所增體重（表 5-1）之相關係數為

$$r=\frac{3,064}{\sqrt{8,192}\sqrt{1,406}}=.9028,$$

$$t_r=\frac{.9028\sqrt{6-2}}{\sqrt{1-(.9028)^2}}=4.198,$$

與前章第 5-6 節之結果相同．

為使測驗相關係數的手續格外簡單計，統計學家如 R. A. Fisher 氏 (3, Table VA) 與 G. W. Snedecor 氏 (4) 等根據 t 值表，把 r 的 5% 點

【表 6–3】 相關係數之 5% 點與 1% 點

自由度	5%點	1%點	自由度	5%點	1%點
1	.997	1.000	24	.388	.496
2	.950	.990	25	.381	.487
3	.878	.959	26	.374	.478
4	.811	.917	27	.367	.470
5	.754	.874	28	.361	.463
6	.707	.834	29	.355	.456
7	.666	.798	30	.349	.449
8	.632	.765	35	.325	.418
9	.602	.735	40	.304	.393
10	.576	.708	45	.288	.372
11	.553	.684	50	.273	.354
12	.532	.661	60	.250	.325
13	.514	.641	70	.232	.302
14	.497	.623	80	.217	.283
15	.482	.606	90	.205	.267
16	.468	.590	100	.195	.254
17	.456	.575	125	.174	.228
18	.444	.561	150	.159	.208
19	.433	.549	200	.138	.181
20	.423	.537	300	.113	.148
21	.413	.526	400	.098	.128
22	.404	.515	500	.088	.115
23	.396	.505	1,000	.062	.081

與 1% 點求了出來，於是相關係數求得後，在表上一查，就知道是否顯著，不必再計算 t 值了. 前例生產時間與乙醯膽素含量的相關係數爲 $-.9448$，其自由度爲 11，查表 6–3 當自由度爲 11 時，相關係數之 1% 點爲 .684，現在所得 r 的絕對值 .9448，大於 1% 點，故知此 r 值爲非常顯著. 茲再舉數例於後，以明該表之用法:

N	自由度	求得之 r 值	結　論
20	18	0.70	非常顯著
100	98	0.21	顯著
10	8	0.60	不顯著
15	13	-0.50	不顯著
500	498	-0.15	非常顯著

這裏可以看到相關係數的顯著性與自由度有密切關係. 如 $N=6$, 自由度$=4$時, 雖 $r=.80$, 仍爲不顯著; 若自由度等於400時, 卽 $r=.10$, 亦爲顯著. 過去有些統計學家規定相關係數高低的範圍, 如‘.40以下爲低, .40—.70爲切實, .70以上爲高’等, 從現代統計學的觀點看來, 這種分等辦法非但沒有什麼意義, 而且會引起誤會的.

在研究工作中若得到了不顯著的相關係數, 那時最好作進一步的試驗, 卻不要匆忙地下結論. 同時也不要就拋棄了任何合理的解釋. 要記得樣本的相關係數(統計數)祇是對於全體相關係數(參數)的估計值. 統計數會大於參數, 也會小於參數, 二者的機遇是差不多相等的. 不過你遇到了不顯著的相關就不能肯定地說: 這樣本不會從無相關的全體中抽出來的了.

6–6. 兩相關係數相差之顯著性與相關之合併　如果我們從兩個樣本求得相關係數 r_1 與 r_2, 要測驗它們有無顯著的差別, 我們不能把兩個 r 值直接相減, 而必須把 r 值化做 z 值, 纔能相減. 化 r 值爲 z 值的公式是(3, Section 35)

$$z=\frac{1}{2}\left\{\log_e(1+r)-\log_e(1-r)\right\}. \qquad \text{公式(6–5)}$$

這裏 $e=2.71828$, 爲自然對數之基數(base), 常用對數表上以 10 爲基數的普通對數,乘以 2.3026 就變成自然對數(見代數學). 觀上式, 當 r 從 0 變到 1, z 就從 0 變到 ∞. 當 r 值小的時候, z 值和它很接近; r 值漸近於 1, z 值就無限的增大. 又當 r 爲負值, 則 z 值亦爲負. R. A. Fisher 氏$_{(3)}$ 認爲把 r 化做 z 值有三個優點: (一) z 值的標準誤在實用上與全體的相關係數無關. 其公式爲

$$S_z=\frac{1}{\sqrt{N-3}}, \quad \text{自由度}=N-3. \qquad \text{公式(6–6)}$$

(二) z 分配雖非嚴格的常態,但當樣本加大時,它趨向常態很快.(三) z 分配的形狀比較穩定. 圖 6–6 爲 z 值的兩個分配圖, 其一全體的相

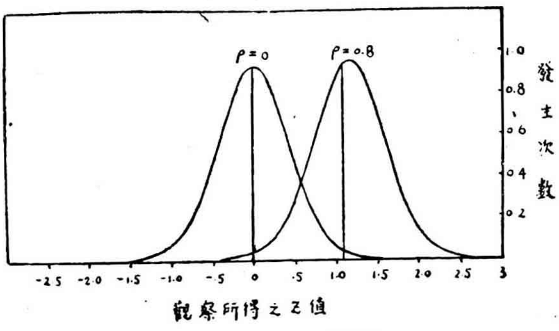


圖 6-6. z 值之分配圖.

關係數 $\rho=0$, 其一 $\rho=0.8$. 各樣本都有 8 對數值. 這兩個曲線與圖 6–5 的兩曲線是相當的. 讀者把它們比較一下就可以看到. 圖 6–5 的兩曲線, 其最高峯相差很大, 而且都不是常態曲線; 形狀方面也大不相同, 一爲對稱曲線(注意: 對稱曲線不都是常態曲線), 一爲很偏態的曲線. 但圖 6–6 的情形就不然, 兩曲線的高度相差不遠, 它們和常

態曲線很接近，肉眼幾乎分別不出來；又它們的形狀相當穩定，這種近乎常態的分配，卽使在 $\rho=\pm 1$ 的時候仍舊保持着.

以上所討論的是 z 分配的性質. 現在舉例如下：今有我國十八歲男子 264 人，其肺活量與身高之相關係數為 .395，又同年齡女子 37 人所得的相關係數為 .269(5)，問男子方面的 r 是否比女子方面為高? 我們先把 r 化做 z 值，

$$z_1=\frac{1}{2}\left\{\log_e(1+.395)-\log_e(1-.395)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(2.3026)\left\{\log_{10}(1.395)-\log_{10}(.605)\right\}$$

$$=1.1513\{0.14457-\bar{1}.78176\}=1.1513(.36281)=.418.$$

同理，在女子方面求得 $z_2=.276$. 然後求兩 z 值相差之標準誤，再由此計算 t 值. 其公式為

$$S_{z_1-z_2}=\sqrt{\frac{1}{N_1-3}+\frac{1}{N_2-3}}, \qquad \text{公式(6-7)}$$

$$t_{z_1-z_2}=\frac{z_1-z_2}{S_{z_1-z_2}}, \quad \text{自由度}=N_1+N_2-6. \qquad \text{公式(6-8)}$$

此處 N_1 為第一個樣本的總次數，N_2 為第二個樣本的總次數. 茲將計算過程列於下表：

	r	z	N	$\frac{1}{N-3}$
男	.395	.418	264	.00383
女	.269	.276	37	.02941
	相差	.142	總和	.03324

$$S_{z_1-z_2}=\sqrt{.03324}=.182.$$

$$t=\frac{.142}{.182}=0.78,\quad 自由度=264+37-6=295.$$

這裏兩 z 值的相差爲 .142, 此值較其標準誤 .182 爲小. 任何統計數若小於其標準誤, 即知爲不顯著, 實在不需要再求 t 值了. 因此我們得到一個結論, 即十八歲青年的肺活量與身高的相關係數, 並無性別上的差異.

幾個樣本的相關係數若要合併起來, 也要先經過化成 z 值的手續, 而不能把 r 直接平均. 上例男女的 z 值各以自由度乘之, 相加後以自由度的總和來平均, 即得男女合併的 z 值.

	r	z	$N-3$	$(N-3)z$
男	.395	.418	261	109.098
女	.269	.276	34	9.384
			295	118.482

$$118.482\div 295=.4016.$$

將 z 值代入公式(6–5), 可得合併的 r 值:

$$.4016=\frac{1}{2}(2.3026)\left\{\log(1+r)-\log(1-r)\right\},$$

$$.34882=\log\frac{1+r}{1-r},\qquad 2.2326=\frac{1+r}{1-r},$$

$$\therefore\quad r=.3813.$$

從 r 化做 z 值, 若每次要查對數表是很麻煩的, 所以 R. A. Fisher 氏已把它編成對照表 (3, Table VB), 一查便得.

【表 6-4】 r 與 z (0 至 3) 之對照表

z	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
.0	.0100	.0200	.0300	.0400	.0500	.0599	.0699	.0798	.0898	.0997
.1	.1096	.1194	.1293	.1391	.1489	.1586	.1684	.1781	.1877	.1974
.2	.2070	.2165	.2260	.2355	.2449	.2543	.2636	.2729	.2821	.2913
.3	.3004	.3095	.3185	.3275	.3364	.3452	.3540	.3627	.3714	.3800
.4	.3885	.3969	.4053	.4136	.4219	.4301	.4382	.4462	.4542	.4621
.5	.4699	.4777	.4854	.4930	.5005	.5080	.5154	.5227	.5299	.5370
.6	.5441	.5511	.5580	.5649	.5717	.5784	.5850	.5915	.5980	.6044
.7	.6107	.6169	.6231	.6291	.6351	.6411	.6469	.6527	.6584	.6640
.8	.6696	.6751	.6805	.6858	.6911	.6963	.7014	.7064	.7114	.7163
.9	.7211	.7259	.7306	.7352	.7398	.7443	.7487	.7531	.7574	.7616
1.0	.7658	.7699	.7739	.7779	.7818	.7857	.7895	.7932	.7969	.8005
1.1	.8041	.8076	.8110	.8144	.8178	.8210	.8243	.8275	.8306	.8337
1.2	.8367	.8397	.8426	.8455	.8483	.8511	.8538	.8565	.8591	.8617
1.3	.8643	.8668	.8692	.8717	.8741	.8764	.8787	.8810	.8832	.8854
1.4	.8875	.8896	.8917	.8937	.8957	.8977	.8996	.9015	.9033	.9051
1.5	.9069	.9087	.9104	.9121	.9138	.9154	.9170	.9186	.9201	.9217
1.6	.9232	.9246	.9261	.9275	.9289	.9302	.9316	.9329	.9341	.9354
1.7	.9366	.9379	.9391	.9402	.9414	.9425	.9436	.9447	.9458	.94681
1.8	.94783	.94884	.94983	.95080	.95175	.95268	.95359	.95449	.95537	.95624
1.9	.95709	.95792	.95873	.95953	.96032	.96109	.96185	.96259	.96331	.96403
2.0	.96473	.96541	.96609	.96675	.96739	.96803	.96865	.96926	.96986	.97045
2.1	.97103	.97159	.97215	.97269	.97323	.97375	.97426	.97477	.97526	.97574
2.2	.97622	.97668	.97714	.97759	.97803	.97846	.97888	.97929	.97970	.98010
2.3	.98049	.98087	.98124	.98161	.98197	.98233	.98267	.98301	.98335	.98367
2.4	.98399	.98431	.98462	.98492	.98522	.98551	.98579	.98607	.98635	.98661
2.5	.98688	.98714	.98739	.98764	.98788	.98812	.98835	.98858	.98881	.98903
2.6	.98924	.98945	.98966	.98987	.99007	.99026	.99045	.99064	.99083	.99101
2.7	.99118	.99136	.99153	.99170	.99186	.99202	.99218	.99233	.99248	.99263
2.8	.99278	.99292	.99306	.99320	.99333	.99346	.99359	.99372	.99384	.99396
2.9	.99408	.99420	.99431	.99443	.99454	.99464	.99475	.99485	.99495	.99505

欲得更正確之數值，或爲本表所未載者，則用後列公式:

$$r=(e^{2z}-1)\div(e^{2z}+1);\qquad z=\frac{1}{2}\left\{\log(1+r)-\log(1-r)\right\};$$

表 6–4 左側一行爲 z 值的個位數與第一位小數，上端一橫行爲 z 值的第二位小數，而表的本身則爲 r 值．例如相當於 z 值 1.24 的 r 值爲 .8455，餘類推。如果要求相當於 r 爲 .395 的 z 值等於多少，查該表得

$z=.42$	$r=.3969$
$z=.41$	$r=.3885$
相差 .01	相差 .0084

由內插法(interpolation)，得

$$.0084:(.3950-.3885)=.01:x,$$

$$x=\frac{.0065}{.0084}\times .01=.008.$$

故相當於 $r=.395$ 的 z 值爲 .418．但內插法的結果，不及用公式(6–5)的正確；又該表所載最大數值，z 爲 3.0，r 爲 .99505，若超出了這個範圍，還是需要用公式計算的．

6–7．相關與迴歸　過去統計學上把迴歸當做相關的一個特例，現在知道迴歸不僅可脫離相關而獨立，且其應用遠較相關爲廣．反之，相關的意義若不用迴歸來說明，就不容易充分了解．本章第一節用各點與迴歸直線的距離，來解釋相關的大小，就是這個緣故．

前章迴歸係數的公式(公式 5–2)爲

$$b=\frac{\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})}{\Sigma(X-\bar{x})^2}.$$

此式可化爲

$$b=\frac{\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(X-\bar{x})^2}\sqrt{\Sigma(Y-\bar{y})^2}}\frac{\sqrt{\Sigma(Y-\bar{y})^2}}{\sqrt{\Sigma(X-\bar{x})^2}}$$

$$=\frac{\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(X-\bar{x})^2}\sqrt{\Sigma(Y-\bar{y})^2}}\frac{\sqrt{\Sigma(Y-\bar{y})^2/(N-1)}}{\sqrt{\Sigma(X-\bar{x})^2/(N-1)}}=r\frac{S_y}{S_x}.$$

於是得迴歸方程式爲(參閱公式 5-3)

$$Y_e-\bar{y}=r\frac{S_y}{S_x}(X-\bar{x}).\qquad\text{公式(6-9)}$$

將各量數化爲離均差，即令 $y_e=Y_e-\bar{y}$, $x=X-\bar{x}$，則公式(6-9)化爲 $y_e=r\frac{S_y}{S_x}\cdot x$；等號前後各以 S_y 除之，得 $\frac{y_e}{S_y}=r\frac{x}{S_x}$；再令 $y_e'=y_e/S_y$, $x'=x/S_x$，於是得 $y_e'=rx'$. 這意思就是說：若 x 與 y 各用標準量數(standard measures，即以標準差爲單位的離均差)來表示，則 r 爲由 x' 推算 y' 的迴歸係數. 故當 X 與 Y 各用原來單位時，則其迴歸係數爲 b，若各化爲標準量數，則此時之迴歸係數即等於相關係數.

若從 Y 來推算 X，則其迴歸方程式爲

$$X_e-\bar{x}=r\frac{S_x}{S_y}(Y-\bar{y}).\qquad\text{公式(6-10)}$$

今以 $b_{yx}=r\frac{S_y}{S_x}$, $b_{xy}=r\frac{S_x}{S_y}$，前者爲由 X 推算 Y 之迴歸係數，後者爲由 Y 推算 X 之迴歸係數，因得

$$r=\sqrt{\left(r\frac{S_y}{S_x}\right)\left(r\frac{S_x}{S_y}\right)}=\sqrt{b_{yx}\cdot b_{xy}}.\qquad\text{公式(6-11)}$$

於是 r 又有一種意義，即 X 與 Y 各用原來單位時，r 爲兩個迴歸係數的平均(幾何均數，見第 6-2 節註). 由此可以明白相關與迴歸的關

係．若Y隨着X而變化，則須用迴歸來表示它們的關係．——適用迴歸的例子，或為Y一部分受到X的控制，如某種內分泌腺的分泌量影響個人的生長率是；或為Y的多寡隨X而不同，如營養實驗中動物體重的增加隨原始體重而異——在這些情形之下，我們需要由X推算Y的迴歸方程式，藉此可由X的數值估計相當的Y值．至於兄弟與姊妹間身高的關係，夫婦間年齡的關係等等，就不能說這個變數隨另一個而變化，其中的關係是雙方面的．這時就要用相關係數來表示，因為相關表示雙方平均的關係，而迴歸卻是有方向的．當然在很多例子中，迴歸可以適用，相關係數也可以適用．這時要看你研究的問題如何，纔能決定用那一種方法．

6-8．相關與離均差之平方和$\Sigma(Y-\bar{y})^2$　前章公式(5-4)估計誤差之平方和為

$$\Sigma(Y-Y_e)^2=\Sigma(Y-\bar{y})^2-\frac{[\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})]^2}{\Sigma(X-\bar{x})^2}.$$

此式可化為

$$\Sigma(Y-\bar{y})^2-\left[\frac{\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(X-\bar{x})^2}\sqrt{\Sigma(Y-\bar{y})^2}}\right]^2\Sigma(Y-\bar{y})^2.$$

此式方括弧內的部分為r，再用分解因子法將$\Sigma(Y-\bar{y})^2$提出，則得

$$\Sigma(Y-Y_e)^2=(1-r^2)\Sigma(Y-\bar{y})^2.\qquad\text{公式(6-12)}$$

例如白鼠食物消費量與所增體重之相關係數(見第6-5節)為.9028，其$\Sigma(Y-\bar{y})^2=1,406$(表5-1)，於是

$$[1-(.9028)^2](1,406)=(.1849)(1,406)=259.97.$$

按公式(5-4)所得的結果為259.99，末位稍有相差，是因為小數位數的關係．我們在第5-2節裏已說過：'體重增加量的總變異1,406，可

以分做兩部分：一部分 1,146.01 是與迴歸有關係的，卽可以用食物消費量來解釋的；而另一部分 259.99，卻是與迴歸無關的'. 所謂與迴歸無關的部分便是

$$(1-r^2)\Sigma(Y-\bar{y})^2.$$

而與迴歸有關的部分則是

$$r^2\Sigma(Y-\bar{y})^2.$$

後者的數值是

$$(.9028)^2(1,406)=1,146.0.$$

由是知相關係數與迴歸中變異的密切關係. 在 $\Sigma(Y-\bar{y})^2$ 中 r^2 的部分是與 Y 及 X 的相依變化有關的，而 $(1-r^2)$ 部分卻是與 X 無關的.

現在我們再回頭看一下第五章的圖 5–1 與表 5–2. 舉極端的例子來說，假如食物消費量與所增體重間之相關爲 $r=\pm 1$，於是 $1-r^2=0$. 這時所有體重增加量的變異都由迴歸而來，圖中每一個點子都恰在迴歸線上，這表示體重的觀察值與估計值完全相等，而標準估計誤差就等於零. 相反的極端情形便是 $r=0$, $1-r^2=1$. 這時體重增加量的變異完全不能用食量的多少來解釋. 圖 5–1 的迴歸線將成爲一水平線，與縱軸相交於 $\bar{y}=131$ 處. 因此不論 X 是多少，其 Y 的估計值都等於 $\bar{y}$. 於是估計誤差就等於離均差，而 $\Sigma(Y-Y_e)^2$ 也等於 $\Sigma(Y-\bar{y})^2$ 了. 從這兩個例子，可以知道相關係數的大小對於估計誤差的影響.

【練　習　題】

1. 劉士豪氏等(6)在研究骨質輭化症(osteomalacia)病人鈣與

磷之新陳代謝中，曾測定患者進食之鈣磷比例及骨骼中存留之鈣磷比例．以下爲其紀錄，問兩種比例間有無顯著之關係？

進食	1.78	3.38	5.46	7.16	0.50	1.40	2.66	3.67
存留	5.46	3.20	6.19	10.36	0.70	2.07	3.37	4.64
進食	4.55	0.12	0.72	1.69	2.51	3.19	0.26	0.90
存留	4.63	1.17	1.74	2.69	3.16	4.54	0.86	1.90
進食	1.55	2.20	2.84	0.73	1.25	1.77	2.29	
存留	2.80	1.67	2.38	11.90	9.30	5.00	2.25	

2. F. G. Benedict (7) 等在研究華北人民之基底代謝(basal metabolism)時，曾測量各被試者之身高體重及產熱量等．茲根據其身高體重之紀錄，用 P. H. Stevenson 氏公式(8)求得其身體表面積．以下爲中年男子十五人之身體表面積(平方米)及在基底情形下 24 小時內所產之熱量(仟卡)，試求其相關並測驗其顯著性．

表面積	1.380	1.490	1.500	1.520	1.530	1.555	1.565	1.575
所產熱量	1,181	1,350	1,341	1,459	1,449	1,524	1,438	1,546
表面積	1.605	1.635	1.650	1.660	1.715	1.740	1.780	
所產熱量	1,577	1,556	1,480	1,480	1,547	1,652	1,559	

計算時可仿照第五章表 5-3 用縮簡法，表面積之假定均數用 1.600，熱量之假定均數用 1,500.

3. 閻亦傳等(9)在人類胎盤絨毛的外皮細胞之觀察中，發現胎

盤絨毛外皮壞變(纖維蛋白樣變 fibrinoid)之程度，與胎盤抽液中乙醯膽素量成反比例．下表為7位流產者每克胎盤所含乙醯膽素量(微克)及每平方毫米胎盤面積之壞變絨毛數．試由統計學上證實其結論．

乙醯膽素	24.0	80.0	104.0	88.4	57.6	67.6	67.0
壞變絨毛數	8.0	3.0	2.6	2.0	3.2	4.2	4.4

4．有惡性貧血症(pernicious anaemia)患者九人，在復發期中每立方毫米血液之紅血球數及血糖分解率(glycolysis rate，每100立方厘米血液中之葡萄糖量)如下(10)．其相關係數為0.54，但此值為不顯著，表示二者之間並無眞正的關係．試計算其相關係數，並用 t 值及表 6-3 測驗之．

紅血球數(百萬)	0.83	1.20	1.27	1.38	1.80	1.81	1.98	2.27	2.90
糖分解率(毫克，五次平均)	2.8	5.0	2.8	6.4	5.8	7.4	13.4	6.6	7.2

5．Boycott 與 Oakley 二氏(11)在輸血研究中，曾以兔為實驗對象，輸血者與受血者各計其網織血球(reticulocyte)數(每1,000紅血球)．由此求得兩相關係數：一為受血者輸血前及輸血後第一天網織血球數之相關($r_1=0.97$)；一為輸血者及受血者(在輸血後第一天)網織血球數之相關($r_2=0.49$)．受血者共有兔8頭．問兩 r 有顯著之相差否？

6．下表為我國初產產婦(primipara)之年齡(歲)及其初生嬰兒之體重(仟克)(12)．問二者有顯著的關係否？

產婦年齡	嬰兒體重	產婦年齡	嬰兒體重	產婦年齡	嬰兒體重	產婦年齡	嬰兒體重	產婦年齡	嬰兒體重
18	2.75	28	2.22	21	3.10	20	2.66	26	2.50
28	2.89	24	2.36	24	2.63	20	2.84	23	3.05
27	2.55	22	2.64	18	2.61	20	3.02	24	2.31
19	3.02	26	2.91	21	3.00	20	2.61	18	2.92
21	2.74	20	2.71	20	2.53	20	2.35	20	2.67
22	2.95	18	2.67	22	3.37	25	3.37	18	2.84
25	3.02	18	3.19	18	3.33	18	3.05	20	3.34
20	3.18	19	2.37	17	2.60	21	3.01	24	2.69
22	2.70	19	3.10	28	3.33	21	3.23	28	3.15
19	1.09	28	2.95	24	2.81	28	2.78	27	2.80
25	2.98	22	3.38	26	2.82	20	2.56	27	2.99
26	2.60	21	2.46	17	3.66	36	2.90	24	2.24
18	2.82	28	3.02	24	3.32	20	2.72	24	2.81
25	2.85	21	2.49	23	2.75	20	2.91	23	3.08
25	2.30	26	2.88	29	2.77	27	2.43	20	2.11
17	1.30	24	3.40	24	2.65	24	2.80	19	1.90
22	3.14	26	2.88	20	2.50	16	3.67	22	2.53
21	3.02	23	3.33	25	2.43	36	3.54	20	2.77
22	2.77	20	2.60	29	2.83	23	3.13	22	2.40
22	2.88	20	3.12	22	3.05	25	3.31	19	2.75

相關表之組距年齡方面可用　16—18—20—……，

體重方面可用 1.0—1.2—1.4—……．

7．下表爲國立中央大學(13)一部分教職員之夫婦年齡(歲)，其相關係數顯著否？

夫	妻	夫	妻	夫	妻	夫	妻	夫	妻	夫	妻
53	53	48	48	32	30	42	40	38	38	42	37
29	24	27	26	39	26	37	32	40	40	46	30
36	36	34	33	26	24	47	45	41	38	39	40
39	36	29	28	46	47	36	29	28	29	37	32
35	37	32	28	50	47	27	26	31	28	45	47
40	38	27	26	38	35	40	40	43	38	48	38
39	34	36	35	46	30	40	39	25	23	43	41
39	36	38	36	39	40	35	30	34	34	39	38
27	26	26	26	35	29	38	26	38	27	49	49
39	31	40	40	30	30	36	32	33	30	32	30
40	30	40	42	30	26	37	32	49	47	47	45
44	43	37	28	32	35	31	32	49	31	44	33
40	36	37	29	34	32	28	27	28	26	43	41
29	26	50	40	31	31	28	27	34	34	38	30
35	30	59	48	32	30	30	27	36	32	46	38
31	26	37	35	49	51	42	41	34	29	38	29
31	29	39	38	33	25	53	55	23	20	31	25
24	23	61	52	34	33	27	27	45	45	32	30
42	31	32	27	54	26	46	41	34	24	44	42
34	26	48	48	59	58	36	26	38	29	44	44
37	37	28	27	52	49	31	29	34	28	29	29
42	36	32	28	26	26	31	29	30	24	56	57
46	42	37	39	25	24	44	36	28	28	43	45
36	22	39	29	25	20	29	26	36	31	35	30
44	43	33	30	35	35	39	40	39	39	44	40
32	29	26	24	38	30	29	27	47	37	52	50
61	45	25	25	42	38	36	33	38	35	28	26
50	47	58	55	31	28	35	25	36	34	34	26
27	24	38	36	32	24	33	27	39	37	38	30
30	27	25	23	37	31	29	25	39	29	28	29

組距可用 2，如 22—24—26—……。

8. 試用第五章第 9 題之資料，依公式(6-9)求一由身高推算體重之迴歸方程式，結果與前次相同否？並求迴歸係數與相關係數之 t 值，二者相等否？

【參　考　文　獻】

(1) Chang, H. C. & Wong, A., Studies on tissue acetylcholine, I. Origin, significance and fate of acetylcholine in human placenta, Chinese Journal of Physiology, 7, 2 : 151–170 (1933).

(2) Lennox, Wm. G., Temperature and pulse rates of patients in Peking and Boston, China Medical Journal, 39 : 218–223 (1925).

(3) Fisher, R. A., Statistical Methods for Research Workers, Oliver and Boyd, London (1936).

(4) Snedecor, G. W., Statistical Methods, p. 133, Iowa State College Press, Iowa (1940).

(5) Tsai, C. and Wu, C. H., A statistical study of the vital capacity of senior middle school and college students, Chinese Journal of Physiology, 14, 1 : 95–116 (1939).

(6) Liu, S. H., Hannon, R. R., Chou, S. K., Chen, K. C., Chu, H. I. and Wang, S. H., Calcium and phosphorus metabolism in osteomalacia, III. The effects of varying levels and ratios of intake of calcium to phosphorus on their

serum levels, paths of excretion and balances, Chinese Journal of Physiology, 9, 2 : 101–118 (1935).

(7) Benedict, F. G., Kung, L. C., and Wilson, S. D., The basal metabolism and urinary nitrogen excretion of Chinese, Manchus and others of the Mongolian race, Chinese Journal of Physiology, 12. 1 : 67–100 (1937).

(8) Stevenson, P. H., Height-weight-surface formula for the estimation of surface area in Chinese subjects, Chinese Journal of Physiology, 12, 3 : 327–330 (1937).

(9) Wen, I. C., Chang, H. C. and Wong, A., Studies on tissue acetylcholine, IV. Cytological considerations of the chorionic villous epithelium of the human placenta, Chinese Journal of Physiology, 10, 4 : 559–570 (1936).

(10) Goldhamer, S. M., Journ. Clin. Invest., 12 : 583 (1933).

(11) Boycott, A. E. and Oakley, C. L., Jour. Path. Bact., 36: 205 (1933).

(12) 四川省立成都高級醫事職業學校附屬產院，民國三十三年之紀錄.

(13) 國立中央大學人事組民國三十年之調查.

第七章　常態曲線

7-1. 二項分配(binomial distribution)　本書第四章已經提及常態分配曲線，這裏就要詳細地討論它的特性和配合(fit)的方法等等. 但爲易於明瞭計，讓我們先把二項分配介紹一下.

有大葉肺炎(lobar pneumonia)患者231人(1)，其各年齡組的死亡情形如後:

【表 7-1】　各年齡組大葉肺炎患者之死亡情形

年齡組	11歲以下	11—20	21—30	31—40	41—50	51—60	60歲以上
痊　愈	9	52	72	37	12	7	1
死　亡	4	6	15	8	3	4	1
總　計	13	58	87	45	15	11	2

這裏我們不預備各年齡組逐一討論，只提出年齡最大和最小的兩組作爲例子，其餘可以類推. 在60歲以上的一組兩人中死了一人，故死亡機率爲1/2，或痊愈與死亡的比例爲1 : 1. 11歲以下的一組在13人中死了4人，故死亡的機率爲4/13，或痊愈與死亡的比例爲9:4. 這兩個死亡機率若應用於同年齡組的其他大葉肺炎病人，能適合到什麽程度呢?我們知道各病人因爲生活史上和環境上無數小因子的變異，遂使同樣的處理不一定有相同的結果，於是就產生抽樣變動的現象(參閱本書第一章及第四章). 所以同年齡組各樣本的死亡機

率不會都等於1/2或4/13是意中事.若11歲以下和60歲以上的病人各有好幾千名，他們的死亡機率會不會都是1/2呢？用統計學的術語來說：手頭的兩個樣本是否都從死亡機率爲1/2的全體中取出來的呢？從這13個人的樣本所得的證據，我們能不能說：十一歲以下的死亡機率不是1/2呢？要答覆這些問題，須用二項分配計算其機率.讓我們先從最簡單的情形說起.

假定在想像的全體中，有半數的病人可以痊愈，即痊愈與死亡的比例爲1：1. 從這個全體中抽取很多個樣本，每個樣本有兩個病人.這些樣本可能有三種情形：兩人都痊愈；一人痊愈，一人死亡；兩人都死亡.其發生次數的百分比如下：

兩人痊愈	四分之一或25%
一人痊愈，一人死亡	二分之一或50%
兩人死亡	四分之一或25%

如果我們抽取了1,000個樣本，那麼兩人都痊愈的大概有250個樣本，兩人都死亡的大概也有250個樣本，一人痊愈一人死亡的大概有500個樣本.這些情形可以用二項分配來表示：

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}.$$

二項分配的普通公式是

$$(q+p)^k=q^k+kq^{k-1}p+\frac{k(k-1)}{2\cdot 1}q^{k-2}p^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{3\cdot 2\cdot 1}q^{k-3}p^3$$

$$+\cdots\cdots+\frac{k(k-1)(k-2)\cdots\cdots(k-r+1)}{r(r-1)\cdots\cdots 2\cdot 1}q^{k-r}p^r$$

$$+\cdots\cdots+p^k. \qquad \text{公式(7-1)}$$

若 q 表示死亡機率，p 表示痊愈機率，每一樣本有 k 個病人，則有 0，1，2，3，……，r，……，k 個病人痊愈的相對次數(relative frequency)卽為上列展開式中各項所表示者（請參考代數學中之二項定理、機率、組合、排列等節）。在機率中有一基本定理卽 $q+p=1$，如擲一骰子，三點（或任何點）出現的機率為 1/6，非三點的機率為 5/6，這時 $p=1/6$，$q=5/6$，故 $q+p=1$．茲仍假定病人死亡與痊愈的機率各為 1/2，卽 $q=p=1/2$．若每一樣本有 4 個病人，以 $k=4$ 代入上列公式，則得

$$\underset{(\text{死})}{\left(\frac{1}{2}\right.}+\underset{(\text{愈})}{\left.\frac{1}{2}\right)^4}=\underset{(\text{四死})}{\left(\frac{1}{2}\right)^4}+\underset{(\text{三死一愈})}{4\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$+\underset{(\text{二死二愈})}{6\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\underset{(\text{一死三愈})}{4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3}+\underset{(\text{四愈})}{\left(\frac{1}{2}\right)^4}$$

其中四死或四愈的各占所有樣本數的 1/16，三死一愈或一死三愈的各占 4/16，二死二愈的占 6/16．又如痊愈與死亡的比例為 2：1，則 $q=1/3$，$p=2/3$，若每個樣本有 5 人，則分配的情形如下：

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^5=\left(\frac{1}{3}\right)^5+5\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)+10\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$+10\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3+5\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$$=\underset{\left(\text{五死}\right)}{\frac{1}{243}}+\underset{\left(\substack{\text{四死}\\\text{一愈}}\right)}{\frac{10}{243}}+\underset{\left(\substack{\text{三死}\\\text{二愈}}\right)}{\frac{40}{243}}+\underset{\left(\substack{\text{二死}\\\text{三愈}}\right)}{\frac{80}{243}}+\underset{\left(\substack{\text{一死}\\\text{四愈}}\right)}{\frac{80}{243}}+\underset{\left(\text{五愈}\right)}{\frac{32}{243}}.$$

二項展開式的係數，除由上列公式計算外，還可用 Pascal 氏三角形查到．每一橫行內相鄰兩係數之和，即等於次一橫行的一個係數．上二例展開式中的係數，查該三角形 $k=4,5$ 兩橫行即得．

樣本之大小(k)	二項分配之係數
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1
9	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
10	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
11	1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
12	1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
13	1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1

7-2. 二項分配之應用 現在我們可以討論大葉肺炎患者的問題了．假定在想像的全體中，死亡與痊愈的機率各爲 1/2，每個樣本有 13 個病人，將二項式展開後，得

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{13}=\left(\frac{1}{2}\right)^{13}+13\left(\frac{1}{2}\right)^{12}\left(\frac{1}{2}\right)+78\left(\frac{1}{2}\right)^{11}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$$

$$+286\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+\cdots\cdots+13\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{12}+\left(\frac{1}{2}\right)^{13}.$$

上式等號右端第一項化成小數爲 .000122，即 .0122%；第二項

爲.001587,卽.1587%,餘類推.各項百分數詳表7-3.這裏我們看到

【表7-3】 十三人中痊愈與死亡人數之分配

痊愈人數	死亡人數	百分數	
13	0	0.0122	
12	1	0.1587	
11	2	0.9521	13.3422
10	3	3.4912	
9	4	8.7280	
8	5	15.7105	
7	6	20.9473	
6	7	20.9473	
5	8	15.7105	
4	9	8.7280	
3	10	3.4912	
2	11	0.9521	13.3422
1	12	0.1587	
0	13	0.0122	
		100.0000	

在13人中9人痊愈的機率爲百分之8.728,又10人痊愈的機率爲百分之3.4912.通常我們並不這樣分別的看,而是說,在十三人中有9人或9人以上痊愈的機率爲百分之13.3422——此值爲自9人至13人機率之總和,見該表右側.按前面的假定,全體的痊愈與死亡機率各爲1/2,則13人中平均應有6.5人痊愈.而手頭的樣本,有9人痊愈,與均數相差$9-6.5=2.5$人.若此樣本係由上述全體中隨機

抽取，那麼它與均數的距離可能是 +2.5，也可能是 −2.5，所以我們要把分配的另一端，卽死亡人數在 9 人或以上（或痊愈人數在 4 人或以下的）的也考慮在內，他們的機率也有百分之 13.3422；所以痊愈和死亡的人數，與均數相差在 2.5 或以上的機率，共有百分之 13.3422＋13.3422＝26.6844. 換言之，若全體的死亡機率爲1/2，均數爲 6.5，那麼在 13 人中痊愈或死亡有 9 人或以上的在100個樣本中約有 27 個. 這機遇很大，所以這個樣本是很可能從上述全體中隨機抽取的. 因此我們對於 13 人中治愈了 9 人，不能就認爲滿意，卽使眞正的痊愈死亡比例爲 1：1，但由於機遇的關係，很容易碰巧得到這樣的結果，若第二個樣本在 13 人中竟死亡了 9 人，也不足爲怪.

假如現有一樣本在 13 人中痊愈者達 12 人，其與均數的相差爲 12−6.5＝5.5. 在隨機抽樣中得到一樣本與均數的距離等於或大於 5.5 的機率爲百分之 2（.0122＋.1587）＝.3418，此值小於 1%. 按統計學上的習慣，若機率小於 1% 爲非常顯著，在 1% 與 5% 間者爲顯著，大於 5% 者爲不顯著（參閱第四章），故知此相差爲非常顯著. 易言之，此樣本不見得從死亡機率爲 1/2，均數爲 6.5 的全體中隨機取來. 我們也可以說其眞正的死亡率未必若是之高.

現在我們再談另一個問題. 表 7-1 在 11—20 歲的一組裏 58 人中有 52 人痊愈，而 6 人死亡. 假定在一般情形之下，該年齡組痊愈與死亡的比例爲 4：1. 試根據該樣本的結果，推測此項治療有顯著的實效(efficacy)否？按四比一的假定，則在 58 人中平均有 58×4/5＝46.4 人痊愈. 實際痊愈者與均數相差 52−46.4＝5.6 人. 我們要測驗此項治療是否較一般情形更爲有效，那麼所考慮的是大於均數

5.6的機率若干，而並不考慮小於均數5.6(即痊愈人數爲40.8或更少者)的方面．這點是與前例不同的地方．若以二項分配表示，則$p=4/5, q=1/5, k=58$．故在58人中有52或更多人痊愈的機率爲下列展開式中首七項的總和:

$$\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\right)^{58}=\left(\frac{4}{5}\right)^{58}+58\left(\frac{4}{5}\right)^{57}\left(\frac{1}{5}\right)+\frac{58\cdot 57}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{56}\left(\frac{1}{5}\right)^{2}$$

$$+\frac{58\cdot 57\cdot 56}{3\cdot 2}\left(\frac{4}{5}\right)^{55}\left(\frac{1}{5}\right)^{3}+\frac{58\cdot 57\cdot 56\cdot 55}{4\cdot 3\cdot 2}\left(\frac{4}{5}\right)^{54}\left(\frac{1}{5}\right)^{4}$$

$$+\frac{58\cdot 57\cdot 56\cdot 55\cdot 54}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\left(\frac{4}{5}\right)^{53}\left(\frac{1}{5}\right)^{5}$$

$$+\frac{58\cdot 57\cdot 56\cdot 55\cdot 54\cdot 53}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\left(\frac{4}{5}\right)^{52}\left(\frac{1}{5}\right)^{6}+\cdots\cdots.$$

計算時先將4/5與1/5的對數算出，前者爲

$$\bar{1}.903,0900 \text{ 或 } -.096,9100$$

(即$-1+.903,0900$之代數和)；後者爲

$$\bar{1}.301,0300 \text{ 或 } -.698,9700.$$

於是第一項的對數爲

$$58(-.096,9100)=-5.620,7800=\bar{6}.379,2200.$$

自第三項以後，各項係數的對數可用表7–4計算．該表所列係1至100乘階(factorial)之對數，若超過100者可查參考文獻(2)表XLIX．上表第七項的係數可寫爲$(58!)/[(52!)(6!)]$．查表7–4，得

$$\log(58!)=78.371,1717;$$

$$\log(52!)=67.906,6484;$$

又

$$\log(6!)=2.857,3326.$$

【表 7-4】 自 1 至 100 乘階之對數

n	$\log(n!)$	n	$\log(n!)$	n	$\log(n!)$	n	$\log(n!)$
1	.0000000	26	26.6056190	51	66.1906451	76	111.2754254
2	.3010300	27	28.0369828	52	67.9066484	77	113.1619161
3	.7781513	28	29.4841408	53	69.6309243	78	115.0540107
4	1.3802113	29	30.9465388	54	71.3633181	79	116.9516378
5	2.0791813	30	32.4236601	55	73.1036808	80	118.8547278
6	2.8573326	31	33.9150218	56	74.8518688	81	120.7632128
7	3.7024306	32	35.4201718	57	76.6077437	82	122.6770267
8	4.6055206	33	36.9386857	58	78.3711717	83	124.5961048
9	5.5597631	34	38.4701646	59	80.1420237	84	126.5203841
10	6.5597631	35	40.0142326	60	81.9201750	85	128.4498030
11	7.6011558	36	41.5705351	61	83.7055048	86	130.3843015
12	8.6803370	37	43.1387368	62	85.4978965	87	132.3238208
13	9.7942804	38	44.7185204	63	87.2972370	88	134.2683035
14	10.9404084	39	46.3095850	64	89.1034170	89	136.2176935
15	12.1164997	40	47.9116450	65	90.9163304	90	138.1719360
16	13.3206197	41	49.5244289	66	92.7358743	91	140.1309774
17	14.5510686	42	51.1476782	67	94.5619491	92	142.0947652
18	15.8063411	43	52.7811467	68	96.3944580	93	144.0632431
19	17.0850947	44	54.4245994	69	98.2333071	94	146.0363760
20	18.3861247	45	56.0778119	70	100.0784051	95	148.0140996
21	19.7083440	46	57.7405697	71	101.9296634	96	149.9963708
22	21.0507667	47	59.4126676	72	103.7869959	97	151.9831425
23	22.4124945	48	61.0939088	73	105.6503188	98	153.9743686
24	23.7927057	49	62.7841049	74	107.5195505	99	155.9700038
25	25.1906457	50	64.4830749	75	109.3346118	100	157.9700038

故第七項全部的對數爲:

$$78.371,1717-67.906,6484-2.857,3326+52(-.096,9100)$$
$$+6(-.698,9700)=\bar{2}.374,0507.$$

茲將各項對數及眞數列後.

項別	$\log T$	T
(1)	$\bar{6}.379,2200$	.000,0024
(2)	$\bar{5}.540,5880$	.000,0347
(3)	$\bar{4}.393,3729$	.000,2474
(4)	$\bar{3}.062,3796$	.001,1545
(5)	$\bar{3}.598,6223$	.003,9685
(6)	$\bar{2}.029,9861$	.010,7148
(7)	$\bar{2}.374,0507$	.023,6620

將此最初七項之數値乘以100,註明相當之痊愈及死亡人數,則得表7-5之結果.由此表可見在生死爲四比一之假定下,58人中有52或更多人痊愈之機率爲3.98%或4%弱.即由於純粹機遇而獲得這樣的結果的在100次中可能有4次.我們也可以說:如果認爲該年齡組痊愈人數較4/5的假定爲多,那麼在25次中有錯誤1次的危險.

【表7-5】 痊愈人數等於或大於52人之機率

(痊愈:死亡=4:1,每樣本有58人)

痊愈人數	死亡人數	百分數	
58	0	.00024	3.97843
57	1	.00347	
56	2	.02474	
55	3	.11545	
54	4	.39685	
53	5	1.07148	
52	6	2.36620	
....	....	....	

7-3. 常態曲線 (normal curve) 若 $p=q=1/2$ 的二項分配，其 k 值逐漸加大，即其點漸漸加多，最後會接近一個光滑的曲線. 如圖 7-1 為每樣本有 13 人時的分配情形，係根據表 7-3 所繪成者. 圖 7-2 則每樣本增至 50 人，在各縱線的頂端，我們用線連了起來. 圖

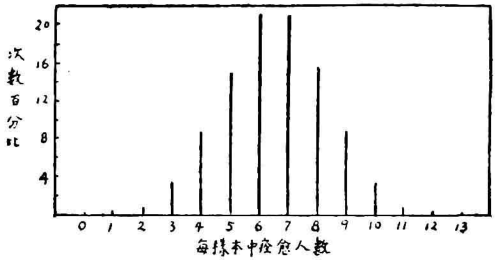


圖 7-1. 生死比例為 1：1 時之期望樣本數.（每樣本有 13 人）

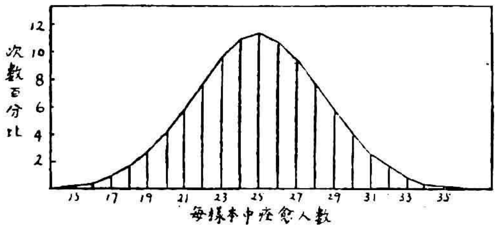


圖 7-2. 生死比例為 1：1 時之期望樣本數.（每樣本有 50 人）

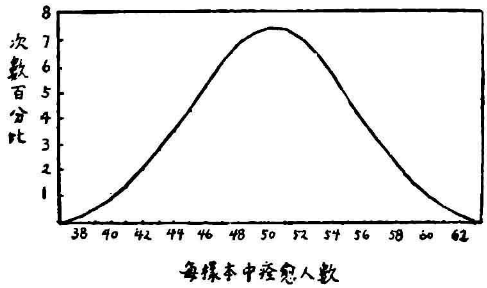


圖 7-3. 生死比例為 1：1 時之期望樣本數.（每樣本有 100 人）

7-3 每樣本增至 100 人，此圖省去了縱線，而只用點來表示次數百分比，各點用直線順次連起來．若每樣本的人數（即 k）繼續增多，則點數也隨着增多，而且點與點間的距離更爲接近．當 k 趨向於無限大時，就有無限個點子，結果成爲一光滑的曲線，叫做常態曲線，也叫做常態誤差曲線 (normal curve of error)、常態次數曲線 (normal frequency curve)、機率曲線 (probability curve)、或高斯曲線 (Gaussian curve, 以紀念 Gauss 得名)等等．常態曲線的形狀，如圖 7-4．它是對稱的曲線，在均數所在處最高，故均數、衆數與中位數（參閱第二章）相密合．橫軸上的距離，用標準差表示．因常態曲線是一個理論的曲線，它的標準差是參數（參閱第四章第 4-7 節），故以希臘字 σ (讀如 sigma) 表示之．

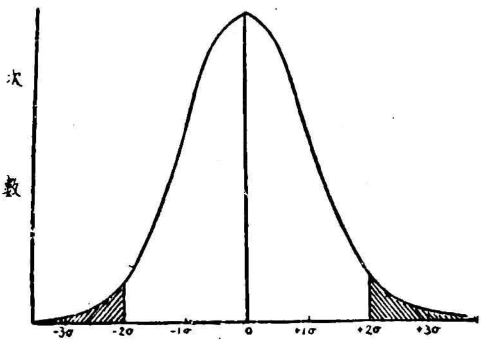


圖 7-4． 常態曲線圖

大於均數的一邊 σ 值爲正，小於均數的一邊爲負．理論上常態曲線向左右伸展，綿延無窮．但在實用方面，常態曲線在離均數正負 3σ 內所包含的面積，已達 99% 以上，此距離以外的面積爲數甚微．

常態曲線的公式爲

$$y=\left(\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}. \qquad \text{公式(7-2)}$$

此處 y 爲次數，即縱線的高度，N 爲總次數，σ 爲標準差，π 爲圓周率，

e爲自然對數之基數，x爲離均差. 由此公式，可求得相當於各 x 值的縱線，並用積分法求得其面積.

若每次用到常態曲線，必須從這公式算出來，那是非常麻煩的，好在統計學家已將常態曲線的横軸距離、縱線高度及所含面積三者編成對照表. 最初發表此種對照表者爲 Sheppard 氏(2)，此後就廣爲流布，形式也略有改變. 但基本原理是一樣的. 當編造對照表時，爲使情形格外簡單計，令 $N=1$, $\sigma=1$，並令

$$z=\frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}}. \qquad \text{公式(7-3)}$$

這裏的 z 和前章由相關係數化來的不同，因歷史關係，仍沿用原有符號，但讀者切勿混淆.

在均數處離均差 $x=0$, $e^{-\frac{1}{2}(0)}=1$，故得

$$z=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}=\frac{1}{\sqrt{2(3.1416)}}=.3989.$$

這是在均數處縱線的相對高度，即表 7-6 縱線行的第一個數值. 該表分做三行. 第一行 x/σ 是横軸上的距離，第二行是從均數至各 x/σ 值間所包含的面積，用符號 $\alpha/2$ 表示之(α 爲希臘字，讀如 alpha，係代表均數上下各爲 x/σ 距離內的面積. 因常態曲線左右對稱，故在均數一側之面積爲 $\alpha/2$)，第三行爲在各 x/σ 處縱線之高度，以 z 表示之. 如由均數至 1σ 間所包含之面積爲 .3413，即占總面積之 34.13%；由均數至 2σ 間所包含之面積爲 .4772，即總面積之 47.72%. 這裏我們可以看到，在均數附近，横軸上每單位距離的相當面積最大，離均數愈遠，則每單位距離的相當面積愈小. 所以 x/σ 增加一倍，而

【表7-6】 常態曲線之面積($\alpha/2$)與縱線(z) 。

x/σ	$\alpha/2$	z	x/σ	$\alpha/2$	z	x/σ	$\alpha/2$	z	x/σ	$\alpha/2$	z
.00	.0000	.3989	.25	.0987	.3867	.50	.1915	.3521	.75	.2734	.3011
.01	.0040	.3989	.26	.1026	.3857	.51	.1950	.3503	.76	.2764	.2989
.02	.0080	.3989	.27	.1064	.3847	.52	.1985	.3485	.77	.2794	.2966
.03	.0120	.3988	.28	.1103	.3836	.53	.2019	.3467	.78	.2823	.2943
.04	.0160	.3986	.29	.1141	.3825	.54	.2054	.3448	.79	.2852	.2920
.05	0199	.3984	.30	.1179	.3814	.55	.2088	.3429	.80	.2881	.2897
.06	.0239	.3982	.31	.1217	.3802	.56	.2123	.3410	.81	.2910	.2874
.07	.0279	.3980	.32	.1255	.3790	.57	.2157	.3391	.82	.2939	.2850
.08	.0319	.3977	.33	.1293	.3778	.58	.2190	.3372	.83	.2967	.2827
.09	.0359	.3973	.34	.1331	.3765	.59	.2224	.3352	.84	.2995	.2803
.10	.0398	.3970	.35	.1368	.3752	.60	.2257	.3332	.85	.3023	.2780
.11	.0438	.3965	.36	.1406	.3739	.61	.2291	.3312	.86	.3051	.2756
.12	.0478	.3961	.37	.1443	.3725	.62	.2324	.3292	.87	.3078	.2732
.13	.0517	.3956	.38	.1480	.3712	.63	.2357	.3271	.88	.3106	.2709
.14	.0557	.3951	.39	.1517	.3697	.64	.2389	.3251	.89	.3133	.2685
.15	.0596	.3945	.40	.1554	.3683	.65	.2422	.3230	.90	.3159	.2661
.16	.0636	.3939	.41	.1591	.3668	.66	.2454	.3209	.91	.3186	.2637
.17	.0675	.3952	.42	.1628	.3653	.37	.2486	.3187	.92	.3212	.2613
.18	.0714	.3925	.43	.1664	.3637	.68	.2517	.3166	.93	.3238	.2589
.19	.0753	.3918	.44	.1700	.3621	.69	.2549	.3144	.94	.3264	.2565
.20	.0793	.3910	.45	.1736	.3605	.70	.2580	.3123	.95	.3289	.2541
.21	.0832	.3902	.46	.1772	.3589	.71	.2611	.3101	.96	.3315	.2516
.22	.0871	.3894	.47	.1808	.3572	.72	.2642	.3079	.97	.3340	.2492
.23	.0910	.3885	.48	.1844	.3555	.73	.2673	.3056	.98	.3365	.2468
.24	.0948	.3876	.49	.1879	.3538	.74	.2703	.3034	.99	.3389	.2444

x/σ	$\alpha/2$	z	x/σ	$\alpha/2$	z	x/σ	$\alpha/2$	z	x/σ	$\alpha/2$	z
1.00	.3413	.2420	1.25	.3944	.1826	1.50	.4332	.1295	1.75	.4599	.0863
1.01	.3438	.2396	1.26	.3962	.1804	1.51	.4345	.1276	1.76	.4608	.0848
1.02	.3461	.2371	1.27	.3980	.1781	1.52	.4357	.1257	1.77	.4616	.0833
1.03	.3485	.2347	1.28	.3997	.1758	1.53	.4370	.1238	1.78	.4625	0818
1.04	.3508	.2323	1.29	.4015	.1736	1.54	.4382	.1219	1.79	.4633	.0804
1.05	.3531	.2299	1.30	.4032	.1714	1.55	.4394	.1200	1.80	.4641	.0790
1.06	.3554	.2275	1.31	.4049	.1691	1.56	.4406	.1182	1.81	.4649	0775
1.07	.3577	.2251	1.32	.4066	.1669	1.57	.4418	.1163	1.82	.4656	.0761
1.08	.3599	.2227	1.33	.4082	.1647	1.58	.4429	.1145	1.83	.4664	.0748
1.09	.3621	.2203	1.34	.4099	.1626	1.59	.4441	.1127	1.84	.4671	.0734
1.10	.3643	.2179	1.35	.4115	.1604	1.60	.4452	.1109	1.85	.4678	.0721
1.11	.3665	.2155	1.36	.4131	.1582	1.61	.4463	.1092	1.86	.4686	.0707
1.12	.3686	.2131	1.37	.4147	.1561	1.62	.4474	.1074	1.87	.4693	.0694
1.13	.3708	.2107	1.38	.4162	.1539	1.63	.4484	.1057	1.88	.4699	.0681
1.14	.3729	.2083	1.39	.4177	.1518	1.64	.4495	.1040	1.89	4706	.0669
1.15	.3749	.2059	1.40	.4192	.1497	1.65	.4505	.1023	1.90	.4713	.0656
1.16	.3770	.2036	1.41	.4207	.1476	1.66	.4515	.1006	1.91	.4719	.0644
1.17	.3790	.2012	1.42	.4222	.1456	1.67	.4525	.0989	1.92	.4726	.0632
1.18	.3810	.1989	1.43	.4236	.1435	1.68	.4535	.0973	1.93	.4732	.0620
1.19	.3830	.1965	1.44	.4251	.1415	1.69	.4545	.0957	1.94	.4738	.0608
1.20	.3849	.1942	1.45	.4265	.1394	1.70	.4554	.0940	1.95	.4744	.0596
1.21	.3869	.1919	1.46	.4279	.1374	1.71	.4564	.0925	1.96	.4750	.0584
1.22	.3888	.1895	1.47	.4292	.1354	1.72	.4573	.0909	1.97	.4756	.0573
1.23	.3907	.1872	1.48	.4306	.1334	.73	.4582	.0893	1.98	.4761	.0562
1.24	.3925	.1849	1.49	.4319	.1315	1.74	.4591	.0878	1.99	.4767	.0551

x/σ	$\alpha/2$	z	x/σ	$\alpha/2$	z	x/σ	$\alpha/2$	z	x/σ	$\alpha/2$	z
2.00	.4772	.0540	2.25	.4878	.0317	2.50	.4938	.0175	2.75	.4970	.0091
2.01	.4778	.0529	2.26	.4881	.0310	2.51	.4940	.0171	2.76	.4971	.0088
2.02	.4783	.0519	2.27	.4884	.0303	2.52	.4941	.0167	2.77	.4972	.0086
2.03	.4788	.0508	2.28	.4887	.0297	2.53	.4943	.0163	2.78	.4973	.0084
2.04	.4793	.0498	2.29	.4890	.0290	2.54	.4945	.0158	2.79	.4974	.0081
2.05	.4798	.0488	2.30	.4893	.0283	2.55	.4946	.0154	2.80	.4974	.0079
2.06	.4803	.0478	2.31	.4896	.0277	2.56	.4948	.0151	2.81	.4975	.0077
2.07	.4808	.0468	2.32	.4898	.0270	2.57	.4949	.0147	2.82	.4976	.0075
2.08	.4812	.0459	2.33	.4901	.0264	2.58	.4951	.0143	2.83	.4977	.0073
2.09	.4817	.0449	2.34	.4904	.0258	2.59	.4952	.0139	2.84	.4977	.0071
2.10	.4821	.0440	2.35	.4906	.0252	2.60	.4953	.0136	2.85	.4978	.0069
2.11	.4826	.0431	2.36	.4909	.0246	2.61	.4955	.0132	2.86	.4979	.0067
2.12	.4830	.0422	2.37	.4911	.0241	2.62	.4956	.0129	2.87	.4979	.0065
2.13	.4834	.0413	2.38	.4913	.0235	2.63	.4957	.0126	2.88	.4980	.0063
2.14	.4838	.0404	2.39	.4916	.0229	2.64	.4959	.0122	2.89	.4981	.0061
2.15	.4842	.0395	2.40	.4918	.0224	2.65	.4960	.0119	2.90	.4981	.0060
2.16	.4846	.0387	2.41	.4920	.0219	2.66	.4961	.0116	2.91	.4982	.0058
2.17	.4850	.0379	2.42	.4922	.0213	2.67	.4962	.0113	2.92	.4982	.0056
2.18	.4854	.0371	2.43	.4925	.0208	2.68	.4963	.0110	2.93	.4983	.0055
2.19	.4857	.0363	2.44	.4927	.0203	2.69	.4964	.0107	2.94	.4984	.0053
2.20	.4861	.0355	2.45	.4929	.0198	2.70	.4965	.0104	2.95	.4984	.0051
2.21	.4864	.0347	2.46	.4931	.0194	2.71	.4966	.0101	2.96	.4985	.0050
2.22	.4868	.0339	2.47	.4932	.0189	2.72	.4967	.0099	2.97	.4985	.0048
2.23	.4871	.0332	2.48	.4934	.0184	2.73	.4968	.0096	2.98	.4986	.0047
2.24	.4875	.0325	2.49	.4936	.0180	2.74	.4969	.0093	2.99	.4986	.0046

x/σ	$\alpha/2$	z	x/σ	$\alpha/2$	z	x/σ	$\alpha/2$	z	x/σ	$\alpha/2$	z
3.00	.4987	.0044	3.25	.4994	.0020	3.50	.4998	.0009	3.75	.4999	.0004
3.01	.4987	.0043	3.26	.4994	.0020	3.51	.4998	.0008	3.76	.4999	.0003
3.02	.4987	.0042	3.27	.4995	.0019	3.52	.4998	.0008	3.84	.4999	.0003
3.03	.4988	.0040	3.28	.4995	.0018	3.53	.4998	.0008	3.85	.4999	.0002
3.04	.4988	.0039	3.29	.4995	.0018	3.54	.4998	.0008	3.89	.4999	.0002
3.05	.4989	.0038	3.30	.4995	.0017	3.55	.4998	.0007	3.90	.5000	.0002
3.06	.4989	.0037	3.31	.4995	.0017	3.56	.4998	.0007	3.97	.5000	.0002
3.07	.4989	.0036	3.32	.4995	.0016	3.57	.4998	.0007	3.98	.5000	.0001
3.08	.4990	.0035	3.33	.4996	.0016	3.58	.4998	.0007	4.23	.5000	.0001
3.09	.4990	.0034	3.34	.4996	.0015	3.59	.4998	.0006	4.24	.5000	.0000
3.10	.4990	.0033	3.35	.4996	.0015	3.60	.4998	.0006	4.30	.5000	.0000
3.11	.4991	.0032	3.36	.4996	.0014	3.61	.4998	.0006	4.35	.5000	.0000
3.12	.4991	.0031	3.37	.4996	.0014	3.62	.4999	.0006	4.40	.5000	.0000
3.13	.4991	.0030	3.38	.4996	.0013	3.63	.4999	.0005	4.45	.5000	.0000
3.14	.4992	.0029	3.39	.4997	.0013	3.64	.4999	.0005	4.50	.5000	.0000
3.15	.4992	.0028	3.40	.4997	.0012	3.65	.4999	.0005			
3.16	.4992	.0027	3.41	.4997	.0012	3.66	.4999	.0005			
3.17	.4992	.0026	3.42	.4997	.0012	3.67	.4999	.0005			
3.18	.4993	.0025	3.43	.4997	.0011	3.68	.4999	.0005			
3.19	.4993	.0025	3.44	.4997	.0011	3.69	.4999	.0004			
3.20	.4993	.0024	3.45	.4997	.0010	3.70	.4999	.0004			
3.21	.4993	.0023	3.46	.4997	.0010	3.71	.4999	.0004			
3.22	.4994	.0022	3.47	.4997	.0010	3.72	.4999	.0004			
3.23	.4994	.0022	3.48	.4997	.0009	3.73	.4999	.0004			
3.24	.4994	.0021	3.49	.4998	.0009	3.74	.4999	.0004			

