大學叢書

教育統計學

王書林著

商務印書館發行

大學叢書

教育統計學

王書林著

商務印書館發行

中華民國二十六年十二月初版

(大學叢書教本) 教育統計學一冊 (34024·1平)

平裝每冊實價國幣貳元
外埠酌加運費匯費

著作者 南京中央大學 王書林
發行人 上海河南路 王雲五
印刷所 上海河南路 商務印書館
發行所 上海及各埠 商務印書館

(本書校對者 鮑嘉祥 徐昌權)

E三七三五

自　　序

著者在中大金大,均曾擔任教育統計學,於課餘爲同學編有詳細大綱,是書卽大綱之擴充也。參考書籍甚多,不及備載,最重要者爲

G. Udny Yule, An Introduction to the Theory of Statistics

Karl. J. Holzinger, Statistical Methods For Students in Education

稿成,吾妻希英女士與吾妹素聰女士分爲抄錄,費時不少,余深致謝。

書林　二十六年四月一日

目　錄

圖之目錄

教育統計學

第一章　緒論

1. 統計學之教育的功用

近年來教育上科學的運動時常應用到數量的方法，學校行政和教育的理論及實施中各種問題亦常以實驗的和統計的方法來研究之。

學校調查之繼續不斷的需要使統計學成爲研究教育者之必備的基礎的知識。調查中之問題，如經費之支配，預算之編製，學校會計等，均需要材料之留心的蒐集與合宜的統計方法之應用。

在教育的問題之中與統計學有最密切的關係者爲標準測驗。在近代教育科學中，智力與教育測驗漸取舊式考試方法而代之；但是測驗與量表之編造理論以及其結果之解釋均以統計方法爲基礎。研究測驗者必須對於統計學有深邃的了解。

2. 教育測量之困難

通常論科學，分爲物質科學，生物科學，與社會科學。這種分法雖根據於不同的研究對象，而考其研究結果之準確性，也不相同。自然現象是比較固定的；生物及社會現象則因觀察與測量之錯誤較大，與所包括的因子又較多，所以難得到準確的結果。教育測量有五種特殊的困難，爲自然現象現所沒有的。(一)單位缺乏或不完善；(二)測量的事實缺乏

固定性；(三)測量的事實異常繁複；(四)現象不能直接測量；(五)抽樣之不準確。茲約略說明於下。

(一)單位缺乏　譬如我們要測量十歲兒童之算術能力，開始就要遇到一個困難的問題，卽是什麼是測量的單位。雖然，我們可以編製了許多算術問題考試兒童，但是每個問題之難度不相等，答對一，三，五，三個問題者之能力並不等於答對二，四，六，三個問題者之能力。

(二)事實常變與因子複雜　教育上事實千變萬化，彼此雜陳。譬如我們測量一個兒童之智力，去年得智商 90，今年則得 100，其中原因異常繁雜。量表之不準確，智力生長之發生變化，環境之變動，甚至主試者之不同，考試時兒童之健康，均可使結果有別。

(三)間接測量　譬如智力測驗，我們所測量的雖是兒童之反應，但是根據此反應以推測其先天的智力。我們說某兒童有智齡三歲，因爲他答對如「你姓什麼」等問題，但是這種問題，無疑地是學習得來的。先天的能力不能直接去測量，祇可從其所表現的作業中估定，易言之，應用間接測量法。不過間接測量法沒有直接測量法之顯見與固定，一不留心，卽失了眞義。用鉛筆測量三歲的中國鄉村兒童，就失了效用，因爲中國鄉村中兒童有許多是沒有看見過鉛筆。雖然，這個問題是推孟(Terman)修正比納 (Binet) 西蒙 (Simon)智力量表三歲組測驗中之一個。

(四)抽樣困難　標準測驗中之抽樣是雙方的，試題之抽樣和被試者之抽樣。舊式考試方法之一弊端就是抽樣之不適當，不能代表教材全部。新法考試僅能使題數增加，而抽樣仍不能免。至於被試者之抽樣是否適當是標準測驗之最根本問題。當比納 1908 年智力量表發表後，比

利時有二位學者的康來 (Decroly) 與的廿 (Degand) 以之考試許多兒童,其結果平均起來,較比納的兒童之智力分數都高一年半。惟他們所考試的學校的兒童家境甚好,比納之兒童大多是窮苦的。抽樣不同,結果自然不同。

3. 正確的量表之要素與統計學之應用

教育的事實之繁複以及測量之困難既如上述,而研究教育者必須取得一種工具,使往常僅能爲質的形容的事實,可以得到數字的說明。這種工具就是統計學。茲約略舉例以說明之。

(一)參照點　無論那種測量都須有一個參照點。參照點在物質測量中大都是一個「恰好一點沒有」之點或零點,如零尺零斤等。但是有時是人爲的,大家同意以某一點爲起點,並非絕對的零點,如經度的參照點是 Greenwich,緯度的參照點是赤道等。在心理或教育測量中,某種能力之絕對的零點殊不易得,我國現在所用之T量表,是以某歲兒童(通常爲十二歲)之平均能力爲參照點。平均能力之求得,須用統計學之中心量數。

(二)單位　測量輕重以斤磅等爲單位,測量長短以尺粴等爲單位。作者在拙著心理與教育測量一書中曾說明被測量的現象應具三種條件,卽存在性,同一性與相等距離的可能性。所謂相等距離就是單位,就是第一單位與第二單位間的距離等於第二單位與第三單位間的距離。各單位之間距離不相等,則單位之意義不甚明瞭。在教育測量上相等距離之求得較諸參照點之規定更難。統計學中表示離中趨勢之數量雖在相當的條件之下可以採用,但是限制仍然很多。

(三)效度與信度　教育上的事實,千態萬狀,變化無常。經一次測量後,決不能絕對正確,毫無差誤。差誤有兩種,常性差誤與變性差誤,均使量表喪失或降低其效度和信度。研究測驗者常用統計的方法,以(a)求其所得的數量之信度,(b)求其量表之效度與信度並如何增加之,(c)消除其他不純的因子。

4. 歷史與定義

以統計的方法研究教育上之各種問題,是謂教育統計學。故教育統計之於教育,猶之算學之於物理,化學;以研究教育爲目的,而以統計學爲工具。所以教育統計學在統計學上之地位與商業統計學等同,乃應用統計學之一種;故我人欲知教育統計學之歷史與定義須研究統計學。

(一)歷史　統計學之肇源甚古。在昔文明各邦莫不以之調查一國之財富與人口,以爲施政之本。故英文之統計學爲 Statistics, 一說其字形似發源於拉丁文中 Status 一字,意爲一種政治情形 (A political state)。一說其字實由意大利大政治家 Statista 一字推衍而來。無論如何,與政治有密切之關係,此統計學鼻祖阿痕發爾(Achenwall)之所以常稱統計學爲國家著明事件之結晶體。迨至十七世紀中葉,工商業漸興,各種問題徒憑理論不能解決,學者遂有藉數量爲補助之工具,於是統計學之用途益廣。

然當時所謂統計,範圍廣汎,與現在所謂統計不同。材料之整理與蒐集之方法均無一定之程式,大數之觀察亦無一定之公式。及刻特雷(Quetelet, 1796—1874)氏出,巨數之恆性的學理始闡明,爲統計學之一最要的貢獻。承刻特雷之後如恩革爾(Engel),羅美林(Rumalin),克尼

斯 (Knies)，瓦格湼 (Wagner)，布羅克 (Block) 諸人皆能於統計方術之改良有極大之貢獻。如馬愛春 (Meitzen)，戈爾登(Golton)，皮而生(Pearson)，厄治衞司(Edgeworth)，桑戴克(Thorndike)，斯皮門(Spearman)，優爾(Yule)，愛兒特頓(Elderton)，瑟帕德(Sheppard)，包力(Bowley)諸人，皆能一方對於純粹的統計學有所貢獻，而一方又能應用之於其他科學。

至於應用統計的方法於教育問題之上，其功實始於戈爾登(1822—1911)，而皮而生，斯皮門，卡推爾(Cattell)，桑戴克又努力於後。戈氏精於遺傳學，且長於數學及其他種科學，其研究人種智力及體力之遺傳，均以統計爲工具。迴歸線之原理卽爲氏所發明者。繼氏而起者爲其弟子皮而生氏，氏對於統計學本身之貢獻最多，我人今日所用統計學中之各種重要公式，出於氏之發明者甚多。其最要者爲積差相關法。美國之以統計的方法研究教育的問題者，首推卡推爾氏。氏曾留學歐洲隨馮德(Wundt)學，並深受戈爾登之影響。故回美後卽着手以統計的方法研究心理的問題而涉及教育。次推桑戴克氏。氏爲詹姆士(James) 之弟子，並隨卡推爾學，掌教育心理學教鞭於美之哥倫比亞大學。氏長於心理學與統計學，故極力提倡以此二學爲工具而使教育科學化。氏於 1904 年著有心理與社會測量 (Mental and Social Measurement) 一書，可稱爲教育統計學之第一本書，說明統計的方法與測驗編造之原則。此後美國逐漸有研究教育統計學之學者，如刻黎(Kelley)，羅格(Rugg)，奧替斯(Otis)，賀麟閣(Holzinger)，託蒲斯(Toops)，孫斯東(Thurstone) 諸人，皆著有專書並頗負名望者。

（二）定義　科學的定義爲一科學之概括的規定。然學問隨時而進，定義亦因之不能不隨時而變。統計學之定義在昔日不過爲政策論之一部分，迨至近來方術進步，範圍擴充，定義亦隨各人注重之點不同而異。今特舉數人之言論於下，以供讀者之參考。

（1）包力以爲統計學爲計數之學；又稱之爲平均數之學。

（2）優爾謂凡可量的事實而受無窮原因之影響者，皆爲統計學所研究。

（3）桑戴克則以統計學爲測量天下萬物之狀況及其差異並相關之方法。

統計學之定義既如上述，而教育統計學乃爲應用的統計學之一種，以統計的方法研究教育上之問題。

5. 本書之範圍

統計學因事實的性質之不同，別爲二種：（一）品質之統計，（二）變量之統計。本書中所討論之各種方法，大率屬於後者。

統計學之最初步，卽爲搜集材料。材料既備，則須將事實之大體趨勢完全表現，令人了解。表列法與圖示法均爲表示大體趨勢之方法。表列法之目的爲使無倫次的事實成爲有秩序的事實，提其綱，挈其要，以輔助人之記憶，便利人之比較與總核。圖示法之目的爲將全部事實及其關係形之於圖，使普通閱者亦能一目瞭然。

但統計學之目的不祇求每種事實之大體趨勢，並且須將一種或數種事實作精密的研究，深確的比較，以求一種事實之表徵與數種事實之關係。教育統計學所用達到此種目的之方法有三：（一）爲點量數，（二）

爲距離量數,(三)爲相關量數。

無論何種事實集爲一組,必有大小多少之分。表示大小多少之量數卽爲點量數。點量數有三種:(一)百分位數,(二)四分位數,(三)中心量數。中心量數有五:(一)算術均數,(二)中數,(三)衆數,(四)調和均數,(五)幾何均數。而此五種之中,尤以(一)與(二)兩種爲最普通。測驗中之常模,通常卽用此二種量數。

距離量數表示一種事實之參差情形或離中趨勢之數量。蓋有時數種次數分配,中心量數雖完全相同,而參差情形則大異。例如甲乙兩班學生,各五十人,智力商數之平均數各爲 100 分,然甲班多中庸之人,雖少上智亦少下愚;而乙班則智愚共處,雖多天才亦多低能。故就全班而論,兩班之中心量數雖同,而甲班之參差情形頗小,乙班之參差情形較大。距離量數卽表示此種參差情形之數量,通常有四:(一)全距離,(二)二十五分差,(三)平均差,(四)標準差。而此四種之中,以第四種爲最有用。在教育的事實中單位不易求得,故有提議以T爲單位,所謂T卽等於一個標準差的十分之一。

統計學中所謂相關量數,乃表示兩種或以上事實之相伴差異。宇宙間事物彼此雜陳,雖不一定互爲因果,但是常有並行變異之傾向。例如長於英文者或亦長於算術,未必有因果的關係之存在,惟有一種正相關之傾向。相關之種類有三:(一)正相關,(二)負相關,(三)不相關。正相關卽一種量數由小而大,而他種量數亦隨之由小而大。負相關則他種量數卻反由大而小。不相關則他種量數或小或大,毫無一定的趨勢。相關之情形有二:(一)直線性相關,(二)非直線性相關。直線性相關卽在相

關分佈圖中，各點雖星羅似地分佈，卻密集於一條直線上；易言之，此條直線雖不能完全通過各點，但根據之以估計，錯誤最小。非直線性相關則各點形成一曲線。表示直線相關之方法很多，以皮而生的積差相關法爲最完善。以上所說的僅及兩種變量，故又有分析相關法以求三個或以上變量之互施影響的情形，有多數相關法以求一個變量與數個變量之相關情形。以上各種，皆教育統計學中之最重要的內容。

惟以上量數一經求得後，是否可靠尙是問題。測量教育的事實時，常發生抽樣的錯誤。我們知道凡求一種事實之表徵和兩種以上的事實之相關時，全體人數常常太大，不便於統計，故只得抽一部分以代表全部。在統計學上這種方法叫做抽樣或取樣。惟一部分未必等於全體，因而發生抽樣的差誤。差誤有二種，(一)常性，(二)變性。統計學中表示抽樣之變性差誤的量數有二，(一)機誤與(二)標準差，故又名抽樣之信度量數。這些量數公式之應用，最基礎的假設是抽樣必須隨機。

總之，教育統計學爲教育科學化之一種工具，每個公式均有其假設。學者以統計的方法研究教育時，不但要明瞭公式之計算法，更須了解其假設，始能知道在何種情形之下纔可應用，錯用了統計方法，其流弊所及，有時更甚於不用。

第二章　事實之蒐集與分類

6. 材料之類別

教育的事實,來源甚多,大約可分爲初級材料與次級材料。所謂初級材料者,事實得自直接調查,測驗或估計。次級材料者,事實均爲他人所已整理;易言之,卽已行整理或刊佈之初級材料。

初級材料比較次級材料爲可靠,因爲次級材料旣經人重行刊佈,在抄印時難免錯誤與遺漏。再則初級材料又較爲有用,因爲各人蒐集次級材料所根據的初級材料之方法未必相同,統計時單位或則有異等。但是初級材料之搜集非易,常費巨資並極耗精力,故決定用何種材料以爲研究之根據,乃在研究者之善於選擇。

7. 抽樣 (sampling)

無論用任何方法以搜集材料,常發生抽樣問題。所謂抽樣者,意指以一個樣本或全部分材料中之一部分爲全體之代表,就其中得一結論。譬如我們欲求一個測驗之常模,勢不能把各級兒童一一考試之,其理甚明。因此我們必須根據平均數於能代表的樣本之上。假使這個樣本之人數頗大,而又是適當地選擇來的,其結果不但能相近於全體的結果,並且可使我人根據之以估計眞正的價值,約在什麼距離之內(詳細討論見抽樣之信度章)。抽樣所根據的原則稱爲大數之統計的恆性,卽在衆多數中隨機地取來若干適當的數,大約具有全體之特徵。

關於這種原則,胡德(Ben. Wood)曾做過一試驗,茲舉以爲例。胡

德在 6468 張按姓氏排列的卡片中,(每紙均載有各種問題如保護人之關係,家中兒童數等)選出每第四張,以觀察樣本是否可代表全體,其結果頗符合,如下表。

表一 隨機抽樣之百分比與全體之百分比的比較

項目	百分比	
	四分之一	全體
1 保護人		
父親	83.4	82.4
母親	13.3	13.9
伯叔	0.6	0.6
姑母	0.4	0.2
繼父	0.7	0.9
繼母	0.2	0.2
2 家中兒童數		
一	6.0	6.3
二	11.3	11.7
三	14.8	13.9
四	13.6	14.2
五	14.3	14.5
六	11.9	12.4
七	9.8	10.3

惟取一部分以推測全體之現象有一原則務要牢記,即是抽樣必須隨機的。這個原則乃根據於數學上機率之定理。故要得到一個隨機取來的樣本,必須使全體中之各個人或各項有相同的(或幾乎相同的)機會被包括於此樣本之內,或則每個人在全體中成功的機率等於(或幾乎等

於)在樣本中成功的機率,若以

F_k……代表在全體中k組之次數

N……代表全體次數之總和

P_k……代表在全體中k組之成功機率

f_k……代表在樣本中k組之次數

n……代表樣本次數之總和

p_k……代表在樣本中k組之成功機率

則 $P_k=\frac{F_k}{N}$; $p_k=\frac{f_k}{n}$

根據上面的原則,

$$P_k=\frac{F_k}{N}=p_k=\frac{f_k}{n}$$

要達到這個目的,下列方法或可作參考:

(一)把材料完全混雜,而後取一部分。例如我們要知道一個兒童在五千個單字之中,究竟認識多少,勢不能一一考試之。可將每個單字寫在一張卡片上,完全混雜好,而後任意取出五十張紙試驗之。每個字代表一百。認識三十五字者,則識字之數約有三千五百個。

(二)把材料按照相當秩序排好,而後在一定的距離之中選出各項。以上例言,我們亦可以把五千個字按照字典上之先後排列,而後選出每第一百個字(如第一百個字,第二百字等)依次試驗兒童。

(三)有時全體包括許多種類,而各種類之人數又不相同,則隨機取來的樣本或非最好的樣本,因為有些種類或被遺漏。在此種情形之下,我們應當把樣本分為若干小樣本,而各小樣本之數與各種類之數成正

比例。例如我們要知道某校初中學生之平均認字數，而該校有初中一年級學生二百人，二年級學生一百人，三年級學生五十人。又我們欲在此三百五十人之中選出三十五人以爲代表。用第一與第二法固無不可，但最好在一年級生中用第一或第二法選出二十人，同樣地在二年級生中選出十人，在三年級生中選出五人。

此外尙有一個問題，卽是樣本之大小。在上面已經說過，要部分能具有全體之特徵必須在衆多數中任取若干適當的數。何者爲適當的數，將在抽樣之信度一章中討論之，大概樣本愈大，則結果之準確度愈高。

8. 測量之單位

在搜集材料之先，有時須先決定所用之單位。在決定單位之時，有三點須注意：

（一）絕對的測量是不可能的，一切計數只是近似數。我們不能知道南京市在民國二十三年二月十八日之眞正的全市小學生數，因爲學生數之統計只是一個約數，中途有退學者，亦有入學者。在統計學中所謂準確度，只是一個比較的名詞。

（二）準確度之標準是重要的。每個調查或測量在事先須自定其標準。不過精密與準確是兩件事，過度的精密有時是白費氣力的。重要的問題是相對的並非絕對的準確度。例如在測驗中，智商求到整數已足，小數大可不必計算，因爲兩次測量，智商之變動在五分以內者極爲平常。

（三）單位一經決定後，測量時最好比此單位精密一級；例如在事實歸類時，我們將以尺爲單位，則測量時最好以寸爲單位。

9. 統計數列

凡事實之各項有共同性質者謂之統計數列。但統計數列之性質不同，約有下列幾種：

（一）秩序的與無秩序的　凡事實有程度與大小之分，可按照一定的秩序排列者其性質是秩序的。例如智力之高低，分數之多寡等。反之，乃無秩序的；例如職業之種類，如工人農人商人等，並無一定的排列法。

（二）數量的與敍述的　以智力爲例。當我們說甲生之智商是 70 分，乙生 100 分，丙生 130 分，則是數量的。若我們說甲生有上等智力，乙生有中等智力，丙生有下等智力，則是敍述的。

（三）繼續的與間斷的　前者的測量單位可以分到很小，後者以整數爲單位，不能再分。高度是一種繼續的性質；一班中之人數是一種間斷的性質，因爲沒有五十個半學生或五十個又三分之一的學生。

根據以上三種性質，我們可以分統計數列爲量的與質的二種。量的統計其性質必是秩序的與數量的，但有繼續的與間斷的之分。質的統計其性質大部是間斷的與敍述的，但有秩序的與無秩序的之分。高度之分配是繼續的量的統計數列；班中人數是間斷的量的統計數列。上等工人，中等工人，下等工人是秩序的質的統計數列；工人，農人，學生，商人是無秩序的質的統計數列。教育統計學中所討論之方法，大部屬於量的統計數列。

10. 事實之歸類——次數分配(frequency distribution)

（一）次數分配表　統計學中之初級材料常是散漫的，非經整理後不能得其量的大意。例如我們以一測驗考試許多學生，張生得 90 分，

但 90 分之意義若何，任何人不能回答，以其有無限種可能之意義。若全部有二百人，一百人之分數在 90 以下，則張生之成績是中等；若有一百五十人之分數在 90 以上，則張生之成績不佳。故整理材料的第一步，必須將事實分類列表，而後纔能知道得 90 分者若干人，以上者若干人，以下者若干人，此表就是次數分配表。

編製次數分配表之步驟有三：(a)求組距，(b)劃記，(c)寫下次數。求組距之時，必須先求得全距或兩極差(range)。其法甚簡，即最高數減去最低數。譬如我們考試一百四十個學生，其分數如表二。在表二之中，最高數爲 149，最低數爲 42，全距則是 107。

表二　某校某年級生智力測驗分數

106	89	75	123	94	95	102	129	108	81
102	108	139	86	134	97	69	60	78	108
85	103	110	60	90	121	82	84	102	84
117	63	87	100	96	51	98	91	101	68
72	92	125	117	89	69	111	107	99	116
125	85	79	42	88	82	101	116	71	72
95	112	100	95	77	123	67	84	91	90
91	95	94	97	116	101	81	79	73	110
121	75	69	83	80	73	52	92	100	74
86	86	104	98	62	86	115	56	122	106
107	88	77	131	82	80	76	90	110	118
128	57	109	65	93	99	100	137	119	113
120	115	123	114	113	149	57	111	65	74
93	90	62	103	95	85	105	106	96	78
47	143	70	144						

全距求得之後，則將其分爲若干組(class)，以便統計。組數不可太多，亦不可太少。太多則計算較繁，太少恐生錯誤。組數多少本無一定，以作者之意，不可少於 10，不可大於 25，通常以 15 至 20，爲最合宜。

組數既定，則求組距(class interval)之大小。所謂組距，卽組之距離。以上例論，全距離爲 107，則組距不可大於 10，亦不可小於 5。若比 10 大，則組數太少了，若比 5 小，則組數太多了。故決定組距雖無一定公式可循，但亦可以下面公式定其大略。

$$組距=\frac{全距+1}{組數}$$

全距加 1，使包括全體而有餘。以上例論，若組數爲 10，則

$$組距=\frac{107+1}{10}=\frac{108}{10}=10.8$$

若組數爲 25，則

$$組距=\frac{108}{25}=4.3$$

所以我們可以說表一若分組統計時，組距之大小，其範圍應自 5 至 10。

決定組距時尙有一個原則有時亦須考慮的，卽大部分之量數須集中於組距之中點(mid-point)。例如學校考試分數及行政人員之薪俸等事實，大部集中於 5 與 10。組距中點乃代表一組之數量(此理俟討論中心量數時再詳細陳述)，應有最大的次數。在表一中，此種現象並不發生，故不必考慮。

組距既定，則須求組限(class limit)。組限卽組距之限度，卽由何數起至何數止。組限之寫法，在統計學中極不一致，艾偉氏在高級統計學中曾有詳細的討論，而主張用表三中之第八種寫法。朱君毅氏則以爲

此方法多費空間。作者以爲組限寫法雖然重要，根本的問題還在明瞭數之意義。譬如 11 有三種可能的解釋：(一)爲間斷的數列之數的意義，如此則 11 就是 11，例如十一個人。(二) 11 是 11 或恰好比 11 多一點而至不及 12 者，以數字表之是 11.00001 至 11.99999，此中之 0 與 9 均是無窮的。(三) 11 是代表 10.5 或比 10.5 恰好多一點而至不及 11.5 者，以數字表之是 10.50001 至 11.49999，此中之 0 與 9 亦是無窮的。

表三　組距之各種寫法（仿艾偉高級統計學頁15，略簡）

第一種	二	三	四	五	六	七	八	九
0—較小於10	0—10以下	0—10	0— 9.99	0—9.99	0—9	5	0	0—
10—較小於20	10—20以下	10—20	10—19.99	10—	10—19	15	10	10—
20—較小於30	20—30以下	20—30	20—29.99	20—	20—29	25	20	20—
30—較小於40	30—40以下	30—40	30—39.99	30—	30—39	35	30	30—
40—較小於50	40—50以下	40—50	40—49.99	40—	40—49	45	40	40—

明瞭了數之意義後，則任何一種寫法均可適用，本書中所採之寫法，並不一致，以資練習。

全距既分爲若干組，則須將各量數分別歸入相當組內。劃記(tally)是劃線記數，助統計者整理材料之一種手續，以便較對錯誤。劃記之方法，最好以五數爲一個段落，故有以「正」字爲符號者，亦有以「卌」爲符號者。劃記畢，則將線數寫在次數項下，每一數卽是組之次數(class frequency)，簡稱次數，通常以 f 代表之。次數之總和就是總數，通常以 N 代表之，亦有以 Σf 代表之(Σ 爲希臘大寫字母之一，讀如 sigma)，Σf 之意，並非 Σ 乘 f，乃是各個 f 如 $f_1, f_2, f_3, \cdots\cdots f_n$ 等之總和。

以上是作次數表大略的步驟，下面三個表是根據於表二之材料，一以 5 爲組距，一以 7 爲組距，一以 10 爲組距，如下。

表四　某校某年級學生智力測驗分數（組距＝5）

組　距	劃　記	次　數
40——45	一	1
45——50	一	1
50——55	丅	2
55——60	下	3
60——65	正 一	6
65——70	正 一	6
70——75	正 下	8
75——80	正 𠦃	9
80——85	正 正 一	11
85——90	正 正 丅	12
90——95	正 正 下	13
95——100	正 正 下	13
100——105	正 正 下	13
105——110	正 正	10
110——115	正 𠦃	9
115——120	正 𠦃	9
120——125	正 丅	7
125——130	𠦃	4
130——135	丅	2
135——140	丅	2
140——145	丅	2
145——150	一	1
	總　數	144

表五　某校某年級學生智力測驗分數（組距＝7）

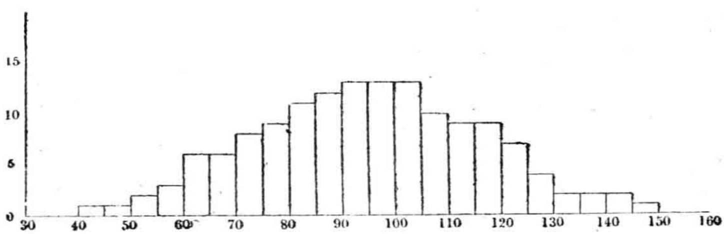
<table>
<tr><th>組距</th><th>劃記</th><th>次數</th></tr>
<tr><td>42—49</td><td>||</td><td>2</td></tr>
<tr><td>49—56</td><td>||</td><td>2</td></tr>
<tr><td>56—63</td><td>卌 ||</td><td>7</td></tr>
<tr><td>63—70</td><td>卌 |||</td><td>8</td></tr>
<tr><td>70—77</td><td>卌 卌 |</td><td>11</td></tr>
<tr><td>77—84</td><td>卌 卌 ||||</td><td>14</td></tr>
<tr><td>84—91</td><td>卌 卌 卌 ||||</td><td>19</td></tr>
<tr><td>91—98</td><td>卌 卌 卌 |||</td><td>18</td></tr>
<tr><td>98—105</td><td>卌 卌 卌 ||</td><td>17</td></tr>
<tr><td>105—112</td><td>卌 卌 卌</td><td>15</td></tr>
<tr><td>112—119</td><td>卌 卌 ||</td><td>12</td></tr>
<tr><td>119—126</td><td>卌 卌</td><td>10</td></tr>
<tr><td>126—133</td><td>|||</td><td>3</td></tr>
<tr><td>133—140</td><td>|||</td><td>3</td></tr>
<tr><td>140—147</td><td>||</td><td>2</td></tr>
<tr><td>147—154</td><td>|</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>總　　數</td><td>144</td></tr>
</table>

注意：上表中 42 爲第一組之起點；49 非第一組之終點，乃第二組之起點。154 非末組之終點，末組之終點爲凡數大於 153 而未至 154。其距離自 153—153.9999。故 49 歸於第二組，56 歸於第三組，以此類推。

表六　某校某年級學生智力測驗分數（組距＝10）

組　　距	劃　　記	次　數
40——較小於50	丅	2
50——較小於60	正	5
60——較小於70	正 正 丅	12
70——較小於80	正 正 正 丅	17
80——較小於90	正 正 正 正 下	23
90——較小於100	正 正 正 正 正 一	26
100——較小於110	正 正 正 正 下	23
110——較小於120	正 正 正 下	18
120——較小於130	正 正 一	11
130——較小於140	止	4
140——較小於150	下	3
	總　數	144

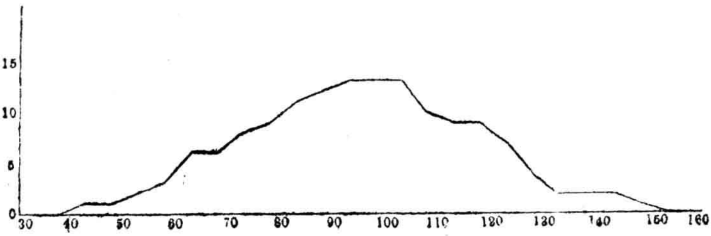
（二）次數分配圖　次數分配圖者是將次數分配表之事實以圖形之。通常分為二種，多邊圖或次數圖(frequency polygon)與直方圖(column diagram or histogram)。



圖一　直　方　圖

作直方圖之步驟有三:(1)作一橫坐標代表分數或數量,(2)作一縱坐標代表次數,(3)在每一組距上面畫出一縱線,高同該組之次數,而後再畫一橫線,長與該組線同。圖一爲表四之材料以直方圖形之。

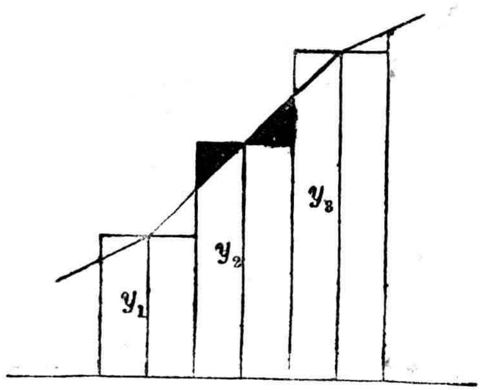
多邊圖之作法步驟,(1)(2)與直方圖相同,(3)在每一組距中點上作一小點,其高度卽爲該組之次數,而後將各點用線連之。圖二爲表四之材料,以多邊圖形之。



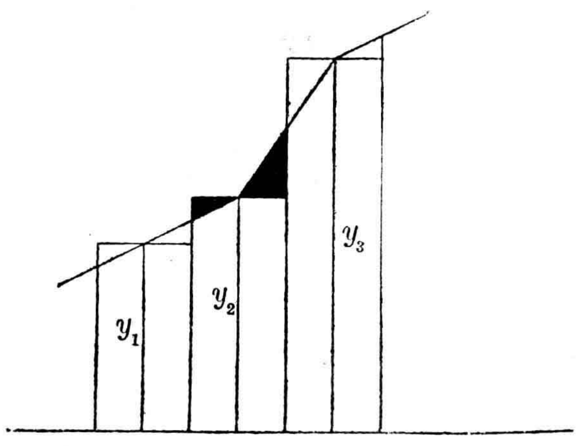
圖二 多邊圖

比較多邊圖與直方圖時,讀者須注意在兩個圖中,均以相當面積代表相當次數。以全部面積論,兩個圖是一樣的,但是多邊圖中每個組距之面積,不若直方圖之正確;並且每個組距中之每部分的次數亦不相同,如直方圖所表示的。假設以 y_1 代表第一組距中點之高度,y_2 代表第二組距中點之高度,y_3 代表第三組距中點之高度,則第二組距之面積只在一種情形下是正確的,就是 y_1,y_2,y_3 三條縱線之最高點均在一條直線上(如圖三),卽 $y_2=\frac{1}{2}(y_1+y_3)$ 時,圖三中之兩個黑色的三角形是相等了。假使 y_2 比此價值小,則第二組距之面積太大,如圖四。反之 y_2 比此價值大,則第二組距面積太小了,如圖五。因此有許多統計學者主

張直方圖爲次數分配之較好的代表。賀麟閣即主張此種說法的，他以爲若只要一種草率的圖形以表示幾個分配之重疊狀況，則可用多邊圖；至於其他情形，最好用直方圖。



圖三　直方圖與多邊圖之比較（一）



圖四　直方圖與多邊圖之比較（二）

（三）次數分配之修勻法　統計的事實常因觀察之錯誤，材料之不足，以致結果不合於眞正的情形，故統計方法中有修勻法。惟讀者須注

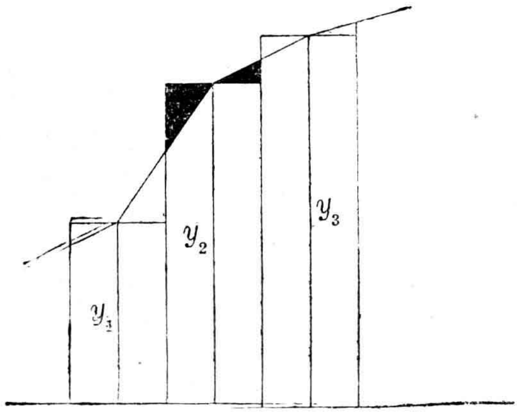


圖 五　直方圖與多邊圖之比較（三）

意，這種方法充其量亦不過求較精確曲線之近似形，而非理想的曲線。

修勻方法有多種，此處所敍述的只是一種普通的，就是平均修勻法。這種方法，假設任何量數之應有次數雖不得而知，但與其鄰近的量數之次數發生最密切的關係，故最好將其次數與鄰近量數之次數合而求其均數。例如表六中 50—60 組中次數為 5，修勻法即將該數與上一組(40—50)次數 2 及下一組 (60—70) 次數 12 合計，而求其均數，以數表之如下，

$$\frac{2+5+12}{3}=6\frac{1}{3}$$

若以 A,B,C …… Z 等代表各組次數而以 A′,B′,C′ …… Z′ 等代表修勻後各組次數，則修勻法，可以分式表之，

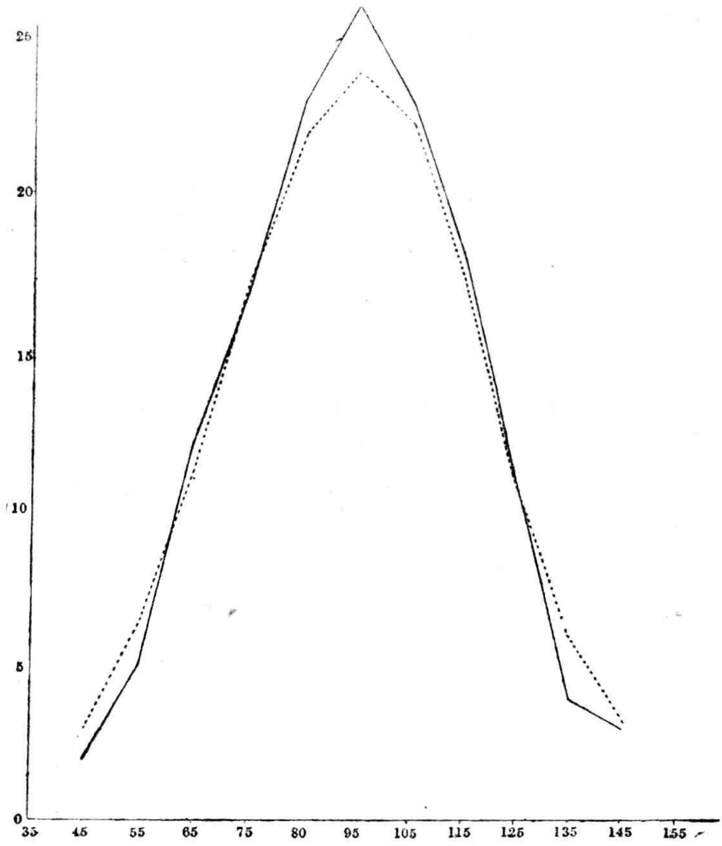
$$A'=\frac{A+A+B}{3} \qquad B'=\frac{A+B+C}{3}$$

$$C'=\frac{B+C+D}{3} \qquad Z'=\frac{Y+Z+Z}{3}$$

凡數經一次修勻後,可依法為二次修勻,三次修勻等。表七為表六之修勻後情形,圖六為表七事實中,原有次數與一次修勻結果之比較,以圖形之。

表七　表六之修勻

組距	原有次數	一次修勻	二次修勻
40—50	2	$\frac{2+2+5}{3}=3$	$(3+3+6\frac{1}{3})/3=4\frac{1}{9}$
50—60	5	$\frac{2+5+12}{3}=6\frac{1}{3}$	$(3+6\frac{1}{3}+11\frac{1}{3})/3=6\frac{8}{9}$
60—70	12	$\frac{5+12+17}{3}=11\frac{1}{3}$	$(6\frac{1}{3}+11\frac{1}{3}+17\frac{1}{3})/3=11\frac{6}{9}$
70—80	17	$\frac{12+17+23}{3}=17\frac{1}{3}$	$(11\frac{1}{3}+17\frac{1}{3}+22)/3=16\frac{8}{9}$
80—90	23	$\frac{17+23+26}{3}=22$	$(17\frac{1}{3}+22+24)/3=21\frac{1}{9}$
90—100	26	$\frac{23+26+23}{3}=24$	$(22+24+22\frac{1}{3})/3=22\frac{7}{9}$
100—110	23	$\frac{26+23+18}{3}=22\frac{1}{3}$	$(24+22\frac{1}{3}+17\frac{1}{3})/3=21\frac{2}{9}$
110—120	18	$\frac{23+18+11}{3}=17\frac{1}{3}$	$(22\frac{1}{3}+17\frac{1}{3}+11)/3=16\frac{8}{9}$
120—130	11	$\frac{18+11+4}{3}=11$	$(17\frac{1}{3}+11+6)/3=11\frac{4}{9}$
130—140	4	$\frac{11+4+3}{3}=6$	$(11+6+3\frac{1}{3})/3=6\frac{7}{9}$
140—150	3	$\frac{4+3+3}{3}=3\frac{1}{3}$	$(6+3\frac{1}{3}+3\frac{1}{3})/3=4\frac{2}{9}$
總計	144	144	144

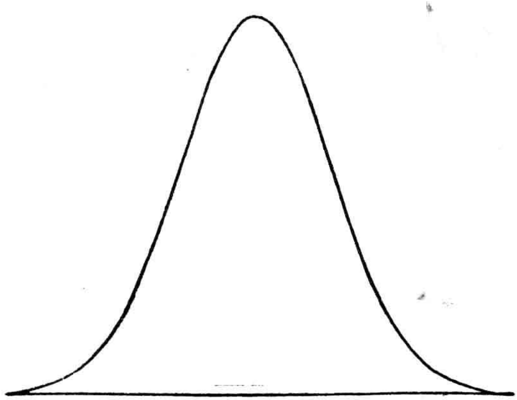


圖六 多邊形圖之修勻

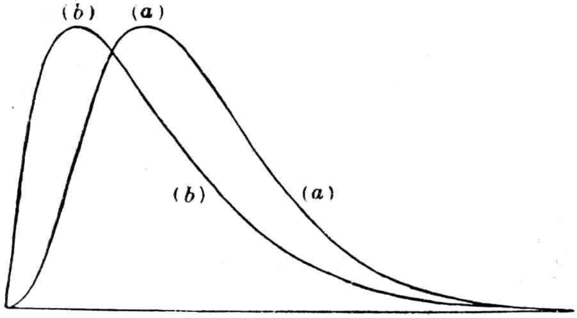
(四)曲線之形狀

若組距越小,而同時觀察次數又比例地增加,則多邊圖與直方圖必愈趨近於一平滑的曲線,這種曲線叫做次數曲線,其形狀之種類無窮,最簡單的有四:(1)對稱的分配,(2)略偏的分配,(3)極偏的分

配或J字形分配，(4)U字形分配。教育上事實，除第四種不常見外，其餘三種都有，而尤以第二種爲最多。下列四圖，乃此四種分配之理想的曲線。



圖七　理想的對稱分配圖



圖八　理想的略偏的分配圖

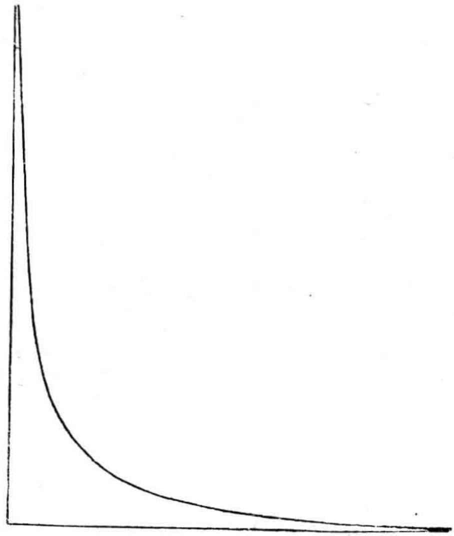


圖 九　理想的極偏的分配圖

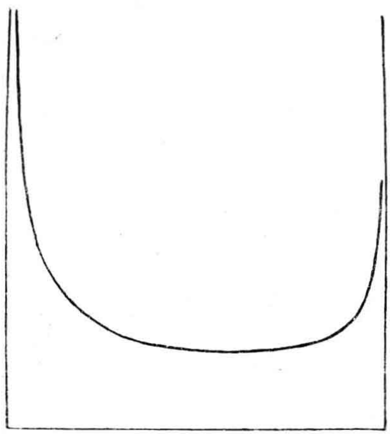


圖 十　理想的 U 字形圖

第三章　百分位數與四分位數

11. 點量數之意義(point measure)

次數分配圖之橫坐標雖爲一條直條,實含有若干點子,每點代表一種分數或量數(score),通常以X代表之。這些分數,意義毫不明瞭,有無限可能之解釋。茲設例以說明之。

(一)一個學生在某測驗中得 75 分,其成績優劣,不能斷定。

(二)一個學生之某學科第一次月考分數爲 85,但是教師再行考試一次,加入許多極難回答的題目,則不復得 85。

總之,分數是相對的,並無固定的參照點與單位,故無固定的意義;必須化爲一種數量,有相對的意義,纔可以比較。這種數量叫做點量數。點量數有三種:(1)百分位數,(2)二十五分位數,(3)中心量數,茲依次說明之。

12. 百分位數(percentile)

(一)求百分位數之方法　百分位數是一個變量 (variable) 之價值,在此價值以下,有全體次數之多少百分比。通常以 P_p 代表之。小寫的 p 是比 P_p 小的量數之百分比。若 $P_p=75$,而 $p=20$ (通常寫法,$P_{20}=75$),卽表示比 75 分小的量數,其次數佔全體百分之二十。

求百分位數有兩個普通的公式,如下:

$$P_p = \text{l.l.} + \left(\frac{\frac{pN}{100} - f_{up.}}{f_p}\right) i \qquad \text{公式一(a)}$$

$$P_p = \text{u.l.} - \left[\frac{\left(\frac{100-p}{100}\right)N - f_{do.}}{f_p}\right] i \qquad \text{公式一(b)}$$

P_p =所要求的百分位數。

p =比 P_p 小的量數之百分比。

N =總數。

l.l. =含有 P_p 之組的下組限(lower limit)數。

u.l. =含有 P_p 之組的上組限(upper limit)數。

f_{up} =含有 P_p 之組以上各組之次數和或遞加次數(accumulated frequency)。

f_{do} =含有 P_p 之組以下各組之次數和。

f_p =含有 P_p 之組的次數。

i =含有 P_p 之組的組距之大小。

茲根據表六之材料,求 P_1, P_{20}, P_{70} 以爲例。表八說明求百分位數之步驟。

表八　百分位數之求法示例

組距	次數	遞加次數自上至下	遞加次數自下至上	
40——50	2	2	144	$P_1=40+\left[\dfrac{\dfrac{1\times144}{100}-0}{2}\right]10=47.2$
50——60	5	7	142	
60——70	12	19	137	$P_1=50-\left[\dfrac{\left(\dfrac{100-1}{100}\right)144-142}{2}\right]10=47.2$
70——80	17	36	125	
80——90	23	59	108	$P_{20}=70+\left[\dfrac{\dfrac{20\times144}{100}-19}{17}\right]10=75.76$
90——100	26	85	85	
100——110	23	108	59	$P_{20}=80-\left[\dfrac{\left(\dfrac{100-20}{100}\right)144-108}{17}\right]10=75.76$
110——120	18	126	36	
120——130	11	137	18	$P_{70}=100+\left[\dfrac{\dfrac{70\times144}{100}-85}{23}\right]10=106.87$
130——140	4	141	7	
140——150	3	144	3	$P_{70}=110-\left[\dfrac{\left(\dfrac{100-70}{100}\right)144-36}{23}\right]10=106.87$
$N=144$.				

以公式一(a)求百分位數,其步驟如下:

(1)決定$\dfrac{pN}{100}$,例如 $p=20$,則 $\dfrac{pN}{100}=\dfrac{20\times144}{100}=28.8$ (以下各步,均以此例說明之)。

(2)在表中遞加次數自上至下項下求得含有 28.8 之數,此數爲 36。其組限爲 70—80,故 $l.\ l.=70$, $f_p=17$, $i=10$, $f_{up}=19$。

(3)把各數依照公式一(a)塡就,其答數 75.76 卽爲第二十百分位之量數。易言之,在一百四十四人中,有百分之二十(或 28.8 個)人的分數在 75.76 分以下。

以公式一(b)求百分位數,先決定 $\left(\frac{100-p}{100}\right)$ N,而後在第四項下求得含有 $\left(\frac{100-p}{100}\right)$ N 之數。如 p=20,$\left(\frac{100-p}{100}\right)N=\left(\frac{100-80}{100}\right)$ 144=115.2。含有 115.2 之數爲 125,組限爲 70—80,故 u. l.=80,$f_p=17$,$i=10$,$f_{do}=108$。把各數照公式一(b)塡就,其答數亦爲 75.76。

學者須注意用(a),(b)兩公式所得的結果相同,此爲一種證驗的方法。

(二)求百分位或百分等第(percentile rank)之方法 上面所述的方法,是先決定了求某個百分位,而後求此百分位之量數。以下所述的方法,正是相反的,爲求某量數之百分位。所以在求百分位數時,知數爲分數,不知數爲百分位。求各分數之百分位的公式如下:

$$R_x=\frac{100}{N}\left(f_{up.}+\frac{X-l.l.}{i}f_x\right) \qquad \text{公式二}$$

X =某個分數之價值。

R_x =某個分數之百分位。

l. l. =含有X之組的下組限數。

f_{up} =含有X之組以上各組之次數。

f_x =含有X之組之次數。

玆根據表八之材料,反求 47.2,75.76,106.87 三個分數之百分位以爲例。

$$R_{47.2}=\frac{100}{144}\left[0+\frac{47.2-40}{10}2\right]=1$$

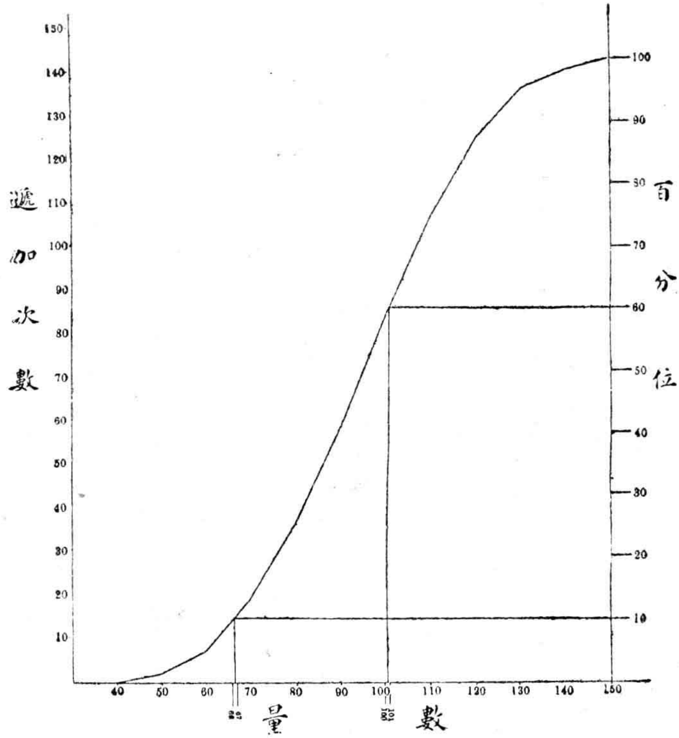
$$R_{75.76}=\frac{100}{144}\left[19+\frac{75.76-70}{10}17\right]=19.9 \text{ 或 } 20$$

$$R_{106.87}=\frac{100}{144}\left[85+\frac{106.87-100}{10}23\right]=70$$

根據求百分位之公式，則各個量數或分配中之各點均有一定的相對的意義了。詳言之，就是凡得某個分數者，在全分配中佔何種地位，有多少百分比的人之分數不及之。

(三)遞加次數曲線與百分曲線　依據公式以化某量數爲相對的百分位或求某百分位之相對的分數，其結果當然非常準確，可以算到任何小數點。但是有時所求之數很多，而結果又不需要十分準確，則可以在圖中求之。圖有兩種，一爲遞加次數曲線，二爲百分曲線。這兩種圖功用是相等的，所不同者在遞加次數曲線中，橫坐標代表量數，縱坐標代表遞加次數，如圖十一。在百分曲線中，橫坐標代表百分位，縱坐標代表量數，如圖十二。

圖十一是根據表八之材料而繪成的。右方之百分數位乃把全部遞加次數分爲一百個相等部分。如此我們若要求任何百分位(如圖中之第 60 與第 10 分位) 之相對的量數價值，只要從此點上劃出一橫線並行於橫坐標，以交切於曲線中之一點；由此點向下劃一直線垂直於橫坐標，以交切於橫坐標上一點，此點之價值就是此分位之相對的量數。例如第 10 分位數，在橫坐標上乃在 66 與 67 之間，第 60 分位數則在 100 與 101 之間；若以公式求之，$P_{10}=66.17$，　$P_{60}=100.61$，極符合了。



圖十一　遞加次數曲線

圖十二也是根據表八之材料而繪成的。惟在繪曲線之先,在先求各百分位之量數,再在圖中以線連這些點子(如圖十二)。表八中之各分位的量數如下:

$P_5 = 60.17$	$P_{40} = 89.39$	$P_{80} = 114.00$
$P_{10} = 66.17$	$P_{50} = 95.00$	$P_{90} = 123.27$
$P_{20} = 75.76$	$P_{60} = 100.61$	$P_{95} = 129.82$
$P_{30} = 83.13$	$P_{70} = 106.87$	

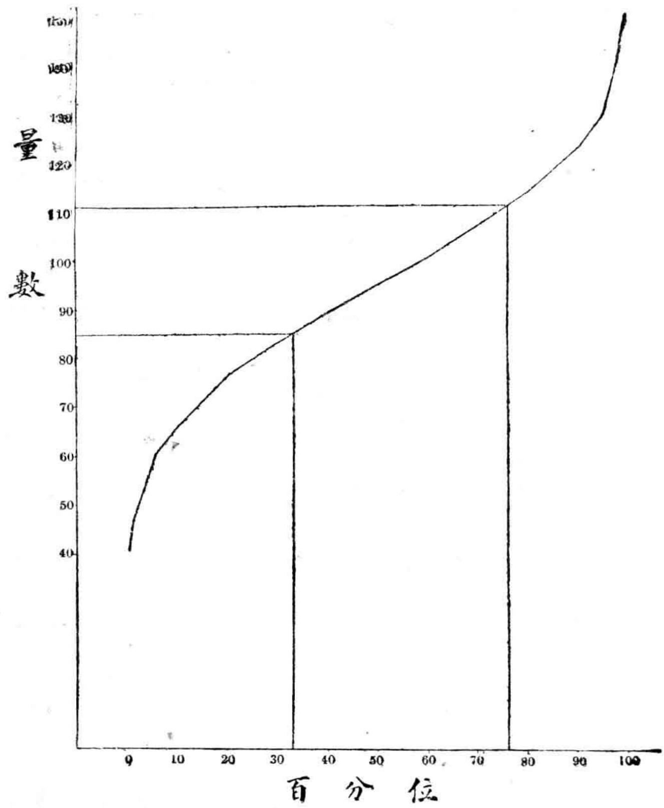
我們亦可以把表八中遞加次數化爲百分比如表九，再在圖中以線連這些點子如圖十三。

表九 表示表八中遞加次數之百分比

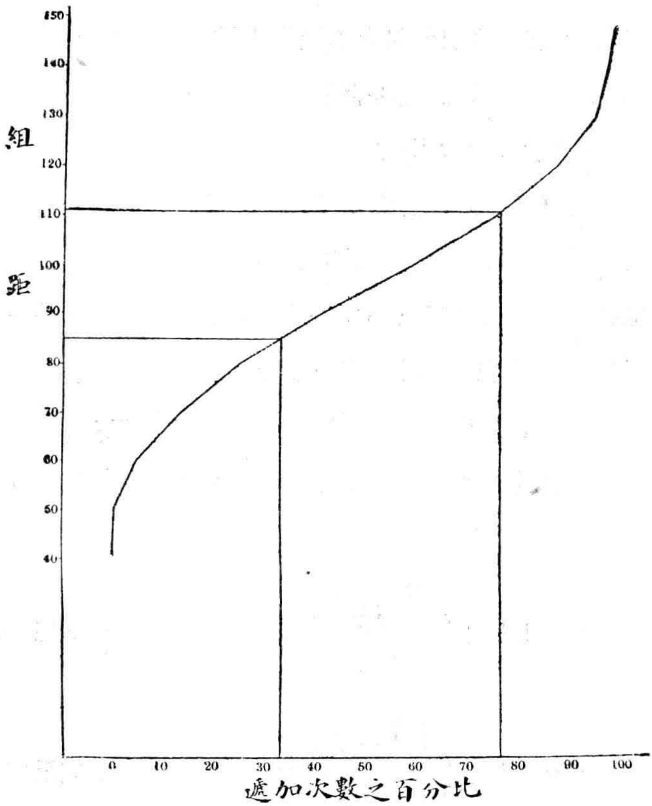
組距	遞加次數 (f_c)	其百分比 (f_c/N)
40	0	0.00
50	2	1.39
60	7	4.86
70	19	13.19
80	36	25.00
90	59	40.97
100	85	59.03
110	108	75.00
120	126	87.50
130	137	95.14
140	141	97.92
150	144	100.00

這兩圖形是十分相似。若我們在兩個圖中求得 85 分數之百分位均得 33，若以下式求 R_{85}，則等於 32.99，極符合了。再在兩圖中求

得 111 分者之百分位,均大於 76,而小於 77,若以公式求 R_{111},則是 76.25,亦頗符合。



圖十二 百分曲線(一)



圖十三　　百 分 曲 線（二）

百分曲線，一名 ogive，在整理測驗結果時，常有用之。惟百分位雖較原來量數爲有意義，但仍有許多缺點。最大者爲各百分位間之距離並不一致。第 99 分位與第 98 分位之距離常數倍於第 49 分位與第 48 分位之距離。因爲測驗結果之分配，大致中心量數之次數甚多，而兩極

端量數之次數甚少。第二,各百分位數之穩定性並不一致,兩極端之百分位數容易變動。所以在統計學中不能以第零分位數爲參照點,因其易變;亦不可以百分位爲單位,因各百分位間距離不一致。

13. 四分位數 (quartiles)

若我們把全部次數分配圖之面積分爲四個相等的部分,而以縱線間離之,則每條線必與分配圖橫坐標上之一點相交切。這些點子之價値就是四分位數。四分位數有上,中,下三個,中四分位數就是第 50 百分位數,亦卽中數,將在下章中討論之。上四分位數 (upper quartile) 就是第 75 分數,通常以 q_3 代表之。下四分位數(lower quartile),就是第 25 分位數,通常以 q_1 代表之。求 q_3 與 q_1 之公式,乃依照求百分位數之公式而略簡如下:

$$q_1 = \text{l. l.} + \left(\frac{\frac{N}{4} - f_{up.}}{f_{q_1}}\right)i \qquad \text{公式三(a)}$$

$$q_1 = \text{u. l.} - \left(\frac{\frac{3N}{4} - f_{do.}}{f_{q_1}}\right)i \qquad \text{公式三(b)}$$

$$q_3 = \text{l. l.} + \left(\frac{\frac{3N}{4} - f_{up.}}{f_{q_3}}\right)i \qquad \text{公式四(a)}$$

$$q_3 = \text{u. l.} - \left(\frac{\frac{N}{4} - f_{do.}}{f_{q_3}}\right)i \qquad \text{公式四(b)}$$

茲依據表九之材料,以求 q_1 與 q_3 以爲例:

表十 四分位數之求法示例(材料根據表五)

組距	次數	遞加次數自上而下	遞加次數自下而上
42		0	144
	2		
49		2	142
	2		
56		4	140
	7		
63		11	133
	8		
70		19	125
	11		
77		30	114
	14		
84		44	100
	19		
91		63	81
	18		
98		81	63
	17		
105		98	46
	15		
112		113	31
	12		
119		125	19
	10		
126		135	9
	3		
133		138	6
	3		
140		141	3
	2		
147		143	1
	1		
154		144	0

$$\frac{N}{4}=\frac{144}{4}=36$$

$$\frac{3}{4}N=\frac{3}{4}144=108$$

$$i=7$$

$$q_1=77+\frac{36-30}{14}7=80$$

$$q_1=84-\frac{108-100}{14}7=80$$

$$q_3=105+\frac{108-98}{15}7=109.67$$

$$q_3=112-\frac{36-31}{15}7=109.67$$

第四章 中位數均數與衆數

14. 中心量數(measures of central tendency)之意義

在上章中,我們已經說明,在兩個次數分配圖之橫坐標上各任取一數,以爲比較,則毫無意義。例如某班中一個學生在國文測驗得 70 分,在算學測驗得 105 分,究竟優劣若何,不能斷定。故必須化此種分數爲一種有相對的意義的數量。若 70 分之百分位爲 60(卽 $R_{70}=60$),105 分之百分位爲 55($R_{105}=55$),則國文之成績略優,意義極爲明瞭。但是有時我們須比較兩個分配之全部情形,則那一個數量最能代表一個分配,實爲一個重要的問題。我們在上章中又說過一個分配中之各個分數,其相對的意義不同,穩定性又極不一致,並非個個分數均能爲代表。所以在統計學中,最重要的問題是要找到一種數量能代表一個分配之全部情形。在此,我們必須明白每個次數分配均有其特徵,而每種特徵最好有一種數量的定義,因此,比較兩個分配之特徵時,可以有數量的結果。一個分配之特徵有三:(一)爲分配之形式,(二)爲分配之中心,(三)爲分配之差度。關於(一)(三)兩點,將在以後討論之,茲先述分配之中心。

在討論中心量數之先,我們必須明瞭統計學中之各種數量或係數有時雖能指示一種確定的法則,但常常僅表示一種傾向。在一個分配上,量數雖有大小之不同,但大家都有得某種分數之傾向;此種分數乃是一個分配中之最穩定的代表。以商業爲例,某戲院每日均有收入,多寡不

同，若我們欲知道此戲院之盈餘情形，决不可根據於一日之觀察，因此日或適爲星期日，上下客滿。我們必須根據於全部之觀察，而後求其平均數。此平均數之意義，並非表示每日收入此數，乃是每日均有得此收入之傾向。以此數爲根據，推測此戲院之每日收入，則錯誤最少。所以任何一日之收入，均不能代表此戲院之收入，以爲計算盈餘之張本，而平均數則能代表之。平均數所以能代表全部者，(一)以其較任何一數爲穩定，(二)以其根據全部觀察而能說明全部之傾向。平均數一名中心量數，易言之，卽表示中心傾向之量數。

以上乃就一個分配而言。若比較兩個分配時，中心量數之功用，爲說明各個分配之地位。例如我們以一測驗考試三四兩年級學生。三年級之分配與四年級之分配，當然不同。雖然，以個別學生論，三年級學生有優於四年級者；惟以全部之地位論，則四年級優於三年級。此種表示全部地位上差別之量數，就是中心量數。

有些統計學者說明中心量數時，以爲任何事實集於一組，其分配每集中於一處。沈有乾先生說「集中」兩字不妥，因爲其弊病在「集」字，故創中心量數一名詞，作者深表同意。譬如在U字形之分配中，中心量數之次數或爲0，何集之有？再則，爲預防學者誤解起見，必須明白中心量數並不是分配圖橫坐標上之中間量數。例如在極不對稱的次數分配中，中心量數或在横坐標上之一端。總之，中心量數並不一定是得次數最多的量數，也不是中間的量數，乃表示中心傾向之量數，表示分配的地位之量數。惟在極對稱的分配中，其地位適在横坐標之中間，而得次數也最多。

15. 中心量數之功用

中心量數既是一個最穩定的數量,表示一個分配之傾向及其地位,故其功用有四:

(一)爲全體分配之一簡明的圖畫　假使一個人把全班學生之高度,一一報給我們聽,一時實難得到一種中心的印象。但是他僅把平均高度說給我們聽,則其意義固定,可以了解。

(二)以此種簡單的圖畫來比較不同的團體　百分位數能表示兩個人或兩個分數之相對的地位,中心量數則可以表示兩個團體之地位。

(三)可用樣本事實以得到整個團體之情形　例如我們欲求全中國人之代表的高度,實在沒有把每個中國人都測量過之可能與必要。若我們要得到一個隨機取來的樣本,人數或則只有數千,其中心量數就可以很近於全體之代表的高度。關於此點,詳見抽樣之信度章。

(四)對於不同的團體間之關係,有一種數的概念　我們常說甲班的學生比乙班的學生程度高,但是爲得到程度之任何確定的比例,必須用中心量數。此種方法,在統計學上叫做比例法,其應用與限度詳見比較量數節。

(五)爲全分配中之最好的參照點　第四個功用之意義是評判分配中某一個量數之值而參照中心量數之價值;但是這個功用之限制很大。最大的功用爲評判分配中全體量數之差數之參照點。關於此點,亦詳見比較量數節。

16. 中心量數之條件

中心量數之功用雖大,但是根本的問題還須明瞭其條件。所謂條件

係指在某種情形下，求得的中心量數纔有意義，反之，並無意義。所以讀者必須明瞭，並非任何分配都可以求中心量數的。

(一)必須先決定全體或樣本的範圍之確定的限度　例如我們欲求南京市人之平均收入，但是南京市與江寧縣劃界未清，南京市之界限未定，則中心量數是無意義的。

(二)要求平均的材料必須彼此之間相等，或至少可以比較　例如我們欲求某校教職員之平均薪水，而一部分以月計，一部分以學期計，一部分以學年計，一部分以十月計，一部分之時期不明，則所求得的中心量數，亦毫無意義之可言。

(三)同一項目決不可重複計算。

(四)也不可遺漏任何一項　(三)(四)兩點是很顯明的。例如我們計算一班學生之平均國文成績時，故意地把成績優良者重複計算或把不良者少算幾個，以提高平均，則此中心量數亦必毫無意義的。

17. 中心量數之種類與要素

(一)種類　中心量數之種類，最通用者有三種，(1)算術均數，簡稱均數(arithmetic mean，以 M 代表之)，(2)中數或中位數(median，以 Mdn 代表之)，(3)衆數或範數(mode，以 Mo. 代表之)。此三種量數為算術的數列之中心量數。但是社會的事實，其關係並不完全是算術的，有時是幾何的數列，故有(4)幾何均數(geometric mean，以 G. M. 代表之)。也有時是倒數的數列，故有(5)倒數或調和均數(harmonic mean，以 H. M. 代表之)。

(二)要素　均數，中位數與衆數雖均為表示算術的數列之中心量

數，但是均數之爲用最廣，因爲其具有大部分中心量數應有之要素；中位數次之，衆數爲用最少。關於中心量數之要素，優爾氏曾提出下列六項：

第一：應有嚴格的界說，而不可僅由於觀察者之估計。

第二：應根據於所有的觀察，否則，就不是全部分配之特徵。

第三：應簡明易曉，不可過含抽象的數學的性質。

第四：應便於計算。兩種中心量數之中，其他條件相等，較易計算者較優。但計算便利一因子亦不可過度重視而忽略其他因子。

第五：應固定而不多受抽樣變異之影響。從同樣的材料之中，抽出來不同的樣本，雖極留心，所得的中心量數很少是相同的。但是一種中心量數或比他種表示較大的差異。在兩種中心量數中，較穩定者爲較優。關於此點之詳細討論，詳於抽樣之信度章。

第六：應能用代數法計算。

18. 中成績與中位數

(一)中位數之意義　假使我們把一個次數分配圖之面積分爲兩個相等的部分，而以縱線間離之，則此條線必與分配圖橫坐標上之一點相交切。此點之價值，就是中位數。所以中位數有三個特徵：

第一：所有觀察，必須按照大小排列，而後從一端數起至達到次數之一半。所以中位數並非計算得來的，乃是數得來的。

第二：在中位數之上下兩部分，次數是相等的，均爲百分之五十。

第三：若把所有差數都視爲正的，則取於中位數之差數的總和是最小數。一二兩點，根據定義而來，無說明之必要；第三點乃爲中位數之特

點，茲加解釋。差數是一距離量數，爲任何一點離開中位數之距離。若我們以 A, B, C, D, M, E, F, G, H 代表橫坐標之各種分數，而次數均爲 1，則 M 爲中位數是很顯然的，因爲在 M 之上次數爲 4，M 之下次數亦爲 4。至於各點離 M 點之距離，在 A 點爲 AM，在 B 點爲 BM 等，在圖中也很顯明（圖十四）。但是差數有正負之分，凡量數小於中位數者

圖十四　取於中位數之差數

其差數爲負的，反之，爲正的。惟我們把所有差數都視爲正的，則取於中位數之差數總和是一最小數，易言之，卽 AM+BM+CM+DM+ME+MF+MG+MH 是一最小數。因爲若差數不取於中數而取於他數，例如 E，則 AE=AM+ME，BE=BM+ME，CE=CM+ME，DE=DM+ME，EF=MF−ME，EG=MG−ME，EH=MH−ME，而取於 E 點之差數總和是 AM+ME+BM+ME+CM+ME+DM+ME+ME+MF−ME+MG−ME+MH−ME=AM+BM+CM+DM+MF+MG+MH+2ME，比上數多一 ME 了。所以若把所有差數都視爲正的，則取於中位數之差數總和是一最小數。

（二）中成績之求法　通常在統計學的書籍中，求中數或中位數之公式，有用

$$\text{Mdn. 之位置} = \frac{N+1}{2} \qquad \text{公式五}$$

者，此種方法所求得的中位數，有的統計家如美國之渥特 (Odell) 氏，

中國之艾偉氏均以爲這是中成績 (mid-score) 而非中位數。這種分別頗有益處，因爲在次數很多的已經歸類的次數分配中，我們所用以求中位數的公式，與公式五頗不相同。

中成績的意義就是幾個數中的最中一數。例如有十一個數，按照大小排列好如下：

30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80

則中成績之地位按照公式五是

$$\frac{N+1}{2}=\frac{11+1}{2}=6$$

易言之，就是第六個數，所以中成績等於 55。

若N是雙數，例如上面十一個數之右端添上一個 85，則中成績之地位是

$$\frac{N+1}{2}=\frac{12+1}{2}=6.5$$

易言之，就是在第六個數與第七個數之間。第六個數爲 55，第七個數爲 60，則

$$\text{中成績}=\frac{55+60}{2}=57.5$$

（三）中位數之求法　中位數就是第五十分位數(P_{50})，亦卽 q_2，其求法公式是

$$\text{Mdn.}=\text{l. l.}+\left(\frac{\frac{N}{2}-f_{up.}}{f_{q_2}}\right)i \qquad \text{公式六(a)}$$

$$\text{Mdn.}=\text{u.l.}-\left(\frac{\frac{N}{2}-f_{do.}}{f_{q_2}}\right)i \qquad \text{公式六(b)}$$

求 q 時，把全體分配分為四部分，故以 4 除 N；求中位數時則把全體分配分爲兩部分，故以 2 除 N。注意我們用 $N/2$ 而不用 ${}^{N+1}/_{2}$，因爲公式五是求中成績之地位，而公式六是求中位數。所以在公式六中若用 $N+1$，則 (a) 與 (b) 兩個公式之結果不能相較正了。

茲根據表八之材料，演算一下以爲例

$$\text{Mdn.}=90+\frac{72-59}{26}10=95$$

$$\text{Mdn.}=100-\frac{72-59}{26}10=95$$

若用 $N+1$，則兩個公式之結果不同了。表八中 $N=144$，$N+1=145$

則 $\frac{N+1}{2}=72.5$ 塡在公式內，如下：

$$\text{Mdn.}=90+\frac{72.5-59}{26}10=95.19$$

$$\text{Mdn.}=100-\frac{72.5-59}{26}10=94.81$$

因此，$N+1$ 是絕對不可用的。

19. 算術均數

(一)定義與特點　均數是次數之總數除量數之總和所得之商數。若以 $X_1\ X_2\ X_3\cdots\cdots X_n$ 代表各量數，以 ΣX 代表量數之總和，以 N 代表次數總數，則

$$M=\frac{\Sigma X}{N}$$

因此均數有二個特點：

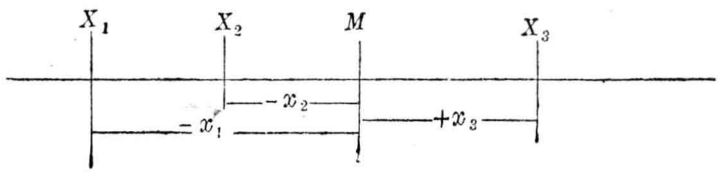
第一：爲算術上的期望數。

第二：若把取於均數之正負差數加起來，其值爲零。設以 x 代表量數與均數之差數（卽 $x = X - M$），則 $\Sigma x = 0$，這個特點是最重要的，也是均數所以爲最有用的中心量數之原因。玆證明之如下：

若以 M 代表均數，以 X_1 X_2 代表小於均數之量數，以 $X_3 \cdots\cdots X_N$ 代表大於均數之量數，則

$$M = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots\cdots X_N}{N}$$

如圖十五：



圖十五　取於均數之差數

若以 x_1 代表 X_1 離開 M 之距離，x_2 代表 X_2 離開 M 之距離等等，則

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 - M \\ x_2 &= X_2 - M \\ x_3 &= X_3 - M \\ &\vdots \\ x_N &= X_N - M \end{aligned}$$

惟 X_1，X_2 小於均數，故 x_1 與 x_2 之數量是負的，$x_3 \cdots\cdots x_N$ 之數是正

的，所以可以寫如

$$X_1 - M = -x_1 \qquad \therefore X_1 = M - x_1$$

$$X_2 - M = -x_2 \qquad \therefore X_2 = M - x_2$$

$$X_3 - M = x_3 \qquad \therefore X_3 = M + x_3$$

$$\vdots$$

$$X_N - M = x_N \qquad \therefore X_N = M - x_N$$

所以，代入上面的公式中

$$M = \frac{(M - x_1) + (M - x_2) + (M + x_3) + \cdots\cdots + (M - x_N)}{N}$$

$$\therefore NM = NM - x_1 - x_2 + x_3 + \cdots\cdots + x_N$$

$$\therefore \quad -x_1 - x_2 + x_3 + \cdots\cdots + x_N = 0,$$

故把一切取於均數之正負差數相加起來，其值是零。

(二)求法　求均數時，因事實有簡單者與有繁複者，方法略有不同，但是基礎的意義是一樣的。茲逐一說明之於下：

方法一　求量數未歸類者之方法

$$M = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots\cdots + X_n}{N} \qquad \text{公式七(a)}$$

$$M = \frac{\Sigma X}{N} \qquad \text{公式七(b)}$$

例如有十一個人，所得的分數如下：

75　81　93　66　52　80　45　54　73　79　83　則

$$M = \frac{75 + 81 + 93 + 66 + 52 + 80 + 45 + 54 + 73 + 79 + 83}{11} = 71$$

方法二　量數已歸類，組距爲 1（算法見表十）

$$M=\frac{f_1X_1+f_2X_2+f_3X_3+\cdots\cdots+f_nX_n}{N}$$ 公式七(c)

$$M=\frac{\Sigma(fX)}{N}$$ 公式七(d)

f_1、f_2，f_3 等代表次數。

表十一 次數之計算法(二)

分數 X	次數 f	次數乘分數 fX	
5	4	20	
6	6	36	$M=\frac{365}{46}$
7	8	56	
8	12	96	$=7.93+$
9	7	63	
10	5	50	
11	4	44	
總和	46 N	365 Σ(fX)	

方法三 量數已歸類，組距大於1者(算法見表十二，表十三，表十四)

若事實已歸類，而各組之組距又大於1者，則各組中之代表數爲各組之中點。因此求均數可改寫如下：

$$M=\frac{f_1Mid_1+f_2Mid_2+f_3Mid_3+\cdots\cdots+f_nMid_n}{N}$$ 公式七(e)

$$M=\frac{\Sigma(f\,Mid.)}{N}$$ 公式七(f)

Mid_1 ＝第一組之組距中點， Mid_2＝第二組之組距中點等

表十二　均數之計算法(三)　根據表四之材料

組　距	組距中點 Mid	次數 f	次數乘中點 fMid
40			
	42.5	1	42.5
45			
	47.5	1	47.5
50			
	52.5	2	105.0
55			
	57.5	3	172.5
60			
	62.5	6	375.0
65			
	67.5	6	405.0
70			
	72.5	8	580.0
75			
	77.5	9	697.5
80			
	82.5	11	907.5
85			
	87.5	12	1050.0
90			
	92.5	13	1202.5
95			
	97.5	13	1267.5
100			
	102.5	13	1332.5
105			
	107.5	10	1075.0
110			
	112.5	9	1012.5
115			
	117.5	9	1057.5
120			
	122.5	7	857.5
125			
	127.5	4	510.0
130			
	132.5	2	265.0
135			
	137.5	2	275.0
140			
	142.5	2	285.0
145			
	147.5	1	147.5
150			
總　和		144 N	13670.0 Σ(fMid)

$$M=\frac{13670}{144}$$

$$=94.93$$

表十三 均數之計算法(三) 根據表五之材料

組距	組距中點 Mid	次數 f	次數乘中點 fMid
42			
	45.5	2	91.0
49			
	52.5	2	105.0
56			
	59.5	7	416.5
63			
	66.5	8	532.0
70			
	73.5	11	808.5
77			
	80.5	14	1127.0
84			
	87.5	19	1662.5
91			
	94.5	18	1701.0
98			
	101.5	17	1725.5
105			
	108.5	15	1627.5
112			
	115.5	12	1386.0
119			
	122.5	10	1225.0
126			
	129.5	3	388.5
133			
	136.5	3	409.5
140			
	143.5	2	287.0
147			
	150.5	1	150.5
154			
		144 N	13643.0 Σ(fMid)

$$M=\frac{13643}{144}$$

$$=94.74$$

表十四　均數之計算法(三)　根據表六之材料

組　距	組距中點 Mid	次　數 f	次數乘中點 fMid
40			
	45	2	90
50			
	55	5	275
60			
	65	12	780
70			
	75	17	1275
80			
	85	23	1955
90			
	95	26	2470
100			
	105	23	2415
110			
	115	18	2070
120			
	125	11	1375
130			
	135	4	540
140			
	145	3	435
150			
總　和		144 N	13680 Σ(fMid)

$$M=\frac{\Sigma(fMid)}{N}=\frac{13680}{144}=95$$

公式七(e)與(f)均假設任何組距內之次數,均平勻分配於各該組距之各點上,故組距中點爲代表數,這個假設並不完全合於事實,故由此公式所得之結果不能與公式七(a)至(d)所得的一樣。這個數只是近似數。再則整理材料時所用組距不同,則求得的均數亦不盡同。表十二,

十三，十四，之材料均根據於表二，若我們把表二中之各分數加起來而以N除之，則所得的M必絲毫無錯誤。此數爲94.28，而由表十二所得的結果則爲94.93，可證明公式七(e)所得的M只是一近似數。表十一，十二，十三，雖根據於同一事實，惟組距不同，結果亦略異，可以說明組距之影響。

方法四　以公式七(e)或(f)計算均數時，若次數很大，則次數乘中點項下之數亦大，易生錯誤，於是有一種簡捷法，其公式爲

$$M = M' + \frac{\Sigma(fx')}{N} \qquad \text{公式七(g)}$$

$$M = M' + C \qquad \text{公式七(h)}$$

M' = 假設均數，即任何一分數

x' = 量數與假設均數之差數 = $X - M'$

C = 較正數即量數與假設均數之差數之總和，以N除之，$= \frac{\Sigma fx'}{N}$

這個公式之來源完全是根據於基礎的公式而來，其演化如下：

$$x' = X - M' \qquad \therefore X = M' + x'$$

$$\begin{aligned} \because NM &= \Sigma fX \\ &= \Sigma f(M' + x') \\ &= NM' + \Sigma fx' \end{aligned}$$

$$\therefore M = M' + \frac{\Sigma fx'}{N}$$

此公式中之M'在未歸類或已歸類而組距爲1的分配中爲任何一

數;在組距大於 1 的次數表中,爲任何一組距中點。玆根據表十一與表十四之材料,演算一下以爲例:

表十五　均數之計算法(四)　根據表十一之材料

分數 X	次數 f	差數 $x'=X-M'$	次乘差 fx'	
5	4	$5-8=-3$	-12	$M'=8$
6	6	$6-8=-2$	-12	$\Sigma f(-x')=-32$
7	8	$7-8=-1$	-8	$\Sigma f(fx')=29$
8	12	$8-8=0$	-32 $\Sigma f(-x')$	$\Sigma(fx')=32+29=-3$
9	7	$9-8=+1$	$+7$	$C={}^{-3}/_{46}=-.0652$或$.07$
10	5	$10-8=+2$	$+10$	$M=M'+C$
11	4	$11-8=+3$	$+12$	$M=8+(-.07)=7.93$
總和	46 N		29 $\Sigma f(+x')$	

表十五之結果,與表十一之結果完全相同。若我們在表十五中,假設均數,不用 8,而用任何一數亦無不可,結果也完全相同。故讀者欲較對其自己的結果,可以用兩個假設均數,計算兩次。惟爲計算便利起見,假設均數越近眞正均數則次乘差項下之數越少,其理甚明,因爲若 $M'=M$ 時,則 $\Sigma(fx')=0$

表十六　均數之計算法(四)　根據表十四之材料

組距	中點 Mid	次數 f	差數 $Mid-M'=x'$	次乘差 fx'	
40					
	45	2	$45-95=-50$	-100	$M'=95$
50					
	55	5	$55-95=-40$	-200	$\Sigma(fx')=-1230+1230=0$
60					
	65	12	$65-95=-30$	-360	$C=0$
70					
	75	17	$75-95=-20$	-340	$M=95+0=95$
80					
	85	23	$85-95=-10$	-230	
90				-1230	
	95	26	$95-95=0$	$\Sigma f(-x')$	
100					
	105	23	$105-95=+10$	$+230$	
110					
	115	18	$115-95=+20$	$+360$	
120					
	125	11	$125-95=+30$	$+330$	
130					
	135	4	$135-95=+40$	$+160$	
140					
	145	3	$145-95=+50$	$+150$	
150					
		144 N		$+1230$ $\Sigma f(+x')$	

方法五　在表十六中我們可以看出差數項下之各數均可以組距之大小除之，不過在求結果之前，把較正數再乘組距之大小，則結果完全相同了。因此我們求均數的公式可以改寫為：

$$M = M' + \left(\frac{\Sigma(\frac{fx'}{i})}{N}\right) i \qquad \text{公式七(i)}$$

茲根據表十二與表十三之材料，計算一下以為例：

表十七　均數之計算法(五)　根據表十二之材料

組距中點 Mid	次數 f	差數 $\frac{x'}{i}$	次乘差 $\frac{fx'}{i}$
42.5	1	−11	−11
47.5	1	−10	−10
52.5	2	−9	−18
57.5	3	−8	−24
62.5	6	−7	−42
67.5	6	−6	−36
72.5	8	−5	−40
77.5	9	−4	−36
82.5	11	−3	−33
87.5	12	−2	−24
92.5	13	−1	−13
97.5	13	0	−287 $\Sigma f(-x')$
102.5	13	1	13
107.5	10	2	20
112.5	9	3	27
117.5	9	4	36
122.5	7	5	35
127.5	4	6	24
132.5	2	7	14
137.5	2	8	16
142.5	2	9	18
147.5	1	10	10
總　和	144 N		213 $\Sigma f(+x')$

$M' = 97.5 \qquad i = 5$

$$\Sigma\left(\frac{fx'}{i}\right) = -287 + 213$$

$$= -74$$

$$\frac{\Sigma\left(\frac{fx'}{i}\right)}{N} i = \frac{-74}{144}5 = \frac{-370}{144}$$

$$= -2.57$$

$M = 97.5 - 2.57 = 94.93.$

表十八 均數之計算法(五) 根據表十三之材料

組距中點 Mid	次數 f	差數 x'/i	次乘差 fx'/i
45.5	2	−7	−14
52.5	2	−6	−12
59.5	7	−5	−35
66.5	8	−4	−32
73.5	11	−3	−33
80.5	14	−2	−28
87.5	19	−1	−19
			−173
94.5	18	0	$\Sigma f(-x')$
101.5	17	+1	17
108.5	15	2	30
115.5	12	3	36
122.5	10	4	40
129.5	3	5	15
136.5	3	6	18
143.5	2	7	14
150.5	1	8	8
			178
			$\Sigma f(+x')$

$M'=94.5$

$i=7$

$\Sigma\left(\frac{fx'}{i}\right)=178-173=5$

$\frac{\Sigma\left(\frac{fx'}{i}\right)}{N}\ i=\frac{5}{144}\ 7=\frac{35}{144}$

$=.24$

$M=94.5+0.24=94.74$

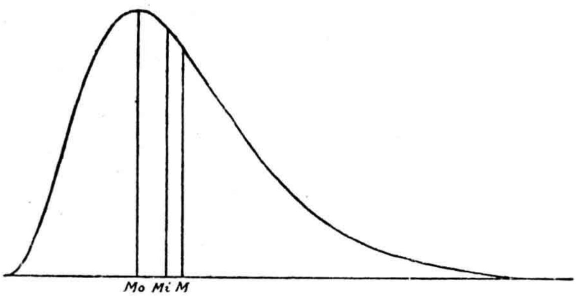
20. 衆數

(一)粗率衆數　通常對於衆數之定義，爲次數最密集之處，或得次數最多之量數。這個定義，實不大適用，因爲照此說來，衆數無所謂統計，只須在表上先查得那最大的次數，而再查得此數的組之組距中點卽得。以此法求得的衆數，實在是一種粗率的衆數 (crude mode)，毫不固定，常因組距之變遷而不同。例如表四，表五，表六均根據於表二之材料，惟組距不同，但是表四之粗率衆數爲 92.5, 97.5, 102.5 三數，因爲此三組之次數一樣多，表五則爲 87.5，表六則爲 95。故粗率衆數實無多大價值。

(二)近似衆數　在一理想的極對稱的分配中，均數，中位數，衆數同在一點上，故衆數無求得之必要。在不對稱的分配中，這三種中心量數都不相同，於是衆數乃有求得之必要。但是決定衆數時，僅指出得最大次數的組距中點是無用的，因爲組距之選定，影響太大了。同時我們又不能把組距變小，以避免錯誤，因爲如此則各組之次數變少，而分配亦不規則了。要把不規則的情形消除之，其法有二：第一，把組距無限地縮小而把觀察次數無限地增加，但是實際上這是不可能的。第二，設法修勻之。最好的修勻不規則的情形之法是曲線配合法，易言之，根據實際的數目，以一定的方程式適合於理想的曲線。但是這種方法異常困難，本書中所討論到的只是常態曲線一種，而衆數之用處，乃在不對稱的分配，所以眞正的衆數 (true mode) 可以說在本書中無法可求的。

本書中所能求的是一種近似衆數(approximate mode)，亦可說是

略不對稱的分配中之近似衆數。在略不對稱的分配中，這三種中心量數有一種近似的關係，就是中位數在由均數至衆數三分之一之距離，如圖十六。



圖十六 理想的略偏的分配圖中 M, Mdn, Mo. 之地位

因此，在稍偏的分配中，求近似衆數之公式如下：

$$Mo = M - 3(M - Mdn)$$ 公式八

在這個公式中，我們可以看出在對稱的分配中，三種中心量數都在一點。而在不對稱的圖中，有時是左傾的，有時是右傾的。所謂左傾的圖，衆數小於均數，卽頭向左傾，而尾偏於右；所謂右傾的圖，衆數大於均數，卽頭向右傾而尾偏於左。因此，由公式中所求得的衆數，爲後來測量分配之偏態性之一重要的數量。

這個公式所求得的近似衆數在稍偏的分配中與由配合一個理想的分配所得的眞正衆數，相差很少。優爾曾舉數例以說明之。下表之例，卽優爾在統計理論導言(An Introduction to the Theory of Statistics)中所舉的。

表十九 近似衆數之計算法(仿自優爾)

組距	次數	差數	次乘差	遞加次數
0.75—1.25	18	−4	72	18
1.25—1.75	48	−3	144	66
1.75—2.25	72	−2	144	138
2.25—2.75	89	−1	89	227
2.75—3.25	100	0	449 $\Sigma f(-x')$	327
3.25—3.75	90	+1	90	417
3.75—4.25	75	2	150	492
4.25—4.75	60	3	180	552
4.75—5.25	40	4	160	592
5.25—5.75	21	5	105	613
5.75—6.25	11	6	66	624
6.25—6.75	5	7	35	629
6.75—7.25	1	8	8	630
7.25—7.75	1	9	9	631
7.75—8.25	0	10	0	631
8.25—8.75	1	11	11	632
總數	632 N		814 $\Sigma f(+x')$	

$$M'=3 \quad i=.5 \quad \frac{N}{2}=316$$

$$\Sigma\left(\frac{fx'}{i}\right)=-449+814=365$$

$$\frac{\Sigma\left(\frac{fx'}{i}\right)}{N}=\frac{365}{632}=.5777$$

$$M=3+.5775\times.5$$
$$=3+.289=3.289$$

$$Mdn=2.75+\frac{316-227}{100}(.5)$$
$$=2.75+.445=3.195$$

$$M-Mdn=3.289-3.195$$
$$=0.094$$

近似衆數 $=M-3(M-Mdn)$

$=3.289-3(0.094)=3.007$

眞正總數 $=2.987$

在上表中我們可以看出衆數之眞正的與近似的價值相差很少。這種相差,在根據事實的分配以配合曲線時,略有變動卽可得到的。不過我們須注意,表十九之分配是一稍偏的分配,若次數分配是很不規則的,則此兩個數目之相差必很大。公式八之應用,只在稍偏的分配中可以適用,初學者必須注意之。

因此我們對於衆數之定義是相對於理想的次數分配之最多次數的變量之價值;所謂理想的次數曲線是最配合於事實的分配的曲線。

21. 中心量數之比較

這三種中心量數,各有其用,茲根據第十七節中所開列之條件比較之於下:

(一)界說嚴格　這個條件,三種中心量數都適合;任憑觀察之主觀的推測均不能得到的。

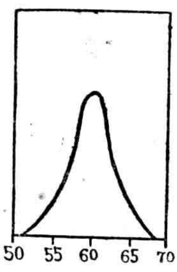
(二)根據全部事實　粗率衆數不合這個條件,中位數雖根據全體次數,而不必根據於全部量數。均數則必須根據兩者。求均數時,每個量數,或大或小,均對於結果貢獻其比例的部分。有些作者以極端量數對均數之結果有較大的影響爲均數之缺點。其實此點不能作爲短處,因爲極端的量數既在此數列之內,他們應當有其相當的部分。所以除了我們有意地欲免除極端量數之影響(例如統計工廠工人之平均工資而欲免除經理的薪水之影響)外,均數是一個最好的中心量數,因爲其根據全部量數與次數。

不過有時事實之一部分缺乏精確報告,如統計某地人民之平均財富,有許多人在 0 以下,有許多人在一百萬以上,爲分組便利起見,僅註明在 0 以下者多少人,在一百萬以上者多少人,則均數無法求得,而粗率衆數與中位數可以求得。又有時次數表各組之距離不一,均數也無法求得,而粗率衆數與中位數亦可求得。惟這種現象,在教育上大率是例外,故以均數爲一分配之最優的代表數。

(三)簡明易曉　這三種量數之意義均極明白,無須再說明。

(四)便於計算　這個因子,不可過於重視,因爲粗率衆數之求得雖費時最少,而其他條件不適合者較多。均數之求法有時比中位數更便利,因爲求中位數時必須把量數之次序依大小排列,而均數有時無此必要。

(五)抽樣影響　均數在普通分配中,較中位數爲固定,卽少受抽樣之影響,設從一種很大的材料中,抽出許多樣本而後計算其均數與中位數。普通情形,這許多均數之於全部材料的均數是較近於這許多中位數之於全部材料的中位數。這個要素就是均數之信度普通大於中位數之信度。關於此點,見抽樣之信度章。惟均數這個優點在普通的分配中是對的,但是在尖頂的分配(very peaked or leptokurtic distribution)中,則中位數較爲固定。關於這點,本書中不能討論到。所謂尖端的分配,其形式如圖十七。



圖十七　　尖頂的分配

(六)代數法計算　這個條件,只有均數是符合的,假使以總數乘中位數 ($N \times Mdn$) 或衆數 (卽 $N \times Mo$),毫無意義,惟以此乘均數(卽 $N \times M$)則是量數之總和 (ΣX)。故求均數時,其他數量已經不完全,而只有了總數與量數總和兩數,卽可得到結果。

再則設我們合併幾個分配中之中位數爲一個中位數,則無簡單的

方法可施，必須將幾個分配合成一個分配，而後求之。但是合併幾個分配中之均數爲一個均數是很簡單的。若以

N_1，N_2，N_3 等代表各個分配之總數

ΣX_1，ΣX_2，ΣX_3等代表各個分配之量數總和

M_1，M_2，M_3 等代表各個分配之均數

則

$$M=\frac{\Sigma X_1+\Sigma X_2+\Sigma X_3}{N_1+N_2+N_3} \text{ 或 } \frac{N_1M_1+N_2M_2+N_3M_3}{N_1+N_2+N_3}$$

惟學者必須注意這個均數並非三個分配中均數之平均，易言之，並非$\frac{M_1+M_2+M_3}{3}$。茲設例以證明之，若

$$M_1=\frac{6}{3}=2 \quad M_2=\frac{20}{4}=5 \quad M_3=\frac{15}{5}=3$$

則所有量數之均數是

$$M=\frac{6+20+15}{3+4+5}=3.4167$$

而三個均數之平均是$(2+5+3)/3=3.3333$。兩種均數都是對的，惟其代表的意義不同。若三個分配之總數相同，則這兩種結果亦相同。若設

$$M_1=\frac{20}{5}=4 \quad M_2=\frac{30}{5}=6 \quad M_3=\frac{25}{5}=5$$

則所有量數之均數與三個均數之平均都是 5 。

均數因爲具有代數的要素，故爲許多公式中之常數；關於此點，在下列各章中可以看出。

總之，爲一切普通的目的之用，均數是一種最適宜的中心量數。

第五章　幾何均數與調和均數

22. 幾何均數

(一)意義　第四章中所說的中心量數都是關於算術數系的。所謂算術數系是一連若干數,其任何一數爲其前一數與一常數之和。但是教育上的事實有時各數間之關係成一幾何數系。所謂幾何數系是一連若干數,其任何一數爲其前一數與一公比之積。在此種數系中,算術均數,中位數以及衆數均不能適宜地代表之,於是乃有幾何均數之一法。故幾何均數是幾何數系的中心量數。

幾何均數在統計物價指數時,應用最廣,因爲物價指數之編製其增進比率常以每年物價與前一年比較。如下表:

表二十　鄧氏批發物價指數(每年以前一年爲根據)(仿自 Kelley, Statistical Method, p. 65)

年份	物價	比率 每前一年之價 =1.00	
1907	\$107.264	0	$M=\frac{9.2681}{9}$
1908		1.0561	
1909		0.9882	$=1.02979$
1910		1.1036	
1911		0.9325	
1912		1.0724	
1913		0.9789	
1914		1.0306	
1915		0.9971	
1916	\$137.666	1.1087	
	總數	9.2681	

設我們欲求各年之平均增進，而求其算術均數，1.02979，則有嚴重的錯誤發生，基礎年份，1907 之比率當然是 1.0000，所以由算術均數所得的平均增加是 .02979，以 9 乘此數，爲 .2681，卽九年期內之增加。此數(.2681)是不正確的，且看末了一年 (1916) 與基礎年之物價比率，將可明了。此比率是 137.666÷107.264=1.28343，表示眞正的增加是 .28343。此兩個數之相差的理由，是每個增加是以前一年爲根據，而非以基礎年爲根據。嚴格地說來，1907 只是 1908 之基礎；1908 是 1909 之基礎等等。因此，1.0561 與 \$107.264 之積則爲 1908 年之物價。1908 年之物價與 .9882 之積或 .9882×1.0561×\$107.264 之結果則爲 1909 年之物價，等等。最後所有九個比率之積，就是 1.28343，乘 \$107.264 則爲 1916 年之物價，其數爲 \$137.666。若我們不用此九個比率，(其積爲末了一年與基礎年之比率)，而用一個平均的比率，則此比率自乘九次，亦有同樣的結果。這個平均的比率就是幾何均數；若以 G. M. 代表幾何均數，X_1 X_2 X_3 等代表各年之比率，則

$$G.M.=\sqrt[N]{X_1\times X_2\times X_3\times\cdots\cdots\times X_N}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式九(a)}$$

(二)求法　幾何均數之求法以根據對數計算爲最便利，故公式九(a)可寫如

$$\log G.M.=\frac{\log X_1+\log X_2+\log X_3+\cdots\cdots+\log Xn}{N}\ \text{公式九(b)}$$

或 $$\log G.M.=\frac{\Sigma\log(X)}{N}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ \text{公式九(c)}$$

茲根據上表之材料，演算一下以爲例(數目的四位對數表見附表十一)

表二十一　幾何均數之計算法示例

年份	比率 X	比率之對數 log X
1908	1.0561	0.0237
1909	0.9882	$\bar{1}.9949$
1910	1.1036	0.0429
1911	0.9325	$\bar{1}.9696$
1912	1.0724	0.0302
1913	0.9789	$\bar{1}.9907$
1914	1.0306	0.0132
1915	0.9971	$\bar{1}.9987$
1916	1.1087	0.0448
		0.1087 $\Sigma\ \log(X)$

$$\log \text{G. M.} = \frac{\Sigma\ \log(X)}{N}$$

$$= \frac{0.1087}{9} = .01208$$

Antilog .01202 = 1.028,

即 G. M.