【表 7-7】 常態曲線之標準差值(x/σ)與縱線(z)

$\alpha/2$	x/σ	z	$\alpha/2$	x/σ	z	$\alpha/2$	x/σ	z	$\alpha/2$	x/σ	z
.000	0.000	.3989	.025	0.0627	.3982	.050	0.1257	.3958	.075	0.1891	.3919
.001	0.0025	.3989	.026	0.0652	.3981	.051	0.1282	.3957	.076	0.1917	.3917
.002	0.0050	.3989	.027	0.0677	.3980	.052	0.1307	.3955	.077	0.1942	.3915
.003	0.0075	.3989	.028	0.0702	.3980	.053	0.1332	.3954	.078	0.1968	.3913
.004	0.0100	.3989	.029	0.0728	.3979	.054	0.1358	.3953	.079	0.1993	.3911
.005	0.0125	.3989	.030	0.0753	.3978	.055	0.1383	.3951	.080	0.2019	.3909
.006	0.0150	.3989	.031	0.0778	.3977	.056	0.1408	.3950	.081	0.2045	.3907
.007	0.0175	.3989	.032	0.0803	.3977	.057	0.1434	.3949	.082	0.2070	.3905
.008	0.0201	.3989	.033	0.0828	.3976	.058	0.1459	.3947	.083	0.2096	.3903
.009	0.0226	.3988	.034	0.0853	.3975	.059	0.1484	.3946	.084	0.2121	.3901
.010	0.0251	.3988	.035	0.0878	.3974	.060	0.1510	.3944	.085	0.2147	.3899
.011	0.0276	.3988	.036	0.0904	.3973	.061	0.1535	.3943	.086	0.2173	.3896
.012	0.0301	.3988	.037	0.0929	.3972	.062	0.1560	.3941	.087	0.2198	.3894
.013	0.0326	.3987	.038	0.0954	.3971	.063	0.1586	.3940	.088	0.2224	.3892
.014	0.0351	.3987	.039	0.0979	.3970	.064	0.1611	.3938	.089	0.2250	.3890
.015	0.0376	.3987	.040	0.1004	.3969	.065	0.1637	.3936	.090	0.2275	.3887
.016	0.0401	.3986	.041	0.1030	.3968	.066	0.1662	.3935	.091	0.2301	.3885
.017	0.0426	.3986	.042	0.1055	.3967	.067	0.1687	.3933	.092	0.2327	.3883
.018	0.0451	.3985	.043	0.1080	.3966	.068	0.1713	.3931	.093	0.2353	.3881
.019	0.0476	.3985	.044	0.1105	.3965	.069	0.1738	.3930	.094	0.2378	.3878
.020	0.0502	.3984	.045	0.1130	.3964	.070	0.1764	.3928	.095	0.2404	.3876
.021	0.0527	.3984	.046	0.1156	.3963	.071	0.1789	.3926	.096	0.2430	.3873
.022	0.0552	.3983	.047	0.1181	.3962	.072	0.1815	.3924	.097	0.2456	.3871
.023	0.0577	.3983	.048	0.1206	.3961	.073	0.1840	.3922	.098	0.2482	.3868
.024	0.0602	.3982	.049	0.1231	.3959	.074	0.1866	.3921	.099	0.2508	.3866

$\alpha/2$	x/σ	z	$\alpha/2$	x/σ	z	$\alpha/2$	x/σ	z	$\alpha/2$	x/σ	z
.100	0.2533	.3863	.125	0.3186	.3792	.150	0.3853	.3704	.175	0.4538	.3599
.101	0.2559	.3861	.126	0.3213	.3789	.151	0.3880	.3700	.176	0.4565	.3595
.102	0.2585	.3858	.127	0.3239	.3786	.152	0.3907	.3696	.177	0.4593	.3590
.103	0.2611	.3856	.128	0.3266	.3782	.153	0.3934	.3692	.178	0.4621	.3585
.104	0.2637	.3853	.129	0.3292	.3779	.154	0.3961	.3688	.179	0.4649	.3581
.105	0.2663	.3850	.130	0.3319	.3776	.155	0.3989	.3684	.180	0.4677	.3576
.106	0.2689	.3848	.131	0.3345	.3772	.156	0.4016	.3680	.181	0.4705	.3571
.107	0.2715	.3845	.132	0.3372	.3769	.157	0.4043	.3676	.182	0.4733	.3567
.108	0.2741	.3842	.133	0.3398	.3766	.158	0.4070	.3672	.183	0.4761	.3562
.109	0.2767	.3840	.134	0.3425	.3762	.159	0.4097	.3668	.184	0.4789	.3557
.110	0.2793	.3837	.135	0.3451	.3759	.160	0.4125	.3664	.185	0.4817	.3552
.111	0.2819	.3834	.136	0.3478	.3755	.161	0.4152	.3660	.186	0.4845	.3548
.112	0.2845	.3831	.137	0.3505	.3752	.162	0.4179	.3656	.187	0.4874	.3543
.113	0.2871	.3828	.138	0.3531	.3748	.163	0.4207	.3652	.188	0.4902	.3538
.114	0.2898	.3825	.139	0.3558	.3745	.164	0.4234	.3647	.189	0.4930	.3533
.115	0.2924	.3823	.140	0.3585	.3741	.165	0.4261	.3643	.190	0.4959	.3528
.116	0.2950	.3820	.141	0.3611	.3738	.166	0.4289	.3639	.191	0.4987	.3523
.117	0.2976	.3817	.142	0.3638	.3734	.167	0.4316	.3635	.192	0.5015	.3518
.118	0.3002	.3814	.143	0.3665	.3730	.168	0.4344	.3630	.193	0.5044	.3513
.119	0.3029	.3811	.144	0.3692	.3727	.169	0.4372	.3626	.194	0.5072	.3508
.120	0.3055	.3808	.145	0.3719	.3723	.170	0.4399	.3621	.195	0.5101	.3503
.121	0.3081	.3804	.146	0.3745	.3719	.171	0.4427	.3617	.196	0.5129	.3498
.122	0.3107	.3801	.147	0.3772	.3715	.172	0.4454	.3613	.197	0.5158	.3493
.123	0.3134	.3798	.148	0.3799	.3712	.173	0.4482	.3608	.198	0.5187	.3487
.124	0.3160	.3795	.149	0.3826	.3708	.174	0.4510	.3604	.199	0.5215	.3482

α/2	x/σ	z	α/2	x/σ	z	α/2	x/σ	z	α/2	x/σ	z
.200	0.5244	.3477	.225	0.5978	.3337	.250	0.6745	.3178	.275	0.7554	.2999
.201	0.5273	.3472	.226	0.6008	.3331	.251	0.6776	.3171	.276	0.7588	.2992
.202	0.5302	.3466	.227	0.6038	.3325	.252	0.6808	.3164	.277	0.7621	.2984
.203	0.5330	.3461	.228	0.6068	.3319	.253	0.6840	.3157	.278	0.7655	.2976
.204	0.5359	.3456	.229	0.6098	.3313	.254	0.6871	.3151	.279	0.7688	.2969
.205	0.5388	.3450	.230	0.6128	.3306	.255	0.6903	.3144	.280	0.7722	.2961
.206	0.5417	.3445	.231	0.6158	.3300	.256	0.6935	.3137	.281	0.7756	.2953
.207	0.5446	.3440	.232	0.6189	.3294	.257	0.6967	.3130	.282	0.7790	.2945
.208	0.5476	.3434	.233	0.6219	.3288	.258	0.6999	.3123	.283	0.7824	.2938
.209	0.5505	.3429	.234	0.6250	.3282	.259	0.7031	.3116	.284	0.7858	.2930
.210	0.5534	.3423	.235	0.6280	.3275	.260	0.7063	.3109	.285	0.7892	.2922
.211	0.5563	.3417	.236	0.6311	.3269	.261	0.7095	.3102	.286	0.7926	.2914
.212	0.5592	.3412	.237	0.6341	.3263	.262	0.7128	.3095	.287	0.7961	.2906
.213	0.5622	.3406	.238	0.6372	.3256	.263	0.7160	.3087	.288	0.7995	.2898
.214	0.5651	.3401	.239	0.6403	.3250	.264	0.7192	.3030	.289	0.8030	.2890
.215	0.5681	.3395	.240	0.6433	.3244	.265	0.7225	.3073	.290	0.8064	.2882
.216	0.5710	.3389	.241	0.6464	.3237	.266	0.7257	.3066	.291	0.8099	.2874
.217	0.5740	.3384	.242	0.6495	.3231	.267	0.7290	.3058	.292	0.8134	.2866
.218	0.5769	.3378	.243	0.6526	.3224	.268	0.7323	.3051	.293	0.8169	.2858
.219	0.5799	.3372	.244	0.6557	.3218	.269	0.7356	.3044	.294	0.8204	.7849
.220	0.5828	.3366	.245	0.6588	.3211	.270	0.7388	.3036	.295	0.8239	.2841
.221	0.5858	.3360	.246	0.6620	.3204	.271	0.7421	.3029	.296	0.8274	.2833
.222	0.5888	.3354	.247	0.6651	.3198	.272	0.7454	.3022	.297	0.8310	.2825
.223	0.5918	.3349	.248	0.6682	.3191	.273	0.7488	.3014	.298	0.8345	.2816
.224	0.5948	.3343	.249	0.6713	.3184	.274	0.7521	.3007	.299	0.8381	.2808

α/2	x/σ	z	α/2	x/σ	z	α/2	x/σ	z	α/2	x/σ	z
.300	0.8416	.2800	.325	0.9346	.2578	.350	1.0364	.2332	.375	1.1503	.2059
.301	0.8452	.2791	.326	0.9385	.2568	.351	1.0407	.2321	.376	1.1552	.2047
.302	0.8488	.2783	.327	0.9424	.2559	.352	1.0450	.2311	.377	1.1601	.2035
.303	0.8524	.2774	.328	0.9463	.2550	.353	1.0494	.2300	.378	1.1650	.2024
.304	0.8560	.2766	.329	0.9502	.2540	.354	1.0537	.2290	.379	1.1700	.2012
.305	0.8596	.2757	.330	0.9542	.2531	.355	1.0581	.2279	.380	1.1750	.2000
.306	0.8633	.2748	.331	0.9581	.2521	.356	1.0625	.2269	.381	1.1800	.1989
.307	0.8669	.2740	.332	0.9621	.2511	.357	1.0669	.2258	.382	1.1850	.1977
.308	0.8705	.2731	.333	0.9661	.2502	.358	1.0714	.2247	.383	1.1901	.1965
.309	0.8742	.2722	.334	0.9701	.2492	.359	1.0758	.2237	.384	1.1952	.1953
.310	0.8779	.2714	.335	0.9741	.2482	.360	1.0803	.2226	.385	1.2004	.1941
.311	0.8816	.2705	.336	0.9782	.2473	.361	1.0848	.2215	.386	1.2055	.1929
.312	0.8853	.2696	.337	0.9822	.2463	.362	1.0893	.2204	.387	1.2107	.1917
.313	0.8890	.2687	.338	0.9863	.2453	.363	1.0939	.2193	.388	1.2160	.1905
.314	0.8927	.2678	.339	0.9904	.2443	.364	1.0985	.2182	.389	1.2212	.1893
.315	0.8965	.2669	.340	0.9945	.2433	.365	1.1031	.2171	.390	1.2265	.1880
.316	0.9002	.2660	.341	0.9986	.2423	.366	1.1077	.2160	.391	1.2319	.1868
.317	0.9040	.2651	.342	1.0027	.2413	.367	1.1123	.2149	.392	1.2372	.1856
.318	0.9078	.2642	.343	1.0069	.2403	.368	1.1170	.2138	.393	1.2426	.1843
.319	0.9116	.2633	.344	1.0110	.2393	.369	1.1217	.2127	.394	1.2481	.1831
.320	0.9154	2624	.345	1.0152	.2383	.370	1.1264	.2115	.395	1.2536	.1818
.321	0.9192	.2615	.346	1.0194	.2373	.371	1.1311	.2104	.396	1.2591	.1806
.322	0.9230	.2606	.347	1.0237	.2362	.372	1.1359	.2093	.397	1.2646	.1793
.323	0.9269	.2596	.348	1.0279	.2352	.373	1.1407	.2081	.398	1.2702	.1780
.324	0.9307	.2587	.349	1.0322	.2342	.374	1.1455	.2070	.399	1.2759	.1768

α/2	x/σ	z	α/2	x/σ	z	α/2	x/σ	z	α/2	x/σ	z
.400	1.2816	.1755	.425	1.4395	.1416	.450	1.6449	.1031	.475	1.9600	.0585
.401	1.2873	.1742	.426	1.4466	.1401	.451	1.6546	.1015	.476	1.9774	.0565
.402	1.2930	.1729	.427	1.4538	.1387	.452	1.6646	.0998	.477	1.9954	.0545
.403	1.2988	.1716	.428	1.4611	.1372	.453	1.6747	.0982	.478	2.0141	.0525
.404	1.3047	.1703	.429	1.4684	.1357	.454	1.6849	.0965	.479	2.0335	.0505
.405	1.3106	.1690	.430	1.4758	.1343	.455	1.6954	.0948	.480	2.0537	.0484
.406	1.3165	.1677	.431	1.4833	.1328	.456	1.7060	.0931	.481	2.0749	.0464
.407	1.3225	.1664	.432	1.4909	.1313	.457	1.7169	.0914	.482	2.0969	.0443
.408	1.3285	.1651	.433	1.4985	.1298	.458	1.7279	.0897	.483	2.1201	.0422
.409	1.3346	.1637	.434	1.5063	.1283	.459	1.7392	.0879	.484	2.1444	.0400
.410	1.3408	.1624	.435	1.5141	.1268	.460	1.7507	.0862	.485	2.1701	.0379
.411	1.3469	.1610	.436	1.5220	.1253	.461	1.7624	.0844	.486	2.1973	.0357
.412	1.3532	.1597	.437	1.5301	.1237	.462	1.7744	.0826	.487	2.2262	.0335
.413	1.3595	.1583	.438	1.5382	.1222	.463	1.7866	.0809	.488	2.2571	.0312
.414	1.3658	.1570	.439	1.5464	.1207	.464	1.7991	.0791	.489	2.2904	.0290
.415	1.3722	.1556	.440	1.5548	.1191	.465	1.8119	.0773	.490	2.3263	.0267
.416	1.3787	.1542	.441	1.5632	.1176	.466	1.8250	.0755	.491	2.3656	.0243
.417	1.3852	.1529	.442	1.5718	.1160	.467	1.8384	.0736	.492	2.4089	.0219
.418	1.3917	.1515	.443	1.5805	.1144	.468	1.8522	.0718	.493	2.4573	.0195
.419	1.3984	.1501	.444	1.5893	.1128	.469	1.8663	.0699	.494	2.5121	.0170
.420	1.4051	.1487	.445	1.5982	.1112	.470	1.8808	.0680	.495	2.5758	.0145
.421	1.4118	.1473	.446	1.6072	.1096	.471	1.8957	.0662	.496	2.6521	.0118
.422	1.4187	.1458	.447	1.6164	.1080	.472	1.9110	.0643	.497	2.7478	.0091
.423	1.4255	.1444	.448	1.6258	.1064	.473	1.9268	.0623	.498	2.8782	.0063
.424	1.4325	.1430	.449	1.6352	.1048	.474	1.9431	.0604	.499	3.0902	.0034

面積並不增加一倍，因為它們不是呈直線的關係. 又縱線離均數愈遠，則高度愈短. 這些特性必須牢記.

7-4. 常態曲線之面積 圖 7-5 至 7-7 係說明常態曲線面積之計算法. 圖 7-5 是求 x/σ 為 -0.7 至 $+1.0$ 間的面積. 常態曲線既然是兩邊對稱的，所以自 x/σ 為 0 至 $+0.7$ 間的面積與 0 至 -0.7 間的面積是相等的. 查表 7-6, 得自 x/σ 為 0 至 -0.7 間的面積

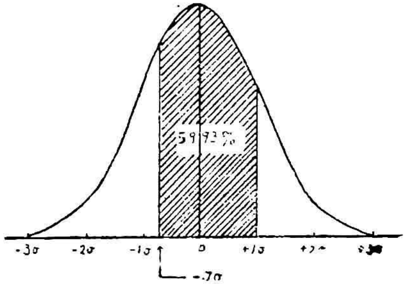


圖 7-5. 常態曲線面積之計算(一).

(以下簡稱為相當於 -0.7σ 的面積) 為 .2580 或 25.80%, 又相當於 $+1\sigma$ 的面積為 .3413 或 34.13%. 前者在最高縱線的左邊, 後者在它的右邊, 所以這兩塊面積的總和便是所求的面積. 其計算式如下:

相當於 -0.7σ 之面積	25.80%	
相當於 $+1\sigma$ 之面積	34.13%	(+
自 -0.7σ 至 $+1\sigma$ 間之面積	59.93%	

圖 7-6 是求 x/σ 為 0.5 至 1.75 間的面積. 查表得相當於 1.75σ 之面積為 45.99%, 相當於 0.5σ 之面積為 19.15%, 因為這兩塊面積都在最高縱線的右邊, 故前者包括後者在內, 所以它們的相差便是所求的面積.

相當於 $+1.75\sigma$ 之面積	45.99%	
相當於 $+0.5\sigma$ 之面積	19.15%	(−
自 0.5σ 至 1.75σ 間之面積	26.84%	

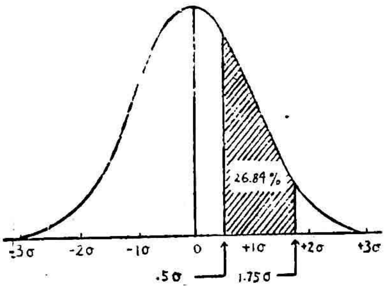


圖 7-6. 常態曲線面積之計算(二).

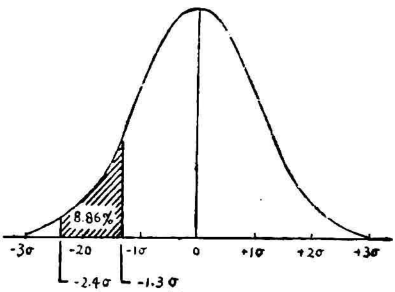


圖 7-7. 常態曲線面積之計算(三).

圖 7-7 是求 x/σ 爲 -2.4 至 -1.3 間的面積，因爲都是在最高縱線的左邊，所以也要用減法.

相當於 -2.4σ 之面積	49.18%
相當於 -1.3σ 之面積	40.32% (−
自 -2.4σ 至 -1.3σ 間之面積	8.86%

總之，若兩個 x/σ 值的符號不同，表示它們在均數的兩側，計算面積時就要相加. 若兩個 x/σ 值爲同號，表示它們同在均數的左側或右側，那麼兩塊面積就要相減. 不過要注意，必須先查面積，然後計算，卻不能先把 x/σ 加減後，再查面積. 因爲橫軸上的位置不同，相當於單位距離的面積是不等的.

表 7-7 是由面積查相當的 x/σ 值與縱線. 請看相當於面積 .475 的橫軸距離爲 1.96σ，由是知在均數上下各 1.96σ 範圍內的面積爲 $2(.475)=95\%$，而在此範圍以外的面積爲 5%(參閱圖 7-4，左右兩端有斜線的兩塊面積共占 5%). 同理，在均數上下各 2.5758σ 範圍內的面積爲 $2(.495)=99\%$，而在此範圍以外的面積爲 1%. 所以在

常態曲線上 5% 點爲 1.96，又 1% 點爲 2.5758 或 2.576. 翻到前面第四章表 4–4（t 値表），當自由度爲 ∞ 時，5% 點爲 1.96，又 1% 點爲 2.576，這正是常態曲線上的情形. 可知自由度爲無限大時 t 値即呈常態分配，換句話說，常態分配是 t 分配的極限.

在大樣本中常以標準差或標準誤之 2 倍爲顯著水準，而以 3 倍爲非常顯著的水準. 例如有我國十五歲男童 319 人之身高均數爲 $\bar{x}_1=157.52$ 厘米，均數之變異數爲 $V_{\bar{x}_1}=.1332$（參閱第四章公式 4–2）；同年齡女童 261 人之身高均數爲 $\bar{x}_2=150.79$ 厘米，均數之變異數爲 $V_{\bar{x}_2}=.1062$. 男女相差 $\bar{x}_1-\bar{x}_2=6.73$，相差之變異數爲

$$V_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=V_{\bar{x}_1}+V_{\bar{x}_2},\qquad\text{公式(7–4)}$$

其標準誤爲

$$S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\sqrt{V_{\bar{x}_1}+V_{\bar{x}_2}}.\qquad\text{公式(7–5)}$$

此公式與在小樣本中微有不同，請與第四章公式（4–6）比較後便知.
將兩變異數之値代入，得

$$S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\sqrt{.1332+.1062}=\sqrt{.2394}=.489,$$

$$t=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}}=\frac{6.73}{.489}=13.8.$$

兩均數之相差大於其標準誤三倍以上，故知十五歲男女身高之相差爲非常顯著.

7–5. 二項分配之均數及標準差　二項分配中，若以普通方法求其均數與標準差，則如表 7–8，理論次數係將 $(1/2+1/2)^{13}$ 展開後各項的係數. 因爲理論分配表示全體的情形，故所求的均數 m 與標準差 σ 都是參數. 求標準差時旣沒有用到統計數，其自由度並不減

【表 7-8】 二項分配中均數與標準差之直接計算法

痊愈人數	理論次數 (f)	d	fd	fd^2
0	1	-6	-6	36
1	13	-5	-65	325
2	78	-4	-312	1,248
3	286	-3	-858	2,574
4	715	-2	-1,430	2,860
5	1,287	-1	-1,287	1,287
6	1,716	0		
7	1,716	1	1,716	1,716
8	1,287	2	2,574	5,148
9	715	3	2,145	6,435
10	286	4	1,144	4,576
11	78	5	390	1,950
12	13	6	78	468
13	1	7	7	49
	8,192		4,096	28,672

$$m=6+\frac{4,096}{8,192}=6.5,$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{28,672-(4,096)^2/8,192}{8,192}}=\sqrt{3.25}=1,803.$$

少，故 σ 的分母仍爲 N，而不是 $N-1$，這是參數與統計數不同的地方．其實二項分配的均數和標準差不必這樣計算，統計學上已證明這些參數爲(3)：

$$m=kp, \qquad \text{公式(7-6)}$$

$$\sigma=\sqrt{kpq}. \qquad \text{公式(7-7)}$$

比例 $p=q=1/2, k=13$, 代入兩公式, 得

$$m=13(1/2)=6.5,$$

$$\sigma=\sqrt{13(1/2)(1/2)}=\sqrt{3.25}=1.803.$$

茲再以表 7-1 大葉肺炎患者爲例. 在 13 人中痊愈 9 人, 與全體均數相差 $9-6.5=2.5$ 人, $t=2.5/1.803=1.387$, 相差不及標準差之兩倍, 故爲不顯著. 又如 13 人中痊愈者 12 人, 則 $t=(12-6.5)/1.803=3.05$, 相差大於標準差之三倍, 故爲非常顯著.

若痊愈與死亡係用分數或百分數表示, 如痊愈者爲

$$9/13=69.23\%,$$

則全體之均數與標準差亦須以 k 除之, 其公式爲:

$$m=p, \qquad \text{公式(7-8)}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{pq}{k}}. \qquad \text{公式(7-9)}$$

前例 $m=1/2=50\%$, $\sigma=\sqrt{\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})}{13}}=13.87\%$.

據 B. L. Warwick 氏(4)的意見, 用標準差測驗顯著性, 在小樣本及偏態曲線方面, 亦可適用. 氏認爲卽使每樣本僅有 3 人, p 與 q 的比例爲 2 : 1, 3 : 1, 13 : 3, 7 : 1, 15 : 1, 63 : 1, 255 : 1 等情形下, 若只作顯著性的測驗, 那麼標準差法與常態曲線法在大多數臨床問題中是很合用的. 但若每個樣本的人數在 50 以下, 且需要各組正確百分比時, 如表 7-3 及 7-5 所示者, 則須用二項展開式來計算. 因爲在小樣本中, 標準差法或常態曲線法容易得到顯著的結果,

當相差只略大於兩倍標準差時，不要就認爲顯著. 至於在 50 人以上的樣本，用標準差法測驗顯著性，常得相當正確的結果. 在第八章裏我們還要討論與此有關的問題.

在很小的樣本中，遇有完全痊愈或死亡的情形，下結論時必須十分審愼. 因爲至少有 8 人的樣本完全痊愈或死亡，纔能說生死的眞正比例並非 1:1，若在 6 人以下的樣本，則不能證明與 1 : 1 有眞正的差別. 據 B. L. Warwick 氏(4)二項分配的研究，若一樣本不含 A 而完全含 B，則在全體中 A 所占之百分數，可有下列情形:

樣本中所含項目數	可自 0 至	全體中 A 所占之百分數	
		與之不相似	與之極不相似
1	94	95+	99+
2	75	81	94
3	56	67	81
4	50	56	75
5	50	56	67
10	25	33	44
15	19	25	33
20	13	19	25

此表之讀法如下: 若一樣本含有 10 個項目，全是 B (假定爲痊愈)，則其全體中 A(假定爲死亡)所占的成分可自 0 至 25%，而與 33% 不相似，與 44% 極不相似. 此處不相似(unlikely)及極不相似(highly unlikely)兩術語與差別顯著及非常顯著之意義相彷彿，但因原表編制關係，其值並不恰爲 5% 點及 1% 點，這是它們稍有出入的地方.

7-6. 常態曲線之配合法 在討論常態曲線之配合法以前，先

要來提一下 Sheppard 氏之歸併校正數(Sheppard's correction for grouping). 在大樣本中，爲計算便利計，我們要把資料列成次數分配表，並假定每個組距內的次數都集中在該組距中點(參閱第二章第 2-3 節)，但在這假定之下，卻犧牲了一部分正確性. 因事實上，各量數是散布在該組距內的，故組距中點的左右各有量數分布着. 設有 A, B 兩點，A 點的離均差較組距中點的爲大，B 點的離均差較組距中點的爲小，平方後前者當較後者爲大. 並且一個組距內的次數分配，常呈梯形的形狀，於是這情形更複雜了. 試看圖 7-5，自 0 至 $+1\sigma$ 的距離內，在組距中點(即 0.5σ)左邊的次數較右邊的多，故該組距的均數應稍爲偏在組距中點的左邊. 若以組距中點代替該組距的均數，那麼所得的離均差就較其眞值(true value)爲大，因此標準差也就較大了. 爲校正這個缺點起見，Sheppard 氏建議在標準差的根號裏減去 1/12，這數值是用微積分求得的，讀者可參考氏之原著(5,6) 或 C. C. Peters(7) 等著作. 用 Sheppard 氏校正數後的標準差公式如下:

$$S=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2-(\Sigma fd)^2/N}{N-1}-\frac{1}{12}}\,(i). \qquad \text{公式(7-10)}$$

在顯著性測驗時不能適用 Sheppard 氏校正數，這是必須注意的. 茲以我國二十歲青年學生 642 人之胸圍(厘米)次數分配(10)爲例(表 7-9)，計算其校正後的標準差，並說明常態曲線的配合法. 該表第 1 行爲組距，各組距起點間所連的直線，就是以前放在右邊的橫線，組距的界說仍與前相同. 今以該表第 1, 2 兩行的資料，依第三章第 3-7 節的方法，用 79 爲假定均數，求得 $\bar{x}=79.79$，又 $\Sigma fd^2=1{,}976$, Σfd

$=254, N=642$. 代入上列公式，得

$$S=\sqrt{\frac{1,976-(254)^2/642}{642-1}-\frac{1}{12}}\ (2)$$

$$=\sqrt{2.9259-.0833}(2)=1.686\times 2=3.372.$$

【表 7–9】 常態曲線之配合法

(我國二十歲青年學生之胸圍次數分配表)

(1) 胸圍(厘米)	(2) 次數 f	(3) d	(4) d/S	(5) z	(6) $y=z\left(\frac{N}{S'}\right)$	(7) $\frac{1}{2}\alpha$	(8) δ	(9) $f_e=N\delta$
66		13.79	4.09	.0001	.04	.5000		
							.0002	0.13
68		11.79	3.50	.0009	.34	.4998		
	1						.0017	1.09
70		9.79	2.90	.0060	2.28	.4981		
	5						.0085	5.46
72		7.79	2.31	.0277	10.55	.4896		
	14						.0323	20.74
74		5.79	1.72	.0909	34.61	.4573		
	57						.0887	56.95
76		3.79	1.12	.2131	81.14	.3686		
	118						.1667	107.02
78		1.79	.53	.3467	132.02	.2019		
	164	0.00	.00	.3989	151.89		.2258	144.96
80		0.21	.06	.3982	151.63	.0239		
	122						.2215	142.20
82		2.21	.66	.3209	121.91	.2454		
	85						.1490	95.66
84		4.21	1.25	.1826	69.53	.3944		
	53						.0727	46.67
86		6.21	1.84	.0734	27.95	.4671		
	14						.0254	16.31
88		8.21	2.43	.0208	7.92	.4925		
	8						.0063	4.04
90		10.21	3.03	.0040	1.52	.4988		
	1						.0011	0.71
92		12.21	3.62	.0006	.23	.4999		
							.0001	0.06
94		14.21	4.21	.0001	.04	.5000		
	642							642.00

該表第 3 行爲各組距的起點與均數相差的絕對值，如 $79.79-66=$

13.79, $90-79.79=10.21$ 等. 這些數值與各組距起點寫在同一橫行上. 在 78—80 一組距內, 添了 .00, 這是指均數之所在處. 第 4 行係將第 3 行的數值用校正的標準差除之, 如 $13.79\div3.372=4.09$, 其意義爲第一個組距起點 66 與均數相差 4.09 個標準差, 查表 7-6, 相當於 x/σ 爲 4.09 之縱線約等於 .0001, 又相當於 3.50 之縱線爲 .0009, 這些便是第 5 行的 z 值. 讀者試將本章公式(7-3)代入(7-2), 則得

$$y=\frac{N}{\sigma}z. \qquad \text{公式(7-11)}$$

這裏的 σ 是以組距爲單位的, 我們在上面求得的校正標準差 3.372, 以組距 2 除之, 得 1.686, 茲以 S' 表示之, 以別於原來單位的標準差. 我們就用 S' 代替 σ, 於是以 $N/S'=642/1.686$ 乘第 5 行的 z 值, 卽得常態曲線上縱線的高度, 如

$$.0001(642/1.686)=.04,$$

$$.2131(642/1.686)=81.41 \text{ 等.}$$

計算時先求 $642/1.686=380.783$, 將此數乘各 z 值, 卽得第 6 行的 y 值. 其中相當於均數的 y 值, 卽 151.89, 爲常態曲線的最高縱線. 將各 y 值與其相當的組距起點作圖, 卽成常態曲線, 如圖 7-8 所示, 其直方圖爲實際次數分配, 係根據表 7-9 第 1, 2 兩行所畫者. 倘若我們只要把配合的常態曲線畫出, 那麼計算至此, 卽可停止. 不過我們常常需要各組距內的理論次數, 以便與實際次數相比較, 因此就要各組距內常態曲線的面積(要記得圖上的面積卽表示次數)求出. 計算的方法見表 7-9 末了三行. 查表 7-6, 相當於 x/σ 爲 4.09 的面積

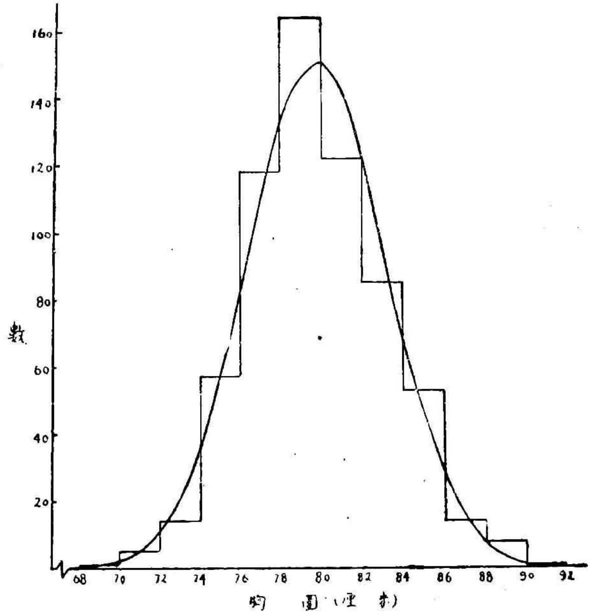


圖 7-8. 我國二十歲青年胸圍之實際分配及其常態曲線.

爲.5000，相當於3.50的面積爲.4998，將這些數值寫在第 7 行內. 然後求各組距內的相對面積，如

$$.5000-.4998=.0002,$$

$$.4925-.4671=.0254.$$

但均數所在的一組距內，則兩面積須相加（參閱本章第 7–4 節），卽 .2019＋.0239＝.2258. 這些數值寫在各組距的中間，表示該組距所包含的面積，以希臘字 δ（讀如 delta）代之，如第 8 行. 最後將總次數 642 乘各 δ 值，寫在第 9 行，卽得各組距內的理論次數. 理論次數的

總和,除小數點後或稍有出入外,應與總次數相等,否則計算過程中必有錯誤. 關於理論次數與實際次數相差的顯著性,將於次章測驗之.

7-7. 常態性之測驗(tests of normality) 常態曲線有兩種特性,一是對稱(symmetry),一是常態峯(mesokurtic).不對稱的叫做偏態(skewness),向左偏的是正偏態,向右偏的是負偏態.最初用來表示偏態的公式是:

$$\text{偏態}=\frac{\text{均數}-\text{衆數}}{\text{標準差}}. \qquad \text{公式}(7\text{-}12)$$

凡向左偏的曲線,大概均數大於衆數,故爲正偏態,向右偏的曲線,大概均數小於衆數,故爲負偏態.關於峯度(kurtosis)方面,若中部峻峭,尾部伸展者爲高狹峯(leptokurtic);兩肩寬平,尾部短促者爲低闊峯(platykurtic).現代統計學上表示偏態與峯度的,有 g_1 與 g_2 兩個統計數.若 $g_1=0$,則爲對稱,g_1 大於零爲正偏態,小於零爲負偏態.$g_2=0$ 者爲常態峯,大於零者爲高狹峯,小於零者爲低闊峯.計算 g_1 與 g_2 時須先求四個 k 值,茲將所需公式詳細列後:

$$\left.\begin{aligned} a_1&=\frac{\Sigma fd}{N}, & a_2&=\frac{\Sigma fd^2}{N} \\ a_3&=\frac{\Sigma fd^3}{N}, & a_4&=\frac{\Sigma fd^4}{N} \end{aligned}\right\}. \qquad \text{公式}(7\text{-}13)$$

$$\left.\begin{aligned} v_1&=a_1 \\ v_2&=a_2-a_1^2 \\ v_3&=a_3-3a_1a_2+2a_1^3 \\ v_4&=a_4-4a_1a_3+6a_1^2a_2-3a_1^4 \end{aligned}\right\}. \qquad \text{公式}(7\text{-}14)$$

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= v_1 \\ k_2 &= \left(\frac{N}{N-1}\right)v_2 \\ k_3 &= \left(\frac{N^2}{(N-1)(N-2)}\right)v_3 \\ k_4 &= \frac{N^2}{(N-1)(N-2)}\left[\frac{(N+1)v_4-3(N-1)v_2^2}{N-3}\right] \end{aligned}\right\}.\text{公式(7–15)}$$

其中 k_2 與 k_4 須用 Sheppard 氏校正數，k_1 與 k_3 則不必．但須注意在計算過程中，一律用組距爲單位．

$$\left.\begin{aligned} k_1' &= k_1, & k_2' &= k_2-\frac{1}{12} \\ k_3' &= k_3, & k_4' &= k_4+\frac{1}{120} \end{aligned}\right\}.\ \text{公式(7–16)}$$

最後計算 g_1, g_2 及其標準誤：

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= \frac{k_3'}{(k_2')^{\frac{3}{2}}}, & S_{g_1} &= \sqrt{\frac{6N(N-1)}{(N-2)(N+1)(N+3)}} \\ g_2 &= \frac{k_4'}{k_2'^2}, & S_{g_2} &= \sqrt{\frac{24N(N-1)^2}{(N-3)(N-2)(N+3)(N+5)}} \end{aligned}\right\}.\text{公式(7–17)}$$

茲仍以我國二十歲青年之胸圍資料爲例，計算其 g_1, g_2 及其標準誤．表 7–10 自第 1—5 行爲求均數及標準差時所常用，不必再加說明．第 6 行係將第 5 與第 3 兩行數值相乘($fd^2\times d$)卽得，乘時須注意正負號．第 7 行係將第 6 與第 3 兩行數值相乘($fd^3\times d$)卽得；乘畢求各行之總和，代入公式 (7–13) 得各 a 值，再代入公式(7–14)及(7–15)，而得四個 k 值．經 Sheppard 氏校正數後(公式 7–16)，代入

公式(7–17)而得 $g_1 = .2227$，此值爲正，且大於其標準誤 .0964 兩倍以上，故知此分配係正偏態，卽向左偏. 又 $g_2 = .0947$，但此值小於其標準誤 .1926. 故僅就峯度言，則此分配與常態曲線並無顯著的差別. 在下面一章裏，我們要繼續討論這個問題.

【表 7–10】 常態性之測驗

(1)	(2) f	(3) d	(4) fd	(5) fd^2	(6) fd^3	(7) fd^4
68—	1	−5	−5	25	−125	625
70—	5	−4	−20	80	−320	1,280
72—	14	−3	−42	126	−378	1,134
74—	57	−2	−114	228	−456	912
76—	118	−1	−118	118	−118	118
78—	164	0				
80—	122	1	122	122	122	122
82—	85	2	170	340	680	1,360
84—	53	3	159	477	1,431	4,293
86—	14	4	56	224	896	3,584
88—	8	5	40	200	1,000	5,000
90—	1	6	6	36	216	1,296
	642		254	1,976	2,948	19,724

$\alpha_1 = \dfrac{254}{642} = .3956,$ $\qquad \alpha_2 = \dfrac{1,976}{642} = 3.0779,$

$\alpha_3 = \dfrac{2,948}{642} = 4.5919,$ $\qquad \alpha_4 = \dfrac{19,724}{642} = 30.7227.$

$v_1 = .3956,$ $\qquad v_2 = 3.0779 - (.3956)^2 = 2.9214,$

$v_3 = 4.5919 - 3(.3956)(3.0779) + 2(.3956)^3 = 1.0626,$

$$v_4=30.7227-4(.3956)(4.5919)+6(.3956)^2(3.0779)-3(.3956)^4$$
$$=26.2730.$$

$$k_1=.3956, \qquad k_2=\frac{642}{642-1}(2.9214)=2.9260,$$

$$k_3=\frac{(642)^2}{(642-1)(642-2)}(1.0626)=1.0676.$$

$$k_4=\frac{(642)^2}{(642-1)(642-2)}\left[\frac{(642+1)(26.2730)-3(642-1)(2.9214)^2}{642-3}\right]$$
$$=.7571.$$

$$k_2'=2.9260-.0833=2.8427, \quad k_4'=.7571+.0083=0.7654$$

$$g_1=\frac{1.0676}{(2.8427)^{3/2}}=0.2227, \quad g_2=\frac{0.7654}{(2.8427)^2}=.0947.$$

$$Sg_1=\sqrt{\frac{6(642)(642-1)}{(642-2)(642+1)(642+3)}}=.0964,$$

$$Sg_2=\sqrt{\frac{24(642)(642-1)^2}{(642-3)(642-2)(642+3)(642+5)}}=.1926$$

【練 習 題】

1．設有某病患者7人，經治療後有6人痊愈，1人死亡，問此樣本是否從‘生死比例爲1：1，均數爲3.5’之全體中隨機抽出?

2．假定梅毒患者占某地人口之1/5,今患癌病之20人中有6人兼患梅毒，問此樣本能否證明在癌病患者中患梅毒者較一般爲多?試以標準差法測驗之.

3．用表7-4，求上題20人中有6人或6人以上患梅毒者之機率．爲計算便利計，可求自0至5人患梅毒者機率之總和，於是在1

內減去此總和，卽爲所求之機率.

4. 假定某病不加治療，可有半數病人痊愈.今予以某種治療後，則 16 個病人中有 12 人痊愈，而 4 人死亡. 問此項療法有顯著的實效否?（由二項展開式求 12 人或以上痊愈者之機率.）

5. 上題中，若假定不加治療，則痊愈與死亡之比例爲 3 : 1，又 16 個病人中，經某種治療後，有 14 人痊愈而 2 人死亡. 試測驗此療法之顯著性.

6. 下表爲湖南(8)與四川(9)女子月經初臨之年齡分配，問四川女子之成熟，是否較湖南女子爲早? 試以第 7-4 節之標準誤法測驗之.

月經初臨之年齡	9—10	10—11	11—12	12—13	13—14	14—15	15—16	16—17	17—18	18—19	總人數
湖南		1	20	192	544	720	401	68	44	10	2,000
四川	15	49	188	551	639	943	126	50	4	5	2,570

7. 求下列距離內常態曲線之面積:

(1) 自 $+.05\,\sigma$ 至 $-1.05\,\sigma$，　(2) 自 $-1.85\,\sigma$ 至 $-.70\,\sigma$，

(3) 自 $+1.99\,\sigma$ 至 $+3.25\,\sigma$，　(4) 自 $-3.70\,\sigma$ 至 $+1.16\,\sigma$.

8. 試查相當於下列常態曲線面積之橫軸距離及縱線高度（表 7-7）:

(1) .050　　(2) .175　　(3) .273　　(4) .389

9. 下列爲我國大中學生 1,619 人所填心理健康問答表中病態答案之次數表(11)，試配合一常態曲線.（配合時次數表向左延長 5 個組距，向右延長 3 個組距，俾實際上能包括所有面積在內.）

病態答案數	0 —	10 —	20 —	30 —	40 —	50 —	60 —	70 —	80 —
人數	2	23	85	101	172	147	198	185	187
病態答案數	90 —	100 —	110 —	120 —	130 —	140 —	150 —	160 —	170 —
人數	148	121	90	70	43	27	14	3	3

10. 測驗第9題之常態性.

【參考文獻】

(1) Wu, C. J. and Ch'iu, T. Y., Pneumococcal loba pneumonia, Chinese Medical Journal, 47 : 545–559 (1933).

(2) Karl Pearson, Tables for Statisticians and Biometricians, Part I, University Press, Cambridge (1930).

(3) Mills, F. C., Statistical Methods, revised edition, pp. 660–663, Henry Holt & Co. (1938), 或其他統計書籍.

(4) Warwick, B. L., Probability tables for Mendelian ratios with small numbers, Texas Agric. Experiment Station Bulletin, No. 463 (1932).

(5) Sheppard, W. F., On the calculation of the most probable values of frequency constants for data arranged according to equi-distant divisions of a scale, Proceedings of the London Mathematical Society, 29 : 353–380 (1898).

(6) Sheppard, W. F., The calculation of the moments of a frequency distribution, Biometrika, 5 : 452–453.

(7) Peters, C. C., and Van Voorhis, W. R., Statistical Proce-

dures and their Mathematical Bases, The Pennsylvania State College (1935).

(8) Chang, S. W., A report on the catamenia of two thousand Chinese school girls, Chinese Medical Journal, 50 : 973 (1936).

(9) Puh, Y. Chiung, The menstruation cycle of Chinese in Szechwan, Proc. Chinese Physiol. Soc. Chengtu Branch, 2, 2 (1943).

(10) 吳襄: 中華民族之生理水準,第一圖.

(11) 雷肇唐、郭祖超、陳馭歐: 戰時中國大中學生之心理健康狀況,國立中央大學研究院醫科研究所公共衛生學部研究報告,三十四年十二月.

第八章　計數資料

本書第二章至第六章所講的許多量數，如身高、體重、脈搏、血壓、體温、熱量、呼吸次數、紅血球數以及時間距離等等，都是測量所得的紀錄，總稱爲測量資料(measurement data). 但是醫學上有許多資料，如 Shick 氏試驗、Dick 氏試驗、Wassermann 氏反應、結核菌素(tuberculin)試驗等，只記陽性和陰性反應的人數若干；砂眼、色盲、齲齒、腸寄生蟲等的檢查，只記患者和健者各占若干；血屬(blood group)分類，只記各類所有的人數；其他如治療疾病的結果，出生死亡的統計等，也都是人數或次數的記載，這些總稱爲計數資料 (enumeration data).

8-1. 計數資料之處理法　據劉寶珠氏調查四川省璧山縣嬰兒死亡率的報告(4)，在901個嬰兒中，曾受產前護理者399*名，未受產前護理者502名.在產後一週歲內，前者死亡 42 名，後者死亡112名.此項紀錄可以四格表(fourfold table)表示之.

【表 8-1】　曾受與未受產前護理之嬰兒在產後一週歲內之生存與死亡情形

	生　存	死　亡	總　計
曾受產前護理者	357(a)	42(b)	399
未受產前護理者	390(c)	112(d)	502
總　計	747	154	901

* 原文爲 339，實爲 399 之誤，由原表所載死亡率及活產總數可以推知.

曾受產前護理之嬰兒死亡者占 42/399＝10.53%，未受產前護理者之死亡占 112/502＝22.31%. 從百分數看，雖然可以知道前者死亡率較低，但因生物現象的變異很大（參閱第一章及第四章），不能祇憑數字的表面值來下結論. 我們必須知道兩組死亡率有眞正的相差還是機遇使然. 這裏就要設法把兩組的變異情形，用數字表示出來. 在測量資料中，我們用各量數與均數的距離表示變異的大小；在計數資料中，也需要一個相當於均數的數值，作爲比較的根據，這便是兩組合併的死亡率. 上表 901 嬰兒中共死亡 154 名，占 17.0921%. 按此百分數計算，則在曾受護理的 399 名中應有 68.2 名死亡，未受護理的 502 名中應有 85.8 名死亡. 這是根據平均死亡百分數求得的理論次數，將各組總數內減去死亡數，卽得生存的理論次數. 於是實際次數與理論次數各有四個，如表 8–2 所示：

【表 8–2】 χ^2 之計算法

		實際次數(A)	理論次數(T)	相差($A-T$)	$\frac{(A-T)^2}{T}$
曾受產前護理者	生存	357	330.8	26.2	2.075
曾受產前護理者	死亡	42	68.2	–26.2	10.065
未受產前護理者	生存	390	416.2	–26.2	1.649
未受產前護理者	死亡	112	85.8	26.2	8.001
					$\chi^2=21.790$

若將理論次數列入表 8–1 的各個相當的方格內，那麼各橫行各直行的總和應等於實際的總和，其最後總次數自然也相等，因此四個理論次數只須求得一個，其餘就可以用減法算出來，但爲核對起見，不要只圖省事. 將實際次數與理論次數相比較，若相距遠表示變異大，

相距近則變異小.請看表 8–2'相差($A-T$)'行,在四格表中,四個差數的絕對值是相等,而符號卻不盡同,這些差數的總和是零.為了免除符號上的不同,我們也仿照求標準差時的方法,把差數平方,這樣就都變成正號了.但同樣的相差(或其平方)在理論次數小的地方就顯得重要,好像一個老鼠若比正常體重減輕了 50 克就非常嚴重,而在人類 50 克是不足介意的.所以這裏要把理論次數除差數的平方,如 $(26.2)^2/330.8=2.075$ 等.四個商數的總和為 21.79,以希臘字 χ^2(讀如 chi-square)表之,其公式為

$$\chi^2=\Sigma\frac{(A-T)^2}{T}.\qquad\text{公式(8–1)}$$

在上列計算中有一個無效假設(見第四章),即假定曾受與未受產前護理的兩組嬰兒都從平均死亡占 17.0921% 的全體中隨機取來.倘若從這全體中抽取許多含有 399 和 502 人的樣本,各求其 χ^2 值,因為抽樣變異的緣故,我們可以預料有的樣本離全體均數近,其 χ^2 值小;有的離全體均數遠,其 χ^2 值大.究竟 χ^2 值大到什麼程度纔能表示顯著的差別,我們可以查 χ^2 表(表 8–3)來決定.該表左側直行標有 df 符號的數目為自由度,上端橫行標有 P 字的數目為機率,表的本身是 χ^2 值.例如當自由度為 1 時,相當於機率 .05 的 χ^2 值為 3.841,即指在 100 次的隨機抽樣中得到 χ^2 值等於或大於 3.841 的有 5 次,故 3.841 為自由度等於 1 時 χ^2 的 5%點,同理 6.635 為其 1%點.決定顯著的水準還是和以前一樣,若 χ^2 值小於 5%點則為不顯著,大於 5%點而小於 1%點者為顯著,大於 1%點者為非常顯著.

表 8–1 四個方格裏的數目,若沒有任何條件的限制,那麼共有

【表 8-3】 χ^2 表

df	$P=.99$	.98	.95	.90	.80	.70
1	.000157	.000628	.00393	.0158	.0642	.148
2	.0201	.0404	.103	.211	.446	.713
3	.115	.185	.352	.584	1.005	1.424
4	.297	.429	.711	1.064	1.649	2.195
5	.554	.752	1.145	1.610	2.343	3.000
6	.872	1.134	1.635	2.204	3.070	3.828
7	1.239	1.564	2.167	2.833	3.822	4.671
8	1.646	2.032	2.733	3.490	4.594	5.527
9	2·088	2.532	3.325	4.168	5.380	6.393
10	2.558	3.059	3.940	4.865	6.179	7.267
11	3.053	3.609	4.575	5.578	6.989	8.148
12	3.571	4.178	5.226	6.304	7.807	9.034
13	4.107	4.765	5.892	7.042	8.634	9.926
14	4.660	5.368	6.571	7.790	9.467	10.821
15	5.229	5.985	7.261	8.547	10.307	11.721
16	5.812	6.614	7.962	9.312	11.152	12.624
17	6.408	7.255	8.672	10.085	12.002	13.531
18	7.015	7.906	9.390	10.865	12.857	14.440
19	7.633	8.567	10.117	11.651	13.716	15.352
20	8.260	9.237	10.851	12.443	14.578	16.266
21	8.897	9.915	11.591	13.240	15.445	17.182
22	9.542	10.600	12.338	14.041	16.314	18.101
23	10.196	11.293	13.091	14.848	17.187	19.021
24	10.856	11.992	13.848	15.659	18.062	19.943
25	11.524	12.697	14.611	16.473	18.940	20.867
26	12.198	13.409	15.379	17.292	19.820	21.792
27	12.879	14.125	16.151	18.114	20.703	22.719
28	13.565	14.847	16.928	18.939	21.588	23.647
29	14.256	15.574	17.708	19.768	22.475	24.577
30	14.953	16.306	18.493	20.599	23.364	25.508

若自由度大於 30 時，則可查常態曲線表上相當於 x/σ 爲 $\sqrt{2\chi^2}-\sqrt{2(df)-1}$ 之機率.

df	$P=.50$	.30	.20	.10	.05	.02	.01
1	.455	1.074	1.642	2.706	3.841	5.412	6.635
2	1.386	2.408	3.219	4.605	5.991	7.824	9.210
3	2.366	3.665	4.642	6.251	7.815	9.837	11.341
4	3.357	4.878	5.989	7.779	9.488	11.668	13.277
5	4.351	6.064	7.289	9.236	11.070	13.388	15.086
6	5.348	7.231	8.558	10.645	12.592	15.033	16.812
7	6.346	8.383	9.803	12.017	14.067	16.622	18.475
8	7.344	9.524	11.030	13.362	15.507	18.168	20.090
9	8.343	10.656	12.242	14.684	16.919	19.679	21.666
10	9.342	11.781	13.442	15.987	18.307	21.161	23.209
11	10.341	12.899	14.631	17.275	19.675	22.618	24.725
12	11.340	14.011	15.812	18.549	21.026	24.054	26.217
13	12.340	15.119	16.985	19.812	22.362	25.472	27.688
14	13.339	16.222	18.151	21.064	23.685	26.873	29.141
15	14.339	17.322	19.311	22.307	24.996	28.259	30.578
16	15.338	18.418	20.465	23 542	26.296	29.633	32.000
17	16.338	19.511	21.615	24.769	27.587	30.995	33.409
18	17.338	20.601	22.760	25.989	28.869	32.346	34.805
19	18.338	21.689	23.900	27.204	30.144	33.687	36.191
20	19.337	22.775	25.038	28.412	31.410	35.020	37.566
21	20.337	23.858	26.171	29.615	32.671	36.343	38.932
22	21.337	24.939	27.301	30.813	33.924	37.659	40.289
23	22.337	26.018	28.429	32.007	35.172	38.968	41.638
24	23.337	27.096	29.553	33.196	36.415	40.270	42.980
25	24.337	28.172	30.675	34.382	37.652	41.566	44.314
26	25.336	29.246	31.795	35.563	38.885	42.856	45.642
27	26.336	30.319	32.912	36.741	40.113	44.140	46.963
28	27.336	31.391	34.027	37.916	41.337	45.419	48.278
29	28.336	32.461	35.139	39.087	42.557	46.693	49.588
30	29.336	33.530	36.250	40.256	43.773	47.962	50.892

若自由度大於30時，則可查常態曲線表上相當於 x/σ 為

$$\sqrt{2\chi^2}-\sqrt{2(df)-1}$$ 之機率.

4 個自由度. 但在求 χ^2 的過程中, 平均死亡的百分數是根據 154 和 901 兩個總數算出來, 曾受產前護理者應死亡 68.2 名是根據該組總數 399 算出來的, 這裏一共用去三個統計數, 故其自由度爲 $4-3=1$ (參閱第四章第 4-7 節), 至於還有兩個總數 502 與 747 祇是 901 與另一數(399 或 154)的相差, 故不另占去自由度. 關於自由度還可作另一種解釋, 卽當四格表橫直行的總數固定以後, 在四個方格內只有一數可自由塡寫, 例如表 8-1 右側與下端的五個總數固定不變, 若在左上角方格內任塡一數, 假定爲 400, 則左下角必須爲 347, 右上角爲 -1, 右下角爲 155, 而後始能與各横直行的總數相符.

自由度決定後, 就可作顯著性的測驗了. 上面已經說過自由度等於 1 時, χ^2 的 5% 點爲 3.841, 又 1% 點爲 6.635, 我們從表 8-2 求得的 $\chi^2=21.79$, 此值在 1% 點以上, 故爲非常顯著. 因知曾受與未受產前護理的兩組嬰兒並非從同一個全體中隨機抽出, 換句話說, 這兩組的死亡率確是有差別的.

這裏要特別注意的, 便是計算 χ^2 時必須用眞實的次數, 而不要用百分數, 比例或其他類似的數值, 因爲 χ^2 值的大小與總次數是成正比例的.