上表中 G. M. 之意義是平均起來，物價每年有增加 2.8% 之傾向。

(三)要素　第一：由 G. M. 的公式看來，若有一個 X 是零，則 G. M. 亦等於零；再則有一個X是負數，則 G. M. 不能決定，都很顯明。除了這兩種情形外，幾何均數的價值總可以求得並且有嚴格的界說。

第二：G. M. 的計算法，因必須用對數，故較繁。實際上 G. M. 是求各個X的對數之算術均數，比均數當然複雜的多，此幾何均數未能普遍應用之一原因。

第三：幾何均數比均數多含抽象的數學的性質，牠並無任何簡單的和明顯的要素以使其性質易被人了解，此幾何均數未被人普遍地採用之主因。

第四：一連若干數，其幾何均數一定比算術均數小。此點在代數學

中已有證明,無須再說。

第五:幾何均數減少極端的差異之影響至最低度。所以凡一連數目,其分配之差異度愈大,則幾何均數與算術均數之相差也愈大。

第六:幾何均數與算術均數一樣,都具有代數的性質。例如有三連觀察,第一連以X代表之,第二連以Y代表之,第三連以Z代表之,則

$$N_1 \log G.\ M_X = \log X_1 + \log X_2 + \cdots\cdots \log X_{N1} = \Sigma \log (X)$$

$$N_2 \log G.\ M_Y = \log Y_1 + \log Y_2 + \cdots\cdots \log Y_{N2} = \Sigma \log (Y),$$

$$N_3 \log G.\ M_Z = \log Z_1 + \log Z_2 + \cdots\cdots \log Z_{N3} = \Sigma \log (Z)$$

若求此三連的幾何均數,以 G. M. 代表之,而以 N 代表 $N_1+N_2+N_3$,

則 $$N \log G.\ M. = \Sigma \log (X) + \Sigma \log (Y) + \Sigma \log (Z)$$

$$= N_1 \log G.\ M_X + N_2 \log G.\ M_Y + N_3 \log G.\ M_Z$$

(四)教育上的應用 第一:學齡兒童之估計 計算人口增加之最廣用的方法是幾何均數,易言之,卽根據幾何均數以估計兩個戶口調查年間各年之人口數。不過以這個方法決定人口之增加,必須視人口增加率在任何一定期間內確有固定的與一致的比率。我們對於這個問題不能詳加討論;不過以爲若某一地方某人口平均增加情形可以適用 G. M. 以決定之,則學齡兒童平均之增加在普通狀況下也可以應用 G. M. 以估計之。

第二:學校之費用 在經濟學中常用 G. M. 以決物價之平均增加,在教育上,我們或可以 G. M. 估計學校費用之平均增加。賀麟閣在其教育統計學 (Statistical Methods for Students in Education) 中曾舉有一例,玆約略說明之。

表二十二 說明幾何均數之應用——根據學校費用的材料（仿自 Holzinger, Statistical Methods in Education, p. 93.)

年份	美國公立學校之費用 單位爲一百萬	美國公立學校之費用 其對數	比率 每前一年之價 =1.00	比率 其對數	理論的數列
1901					
	227.5	2.3570			
1902					230.0
	238.3	2.3772	1.047	0.0199	
1903					246.9
	252.8	2.4028	1.061	0.0257	
1904					265.1
	273.2	2.4365	1.081	0.0338	
1905					284.8
	291.6	2.4648	1.067	0.0282	
1906					305.8
	307.8	2.4882	1.056	0.0237	
1907					328.5
	336.9	2.5275	1.095	0.0395	
1908					352.8
	371.3	2.5697	1.102	0.0422	
1909					378.9
	401.4	2.6035	1.081	0.0338	
1910					406.9
	426.3	2.6297	1.062	0.0261	
1911					437.0
	446.7	2.6500	1.048	0.0203	
1912					469.3
	482.9	2.6838	1.081	0.0338	
1913					504.1
	521.5	2.7172	1.080	0.0334	
1914					541.4
	555.1	2.7444	1.064	0.0270	
1915					581.4
	605.5	2.7822	1.091	0.0378	
1916					624.5
	640.7	2.8067	1.058	0.0245	
1917					670.7
	702.2	2.8464	1.096	0.0399	
1918					720.3
	763.7	2.8829	1.088	0.0367	
1919					773.6
	$\Sigma\log X=46.9705$		$\Sigma\log X=0.5263$		
	G. M. = 406.9		G. M. = 1.0739		

費用之幾何均數

$$\log \text{G. M.} = \frac{46.9705}{18} = 2.6095$$

Antilog 2.6095 = 406.9

平均比率

$$\log \text{G. M.} = \frac{0.5263}{17} = 0.03096$$

Antilog 0.03096 = 1.0739

在上表中,除了末了一項，其餘都很顯明，理論的數列之求得是把 G. M. 之數 406.9 爲 1910 年開始時之理論的數,而再根據此數向上下兩方伸張。例如 406.9×1.0739,其積 437.0 爲 1911 年開始時之理論的數; 437.0×1.0739，其積 469.3 爲 1912 年開始時之理論數,以此類推。向上伸張時，則以 1.0739 除 406.9，其商數 378.9 爲 1909 年開始時之理論數; 以 1.0739 除 378.9，其商數 352.8 爲 1908 年開始時之理論數,餘類推。

理論的數列與實際的數列頗相似，因此我們可以說美國公立學校費用,自 1901 年至 1918 年平均起來,每年比其前一年增加 7.4% 我們也可以根據 G. M. 與比率以推測 1918 年以後之情形,不過推測時必須假設凡影響於 1901 年至 1918 年之費用的許多因子繼續到推測的年份。這個假設有時是不能適用。例如我們根據此兩數以估計 1922 年之理論數爲 993.2,而 1922 年之眞正的數爲 1,580.7,相差很大。相差的原因,是與歐戰有關。

第三：學習之進步　學習之增加率當然是一種比率，其根據乃爲前一次之學習結果。我們昨日的學習結果是今日的學習之根據，今日的學習結果又爲明日的學習之根據。故第一次學習與第二次學習之間，第二次與第三次之間，等等，都有一種比率，求這些比率之平均，最好用幾何均數。玆舉一例以說明之。艾偉氏曾以中學國文理解力測驗比較南京女中之國文理解程度,共測驗五次，以百分數論，進步情形如下表。

表二十三　說明幾何均數之應用——根據理解成績之進步(仿自艾偉高級統計學頁 75)

閱讀秩序	理解成績比率				理論次數	
	百分數	其對數	增加率每前一次之成績 =1.00	其對數	第一種(求法同表二十二)	第二種
第一次	34.00	1.5315			37.47	34.00
第二次	52.00	1.7160	1.529	0.1843	46.01	41.75(34.00×1.228)
第三次	60.67	1.7830	1.167	0.0671	56.50	51.27(41.75×1.228)
第四次	69.33	1.8409	1.143	0.0580	69.38	62.96(51.27×1.228)
第五次	77.33	1.8884	1.115	0.0472	85.20	77.31(62.96×1.228)
	Σ log(X)=8.7598		Σ log(X)=0.3566			
	log G. M. $=\frac{8.7598}{5}$ =1.7520 G. M. =Anti log 1.7520 =56.50		log G. M. $=\frac{0.3566}{4}$ =0.08915 G. M. =Anti log 0.08915 =1.228			

倘使我們只知道第一次成績與其各次的平均增加率，則我們可以求出最後一次之成績；反之，我們只有最後一次之成績與平均增加率，則我們可以求出第一次成績。其求法之公式，在普通代數課本都有的，就是：

$$l=ar^{n-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式十}$$

l =最後一數

a =第一數

r =平均比率或公比

以表二十三爲例：

（1） $l=34.00\times1.228^{5-1}$

$$\log l=\log 34+4\log 1.228$$
$$=1.5315+4\times .08915$$
$$=1.8881\quad \text{antilog}=77.29.$$

（2） $77.33=a\times1.228^4$

$$\log a=\log 77.33-4\log 1.228$$
$$=1.8884-4\times .08915$$
$$=1.5318\quad \text{antilog}=34.02$$

再則我們只知道第一次與最後一次之成績，也可以求得平均比率，舉例如下：

（3） $77.33=34.00\times r^4$

$$r=\frac{\log 77.33-\log 34.00}{4}$$
$$=\frac{1.8884-1.5315}{4}=\frac{.3569}{4}$$
$$=.0892\quad \text{antilog}=1.228.$$

23. 調和均數

(一)定義與公式　調和均數爲一連量數中各量數之倒數之算術均數之倒數。若以 H. M. 代表之，則

$$\text{H. M.}=\frac{1}{\frac{1}{N}\left(\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}+\frac{1}{X_3}\cdots\cdots+\frac{1}{X_n}\right)}\cdots\cdots\text{公式十一(a)}$$

或 $$\text{H. M.}=\frac{1}{\frac{1}{N}\Sigma\left(\frac{1}{X}\right)}\cdots\cdots\text{公式十一(b)}$$

或$\frac{1}{\text{H. M.}}=\frac{1}{\text{N}}\Sigma\left(\frac{1}{\text{X}}\right)$…………………………公式十一（c）

或$\text{H. M.}=\frac{\text{N}}{\Sigma\left(\frac{1}{\text{X}}\right)}$…………………………公式十一（d）

由此觀之，調和均數爲調和數系之均數；所謂調和數系者，內中各量數之倒數成一算術的數系。所以

$3,\ \frac{3}{2},\ 1,\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{5},\ \frac{1}{2}$ 等成一調和數系，因爲各數之倒數

$\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{6}{3}$ 等等成一算術數系。

據普通代數學的證明，幾何均數比算術均數小，而調和均數又比幾何均數小。茲設例以證明之。譬如 5 與 10 兩數，

$$\text{M}=\frac{5+10}{2}=7.5$$

$$\text{G. M.}=(5.10)^{\frac{1}{2}}=7.071$$

$$\text{H. M.}=\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right)}=\frac{2}{.2+.1}=6.667$$

再則，幾何均數是算術均數與調和均數之積之平方根，以上例言，

$$\text{G. M.}=(7.5\times6.667)^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{50}=7.071$$

（二）應用　調和均數在教育上應用較少，其原因一則由於其過含抽象的數學的性質，二則由於何時當用調和均數之條件不若求算術均數之易被人了解。茲舉二例於下以說明之。

例一　假使我們使每人各讀若干頁書，而記下其時間，再求其平均每頁需若干時，則應用算術均數。若我們所求的問題是平均每小時讀若干頁書，則應用調和均數。譬有甲乙兩生，各讀十頁書，甲需六分鐘，乙

需十二分鐘，若求平均每頁需若干分鐘，則爲 $^{18}/_{20}=.9$ 分鐘。若所求的問題是平均每分鐘讀若干頁，則其算法如下：

表二十四　調和均數之計算法（例一）

	十頁所需分鐘	每分鐘讀若干頁	其倒數
甲	6	1.667	.6
乙	12	.833	1.2
	18	2.500	$\Sigma(\frac{1}{X})=1.8$

$$H.M.=\frac{1}{\frac{1}{2}(1.8)}$$

$$=\frac{1}{.9}$$

$=1.111$ 即平均每分鐘所讀之頁數

若我們不求其倒數平均數，而求其"每分鐘若干頁"項之算術均數則爲 $^{2.5}/_{2}=1.25$。此 1.25 是錯的，因爲共讀了 18 分鐘，若每分鐘平均讀 1.25 頁，則兩人共讀了 22.5 頁，而實際上此兩人僅讀 20 頁書。調和均數之結果 1.111 是對的，因爲 1.111×18，其積爲 19.98 頁（此數之差，因爲落小數之關係）。

例二　假使我們使每人各讀若干時書，而記下其所讀之頁數，再求其平均每時讀若干頁，須用算術均數。若我們求平均每頁需若干時，則應用調和均數。譬如甲乙兩生，各讀一小時，甲讀 100 頁，乙讀 50 頁，共讀 150 頁，平均每時讀 75 頁，此算術均數也。若求平均每頁需若干時，則應用調和均數，如下：

表二十五　調和均數之計算法（例二）

	一小時所讀頁數	每頁需若干時	其倒數
甲	100	.01	100
乙	50	.02	50
	150 M=75	.03 M=.015	150 $\Sigma(\frac{1}{X})$

$$H.M.=\frac{1}{\frac{1}{2}(150)}$$

$$=\frac{1}{75}$$

$=.0133$ 即平均每頁需若干時

若計算時，不求 H. M. 而求"每頁需若干時"項下之 M，則此數略大；因爲 $.015\times150=2.25$ 小時，而實際上兩人共讀了 2 小時，H. M. 是 .01333，以此數乘 510，其積爲 1.9995 或 2。

由上兩例觀之，調和均數與算術均數在應用之區別，並非如有些作者所說，若工作之分量不變，則應用算術均數，若時間之分量不變，則應用調和均數；實際上若時間爲固定的，求平均每件工作需若干時，或工作爲固定的，求平均每時做多少工作，則均應用調和均數。若時間爲固定的，求每時做若干工作，或工作爲固定的，求平均每件工作需若干時，則須用算術均數。

(三)算術均數與調和均數之關係——求調和均數之較對法　假使我們以 r 代表速率(rate)，t 代表時間(time)，則

M_r ＝時間固定，求平均每時做若干工作。

M_t ＝工作固定，求平均每件工作需若干時。

$H.M._r$ ＝限定各人工作相等（工作固定），而從各人工作速率求平均工作速率。

$H.M._t$ ＝限定各人工作時間相等（時間固定），求平均每件工作需若干時間。

我們知道

$$r=\frac{1}{t}$$

$$\frac{\Sigma r}{N}=\frac{1}{N}\Sigma\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$M_r=\frac{1}{H.\ M_t}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式十二}$$

同樣地

$$M_t=\frac{1}{H.\ M_r}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式十三}$$

茲舉二例演算於下:

表二十六 調和均數之計算法(例三)

時間固定					工作固定				
每一小時	以時計		以分計		每一問題	以時計		以分計	
所做題數	每一問題所需時數	其倒數	每一問題所需分數	其倒數	所需時數	每一小時所做題數	其倒數	每一分鐘所做題數	其倒數
10	.10000	10	6	.16667	.10000	10	.10000	.16667	6
8	.12500	8	7.5	.13333	.12500	8	.12500	.13333	7.5
6	.16667	6	10	.10000	.16667	6	.16667	.10000	10
4	.25000	4	15	.06667	.25000	4	.25000	.06667	15
2	.50000	2	30	.03333	.50000	2	.50000	.03333	30
30 Σr		30 $\Sigma(\frac{1}{t})$		.50000 $\Sigma(\frac{1}{t})$	1.14167 Σt		1.14167 $\Sigma(\frac{1}{r})$		68.5 $\Sigma(\frac{1}{r})$
$N=5$ $M_r=\frac{30}{5}$ $=6$	$H.M._t=\frac{1}{\frac{1}{5}(30)}$ $=\frac{1}{6}$ $=.16667$ 時		$H.M._t=\frac{1}{\frac{1}{5}(.5)}$ $=\frac{1}{.1}$ $=10$分		$N=5$ $M_t=$ $\frac{1.14167}{5}$ $=.22833$	$H.M._r=$ $\frac{1}{\frac{1}{5}(1.14167)}$ $=\frac{1}{.22833}$ $=4.38$每小時平均題數		$H.M._r=\frac{1}{\frac{1}{5}(68.5)}$ $=\frac{1}{13.7}$ $=.073$	
$M_r=\frac{1}{H.M._t}$ $6=\frac{1}{.16667}=6$ 以分計 $M_r=60\ \frac{1}{H.\ M_t}$ $6=60\frac{1}{10}=6$					$M_r=\frac{1}{H.M._t}$ $.2283=\frac{1}{4.38}=.2283$ 以分計 $M_r=.2283\times60=13.7$每一問題平均所需分鐘 $13.7=\frac{1}{.073}=13.7$				

（四）就次數表中計算調和均數　若在一次數表中，則求調和均數之公式可改寫如下：

$$H.M.=\frac{1}{\frac{1}{N}\left(\frac{f_1}{X_1}+\frac{f_2}{X_2}+\cdots\cdots\frac{f_n}{X_n}\right)}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式十四}$$

茲舉例以說明之

表二十七　調和均數之計算法（例四）

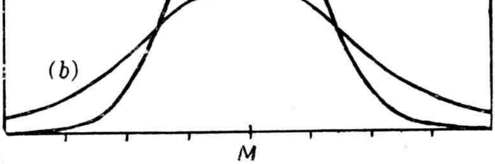
X	f	$^f/_X$	
1	7	7.000	$H.M.=\frac{1}{\frac{1}{121}(34.257)}$
2	11	5.500	
3	16	5.333	$=\frac{1}{.2831}$
4	17	4.250	
5	26	5.200	$=3.532$
6	31	5.167	
7	11	1.571	
8	1	0.125	
9	1	0.111	
	121	34.257	

第六章　四分位差與中位差

24. 離中趨勢之意義

在第四章中，我們已經說過一個分配之特徵有三，第三個是分配之差度。差度爲一般事物之通性，如人有智愚之別，物有大小之分；在統計學中言，就是一個分配之離中趨勢。在一連觀察中之離中趨勢就是分布的程度，或是各項離開某種中心量數之情形。

中心量數雖能形容次數分配之地位，而不能形容分配之差度。例如下圖，兩個分配圖以地位論，是完全相同，中心量數都在 M 點；但是這個圖在差度上是很不同的。在(a)圖中，次數比較密集於 M 點或其附近，而在(b)圖上次數則較多散布於量表之各點。故中心量數代表(a)圖之情形實較切近於(b)圖。若兩圖之總次數相等，則(a)圖之中心量數也較爲可靠。(關於此點，詳見抽樣之信度章。) 故我們在形容一個分配時，除了中心量數外，還須知其離中趨勢。



圖十八　表示均數相同差異度不同的兩個分配圖

25. 四分位差

表示離中趨勢之方法普通取一距離以表示之；距離量數之種類，有全距離，四分位差，概差或機誤，中位差，標準差等。全距離之求法前已言之，爲最大量數與最小量數之差；但這種方法膚淺至極，且異常不穩定，實無多大用處。

四分位差，英文爲 quartile deviation or semi-inter-quartile range，以 Q 代表之，其公式爲

$$Q=\frac{q_3-q_1}{2}\text{……………………………………公式十五}$$

在此公式中我們所謂四分位差者是上四分位數與下四分位數之距離，以 2 除之。全距離之最大缺點，在於兩極端量數恆受特殊事實之影響，故取上下兩四分位數之距離，以避免此種影響。再則在 q_3 之上有全體百分之二十五，在 q_1 之下亦有全體百分之二十五，故自 q_3 至 q_1 之距離內，則必包括全部百分之五十。四分位差既爲 q_3 至 q_1 的一半距離，則包括百分之二十五。$\pm Q$ 則有百分之五十。

Q 之求法至爲顯明，例如表十，$q_3=109.67$，$q_1=80$，則

$$Q=\frac{109.67-80}{2}=14.835$$

照理論上，中位數分圖爲兩半，各佔百分之五十，則自 q_3 至 Mdn 應當相等於 Mdn 至 q_1，而 Q 亦應等於 (q_3-Mdn 或 Mdn$-q_1$)。惟這種關係只在極對稱的圖中是存在的；在不對稱的圖中卻不存在；因之此種關係可以用爲測量圖形之偏態情形的根據。

四分位差之特點爲簡明易曉，計算便利，但其缺點在於不能用代數

法計算。若我人對於結果，並不需要極端精確，祇要知道一個分配的離中趨勢之大概情形，則四分位差爲最合用的。

26. 中位差

(一)定義與意義　中位差(median deviation)是各量數與中位數之差數之總和，以總數除之，至於差數則不計符號，皆視爲正的。所以中位數是一種平均差數，取於中位數，或取於中位數之差數之算術均數而不計符號。若以 M. D. 代表中位差，以 x 代表各量數與中位數之差數，以｜　｜代表不計符號之意，則

$$\text{M. D.} = \frac{|x_1 + x_2 + x_3 + \cdots\cdots + x_n|}{N} \cdots\cdots \text{公式十六(a)}$$

或　$$\text{M. D.} = \frac{\Sigma|x|}{N} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式十六(b)}$$

由上面的公式看來，中位差是一距離量數。因爲 x_1，x_2 等都是一種距離，而 M. D. 爲各個距離之平均。再則，這個方法不能以代數法計算，因爲(1)中位數之求得乃非代數的，(2)不計符號。因此中位差之效用也極有限。

(二)差數之研究　中位差有譯爲平均差者，實根據於英文 average deviation 一名詞。因此在統計時，各數之相差也有根據於算術均數者。實際上用均數的很多，而從統計家的經驗上看來，用中位數較爲適宜；因爲根據中位數而得來的中位差比較根據均數而得來的平均差爲小。在第四章，我們已經證明若把一切差數都視爲正的，則取於中位數之差數之總和是一最小數。當然此數之算術均數亦應當是一最小數。茲再設例以說明之。

假使以 N 代表總人數，m 代表比眞正的中位數或均數大的次數，則 N－m 當然是比眞正的中位數或均數小的次數了。在如此情形之下，M. D. 之價值以 Δ 代表之，易言之，

$$\text{M. D.} = \Delta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

若是原來中位數或均數變動了，此種變動後之數量以 c 代表之，卽

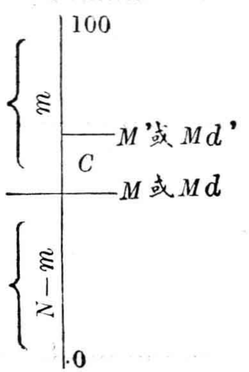
$$c = M - M' \qquad \text{或} \qquad c = Mdn - Mdn'$$

那末 M.D′（根據用 M′ 或 Mdn′ 的差數）之公式如下：以(M. D′ 代表新的 M. D.)

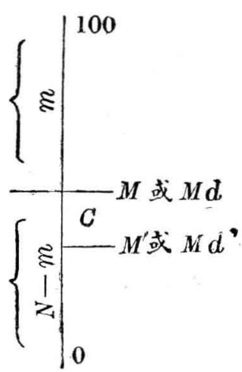
$$\text{M. D}' = \Delta + \frac{(N-m)c - mc}{N} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

$$\text{或} \quad \text{M. D}' = \Delta + \frac{mc - (N-m)c}{N} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

在公式(2)中，假設的中心量數比眞正的量數大。在公式(3)中，則假設的中心量數比眞正的小。以圖表示之，如下：



圖十九　表示差數之變動情形(一)



圖二十　表示差數之變動情形(二)

在上兩圖中，我們很顯明地看出，假設的中心量數大於眞正的時，則所有正差數各個都小了，每個小一 c 數，m 個則小了 mc 數。反之，所有負差數均大了，共大了 (N－m)c 數。原有之 M. D. 旣是 Δ 數，則新的 M.D′ 當然是 Δ 加一較正數；此較正數正是(N－m)c－mc 之算術均數。此公式(2)之說明。公式(3)適與公式 (2) 相反，因此較正數爲 mc－(N－m)c 之均數。

若兩個公式中，M. D′＝Δ時，則兩個較正數必等於零，則 m＝N/2，正是中數之地位。茲演算之如下：

M. D′＝Δ時，則

$$(N-m)c-mc=0 \quad\cdots\cdots\cdots (4)$$

$$Nc-mc-mc=0$$

$$c(N-2m)=0$$

$$N-2m=0$$

$$m=\frac{N}{2} \quad\cdots\cdots\cdots (5)$$

M. D′＝Δ時，則

$$mc-(N-m)c=0 \quad\cdots\cdots\cdots (6)$$

$$mc-Nc+mc=0$$

$$c(2m-N)=0$$

$$2m-N=0$$

$$m=\frac{N}{2} \quad\cdots\cdots\cdots (7)$$

若求中位數，級數分立，單位爲一，則中位數之地位＝(N＋1)/2

(卽求中成績之公式)。如此，(2)(3)兩公式則可改寫如下：

$$\text{M. D}' = \Delta + \frac{(N-m+1)c - mc}{N} \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

$$\text{M. D}' = \Delta + \frac{(m-1)c - (N-m)c}{N} \cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

如此，若 $\text{M. D}' = \Delta$ 時則

$$(N-m+1)c - mc = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

$$Nc - mc + c - mc = 0$$

$$c(N-m+1-m) = 0$$

$$N+1-2m = 0$$

$$m = \frac{(N+1)}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

或

$$(m-1)c - (N-m)c = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

$$mc - c - Nc + mc = 0$$

$$c(m-1-N+m) = 0$$

$$2m = N+1$$

$$m = \frac{N+1}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

根據公式 (2)，(3)，(8)，(9)，我們知道 $\text{M. D}' = \Delta$ 時，則 $m = \frac{N+1}{2}$ 或 $\frac{N}{2}$，因此我們可以推測，若N是偶數，則求 M. D. 時，其差數可以根據於 $(N+1)/2$ 至 $N/2$ 的數之距離中任何一數，而不變其價

值。若 N 是奇數時，則差數必須根據於$(N+1)/2$的數。若中位數在一不能決定的距離中，易言之，中間幾個量數，並無次數，則差數根據於此距離中之任何一數，M. D. 的價值，都是一樣的。茲用下列三表以證明所說的三點。

表 二 十 八

X	f	差數取於 6	7	7.5	8	9
3	1	3	4	4.5	5	6
4	1	2	3	3.5	4	5
5	1	1	2	2.5	3	4
6	1	0	1	1.5	2	3
7	1	1	0	.5	1	2
8	1	2	1	.5	0	1
9	1	3	2	1.5	1	0
10	1	4	3	2.5	2	1
11	1	5	4	3.5	3	2
12	1	6	5	4.5	4	3
N=10		$\Sigma\|x\|=27$	25	25.0	25	27

$$\frac{N+1}{2}=\frac{10+1}{2}=5.5$$

$$\therefore \text{中成績}=\frac{7+8}{2}=7.5$$

$$\frac{N}{2}=\frac{10}{2}=5$$

自上至下，第五數爲 7，自下至上，第五數爲 8，由表中看出，求 M.D.時，差數根據於 7，7.5 或 8，$\Sigma|x|$ 都相等。

表　二　十　九

X	f	差數取於 8	9	10	
3	1	5	6	7	$\frac{N+1}{2}=\frac{13+1}{2}=7$
4	1	4	5	6	由上而下或由下而上，第七
5	1	3	4	5	數均爲 9 由表中看出，求
6	1	2	3	4	M. D. 時，差數根據 9，則
7	1	1	2	3	$\Sigma\|x\|$ 最少。
8	1	0	1	2	
9	1	1	0	1	
10	1	2	1	0	
11	1	3	2	1	
12	1	4	3	2	
13	1	5	4	3	
14	1	6	5	4	
15	1	7	6	5	
N=13		$\Sigma\|x\|=43$	42	43	

表 三 十

X	f	差 位 取 於						
		6	7	8	9	10	11	12
3	1	3	4	5	6	7	8	9
4	1	2	3	4	5	6	7	8
5	1	1	2	3	4	5	6	7
6	1	0	1	2	3	4	5	6
7	1	1	0	1	2	3	4	5
8	0			0				
9	0				0			
10	0					0		
11	1	5	4	3	2	1	0	1
12	1	6	5	4	3	2	1	0
13	1	7	6	5	4	3	2	1
14	1	8	7	6	5	4	3	2
15	1	9	8	7	6	5	4	3
N = 10		$\Sigma\|x\| = 42$	40	40	40	40	40	42

由表中觀之,N/2 爲第五數,自上至下爲 7,自下至上爲 11,故求M.D時，差數根據此距離中(7-11)之任何一數，$\Sigma|x|$ 都相等。

因此我們可以知道，總人數是偶數，而均數亦在 $N/2$ 至 $^{N+1}/_{2}$ 的數之距離中，則差數的根據用均數或中位數，M. D. 之結果是相同的，否則，則中位數爲較合宜。兩面下表是兩個實例。故計算 M. D. 時，應以中位數爲標準之原因，並非如有些作者所說，因中位數常較算術平均數爲簡單，實因中位數爲求 M. D. 之一自然的參照點。

表　三　十　一

X	差數根據於	
	均數	中位數
90	10.3	9.5
87	7.3	6.5
86	6.3	5.5
85	5.3	4.5
83	3.3	2.5
78	1.7	2.5
74	5.7	6.5
73	6.7	7.5
71	8.7	9.5
70	9.7	10.5
797	$\Sigma\|x\|=65.0$	$\Sigma\|x\|=65.0$

$M=\frac{797}{10}=79.7$

中成績之地位 $=\frac{10+1}{2}=5.5$

第 5.5 數爲 $\frac{83+78}{2}=80.5$

M.D.(根據於均數) $=\frac{65.0}{10}=6.5$

M.D.(根據於中位數) $=\frac{65.0}{10}=6.5$

在表中可以看出 $^{N}/_{2}=5$，自上至下，第五數爲 83，自下至上爲 78，M 爲 79.7，Mdn 爲 80.5，均在 83－79 的距離內，故 M.D. 的結果相同。

表三十二

X	差數根據於	
	中位數	均數
249	63	58
243	57	52
238	50	45
222	36	31
212	26	21
210	24	19
205	19	14
204	18	13
204	18	13
203	17	12
198	12	7
196	10	5
195	9	4
195	9	4
192	6	1
192	6	1
189	3	2
188	2	3
186	0	5
186	0	5
184	2	7
183	3	8
180	6	11
180	6	11
180	6	11
180	6	11
180	6	11
180	6	11
178	8	13
177	9	14
177	9	14
177	9	14
175	11	16
174	12	17
174	12	17
172	14	19
162	24	29
150	36	41
7268	$\Sigma\|x\|=570$	$\Sigma\|x\|=590$

$N=38$

$M=\frac{7268}{38}=191.26$ 或 191

Mdn 之地位 $=\frac{38+1}{2}=19.5$

第 19.5 數爲 $\frac{186+186}{2}=186$

M.D.(根據於中位數)$=15.00$

M.D.(根據於均數)$=15.53$

在表中可以看出 $\frac{N}{2}=19$，自上至下第十九數 186，自下至上，第十九數亦爲 186。M 爲 191.26，乃在此距離(186-186)之外，故根據 M 以求 M.D. 其結果較以 Mdn 爲根據而求 M.D. 之數爲大。

(三)求法　在量數未歸類時，中位差之求法在上段中，已有充分的說明。若量數已歸類，則公式七(b)之x乃代表組距中點與中位數之差，茲根據表八之材料，演算一下以爲例。下表所用的公式是：

$$\mathrm{M.D.}=\frac{|f_1x_1+f_2x_2+f_3x_3+\cdots\cdots+f_nx_n|}{N}\cdots\text{公式十六(c)}$$

$$\text{或}\ \mathrm{M.D.}=\frac{\Sigma|fx|}{N}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式十六(d)}$$

表三十三　中位差之計算法(例一)

組距中點	次數	差數	次數乘差數
45	2	50	100
55	5	40	200
65	12	30	360
75	17	20	340
85	23	10	230
95	26	0	0
105	23	10	230
115	18	20	360
125	11	30	330
135	4	40	160
145	3	50	150
N = 144		Σ|fx| = 2460	

Mdn = 95

Σ|fx| = 2460

M.D. = 2460/144

= 17.08

(四)簡捷法　在上表中，中位數適爲95，因此差數並無小數，不覺其麻煩。若中位數有小數，如下表之例，則計算起來異常麻煩，故有一種簡便法，其公式如下：

$$\text{M. D.}=\frac{\Sigma\left|\frac{fx'}{i}\right|+(\text{Mdn}-\text{Mdn}')(N_a-N_b)}{N}(i)\quad \text{公式十六(e)}$$

x'＝組距中點與 Mdn′ 之差

Mdn′＝含有 Mdn 之組之組距中點

N_a ＝比 Mdn 小的各組之次數和。

N_b ＝比 Mdn 大的各組之次數和。

茲演算一例於下:

表三十四　中位差之計算法(例二)

組距	中點	次數		次數和	差數 $\left\|\frac{x'}{i}\right\|$	次×差 $\left\|\frac{fx'}{i}\right\|$
40——50	45	1		1	5	5
50——60	55	5		6	4	20
60——70	65	12		18	3	36
70——80	75	21	N_a	39	2	42
80——90	85	23		62	1	23
90——100	95	23		85	0	0
100——110	105	25		110	1	25
110——120	115	19		129	2	38
120——130	125	12		141	3	36
130——140	135	8	N_b	149	4	32
140——150	145	5		154	5	25
150——160	155	2		156	6	12
		156 N				294 $\Sigma\left\|\frac{fx'}{i}\right\|$

$\text{Mdn}=90+\frac{78-62}{23}10=96.96$

$\text{Mdn}'=95$

Mdn′ 小於 Mdn，故此組之次數應歸入 N_a 之內

$N_a=1+5+12+21+23+23=85$

$N_b=25+19+12+8+5+2=71$

$\text{Mdn}-\text{Mdn}'=96.96-95=1.96$

$\frac{\text{Mdn}-\text{Mdn}'}{i}=\frac{1.96}{10}=.196$

$\therefore \text{M.D.}=\frac{294+.196(85-71)}{156}10$

$=19.02$

在上表中，第一，必須注意 Mdn′ 並非如假設均數一樣可以取任何一組的，Mdn′ 必須是含有眞正中位數之組距中點。第二，含有中位數之組之次數應歸於 N_a 或 N_b，全視眞正中位數比 Mdn′ 大或小。若眞正中位數比 Mdn′ 大，則此組之次數應歸 N_a，因爲 N_a 照定義是比眞正中位數小的各組之次數和。若眞正中位數較小，則含有此數之組之次數應爲 N_b，表三十五是一個例子。在此表中我們可以看出，若 Mdn－Mdn′ 爲負數時，則 $N_a - N_b$ 大部也爲負數，其結果總是加於 $\Sigma|fx'|$ 之上。

表三十五　中位差之計算法(例三)

組距	中點	次數	次數和	差數 $\left\lvert\frac{x'}{i}\right\rvert$	次×差 $\left\lvert\frac{fx'}{i}\right\rvert$
40——50	45	2	2	6	12
50——60	55	5	7	5	25
60——70	65	8	15	4	32
70——80	75	12	27	3	36
80——90	85	19	46	2	38
90——100	95	25	71	1	25
100——110	105	23	94	0	0
110——120	115	23	117	1	23
120——130	125	21	138	2	42
130——140	135	12	150	3	36
140——150	145	5	155	4	20
150——160	155	1	156	5	5
		156 N			294 $\Sigma\left\lvert\frac{fx'}{i}\right\rvert$

(N_a = 40——50 至 90——100 各組之次數；N_b = 100——110 至 150——160 各組之次數)

$$\text{Mdn} = 100 + \frac{78-71}{23}10 = 103.04$$

$$\text{Mdn}' = 105$$

Mdn′大於 Mdn，故此組之次數應歸入於 N_b

$$N_a = 2+5+8+12+19+25 = 71$$

$$N_b = 23+23+21+12+5+1 = 85$$

$$\frac{\text{Mdn}-\text{Mdn}'}{i} = \frac{103.04-105}{10} = -.196$$

$$\therefore \text{M.D.} = \frac{294+(-.196)(71-85)}{156}10$$

$$= 19.02$$

以公式十六(e)計算中位差,嚴格說來不甚正確。艾偉氏曾提議一個公式,較爲適宜。其公式如下:

$$\mathrm{M.D.}=\frac{\Sigma\left|\frac{fx'}{i}\right|+c(N_a-N_b)+(.25+c^2)N_i}{N}(i) \quad \text{公式十六(f)}$$

這個公式,艾氏在其高級統計學第十章中解釋得非常詳細,讀者可參閱該書。內中符號之意義如下:

$$c=\frac{\mathrm{Mdn}-\mathrm{Mdn}'}{i}$$

N_a = 比含有 Mdn 之組小的各組之次數和

N_b = 比含有 Mdn 之組大的各組之次數和

N_i = 含有 Mdn 之組之次數

茲根據表三十四之材料,演算一下以爲例

$c=.196$

$N_a=1+5+12+21+23=62$

$N_b=71$

$N_i=23$

$$\mathrm{M.D.}=\frac{294+.196(62-71)+(.25+.196^2)23}{156}10=19.16$$

再根據表三十五之材料,演算一下,

$c=-.196$

$N_a=71$

$N_b=23+21+12+5+1=62$

$N_i=23$

$$\mathrm{M.D.}=\frac{294-.196(71-62)+(.25+.196^2)23}{156}10=19.16$$

第七章　標準差

27. 標準差之求法

(一)定義　中位差之最大缺點,在於差數之不計符號,在數理上不能說是一種完滿的辦法。但是在事實上,若計符號,亦無意義,因爲差數若取於中位數,正負各數相消以後,卽不等於零,亦所餘有限了。若取於均數,則必等於零,業已說明。故欲以差數之平均情形表示離中趨勢,而同時又欲免除差數總和等於零之困難,則最好求各差數之方。各數自乘是免除符號之最簡單的方法,並使其結果能得代數法的計算之便利。

標準差與中位差不同之處,乃其差數必須取於算術均數;但是此次之差數 x,因爲要消除負號,使其自乘。所以求標準差之公式內並非 x,乃是 x^2。x 旣是自乘,則標準差當然亦是自乘的。假使以 σ 代表標準差,

則
$$\sigma^2=\frac{x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+\cdots\cdots+x_n{}^2}{N}$$

$$\sigma^2=\frac{\Sigma x^2}{N}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式十七(a)}$$

因此標準差之意義是很顯明的,其定義爲各量數離開眞正算術均數之差數之算術均數之平方根。英文所謂 root-mean-square deviation (taken from mean)。

(二)譯名之討論　標準差直譯自英文 standard deviation 一名詞。但是什麼是標準,必須知其定義,否則標準二字是非常廣泛的,因此

有些作者譯爲均方差。惟均方差在功用上言不大正確。因爲均方差只能表示三種條件，(1)爲差，差表示差數，卽一個量數離開其他數之距離；(2)爲方，卽此差數之方；(3)爲均，卽各差數之方之均數。但標準差尙有兩種條件，卽(4)爲差數必須取於算術均數，(有些作者以爲可取於衆數或中位數，則失了標準差之代數法的運用，其見解是錯誤的。)與(5)爲平方根，因差數爲免除負號起見，經自乘之後，必須求其平方根。若我們以X代表量數，M′代表任何起點，x′代表 X－M′，以Δ代表均差，則

$$\Delta=\frac{\Sigma x'^2}{N}$$

而均方差之平方根，以 σ' 代表之，則

$$\sigma'=\sqrt{\frac{\Sigma x'^2}{N}}\qquad 或 \qquad \sigma'^2=\Delta=\frac{\Sigma x'^2}{N}$$

均方差之平方根與標準差之分別點，卽在第四個條件上，前者之差數可取於任何起點，而後者之差數只能取於均數。故從功用上譯 standard deviation，則是取於均數之均方差之平方根，惟如此譯名太煩，不如簡稱爲標準差。

(三)求法　標準差之求法，因爲可用代數的計算之便利，雖極繁煩的事實，可以簡便的方法來求之，也可以用圖表求之，而其結果又可以設法對較之，實爲一切表示離中趨勢法中之最完善的。玆逐一說明之於下：

方法一　公式十七(a)爲基礎的公式，雖其求法較煩，但初學者不可不明瞭。玆設一例以說明之。(見表三十六)

表三十六之步驟如下：

(a)求 ΣX　表中是 2998

(b)求M　表中是 59.96

(c)求個別的 x ,(X−M),卽表中之差數

(d)求個別的 x^2

(e)求 Σx^2　表中是 28049.9200

(f)求 $\Sigma x^2/N$　表中是 560.9984

(g)求 σ　表中是 23.685405

表三十六　標準差之計算法(例一)

分數	差數 x +	差數 x −	x^2	分數	差數 x +	差數 x −	x^2
6		53.96	2911.6816	12		47.96	2300.1616
15		44.96	2021.4016	88	28.04		786.2416
88	28.04		786.2416	25		34.96	1222.2016
93	33.04		1091.6416	35		24.96	623.0016
43		16.96	287.6416	41		18.96	359.4816
43		16.96	287.6416	44		15.96	254.7216
44		15.96	254.7216	74	14.04		197.1216
74	14.04		197.1216	49		10.96	120.1216
76	16.04		257.2816	51		8.96	80.2816
56		3.96	15.6816	51		8.96	80.2816
58		1.96	3.8416	58		1.96	3.8416
58		1.96	3.8416	58		1.96	3.8416
65	5.04		25.4016	62	2.04		4.1616
67	7.04		49.5616	65	5.04		25.4016
67	7.04		49.5616	67	7.04		49.5616
56		3.96	15.6816	70	10.04		100.8016
72	12.04		144.9616	45		14.96	223.8016
47		12.96	167.9616	76	16.04		257.2816
50		9.96	99.2016	79	19.04		362.5216
82	22.04		485.7616	82	22.04		485.7616
84	24.04		577.9216	86	26.04		678.0816
88	28.04		786.2416	18		41.96	1760.6416
21		38.96	1517.8816	91	31.04		963.4816
28		31.96	1021.4416	95	35.04		1227.8016
98	38.04		1447.0416	97	37.04		1371.9616
	N=50		ΣX=2998		M=59.96		Σx^2=28049.9200

$$\sigma=\sqrt{\frac{28049.92}{50}}=\sqrt{560.9984}=23.685405$$

方法二　公式十七(a)中之差數，常有小數，算起來異常麻煩，並且很容易錯誤。因此有一個簡便的方法，其公式如下：

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma x'^2}{N}-\left(\frac{\Sigma x'}{N}\right)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式十七(b)}$$