8-2. 四格表中計算 χ^2 之簡法 在各種不同的情形下, χ^2 的公式可以變成許多式樣, 不過它們都是從基本公式(8-1)化出來的. 在四格表中, 若以 a, b, c, d 代四個方格裏的實際次數, 如表 8-1 所示, 則 χ^2 可用下列公式計算:

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \qquad \chi^2=\frac{(ad-bc)^2(a+b+c+d)}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}. \qquad \text{公式(8-2)}$$

此式分子部分是兩對角線乘積相差的平方以總次數乘之，分母部分是橫直行四個總和的乘積．茲以表 8–1 的數值代入，則得

$$\chi^2=\frac{(357\times112-42\times390)^2(901)}{399\times502\times747\times154}=21.79.$$

此公式可省卻先求理論次數的麻煩，又在計算過程中都是整數，故可免除因小數四捨五入而犧牲的正確性．在四格表中，用公式(8–2)求 χ^2，當較表 8–2 的方法爲優．

在血屬分類(blood grouping)研究中，最近也用 χ^2 來表示血屬的分配是否與理論相符．據 Terada 氏研究住居臺灣之華人1,120名，其 M 與 N 之分配如下(5)：

血　屬	M	MN	N
人　數	377	570	173

Landsteiner 與 Levine 兩氏認爲 M 與 N 兩因子，並無顯性與隱性之分，故在 MN 屬中兩因子同時出現．一個 M 屬的人從父母那邊各得一 M，而 N 屬的各得一 N，故前者爲同性胚子(homozygote) MM，而後者爲 NN．至於 MN 屬者，則自一位親本處得 M，而自另一位親

【表 8–4】　血屬之 χ^2 計算法

		父 M	父 N	
母	M	377	285	662
	N	285	173	458
		662	458	1,120

本處得 N，故爲異性胚子(heterozygote). 二氏認爲 MN 屬的期望人數不應超過隨機人口的 50%. 要測驗此理論是否與實際相符，卽須用 χ^2. 上例 MN 屬者有 570 人，其中有一部分是從父親那邊得 M，而自母親那邊得 N，另一部分則相反. 茲假定兩部分的人數各占一半，卽各爲 285 人，則上列分配可列成一四格表(表 8-4). 在此表中，橫直行的總和都是 662 與 458，便是 $a+b=a+c$，又 $c+d=b+d$. 設以 a' 代 M 屬的人數，b' 代 MN 屬的人數，c' 代 N 屬的人數. 則 $a=a'$，$b=c=\dfrac{1}{2}b'$，$d=c'$，代入公式(8-2)，得

$$\chi^2=\frac{(a'c'-\frac{1}{4}b'^2)^2(a'+b'+c')}{(a'+\frac{1}{2}b')^2(\frac{1}{2}b'+c')^2}=\frac{(4a'c'-b'^2)^2(a'+b'+c')}{(2a'+b')^2(b'+2c')^2},$$

$$\therefore\quad \chi^2=\frac{(b'^2-4a'c')^2(a'+b'+c')}{(2a'+b')^2(b'+2c')^2}. \qquad \text{公式(8-3)}$$

將上述臺灣居民之資料代入，得

$$\chi^2=\frac{(570^2-4\times377\times173)^2(1,120)}{(2\times377+570)^2(570+2\times173)^2}=3.1205.$$

此值小於 5% 點，故知此資料與理論分配相符.

8-3. χ^2 之總和 設有甲乙兩地新生嬰兒在產後二星期內之死亡情形如下表:

【表 8-5】 甲乙兩地新生嬰兒在產後二星期內之生死情形

	甲地		
	生存	死亡	總計
曾受產前護理者	1,187	44	1,231
未受產前護理者	97	7	104
總計	1,284	51	1,335

乙地

	生存	死亡	總計
曾受產前護理者	1,499	56	1,555
未受產前護理者	340	21	361
總計	1,839	77	1,916

曾受產前護理之嬰兒,甲地死亡者占 3.57%,乙地死亡者占 3.60%;未受產前護理者,甲地死亡占 6.73%, 乙地死亡占 5.82%. 兩地均以曾受產前護理者死亡率較低,但經 χ^2 測驗後,都是不顯著.

$$\text{甲地}\quad \chi^2=\frac{(1,187\times 7-44\times 97)^2(1,335)}{(1,231)(104)(1,284)(51)}=2.6004,$$

$$\text{乙地}\quad \chi^2=\frac{(1,499\times 21-56\times 340)^2(1,916)}{(1,555)(361)(1,839)(77)}=3.7295.$$

這兩個數值都比 5 % 點(3.841)為小. 但我們不要就認為曾受與未受產前護理的兩組死亡率沒有差別,因為各地分別看,也許差別小,不容易顯出來. 若兩地合併,或許這趨勢要明顯些. 可是兩地醫學衞生狀況,人民健康情形等等未必盡同,所以最好不要把兩個樣本的本身合併,而將 χ^2 及其自由度分別加起來,於是

$$\chi^2=2.6004+3.7295=6.3299,\quad \text{自由度}=1+1=2.$$

查表 8-3,當自由度 = 2 時, 5% 點為 5.991,合併的 χ^2 值大於此數,故結果為顯著. 在臨床實驗中,若將某病患者按病情或其他因子分為若干組,每組病人有一部分受到 A 法治療,另一部分受到 B 法治療,倘實驗結果,各組都表示 A 法的死亡率較低,但分別用 χ^2 測驗則不顯著,這時也可以把各組 χ^2 值及其自由度分別相加,以比較兩

種療法的實效.(注意不要把各樣本的本身相加而後求一總的 χ^2 值，因爲這樣就把設計時故意分開的因子，如病情等，混在一起了.)

上述 χ^2 相加的方法，必須各組趨勢相同纔有意義. 若各組趨勢不同，就得另想辦法. 在介紹另一種方法以前，讓我們把 χ^2 與 t 值間的關係談一談. 當自由度等於 1 時，它們的關係是 $\sqrt{\chi^2}=t$. 查表 8-3，χ^2 的 5% 點爲 3.841，又 1% 點爲 6.635，開方得 1.96 與 2.5758，此二值卽爲常態曲線上之 5% 點與 1% 點(參閱第七章第 7-4 節). 因此若各組的趨勢不同，可將各 χ^2 值開方，遇趨勢相反者與以負號，最後求 χ 的代數和，而以標準差法測驗之(6, pp. 300-301). 詳細步驟，見後列例題. 據各專家研究 MN 血屬分配的結果(5)，中、美、英、蘇、德、日六國的一部分紀錄如表 8-6. 各國民族不同，自未便併成一個樣本，

【表 8-6】 各國 MN 血屬之分配

國 別	M	MN	N	總 人 數
中	377	570	173	1,120
美	139	285	108	532
英	121	200	101	422
蘇	195	215	79	489
德	968	1,581	569	3,118
日	295	509	196	1,000

無待贅述. 若將此資料改成表 8-4 的形式，並將理論次數塡入各方格的括弧內，則如表 8-7 所示(理論次數的求法詳見本章第 8-1節). 觀此表，中、美、德、日四國 M 的實際次數較理論次數爲小，N 亦然，而 MN 則實際次數較理論次數爲大；但英、蘇兩國則情形剛相反. 故

【表 8-7】 血屬之實際分配與理論分配

	中 M	中 N	美 M	美 N	英 M	英 N
M	377 (391.29)	285 (270.71)	139 (148.95)	142.5 (132.55)	121 (115.74)	100 (105.26)
N	285 (270.71)	173 (187.29)	142.5 (132.55)	108 (117.95)	100 (105.26)	101 (95.74)
	蘇 M	**蘇 N**	**德 M**	**德 N**	**日 M**	**日 N**
M	195 (187.13)	107.5 (115.37)	968 (991.76)	790.5 (766.74)	295 (301.95)	254.5 (247.55)
N	107.5 (115.37)	79 (71.13)	790.5 (766.74)	569 (592.76)	254.5 (247.55)	196 (202.95)

前四國的 $\sqrt{\chi^2}$ 或 χ 若取正值，則後二國應取負值. 其實在血屬分配中，我們不必先求理論次數就可決定 χ 的符號. 因為將公式(8–3)開方，則得

$$\chi=\frac{(b'^2-4a'c')\sqrt{a'+b'+c'}}{(2a'+b')(b'+2c')}. \qquad \text{公式(8–4)}$$

此式中的 $(b'^2-4a'c')$ 若為正值，則 χ 亦為正，若為負值，則 χ 亦為負(註). 這樣決定 χ 的正負號，與前面比較實際與理論次數的大小是一樣的，但方法卻簡便多了. 由公式(8–4)求得各國的 χ 值，平方得 χ^2，如下表:

(註) 相當於 a' 之理論次數為 $\frac{(a'+b'/2)^2}{(a'+b'+c')}$，若此值大於 a'，則

$$(a'+b'/2)^2>a'(a'+b'+c'),\quad (a'^2+a'b'+b'^2/4)>(a'^2+a'b'+a'c'),$$

簡之得 $(b'^2-4a'c')>0$. 餘類推.

	中	美	英	蘇	德	日
χ 值	+1.767	+1.732	−1.027	−1.509	+1.731	+.888
χ^2 值	3.121	2.999	1.055	2.276	2.995	0.788

所有 χ^2 值都小於 5%點 3.841，惟各國趨勢不同，故不能將 χ^2 相加，但可求 χ 的代數和，即

$$1.767+1.732-1.027-1.509+1.731+.888=3.582.$$

每個 χ 值的標準差為 1，這裏六個 χ 值彼此獨立，故其總和的標準為 $\sqrt{6}=2.449$. 總和 3.582 不及其標準差的兩倍，故六國的 χ 值，經聯合後，血屬 MN 的實際分配與理論分配間，仍無顯著的差別.

8–4. $R\times C$ 表中 χ^2 之計算法 在 R 列與 C 行的計數資料中，χ^2 的計算，其原理與前相同，而方法稍為複雜. 例如有傷寒(typhoid)及副傷寒 (paratyphoid) 患者 168 人，按其年齡及輕重程度，列於表 8–8(7). 該表 168 人中，輕微者有 18人，故十歲以下之 7 人中，應占

【表 8–8】 各年齡組傷寒與副傷寒之嚴重程度

年齡組	輕微	中等	嚴重	總計
10 歲以下	0	5	2	7
11—15	1	5	7	13
16—20	6	23	20	49
21—25	3	19	13	35
26—35	7	23	9	39
36—45	1	12	6	19
46 以上	0	4	2	6
總計	18	91	59	168

$7\times 18/168=0.75$ 人，同理‘中等’者占 $7\times 91/168=3.79$，又‘嚴重’者占 $7\times 59/168=2.46$ 人. 這樣求得的理論次數有十一個在 5 以下. 據統計學上研究的結果，若理論次數 T 小於 5，則 χ^2 測驗就不可靠，因爲 T 值小，則 $(A-T)^2/T$ 就大，於是本來不顯著的 χ^2 值卻誤爲顯著了. 爲避免此種缺點計，可將鄰近的行或列歸併，但歸併時須注意勿掩蔽了若干重要的差別，同時也不可只顧顯出差別而亂併. 此例係研究各年齡組傷寒或副傷寒之嚴重程度有無差別，故可歸併如下表. 括弧內的數值爲理論次數，計算法同前，如 $(109)(20)/168=12.98$，$(109)(49)/168=31.79$，……. 這裏要注意各行或各列理論次數之和應與實際次數之和相等，否則計算必有錯誤. 由公式(8–1)求得 χ^2 爲

$$\chi^2=\frac{(11-12.98)^2}{12.98}+\frac{(9-7.02)^2}{7.02}+\frac{(29-31.79)^2}{31.79}$$

$$+\cdots\cdots+\frac{(8-8.78)^2}{8.78}=4.2132.$$

【表 3–9】 傷寒與副傷寒患者各年齡組之實際次數與理論次數

	不嚴重	嚴 重	總 計
15 歲以下	11(12.98)	9 (7.02)	20
16—20	29(31.79)	20(17.21)	49
21—25	22(22.71)	13(12.29)	35
26—35	30(25.30)	9(13.70)	39
36 以上	17(16.22)	8(8.78)	25
總 計	109	59	168

表 8–9 共有 10 個方格，在計算理論次數時用去 1 個總次數，年齡組方面用去 4 個總計值（餘一個總計值，乃總次數與四個總計值之差，故不另占一自由度），嚴重程度方面用去 1 個總計值，一共用去了 6 個總計值，故自由度爲 $10-6=4$. 又當行與列的總計值都確定後，在 10 方格的數目中，只有 4 個是可任意填入的. 這是自由度的另一種解釋. 不過在 $R\times C$ 表中，自由度的計算有一個很簡單的公式，即

$$R\times C \text{ 表中之自由度}=(R-1)(C-1). \qquad \text{公式}(8\text{-}5)$$

本例 $R=5, C=2$（注意 '總計' 之行列不計在內），故自由度爲 $(5-1)\times(2-1)=4$，與前法結果相同. 查表 8–3，當自由度等於 4 時，5% 點爲 9.488，這裏求得的 χ^2 值 4.2132，其機率在 30% 與 50% 之間，故知傷寒與副傷寒之嚴重程度在各年齡組並無顯著的差別. 原著者謂 '嚴重者之百分數以 11—15 歲組爲最高'(7)，從統計方面看，此結論似不無語病.

8–5. 獨立性與聯繫性之測驗 (Tests of independence and association) 下表爲腸結核 (intestinal tuberculosis) 之臨床診斷與 X 光診斷之比較(3). 我們也可以用 χ^2 來測驗兩種診斷有無關係. 表中

【表 8–10】 腸結核之臨床診斷與 X 光診斷之比較

		臨床診斷			
		檢出者	疑惑者	未檢出者	總計
X 光診斷	檢出者	22(15.04)	12(10.81)	13(21.15)	47
	疑惑者	4(7.36)	6(5.29)	13(10.35)	23
	未檢出者	6(9.60)	5(6.90)	19(13.50)	30
總計		32	23	45	100

括弧內的數目仍爲理論次數. χ^2 的算法仍與前相同:

$$\chi^2=\frac{(22-15.04)^2}{15.04}+\frac{(12-10.81)^2}{10.81}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{(5-6.90)^2}{6.90}+\frac{(19-13.50)^2}{13.50}=12.9140.$$

上表有三列與三行,故自由度爲$(3-1)(3-1)=4$. 查表 8-3,自由度等於 4 時, 5%點爲 9.488, 1%點爲 13.277. 求得之 χ^2 值在此兩點之間, 且與 1%點甚爲接近,故知臨床診斷與 X 光診斷雖非完全符合,但有顯著之關係存在其間. Pearson 氏曾建議用列聯係數(coefficient of contingency)表示計數資料中的關係,其公式爲

$$C=\sqrt{\frac{\chi^2}{N+\chi^2}}. \qquad \text{公式(8-6)}$$

此式中之 N 爲總次數, 並非方格數. 以此例之 N 及 χ^2 值代入,得

$$C=\sqrt{\frac{12.914}{100+12.914}}=0.3382.$$

此數與相關係數 r 相當, 但二者有其區別: r 用於測量資料,故其類別(category)爲數量的(numerical), 且類別之大小相同; C 則用於計數資料,故其類別爲描寫的(descriptive),或雖爲數量而大小不等的. 又 C 既爲 χ^2 之函數,故其顯著性與 χ^2 相同; r 之顯著性須用 t 值測驗,或查第六章表 6-3.

8-6. 連續性之校正(correction for continuity) χ^2 測驗是以連續的光滑曲線做根據的,在大樣本中所得的機率與其眞正機率很接近, 但在小樣本中,尤其在自由度等於 1 時, χ^2 測驗就不正確了.

圖 8–1 的直方圖是展開二項式 $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^8$ 所得的分配. 若某病痊愈與死亡的理論比例爲1 : 1, 則在 8 個病人中痊愈人數自 0 至 8 的理論次數可以上述二項分配表示之. 如果要知道痊愈人數等於或大於 6 的機率有多少, 那麼只要求出直方圖右側有細點的部分與全面積的比例就行了. 至於 χ^2 測驗是根據光滑曲線的, 在此曲線下, 痊愈人數等於或大於 6 的機率是該圖有斜線的部分與其全面積的比例. 但畫有斜線的面積, 顯然較有細點的部分爲小, 二者的相差約爲橫軸上標有 '6 : 2' 處直行內面積的一半. 故在小樣本中由 χ^2 測驗所得的機率往往太低. 爲補救此種缺點計, F. Yates 建議一連續性的校正數. 卽在求 χ^2 時, 將實際次數與理論次數相差的絕對值減少 $\frac{1}{2}$, 於是圖 8–1 的斜線面積就向左伸展至 5 : 3 及 6 : 2 兩行的分界線處了. 這樣由 χ^2 所得的機率與眞正機率相差無幾了.

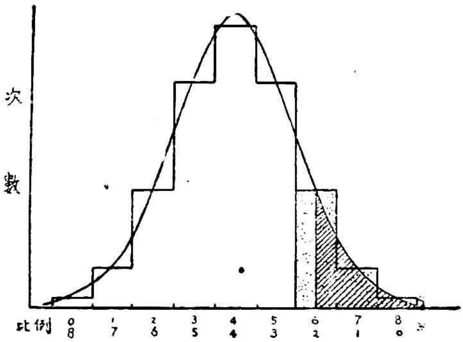


圖 8-1. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2$ 之次數分配及相當之光滑曲線

陰影部分表示在小樣本中 χ^2 有校正之必要.

E. Landauer 氏在南京研究溫度對於氰化鈉(sodium cyanide)殺蠋功能之影響(9). 氏取已消毒之牛糞末置於培養皿中, 潤以0.5% 之氰化鈉溶液, 每皿置蒼蠅幼蟲 25 枚, 在不同溫度下經過 90 分鐘, 乃計其死亡數, 其一部分結果如下表.

【表 8-11】 蒼蠅幼蟲在 0.5% NaCN 溶液中經 90 分鐘後之死亡情形

		生存	死亡	總計
溫度	20° C.	11(7)	14(18)	25
	31° C.	3(7)	22(18)	25
		14	36	50

括弧內的數字仍爲理論次數,其算法同前.用 Yates 校正數後,其 χ^2 爲

$$\chi^2=\frac{(11-7-0.5)^2}{7}+\frac{(14-18+0.5)^2}{18}$$

$$+\frac{(3-7+0.5)^2}{7}+\frac{(22-18-0.5)^2}{18}=4.8611.$$

要確定相當於此 χ^2 值的機率,另有 Yule 氏表(10)可查(表 8-12).該表分爲 A,B 兩部. A 部的 χ^2 值自 0 至 1, B 部則自 1 至 10.表中 P 行的數值爲機率,Δ 爲兩毗鄰機率之相差,係內插時所用者.此例 χ^2 值爲 4.8611,查表 8-12 B,得

χ^2	P	Δ
4.8	.02846	160
4.9	.02686	

由內插法 .02846 − .00160 × .611 = .02748.注意 χ^2 愈大,則 P 值愈小,故內插時應將尾數自較大值內減去.此處所得 P 值既在 .05 與 .02 之間,故在不同溫度下蒼蠅幼蟲在氰化鈉溶液中之死亡數有顯著的差別.

若以公式(8–2)計算四格表之 χ^2,而欲施以 Yates 校正數,只須在 ad 與 bc 兩乘積中,擇其大者將實際次數各減去 0.5,其小者則各

【表 8-12】 在四格表內離開獨立性之 P 值表

A. $\chi^2=0$ 至 $\chi^2=1$,間距爲 0.01

χ^2	P	Δ	χ^2	P	Δ
0.00	1.00000	7966	0.31	0.57768	607
0.01	0.92034	3280	0.32	0.57161	595
0.02	0.88754	2505	0.33	0.56566	583
0.03	0.86249	2101	0.34	0.55983	572
0.04	0.84148	1842	0.35	0.55411	560
0.05	0.82306	1656	0.36	0.54851	551
0.06	0.80650	1516	0.37	0.54300	540
0.07	0.79134	1404	0.38	0.53760	530
0.08	0.77730	1312	0.39	0.53230	521
0.09	0.76418	1235	0.40	0.52709	512
0.10	0.75183	1169	0.41	0.52197	503
0.11	0.74014	1111	0.42	0.51694	495
0.12	0.72903	1060	0.43	0.51199	487
0.13	0.71843	1015	0.44	0.50712	479
0.14	0.70828	974	0.45	0.50233	471
0.15	0.69854	938	0.46	0.49762	463
0.16	0.68916	905	0.47	0.49299	457
0.17	0.68011	874	0.48	0.48842	449
0.18	0.67137	845	0.49	0.48393	443
0.19	0.66292	820	0.50	0.47950	436
0.20	0.65472	795	0.51	0.47514	430
0.21	0.64677	773	0.52	0.47084	423
0.22	0.63904	752	0.53	0.46661	418
0.23	0.63152	731	0.54	0.46243	411
0.24	0.62421	713	0.55	0.45832	406
0.25	0.61708	696	0.56	0.45426	400
0.26	0.61012	679	0.57	0.45026	395
0.27	0.60333	663	0.58	0.44631	389
0.28	0.59670	648	0.59	0.44242	384
0.29	0.59022	634	0.60	0.43858	379
0.30	0.58388	620			

χ^2	P	Δ	χ^2	P	Δ
0.61	0.43479	374	0.81	0.36812	294
0.62	0.43105	369	0.82	0.36518	291
0.63	0.42736	365	0.83	0.36227	287
0.64	0.42371	360	0.84	0.35940	285
0.65	0.42011	355	0.85	0.35655	281
0.66	0.41656	351	0.86	0.35374	278
0.67	0.41305	346	0.87	0.35096	276
0.68	0.40959	343	0.88	0.34820	272
0.69	0.40616	338	0.89	0.34548	270
0.70	0.40278	334	0.90	0.34278	267
0.71	0.39944	330	0.91	0.34011	264
0.72	0.39614	326	0.92	0.33747	261
0.73	0.39288	322	0.93	0.33486	258
0.74	0.38966	318	0.94	0.33228	256
0.75	0.38648	315	0.95	0.32972	253
0.76	0.38333	311	0.96	0.32719	251
0.77	0.38022	308	0.97	0.32468	248
0.78	0.37714	304	0.98	0.32220	246
0.79	0.37410	301	0.99	0.31974	243
0.80	0.37109	297	1.00	0.31731	241

B. $\chi^2=1$ 至 $\chi^2=10$,間距爲 0.1

χ^2	P	Δ	χ^2	P	Δ
1.0	0.31731	2304	2.1	0.14730	929
1.1	0.29427	2095	2.2	0.13801	864
1.2	0.27332	1911	2.3	0.12937	803
1.3	0.25421	1749	2.4	0.12134	749
1.4	0.23672	1605	2.5	0.11385	699
1.5	0.22067	1477	2.6	0.10686	651
1.6	0.20590	1361	2.7	0.10035	609
1.7	0.19229	1258	2.8	0.09426	568
1.8	0.17971	1163	2.9	0.08858	532
1.9	0.16808	1078	3.0	0.08326	497
2.0	0.15730	1000			

χ^2	P	Δ	χ^2	P	Δ
3.1	0.07829	465	6.6	0.01020	56
3.2	0.07364	436	6.7	0.00964	52
3.3	0.06928	408	6.8	0.00912	50
3.4	0.06520	383	6.9	0.00862	47
3.5	0.06137	359	7.0	0.00815	44
3.6	0.05778	337	7.1	0.00771	42
3.7	0.05441	316	7.2	0.00729	39
3.8	0.05125	296	7.3	0.00690	38
3.9	0.04829	279	7.4	0.00652	35
4.0	0.04550	262	7.5	0.00617	33
4.1	0.04288	246	7.6	0.00584	32
4.2	0.04042	231	7.7	0.00552	30
4.3	0.03811	217	7.8	0.00522	28
4.4	0.03594	205	7.9	0.00494	26
4.5	0.03389	192	8.0	0.00468	25
4.6	0.03197	181	8.1	0.00443	24
4.7	0.03016	170	8.2	0.00419	23
4.8	0.02846	160	8.3	0.00396	21
4.9	0.02686	151	8.4	0.00375	20
5.0	0.02535	142	8.5	0.00355	19
5.1	0.02393	134	8.6	0.00336	18
5.2	0.02259	126	8.7	0.00318	17
5.3	0.02133	119	8.8	0.00301	16
5.4	0.02014	112	8.9	0.00285	15
5.5	0.01902	106	9.0	0.00270	14
5.6	0.01796	99	9.1	0.00256	14
5.7	0.01697	94	9.2	0.00242	13
5.8	0.01603	89	9.3	0.00229	12
5.9	0.01514	83	9.4	0.00217	12
6.0	0.01431	79	9.5	0.00205	10
6.1	0.01352	74	9.6	0.00195	11
6.2	0.01278	71	9.7	0.00184	10
6.3	0.01207	66	9.8	0.00174	9
6.4	0.01141	62	9.9	0.00165	8
6.5	0.01079	59	10.0	0.00157	8

加 0.5，然後依公式(8-2)計算卽可．如上例 11×22 之積較大，故各減去 0.5；而 14×3 之積較小，故各加 0.5．於是其計算如下：

$$\chi^2=\frac{(10.5\times21.5-14.5\times3.5)^2(50)}{25\times25\times14\times36}=4.8611.$$

若不施校正，卽依實際次數計算，則 χ^2 等於 6.3492，查表 8-12B，經內插後得相當於此值之機率爲 .01175．此值小於前面所得的 .02748．若樣本愈小，則二者相差愈甚．尤其在機率 .05 或 .01 附近，若不加校正，很容易得到錯誤的結論．

在本章第 8-3 節已提到 χ^2 測驗實爲 t 測驗之變相，當自由度等於 1 時，$\sqrt{\chi^2}=t$．在小樣本中，χ^2 既須施以 Yates 校正數，則由標準差法決定離均差之顯著性時(參閱第七章第7-5節)，亦須加以校正．如大葉肺炎患者 13 人中痊愈 9 人，問此樣本與生死 1：1 之假定有無顯著的差別．按此假定 13 人中痊愈者應有 6.5 人，該樣本之離均差施以 Yates 校正數後爲 $9-6.5-.5=2$，於是其 t 值爲 $2/1.803=1.11$，查表 7-6，相當於 x/σ 值 1.11 之面積爲 .3665，故 t 值等於或大於 1.11 之面積，左右兩端合計，共爲 $2(.5-.3665)=.2670$ 或 26.7%，此值與由二項分配直接求得之機率 26.68%（見第七章第 7-2 節）甚爲接近，由此可見小樣本中 Yates 校正數之需要．

上述 Yates 校正數在四格表（自由度爲 1）中特別重要，至於在 2×3 格表中，其自由度爲 2，這時光滑曲線與直方圖（參閱圖 8-1）就比較接近，故連續性之校正就不很重要．當自由度大於 2 時，在任何情形之下，簡直不需要連續性的校正了．

8-7．四格表中 χ^2 機率之直接計算法 因爲在小樣本中往往

低估 χ^2 的機率，故須施以 Yates 校正數，其法已述於前．此外並可直接計算其機率，以資核對．R. A. Fisher 氏(11)建議了下列公式：

$$P_x=\frac{(a+b)!(c+d)!(a+c)!(b+d)!}{(a+b+c+d)!}\frac{1}{a!b!c!d!},\quad \text{公式}(8\text{–}7)$$

此為四格表中 a, b, c, d（參閱本章第 8–2 節）特殊組合發生之機率．如以表 8–11 的資料代入此公式，則得

$$P_x=\frac{(25!)(25!)(14!)(36!)}{(50!)}\frac{1}{(11!)(14!)(3!)(22!)}$$

$$=.010,931.$$

計算時，可以用第七章表 7–4 乘階的對數，非常便利．這裏求得的 $P_x=.010931$，是實際次數與理論次數相差等於 4 時的機率，不過我們所需要的機率包括相差等於或大於 4 時的各種情形在內，因此要求出下列八個 P_x 的總和：

【表 8–13】 實際次數與理論次數之相差等於或大於 4 時之各種情形

11	14	12	13	13	12	14	11
3	22	2	23	1	24	0	25
3	22	2	23	1	24	0	25
11	14	12	13	13	12	14	11

下面的四種情形和上面四種的數值是一樣的，只是實際與理論次數間，差數的符號相反吧了（此與二項分配中求兩端的機率意義相同，參閱第七章第 7–2 節），所以只要把上面四個 P_x 求出，以 2 乘之，即得所需的機率．在計算過程中，有

$$\frac{(25!)(25!)(14!)(36!)}{(50!)}$$

部分是相同的，由表7–4求得它的對數爲38.409,1600；在此值內減去各組實際次數乘階的對數，卽得 $\log P_x$. 玆將前四個 P_x 值列後：

.010,931　　.001,663　　.000,139　　.000,005

其總和爲.012,738，以2乘之，得 $P=.025,476$. 此值與由Yule氏表求得之.02748（見上節）非常接近.

F. Yates 曾建議(12)，在若干問題中須用 $\frac{1}{2}P$，則與眞正機率更爲接近. 究竟何時用 P，何時用 $\frac{1}{2}P$，則視測驗中所包含之無效假設（參閱第四章第4–1節）而定. 上述氰化鈉之殺蠋功能一例，在顯著性之測驗中，假定在20°C與31°C兩樣本，係自同一全體中隨機抽出. 按此假設，則實際次數與理論次數之相差可爲正，亦可爲負，如20°C時之死亡數可爲14，亦可爲22，因此有表8–13的八種情形. 若我們已經知道溫度加高，則蒼蠅幼蟲之呼吸、消化等作用加快，而容易中毒，於是死亡數將與溫度成正比例. 基於這些知識，我們可另作一無效假設，卽蒼蠅幼蟲在氰化鈉溶液中之死亡數，當31°C時，並不較20°C時爲高，這樣就祇包括表8–13的上面四種情形了. 在此假設下就應該用 $\frac{1}{2}P$，其由Yule氏表求得者（參閱第8–6節）爲 $\frac{1}{2}(.02748)=.01374$；由Fisher氏公式求得者爲 $\frac{1}{2}(.025,476)=.01274$. 此機率近於.01，故爲顯著，於是死亡數與溫度成正比例之結論獲得統計上之證明. D. Mainland 氏(3, pp. 94;308-309) 對於 P 及 $\frac{1}{2}P$ 值的應用，

曾加以討論，並謂與其把機遇因子估得太少，還不如把它估得太多要妥當些.

8–8. χ^2 在遺傳學上之應用 有新生白鼠三窠，共 24 頭，其中公鼠 15 頭，母鼠 9 頭，問此樣本與公母比例為 1 : 1 之假設相符否？按此假設，則 24 頭白鼠中，公母應各占半數，因得實際次數與理論次數如下：

	公	母
實際次數	15	9
理論次數	(12)	(12)

$$\chi^2=\frac{(15-12)^2}{12}+\frac{(9-12)^2}{12}=1.5.$$

實際次數有公母 2 項，但計算理論次數時，用去一總次數，故自由度為 $2-1=1$. 查表 8–3，當自由度等於 1 時，5% 點為 3.841. 此處之 χ^2 小於 5% 點，故此樣本與公母 1 : 1 之假設並無顯著的差別. 若遺傳上之假設為 3 : 1，其計算方法相同，不贅.

將麝香豌豆(sweet pea)之藍花者(B)與圓形(l)花粉粒者相雜交(cross)，又以紅花者(b)與長形(L)花粉粒者相雜交. 若此類特性各各獨立，則由 $Bl\times bL$ 雜交所生之第二代後裔，將分離(segregate)為 BL, Bl, bL 與 bl 四類，其比例為 9 : 3 : 3 : 1. 據 Bateson 氏實驗結果(13)，各類實際次數如下：

BL	Bl	bL	bl	總計
226	95	97	1	419

若按 9 : 3 : 3 : 1 之比例，則各類理論次數應為：

235.69 78.56 78.56 26.19

$$\chi^2=\frac{(226-235.69)^2}{235.69}+\frac{(95-78.56)^2}{78.56}+\frac{(97-78.56)^2}{78.56}$$

$$+\frac{(1-26.19)^2}{26.19}=32.39.$$

理論次數係由總次數 419 算出,故自由度為 $4-1=3$.查表 8-3,自由度等於 3 時,1%點為 11.341.求得之 χ^2 值較 1%點為大,故實際次數與 9:3:3:1 之假設有非常顯著的差別,此乃連繫(linkage)遺傳的緣故.

8-9. 曲線配合之適度(goodness of fit) 由觀察所得之次數曲線配合一理論的次數曲線後,亦可用 χ^2 測驗其適度.茲將第七章表 7-9 胸圍之實際次數與配合常態曲線後之理論次數求其 χ^2 如下(表 8-14).凡理論次數小於 5 者須加歸併(見第 8-4 節),其相當的實際次數亦須歸併,這樣共得 9 對實際與理論次數.在配合常態曲線時用去 3 個統計數,即均數、標準差與總次數,故自由度為 $9-3=6$.查表 8-3,自由度等於 6 時之 5%點為 12.592,實際求得之 χ^2 則為 10.970,此值小於 5%點,故胸圍之實際次數與常態曲線之理論次數,尚無顯著的差別.惟用內插法求得相當於 $\chi^2=10.97$ 的 P 值約為 .092.此機率並不甚大,故嚴格說來,此實際分配與常態曲線配合得不算十分好,試翻到第七章末段,曾說:此分配之峯度與常態曲線尚無顯著的差別,但係正偏態.由此可以明白,配合得不十分好的原因了.其他次數曲線,如二項分配、Poisson 分配(14)、Pearson 氏曲線系(15) 等之配合適度,都可用 χ^2 測驗之.

【表 8-14】 曲線配合適度之測驗

（我國二十歲青年學生胸圍之次數分配）

胸圍（厘米）	實際次數 A	理論次數 T	$A-T$	$\frac{(A-T)^2}{T}$
66–68		0.13		
68–70	1 } 6	1.09 } 6.68	−0.68	0.069
70–72	5	5.46		
72–74	14	20.74	−6.74	2.190
74–76	57	56.95	+0.05	0.000
76–78	118	107.02	+10.98	1.127
78–80	164	144.96	+19.04	2.501
80–82	122	142.20	−20.20	2.869
82–84	85	95.66	−10.66	1.188
84–86	53	46.67	+6.33	0.859
86–88	14	16.31		
88–90	8 } 23	4.04		
90–92	1	0.71 } 21.12	+1.88	0.167
92–94		0.06		
	642			10.970

$df=9-3=6$, 5%點 $=12.592$.

【練 習 題】

1．張式溥氏(1)曾作北平學生砂眼之統計，結果載於下列二表，問砂眼患者之人數有性別及年齡上之差別否？

	患砂眼者	無砂眼者
男	246	1,001
女	210	1,071

	患砂眼者	無砂眼者
4—10歲	91	1,175
11—20歲	365	897

2. 下表爲各專家研究中華民族血屬之總結果(2)，問華北與華南人之血屬分配有差別否？

	血屬 O	A	B	AB	總人數
華北	2,244	1,978	2,179	590	6,991
華南	663	711	373	178	1,925

又汪美先氏(19)等研究血屬之結果如下，問能證實性連繫之遺傳(sex-linked inheritance)否？

男女血屬分布

	血屬 O	A	B	AB
男	1,075	760	646	219
女	463	353	234	1[illegible]3

3. 下表爲天花患者死亡與曾否種痘之關係(3)：試測驗種痘對於預防天花之實效．計算時可用公式(8–2)求得 χ^2，再查表 8–12B，

	痊愈	死亡
已種痘	20	2
未種痘	89	38

用內插法求得 P 值，最後計算 $\frac{1}{2}P$．在此測驗中，所包含之無效假設爲：在死亡人數方面，已種痘者較未種痘者並不顯著的少；而在痊愈人數方面，則已種痘者較未種痘者並不顯著的多．注意此假設之措詞．

4．用第8–7節之直接計算法，求第3題之 $\frac{1}{2}P$ 值.

附：

$$\log(109!)=176.159,5252$$

$$\log(127!)=213.478,9503$$

$$\log(149!)=260.580,8023$$

若用 Yates 校正數後，由表 8–12 求得之 $\frac{1}{2}P$，則與直接計算法所得者較近，試與上題結果一併比較之.

5．下表為血屬與梅毒血清反應之紀錄(16)，問二者有顯著的關係否？

血屬	Wassermann 氏反應 陽性	可疑者	陰性
O	53	26	261
A	75	17	208
B	91	26	238
AB	32	11	95

6．就下列資料(17)推論三種哺乳方法之嬰兒死亡率有差別否？

	生存	死亡
母乳	1,827	143
奶媽	73	7
人工哺乳	45	20

7．下表為國立北平第一助產學校自民國二十四年至二十七年四季接生次數(1)．問嬰兒之出生數有顯著的季節變動(seasonal fluctuation)現象否？(春季係指陽曆三月至五月，餘類推.)

年　分	春	夏	秋	冬
二十四年	520	498	520	521
二十五年	426	490	507	543
二十六年	553	459	276	326
二十七年	290	318	338	350

8. 下表爲北平傳染病醫院自 1915 至 1923 年猩紅熱患者痊愈與死亡之紀錄(18). 問歷年猩紅熱之死亡率有顯著的差別否?

年　分	痊愈者	死亡者	患者人數
1915	6	9	15
1916	152	35	187
1917	46	17	63
1918	6	1	7
1919	4	0	4
1920	12	1	13
1921	59	19	78
1922	109	33	142
1923	77	18	95
總　計	471	133	604

表中患者人數最少之四年, 其理論次數將小於 5, 故須設法歸併, 可將連續三年合爲一組, 如 1915—17, 1918—20, 1921—23 是.

9. 測驗第七章第 9 題配合常態曲線之適度.

【參　考　文　獻】

(1) 張式溥: 北平學生砂眼之統計, 中華醫學雜誌, 第十八卷第

五期，803–805 頁.

(2) 李振翩：中國民族的血屬，中華醫學雜誌，第十六卷第一期，5–26 頁(1930).

(3) 四川省立第一行政區中心衞生院：溫江衞生工作報告，三十一年.

(4) Liu Bao-Chu, Report of an investigation of infant mortality and its causes in Pishan, The Chinese Medical Journal, 63A, 4 : 178–183 (1945).

(5) Taylor, G. L. and Prior, A. M., The distribution of the *M* and *N* factors in random samples of different races, Annals of Eugenics, 9, 2 : 97–108 (1939).

(6) Mainland, D., The Treatment of Clinical and Laboratory Data, Oliver and Boyd (19̣8).

(7) Lung, Y. Y. & Foster, J. H., Typhoid and paratyphoid fever in Changsha, The National Medical Journal of China, 9, 3 : 185–197 (1923).

(8) Wu, C. and Hsieh, C. K., Roentgenological study of intestinal tuberculosis, The National Medical Journal of China, 16, 5 : 505–523 (1930).

(9) Landauer, E., The temperature factor in the efficacy of sodium cyanide as a larvicide, Trans. Ninth Congree, Far East. Assoc. Trop. Med., Nanking, 2 : 807–812 (1934).

(10) Yule, G. U., The Theory of Statistics, Charles Griffin

and Co. (1924).

(11) Fisher, R. A., Statistical Methods for Research Workers, Chapter IV, Sections 21·01, 21·03, Oliver and Boyd, London, 1936.

(12) Yates, F., Journ. Roy. Stat. Soc., Suppl. i., No. ii, 217 (1934).

(13) Bateson, W. and Punnett, R. C., Journal of Genetics, 1 : 297 (1911).

(14) Snedecor, G. W., Statistical Methods, pp. 372–377, The Iowa State College Press (1940).

(15) Elderton, W. P., Frequency Curves and Correlation, Charles & Edwin Layton (1927).

(16) Chue, C. Y. and Wang, S. H., A system for obtaining Chinese blood donors, Chinese Med. Journ., 46 : 31–42 (1932).

(17) Yang, M. & Yuan, I. C., Report of an investigation on infant mortality and its causes in Peiping, Chinese Medical Journal, 47 : 597–604 (1933).

(18) Yang, T. K. & Shih, W. H., Scarlet fever in China, National Med. Journ. of China, 10, 3 : 153–170 (1924).

(19) Wang, M. S., Chue, C. Y., and Chen, S. P., Blood groups of Chinese, The Chinese Medical Journal, 63A, 1 : 24–25 (1944).

第九章　變異數分析

兩組測量資料相比較時,我們用 t 值測驗其均數相差的顯著性,在本書第四章裏已詳細討論過了. 若有兩組以上時,要比較幾個均數之間有無顯著的差別,那麼必須把 t 測驗的方法加以推廣,這個推廣的顯著性測驗法,叫做變異數分析(analysis of variance).

變異數分析創於 R. A. Fisher 氏(1),他用 z 值(此 z 值與本書第 6–6 節及第 7–3 節所討論者不同,勿混淆)的 5% 點與 1% 點作爲比較的標準(2, Table VI),但因需求自然對數,故計算較繁,後經其他統計學家與以簡化(3),(4),只須求出兩變異數之商,查 F 值表(5, pp. 184–187)即可,其用法詳後.

9–1. 大小相等的三組間之比較——依一個標準分類者 藍天鶴氏(6)在穀類豆類混合蛋白質之生理價值一研究中曾配合三種飼料,計 268 號爲玉米、小米、黄豆、雜合麵; 269 號爲玉米、小麵、黄豆、雜合麵; 274 號爲豆腐、麵筋、雜合麵. 實驗動物,係鼠 18 頭,匀分爲三組,每組給以一種飼料. 氏用氮平衡法測定各飼料之生理價值,以不屬於統計學範圍,故從略. 此處僅錄其一星期內體重增加的情形,以說明計算的過程; 眞正的飼養實驗至少需兩三個月纔能獲得相當結果. 又食量與所增體重有密切關係,此點當在下章討論之. 表 9–1 所列三組白鼠,在實驗設計時,對於性別、窩別、原始體重等應儘量

【表 9-1】 三組白鼠在一星期內增加之體重(克)

	飼料 268 號 (玉米、小米、黃豆、雜合麪)	飼料 269 號 (玉米、小麪、黃豆、雜合麪)	飼料 274 號 (豆腐、麪筋、雜合麪)	總　計
X	13	3	19	
	6	7	20.5	
	15	1	10	
	10	5	16	
	8	8	18	
	23.5	1.5	18	
ΣX	75.5	25.5	101.5	202.5
$\bar{x}$	12.59	4.25	16.92	11.25
ΣX^2	1,146.25	150.25	1,785.25	3,081.75

使之相等．若無其他因子，如食量多寡等，夾在裏面，則三組均數的差別，或可表示三種飼料營養價值的不同．我們先看第一組白鼠，吃的飼料相同，但一週內所增的體重卻不相同，這種變異是與飼料的好壞無關的，其變異的大小可以離均差平方和表示之：

$$\Sigma(X_1-\bar{x}_1)^2=1,146.25-\frac{(75.5)^2}{6}=196.21.$$

該組各量數之和爲 75.5，各量數平方之和爲 1,146.25，載於表 9-1 的 ΣX 與 ΣX^2 兩行，離均差平方和係用公式(3-5)計算．同理，第二、三兩組的離均差平方和爲：

$$\Sigma(X_2-\bar{x}_2)^2=150.25-\frac{(25.5)^2}{6}=41.87,$$

$$\Sigma(X_3-\bar{x}_3)^2=1,785.25-\frac{(101.5)^2}{6}=68.21.$$

這些變異也是與食料的好壞無關的. 因此這三數之和, 卽

$$\Sigma\Sigma(X_i-\bar{x}_i)^2=196.21+41.87+68.21=306.29,$$

此值爲各組內部變異的總和, 而與食料的優劣無關的. 這個'組內'的變異可目爲機遇的變異, 亦可稱爲誤差.

此外還有一種變異, 卽三個均數間的變異, 三組均數爲:

$$12.59 \qquad 4.25 \qquad 16.92$$

其變異可以各組均數與總均數 11.25 (此均數係 18 頭鼠之總平均, 卽 $202.5\div18$) 之離均差平方和表示之, 惟因每組有鼠 6 頭, 故須各以 6 乘之:

$$6(12.59-11.25)^2+6(4.25-11.25)^2+6(16.92-11.25)^2=497.33,$$

此值所表示的變異至少有兩個來源, 一是由於食料的優劣, 一是由於機遇. 由於機遇而來的變異, 我們已在前面求得, 卽 306.29. 若各'組間'的變異超過於'組內'的變異很多, 卽均數間的變異超過了由於純粹機遇得來的可能, 假定其他因子都已被嚴密控制, 那麼這三個均數間的差別, 大概是飼料的優劣使然.

這裏値得注意的便是: '組內'與'組間'兩個離均差平方和相加恰等於十八頭鼠的總變異.

組內與組間兩離均差平方和之和:

$$306.29+497.33=803.62,$$

總變異: $\Sigma(X-\bar{x})^2=3,081.75-\dfrac{(202.5)^2}{18}=803.62.$

我們就可應用這個特性來簡化計算的過程. (一)先由上式求得所增體重的總變異爲 803.62. (二)再用下列公式求得各'組間'的變異:

$$\Sigma k(\bar{x}_i-\bar{x})^2=\frac{(\Sigma X_1)^2+(\Sigma X_2)^2+\cdots\cdots+(\Sigma X_n)^2}{k}-\frac{(\Sigma X)^2}{nk},$$

公式(9–1)

此處 k 爲每組內的項目數(此例爲動物數),n 爲組數. 將例題之數值代入,得

$$\Sigma k(\bar{x}_i-\bar{x})^2=\frac{(75.5)^2+(25.5)^2+(101.5)^2}{6}-\frac{(202.5)^2}{18}$$

$$=2,775.46-2,278.13=497.33.$$

這樣計算'組間'離均差平方和,較前法簡捷而且正確. 因爲求各組均數與總均數的相差時往往受小數四捨五入的影響而使結果稍有出入. 如上例若各組均數與總均數都用兩位小數,其答案實爲 497.667,較眞正值略大(因此前面不用 497.667,而用 497.33),故計算時以用公式(9–1)爲宜. (三)最後在總變異內減去各'組間'的變異,卽得各'組內'的變異或誤差. 其公式爲

$$\Sigma\Sigma(X_i-\bar{x}_i)^2=\Sigma(X-\bar{x})^2-\Sigma k(\bar{x}_i-\bar{x})^2. \qquad \text{公式(9–2)}$$

以數值代入此式,卽得

$$\Sigma\Sigma(X_i-\bar{x}_i)^2=803.62-497.33=306.29.$$

要測驗各組均數間相差的顯著性,我們不能把'組間'與'組內'兩離均差平方和直接比較,而必須顧到它們的自由度,好在自由度與離均差平方和同樣有可加的特性. 試看'組間'的變異共有三個均數,求離均差平方和時用去一總均數,故自由度喪失一個,卽爲 $3-1=2$. 第一組有鼠六頭,求組內離均差平方和時,用去一個本組均數,其自由度爲 $6-1=5$; 同理,第二、三兩組的自由度亦各爲 5; 故'組內'離

均差平方和的自由度爲 $5+5+5=15$. 兩種自由度相加, $2+15=17$, 恰等於總變異的自由度.

離均差平方和與自由度都求得後,就可談到變異數分析的本身了. 玆列如下表:

【表 9-2】 變異數分析(三組白鼠所增之體重)

變異來源	自由度	離均差平方和	均方(變異數)	F
總變異	17	803.62		
各組之均數間	2	497.33	248.67	12.18
組內(誤差)	15	306.29	20.42	
$n_1=2$, $n_2=15$, 1% 點 $=6.36$.				

表內第一橫行是白鼠所增體重的總變異,其自由度爲 17, 離均差平方和爲803.62, 第二、三兩行爲'組間'與'組內'的變異,其自由度與離均差平方和都已在上面解釋過. 將第二、三兩行的自由度,除同行的離均差平方和, 即得均方, 亦即變異數(參閱第 3-4 節),

$$497.33 \div 2 = 248.67, \quad 306.29 \div 15 = 20.42.$$

這時兩變異數可直接比較了. 比較的方法,即將'組內'的變異數除'組間'的變異數,

$$F = 248.67 \div 20.42 = 12.18.$$

所得的商稱爲 F 值,意即'三個均數間的變異數'爲'誤差變異數'的 12.18 倍. 究竟前者比後者要大多少倍,纔有顯著的相差,我們須查 F 值表(表 9-3)纔能知道. 因爲 F 值是兩個變異數之比,故有兩種自由度,這兩種自由度,在表 9-3 以縱橫二方向表示之. 該表上端橫行內的數值是較大均方的自由度, 稱爲 n_1, 左側直行內的數值是較小

【表 9–3】 *F* 值表

【相當於機率 .05(上行)與 .01(下行)之 *F* 值，n_1 爲較大均方之自由度】

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.36	19.37	19.38	19.39	19.40	19.41
	98.49	99.01	99.17	99.25	99.30	99.33	99.34	99.36	99.38	99.40	99.41	99.42
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.88	8.84	8.81	8.78	8.76	8.74
	34.12	30.81	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.13	27.05
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.93	5.91
	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.54	14.45	14.37
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.78	4.74	4.70	4.68
	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.45	10.27	10.15	10.05	9.96	9.89
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00
n_2	13.74	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79	7.72
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.63	3.60	3.57
	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	7.00	6.84	6.71	6.62	6.54	6.47
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.34	3.31	3.28
	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.19	6.03	5.91	5.82	5.74	5.67
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.13	3.10	3.07
	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.62	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.97	2.94	2.91
	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.21	5.06	4.95	4.85	4.78	4.71
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.86	2.82	2.79
	9.65	7.20	6.22	5.67	5.32	5.07	4.88	4.74	4.63	4.54	4.46	4.40
12	4.75	3.88	3.49	3.26	3.11	3.00	2.92	2.85	2.80	2.76	2.72	2.69
	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.65	4.50	4.39	4.30	4.22	4.16
13	4.67	3.80	3.41	3.18	3.02	2.92	2.84	2.77	2.72	2.67	2.63	2.60
	9.07	6.70	5.74	5.20	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02	3.96

【相當於機率 .05(上行)與 .01(下行)之 F 值，n_1 爲較大均方之自由度】

	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
1	245	246	248	249	250	251	252	253	253	254	254	254
	6142	6169	6208	6234	6258	6286	6302	6323	6334	6352	6361	6366
2	19.42	19.43	19.44	19.45	19.46	19.47	19.47	19.48	19.49	19.49	19.50	19.50
	99.43	99.44	99.45	99.46	99.47	99.48	99.48	99.49	99.49	99.49	99.50	99.50
3	8.71	8.69	8.66	8.64	8.62	8.60	8.58	8.57	8.56	8.54	8.54	8.53
	26.92	26.83	26.69	26.60	26.50	26.41	26.35	26.27	26.23	26.18	26.14	26.12
4	5.87	5.84	5.80	5.77	5.74	5.71	5.70	5.68	5.66	5.65	5.64	5.63
	14.24	14.15	14.02	13.93	13.83	13.74	13.69	13.61	13.57	13.52	13.48	13.46
5	4.64	4.60	4.56	4.53	4.50	4.46	4.44	4.42	4.40	4.38	4.37	4.36
	9.77	9.68	9.55	9.47	9.38	9.29	9.24	9.17	9.13	9.07	9.04	9.02
6	3.96	3.92	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.72	3.71	3.69	3.68	3.67
	7.60	7.52	7.39	7.31	7.23	7.14	7.09	7.02	6.99	6.94	6.90	6.88
7	3.52	3.49	3.44	3.41	3.38	3.34	3.32	3.29	3.28	3.25	3.24	3.23
	6.35	6.27	6.15	6.07	5.98	5.90	5.85	5.78	5.75	5.70	5.67	5.65
8	3.23	3.20	3.15	3.12	3.08	3.05	3.03	3.00	2.98	2.96	2.94	2.93
	5.56	5.48	5.36	5.28	5.20	5.11	5.06	5.00	4.96	4.91	4.88	4.86
9	3.02	2.98	2.93	2.90	2.86	2.82	2.80	2.77	2.76	2.73	2.72	2.71
	5.00	4.92	4.80	4.73	4.64	4.56	4.51	4.45	4.41	4.36	4.33	4.31
10	2.86	2.82	2.77	2.74	2.70	2.67	2.64	2.61	2.59	2.56	2.55	2.54
	4.60	4.52	4.41	4.33	4.25	4.17	4.12	4.05	4.01	3.96	3.93	3.91
11	2.74	2.70	2.65	2.61	2.57	2.53	2.50	2.47	2.45	2.42	2.41	2.40
	4.29	4.21	4.10	4.02	3.94	3.86	3.80	3.74	3.70	3.66	3.62	3.60
12	2.64	2.60	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.36	2.35	2.32	2.31	2.30
	4.05	3.98	3.86	3.78	3.70	3.61	3.56	3.49	3.46	3.41	3.38	3.36
13	2.55	2.51	2.46	2.42	2.38	2.34	2.32	2.28	2.26	2.24	2.22	2.21
	3.85	3.78	3.67	3.59	3.51	3.42	3.37	3.30	3.27	3.21	3.18	3.16

【相當於機率 .05(上行)與 .01(下行)之 F 值，n_1 爲較大均方之自由度】

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.77	2.70	2.65	2.60	2.56	2.53
	8.86	6.51	5.56	5.03	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.80
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	3.70	2.64	2.59	2.55	2.51	2.48
	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73	3.67
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.45	2.42
	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.61	3.55
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.62	2.55	2.50	2.45	2.41	2.38
	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52	3.45
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34
	8.28	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.85	3.71	3.60	3.51	3.44	3.37
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.55	2.48	2.43	2.38	2.34	2.31
	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.36	3.30
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.52	2.45	2.40	2.35	2.31	2.28
	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.71	3.56	3.45	3.37	3.30	3.23
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.28	2.25
	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.65	3.51	3.40	3.31	3.24	3.17
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.47	2.40	2.35	2.30	2.26	2.23
	7.94	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.18	3.12
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.45	2.38	2.32	2.28	2.24	2.20
	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.14	3.07
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.43	2.36	2.30	2.26	2.22	2.18
	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.25	3.17	3.09	3.03
25	4.24	3.38	2.99	2.76	2.60	2.49	2.41	2.34	2.28	2.24	2.20	2.16
	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.21	3.13	3.05	2.99
26	4.22	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15
	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.17	3.09	3.02	2.96

【相當於機率 .05(上行)與 .01(下行)之 F 值，n_1 為較大均方之自由度】

	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
14	2.48	2.44	2.39	2.35	2.31	2.27	2.24	2.21	2.19	2.16	2.14	2.13
	3.70	3.62	3.51	3.43	3.34	3.26	3.21	3.14	3.11	3.06	3.02	3.00
15	2.43	2.39	2.33	2.29	2.25	2.21	2.18	2.15	2.12	2.10	2.08	2.07
	3.56	3.48	3.36	3.29	3.20	3.12	3.07	3.00	2.97	2.92	2.89	2.87
16	2.37	2.33	2.28	2.24	2.20	2.16	2.13	2.09	2.07	2.04	2.02	2.01
	3.45	3.37	3.25	3.18	3.10	3.01	2.96	2.89	2.86	2.80	2.77	2.75
17	2.33	2.29	2.23	2.19	2.15	2.11	2.08	2.04	2.02	1.99	1.97	1.96
	3.35	3.27	3.16	3.08	3.00	2.92	2.86	2.79	2.76	2.70	2.67	2.65
18	2.29	2.25	2.19	2.15	2.11	2.07	2.04	2.00	1.98	1.95	1.93	1.92
	3.27	3.19	3.07	3.00	2.91	2.83	2.78	2.71	2.68	2.62	2.59	2.57
19	2.26	2.21	2.15	2.11	2.07	2.02	2.00	1.96	1.94	1.91	1.90	1.88
n_2	3.19	3.12	3.00	2.92	2.84	2.76	2.70	2.63	2.60	2.54	2.51	2.49
20	2.23	2.18	2.12	2.08	2.04	1.99	1.96	1.92	1.90	1.87	1.85	1.84
	3.13	3.05	2.94	2.86	2.77	2.69	2.63	2.56	2.53	2.47	2.44	2.42
21	2.20	2.15	2.09	2.05	2.00	1.96	1.93	1.89	1.87	1.84	1.82	1.81
	3.07	2.99	2.88	2.80	2.72	2.63	2.58	2.51	2.47	2.42	2.38	2.36
22	2.18	2.13	2.07	2.03	1.98	1.93	1.91	1.87	1.84	1.81	1.80	1.78
	3.02	2.94	2.83	2.75	2.67	2.58	2.53	2.46	2.42	2.37	2.33	2.31
23	2.14	2.10	2.04	2.00	1.96	1.91	1.88	1.84	1.82	1.79	1.77	1.76
	2.97	2.89	2.78	2.70	2.62	2.53	2.48	2.41	2.37	2.32	2.28	2.26
24	2.13	2.09	2.02	1.98	1.94	1.89	1.86	1.82	1.80	1.76	1.74	1.73
	2.93	2.85	2.74	2.66	2.58	2.49	2.44	2.36	2.33	2.27	2.23	2.21
25	2.11	2.06	2.00	1.96	1.92	1.87	1.84	1.80	1.77	1.74	1.72	1.71
	2.89	2.81	2.70	2.62	2.54	2.45	2.40	2.32	2.29	2.23	2.19	2.17
26	2.10	2.05	1.99	1.95	1.90	1.85	1.82	1.78	1.76	1.72	1.70	1.69
	2.86	2.77	2.66	2.58	2.50	2.41	2.36	2.28	2.25	2.19	2.15	2.13

【相當於機率 .05(上行)與 .01(下行)之 F 值，n_1 爲較大均方之自由度】

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.30	2.25	2.20	2.16	2.13
	7.68	5.49	4.60	4.11	3.79	3.56	3.39	3.26	3.14	3.06	2.98	2.93
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.44	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.12
	7.64	5.45	4.57	4.07	3.76	3.53	3.36	3.23	3.11	3.03	2.95	2.90
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.54	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.14	2.10
	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.08	3.00	2.92	2.87
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.34	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09
	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.06	2.98	2.90	2.84
32	4.15	3.30	2.90	2.67	2.51	2.40	2.32	2.25	2.19	2.14	2.10	2.07
	7.50	5.34	4.46	3.97	3.66	3.42	3.25	3.12	3.01	2.94	2.86	2.80
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.30	2.23	2.17	2.12	2.08	2.05
n_2	7.44	5.29	4.42	3.93	3.61	3.38	3.21	3.08	2.97	2.89	2.82	2.76
36	4.11	3.26	2.86	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15	2.10	2.06	2.03
	7.39	5.25	4.38	3.89	3.58	3.35	3.18	3.04	2.94	2.86	2.78	2.72
38	4.10	3.25	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14	2.09	2.05	2.02
	7.35	5.21	4.34	3.86	3.54	3.32	3.15	3.02	2.91	2.82	2.75	2.69
40	4.03	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.07	2.04	2.00
	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.88	2.80	2.73	2.66
42	4.07	3.22	2.83	2.59	2.44	2.32	2.24	2.17	2.11	2.06	2.02	1.99
	7.27	5.15	4.29	3.80	3.49	3.26	3.10	2.96	2.86	2.77	2.70	2.64
44	4.06	3.21	2.82	2.58	2.43	2.31	2.23	2.16	2.10	2.05	2.01	1.98
	7.24	5.12	4.26	3.78	3.46	3.24	3.07	2.94	2.84	2.75	2.68	2.62
46	4.05	3.20	2.81	2.57	2.42	2.30	2.22	2.14	2.09	2.04	2.00	1.97
	7.21	5.10	4.24	3.76	3.44	3.22	3.05	2.92	2.82	2.73	2.66	2.60
48	4.04	3.19	2.80	2.56	2.41	2.30	2.21	2.14	2.08	2.03	1.99	1.96
	7.19	5.08	4.22	3.74	3.42	3.20	3.04	2.90	2.80	2.71	2.64	2.58