此公式是由(a)中演出來的；設以 $c=\frac{\Sigma x'}{N}$，則

$$M=M'+c\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

但　　$x=X-M\quad \therefore M=X-x$

　　　$x'=X-M'\quad \therefore M'=X-x'$

$$\therefore X-x=(X-x')+c\cdots\cdots(2)$$

$$-x=X-x'+c-X$$

$$x'=x+c$$

$$\Sigma x'^2=\Sigma(x+c)^2\cdots\cdots(3)$$

$$=\Sigma x^2+2c\Sigma x+Nc^2$$

但 $\Sigma x=0$

$$\therefore \Sigma x'^2=\Sigma x^2+Nc^2\cdots\cdots(4)$$

$$\frac{\Sigma x'^2}{N}=\frac{\Sigma x^2}{N}+c^2\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$\frac{\Sigma x^2}{N}=\frac{\Sigma x'^2}{N}-c^2\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma x'^2}{N}-c^2}\cdots\cdots\cdots(7)$$

這個公式有一便利處，我們可以用假設均數，因此避免了小數的麻煩。茲根據表三十六之材料，演算一下，以爲例。

表三十七　標準差之計算法(例二)

分數	x'	x'²	分數	x'	x'²	分數	x'	x'²
6	−52	2704	51	−7	49	74	16	256
12	−46	2116	51	−7	49	76	18	324
15	−43	1849	56	−2	4	76	18	324
18	−40	1600	56	−2	4	79	21	441
21	−37	1369	58	−438	0	82	24	576
25	−33	1089	58		0	82	24	576
28	−30	900	58	Σ(−x')	0	84	26	676
35	−23	529	58		0	86	28	784
41	−17	289	62	4	16	88	30	900
43	−15	225	65	7	49	88	30	900
43	−15	225	65	7	49	88	30	900
44	−14	196	67	9	81	91	33	1089
44	−14	196	67	9	81	93	35	1225
45	−13	169	67	9	81	95	37	1369
47	−11	121	70	12	144	97	39	1521
49	−9	81	72	14	196	98	40	1600
50	−8	64	74	16	256	Σ(+x')=536		Σx'²=28242

$N=50 \qquad M'=58 \qquad \Sigma x'=536-438=98$

$\Sigma x'/N = 98/50=1.96 \qquad (1.96)^2=3.8416$

$\Sigma x'^2/N = 28242/50=564.84$

$\sigma=\sqrt{564.84-3.8416}=\sqrt{560.9984}=23.685405$

公式十七(b)之差數都是整數,計算起來,便利多了,並且結果是一樣。再則這個公式又有較對的功用,因為可以假設另一均數,而結果也相同,關於此點,在方法六中有例以證之。

方法三 標準差之求法,亦可以根據於原有量數,而不必求差數,其公式如下:

$$\sigma=\sqrt{\frac{N(\Sigma X^2)-(\Sigma X)^2}{N^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式十七(c)}$$

或 $$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N}-M^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式十七(d)}$$

這兩個公式亦由(a)中演出來的,如下:

$$x^2=(X-M)^2$$

$$\Sigma x^2=\Sigma X^2-2M\Sigma X+M^2$$

$$\frac{\Sigma x^2}{N}=\frac{\Sigma X^2}{N}-2M\frac{\Sigma X}{N}+M^2$$

$$=\frac{\Sigma X^2}{N}-2M^2+M^2$$

$$=\frac{\Sigma X^2}{N}-M^2$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N}-M^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式十七(d)}$$

$$=\sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N}-\frac{(\Sigma X)^2}{N^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{N(\Sigma X^2)-(\Sigma X)^2}{N^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式十七(c)}$$

茲再根據一例以說明之：

表三十八　標準差之計算法(例三)

分數	X^2	X	X^2	X	X^2	X	X^2
6	36	65	4225	88	7744	67	4489
15	225	67	4489	25	625	70	4900
88	7744	67	4489	35	1225	45	2025
93	8649	72	5184	41	1681	76	5776
43	1849	47	2209	44	1936	79	6241
43	1849	50	2500	74	5476	82	6724
44	1936	82	6724	49	2401	86	7396
74	5476	84	7056	51	2601	18	324
76	5776	88	7744	51	2601	91	8281
56	3136	21	441	58	3364	95	9025
56	3136	28	784	58	3364	97	9409
58	3364	98	9604	62	3844	2998	207810
58	3364	12	144	65	4225	ΣX^2	ΣX^2

$N=50$　$(\Sigma X)^2=(2998)^2=8,988,004$　$M=2998/50=59.96$

$N(\Sigma X^2)=.50(207,810)=10,390,500$　$M^2=3595.2016$

$N(\Sigma X^2)-(\Sigma X)^2=1,402,496$　$\frac{\Sigma X^2}{N}=4156.2$

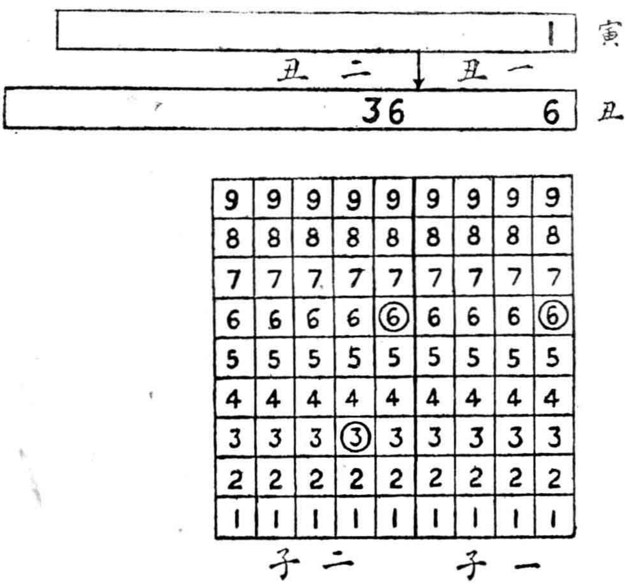
$N^2=2500$　$\frac{\Sigma X^2}{N}-M^2=561$

$\sigma=\sqrt{\frac{1,402,496}{2500}}=\sqrt{560.9984}$　$\sigma=\sqrt{561}=23.685$

$=23.685405$　公式十七(c)　公式十七(d)

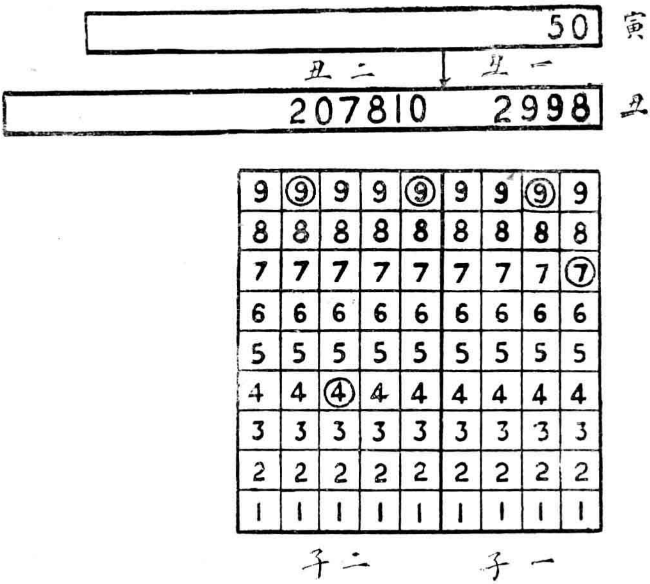
公式十七(c)有兩層便利,(一)可在機器上直接求標準差,(二)可用圖求之。方法四乃說明如何在機器上算，方法五乃說明如何在圖上算。

方法四—在機器上算標準差　機器有許多種，下面的說明乃根據於門羅的加法機器(Monroe's adding machine)。這個機器可分爲子，丑，寅，三部份，如圖二十一。假使我們把(子)分爲兩半，右四行爲(子一)，左五行爲(子二)；把(丑)亦分爲兩半，右四行爲(丑一)，左面各行爲(丑二)。若分數不十分大時，我們可以在機器上同時求 ΣX 與 ΣX^2。例如上表中第一個數是6；我們把(子)右面，即(子一)，第一行之6按下去，再在(子二)方面按下去36，(即 6^2，平方可在各種表中找，如



圖二十一　門羅加法機器(一)

本書中附表十）如圖二十一之情形。如此再將機器之柄向前一轉，在(丑一)卽可得 6，(丑二)卽可得 36；在(寅)卽可得 1，如圖。如此做去，直將全表中之量數做全，於是在（丑一）中我們可以得 2998 卽 ΣX，在（丑二）中得 207810 卽 ΣX^2，在（寅）可得 50，卽 N，如圖二十二。(子一）之數 97，卽表中最後一數，(子二）之數 9409，其平方也。



圖二十二　門羅加法機器(二)

ΣX 與 ΣX^2 及N旣求得，那麼公式十七（c）中要求的數都有了。此後之步驟如下：

（a）把 N，ΣX，與 ΣX^2 三數抄在一張紙上，再向附表中求 N^2(2500) 與 $(\Sigma X)^2$(8,988,004)；

(b)把機器清了；

(c)在機器上求 $N\Sigma X^2$，答數爲 10,390,500；

(d)把(子)部清了，(丑)部的數目就是 $N(\Sigma X^2)$，再把 $(\Sigma X)^2$ 之數按上(子)部，將機器之柄向後一轉，(丑)的數目就是 $N(\Sigma X^2)-(\Sigma X)^2$，(1,402,496)，將此數寫在紙上。

(e)把機器清了，再求 1,402,496/2500，答數爲 560.9984

(f)求此數之平方根，答數爲 σ。

方法五——在圖上求標準差　在機器上計算時，雖然是快，惟數目若有錯誤，第二個人無法校正。例如 6^2 爲 36，計算者一不留意，按下 35，則 ΣX^2 之數卽錯了。第二個人校正時，只知道他們二人的答數不同，至於不同之點究在那裏，無從查出。託蒲斯先生曾製一個算標準差的圖如下：(圖二十三)

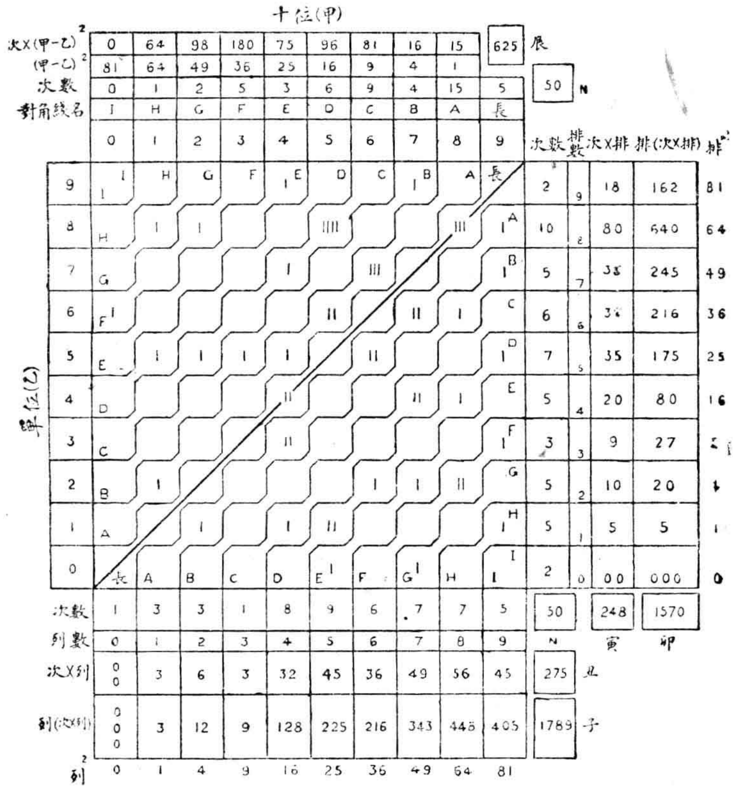
圖之說明與用法：

(a)圖之橫線代表十位數，縱線代表單位數；

(b)表三十八中第一人的分數是 6，所以我們在圖中之 0 列 (直行爲列 column) 與 6 排 (橫爲排 row) 相遇之方格中作一記號；最後一人的分數是 97，所以在 9 列與 7 排相遇之方格中作一記號。

(c)把表三十八所有分數都照(b)所說之法做去，然後求每列與每排之次數；如 9 列之次數爲 5，8 列之次數爲 7，7 列爲 7，等等；9 排爲 2，8 排爲 10，等等。

(d)把各列與各排之次數分別加好，將和數塡在 N 格中；各列的次數之和數與各排的次數之和數一定要相同(50)。



$$\sigma = \sqrt{\frac{\overset{N}{(50)}\left[110\overset{子}{(1789)} + 11\overset{卯}{(1570)} - 10\overset{辰}{(625)}\right] - \left[10\overset{丑}{(275)} + \overset{寅}{(248)}\right]^2}{\underset{N}{(50)^2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1.402.496}{2.500}} = 23{\cdot}685405$$

圖二十三　託蒲斯標準差圖

(e)將每排之次數乘其排數，將其積寫在右面之方格中〔卽(次×排)之方格〕；例如 9 排次數爲 2，排數爲 9，積爲 18；把 18 寫在右面之方格中。照此法將各排與各列之數一一做好。

(f)把每排（次×排）方格中之數再乘排數，或用次數乘排^{2}數，將其積寫在相當的〔排（次×排）〕方格中；例如 9 排次數爲 2，排^{2}爲 81，積爲 162；或用（次×排）格之數 18 乘排數 9，積亦爲 162；把 162 寫在相當的〔排（次×排）〕方格中。照此法將各排與各列之數一一做好。

(g)把各排之（次×排）數加好，將其和數寫在(寅)格中；各列的(次×列)之和數寫在(丑)格中。

(h)把各排的〔排(次×排)〕之數亦加好，將其和數寫在(卯)格中。各列的〔列(次×列)〕數之和數則寫在(子)格中。

(i)再對角地將所有格內之記號加起來；如長對角綫格中(卽圖中之斜線格)之數，爲 2,3，和數爲 5；A 對角綫有兩條，一在長對角綫之上，一在其下。其上綫格中之數爲 1,1,2,3，下綫格中之數爲 1,2,2,2,1；和數爲 15。把各對角綫一一如上做去，再將其和數寫在相當之格中，(卽圖中"對角綫名"行上之次數行各方格中。)（對角除了長對角綫外，都有兩條。)

(j)把此行各格中之數加好，將其和數寫在右面之(N)格中，此數須與下面(N)格中之數相同。

(k)把此行每格中之數，乘其上面方格中之數，此數是(甲－乙)^2，將其積寫在再上面方格中，卽〔次×(甲－乙)^2〕之格。例如 B"對角綫"

格之次數爲 4,4×4〔卽(甲－乙)²〕爲 16,把 16 寫在〔次(甲－乙)²〕行之相當方格中。

(l)把此行各格中之數加好,將其和數寫在(辰)格中。

(m)標準差就是:——

$$\sigma=\sqrt{\frac{\overset{N}{(50)}[110\overset{子}{(1789)}+11\overset{卯}{(1570)}-10\overset{辰}{(625)}]-[10\overset{丑}{(275)}+\overset{寅}{(248)}]^2}{\underset{N}{(50)^2}}}\quad\text{公式十七(e)}$$

公式十七(e)之證明:——公式十七(e)就是公式十七(c)。其證明如下:

以甲代表十位,乙代表單位,

則　$X=10\,甲+乙$　(1)

$\Sigma X=10\Sigma\,甲+\Sigma\,乙$　(2)

$\Sigma X^2=100\Sigma\,甲^2+20\Sigma\,甲乙+\Sigma\,乙^2$　(3)

惟Σ甲乙　算起非常麻煩,我們可以設法把其免去:——

$\Sigma(甲-乙)^2=\Sigma\,甲^2-2\Sigma\,甲乙+\Sigma\,乙^2$　(4)

$2\,\Sigma\,甲乙=\Sigma\,甲^2+\Sigma乙^2-\Sigma(甲-乙)^2$　(5)

所以 $20\Sigma\,甲乙=10\Sigma\,甲^2+10\Sigma\,乙^2-10\Sigma\,(甲-乙)^2$　(6)

因此(3)可寫爲

$\Sigma X^2=100\Sigma\,甲^2+10\Sigma\,甲^2+10\Sigma\,乙^2-10\Sigma(甲-乙)^2+\Sigma乙^2$　(7)

$\therefore\ \Sigma X^2=110\Sigma\,甲^2+11\Sigma\,乙^2-10\Sigma\,(甲-乙)^2$　(8)

依公式十七(c)

$$\sigma=\sqrt{\frac{N(\Sigma X^2)-(\Sigma X)^2}{N^2}}$$

(以)步驟(2)與(8)來代替 ΣX 與 ΣX^2,則

$$\sigma=\sqrt{\frac{N[110\Sigma\text{甲}^2+11\Sigma\text{乙}^2-10\Sigma(\text{甲}-\text{乙})^2]-[10\Sigma\text{甲}+\Sigma\text{乙}]^2}{N^2}}\quad(9)$$

照圖二十三,

Σ 甲＝丑　　Σ 甲^2＝子　　Σ(甲－乙)^2＝辰

Σ 乙＝寅　　Σ 乙^2＝卯

所以(9)就可寫如公式十七(e)

$$\sigma=\sqrt{\frac{\overset{N}{(\quad)}[110\overset{\text{子}}{(\quad)}+11\overset{\text{卯}}{(\quad)}-10\overset{\text{辰}}{(\quad)}]-[10\overset{\text{丑}}{(\quad)}+\overset{\text{寅}}{(\quad)}]^2}{\underset{N}{(\quad)}^2}}$$

圖之便利與限制:——此圖之便利處,在於步步可以校對。但是亦有限制。若量數很大,在 99 以上,此圖卽失其功用了。

方法六　若量數很大,次數又多,通常把其分組。在此種情形之下,求標準差之法最好用公式十七(f);

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma(fx'^2)}{N}-(c)^2}\,(i)\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式十七(f)}$$

$$x'=\frac{\text{組距中點}-M'}{i}$$

$$c=\frac{\Sigma(fx')}{N}$$

茲演算一例於下:

表三十九 標準差之計算法(例四)

組距中點	次數	差數 (M′=85) x′	次差 fx′	次差方 fx′²	差數 M′=105 x′	次差 fx′	次差方 fx′²	差數 M′=95 x′	次差 fx′	次差方 fx′²
45	2	−4	−8	32	−6	−12	72	−5	−10	50
55	5	−3	−15	45	−5	−25	125	−4	−20	80
65	12	−2	−24	48	−4	−48	192	−3	−36	108
75	17	−1	−17	17	−3	−51	153	−2	−34	68
85	23	0	$\boxed{-64}$	0	−2	−46	92	−1	−23	23
95	26	+1	26	26	−1	−26	26	0	$\boxed{-123}$	0
105	23	2	46	92	0	$\boxed{-208}$	0	1	23	23
115	18	3	54	162	+1	18	18	2	36	72
125	11	4	44	176	2	22	44	3	33	99
135	4	5	20	100	3	12	36	4	16	64
145	3	6	18	108	4	12	48	5	15	75
N=144		Σf(+x′)=208		806	Σf(+x)=64		806	Σf(+x′)=123		662
		$\Sigma fx'=208-64=144$ $C^2=\left(\frac{144}{144}\right)^2=1$ $\frac{\Sigma fx'^2}{N}\ \frac{806}{144}=5.5972$ $\sigma=\sqrt{5.5972-1}\times 10$ $=21.44$			$\Sigma fx'=-208+64=-144$ $C^2=\left(\frac{-144}{144}\right)^2=1$ $\frac{\Sigma fx'^2}{N}=\frac{806}{144}=5.5972$ $\sigma=\sqrt{5.5972-1}\times 10$ $=21.44$			$\Sigma fx'=123-123=0$ $C^2=0$ $\frac{\Sigma fx'^2}{N}=\frac{662}{144}=4.5972$ $\sigma=\sqrt{4.5972}\times 10$ $=21.44$		

在上表中我們可以看出這個公式有較對之功用。差數取於三種不同之起點,而結果完全相同。

由此公式所求得的結果,因為分組的關係,只是一個近似數。再則,

分組時所用組距不同，結果亦不完全一致。其理由在討論均數時已約略說明，茲不再述。

28. 距離量數之比較

(一)意義清楚　三種表示離中趨勢之量數中，以四分位差之意義為最清楚與最簡單。標準差之普通性質，則不大易了解，因為方其差，再求其均，而取其根之過程，實過含了數學的性質。惟讀者須了解此種根一均一方的量數，在他種科學中也常有之，習用之後，自能明白其便利。

(二)界說嚴格　三種量數之定義，均很嚴格，當無主觀的推測之弊。

(三)根據全部事實　標準差給全部任何量數均以相當的重量，最合於此條件。惟在事實之一部分缺乏正確的測量時，則標準差與中位差均不能求得，而四分位差則可求得。

(四)計算便利　最便利的是四分位差，中位差次之，而標準差因為要求差數之方，較四分位差麻煩得多。惟標準差之簡便的求法，也並不十分複雜，並有隨時較對之便利。

(五)抽樣影響　在普通分配中，標準差最少受抽樣之影響。關於此點，參閱抽樣之信度章。

(六)代數計算　這個條件只有標準差是符合的。關於此點，在說明標準差之求法中，已可見其大概，而在以後各章中，更其明顯。

在此我們只附帶聲明一下，求標準差時，差數必須取於均數，因為由此則標準差為一最小數，並且有代數的運用。假使我們以 σ^2 代表均方差，易言之，差數取於任何量數者，以 c 代表較正數，則依據上面所討論，我們得到

$$\sigma^2=\sigma'^2-c^2$$

由此可見標準差中之差數取於均數是最小，而取於任何其他量數之均方差，必須化爲標準差纔有意義。

29. 三種距離量數之關係

在一近似於常態的或略偏態的圖中，如圖七與圖八，這三種量數有一近似的關係如下：

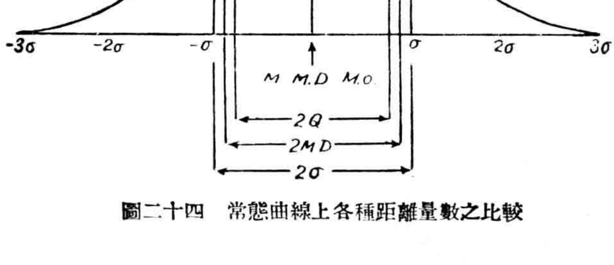
$$Q=\frac{2}{3}\sigma \qquad\qquad M.D.=\frac{4}{5}\sigma$$

例如表三十九，$\sigma=21.42$，$M.D.=17.08$　$Q=15$，所以

$$\frac{Q}{\sigma}=\frac{15}{21.44}=.70$$

$$\frac{M.D.}{\sigma}=\frac{17.08}{21.44}=.80$$

再則在對稱的或略不對稱的分配中，6 乘標準差，$7\frac{1}{2}$乘中位差，或 9 乘四分位差大概包括全部觀察百分之九十九強。在常態曲線中 $\pm1\sigma$ 包括全數之 68.26%，$\pm$ 1 M. D. 包括全數 57.5%，$\pm$ 1Q 包括 50%。若以圖表示之，如下：



圖二十四　常態曲線上各種距離量數之比較

在這個圖中,我們可以看見, M, Mdn, Mo. 三數都在一點上,所以是點量數; Q, M. D., σ 三數都表示一個距離,故是距離量數。至於何以一個 σ 在常態曲線中包括 34.13% 或 $\pm 1\sigma$ 包括 68.26%,等等,請參考常態曲線章。

第八章　標準差之應用

30. 標準差之相對化——差異係數

離中趨勢有絕對與相對之分。標準差為一個量表之一距離，故僅能表示絕對的相差度。牠並不是一純粹的數目，必須以變量之單位表示之。例如 $\sigma=4$ 問題，或 $\sigma=91$ 元等等。因此，若兩個量表單位不同，差度實無從比較。再則，均數之大小，雖不影響於標準差，但是標準差必須根據於離開於均數之差數之大小。故我們若欲求一表示差度數量，既無關於量表之單位而同時又顧慮到相對於均數之差數之大小，則祇須以均數除標準差可矣。此種結果，當然只是一個純粹的數目，既非一點，又非一距離，所以僅能表示一種分配之相對的差度。最普通的公式是披爾遜所提議的，

$$V=100\frac{\sigma}{M} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式十八(a)}$$

在此公式內，V是差異係數(coefficient of variation)，100之意則在增大數值。茲設一例以說明其大意。在下面三表中，表四十與表四十一，以均數論，很不相同，一是 6，一是 16，但是標準差則完全相同，以證均數之大小，是無關於標準差的。表四十二之標準差大得多，因為各個量數離開均數之差數大得多了。但是這三個分配之差度，依據標準差而比較之，毫無意義。表四十二之最高數為 210，最低數為 110，標準差決不能小於 10，反之，表四十與表四十一之標準差亦決不能大於 10，都很顯然。以相對的差度表示之，則表四十二與表四十一雖絕對的差度很不同

而相對的差度則完全相同。反之，表四十與表四十一絕對的相差度雖完全相同，而相對的差度則極不同。

表四十

X	x	x^2
1	−5	25
2	−4	16
3	−3	9
4	−2	4
5	−1	1
6	0	0
7	1	1
8	2	4
9	3	9
10	4	16
11	5	25
$66=\Sigma X$,	$\Sigma x^2=110$	

$N=11$　$M=6$　$\frac{\Sigma x^2}{N}=10$

$\sigma=3.162$

$V=52.7$

表四十一

X	x	x^2
11	−5	25
12	−4	16
13	−3	9
14	−2	4
15	−1	1
16	0	0
17	1	1
18	2	4
19	3	9
20	4	16
21	5	25
$176=\Sigma X$,	$\Sigma x^2=110$	

$N=11$　$M=16$　$\frac{\Sigma x^2}{N}=10$

$\sigma=3.162$

$V=19.76$

表四十二

X	x	x^2
110	−50	2500
120	−40	1600
130	−30	900
140	−20	400
150	−10	100
160	0	0
170	10	100
180	20	400
190	30	900
200	40	1600
210	50	2500
$1760=\Sigma X$,	$\Sigma x^2=11000$	

$N=11$　$M=160$　$\frac{\Sigma x^2}{N}=1000$

$\sigma=31.62$

$V=19.76$

惟應用差異係數時，我們必須注意牠是一個比例，有時受均數之影響。在研究有些問題時，以差異係數爲根據，其結果未必可用。例如，智力差異度隨年齡而增加或減少一問題，以差異係數表示之，一定是減少的。因爲年齡增加，均數當然隨之增加；而差異程度若不大變動，則差異

係數自然隨年齡而減少。漢蒙(Henmon)對於此問題，曾作一研究，結果如下：

表四十三　漢蒙關於各年齡智力差異度之研究

年齡	V	年齡	V	年齡	V	年齡	V
7	41.7	10	28.3	13	26.2	16	25.3
8	35.6	11	28.0	14	25.3	17	26.6
9	31.3	12	26.6	15	25.7	18	20.6

漢蒙因而結論差異度是逐年減少的。但是這個結論與智力商數之理論是相反的；智商若能成爲一個正確的智力數量，其中之一個條件，就是差異度隨年齡而增加。我們若詳閱漢蒙之結果，七歲至十歲差異係數之減少是很顯明的，自十歲至十七歲則不大變動。因爲漢蒙所用的測驗是比較簡單的測驗，故自七歲至十歲，均數的增加很大，而同時絕對的差異度不能隨比例而增加。自十歲以後，均數之增加有限，而絕對的差異度能照比例地增加，所以差異係數變動很少，且有時反表示略增加，如十四歲之與十五歲，十六歲之與十七歲。可見差異係數之運用有其限制的。

除了披爾遜的公式外，桑戴克也曾經用過另一公式，如下：

$$= 100\frac{M.\ D.}{\sqrt{Mdn}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式十八(b)}$$

但是這個公式因隨所用單位而變，統計學家多不採用之，學者可以忽略之。朱君毅氏對於此點有實例證明，見於其所著教育統計學頁七十五。

31. 偏態性之測量

在討論中心量數之意義時，我們說過一個分配有三個特徵，第一爲分配之形式。分配之形式，個個不同，第二章已經敍述其大略。本節所討論的問題，若一個分配是偏態的，則如何測量其偏態之程度。

偏態之圖，有偏於右，有偏於左，其偏右偏左之情形，在公式八中已可測量出來。若兩個分配同偏右或同偏左，究竟那個分配更偏些，則公式八不能說明之，因爲 M, Mdn, Mo. 三數都是絕對的數量，其大小與所選擇之單位有密切之關係。故披爾遜提議一種相對的測量法，其公式如下：

$$偏態性(\text{skewness})=\frac{M-Mo}{\sigma}\cdots\cdots\cdots\cdots 公式十九(a)$$

$$但\quad Mo=M-3(M-Mdn)$$

$$\therefore\quad 偏態性=\frac{3(M-Mdn)}{\sigma}\cdots\cdots 公式十九(b)$$

在此公式內我們可以看出，$M-Mo$ 或 $M-Mdn$ 僅能告訴我們一個分配之偏左或偏右，而以 σ 除之以後，則兩個分配偏態之大小也可以測量了。茲設例以說明之。例如，甲乙兩分配，衆數均小於均數，其圖皆是右傾的。以數代入，

$$M_{甲}=10\qquad Mo_{甲}=9.5\qquad M-Mo=.5$$

$$M_{乙}=115\qquad Mo_{乙}=111\qquad M-Mo=4$$

但是這兩個分配之單位不一，究竟那個更偏些，不得而知。若 $\sigma_{甲}=2.5$，$\sigma_{乙}=20$，則此兩個分配之偏態性是一樣的都是 .2。若 $\sigma_{甲}=2$，$\sigma_{乙}=22$，則甲分配之偏態性爲 .25，乙分配之偏態性爲 .18 了。

若我們不以 σ 爲根據而用 Q 也可。其公式如下：

$$偏態性=\frac{(q_3-Mdn)-(Mdn-q_1)}{Q}\cdots\cdots公式十九(c)$$

$$或=\frac{q_1+q_3-2\,Mdn}{Q}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots公式十九(d)$$

公式（c）（d）為優爾所提議，但是他自己亦說在略偏態的分配中（a）（b）兩公式較優。

32. 比較量數

在上節中，我們可以看見標準差不但是一個最好的測量離中趨勢法，並且是比較不同事項或不同單位的量表之單位。同時標準差因為其代數的性質，使此功用更其顯明。假設有一個學生在算學測驗得 90 分，在國文測驗得 80，究竟那種學科程度好些？由表面上觀之，似乎是算學，實際上未必如此。測驗分數含有相對性，並無固定之零點與單位。若在國文測驗中加入若干極易回答之問題，則 80 分或可變為 90。故比較兩種測驗之分數時，有三個條件，必須詳細考慮。

（1）我們必須知道第一量表中之某第一點等於第二量表中之某第一點，易言之，兩個量表的參照點必須決定。

（2）我們必須知道第一量表中之某第二點等於第二量表中之某第二點，易言之，兩個量表中之單位必須決定。

（3）我們必須知道兩個量表中決定各點之關係的原則。這個條件，最難探求，必須詳細考慮。

通常比較兩種量表之分數的方法有三：(1) 比例法，(2) 百分位數法 (3) 標準數法，茲逐一說明之。

(一)比例法 (ratio method) 譬如有一個五年級學生在國文測驗

得 138 分，在算學測驗中得 75 分，而平均五年級學生的國文測驗常模爲 172，算學測驗常模爲 145。若用比例法以比較時，我們的假說如下：

(a)國文測驗中之零點等於算學測驗中之零點。

(b)國文測驗中之均數等於算學測驗中之均數。

(c)國文測驗中與算學測驗中各單位有同一的比例。因此，用比例法以比較各量數之公式爲

$$\frac{X_1}{M_1}=\frac{X_2}{M_2}\text{……………………公式二十(a)}$$

$$\text{或}\quad X_1=\frac{M_1}{M_2}X_2\quad\text{或}\quad X_2=\frac{M_2}{M_1}X_1\text{…公式二十(b)}$$

這三個假設，(b)項大概可以適用，沒有多大錯誤。(a)與(c)兩項則不然。(a)項假設——零分相等——在某種測量上是可以適用的，例如高度與重量(零高度＝零重量)；在教育測量上是不能適用，因爲測驗中的零分，可以隨時移動。零分既不相等，則(a)項假設不合於第一個條件了，(c)項假設之錯誤更不必論矣。

退一步說，(a)項的假設可以適用，(c)項假設亦未必可用。以本例論，此生與平均五年級生在國文測驗上所表示之比例爲

$$\frac{138}{172}=.802$$

而在算學測驗上所表示之比例爲

$$\frac{75}{145}=.517$$

若(c)假設是對的，則這個學生是很異常的，因為其算學程度不及其國文程度約有 28%。假定(a)(b)兩項仍舊，而(c)項改為國文之發展的法則等於算學之發展的法則的立方根，則得如下的結果：國文之發展指數仍是 .802，而算學則為$\sqrt[3]{75/145}=.803$。如此，則這個學生之算學程度與其國文程度並無區別。第三項的假設不同，其結果則大異。故我們知道比例法之不適用，因為(a)項假設之不正確。在統計學中欲知比例法之是否適用，常用下列公式以試驗之：

$$\frac{M_1}{\sigma_1}=\frac{M_2}{\sigma_2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式二十一}$$

若這兩個比例相等，則比例法可以適用。

(二)百分位數法　百分位數法中之假設是國文測驗之 P_p 等於算學測驗中同一 p 之 P_p，這個方法之缺點，已在第三章中討論過，就是各百分位間之距離不一。再則百分位數是數得來的，缺乏代數的性質。

(三)標準數法　比較最好的方法是標準數法 (standard measure method)。在此法中，以量表中最穩定點，即均數，為參照點，免除了零分相等之假設。最好以距離量數，即標準差，為單位，如此不同單位的量表可以比較了。並且標準差有代數的性質，而又彼此之間是相等的，可以補救百分位數之缺點。故用標準數時，我們的假設如下：

(a)第一量表中之均數等於第二量表之均數。$M_1=M_2$

(b)第一量表中之標準差等於第二量表之標準差。$\sigma_1=\sigma_2$

(c)至於第三個條件，以離均數之差數表示之，

$$\frac{x_1}{\sigma_1}=\frac{x_2}{\sigma_2}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式二十二(a)}$$

或 $$\frac{X_1-M_1}{\sigma_1}=\frac{X_2-M_2}{\sigma_2}$$

$$X_1=M_1+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(X_2-M_2)\cdots\cdots\text{公式二十二(b)}$$

或 $$X_2=M_2+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(X_1-M_1)\cdots\cdots\text{公式二十二(c)}$$

茲舉例以說明其求法。

表四十四 標準數之求法(仿自 Holzinger, Statistical Methods, p. 119)

測驗	均數	σ	一個學生之分數 (X)	(X－M)	x/σ
1	163	10.2	179	16	1.57
2	119	8.1	128	9	1.11
3	24	6.0	28	4	.67
4	264	39.8	312	48	1.21
5	74	8.2	89	15	1.83
6	7.3	2.1	6	－1.3	－.62
7	133	16.4	151	18	1.10
		總數	893		6.87
		均數	127.6		.98

所謂 x/σ 就是標準數。標準數是可以比較的。在上表中我們可以看出這個學生以原有分數論，在測驗四中得最多分，但是以標準數觀之，成績最好的卻是測驗五。若我們依據公式(b)來求各測驗與測驗五之相對的分數，則更顯明。以 X_2 代表測驗五之分數 89，其他各測驗之相當分數如下：

$$X_1\text{（測驗一）}=163+\frac{10.2}{8.2}(15)=182$$

$$X_1\text{（測驗二）}=119+\frac{8.1}{8.2}(15)=134$$

$$X_1\text{（測驗三）}=24+\frac{6.0}{8.2}(15)=35$$

$$X_1\text{（測驗四）}=264+\frac{39.8}{8.2}(15)=337$$

$$X_1\text{（測驗六）}=7.3+\frac{2.1}{8.2}(15)=11.4$$

$$X_1\text{（測驗七）}=133+\frac{16.4}{8.2}(15)=163$$

若所有之測驗的程度，都與測驗五一樣好，則測驗一必須得 182，測驗二得 133，等等。

既明白了標準數之求法，我們再來比較這種量數與比例法之區別。下表是愛里斯(Ayres)與桑戴克兩種書法量表同組字樣之原有分數。在此表中我們可以看出以原有分數論，兩個量表給予每個樣本之分數很不相同，無從比較。若按照標準數法與比例法化為相當分數後，纔可以比較。下表左三行錄自 Kelley, T. L.: Statistical Method, p. 116; 作者按照標準數法與比例法把愛里斯量表之分數化爲相等於桑戴克量表之分數，以資比較。第四行之數則根據於公式二十二(b)，第五行之數則根據於公式二十(b)。茲各演一數以爲例：

$$X_1=10.08+\frac{2.229}{15.93}(20.6-49.6)=10.08+.14\times-29.0$$

$$=6.0\quad\text{（標準數法）}$$

$$X_1=\frac{10.08}{49.6}(20.6)=.2032\times20.6=4.2\quad\text{（比例法）}$$

表四十五 兩種量表的分數之比較

樣本	原有分數		相對於桑表之愛表分數		標準分數		百分位分數	
號數	愛里斯	桑戴克	標準數法	比例法	愛表	桑表	愛表	桑表
12	20.6	5.9	6.0	4.2	−1.82	−1.88	2.1	2.1
6	24.2	6.5	6.5	4.9	−1.59	−1.61	6.25	6.25
8	28.4	7.3	7.1	5.8	−1.33	−1.25	10.4	10.4
21	35.3	8.4	8.1	7.2	− .90	− .75	14.6	27.1
4	36.2	8.0	8.2	7.4	− .84	− .93	18.75	14.6
15	36.3	8.3	8.2	7.4	− .83	− .80	22.9	22.9
1	37.1	8.1	8.3	7.5	− .78	− .89	27.1	18.75
22	40.3	8.9	8.8	8.2	− .58	− .53	33.3	33.3
5	40.3	9.0	8.8	8.2	− .58	− .48	33.3	39.6
17	41.8	8.9	9.0	8.5	− .49	− .53	39.6	33.3
18	48.9	10.1	10.0	9.9	− .04	.01	43.75	43.75
14	49.2	10.2	10.0	10.0	− .03	.05	47.9	47.9
9	52.4	10.7	10.5	10.6	.18	.28	52.1	58.3
7	55.7	10.6	10.9	11.3	.38	.23	58.3	52.1
24	55.7	10.8	10.9	11.3	.38	.32	58.3	64.6
11	56.0	10.7	11.0	11.4	.40	.28	64.6	58.3
10	56.9	11.3	11.1	11.6	.46	.55	68.75	77.1
2	57.7	10.9	11.2	11.7	.51	.37	72.9	68.75
13	58.0	11.2	11.3	11.8	.53	.50	77.1	72.9
19	58.9	11.5	11.4	12.0	.58	.64	81.25	81.25
20	64.2	11.8	12.1	13.0	.92	.77	85.4	85.4
23	74.2	13.8	13.5	15.1	1.54	1.67	89.6	89.6
3	80.1	14.2	14.3	16.3	1.91	1.85	93.75	93.75
16	82.1	14.8	14.6	16.7	2.04	2.12	97.9	97.9
M	49.6	10.08	10.075	10.083	.00	.00		
σ	15.93	2.229			1.00	1.00		

由上表觀之，以標準數論，兩種量表所給予的分數幾乎完全相等。以比例法論，則離開均數愈遠之各數，相差愈大。比例法之結果所以不同，不在於愛里斯量表均數等於桑戴克量表均數之假設，乃在於愛表零分等於桑表零分之假定。觀下表必更明了。

表四十六　兩種測驗之相等分數

標準數法		比例法	
相等分數		相等分數	
愛里斯	桑戴克	愛里斯	桑戴克
X_1	X_2	X_1	X_2
−22.4	0.0	0.0	0.0
0.0	3.1		
20.5	6.0	29.5	6.0
49.6	10.1	49.6	10.1
70.0	12.9	70.0	14.2
84.8	15.0	73.8	15.0

在上表中，我們知道，以標準數論，愛表之零分並不等桑表之零分，而等於桑表 3.1 分；桑表中之零分則等於愛表之 −22.4 分。至於兩表之均數是相等的。

若我們比較百分位數與標準數法，在表四十五之第六，七，八，九，中可以看出，這兩種方法之結果均能給予我們以同樣的印象，就是桑氏與愛氏量表所給予各樣本之分數，以相對性論，實際上幾乎完全相同。(六，七，八，九各行數錄自中央統計聯合會聯合演講之七）不過百分位因其上述的缺點，總不如標準數法好。惟這兩種分數是可以溝通的，在

相當條件之下，我們可以化百分位爲標準數。關於此點，詳見下章。

標準數之方法，並非萬能的，亦有其限制。我們在上面已經說過一個分配有三個特徵，卽中心量數，離中趨勢與形式。在標準數法中，我們只顧慮到兩點，而未談及形式。故在兩個形式極不相同的分配中，則標準差等於標準差之假設，不能適用。標準差相等之現象，只存在於形式相同的分配。談至此，爲統計學中之最困難的問題，就是曲線配合。本書中關於此點，只談到一種最簡單的曲線——卽常態曲線——之配合，而對於其他曲線之配合，學者須參考較深的書籍。

第九章　二項展開式與機率

33. 機率理論之簡單的解說

機率理論是統計學的基石，其發展大致由於兩種材料，(一)含有機會性質的遊戲，如投骰子等，(二)統計的事實，如人口調查等之數量的知識。心理實驗常相似這兩種材料。任何實驗，其結果必依賴於人類的評判，與投骰子有許多類似之點。在兩種事件中，機會常爲決定結果之因子。雖然，我們相信在此兩種事件中，有許多因子在其中工作，徒因我人知識之薄弱，未得知之而已。因此對於人類之動作和反應的任何科學實驗，必須重複許多次，直到我們聚集了一大堆數量的知識。

這些材料聚集了以後，經過詳細分析，必定發現許多特點，茲舉一例以說明之。曾經有人做過一關於重量辨別的實驗。在此實驗中，選了一個標準的重量，計 100 克蘭姆，而後將此重量與 84,88,92,96,100,104,108 克蘭姆等重量比較。在每次比較之時，總把標準重量先舉一下，而後隨之以一不知數的重量，再裁判此重量比標準重量較輕或較重。故每次之結果，大約如下：

108 克	答案：	較重
104 克	答案：	相等
100 克	答案：	較重
96 克	答案：	較輕
92 克	答案：	相等

88 克　答案：較輕

84 克　答案：較輕

在此記錄中，答案較重的重量中之最輕的是 100 克蘭姆，於是記下了。如此試驗四百次，每次把答案較重的重量中之最輕的一個記下了，可得下列的分配。

克蘭姆	84	88	92	96	100	104	108
次數	1	8	36	85	143	119	8

在此分配中，我們可以看出各重量所得的次數不同，易言之，並非各重量有同等機會成爲「答案較重的重量中之最輕的重量」。重量 100 克蘭姆之機會最多，在 400 次中有 143 次；84 克蘭姆的重量之機會最少，在 400 次中只有 1 次。至於何以 100 克蘭姆的重量之機會最多，84 克蘭姆的重量之機會最少，我們的答案，恐怕是很簡單的，就是前者與標準重量相差最少，後者相差最多。若再問何以所有裁判並非完全是 100 克蘭姆，而竟有以 84 克蘭姆較標準重量還重些之原因，則我們實無法回答，徒云機會而已。這種情形，與投骰子完全相似。其實因子極其複雜，惟我人自已不知之罷了。

在統計學中表示這種機會之數量，叫做機率。所謂機率，以普通言語解釋之如下。我們常說某件事是可能的，某件事是不可能的。所謂可能者卽指在某種情形下，這件事易於發生。若問何以知其易於發生，則因爲我們想到，在過去之時在同樣的情形之下，這件事常常發生。所以「可能」並非是「一定」，「一定」乃是可能的事件中之一極端。

在數學上，不過把這種不確定的敍述法以數量表示之而已。故數學

中所謂機率乃是一種成功或失敗之數目與全體總數目之比例。通常以P代表成功的機率，Q代表失敗的機率。若再以h代表成功的數目，k代表失敗的數目，N仍舊代表總數，以1表示「一定」，則

$$h+k=N$$

$$P=\frac{h}{N}=\frac{h}{h+k} \qquad Q=\frac{k}{N}=\frac{k}{h+k}$$

$$P+Q=1 \qquad P=1-Q \qquad Q=1-P$$

以表四十六之例子論，84 克蘭姆之成功的機率爲 1/400，失敗之機率爲 399/400。(在此當然假設以被記錄下爲成功)。

機率英文是 probability，爲統計學之最重要的部份。茲爲便利討論起見，設例以說明一事之機率與複事之機率。

(一)一事之機率　設袋中有五個白球，五個黑球，任意抽出一球，以得白球爲成功，黑球爲失敗，則成功與失敗機率當然是：

$$P=\frac{5}{5+5}=\frac{1}{2}$$

$$Q=\frac{5}{5+5}=\frac{1}{2}$$

$$P+Q=1$$

再設袋中有白球十六個，綠球二十個，黑球二十四個，紅球二十八個，也任取一球，以得白球爲成功，則

$$h=16$$

$$\kappa=20+24+28=72$$

$$P=\frac{16}{16+72}=\cdot 182$$

(二)複事之機率 設袋中有白球五,黑球五,若任意抽出一球,記下其顏色,再將此球送回原袋,再抽一球,以連抽二白球爲成功,則成功之機率應爲多少?欲解決這個問題,我們須把代數中錯列與組合(permutation and combination)稍微温習一下。