【相當於機率 .05(上行)與 .01(下行)之 F 值，n_1 為較大均方之自由度】

	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
27	2.08	2.03	1.97	1.93	1.88	1.84	1.80	1.76	1.74	1.71	1.68	1.67
	2.83	2.74	2.63	2.55	2.47	2.38	2.33	2.25	2.21	2.16	2.12	2.10
28	2.06	2.02	1.96	1.91	1.87	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.67	1.65
	2.80	2.71	2.60	2.52	2.44	2.35	2.30	2.22	2.18	2.13	2.09	2.06
29	2.05	2.00	1.94	1.90	1.85	1.80	1.77	1.73	1.71	1.68	1.65	1.64
	2.77	2.68	2.57	2.49	2.41	2.32	2.27	2.19	2.15	2.10	2.06	2.03
30	2.04	1.99	1.93	1.89	1.84	1.79	1.76	1.72	1.69	1.66	1.64	1.62
	2.74	2.66	2.55	2.47	2.38	2.29	2.24	2.16	2.13	2.07	2.03	2.01
32	2.02	1.97	1.91	1.86	1.82	1.76	1.74	1.69	1.67	1.64	1.61	1.59
	2.70	2.62	2.51	2.42	2.34	2.25	2.20	2.12	2.08	2.02	1.98	1.96
34	2.00	1.95	1.89	1.84	1.80	1.74	1.71	1.67	1.64	1.61	1.59	1.57
n_2	2.66	2.58	2.47	2.38	2.30	2.21	2.15	2.08	2.04	1.98	1.94	1.91
36	1.98	1.93	1.87	1.82	1.78	1.72	1.69	1.65	1.62	1.59	1.56	1.55
	2.62	2.54	2.43	2.35	2.26	2.17	2.12	2.04	2.00	1.94	1.90	1.87
38	1.96	1.92	1.85	1.80	1.76	1.71	1.67	1.63	1.60	1.57	1.54	1.53
	2.59	2.51	2.40	2.32	2.22	2.14	2.08	2.00	1.97	1.90	1.86	1.84
40	1.95	1.90	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.61	1.59	1.55	1.53	1.51
	2.56	2.49	2.37	2.29	2.20	2.11	2.05	1.97	1.94	1.88	1.84	1.81
42	1.94	1.89	1.82	1.78	1.73	1.68	1.64	1.60	1.57	1.54	1.51	1.49
	2.54	2.46	2.35	2.26	2.17	2.08	2.02	1.94	1.91	1.85	1.80	1.78
44	1.92	1.88	1.81	1.76	1.72	1.66	1.63	1.58	1.56	1.52	1.50	1.48
	2.52	2.44	2.32	2.24	2.15	2.06	2.00	1.92	1.88	1.82	1.78	1.75
46	1.91	1.87	1.80	1.75	1.71	1.65	1.62	1.57	1.54	1.51	1.48	1.46
	2.50	2.42	2.30	2.22	2.13	2.04	1.98	1.90	1.86	1.80	1.76	1.72
48	1.90	1.86	1.79	1.74	1.70	1.64	1.61	1.56	1.53	1.50	1.47	1.45
	2.48	2.40	2.28	2.20	2.11	2.02	1.96	1.88	1.84	1.78	1.73	1.70

【相當於機率 .05(上行)與 .01(下行)之 F 值，n_1 為較大均方之自由度】

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.02	1.98	1.95
	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.18	3.02	2.88	2.78	2.70	2.62	2.56
55	4.02	3.17	2.78	2.54	2.38	2.27	2.18	2.11	2.05	2.00	1.97	1.93
	7.12	5.01	4.16	3.68	3.37	3.15	2.98	2.85	2.75	2.66	2.59	2.53
60	4.00	3.15	2.76	2.52	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95	1.92
	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.56	2.50
65	3.99	3.14	2.75	2.51	2.36	2.24	2.15	2.08	2.02	1.98	1.94	1.90
	7.04	4.95	4.10	3.62	3.31	3.09	2.93	2.79	2.70	2.61	2.54	2.47
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.01	1.97	1.93	1.89
	7.01	4.92	4.08	3.60	3.29	3.07	2.91	2.77	2.67	2.59	2.51	2.45
80	3.96	3.11	2.72	2.48	2.33	2.21	2.12	2.05	1.99	1.95	1.91	1.88
n_2	6.96	4.88	4.04	3.56	3.25	3.04	2.87	2.74	2.64	2.55	2.48	2.41
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.30	2.19	2.10	2.03	1.97	1.92	1.88	1.85
	6.90	4.82	3.98	3.51	3.20	2.99	2.82	2.69	2.59	2.51	2.43	2.36
125	3.92	3.07	2.68	2.44	2.29	2.17	2.08	2.01	1.95	1.90	1.86	1.83
	6.84	4.78	3.94	3.47	3.19	2.95	2.79	2.65	2.56	2.47	2.40	2.33
150	3.91	3.06	2.67	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94	1.89	1.85	1.82
	6.81	4.75	3.91	3.44	3.14	2.92	2.76	2.62	2.53	2.44	2.37	2.30
200	3.89	3.04	2.65	2.41	2.26	2.14	2.05	1.98	1.92	1.87	1.83	1.80
	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.90	2.73	2.60	2.50	2.41	2.34	2.28
400	3.86	3.02	2.62	2.39	2.23	2.12	2.03	1.96	1.90	1.85	1.81	1.78
	6.70	4.66	3.83	3.36	3.06	2.85	2.69	2.55	2.46	2.37	2.29	2.23
1,000	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.10	2.02	1.95	1.89	1.84	1.80	1.76
	6.66	4.62	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.43	2.34	2.26	2.20
∞	3.84	2.99	2.60	2.37	2.21	2.09	2.01	1.94	1.88	1.83	1.79	1.75
	6.64	4.60	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.24	2.18

【相當於機率 .05(上行)與 .01(下行)之 F 值，n_1 為較大均方之自由度】

	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
50	1.90	1.85	1.78	1.74	1.69	1.63	1.60	1.55	1.52	1.48	1.46	1.44
	2.46	2.39	2.26	2.18	2.10	2.00	1.94	1.86	1.82	1.76	1.71	1.68
55	1.88	1.83	1.76	1.72	1.67	1.61	1.58	1.52	1.50	1.46	1.43	1.41
	2.43	2.35	2.23	2.15	2.06	1.96	1.90	1.82	1.78	1.71	1.66	1.64
60	1.86	1.81	1.75	1.70	1.65	1.59	1.56	1.50	1.48	1.44	1.41	1.39
	2.40	2.32	2.20	2.12	2.03	1.93	1.87	1.79	1.74	1.68	1.63	1.60
65	1.85	1.80	1.73	1.68	1.63	1.57	1.54	1.49	1.46	1.42	1.39	1.37
	2.37	2.30	2.18	2.09	2.00	1.90	1.84	1.76	1.71	1.64	1.60	1.56
70	1.84	1.79	1.72	1.67	1.62	1.56	1.53	1.47	1.45	1.40	1.37	1.35
	2.35	2.28	2.15	2.07	1.98	1.88	1.82	1.74	1.69	1.62	1.56	1.53
80	1.82	1.77	1.70	1.65	1.60	1.54	1.51	1.45	1.42	1.38	1.35	1.32
n_2	2.32	2.24	2.11	2.03	1.94	1.84	1.78	1.70	1.65	1.57	1.52	1.49
100	1.79	1.75	1.68	1.63	1.57	1.51	1.48	1.42	1.39	1.34	1.30	1.28
	2.26	2.19	2.06	1.98	1.89	1.79	1.73	1.64	1.59	1.51	1.46	1.43
125	1.77	1.72	1.65	1.60	1.55	1.49	1.45	1.39	1.36	1.31	1.27	1.25
	2.23	2.15	2.03	1.94	1.85	1.75	1.68	1.59	1.54	1.46	1.40	1.37
150	1.76	1.71	1.64	1.59	1.54	1.47	1.44	1.37	1.34	1.29	1.25	1.22
	2.20	2.12	2.00	1.91	1.83	1.72	1.66	1.56	1.51	1.43	1.37	1.33
200	1.74	1.69	1.62	1.57	1.52	1.45	1.42	1.35	1.32	1.26	1.22	1.19
	2.17	2.09	1.97	1.88	1.79	1.69	1.62	1.53	1.48	1.39	1.33	1.28
400	1.72	1.67	1.60	1.54	1.49	1.42	1.38	1.32	1.28	1.22	1.16	1.13
	2.12	2.04	1.92	1.84	1.74	1.64	1.57	1.47	1.42	1.32	1.24	1.19
1,000	1.70	1.65	1.58	1.53	1.47	1.41	1.36	1.30	1.26	1.19	1.13	1.08
	2.09	2.01	1.89	1.81	1.71	1.61	1.54	1.44	1.38	1.28	1.19	1.11
∞	1.69	1.64	1.57	1.52	1.46	1.40	1.35	1.28	1.24	1.17	1.11	1.00
	2.07	1.99	1.87	1.79	1.69	1.59	1.52	1.41	1.36	1.25	1.15	1.00

均方的自由度，稱爲 n_2；表的本身是 F 值，每一對 n_1 與 n_2 可查得兩個 F 值，上面的一個是 5% 點，下面的一個是 1% 點. 例如表 9–2 的兩個均方以 248.67 較大，故其相當的自由度 2 爲 n_1，而誤差的自由度 15 爲 n_2. 查表 9–3，在 $n_1=2$ 一直行與 $n_2=15$ 一橫行的相交處有兩個數值，上面一數是 3.68，卽 F 的 5% 點，下面一數是 6.36，爲 F 的 1% 點. 顯著性的標準還是和以前一樣，卽求得的 F 值若小於 5% 點則爲不顯著，若在 5% 點與 1% 點間者爲顯著，大於 1% 點者爲非常顯著. 此例求得的 F 值爲 12.18，遠過於 1% 點，故知三個均數間之差別爲非常顯著. 故僅就一週內所增之體重言，則第三組最多，第一組次之，而第二組最少. 但此處食量問題並未計入，若用第十章方法將三組食量化爲相等後，則發現此一週內三組所增體重之均數並無顯著的差別，或因三種飼料的營養價值本無多大差別，或因此處僅用一週的紀錄，時間過短，不能把差別顯出來的緣故.

9–2. 大小不等的三組間之比較——依一個標準分類者 我們在第四章第 4–7 節，曾以 t 測驗法比較控制組與截除結腸組的犬，其副甲狀腺性搐搦發生的時間，原著者蔡、徐二氏(7)曾另用犬十四頭在摘去其副甲狀腺以前或同時將膽管縛紮，以與控制組之僅摘去副甲狀腺者相比較. 其統計處理方法，當與第 4–7 節相同. 但若欲將三組同時比較，則必須用變異數分析法，而不能用以前的 t 值了. 這裏再引用此例，以說明兩組相互比較與三組(或更多組)同時比較的統計處理法之不同.

表 9–4 爲控制組、截除結腸組與縛紮膽管組(該組因有一犬紀錄不全，故僅錄 13 頭)之犬自摘去副甲狀腺至搐搦發生所需的時間，

【表 9-4】 三組紀錄之比較

(自摘去副甲狀腺至搐搦發生所需之時間，小時)

	控　制　組	截除結腸組	縛紮膽管組	總　　計
X	54	48	8	
	48	42	42	
	48	48	96	
	96	48	48	
	45	120	48	
	96	48	60	
	20	53	48	
	68	66	58	
	45		68	
	45		48	
			96	
			96	
			52	
ΣX	565	473	808	1,846
k	10	8	13	31
$\bar{x}$	56.5	59.125	62 15	59.55
ΣX^2	37,055	32,545	55,224	124,824
$(\Sigma X)^2/k$	31,922.5	27,966.12	50,220 31	109,926.32
$\Sigma(X-\bar{x})^2$	5,132.5	4,578.88	5,003.69	14,897.68

此資料與表 9-1 不同的地方，在各組動物數不等，故變異數分析的計算方法微有不同，但原理是一樣的，這裏不再詳述了. 該表上半部是原來紀錄，下半部爲初步統計結果，其中 ΣX 是各組的總時間，k

爲各組動物數，$\bar{x}$ 爲均數，ΣX^2 爲各量數平方之和，$(\Sigma X)^2/k$ 爲求離均差平方和時所用的校正數，如

$$(565)^2/10=31,922.5.$$

在 ΣX^2 內減去此數，卽得離均差平方和

$$37,055-31,922.5=5,132.5.$$

餘類推. 該表右側總計一直行內，除 ΣX，k，ΣX^2 三數爲同一橫行內三組的總和外，其餘是另行計算的，如

$$\bar{x}=\frac{1,846}{31}=59.55,$$

$$\Sigma(X-\bar{x})^2=124,824-\frac{(1,846)^2}{31}$$

$$=124,824-109,926.32=14,897.68.$$

此兩數值，一爲總均數，一爲總離均差平方和. 至此卽可將後者分析爲兩部分：

組內變異　$5,132.5+4,578.88+5,003.69=14,715.07,$

組間變異　$14,897.68-14,715.07=182.61.$

若先算組間變異，則爲

$$\text{組間變異}\quad \frac{(565)^2}{10}+\frac{(473)^2}{8}+\frac{(808)^2}{13}-\frac{(1,846)^2}{31}$$

$$=31,922.50+27,966.12+50,220.31-109,926.32=182.61.$$

其公式爲

$$\Sigma k_i(\bar{x}_i-\bar{x})^2=\frac{(\Sigma X_1)^2}{k_1}+\frac{(\Sigma X_2)^2}{k_2}+\cdots\cdots+\frac{(\Sigma X_n)^2}{k_n}-\frac{(\Sigma X)^2}{\Sigma k_i},$$

公式(9-3)

k_i 爲第 i 組的項目數，$\bar{x}_i$ 爲該組均數，$\bar{x}$ 爲總均數. 此處與公式(9-1)不同的地方是在各組項目數不等，故 $(\Sigma X_i)^2$ 須用 k_i 分別除之，換句話說，是要先除後加，卻不能先加後除. 至於組內變異或誤差的平方和，只須在總變異內減去組間變異卽得，故仍可適用公式(9-2).

組內變異 $14,897.68-182.61=14,715.07$.

這裏要注意的，卽無論先求組內變異或先求組間變異，兩法所得的結果應相同，若兩結果不符，則計算過程中必有錯誤，讀者可利用這個特性，以資核對.

現在要算各離均差平方和的自由度了. 在總變異方面，動物總數是 31 頭，計算離均差平方和時用去一總均數，故自由度減少一個，卽 $31-1=30$. 在組間變異方面，組數爲 3，亦用去一總均數，故自由度爲 $3-1=2$. 在誤差方面，求各組離均差平方和時各用去一本組的均數，故自由度爲

$$(10-1)+(8-1)+(13-1)=28.$$

注意組間變異與誤差兩種自由度之和恰等於總變異的自由度，卽

$$2+28=30.$$

最後列成變異數分析表如下:

【表 9-5】 變異數分析(副甲狀腺性搐搦發生之時間)

變異來源	自由度	離均差平方和	均方(變異數)	F
總變異	30	14,897.68		
組間(各均數)	2	182.61	91.31	
組內(誤差)	28	14,715.07	525.54	

表內均方一項，係將自由度除其相當的離均差平方和卽得. 結果，組

間的均方(91.31)反小於誤差的均方(525.54),這表示三組的均數

56.50,　　59.13,　　62.15

間的變異,反較各組自身的變異為小,實無須再算 F 值.因知三均數間的差別,純由機遇而來,換句話說,三種手術對於動物副甲狀腺性搐搦發生的時間並無真正的差別.原著者蔡、徐二氏謂:'搐搦症狀如常發現,'又謂:'搐搦症之發現期並不因之而延長,'此項結論與統計處理的結果相符.

讀者至此對於變異數分析的基本原理大概已經明瞭,茲將以上所述,提要錄後.變異數分析,係將所有項目的總變異至少析為兩部分:一為各均數間的變異,簡稱為組間變異;一為各組自身的變異,簡稱組內變異或稱誤差.若前者大於後者若干倍以上,則各均數間有顯著的差別,否則純由機遇而來.計算時先求各離均差平方和及自由度,再求得均方或變異數.最後以誤差之變異數除組間變異數,得 F 值.查表 9-3,得 5% 點與 1% 點,即可決定其顯著性.

9-3. 依兩個標準分類的三組間之比較　上面兩個例子都是依一個標準分類的,表 9-1 所根據的是飼料,表 9-4 是根據所施的手術.現在我們要討論依兩個標準的分類了.下表(8)為兔的肝臟中脂酸之碘指數(iodine number of the fatty acids).所謂碘指數乃係一百克之脂酸所能吸收碘的克數,碘指數愈大,則脂酸之未飽和度(unsaturation)愈高.實驗動物為白兔十窩,每窩三頭,重量大致相等.在同窩之三兔中,其一注射垂體加壓劑(pitressin),一飼以氯化膽素(choline chloride),另一飼以氯化膽素並注射垂體加壓劑.但因 E 與 I 兩窩僅各有兔二頭,致在第二組紀錄中缺少兩數,括弧內的數值是

【表 9-6】 白兔肝臟脂酸之碘指數

窩　別	第　一　組 注射垂體加壓劑者	第　二　組 飼食氯化膽素者	第　三　組 飼食氯化膽素並注射垂體加壓劑者	各窩總和	各窩均數
A	110	105	94	309	103.00
B	104	113	99	316	105.33
C	99	114	116	329	107.67
D	101	120	99	329	107.67
E	100	(105.56)	91	296.56	98.85
F	110	121	115	346	115.33
G	120	114	110	344	114.67
H	112	115	101	328	109.33
I	130	(131.56)	113	373.56	124.52
J	114	130	117	361	120.33
各組總和	1,100	1,178.12	1,055	3,333.12	
各組均數	110.00	117.81	105.50	111.104	
ΣX^2	121,858	139,643.94	112,159	373,660.94	

補進去的．填補的理論根據係在每一空缺處填入一 X 值，使誤差的離均差平方和爲最小．所用公式如下：

$$X=\frac{tT+bB-S}{(t-1)(b-1)},\qquad \text{公式(9-4)}$$

式中　　t＝組數或處理數，

b＝窩數，

T＝與缺項同組之項目之和，

B＝與缺項同窩之項目之和，

S＝觀察所得項目之總和.

若缺少 X_1 與 X_2 兩個項目時，可先用一合理數值（如總均數、所在組或窩的均數）暫代 X_2，由公式求得 X_1 的估計值，於是將 X_2 的暫代值除去，而依公式求之，這樣繼續數次，兩數的估計值就趨於固定了. 上例需要估計的數值，一爲 E_2，一爲 I_2，玆演算於後.

第一次估計：先令 $I_2=(130+113)\div 2=121.5$,

於是 $t=3,\ b=10,\ T=1,062.5,\ B=191,\ S=3,217.5$,

代入公式，得

$$E_2=\frac{3(1,062.5)+10(191)-3,217.5}{(3-1)(10-1)}=104.4.$$

乃以 $E_2=104.4$ 代入，而將暫代的 I_2 除去，此時 t,b 兩值仍相同，惟其餘三數則不同，計爲

$$T=1,045.4,\qquad B=243,\qquad S=3,200.4,$$

代入公式求 I_2，得

$$I_2=\frac{3(1,045.4)+10(243)-3,200.4}{(3-1)(10-1)}=131.4.$$

第二次估計：以 $I_2=131.4$ 代入，再求 E_2，此時

$$T=1,072.4,\qquad B=191,\qquad S=3,227.4,$$

得
$$E_2=\frac{3(1,072.4)+10(191)-3,227.4}{(3-1)(10-1)}=105.5.$$

以 $E_2=105.5$ 代入，再求 I_2，此時 $T=1,046.5$, $B=243$, $S=3,201.5$,

得
$$I_2=\frac{3(1,046.5)+10(243)-3,201.5}{(3-1)(10-1)}=131.56.$$

第三次估計： $T=1,072.56,\ B=191,\ S=3,227.56$,

$$E_2=\frac{3(1,072.56)+10(191)-3,227.56}{(3-1)(10-1)}=105.56.$$

$$T=1,046.56,\quad B=243,\quad S=3,201.56,$$

$$I_2=\frac{3(1,046.56)+10(243)-3,201.56}{(3-1)(10-1)}=131.56.$$

若再作第四次估計，將得相同的答案，故待塡補的兩數，事實上已趨於穩定．乃以 $E_2=105.56$, $I_2=131.56$ 塡入表 9-6 的空缺處，就可進行變異數分析了．凡依兩個標準分類的資料，若遇動物死亡或因他故缺少幾個項目時，都可以用此法補入，但缺項太多，則影響資料之正確性．在更複雜的實驗設計中，遇有缺項需塡補時，可參考本書第十三章第 13-8 節，G. W. Snedecor$_{(5,\text{P}.228)}$ 及 C. H. Goulden$_{(9,\text{PP}.263-264)}$ 等著作．

變異數分析時，先求一校正數：

$$\frac{(3,333.12)^2}{30}=370,322.96.$$

再求各離均差平方和：

總變異 $\quad 373,660.94-370,322.96=3,337.98,$

組 間

$$\frac{(1,100)^2+(1,178.12)^2+(1,055)^2}{10}-370,322.96=776.21,$$

窩 間

$$\frac{(309)^2+(316)^2+\cdots\cdots+(361)^2}{3}-370,322.96=1,434.01,$$

誤 差 $\quad 3,337.98-(776.21+1,434.\ 1)=1,127.76.$

所謂組間變異，卽各組均數間的變異，其離均差平方和應與下式結果相等，這點與第9-1節的情形是一樣的.

$$10(110-111.104)^2+10(117.812-111.104)^2 \\ +10(105.5-111.104)^2=776.21.$$

至於窩間變異，在前面兩節裏是沒有提到的. 請看表9-6各窩均數，最小的僅98.85，最大的達124.52，若窩與窩間有顯著的差別，那麽以前所用的組內變異就不是純由機遇得來的誤差，而不能當做比較的標準了. 所以這部分的變異，必須從組內變異中提出來，然後餘下來的纔是眞正的誤差. 窩間變異的離均差平方和係各窩均數與總均數相差之平方和，而以各窩項目數乘之，卽

$$3(103-111.104)^2+3(105.33-111.104)^2 \\ +\cdots\cdots \\ +3(124.52-111.104)^2 \\ +3(120.33-111.104)^2.$$

此式答案應與前面結果1,434.01相等，但因小數四捨五入的關係，或微有出入. 爲使結果較爲正確起見，以用各窩總和計算爲宜. 至於誤差一項，係在總變異內減去組間與窩間兩部分卽得. 又窩間與誤差兩部分相加，1,434.01+1,127.76=2,561.77，恰等於組內的離均差平方和，讀者可自證之.

關於自由度的計算，要注意補進去的兩數不占自由度，故總變異的自由度爲28－1＝27(若無缺項時應爲29)，組間變異的自由度爲3－1＝2，窩間變異的自由度爲10－1＝9，而誤差的自由度則爲27－(2＋9)＝16(無缺項時應爲18). 玆將變異數分析列表如下.

【表 9-7】 依兩個標準分數之變異數分析
（白兔肝臟脂酸碘指數之比較）

變異來源	自由度	離均差之平方和	均方	F	5%點	1%點
總變異	27	3,337.98				
組間	2	776.21	388.11	5.51	3.63	6.23
窩間	9	1,434.01	159.33	2.26	2.54	3.78
誤差	16	1,127.76	70.49			

F 值的計算，都以誤差爲根據，如 $388.11\div70.49=5.51$，又 $159.33\div70.49=2.26$. 由表 9-3，查得 $n_1=2, n_2=16$ 及 $n_1=9, n_2=16$ 時的 5%點與 1%點. 這裏可以看到組間的 F 值與 1%點較近，故爲顯著. [在補入缺項的資料中，所得 F 值常較其眞值稍大，故 G. W. Snedecor 氏主張(5, p. 224)當求得之 F 值在 5%點與 1%點之間時，以近於 1%點者始認爲顯著較妥. 至於精細的校正方法，可參考 F. Yates(13) 及 C. H. Goulden (9, ch. XVI)等著作.]而窩間的 F 值則爲不顯著. 因得結論曰：各組平均碘指數有顯著的差別，卽第二組動物肝臟脂酸之未飽和度最高，而餘兩組次之. 至於各窩之間，雖均數表面値有大小，實則並無眞正的差別. 故窩間變異可不必提出，卽以組內變異作爲比較的標準. 玆以第 9-2 節大小不等的三組之比較法重作變異數分析如下表，此時第二組所缺兩數無須補入，所得結論與前相同.

【表 9-8】 依一個標準分類之變異數分析
（白兔肝臟脂酸碘指數之比較）

變異來源	自由度	離均差之平方和	均方	F	5%點	1%點
總變異	27	2,880.86				
組間	2	658.49	329.25	3.704	3.38	5.57
組內（誤差）	25	2,222.37	88.89			

本節開始時，所述白兔肝臟脂酸碘指數的設計，稱爲隨機區組(randomized blocks). 因爲這種設計最初用在農業方面，所用田地包括若干區組(block)，每一區組又分成若干區(plot)，區的多寡與處理的數目相同，某區應施何種處理，以隨機方法決定之(參閱第一章第1–3節). 上述碘指數實驗，用兔十窩，每窩三頭，相當於十個區組，每區組又分三個區. 現在隨機區組的實驗已廣爲應用，卽非田間實驗，亦沿用此名稱.

9–4. 交互影響(interaction)**之顯著性** 生物化學告訴我們 pH (氫游子濃度指數)對於滲潤作用(imbibition，膠體吸收水分的現象)的影響，視膠體(colloid)的性質而異，蛋白質在等電點(isoelectric point)——兩性電解物粒體，其酸性及鹼性行爲平衡時之 pH 值，稱爲等電點，此點視各種蛋白質而異，如血淸蛋白及酪蛋白爲 4.7，蛋白蛋白爲 4.8 等——時滲潤最小，碳水化合物之複糖類則在中性($pH=7$)時滲潤最大. 這種情形，稱爲 pH 與膠體對於滲潤作用的交互影響. 在農業上，如施以化學肥料的作物，其產量視同時所施的腐植土而不同. 又如某作物之各品種，在不同地方之產量各異. 這些都是交互影響的例子. 遇到這種情形，我們在實驗設計中，就應該顧到交互影響的測量及其顯著性測驗法. 下面的例題說明測量交互影響的設計方法及實驗的結果 (5, p. 233). 實驗中所用的公鼠，分爲六組. 三組的飼料中蛋白質的成分高，簡稱高蛋白，餘三組的飼料中蛋白質的成分低，簡稱低蛋白. 至於蛋白質的來源則各爲牛肉、穀類與豬肉. 因爲每組有公鼠10頭，故各組所增體重的均數，只須看它的總和(ΣX)就可知道. 若從各組均數的表面值看，則在高蛋白方面，吃牛

【表 9-9】 六組公鼠增加之體重(克)

	高蛋白			低蛋白		
	牛肉	穀類	豬肉	牛肉	穀類	豬肉
	73	98	94	90	107	49
	102	74	79	76	95	82
	118	56	96	90	97	73
	104	111	98	64	80	86
	81	95	102	86	98	81
	107	88	102	51	74	97
	100	82	108	72	74	106
	87	77	91	90	67	70
	117	86	120	95	89	61
	111	92	105	78	58	82
ΣX	1,000	859	995	792	839	787
ΣX^2	102,062	75,819	100,075	64,462	72,613	64,401

肉與豬肉的兩組動物體重的增加多，而吃穀類的增加少；在低蛋白方面的情形剛好相反．如果這種現象並非偶然，那麼蛋白質成分的高低，與來源之間就有顯著的交互影響了．計算交互影響時，我們需要列一個副表：

【表 9-10】 求交互影響用之副表

	牛肉	穀類	豬肉	總計
高	1,000	859	995	2,854
低	792	839	787	2,418
總計	1,792	1,698	1,782	5,272

由此即可進行下列計算:

總和　　$\Sigma X = 5,272,$

$\Sigma X^2 = 479,432.$

校正數　　$\frac{(5,272)^2}{60} = 463,233.07.$

離均差平方和

總變異 $479,432 - 463,233.07 =$ 　　16,198.93

高低　$\frac{(2,854)^2 + (2,418)^2}{30} - 463,233.07 =$ 　　3,168.26

來源　$\frac{(1,792)^2 + (1,698)^2 + (1,782)^2}{20} - 463,233.07 =$ 　　266.53

副表總變異

$$\frac{(1,000)^2 + (859)^2 + \cdots\cdots + (787)^2}{10} - 463,233.07$$

$$= 4,612.93$$

交互影響(高低×來源)

$4,612.93 - 3,168.26 - 266.53 =$ 　　1,178.14

誤差(餘數) = 　　11,586.00

在求'高低'的離均差平方和時,高蛋白方面的總數是 2,854,此數係 30 個項目的總和,低蛋白方面亦然,故其平方須各以 30 除之,減去校正數後,即得離均差平方和(參閱公式 9-1).同理,來源方面,每一總數是 20 個項目的總和,故平方後須各以 20 除之,餘類推.表 9-11 的總變異爲 4,612.93, 減去'高低'與'來源'兩方面的變異後,即得交互影響的離均差平方和.最後在總變異 16,198.93 內減去'高低',

'來源', 及'交互影響'三者即得誤差.

關於自由度的計算: 總變異方面爲60－1＝59, 高低方面爲2－1＝1, 來源方面爲 3－1＝2, 交互影響方面將高低與來源的自由度相乘即得(2－1)(3－1)＝2, 誤差方面爲 59－(1＋2＋2)＝54.

【表 9-11】 變異數分析(六組公鼠所增之體重)

變異來源	自由度	離均差平方和	均方	F	5%點	1%點
總變異	59	16,198.93				
高低	1	3,168.26	3,168.26	14.766	——	7.12
來源	2	266.53	133.27			
交互影響	2	1,178.14	589.07	2.745	3.17	——
誤差	54	11,586.00	214.56			

變異數分析見表 9-11, 比較時皆以誤差的均方爲標準, 結果表示吃高蛋白與低蛋白的動物所增體重有非常顯著的差別, 而蛋白質的高低與來源之間並無顯著的交互影響, 可知前述表面的看法是不正確的. 至於來源方面, 其均方小於誤差的均方, 便知爲不顯著, 實無須再算它的 F 值了.

9-5. 依三種標準分類的多組間之比較 表 9-12 爲民國二十五年至二十八年各月初生男女嬰孩之體重紀錄(14), 是項資料係在原來紀錄中, 每月隨機抽取男女嬰孩各五人, 以視其出生體重有無季節波動的現象 (注意第八章練習題第 7 題亦係測驗季節變動現象, 但該題爲計數資料, 而此處爲測量資料, 故統計之處理方法不同). 該表是根據年分、月分與性別三種標準分類的, 其交互影響就有(年×月)、(月×男女)、(年×男女) 與 (年×月×男女) 多種, 末了的一個

稱爲三重交互影響(triple interaction)，係表示(年×月)交互影響在男女方面差別的程度. 計算這些交互影響時，需先有三個副表，如表 9-13(甲)，(乙)，(丙). 詳細過程如下:

總和 $\Sigma X=1,483.15,$

$\Sigma X^2=4,662.4349.$

校正數 $\dfrac{(1,483.15)^2}{480}=4,582.7790.$

離均差平方和

總變異 $4,662.4349-4,582.7790=$ 79.6559

月間 $$\frac{(124.72)^2+(125.50)^2+\cdots\cdots+(121.94)^2}{40}-4,582.7790=1.0183$$

年間 $$\frac{(366.54)^2+\cdots\cdots+(370.80)^2}{120}-4,582.7790=0.2348$$

男女 $$\frac{(756.78)^2+(726.37)^2}{240}-4,582.7790=\quad 1.9266$$

副表(甲)之總變異

$$\frac{(30.01)^2+(30.95)^2+\cdots\cdots+(31.47)^2}{10}-4,582.7790=6.6435$$

交互影響(年×月)

$6.6435-1.0183-0.2348=$ 5.3904

交互影響(月×男女)

$$\frac{(-1.00)^2+(2.78)^2+\cdots\cdots+(5.56)^2}{40}-1.9266=2.2036$$

【表 9-13】 計算交互影響所用之副表(甲)

	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月	總　計
二十五年	30.61	30.95	30.57	30.62	28.01	32.28	31.59	29.36	30.79	31.07	29.49	31.20	366.54
二十六年	29.64	32.79	31.07	30.84	31.11	30.26	31.06	31.43	31.52	32.61	31.69	28.12	372.14
二十七年	31.97	30.46	29.11	32.27	33.05	30.68	32.10	30.95	28.17	30.43	32.73	31.15	373.67
二十八年	32.50	31.30	29.85	31.26	30.37	29.94	32.16	31.91	29.76	30.83	29.4[illegible]	31.47	370.80
總　計	124.72	125.50	121.20	124.99	122.54	123.16	126.91	123.65	120.24	124.94	123.36	121.94	1,483.15

【表 9-13】 計算交互影響所用之副表(乙)

	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月	總　計
男	61.86	64.14	60.79	64.23	64.45	62.69	63.80	63.24	59.69	66.30	61.84	63.75	756.78
女	62.86	61.36	60.41	60.76	58.09	60.47	63.11	60.41	60.55	58.64	61.52	58.19	726.37
總　計	124.72	125.50	121.20	124.99	122.54	123.16	126.91	123.65	120.24	124.94	123.36	121.94	1,483.15
相　差	-1.00	2.78	.38	3.47	6.36	2.22	.69	2.83	-0.86	7.66	.32	5.56	

【表 9-13】 計算交互影響所用之副表(丙)

	二十五年	二十六年	二十七年	二十八年	總　計
男	184.38	193.23	185.91	193.26	756.78
女	182.16	178.91	187.76	177.54	726.37
總　計	366.54	372.14	373.67	370.80	1,483.15
相　差	2.22	14.32	-1.85	15.72	

交互影響(年×男女)

$$\frac{(2.22)^2+(14.32)^2+\cdots\cdots+(15.72)^2}{120}$$

$$-1.9266=1.9112$$

表 9–12 逐年逐月男女之總變異

$$\frac{(14.15)^2+(16.46)^2+\cdots\cdots+(13.61)^2}{5}$$

$$-4,582.7790=17.9168$$

交互影響(年×月×男女)

$$17.9168-(1.0183+0.2348+1.9266$$

$$+5.3904+2.2036+1.9112)$$

$$=17.9168-12.6849=5.2319$$

誤差(餘數) $79.6559-12.6849-5.2319=\quad 61.7391$

上列月間變異之離均差平方和,係將副表所載各月之總計值平方後相加,以構成每月總計值之項目數 40 除之,然後減去校正數卽得.年間及男女兩變異之求法亦同.計算(年×月)之交互影響時,須先求得副表(甲)之總變異,再減去月間與年間兩變異卽得.至於(月×男女)之交互影響本可在副表(乙)之總變異內減去月間與男女間之變異,但因性別方面只有男女兩項,故可以簡法計算,卽將該表每月男女之差平方後相加,以每月男女總數 40 除之,再減去男女間之變異,卽爲所求之交互影響.又交互影響(年×男女)之計算法亦然.至於三重交互影響,則須在表 9–12 逐年逐月男女之總變異內減去年間、月間、男女間及各二重交互影響始可.

各離均差平方和之自由度計算如下:總變異方面,480－1＝479;

月間變異 $12-1=11$; 年間變異 $4-1=3$; 男女間變異 $2-1=1$; 交互影響(年×月), $(4-1)(12-1)=33$; 交互影響(月×男女), $(12-1)\times(2-1)=11$; 交互影響(年×男女), $(4-1)(2-1)=3$; 交互影響(年×月×男女), $(4-1)(12-1)(2-1)=33$; 誤差, $479-(11+3+1+33+11+3+33)=384$.

變異數分析列於下表:

【表 9-14】 依三個標準分類之變異數分析(初生嬰兒之體重)

變異來源	自由度	離均差平方和	均方
總變異	479	79.6559	
月間	11	1.0183	.09257
年間	3	0.2348	.07827
男女間	1	1.9266	1.92660
交互影響(年×月)	33	5.3904	.16335
交互影響(月×男女)	11	2.2036	.20033
交互影響(年×男女)	3	1.9112	.63707
交互影響(年×月×男女)	33	5.2319	.15854
誤差	384	61.7391	.16078

這裏我們可以看到: 月間與年間兩均方都小於誤差,故爲不顯著,換言之,初生嬰孩之體重並無季節波動的現象; 又交互影響(年×月)及(年×月×男女)的兩個均方,幾與誤差相等,這表示逐年逐月之間並無眞正的差別,且交互影響(年×月)在男女方面也沒有什麼不同; 又交互影響(月×男女)雖略大於誤差,但爲不顯著. 上表中值得注意的是男女間與交互影響(年×男女)的兩個均方. 後者的 F 值是 $.63707\div.16078=3.962$, 此值大於 1%點(3.83),故爲非常顯著. 這是指各年男女嬰孩的體重均數,其趨勢很不一致. 試由表 9-13(丙)

計算各年男女的均數，則將如表 9-15. 其中二十八年男女均數相差

【表 9-15】 各年男女嬰孩體重之均數(仟克)

年份	男	女	相差
二十五年	3.073	3.036	+.037
二十六年	3.221	2.982	+.239
二十七年	3.099	3.129	−.030
二十八年	3.221	2.959	+.262
總計	3.153	3.027	+.126

+.262 仟克，而二十七年則相差 −.030 仟克. 正因爲相差符號有正有負，相差數值有大有小，遂使(年×男女)的交互影響非常顯著. 至於男女總均數的相差爲 +.126, 其均方爲 1.9266(見表 9-14)，這裏我們需要考慮的，在測驗顯著性時應當用那一個均方作爲比較的標準? 如果比較男女的相差而對於年月因子不加考慮，那麽祇須把男女的均方與誤差的均方相比較就行了；但若所研究的問題是：在歷年新生嬰兒中，苟以二十五至二十八年爲隨機抽取的樣本，那麽男女嬰孩的體重有顯著的差別否?這裏就要把男女的均方與交互影響(年×男女)的均方相比較，卽 $F=1.9266\div.63707=3.024$，其自由度 $n_1=1$, $n_2=3$, 5% 點爲 10.13，故知男女均數的差別，若與歷年男女間的變異相比較時實爲不顯著. 此例係說明三個標準的分類及交互影響的用法，在有些問題中交互影響的均方常爲眞正的誤差均方，且爲顯著性測驗時所應當用的. 此點在下節還有更詳細的討論. 至於初生嬰孩體重的研究，因此處僅有很少的資料，不能遽下結論.

9-6. 選擇適當的誤差 顯著性是相對的，而非絕對的. 相差是

否顯著，係與另一變異相比較而言，這種變異的來源是按我們對於實驗結果所用的解釋而任意選擇的.假定現在作一化學測定的實驗.所用的方法係在 A, B 兩物質中各抽取 20 個樣本.每個樣本作 2 次測定.此實驗有兩個誤差，一爲抽樣時所產生的，一爲兩次測定結果的差別所產生的，後者純係實驗技術上的誤差.這兩種誤差彼此獨立，故其大小可以相等，也可以相去懸殊.本實驗的變異數分析有如表 9-16 的形式:

【表 9-16】 化學測定之變異數分析(一)

變異來源	自由度	變異數(均方)
材料(A, B 兩物質間)	1	m
A 物各樣本間	19 } 38	a } s
B 物各樣本間	19	b
重複測定間	40	d
總計	79	

爲便於討論計，假定 a, b 兩變異數相等，並可認爲合成一個變異數 s. 若將 s 與 d 相比較，那麼後者是很小的.現在我們要測驗 A, B 兩物質相差的顯著性，若二者之間並無差別，那麼變異數 m 將與 s 相等，因爲 m 是與樣本間的變異有關的.今 d 值既很小，若用以測驗 m 的顯著性，卽使 A, B 兩物並無差別，而 m 與 d 的比例將很大，這顯然是錯誤的.也許有人要問：若 d 比 s 大得多，將怎樣辦？但仔細一想，這種情形很難得，因爲產生變異數 d 的因子，對於變異數 m 也同樣生作用，若樣本之間並無變異，則就平均言，s 將與 d 相等.故當 d 與 s 大致相等時，卽表示 s 大部分由兩次測定的差別而來，於是抽樣誤

差的本身就不顯著了. 此時可用 d 來測驗 m 的顯著性, 且因 d 的自由度較 s 的自由度爲多, 故可增加測驗之精密度(precision).

還有一個假設的實驗, 也用兩種物質, 假定兩物質都充分勻淨, 故抽樣誤差可略而不計, 這點是與前例不同的. 本實驗也可能有兩種誤差: 一是實驗室技術方面的誤差, 一是工作者方面的誤差, 因爲沒有兩個人會得到完全相同的結果的. 工作者共有六人, 每人用兩種物質作同樣的試驗, 每試驗重複三次, 這樣可以測量技術上的誤差. 其變異數分析如表 9–17. 這裏要注意的是變異數 e, 其意義可用

【表 9–17】 化學測定之變異數分析(二)

變異來源	自由度	變異數(均方)
材料	1	m
工作者	5	o
工作者之誤差〔即交互影響(材料×工作者)〕	5	e
重複測定之誤差	24	d
總計	35	

表 9–18 來解釋. 該表中 a_1 代表第 1 位工作者以 A 物質測定三次的

【表 9–18】 各工作者所測定之兩物質之均數

		工作者 1	2	3	4	5	6
材料	A	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
	B	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6

均數, b_1 爲彼測定 B 物質三次的均數, 餘類推. 因爲各工作者所測定的兩均數的相差不同, 於是就產生變異數 e. 若 $(a_1-b_1)=(a_2-b_2)$

$=\cdots\cdots=(a_6-b_6)$,則 e 等於零.若六對均數之差相去懸殊,那麼 e 就很大了.假定有很多工作者對於 A, B 兩物作同樣的測定,而上述研究祇是這大規模實驗中的一個樣本,那麼產生變異數 e(工作者的誤差)的許多因子對於變異數 m(表示兩物質間的相差者)也會發生作用;故若兩物質間並無差別,則 m 將等於 e.在這種樣本中,應將 e 當做誤差變異數,以測驗 m 的顯著性.有時用錯了誤差變異數,會引起很不幸的結果.因爲各工作者對於技術的標準化特別注意,故變異數 d 很小,我們假定它比 e 要小得多.今 m 雖僅略大於 e,但若與 d 比較起來,就很顯著了.因得一結論曰:A 所得的結果比 B 的大得多.某工廠就根據實驗結果用 A, B 兩物質從事製造.製造時需用許多工人,於是工作者的誤差,在實驗室中被忽略的,這時卻表現出來了.這樣經實地製造後,證明兩物質得到同樣的結果.所謂嚴密控制的實驗,因此受人詆毀了.如果研究者能仔細考慮抽樣的情形及其全體(如上述大規模製造中的很多工作者)的正確性質,然後作適當的顯著性測驗,那麼這種錯誤是可以避免的.

也許有人要問:在測驗兩物質相差的顯著性時,既然不用技術上的誤差,那麼每一工作者何必作三次測定,而又把變異數 d 算出來呢.須知在重複測定間若有相當誤差,則變異數 e 亦將受其影響,故工作者之間若並無變異,則就平均言,e 將等於 d.所以變異數 d 的用途,在用來測驗 e 的顯著性.若 d 值並不太小,足以減低實驗的精密度,這時就需要改良測定的技術了.

關於選擇適當誤差的問題,在 C. H. Goulden (9, pp. 128–134) 氏著作中還有更詳細的例子,讀者可以參考.

【練　習　題】

1．查下列各對自由度之 F 之 5%點與 1%點；遇表 9–3 未載之自由度，則以最近者代之．

n_1	1	3	4	8	6	30	50	2	3	80
n_2	3	1	4	13	25	16	400	54	384	58

2．試比較下列四組之均數有差別否？

第 一 組	第 二 組	第 三 組	第 四 組
8	7	6	7
3	9	12	4
4	6	9	5
3	8	13	3
1	4	10	2
5	7	11	0
4	11	10	9
2	8	8	7
4	7	11	6
6	3	10	7

3．下表為不同飼料之三組白鼠，在九週內增加之體重(克)(15)，試比較三種飼料之營養價值：

蠶 蛹 粉	牛 肉 粉	豬 肉 粉
158	155	208
134	132	131
128	132	142
123	110	70
105	85	69
134	106	87

4．鄭集、戴重光(10)二氏在黃豆蛋白之研究中，將白鼠分為三

組: 甲組飼料爲黃豆蛋白質(glycinin); 乙組爲黃豆蛋白質與酪蛋白(casein); 丙組爲黃豆蛋白質與卵蛋白(albumin). 經三十日後, 各組動物所增體重(克)如下, 問各組所增體重之均數有顯著的相差否?

甲組	乙組	丙組
23.5	41.3	60.9
15.9	40.7	62.1
6.6	28.8	48.9
9.6	18.8	61.2
8.4	21.7	63.9
11.4	25.1	73.7
20.4	22.2	——

5. 蔡翹、徐豐彥二氏(11)曾研究腸阻塞對於副甲狀腺性搐搦之影響. 二氏將犬 28 頭分爲三組: A 組之阻塞在十二指腸(duodenum)或空腸(jejunum)上部; B 組之阻塞在迴腸(ileum)下部; C 組之阻塞在結腸(colon). 下表爲各組動物於施手術(摘除副甲狀腺及施腸阻塞)後之生存日數. 問三組有顯著的差別否?

A組	B組	C組
2.0	11.0	17.0
1.8	10.0	8.0
5.0	12.0	8.0
9.0	4.0	8.0
0.5	2.8	8.0
1.3	13.0	4.3
14.0	3.5	1.5
2.0	26.0	20.0
2.5	0.5	
4.8	3.5	

6. 汪敬熙氏(12)等研究貓在麻醉中之皮膚電反射, 氏等用貓 14

頭，先在大貓完整時實驗之，繼割去其皮質，再割去其視丘，依次測定其皮膚電反射之潛伏期及強度．下表爲一部分紀錄，試測驗其均數相差之顯著性，並解釋之.（注意：此爲依二個標準分類之資料.）

皮膚電反射之潛伏期（秒）

動 物 號 碼	大腦完整時	去大腦皮質後	再去視丘後
31	0.76	0.87	1.28
34	0.86	0.97	1.46
44	0.78	0.90	1.50
66	0.74	0.87	1.64

7．下表(14)爲不同胎次之男女嬰兒初生時之體重（仟克）．試測驗其顯著性，並解釋交互影響（胎次 × 男女）之意義.（注意：此表亦由隨機抽樣得來，何以各組嬰兒數不等？計算離均差平方和時須用公式 9–3.）

	胎					次				
	一		二		三		四		五及以上	
	男	女	男	女	男	女	男	女	男	女
X	2.61	2.72	3.63	3.36	2.95	3.97	3.18	2.83	3.63	3.18
	3.03	3.18	3.01	2.95	2.83	2.61	2.27	3.52	2.95	3.29
	3.06	2.49	3.06	2.83	2.72	3.40	3.54	3.63	3.29	4.20
	2.15	3.06	2.49	3.12	3.74	3.52	3.01	2.95	3.06	2.83
	3.52	3.18	3.18	2.95	2.04	3.12	3.01	3.40	2.95	2.89
	3.40	3.40	3.63	2.21	2.95	3.06			3.23	2.83
	2.61	3.01	2.83	2.72	2.38				2.66	2.95
	3.23	2.61	2.72	2.78					3.18	2.42
	2.72	2.92		2.72					2.55	2.83
	2.61	3.23							3.29	
	2.04	3.18							3.18	
	2.61								3.69	
	3.52								2.63	
	3.06								2.83	
ΣX	40.20	32.98	24.55	25.64	19.61	19.68	15.01	16.33	44.12	27.42
k	14	11	8	9	7	6	5	5	14	9
$\bar{x}$	2.871	2.998	3.069	2.849	2.801	3.280	3.002	3.266	3.151	3.047
ΣX^2	118.2954	99.6908	76.4973	73.8472	56.6259	65.6214	45.9171	53.8387	140.6314	85.5142

【參 考 文 獻】

(1) Fisher, R. A., International Mathematical Conference, Toronto (1924).

(2) Fisher, R. A., Statistical Methods for Research Workers, Oliver and Boyd, Edinburgh (1935).

(3) Mahalanobis, P. C., Indian Journal of Agricultural Science, 2 : 694 (1932).

(4) Snedecor, G. W., Analysis of Variance and Covariance, Collegiate Press, Inc. Ames (1934).

(5) Snedecor, G. W., Statistical Methods, The Iowa State College Press, Ames, Iowa (1940).

(6) Lan, T. H., Biological values of mixed cereal and legume proteins, Chinese Journal of Physiology, 10, 5 : 637–644 (1936).

(7) Tsai, C. and Hsu, F. Y., Studies on the pathogenesis of parathyroid tetany, II. The effect of ligation of the bile duct, Chinese Journal of Physiology, 3, 2 : 197 – 204 (1929).

(8) Mukerji, B. and Van Dyke, H. B., The effect of the pressor principle of the posterior lobe of the pituitary body on the liver-fat after the feeding of choline chloride, Chinese Journal of Physiology, 9, 1 : 69–76 (1935).

(9) Goulden, C. H., Methods of Statistical Analysis, John

Wiley & Sons, Inc. New York (1939)

(10) Tai, T. K. & Cheng, L. T., Studies on soy bean proteins, IV. The supplementary effect of albumin and casein on the nutritive value of glycinin, Journal of Chinese Chemical Society, 11, 1 (1944).

(11) Tsai, C. and Hsu, F. Y., Studies on the pathogenesis of parathyroid tetany, III. Influence of intestinal obstruction, Chinese Journal of Physiology, 3, 4 : 389–398(1929).

(12) Wang, G. H., Pan, J. G., and Lu, T. W., The galvanic skin reflex in normal, thalamic, decerebrated and spinal cats under anaesthesia, Chinese Journal of Physiology, 3, 2 : 109–122 (1929).

(13) Yates, F., The analysis of replicated experiments when the field results are incomplete, The Empire Journal of Experimental Agriculture, 1 : 129–142 (1933).

(14) 成都進益高級助產職業學校附屬產院之紀錄.

(15) 陳朝玉:蠶蛹營養價值之研究,營養專報,第一號,1–7頁,國立四川大學農學院(三十五年五月).

第十章 共變數分析

本書第五、六兩章所討論的直線迴歸與相關，通常是用來表示同一組內兩變數間的關係的. 現在我們要把這些方法加以擴充，俾用於兩組以上的資料，並與前章的變異數分析相聯繫，而成共變數分析(analysis of covariance). 本來共變數可用於幾組含有二個或二個以上變數的測量資料，但本章所討論者以兩個變數爲限.

10-1. 修正均數(adjusted means)**之顯著性** 前章表 9-10 六組公鼠增加之體重，若與各鼠食物消費量並列，則如表10-1所示. 此處食物消費量係以熱量 10 卡(calorie)爲單位，如 108 即代表 1,080 卡. 若以飼料的實際重量計算，其統計處理方法是一樣的，只是數值不同罷了. 該表所列六組公鼠，每組各得一種飼料. 因各組所用動物一律是十頭，所以從各組的總和 ΣX 或 ΣY，就可推知其均數. 我們可以看到第 1, 3 兩組所增體重 (Y) 的均數最高，而第 4, 6 兩組則最低. 但各鼠食量不同，其體重增加的多少是否食量使然，這點必須考慮的. 通常將資料化爲每單位食量所增之體重，或每增加單位體重所需之飼料，這樣雖簡單明瞭，但這些數值實爲體重與食量間之比例，若依前章變異數分析法來測驗平均比例值間的顯著性是不甚妥當的，並且有時會得到不同的結果. 最合理的方法，是保存食量與體重的原來紀錄而用共變數處理之.

【表 10–1】 六組公鼠之食物消費量(X, 單位爲10卡)

及所增之體重(Y, 克)

	組					別						
	1		2		3		4		5		6	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
X, Y	108	73	99	98	194	94	165	90	124	107	140	49
	136	102	117	74	198	79	164	76	95	95	177	82
	138	118	90	56	196	96	161	90	116	97	189	73
	159	104	141	111	198	98	159	64	112	80	142	86
	146	81	106	95	210	102	175	86	123	98	216	81
	141	107	112	88	196	102	135	51	110	74	200	97
	175	100	110	82	230	108	132	72	137	74	255	106
	149	87	117	77	222	91	190	90	105	67	173	70
	174	117	111	86	220	120	145	95	135	89	153	61
	176	111	122	92	228	105	142	78	126	58	160	82
ΣX_i	1,502		1,125		2,092		1,568		1,183		1,805	
ΣY_i		1,000		859		995		792		839		787
ΣX_i^2	229,760		128,245		439,544		148,886		141,525		337,433	
ΣY_i^2		102,062		75,819		100,075		64,462		72,613		64,401
ΣX_iY_i	151,840		97,776		203,892		125,370		99,195		145,872	
總　計	$\Sigma X=9,275$, $\Sigma Y=5,272$, $\Sigma XY=828,951$, $\Sigma X^2=1,525,393$, $\Sigma Y^2=479,432$.											

我們先要把所增體重與食量間的關係找出來，最簡單的關係是直線迴歸.其初步計算附於表10–1的下端. ΣX_i 爲各組 X 值的總和,

ΣX_i^2 爲各組 X 值平方後的總和，Y 方面的情形亦然. 至於 $\Sigma X_i Y_i$ 則爲同組各對 X, Y 值乘積的總和，如

$$(108)(73)+(136)(102)+\cdots\cdots+(176)(111)=151,846.$$

再將各組計算結果相加，卽得該表'總計'欄內的五個總和. 有了這些總和值，就可作進一步的計算.

校正數：　X 方面　$(9,275)^2/60=1,433,760.42,$

　　　　　Y 方面　$(5,272)^2/60=463,233.07,$

　　　　　XY 方面　$(9,275)(5,272)/60=814,963.33.$

離均差平方和：

$$\Sigma(X-\bar{x})^2=1,525,393-1,433,760.47=91,632.58,$$

$$\Sigma(Y-\bar{y})^2=479,432-463,233.07=16,198.93.$$

離均差積之和：

$$\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})=828,951-814,963.33=13,987.67.$$

上列結果係用公式(3-5)及(5-1)求得，這些是六十頭公鼠總計的離均差平方和及積和. 其次求各組均數間的離均差平方和及積和：

$$\Sigma k_i(\bar{x}_i-\bar{x})^2=\frac{(1,502)^2+\cdots\cdots+(1,805)^2}{10}-1,433,760.42$$
$$=67,662.68,$$

$$\Sigma k_i(\bar{y}_i-\bar{y})^2=\frac{(1,000)^2+\cdots\cdots+(787)^2}{10}-463,233.07$$
$$=4,612.93,$$

$$\Sigma k_i(\bar{x}_i-\bar{x})(\bar{y}_i-\bar{y})=\frac{(1,502)(1,000)+\cdots\cdots+(1,805)(787)}{10}$$
$$-814,963.33=5,520.97.$$

此處 $\bar{x}_i, \bar{y}_i$ 爲各組均數，如第 1 組爲 $\bar{x}_1=150.2$, $\bar{y}_1=100.0$; 又 $\bar{x}=154.58$, $\bar{y}=87.87$, 爲六十頭鼠之總均數, k_i 爲各組所有鼠數，此處一律等於 10. 上列兩平方和係用公式(9-1)計算，至離均差積之和，則用下列公式計算：

$$\Sigma k_i(\bar{x}_i-\bar{x})(\bar{y}_i-\bar{y})=\frac{(\Sigma X_1)(\Sigma Y_1)}{k_1}+\frac{(\Sigma X_2)(\Sigma Y_2)}{k_2}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{(\Sigma X_n)(\Sigma Y_n)}{k_n}-\frac{(\Sigma X)(\Sigma Y)}{\Sigma k_i}.$$

公式(10-1)

此例各組動物數相等，即 $k_1=k_2=\cdots\cdots=k_6$, 故計算式如上. 讀者若將各組均數，對於總均數之離均差，求其乘積而總和之，如

$$10(150.2-154.58)(100.0-87.87)+\cdots\cdots$$

$$+10(180.5-154.58)(78.7-87.87),$$

其結果應等於 5,520.97 (小數點後或稍有出入)，但實際計算時，以用公式(10-1)較爲便利而正確. 再次在總的變異及共變異(參閱第六章第 6-2 節)內，減去組間的變異及共變異，即得組內的離均差平方和及積和：

$$\Sigma\Sigma(X_i-\bar{x}_i)^2=91,632.58-67,662.68=23,969.90,$$

$$\Sigma\Sigma(Y_i-\bar{y}_i)^2=16,198.93-4,612.93=11,586.00,$$

$$\Sigma\Sigma(X_i-\bar{x}_i)(Y_i-\bar{y}_i)=13,987.67-5,520.97=8,466.70.$$

由上列結果，可計算迴歸係數及修正值了. 讓我們先算六十頭鼠總計時，由食量推求所增體重之迴歸. 按公式(5-2)及(5-3)，求得迴歸係數爲

$$13,987.67 \div 91,632.58 = .15265.$$

又 $\bar{x}=154.58, \bar{y}=87.87$，因得迴歸方程式爲

$$Y-87.87=.15265(X-154.58),$$

或
$$Y=.15265X+64.28. \tag{A}$$

若將食量化爲相等，即各鼠所消費之食物皆等於總均數 154.58 時，則按公式(5–7)，求得所增體重的修正值爲

$$Y_a=Y-.15265(X-154.58),$$

或
$$Y_a=Y-.15265X+23.59. \tag{B}$$

將表 10–1 各 X 值代入(B)式，如第 1 組之第一鼠，

$$Y_a=73-.15265(108)+23.59=80.11.$$

全部結果，載於表 10–2. 該表末二行爲各組修正值之和及修正值平方之和. 將六組相加，得

【表 10–2】根據總迴歸求得各鼠所增體重之修正值(食量相等)

	組			別		
	1	2	3	4	5	6
Y_a	80.11	106.48	87.98	88.41	111.67	51.22
	104.84	79.74	72.37	74.56	104.09	78.58
	120.53	65.85	89.68	89.02	102.89	67.74
	103.32	113.07	91.37	63.32	86.50	87.92
	82.31	102.41	93.53	82.88	102.82	71.62
	109.07	94.50	95.68	53.99	80.80	90.06
	96.88	88.80	96.48	75.45	76.68	90.66
	87.85	82.74	80.70	84.59	74.57	67.19
	114.03	92.65	110.01	96.46	91.99	61.24
	107.73	96.97	93.79	79.92	62.36	81.17
ΣY_a	1,006.67	923.21	911.59	788.60	894.37	747.40
ΣY_a^2	102,994.69	86,954.11	83,991.04	63,633.43	82,265.55	57,429.81

$$\Sigma Y_a=5,271.84, \quad \Sigma Y_a^2=477,268.63,$$

由此得修正值之總變異爲

$$477,268.63-(5,271.84)^2/60=14,063.68.$$

再將組內的離均差平方和及積和，以同樣步驟求得迴歸係數爲

$$8,466.70 \div 23,969.90 = .3532,$$

迴歸方程式爲 $Y = .3532X + 33.27,$ (C)

修正值爲 $Y_b = Y - .3532X + 54.60.$ (D)

此處修正值的符號用 Y_b，以別於前面的 Y_a. 將表 10-1 各 X 值代入(D)式，得表 10-3 的結果.

【表 10.3】 根據組內迴歸求得各鼠所增體重之修正值(食量相等)

	組					別
	1	2	3	4	5	6
Y_b	89.45	117.63	80.08	86.32	117.80	54.15
	108.56	87.28	63.67	72.68	116.05	74.08
	123.86	78.81	81.37	87.73	110.63	60.85
	102.44	115.80	82.67	62.44	95.04	90.45
	84.03	112.16	82.43	78.79	109.16	59.31
	111.80	103.04	87.37	57.92	89.75	80.96
	92.79	97.75	81.36	79.98	80.21	70.53
	88.97	90.28	67.19	77.49	84.51	63.50
	110.14	101.39	96.90	98.39	95·92	61.56
	103.44	103.51	79.07	82.45	68.10	80.09
ΣY_b	1,015.48	1,007.65	802.11	784.19	967.17	695.48
ΣY_b^2	104,538.41	102,972.17	65,125.92	62,771.52	96,000.85	49,586.96
校正數	103,119. 6	101,535.85	64,338.05	61,495.40	93,541.78	48,369.24
離均差平方和	1,418.45	1,436.32	787.87	1,276.12	2,459.07	1,217.72

該表校正數與離均差平方和之計算法同前. 第 1 組的十個公鼠所食飼料相同，其食量亦經修正值化爲相等，但所增體重仍有多有少，這種組內變異，可認爲是由機遇使然，換句話說，該組離均差平方和 1,418.45 所表示的變異是與食物的質與量都沒有關係的，其他各組

的組內變異亦然. 六組的離均差平方和相加,得

$$1,418.45+1,436.32+\cdots\cdots+1,217.72=8,595.55.$$

構成此總和的各分子既都與飼料的質和量無關,則此總數 8,595.55,當亦為純粹機遇的結果.

至此,我們已求得了體重修正值的兩種變異:由表 10-2 所得的總變異 14,063.68,是把六十頭鼠放在一起求得的,這變異應與飼料優劣及機遇因子都有關係; 另由表 10-3 所得的組內變異 8,595.55 卻純由機遇而來. 那麼二者的相差 14,063.68 − 8,595.55 = 5,468.13 可認為食量已化為相等後各組飼料的優劣所產生的變異了. 因此可用變異數分析法以測驗其顯著性.

【表 10-4】 食量化為相等後,白鼠所增體重之變異數分析

變異來源	自由度	離均差平方和	均方	F
總變異	58	14,063.68		
組內(誤差)	53	8,595,55	162.2	
組間	5	5,468.13	1,093.6	6.74

各離均差平方和的自由度要說明一下. 在總變異方面原有鼠 60 頭,在求離均差平方和時用一總均數,又在求修正值時用一迴歸係數(見方程式 B),共用了兩個統計數,故其自由度為 60 − 2 = 58. 在誤差方面,各組用了一個本組的均數,又用了一個公共的迴歸係數(見方程式 D),故其自由度為 6(10 − 1) − 1 = 53. 餘下的 5 個自由度,屬於組間的變異(下面還有更詳細的分析). 以自由度除離均差平方和得均方. 最後以誤差的均方除組間的均方,得 F 值為 6.74. 查表 9-3, 當 $n_1=5$, $n_2=53$ 時, F 的 1% 點約為 3.37,實際求得之 F 值大於 1%

點，故知當食量化爲相等後，各組均數之間仍有非常顯著的差別．若設計時沒有其他因子夾雜在內，那麼我們可以說這六種飼料在質的方面有優劣之分了．

10–2. 共變數分析之計算法 上節修正均數顯著性的測驗，是用來說明共變數分析的原理的．實際計算時，我們無須經過這樣冗長的步驟．在第五章第 5–3 節裏，我們已說明，修正值的總和應與觀察值的總和相等，又修正值之標準差，卽爲標準估計誤差．所以修正值的均數等於觀察值的均數，而修正值的離均差平方和等於估計值誤差的平方和．我們就可利用這些特性，使共變數分析法得一捷徑．

第一步，求表 10–1 各組 X,Y 值的總和、平方之和及乘積之和，結果已載該表末行總計欄內．第二步，求校正數，再求離均差平方和及積和，連其自由度〔白鼠共 60 頭，食量方面用一 $\bar{x}$，故離均差平方和之自由度爲 59；體重方面亦然；至離均差之積和，則原有 60 對數值，用去一對總均數 $(\bar{x},\bar{y})$，故仍爲 59．〕寫在表 10–5 左半節第一橫行內．第三步，求各組均數間的離均差平方和及積和，連自由度（6－1

【表 10–5】 共變數分析及修正均數之顯著性測驗

變異來源	自由度	離均差之平方和及積和			估計之誤差		
		$\Sigma(X-\bar{x})^2$	$\Sigma(X-\bar{x})\times(Y-\bar{y})$	$\Sigma(Y-\bar{y})^2$	平方和(1)	自由度	均方
總變異	59	91,632.58	13,987.67	16,198.93	14,063.72	58	
飼料	5	67,662.68	5,520.97	4,612.93			
組內(誤差)	54	23,969.90	8,466.70	11,586.00	8,595.37	53	162.2
修正均數顯著性之測驗					5,468.35	5	1,093.7

(1) $\Sigma(Y-\bar{y})^2-[\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})]^2/\Sigma(X-\bar{x})^2$, $F=1,093.7/162.2=6.74$.

$=5$)，寫在第二橫行內. 第四步，將一、二兩橫行相減，卽得組內的變異、共變異及自由度，寫在第三橫行內. 這些在上節都已經計算好了. 至於右半邊卻是重新計算的，也正是我們所說的捷徑. 按公式(5–4)，估計值誤差的平方和爲

$$\Sigma(Y-\bar{y})^2-\frac{[\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})]^2}{\Sigma(X-\bar{x})^2},$$

此式卽等於修正值的離均差平方和. 如

$$\text{總變異方面}\qquad 16,198.93-\frac{(13,987.67)^2}{91,632.58}=14,063.72,$$

$$\text{誤差方面}\qquad 11,586.00-\frac{(8,466.70)^2}{23,969.90}=8,595.37.$$

此兩數與上節由表10–2及表10–3求得的相同，而更爲正確，因上節在計算過程中，小數經過多次的四捨五入，故小數點後的數目與這裏的稍有出入，至於計算時的繁簡卻不可以道里計了. 在求估計之誤差時，因另用一迴歸係數，故其自由度較左側少 1. 以上是第五步的計算. 繼將總變異與誤差的兩個平方和相減，得5,468.35，其自由度爲 $58-53=5$，是用來測驗修正均數的顯著性的. 這是第六步的計算. 最後以自由度除平方和，得均方，再以誤差的均方除修正均數的均方，得 F 值，由表9–3，查得 F 的 1%點，藉知修正均數間的相差爲非常顯著.

10–3. 各組人數不等時之共變數分析法　當各組人數不等時，共變數分析的原理，還是一樣的，不過計算方法稍有變化能了. F. G. Benedict 氏等在燕京大學研究華人之基底代謝時(1)，曾測量該校師

生工友等之身高體重及每分鐘氧消耗量等.本書著者以是項紀錄按 Stevenson 氏公式(2),將身高、體重化爲身體表面積,又依 Du Bois 氏之假定在基底狀況時每一升之氧消耗量相當於 4.8 仟卡之熱量,而計算每一被試者每小時所產生之熱量.表 10–6 爲該校男性師生之

【表10–6】 中國學界男子之身體表面積(X,平方米)及在基底狀況下每小時之發熱量(Y,仟卡)

	29 歲及以下		30 至 49 歲		50 歲及以上	
	X	Y	X	Y	X	Y
X,Y	1.554	69.19	1.848	65.14	1.503	52.40
	1.556	63.40	1.780	64.85	1.824	61.08
	1.453	64.27	1.382	49.22	1.737	55.29
	1.603	65.72	1.501	55.87	1.516	54.43
	1.635	64.85	1.741	68.90	1.457	53.85
	1.427	63.11	1.557	48.06		
	1.567	59.93	1.713	67.45		
	1.564	70.06	1.651	61.66		
	1.664	61.66	1.519	60.80		
	2.018	71.51	1.491	56.16		
	1.574	64.56	1.842	65.14		
	1.644	56.45	1.484	52.11		
	1.530	60.51	1.841	67.74		
			1.936	62.24		
總計	20.789	835.22	23.286	845.34	7.542	277.05
人數	13		14		5	
均數	1.599	64.248	1.663	60.381	1.508	55.410

資料.這裏我們可以看到,在基底狀況下,每小時之平均發熱量隨年齡而降低,不過發熱量與身體表面積是有密切關係的,我們必須把他們的表面積化為相等,纔能相互比較.一般的習慣是把表面積除發熱量,化成每小時每平方米之發熱量,但所得結果只能憑表面數值作粗約的比較,而不易測驗相差的顯著性,其缺點正與前述動物飼養實驗中化成每單位食量所增的體重一樣.其實這種資料是應該用共變數來處理的.計算的步驟與上節大致相同,若逕求各數值之平方及乘積,則用公式(3–5)及(5–1),卽可得離均差之平方和及積和.不過這裏都是四位數,平方或相乘後就有七、八位數,相當麻煩,故最好用縮簡法.在 X 方面,我們把每個數值減去 1.5, Y 方面每個數值減去 60(這兩數是任意選擇的,總以在均數附近為便).縮簡計算的結果,載於下表:

【表 10–7】 前表資料經縮簡後之計算結果

年齡組	人數	$\Sigma(X-1.5)$	$\Sigma(X-1.5)^2$	$\Sigma(Y-60)$	$\Sigma(Y-60)^2$	$\Sigma(X-1.5)\times(Y-60)$
29歲及以下	13	1.289	.373,341	55.22	450.2624	8.21796
30—49 歲	14	2.286	.766,968	5.34	632.2216	13.26632
50歲及以上	5	0.042	.456,314	−22.95	149.9579	2.42318
總計	32	3.617	1.596,623	37.61	1,232.4419	23.90746

根據此項結果,用公式(3–6)及(5–8),卽可求得離均差平方和及積和。

總均數:

表面積 $\bar{x}=1.5+(3.617)/32=1.613$,

發熱量 $\bar{y}=60+(37.61)/32=61.175$.

校正數：

表面積 $(3.617)^2/32=.408,834$,

發熱量 $(37.61)^2/32=44.2035$,

乘　積 $(3.617)(37.61)/32=4.25111$.

總離均差平方和:

表面積 $1.596,623-.408,834=1.187,789$,

發熱量 $1,232.4419-44.2035=1,188.2384$.

總離均差積之和:

$$23.90746-4.25111=19.65635.$$

以上是三十二位被試者總計時的情形. 其次計算各年齡組間的變異及共變異，這裏與上節不同的地方，在各組人數不等，故各總和平方或相乘後須分別以該組人數除之，再將各商數相加，然後減去校正數，所用公式爲(9-3)及(10-1).

組間離均差平方和:

表面積

$$\frac{(1.289)^2}{13}+\frac{(2.286)^2}{14}+\frac{(0.042)^2}{5}-.408,834=.092,599,$$

發熱量

$$\frac{(55.22)^2}{13}+\frac{(5.34)^2}{14}+\frac{(-22.95)^2}{5}-44.2035=297.7314.$$

組間離均差積之和:

$$\frac{(1.289)(55.22)}{13}+\frac{(2.286)(5.34)}{14}+\frac{(.042)(-22.95)}{5}$$

$$-4.25111=1.90334.$$

於是以總計及組間各離均差平方和及積和寫在表10-8左半部第一、二兩橫行，將此兩行數值相減，即得組內（誤差）之變異及共變異．在總變異方面，其自由度爲 $32-1=31$，組間爲 $3-1=2$，組內爲 $31-2=29$，或 $(13-1)+(14-1)+(5-1)=29$．其次計算右半部'估計之

【表 10-8】 基底代謝資料之共變數分析

變異來源	自由度	離均差之平方和及積和			估計之誤差		
		$\Sigma(X-\bar{x})^2$	$\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})$	$\Sigma(Y-\bar{y})^2$	平方和	自由度	均方
總計	31	1.187,789	19.65635	1,188.2384	862.9516	30	
組間	2	.092,599	1.90334	297.7314			
組內	29	1.095,190	17.75301	890.5070	602.7310	28	21.5261
修正均數顯著性之測驗					260.2206	2	130.1103
$F=130.1103\div21.5261=6.044$， $n_1=2$， $n_2=28$， 1%點$=5.45$.							

誤差'，我們仍用公式(5-4)以求其平方和：

總變異 $1,188.2384-(19.65635)^2/1.187,789=862.9516$，

組 內 $890.5070-(17.75301)^2/1.095,190=602.7310$．

在此過程中，因爲各用一迴歸係數（總變異方面爲 16.5487，組內爲 16.2100，參閱第 10-1 節末段），故其自由度各較左側少 1．總變異與組內兩估計誤差之平方和相減，得 260.2206，此值表示身體表面積化爲相等後所得發熱量修正均數（見後）間之變異，其自由度爲 $30-28=2$．以自由度除平方和，得均方，組內之均方爲 21.5261，此值係表面積化爲相等後各組內之機遇變異，故用爲比較之標準．修正均數之均方爲組內均方之 6.044 倍，此即爲 F 值．查表 9-3，得知當自由度 $n_1=2$，$n_2=28$ 時，F 值之 1%點爲 5.45，此數小於觀察值．故知當

各組表面積化爲相等後，每小時發熱量之均數間仍有非常顯著的差別，易言之，在基底狀況下每小時的發熱量隨年齡而降低，實不能用表面積的大小不等來解釋的.

上述各組修正均數是根據組內迴歸計算的，因組內迴歸是從同組的 X，Y 求得，其與年齡的關係甚少（若每歲爲一組時，則組內迴歸幾與年齡無關），故較能表示發熱量與表面積間的眞正關係. 由表 10-8 組內一橫行的數值，求得迴歸方程式及修正值如下:

迴歸方程式 $$Y-61.175=\frac{17.75301}{1.09519}(X-1.613),$$

或 $$Y=16.210X+35.028. \tag{E}$$

修正值 $$Y_a=Y-16.210(X-1.613),$$

或 $$Y_a=Y-16.210X+26.147. \tag{G}$$

以表 10-6 各組均數分別代入(G)式，得三組發熱量之修正均數爲:

64.475, 59.571, 57.112.

這是指身體表面積一律等於總均數 1.613 時各組發熱量的均數，由前面共變數測驗的結果，知這三均數有非常顯著的差別. 若用通俗的方法，將1.613除各修正均數，則得各組每小時每平方米的發熱量爲:

（已修正者） 39.97, 36.93, 35.41.

至於未經迴歸方法修正，而直接用表 10-6 各組的表面積均數除發熱量均數所得的結果則爲:

（未修正者） 40.18, 36.31, 36.74.

迴歸係數的計算，是根據最小二乘方原理的，故上列兩行數值，當以

已修正者較爲正確. 其中以第三組的相差最多, 計爲 36.74－35.41 ＝1.33 仟卡, 此值不可謂不大. 而且用通俗處理法所得的結論有時與用共變數分析法的未必盡同. 也許有人認爲共變數分析法太繁, 使初學者如墮五里霧中. 苟讀者對於本書前面各章能充分了解, 則閱讀本章應無困難. 至於共變數分析所費的時間, 若與全部實驗時間比較起來, 眞說不上麻煩呢.

10–4. 修正均數與共變數分析之其他用途 共變數分析, 除用作測驗修正均數的顯著性外, 尙可由此獲得其他的知識. 這裏讓我們先把實際均數與修正均數比較一下. 由表 10–1, 各組公鼠所增體重的總和, 卽可得其實際均數, 再由表 10–3, 則可得其修正均數 (因爲組內迴歸與飼料的優劣無關, 故能表示食量與所增體重間的眞正關係), 玆併列於後:

組　別	1	2	3	4	5	6
實際均數	100.0(1)	85.9(3)	99.5(2)	79.2(5)	83.9(4)	78.7(6)
修正均數	101.5(1)	100.8(2)	80.2(4)	78.4(5)	96.7(3)	69.5(6)

各均數後面括弧裏的數目表示大小的等第, 這裏可以看到兩方面的等第大體相同, 得到最高與最低等的組別是一樣的, 其中等第變動較大的是第三等, 在實際均數爲第 2 組, 而食量化爲相等後則爲第 5 組, 這種等第方面的變動, 營養學家從飼料的成分上或可找到解釋, 在統計學上只是把這個現象指出來吧了.

關於變異數分析與共變數分析的分野, 這裏也順便說一說. 若我們只要比較各組公鼠所增體重有無差別, 而不管食量的多少, 那麼只須把各組的 Y 值用變異數分析法測驗其顯著性就行了. 若須

將各組食量化爲相等，然後比較其所增的體重，那就得用共變數分析了. 在類似的實驗中是否需要引用自變數 X（如飼養實驗中之食量或原始體重等），要解答這問題須從三方面考慮:（一）比較實際均數與修正均數，若兩方面的大小等第很不相同，就可獲得相當解釋.（二）比較表 10-5 修正均數間的平方和(5,468.35)與實際均數間的平方和(4,612.93). 前者食量相等，而後者則否. 這裏前者較後者爲大，但也可能有相反的情形. 若這兩個平方和的數值差別很大，就值得注意.（三）檢視誤差方面由迴歸所減少的變異是否顯著. 當未修正

【表 10-9】 誤差變異數之分析（參閱表 10-5）

變異來源	自由度	離均差平方和	均方
實際所增體重之誤差	54	11,586	215
修正後之誤差	53	8,595	162
由迴歸所減少之誤差	1	2,991	2,991
$F=2,991\div162=18.$			

時，公鼠所增體重之誤差爲 11,586，其自由度爲 54. 內中一個自由度表示由迴歸產生的變異，另 53 個自由度則由機遇而來. 由表 10-9，可見誤差的均方，用共變數後不僅從 215 減到 162，而且因迴歸而減少的誤差爲非常顯著，由此可見實驗的精密度大有改進. 若上述三方面都得不到更多的知識，如實際與修正均數的等第完全一樣；實際均數間與修正均數間的兩平方和也無甚差別；誤差方面因迴歸而減少的部分也並不顯著. 這時自變數 X 似可不必要了.

10-5. 各組組內之共變數 在實驗設計時，若早已準備用共變數分析法來處理的資料，則經本章第 10-2 或 10-3 節的顯著性測驗

後，統計工作卽可告一段落.但統計人員也常常遇到若干資料，在設計時並未考慮到用共變數的，這時就要把各組分別求其共變數，並找出各組間的關係來，因爲從幾組裏找出的關係，或許比單獨一個顯著性測驗更合適些.而更重要的，是要明瞭此項測驗的詳細結構.請分述如下.

先將表 10–1 的資料，分別求各組內的迴歸.例如第一組，

校正數　X 方面　$(1,502)^2/10=225,600.40$,

Y 方面　$(1,000)^2/10=100,000.00$,

XY 方面　$(1,502)(1,000)/10=150,200.00$.

離均差平方和

$\Sigma(X-\bar{x})^2$　$229,760-225,600.40=4,159.60$,

$\Sigma(Y-\bar{y})^2$　$102,062-100,000.00=2,062.00$.

離均差積之和

$\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})$　$151,846-150,200.00=1,646.00$.

【表 10–10】 各組公鼠所增體重與食量間之迴歸及相關

組別	自由度	離均差之平方和及積和			相關係數[1]	迴歸係數[2]	估計之誤差	
		$\Sigma(X-\bar{x})^2$	$\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})$	$\Sigma(Y-\bar{y})^2$			平方和[3]	自由度
1	9	4,159.60	1,646.00	2,062.00	0.5620	0.3957	1,410.66	8
2	9	1,682.50	1,138.50	2,030.90	0.6159	0.6767	1,260.51	8
3	9	1,897.60	738.00	1,072.50	0.5173	0.3889	785.48	8
4	9	3,023.60	1,184.40	1,735.60	0.5170	0.3917	1,271.65	8
5	9	1,576.10	−58.70	2,220.90	−0.0314	−0.0372	2,218.71	8
6	9	11,630.50	3,818.50	2,464.10	0.7133	0.3283	1,210.42	8
總計	54	23,969.90	8,466.70	11,586.00	0.5081	0.3532	8,157.43	48

1. 相關係數$=\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})/\sqrt{\Sigma(X-\bar{x})^2\Sigma(Y-\bar{y})^2}$,
2. 迴歸係數$=\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})/\Sigma(X-\bar{x})^2$,
3. 估計誤差之平方和$=\Sigma(Y-\bar{y})^2-[\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})]^2/\Sigma(X-\bar{x})^2$.

其餘各組，依此類推.計算結果詳表 10–10 之左半部.由各組離均差之平方和及積和，即可計算相關係數、迴歸係數及估計誤差之平方和(公式 6–1，5–2 及 5–4 附錄於表末).這裏可以看到六組的迴歸係數相當參差，相關係數亦然.我們要知道他們的差別是否顯著，還要設法把六組的係數平均起來.爲醒目起見，我們把各組迴歸線繪於圖 10–1.例如第 1 組的迴歸方程式爲

$$Y=100.0+0.3957(X-150.2)=0.3957X+40.57.$$

餘類推.有了迴歸方程式，即可作圖，作圖的方法詳第五章第 5–1 節.圖中迴歸線旁所註數目表示組別，線上'+'字形爲該組均數($\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$)

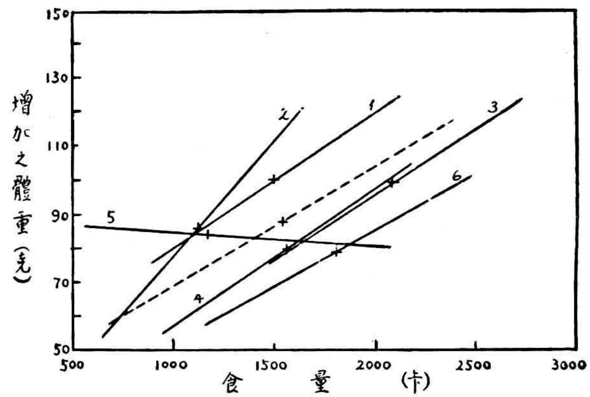


圖 10–1. 由各組公鼠食量推算其所增體重之迴歸.

所構成之點.另有一條虛線，則爲用方程式(C)所畫的迴歸線.這裏值得注意的，便是表 10–10 總計行內的離均差平方和及積和與表 10–5 組內一行的數值完全一樣，這證明我們的計算沒有錯，同時說明表 10–5 組內一行的離均差平方和及積和實爲六組相加的結果，其離均

差是根據各該組均數計算的. 所以表 10–5 的組內迴歸(見迴歸方程式 C)是六組迴歸的總平均. 試看圖 10–1 的那條虛線, 在其他六條線的中間, 迴歸係數也有類似的情形. 至此將六個迴歸係數平均的目的已經達到了.

再看表 10–5 組內估計誤差之平方和爲 8,595.37, 此值是用公式(5–4)計算出來的, 而表 10–10 六組估計誤差之平方和相加, 得 8,157.43, 後者是根據各該組均數計算的, 按最小二乘方原理, 此值應爲最小, 這是後者小於前者的原因. 今將此二值並列於表 10–11,

【表 10–11】 由平均組內迴歸所得估計誤差之分析

變異來源	自由度	估計之誤差	
		平方和	均方
與平均組內迴歸之相差(表 10-5)	53	8,595.37	
與各該組迴歸之相差(表 10-10)	48	8,157.43	169.9
各迴歸係數間之相差	5	437.94	87.6

作一比較, 兩估計誤差平方和之相差 437.94(自由度爲 5)乃表示六個迴歸係數彼此間的相差的. 若將表 10–10 每兩個迴歸係數相差之平方乘以該二組 X 之離均差平方和, 此種乘積共有十五個(卽 6 數中每次取 3 數之組合, ${}_6C_2=15$), 相加後以六組 X 離均差平方和之總計除之(3), 應等於 437.94. 卽

$$\begin{aligned}&[(4,159.6)(1,682.5)(.3957-.6767)^2\\&\quad+(4,159.6)(1,897.6)(.3957-.3889)^2+\cdots\cdots\\&\quad+(1,576.1)(11,630.5)(-.0372-.3283)^2]\div(23,969.9)\\&=437.94.\end{aligned}$$

再以自由度 5 除之，得均方 87.6，此值卽用以測驗迴歸係數間相差的顯著性，測驗時應與均方169.9相比較，因此值與飼料的優劣及各組迴歸無關（參閱第 9-1 節及第 5-2 節）. 但此例中前者反較後者爲小，足見六個迴歸係數實非常接近.

各迴歸係數之間既無顯著的差別，可知它們都從一個均勻的全體中取來，於是前面求得的平均迴歸係數，有了合理的根據（嚴格的說，惟有來自同一全體的各樣本，其平均纔有意義，一般人對於這點往往疏忽的）. 現在我們可以把平均迴歸係數（.3532）當作全體迴歸（population regression）的最佳估計值，而各組的迴歸係數，就無須分別考慮了.

在白鼠所增體重與食量的關係方面，各樣本既由同一全體而來，因此我們可以把各組的相關係數平均起來，平均的方法就是用表 10-10 總計行內的離均差平方和與積和，依公式 (6-1) 計算，得 $r=0.5081$，此值較由六十頭鼠直接計算的(0.3631)爲大，這是由於分母方面減去了組間變異的結果.

現在我們再翻到表 10-5，用標有‘飼料’一行的數值來計算各組均數間的相關係數、迴歸係數及估計誤差之平方和：

$$r=5,520.97\div\sqrt{(67,662.68)(4,612.93)}=0.3125,$$

$$b=5,520.97\div 67,662.68=0.08160,$$

$$\text{估計誤差之平方和}=4,612.93-(5,520.97)^2\div 67,662.68$$

$$=4,612.93-450.49=4,162.44.$$

最後一數 4,162.44，是各組所增體重均數(100.0, 85.9, ……, 78.7)與組間迴歸線

$$Y = 87.87 + 0.08160(X - 154.6) = 0.08160X + 75.25 \qquad (H)$$

距離的平方和(參考第 5–2 節及圖 5–1). 又各鼠所增體重與平均組內迴歸線(見第10–1節)

$$Y = 0.3532X + 33.27 \qquad (C)$$

距離的平方和爲 8,595.4(見表 10–5). 前者的自由度爲 $6-2=4$,後者的自由度爲 53. 按表 10–5,總的估計誤差之平方和爲 14,063.7,共 58 個自由度. 今上述兩部分占 57 個自由度,尚餘 1 個自由度,其平方和爲 1,305.9,是由(H)與(C)兩迴歸的相差而來的,

$$\frac{(67,662.68)(23,969.90)(.0816-.3532)^2}{67,662.68+23,969.90} = 1,305.90.$$

上式分母部分爲表 10–5 所載 X 之兩離均差平方和,分子的右邊是兩迴歸係數相差之平方,詳細說明同前(參閱表 10–11 之說明). 茲將各估計誤差併列於表 10–12,以平均組內迴歸之均方爲比較的標

【表 10–12】 三種迴歸的估計誤差之分析

變異來源	自由度	估計誤差之平方和	均方	F
總迴歸(見表 10-5)	58	14,063.7		
各組均數間之迴歸(方程式 H)	4	4,162.4	1,040.6	6.416
平均組內迴歸(方程式 C)	53	8,595.4	162.2	
(H)與(C)兩迴歸之相差	1	1,305.9	1,305.9	8.051

準,所得兩 F 下值均爲非常顯著. 假如組間迴歸之估計誤差之均方(1,040.6)爲不顯著,而兩迴歸係數相差之均方(1,305.9)爲顯著,前者表示各組所增體重均數與迴歸線(H)之距離甚近,後者表示組間與組內兩迴歸有差別,易言之,各組之內,各鼠食量對於所增體重

之關係與由各組均數(如 150.2, 100.0; 112.5, 85.9 等, 見表 10-1)所構成者不同. 但此例組間迴歸之估計誤差, 既非常顯著, 卽組均數間並無明顯的趨勢可言〔另法, 表 10-5, 組均數(飼料)間之總變異爲 4,612.93, 此值可分爲兩部分, 其由迴歸而來者爲 450.49, 估計誤差爲 4,162.44, 以其相當之自由度 1 與 4 分別除之, 得均方爲 450.49 與 1,040.6, 前者小於後者, 故迴歸爲不顯著〕, 則兩迴歸之差別也就沒有什麼意義了. 要記得只在組內(組內迴歸之顯著性測驗, 見表 10-9)與組均數間兩迴歸都有明顯趨勢的時候, 兩迴歸之相差, 纔有適當的解釋.

10-6. 兩組資料之共變數　當實驗中所用的被試者, 只分兩組時, 我們仍舊可用共變數分析法, 其原理是和前面一樣的, 不過計算的過程要簡單些. 這裏可以問兩個問題: (1)兩個修正均數間有無顯著的差別? (2)兩個組內迴歸係數間有無顯著的差別? 玆仍以公鼠飼養實驗爲例, 表 10-1 前三組的飼料所含蛋白質的成分高, 後三組所含蛋白質的成分低. 玆將前後三組各自合併, 只比較高低兩大組有無差別. 合併後的總和, 見表 10-13.

【表 10-13】　兩組公鼠之食量及所增體重(參閱表 10-1)

蛋白質之成分	ΣX	ΣY	ΣX^2	ΣXY	ΣY^2
高	4,719	2,854	797,549	458,514	277,956
低	4,556	2,418	727,844	370,437	201,476
總　計	9,275	5,272	1,525,393	828,951	479,432

由此計算各組(每組有鼠 30 頭)的校正數, 再求組內離均差平方和及積和, 並仿表 10-10 計算相關係數、迴歸係數及估計誤差等, 結果

列於表 10–14.

【表 10–14】 兩組公鼠之迴歸係數及相關係數等

蛋白質之成分	自由度	離均差之平方和及積和			相關係數	迴歸係數	計估之誤差	
		$\Sigma(X-\bar{x})^2$	$\Sigma(X-\bar{x})\times(Y-\bar{y})$	$\Sigma(Y-\bar{y})^2$			平方和	自由度
高	29	55,250.30	9,579.80	6,445.47	0.5076	0.1734	4,784.44	28
低	29	35,939.47	3,223.40	6,585.20	0.2095	0.0897	6,296.09	28
總　計							11,080.53	56
組內(平均)	58	91,189.77	12,803.20	13,030.67	0.3714	0.1404	11,233.03	57

高低兩組的修正均數爲94.7與81.0,其顯著性測驗見表10–15,結果兩修正均數的差別爲非常顯著.

【表 10–15】 兩修正均數相差之顯著性測驗

變異來源	估計之誤差			
	自由度	平方和	均方	F
總迴歸(表 10-5)	58	14,063.72		
高低兩組之平均組內迴歸(表 10-14)	57	11,233.08	197	
修正均數間	1	2,830.64	2,831	14.37

高低兩迴歸係數(見表 10–14)相差的顯著性測驗,見表 10–16,結果兩迴歸係數頗爲相近(均方 152 小於 198).

【表 10–16】 兩迴歸係數相差之顯著性測驗

變異來源	估計之誤差		
	自由度	平方和	均方
與平均組內迴歸之相差(表 10-15)	57	11,233	
與各組迴歸之相差(表 10-14)	56	11,081	198
兩迴歸係數之相差	1	152	152

表10–16是與表10–11相當的. 我們記得前面六組相比較時, 表10–5修正均數方面的5個自由度, 在表10–12又析爲兩部分: 有4個自由度屬於各組均數間迴歸之變異, 另1個自由度屬於組間與組內兩迴歸係數的變異. 今表10–15只有高低兩組, 故修正均數間的變異只有1個自由度, 這自由度卽屬於組間與組內兩迴歸係數(表10–17)

【表10–17】 組間與組內兩迴歸

變異來源	自由度	離均差之平方和及積和			迴歸係數	估計之誤差	
		$\Sigma(X-\bar{x})^2$	$\Sigma(X-\bar{x})\times(Y-\bar{y})$	$\Sigma(Y-\bar{y})^2$		平方和	自由度
總變異(表10-5)	59	91,632.58	13,987.67	16,198.93		14,063.72	58
組內(表10-14)	58	91,189.77	12,803.20	13,030.67	0.1404	11,233.08	57
組間	1	442.81	1,184.47	3,168.26	2.6749	0	0
修正均數間(表10-15)						2,830,64	1

的相差的. 這點可用下式說明(參閱上節):

$$\frac{(442.81)(91,189.77)(2.6749-.1404)^2}{442.81+91,189.77}=2,830.7.$$

還有一點值得注意的, 卽表10–17組間迴歸的估計誤差爲0, 因爲這裏只有兩組, 兩組的均數就決定這根迴歸線, 它們都在迴歸線上, 故估計誤差等於零. 又因沒有其他的均數點在迴歸線外, 所以也沒有誤差的自由度了.

10–7. 隨機區組之共變數 前章第9–3節, 曾提到隨機區組的實驗, 在這種實驗中, 若有 X, Y 兩變數, 而要把 X 化做相等, 然後測驗各組 Y 均數間相差的顯著性時, 就得用共變數分析法. 鄭集與王德寶(5)兩氏曾比較米(R), 麥(W), 米加蔬菜(RV), 及麥加蔬菜

(WV)四種飼料之營養價值．二氏將白鼠 24 頭，先分為六個配偶組 (matched groups)，屬於同一配偶組之四頭白鼠，其性別相同，體重、窩別亦大致相等．然後以隨機方法〔用 Tippett$_{(6)}$，Fisher and Yates$_{(7)}$ 等隨機數目表，或本書第一章、第四章的方法均可〕指定各鼠一種飼料，分派結果，每種飼料各有 6 鼠．惟在實驗過程中發現三鼠有問題，乃拋棄其紀錄，而用前章第 9–3 節的方法，將所缺 X, Y 值分別塡補之．表 10–18 有括弧的各數，即為塡補之數值．（塡補缺項，使資料之分析過程益形複雜，精細校正更為費事，故非不得已時，以少用為宜．）

這裏也先算三個校正數：

X 方面　　$(16,641.3)^2 \div 24 = 11,538,869.40,$

Y 方面　　$(898.2)^2 \div 24 = 33,615.14,$

XY 方面　$(16,641.3)(898.2) \div 24 = 622,800.65.$

【表 10–18】　白鼠之食物消費量（克，X）及所增體重（克，Y）

	R		W		RV		WV		各配偶組總和	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
	619.0	11.0	722.9	45.7	630.4	42.1	935.2	101.0	2,907.5	199.8
	636.4	16.6	829.3	55.3	683.6	38.5	779.7	62.2	2,929.0	172.6
	562.0	−3.3	859.8	65.5	610.6	19.4	921.4	92.7	2,953.8	174.3
	502.9	−7.7	(723.8)	(33.5)	634.7	20.0	788.0	52.9	2,649.4	98.7
	449.0	−7.5	(697.8)	(42.6)	626.5	31.2	(772.0)	(68.8)	2,545.3	135.1
	603.4	6.4	695.5	35.0	579.4	19.2	778.0	57.1	2,656.3	117.7
ΣX	3,372.7		4,529.1		3,765.2		4,974.3		16,641.3	
ΣY		15.5		277.6		170.4		434.7		898.2
$\bar{x}$	562.12		754.85		627.53		829.05		693.38	
$\bar{y}$		2.58		46.27		28.4		72.45		37.43

$\Sigma X^2 = 11,889,038.67$,　$\Sigma Y^2 = 52,991.23$,　$\Sigma XY = 701,328.65$.

在表 10–18 末行所載 $\Sigma X^2, \Sigma Y^2$ 及 ΣXY 內減去相當的校正數，即得總變異的離均差平方和及積和，載於表 10–19 的第一行. 其第二行配偶組的三個數值是這樣計算的:

X 方面

$$\frac{(2,907.5)^2+\cdots\cdots+(2,656.3)^2}{4}-11,538,869.40=38,964.06,$$

Y 方面

$$\frac{(199.8)^2+\cdots\cdots+(117.7)^2}{4}-33,615.14=1,869.43,$$

XY 方面

$$\frac{(2,907.5)(199.8)+\cdots\cdots+(2,656.3)(117.7)}{4}-622,800.65$$

$$=7,030.24.$$

同理，由各飼料組之總和，可求得表 10–19 第三行的各數，因每種飼

【表 10–19】　隨機區組實驗之共變數分析

（白鼠之食物消費量及所增體重）

變異來源	自由度	離均差之平方和及積和			估計誤差		
		$\Sigma(X-\bar{x})^2$	$\Sigma(X-\bar{x})\times(Y-\bar{y})$	$\Sigma(Y-\bar{y})^2$	平方和	自由度	均方
總變異	20	350,169.27	78,528.00	19,376.14			
配偶組	5	38,964.06	7,030.24	1,869.43			
飼料	3	262,504.54	62,778.23	15,601.90			
誤差	12	48,700.67	8,719.53	1,904.81	343.64	11	31.24
飼料＋誤差	15	311,205.21	71,497.76	17,506.71	1,080.48	14	
修正均數間之變異					736.84	3	245.61

$F=245.61\div 31.24=7.86$,　自由度＝3 與 11,　1%點＝6.22.

料用鼠 6 頭，故各總和平方或乘積之和，應以 6 除之. 最後在總變異內減去配偶組與飼料兩部分，即得表 10-19 的誤差.

計算自由度時，塡補之三鼠不占自由度，故總變異方面爲 24−3−1=20，又配偶組方面爲 6−1=5，飼料方面爲 4−1=3，而誤差方面則爲 20−5−3=12.

表 10-19 第五行是以前沒有講過的. 我們既然把第一行總變異分成兩個以上的部分，現在就需要一個新的總變異，包含飼料與誤差兩部分的，因此我們把第三、四兩行的自由度、離均差平方和及積和逐項相加，即得第五行的數值. 於是用公式(5-4)求第四、五兩行的估計誤差平方和（其自由度各較左側少 1）. 最後求二者之差，得 736.84，而其相當的自由度爲 3，這是用來測驗四個修正均數〔由表 10-19 第四行求得迴歸係數爲 .17904，修正值爲

$$Y_a = Y - .17904(X - 693.38),$$

以表 10-18 各均數代入，得修正均數爲

26.08,　35.27,　40.19,　及　48.16.〕

的顯著性的. 以誤差的均方除修正均數的均方，得 $F=7.86$，此值大於1%點，故知當食量化爲相等後，此四組白鼠所增之體重仍有非常顯著的差別，即食'麥與蔬菜'者最優，'米與蔬菜'及'麥'兩組者次之，而純食'米'者最劣.

【練　習　題】

1. 下表爲爲便於計算而假定之資料，試測驗其修正均數之顯著性.

組別	1		2		3		4	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
X 或 Y	29	22	15	30	16	12	5	23
	20	22	9	32	31	8	25	25
	14	20	1	26	26	13	16	28
	21	24	6	25	35	25	10	26
	6	12	19	37	12	7	24	23

2. 前章第 4 題鄭集、戴重光二氏之實驗，各鼠在實驗期間所消費之飼料如下. 若將食量化爲相等後，問各組所增體重之均數間仍有顯著的差別否?

白鼠在三十日內之食物消費量(克，X)及所增體重(克，Y)

組別	甲組		乙組		丙組	
飼料	黃豆蛋白質		黃豆蛋白質與酪蛋白		黃豆蛋白質與卵蛋白	
	X	Y	X	Y	X	Y
實驗紀錄	197.1	23.5	225.1	41.3	279.8	60.9
	193.9	15.9	231.2	40.7	275.6	62.1
	213.6	6.6	247.5	28.8	263.9	48.9
	197.6	9.6	202.5	18.8	337.6	61.2
	236.0	8.4	238.5	21.7	326.9	63.9
	239.3	11.4	239.2	25.1	339.4	73.7
	252.6	20.4	255.4	22.2		

3. 下表爲實驗心理學(experimental psychology)之四種實驗紀錄(4)，其目的係測量被試者在四種實驗情境下的情緒反應: (1)安坐休息; (2)實驗 2，令被試者閱讀一短篇故事，這故事突然結束，非常驚人; (3)實驗 3，呈現很可怕的刺激，如大蛇等; (4)實驗 16，放映

各種活動電影. 表內 X 爲呼吸速率(一定時間之呼吸次數), Y 爲同時間內不規則呼吸(atypical breath)之次數. 問呼吸速率化爲相等後, 各實驗情境下不規則呼吸次數之均數爲何? 有顯著的差別否?

四種實驗情境之呼吸速率(X)及不規則呼吸次數(Y)

	休息		實驗2		實驗3		實驗16	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
	18	4	18	6	19	10	16	3
	16	9	17	10	15	7	15	10
	21	1	17	1	28	8	22	6
	16	3	17	3	22	9	14	6
	26	2	23	11	22	9	27	1
	16	14	11	8	20	15	8	8
	18	4	16	6	27	10	10	4
	20	4	22	7	29	11	24	2
	16	9	18	9	27	26	18	1
	22	6	19	3	22	7	22	6
	12	7	19	6	14	14	20	1
	18	0	18	2	20	10	19	3
	17	17	16	4	7	7	22	4
	18	0	21	16	16	11	22	0
	21	4	13	5	20	19	20	6
	19	7	18	1	10	7	24	10
	15	6	18	8	20	10	19	0
	16	8	13	1	12	10	15	6
	16	12	16	5	23	13	17	3
	16	11	18	6	25	12	24	0
	18	4	16	6	28	20	19	0
	23	2	14	5	21	10	25	0
	18	18	15	7	21	16	11	11
	20	16	20	7	25	14	23	7
	15	4	20	10	20	9	10	8
	17	0	19	6	16	14	16	10
	16	3	17	2	16	13	17	0
	16	4	16	6	16	3	15	0
	20	0	18	3	28	10	25	0
	15	4	16	3	17	16	10	7
總計	535	183	519	173	606	350	549	123
均數	17.83	6.10	17.30	5.77	20.20	11.67	18.30	4.10

4. 上題呼吸速率與不規則呼吸次數間之關係在四種實驗情境下相同否(參閱表 10-11)?

5. 第3題各組不規則呼吸次數(Y)之均數與組間迴歸線之距離為顯著否(參閱表10-12)?

6. 設第3題資料中同一橫行內之四對數值為同一被試者之紀錄,則此項設計即為隨機區組之實驗,試仿第10-7節,測驗其修正均數之顯著性.所得結論與第3題相同否?

【參考文獻】

(1) Benedict, F.G., Kung, L.C. and Wilson, S.D., The basal metabolism and urinary nitrogen excretion of Chinese, Manchus and others of the Mongolian race, Chinese Journal of Physiology, 12, 1 : 67–100 (1937).

(2) Stevenson, P.H., Height-weight-surface formula for the estimation of surface area in Chinese subjects, Chinese Journal of Physiol., 12, 3 : 327–330 (1937).

(3) Goulden, C.H., Methods of Statistical Analysis, pp. 250–254, John Wiley and Sons, New York (1939).

(4) Harold V. Gaskill and Gertrude M. Cox., Patterns in emotional reactions : I. Respiration; The use of analysis of variance and covariance in psychological data, The Journal of General Psychology, 16, 1st half : 21–38(1937).

(5) Cheng, L.T. and Wang, T.P., Journ. Chinese Chem. Soc., 11, 2.

(6) Tippett, L. H. C., Random Sampling Numbers, Cam-

bridge University Press, London (1927).

(7) Fisher, R. A. and Yates, F., Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research, Oliver and Boyd, London (1938).

第十一章　多元迴歸

本書最初討論一組含有一個變數的資料,繼將變數推廣至二個,組數先擴充為二組,再擴充至二組以上.同組兩變數間的關係,在直線迴歸和相關兩章裏已加討論,多組兩變數間的關係在共變數分析章裏也已經詳細講過了.本章擬將變數數目繼續推廣至二個以上,把一個變數與其他幾個變數間的關係找出來,表示這種關係的方法叫做多元迴歸(multiple regression 或譯作複迴歸).

11-1. 含有三個變數之資料　含有三個變數的資料,常見的如身高、體重與身體表面積;身高、體重與肺活量(vital capacity);體重、胸圍與肺活量;飼養實驗中如食量、原始體重與所增體重;原始年齡、原始體重與所增體重等等.如果我們要找出一個方程式,可以從兩個變數來推算第三個變數,例如由身高、體重來推算身體表面積,那麼參加實驗的被試者,必須每一個人都受到這三種測量,有了這三種測量的紀錄,纔能把所要的方程式算出來,若祇有身高、體重的紀錄,而要編造一個由身高、體重推算身體表面積的方程式,是不可能的.

表 11-1(1) 為我國成年男女之身高、體重及由 X 光測量所得之心像面積(area of cardiac image),所謂心像面積,是指在一定距離(二米)處 X 光片上心影(後前位 antero-posterior position 心像)之

【表 11-1】 國人年齡、身高、體重及心像面積之實測紀錄

年齡 (歲)	身高 (厘米) X_1	體重 (仟克) X_2	實測心像面積 (平方厘米) Y	年齡 (歲)	身高 (厘米) X_1	體重 (仟克) X_2	實測心像面積 (平方厘米) Y
19	154	42.0	79.0	25	172	54.3	89.0
19	161	49.5	87.5	26	165	48.0	83.0
19	167	49.5	90.5	26	168	59.4	94.5
20	158	48.5	59.5	26	175	58.4	94.5
20	150	41.0	76.5	27	157	43.2	72.5
20	162	48.5	89.5	28	151	42.0	76.0
20	165	42.8	77.5	28	171	51.0	82.5
20	174	59.1	95.0	28	178	50.3	98.5
20	178	53.2	105.0	29	169	51.0	80.0
20	179	59.7	106.5	29	173	55.5	91.5
21	156	42.2	72.0	30	161	73.0	86.5
21	158	50.5	72.5	30	157	45.2	77.5
21	165	53.3	87.0	30	160	52.0	89.5
21	169	49.8	97.0	30	169	63.4	85.0
22	152	60.0	88.5	31	156	40.0	55.5
22	156	50.3	78.5	31	166	44.0	83.0
22	163	58.8	98.0	31	160	47.2	86.5
22	164	50.4	89.0	31	168	52.3	99.0
22	172	46.7	67.5	31	170	66.0	107.0
22	172	59.9	90.0	32	168	65.5	82.0
22	174	59.0	86.5	32	167	54.3	98.7
23	161	42.5	88.0	33	160	47.2	88.5
23	169	54.4	86.0	34	165	51.1	72.0
23	174	57.0	98.5	35	152	53.5	83.0
23	177	55.9	97.0	36	151	37.6	59.0
24	160	46.8	82.5	37	158	39.0	73.0
24	147	39.0	77.0	38	156	55.5	82.0
24	159	43.5	80.0	38	161	40.0	82.0
24	162	44.3	74.0	39	154	41.0	73.0
24	172	57.0	93.0	39	166	68.0	100.5
24	170	56.5	86.0	42	161	50.0	90.5
25	167	50.0	85.0	42	177	61.5	105.0
25	162	42.0	91.5	46	156	46.0	77.0
25	161	56.0	76.5	50	162	52.7	94.0
25	163	59.5	83.0	50	150	54.5	74.5
25	150	43.2	76.5	52	148	55.7	84.0
25	159	42.6	89.0	56	158	46.1	88.0
25	167	51.4	87.0	57	161	46.3	70.0
25	168	51.8	77.0				

面積，而非心臟之表面或內部的眞實面積．在臨床方面，要診斷心臟

是否增大，必須有一比較的標準，如西人 Hodges 與 Eyster 二氏(3)曾發表由年齡、身高、體重以推算心像面積之方程式.從這方程式推算出來的數值表示健康人心像的平均面積.若某病人的實測心像面積(即在二米距離處X光片上之後前位心像，用求積儀 planimeter 測得之面積)，較估計面積大得很多，就知道他的心臟確實增大，這種方法可以補充普通診斷之不足.不過估計所得面積必須與實際情形非常接近，纔不會得到錯誤的結論.據鄒仲、陳又新二氏(1)的研究，用 Hodges-Eyster 氏方程式以估計國人之心像面積，每較實測面積為大，因此若以西人標準應用於國人，則國人之多數心臟增大有被忽視之慮.於是二氏建議將 Hodges-Eyster 氏方程式所得的估計值扣除 11%，俾能應用於國人.本書第五章第 5–5 節早已說過：根據外國人的資料所得的迴歸方程式，不能適用於中國人.至於鄒、陳二氏的建議，從統計學上看來也是欠妥的，本書作者已另文詳加討論(2)，這裏不必贅述.二氏既有健康國人之身高、體重及實測心像面積，理應用多元迴歸法以求得推算國人心像面積的方程式.

11–2. 三元迴歸方程式之計算法 在推算心像面積之迴歸方程式中，年齡一項應否列入，為一先決問題，作者乃求年齡與心像面積之相關係數，得 $r=-.0956$，其自由度為 75，查表 6–3，知此值為不顯著，故就此資料言，年齡與心像面積之間並無眞正的關係，因此所求迴歸方程式中，年齡一項可無須列入.茲以 X_1 為身高，X_2 為體重，Y 為心像面積.先計算均數、相關係數、離均差平方和及積和等，此為求多元迴歸方程式之準備工作.離均差平方和之計算可用公式(3–5)或(3–6)，離均差積之和可用公式(5–1)或(5–8).作者計算時

係用縮簡法，將身高 X_1 各減去 160，體重 X_2 各減去 50，心像面積 Y 各減去 85. 身高簡縮數的總和爲 254.0，其平方之和爲 5,562.00；又身高簡縮數與體重簡縮數乘積之和爲 2,575.1. 詳細結果載於表 11-2. 將此初步結果代入公式 (2-2)、(3-6)、(5-8)及(6-1)，求得均

【表 11-2】 前表資料縮簡後之初步計算結果

$\Sigma(X_1-160)=254.0$,	$\Sigma(X_1-160)^2=5,562.00$;
$\Sigma(X_2-50)=79.8$,	$\Sigma(X_2-50)^2=4,373.64$;
$\Sigma(Y-85)=-16.3$,	$\Sigma(Y-85)^2=8,625.69$.
$\Sigma(X_1-160)(X_2-50)=2,575.1$,	
$\Sigma(X_1-160)(Y-85)=3,897.9$,	
$\Sigma(X_2-50)(Y-85)=3,467.91$.	
$N=77$.	

數、離均差平方和及積和，與相關係數如下(表 11-3). 此表 r_{12} 爲身

【表 11-3】 身高、體重、心像面積之均數及相關係數等

$\bar{x}_1=163.30$,	$\bar{x}_2=51.04$,	$\bar{y}=84.79$.
$\Sigma(X_1-\bar{x}_1)^2=4,724.13$,	$\Sigma(X_1-\bar{x}_1)(X_2-\bar{x}_2)=2,311.86$,	
$\Sigma(X_2-\bar{x}_2)^2=4,290.94$,	$\Sigma(X_1-\bar{x}_1)(Y-\bar{y})=3,951.67$,	
$\Sigma(Y-\bar{y})^2=8,622.24$,	$\Sigma(X_2-\bar{x}_2)(Y-\bar{y})=3,484.80$.	
$r_{12}=.5135$,	$r_{Y1}=.6192$,	$r_{Y2}=.5729$.

高與體重之相關係數，r_{Y1} 爲心像面積與身高之相關係數，r_{Y2} 爲心像面積與體重之相關係數. 將各相關係數之值代入下列公式，得兩標準迴歸係數，其中 $\beta_{Y1\cdot 2}$ 表示 Y 在 X_1 上之迴歸而與 X_2 無關者 (standard regression of Y on X_1 independent of X_2)，即指當 X_2 固

定不變時，由 X_1 推算 Y 的迴歸係數，又因以標準差爲單位，故前面加'標準'兩字.

$$\beta_{Y1\cdot 2}=\frac{r_{Y1}-r_{Y2}r_{12}}{1-r_{12}^2},\qquad \beta_{Y2\cdot 1}=\frac{r_{Y2}-r_{Y1}r_{12}}{1-r_{12}^2}.\qquad \text{公式(11–1)}$$

$$\beta_{Y1\cdot 2}=\frac{.6192-(.5729)(.5135)}{1-(.5135)^2}=.4414,$$

$$\beta_{Y2\cdot 1}=\frac{.5729-(.6192)(.5135)}{1-(.5135)^2}=.3463.$$

將此迴歸係數化爲原來單位，則得兩 b 值：

$$b_{Y1\cdot 2}=\beta_{Y1\cdot 2}\frac{\sqrt{\Sigma(Y-\bar{y})^2}}{\sqrt{\Sigma(X_1-\bar{x}_1)^2}},\quad b_{Y2\cdot 1}=\beta_{Y2\cdot 1}\frac{\sqrt{\Sigma(Y-\bar{y})^2}}{\sqrt{\Sigma(X_2-\bar{x}_2)^2}}.$$

公式(11–2)

$$b_{Y1\cdot 2}=.4414\frac{\sqrt{8,622.24}}{\sqrt{4,724.13}}=.5963,$$

$$b_{Y2\cdot 1}=.3463\frac{\sqrt{8,622.24}}{\sqrt{4,290.94}}=.4909.$$

此爲部分迴歸係數(partial regression coefficients)——因爲 $b_{Y1\cdot 2}$ 是由 X_1 推算 Y 的迴歸係數，而與 X_2 無關，故稱'部分'．最後將兩 b 值及表 11–3 的三個均數代入迴歸方程式：

$$Y_e=\bar{y}+b_{Y1\cdot 2}(X_1-\bar{x}_1)+b_{Y2\cdot 1}(X_2-\bar{x}_2),\qquad \text{公式(11–3)}$$

得 $$Y_e=84.79+.5963(X_1-163.30)+.4909(X_2-51.04)$$

$$=.5963X_1+.4909X_2-37.65,$$

或 $$\left.\begin{aligned}&\text{心像面積(平方厘米)}=.5963\ \text{身高(厘米)}\\&\qquad+.4909\ \text{體重(仟克)}-37.65.\end{aligned}\right\}\text{(K)}$$

此卽爲由身高、體重推算心像面積之多元迴歸方程式. 若仿第五章第5–5節的方法，將此迴歸方程式編成對照表，則在實際應用時當更爲便利.

前面兩 β 的公式是從下列兩方程式解出來的結果:

$$\beta_{Y1\cdot 2}+r_{12}\beta_{Y2\cdot 1}=r_{Y1},$$

$$r_{12}\beta_{Y1\cdot 2}+\beta_{Y2\cdot 1}=r_{Y2}.$$

這兩式叫做標準方程式 (normal equations)，是應用最小二乘方的原理求得的，其目的在使由公式 (11–3) 所得的估計值 Y_e 與觀察值 Y 相差之平方和爲最小，因此較由他法(如鄒、陳二氏的建議等)所得的估計值更爲正確.

11–3. 多元相關(multiple correlation，或譯作複相關) 將表11–1各被試者的身高、體重數值代入方程式(K)，則得各人的心像面積估計值. 如

X_1	X_2	Y	Y_e
154	42.0	79.0	74.80
161	49.5	87.5	82.65
……	……	……	……

若用第六章的方法，求觀察值 Y 與估計值 Y_e 間的相關，此值稱爲多元相關係數(multiple correlation coefficient)，通用的符號是 R. 這是第六章簡單相關係數的推廣，讀者試將表5–2的資料，求體重觀察值與估計值間的相關係數，結果應等於食量 X 與體重 Y 間的相關係數，以符號表示之，卽 $r_{YY_e}=r_{XY}$. 所以多元相關 R 與簡單相關 r 的意義是類似的，只是自變數的多寡不同罷了.