(a)錯列 用各種次序排列事物,謂之錯列。如 a b 二事物有兩種排列,卽 ab 與 ba 是也。若有三種事物,abc,二種一次,則排法有六種,卽 ab,ac,ba,bc,ca,cb 是也。若三種一次,則排法也有六種,卽 abc,acb,bac,bca,cab,cba 是也。在代數中,求錯列之方法有一普通的公式,

$$^{n}p_{r}=(n)(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$$

或 $$^{n}p_{n}=\underline{|n}$$

n =幾種事物,

r =同時取出幾種,

p =錯列數。

以上三例言:

(1) $^{2}p_{2}=(2)(2-2+1)=2$ 二種排法

(2) $^{3}p_{2}=(3)(3-2+1)=6$ 六種排法

(3) $^{3}p_{3}=(3)(2)(3-3+1)=6$ 六種排法

假設有四種事物,同時取出三種,則錯列之數爲 24。如下:

$$^{4}p_{3}=(4)(3)(4-3+1)=24$$

(b)組合 錯列中次序更換亦算一次,而在組合中則次序更換並不計算。ab,ba 爲兩種錯列,只是一個組合。故若以 c 代組合之數,則

$$^{n}C_{n}=1$$

求組合的數之公式爲

$$^{n}C_{r}=\frac{(n)(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{(1)\ (2)\ (3)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(r)}$$

或　$$^{n}C_{r}=\frac{^{n}P_{r}}{\lfloor r}$$

或　$$^{n}C_{r}=\frac{\lfloor n}{\lfloor n-r}\div\lfloor r=\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}$$

或　$$^{n}C_{r}={}^{n}C_{n-r}$$

故．　$$^{n}C_{o}=1$$

(c)複事機率之計算　溫了錯列與組合後，我們可以回來說明複事之機率，在此例中，我們有四種錯列，卽

白白　　白黑　　黑白　　黑黑

而組合則只有三個卽

全白　　全黑　　一白一黑

所以我們可以說在五個白球，五個黑球之中，連抽出二白球，或二黑球，或一白一黑之機率如下：

$$P_{二白}=\frac{1}{1+1+2}=\frac{1}{4}\qquad Q_{二白}=\frac{3}{4}$$

$$P_{二黑}=\frac{1}{1+1+2}=\frac{1}{4}\qquad Q_{二黑}=\frac{3}{4}$$

$$P_{一白一黑}=\frac{2}{1+1+2}=\frac{1}{2}\qquad Q_{一白一黑}=\frac{1}{2}$$

若以連抽出二白球爲成功，則成功的機率是·25。因第一次抽出一白球之機率爲$\frac{1}{2}$，將此球送回原袋，則第二次抽出一白球之機率亦爲$\frac{1}{2}$。連

抽二白球之機率，爲二抽之機率之積，卽$.5\times.5=.25$。

若我們將這個例子略加複雜化，以連抽三白球爲成功，則有八種錯列如下：

白白白	黑黑黑
白白黑	黑黑白
白黑白	黑白黑
白黑黑	黑白白

以組合論則有四個：

全白　　全黑　　二白一黑　　一白二黑

各組合之機率如下：

$$P_{\text{三白}}=\frac{1}{8}$$

$$P_{\text{二白一黑}}=\frac{3}{8}$$

$$P_{\text{二黑一白}}=\frac{3}{8}$$

$$P_{\text{三黑}}=\frac{1}{8}$$

34. 二項展開式

若問題異常複雜，例如在上例中，以連抽十個白球爲成功，則$P_{\text{十白}}$等於什麼，$P_{\text{九白一黑}}$等於多少，$P_{\text{八白二黑}}$等於多少等等，則我們須應用二項展開式以求之。二項展開之普通公式爲：

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}a^{n-3}b^3+\cdots+b^n$$

若以Q代a，以P代b，則公式中之a與b可改寫爲Q與P了。同時我

們知道，$^{N}C_0=1$

$$^{N}C_1=n$$

$$^{N}C_2=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$$

$$^{n}C_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$^{N}C_N=1$$

故二項展開式可改寫爲：

$$(Q+P)^n={}^{n}C_0Q^n+{}^{n}C_1Q^{n-1}P+{}^{n}C_2Q^{n-2}P^2+{}^{n}C_3Q^{n-3}P^3+\cdots$$
$$+{}^{n}C_nP^n\cdots\cdots\text{公式二十三}$$

以連抽二白球之例說，Q 與 P 均等於 $\frac{1}{2}$，而 n 等於 2，應用公式，

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

易言之，　$P_{\text{○白}}=\frac{1}{4}$

$$P_{\text{一白一黑}}=\frac{1}{2}$$

$$P_{\text{二白}}=\frac{1}{4}$$

以連抽三球之例論，

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^3={}^{n}C_0Q^n+{}^{n}C_1Q^{n-1}P+{}^{n}C_2Q^{n-2}P^2+{}^{n}C_nP^n$$
$$=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)+3\times\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2+1\times\left(\frac{1}{2}\right)^3$$
$$=\frac{1}{8}\qquad+\qquad\frac{3}{8}\qquad+\qquad\frac{3}{8}\qquad+\qquad\frac{1}{8}$$

以連抽十球論，則結果如下表：

表四十七 連抽十球的機率表

白球數	Q = .5		P = .5		係數		機率		1024次中之次數
	值	對數	值	對數	值	對數	對數	值	
0	$q^n = .5^{10}$	$\bar{4}.9900$			$^nC_0 = 1$	.0000	$^nC_0q^n = \bar{4}.9900$	.001	1
1	$q^{n-1} = .5^9$	$\bar{3}.2910$	$p = .5$	$\bar{1}.6990$	$^nC_1 = 10$	1.0000	$^nC_1q^{n-1}p = \bar{3}.9900$	.010	10
2	$q^{n-2} = .5^8$	$\bar{3}.5920$	$p^{n-8} = .5^2$	$\bar{1}.3980$	$^nC_2 = 45$	1.6532	$^nC_2q^{n-2}p^2 = \bar{2}.6432$	.044	45
3	$q^{n-3} = .5^7$	$\bar{3}.8930$	$p^{n-7} = .5^3$	$\bar{1}.0970$	$^nC_3 = 120$	2.0792	$^nC_3q^{n-3}p^3 = \bar{1}.0692$	.117	120
4	$q^{n-4} = .5^6$	$\bar{2}.1940$	$p^{n-6} = .5^4$	$\bar{2}.7960$	$^nC_4 = 210$	2.3222	$^nC_4q^{n-4}p^4 = \bar{1}.3122$	.205	210
5	$q^{n-5} = .5^5$	$\bar{2}.4950$	$p^{n-5} = .5^5$	$\bar{2}.4950$	$^nC_5 = 252$	2.4014	$^nC_5q^{n-5}p^5 = \bar{1}.3914$	.246	252
6	$q^{n-6} = .5^4$	$\bar{2}.7960$	$p^{n-4} = .5^6$	$\bar{2}.1940$	$^nC_6 = 210$	2.3222	$^nC_6q^{n-6}p^6 = \bar{1}.3122$	.205	210
7	$q^{n-7} = .5^3$	$\bar{1}.0970$	$p^{n-3} = .5^7$	$\bar{3}.8930$	$^nC_7 = 120$	2.0792	$^nC_7q^{n-7}p^7 = \bar{1}.0692$	.117	120
8	$q^{n-8} = .5^2$	$\bar{1}.3980$	$p^{n-2} = .5^8$	$\bar{3}.5920$	$^nC_8 = 45$	1.6532	$^nC_8q^{n-8}p^8 = \bar{2}.6432$	.044	45
9	$q = .5$	$\bar{1}.6990$	$p^{n-1} = .5^9$	$\bar{3}.2910$	$^nC_9 = 10$	1.0000	$^nC_9q^{n-9}p^9 = \bar{3}.9900$	.010	10
10			$p^n = .5^{10}$	$\bar{4}.9900$	$^nC_n = 1$	.0000	$^nC_{10}p^n = \bar{4}.9900$	.001	1
	n = 10		n = 10					1.000	1024

上面所舉的例子，P與Q都是相等的。若P與Q不相等，二項展開式也一樣可以應用。設有十個骰子，同時投擲，以得1點爲成功，得 2，3，4，5，6 等點都爲失敗，卽 $P=\frac{1}{6}$，$Q=\frac{5}{6}$，依二項展開式求之如下：

$$\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\right)^{10}={}^{10}C_0\left(\frac{5}{6}\right)^{10}+{}^{10}C_1\left(\frac{5}{6}\right)^9\left(\frac{1}{6}\right)+{}^{10}C_2\left(\frac{5}{6}\right)^8\left(\frac{1}{6}\right)^2$$

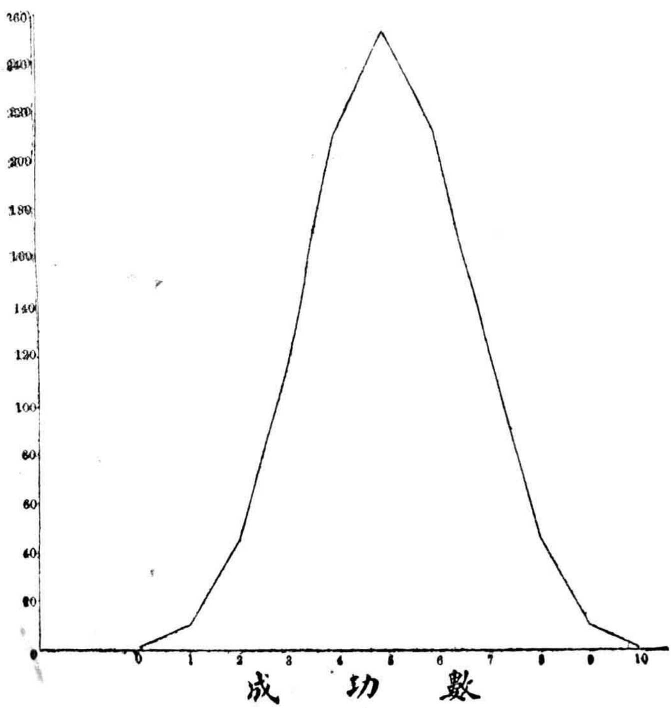
$$+{}^{10}C_3\left(\frac{5}{6}\right)^7\left(\frac{1}{6}\right)^3+{}^{10}C_4\left(\frac{5}{6}\right)^6\left(\frac{1}{6}\right)^4$$

$$+\cdots\cdots+{}^{10}C_9\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^9+{}^{10}C_{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$$

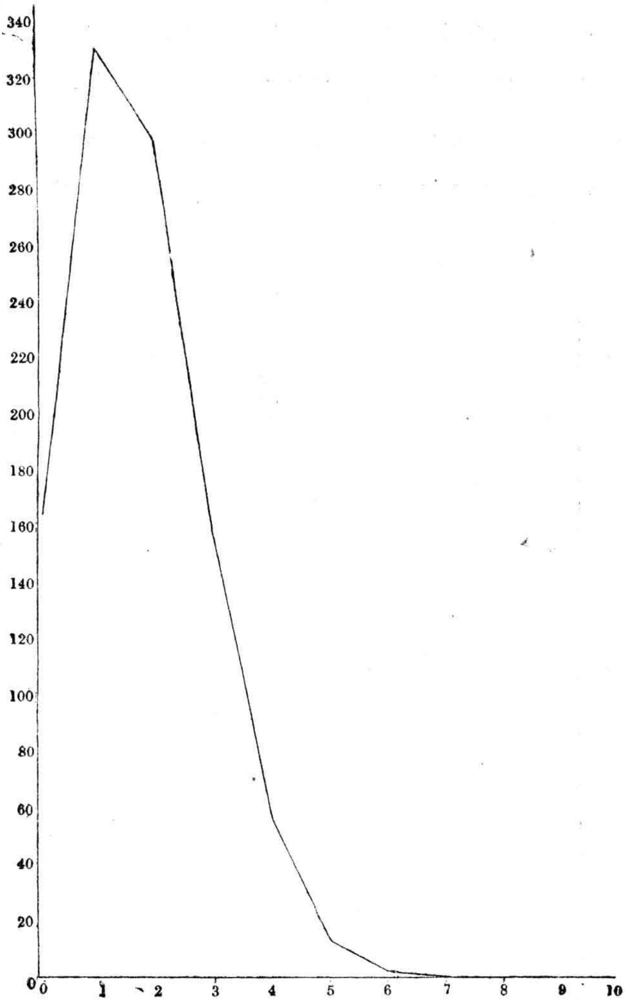
表四十八　機率計算之另一例子

成功	$q=\frac{5}{6}$	$p=\frac{1}{6}$	係數	機率	理論次數
0	$q^{10}=.16150557$		${}^{10}C_0=1$	${}^{10}C_0q^{10}=.161506$	165
1	$q^9=.19380669$	$p=.16666667$	${}^{10}C_1=10$	${}^{10}C_1q^9p=.323011$	331
2	$q^8=.23256803$	$p^2=.02777778$	${}^{10}C_2=45$	${}^{10}C_2q^8p^2=.290710$	298
3	$q^7=.27908164$	$p^3=.00462963$	${}^{10}C_3=120$	${}^{10}C_3q^7p^3=.155045$	159
4	$q^6=.33489797$	$p^4=.00077161$	${}^{10}C_4=210$	${}^{10}C_4q^6p^4=.054266$	56
5	$q^5=.40187756$	$p^5=.00012860$	${}^{10}C_5=252$	${}^{10}C_5q^5p^5=.013023$	13
6	$q^4=.48225308$	$p^6=.00002143$	${}^{10}C_6=210$	${}^{10}C_6q^4p^6=.002169$	2
7	$q^3=.57870370$	$p^7=.00000357$	${}^{10}C_7=120$	${}^{10}C_7q^3p^7=.000248$	0
8	$q^2=.69444444$	$p^8=.00000060$	${}^{10}C_8=45$	${}^{10}C_8q^2p^8=.000019$	0
9	$q=.83333333$	$p^9=.00000010$	${}^{10}C_9=10$	${}^{10}C_9qp^9=.000001$	0
10		$p^{10}=.00000002$	${}^{10}C_{10}=1$	${}^{10}C_{10}p^{10}=.000000$	0
			1024	1.000000	1024

由上面兩個表中，我們可以看見，若 P = Q = .5，則以圖表示之，必是一個極對稱的圖，趨近於常態曲線圖。若P不等於Q，則各種圖形都可以有的，完全要看P與Q之關係。這一點是很重要的。在下章中討論常態曲線要應用到的。其實本章之最大用意就是提出此點，使讀者明白在完全對稱的圖中，成功的機率，等於失敗之機率。下面兩圖，就是上面兩表以圖形之。



圖二十五 P = Q = .5 之曲線圖



圖二十六　$p=\frac{1}{6}$　$Q=\frac{5}{6}$之曲線圖

35. 二項展開之均數與標準差

現在我們要說明關於二項展開之兩個定理，通常名為柏納來

(Bernoulli) 的定理，在統計學的理論中佔很重要的地位。

二項展開之均數是 NP，而其標準差是$\sqrt{NPQ}$。茲證明之於下。爲證明這二個定理起見，我們先列一表以示M與Q之計算法。

表四十九　二項展開之M和σ的計算法

成功	次數 (f)	x'	fx'	fx'²
0	q^n	0	—	—
1	$nq^{n-1}p$	1	$nq^{n-1}p$	$nq^{n-1}p$
2	$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}q^{n-2}p^2$	2	$n(n-1)q^{n-2}p^2$	$2n(n-1)q^{n-2}p^2$
3	$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}q^{n-3}p^3$	3	$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}q^{n-3}p^3$	$\frac{3n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}q^{n-3}p^3$
4	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}q^{n-4}p^4$	4	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3}q^{n-4}p^4$	$\frac{4n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3}q^{n-4}p^4$
5	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}q^{n-5}p^5$	5	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}p^{n-5}p^5$	$\frac{5n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}q^{n-5}q^5$
—	—	—	—	—
—	—	—	—	—
總數	1		np	$np[1+p(n-1)]$

次數之總和是$(q+p)^n$,當然是1,不必說明。至於 $\Sigma fx'$ 可以寫如:

$$\Sigma fx' = np\left[q^{n-1}+(n-1)q^{n-2}p+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}q^{n-3}p^2+\cdots\cdots\right]$$

$$= np(q+p)^{n-1} = np$$

我們知道求均數之公式爲

$$M = M' + \frac{\Sigma fx'}{N}$$

而$M'=0$, $\Sigma fx'=np$, $N=1$,

故　　$M = np$ ……………………………………公式二十四

以表四十七爲例, $n=10$, $p=\cdot 50$, 故 $M=5$; 以表四十八爲例, $n=10$, $p=\frac{1}{6}$, $M=1.667$

若求標準差時,必須把 $\Sigma fx'^2$ 之數求出,上表最後一項可寫如下:

$$\Sigma fx'^2 = np\left[q^{n-1}+2(n-1)q^{n-2}p+\frac{3(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}q^{n-3}p^2+\cdots\cdots\right]$$

惟括弧中之各項可分爲兩部份,如下:

$$\Sigma fx'^2 = np\left[\left\{q^{n-1}+(n-1)q^{n-2}p+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}q^{n-3}p^2+\cdots\cdots\right\}\right.$$

$$\left.+\left\{(n-1)q^{n-2}p+2\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}q^{n-3}p^2+\cdots\cdots\cdots\right\}\right]$$

$$= np\left[(q+p)^{n-1}+(n-1)p\left\{q^{n-2}+(n-2)q^{n-3}p+\cdots\cdots\right\}\right]$$

$$= np\left[(q+p)^{n-1}+(n-1)p(q+p)^{n-2}\right]$$

惟$(q+p)^{n-1}$ 與$(q+p)^{n-2}$ 均等於 1,故

$$\Sigma fx'^2 = np[1+(n-1)p]$$

我們知道求標準差之公式是

$$\sigma^2=\frac{\Sigma fx'^2}{N}-\left(\frac{\Sigma fx'}{N}\right)^2$$

惟 $\frac{\Sigma fx'}{N}=n\cdot p$, $N=1$, 故

$$\sigma^2=\frac{np[1+(n-1)p]}{1}-n^2p^2$$

$$=np+n^2p^2-np^2-n^2p^2$$

$$=np-np^2$$

$$=np(1-p)$$

$(1-p)=q$,故

$$\sigma^2=npq$$

$$\sigma=\sqrt{npq}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式二十五}$$

以表四十七爲例, $n=10$, $p=.5$, $q=.5$, 故 $\sigma=\sqrt{2.5}=1.5811$。以表四十八爲例, $n=10$, $p=\frac{1}{6}$, $q=\frac{5}{6}$, 故 $\sigma=\sqrt{1.39}=1.18$

36. 二項展開之實驗的證明

二項分配是一種理論,事實上很難得到。不能得到的原因,極其繁煩,以投骰子言,或因骰子有偏於擲出某一點子,或因擲時犯了弊病,等等。總之,理論與事實不能絕對相似。這一點就是統計學所謂抽樣之錯誤。我們現在要以一個實驗來說明絕對含有機會性質的遊戲——擲骰子——之抽樣與理想究竟差別若何。不過注意我們只做一次,若多做幾次,把結果合併計算,恐怕成績要好些。再則我們此一次之抽樣試驗,只能代表此次,下次之情形,未必完全相似。關於此兩點,在抽樣之信度章

將詳言之。

關於這種實驗證明，艾偉氏在其高級統計學中頁 165—168 有極詳細的說明，我們這一個例子是很簡單的。若我們把十二枚骰子裝在香明罐內，搖之使轉動，然後傾出，如是凡 4096 次。以得 1,2,3, 點爲成功，4,5,6, 點爲失敗，則 P = .5，Q = .5。$(.5+.5)^{12}$ 之展開式次數爲 4096 次。結果詳下表：

表五十　二項展開之實驗的證明（例一）

成功	實驗次數	理論次數	實驗機率	理論機率
0	1	1	·0002441407	·0002441407
1	7	12	·0017089849	·0029296884
2	61	66	·0148925827	·0161132862
3	199	220	·0485839993	·0537109540
4	435	495	·1062012045	·1208496465
5	761	792	·1857910727	·1933594344
6	940	924	·2294922580	·2255860068
7	841	792	·2053223287	·1933594344
8	540	495	·1318359780	·1208496465
9	231	220	·0563965017	·0537109540
10	70	66	·0170898490	·0161132862
11	10	12	·0024414070	·0029296884
12	0	1	·0000000000	·0002441407
總數	4096	4096	1·00000	1.000000

在上表中，理論的均數 $np=12\times.5=6$，而實驗的均數 $=6.1052$，理論的標準差 $=npq^{\frac{1}{2}}=\sqrt{12\times.5\times.5}=\sqrt{3}=1.73$，而實際的標準差 $=\sqrt{2.90}=1.703$。實際雖不能完全與理想相符，而相差不遠了。究竟這

種相差之意義若何，留待抽樣之信度章中討論之。

37. 二項分配之應用

總以上諸節，我們可以看出，任何實際的觀察必有一理想的情形。這種理想的情形可以應用二項展開定理以求之。雖然，前途之困難仍多，在下章再詳言之。在此節中，我們試舉二例以說明二項展開之應用。

在作者所授之心理測量班中，學期總平均在 70 分以上有 49 人，在此 49 人之中，第一次月考得 70 分以上者有 45 人。若以兩次均得 70 分以上為成功，則成功之實驗的機率 $=45/49=.9184$，失敗之機率當然是 .0816。若於此 49 本卷中，任抽七本，其全體為 70 分以上者，其機率為 .551。六本為 70 分以上，一本在 70 分以下者，其機率為 .343。因此，任抽七本，有六本之分數在 70 分以上者機率為 $.343+.551=.894$。依二項展開式，$(q+p)^7=(.0816+.9184)^7$。其各項之數見下表。

表五十一 $(.0816+.9184)^7$ 之二項展開

成功	q = .0816	p = .9184	係數	機率		理論次數
0	$q^7=.00000002$		$_7c_0=1$	$_7c_0q^7$	$=.000$	.000
1	$q^6=.00000030$	$p=.91836730$	$_7c_1=7$	$_7c_1q^6p$	$=.000$	.000
2	$q^5=.00000362$	$p^2=.84345856$	$_7c_2=21$	$_7c_2q^5p^2$	$=.000$	.000
3	$q^4=.00004434$	$p^3=.77463234$	$_7c_3=35$	$_7c_3q^4p^3$	$=.001$	.128
4	$q^3=.00054334$	$p^4=.71142234$	$_7c_4=35$	$_7c_4q^3p^4$	$=.014$	1.792
5	$q^2=.00665856$	$p^5=.65337028$	$_7c_5=21$	$_7c_5q^2p^5$	$=.091$	11.648
6	$q^1=.08163270$	$p^6=.60005527$	$_7c_6=7$	$_7c_6q\ p^6$	$=.343$	43.904
7		$p^7=.55109076$	$_7c_7=1$	$_7c_7p^7$	$=.551$	70.528
	$n=7$	$n=7$	128		1.000	128.000

$\sigma = .72 \qquad M = 6.4288$

爲證明起見，作者曾實際抽了幾次，其結果詳下表：

表五十二　二項展開之實驗證明（例二）

成功	次數 實際	次數 理論	次數 實際	次數 理論	次數 實際	次數 理論	次數 實際	次數 理論	次數 實際	次數 理論	次數 實際	次數 理論	次數 實際	次數 理論
3	0	.01	0	.02	0	.03	0	.04	0	.05	0	.06	0	.064
4	0	.14	0	.28	0	.42	0	.56	0	.70	0	.84	0	.896
5	1	.91	2	1.82	4	2.73	4	3.64	4	4.55	4	5.46	4	5.824
6	4	3.43	6	6.86	11	10.29	14	13.72	17	17.15	23	20.58	24	21.952
7	5	5.51	12	11.02	15	16.53	22	22.04	29	27.55	33	33.06	36	35.264
總數	10	10.00	20	20.00	30	30.00	40	40.00	50	50.00	60	60.00	64	64.000
M	6.4	6.43	6.5	6.43	6.37	6.43	6.45	6.43	6.5	6.48	6.43	6.43	6.5	6.43
σ	.66	.72	.67	.72	.71	.72	.67	.72	.64	.72	.62	.72	.61	.72

茲再舉一例。（此例採於 Holzinger, Statistical Methods for Students in Education），有 400 學生在某大學中讀碩士學位。其中有一個必要的條件就是平均分數須在 B – 以上。若以得此成績爲成功，在此平均之下爲失敗，則實驗的成功機率是 .8275，因爲在 400 人之中，331 人得到滿意的平均。惟此我們須知道，本例與上例一樣，這種實驗的比例，可以隨時變動，不如投骰子等遊戲的機率之固定。再則，人數若很少，實驗的機率異常不穩定。故我們很難希望由這種實驗的比例所得的結果與投骰子等有同樣好的結果。

若每次平均學生數是十個人，而以此爲樣本之人數以對比所擲的骰子之數，則我們可以依照二項展開定理 $(.1725 + .8275)^{10}$ 決定任何

成功數之機率。

二項展開之各項和實際所得之結果均見下表。在十個人的樣本中，得 9 個或以上之成功的機率爲 .314＋.150＝.464。在 400 人中，當然是 400×.464＝186。其結果與觀察得來的數目很相似，(6＋13)10＝190。

表五十三

碩士學位之成功的學者數之觀察的和理論的次數，樣本是10人，學生總數是400.

十個人中之成功的學者	實際次數	理論的次數	機率
10	6	6.0	.150
9	13	12.6	.314
8	12	11.8	.294
7	7	6.5	.164
6	0	2.4	.060
5	1	0.6	.015
4	1	0.1	.003
3	0	0.0	.000
總數	40	40.0	1.000
σ	1.28	1.19	

在上二表中，實際的分配與理論的分配中之均數和標準差數，並不相同。如第二例，實際的標準差是 1.28，理論的標準差照$\sqrt{npq}$公式所求得是 1.19，相差 0.09。這個相差，我們可以釋爲抽樣之機會變異。在第十一章中，我們再說明之。

第十章　常態曲線

38. 常態曲線 (normal probability curve) 公式之引伸

在上章中我們已經說明根據於二項展開中的各項，可以完全形容任何分配，而求得其特徵，易言之，我們可以求得任何分配之理論的均數，標準差以及每項之應得次數。不過在應用時，二項展開有極嚴重的限制。第一，在教育的事實中，成功的機率常為一個不知之數，而實驗的機率又隨時變動，不若投骰子等遊戲機率之固定。第二，在 $(p+q)^n$ 中，若 n 太大，則計算起來，異常麻煩。設 n 等於 1000，則二項展開中之項數等於 1001，其困難可知矣。第三，只能形容間斷的次數分配而不能形容繼續不斷的次數分配。這個限制，最為嚴重；因為在教育的事實中，大都是屬於後者，故我們需要一個普通的公式以形容之。

在引伸一種普通公式之前，我們必須對於成功的機率 p 再加以說明。二項展開所形容的分配，不一定是對稱的，易言之，並非 p 都等於 q，都等於 0.5。任何分配，可以形容，全視於 p 與 q 之數。惟 p 不等於 q，則曲線是不對稱的。本章中所述之公式是常態曲線公式，在此曲線中，$p=q=0.5$。故學者必須牢記，教育的事實，p 並不完全等 q，易言之，教育測量的結果中，偏態的分配是常有的，並且很多。並非任何教育的結果都可以假設為常態的。若結果的分配本非常態，而仍以常態曲線形容其理想的情形，則是張冠李戴了，流弊豈可勝言！再則常態曲線與對稱的曲線並非是一個分配之兩個名詞。實際上亦有區別。常態的分

配必是對稱的,但對稱的未必一定是常態的。形容常態的分配,必須用常態曲線公式,不能用二項展開公式。這兩種結果,自有區別,在下將證明之。

若在 $p=q=0.5$ 之條件下,則二項展開之各項是:

$$N\left(\frac{1}{2}\right)^n\left\{1+n\frac{n(n-1)}{1\cdot2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}+\cdots\cdots\right\}$$

而 m 成功之次數爲

$$N\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{\lfloor n}{\lfloor m\ \lfloor n-m}$$

例如 1024, $n=10$, $m=5$, 則 m 成功之次數 $=252$。

$m+1$ 成功之次數要再乘 $\frac{n-m}{m+1}$。例如,六個成功之次數是

$$\frac{n-m}{m+1}252=\frac{5}{6}\times252=210$$

爲簡便起見,我們假設 (1) n 是偶數, (2) $n=2m$。那末 m 成功的次數,當然是最大的。若以 y_0 代表之,則

$$y_0=N\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\frac{\lfloor 2m}{\lfloor m\ \lfloor m}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

在曲線圖上, y_0 是最高的縱線,其餘的縱線,在兩邊對稱,要視離 y_0 線之距離而定。愈遠者,則愈低下。若以 x 代表某縱線與 y_0 線之距離,而以 y_x 代表此縱線之高度,則

$$y_x=N\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\frac{\lfloor 2m}{\lfloor m+x\ \lfloor m-x}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

例如上例,成功數是 6,則 x 是 1。

$$y_x = 1024\left(\frac{1}{2}\right)^{2\times 5}\frac{\underline{|2\times 5}}{\underline{|5+1}\;\underline{|5-1}} = 1024\times \cdot 000977\times\frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1\times 4\times 3\times 2\times 1} = 210$$

因此，

$$\frac{y_x}{y_0} = \frac{\underline{|2m}}{\underline{|m-x}\;\underline{|m+x}}\times\frac{\underline{|m}\;\underline{|m}}{\underline{|2m}} = \frac{\underline{|m}\;\underline{|m}}{\underline{|m+x}\;\underline{|m-x}}$$

$$= \frac{[m(m-1)(m-2)\cdots(m-x+1)(m-x)\cdots(2)(1)]\,[m(m-1)\cdots(m-x+1)(m-x)(m-x-1)\cdots(2)(1)]}{[(m+x)(m+x-1)\cdots(m+1)(m)(m-1)\cdots(2)(1)]\,[(m-x)(m-x-1)\cdots\cdots(2)(1)]}$$

$$= \frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-x+1)}{(m+1)(m+2)(m+3)\cdots\cdots(m+x)}$$

$$= \frac{\left[\left(\frac{m}{m}\right)\left(\frac{m-1}{m}\right)\cdots\cdots\left(\frac{m-x+1}{m}\right)\right]}{\left[\left(\frac{m+1}{m}\right)\left(\frac{m+2}{m}\right)\cdots\cdots\left(\frac{m+x-1}{m}\right)\left(\frac{m+x}{m}\right)\right]}$$

$$= \frac{\left[(1)\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{x-1}{m}\right)\right]}{\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{2}{m}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{x-1}{m}\right)\left(1+\frac{x}{m}\right)\right]}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

現在我們假設(註一)m之數很大,比x大的多,則$(x/m)^2$與(x/m)相比較時,可以忽略之。這個假設並無任何不妥之點,因爲x之數在三倍於標準差或$3\sqrt{m/2}$(註二)之外者,實無顧慮之必要。並且此數對於m之比例是$3/\sqrt{2m}$,若m之數很大,則此數當然是微乎其微。在這個假設下,我們可以應用下面對數的數系,於公式(3)之每個括弧內,而忽略在第一項後之各項數,

$$\log_e(1-\Delta)=-\Delta-\frac{\Delta^2}{2}-\frac{\Delta^3}{3}-\frac{\Delta^4}{4}-\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\log_e(1+\Delta)=\Delta-\frac{\Delta^2}{2}+\frac{\Delta^3}{3}-\frac{\Delta^4}{4}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

而得一約數。

$$\log_e\left(1-\frac{1}{m}\right)=-\frac{1}{m}-\frac{\left(\frac{1}{m}\right)^2}{2}-\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=-\frac{1}{m}-\frac{1}{2m^2}-\frac{1}{3m^3}$$

$$\log_e\left(1-\frac{2}{m}\right)=-\frac{2}{m}-\frac{4}{2m^2}-\frac{8}{3m^3}$$

若忽略第一項後之各項數,則

$$\log_e\left(1-\frac{1}{m}\right)+\log_e\left(1-\frac{2}{m}\right)+\cdots\cdots=-\frac{1}{m}-\frac{2}{m}-\frac{3}{m}-\cdots\cdots-\frac{x-1}{m}$$

$$=-\frac{1}{m}(1+2+3+4+\cdots\cdots+\overline{x-1})$$

(註一) 這個假設是最重要的。二項展開式之所以不能應用於尋常統計的事實,由於n太大。

(註二) $\sigma^2=npq=2m\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{2m}{4}=\frac{m}{2}$

同樣地,

$$\log_e\left(1+\frac{1}{m}\right)+\log_e\left(1+\frac{2}{m}\right)+\cdots=\frac{1}{m}(1+2+3+\cdots\cdots+\overline{x-1})+\frac{x}{m}$$

因此,

$$\log\frac{y_x}{y_0}=-\frac{1}{m}(1+2+3+\cdots\overline{x-1})-\frac{1}{m}(1+2+3+\cdots+\overline{x-1})-\frac{x}{m}$$

$$=-\frac{2}{m}(1+2+\cdots\cdots+\overline{x-1})-\frac{x}{m}$$

但是

$$(1+2+\cdots\cdots\overline{x-1})=\frac{(x-1)x}{2}$$

所以 $\log\dfrac{y_x}{y_0}=\left[-\dfrac{2}{m}\times\dfrac{(x-1)x}{2}\right]-\dfrac{x}{m}$

$$=-\frac{(x-1)x}{m}-\frac{x}{m}$$

$$=-\frac{x^2+x-x}{m}=\frac{x^2}{m}$$

$$\therefore\quad y_x=y_0e^{\frac{-x^2}{m}}$$

惟　　　$\sigma^2=m/2$,　所以 $m=2\sigma^2$,

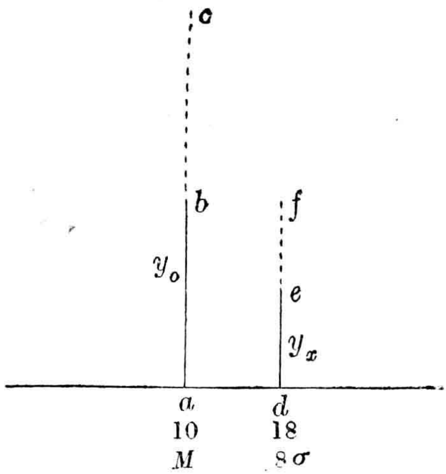
因此

$$y_x=y_0e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式二十六 (a)}$$

這個公式就是常態曲線公式或機率曲線公式。我們若知道 y_0 與 σ,則任何縱線之高度都可以求出了。在此公式內,除了 y_x 與 x 爲變量外,所有數量都是常數。y_x 之高度或次數,因此全視 x 而定。

惟依照公式二十六以求 y_x，則算法殊煩，因此統計書籍中均附有一表(即本書中附表一)，告訴我們 x 與 y_x 之相對數，例如 $x=.2\sigma$ 時，則 $y_x=.98020$ 等等。此表究竟如何製成，作者在下面將陳述其大略的情形。

在公式二十六中，有兩件很明顯的事實：(1) 最高縱線 y_0 若有任何變動，則曲線圖之面積也有同一比例的變動。例如，$y_0=3$，$x=.8\sigma$，則 $y_x=2.178$；若將 y_0 之數加倍，等於 6 時，則 $.8\sigma$ 點上之縱線 y_x 也必加倍，等於 4.356。如此，則曲線圖之面積也必增加兩倍了。若以圖表示之，如下；(在此圖中，$M=10$，$\sigma=10$)。



圖二十七　y_0 與曲線圖面積之關係

在上圖中，ab 代表第一個 y_0，de 代表第一個 y_x；若 y_0 之高度增加兩倍，等於 ac 時，則在同點($.8\sigma$) 上之縱線的高度，也必增加兩倍，等於 df 了。a c d f 之面積，兩倍於 a b d e 之面積在圖中也可見其大概。

(2)標準差若有任何變動，則曲線圖之面積也有同一比例的變動。

例如在下面兩圖中，y_0 都等於 3，則 $.8\sigma$ 點之縱線的高度也應當是一樣的。惟此兩圖中 σ 是不同的，在圖二十八中，$\sigma=10$，在圖二十九中，$\sigma=20$。若均數是一樣，都是 50 分，則圖二十八中之 $.8\sigma$ 在 58 分的點上，在圖二十九之 $.8\sigma$ 在 66 分的點上。所以增加 σ 兩倍，則每縱線在底線上離開均數之距離，也必增加兩倍。如此，則曲線圖之面積也必增加兩倍。圖二十九之面積兩倍於圖二十八之面積，在圖上也可見其大概。

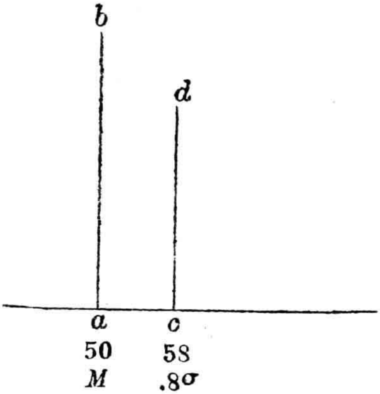


圖 28　標準差與曲線圖面積之關係(一)

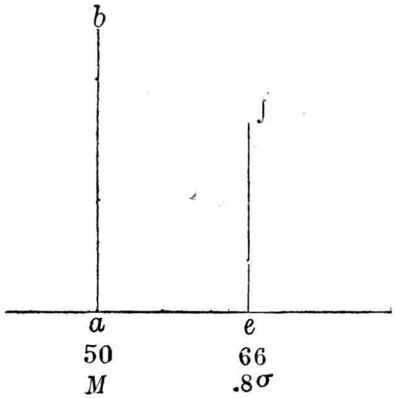


圖 29　標準差與曲線圖面積之關係(二)

根據於上面兩件事實我們知道曲線圖之面積(以 N 代表之) 與 y_0 及 σ 因此成比例的。所以 $N = ay_0\sigma$；a 是一常數。若 y_0 與 σ 均等於 1，則 $a=N$。在此條件下，我們可以估算 a 之近似的價值。a 之眞正的價值等於$\sqrt{2\pi}$，其證明方法極煩，在此地不能陳述。至於求 a 之近似值，其步驟如下：

(一)設 $y_0=1$，　$\sigma=1$，　則 $y_x=e^{\frac{-x^2}{2}}$

(二)求各個 x 的 y_x 之價值 (所有 x 的相隔距離是相等的。其結

果如表五十四。(表內各個 x 之距離等於$\frac{1}{5}\sigma$)

表五十四 曲線之縱線 $y_x=e^{\frac{-x^2}{2}}$ (仿自 yule, p. 303)

x	y_x	log y_x	x	y_x	log y_x
0.0	1.00000	0.00000	2.6	.03405	$\overline{2}.53209$
0.2	0.98020	$\overline{1}.99131$	2.8	.01984	$\overline{2}.29757$
0.4	.92312	$\overline{1}.96526$	3.0	.01111	$\overline{2}.04567$
0.6	.83527	$\overline{1}.92183$	3.2	.00598	$\overline{3}.77641$
0.8	.72615	$\overline{1}.86103$	3.4	.00309	$\overline{3}.48978$
1.0	.60653	$\overline{1}.78285$	3.6	.00153	$\overline{3}.18577$
1.2	.48675	$\overline{1}.68731$	3.8	.00073	$\overline{4}.86439$
1.4	.37531	$\overline{1}.57439$	4.0	.00034	$\overline{4}.52564$
1.6	.27804	$\overline{1}.44410$	4.2	.00015	$\overline{4}.16952$
1.8	.19790	$\overline{1}.29644$	4.4	.00006	$\overline{5}.79603$
2.0	.13534	$\overline{1}.13141$	4.6	.00003	$\overline{5}.40516$
2.2	.08892	$\overline{2}.94901$	4.8	.00001	$\overline{6}.99693$
2.4	.05614	$\overline{2}.74923$	5.0	.00000	$\overline{6}.57132$

(三) 求全曲線之 y_x 的總和在上表中等於 $1+2\times5.76659=12.53318$($+x$ 和 $-x$ 之 y_x 是一樣的)。組距等於 0.2σ,所以全曲線之面積等於 2.506636。此數就是 a 之近似數。眞正的 a 數爲$\sqrt{2\pi}$。是 2.506627,

所以 $y_0=\frac{N}{a\sigma}$

$$=\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式二十七 (a)}$$

$$=\frac{N}{2.506627\sigma}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式二十七(b)}$$

$$y_x=\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式二十六(b)}$$

若 N 與 σ 均等於 1,則

$$y_0=\frac{1}{2.506627}=\cdot3989$$

$$z=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式二十六(c)}$$

(z 即常態曲線中之縱線 y_x,惟曲線之面積與標準均以整個單位表示之。)

公式二十六(c)之求法亦有附表可查。附表三乃是常態曲線的面積與縱線對照表;附表四乃是常態曲線的差數與縱線對照表。

若我們以 P. E. 爲根據,則有附表五可用,此表之表示不以 $\frac{x}{\sigma}$ 爲根據,而以 x/P.E. 爲根據。

39. 常態曲線之配合

我們有了 $y_0=\frac{N}{2\cdot506627\sigma}$ 與附表一,則要配合一個常態曲線是非常容易,其步驟如下:

(一)求任何分配之 y_0, 以表六之材料爲例,($\sigma=21.44$ 或 2.144 組距)

$$y_0=\frac{144}{2.506627\times2.144}=26.80$$

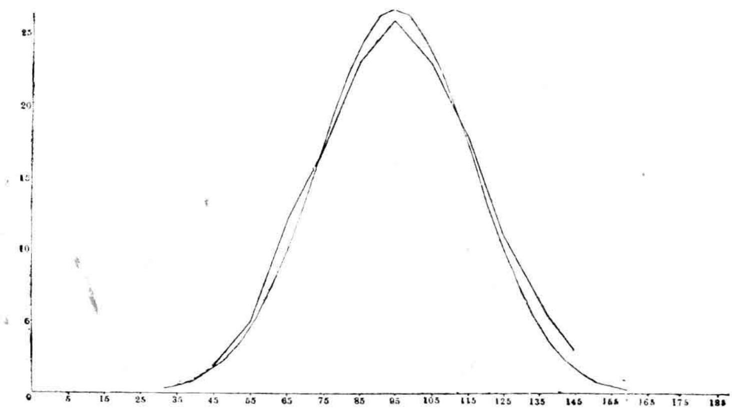
(二)在常態曲線圖上,y_0 是均數之縱線(均數 =95,見表十四)

(三)在檢查表上,y_0 的數既是最大的,以其爲 1,則其他縱線均小於 1,離均數愈近,則縱線愈低。茲根據表六之材料演算一下以爲例:

(若以 $y_0 = .3989$,則須用公式二十六 c,結果自然相同)。

表五十五　常態曲線之配合示例(根據表六)

根據附表一	根據表六	根據附表一	根據表六
與 0.0σ 相當之 y_0 =1.00000	26.80	與±2.6σ 相當之 y_x = .03405	.91
與±0.2σ 相當之 y_x = .98020	26.27	與±2.8σ 相當之 y_x = .01984	.53
與±0.4σ 相當之 y_x = .92312	24.74	與±3.0σ 相當之 y_x = .01111	.30
與±0.6σ 相當之 y_x = .83527	22.39	與±3.2σ 相當之 y_x = .00598	.16
與±0.8σ 相當之 y_x = .72615	19.46	與±3.4σ 相當之 y_x = .00309	.08
與±1.0σ 相當之 y_x = .60653	16.26	與±3.6σ 相當之 y_x = .00153	.04
與±1.2σ 相當之 y_x = .48675	13.04	與±3.8σ 相當之 y_x = .00073	.02
與±1.4σ 相當之 y_x = .37531	10.06	與±4.0σ 相當之 y_x = .00034	.01
與±1.6σ 相當之 y_x = .27804	7.45	與±4.2σ 相當之 y_x = .00015	.004
與±1.8σ 相當之 y_x = .19790	5.30	與±4.4σ 相當之 y_x = .00005	.002
與±2.0σ 相當之 y_x = .13534	3.63	與±4.6σ 相當之 y_x = .00003	.001
與±2.2σ 相當之 y_x = .08892	2.38	與±4.8σ 相當之 y_x = .00001	.0008
與±2.4σ 相當之 y_x = .05614	1.50	與±5.0σ 當相之 y_x = .00000	.0000