至於實際計算R時，我們另有簡捷的公式，正像求r時無須先算估計值一樣．R的公式是：

$$R_{Y\cdot12}^2 = r_{Y1}\beta_{Y1\cdot2} + r_{Y2}\beta_{Y2\cdot1} \qquad \text{公式(11–4)}$$

$$= .6192(.4414) + .5729(.3463) = .47171,$$

$$R_{Y\cdot12} = .687.$$

符號 $R_{Y\cdot12}$ 表示由 X_1 及 X_2 推算 Y 的多元迴歸所得估計值與觀察值 Y 間的多元相關係數．若將公式(11–1)兩 β 代入公式(11–4)，則 R 的公式更可化簡為

$$R_{Y\cdot12}^2 = \frac{r_{Y1}^2 + r_{Y2}^2 - 2r_{Y1}r_{Y2}r_{12}}{1 - r_{12}^2}. \qquad \text{公式(11–5)}$$

以表 11–3 所列三個相關係數代入公式(11–5)，開方後與前面的結果相同．當變數多於三個時，計算 R 還有普徧的公式，此點留待後面討論．

R 既是觀察值與估計值間的相關係數，而觀察值與估計值通常不會呈相反的關係，所以 R 最小等於 0，卻不會有負值．這點是與簡單相關係數不同的地方．〔因變數 Y 與自變數 X_1, X_2, ……間的關係有正的也有負的，如各迴歸係數所表示者，惟其如此，所以 R 往往不附符號(4)．〕又通常估計值與觀察值不會完全一樣，故 R 每小於 1（當然也可以等於 1，祇是很少見罷了）．又 R 每較 r_{Y1} 與 r_{Y2} 為大，如上例 $R = .687$，此值大於 .6192 或 .5729．我們可利用這些特性來核對計算上有無錯誤．

11–4．估計之誤差　觀察值與估計值之相差稱為估計之誤差．如上節，已求得第一、二兩位被試者的估計值，第一位的估計誤差是

觀察値	估計値	估計之誤差	估計誤差之平方
Y	Y_e	$Y-Y_e$	$(Y-Y_e)^2$
79.0	74.80	4.20	17.6400
87.5	82.65	4.85	23.5225
……	……	……	………

4.20，第二位的估計誤差是 4.85，兩人相差 0.65 平方厘米，若以觀察値計，則兩人的相差有 87.5－79.0＝8.5 平方厘米之多，不過這是不公允的，因爲第一位的身高、體重都比第二位的來得小(參閱上節或表 11-1)，其心像面積自然也要小些，而觀察値的相差卻沒有把這點考慮在內．至於估計値，可以說是具有該身高、體重値者之平均心像面積，故第一位之心像面積較平均多 4.20，第二位則較平均多 4.85．若將身高、體重考慮在內，則此兩人心像面積的相差不能算大．在若干問題中，用估計誤差來比較，要更合理些．

估計誤差有正有負，其代數和爲零．又將各估計誤差平方後相加，得總和爲 4,555.04，此値較由其他任何一次方程式(含有三個變數之一次方程式在幾何學上爲一平面)所得者爲小．這兩點特性與直線迴歸是相同的(參閱第五章第 5-2 節)．計算估計誤差平方和時，實際上不必這樣麻煩，我們另有簡單的公式．其原理與在簡單相關係數中一樣的(參閱第 5-2 節及第 6-8 節)，便是將 $\Sigma(Y-\bar{y})^2$ 析爲兩部分：一部分爲 $R^2\Sigma(Y-\bar{y})^2$，是由迴歸而來的變異，另一部分爲 $(1-R^2)\Sigma(Y-\bar{y})^2$，則與迴歸無關．今計算如下：

$$R^2\Sigma(Y-\bar{y})^2=.47171(8,622.24)=4,067.20,$$

$$(1-R^2)\Sigma(Y-\bar{y})^2=.52829(8,622.24)=4,555.04.$$

後者卽爲估計誤差之平方和. 我們在計算迴歸方程式(K)時,用過三個統計數, 卽 $\bar{y}, b_{Y1\cdot2}$ 及 $b_{Y2\cdot1}$, 故此處自由度爲 $N-3$, 至於 $\bar{x}_1$ 與 $\bar{x}_2$ 已包含在計算過程中,不另占去自由度. 此外還有一種算自由度的簡法,卽將總次數減去變數的個數(包括自變數與因變數). 在方程式(K)中共有三個變數,故自由度爲 $N-3$. 此原則在直線迴歸及其他多元迴歸都可適用.

將估計誤差之平方和以自由度除之,開方卽得標準估計誤差:

$$S_{Y\cdot12}=\sqrt{\frac{\Sigma(Y-Y_e)^2}{N-3}}=\sqrt{\frac{(1-R^2)\Sigma(Y-\bar{y})^2}{N-3}}, \quad \text{公式(11-6)}$$

將各數値代入,得

$$S_{Y\cdot12}=\sqrt{\frac{(1-.47171)(8,622.24)}{77-3}}=\sqrt{\frac{4,555.04}{77-3}}=7.846.$$

又心像面積之標準差爲

$$S_Y=\sqrt{\frac{8,622.24}{77-1}}=10.651.$$

經引用了身高與體重兩變數後, 心像面積的變異從 10.651 減到了 7.846. 可知由身高、體重的不同而使心像面積產生的變異約占標準差的四分之一(參閱第五章第 5-2 節).

11-5. 顯著性測驗　多元迴歸中,所有統計數都受抽樣變異的影響,故須測驗其是否顯著. 含有三個變數的多元迴歸,其兩個 β 值的標準誤是一樣的,公式如下:

$$S_\beta=\sqrt{\frac{1-R^2}{(1-r_{12}^2)(N-3)}}, \quad \text{公式(11-7)}$$

將諸值代入，得

$$S_{\beta}=\sqrt{\frac{1-.47171}{[1-(.5135)^2](77-3)}}=.098.$$

測驗迴歸係數的顯著性，用 t 值，上例 $\beta_{Y1\cdot2}=.4414$，$\beta_{Y2\cdot1}=.3463$，其 t 值如下：

$\beta_{Y1\cdot2}$ $t=.4414/.098=4.48$,

$\beta_{Y2\cdot1}$ $t=.3463/.098=3.52$.

查 t 值表（表 4-4），當自由度為 $77-3=74$ 時，其 1% 點約為 2.65，此處兩 t 值均大於 1% 點，故知兩 β 值與零之相差為非常顯著. 至於部分迴歸係數 b 值，只是 β 的倍數，其顯著性與 β 同.

若求 $\beta_{Y1\cdot2}$ 與 $\beta_{Y2\cdot1}$ 兩值相差之顯著性，則其標準誤為

$$S_{\beta_1-\beta_2}=\sqrt{\frac{2(1-R^2)}{(N-3)(1-r_{12})}},\qquad \text{公式(11-8)}$$

將上例之各數值代入，得

$$S_{\beta_1-\beta_2}=\sqrt{\frac{2(1-.47171)}{(77-3)(1-.5135)}}=.1713.$$

故 $t=(.4414-.3463)/.1713=.555$. 查 t 值表，當自由度為 74 時，5% 點約為 1.994，今求得之 t 值小於 5% 點，故兩 β 值之相差為不顯著. 易言之，在推算心像面積之迴歸方程式中，身高體重所占分量並無輕重之分. 在此仍須提醒讀者，勿僅憑迴歸係數之表面值，遽下關係大小之結論. 公式（11-8）是用於三元迴歸的. 在四元迴歸中兩 β 值相差之顯著性，見第 11-9 節.

關於多元相關係數 R 的顯著性，則需用 F 來測驗，測驗時係將

'由迴歸而來的變異'與'不能由迴歸解釋的變異'相比較，看前者是否比後者大得多. 前面我們已算出這兩部分的離均差平方和，玆列變異數分析表於後:

【表 11-4】 R 之顯著性測驗(多元迴歸之顯著性同)

變異來源	自由度	平方和	均方	F
迴歸, $R^2\Sigma(Y-\bar{y})^2$	2	4,067.20	2,033.60	33.04
估計之誤差, $(1-R^2)\Sigma(Y-\bar{y})^2$	74	4,555.04	61.55	
總計	76	8,622.24		

在迴歸方程式(K)中有 2 個自變數，故自由度爲 2. 估計誤差之自由度已述於前. 查 F 值表(表 9-3)，當 $n_1=2$, $n_2=74$ 時，1% 點約爲 4.92，求得之 F 值遠過於 1% 點，故 R 爲非常顯著.

測驗 R 的顯著性，還可查表 11-5(5). 該表中 2 個變數的一行數值是與表 6-3 相同的，其他各行是新添的. 上例共有 3 個變數，查該行自由度等於 70(與 74 最近)時，R 值的 5% 點(在上)爲 .286，又 % 點(在下)爲 .351，今求得的 R 值爲 .687，大於 1% 點，故爲非常顯著，此法較變異數分析要省事多了.

11-6. 部分相關(partial correlation) 在多元迴歸中，與部分迴歸係數相當的有部分相關係數，他們的關係與第六章所說 r 和 b 的關係是一樣的. 設有 X_1, X_2 與 X_3 三個變數，我們先求當 X_3 固定時，由 X_2 推算 X_1 的部分迴歸係數(即 $b_{12\cdot3}$)另求當 X_3 固定時，由 X_1 推算 X_2 的部分迴歸係數(即 $b_{21\cdot3}$)，此兩部分迴歸係數的幾何均數，即爲部分相關係數(參閱第 6-7 節). 其公式爲

$$r_{12\cdot3}=\sqrt{b_{12\cdot3}\,b_{21\cdot3}}\,. \qquad \text{公式(11-9)}$$

【表 11-5】 r 與 R 之 5% 點與 1% 點

自由度	變數之個數				自由度	變數之個數			
	2	3	4	5		2	3	4	5
1	.997	.999	.999	.999	24	.388	.470	.523	.562
	1.000	1.000	1.000	1.000		.496	.565	.609	.642
2	.950	.975	.983	.987	25	.381	.462	.514	.553
	.990	.995	.997	.998		.487	.555	.600	.633
3	.878	.930	.950	.961	26	.374	.454	.506	.545
	.959	.976	.983	.987		.478	.546	.590	.624
4	.811	.881	.912	.930	27	.367	.446	.498	.536
	.917	.949	.962	.970		.470	.538	.582	.615
5	.754	.836	.874	.898	28	.361	.439	.490	.529
	.874	.917	.937	.949		.463	.530	.573	.606
6	.707	.795	.839	.867	29	.355	.432	.482	.521
	.834	.886	.911	.927		.456	.522	.565	.598
7	.666	.758	.807	.838	30	.349	.426	.476	.514
	.798	.855	.885	.904		.449	.514	.558	.591
8	.632	.726	.777	.811	35	.325	.397	.445	.482
	.765	.827	.860	.882		.418	.481	.523	.556
9	.602	.697	.750	.786	40	.304	.373	.419	.455
	.735	.800	.836	.861		.393	.454	.494	.526
10	.576	.671	.726	.763	45	.288	.353	.397	.432
	.708	.776	.814	.840		.372	.430	.470	.501
11	.553	.648	.703	.741	50	.273	.336	.379	.412
	.684	.753	.793	.821		.354	.410	.449	.479
12	.532	.627	.683	.722	60	.250	.308	.348	.380
	.661	.732	.773	.802		.325	.377	.414	.442
13	.514	.608	.664	.703	70	.232	.286	.324	.354
	.641	.712	.755	.785		.302	.351	.386	.413
14	.497	.590	.646	.686	80	.217	.269	.304	.332
	.623	.694	.737	.768		.283	.330	.362	.389
15	.482	.574	.630	.670	90	.205	.254	.288	.315
	.606	.677	.721	.752		.267	.312	.343	.368
16	.468	.559	.615	.655	100	.195	.241	.274	.300
	.590	.662	.706	.738		.254	.297	.327	.351
17	.456	.545	.601	.641	125	.174	.216	.246	.269
	.575	.647	.691	.724		.228	.266	.294	.316
18	.444	.532	.587	.628	150	.159	.198	.225	.247
	.561	.633	.678	.710		.208	.244	.270	.290
19	.433	.520	.575	.615	200	.138	.172	.196	.215
	.549	.620	.665	.698		.181	.212	.234	.253
20	.423	.509	.563	.604	300	.113	.141	.160	.176
	.537	.608	.652	.685		.148	.174	.192	.208
21	.413	.498	.552	.592	400	.098	.122	.139	.153
	.526	.596	.641	.674		.128	.151	.167	.180
22	.404	.488	.542	.582	500	.088	.109	.124	.137
	.515	.585	.630	.663		.115	.135	.150	.162
23	.396	.479	.532	.572	1,000	.062	.077	.088	.097
	.505	.574	.619	.652		.081	.096	.106	.115

這公式表示部分相關係數也有雙方面的關係，便是當 X_3 固定時，從 X_2 估計 X_1，或從 X_1 估計 X_2，其間無所選擇，這時便用部分相關係數表示他們的關係（若 X_1 隨着 X_2 與 X_3 而變化，那就得用 $b_{12\cdot3}$ 與 $b_{13\cdot2}$ 了）．前述心像面積的資料，我們已求得 $b_{Y1\cdot2}=.5963$（見公式 11–2 之實例），同理求得 $b_{1Y\cdot2}=.3581$．這裏 .5963 相當於公式(11–9)裏的 $b_{12\cdot3}$，而 .3581 相當於該公式的 $b_{21\cdot3}$（讀者須注意公式的活用，同時對於符號也要認識清楚），代入上式，得

$$r_{Y1\cdot2}=\sqrt{(.5963)(.3581)}=.462.$$

這是假定有很多體重相等的人，他們的心像面積與身高的相關係數．

將公式(11–9)化爲簡單相關係數的函數，則得

$$r_{12\cdot3}=\frac{r_{12}-r_{13}r_{23}}{\sqrt{(1-r_{13}^2)(1-r_{23}^2)}},\qquad \text{公式(11–10)}$$

如前例

$$r_{Y1\cdot2}=\frac{.6192-(.5729)(.5135)}{\sqrt{[1-(.5729)^2][1-(.5135)^2]}}=.462.$$

測驗部分相關係數的顯著性可用 t 值，其公式爲

$$t=\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{N-p-2},\quad \text{自由度}=N-p-2.\qquad \text{公式(11–11)}$$

此處 r 爲部分相關係數，p 爲被固定的變數的個數．在 r_{Y1-2} 中被固定的變數是一個(X_2)，故自由度爲 $77-1-2=74$．還有一種算法，是在總次數內減去變數的個數（包括因變數與自變數），其結果相同．

$$t=\frac{.462}{\sqrt{1-(.462)^2}}\sqrt{77-1-2}=5.05,$$

$$\text{自由度}=74,\qquad 1\%\text{點}=2.65.$$

另法可查表 11-5，含有 3 個變數的直行內，自由度等於 70（表中與 74 最近的一數）時，r 的 1% 點爲 .351，今求得之部分相關係數爲 .462，大於 1% 點，故知其爲非常顯著.

11-7. 含有四個以上變數之資料 若要從三個變數推算另外一個變數，那麼每一個被試者必須都受這四種測量，根據這樣的資料纔能求得含有四個變數的迴歸方程式. 過去有些人的研究，因爲幾種測量不在同時舉行，於是參加各種測量的被試者不盡相同，數目也不一致. 從這種參差不齊的紀錄，雖可求得若干簡單相關係數，由此計算多元迴歸方程式，但參加各種測量的被試錯雜，人數不等，終究是個缺點，尤其在顯著性測驗時無從確定其自由度. 這是在搜集材料時必先注意的.

含有四個以上變數的迴歸方程式，其原理雖和以前一樣，但計算步驟卻繁得多了. 初學者不要以爲所用變數愈多，結果就愈爲正確. 相反的，測量的項目增多，則所費時間精力也增加，所包括的問題也更爲複雜. 如資料的殘缺不全、測量技術上的失敗、均勻材料的不易得到、解釋結果時的困難等等，在變數增多時這些情形都是難免的. 多元迴歸並不是一劑萬應靈藥，它並不能使不正確的資料變成可靠的結果. 但若選材謹慎，測量精確，且有一定的問題須用多元迴歸來解決時，當然也不必猶豫.

若遇小樣本而含有幾個變數的資料，分析時須十分小心. 其理由可從幾何學方面來說明. 在平面裏，任何一對(X, Y)值表示一點，故兩對(X, Y)的觀察值定一迴歸線，其餘各對觀察值則用以改進此迴歸線，並可藉此求得估計之誤差. 在三度空間裏，則須有三組 $(X,$

Y, Z)的觀察值纔能定一迴歸平面(regression plane). 依次類推，則有四個變數時，就要四個觀察所得的點纔能決定一迴歸. 同理，由六個變數構成的迴歸就有六個點子完全適合，而無估計的誤差(這時 $R=1$). 因此若僅有 10 組觀察值，而求一含有 6 個變數的迴歸，結果得 $R=0.9$，這時不要太高興了，因爲這 R 值實在是不顯著的. 這裏要告訴讀者，在小樣本中對於一切顯著性測驗務須特別謹慎，尤其在總次數 N 與變數的個數相差很近時，不要被大的 R 值所欺騙了.

11-8. 四元迴歸之計算法　在研究肺活量(vital capacity)時，我們也需要知道健康人的肺活量該有多少. 普通根據身高體重來估計肺活量作爲具有該身高體重者肺活量之平均值，如郭祖超與吳襄二氏所發表的推算國人肺活量之多元迴歸方程式(6)是. 又因肺活量與胸圍亦有密切關係，所以我們也可以根據身高、體重與胸圍三者來推算肺活量，這便是四元迴歸方程式了.

表11-6所列統計數，是從174個我國青年(15—16歲)男子的資

【表 11-6】　計算四元迴歸方程式所需之統計數

	均　數	離均差平方和	相關係數
體　重(仟　克) X_1	$\bar{x}_1=47.20$	$\Sigma(X_1-\bar{x}_1)^2=1{,}295.34$	$r_{12}=.6451$
			$r_{13}=.8274$
身　高(厘　米) X_2	$\bar{x}_2=162.25$	$\Sigma(X_2-\bar{x}_2)^2=1{,}520.72$	$r_{23}=.4713$
胸　圍(厘　米) X_3	$\bar{x}_3=74.95$	$\Sigma(X_3-\bar{x}_3)^2=535.91$	$r_{Y1}=.5660$
			$r_{Y2}=.5524$
肺活量(100 立方厘米) Y	$\bar{y}=31.06$	$\Sigma(Y-\bar{y})^2=912.86$	$r_{Y3}=.6650$

料算出來的(7)；每一被試者都有體重、身高、胸圍與肺活量的實測紀

錄，紀錄的式樣與表 11-1 相似．茲因篇幅關係，從略．

四元迴歸方程式中所求的迴歸係數，可從下列標準方程式中解出來：

	X_1	X_2	X_3	Y
X_1	$\beta_{Y1\cdot23}+$	$r_{12}\,\beta_{Y2\cdot13}+$	$r_{13}\,\beta_{Y3\cdot12}=$	r_{Y1}
X_2	$r_{12}\beta_{Y1\cdot23}+$	$\beta_{Y2\cdot13}+$	$r_{23}\,\beta_{Y3\cdot12}=$	r_{Y2}
X_3	$r_{13}\beta_{Y1\cdot23}+$	$r_{23}\,\beta_{Y2\cdot13}+$	$\beta_{Y3\cdot12}=$	r_{Y3}

公式(11-12)

此處 $\beta_{Y1\cdot23}$ 是'由 X_1 推算 Y 之標準迴歸係數而與 X_2 及 X_3 皆無關者'，餘類推．我們可以看到三個方程式沿左上至右下方對角線的對稱情形．方程式上端與左側的變數是幫助我們寫出 r 右下角的數目的．

將表 11-6 所列相關係數代入公式(11-12)，則得三個一次方程式：

$$\beta_{Y1\cdot23}+.6451\,\beta_{Y2\cdot13}+.8274\,\beta_{Y3\cdot12}=.5660, \qquad \text{(a)}$$

$$.6451\beta_{Y1\cdot23}+\beta_{Y2\cdot13}+.4713\,\beta_{Y3\cdot12}=.5524, \qquad \text{(b)}$$

$$.8274\beta_{Y1\cdot23}+.4713\beta_{Y2\cdot13}+\beta_{Y3\cdot12}=.6650. \qquad \text{(c)}$$

以下便是用普通代數方法，把三個 β 值解出來．

(a)÷.8274, $\quad 1.2086\beta_{Y1\cdot23}+.7797\beta_{Y2\cdot13}+\beta_{Y3\cdot12}=.6841,$ (d)

(b)÷.4713, $\quad 1.3688\beta_{Y1\cdot23}+2.1218\beta_{Y2\cdot13}+\beta_{Y3\cdot12}=1.1721,$ (e)

(d)−(c), $\quad .3812\beta_{Y1\cdot23}+.3084\beta_{Y2\cdot13}=.0191,$ (f)

(e)−(d), $\quad .1602\beta_{Y1\cdot23}+1.3421\beta_{Y2\cdot13}=.4880,$ (g)

(f)÷.3084, $\quad 1.2361\beta_{Y1\cdot23}+\beta_{Y2\cdot13}=.0619,$ (h)

(g)÷1.3421, $\quad .1194\beta_{Y1\cdot23}+\beta_{Y2\cdot13}=.3636,$ (i)

(h) − (i),　　$1.1167\beta_{Y1\cdot23} = -.3017,$　　(j)

$$\beta_{Y1\cdot23} = -.2702,$$

代入(i),　$\beta_{Y2\cdot13} = .3636 - .1194(-.2702) = .3959,$

代入(d),　$\beta_{Y3\cdot12} = .6841 - 1.2086(-.2702) - .7797(.3959)$

$$= .7020.$$

各 β 值是以標準差爲單位的，今以相當的離均差平方和開方後乘除之，則化成原來單位，

$$b_{Y1\cdot23} = -.2702\frac{\sqrt{912.86}}{\sqrt{1,295.34}} = -0.2268,$$

$$b_{Y2\cdot13} = .3959\frac{\sqrt{912.86}}{\sqrt{1,520.72}} = 0.3067,$$

$$b_{Y3\cdot12} = .7020\frac{\sqrt{912.86}}{\sqrt{535.91}} = 0.9162.$$

將各迴歸係數代入下列公式，即得所需迴歸方程式：

$$Y = \bar{y} + b_{Y1\cdot23}(X_1 - \bar{x}_1) + b_{Y2\cdot13}(X_2 - \bar{x}_2) + b_{Y3\cdot12}(X_3 - \bar{x}_3),$$

公式(11–13)

$$Y = 31.06 - 0.2268(X_1 - 47.20) + 0.3067(X_2 - 162.25)$$
$$+ 0.9162(X_3 - 74.95)$$
$$= -0.2268X_1 + 0.3067X_2 + 0.9162X_3 - 76.67.$$

在計算過程中，肺活量以百立方厘米爲單位，今將上式各項以 100 乘之，並以文字表示，則爲

肺活量 = −22.68 體重 + 30.67 身高 + 91.62 胸圍 − 7,667.　(v)

（立方厘米）　（仟克）　（厘米）　（厘米）

這裏可以注意的，體重前面的部分迴歸係數是負號，這是指當身高胸圍固定不變時（或有一羣身高相等、胸圍相等的被試者時），體重每增加一仟克，則肺活量卽平均減少 22.68 立方厘米. 在 P. H. Stevenson 氏發表的一套迴歸方程式(8)裏，由身高、胸圍、體重推算肺活量的方程式，其體重前面的係數也是負的. 通常體重、身高、胸圍三者總是連帶的變化，幾乎沒有兩個固定而一個單獨變化的情形，因此很少人注意到身高胸圍不變時，肺活量與體重間呈反比例的關係，這現象留待生理學家來解釋吧.

若將肺活量與體重、身高、胸圍之簡單相關係數（表 11-6）和各 β 值作一比較，就可發現他們所表示的關係不同. 從 β 方面看，由體重、身高、胸圍三者推算肺活量，則胸圍所占的分量最重，身高次之，而體重與肺活量卻呈相反的關係. 至於簡單相關係數，則因有其他兩因子夾雜在內（如計算肺活量與體重之簡單相關時，並未使身高與胸圍固定不變），故不能表明眞正的關係，其數值的大小，更不能表示估計肺活量時所占分量的輕重. 這點在解釋各變數間的關係時應當注意的.

肺活量	體重	身高	胸圍
Y	X_1	X_2	X_3
Y 與各 X 之簡單相關係數(r)	.5660	.5524	.6650
Y 在 X 上之標準迴歸係數(β)	$-.2702$	.3959	.7020

11-9. 四元迴歸之顯著性測量 四元迴歸係數的顯著性，也可以分做兩方面來測驗：一是 R 的顯著性，一是三個 β 的顯著性. R 的計算法和公式(11-4)相似:

$$R^2_{Y\cdot123}=r_{Y1}\beta_{Y1\cdot23}+r_{Y2}\beta_{Y2\cdot13}+r_{Y3}\beta_{Y3\cdot12}.\qquad\text{公式(11–14)}$$

這裏的 $R_{Y\cdot123}$ 是 Y 的觀察值與由公式(11–13)所得估計值間的相關係數,將 r 及 β 值代入,得

$$R^2_{Y\cdot123}=.5660(-.2702)+.5524(.3959)+.6650(.7020)$$
$$=.53260,$$

$$R_{Y\cdot123}=.7298.$$

測驗 R 的顯著性時,仍將總變異析爲兩部分:一爲 $R^2\Sigma(Y-\bar{y})^2$ 是由迴歸而來的變異,一爲 $(1-R^2)\Sigma(Y-\bar{y})^2$ 是估計誤差的平方和,茲將變異數分析列後:

【表 11–7】 R 之顯著性測驗

變　異　來　源	自由度	離均差平方和	均　方	F	1%點
總變異(表 11-6)	173	912.86			
迴歸 $R^2\Sigma(Y-\bar{y})^2$	3	486.19	162.06	64.57	3.91
誤差 $(1-R^2)\Sigma(Y-\bar{y})^2$	170	429.67	2.51		

自由度的計算仍適用第 11–4 及 11–5 節的原則.查表 9–3,當 $n_1=3$, $n_2=150$(當 170 最近)時 1%點爲 3.91,此處求得之 F 值遠過於 1%點,故 R 爲非常顯著.另法可查表 11–5 變數爲 4 個的一行,當自由度等於 150 時,R 的 1%點爲 0.270,此處求得者爲.7298,故爲非常顯著.

由上節求得的三個 β 值可知估計肺活量時,胸圍所占的分量最重,身高次之,而體重則呈相反的關係.那麼我們可否只用身高,胸圍來估計肺活量.換句話說,在迴歸方程式裏,我們多用一個自變數(體重)是否較有進步呢?這點就要看四元迴歸比三元迴歸所減少的

誤差是否顯著. 若以表 11-6 所列相關係數，按公式(11-1)求得由身高、胸圍推算肺活量的兩 β 值:

$$\beta_{Y2\cdot3}=\frac{.5524-(.6650)(.4713)}{1-(.4713)^2}=.30723,$$

$$\beta_{Y3\cdot2}=\frac{.6650-(.5524)(.4713)}{1-(.4713)^2}=.52020.$$

再由公式(11-4)，求得

$$R^2_{Y\cdot23}=(.5524)(.30723)+(.6650)(.5202)=.51564.$$

故由身高、胸圍以推算肺活量，則估計誤差之平方和爲

$$(1-.51564)(912.86)=442.15.$$

用四元迴歸時，其估計誤差之平方和(表 11-7)比三元迴歸減少

$$(442.15-426.67)=15.48.$$

這部分相當於 1 個自由度(因四元迴歸有 3 個自由度，三元迴歸有 2 個，相差 1 個，參閱表 11-7 及 11-8)，是屬於四元迴歸的，茲測驗其顯著性如下:

【表 11-8】 四元迴歸與三元迴歸之比較

變異來源	自由度	離均差平方和	均方	F	5%點	1%點
總變異 $\Sigma(Y-\bar{y})^2$	173	912.86				
三元迴歸 $R^2_{Y\cdot23}\Sigma(Y-\bar{y})^2$	2	470.71	235.36	90.873	——	4.75
誤差$(1-R^2_{Y\cdot23})\Sigma(Y-\bar{y})^2$	171	442.15	2.59			
四元迴歸與三元迴歸之相差 $(R^2_{Y\cdot123}-R^2_{Y\cdot23})\Sigma(Y-\bar{y})^2$	1	15.48	15.48	6.167	3.91	6.81
誤差$(1-R^2_{Y\cdot123})\Sigma(Y-\bar{y})^2$	170	426.67	2.51			

由三元迴歸所減少的變異爲非常顯著(F 值大於 1%點)，四元迴歸

較三元迴歸更減少 15.48，這減少的部分仍爲顯著(6.167 在 5%點與 1%點之間)，所以由體重、身高、胸圍來推算肺活量，比僅用身高胸圍來推算的要進步些.

現在要測驗三個 β 的顯著性了. 測驗的步驟也是先求各 β 值的標準誤，再計算 t 值. 可是在四元迴歸，各 β 的標準誤是不相等的，因此計算過程就複雜多了. 這裏先要解三組標準方程式，左邊各項的係數與上節求 β 時方程式 (a)，(b)，(c) 內的是相同的，祇是 β 換成了 k_1，k_2 與 k_3(注意這三個 k 與第七章常態性測驗中所用的無關，勿混淆)；而等號右邊的並不是相關係數，卻是三組數目：(1，0，0)，

【表 11–9】 k 值之解法

標準方程式之左側各項			方程式及解答之組號 1	2	3	方程式號碼	運算
k_1	$.6451k_2$	$.8274k_3$	1	0	0	(1)	
$.6451k_1$	k_2	$.4713k_3$	0	1	0	(2)	
$.8274k_1$	$.4713k_2$	k_3	0	0	1	(3)	
$1.2086k_1$	$.7797k_2$	k_3	1.2086	0	0	(4)	(1)÷.8274
$1.3683k_1$	$2.1218k_2$	k_3	0	2.1218	0	(5)	(2)÷.4713
$.3812k_1$	$.3084k_2$		1.2086	0	−1	(6)	(4)−(3)
$.1602k_1$	$1.3421k_2$		−1.2086	2.1218	0	(7)	(5)−(4)
$1.2361k_1$	k_2		3.9189	0	−3.2425	(8)	(6)÷.3084
$.1194k_1$	k_2		−.9005	1.5810	0	(9)	(7)÷1.3421
$1.1167k_1$			4.8194	−1.5810	−3.2425	(10)	(8)−(9)
k_1			4.3158	−1.4158	−2.9036	(11)	
	k_2		−1.4158	1.7501	.3466	(12)	
		k_3	−2.9036	.3466	3.2390	(13)	

(0,1,0),(0,0,1),每組數目定一組方程式.解方程式的步驟與上節相同,爲簡單起見,這裏用表解法(此爲 Gauss 氏法,參考文獻 11),讀者如將表 11-9 與上節對照,可更爲清楚.該表最右邊一欄所註明的運算,是施於該橫行內的每一分子的.如方程式(1)÷.8274時,左側各項的係數爲:

$$1/.8274=1.2086,$$
$$.6451/.8274=.7797,$$
$$.8274/.8274=1;$$

右側各項爲:

$$1/.8274=1.2086,$$
$$0/.8274=0,$$
$$0/.8274=0.$$

又如方程式(5)-(4)時,左側各項係數爲:

$$1.3688-1.2086=.1602,$$
$$2.1218-.7797=1.3421,$$
$$1-1=0;$$

右側各項爲:

$$0-1.2086=-1.2086,$$
$$2.1218-0=2.1218,$$
$$0-0=0.$$

這樣繼續下去一直到方程式(10),所經過的步驟與上節由(a)至(j)完全一樣的.第(11)式的數值是將第(10)式各項除以 1.1167 的結果.其中 4.3158 是第 1 組方程式解得的 k_1, -1.4158 是第 2 組的 k_1, -2.9036是第 3 組的 k_1.於是將 k_1 代入前式,求得各組的 k_2 與 k_3,茲舉四例於後.

(甲)以第 1 組的 $k_1=4.3158$ 代入式(8),

$$1.2361(4.3158)+k_2=3.9189,\ 解之,得\ k_2=-1.4158,$$

寫在第(12)式第 1 組解答行內.

(乙)將第 2 組的 $k_1=-1.4158$ 亦代入(8)式,

$$1.2361(-1.4158)+k_2=0,\quad k_2=1.7501,$$

此值寫在第(12)式第 2 組解答的一行內.

(丙)將第 2 組解答的 $k_1=-1.4158$, $k_2=1.7501$ 代入(3)式,

$$.8274(-1.4158)+.4713(1.7501)+k_3=0,\quad k_3=.3466,$$

此為第 2 組解答中之 k_3.

(丁)同理,將第 3 組解答中之 k_1 與 k_2 代入(3)式,

$$.8274(-2.9036)+.4713(.3466)+k_3=1,\quad k_3=3.2390.$$

表 11-9 末所列的九個 k 值是沿着左上至右下方的對角線呈對稱的,不過為核對起見,還是逐個計算一下比較妥當,至於末位小數微有出入是免不了的.

這樣我們求得了三組(k_1, k_2, k_3)值,每組可算出一 β 值,例如

$$\beta_{Y1\cdot23}=k_1r_{Y1}+k_2r_{Y2}+k_3r_{Y3}=(4.3158)(.5660)$$
$$+(-1.4158)(.5524)+(-2.9036)(.6650)$$
$$=-.2703. \qquad 公式(11\text{-}15)$$

同理 $$\beta_{Y2\cdot13}=(-1.4158)(.5660)+(1.7501)(.5524)$$
$$+(.3466)(.6650)=.3960,$$
$$\beta_{Y3\cdot12}=(-2.9036)(.5660)+(.3466)(.5524)$$
$$+(3.2390)(.6650)=.7020.$$

β 值的計算及其顯著性測驗,可用表 11-9 一併解法,但若無此節對

照，則該表演算原理，恐不容易明白了.

有了三組 k 值，就可計算 β 的標準誤. 讓我們先求一個 v 值:

$$v=\frac{1-R^2}{N-m}, \qquad \text{公式(11-16)}$$

式中 R 是本節開始時求得的多元相關係數，N 爲總次數，m 爲變數的個數. 將各值代入此式，得

$$v=\frac{1-.5326}{174-4}=.0027494.$$

再乘以適當的 k 值，得各 β 的變異數，

$$V_1=vk_{11}, \qquad V_2=vk_{22}, \qquad V_3=vk_{33}. \qquad \text{公式(11-17)}$$

所謂 k_{11} 是指第 1 組解答的 k_1 值，餘類推.

$$V_1=(.0027494)(4.3158)=.011866,$$

$$V_2=(.0027494)(1.7501)=.004812,$$

$$V_3=(.0027494)(3.2390)=.008905.$$

開方得標準誤

$$S_1=.1089, \qquad S_2=.0694, \qquad S_3=.0944.$$

因得

$$t_1=\beta_{Y1\cdot23}/S_1=-.2702/.1089=-2.480,$$

$$t_2=\beta_{Y2\cdot13}/S_2=.3959/.0694=5.707,$$

$$t_3=\beta_{Y3\cdot12}/S_3=.7020/.0944=7.439.$$

查 t 值表(表 4–4)，當自由度爲 $174-4=170$ 時，5% 點約爲 1.976，1%點約爲 2.609. 此處 t_1 爲顯著（注意: 比較時用 t 之絕對值，不計符號），t_2 與 t_3 均爲非常顯著. 易言之，當身高、胸圍固定時，體重與肺活量間有顯著的相反關係；而當其他兩項固定時，身高與肺活量，及

胸圍與肺活量間皆有非常顯著的正關係. 這結論與表 11-7—11-8 所得的相同.

在四元迴歸中, 測驗兩 β 相差之顯著性亦用 t 值, 所需標準誤可利用上面求得的 v 與 k 值求得, 如

$$\left.\begin{array}{l}(\beta_{Y1\cdot23}-\beta_{Y2\cdot13})\text{之標準誤爲}\sqrt{v(k_{11}+k_{22}-2k_{12})}\\(\beta_{Y2\cdot13}-\beta_{Y3\cdot12})\text{之標準誤爲}\sqrt{v(k_{22}+k_{33}-2k_{23})}\\(\beta_{Y1\cdot23}-\beta_{Y3\cdot12})\text{之標準誤爲}\sqrt{v(k_{11}+k_{33}-2k_{13})}\end{array}\right\}.\text{公式}(11\text{–}18)$$

上例

$$v(k_{11}+k_{22}-2k_{12})=.0027494[4.3158+1.7501-2(-1.4158)]$$
$$=.024463,\quad \sqrt{.024463}=.1564,$$
$$\beta_{Y2\cdot13}-\beta_{Y1\cdot23}=.3959-(-.2702)=.6661,$$
$$t=.6661/.1564=4.259.$$

又 $$v(k_{22}+k_{33}-2k_{23})=.0027494[1.7501+3.2390-2(.3466)]$$
$$=.011811,\quad \sqrt{.011811}=.10868.$$
$$\beta_{Y3\cdot12}-\beta_{Y2\cdot13}=.7020-.3959=.3061,$$
$$t=.3061/.1087=2.816.$$

查 t 值表, 當自由度爲 170 時, 1% 點約爲 2.609, 此處求得之 t 值皆大於 1% 點, 故 β 值之相差爲非常顯著.

公式(11-18)實爲公式 (11-8) 之推廣, 讀者若將三元迴歸的兩個標準方程式(第 11-2 節末)仿表 11-9 解之, 可得

$$k_{11}=k_{22}=1/(1-r_{12}^2),\quad k_{12}=k_{21}=-r_{12}/(1-r_{12}^2),$$

又 $v=(1-R^2)/(N-3)$, 代入公式(11-18), 卽可化爲公式(11-8).

11-10. 多元迴歸之一般解法 上面已講過三元與四元迴歸方

程式的求法.若所含的變數更多時,其標準方程式仍與公式(11-12)相似,只是項數增多而已.普通用行列式(determinant)來解這套標準方程式,不過計算時不很便利,所以這裏不預備介紹.讀者要明白其原理,可參考 H. L. Rietz 等著作(9).下面所講的是 Doolittle 氏法(10),當迴歸方程式中含有五個或以上的變數時,這是最簡便的一種方法.

此法所用的表格如表 11-10,為了印刷上的便利計,這裏只列到七個變數(六個自變數,一個因變數),若變數更多時,可依此類推,因為此表的計算方法是很有規則的,只要把'運算'欄的說明仔細看過,就會懂得其中的原則.若算六元迴歸,則將標有 F 的縱行取消,五元迴歸則將 E 與 F 兩直行取消.但不論有幾個變數,I 行總是保留的.同時該表下段也隨着取消,如六元迴歸自 25 行起删去,五元迴歸自 18 行起删去.又表末之 β 若用前面的寫法,則 β_6 即為 $\beta_{Y6\cdot12345}$,兹為簡單計,只寫作 β_6.若在六元迴歸中,則只有五個自變數,故 β 值也只有五個,表末各式中凡含有 β_6 的各項皆取消,餘可類推.

運算欄內所用的符號,如 b_2,係指直行 b 與橫行 2 相交處方格內的數值,D_{11} 係直行 D 與橫行 11 相交處方格內的數值.至於該表最右邊的 X 直行是為核對用的.凡需要乘、加或除的各橫行在 X 直行內都要算的.但以一數乘某行總和時,須注意起訖的地位,凡不包括在內的幾個直行裏的數值必須扣去後再乘.例如 14 橫行註明'以 D_6 乘 5 行各項目,自 D 至 I',我們先要在總和 X_5 內扣去了 b_5 與 C_5,然後以 D_6 乘之,即 $(X_5-b_5-C_5)D_6$,此值應與 14 橫行內自 D_{14} 至 I_{14} 諸值之和相等.其餘如 4,8,9,13 等行均仿此.這種核對是必要的.

【表 11-10】 七元迴歸之表解法

行號	運算	A	b	C	D	E	F	I	X
		1	r_{12}	r_{13}	r_{14}	r_{15}	r_{16}	$-r_{Y1}$	自 A 至 I 之總和
1	塡入 r 値								
2	以 -1 除 1 行								
			1	r_{23}	r_{24}	r_{25}	r_{26}	$-r_{Y2}$	自 b 至 I 之總和
3	塡入 r 値								
4	以 b_2 乘 1 行各項目，自 b 至 I								
5	3,4 兩行相加								
6	以 $-b_5$ 除 5 行								
				1	r_{34}	r_{35}	r_{36}	$-r_{Y3}$	自 C 至 I 之總和
7	塡入 r 値								
8	以 C_2 乘 1 行各項目，自 C 至 I								
9	以 C_6 乘 5 行各項目，自 C 至 I								
10	7,8,9 三行相加								
11	以 $-C_{10}$ 除 10 行								
					1	r_{45}	r_{46}	$-r_{Y4}$	自 D 至 I 之總和
12	塡入 r 値								
13	以 D_2 乘 1 行各項目，自 D 至 I								
14	以 D_6 乘 5 行各項目，自 D 至 I								
15	以 D_{11} 乘 10 行各項目，自 D 至 I								
16	12,13,14,15 四行相加								
17	以 $-D_{16}$ 除 16 行								
						1	r_{56}	$-r_{Y5}$	自 E 至 I 之總和
18	塡入 r 値								
19	以 E_2 乘 1 行各項目，自 E 至 I								
20	以 E_6 乘 5 行各項目，自 E 至 I								
21	以 E_{11} 乘 10 行各項目，自 E 至 I								
22	以 E_{17} 乘 16 行各項目，自 E 至 I								
23	18,19,20,21,22 五行相加								
24	以 $-E_{23}$ 除 23 行								
							1	$-r_{Y6}$	自 F 至 I 之總和
25	塡入 r 値								
26	以 F_2 乘 1 行各項目，自 F 至 I								
27	以 F_6 乘 5 行各項目，自 F 至 I								
28	以 F_{11} 乘 10 行各項目，自 F 至 I								
29	以 F_{17} 乘 16 行各項目，自 F 至 I								
30	以 F_{24} 乘 23 行各項目，自 F 至 I								
31	25,26,27,28,29,30 六行相加								
32	以 $-F_{31}$ 除 31 行								

$\beta_6 = I_{32}$;

$\beta_5 = (\beta_6)F_{24} + I_{24}$;

$\beta_4 = (\beta_6)F_{17} + (\beta_5)E_{17} + I_{17}$;

$\beta_3 = (\beta_6)F_{11} + (\beta_5)E_{11} + (\beta_4)D_{11} + I_{11}$;

$\beta_2 = (\beta_6)F_6 + (\beta_5)E_6 + (\beta_4)D_6 + (\beta_3)C_6 + I_6$;

$\beta_1 = (\beta_6)F_2 + (\beta_5)E_2 + (\beta_4)D_2 + (\beta_3)C_2 + (\beta_2)b_2 + I_2$.

將全表算畢代入表末所附公式，即得各 β 值. 最後以 β 值、離均差平方和及各均數代入下式，即得所需之迴歸方程式：

$$Y=\bar{y}+\beta_1\frac{\sqrt{\Sigma(Y-\bar{y})^2}}{\sqrt{\Sigma(X_1-\bar{x}_1)^2}}(X_1-\bar{x}_1)$$

$$+\beta_2\frac{\sqrt{\Sigma(Y-\bar{y})^2}}{\sqrt{\Sigma(X_2-\bar{x}_2)^2}}(X_2-\bar{x}_2)+\cdots\cdots. \quad \text{公式(11–19)}$$

此時多元相關 R 的公式，可由(11–4)及(11–14)兩公式類推. 部分相關的公式亦與公式(11–9)相似，如

$$r_{Y1\cdot23456}=\sqrt{b_{Y1\cdot23456}\quad b_{1Y\cdot23456}}. \qquad \text{公式(11–20)}$$

這是指當 $X_2, X_3, \cdots\cdots, X_6$ 五個變數固定時，Y 與 X_1 間之部分相關. 根號內的 $b_{Y1\cdot23456}$ 是這五個變數固定時由 X_1 推算 Y 的部分迴歸係數，而 $b_{1Y\cdot23456}$ 則為由 Y 推算 X_1 的部分迴歸係數. 凡有 p 個變數固定者，即稱為 p 級部分相關係數(partial correlation coefficient of the pth order). 故簡單相關係數 r_{12} 可稱為零級相關係數，$r_{Y1\cdot2}$ 或 $r_{Y2\cdot1}$ 稱為一級部分相關係數，而 $r_{Y1\cdot23456}$ 則為五級部分相關係數. 各級部分相關係數的顯著性測驗都可用公式(11–11).

11–11. 多元共變數(multiple covariance) 在多元迴歸中，亦可應用共變數分析法. 例如以動物飼養實驗比較幾種飼料的優劣，若欲將各組動物的食量與原始體重都化為相等，然後看各組最後體重有無顯著的差別，這時就要用多元共變數. 又如研究幾個民族的基底代謝，欲將年齡與身體表面積都化為相等，然後比較各民族在基底狀況下每小時的發熱量，這也要用多元共變數了. 現在我們就利用表 11–1 的資料，將被試者按年齡大小分為三組，當各被試者的

身高、體重化爲相等後，三組的心像面積有顯著的差別否？前面我們已經提過：在成人方面，年齡與心像面積之間並無顯著的相關，故三組心像面積的均數可預料到沒有眞正差別的，這裏只用來說明多元共變數的算法吧了.

我們把表 11-1 的資料，姑分爲‘19—24 歲，25—30 歲，31 歲及以上’三組，將各組身高、體重、心像面積的總和列於表 11-11，爲求‘組間’變異及共變異之用. 因爲前面用的是縮簡法，故此處仍沿用它（當然也可不用縮簡法）. 表末‘總計’一行裏的數值與表 11-2 所載的總和相同，這也是核對的一法. 現在可以計算各組均數間的離均差平方和及積和了（參閱公式 9-3 及 10-1），茲舉二例於下：

【表 11-11】 各年齡組身高體重與心像面積之總和

年齡組	人數	身高 $\Sigma(X_1-160)$	體重 $\Sigma(X_2-50)$	心像面積 $\Sigma(Y-85)$
19—24 歲	31	140	21.6	20.0
25—30 歲	22	103	43.2	−4.0
31 歲及以上	24	11	15.0	−32.3
總計	77	254	79.8	−16.3

離均差平方和：

$$\text{身高}\quad \frac{(140)^2}{31}+\frac{(103)^2}{22}+\frac{(11)^2}{24}-\frac{(254)^2}{77}=281.66.$$

同理，求得體重的爲 26.56，心像面積的爲 53.65.

離均差積之和：

身高與體重

$$\frac{(140)(21.6)}{31}+\frac{(103)(43.2)}{22}+\frac{(11)(15.0)}{24}-\frac{(254)(79.8)}{77}=43.44.$$

同理，身高與心像面積的爲 110.56，體重與心像面積的爲 2.79.

我們把表 11-3 總的離均差平方和及積和寫在表 11-12 的第一行，把剛纔求得的組間離均差平方和及積和填入第二行，將'總計'與'組間'兩行相減，即得'組內'各值（參閱公式 9-2 及第 10-2 節）．若分

【表 11-12】 組間與組內之離均差平方和及積和

	離均差之平方和			離均差積之和		
	身高(X_1)	體重(X_2)	心像面積(Y)	身高與體重	身高與心像面積	體重與心像面積
總計	4,724.13	4,290.94	8,622.24	2,311.86	3,951.67	3,484.80
組間	281.66	26.56	53.65	43.44	110.56	2.79
組內	4,442.47	4,264.38	8,568.59	2,268.42	3,841.11	3,482.01

別求各組的組內變異或共變異亦可，但以上述方法爲便．於是用公式(6-1)求'組內'各相關係數，如

$$r_{12}=\frac{2,268.42}{\sqrt{4,442.47}\sqrt{4,264.38}}=.5212.$$

同理，求得 $r_{Y1}=.6226,\qquad r_{Y2}=.5760.$

再將此三個 r 值代入公式(11-1)，得

$$\beta_{Y1\cdot2}=.4426,\quad \beta_{Y2\cdot1}=.3453.$$

按公式(11-2)化爲原來單位，

$$b_{Y1\cdot2}=.4426\frac{\sqrt{8,568.59}}{\sqrt{4,442.47}}=.6147,$$

$$b_{Y2\cdot1}=.3453\frac{\sqrt{8,568.59}}{\sqrt{4,264.38}}=.4895.$$

將表(11-3)所列均數及此處之 b 值代入公式(11-3)，得組內三元迴

歸方程式

$$Y_e = 84.79 + .6147(X_1 - 163.30) + .4895(X_2 - 51.04).$$

我們所需要的是各組的修正均數，在多元迴歸中修正值的計算法與公式(5-7)相似，卽

$$Y_a = Y - b_{Y1\cdot 2}(X_1 - \bar{x}_1) - b_{Y2\cdot 1}(X_2 - \bar{x}_2). \qquad \text{公式(11-21)}$$

變數更多時可以類推. 將各值代入，則得

$$Y_a = Y - .6147(X_1 - 163.30) - .4895(X_2 - 51.04)$$
$$= Y - .6147X_1 - .4895X_2 + 125.38.$$

又自表 11-11，用公式(2-2)求得各組觀察的均數爲:

	身高(X_1)	體重(X_2)	心像面積(Y)
19—24 歲	164.516	50.697	85.65
25—30 歲	164.682	51.964	84.82
31 歲及以上	160.458	50.625	83.65

以各組均數代入上式，得各組修正均數如下:

19—24 歲	25—30 歲	31 歲及以上
85.08	83.53	85.61

這是把身高、體重都化爲相等時 ($\bar{x}_1 = 163.30$, $\bar{x}_2 = 51.04$) 各組心像面積的平均值. 此三個修正均數有無顯著的差別，可以 F 值測驗之，其原理與第 10-1—10-3 節相同. 表11-13的左半部是測驗三個觀察均數間相差的顯著性的，其離均差平方和，錄自表 11-12，組內自由度爲$(31-1)+(22-1)+(24-1)=74$，組間自由度爲 $3-1=2$. 又組間均方爲 26.83，乃表示三個觀察均數間的變異，而組內均方爲 115.79，則表示各組內的個別差異或誤差，今前者小於後者，故知三

【表 11-13】 各年齡組心像面積之觀察均數及修正均數之顯著性

變異來源	自由度	心像面積		R^2	估計之誤差		
		平方和	均方		自由度	平方和	均方
總計	76	8,622.24		.47171	74	4,555.04	
組內	74	8,568.59	115.79	.47450	72	4,502.79	62.54
組間	2	53.65	26.83		2	52.25	26.13

個觀察均數並無眞正的差別.(本來顯著性測驗至此就可停止,而不必再求各組修正均數並作進一步分析了,但此處仍繼續下去,俾讀者得窺全豹.)

表 11-13 的右半部是爲測驗三個修正均數間相差的顯著性的.在第 11-3—10-4 兩節,已求得總的多元相關爲

$$R^2=.47171,\quad (1-R^2)\Sigma(Y-\bar{y})^2=4,555.04.$$

同理,組內之多元相關爲

$$R^2=.6226(.4426)+.5760(.3453)=.47450.$$

其估計誤差之平方和爲

$$(1-.4745)(8,568.59)=4,502.79.$$

在計算三元迴歸的估計誤差時,除已用均數外,又用了兩個部分迴歸係數,故其自由度較左半部又各少 2 個.'總計'與'組內'兩估計誤差平方和之相差爲 52.25,附 2 個自由度是表示三個修正均數間的變異的.化成均方後,我們可以看到組間均方反較組內(誤差)均方爲小,故知三個修正均數間的差別,還不如各組組內個別差異之大,這樣便證實了本節最初的預料.

【練 習 題】

1. 茲以 X_1 爲體重(仟克), X_2 爲身高(厘米), Y 爲肺活量(百立方厘米). 試用下列統計數(6), 求一由體重、身高推算肺活量之迴歸方程式.

我國十九歲以上女子 258 人體重、身高
及肺活量之均數相關係數等

$\bar{x}_1 = 49.02$,	$\bar{x}_2 = 155.16$,	$\bar{y} = 24.961$.
$\Sigma(X_1-\bar{x}_1)^2 = 8,451.88$,	$r_{12} = .5993$,	
$\Sigma(X_2-\bar{x}_2)^2 = 7,261.16$,	$r_{Y1} = .4108$,	
$\Sigma(Y-\bar{y})^2 = 4,147.60$,	$r_{Y2} = .5645$.	

2. 測驗前題所得兩 β 之顯著性. 若有一 β 爲不顯著, 卽表示在迴歸方程式中, 此 β 所屬之變數可以除去. 試將該變數除去後, 另求一推算肺活量之直線迴歸方程式. (參閱公式 6-9, 式中所需之標準差可由前題之離均差平方和求得.)

3. 問在實驗資料中, 下列情形爲可能否? (參閱公式 11-5.)

$r_{Y1}=0.6,\qquad r_{Y2}=0.8,\qquad r_{12}=-0.5.$

4. 已知 $r_{Y1}=0.6$, $r_{Y2}=0.8$, 試求各 r_{12} 之值對於 $R_{Y\cdot12}$ 之影響. r_{12} 之值可用 -0.8, -0.6, -0.4, -0.2, 0, 0.2, …….

5. 下表爲自 1918 年美洲流行性感冒 (influenza) 大流行時 34 個城市之紀錄中(12)求得之相關係數. 其中 X_1 爲人口之年齡分配, 卽某城市人口中少年所占的成分; X_2 爲該城市的緯度; X_3 爲每一萬人口中心臟病患者之死亡數; Y 爲 25 星期內每一萬人口中患流行性感冒者之死亡數. 試用 Gauss 法 (表 11-9), 求 $\beta_{Y1\cdot23}$, $\beta_{Y2\cdot13}$, $\beta_{Y3\cdot12}$, 並測驗其顯著性. 此表看法如 $r_{12}=0.0780$, $r_{Y1}=-0.0258$,

餘類推.

$N=24$	X_1	X_2	X_3
X_2	0.0780		
X_3	−0.6217	−0.2955	
Y	−0.0258	−0.3482	0.4705

6. 仿公式(11–10)寫出 $r_{14\cdot3}$, $r_{24\cdot3}$, 然後用下列公式求第5題之 $r_{Y1\cdot23}$, 並用公式(11–11)及表 11–5 測驗其顯著性. 問結果與上題 $\beta_{Y1\cdot23}$ 之顯著性相同否?

$$r_{12\cdot34}=\frac{r_{12\cdot3}-(r_{14\cdot3}\times r_{24\cdot3})}{\sqrt{1-r^2_{14\cdot3}}\sqrt{1-r^2_{24\cdot3}}}$$

注意第5題中之 Y 相當於此公式中之 X_1, 而第5題之 X_1 相當於此公式中之 X_2, 餘類推. 學者須養成活用公式之習慣.

7. P. H. Stevenson 氏(8)曾測量中國男子之身高(厘米)、坐高(厘米)、胸圍(厘米)、體重(仟克)及肺活量(升). 試用Doolittle氏法(表 11–10), 求一推算肺活量之五元迴歸方程式. 所需均數、標準差及相關係數如下:

	均數	標準差	相關係數			
			身高	坐高	胸圍	體重
身高	166.03	5.18				
坐高	89.97	3.02	0.720			
胸圍	80.85	4.94	0.389	0.327		
體重	56.08	6.60	0.569	0.529	0.780	
肺活量	3.47	0.56	0.348	0.331	0.336	0.306

註. $b_{Y1\cdot234}=\beta_{Y1\cdot234}\frac{S_Y}{S_1}$, 餘類推.

8. 下表爲飼養實驗之紀錄(13),所用動物有五組,每組予以一種

第一組			第二組			第三組			第四組			第五組		
原始體重	所食飼料	最後體重	原始體重	所食飼料	最後體重	原始體重	所食飼料	最後體重	原始體重	所食飼料	最後體重	原始體重	所食飼料	最後體重
30	674	195	26	699	194	39	708	203	41	716	226	41	831	242
21	628	177	24	626	204	34	614	190	35	769	230	36	754	225
21	661	180	20	668	200	32	733	221	32	733	218	32	722	205
33	694	200	35	668	201	35	663	173	34	742	235	35	728	228
27	713	197	25	707	195	32	607	185	32	624	197	32	646	196
24	585	170	26	651	187	35	745	225	35	710	210	36	678	196
20	575	150	20	672	191	30	637	190	30	742	217	30	763	230
29	638	180	31	660	200	29	662	201	28	648	205	28	625	170
28	632	192	29	769	208	32	609	174	34	628	200	32	710	216
26	637	184	27	666	218	25	596	180	26	601	191	26	651	175

飼料.若將原始體重及食量均化爲相等後,各組最後(實驗終)體重之均數有顯著的差別否?試以多元共變數法測驗之.

【參　考　文　獻】

(1) 鄒仲、陳又新:國人心臟及主動脈之X光測量,中華醫學雜誌,26, 1:16–37(二十九年).

(2) 郭祖超:推算國人心臟面積之公式,現代醫學,1,2:109–119(三十三年八月).

(3) Hodges, P. C. and Eyster, J. A. E., Estimation of cardiac area in man, Am. J. Roentgenol. and Rad. Therap., 12:252 (1924).

(4) Mills, F. C., Statistical Methods, pp. 544–545, Henry Holt & Co., New York (1938).

(5) Wallace, H. A. and Snedecor, G. W., Correlation and Machine Calculation, revised edition, Iowa State College Official Publication, 30, No. 4 (1931).

(6) Kuo, T. C. and Wu, C. H., Regression equations for estimating body weight and vital capacity of normal Chinese students, Proceedings of Chinese Physiological Society, Chengtu Branch, 2, 4 and 5 : 101–104 (1944).

(7) Tsai, C. and Wu, C. H., A statistical study of the vital capacity of senior middle school and college students, Chinese Journal of Physiology, 14, 1 : 95–116 (1939). 原來資料係二氏所供給.

(8) Stevenson, P. H., Prediction formulae for height, sitting height, chest girth, weight and vital capacity for adult male Chinese, Chinese Journal of Physiology, 9, 3 : 213–222 (1935).

(9) Rietz, H. L., Editor-in-chief, Handbook of Mathematical Statistics, pp. 139–142, Houghton Mifflin Co., New York (1924).

(10) Doolittle, M. H., United States Coast and Geodetic Survey Report, 1878 : 115.

(11) Carl Friedrich Gauss, Theoria Combinationis Observatorium, Pars Posterior (1821), Werke, 4 : 31; Supplement (1826), Werke, 4 : 71.

(12) Raymond Pearl, Public Health Reports, **34**:**1743** (1919); 36:289 (**1921**).

(13) Crampton, E. M. and Hopkins, J. W. J., **Nutrition**, 8 : 329–340 (1934).

第十二章　曲線迴歸

12-1. 引言　本書前面所講的直線迴歸，在很多地方固然非常合用，但在有些資料中，變數與變數間的關係卻沒有這樣簡單. 要把兩個或幾個變數間相隨着變異的情形精確地表示出來，這是曲線配合(curve fitting)中的一個問題，也就是本章所要討論的曲線迴歸(curvilinear regression). 在曲線配合中，直線的配合只是一個最簡單的特例罷了.

對於非直線的資料配合——曲線的動機有幾種：有時對於自變數(如 X)的任何特殊數值，要推算其因變數(如 Y)的相當的估計值，那麼就得把不規則的資料予以修勻(smoothing)，而將觀察資料中所未備的 X 值，用內插法求得其相當的 Y 值. 有時配合曲線的目的，卻在發現或試驗變數所遵循的法則，如生長曲線(growth curve)等. 但有時我們的目的，卻祇在除去相關係數或實驗誤差中由於非直線迴歸而引起的不正確性，至於變數間具有何種關係，卻是不去考慮的.