圖三十　常態曲線圖

(d)根據上表之材料，可以繪一很好的常態曲線，如圖三十。至於各標準差之地位，是以均數為零標準差。茲就上例演算一下：

M = 95　　　　σ=21.44

		95.000			95.000
.2 σ=	+ 4.288	99.288	−.2 σ=	− 4.288	90.712
.4 σ=	+ 4.288	103.576	−.4 σ=	− 4.288	86.424
.6 σ=	+ 4.288	107.864	−.6 σ=	− 4.288	82.136
.8 σ=	+ 4.288	112.152	−.8 σ=	− 4.288	77.848
1.0 σ=	+ 4.288	116.440	−1.0 σ=	− 4.288	73.560
1.2 σ=	+ 4.288	120.728	−1.2 σ=	− 4.288	69.272
1.4 σ=	+ 4.288	125.016	−1.4 σ=	− 4.288	64.984
1.6 σ=	+ 4.288	129.304	−1.6 σ=	− 4.288	60.696
1.8 σ=	+ 4.288	133.592	−1.8 σ=	− 4.288	56.408
2.0 σ=	+ 4.288	137.880	−2.0 σ=	− 4.288	52.120
2.2 σ=	+ 4.288	142.168	−2.2 σ=	− 4.288	47.832
2.4 σ=	+ 4.288	146.456	−2.4 σ=	− 4.288	43.544
2.6 σ=	+ 4.288	150.744	−2.6 σ=	− 4.288	39.256
2.8 σ=	+ 4.288	155.032	−2.8 σ=	− 4.288	34.968
3.0 σ=	+ 4.288	159.320	−3.0 σ=	− 4.288	30.680
4.0 σ=	+21.44	180.760	−4.0 σ=	−21.44	9.240
5.0 σ=	+21.44	202.200	−5.0 σ=	−21.44	−12.200

40. 常態曲線與二項展開的結果之比較

在引伸常態曲線公式時，我們假設 n 或 m 很大，比 x 大得多。其實，n 或 m 不很大時，由常態公式所求得各縱線之高度與二項展開之結果，相差亦極有限。故 n 若非常之大，兩種結果之相差，必微乎其微。在下表中，總數或 N 是 10000，n=64 (或 m=32)，p 與 q 當然都是 0.5，因而 $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{64\times.5\times.5}=\sqrt{16}=4$。M =np=32。

表五十六 $10000\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{64}$ 之二項展開的各項之縱線與常態曲線相當的縱線之比較

項目	二項展開	常態曲線
32	993	997
31 與 33	963	967
30 與 34	878	880
29 與 35	753	753
28 與 36	606	605
27 與 37	459	457
26 與 38	326	324
25 與 39	217	216
24 與 40	136	135
23 與 41	80	79
22 與 42	44	44
21 與 43	23	23
20 與 44	11	11
19 與 45	5	5
18 與 46	2	2
17 與 47	1	1

41. 常態曲線圖之面積

常態曲線照理論上說，兩端與底線永不相交，但是在事實上，在 $+3\sigma$ 至 -3σ 內，已包括有 99.93%，所餘無幾矣。若在 $+5\sigma$ 至 -5σ 內，則包括有 99.99994%，卽在一千萬數之中，只有六個數未曾包括在內。故標準差離開均數愈遠，所佔面積也愈小。附表二是常態曲線圖之面積。在此表中，我們可以求出，若 $x=.5\sigma$ 時，自 y_0 起至 $x=.5\sigma$ 的 y_x 止，其中面積佔 19.15%。若 $x=1.0\sigma$ 時，則自 y_0 起至 $x=1.0\sigma$ 的 y_x 止，其中面積佔 34.13% 若 $x=2.0\sigma$ 時，則自 y_0 起至 $x=2.0\sigma$ 的 y_x 止，其中面積佔 47.72%。附表二是瑟帕德所計算得來，(此處僅略修改)須用高等算學。惟讀者若用一張小方格紙上繪一很好的常態曲線圖，以全部方格數為 1，而後再數自 y_0 至各 σ 的縱線止之方格數，求其比例，亦可窺見其相似情形。

計算常態曲線圖之面積，既有了附表二之便利，則求任何 y_x 至其他 y_x 之面積都可求出。茲舉二例以說明之。

(一) 求 $+2\sigma$ 至 $-.3\sigma$ 之面積

自 y_0 至 $+2\sigma$ 的 y_x 間，面積 =47.72%

自 y_0 至 $-.3\sigma$ 的 y_x 間，面積 =11.79%

自 $+2\sigma$ 至 $-.3\sigma$ 的 y_x 間，面積=59.51%

(二) 求 $-.5\sigma$ 至 $-.7\sigma$ 之面積

自 y_0 至 $-.7\sigma$ 的 y_x 間，面積=　25.80%

自 y_0 至 $-.5\sigma$ 的 y_x 間，面積=　−19.15%

$-.5\sigma$ 至 $-.7\sigma$ 間之面積　=　6.65%

42. 常態性之試驗(T 分之限制)。

常態性之假設，在教育與心理的實驗中，常常濫用。皮而生說（見艾偉曲線適合之研究測驗四期）：「許多心理學家將所測量的結果，無論分配如何，總用常態曲線表示出來。其實三千次有時找不出一次應當用這曲線的，然而他們每次用他，在科學的結論上，其流弊豈可勝言？」曾有一作者說「舉行智力或學力測驗時，若人數足夠，其分配必近於常態」。這句話之流弊，正與麥柯爾的 T 量表相同。麥柯爾來華指導測量編製時，卽使我國採用其所創之 T 量表。在 T 量表中最重要的假設是十二歲兒童或所根據的年齡的兒童之智力與教育測驗成績爲常態分配，故其求法之步驟先把測驗原有分數化爲百分位數，再按常態分配面積與橫距之關係化爲 T 分。故 T 分實爲一種標準量數，所不同者，標準量數不必假設分配爲常態的，而 T 分所根據的分配，必須是常態的。故 T 分亦可說是常態分配之標準量數，因爲以均數爲參照點，以標準差爲單位則一也。爲消除小數與負數起見，不以 0σ 或均數爲 0T，而以之作 50 T，故 $1T = .1\sigma$，而 0T 之地位在橫距上實是 -5σ 之地位。

惟麥氏的 T 量表之缺點，乃在假定一切測驗成績皆爲常態分配；這個假設實有研究之必要。試驗一個實際的分配之是否可用常態曲線，易言之，這個分配可否用常態曲線表示之，乃是統計學中（亦測驗學中）一重要問題。比較便利而又不費時的方法以決定配合之良否，是優爾所提議的。其公式如下：

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{f(N-f)}{N}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式二十八}$$

σ_s = 抽樣之標準誤

f = 在某組距中之理論次數

N = 次數之總和

在此種方法中，先擇橫距上之一點，其理論的次數與實際的次數相差最大，再計算其抽樣的標準誤。若兩個次數之相差數小於 $3\sigma_s$，則此相差可假設由於取樣之變動。否則，大於 $3\sigma_s$，則此實際的分配不能視爲常態的，而必須試以他種曲線之配合。設在橫距上之某一點，其理論次數爲 13.30，實際次數爲 19.7，N = 346，則

$$\sigma_s=\sqrt{\frac{13.30(346-13.30)}{346}}=3.58$$

而兩種次數之相差等於 $19.7-13.3=6.4$。$3\sigma_s=10.74$，大於兩種次數之相差，故此分配至少在這一點上，合於常態分配。

不過上述方法祇能試驗橫距上之一點，而不根據於全部觀察，非至善之法。決定配合良否之一個較詳盡的方法是把量表中每點之理論的與實際的次數之相差完全計算到，再聚集這些相差爲一個量數，以表示全分配之常態度。這種量數是皮而生所提議，其公式稱爲琪冪試驗法 chi-square test，如下：

$$\chi^2=\Sigma\frac{(m'-m)^2}{m}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式二十九}$$

χ 讀若 chi　　m' = 觀察得來的次數　　m = 理論的次數

麥氏在發表其 T 量表的求法中，完全未顧慮到此點。茲將麥氏在 How to Experiment in Education 一書中所根據以說明求 T 分之分配試驗一下，即可知此分配決不可視爲常態的。(原表見該書 p. 99，表六)

表五十七　χ^2 之計算示例一

組距	差數 x	$\frac{x}{\sigma}$	y_x	m	m′ (註一)	m′−m	$(m'-m)^2$	$\frac{(m'-m)^2}{m}$
0-1	−20.916	3.63	00153	.11	4	3.89	15.1321	137.56
2-3	−18.916	3.29	00432	.30	3	2.70	7.2900	24.30
4-5	−16.916	2.94	01328	.92	4	3.08	9.4864	10.31
6-7	−14.916	2.59	03494	2.42	4	1.58	2.4964	1.03
8-9	−12.916	2.24	08136	5.64	6	.36	.1296	.02
10-11	−10.916	1.90	16448	11.40	12	.60	.3600	.03
12-13	− 8.916	1.55	30082	20.85	11	− 9.85	97.0225	4.65
14-15	− 6.916	1.20	48675	33.74	21	−12.74	162.3076	4.81
16-17	− 4.916	.85	69681	48.30	33	−15.30	234.0900	4.85
18-19	− 2.916	.51	87805	60.87	54	− 6.87	47.1969	.78
20-21	− 0.916	.16	98728	68.44	74	5.56	30.9136	.45
22-23	1.084	.19	98211	68.08	81	12.92	166.9264	2.45
24-25	3.084	.54	86432	59.92	68	8.08	65.2864	1.09
26-27	5.084	.88	67896	47.07	59	11.93	142.3249	3.02
28-29	7.084	1.23	43933	32.53	47	14.47	209.3809	6.44
30-31	9.084	1.58	28702	19.90	17	− 2.90	8.4100	.42
32-33	11.084	1.93	15530	10.77	2	− 8.77	76.9129	7.14
34-35	13.084	2.27	07604	5.27	0	− 5.27	27.7729	5.27
n′=18					500 N			214.62 χ^2

(上表之原有分數本以1爲組距，茲爲統計便利起見，歸類一下，以2爲組距)。

上表中 $M=21.416$，$\sigma=2.8775$ 組距或 5.755 題數，$y_0=69.321$

(註一)　見麥氏原表第二行

求得 χ^2 後再向附表中查得 P 之價值其數爲 0。P 爲機率的價值，表示若一個眞正的分配是常態的，則隨機取來的樣本比此次觀察得來的分配較壞的配合之機會。P 之價值自 0 至1.00。P＝0，表示在 100 次試驗中，隨機取來的樣本比此次觀察得來的樣本更壞的配合之機會爲零。易言之，此次觀察得來的分配，決非常態的。若一個觀察得來的分配，可以視爲常態，P 之價值，照賀麟閣之意至少要等於 .20。

表五十八　χ^2之計算示例二（註二）

	差數 x	$\frac{x}{\sigma}$	y_x	m	m′ (註三)	m′－m	(m′－m)²	$\frac{(m'-m)^2}{m}$
0	－10.053	2.09	.11259	3.33	4.0	.67	.449	.13
1	－ 9.053	1.88	.17081	4.90	6.7	1.80	3.240	.66
2	－ 8.053	1.67	.24797	7.11	10.7	3.59	12.888	1.81
3	－ 7.053	1.47	.33944	9.74	13.0	3.26	10.628	1.09
4	－ 6.053	1.26	.45212	12.97	16.3	3.33	11.089	.85
5	－ 5.053	1.05	.57623	16.53	19.0	2.47	6.101	.37
6	－ 4.053	.84	.70272	20.15	21.0	.85	.722	.04
7	－ 3.053	.63	.82010	23.52	21.0	－2.52	6.350	.27
8	－ 2.053	.43	.91169	26.15	21.3	－4.85	23.522	.90
9	－ 1.053	.22	.97609	27.99	23.7	－4.29	18.404	.66
10	－ .053	.01	.99995	28.68	26.7	－1.98	3.920	.14
11	.947	.20	.98020	28.11	27.0	－1.11	1.232	.04
12	1.947	.40	.92312	26.48	25.0	－1.48	2.190	.08
13	2.947	.61	.83023	23.81	18.0	－5.81	33.756	1.42
14	3.947	.82	.71448	20.49	18.3	－2.19	4.796	.23
15	4.947	1.03	.58834	16.87	16.7	.83	.689	.04
16	5.947	1.24	.46357	13.30	19.7	6.40	40.960	3.08
17	6.947	1.44	.35459	10.17	16.3	6.13	37.577	3.69
18	7.947	1.65	.25634	7.35	11.3	3.95	15.602	2.12
19	8.947	1.86	.17732	5.09	7.0	1.91	3.648	.52
20	9.947	2.07	.11737	3.37	2.3	－1.07	1.145	.34
n′＝21								18.48 χ^2

註二　採自 Hsuan Shan Chen: The Comparative Coachability of Certain Types of Intelligence Tests.

註三　觀察的次數曾經修勻一次。

表五十八中之 $M=10.053$ $\sigma=4.812$ $N=346$ $y_0=28.68$ 而 $P=.56$。

惟讀者又不可誤會，以爲智力或教育成績之分配，在任何狀況下，都非常態的。常態的分配，亦常有之，表五十八乃一例子。不過我們所須注意的，乃是任何觀察得來的分配，必須先試驗其常態性，而後才能決定其是否可用常態曲線以表示之。

總之，常態性假設，在教育與心理實驗中，常常濫用；其實這個假設有研究之必要。任何一個分配，可否用常態曲線表示之，必先加以試驗，而後才能決定，僅憑主觀觀察，隨意假設，非科學的結論所應具的態度。

43. 常態曲線之應用

（一）T分數之求法　若分配是常態的，易言之，即某歲兒童之成績經試驗之後，可視爲常態分配，則原有分數爲 T 分實是一種合理的方法。T分與第八章中所討論之標準數有直線的關係，其公式如下：

$$T=50+10\frac{x}{\sigma}$$

以表四十三之材料爲例，則此學生在

測驗一所得之T分 $=50+10\times 1.57=65.7$

測驗二所得之T分 $=50+10\times 1.11=61.1$

測驗三所得之T分 $=50+10\times 0.67=56.7$

測驗四所得之T分 $=50+10\times 1.21=62.1$

測驗五所得之T分 $=50+10\times 1.83=68.3$

測驗六所得之T分 $=50+10\times -.62=43.8$

測驗七所得之T分 $=50+10\times 1.10=61.0$

T量表創始者麥柯爾所說明之求法，在編造T量表時雖較省手續，但實際上是一樣的。(麥氏之T量表編造法詳見拙著心理與教育測量與測驗與統計兩書)。

(二)等級與地位　在許多問題上，尤其應用於職業心理上的研究，常遇到一種材料，其中之能量或成績，乃用等級表出。在學校裏，教師之給分，亦有用等級制度者。假使他們用等級方法時，注意到常態曲線之理論，則我們能將等級化爲分數。在此處我們所用的公式如下：

$$\overline{{}_1x_2} = \frac{z_1 - z_2}{{}_1n_2} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式三十}$$

在此公式中，z_1 與 z_2 代表 x_1 與 x_2 之縱線，${}_1n_2$ 代表此兩條縱線間之面積；而 $\overline{{}_1x_2}$ 代表此部份之均數。

例如 $x_1=2$，$x_2=3$，則從附表三可以查出 $z_1=.054$，$z_2=.004$。面積從 $x=0$ 至 $x=2$ 爲 .4772，而面積從 $x=0$ 至 $x=3$ 爲 .4987，所以 ${}_1n_2$（卽 $x=2$ 至 $x=3$ 之面積）$=.022$。

$$\therefore \overline{{}_1x_2} = \frac{.054-.004}{.022} = +2.3。$$

或全曲線的均數上面 2.3 個標準差。

但我們須注意 ${}_1n_2$ 總是正的，而 $\overline{{}_1x_2}$ 之符號乃決定於縱線間之差別，故減時必須依次序而來。因此，$x=-2$ 和 $x=1$ 間之均數之算法如下：

$$\overline{{}_1x_2} = \frac{.054-.242}{.818} = \frac{-.188}{.818} = -0.23。$$

若我們所應付者爲一串觀察，有標準差和總數，則公式三十須加修

改，俾所包含的面積是全體之一部份，而均數則以標準差為單位表示之。易言之，

$$\frac{\overline{{}_1x_2}}{\sigma}=\frac{z_1-z_2}{\frac{{}_1f_2}{N}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式三十一}$$

應用上面的公式，我們現在能將質的數列，化為量的數列，對於每個小組或等級悉給予一個分數，即此組之均數。不過我們切須牢記，此中有一個根本的假設，就是常態分配。此法極其重要，因為使許多公式發生功用。（參閱第十四章）

茲設一例以說明之。下表是物理教員評閱試卷時所給予之地位。該教師不以分數說明學生之物理成績，乃以敘述的等級說明之，即劣等，中等，優等，最優等是也。在全部 245 個學生之中，有 48 人列入劣等，佔百分之 19.6；有 67 人列入中等，佔百分之 27.3，等等。如下表：

表五十九　物理教師的計分

教師等第	學生人數	百分數
劣等	48	19.6
中等	67	27.3
優等	71	29.0
最優等	59	24.1
總數	245	100.0

假設上表之事實可以視為常態的分配，則我們可以根據附表四以決定各等級之均數。若 z_1、z_2、z_3、z_4、z_5 代表各縱線，那末很明顯地，z_1 與 z_5 是零，其他三條線可以從附表四中查出。自 z_1 至 z_2 包括 .196

面積，但從 $x=0$ 數來，則包括之面積爲 $.196-.5=-.304$，故 z_2 從附表四中查出爲 $.2766$。自 z_1 至 z_3 包括面積爲 $.196+.273=.469$，但從 $x=0$ 數來，則包括之面積爲 $.469-.5=-.031$，故 z_3 從附表四中查出爲 $.3977$。自 z_1 至 z_4 包括面積爲 $.469+.290=.759$，但從 $x=0$ 數來，則包括之面積爲 $.759-.5=.259$，故 $z_4=.3116$。因此

$$\frac{\overline{{}_1x_2}}{\sigma}=\frac{0-.2766}{.196}=-1.411$$ "劣等"等級之分數

$$\frac{\overline{{}_2x_3}}{\sigma}=\frac{.2766-.3977}{.273}=-.444$$ "中等"等級之分數

$$\frac{\overline{{}_3x_4}}{\sigma}=\frac{.3977-3116}{.290}=.297$$ "優等"等級之分數

$$\frac{\overline{{}_4x_5}}{\sigma}=\frac{.3116-0}{.241}=1.293$$ "最優等"等級之分數

至於應用本公式之結果，有一核對的方法。卽均數與其相當的面積之積數，相加起來，正負相消，應等於零。以本例論，

$$(.297\times.290)+(1.293\times.241)-(1.411\times.196)-(.444\times.273)$$
$$=-.000025$$，相差極微。

第十一章　抽樣之信度

44. 信度 (reliability) 之意義

一切統計的數量，如均數，標準差等均根據於樣本而計算得來的。惟一個樣本之結果很難或永不能與另一樣本之結果完全相似，也不能與全部材料之結果相似。故決定任何數量之信度或可靠性我們必須要決定這種數量的變動之大概的或可能的範圍。

設我們要決定兩種教學法之優劣，當然的辦法，擇選兩組在各方面相似的學生，一組以甲種教學法教授之，我們簡稱試驗組。另一組以乙種教學法教授之，簡稱控制組。試驗組之教學法是一種新的。在相當時期後，兩組均有進步，試驗組之平均進步為 22，控制組為 20，相差為 2。在表面上觀之，甲法優於乙法；但是實際上二種教學法之優劣，不能憑此一次試驗，卽可決定；因為再舉行一次試驗，控制組或可優於試驗組。易言之，另行抽樣，結果未必相同。因此，在統計學中，我們要設法決定各種數量之信度；就此例言，要決定此相差，卽 2 之信度。故信度，乃是樣本間任何一統計的常數之妥定程度或可靠程度。

測量信度之公式，通常稱為抽樣公式 (sampling formula) 或機誤公式。機誤英文為 probable error 簡寫為 P. E. 與在常態曲線中與標準差有一定之關係。第一個 P. E. 照其定義，佔全部面積 25%，查附表二中，24.85711% 之相當的 σ 為 .67 而 25.17478% 之相當的 σ 為 .68，故 1 P. E. 在常態曲線中大於 .67 σ 而小於 .68 σ。確實

的數量爲

$$1\ \text{P. E.} = .67449\,\sigma \text{ 或 } .6745\,\sigma$$

這個關係,極爲重要,必須牢記。

45. 均數的抽樣公式之解釋

均數的抽樣公式爲

$$\sigma_M = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式三十二 (a)}$$

$$\text{或 P. E.}_M = .6745\sigma_M \text{ 或 } .6745\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \cdots\cdots \text{公式三十二 (b)}$$

這兩個公式在應用上極爲簡單,σ 就是任何分配之標準差,N 就是同一分配之人數總和。就表六之材料論,$M=95$, $\sigma=21.44$, $N=144$。

$$\sigma_M = \frac{21.44}{\sqrt{144}} = \frac{21.44}{12} = 1.7867$$

$$\text{P. E.}_M = .6745 \times 1.7867 = 1.2051$$

在解釋這兩個公式的意義之前,我們且先把各個 σ 與 P. E. 之機遇說明一下。在附表二中,我們查出自 $+1\sigma$ 至 1σ 包括全面積有 68.26894% 或 68.27%。全部面積爲 100%,$100-68.27=31.73$,故 $\pm1\sigma$ 之機遇等於 2.15 : 1, 易言之,在 $\pm1\sigma$ 之範圍內,其可有之機遇爲 2.15,其不可有之機遇爲 1。以本例論,$M=95$, $\sigma_M=1.79$,下次之試驗,其均數在 $M\pm1\sigma$ 或 95 ± 1.79(卽自 93.21 至 96.79) 之範圍內,其機遇爲 2.15,在此範圍之外,其機遇爲 1。至於 $\pm2\sigma$,佔全面積 95.44998% 或 95.45%,其機遇爲 20.98 : 1 或 21 : 1。就本例論,下次之試驗,其均數在 91.42 至 98.58 之範圍內,其機遇爲 21,在此範

圍之外,其機遇爲 1。通常算到 $M \pm 3\sigma$,已經很夠了,因爲 $\pm 3\sigma$ 包括了 99.73%,其機遇爲 369:1。

若以 P. E. 表示之,其機遇之求得,乃依據於附表五,±1P. E. 之機遇爲爲1:1,因爲 ±1 P. E. 包括 50%,±2 P. E. 包括 82.26%,其機遇爲 4.6:1。P. E. 通常以六個或五個爲限度,因爲 ±5 P. E. 已包括 99.924% 其機遇爲 1315:1。玆將標準差與機誤之解釋,以表說明之如下。

表六十 標準差與機誤之機遇

均數之範圍	所佔面積	機遇
$M \pm 1\sigma$ (93.21–96.79)	68.27 %	2.15:1
$M \pm 2\sigma$ (91.42–98.58)	95.45	21:1
$M \pm 3\sigma$ (89.63–100.37)	99.73	369:1
M±1P.E.(93.795–96.205)	50.00	1:1
M±2P.E.(92.59–97.41)	82.26	4.6:1
M±3P.E.(91.385–98.615)	95.70	22:1
M±4P.E.(90.18–99.82)	99.30	142:1
M±5P.E.(88.975–101.025)	99.924	1315:1

46. 均數的機誤公式之引伸

上面兩個公式,計算起來雖極簡單,惟學者要澈底明瞭之,以致在應用時不發生錯誤,非了解這個公式之幾個基礎的假設不可。本節中我們將此公式引伸於下:

假設南京市有 N 人,按照其高度分爲若干組,如六尺至六尺半爲

一組，五尺半到六尺爲一組，等等；每組中當有若干次數以 $F_1, F_2, \cdots F_k$ 等代表之，那末，$F_1 + F_2 + \cdots\cdots + F_k + \cdots\cdots$ 當然等於 N 了。如下表：

表六十一

組	次數
1	F_1
2 ⋮	F_2 ⋮
K ⋮	F_k ⋮
	N

假使我們就上表之材料求一均數，則必毫無錯誤，因其包括全體也。但是全體的人數 N 常常太大，欲知其情形，爲事實所不許，那末只得抽一部份而求其情形，以代表全體。一部份的情形是否等於全體的情形，實不敢肯定，故我人必須加以推測，此各種機誤公式之由來也。

統計時既須抽樣，而抽樣又常生差誤。差誤之種類有二，一種爲常性差誤(constant error)，一種爲變性差誤(variable error)。常性差誤是常在的，正則皆正，負則皆負。例如測量南京人之高度時，我們故意選高的人或低的人，或高的人常自動來應選等情形。又如南京市兒童健康比賽時，強壯的兒童，其父母因存爭勝之心，抱來應賽，衰弱的兒童，其父母明知無望，均不應賽，若我們統計應賽時兒童之結果，以代表全體南京市兒童之健康情形，則必大誤特誤，毫無價值之可言，因發生常性差誤也。在教育測驗中，這種情形也常有之。譬如目的在測量算術的能力，而問題冗長深奧。目的在測量閱讀能力，而答案需以論文發表。至於變性差誤是偶然的，或正或負，前後不能一致。例如測量人之高度或體重，

稱量多次,每次求寸或兩以下數位小數之數量,結果不能一致。又如考試學生時,材料之抽樣不同,記分之方法之主觀,以及被試者之興趣,注意,健康等有變化,皆足使結果發生差誤。惟變性差誤,正負並無一定之趨勢,若將多次測量之結果平均,可以互相抵償或減少,甚或完全消滅。

常性差誤因爲是常在的,非機誤公式所能量出的。就表六之例論,第一次之結果,M=95,但此次結果設有常性錯誤存在;而再測量一次,若常性錯誤之因子,已經消滅,則其結果必與第一次大異,均數無從推測了。若第一次與第二次均無常性差誤存在,而只有變性差誤,則我們可按照表五十九以推測第二次結果了。故我們必須知道機誤的公式之用處,乃在發現抽樣中之變性差誤。因此應用機誤的公式時,最基礎的假設是抽樣必須隨機的。隨機的抽樣,所以能適當的代表全體,已在第二章中討論過。惟我們必須注意,隨機的抽樣只能減少變性差誤,而不能免除常性差誤。

我們既得了隨機的抽樣,以 n 代表此樣本之人數,以 f_1 f_2…… f_k……等代表各組之次數,如表六十二:

表六十二

組	次數
1	f_1
2	f_2
⋮	⋮
K	f_k
⋮	⋮
	n

有了上列二表，我們可以推測任何人或物歸於 K 組或任何組之機率了。歸於 K 組中之機率，當然是 F_k/N，歸於 1 組之機率，當然是 F_1/N，以此類推。若以歸於 K 組爲成功，則成功的機率，$p=F_k/N$，而失敗的機率 $q=\left(1-\frac{F_k}{N}\right)$。因此，我們可以應用二項展開之理，以求樣本中 K 組之應有次數了。此數當然是 Np，其標準差是 $\sqrt{Npq}$。易言之，$F_k=Np$，$\sigma_{F_k}=\sqrt{Npq}$。$P.E._{F_k}=.6745\sqrt{Npq}$。

但是 $p=F_k/N$，而 F_k 與 N 均爲不知之數，因此 p 的價值也不得而知。於是我們乃有第二個假設，卽是

$$\frac{f_k}{n}=\frac{F_k}{N}$$

這個假設是根據於第一個假設——抽樣要隨機的——來的，並不十分確定，只是一約數而已。再則，n 必須大，因爲 n 大時，隨機的差誤或能彼此相消。賀麟閣主張凡 n 在 30 以下，不可用此種公式。

求機誤的公式時，成功的機率，並非眞正的，乃一約數，爲實際觀察所得來的 f_k 與 n 之比例，因此，

$$\sigma_{f_k}{}^2=npq=f_k\left(1-\frac{f_k}{n}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

再則抽樣時旣有變性差誤，此差誤所發生之影響若何，亦一先決問題。若以 $f_1, f_2 \cdots\cdots f_k \cdots\cdots f_s$ 等代表抽樣中各組之次數而以 Δf_k 代表 f_k 之變動，Δf_s 代表 f_s 之變動等。所謂變動，係指 f_k 照理論的比例，譬說應爲 10，因抽樣之差誤而得 11 或 9 等。或第一次抽樣結果，f_k

＝10，而第二次抽樣結果，$f_k=11$ 或 9 等。但是我們知道若 f_k 有了變動，其影響所及必至各組，因為 n 是不變的。在同一 n 中，甲組之次數若多則乙組或其他組的次數必少。故使兩次抽樣之 n 固定，則每個樣本中各組次數要自相調劑。因此，若 Δf_k 是正的，則必有 $-\Delta f_k$ 分佈於各組中，始能維持 n 之數使其不變，但此 $-\Delta f_k$ 分佈於各組中之數亦不一致，與各組應有之數成正比例。我們知道K組外，總次數是 $n\ \ f_k$，所以在 s 組中所得之 $-\Delta f_k$ 之比例是 $\frac{f_s}{n-f_k}$，所以

$$\Delta f_s=\frac{f_s}{n-f_k}(-\Delta f_k)$$

因此

$$\Delta f_s\,\Delta f_k=-\frac{f_s\,\Delta f_k}{n-f_k}\quad\Delta f_k=-\frac{f_s\,(\Delta f_k)^2}{n-f_k}$$

$$=-\frac{f_s\,(\Delta f_k)^2}{n-f_k}\times\frac{f_k}{f_k}=-\frac{f_s\,(\Delta f_k)^2}{nf_k-f_k^{\,2}}\,f_k$$

$$=-\frac{f_s\,(\Delta f_k)^2}{nf_k\left(1-\frac{f_k}{n}\right)}\,f_k$$

以(1)代入，

$$\Delta f_s\ \Delta f_k=-\frac{f_s\,(\Delta f_k)^2}{n\sigma_{f_k}^{\ 2}}\ f_k\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

有了(1)與(2)，我們可以開始作均數的機誤公式之引伸了。第一步驟先照普通方法編一次數分配表如下：

表六十三　第一樣本

量　數	差　數	次　數	次乘差	次乘差方
X_1	x_1	f_1	f_1x_1	$f_1x_1^2$
X_2	x_2	f_2	f_2x_2	$f_2x_2^2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
X_k	x_k	f_k	f_kx_k	$f_kx_k^2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
		n	Σfx	Σfx^2

(差數取於任何一點,在以上各章中以 x′代表之)

因此,此樣本之均數如下:

$$M = M' + \bar{x} = M' + (f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots\cdots + f_kx_k)/n$$

而其均方差(以 $\mu_2{}^2$ 代表之)是:

$$\mu_2{}^2 = (f_1x_1{}^2 + f_2x_2{}^2 + \cdots\cdots + f_kfx_k{}^2\cdots\cdots)/n$$

標準差則是:

$$\sigma^2 = \mu_2{}^2 - \bar{x}^2$$

再另取一樣本,n 是相同,但各組之次數分配則略有變動,如下表:

表六十四　第二樣本

量　數	差　數	次　數	次　乘　差
X_1	x_1	$f_1+\Delta f_1$	$x_1(f_1+\Delta f_1)$
⋮	⋮	⋮	
X_k	x_k	$f_k+\Delta f_k$	$x_k(f_k+\Delta f_k)$
		n	$\Sigma x(f+\Delta f_k)$

因此,均數也有變動。設求第二個樣本時,假設均數 M′ 是一樣的,

那末

$$M_2 = M' + (\overline{x} + \Delta\overline{x}) = M' + [x_1(f_1 + \Delta f_1 +)\cdots + x_k(f_k + \Delta f_k) + \cdots]/n$$

$$M_2 - M_1 = M' + \overline{x} + \Delta\overline{x} - M' - \overline{x} = \Delta\overline{x}$$

但是 $(\overline{x}+\Delta\overline{x})-\overline{x}=[(f_1x_1+\Delta f_1x_1+\cdots+f_kx_k+\Delta f_kx_k$

$+\cdots)-(f_1x_1+\cdots+f_kx_k+\cdots)]/n$

所以 $\Delta\overline{x}=(\Delta f_1x_1+\cdots+\Delta f_kx_k+\cdots)/n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3).$

至於各種樣本所到得均數之不同的價值的標準，其公式當是

$$\sigma_m{}^2=\frac{\Sigma(\Delta\overline{x})^2}{V}$$

V 爲樣本之數。若我們把(3)之左右兩邊都求其平方，如下：

$$(\Delta\overline{x})^2=(\Delta f_1{}^2x_1{}^2+\cdots+2x_1x_2\Delta f_1\Delta f_2+\cdots)/n^2$$

$$n^2\Sigma\Delta\overline{x}^2=x_1{}^2\Sigma\Delta f_1{}^2+\cdots+2\Sigma x_1x_2\Delta f_1\Delta f_2+\cdots$$

代入(2)，

$$n^2\Sigma\Delta\overline{x}^2=x_1{}^2\Sigma\Delta f_1{}^2+\cdots+2\Sigma x_1x_2\left(-\frac{f_1(\Delta f_2)^2}{n\sigma_{f_2}{}^2}f_2\right)+\cdots$$

$$=x_1{}^2\Sigma\Delta f_1{}^2+\cdots+2x_1x_2\left(-\frac{f_1\Sigma\Delta f_2{}^2}{n\sigma_{f_2}{}^2}f_2\right)+\cdots$$

但是

$$\Sigma\Delta\overline{x}^2=V\sigma_m{}^2;\qquad \Sigma\Delta f_1{}^2=V\sigma_{f_1}{}^2;\qquad \Sigma\Delta f_2{}^2=V\sigma_{f_2}{}^2 \text{ 等,}$$

所以

$$n^2V\sigma_m{}^2=x_1{}^2V\sigma_{f_1}{}^2+\cdots+2x_1x_2\left(-\frac{f_1V\sigma_{f_2}{}^2}{n\sigma_{f_2}{}^2}f_2\right)+\cdots$$

因此，

$$\frac{n^2V\sigma_m{}^2}{V}=x_1{}^2\sigma_{f_1}{}^2+\cdots+2x_1x_2\left(-\frac{f_2f_1}{n}\right)$$

以(1)代入，

$$n^2\sigma_m{}^2 = x_1{}^2 f_1\left(1-\frac{f_1}{n}\right)+\cdots-\frac{2x_1x_2f_1f_2}{n}\cdots$$

$$= x_1{}^2 f_1 - \frac{x_1{}^2 f_1{}^2}{n} + \cdots \frac{2x_1x_2f_1f_2}{n}\cdots$$

$$= (f_1x_1{}^2+\cdots) - \frac{1}{n}(f_1{}^2x_1{}^2+\cdots+2f_1x_1f_2x_2)$$

$$= \Sigma fx^2 - \frac{1}{n}(f_1x_1+f_2x_2+\cdots)^2$$

$$= n\mu_2{}^2 - \frac{1}{n}(\Sigma fx)^2$$

$$= n\mu_2{}^2 - (n\bar{x})^2/n$$

$$= n\mu_2{}^2 - \frac{n^2\bar{x}^2}{n}$$

$$= n\mu_2{}^2 - n\bar{x}^2$$

$$= n(\mu_2{}^2 - \bar{x}^2)$$

$$n\sigma^2{}_m = \mu_2{}^2 - \bar{x}^2$$

$$= \sigma^2$$

$$\sigma_m{}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$P.E._m = .6745\ \sigma_m \text{ 或 } .6745\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\text{。}$$

由此我們可以知道均數之信度決定於兩點，一爲分配之標準差，二爲分配之人數。凡分配之標準差愈小，則 σ_m 亦愈小。惟標準差與均數同爲一分配中之常數，故人數爲決定均數的信度之最要點。人數愈大，則 σ_m 愈小，在此公式中可以顯見。因此，任何抽樣，欲其代表全體，而測量時發生常性差誤，則另作別論了。

47. 其他公式

均數之機誤可以用於任何分配，但在以下其他常數，則證明中都假設爲常態分配。因此，下列所有公式只能在觀察將來的分配可以常態曲線表示之的條件下應用之。

(一)中位數之機誤公式：

$$\sigma_{mdn}=1.25331\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1.25331\,\sigma_m \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式三十三 (a)}$$

$$P.E._{mdn}=0.84535\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1.25331P.E._m\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式三十三(b)}$$

由上面的公式觀之，中位數之抽樣差誤比均數的抽樣差誤大約大25%，故均數有較大的信度。惟在極尖頂的分配中，中位數或較爲可靠。關於此點，優爾在其統計學理論 (p. 338) 中曾加以討論。但是大多數問題，其分配近於常態的，故均數爲較優的數量。

(二)四分位數之機誤公式

$$\sigma_{\text{四分位數}}=1.36263\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式三十四(a)}$$

$$P.E._{\text{四分位數}}=0.91908\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式三十四(b)}$$

(三)各十分位(deciles)之機誤公式

$$\sigma_{\text{deciles 4 and 6}} = 1.26804\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式三十五(a)}$$

$$P.E._{\text{deciles 4 and 6}} = 0.85528\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式三十五(b)}$$

$$\sigma_{\text{deciles 3 and 7}} = 1.31800\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式三十五(c)}$$

$$P.E._{\text{deciles 3 and 7}} = 0.88897\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式三十五(d)}$$

$$\sigma_{\text{deciles 2 and 8}} = 1.42877\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式三十五(e)}$$

$$P.E._{\text{deciles 2 and 8}} = 0.96369\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式三十五(f)}$$

$$\sigma_{\text{deciles 1 and 9}} = 1.70942\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式三十五(g)}$$

$$P.E._{\text{deciles 1 and 9}} = 1.15298\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式三十五(h)}$$

(四)標準差之機誤公式

$$\sigma_\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式三十六(a)}$$

$$P.E._\sigma = .6745\frac{\sigma}{\sqrt{2n}} = \frac{.4769\sigma}{\sqrt{n}} = .7071 P.E._M \text{公式三十六(b)}$$

(五)差異係數之機誤公式

$$P.E._V=\frac{.6745V}{\sqrt{2n}}\left\{1+2\left(\frac{V}{100}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式三十七}$$

48. 兩數相差之機誤公式

抽樣的公式中之最有用的公式是兩數相差之機誤公式，其目的在試驗兩數相差是否由於機會。譬如有兩種教學法，經試驗結果，甲優於乙，惟相差很少；我們是否可以根據這次試驗結果，即斷定甲法必優於乙？試驗此兩數相差之信度的公式，通常爲

$$\sigma_{A-B}=\sqrt{\sigma_A{}^2+\sigma_B{}^2} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式三十八(a)}$$

$$P.E._{A-B}=\sqrt{P.E._A{}^2+P.E._B{}^2} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式三十八(b)}$$

這兩個公式可以應用於各種統計的數量，但是最常應用於均數。在公式三十八中，A 是一個數量，B 是另一數量。$P.E._A$ 是 A 數量之機誤等等。以均數論，我們可以改寫爲

$$P.E._{M_1-M_2}=\sqrt{P.E.^2_{M_1}+P.E.^2_{M_2}} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式三十八(c)}$$

在此公式中我們假設這兩組或兩個分配中之變量及其均數等都是彼此獨立；易言之，兩個均數是不相關的。

這個公式之應用，賀麟閣曾舉幾個很好的例子，有兩組學生在智力上及中學物理科之初步能力上完全相等。後來一組以講演法教授之，另一組施以表演法教授之。教授完畢，均施行考試一次，其結果如下表。

表六十五　物理教學試驗之結果(仿自 Holzinger, p. 235)

教學法	講演法	表演法
人數	$N_1=37$	$N_2=41$
平均智力分數	137	138
一次物理測驗平均分數	74.3	74.3
末次物理測驗平均分數	$M_1=91.43$	$M_2=89.64$
末次物理測驗之標準差	$\sigma_1=7.08$	$\sigma_2=7.23$
均數之機誤	$P.E._{M_1}=.785$	$P.E._{M_2}=.761$

照上表中,此兩個均數的相差之機誤是

$$P.\ E._{M_1-M_2}=\sqrt{(.785)^2+(.761)^2}=1.09$$

而此兩個均數之相差是

$$M_1-M_2=91.43-89.64=1.79\pm1.09$$

這個相差,可以認爲不關重要的,因爲相差數不及兩倍機誤。在下次試驗之,這兩個均數之相差在 $-.39$ 至 3.97 的範圍內有 $4.6:1$ 之機會。易言之,再試驗一次,表演組之結果比講演組爲優,並非不可能的。反之,若相差數 5 倍大於其機誤,則此相差才是可靠的。

因此,這個研究不能視爲定論。我們決不能因爲觀察所得來 1.79 的相差之數,卽說講演法爲較優,實際上這個相差可以釋爲抽樣之機會變異。我們須知道在此試驗中有許多變的因子應加以控制,而未能控制的。這些因子當然影響於結果。雖然,我們假設抽樣中之差誤與這些因子是不相關的。

賀躞閣又舉另一例子,以說明兩個或以上樣本是否屬於全體之同

一的或不同的種類。這個功用亦極爲重要。其例如下：在表六十六中有 4834 智商之分配。這個分配可分爲五個小組。從表末兩行之均數與標準差，我們可以試驗各不同的組間（以 1 至 6 標明之）之相差。

表六十六 各種人們之智商分配(仿自 Holzinger, p. 241)

智商	城市小學生（白人）1	城市中學生（白人）2	鄉村（白人）3	城市（黑人）4	鄉村（黑人）5	全體 6
150–160	2	—	—	—	—	2
140–150	9	—	3	—	—	12
130–140	27	1	8	—	—	36
120–130	73	12	17	1	—	103
110–120	176	68	63	10	1	318
100–110	351	153	227	59	9	799
90–100	413	111	347	177	26	1074
80– 90	280	42	447	253	37	1059
70– 80	174	2	329	309	54	868
60– 70	41	—	116	170	39	366
50– 60	10	—	51	86	16	163
40– 50	3	—	3	12	7	25
30– 40	1	—	—	7	1	9
總數	1560	389	1611	1084	190	4834
均數	96.76±.27	102.28±.34	87.42±.25	78.90±.29	76.26±.72	89.28±.16
標準差	16.03±.19	10.05±.24	14.96±.18	14.39±.21	14.81±.51	16.86±.12

我們可以用公式三十八(b)或(c)，先來決定(1)與(2)兩組之均數與標準差的相差。

$$M_1-M_2=96.76-102.28=-5.52$$

$$P.E._{M_1-M_2}=\sqrt{(.27)^2+(.34)^2}=.43$$

$$\sigma_1-\sigma_2=16.03-10.05=5.98$$

$$P.E._{\sigma_1-\sigma_2}=\sqrt{(.19)^2+(.24)^2}=.31$$

兩個相差都很重要，決非由於機會之變動。-5.52 ± 6 P.E. $=-5.52\pm2.58$; 5.98 ± 6 P.E. $=5.98\pm1.86$。相差之數比六個 P.E. 大的多。因此我們可以斷定城市中之小學生與中學生在智力上實是兩種很不相同的。其差異大概由於選擇。

同樣地，我們可以計算(1)與(3)及(2)與(3)各組各數量之相差。

$$M_1-M_3=9.34\pm.37$$

$$\sigma_1-\sigma_3=1.07\pm.26$$

$$M_2-M_3=14.86\pm.42$$

$$\sigma_2-\sigma_3=4.91\pm.31$$

除 $\sigma_1-\sigma_3$ 之相差外，其餘的相差數均大於其 P.E.六倍，而 $\sigma_1-\sigma_3$ 之相差數也大於其 P.E. 四倍，照表六十，其機遇也超過 142 : 1。可見這三組兒童根本上是三種不同的種類之樣本。

至於(4)與(5)兩組，在均數上比白色兒童低的多，M_4-M_5 之相差(2.6±.78)則並不十分顯明，其機遇約爲 45 : 1。

總之，在上面比較中，所有五組〔(4)與(5)兩組或可視爲性質相同種類〕都可視爲不同種類的樣本。此種齊一性之缺乏，無疑地可以解釋第 6 組（卽全體）所以不是一個常態分配之部份的原因。

(註一)由這種結果,我們可以把本章與上章之概念聯合起來。智力或教育測驗之結果或則可以假設爲常態的;而觀察的結果不能得到常態的原因 或由於抽樣之不適當。

(註一) 第六組分配是非常態的。其 $\chi^2=46.6, n'=12, P=.00001$ 參考 Holzinger p. 247。

第十二章　直線相關

49. 相關之意義與種類

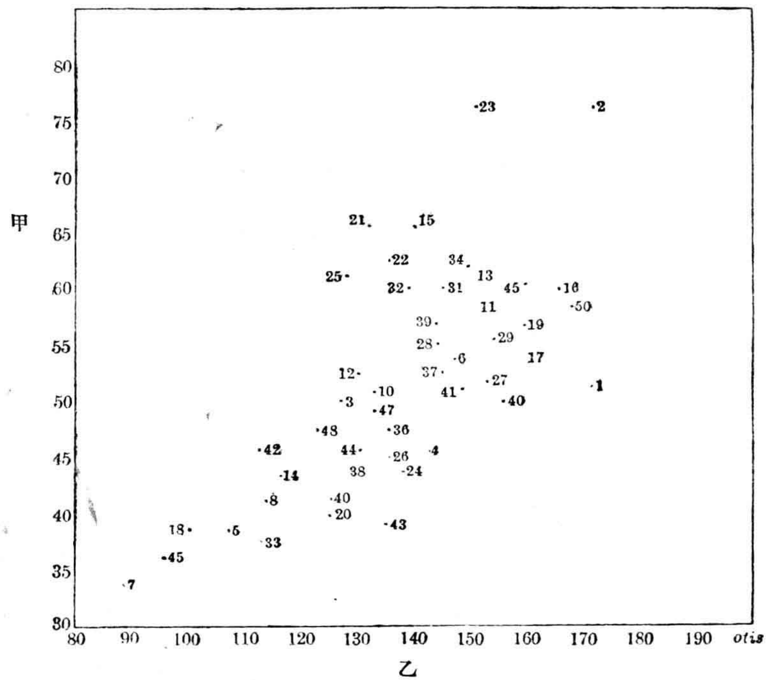
宇宙間事實異常繁複,我們研究一種事實時,不但要知道這種事實之表徵數,還要進一步知道這種事實與其他事實之相互的關係。不過一種事實同時可與許多事實發生關係,本章中僅說明兩種事實之相關方法,或曰兩數相關 (correlation)。

求一種事實之表徵數時,我們祇有一種變量,通常以 X 與 x 代表之,求兩數相關時,須再加一變量,通常以 Y 與 y 代表之。所以求均數或標準差時,我們是求 X 變量之中心量數或離中趨勢,求兩數相關時,我們是求 X 與 Y 兩種特性之相伴的差異。即 X 變大時,Y 是否隨之而大或小或不變。數學上無論甚麼東西,知道了他們的關係後,總可以引伸一個公式出來,這就是數學上的函數 (function) 概念。不過我們須注意,所謂相關者,祇是兩種特性之相伴的差異,並不一定含有原因關係之存在。

決定相伴的差異之法則,爲各種科學之共同的問題。例如,在物理學中,我們常要決定溫度與體積之關係;在植物學中,我們常要決定水分與植物生長之關係,在經濟學中,我們常要決定物價與工資之關係,在教育學中,我們常要決定智力與學業之關係。諸如此類,不勝枚舉。惟物質科學之現象,在相當條件下是比較固定的,所以統計學應用在物理及化學這一類自然科學上,有時異常準確,能產生出普通的法則。至於

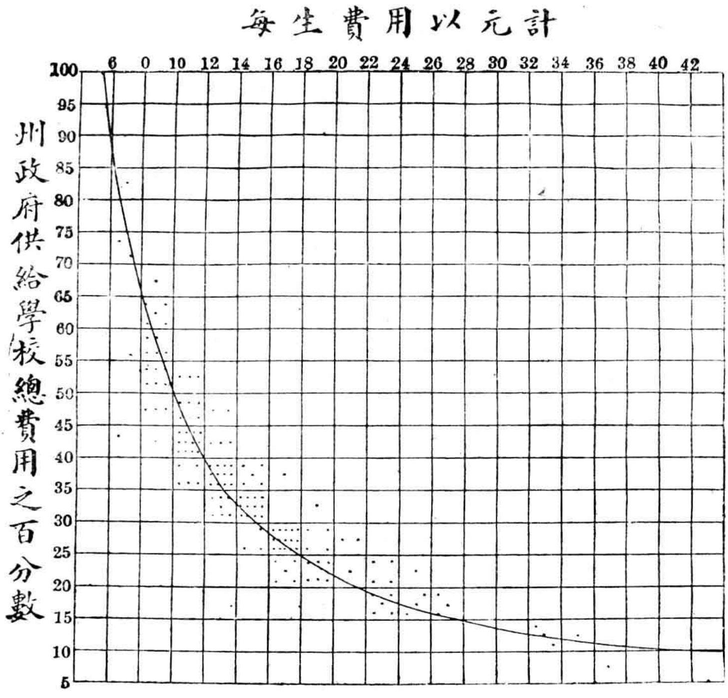
社會及生物現象，由於測量與觀察之差誤較多，而所包括的因子又繁雜，所以用統計方法來研究時，很難得到普遍的結論，祇能發現所謂「傾向」(tendency)而已。

兩種特性既發生了相伴的差異，則此種差異之情形當然可以分布圖來表示之。圖三十一乃是兩個測驗結果之相關以圖形之。在此圖中，我們可以看出凡在甲測驗中得多分者，在乙測驗中大概亦得多分。並且在此圖中我們又可以看出這些點子有成一條直線之傾向。所以這種相關，我們可以說是一種直線相關。因此，直線相關者，乃是分布圖中之各點有成一條直線之傾向。本章所討論的相關方法，就是直線相關(linear correlation)。

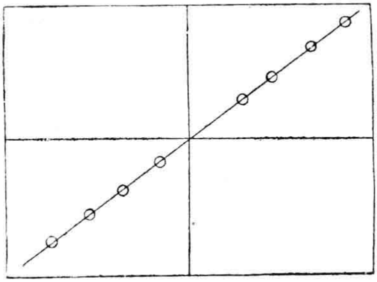


圖三十一　兩個測驗分數之分布圖

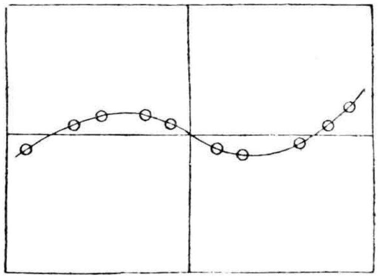
但是兩種特性之相伴的差異，其關係並不是都是直線的。例如，圖三十二，各點之關係乃形成一條曲線，其詳細情形容在下章中討論之。惟相關不論是直線的或曲線的，兩種變量間之關係愈密切，則各點均愈密集於一條線上。到全完相關時，則分布圖中所有點子，均在一條線上。圖三十三表示完全直線相關之情形，圖三十四表示完全曲線相關之情形。



圖三十二 表示每生費用與州政府供給學校總用之百分數的關係（仿自 Holzinger，同上，142 頁）

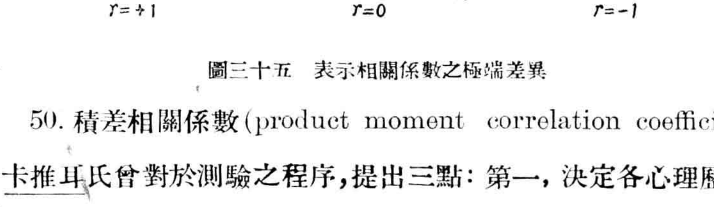


圖三十三　完全直線相關



圖三十四　完全曲線相關

直線相關又有正負之分。正相關則是 X 由大而小或由小而大，Y 也隨之由大而小或由小而大。例如，智力與學業。大概智力高者學科成績亦較優。負相關則是 X 由大而小，而 Y 則反由小而大。例如壓力與容量，壓力愈大，容量愈小。若 X 由小而大，而 Y 則或大或小，毫無一定之趨勢，謂之不相關。例如美醜與學業。貌若美者，其學業如何，不得而知。下圖即表示不同的相關之極端的情形。



圖三十五　表示相關係數之極端差異

50. 積差相關係數(product moment correlation coefficient)

卡推耳氏曾對於測驗之程序，提出三點：第一，決定各心理歷程間之固定性，第二，決定各不同心理歷程間之相依度，第三，決定不同情境下之差異數。這三點要得到完滿的解決，我們須用相關方法。惟當時一

般研究者所用調查相關之方法，殊太粗略，不能得到一個數字的量數。及到後來，學者應用皮而生的積差相關於研究中，測驗學始有長足的進步。

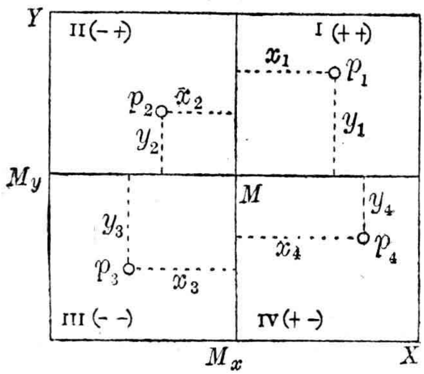
積差相關係數，通常以 r 代表之，其公式如下：

$$r=\frac{\Sigma xy}{N\sigma_x\sigma_y}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式三十九(a)}$$

$x=X-M_X$，卽 X 量數與其均數之差，　$y=Y-M_Y$，

$\sigma_x=$ X 變量之標準差，　$\sigma_y=$ Y 變量之標準差.

這個公式以下圖表示之，意義更為明瞭。在圖三十六中，根據兩個均數把平面分為四個象限。第一個象限內之所有差數皆是正的，所以本象限內之各點如 P_1 皆是正的。第二個象限內，差數 x 是負的，差數 y 是正的，所有各點如 P_2 皆是負的。以此類推，各 P 點之數若是正的，如 P_1，P_3 等皆使相關成為正的；反之，使相關之數降低或成為負的。若各點雜亂地分布於平面上，則相關趨近於零。因此，各 P 點，卽各對偶的積數之算術均數可用以測量相關度。所以



圖三十六　表示四個象限之積差

$$P=\frac{P_1+P_2+\cdots+P_n}{N}=\frac{(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)}{N}=\frac{\Sigma xy}{N}.$$

但是各量表之單位不同，故其差數均根據於其不同的量表之單位。爲征服此種困難起見，最好用標準量數，如$\frac{x_1}{\sigma_x}$, $\frac{y_1}{\sigma_y}$, 等。因此，這些標準量數之積之均數遂成爲一純粹的數量。若以 r 代表之，則

$$r=\frac{\frac{x_1}{\sigma_x}\frac{y_1}{\sigma_y}+\frac{x_2}{\sigma_x}\frac{y_2}{\sigma_y}+\cdots+\frac{x_n}{\sigma_x}\frac{y_n}{\sigma_y}}{N}=\frac{\Sigma xy}{N\,\sigma_x\sigma_y}.$$

故積差相關係數 r 就是相聯的標準量數之對偶的積數之均數。

由公式三十九(a)中，我們可以大略看出 r 之數不能大於 ±1.00, 其證明亦很簡單的。相關不論正負，若是完全的，則分布圖中所有之各點均在一條直線上，此直線之公式當然是

$y=\pm bx$,　　　　$b=$ 直線之傾斜度。

$$\frac{\Sigma y^2}{N}=\pm\frac{\Sigma b^2x^2}{N}=b^2\frac{\Sigma x^2}{N}.$$

$$\therefore\ \sigma_y=\pm b\,\sigma_x.$$

而 $\Sigma xy=\Sigma x(y)=\Sigma x(\pm bx)=\pm b\Sigma x^2=\pm bN\sigma_x^2$.

因此　$r=\frac{\Sigma xy}{N\,\sigma_x\sigma_y}=\frac{\pm bN\sigma_x^2}{\pm N\sigma_x b\sigma_x}=\pm 1.$

假設所有點子均在一橫線上，即在 M_Y 線上（或 M_X 亦然），則傾斜度是零，於是 r 之價值將爲不可決定的。若各點環此橫線有對稱的排列，如圖三十五中之第二圖，則結果爲零，因爲 $r\Sigma xy=0$, 而 N,σ_x,

與 σ_y 不會是零。因此,在眞正的事實中,相關係數之價值,其全距由 -1 至 $+1$。

至於相關係數之信度公式如下:

$$\sigma_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{N}} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式四十(a)}$$

$$P.E._r = \frac{.6745\,(1-r^2)}{\sqrt{N}} = .6745\,\sigma_r \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式四十(b)}$$

在此兩個公式內,我們亦可看出相關係數之信度受兩種因子之影響,一爲係數之大小,二爲 N 之大小。假使 N 太少,則易發生抽樣之差誤,上章已詳言之。故 r 亦必須四倍或五倍大於其 P. E.;否則,這個係數是不可信的。雖然,我們若得到一個係數四倍或五倍大於其 P. E.,這個係數亦未必一定是可信的。因爲機誤公式祇顧慮到變差,而 r 之大小,又常受不純的因子之影響,易言之,卽有常差存在於其中。關於不純的因子之抽除法,將在分析相關章中討論之。在此處我們所必須注意者,凡 r 小於其 P. E. 四倍或五倍者,决不是一個可信的係數;反之,一個 r 大於其 P. E. 四倍或五倍者,未必一定是一個可信的係數。

51. 求相關係數之方法

(一)各種公式　相關係數之公式有一特點,是可以用代數法計算,因此可以任意變動,以眞正差數計算之,或以假設差數計算之,或以原有量數計算之,均無不可。

(a)基礎公式　這個公式就是公式三十九(a),計算起來

$$r = \frac{\Sigma xy}{N\sigma_x\sigma_y} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式三十九(a)}$$

最煩,因爲 x 與 y 都是眞正差數,同時又須計算 σ_x 與 σ_y。

(b)公式(b) 這個公式完全與公式(a)一樣,惟無須計算 σ_x 與 σ_y, 如下:

$$r=\frac{\Sigma xy}{N\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}}\sqrt{\frac{\Sigma y^2}{N}}}=\frac{\Sigma xy}{\sqrt{(\Sigma x^2)(\Sigma y^2)}}\cdots\cdots\text{公式三十九(b)}$$

(c)簡捷法 我們知道

$$x'=x+C_x,\quad y'=y+C_y.$$

故 $x'y'=xy+C_xy+C_yx+C_xC_y$.

$\Sigma x'y'=\Sigma xy+C_x\Sigma y+C_y\Sigma x+NC_xC_y$, 但 Σx 與 Σy 均是零

$\therefore\ \Sigma x'y'=\Sigma xy+NC_xC_y$.

$\Sigma xy=\Sigma x'y'-NC_xC_y$. (此公式 b 之分子)

又 $x'^2=x^2+2C_xx+C_x^2$.

$$\Sigma x'^2=\Sigma x^2+2C_x\Sigma x+NC_x^2$$
$$=\Sigma x^2+NC_x^2$$

$\Sigma x^2=\Sigma x'^2-NC_x^2$. (此公式 b 中之分母)

同樣地

$$\Sigma y^2=\Sigma y'^2-NC_y^2.$$

故公式 b 可改寫者

$$r=\frac{\Sigma x'y'-NC_xC_y}{\sqrt{(\Sigma x'^2-NC_x^2)(\Sigma y'^2-NC_y^2)}}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式三十九(c)}$$

這個公式根據假設差數而計算,便利多了。

(d)一個根據原有量數計算的公式: 我們知道

$$x = X - M_X, \qquad y = Y - M_Y.$$

$$xy = XY - XM_Y - YM_X + M_XM_Y.$$

$$\Sigma xy = \Sigma XY - (\Sigma X)M_Y - \Sigma Y(M_X) + NM_XM_Y$$

$$= \Sigma XY - NM_XM_Y - NM_XM_Y + NM_XM_Y$$

$$= \Sigma XY - NM_XM_Y. \qquad \text{(此公式 b 之分子)}$$

又 $x^2 = X^2 - 2XM_X + M_X{}^2.$

$$\Sigma x^2 = \Sigma X^2 - 2\Sigma XM_X + NM_X{}^2$$

$$= \Sigma X^2 - 2NM_X M_X + NM_X{}^2$$

$$= \Sigma X^2 - NM_X{}^2. \qquad \text{(此公式 b 之分母)}$$

同樣地

$$\Sigma y^2 = \Sigma Y^2 - NM_Y{}^2.$$

故公式 b 可改寫爲:

$$r = \frac{\Sigma XY - NM_XM_Y}{\sqrt{(\Sigma X^2 - NM_X{}^2)(\Sigma Y^2 - NM_Y{}^2)}} \cdots\cdots\cdots \text{公式三十九(d)}$$

(e)一個不用 Σxy 計算的公式　若我們以 v 代表 $y-x$,

則 $\Sigma v^2 = \Sigma y^2 - 2\Sigma xy + \Sigma x^2$

$$\Sigma xy = \frac{-\Sigma v^2 + \Sigma x^2 + \Sigma y^2}{2}, \qquad \text{代入公式 b 內,則}$$

$$r = \frac{\Sigma x^2 + \Sigma y^2 - \Sigma v^2}{2\sqrt{(\Sigma x^2)(\Sigma y^2)}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式三十九(e)}$$

(二)演算舉例

(a)事實未歸類者　設我們以兩個測驗試驗 20 個學生,其結果如下表。在此表中,A 生國文測驗分數爲 100,算學爲 96, B 生國文爲 95,

算學爲 98,餘類推。根據這二個分配,我們可以求國文與算學之 r 矣。

表六十七 相關係數求法示例

學生	國文 X	算術 Y	差數 x	y	差方 x^2	y^2	xy +	−	假差 x'	y'	假差方 x'^2	y'^2	x'y' +	−	v	v^2	XY	X^2	Y^2
A	100	96	15	13	225	169	195		10	11	100	121	110		−2	4	9600	10000	9216
B	95	98	10	15	100	225	150		5	13	25	169	65		5	25	9310	9025	9604
C	94	91	9	8	81	64	72		4	6	16	36	24		−1	1	8554	8836	8281
D	92	88	7	5	49	25	35		2	3	4	9	6		−2	4	8096	8464	7744
E	92	85	7	2	49	4	14		2	0	4	0	0		−5	25	7820	8464	7225
F	90	93	5	10	25	100	50		0	8	0	64	0		5	25	8370	8100	8649
G	89	82	4	−1	16	1		4	−1	−3	1	9	3		−5	25	7298	7921	6724
H	88	90	3	7	9	49	21		−2	5	4	25		10	4	16	7920	7744	8100
I	88	80	3	−3	9	9		9	−2	−5	4	25	10		−6	36	7040	7744	6400
J	87	83	2	0	4	0	0		−3	−2	9	4	6		−2	4	7221	7569	6889
K	84	89	−1	6	1	36		6	−6	4	36	16		24	7	49	7476	7056	7921
L	84	82	−1	−1	1	1	1		−6	−3	36	9	18		0	0	6888	7056	6724
M	84	77	−1	−6	1	36	6		−6	−8	36	64	48		−5	25	6468	7056	5929
N	83	81	−2	−2	4	4	4		−7	−4	49	16	28		0	0	6723	6889	6561
O	82	78	−3	−5	9	25	15		−8	−7	64	49	56		−2	4	6396	6724	6084
P	79	80	−6	−3	36	9	18		−11	−5	121	25	55		3	9	6320	6241	6400
Q	76	71	−9	−12	81	144	108		−14	−14	196	196	196		−3	9	5396	5776	5041
R	74	77	−11	−6	121	36	66		−16	−8	256	64	128		5	25	5698	5476	5929
S	72	70	−13	−13	169	169	169		−18	−15	324	225	270		0	0	5040	5184	4900
T	67	69	−18	−14	324	196	252		−23	−16	529	256	368		4	16	4623	4489	4761
20 N	1700 (ΣX)	1660 (ΣY)			1314 Σx^2	1302 Σy^2	1176 1157 Σxy	19	−100 ($\Sigma x'$)	−40 ($\Sigma y'$)	1814 $\Sigma x'^2$	1382 $\Sigma y'^2$	1391 1357 $\Sigma x'y'$	34		302 (ΣV^2)	142257 (ΣXY)	145814 ΣX^2	139082 ΣY^2

$M_X=85,\qquad M_X{}^2=7225.$

$M_Y=83,\qquad M_Y{}^2=6889.$

$M_XM_Y=7055,\qquad NM_XM_Y=141100.$

$\sigma_x=8.11,\qquad \sigma_y=8.07.$

$\sigma_x\sigma_y=65.4477,\qquad N\sigma_x\sigma_y=1308.9540.$

$C_x=-5,\qquad C_x{}^2=25.$

$C_y=-2,\qquad C_y{}^2=4.$

$NC_x{}^2=500,\qquad NC_y{}^2=80.$

$NC_xC_y=200,\qquad NM_X{}^2=144500.$

$NM_Y{}^2=137780.$

公式(a) $$r=\frac{\Sigma xy}{N\sigma_x\sigma_y}=\frac{1157}{1308.954}=.88.$$

公式(b) $$r=\frac{\Sigma xy}{\sqrt{(\Sigma x^2)(\Sigma y^2)}}=\frac{1157}{\sqrt{(1314)(1302)}}=.88.$$

公式(c) $$r=\frac{\Sigma x'y'-NC_xC_y}{\sqrt{(\Sigma x'^2-NC_x{}^2)(\Sigma y'^2NC_y{}^2)}}$$

$$=\frac{1357-200}{\sqrt{(1814-500)(1382-80)}}=.88.$$

公式(d) $$r=\frac{\Sigma XY-NM_XM_Y}{\sqrt{(\Sigma X^2-NM_X{}^2)(\Sigma Y^2-NM_Y{}^2)}}$$

$$=\frac{142257-141100}{\sqrt{(145814-144500)(139082-137780)}}=.88.$$

公式(e) $$r=\frac{\Sigma x^2+\Sigma y^2-\Sigma v^2}{2\sqrt{(\Sigma x^2)(\Sigma y^2)}}=\frac{1314+1302-302}{2\sqrt{(1314)(1302)}}=.88.$$

(b)事實已歸類者　若事實繁多,我們可以將其歸類,而以組距為計算之單位。如此,我們須先作一相關表,在此表中,以橫行代表 X 特性,其數量由上而下,以直行代表 Y 特性,其數量由左而右。表作成後,則在方格內劃記,每一劃代表一人,此劃必須記在該生 X 與 Y 二種分數之交切的方格內。例在下表中(表六十八)我們已經記了一劃,此劃所代表的學生,其分數在甲測驗中得 91 分,在乙測驗中得 58 分。惟這個方格,就甲測驗說,包括 90－100,其組之價值或組距中點為 95。就乙測驗言,包括 50－60,其組之價值為 55。於是觀察得來的價值與組之價值乃有差異。故在事實歸類求兩數相關,自必假設在某一方格中所有次數都有此格之組價值。這個假設,當然不準確,如上述的例子,並且這種差異普遍於全表。惟差異有正有負,若兩個分配組數均多,(譬說有 10 至 20 組),則正負或可相消,而使我們的假設在大體上可用。因此,差誤之總影響對於 r 不至很大。

表 六 十 八

	X	甲測驗成績												總數
Y		30－	40－	50－	60－	70－	80－	90－	100－	110－	120－	130－	140－	
乙測驗分數	30－													
	40－													
	50－							1						
	60－													
	70－													
	80－													
	90－													
	100－													
	110－													
	120－													
總數														N

有了相關表後，我們可以計算 r 了。其公式當然與上述的一樣，惟略加以修改。公式（a）與（b）因爲眞正的差數，計算起來，實在太煩，通常均不用之。公式（d）若略加以修改，可以用圖來求之，此相關圖記蒲斯曾提議一個相關圖，頗爲適用。其根據的公式如下：

$$r=\frac{N\Sigma XY-(\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[(N\Sigma X^2-(\Sigma X^2)][N\Sigma Y^2-(\Sigma Y)^2]}}$$ 公式三十九（f）

公式（e）若化爲原有量數，亦可以用圖求之。奥替斯之相關圖就是應用此公式的。改變後的公式如下：

$$r=\frac{\Sigma X^2+\Sigma Y^2-\Sigma V^2-\frac{2\Sigma X\Sigma Y}{N}}{2\sqrt{\left[\Sigma X^2-\frac{(\Sigma X)^2}{N}\right]\left[\Sigma Y^2-\frac{(\Sigma Y)^2}{N}\right]}}$$ …公式三十九（g）

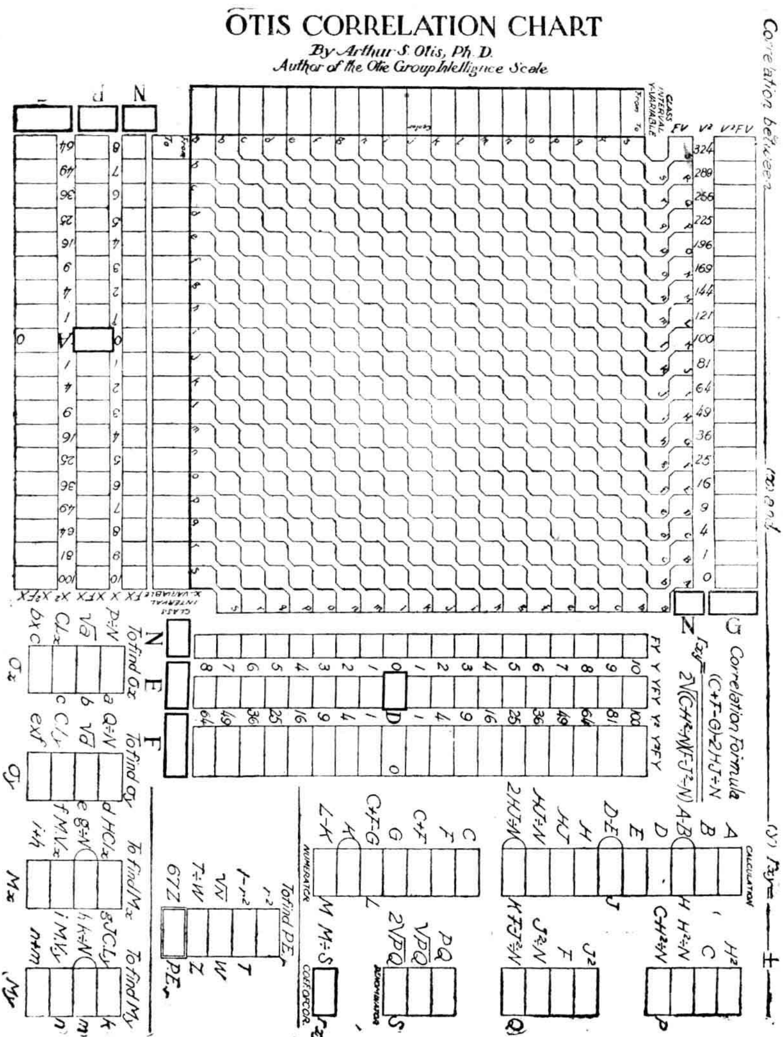
在此公式內，V＝Y－X。

奥替斯相關圖附印於下。此圖之用法，步步自明，實無說明之必要。讀者可以用下表（表六十九）之材料，自己練習。此圖之優點頗多，最顯著的有兩點：（一）步驟已經分析淸楚，並按照其先後次序排列好，因此步步可以較對。（2）不必計算 xy 之積。若讀者研究任何問題，應用相關方法頗多時，最好知道如何利用此圖。

公式（c）之應用最廣。在相關表中計算係數時，公式如下：

$$r=\frac{\Sigma fx'y'-NC_xC_y}{\sqrt{(\Sigma fx'^2-NC_x^2)(\Sigma fy'^2-NC_y^2)}}$$ …………公式三十九（h）

茲根據一例以說明其求法。



圖三十七　奧替斯相關圖

(本圖之用法,詳見 Otis, S. A. Statistical Method in Educational Measurement, Chap. 16. 顧克彬譯,教育測量統計法。南京書店)。

表六十九 妻之年齡

夫之年齡	15–	20–	25–	30–	35–	40–	45–	50–	55–	60–	65–	70–	75–	80–	85–	f_y	y'	$f_y y'$	$f_y y'^2$	$\Sigma' f_{xy} x'$ −	$\Sigma' f_{xy} x'$ +	$\Sigma f_{xy} x'$ −	$\Sigma f_{xy} x'$ +	$\Sigma' f_{xy} x'y'$ −	$\Sigma' f_{xy} x'y'$ +
85–											1	1	1	1		4	10	40	400		30		30		300
80–								1	1	1	2	4	5	3	1	18	9	162	1458		120		129		1161
75–						1	1	2	3	5	10	14	12	2		50	8	400	3200		318		318		2544
70–					1	1	2	5	8	18	31	31	6	1		104	7	728	5096		602		602		4214
65–				1	1	3	6	11	26	53	58	13	2	1		175	6	1050	6300	1	881		880		5280
60–				1	3	8	16	39	81	101	23	4	1			277	5	1385	6925	1	1160		1159		5795
55–			1	3	8	18	46	110	141	35	6	1				369	4	1476	5904	5	1222		1217		4868
50–			2	8	19	57	146	195	44	10	2					483	3	1449	4347	12	1172		1160		3480
45–		1	6	20	66	178	252	59	10	2	1					595	2	1190	2380	35	915		880		1760
40–		3	17	71	219	309	66	12	2	1						700	1	700	700	114	490		376		376
35–		9	69	251	369	80	12	2	1							793	0	000	000	416	114	302			0
30–	1	41	265	411	84	12	2	1								817	−1	−817	817	1068	19	1049			1049
25–	4	185	402	84	10	2	1									688	−2	−1376	2752	1459	4	1455			2910
20–	16	173	46	4	1											240	−3	−720	2160	679		679			2037
15–	2	2														4	−4	−16	64	14		14			56
f_x	23	414	808	854	781	669	550	437	317	226	134	68	27	8	1	5517		5651	42503			3252		35830	
x'	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	N		$\Sigma f y'$	$\Sigma f y'^2$			$\Sigma f x'$		$\Sigma f x'y'$	
$f_x x'$	−92	−1242	−1616	−854	0	669	1100	1311	1268	1130	804	476	216	72	10	3252	$\Sigma f x'$								
$f_x x'^2$	368	3726	3232	854	0	669	2200	3933	5072	5650	4824	3332	1728	648	100	38336	$\Sigma f_x'^2$								
$\Sigma' f_{xy} y'$ +		5	39	158	468	981	1330	1476	1368	1173	820	477	210	68	9										
$\Sigma' f_{xy} y'$ −	65	938	1207	591	107	16	4	1																	
$\Sigma f_{xy} y'$ +					361	965	1326	1475	1368	1173	820	477	210	66	9	5651 $\Sigma f y'$									
$\Sigma f_{xy} y'$ −	65	933	1168	433																					
$\Sigma' f_{xy} x'y'$ +	260	2799	2336	433	0	965	2652	4425	4572	5865	4920	3339	1350	594	[illegible]	35830 $\Sigma f_x'y'$									
$\Sigma' f_{xy} x'y'$ −																									

$NC_xC_y = 3447$

$\sqrt{\Sigma f x'^2 - NC_x^2} = 186$

$\sqrt{\Sigma f y'^2 - NC_y^2} = 191$

$186 \times 191 = 35526$

$r = \frac{35830 - 3447}{35526} = .91$

$\sigma_x = 2.54$ 組距或 12.7

$\sigma_y = 2.62$ 組距或 13.1

$C_x = .6116$ $C_x^2 = .3741$

$NC_x^2 = 1839.09$

$C_y = 1.06$ $C_y^2 = 1.12$

$NC_y^2 = 5955$

在上表中，先就 Y 特性論，y'，fy'，fy'^2 等數量均無須說明。惟 $\Sigma fx'y'$ 之求得，則略費時間。我們把 $\Sigma fx'y'$ 分爲 $\Sigma' fx'$ 與 y' 兩項，Σ'= 各行之總和，先求得各 y' 行之 $\Sigma' fx'$，而後再乘 y'。每 y' 行之 $\Sigma' fx'$ 極易錯誤，必須留意計算。就 $y'=-4$ 行中，$f=4$；此四人中有 2 人之妻子之年齡在 15—20 的方格中，此方格就 x' 論是 -4，故 $2\times-4=-8$。又有 2 人，在 $x'=-3$ 方格內，故 $2\times-3=-6$。$-6+-8=-14$。故 $y'=-4$ 行時，其 $\Sigma' fx'=-14$。再以 $y'=2$ 行爲例，其 $\Sigma' fx'$ 之計算步驟如下：

$$(1\times-3)+(6\times-2)+(20\times-1)=-35$$

$$(178\times1)+(252\times2)+(59\times3)+(10\times4)$$
$$+(2\times5)+(1\times6)=915.$$

$915-35=880$　卽 $\Sigma' fx'$。

各 y' 之 $\Sigma' fx'$ 都求得以後，再二數相乘，卽等於 $\Sigma' fx'y'$。故 $-4\times-14=56$；$2\times880=1760$；在表中可以看見。

若我們根據 x' 來計算亦可。先求各 x' 行之 $\Sigma' fy'$，其法如上。就 $x'=2$ 行爲例，其 $\Sigma' fy'=(1\times-2)+(2\times-1)+(66\times1)+(252\times2)+(146\times3)+(46\times4)+(16\times5)+(6\times6)+(2\times7)+(1\times8)=1326$。此數乘 $2=2652$，卽 $x'=2$ 行之 $\Sigma' fx'y'$。

此表有許多優點，最要的各數除 $\Sigma fx'^2$ 與 $\Sigma fy'^2$ 外均可相對較。在表中可以看出。讀者在初步練習求相關係數時，應當利用之。

求 $\Sigma fx'y'$ 時不用上表之法，而以表七十之法求之也可。在表七十中，所有方格內之上角之小號字，乃是 $x'y'$，當中之大號字是次數。

圖 卌 十

												15-	20-	25-	30-	35-	40-	45-	50-	55-	60-	65-	70-	75-	80-	85-						f
	225	210	195	180	165	150	135	120	105	90	75	60	45	30	15	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	
	210	196	182	168	154	140	126	112	98	84	70	56	42	28	14	0	14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	
	195	182	169	156	143	130	117	104	91	78	65	52	39	26	13	0	13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	
	180	168	156	144	132	120	108	96	84	72	60	48	36	24	12	0	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	
	165	154	143	132	121	110	99	88	77	66	55	44	33	22	11	0	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	
	150	140	130	120	110	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	
	135	126	117	108	99	90	81	72	63	54	45	36	27	18	9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	
	120	112	104	96	88	80	72	64	56	48	40	32	24	16	8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	
	105	98	91	84	77	70	63	56	49	42	35	28	21	14	7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	
	90	84	78	72	66	60	54	48	42	36	30	24	18	12	6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	
	75	70	65	60	55	50	45	40	35	30	25	20	15	10	5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	
15-	60	56	52	48	44	40	36	32	28	24	20	16 2	12 2	8	4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	4
20-	45	42	39	36	33	30	27	24	21	18	15	12 16	9 173	6 48	3 4	0 1	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	240
25-	30	28	26	24	22	20	18	16	14	12	10	8 4	6 185	4 402	2 81	0 10	2 2	4 1	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	688
30-	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4 1	3 41	2 265	1 411	0 84	1 3	2 2	3 1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	817
35-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0 9	0 69	0 251	0 369	0 80	0 12	0 2	0 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	798

[illegible]													3	17	71	219	309	66	12	9	1											700
[illegible]													1	6	20	66	173	252	59	10	2	1										595
50-														2	8	19	57	146	105	44	10	2										468
[illegible]														1	3	6	15	48	110	141	35	6	1									369
[illegible]															1	3	8	10	39	81	101	23	4	1								277
35-															1	1	3	6	11	26	53	58	13	2	1							175
[illegible]																1	1	2	5	8	18	31	31	6	1							104
[illegible]																	1	1	2	3	5	10	14	12	2							50
[illegible]																			1	1	1	2	4	5	3	1						18
[illegible]																						1	1	1	1							4
f												23	414	808	854	781	669	550	437	317	226	184	68	27	8	1						5317
																																(N)

Ruger Correlation Record Form
Bureau of Publications, Teachers College, New York City

表塡好後，再把 x′y′ 數相同的方格中之次數，照正負分別加好。(有兩個象限是正的，兩個是負的)，如表七十一之(2)與(3)兩行。此兩

表　七　十　一

1	2 次		數 3		4	5 (1)與(4)之積	
x′y′	(＋) 象 限		(－) 象 限		總 數	正	負
1	309+411=	720	71+12=	83	637	637	
2	66+178+84+265=	593	20+17+2+2=	41	552	1104	
3	12+57+4+41=	114	8+3+1=	12	102	306	
4	2+18+1+252+402=	675	3+6+1=	10	665	2660	
5	1+8=	9		1	8	40	
6	3+146+59+46+185=	439	1+2+1=	4	435	2610	
7		1			1	7	
8	1+46+10+4=	61		1	60	480	
9	195+173=	368			368	3312	
10	16+2=	18			18	180	
12	6+110+44+1+16+2=	179			179	2148	
14		2			2	28	
15	39+10=	49			49	735	
16	1+141+2=	144			144	2304	
18	11+2=	13			13	234	
20	81+35=	116			116	2320	
21		5			5	105	
24	2+26+6=	34			34	816	
25		101			101	2525	
27		1			1	27	
28	8+1=	9			9	252	
30	23+53=	76			76	2280	
32		3			3	96	
35	18+4=	22			22	770	
36	1+58=	59			59	2124	
40	5+1=	6			6	240	
42	31+13=	44			44	1848	
45		1			1	45	
48	10+2=	12			12	576	
49		31			31	1519	
54	2+1=	3			3	162	
56	14+6=	20			20	1120	
60		1			1	60	
63	4+1=	5			5	315	
64		12			12	768	
70		1			1	70	
72	5+2=	7			7	504	
80		1			1	80	
81		3			3	243	
90	1+1=	2			2	180	
						35830	

行中數分別相減，將其餘數寫在第(4)行。再乘相當之 $x'y'$ 數，即爲第(5)行之數。第(5)行之總數，就是 $\Sigma fx'y'$。若我們的假設均數與表六十九一樣，結果也相同。

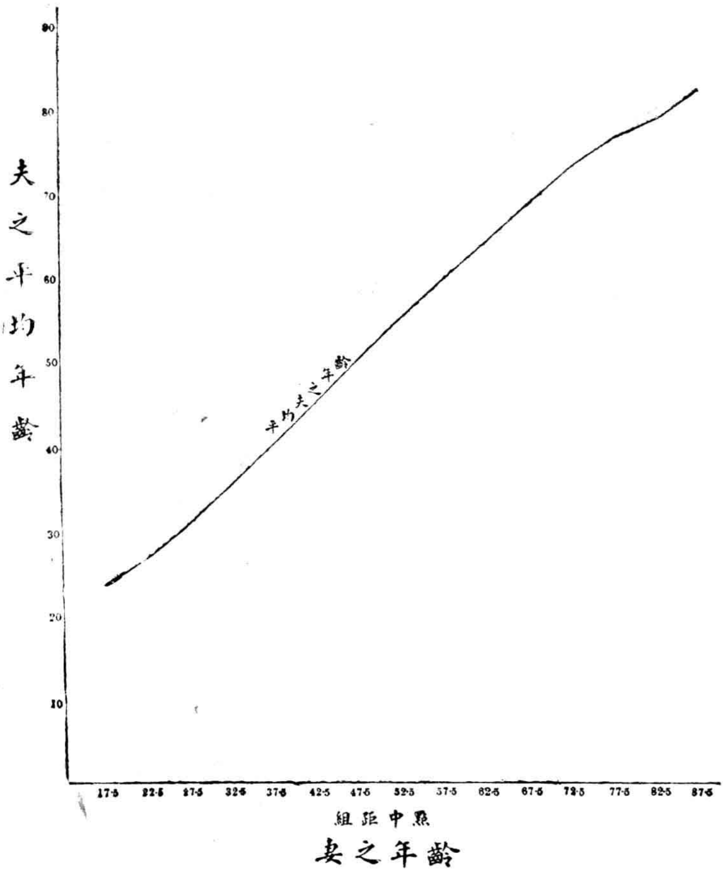
52. 特性方程與特性線

(一)直線相關之假設　相關係數既表示兩種特性並行的差異之程度，當然可以利用之以爲預測之根據。譬如我們在開學時，對於一年級生施行一種智力測驗，在一學期之後，我們將測驗之結果與學科平均分數求得一相關係數，設爲 $.85\pm.07$。若無常性差誤存在，則此係數是可靠的，同時也可說這個智力測驗有預測學業之用。預測時所用之公式，叫做特性方程，又名迴歸方程。在說明這個方程之前，且讓我們先把直線相關之假設以及相關係數與特性方程之關係敍述一下。

求兩個變量之相關的公式，有兩種基本的假設。第一個假設爲根據 X 特性以推測 Y 時，Y 特性雖有各種不同的數量，但是最好依據於其均數，因爲均數是算術上的期望數。例在表六十九中，夫之年齡在 25 歲以上，30 歲以下者，(中點爲 27.5 歲)，有 688 人，這 688 人的妻之年齡不等，有低至 15 歲者有高至 50 歲者。但是我們若根據夫之年齡以推測其妻之年齡，最好的數量爲 26.93 歲，因爲此數是 25—30 歲的丈夫之妻子的平均年齡。又如夫之年齡在 50—55 歲中，其妻之年齡有低至 25 歲者，有高至 70 歲者，但是最好的推測數爲 49.51 歲。

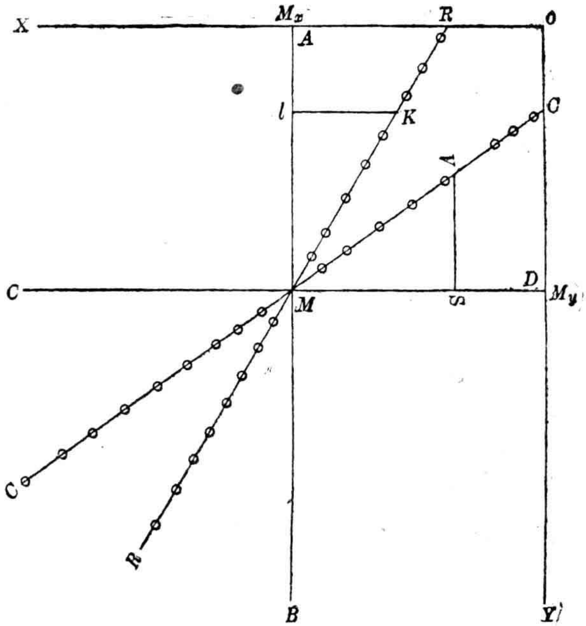
第二個假設是相關表中各排或各列(橫行爲排 row，直行爲列 column)之均數有成一直線之傾向。這個假設是極重要的。因爲這個假

設若不成立，則兩種特性之相關是非直線的。不過社會上事，能完全成一直線的關係者實不多見，假使我們把表六十九各排的均數算好，並連成一條線，(如圖三十八) 並不是完全的直線。惟這些均數，雖不能成一條直線，卻有成一直線之傾向。



圖三十八　各排的均數

（二）相關係數與特性方程之關係　根據上面的第二個假設，並設想一種最簡單的事實，就是各排之均數悉在一條直線 RR 之上，如圖三十九。圖中小圈代表各排均數，M_y 代表 Y 特性之均數，而使 RR 線



圖三十九　說明相關係與特性方程之關係（仿自 Yule, 同上 170 頁）

與 M_y C 線交切於 M 點。再劃一 AB 線經過於 M 點，垂直於 OX 線或平行於 OY 線，那末 AB 線與 OX 線之交切點 M_X，必是 X 特性之均數。其證明如下：

以 b_1 代表 $\angle$AMR 之正切則，

$b_1 = lk / lm$ ……………………………………(1)

惟 lm 是一個 Y 量數與 M_Y 之差，可以用 y 代表之。lk 是一個 X 量

數與另一個 X 量數(或假設均數)之差,可以用 x' 代表之。所以

$$b_1=\frac{x'}{y}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$=\frac{\Sigma x'}{\Sigma y}.$$

因此 $\Sigma x' = b_1\ \Sigma y$ (或 $\Sigma x'=Nb_1y$)

$=0$ (因 $\Sigma y = 0$)

$=\Sigma x$ (因 $\Sigma x = 0$)

故 M_X 必為 X 特性之均數。

同樣地,我們可以證明 M_Y 是 Y 特性之均數。

因此
$$\left.\begin{aligned} b_1&=\frac{x}{y} \quad 或\ x=b_1y \\ b_2&=\frac{y}{x} \quad 或\ y=b_2x \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

我們知道了 M_X 是 X 特性之均數,可以進一步決定 b_1 是什麼?

$P=\Sigma xy/N$ (見前)

$$=\frac{1}{N}(\Sigma x)y$$

$$=\frac{1}{N}y(Nb_1y) \qquad (因\ \Sigma x=Nb_1y)$$

$$=\frac{1}{N}b_1\Sigma y^2,$$

故
$$b_1=\frac{NP}{\Sigma y^2}=\frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2}=\frac{\Sigma xy}{N\sigma_{\bar{y}}{}^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

同理　$b_2 = \frac{\Sigma xy}{N\sigma_x^2}$.