將資料配合曲線的問題曾從許多不同的方向去發展. 除了試驗某種法則以外，大概主要的困難，是在選擇一個適當的方程式. 方程式的類別，可粗分為兩大類：

甲. 多項式

$$Y=a+bX,$$

乙. 對數曲線

$$Y=a+b\log X,$$

$$Y=a+bX+cX^2, \qquad \log Y=a+bX,$$

$$Y=a+bX+cX^2+dX^3, \qquad \log Y=a+b\log X,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

多項式中第一個是簡單的直線方程式(linear equation),此式卽爲第五章公式(5-3)的變相,第二個爲簡單拋物線(parabola)或二次曲線,第三個爲三次曲線.簡單拋物線祇有一個極大點(maximum point)或極小點(minimum point),而無轉向點(point of inflection).三次曲線則有極大點、極小點和轉向點各一個.曲線的次數愈高,則極大點與極小點也愈多,且轉曲亦愈多而愈快.

對數曲線可認爲多項式之變形.如在$Y=a+bX$中,若以$\log X$代X,卽得對數曲線中的第一個方程式.在生物現象中,有不少資料可配合對數曲線,惟因對數方程式中X不能有負值,故其應用不若多項式之廣.

12-2. 對數曲線之配合法 有些比較簡單的生長現象,有一種特性,便是在任何時刻所增加的數目與當時已有的大小成正比例.這種生長的情形,與銀行中所用複利的法則相同.當培養細菌時,在生長的某一階段中,細菌的數目是依照這個法則而增加的.這一種對數曲線,特名之爲指數生長曲線(exponential growth curve).例如表12-1第1,2兩行爲普通變形桿菌(proteus vulgaris)在實驗室中生長的紀錄(1).爲測驗是項資料是否適合於對數曲線起見,先將第2行的數值化成普通對數,記於第3行.然後把第1行與第3行的數值,繪成點子,見圖12-1上半部.我們可以看到這些黑點,差不多在一根直線上,這表示手頭的資料可以配合$\log C=a+bX$形式的

【表 12-1】 指數生長曲線之配合法(普通變形桿菌之生長)

(1) 孵養時間 (分鐘, X)	(2) 細胞計數 (10^7, C)	(3) C 之對數 ($Y=\log C$)	(4) X^2	(5) Y^2	(6) XY
0	1.53	0.185	0	.03423	0
130	13.60	1.134	16,900	1.28596	147.420
175	26.40	1.422	30,625	2.02208	248.850
225	59.20	1.772	50,625	3.13998	398.700
252	77.60	1.890	63,504	3.57210	476.280
315	148.20	2.171	99,225	4.71324	683.865
1,097		8.574	260,879	14.76759	1,955.115

$$\bar{x}=182.83,\qquad \bar{y}=1.429.$$

$$\Sigma(X-\bar{x})^2=260,879-\frac{(1,097)^2}{6}=60,310.83,$$

$$\Sigma(Y-\bar{y})^2=14.76759-\frac{(8.574)^2}{6}=2.51534,$$

$$\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})=1,955.115-\frac{(1,097)(8.574)}{6}=387.502.$$

$$Y_e-1.429=\frac{387.502}{60,310.83}(X-182.83)=.006425\,X-1.1747,$$

$$Y_e=.006425\,X+.2543. \qquad \text{(A)}$$

曲線. 在配合其他形式的對數曲線時, 可將自變數 X 化爲對數, 或將自變數與因變數一併化爲對數, 若其中有一種可使圖上各點幾乎在一直線上, 那麽就合用了. 否則便不能配合這一類的對數曲線. 這樣把資料化成對數或其他函數使各點近於一直線的手續, 叫做直線化(rectification).

經過直線化的測驗以後, 就可進行配合的手續了. 計算的過程

與第五章配合簡單直線時相同(參閱表 5–1). 結果得

$$Y_e = .006425X + .2543. \qquad \textbf{(A)}$$

在計算過程中,我們以 Y 代 $\log C$, 故此式即為

$$\log C_e = .006425X + .2543.$$

將表 12–1 第 1 行各 X 值代入前式,得相當的 Y_e 值,若代入後式,再由對數表查得眞數,則得 C_e 值. 玆將 Y_e 與 C_e 各估計值列後:

X	Y_e	C_e
0	.254	1.80
130	1.090	12.29
175	1.379	23.92
225	1.700	50.11
252	1.873	74.71
315	2.278	189.75

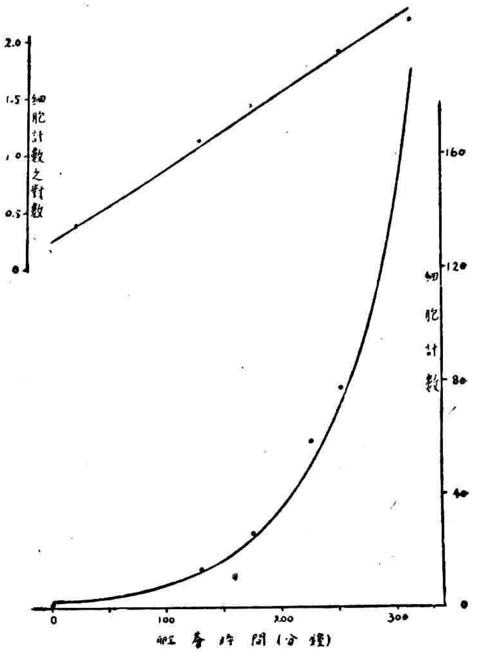


圖 12-1. 普通變形桿菌之生長及所配合之對數曲線

以 X 與 Y_e 兩行的數值繪圖,則得圖 12–1 上半部的一條直線,又以 X 與 C_e 兩行的數值繪圖,則為該圖下半部的曲線. 曲線附近的小圓圈表示 C 的觀察值,即由表 12–1 第 1, 2 兩行的數值所繪成.

迴歸方程式 $\log C_e = .006425\,X + .2543$ 可以化成另一個形式,

因爲 $\log 1.0149 = .006425$, 又 $\log 1.796 = .2543$, 於是此式簡化如下:

$$\log C_e = .006425X + .2543 = X\log 1.0149 + \log 1.796$$

$$= \log(1.0149)^x + \log 1.796 = \log[1.796(1.0149)^x],$$

$$\therefore \quad C_e = 1.796(1.0149)^x. \qquad \text{(B)}$$

按最小二乘方原理, (A)式估計誤差的平方和, 卽

$$\Sigma(Y - Y_e)^2 \text{ 或 } \Sigma(\log C - \log C_e)^2$$

應爲最小,但經化爲指數方程式(B)後, $\Sigma(C - C_e)^2$ 卻並不是最小, 若必須化成最小,可參考 T. R. Running: Empirical Formulas 等書(1). 但這種形式上的改變(將對數方程式化成指數方程式), 以及將常數稍加校正, 通常是沒有什麼特殊目的的.

12-3. 簡單拋物線之配合法 二次多項式的一般形式是

$$Y = a + bX + cX^2.$$

這是一個拋物線, 其軸垂直. 但在配合過程中, 往往只用到拋物線的一部分. 這裏可以把 X^2 看做另一個自變數,於是卽可應用多元迴歸的方法解出 a, b, c 三值. 有時 X^2 項可用 $\sqrt{X}$, $\log X$ 或 $1/X$ 等代替, 視資料的需要而定.

上列二次多項式中, a, b, c 三數可以下列標準方程式解出來:

$$\left.\begin{aligned} aN + b\Sigma X + c\Sigma X^2 &= \Sigma Y \\ a\Sigma X + b\Sigma X^2 + c\Sigma X^3 &= \Sigma XY \\ a\Sigma X^2 + b\Sigma X^3 + c\Sigma X^4 &= \Sigma X^2 Y \end{aligned}\right\}. \qquad \text{公式(12-1)}$$

玆將氫游子濃度與雞蛋白凝固百分數(3)的資料, 配合一簡單拋物線(表12-2第1, 2兩行), 各 X^2, X^3, X^4 等數值可由 Barlow's Tables(4)

查到，相加後即得所需要的總和，惟 XY 及 X^2Y 等乘積則須逐一計算. 各乘方及乘積的總和，見表 12–2 之末.

【表 12–2】 簡單拋物線之配合法

（氫游子濃度對於雞蛋白凝固之影響）

溶液之 pH X (1)	凝固百分數 Y (2)	XY (3)	X^2 (4)	X^2Y (5)
4.51	47.3	213.323	20.3401	962.08673
4.58	51.8	237.244	20.9764	1,086.57752
4.69	54.6	256.074	21.9961	1,200.98706
4.83	55.5	268.065	23.3289	1,294.75395
4.98	51·2	254.976	24.8004	1,269.78048
5.13	42.5	218.025	26.3169	1,118.46825
28.72	302.9	1,447.707	137.7588	6,932.65399

$N=6$, $\Sigma X=28.72$, $\Sigma X^2=137.7588$,

$\Sigma X^3=662.157,748$, $\Sigma X^4=3,189.434,081,16$.

$\Sigma Y=302.9$, $\Sigma XY=1,447.707$, $\Sigma X^2Y=6,932.65399$.

將各總和值代入公式(12–1)，得標準方程式如下:

$$6a + 28.72b + 137.7588c = 302.9,$$

$$28.72a + 137.7588b + 662.1577c = 1,447.707,$$

$$137.7588a + 662.1577b + 3,189.4341c = 6,932.654.$$

解之(參閱前章第 11–8 節)，得

$$a=-2,151.625, \quad b=921.016, \quad c=-96.103.$$

因得 $Y_c=-2,151.625+921.016X-96.103X^2$. (C)

將各 X 值代入，得 Y 之估計值如下:

X	4.51	4.58	4.69	4.83	4.98	5.13
Y_e	47.41	50.73	54.05	54.91	51.64	44.05

此拋物線繪成圖形，則如圖12-2所示，曲線旁的小圓圈是根據表12-2第1,2兩行的觀察資料所繪製的.

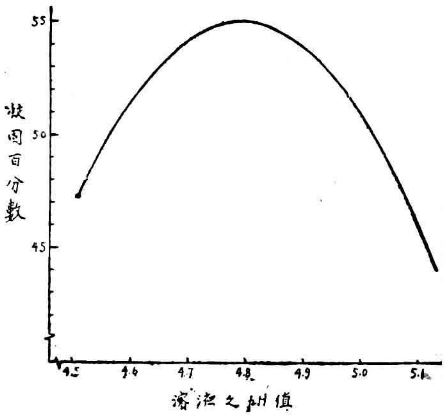


圖 12-2. 氫游子濃度對於蛋白質凝固之影響

欲求雞蛋白凝固之百分數最高時，其 pH 值爲若干，則可令(C)式之微分等於0，而解得 X 值. 按常數 a 之微分爲0，又 bX 之微分等於 b，又 cX^2 之微分等於 $2cX$(參閱初等微積分). 因得下式:

$$921.016+2(-96.103)X=0, \quad 921.016-192.206X=0,$$

$$X=\frac{921.016}{192.206}=4.79.$$

因知當 $pH=4.79$ 時，雞蛋白因震盪(shaking)而凝固之百分數爲最高.

由圖12-1及12-2，可見由實際資料畫成之點子(可稱爲觀察點，卽圖上的小圓圈)都在理論曲線的附近，卻很不容易全部都在理論曲線上，因爲實驗資料總受到抽樣變動的影響，所以各點與理論曲線稍有出入是不可避免的. 本書作者曾見我國雜誌上發表之研究報告中若干隨手畫成而通過所有觀察點的曲線，他們就根據這樣得

來的曲線，推論極大點或極小點在那裏. 要知道隨手畫成的曲線，就是形狀也不一定對，若據以下結論，更是很危險的！

曲線迴歸對於相關的影響，我們可以在此提一下. 若將表 12-2 第 1, 2 兩行的原來資料求相關係數，則得 $r=-.37411$；若求觀察值 Y 與曲線迴歸的估計值 Y_e 間的相關係數，則得 $R=.99207$（此處以 X 與 X^2 當做兩個變數，故按前章第 11-3 節的定義，此 R 即爲多元相關係數）. 爲測驗全體中迴歸之曲直計，可用變異數分析法解答之. 先假設全體中 pH 與雞蛋白凝固百分數具有直線的關係，求得估計誤差之平方和（公式 6-12）爲

$$(1-r^2)\Sigma(Y-\bar{y})^2=[1-(-.37411)^2](118.23)=101.68.$$

同理，假設全體中呈曲線的關係時，其估計誤差之平方和（參閱前章第11-4節）爲

$$(1-R^2)\Sigma(Y-\bar{y})^2=[1-(.99207)^2](118.23)=1.87.$$

前者之自由度爲 $6-2=4$，後者爲 $6-3=3$. 將平方和及自由度列於表 12-3. 由此可見，引用二次曲線以後，其估計誤差之平方和減少了 99.81，其相當的自由度爲 1. 經顯著性測驗後，其減少之部分爲非常顯著（$n_1=1, n_2=3$, 1 % 點 $=34.12$）. 故直線迴歸之假設應予放棄，並知 pH 與雞蛋白凝固百分數間的迴歸呈非常顯著的曲線性.

【表 12-3】 迴歸曲直之測驗（直線迴歸與曲線迴歸之比較）

變異來源	自由度	平方和	均方	F
直線迴歸之估計誤差	4	101.68		
曲線迴歸之估計誤差	3	1.87	.62	
迴歸之曲線性	1	99.81	99.81	160.98

讀者或許會發生一個疑問，覺得前節將資料直線化與本節配合二次曲線，似乎大相逕庭.其實這種差別只是表面的.我們若在三度空間裏繪一圖形，以 Y, X 與 X^2 用三根軸分別表示，則(C)式所代表的迴歸面(regression surface)將成爲一平面.所以前節與本節對於資料的處理其實並無二致，只在二度空間的圖形上看來好像不同罷了.

還有一點要注意的，不論直線或曲線迴歸，若在全距以外作外補插(extrapolation)，都要十分謹慎.因爲手頭的資料不足以告訴我們在其全距以外的趨勢怎樣.若將圖 12-2 的拋物線延長開去，其兩端都會伸展到橫軸以下，這時雞蛋白凝固的百分數將爲負數；這是很費解的.所以外補插往往得到錯誤的結果，必須謹慎小心纔好.

12-4. 與直線迴歸相離之測驗 前節所述測驗迴歸曲直的方法，是先要把曲線配合好了，然後進行變異數分析的.若資料分成若干組，並且只注意到是否呈直線迴歸的問題，那麼測驗步驟可以簡單得多了. B. J. Vos 與 W. T. Dawson 兩氏，曾將美國標準哇巴因(United States standard ouabain)徐徐注射於貓之靜脈內，以測定其致死量(lethal dose, Y).注射率(X)有四種，各倍於前.此處所研究之問題爲 Y 與 X 間是否呈直線迴歸.茲測驗其顯著性如次.

先用變異數分析法測驗四個均數(18.1, 28.2, 48.3, 70.2)間有無顯著的差別(參閱第九章第 9-2 節)，結果 F 值大於 1% 點，故四均數間之差別爲非常顯著.此種差別之主要原因，係由注射率 X 而來.我們要進一步研究 $\bar{y}$ 與 X 間的關係，是否與直線迴歸有顯著的差別.

【表12-4】 哇巴因對於貓之致死量(表內為簡縮數，各減去50單位)

	注射率 X $\left(\frac{\text{毫克/仟克/分鐘}}{1,000}\right)$				總計
	1.04575	2.0915	4.183	8.366	
Y	5	3	34	51	
	9	6	34	56	
	11	22	38	62	
	13	27	40	63	
	14	27	46	70	
	16	28	58	73	
	17	28	60	76	
	20	37	60	89	
	22	40	65	92	
	28	42			
	31	50			
	31				
ΣY	217	310	435	632	1,594
k	12	11	9	9	41
$\bar{y}$	18.1	28.2	48.3	70.2	38.9
ΣY^2	4,727	10,788	22,261	45,940	83,716

【表 12-5】 變異數分析(哇巴因四種注射率之致死量)

變異來源	自由度	離均差平方和	均 方	F	1%點
總 變 異	40	21,744			
組間(注射率)	3	16,093	5,364.3	35.13	4.36
組內(誤 差)	37	5,651	152.7		

在迴歸中需用 $\Sigma(X-\bar{x})^2$ 及 $\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})$ 等，惟因 Y 值分成四組，同組各 X 值皆相同，故計算時須加權(weighted)，如

$\Sigma X=12(1.04575)+11(2.0915)+9(4.183)+9(8.366)=148.496,$

同理 $\Sigma X^2 = 12(1.04575)^2 + \cdots\cdots + 9(8.366)^2 = 848.628,$

又 $\Sigma XY = (1.04575)(217) + (2.0915)(310)$

$+ (4.183)(435) + (8.366)(632) = 7,982.21.$

由此計算離均差平方和及積和:

$$\Sigma(X-\bar{x})^2 = 848.628 - (148.496)^2/41 = 310.797,$$

$$\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y}) = 7,982.21 - (148.496)(1,594)/41 = 2,208.98.$$

在 Y 方面，由於直線迴歸而來之變異爲(參閱第五章第 5–2 節)

$$(2,208.98)^2 \div 310.797 = 15,700,$$

相當於 1 個自由度. 於是與表 12–5 注射率間之變異並列於表 12–6,

【表 12–6】 與直線迴歸相離之測驗

變異來源	自由度	平方和	均方	F	5% 點
注射率(表 12-5)	3	16,093			
直線迴歸	1	15,700			
直線迴歸之估計誤差	2	393	196.5	1.3	3.26
誤差(表 12-5)	37		152.7		

二者自由度之相差爲 2, 平方和相差 393. 此值卽爲直線迴歸之估計誤差, 其均方與誤差之均方相比較, 並無顯著的差別. 故各點與直線迴歸之距離實與隨機抽樣所得者無異, 易言之, $\bar{y}$ 與 X 間的關係與直線迴歸, 並無眞正差別.

12–5. 正交多項式 (orthogonal polynomials) **之配合法** 前面所講的直線和拋物線方程式是多項式中最簡單的兩個, 現在我們要講多項式的一般配合法. 配合時方法便利, 且在理論上有充分根據者, 當推 R. A. Fisher 氏之正交多項式(5),

$$Y=A+BX_1+CX_2+DX_3+EX_4+\cdots\cdots, \qquad 公式(12\text{-}2)$$

式中 $A, B, C, \cdots\cdots$ 爲待定的數值，X_1，X_2 等各爲 X 的多項式〔不同次(degree)之多項式所代表之效果彼此獨立，換言之，不同多項式間無相關之存在. 由幾何學上解釋，若兩點代表無相關之事實，則其與球心之連線相正交〕，故配合所得方程式的最後形式仍爲

$$Y=a+bX+cX^2+dX^3+\cdots\cdots.$$

正交多項式爲一善於變化的曲線，能配合很多種的資料，它也包括直線和簡單拋物線在內. 本節所舉的例子，將限於 X 以 1 遞進，且一 X 值祇相當於一 Y 值的資料. 若 X 以異於 1 的等距離遞進，則可以此公共距離除各 X 值使化成單位距離. 倘 X 值的距離不等，或一個 X 值相當於幾個 Y 值時，則可用第 12–4 節的方法以測驗迴歸之曲直.

此法配合非常便利而有規則，循序前進，無須經嘗試錯誤(trial and error)之過程；且每配合一項，就可測驗其顯著性，故其配合適度如何隨時可以知道，這樣就不會枉費很多工夫而一無所成.

下面所用的資料是在實驗室中釀母(yeast)的生長紀錄. 實驗時將釀母種植於特殊培養基中，逐日計算其單位容量內的細胞數，記錄如下表:

日數 (X)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
釀母細胞數 (Y)	52.5	87.8	147.6	203.6	289.7	365.0	414.3	447.4	469.0	481.9

爲使讀者醒目起見，我們將分三小節來討論: (一)配合的步驟，(二)估計值的計算，及(三)方程式的計算. 請分述於後.

(一)配合的步驟　若將上列原來資料繪成圖形，將見類似一個

拉長的 S 字，故此資料大概可配合三次多項式，不過在過程中需要配合到四次曲線，由顯著性測驗的結果，若四次曲線比三次曲線沒有多大進步，那樣就可以停止了.

先將 Y 值列於表 12–7 的第 1 行，其總和為 $S_1=2,963.8$. 此值

【表 12–7】 配合正交多項式所需之計算

Y	2	3	4	5
52.5	52.5	52.5	52.5	52.5
87.8	140.3	192.8	245.3	297.8
147.6	287.9	480.7	726.0	1,023.8
208.6	496.5	9 7.2	1,703.2	2,727.0
289.7	786.2	1,763.4	3,466.6	6,193.6
365.0	1,151.2	2,914.6	6,381.2	12,574.8
414.3	1,565.5	4,480.1	10,861.3	23,436.1
447.4	2,012.9	6,493.0	17,354.3	40,790.4
469.0	2,481.9	8,974.9	26,329.2	67,119.6
481.9	2,963.8	11,933.7	38,267.9	105,387.5
$S_1=2,963.8$	$S_2=11,938.7$	$S_3=38,267.9$	$S_4=105,387.5$	$S_5=259,603.1$
$a=296.3800$	$b=217.0673$	$c=173.9450$	$d=147.3951$	$e=129.6719$
$a'=296.3800$	$b'=79.3127$	$c'=-6.9319$	$d'=-3.5493$	$e'=0.6351$
$A=296.3800$	$B=52.8751$	$C=-2.88829$	$D=-.985917$	$E=0.1323125$

以項目數 $n=10$ 除之，得 $a=296.38$，寫在 S_1 的下面. 此為下列公式中求得之第一數. 其餘公式將在後面用到.

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{S_1}{n} = \bar{y} \\ b &= \frac{(1)(2)}{n(n+1)}(S_2) \\ c &= \frac{(1)(2)(3)}{n(n+1)(n+2)}(S_3) \end{aligned}\right\} . \quad \text{公式(12–3)}$$

$$\left.\begin{aligned} d &= \frac{(1)(2)(3)(4)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}(S_4) \\ e &= \frac{(1)(2)(3)(4)(5)}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}(S_5) \end{aligned}\right\}$$

…………………………………………

再將該表的 a 值抄下來作爲 a'，此爲第二組公式中的第一個：

$$\left.\begin{aligned} a' &= a \\ b' &= a-b \\ c' &= a-3b+2c \\ d' &= a-6b+10c-5d \\ e' &= a-10b+30c-35d+14e \\ f' &= a-15b+70c-140d+126e-42f \\ g' &= a-21b+140c-420d+630e-462f+132g \\ h' &= a-28b+252c-1,050d+2,310e-2,772f \\ &\quad +1,716g-429h \end{aligned}\right\}. \text{公式(12–4)}$$

上列公式中各字母前之係數，可將下式依次累乘求得，式中 r 爲該項多項式之次數(公式 12–2 之每項代表一多項式，參閱後面第三小節)．

$$\frac{r(r+1)}{1\cdot 2},\quad \frac{(r-1)(r+2)}{2\cdot 3},\quad \frac{(r-2)(r+3)}{3\cdot 4},\quad \cdots\cdots. \text{公式(12–5)}$$

例如 h' 屬於 7 次多項式，以 $r=7$ 代入第一式，則得 28，代入第一、二兩式而乘之，得 252，餘類推．

尙有第三組公式，卽爲正交多項式中各項之係數：

$$\left.\begin{aligned}
A &= a' \\
B &= \frac{6}{n-1}(b') \\
C &= \frac{30}{(n-1)(n-2)}(c') \\
D &= \frac{142}{(n-1)(n-2)(n-3)}(d') \\
E &= \frac{630}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}(e')
\end{aligned}\right\}. \quad \text{公式(12-6)}$$

此後 F 之分子為 2,772, G 之分子為 12,012, H 之分子為 51,480. 各分子之數值可用下式計算:

$$\frac{(2r+1)(2r)(2r-1)(2r-2)\cdots\cdots 2\cdot 1}{[r(r-1)(r-2)\cdots\cdots 2\cdot 1]^2}, \quad \text{公式(12-7)}$$

r 仍為該項多項式之次數.

最後,第四組公式為每配合一項所減少之離均差平方和:

$$\left.\begin{aligned}
&nA^2 = \frac{(\Sigma Y)^2}{n} \\
&\frac{n(n^2-1)}{12}(B^2) \\
&\frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{180}(C^2) \\
&\frac{n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)}{2,800}(D^2) \\
&\frac{n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)(n^2-16)}{44,100}(E^2)
\end{aligned}\right\}. \quad \text{公式(12-8)}$$

此後三項之分母爲 698,544, 11,099,088, 176,679,360. 各分母之計算可用下式:

$$\frac{(2r+1)[2r(2r-1)(2r-2)\cdots\cdots2\cdot1]^2}{[r(r-1)(r-2)\cdots\cdots2\cdot1]^4}. \quad \text{公式(12–9)}$$

上例 $\Sigma Y^2=1,116,915.76$, 減去校正數 $nA^2=10(296.38)^2$, 則得 238,504.716, 卽爲 Y 之總離均差平方和 $\Sigma(Y-\bar{y})^2$. 若將原來資料配合一水平線 $Y=296.38$, 則其估計誤差之平方和卽等於 $\Sigma(Y-\bar{y})^2$.

第二步的配合自表 12–7 的第 2 行開始. 該行數值係將第 1 行各數累計得來, 如

$$52.5+87.8=140.3,$$

$$140.3+147.6=287.9,$$

$$287.9+208.6=496.5,$$

餘類推. 該行之末一數 2,963.8 應與 S_1 相等. 再將第 2 行各數相加, 得 $S_2=11,938.7$. 於是按公式(12–3), (12–4), (12–6), (12–8)計算下列各值:

$$b=\frac{1\times2}{10\times11}(11,938.7)=217.0673,$$

$$b'=296.3800-217.0673=79.3127,$$

$$B=\frac{6}{9}(79.3127)=52.8751,$$

$$\Sigma(Y-Y_e)^2=238,504.716-\frac{10(10^2-1)}{12}(52.8751)^2$$

$$=238,504.716-230,651.5365=7,853.1795.$$

最後一數爲配合直線迴歸後之估計誤差, 其自由度爲 $10-2=8$. 至

於由迴歸而減少的部分 230,651.5365，則有一個自由度. 茲以變異數分析法測驗其顯著性，見表 12-8 第一欄. 結果所得 F 值大於 1%

【表 12-8】 配合四次曲線時各階段所用自由度之顯著性

配合之次數	變異來源	平方和	自由度	均方	F	5%點	1%點
1	總變異	238,504.7160	9				
	迴歸	230,651.5365	1	230,651.5365	234.96		11.26
	誤差	7,853.1795	8	981.647			
2	迴歸	4,404.6917	1	4,404.6917	8.012	5.59	12.25
	誤差	3,848.4878	7	549.7839			
3	迴歸	3,002.4135	1	3,002.4135	21.29	5.99	13.74
	誤差	846.0743	6	141.0124			
4	迴歸	288.3967	1	288.3967	2.586	6.61	
	誤差	557.6776	5	111.5355			

點，故知由迴歸直線所減少之變異爲非常顯著.〔註：此處配合適度之測驗，與第 12-4 節與直線迴歸相離之測驗切勿混淆. 迴歸直線也許配合得並不好，但是只要它比均數 $Y=\bar{y}$ 的水平線配得好些，那麼在配合適度方面，由迴歸直線所減少的部分將爲顯著. 同時非直線性測驗(表 12-6)的結果可能表示各組 Y 的均數與迴歸直線有顯著的差別. 故遇有分組的資料(如表 12-4)，當配合直線後，最好作表 12-6 那樣的測驗，若並無非直線的證據，便可不必再配合較高次的曲線了.〕

第三步爲配合含有二次多項式之項(公式 12-2 中之 X_2). 由表 12-7 第 3 行開始，該行數值係將第 2 行各數累計而得，方法同前，結果得 $S_3=38,267.9$，

$$c=\frac{1\times2\times3}{10\times11\times12}(38,267.9)=173.945,$$

$$c'=296.38-3(217.0673)+2(173.945)=-6.9319,$$

$$C=\frac{30}{9\times8}(-6.9319)=-2.88829,$$

$$\Sigma(Y-Y_e)^2=7,853.1795-\frac{10(10^2-1)(10^2-4)}{180}(-2.88829)^2$$

$$=7,853.1795-4,404.6917=3,848.4878.$$

估計誤差之自由度爲 $8-1=7$ (因較前又多配合一項)，至於因迴歸而繼續減少之部分 4,404.6917，其自由度爲 1. 經顯著性測驗(表 12-8 第二欄)後，此減少之部分爲顯著(此處與表 12-3 之測驗相同，請比較之).

第四步爲配合含有三次多項式之項(公式 12-2 中之 X_3). 依前法計算表 12-7 第 4 行之各累計值，得

$$S_4=105,387.5,$$

$$d=\frac{1\times2\times3\times4}{10\times11\times12\times13}(105,387.5)=147.3951,$$

$$d'=296.38-6(217.0673)+10(173.945)-5(147.3951)$$

$$=-3.5493,$$

$$D=\frac{140}{9\times8\times7}(-3.5493)=-.985917,$$

$$\Sigma(Y-Y_e)^2=3,848.4878-\frac{10(10^2-1)(10^2-4)(10^2-9)}{2,800}(-.985917)^2$$

$$=3,848.4878-3,002.4135=846.0743.$$

其自由度爲 $7-1=6$，乃因迴歸而減少之部分仍爲 1 個自由度. 其顯著性測驗見表 12–8 第 3 欄，結果此減少之部分爲非常顯著.

第五步爲配合含有四次多項式之項(公式 12–2 中之 X_4). 由表 12–7 第 5 行，得 $S_5=259,603.1$，

$$e=\frac{1\times2\times3\times4\times5}{10\times11\times12\times13\times14}(259,603.1)=129.6719,$$

$$e'=296.38-10(217.0673)+30(173.945)-35(147.3951)$$
$$+14(129.6719)=.6351,$$

$$E=\frac{630}{9\times8\times7\times6}(.6351)=.1323125,$$

$$\Sigma(Y-Y_e)^2=846.0743-\frac{10(10^2-1)(10^2-4)(10^2-9)(10^2-16)}{44,100}(.1323125)^2$$
$$=846.0743-288.3967=557.6776.$$

其自由度爲 $6-1=5$. 經顯著性測驗後，知因迴歸而減少之部分爲不顯著. 故以此資料配合四次曲線，在精密度方面並不比三次曲線有何進步. 配合工作至此即可停止，而以三次曲線表示其一般的趨勢. 在有些問題中，得知理論曲線爲何種形式後，即可竣事. 但有時需要製圖，有時需要方程式，故下文將分兩小節繼續討論. 若只需作圖而不需方程式者，可閱小節(二). 需要方程式者，可逕閱小節(三).

(二)估計值的計算　根據表 12–7 求得的 a', b', c' 等數值，我們可用統計學上的有限差數(finite differences)法，把估計值 Y_e 直接算出來，卻無須先求曲線的方程式. 計算時先參照表 12–9, 該表可用到 10 次曲線. 表右半部所列多項式，按所配合曲線的次數決定需

【表 12-9】 計算末數及差數時所需之多項式及係數

多項式之次數	係數（n 表示樣本之大小）	多項式 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	（末　數）	$a'+$	$3b'+$	$5c'+$	$7d'+$	$9e'+$	$11f'+$	$13g'+$	$15h'+$	$17i'+$	$19j'+$	$21k'$
1	$-\frac{2\cdot3}{n-1}$		$b'+$	$5c'+$	$14d'+$	$30e'+$	$55f'+$	$91g'+$	$140h'+$	$204i'+$	$285j'+$	$385k'$
2	$\frac{3\cdot4\cdot5}{(n-1)(n-2)}$			$c'+$	$7d'+$	$27e'+$	$77f'+$	$182g'+$	$378h'+$	$714i'+$	$1254j'+$	$2079k'$
3	$-\frac{4\cdot5\cdot6\cdot7}{(n-1)(n-2)(n-3)}$				$d'+$	$9e'+$	$44f'+$	$156g'+$	$450h'+$	$1122i'+$	$2508j'+$	$5148k'$
4	$\frac{5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$					$e'+$	$11f'+$	$65g'+$	$275h'+$	$935i'+$	$2717j'+$	$7007k'$
5	$-\frac{6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11}{(n-1)(n-2)\cdots(n-5)}$						$f'+$	$13g'+$	$90h'+$	$442i'+$	$1729j'+$	$5733k'$
6	$\frac{7\cdot8\cdot9\cdots13}{(n-1)(n-2)\cdots(n-6)}$							$g'+$	$15h'+$	$119i'+$	$665j'+$	$2940k'$
7	$-\frac{8\cdot9\cdot10\cdots15}{(n-1)(n-2)\cdots(n-7)}$								$h'+$	$17i'+$	$155j'+$	$952k'$
8	$\frac{9\cdot10\cdot11\cdots17}{(n-1)(n-2)\cdots(n-8)}$									$i'+$	$19j'+$	$189k'$
9	$-\frac{10\cdot11\cdot12\cdots19}{(n-1)(n-2)\cdots(n-9)}$										$j'+$	$21k'$
10	$\frac{11\cdot12\cdot13\cdots21}{(n-1)(n-2)\cdots(n-10)}$											k'

用幾項. 如我們在上面配合的是 3 次曲線,所以該表各多項式祇用到 d' 項爲止(若配合的是 5 次曲線,那麼要用到 f' 項爲止,餘類推). 其中第一個多項式爲計算末了一個估計值用的,簡稱末數(terminal value, 上例卽爲相當於 $X=10$ 的 Y_e). 又該表第二欄的'係數',是與右邊多項式相乘用的. 由'係數'與'多項式'的乘積,得到所需的各個差數. 請看下面實例,當可明瞭:

三次曲線所需之末數及各差數,

$$\text{末數} = a' + 3b' + 5c' + 7d'$$

$$= 296.38 + 3(79.3127) + 5(-6.9319) + 7(-3.5493)$$

$$= 474.8135,$$

$$\text{第一差數 (first difference)} = -\frac{2\cdot 3}{n-1}(b' + 5c' + 14d')$$

$$= -\frac{2\cdot 3}{9}[79.3127 + 5(-6.9319) + 14(-3.5493)]$$

$$= 3.3580,$$

$$\text{第二差數 (second difference)} = \frac{3\cdot 4\cdot 5}{(n-1)(n-2)}(c' + 7d')$$

$$= \frac{3\cdot 4\cdot 5}{9\cdot 8}[-6.9319 + 7(-3.5493)] = -26.4808,$$

$$\text{第三差數 (third difference)} = -\frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{(n-1)(n-2)(n-3)}(d')$$

$$= -\frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{9\cdot 8\cdot 7}(-3.5493) = 5.9155.$$

於是將末數及上列三個差數寫在表 12-10 的末一橫行. 將第三

【表 12-10】 用有限差數法求估計值 Y_e

X	Y_e	第一差數	第二差數	第三差數
1	48.6	−22.011	26.7587	
2	91.5	−42.854	20.8432	
3	149.3	−57.782	14.9277	
4	216.1	−66.794	9.0122	
5	285.9	−69.891	3.0967	
6	353.0	−67.072	−2.8188	
7	411.4	−58.338	−8.7343	
8	455.0	−43.688	−14.6498	
9	478.2	−23.123	−20.5653	
10	末數 474.8135	3.358	−26.4808	5.9155

差數與第二差數相加，寫在‘第二差數’直行的末第二位，

$$-26.4808+5.9155=-20.5653,$$

同理，
$$-20.5653+5.9155=-14.6498.$$

這樣每次都加上一個第三差數，直至最高的一數．其次將第一差數與第二差數由下向上加，不過現在各第二差數之值是不相等了．

$$3.358+(-26.4808)=-23.123,$$

$$-23.123+(-20.5653)=-43.688,$$ 餘類推．

最後自‘末數’起與第一差數，依次向上累加，即得所求的估計值：

$$474.8135+3.358=478.172,$$

$$478.172+(-23.123)=455.049,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

將 X 與 Y_e 兩行數值作圖，則得一光滑的三次曲線(圖 12-3)．

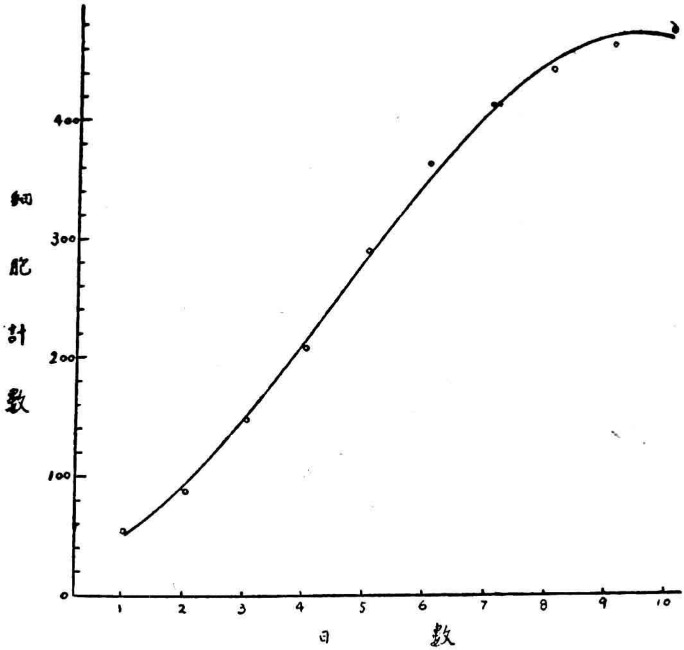


圖 12-3. 釀母之生長及其配合之三次曲線

(三)方程式的計算　前面已經說過，方程式

$$Y=A+BX_1+CX_2+DX_3+EX_4+\cdots\cdots \quad \text{(見公式 12–2)}$$

中 $A, B, \cdots\cdots$ 爲待定的數値，就是表 12–7 末行的數値；又 $X_1, X_2, \cdots\cdots$ 等各爲 X 的多項式，其公式如下：

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= X-\bar{x} \\ X_2 &= X_1^2-\frac{n^2-1}{12} \\ X_3 &= X_1^3-\frac{3n^2-7}{20}(X_1) \end{aligned}\right\} \text{公式(12–10)}$$

$$\left.\begin{aligned} X_4 &= X_1^4 - \frac{3n^2-13}{14}(X_1^2) + \frac{3(n^2-1)(n^2-9)}{560} \\ X_5 &= X_1^5 - \frac{5(n^2-7)}{18}(X_1^3) + \frac{15n^4-230n^2+407}{1{,}008}(X_1) \end{aligned}\right|$$

上例 $\bar{x}=5.5$, $n=10$, 代入公式, 得

$$X_1 = X-5.5,$$

$$X_2 = (X-5.5)^2 - \frac{10^2-1}{12} = X^2 - 11X + 22,$$

$$X_3 = (X-5.5)^3 - \frac{300-7}{20}(X-5.5)$$

$$= X^3 - 16.5X^2 + 76.1X + 639.375.$$

我們所要的是三次方程式, 故其餘不必再計算. 最後連表 12–7 末行 A, B, C, D 等數值代入公式(12–2), 得方程式爲

$$Y_e = 296.38 + 52.8751(X-5.5) - 2.88829(X^2-11X+22)$$

$$-.985917(X^3-16.5X^2+76.1X-85.8)$$

$$= 26.62 + 9.6180X + 13.37934X^2 - .985917X^3.$$

將 $X=1, 2, 3, \cdots\cdots, 10$ 代入, 所得各估計值應與表 12–10 的結果相同. 故若需要曲線的方程式, 則各估計值可由方程式求得, 不必再用小節(二)的方法了.

12–6. Logistic 曲線　此曲線因 Raymond Pearl 與 L. J. Reed 兩氏用以研究人口而著名, 故亦稱 Pearl-Reed 氏生長曲線. 此曲線當接近某一限度時, 其上升逐漸緩慢. Logistic 曲線的方程式可寫做下列形式:

$$y - d = \frac{K}{1+Ce^{rt}}. \qquad \text{公式(12–11)}$$

又上式可改成 $$\frac{K}{y-d}-1=Ce^{rt},$$

故該曲線方程式又可變爲

$$\log_e\frac{K-(y-d)}{y-d}=\log_e C+rt, \qquad \text{公式(12-12)}$$

此處 e 爲自然對數的基數，K 與 d 爲配合前由嘗試錯誤法擬定的數值，而 C 與 r 則爲待定的數值，t 爲時間．該曲線上下有兩根漸近線(asymptote)，即 $y=d+K$ 及 $y=d$．又由公式(12-12)，可見 $\log_e[K-(y-d)]/(y-d)$ 爲 t 之直線函數．所以在配合以前，我們要設法猜 d 與 K 的數值，儘量使 $[K-(y-d)]/(y-d)$ 的對數與 t 呈直線的關係．又此曲線有一轉向點在原來時間 $T=-\frac{a}{r}$ 及 $y=\frac{K}{2}$ 處．轉向點求得後，即將曲線之原點遷至此處．各時間與原點之距離爲 t.

茲仍以前節釀母生長之資料爲例，說明該曲線的配合法．將原來資料在精細的方格紙上繪成圖形，藉作圖用曲線板之助，可看到該曲線之'上漸近線'大約在 $y=490$ 與 500 之間，'上漸近線'約在 $y=10$ 與 20 之間．經幾次嘗試後，發現 $y=497$ 與 $y=12$ 兩線最爲合用，因得 $d=12$，$K=497-12=485$．其嘗試的步驟見表 12-11．該表的 T 爲原來時間，Y 爲細胞計數，這兩行是原來資料．第三行 Y' 是把各 Y 值減去 12 後的簡縮數，第四行是 485 減去 Y'，第五行是前兩行的比例，即 $(K-Y')/Y'=[K-(Y-d)]/(Y-d)$，此爲公式(12-12)等號前之分數，茲暫以符號 z 代表此比例．若 d 與 K 值取得適當，那麼 z 的對數，與其相當的 T 值所繪成的點應該差不多在一直線上．若不能成一直線，則另換 d 或 K 值，或兩數一同換過，總以近於

【表 12–11】 d 與 K 值之嘗試

T	Y	$Y'=Y-d$ $(d=12)$	$K-Y'$ $(K=485)$	$z=\frac{K-Y'}{Y'}$
1	52.5	40.5	444.5	10.975
2	87.8	75.8	409.2	5.398
3	147.6	135.6	349.4	2.577
4	208.6	196.6	288.4	1.467
5	289.7	277.7	207.3	.746
6	365.0	353.0	132.0	.374
7	414.3	402.3	82.7	.206
8	447.4	435.4	49.6	.114
9	469.0	457.0	28.0	.061
10	481.9	469.9	15.1	.032

直線為止.為了省卻檢查對數的麻煩,並為以後計算上的需要計,我們可用算術對數紙(arith-log paper),這種紙的縱橫兩種尺度不同,一是對數的尺度,一是算術的尺度. 現在把表 12–11 的 T 值放在算術的尺度上, z 值放在對數的尺度上.這裏要注意,普通對數是以十進的.例以圖 12–4,最底下的一組數值是 .01, .02, .03,……, .10,再上去卻不是 .11, .12,……(這些數值是擠在 .10 與 .20 的短距離內的),而是 .20, .30, .40,……,1.00,同理再向上去應為 2.00, 3.00,……. 這種規則是應用對數尺度者所必須知道的. 尺度既定,乃將各對 T 與 z 值畫成點子,如第一點為(1, 10.975),第二點為(2, 5.398)等.這十個點子畫好以後,可以看到它們差不多在一直線上.於是我們設法畫一根直線,使它能夠通過大多數的點子,或各點與該直線的誤差為最少.(可用一根細線,兩端拉緊,在所畫的點子附近嘗試,或用透明的尺、三角板等亦可.這樣可以找到一個比較最適

宜的位置.)

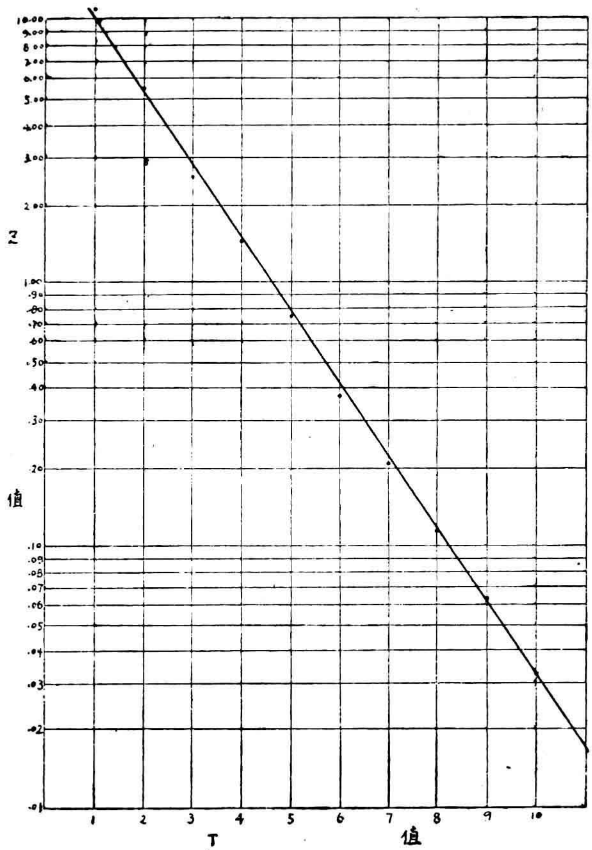


圖 12-4. 試驗值之直線性(藉知兩假定值 K 與 d 是否合用)

前面已經說過: logistic 曲線在 $T=-a/r$, $Y=K/2$ 處有一轉向點. 我們已求得 $K=485$, 則 $K/2=242.5$. 從原來資料所構成的曲線上看(或參閱圖 12-3)知道相當於 $Y=242.5$ 時的 T 值約為 4.45.

我們就取這點(4.45, 242.5)爲原點. 各 T 值與 4.45 之距離爲 t.

現在要定該直線的坡度 m, 以及公式內 r 與 C 等的數值了. 我們在圖 12-4 的直線上任意取最方便的兩點, 一點在 $T=1$, 另一點在 $T=9$; 其相當的 t 值爲 $1-4.45=-3.45$ 及 $9-4.45=4.55$. 從圖上可以看到當 $t=-3.45$ 時, $z=10.00$, 又 $t=4.55$ 時, $z=.061$. 求兩 z 值之對數, $\log z_{-3.45}=1$, $\log z_{4.55}=\bar{2}.785,3298$.

$$m^*=\frac{\log z_{4.55}-\log z_{-3.45}}{4.55-(-3.45)}=\frac{\bar{3}.785,3298}{8}$$

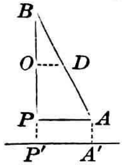
$$=\frac{-2.214,6702}{8}=-.276,833,775,$$

$$r^{\#}=2.30259m=-.637,4352,$$

$$^{**}\log z_0=\log z_{-3.45}-(-3.45)m$$

$$=1-.955,0765=.044,9235.$$

化成眞數 $z_0=1.108980$, 此值卽爲公式(12-12)中之 C. 將 d, K, C, r 諸值代入公式(12-12), 得所需之方程式爲



* 直線 BA 之坡度爲 $\tan A=\frac{PB}{AP}$, 試與圖 12-4 相比較, 可見 $\log z_{4.55}-\log z_{-3.45}$ 相當於 PB, 而 $4.55-(-3.45)$ 則相當於 AP.

** $\log z_0$ 相當於此圖中之 OP', 而 $OP'=BP'-BO=BP'-OD\tan\angle BDO=BP'-OD\tan A$, 與 $\log z_{-3.45}-(-3.45)m$ 相當.

按普通對數, 以 $\log_e 10=2.30259$ 乘之, 則化爲自然對數, 故公式(12-12)中之 r 實爲圖 12-4 之縱軸化成自然對數後, 所作迴歸直線之坡度.

$$Y_e - 12 = \frac{485}{1+1.10898e^{-.637,4352t}}. \qquad \text{(L)}$$

有了方程式，就可求估計值，計算的過程詳表 12–12，其中第 3 行是 m 與 t 的乘積，如$(-.276,833,775)(-3.45)=.955,0765$，此乘積等於 $\log e^{rt}$. 因 $r=2.30259m$(見前)，故

$$mt = \frac{rt}{2.30259} = rt(0.43429) = rt\log_{10}e = \log_{10}e^{rt}.$$

又第 4 行爲相當於左行各對數之眞數. 於是將 $C=1.10898$ 乘第 4 行之值，再加 1，即爲第 5 行之 $1+Ce^{rt}$. 再將第 5 行各數除 $K=485$，得 y'，此爲第 6 行之數值. 最後在 y' 上各加 $d=12$，即得估計值 Y_e. 將 T 與 Y_e 之值繪成曲線，如圖 12–5.

【表 12–12】 由方程式(L)計算估計值 Y_e.

T (1)	t $(T-4.55)$ (2)	$\log e^{rt}=mt$ (3)	e^{rt} (4)	$1+Ce^{rt}$ (5)	$y'=\frac{K}{1+Ce^{rt}}$ (6)	$Y_e=y'+d$ (7)
1	−3.45	.955,0765	9.017,300	11.000,000	44.00	56.09
2	−2.45	.678,2427	4.766,973	6.286,476	77.15	89.15
3	−1.45	.401,4090	2.520,049	3.794,683	127.81	139.81
4	−.45	.124,5752	1.332,218	2.477,402	195.77	207.77
5	.55	$\bar{1}$.847,7414	.704,274	1.781,025	272.32	284.32
6	1.55	$\bar{1}$.570,9076	.372,312	1.412,887	343.27	355.27
7	2.55	$\bar{1}$.294,0739	.196,822	1.218,272	398.10	410.10
8	3.55	$\bar{1}$.017,2401	.104,050	1.115,389	434.83	446.83
9	4.55	$\bar{2}$.740,4063	.055,006	1.061,000	457.12	469.12
10	5.55	$\bar{2}$.463,5725	.029,079	1.0 2,247	469.85	481.85

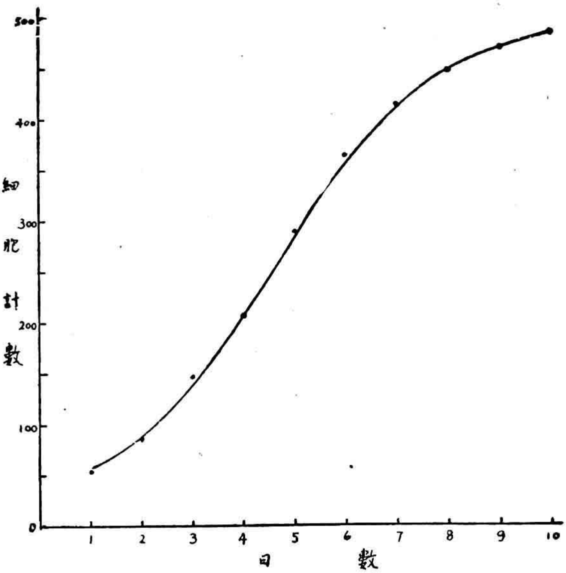


圖 12-5.　釀母之生長及其配合之曲線

【練　習　題】

1. 將 $X=1, 2, 3, \cdots\cdots, 20$ 代入下列方程式，並各繪一曲線:

(1)　$Y=2.58+0.84X$,　(2)　$Y=2.58+8.4\log X$,

(3) $\log Y=0.258+0.058X$, (4) $\log Y=0.213+0.662\log X$.

2. 將 $X=0, 5, 10, 20, 30, 45, 60$ 代入下列方程式並繪一曲線:

$$\log Y=2.432-0.02227X.$$

3. 下表爲釀母在 30°C. 時之生長紀錄(1)，試配合一對數曲線:

孵養時間(分鐘, X)	0	150	195	240	288	330
細胞計數(10^6, Y)	1.80	4.95	6.50	12.30	19.30	29.00

4. 吳憲與楊恩福(6)兩氏在'以尿素引起蛋白質變性率受酸度之影響'一研究中，有一實驗之紀錄如下，試配合一拋物線：

pH (X)	6.59	6.83	6.97	7.09	7.14	7.25	7.40	7.68	7.80	7.96
蛋白質凝固百分數 (Y)	44.1	31.8	31.2	28.8	26.8	26.2	24.8	21.3	22.0	22.5

5. 測驗第4題二次曲線之配合適度(參考表12-3)。

6. Swanson與Smith兩氏(7)曾測定鼠在不同年齡(X，日數)時其血漿中氮之總含量(Y，每100 c.c. 血漿中所含氮之克數)，結果載於下表。試以年齡與各年齡血漿中氮含量之均數(共有九對數值)配合一迴歸直線，配合方法可參考第五章表5-1，但各數及其平方與

	鼠之年齡(日數)								
	25	37	50	60	80	100	130	180	360
血漿中氮之總含量(克)	0.83	0.98	1.07	1.09	0.97	1.14	1.22	1.20	1.16
	0.77	0.84	1.01	1.03	1.08	1.04	1.07	1.19	1.29
	0.88	0.99	1.06	1.06	1.16	1.00	1.09	1.33	1.25
	0.94	0.87	0.96	1.08	1.11	1.08	1.15	1.21	1.43
	0.89	0.90	0.88	0.94	1.03	0.89	1.14	1.20	1.20
	0.83	0.82	1.01	1.01	1.17	1.03	1.19	1.07	1.06
	0.84	0.95	0.93		0.98	1.08	1.19	1.13	1.29
	0.75	0.92	1.07		0.99	0.98	1.14	1.12	1.25
	0.67	0.87	1.03			0.98	1.13		1.23
	0.70		1.13			1.10	1.06		1.22
	0.77		1.05				1.11		1.17
	0.76		0.96				1.04		
	0.75		1.01				1.29		
	0.78		1.01				1.09		
	0.76		0.94				1.14		
	0.86		1.03				1.12		
	0.78		1.06				1.29		
	0.84		1.08				1.28		
	0.85		1.09				1.10		
	0.83		0.93				1.07		
	0.85		0.95				1.10		
	0.85								
	0.83								
	0.83								
	0.70								
鼠數	25	9	21	6	8	10	21	8	11

乘積，均須以該組鼠數乘之(即加權)，即將 $\Sigma fX, \Sigma fY, \Sigma fX^2, \Sigma fY^2, \Sigma fXY$ 代入各公式即可．並就已求得之離均差平方和及積和，仿公式(6–1)求得相關係數 r，再由公式(6–12)求得直線迴歸之估計誤差，九個氮含量均數之總變異與估計誤差之相差，即為由直線迴歸所減少之變異．最後仿表 12–8 第一欄以測驗其配合迴歸直線之適度．

7．測驗第 6 題各組均數與迴歸直線相離之變異(參閱表12–6)．並解釋第 6, 7 兩題測驗之結果．

8．下列資料表示 $pH(X)$ 與天門冬(素)酵素(asparaginase)的活潑性(activity, Y)間之關係(8)．試配合一四次曲線(正交多項式)，配合時計算至 S_5, e, e' 及 E 即可．並測驗各階段之配合適度(表12–8)．

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Y	0.2	0.4	1.4	4.1	6.6	8.7	9.8	9.9	9.5	8.2	6.4	3.3	0.3	0.1

9．用有限差數法求第 8 題四次曲線之估計值 Y_e．

10．試用下列資料配合一 logistic 曲線，並繪圖．

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y	18	36	68	98	131	170	203	228	247	250	254	254

【參　考　文　獻】

(1) Margaret E. Greig and J. C. Hoogerheide, The correlation of bacterial growth with oxygen consumption, Journal of Bacteriology, 41 : 549–556 (1941).

(2) Running, T. R., Empirical Formulas, John Wiley and Sons, Inc., New York (1917).

(3) Hsien Wu and Schmorl M. Ling, Studies on denaturation of proteins, V. Factors controlling coagulation of proteins by shaken, Chinese Journal of Physiology, 1, 4: 407–430 (1927).

(4) Peter Barlow, Tables of Squares, Cubes, Square Roots, Cube Roots, and Reciprocals, E. and F. N. Spon, Ltd., London (1921).

(5) Fisher, R. A., Statistical Methods for Research Workers, Oliver and Boyd, Edinburgh (1925), Section 27.

(6) Wu, H. and Yang, E. F., Studies on denaturation of proteins, XI. Effect of hydrogen ion concentration on rate of denaturation of egg albumin by urea, Chinese Journal of Physiology, 5, 4: 301–308 (1931).

(7) Snedecor, G. W., Statistical Methods, 3rd edition, Iowa State College Press, Ames, Iowa (1940), p. 320.

(8) Geddes, W. F. and Hunter, A., Journ. Biol. Chem., 77 (1928).

第十三章　單一自由度

關於均數間或其他統計數間的相互比較，本書已討論過很多．本章對於兩均數間的比較將引申幾個新的觀念．同時對於新的計算方法及有關的實驗設計等都要提及．因為這種比較所用的離均差平方和只有一個自由度，故本章標題為單一自由度．

13-1．計算離均差平方和之新法　鄭集氏等在黃豆蛋白之研究中(1)，曾用白鼠三組，分別與以某種飼料，內有二組：一飼黃豆蛋白質，一飼黃豆蛋白質略加酪蛋白．下表為該兩組白鼠在三十日內所

飼料	各鼠所增之體重							總計
黃豆蛋白質	23.5	15.9	6.6	9.6	8.4	11.4	20.4	95.8
黃豆蛋白質加酪蛋白	41.3	40.7	28.8	18.8	21.7	25.1	22.2	198.6

增之體重(克)，問兩組之均數有顯著的相差否？照以前的慣例，是用 t 值來測驗兩均數相差的顯著性，詳細過程見第四章第4-7節，茲將計算結果列後：

	白鼠數	自由度	均數	離均差平方和
黃豆蛋白質	7	6	13.6857	246.37
黃豆蛋白質與酪蛋白	7	6	28.3714	504.23
		12	$\bar{d}=14.6857$	750.60

$$v=750.60\div 12=62.55,$$

$$S_{\bar{d}}=\sqrt{62.55}\sqrt{\frac{7+7}{7\times 7}}=4.2275,$$

$$t=14.6857\div 4.2275=3.4739,$$

自由度$=12$，1%點$=3.055$.

此處所得 t 值大於 1%點，故知兩均數有非常顯著的差別.

以上所列資料，亦可以 F 值測驗之. 十四個白鼠所增體重的總和爲 294.4 克，故其總均數爲 $294.4\div 14$. 又各組的均數爲 $95.8\div 7$ 及 $198.6\div 7$. 因得各組均數與總均數相差的平方和爲

$$\left(\frac{95.8}{7}-\frac{294.4}{14}\right)^2+\left(\frac{198.6}{7}-\frac{294.4}{14}\right)^2=107.8351,$$

再以每組鼠數 7 乘之，得

$$7(107.8351)=754.85.$$

此值表示兩均數間之變異，因其自由度爲 1，故離均差平方和卽等於組間變異數(均方). 再以組內變異數 62.55(見前)除之，卽得 F 值；

$$F=754.85\div 62.55=12.068.$$

當自由度等於 1 與 12 時，F 值之 1%點爲 9.33，故結果亦爲非常顯著. 此處值得注意者，卽 $\sqrt{12.068}=3.4739$，恰等於前面求得的 t 值. 故知 F 值表(表 9–3)內第 1 直行的數值，恰爲 t 值表(表 4–4)中相當數值的平方. 當組間自由度等於 1 時，用 t 與 F 測驗的結果是一樣的.

計算兩均數間的變異數，我們曾用過一種簡便的方法(公式9–1)

$$\frac{(95.8)^2+(198.6)^2}{7}-\frac{(294.4)^2}{14}=754.85.$$

現在我們要介紹一個更簡便的算法，即將兩個總數相減的平方以每組鼠數的 2 倍除之，即得所需的離均差平方和. 其公式爲

$$\frac{(a-b)^2}{2k}, \qquad \text{公式(13-1)}$$

此處 $a=95.8, b=198.6, k=7$. 代入公式，得

$$\frac{(95.8-198.6)^2}{2(7)}=754.85.$$

當祇有兩個均數的時候，用此法計算均數間的變異數，要簡便多了. 此變異數的自由度爲 1. 在求 F 值時，當然還需誤差的變異數，這點是和以前一樣的. 讀者應該知道本章所說的顯著性測驗，在原理上，與前面各章所講的並無不同，祇是計算方法非常簡便罷了.

13-2. 兩組以上之個別比較 若一個實驗含有三、四組或更多時，可作幾種個別的比較. 例如第九章表 9-6 所用白兔，其中有兩組（第一與第三）注射垂體加壓劑，另一組（第二）則不曾注射. 今若比較注射者與不注射者肝臟脂酸之碘指數有無顯著的差別，則可將第一、三兩組合併，與第二組相比較. 我們還是先用老方法（公式9-1），再用新的簡法:

【表 13-1】 注射垂體加壓劑者與不注射者之比較

	動物數 (k)	碘指數總和	$(\text{總和})^2/k$
注射者	20	2,155.00	232,201.25
不注射者	10	1,178.12	138,796.67
總計	30	3,333.12	370,997.92
校正數	$(3,333.12)^2/30$		370,322.96
離均差平方和			674.96
$F=674.96\div 88.89=7.593$, 自由度$=1$與25, 5%點$=4.24$, 1%點$=7.77$.			

求 F 時所用的誤差變異數 83.89，見表 9-8，其自由度爲 25. 結果得 F 值爲 7.593，此值在 5% 點與 1% 點之間，故兩組碘指數之均數有顯著的差別.

若用新法計算，則可用下列公式：

$$\frac{(a-2b+c)^2}{6k}.\qquad\text{公式(13-2)}$$

$$a=1,100,\qquad b=1,178.12,\qquad c=1,055,$$

$$\frac{[1,100-2(1,178.12)+1,055]^2}{6(10)}=\frac{(201.24)^2}{60}=674.96$$

上面兩個公式有類似的地方，在公式(13-2)中，我們可以看到把 $a+c$ 與 b 的兩倍相比較，此與均數 $(a+c)\div 2$ 減去 b 的意義是一樣的. 至於分母部分 k 前面的係數，其計算方法有一簡便的規則，即爲分子內各項係數的平方和. 例如 $a-b$ 各項係數之平方和爲 $1^2+(-1)^2=2$；又 $a-2b+c$ 各項係數之平方和則爲 $1^2+(-2)^2+1^2=6$. 此兩數值恰爲公式(13-1)及(13-2)中分母 k 之係數.

茲再以第十章第 3 題之資料爲例，實驗時的情境，計有休息、讀故事、恐懼及看電影四種. 在此四種情境下，被試者每分鐘平均呼吸次數爲：17.83，17.30，20.20 及 18.30. 其中以恐懼時之呼吸速率爲最快. 現在要比較恐懼與其他情境之下之呼吸速率有無差別，則可用下列公式：

$$\frac{(a+b-3c+d)^2}{12k}.\qquad\text{公式(13-3)}$$

分子部分的符號更可簡寫爲

$$1\ +\ 1\ -\ 3\ +\ 1,$$

各數平方之和爲 $1^2+1^2+(-3)^2+1^2=12$，此卽分母方面 k 之係數．又此實驗所用被試者各組都有 30 人，故 $k=30$．因得兩均數間之變異數爲

$$\frac{[535+519-3(606)+549]^2}{12(30)}=\frac{(-215)^2}{360}=128.40.$$

又組內變異數(誤差)爲 $2,123.57\div116=18.31$ [註：呼吸速率之組間離均差平方和爲 143.42，組內離均差平方和爲 2,123.57，其相當之自由度爲 3 與 116]．故

$$F=128.40\div18.31=7.013,$$

查 F 值表，當自由度等於 1 與 116 時，F 值之 1% 點約爲 6.84，今求得之 F 值大於此數，故知當恐懼時與在其他情境下之呼吸速率有非常顯著的差別．

前節與本節所舉的三個例題，我們可見一相同之點，卽在同一實驗中各組所用被試者的數目(k)必須相等，纔能用本章的新方法來計算．本書第一章第 1–3 節曾提到'相互比較的各組所用被試者的數目應相等'，讀者看了本章將益感此種需要．

13–3．均衡的比較 (orthogonal comparisons) R. A. Fisher 曾謂：每一自由度，可有一相當的離均差平方和，而包括 p 種獨立比較的總離均差平方和則可析爲 p 個部分，每個部分可用以測驗其一種比較的顯著性．

表 9–6 白兔肝臟脂酸碘指數之研究，除上節注射垂體加壓劑與不注射者之比較外，又可將注射垂體加壓劑者(第一組)與兼食氯化膽素者(第三組)相比較．以符號表示之，則爲

比較組別	第一組	第二組	第三組
一、三與二	+1	−2	+1
一與三	+1	0	−1

這裏請注意兩點：(1)每種比較(卽各橫行)的係數之和爲0.(2)兩種比較的相當係數乘積之和爲 0，如

$$(1)(1)+(-2)(0)+(1)(-1)=0.$$

前者與離均差之總和爲零(公式 3-1)相似，後者則與共變數等於零相似，共變數等於零卽表示兩種比較之間無相關之存在，因此稱爲正交的或均衡的比較(參閱公式 6-2 及前章第 12-5 節首段).

關於第一、三兩組與第二組之比較，已見前節．茲再續作第一組與第三組之比較.

$$\frac{(1,100-1,055)^2}{(1^2+1^2)10}=101.25,$$

$$F=101.25\div 88.89=1.139,$$

$$\text{自由度}=1\text{ 與 }25\text{ 時，}\qquad 5\%\text{點}=4.24.$$

所以知該兩組碘指數之均數並無顯著的差別．最後請讀者再注意一點，卽此處之離均差平方和 101.25，與上節的 674.96 相加，

$$101.25+674.96=776.21,$$

結果恰與表 9-7 組間變異之離均差平方和相等．這點就說明了本節開頭的幾句話：'包括 p 種獨立比較的總離均差平方和，可析爲 p 個部分，每個部分可用以測驗其一種比較的顯著性'.

茲再用表 9-9 六組公鼠所增體重的資料，來說明多種的獨立比較．組間的自由度爲 5，其離均差平方和爲 4,612.93(表 10-5)．茲將

此5個自由度析爲5種獨立的比較:

組別	1	2	3	4	5	6
高蛋白與低蛋白	1	+1	+1	−1	−1	−1
牛肉與豬肉,高	1	0	−1	0	0	0
肉類與穀類,高	1	−2	+1	0	0	0
牛肉與豬肉,低	0	0	0	+1	0	−1
肉類與穀類,低	0	0	0	+1	−2	+1

在此仍請注意兩點: (1)每種比較內各係數之和爲零; (2)在五種比較中,每次任取兩種,則共有10對,在此10對中之任何一對,其相當係數乘積之和爲零.

用每組所增體重之總和求得五種比較之均方(每種比較之自由度爲1,故離均差平方和與均方相等)如下:

$$\frac{(1,000+859+995-792-839-787)^2}{(1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2)10}=3,168.27$$

$$\frac{(1,000-995)^2}{(1^2+1^2)10}=\quad 1.25$$

$$\frac{[1,000-2(859)+995]^2}{(1^2+2^2+1^2)10}=1,278.82$$

$$\frac{(792-787)^2}{(1^2+1^2)10}=\quad 1.25$$

$$\frac{[792-2(839)+787]^2}{(1^2+2^2+1^2)10}=\quad 163.35$$

組間離均差平方和=4,612.94

五個自由度之離均差平方和,其總計與表10-5所得者相同. 若各鼠之食量略而不計,則所增體重之誤差爲 11,586÷54=214.6 (參閱

表 10-5). 因得比較高低蛋白之 F 值為 $3,168.27 \div 214.6 = 14.8$, 此值為非常顯著; 又高蛋白之肉類與穀類相比較, 其 F 值為 $1,278.82 \div 214.6 = 5.96$, 此值為顯著. 其餘三種比較之均方皆比誤差之均方為小, 故為不顯著. 這樣用單一自由度的比較, 對於營養學家或許是很有用的. 同時我們也可以看到, 如果一個實驗設計得良好, 就可得到更多的有價值的知識而增加實驗的效能.

個別比較的數目, 在理論上是無限制的. 如包括六組的實驗, 若任取兩組, 則有15種比較之多(其中有一部分是不合於均衡原則的), 但在實用上, 則比較必須有意義, 而且在設計時, 就應該考慮到實驗結果如何用統計方法去處理, 這點是必須注意的.

13-4. 不均衡的比較(non-orthogonal comparisons) 有許多實驗的設計, 其所用獨立的比較是不均衡的. 這種設計只要能達到實驗的目的, 也不能認為一種缺點. 不過這時幾種比較的離均差平方和, 其總計並不等於組間的離均差平方和, 這點是與上節不同的. 看了下面的例題, 就可明瞭.

第十章第3題的資料, 又可將休息時之呼吸速率與其他三種情形下分別比較, 如

$$\text{休息與讀故事} \quad (535-519)^2 \div 2(30) = 4.27,$$

$$\text{休息與恐懼時} \quad (535-606)^2 \div 2(30) = 84.02,$$

$$\text{休息與看電影} \quad (535-549)^2 \div 2(30) = 3.27.$$

誤差變異數仍為 18.31(見第13-2節), 上列三個變異數祇有休息與恐懼時為顯著, 其 $F = 84.02 \div 18.31 = 4.589$. 其餘兩種比較皆為不顯著. 此三種比較, 若以符號表示之, 則為:

實驗號數	1	2	3	16
休息與讀故事	1	−1	0	0
休息與恐懼時	1	0	−1	0
休息與看電影	1	0	0	−1

這裏每種比較的係數之和雖等於零，但兩種比較中相當係數乘積之和卻並不等於零，如

$$(1)(1)+(-1)(0)+(0)(-1)+(0)(0)=1.$$

又三種比較之離均差平方和共為 $4.27+84.02+3.27=91.56$，此值較組間離均差平方和 143.42 為小.

凡一個實驗包括若干組，內有一組為對照組，其他各組逐一與之比較者，皆可應用本節不均衡的比較法. 此時可應用第四章第 4–5 節可信限的原理求出兩均數間最小而顯著的相差，則比較時可更為簡便. 查 t 值表(表 4–4)，當自由度等於 116 (上例誤差之自由度)時，5% 點約為 1.981(用內插法). 茲以 d 代兩組總數之相差，按本章第 13–1 節，當自由度 $n_1=1$ 時，F 值恰為相當 t 值的平方，因得

$$\sqrt{[(d)^2\div 2(30)]\div 18.31}=1.981,$$

$$\sqrt{[(d)^2\div(30)^2]\div 2(18.31)}=1.981\div\sqrt{30},$$

$$d\div 30=1.981\sqrt{2(18.31)\div 30}=2.189.$$

因各組人數皆為 30，故 $d\div 30$ 卽等於兩均數之相差. 凡他組均數與休息組均數 17.833 之相差在 2.189 以上者皆為顯著. 易言之，凡均數之小於

$$17.833-2.189=15.644,$$

或大於 $$17.833+2.189=20.022$$

者皆爲顯著. 試檢視其他三組的均數僅恐懼時(20.20)大於 20.022, 故與休息時有顯著的差別, 餘二組則否.

13-5. 迴歸中之個別比較 有些資料是每隔若干時間的觀察紀錄, 或爲根據量的水準(如 pH)而分組的. 在此可以研究組均數($\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$)間是否有迴歸的影響. 當一個實驗中包含三組時, 我們可用下述兩種獨立的比較以測量(1)直線迴歸, (2)第二個均數與直線迴歸的距離. 若第二個均數與直線迴歸有顯著的差別, 則可有兩種解釋: 如果第一、二兩組間與第二、三兩組間的距離已知其相等, 則表示有遞減或累進律(即曲線迴歸)之現象. 若假定迴歸爲直線的, 則表示各組間之距離不等.

有兔六頭, 於注射腎上腺素(adrenaline)後, 每隔一小時測量其血糖(每 100 立方厘米血液所含糖之毫克數)結果如下表(2):

【表 13-2】 兔被注射腎上腺素後之血糖

注射後之時間(小時)			總計
1	2	3	
380	501	532	1,413
203	348	348	899
400	460	540	1,400
342	410	345	1,097
430	508	571	1,509
396	544	597	1,537
2,151	2,771	2,933	7,855

【表 13-3】 變異數分析(兔被注射腎上腺素後之血糖)

變異來源	自由度	離均差平方和	均　方	F
總變異	17	179,462.28		
時間	2	56,787.11	28,393.56	19.40
兔間	5	108,041.61	21,608.32	14.77
誤差	10	14,633.56	1,463.36	

我們先用第九章第9-3節的方法作變異數分析(表 13-3),求得誤差之均方爲 1,463.36. 由表 13-2,可見在注射腎上腺素後之最初三小時內,血糖數隨時間而增高. 現在我們要問:(1)血糖與時間的迴歸是否顯著,又(2)注射後第 2 小時之血糖數是否與直線迴歸有顯著的差別. 前者可用 $(-1, 0, +1)$ 的比較來解答,後者則可用$(1, -2, +1)$ 的比較來解答(詳細說明見次節). 茲將兩種比較均方及 F 值列後:

$$\frac{(-2,151+2,933)^2}{(1^2+1^2)6}=50,960.33,$$

$$F=\frac{50,960.33}{1,463.36}=34.82;$$

$$\frac{(2,151-2\times 2,771+2,933)^2}{(1^2+2^2+1^2)6}=5,826.77,$$

$$F=\frac{5,826.77}{1,463.36}=3.98;$$

自由度＝1 與 10, 5%點＝4.96, 1%點＝10.04.

第一個 F 值 34.82 爲非常顯著,這表示血糖與時間間的迴歸爲非常顯著. 而第二個 F 值 3.98則爲不顯著,這表示注射後第 2 小時之血糖均數與直線迴歸無甚差別. 這是意料中事,因爲前者之離均差平

方和 50,960.33 占去了時間方面離均差平方和(表 13-3) 的最大部分,餘下的一個自由度便不顯著了.上列兩種比較的離均差平方和總計與表 13-3 時間方面的平方和相等,

$$50,960.33+5,826.77=56,781.10.$$

此例時間方面兩個自由度的均方爲非常顯著,而直線迴歸亦然.但在其他例子中,兩個自由度的均方可爲不顯著,而在個別比較時,可能有一個自由度是顯著的.

關於迴歸中之個別比較,下節將作更詳細的討論.但討論時,自變數之距離以相等者爲限.

13-6. 正交多項式與迴歸中之個別比較 前章第12-5節,正交多項式的配合法與個別比較是有密切關係的.我們還記得每配合一較高次的曲線,則離均差平方和更減少一些,而當時所用的許多公式便是從這樣減少的離均差平方和得來的.下面我們要把這些公式引申出來.

令 x 爲自變數,y 爲因變數;當 x 等於某兩數值時,y 之值爲 u 與 v.按第 12-5 節的方法,可計算如下:

【表 13-4】 正交多項式中公式之說明(一)

y 之值	第二總和
u	u
v	$u+v$
$S_1=u+v$,	$S_2=2u+v$;
$a=\dfrac{u+v}{2}$,	$b=\dfrac{2u+v}{3}$;
$a'=\dfrac{u+v}{2}$,	$b'=\dfrac{u+v}{2}-\dfrac{2u+v}{3}=\dfrac{-u+v}{6}$;
$A=\dfrac{u+v}{2}$,	$B=-u+v$.

又由直線迴歸而減少的離均差平方和爲

$$\frac{B^2}{2}=\frac{(-u+v)^2}{2} \quad \text{或} \quad \frac{(-1+1)^2}{1^2+1^2}.$$

後者爲本章所用的新的符號. 於是正交多項式的幾組公式增加了新的意義, 但其用途卻毫無改變.

當 y 有 u, v 與 w 三個數值, 且其相當的三個 x 值距離相等時, 則配合正交多項式時之計算如下表:

【表 13-5】 正交多項式中公式之說明(二)

y 之值	第二總和	第三總和
u	u	u
v	$u+v$	$2u+v$
w	$u+v+w$	$3u+2v+w$
$S_1=u+v+w$,	$S_2=3u+2v+w$,	$S_3=6u+3v+w$;
$a=\frac{u+v+w}{3}$,	$b=\frac{3u+2v+w}{6}$,	$c=\frac{6u+3v+w}{10}$;
$a'=\frac{u+v+w}{3}$,	$b'=\frac{-u+w}{6}$,	$c'=\frac{u-2v+w}{30}$;
$A=\frac{u+v+w}{3}$,	$B=\frac{-u+w}{2}$,	$C=\frac{u-2v+w}{2}$.

由直線迴歸所減少之離均差平方和爲

$$\frac{(-u+w)^2}{2} \quad \text{或} \quad \frac{(-1+0+1)^2}{1^2+0^2+1^2},$$

而由二次曲線迴歸所減少者則爲

$$\frac{(u-2v+w)^2}{6} \quad \text{或} \quad \frac{(1-2+1)^2}{1^2+2^2+1^2}.$$

若每個 y 值爲 k 次測定的總和, 則每種比較所用公式的分母都要乘以 k, 像前面幾節裏的公式那樣. 這兩種比較的離均差平方和等於 y

三個數值的總變異，因爲拋物線能通過任何三點，而沒有估計誤差的. 所以這一對的個別比較供給我們關於三組資料所具迴歸的全部知識. 我們在前節(第13-5節)中的計算，至此獲得充分的意義.

茲將包含2, 3, 4, 5各組及配合1, 2, 3, 4各次多項式時迴歸中所用個別比較列後. 例如含有五組之資料，當配合二次正交多項式時，其迴歸之個別比較爲(2－1－2－1＋2). 餘類推.

【表13-6】 包含2, 3, 4, 5各組(距離相等)之獨立比較中所用係數

多項式次數	組		數	
	2	3	4	5
1	－1＋1	－1＋0＋1	－3－1＋1＋3	－2－1＋0＋1＋2
2		1－2＋1	1－1－1＋1	2－1－2－1＋2
3			－1＋3－3＋1	－1＋2＋0－2＋1
4				1－4＋6－4＋1

用了這些公式，計算的手續要簡便得多. 至於比四次更高的多項式，其所需的各套係數當然也可依法推廣. 但事實上一個實驗中的處理水準很少用到五個以上的，故從略. 又在不常見的多組相比較時，須應用本書前面的普通迴歸與共變數分析法.

13-7. 迴轉實驗(reversal experiments) 若有兩種處理方法對於兩組動物(或人類)交互應用，則此類實驗稱爲迴轉實驗. 迴轉實驗的結果，可適用本章個別比較的方法(3). 金鑄、朴杜秉二氏曾作麻黃素(ephedrine)、假性麻黃素(pseudoephedrine)與麻黃甲素(ephetonin)三者之比較研究(4)，其中關於麻黃素與麻黃甲素之部分，計有犬六頭，等分爲甲、乙兩組，甲組每犬先注射麻黃素，次注射麻黃

甲素，最後再注射麻黃素；乙組則最先與最後皆注射麻黃甲素，而中間一次則注射麻黃素．茲將注射後所增加之血壓（指最大作用 maximal effect 時）及個別比較之計算列後：

【表 13-7】　犬注射麻黃素及麻黃甲素後增加之血壓

組別	注射次序			比較	總計
	a	b	c	$a-2b+c$	
甲	麻黃素	麻黃甲素	麻黃素		
	30	10	18	28	
	34	26	29	11	
	43	22	22	21	60
乙	麻黃甲素	麻黃素	麻黃甲素		
	24	40	28	−28	
	16	18	16	−4	
	14	14	22	8	−24

每犬既分三次注射，則按第 13–5 與 13–6 兩節的原理，由

$$a+0-c$$

與

$$a-2b+c$$

兩種比較，可獲得全部的知識．前者（$a+0-c$）測量注射次序與所增血壓之間有無關係（直線迴歸）存在，而非比較兩種藥物之效能，故可不必討論．後者（$a-2b+c$）則比較第二期與直線迴歸之距離，即為本實驗所欲研究者．各犬（$a-2b+c$）之值見表 13–7，甲組之總和為 60，係（麻黃素）−（麻黃甲素）；乙組之總和為 −24，則係（麻黃甲素）−（麻黃素）．故二值之相差，

$$60-(-24)=84,$$

表示麻黃素之效能大於麻黃甲素．顯著性測驗時所用之誤差可用兩

組合併的變異數，其自由度爲 $2+2=4$（參閱第四章第4–7節），

$$(28)^2+(11)^2+(21)^2-(60)^2/3=146,$$

$$(-28)^2+(-4)^2+(8)^2-(-24)^2/3=672,$$

$$\frac{146+672}{2+2}=204.5.$$

麻黄素與麻黄甲素兩均數間之變異數爲

$$\frac{\left[60-(-24)\right]^2}{2(3)}=1,176,$$

因得 $$F=1,176\div 204.5=5.75,$$

$$\text{自由度}=1\text{ 與 }4,\quad 5\%\text{點}=7.71.$$

結果麻黄素與麻黄甲素在最大作用時所增血壓並無顯著的差別；至於在持久性方面，其情形如何，則爲另一問題.

此種迴轉實驗的設計在營養或其他研究方面都可適用. 且不限於三個時期，例如有 A, B 兩種處理分成四個時期輪流施用，則甲組各期爲 A, B, A, B；而乙組爲 B, A, B, A. 但須注意各期所經過的時間必須相等. 又比較時須用表 13–6 四組三次多項式之係數，即仿表 13–7 計算時，其右起第二直行應爲 $(-a+3b-3c+d)$，餘可類推.

13–8. 析因實驗（factorial experiments） 析因實驗的設計，是企圖研究種種處理的因子，以增進實驗的效能，並擴大其範圍. 例如營養實驗中，要同時作飼料間質與量的比較研究，那麼質、量兩因子就要用兩種或幾種水準的所有組合. 在有些實驗中也常把幾個因子同時研究. 下列資料爲一藥理的實驗(5). 將一白色來航公雞(leghorn rooster)麻醉後，以垂體後葉溶液（posterior pituitary solution）施

行靜脈注射，然後按 Coon 氏方法(6)記錄其血壓. 所用藥劑有兩種，一爲 U.S.P. 標準垂體後葉溶液，一爲待試驗之未知溶液. 用藥量分爲高低兩種，高者爲低者之兩倍. 於是藥劑與用量共有四種組合. 低量標準溶液之符號爲 S_1，高量爲 S_2；未知溶液之低量爲 U_1，高量爲 U_2. 每種注射四次，共 16 次. 兩次注射間相隔十分鐘. 各種注射之排列採用隨機原則，且每一橫行與每一直行無一重複之處理. 例如

$$
\text{甲}\quad \left|\begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & U_2 & U_1 \\ S_2 & U_2 & U_1 & S_1 \\ U_1 & S_1 & S_2 & U_2 \\ U_2 & U_1 & S_1 & S_2 \end{array}\right. \qquad\qquad \text{乙}\quad \left|\begin{array}{cccc} U_2 & U_1 & S_2 & S_1 \\ S_1 & U_2 & U_1 & S_2 \\ U_1 & S_2 & S_1 & U_2 \\ S_2 & S_1 & U_2 & U_1 \end{array}\right.
$$

甲爲原著者所用之排列次序. 其實不限於此種形式，依照上述原則，可另列形式如乙. 是項設計稱爲拉丁方 (Latin square) 與第九章第 9-3 節之隨機區組最初同爲農業上之田間設計，而今則已廣爲應用，並不限於田間了.

按拉丁方可用任何幾種處理，每橫行與直行的項目數應與處理數相同. 此例用兩種溶液與兩個水準，二者之組合相當於四種處理，這是析因實驗中的拉丁方.

實驗結果見表 13-8.

【表13-8】 來航雞注射垂體後葉溶液後下降之血壓(毫米，水銀柱)

組　別	S_1	S_2	U_1	U_2	總　和
1	18	34	25	36	113
2	12	35	18	32	97
3	11	30	17	36	94
4	16	28	19	40	103
總　和	57	127	79	144	407

拉丁方的變異數分析，本須將總變異析爲四個部分，即橫行、直行、處理及誤差四種. 在本例中，這四部分的自由度爲3, 3, 3, 6(參閱表 13–10). 表 13–10 的直行相當於組別，但橫行間的變異在本問題中沒有多大意義，故將橫行與誤差兩部分合併爲'實驗誤差'，而仿隨機區組的原則(第九章第 9–3 節)作變異數分析如下:

【表 13–9】 變異數分析(來航雞降低之血壓)

變異來源	自由度	離均差平方和	均方
總變異	15	1,371.94	
處理	3	1,235.69	411.90
組別	3	52.69	17.56
實驗誤差	9	83.56	9.284

繼作析因實驗之計算，以求估計的藥力(estimated potency)及其標準誤. 此處的獨立比較計有三種(同時參閱所附四格表):

	S_1	S_2	U_1	U_2
S與U間	−1	−1	+1	+1
高與低間	−1	+1	−1	+1
交互影響	+1	−1	−1	+1

	低 1	高 2	
S	57	127	184
U	79	144	223
	136	271	

因得各種比較之均方爲

$$S\text{與}U\text{間}\quad \frac{(-57-127+79+144)^2}{4(1^2+1^2+1^2+1^2)}=\frac{(39)^2}{16}=95.06,$$

$$\sqrt{95.06}=9.75=D;$$

$$\text{高與低間}\quad \frac{(-57+127-79+144)^2}{4(1^2+1^2+1^2+1^2)}=\frac{(135)^2}{16}=1,139.06,$$

$$\sqrt{1,139.06}=33.75=B;$$

交互影響 $\dfrac{(57-127-79+144)^2}{4(1^2+1^2+1^2+1^2)}=\dfrac{(-5)^2}{16}=0.31.$

比較時所用的誤差爲 9.284(表 13–9), 於是得 F 值如下:

S 與 U 間 $F=95.06\div 9.284=10.24,$

高與低間 $F=1,139.06\div 9.284=122.69,$

自由度=1 與 9 時, 5%點=5.12, 1%點=10.56.

前者僅略低於 1%點, 爲顯著; 後者遠過於 1%點, 爲非常顯著. 至交互影響之均方小於誤差均方, 故爲不顯著. 不過這裏的目的, 是在求得估計藥力及其標準誤, 故需要下面的計算.

$$估計藥力之對數=M=\frac{(\log 2)D}{B}=\frac{(.3010)(9.75)}{33.75}=.0870,$$

式中 D 與 B 是前面算出來的, 又藥量高低之比爲 2, 故分子須用 log 2 乘之. 於是得估計藥力爲

估計藥力 = antilog .0870 = 1.22 或 122%.

估計藥力已經求得, 現在要計算它的標準誤了. 其公式爲

$$S_M=\frac{S(\log n)\sqrt{B^2+D^2}}{B^2}, \qquad \text{公式(13–4)}$$

此處 S 爲實驗所得的標準誤差, 卽

$$S=\sqrt{9.284}=3.047,$$

又 $B^2=1,139.06, \quad D^2=95.06,$

$\log n$ 爲藥量高低比例之對數, 此處 $n=2$. 將各數代入公式, 得

$$S_M=\frac{3.047(\log 2)\sqrt{1,139.06+95.06}}{1,139.06}=0.0283.$$

由此化爲相對藥力(relative potency)之標準誤，令其符號爲 s.e.，則

$$\text{s.e.} = 2.303\,S_M(\text{antilog}\,M). \qquad \text{公式(13–5)}$$

式中 2.303 爲由普通對數化成自然對數時所乘之常數. 於是

$$\text{s.e.} = 2.303(.0283)(1.22) = .0795 \quad 或 \quad 8\%.$$

下面我們已求得估計藥力爲 122%，其標準誤爲 8%. 估計藥力上下兩個標準誤的距離爲 $122 \pm 2(8) = 106 \rightarrow 138$. 若另用生物方法(biological method)求得實際藥力爲 117.6，此數在兩個標準誤的範圍內，故知實際藥力與估計藥力並無顯著的區別.

在拉丁方中遇有缺項時，則用下列公式填補之：

$$X = \frac{k(R+C+T)-2S}{(k-1)(k-2)}, \qquad \text{公式(13–6)}$$

此處　k = 橫行數(或直行數，或處理數，因三者相等)，

R = 與缺項同一橫行之各項目總和，

C = 與缺項同一直行之各項目總和，

T = 與缺項同一處理之各項目總和，

S = 所有觀察項目之總和.

例如表 13–8 的資料按原著者之排列次序，則成表 13–10 的形式. 假

【表 13–10】 拉丁方之實驗紀錄

組		別	
1	2	3	4
S_1 : 18	S_2 : 35	U_2 : 36	U_1 : 19
S_2 : 34	U_2 : 32	U_1 : 17	S_1 : 16
U_1 : 25	S_1 : 12	S_2 : 30	U_2 : 40
U_2 : 36	U_1 : 18	S_1 : 11	S_2 : 28

定第 3 組之 U_1 遺失，則

$$k=4,\quad R=82,\quad C=77,\quad T=62,\quad S=390,$$

代入公式，得 $$X=\frac{4(82+77+62)-2(390)}{(4-1)(4-2)}=17.3.$$

拉丁方中塡入缺項後，在變異數分析時需要校正，若祇缺一項，則校正方法比較簡單，否則就非常複雜了. 詳見 Goulden 及 Yates 等著作(第九章參考文獻 9 及 13).

關於析因實驗及其他更複雜的實驗近年來用途日廣，進展極速. 將來在醫學研究方面占一重要地位，自不待言. 本章僅作初步之介紹，讀者欲知其詳，可參考 Fisher, Goulden, 與 Yates 等著作，書名見參考文獻(7)—(11)，不贅.

【練 習 題】

1. 設有兩數爲 27 與 37, $k=1$. 試用第 13-1 節所述三種方法，求其均方.

2. F 值表(表 9-3)內第 1 直行的數值，恰爲 t 值表(表 4-4)中相當數值的平方. 試在 F 值表第 1 行中任選十個數值，以說明此定理.

3. 設 $a=20, b=30, c=35, d=40$，各數皆爲 5 個項目之總和. 試求下列兩種比較之均方:

(1) $a+b-c-d$, (2) $3a-b-c-d$.

4. 設 $a=12,\ b=18,\ c=20,\ d=30,\ e=32$，每一數值爲 4 個項目之總和. 試求下列兩種比較之均方:

(1) $4a-b-c-d-e$, (2) $2a+2b+2c-3d-3e$.

5. 第3,4兩題各種比較是否爲均衡的比較，並說明其理由.

6. 試以代數方法引申下列公式(參閱第13-2節)

$$\frac{(2a-b-c)^2}{6k}.$$

7. 假定有 A, B, C, D 四種飼料，其中 B 爲一標準飼料. 實驗用動物共有40頭，先將原始體重之相等或甚相近者，每4頭集於一組，共得10組. 然後用隨機方法，將每組中之四個動物分配於四種飼料之下，每動物各得一種. 分配完畢，則每種飼料各有10個動物. 經過一定時間後，量其所增體重，實驗結果如下表.

各動物在同一期間內所增之體重

按原始體重所分之組別	飼料				總計
	A	*B*	*C*	*D*	
1	1.40	1.31	1.40	1.96	6.07
2	1.79	1.30	1.47	1.77	6.33
3	1.72	1.21	1.37	1.62	5.92
4	1.47	1.03	1.15	1.76	5.46
5	1.26	1.45	1.22	1.88	5.81
6	1.28	0.95	1.48	1.50	5.21
7	1.34	1.26	1.31	1.60	5.51
8	1.55	1.14	1.27	1.49	5.45
9	1.57	1.25	1.22	1.77	5.81
10	1.26	1.00	1.36	1.27	4.89
總計	14.14	11.95	13.25	16.62	56.46

試先用變異數分析法求得誤差之均方，再作下列比較，並解釋統計結果之意義:

比較	飼		料	
	A	B	C	D
1	−1	+1	0	0
2	0	+1	−1	0
3	0	+1	0	−1

8．用前章配合正交多項式的方法，演化表 13-6 中包含 4 組及 5 組之各套獨立比較.

9．下列數值爲一動物在四個相等期間內之體重(磅)：

3.20,　3.29,　3.43,　3.50.

先將四點畫出，並猜度在三種獨立比較中，何者之離均差平方和爲最大. 然後計算三種獨立比較之均方，並用通常求 $\Sigma(X-\bar{x})^2$ 的方法，以核對三種比較之總和.

10．Cannon 氏(12)等用兩種方法使乳牛飲水，一在牛舍之內(I)，一在牛舍之外(O)，視其對於奶油產量有無影響而定. 實驗時間共分四期. 下表爲兩組牛(每組 5 頭)在各期中奶油之產量(磅).

組別	時			期	組別	時			期
	a	b	c	d		a	b	c	d
甲	(I)	(O)	(I)	(O)	乙	(O)	(I)	(O)	(I)
	40	32	28	14		51	55	40	40
	27	19	20	14		32	32	32	28
	35	27	31	25		36	33	29	31
	30	28	27	26		32	30	25	25
	37	30	32	27		21	22	15	15

先求各牛四期之比較 $(-a+3b-3c+d)$，再求甲乙兩組之總計(參閱表 13-7). 最後用 F 值測驗兩種飲水法相差之顯著性.

11. 試根據'隨機區組'、'拉丁方'、'迴轉實驗'與'析因實驗'之原理，各擬一醫學或生物科學上之實驗設計.

【參 考 文 獻】

(1) Tai, T. K. and Cheng, L. T., Studies on soy bean proteins, IV. The supplementary effect of albumin and casein on the nutritive value of glycinin, Journal of Chinese Chemical Society, 11, 1 (1944).

(2) Bachmann, C. and Toby, G., The responses of normal and hypophysectomized rabbits to adrenaline, The Journal of Physiology, 87 : 1–10, the Cambridge University Press (1936).

(3) Brandt, A. E., Iowa Agricultural Experiment Station Research Bulletin, 234 (1938).

(4) King, T. and Pak, C., Comparative studies of ephedrine, racemic ephedrine and pseudoephedrine, III. Effects on the nasal mucous membrances, Chinese Journal of Physiology, 3, 1 : 95–108 (1929).

(5) R. Blackwell Smith, The biological assay of posterior pituitary solution, The Journal of Pharmacology and Experimental Therapeutics, 78, 1 : 72 (1943).

(6) Coon, J. M. Arch., Internat. Pharmacodyn, 62 : 79 (1939).

(7) Fisher, R. A., Design of Experiments, Oliver and Boyd,

Edinburgh (1936).

(8) Goulden, C. H., Methods of Statistical Analysis, Burgess Publishing Co., Minneapolis (1939).

(9) Goulden, C. H., Modern methods of testing a large number of varieties, Dominion of Canada Department of Agriculture, Technical Bulletin 9 (1937).

(10) Yates, F., The design and analysis of factorial experiments, Imperial Bureau of Soil Science, Harpenden (1937).

(11) Forster, H. C., Iowa Agricultural Experiment Station Research Bulletin 226 (1937).

(12) Cannon, C. Y., Hansen, E. N. and James, R. O'Neal, Iowa Agricultural Experiment Station Research Bulletin 292 (1932).

公 式 彙 錄

公式號碼	公　　　　　　　　式
(2–1)	$\bar{x}=\frac{\Sigma X}{N}$.
(2–2)	$\bar{x}=G+\frac{\Sigma(X-G)}{N}$.
(2–3)	$\bar{x}=G+\frac{\Sigma fd}{N}(i)$.
(2–4)	$md=L+\frac{\frac{N}{2}-A_1}{f_{md}}(i)$.
(2–5)	$md=U-\frac{\frac{N}{2}-A_2}{f_{md}}(i)$.
(3–1)	$\Sigma(X-\bar{x})=0$.
(3–2)	$V=\frac{(X-\bar{x})^2}{N-1}$.
(3–3)	$S=\sqrt{\frac{\Sigma(X-\bar{x})^2}{N-1}}$.
(3–4)	$S=\sqrt{\frac{\Sigma X^2-\frac{(\Sigma X)^2}{N}}{N-1}}$.

(3-5) $\Sigma(X-\bar{x})^2=\Sigma X^2-\frac{(\Sigma X)^2}{N}$.

(3-6) $\Sigma(X-\bar{x})^2=\Sigma(X-G)^2-\frac{[\Sigma(X-G)]^2}{N}$.

(3-7) $S=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2-\frac{(\Sigma fd)^2}{N}}{N-1}}(i)$.

(3-8) $V=\frac{\left[\Sigma fd^2-\frac{(\Sigma fd)^2}{N}\right](i)^2}{N-1}$.

(3-9) $\text{C.V.}=\frac{S}{\bar{x}}\times 100$.

(4-1) $S_{\bar{x}}=\frac{S}{\sqrt{N}}=\sqrt{\frac{\Sigma(X-\bar{x})^2}{N(N-1)}}$.

(4-2) $V_{\bar{x}}=\frac{V}{N}=\frac{\Sigma(X-\bar{x})^2}{N(N-1)}$.

(4-3) $t=\frac{\bar{x}-m}{S_{\bar{x}}}$.

(4-4) $m=\bar{x}\pm S_{\bar{x}}t$.

(4-5) $S=\sqrt{\frac{\Sigma(X_1-\bar{x}_1)^2+\Sigma(X_2-\bar{x}_2)^2}{N_1+N_2-2}}$.

(4-6) $S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=S\sqrt{\frac{N_1+N_2}{N_1N_2}}$.

(4-7) $t=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}}$, 自由度$=N_1+N_2-2$.

(4-8) $\text{P.D.}=.6745S$.

(4–9) $\text{P.E.}_{\bar{x}} = .6745 S_{\bar{x}}$.

(5–1) $\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y}) = \Sigma XY - \dfrac{(\Sigma X)(\Sigma Y)}{N}$.

(5–2) $b = \dfrac{\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})}{\Sigma(X-\bar{x})^2}$.

(5–3) $Y_e - \bar{y} = b(X-\bar{x})$.

(5–4) $\Sigma(Y-Y_e)^2 = \Sigma(Y-\bar{y})^2 - \dfrac{[\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})]^2}{\Sigma(X-\bar{x})^2}$.

(5–5) $V_{y\cdot x} = \dfrac{\Sigma(Y-Y_e)^2}{N-2}$.

(5–6) $S_{y\cdot x} = \sqrt{\dfrac{\Sigma(Y-Y_e)^2}{N-2}}$.

(5–7) $Y_a = Y - b(X-\bar{x})$.

(5–8) $\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y}) = \Sigma(X-G)(Y-H) - \dfrac{\Sigma(X-G)\cdot\Sigma(Y-H)}{N}$.

(5–9) $\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y}) = \left[\Sigma fxy - \dfrac{(\Sigma fx)(\Sigma fy)}{N}\right](i_x)(i_y)$.

(5–10) $S_b = \dfrac{S_{y\cdot x}}{\sqrt{\Sigma(X-\bar{x})^2}}$.

(5–11) $t_b = \dfrac{b}{S_b}$, 自由度$=N-2$.

(5–12) $S_{1-2} = \sqrt{S_1^2 + S_2^2}$.

(5–13) $t = \dfrac{b_1 - b_2}{S_{1-2}}$, 自由度$=(N_1-2)+(N_2-2)$.

(6–1) $r = \dfrac{\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(X-\bar{x})^2}\sqrt{\Sigma(Y-\bar{y})^2}}$.

(6-2) $$r=\frac{\dfrac{\Sigma(X-\bar{x})(Y-\bar{y})}{N-1}}{\sqrt{\dfrac{\Sigma(X-\bar{x})^2}{N-1}}\sqrt{\dfrac{\Sigma(X-\bar{y})^2}{N-1}}}=\frac{CV}{\sqrt{(V_x)(V_y)}}.$$

(6-3) $$r=\frac{\Sigma fxy-\dfrac{(\Sigma fx)(\Sigma fy)}{N}}{\sqrt{\Sigma fx^2-\dfrac{(\Sigma fx)^2}{N}}\sqrt{\Sigma fy^2-\dfrac{(\Sigma fy)^2}{N}}}.$$

(6-4) $$t_r=\frac{r\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r^2}},\quad \text{自由度}=N-2.$$

(6-5) $$z=\frac{1}{2}\left\{\log_e(1+r)-\log_e(1-r)\right\}.$$

(6-6) $$S_z=\frac{1}{\sqrt{N-3}}.$$

(6-7) $$S_{z_1-z_2}=\sqrt{\frac{1}{N_1-3}+\frac{1}{N_2-3}}.$$

(6-8) $$t_{z_1-z_2}=\frac{z_1-z_2}{S_{z_1-z_2}},\quad \text{自由度}=N_1+N_2-6.$$

(6-9) $$Y_e-\bar{y}=r\frac{S_y}{S_x}(X-\bar{x}).$$

(6-10) $$X_e-\bar{x}=r\frac{S_x}{S_y}(Y-\bar{y}).$$

(6-11) $$r=\sqrt{\left(r\frac{S_y}{S_x}\right)\left(r\frac{S_x}{S_y}\right)}=\sqrt{b_{yx}\cdot b_{xy}}.$$

(6-12) $$\Sigma(Y-Y_e)^2=(1-r^2)\Sigma(Y-\bar{y})^2.$$

(7-1) $$(q+p)^k = q^k + kq^{k-1}p + \frac{k(k-1)}{2\cdot 1}q^{k-2}p^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3\cdot 2\cdot 1}q^{k-3}p^3 + \cdots\cdots + \frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-r+1)}{r(r-1)\cdots\cdots 2\cdot 1}q^{k-r}p^r + \cdots\cdots + p^k.$$

(7-2) $$y = \left(\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}.$$

(7-3) $$z = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

(7-4) $$V_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = V_{\bar{x}_1} + V_{\bar{x}_2}.$$

(7-5) $$S_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{V_{\bar{x}_1} + V_{\bar{x}_2}}.$$

(7-6) $$m = kp.$$

(7-7) $$\sigma = \sqrt{kpq}.$$

(7-8) $$m = p.$$

(7-9) $$\sigma = \sqrt{\frac{pq}{k}}.$$

(7-10) $$S = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2 - (\Sigma fd)^2/N}{N-1} - \frac{1}{12}(i)}.$$

(7-11) $$y = \frac{N}{\sigma}z.$$

(7-12) $$偏態 = \frac{均數-衆數}{標準差}$$

$$(7\text{-}13)\quad \begin{cases} a_1=\dfrac{\Sigma fd}{N}, & a^2=\dfrac{\Sigma fd^2}{N}, \\ a_3=\dfrac{\Sigma fd^3}{N}, & a_4=\dfrac{\Sigma fd^4}{N}. \end{cases}$$

$$(7\text{-}14)\quad \begin{cases} v_1=a_1, \\ v_2=a_2-a_1^2, \\ v_3=a_3-3a_1a_2+2a_1^3, \\ v_4=a_4-4a_1a_3+6a_1^2a_2-3a_1^4. \end{cases}$$

$$(7\text{-}15)\quad \begin{cases} k_1=v_1, \\ k_2=\left(\dfrac{N}{N-1}\right)v_2, \\ k_3=\left[\dfrac{N^2}{(N-1)(N-2)}\right]v_3, \\ k_4=\dfrac{N^2}{(N-1)(N-2)}\left[\dfrac{(N+1)v_4-3(N-1)v_2^2}{N-3}\right]. \end{cases}$$

$$(7\text{-}16)\quad \begin{cases} k'_1=k_1, & k'_1=k_2-\dfrac{1}{12}, \\ k'_3=k_3, & k'_2=k_4+\dfrac{1}{120}. \end{cases}$$

$$(7\text{-}17)\quad \begin{cases} g_1=\dfrac{k'_3}{(k'_2)^{\frac{3}{2}}}, & S_{g_1}=\sqrt{\dfrac{6N(N-1)}{(N-2)(N+1)(N+3)}}, \\ g_2=\dfrac{k'_4}{{k'_2}^2}, & S_{g_2}=\sqrt{\dfrac{24N(N-1)^2}{(N-3)(N-2)(N+3)(N+5)}}. \end{cases}$$

$$(8\text{-}1)\quad \chi^2=\Sigma\,\frac{(A-T)^2}{T}.$$

(8-2) $$\chi^2=\frac{(ad-bc)^2(a+b+c+d)}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

(8-3) $$\chi^2=\frac{(b'^2-4a'c')^2(a'+b'+c')}{(2a'+b')^2(b'+2c')^2}.$$

(8-4) $$\chi=\frac{(b'^2-4a'c')\sqrt{a'+b'+c'}}{(2a'+b')(b'+2c')}.$$

(8-5) $R\times C$ 表中之自由度$=(R-1)(C-1)$.

(8-6) $$C=\sqrt{\frac{\chi^2}{N+\chi^2}}.$$

(8-7) $$P_x=\frac{(a+b)!(c+d)!(a+c)!(b+d)!}{(a+b+c+d)!}\cdot\frac{1}{a!b!c!d!}.$$

(9-1) $$\Sigma k(\bar{x}_i-\bar{x})^2=\frac{(\Sigma X_1)^2+(\Sigma X_2)^2+\cdots+(\Sigma X_n)^2}{k}-\frac{(\Sigma X)^2}{nk}.$$

(9-2) $$\Sigma\Sigma(X_i-\bar{x}_i)^2=\Sigma(X-\bar{x})^2-\Sigma k(\bar{x}_i-\bar{x})^2.$$

(9-3) $$\Sigma k_i(\bar{x}_i-\bar{x})^2=\frac{(\Sigma X_1)^2}{k_1}+\frac{(\Sigma X_2)^2}{k_2}+\cdots\cdots+\frac{(X_n)^2}{k_n}-\frac{(\Sigma X)^2}{\Sigma k_i}.$$

(9-4) $$X=\frac{tT+bB-S}{(t-1)(b-1)}.$$

(10-1) $$\Sigma k_i(\bar{x}_i-\bar{x})(\bar{y}_i-\bar{y})=$$

$$+\cdots\cdots\frac{(\Sigma X_1)(\Sigma Y_1)}{k_1}+\frac{(\Sigma X_2)(\Sigma Y_2)}{k_2}$$

$$+\frac{(\Sigma X_n)(\Sigma Y_n)}{k_n}-\frac{(\Sigma X)(\Sigma Y)}{\Sigma k_i}.$$

(11-1) $$\beta_{Y1\cdot2}=\frac{r_{Y1}-r_{Y2}r_{12}}{1-r_{12}^2},\qquad \beta_{Y2\cdot1}=\frac{r_{Y2}-r_{Y1}r_{12}}{1-r_{12}^2}.$$

(11-2) $$b_{Y1\cdot 2}=\beta_{Y1\cdot 2}\frac{\sqrt{\Sigma(Y-\bar{y})^2}}{\sqrt{\Sigma(X_1-\bar{x}_1)^2}},\quad b_{Y2\cdot 1}=\beta_{Y2\cdot 1}\frac{\sqrt{\Sigma(Y-\bar{y})^2}}{\sqrt{\Sigma(X_2-\bar{x}_2)^2}}.$$

(11-3) $$Y_e=\bar{y}+b_{Y1\cdot 2}(X_1-\bar{x}_1)+b_{Y2\cdot 1}(X_2-\bar{x}_2).$$

(11-4) $$R^2_{Y\cdot 12}=r_{Y1}\beta_{Y1\cdot 2}+r_{Y2}\beta_{Y2\cdot 1}.$$

(11-5) $$R^2_{Y\cdot 12}=\frac{r^2_{Y1}+r^2_{Y2}-2r_{Y1}r_{Y2}r_{12}}{1-r^2_{12}}.$$

(11-6) $$S_{Y\cdot 12}=\sqrt{\frac{\Sigma(Y-Y_e)^2}{N-3}}=\sqrt{\frac{(1-R^2)\Sigma(Y-\bar{y})^2}{N-3}}.$$

(11-7) $$S_\beta=\sqrt{\frac{1-R^2}{(1-r^2_{12})(N-3)}}.$$

(11-8) $$S_{\beta_1-\beta_2}=\sqrt{\frac{2(1-R^2)}{(N-3)(1-r_{12})}}.$$

(11-9) $$r_{12\cdot 3}=\sqrt{b_{12\cdot 3}b_{21\cdot 3}}.$$

(11-10) $$r_{12\cdot 3}=\frac{r_{12}-r_{13}r_{23}}{\sqrt{(1-r^2_{13})(1-r^2_{23})}}.$$

(11-11) $$t=\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{N-p-2},$$ 自由度$=N-p-2$.

(11-12)

	X_1	X_2	X_3	Y
X_1	$\beta_{Y1\cdot 23}+$	$r_{12}\beta_{Y2\cdot 13}+$	$r_{13}\beta_{Y3\cdot 12}=$	r_{Y1}
X_2	$r_{12}\beta_{Y1\cdot 23}+$	$\beta_{Y2\cdot 13}+$	$r_{23}\beta_{Y3\cdot 12}=$	r_{Y2}
X_3	$r_{13}\beta_{Y1\cdot 23}+$	$r_{23}\beta_{Y2\cdot 13}+$	$\beta_{Y3\cdot 12}=$	r_{Y3}

(11-13) $$Y=\bar{y}+b_{Y1\cdot 23}(X_1-\bar{x}_1)+b_{Y2\cdot 13}(X_2-\bar{x}_2)+b_{Y3\cdot 12}(X_3-\bar{x}_3).$$

(11–14)　$R^2_{Y\cdot123}=r_{Y1}\beta_{Y1\cdot23}+r_{Y2}\beta_{Y2\cdot13}+r_{Y3}\beta_{Y3\cdot12}.$

(11–15)　$\beta_{Y1\cdot23}=k_1r_{Y1}+k_2r_{Y2}+k_3r_{Y3}.$

(11–16)　$v=\dfrac{1-R^2}{N-m}.$

(11–17)　$v_1=vk_{11},\quad v_2=vk_{22},\quad v_3=vk_{33}.$

(11–18)　$(\beta_{Y1\cdot23}-\beta_{Y2\cdot13})$之標準誤爲$\sqrt{v(k_{11}+k_{22}-2k_{12})}$,

$(\beta_{Y2\cdot13}-\beta_{Y3\cdot12})$之標準誤爲$\sqrt{v(k_{22}+k_{33}-2k_{23})}$,

$(\beta_{Y1\cdot23}-\beta_{Y3\cdot12})$之標準誤爲$\sqrt{v(k_{11}+k_{33}-2k_{13})}$.

(11–19)
$$Y=\bar{y}+\beta_1\frac{\sqrt{\Sigma(Y-\bar{y})^2}}{\sqrt{\Sigma(X_1-\bar{x}_1)^2}}(X_1-\bar{x}_1)+\beta_2\frac{\sqrt{\Sigma(Y-\bar{y})^2}}{\sqrt{\Sigma(X_2-\bar{x}_2)^2}}(X_2-\bar{x}_2)+\cdots\cdots.$$

(11–20)　$r_{Y1\cdot23456}=\sqrt{b_{Y1\cdot23456}\cdot b_{1Y\cdot23456}}.$

(11–21)　$Y_a=Y-b_{Y1\cdot2}(X_1-\bar{x}_1)-b_{Y2\cdot1}(X_2-\bar{x}_2).$

(12–1)
$$\begin{cases}aN+b\Sigma X+c\Sigma X^2=\Sigma Y,\\ a\Sigma X+b\Sigma X^2+c\Sigma X^3=\Sigma XY,\\ a\Sigma X^2+b\Sigma X^3+c\Sigma X^4=X^2Y.\end{cases}$$

(12–2)　$Y=A+BX_1+CX_2+DX_3+EX_4+\cdots\cdots.$

$$\begin{cases}a=\dfrac{S_1}{n}=\bar{y},\\ b=\dfrac{(1)(2)}{n(n+1)}(S_2),\end{cases}$$

(12-3)
$$\begin{cases} c=\dfrac{(1)(2)(3)}{n(n+1)(n+2)}(S_3), \\[2ex] d=\dfrac{(1)(2)(3)(4)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}(S_4), \\[2ex] e=\dfrac{(1)(2)(3)(4)(5)}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}(S_5), \text{etc.} \end{cases}$$

(12-4)
$$\begin{cases} a'=a, \\ b'=a-b, \\ c'=a-3b+2c, \\ d'=a-6b+10c-5d, \\ e'=a-10b+30c-35d+14e, \\ f'=a-15b+70c-140d+126e-42f, \\ g'=a-21b+140c-420d+630e-462f+132g, \\ h'=a-28b+252c-1,050d+2,310e-2,772f \\ \qquad\qquad +1,716g-429h. \end{cases}$$

(12-5)
$$\frac{r(r+1)}{1\cdot 2},\quad \frac{(r-1)(r+2)}{2\cdot 3},\quad \frac{(r-2)(r+3)}{3\cdot 4},\quad \cdots\cdots.$$

(12-6)
$$\begin{cases} A=a', \\[2ex] B=\dfrac{6}{n-1}(b'), \\[2ex] C=\dfrac{30}{(n-1)(n-2)}(c'), \\[2ex] D=\dfrac{140}{(n-1)(n-2)(n-3)}(d'), \\[2ex] E=\dfrac{630}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}(e'), \end{cases}$$

F, G, H 之分子計為: 2, 772, 12, 012, 51, 480.

(12–7) $$\frac{(2r+1)(2r)(2r-1)(2r-2)\cdots\cdots 2\cdot 1}{[r(r-1)(r-2)\cdots\cdots 2\cdot 1]^2}.$$

(12–8)
$$\begin{cases} nA^2 = \dfrac{(\Sigma Y)^2}{n}, \\ \dfrac{n(n^2-1)}{12}(B^2), \\ \dfrac{n(n^2-1)(n^2-4)}{180}(C^2), \\ \dfrac{n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)}{2,800}(D^2), \\ \dfrac{n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)(n^2-16)}{44,100}(E^2). \end{cases}$$

此後三項分母為：698,544，11,099,088，176,679,360.

(12–9) $$\frac{(2r+1)[2r(2r-1)(2r-2)\cdots\cdots 2\cdot 1]^2}{[r(r-1)(r-2)\cdots\cdots 2\cdot 1]^4}.$$

(12–10)
$$\begin{cases} X_1 = X - \bar{x}, \\ X_2 = X_1^2 - \dfrac{n^2-1}{12}, \\ X_3 = X_1^3 - \dfrac{3n^2-7}{20}(X_1), \\ X_4 = X_1^4 - \dfrac{3n^2-13}{14}(X_1^2) + \dfrac{3(n^2-1)(n^2-9)}{560}, \\ X_5 = X_1^5 - \dfrac{5(n^2-7)}{18}(X_1^3) + \dfrac{15n^4-230n^2+407}{1,008}(X_1). \end{cases}$$

(12–11) $y-d=\dfrac{K}{1+Ce^{rt}}$.

(12–12) $\log_e\dfrac{K-(y-d)}{y-d}=\log_e C+rt$.

(13–1) $\dfrac{(a-b)^2}{2k}$.

(13–2) $\dfrac{(a-2b+c)^2}{6k}$.

(13–3) $\dfrac{(a+b-3c+d)^2}{12k}$.

(13–4) $S_M=\dfrac{S(\log n)\sqrt{B^2+D^2}}{B^2}$.

(13–5) s.e. $=2.303S_M(\text{antilog}\,M)$.

(13–6) $X=\dfrac{k(R+C+T)-2S}{(k-1)(k-2)}$.

度量衡表

類別	英文名稱及符號	度量衡局譯名	教育部頒布譯名	換算
度	Meter(m.)	公尺	米	1 米 = 100 厘米
	Centimeter(cm.)	公分	厘米	1 厘米 = 10 毫米
	Millimeter(mm.)	公釐	毫米	1,000 毫米 = 1 米
	Micrometer(μ)		微米	1,000 微米 = 1 毫米
量	Liter(l.)	公升	升	
	Milliliter(ml.)	公撮	毫升	1 升 =1,000毫升
	Cubic centimeter(c.c.)	公撮	立方厘米	1,000 立方厘米 = 1 升
	Cubic millimeter(c.mm.)		立方毫米	1 000 立方毫米 = 1 立方毫米
	Cubic micrometer(μ^3)		立方微米	1×10^9 立方微米 = 1 立方毫米
衡	Kilogram(kg.)	公斤	仟克	1 仟克 =1 000克
	Gram(gm.)	公分	克	1 克 =1 000毫克
	Milligram(mgm.)	公絲	毫克	1 毫克 =1 000微克
	Microgram(γ)		微克	1 微克 = ,000微微克
	Micro-Microgram($\gamma\gamma$)		微微克	1×10^{-12}克 = 1微微克

國際制與我國市用制之互換

1米 = 3市尺	1升 = 1 市升	1仟克 = 2 市斤
1市尺 = 33.33 厘米	1市斤 = 500 克	1市兩 = 31.25 克

國際制與英國制之互換

1米 = 39.37 吋(Inches)	1吋 = 2.54 厘米
1克 = 15.40 克冷(Grains)	1磅 = 453.6 克
1仟克 = 2.20 磅(Pounds)	1加侖(Gallon, U. S.) = 3,785.4 立方厘米
1升 = 1.06 夸(Quarts)	1盎斯(Fluid ounce) = 29.57 立方厘米

附錄　中英文統計學名詞索引

（表內數目如 2-0 係指第二章為首之引言，7-5 係指第七章第五節，餘類推.）

A

B

C

D

E

F

G

H

I

Q

R

S

T

U

V

另以英文字母爲首者