惟 $\Sigma xy = Nr\sigma_x\sigma_y$,

故　$b_1 = \frac{Nr\sigma_x\sigma_y}{N\sigma_y^2} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$

$b_2 = \frac{Nr\sigma_x\sigma_y}{N\sigma_x^2} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$

但　$x = b_1 y$　　$y = b_2 x$　（見 3）

故　$x = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y$ ……………………………公式四十一(a)

$y = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x$ ……………………………公式四十一(b)

公式四十一(a)與(b)卽特性方程以差數表示之。因此我們又可以證明相關係數就是兩條特性線(RR 與 CC)之傾斜度(b_1 與 b_2)之幾何平均數,其證明如下:

$$r = \sqrt{b_1 b_2}$$

$$= \sqrt{\frac{(\Sigma xy)^2}{N^2\sigma_x^2\sigma_y^2}} = \frac{\Sigma xy}{N\sigma_x\sigma_y}.$$

(三)特性方程　特性方程原名迴歸方程,迴歸一名詞英文爲 regression, 爲戈爾登氏所創用。他在研究體高遺傳的時候,發現子之體高迴歸到普通人類之平均的體高,其結果見表七十二。但是統計學中在所研究的特性,並不一定關於遺傳問題,因此,這種迴歸現象,亦因之不一定存在。故優爾提議一新的名詞,卽 characteristic equation, 艾偉氏譯爲特性方程。

特性方程以差數表示之可,以原有量數表示之亦可。根據於 X 以

表　七　十　二

子	父	父－子
64	60	4
65	62	3
66	64	2
67	66	1
68	68	0
69	70	－1
70	72	－2
71	74	－3
72	76	－4

推測 Y 可，根據於 Y 以推測 X 也可。茲演算於下：

(甲)根據 Y 以推測 X　　　(乙)根據於 X 以估計 Y

$$\overline{x} = b_1 y \qquad \overline{y} = b_2 x$$

$$(X - M_X) = b_1(Y - M_Y) \qquad (Y - M_Y) = b_2(X - M_X)$$

$$\overline{X} = M_X + b_1 Y - b_1 M_Y \qquad \overline{Y} = M_Y + b_2 X - b_2 M_X$$

$$= (M_X - b_1 M_Y) + b_1 Y \qquad = (M_Y - b_2 M_X) + b_2 X$$

$=K_1 + b_1 Y$ 公式四十一(c)　　$=K_2 + b_2 X \cdots$ 公式四十一(d)

在上面公式中，凡符號上加一橫線，代表估計之意。K_1 與 K_2 在一個公式中是常數。$K_1 = M_X - b_1 M_Y$；$K_2 = M_Y - b_2 M_X$。

茲根據表六十九之材料，演算一下以爲例：在此表中，

$M_X=40.6$　　$M_Y=42.8$　　$r=.91$

$\sigma_x=12.7$ 或 2.54 組　　$\sigma_y=13.1$ 或 2.62 組

$b_1=.91\frac{2.54}{2.62}=.88$　　$b_2=.91\frac{2.62}{2.54}=.94$

$K_1=40.6-(.88\times42.8)=2.94$　　$K_2=42.8-(.94\times40.6)=4.6$

故　$\overline{X}=2.94+.88Y$　　$\overline{Y}=4.6+94X$

（四）估計之標準誤　上面所設想的事實，即所有各排或各列之均數悉在一條直線 RR 或 CC 之上，僅是一種特殊的例子（完全直線相關），並非普通的事實。普通的事實，這些均數只有成一直線的傾向，因此，我們的估計當然發生差誤，故有估計之標準誤的公式。這種公式亦是抽樣公式或機誤公式之一種，如下：

$$S_{\bar{x}}=\sigma_x\sqrt{1-r^2} \text{ ……公式四十二(a)}$$

$$P.E._{\bar{x}}=.6745\,\sigma_x\sqrt{1-r^2} \text{ ……公式四十二(b)}$$

$$S_{\bar{y}}=\sigma_y\sqrt{1-r^2} \text{ ……公式四十二(c)}$$

$$P.E._{\bar{x}}=.6745\,\sigma_y\sqrt{1-r^2} \text{ ……公式四十二(d)}$$

$S_{\bar{x}}$ 代表估計的 X 之標準誤，$S_{\bar{y}}$ 代表估計的 Y 之標準誤．

這個公式之證明如下。若以 x 代表眞正的差數，以 b_1y 代表估計的差數，則

$$S_x^2=\frac{\Sigma(x-b_1y)^2}{N} \text{ ……(1)}$$

$$=\frac{\Sigma(x-r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y)^2}{N}$$

$$=\frac{\Sigma x^2+r^2\frac{\sigma_x{}^2}{\sigma_y{}^2}\Sigma y^2-2\Sigma xyr\frac{\sigma_x}{\sigma_y}}{N}$$

$$=\frac{N\sigma_x{}^2+r^2\frac{\sigma_x{}^2}{\sigma_y{}^2}N\sigma_y{}^2-2Nr\sigma_x\sigma_y\frac{\sigma_x}{\sigma_y}r}{N}$$

$$=\sigma_x{}^2+r^2\sigma_x{}^2-2r^2\sigma_x{}^2$$

$$=\sigma_x{}^2-r^2\sigma_x{}^2$$

$$=\sigma_x{}^2(1-r^2)$$

所以 $S_{\bar{x}}=\sigma_x\sqrt{1-r^2}$ 同理，$S_{\bar{y}}=\sigma_y\sqrt{1=r^2}$

$P.E._{\bar{x}}=.6745\,S_{\bar{x}}$ $P.E._{\bar{y}}=.6745\,S_{\bar{y}}$

$=.6745\,\sigma_x\sqrt{1-r^2}$ $=.6745\,\sigma_y\sqrt{1-r^2}$

這個公式極爲重要，因爲由此我們可以說假使各排或各列之均數不在一條直線上，我們的估計之錯誤亦是最小的。因爲 $\Sigma(x-b_1y^2)$是一最小數。茲說明之如下：設 b_1 不是 $r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$，而是 $(r+\Delta)\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$，那末，$\Sigma(x-b_1y)^2=N\sigma_x{}^2(1-r^2+\Delta)^2$，這個數目無論何如比上面所說的數目要大些。所以 $\Sigma(x-b_1y)^2$ 在 $b_1=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ 時，其數最小。再則，由此公式可以看見，r 愈大，則預測之價值愈佳。當 $r=1$，估計之標準誤是零，而預測亦達完善之境。故 $S_{\bar{x}}$ 與 $S_{\bar{y}}$ 兩個公式實在可說明係數之可靠度。

有了估計之標準誤的公式，我們可以把完全的預測公式寫好了。

$$\overline{X}=(K_1+b_1Y)\pm P.E._{\bar{x}}$$

$$\overline{Y}=(K_2+b_2X)\pm P.E._{\bar{Y}}$$

以表六十九之材料論，

$$P.E._{\bar{x}} = .6745 \times 12.7\sqrt{1-(.91)^2} = 3.55.$$

$$P.E._{\bar{y}} = .6745 \times 13.1\sqrt{1-(.91)^2} = 3.66.$$

因此　$\overline{X} = (2.94 + .88\ Y) \pm 3.55.$

$\overline{Y} = (4.6 + .94\ X) \pm 3.66$ 或 $3.70.$

若以差數計，

$$P.E._{\bar{x}} = .6745 \times 2.54\sqrt{1-.(91)^2} = .71.$$

$$P.E._{\bar{y}} = .6745 \times 2.62\sqrt{(1-.91)^2} = .733.$$

因此　$\overline{X} = .88\,y \pm .71.$

$\overline{Y} = .94\,x \pm .733.$

（五）特性線　有了特性方程以後，我們可以很容易地繪特性線了。特性方程既有兩個，當然特性線也有兩條，一條是根據 X 以估計 Y，一條是根據 Y 以估計 X。不過我們須注意根據 Y 以估計 X 後；不能將所得 X 的結果反來說明 Y。例如下表中，我們根據公式四十一（c）算得夫之年齡（Y）等於 30 歲時，其妻之估計的年齡（$\overline{X}$）等於 29.34 歲。但是我們不能反過來說，當妻之年齡等於 29.34 歲時，其夫之估計的年齡等於 30 歲。因為根據夫之年齡以估計妻之年齡時，須用公式四十一（d），其結果如下：

$\overline{Y} = 4.6 + .94(29.34) = 32.18$ 歲.

下表中各數是，我們根據公式四十一(a)(b)(c)(d)算出來的。在此表中，我們可以看出，照估計的結果，平均起來，夫之年齡大於妻之年齡。這個結果，正如我們上面所得的。在 5317 對夫妻中，夫之平均年齡為 42.8 歲；妻的平均年齡為 40.6 歲。

表七十三

Y	$\overline{x}$	y	$\overline{x}$	X	$\overline{Y}$	x	$\overline{y}$
15	16.14	−27.8	−24.46	15	18.7	−25.6	−24.06
17.5	18.34	−25.3	−22.26	17.5	21.1	−23.1	−21.71
20	20.54	−22.8	−20.03	20	23.4	−20.6	−19.36
22.5	22.74	−20.3	−17.86	22.5	25.8	−18.1	−17.01
25	24.94	−17.8	−15.66	25	28.1	−15.6	−14.66
27.5	27.14	−15.3	−13.46	27.5	30.5	−13.1	−12.31
30	29.34	−12.8	−11.26	30	32.8	−10.6	− 9.96
32.5	31.54	−10.3	− 9.06	32.5	35.2	− 8.1	− 7.61
35	33.74	− 7.8	− 6.86	35	37.5	− 5.6	− 5.26
37.5	35.94	− 5.3	− 4.66	37.5	39.9	− 3.1	− 2.91
40	38.14	− 2.8	− 2.46	40	42.2	− 0.6	− 0.56
42.5	40.34	− 0.3	− 0.26	42.5	44.6	1.9	1.8
45	42.54	2.2	1.94	45	46.9	4.4	4.14
47.5	44.74	4.7	4.14	47.5	49.3	6.9	6.5
50	46.94	7.2	6.34	50	51.6	9.4	8.84
52.5	49.14	9.7	8.54	52.5	54.0	11.9	11.2
55	51.34	12.2	10.74	55	56.3	14.4	13.54
57.5	53.54	14.7	12.94	57.5	58.7	16.9	15.9
60	55.74	17.2	15.14	60	61.0	19.4	18.24
62.5	57.94	19.7	17.34	62.5	63.4	21.9	20.6
65	60.14	22.2	19.54	65	65.7	24.4	22.94
67.5	62.34	24.7	21.74	67.5	68.1	26.9	25.3
70	64.54	27.2	23.94	70	70.4	29.4	27.64
72.5	66.74	29.7	26.14	72.5	72.8	31.9	30.0
75	68.94	32.2	28.34	75	75.1	34.4	32.34
77.5	71.14	34.7	30.54	77.5	77.5	36.9	34.7
80	73.34	37.2	32.74	80	79.8	39.4	37.04
82.5	75.54	39.7	34.94	82.5	82.2	41.9	39.4
85	77.74	42.2	37.14	85	84.5	44.4	41.74
87.5	77.94	44.7	39.34	87.5	86.9	46.9	44.1

X＝妻之年齡

Y＝夫之年齡

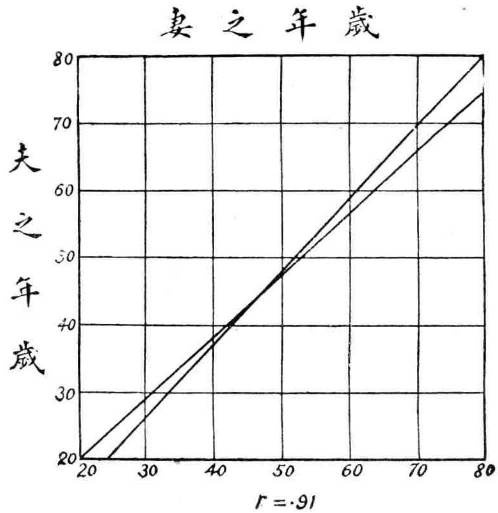
有了上表的結果，繪起特性線來非常便利的。第一在圖中縱軸上找出 $M_Y(42.8)$ 繪一直線平行於橫軸，再在橫軸上找出 $M_X(40.6)$ 平行於縱軸。這兩條線之交切點，我們已經證明，爲兩條特性線所必須經過的。於是再根據公式四十一(a)或(c)算出另外一點，把此點與交切點聯合起來，成一直線，這條線就是根據 Y 以估計 X 之特性線，簡稱甲線。再用公式四十一(b)或(d)算出另外一點，把此點與交切點聯合起來，成一直線，這條線就是根據 X 以估計 Y 之特性線，簡稱乙線。(見圖四十)因此我們在圖中亦可以估計了，其結果應與表七十三完全相同。惟讀者又須注意，不論用特性線或特性方程來估計，在通常狀況之下，不可超過於原有材料。在本例中，若求夫之年齡等於 12 歲，其妻之年齡等於若干，則無意義可言。在教育研究中常有根據特性線之數量，以推測事實以外之材料，殊爲危險。設有一個測驗(X)與某學科(Y)之 $r=.8$，$\sigma_x=10$(組)，$\sigma_y=9.8$(組) $M_X=100$，$M_y=70$，X之最高分可達 150，而此次測驗結果最高分爲 130；如此，$b_2=.784$，

而 $$\overline{Y}=-8.4+.784X.$$

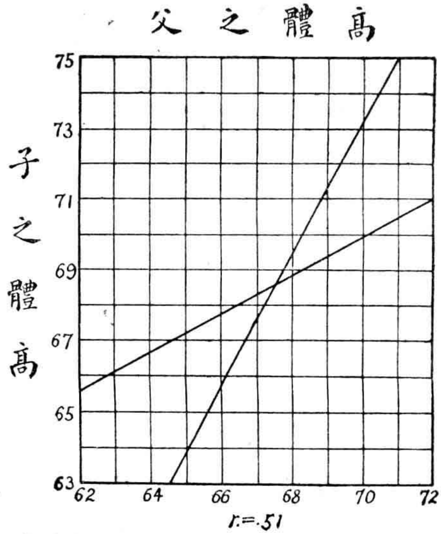
若根據這個公式估計時，超越於實驗的範圍之外。設 $X=140$，則 $\overline{Y}=101.16$，而事實上 Y 決無比 100 大的數。故我們用特性線或方程來估計時，不能任意爲之，必須在事實的範圍之內。

特性線與相關係數有一很顯明的關係，即係數愈大，則兩條線愈接近；係數愈小，則兩條線離開愈遠。若 $r=\pm1$，則兩條特性線併爲一條；若 $r=0$，則兩條線一在 M_X 之線上，一在 M_Y 之線上。下面兩個圖，其一爲夫妻年齡之相關 $r=.91$，兩條特性線接近；其二爲父子體高之相

關，r = .51，離開遠得多了。



圖四十　夫妻年齡之相關



圖四十一　父子體高之相關

特性線之繪成根據於上述的方程，當然極精確。不過我們亦可採隨手繪圖法，但其結果只是一種近似數，在初學者最好避之不用。

53. 相關係數之詮釋

記得有人說過一個笑話，世界上有三種謊，第三種便是統計謊。統計謊在詮釋相關係數之意義時尤其常常遇到。曾看見有一本教育統計學中說：「所謂相關者，卽謂兩組之中，有某種原因的關係之存在。」依照這個定義，必成爲統計謊了。我們應當避免這種詮釋法，而視相關係數只是特性間相依度之數學的表示，不必論及產生這個結果之因子。作者曾用 26 張紙牌，每張均有一數目，自 1 至 26。每次抽一張，抽後將其數記下，而再把這張紙牌歸入使其混雜，再抽第二張，以此類推。抽第一張時希望牠是 1，但眞正所得的，可以自 1 至 26 中的任何數目，抽第二張時希望牠是 2，但實際所得的也可以自 1 至 26 中的任何一數。如此我們有了兩種數目，一爲希望數，一爲實抽數，可以求相關了。作者抽了許多次，得了許多相關係數，大小不等。有一個係數是 .46。若據此數而釋爲希望數與實抽數有原因的關係之存在，卽常識亦知其大誤矣。因此，相關只是兩種現象之並行的差異，毫無互爲因果之意義存在。但是這句話並非說兩種有因果的關係的現象，不能求相關了。實際上，決定特性間之相關，是各種科學之公同的問題，必備的知識。

相關係數不能詮釋爲原因關係之存在的理由，大致有二，(1) 爲相關係數之求得，完全由於機會，(2) 相關度之高低，常受不純的因子之影響。我們知道，一切相關係數之計算，必須根據實際的與觀察得來的樣本。而抽樣之結果，又常含有變性與常性兩種差誤。就上例說實抽數與

希望數之相關,平均起來,應近於零;作者所得的結果是 $-.02$。至於各次的結果雖近於零者居多,而大於 $+.5$ 的相關亦非不可能的,惟機會微乎其微。抽樣的差誤,在所不免,而這種差誤,當然影響於相關係數之大小。所以我們可說係數之求得,完全是偶然的。

再則相關係數之大小,又受不純的因子之影響。這種因子所發生的差誤是常性的。大概一個公同的不純的因子,同樣地影響兩個特性,則必使係數變大;反之,這個因子只影響一個特性而不及其他,或對於甲特性施正面的影響而對於乙特性則施反面的影響,則必使係數變小。茲舉例以說明之。設有人統計三年級至七年級學生高度與智力分數之相關而得 $r=.71$。若據此而釋高度爲智力之因,豈非謬誤之尤乎!在這兩種變量之相關係數中,實包括許多不純的因子,最重要的是年齡。年齡大者平均起來高度高,智力分也多。此外或則家庭環境亦爲一重要的因子。環境佳者,高度或能因滋養豐富之助力,達到生長之限度;環境不佳者,或因滋養之不足而不能達到其生長之限度。同時家庭狀況與智力分數之正相關,也已爲一般研究者所公認的。故一個因子同樣地影響兩種特性,則必使係數變大。反之,我們若求某班學生之各學科平均分數與其運動能力之相關,大概是負相關。這個結果也受年齡的因子之影響。一班中年長的學生大部是留滯的,故學科分數低。至於運動能力則因年齡大而反得到較高的分數。故一個因子對於兩種特性施相反的影響,則必使係數變低。

由上面的討論,我們可以結論,凡兩種特性受許多因子之影響者,其所得的相關係數之意義,實在極爲模糊的。故欲研究兩種特性之相關,

必須設法消除一切不純的因子之影響，消除之法，最基礎的是控制不純的因子，易言之，在其他條件或因子相等下，再求兩種特性之相關。故兩種標準測驗之相關，比之兩種學科分數之相關實有較大的意義。因爲教師之記分，常受無數不純因子之影響，如年齡，性別，國籍，種族，缺席次數，考試方法，甚至容貌美醜等。標準測驗因爲考試法與記分法之劃一化，已能控制了許多因子。雖然，不能控制的因子仍舊很多，如學生之健康等。

因子已經控制與未經控制之結果，往往大相逕庭，阿柏倪塞(Abernethy）女士曾求數百個兒童，年齡自五歲至二十歲之成骨比例與智齡之相關，r=.75。我們若據此數而說這兩種特性有密切的關係，實大誤了，因爲其中有一個很明顯的因子——年齡——未經控制。所以若把年齡固定，再求此兩種特性之相關，則結果必大異。表七十四爲阿女士所報告。在此表中，這兩種特性可說是毫無相關。沒有一個係數是四倍或五倍大於其機誤。一切係數實在都是偶然的。

表七十四　智齡與成骨比例之相關

年齡	人數	相關係數
13	44	−.13 ±.100
14	62	−.139±.084
15	29	−.174±.122
16	45	−.022±.101
17	37	.041±.111

此外還有一種詮釋相關係數之習慣，亦是我們所應當避免的，就是把係數分爲高，中，低，三種。各家的分法雖並不一致，（參考艾著，p.

240)，普通都承認 .75 是高的，.25 是低的。這種名詞應用到測驗材料上，或則可用，因爲在這種材料中，係數在 .75 以上，.25 以下，是較少的。但是應用到別的材料，殊爲誤導的。例如年齡與年級之相關係數，縱爲 .75，決不可視爲高的。用慣了這種分類的人，常常詮釋「高」的係數，例如 .75，如同完全相關一樣。這種詮釋之不合於眞理，在分布圖中略加考察，就很顯然了。

另外一種很普通的詮釋法，就是說係數可以表示兩種相關的特殊性之相似的百分比。因此，係數等於 .90 就表示百分之九十的相似情形，等等。這種詮釋完全不合於事實，萬不可用，因爲相似之深淺並不直接隨係數之大小而變異。賀麟閣曾說，對於相關係數之「門外漢的解釋」應當棄而不用。詮釋相關之最好的與最有用的指南是一個簡單的分布圖，與配合好的特性線。旨哉斯言，實是研究統計者之座右銘。

54. 在測驗上之應用

(一)測驗之信度　在預備測驗材料時，有幾個名詞均有很固定的意義，並爲評定一個測驗優劣之標準。其一爲測驗之信度。一個可信的測驗，是指以一個測驗測量某人或某件東西之某種現象時，假使施行測驗之手續與記分方法相同，今日量之如此，明日量之亦如此；或施以兩種相似的或交替的量表，其結果相同。所以信度亦就是相符度 (consistency)，表示信度之數量通常稱爲信度係數 (reliability coefficient) 或自身相關係數 (self-correlation coefficient)，卽一個測驗兩次測量結果或一種測驗之兩類的結果之相關係數。若我們以 X_1 代表第一類，X_I 代表第二類，則係數可以 r_{1I} 代表之。

兩次測驗之結果所以不同,其中必有變性差誤存在。這種差誤愈大,則相關愈低,信度愈低。惟這種差誤可因測驗材料增加而相對地減少。故測驗之長短與信度之高低,有很大的關係。根據這種關係,斯皮門與白浪寧(Brown)曾分別地發現一種公式,簡稱斯白公式如下:

$$r_{nn}=\frac{nr_{11}}{1+(n-1)r_{11}}\cdots\cdots\text{公式四十三(註一)}$$

在此公式中 r_{11} 代表已求得的信度係數; r_{nn} 代表欲知的信度係數,卽增加 n 倍後之係數; n 代表測驗之增加倍數。

茲設例以說明之。假使一個測驗之信度是 .7,若同樣材料增加三倍,則信度係數可有 .875。因爲以 $n=3$, $r_{11}=.7$,代入公式

$$\frac{3\times .7}{1+(2\times .7)}=.875.$$

再設有兩個代替測驗,信度係數爲 .5,若是我們欲增加這兩個測驗之信度係數至 .9, 則測驗應增加幾倍? 此問題亦可由此公式解答之。如下:

$$.90=\frac{n\times .5}{1+(n-1).50}\qquad n=9\text{(卽應加長 9 倍)}.$$

多數測驗有兩類以上,其信度係數之求得,不成問題。若只有一類,而又未曾施行兩次,可將奇偶題分別計分,而求其相關,所得爲測驗一

(註一) 關於公式之引伸, 詳見 C. Spearman "Correlation of Sums and Differences," British J. of Psychology, vol. 5, p. 471 或沈有乾,中央統計聯合會聯合演講之七)。

半之信度，然後應用斯白公式，求其兩倍後之信度，卽爲測驗全部之信度。

增高測驗信度之方法，加長測驗其一也。增加觀察之次數，其二也。設有兩種代替測驗各施行一次，信度係數爲 .8。若我們欲增加這兩個測驗之信度係數至 .96，則每種測驗應各施行幾次？如此，$r_{11} = .8$，$n =$ 應行觀察之次數，$r_{nn} = .96$，代入公式

$$.96 \frac{n \times .8}{1 + (n-1).8} \qquad n = 6.$$

卽每種測驗應各施行六次，或施行六對代替測驗，而取其平均分數以爲標準觀察。

賀麟閣與克來頓(Claton)女士對於公式四十三曾有一個實驗的證明。他們備了七個難度相同的測驗並各有代替的種類，以考試學生。再將由合併起來的結果以與由公式所預測的結果相比較。觀察的價值與眞正的價值頗相類似，如下表：

表七十五　觀察的和預測的信度係數之比較

測驗合併數(n)	觀察的信度係數	理論的信度係數 (由於公式四十三)
1	.743	.743
2	.841	.853
3	.906	.897
4	.916	.920
5	.941	.936
6	.949	.945
7	.955	.953

(二)測驗之效度(註一)　測驗之另一特徵就是效度 (validity)。一個有效的測驗就是一個測驗能夠確實地測量牠所欲測量的東西。效度之標準當然是間接的；因爲若能有了直接的正確的標準，又何必用測驗。效度之間接的標準，通常稱爲效標(criterion)，以 c 代表之。故效度係數之符號是 r_{cx}。所以效度係數在理論上應是所欲測驗之眞實量數與實得分數之相關係數。而實際上因爲眞實量數與常性差誤極難分解，致不能得，於是效度係數乃是效標量數與實得分數之相關係數。效標決非完全的，於是測驗之效度係數勢必降低，殊不足以評定測驗之價值。爲補救此種困難起見，我們可以設法選出兩種效標，雖各非完全的，但亦無共同的差誤 且與測驗之差誤並無相關。照此種條件下，以 Y 與 Z 代表兩個效標，而測驗之效度可以下面公式估計之，

$$r_{cx}=\sqrt{\frac{r_{xy}\quad r_{xz}}{r_{yz}}}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式四十四}$$

惟上述條件，即 X 與 Y 與 Z 之差誤毫無相關，殊不易滿足，故公式四十四之結果因之殊不易正確。例如我們以一智力測驗考試大學一年級生，而以其入學試驗平均分數 (Y) 與其一學期後各學科平均分 (Z) 爲效標，又設 $r_{xy}=.4$，$r_{xz}=.5$，$r_{zy}=.6$，則

$$r_{cx}=\sqrt{\frac{.4\times.5}{.6}}=.57$$

但是這兩個效標，若說不完全的，乃是事實；若說其並無共同的差誤，則

(註一，本節中所討論雖大部取材於沈先生之演講錄，惟若有錯誤的解釋，其責任乃在著者，不能自辭其咎。)

殊難斷定。故此公式所得之結果，只是一種臆測而已。

測驗之長度對於信度有正關係，對於效度亦如之。其關係可以下面公式估計之，

$$r_{cn}=\frac{nr_{cx}}{n+n(n-1)r_{11}}\cdots\cdots\text{公式四十五}$$

設有一測驗 $r_{11}=.7$，$r_{cx}=.6$，若測驗加長三倍，則信度係度是

$$\frac{3\times .6}{\sqrt{3+6\times .7}}=.67.$$

由公式四十五中，我們可以看出，(a)若 r_{cx} 不等於零，則測驗愈長，r_{cn} 亦愈高。(b) r_{cx} 愈高，則增加長度後，r_{cn} 亦愈高。(c)測驗信度愈低，則效度增加愈速。這點殊與普通實驗的結果相反。測驗之效度大部比信度為低，因測驗中有常性差誤存在。這種差誤又極難消除。但是測驗若能完全免除常性差誤，其效度係數 r_{cx} 乃等於信度係數之平方根$\sqrt{r_{11}}$。故公式四十五只有理論上興趣，實際上頗難符合，因常性差誤不能因測驗加長而消除也。

(三)矯正機遇錯誤之公式　新法考試中有許多方法如是非法，多答選一法等，被試者答對的題目中，有時是猜對的。故許多編造測驗者，對於這種格式的測驗，應用矯正機遇差誤之公式如下：

$$S=R-\frac{1}{(n-1)}W=R-CW$$

$S=$分數，$R=$答對題數，$W=$答錯題數，$n=$選擇之數，

$C=$常數即 $\frac{1}{n-1}$.

以實例論是非法之選擇數爲 2，易言之，有二分之一的機遇錯誤。故公式或可寫爲

$$S=R-\frac{1}{(2-1)}W=R-W.\quad (C=1)$$

對於有三分之一的機遇錯誤，（卽三答選一法），其公式爲

$$S=R\frac{1}{3-1}W=R-\frac{1}{2}W.\qquad \left(C=\frac{1}{2}\right)$$

這種記分法之不合用，作者在拙著心理與教育測量中已加以敍述。在統計學上觀之，若任所有學生均能做完測驗，這種記分法實可以完全不用。設以 A 代表做題數，則 A 等於 R＋W，且必是一常數。於是

$$\begin{aligned}S&=R-CW\\&=R-C(A-R)\quad(\text{因爲}A=R+W)\\&=R-CA+CR\\&=R(1+C)-CA\\&=aR+b\qquad a=1+C,\quad b=-CA,\ \text{均爲常數}.\end{aligned}$$

如此，則 r_{SR} 卽分數與做對的題數之相關可以等於 ＋1.00，因此，這種記分法可以取消了，$r_{SR}=+1.00$ 之證明如下：

$$s=ar+b$$

$$s^2=a^2r^2+2abr+b^2$$

$$\Sigma s^2=a^2\Sigma r^2+2ab\Sigma r+Nb^2=N\sigma_S{}^2$$

$$N\sigma_r{}^2N\sigma_s{}^2=a^2N\sigma_r{}^2N\sigma_r{}^2+2abN\sigma_r{}^2(\Sigma r)+N^2b^2\sigma_r{}^2$$

故 $N^2\sigma_r{}^2\sigma_s{}^2=a^2N^2\sigma_r{}^4+2abN\sigma_r{}^2(\Sigma r)+N^2b^2\sigma_r{}^2$ ………………（2）

此 r^2_{SR} 公式之分母.

$$s=ar+b$$

$$sr=ar^2+br$$

$$\Sigma sr=a\Sigma r^2+b\Sigma r$$

$$=aN\sigma_r^2+b\Sigma r$$

$$(\Sigma sr)^2=a^2N^2\sigma_r^4+2abN\sigma_r^2(\Sigma r)+b^2N^2r^2$$

$$=a^2N^2\sigma_r^4+2abN\sigma_r^2\Sigma r+b^2N\Sigma r^2$$

$$=a^2N^2\sigma_r^4+2abN\sigma_r^2\Sigma r+b^2N^2\sigma_r^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

此 r^2_{SR} 公式之分子也。以(2)(3)代入公式則 $r^2_{SR}=+1.00$ 而 r_{SR} 當然等於 $+1.003$。

55. 反應差誤之公式(response error formulas)

(一)反應之標準誤 本節中我們將要陳述幾個關於反應差誤之公式。這些公式應當列於抽樣之信度章中,惟因爲若兩次測驗之結果不同,則必有變性與常性差誤存在,而這種差誤愈大,則相關愈低。故相關之知識,實爲這種公式之基本。爲便利討論起見,先把本節中所用的符號說明一下:

Z_1 與 Z_I 代表 X_1 和 X_I 測驗之標準數, Z_2 與 Z_{II} 代表 X_2 和 X_{II} 測驗之標準數,故

$$z_1=\frac{X_1-M_1}{\sigma_{X_1}} \qquad z_I=\frac{X_I-M_I}{\sigma_X}$$

$$z_2=\frac{X_2-M_2}{\sigma_{X_2}} \qquad z_{II}=\frac{X_{II}-M_{II}}{\sigma_{X_{II}}}$$

r_{1I} 與 r_{2II} 分別代表 X_1 和 X_I 及 X_2 和 X_{II} 之信度係數；

e_1 與 e_I 分別代表兩類 X_1 和 X_I 測驗中之反應差誤；

e_2 與 e_{II} 分別代表兩類 X_2 和 X_{II} 測驗中之反應差誤；

s 與 t 分別代表各測驗中，一個人之平均的或眞正的分數。

因此我們有下列的公式：

$z_1 = s + e_1$ ……公式四十六（a）…（標準數根據於「眞正的」量數和反應差誤）

$z_I = s + e_I$ ……公式四十六（b）

$z_2 = t + e_2$ ……公式四十六（c）

$z_{II} = t + e_{II}$ ……公式四十六（d）

根據上面公式並假設一切反應差誤（e）是彼此不相關，且與眞正的量數（s 與 t）亦不相關，那末 $r_{e_1 e_I}$，$r_{e_2 e_{II}}$，$r_{e_1 s}$，$r_{e_2 s}$ 等均是零。而一個測驗之兩類的標準數之相差，可以寫作

$$z_1 - z_I = e_1 - e_I \qquad (1)$$

把(1)之左右兩數均求其方與其和並以 N 除之，結果是

$$\frac{\Sigma z_1^2}{N} + \frac{\Sigma z_I^2}{N} - \frac{2\Sigma z_1 z_I}{N} = \frac{\Sigma e_1^2}{N} + \frac{\Sigma e_I^2}{N} - \frac{2\Sigma e_1 e_I}{N} \qquad (2)$$

惟

$$z_1 = \frac{X_1 - M_1}{\sigma_x} = \frac{x_1}{\sigma_{x1}}$$

$$\frac{\Sigma z_1^2}{N} = \frac{\Sigma x_1^2}{N\sigma_{x1}^2} = 1 \qquad (3)$$

而

$$\sigma_{e_1} = \sigma_{e_I} \qquad (4)$$

$$又\ \frac{\Sigma z_1 z_I}{N}=\frac{\Sigma\left(\frac{x_1}{\sigma_{x_1}}\ \frac{x_I}{\sigma_{x_I}}\right)}{N}=r_{1I}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

以(3)(4)與(5)代入公式(2)，其結果如下，

$$1+1-2\,r_{1I}=\sigma_{e_1}{}^2+\sigma_{e_I}{}^2+0\quad(因\ r_{e_1e_I}=0，故\ \Sigma e_1e_I=0)$$

$$2-2\,r_{1I}=2\,\sigma_{e_1}{}^2$$

$$\sigma_{e_1}{}^2=1-r_{1I}$$

$$\sigma_{e_1}=\sqrt{1-r_{1I}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots公式四十七(a)$$

公式四十七(a)乃是反應用標準數表示者之標準誤。若用原有量數 X_1 則可改變如下：

$$\sigma_{e_1}=\sigma_{X_1}\sqrt{1-r_{1I}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots公式四十七(b)$$

$$P.E._{e_1}=.6745\ \sigma_{X_1}\sqrt{1-r_{1I}}\cdots\cdots\cdots\cdots公式四十七(c)$$

玆設例以說明之。有一個測驗其信度係數 r_{1I} 等於 .64，標準差 σ_{X_1} 等於 5。以此種價值代入公式四十七(c)，

$$P.E._{e_1}=.6745\times .5\sqrt{1-.64}=2.02.$$

設有一學生之分數為 31，可以寫作 31±2，意指這個學生之眞正的量數，若無練習影響，其在 29 至 33 範圍內之機會為 1:1。

(二) z_1-z_2 之標準誤　z_1 與 z_2 代表兩種不同測驗之標準數，故 z_1-z_2 的反應錯誤可以完全不同。但反應錯誤既假設為不相關，則 $r_{e_1e_2}$ 或 $r_{e_1e_{II}}$ 亦等於零而

$$\frac{\Sigma(e_1-e_2)^2}{N}=\frac{\Sigma e_1{}^2+\Sigma e_2{}^2-2\Sigma e_1e_2}{N}$$

或 $$\sigma^2{}_{(e_1-e_2)}=\sigma_{e_1}{}^2+\sigma_{e_2}{}^2-0$$

但　$\sigma_{e_1}=\sqrt{1-r_{1I}}$　同理 $\sigma_{e_2}=\sqrt{1-r_{2II}}$

故　$\sigma^2_{(e_1-e_2)}=1-r_{1I}+1-r_{2II}$

$$\sigma_{e_1-e_2}=\sqrt{2-r_{1I}r_{2II}}\text{……………………公式四十八(a)}$$

$$\text{P.E.}_{(\text{每個人之}z_1-z_2)}=.6745\sqrt{2-r_{1I}-r_{2II}}\text{………公式四十八(b)}$$

設有兩個測驗,國文與算術,其信度係數都等於 .5(卽 r_{1I},r_{2II} 均是 .5),一個學生之 $z_1=2.6$, $z_2=1.4$, 相差爲 1.2。這個學生之相差 P.E.是 $.6745\sqrt{2-.5-.5}=.6745$。故可以寫作 1.2±.6745。這個相差數幾兩倍大於其 P.E.,則眞正的差數在 0−2.4 之間,其機會約爲 4 比 1。

(三)眞正的標準差與觀察的標準差之關係　因爲反應錯誤之影響,任何觀察得來的標準差比眞正的標準差要大;其理在討論標準差時已經說過。在此我又可以用另一方式說明之如下:

$$x_1=s+e_1$$

$$\Sigma x_1^2=\Sigma s^2+\Sigma e_1^2+2\,\Sigma se_1$$

$$N\sigma_{x_1}^2=N\sigma_s^2+N\sigma_{e_1}^2+2\,r_{se_1}\,N\sigma_s\sigma_{e_1}$$

故　$\sigma_{x_1}^2=\sigma_s^2+\sigma_{e_1}^2$ (因 $r_{se_1}=0$)

或　$\sigma_s^2=\sigma_{x_1}^2-\sigma_{e_1}^2$

$=\sigma_{x_1}^2-\sigma_{x_1}^2+\sigma_{x_1}^2r_{1I}$　因 $\sigma_{e1}^2=\sigma_{x_1}^2(1-r_{1I})$

故　$\sigma_s=\sigma_{x_1}\sqrt{r_{1I}}$ ……………………公式四十九

由上面公式看來,除非 $r_{1I}=1.00$,卽一個完全可信的測驗外,眞正的標準差總比觀察得來的標準差爲小。

(四)相關減弱(attenuation)之改正公式　凡量數由一次觀察而得來的必有抽樣的差誤;相關之由一次所觀察之數量而得來的亦如之。故

由觀察而得來的相關係數總較眞正的係數低。此種較低之相關謂之相關減弱。改正之公式，爲斯皮門所創用，其根本的假設，仍是一切反應差誤與眞正的量數均無相關。設我們以

x_1，x_2，y_1，y_2 等代表觀察所得量數與均數之差數；

X 與 Y 代表眞正量數與均數之差數；

δ 與 ϵ 代表反應差誤；

則 $\Sigma x\delta$, $\Sigma y\epsilon$, $\Sigma x\epsilon$, $\Sigma y\delta$ 與 $\Sigma\delta\epsilon$ 均等於零，

而

$$\Sigma x_1 y_2 = \Sigma(x+\delta)(y+\epsilon)$$

$$= \Sigma xy \cdots\cdots (1)$$

同理，$\Sigma x_2 y_1$，$\Sigma x_1 y_1$ 與 $\Sigma x_2 y_2$ 均等於 Σxy。

又

$$\Sigma x_1 x_2 = \Sigma(x+\delta_1)(x+\delta_2) = \Sigma x^2 \cdots\cdots (2)$$

同理，$\Sigma y_1 y_2 = \Sigma y^2$.

我們知道，

$$r^2_{xy} = \frac{(\Sigma xy)^2}{\Sigma x^2\ \Sigma y^2}$$

$$= \frac{(\Sigma x_1 y_1)(\Sigma x_2 y_2)}{(\Sigma x_1 x_2)(\Sigma y_1 y_2)} = \frac{(\Sigma x_1 y_2)(\Sigma x_2 y_1)}{(\Sigma x_1 x_2)(\Sigma y_1 y_2)}$$

$$= \frac{N r_{x_1 y_1} \sigma_{x_1} \sigma_{y_1} N r_{x_2 y_2} \sigma_{x_2} \sigma_{y_2}}{N r_{x_1 x_2} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} N r_{y_1 y_2} \sigma_{y_1} \sigma_{y_2}}$$

$$= \frac{N r_{x_1 y_2} \sigma_{x_1} \sigma_{y_2} N r_{x_2 y_1} \sigma_{x_2} \sigma_{y_1}}{N r_{x_1 x_2} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} N r_{y_1 y_2} \sigma_{y_1} \sigma_{y_2}}$$

$$= \frac{r_{x_1 y_1}\ r_{x_2 y_2}}{r_{x_1 x_2}\ r_{y_1 y_2}} = \frac{r_{x_1 y_2}\ r_{x_2 y_1}}{r_{x_1 x_2}\ r_{y_1 y_2}}.$$

$$r^4_{xy}=\frac{r_{x_1y_1}\,r_{x_2y_2}\,r_{x_1y_2}\,r_{x_2y_1}}{r^2_{x_1x_2}\quad r^2_{y_1y_2}}$$

$$\therefore\quad r_{xy}=\frac{(r_{x_1y_1}\,r_{x_2y_2}\,r_{x_1y_2}\,r_{x_2y_1})^{\frac{1}{4}}}{(r_{x_1x_2}\,r_{y_1y_2})^{\frac{1}{2}}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式五十}$$

設例以說明之。以 x 代表國文測驗，y 代表算學測驗，而

$r_{x_1y_1}=.80$ 國文第一類與算學第一類之相關係數；

$r_{x_2y_2}=.55$ 國文第二類與算學第二類之相關係數；

$r_{x_1y_2}=.64$ 國文第一類與算學第二類之相關係數；

$r_{x_2y_1}=.62$ 國文第二類與算學第一類之相關係數；

$r_{x_1x_2}=.84$ 國文第一類與第二類之自身相關係數；

$r_{y_1y_2}=.57$ 算學第一類與第二類之自身相關係數。

代入公式五十

$$r_{xy}=\frac{(.80\times .55\times .64\times .62)^{\frac{1}{4}}}{(.84\times .57)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{(.1746)^{\frac{1}{4}}}{(.4788)^{\frac{1}{2}}}=\frac{.6465}{.6920}=.934.$$

此國文與算學兩種測驗改正後之相關係數也。惟此種改正後的係數，有時可以大於 1；例如

$r_{x_1y_1}=.94,\quad r_{x_2y_2}=.80,\quad r_{x_1y_2}=.79,\quad r_{x_2y_1}=.84,$

$r_{x_1x_1}=.98,\quad r_{y_1y_2}=.62,$

則 $$r_{xy}=\frac{(.94\times .80\times .79\times .84)^{\frac{1}{4}}}{(.98\times .62)^{\frac{1}{2}}}=1.078.$$

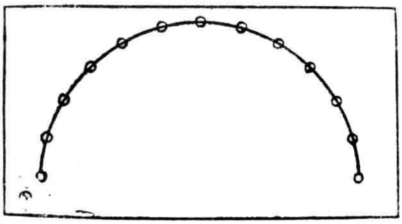
照理論上係數決不能大於 1，而改正後之係數可以發生，此一大缺點也。惟這個公式之含意甚深，使我們注意到眞正的係數比得來的係數要高，且與測驗之無信度成正比例。這種含意，從分析私人方面觀之，並無多大的利益。因爲測驗若不可靠，所得的分數也不可靠。但從編製測驗立場上觀之，則大有深意。因爲使研究者注意到如何利用自身相關法以完善其測驗。

總之，本節所有的公式，都只有理論上的興趣，而實際應用時，尙須先試驗反應差誤是否相關。這個假設在表面上似乎合理，而實際上已有人證明其不然。雖然，反面的證據，尙非十分充足，可使我們完全放棄這些公式而不用。

第十三章　非直線相關

56. 相關比(correlation ratio)

在上章中我們已經說過，在分布圖上，凡各排或各列之均數不能以一直線形容之，如圖三十二與三十四，則其特性應視為非直線的。在這種情形之下，若以直線相關之公式求兩種特性之相關，則必少計其相關度。圖四十二是一個極端例子。所有各點均在一個半圓形上。照函數的概念看來，其相關應是完全的。惟我們若以積差相關係數計其相關，則等於零，因為 Σxy 是零。



圖四十二　非直線相關之一個極端的例子

為測量非直線的相關 (non-linear correlation) 起見，皮而生教授乃發表另一種係數叫做相關比。要明瞭這個係數之意義，我們須回到公式四十二，即估計之標準誤的公式。

$$S_x = \sigma_x \sqrt{1-r^2}.$$

把這個公式中之各數重新排列一下，則

$$r^2 = 1 - \frac{S_x^{\ 2}}{\sigma_x^{\ 2}}.$$

或 $r^2 = 1 - \frac{S_y{}^2}{\sigma_y{}^2}$.

S_y 是 $y - \overline{y}$(眞正差數減去估計的差數)之標準誤，S_x 是 $x - \overline{x}$ 之標準誤。在此公式中，各列或各排之均數悉假設在其相當的特性線上。若各列之均數 $\overline{Y}_x$ 不在一條直線上，則 $y - \overline{y}$ 之差數可以 $y - \overline{y}_x$ 代之；這些 $y - \overline{y}_x$ 之標準差以 σ_{ay} 代表之，照積差係數的公式，我們可以改寫如下：

$$\eta_{yx}{}^2 = 1 - \frac{\sigma_{ay}{}^2}{\sigma_y{}^2} \text{……………………………公式五十一(a)}$$

y_{yx} 是各列均數之相關比，同理，各排均數之相關比，

$$\eta^2{}_{xy} = -1 \frac{\sigma_{ax}{}^2}{\sigma_x{}^2} \text{……………………………公式五十一(b)}$$

在上面公式中，σ_{ay} 與 σ_{ax} 是相關表各列或各排的標準差之均數，以公式說明之，如下：

$$\sigma_{ay}{}^2 = \frac{\Sigma(n\ S_{ay}{}^2)}{N} \text{……………………………公式五十二(a)}$$

$$\sigma_{ax}{}^2 = \frac{\Sigma(n\ S_{ax}{}^2)}{N} \text{……………………………公式五十二(b)}$$

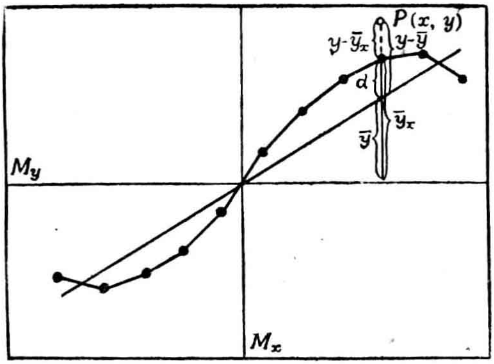
n ＝各行之次數卽 f_x 與 f_y；

S_{ax} ＝任何 X 行(卽各排)之標準差；

S_{ay} ＝任何 Y 行(卽各列)之標準差.

公式五十一若以圖表示之，更爲明瞭。從圖四十三中我們可以顯著地看出 $y - \overline{y}_x$ 以及其標準差 σ_{ay} 均測量分布圖中各點集中於不規則

的特殊曲線之情形。若圖中所有各點悉在各列之均數上，則 $y-\overline{y_x}$ 與 σ_{ay} 均是零，而 $\eta_{yx}=1.00$。但是各行中各點若分散開，而不集中於均數上，則 σ_{ay} 不是零，而 η_{yx} 亦小於 1.00。



圖四十三　表示相關比

再則，若特性是直線的，則在各列中 $y-\overline{y_x}=y-\overline{y}$，因此 $\sigma_{ay}=S_y$，而 r 亦等於 η_{yx} 了。若特性不是直線的，則 $\overline{y_x}=\overline{y}\pm d$，或

$$y-\overline{y_x}\pm d=y-\overline{y}$$

$$\Sigma f_x(y-\overline{y_x})^2\pm 2\,\Sigma f_x(y-\overline{y_x})d\pm\Sigma f_x\,d^2=\Sigma f_x(y-\overline{y})^2$$

$$N\sigma_{ay}^2+N\sigma_d^2=NS_y^2\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

但　$\sigma_{ay}^2=\sigma_y^2(1-\eta_{yx}^2)\qquad S_y^2=\sigma_y^2(1-r^2)$，

$$\therefore\quad \sigma_y^2(1-\eta_{yx}^2)+\sigma_d^2=\sigma_y^2(1-r^2),$$

$$\sigma_y^2-\sigma_y^2\eta_{yx}^2+\sigma_d^2=\sigma_y^2-\sigma_y^2r^2,$$

$$\sigma_d^2=\sigma_y^2\eta_{yx}^2-\sigma_y^2r^2,$$

$$\sigma_d^2=\sigma_Y^2(\eta_{yx}^2-r^2)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

同理，　$\sigma_d^2=\sigma_X^2(\eta_{xy}^2-r^2)$

第 (2) 步證明 η_{xy} 與 η_{yx} 在各行中之各點不全在其均數處，總大於 r，因 σ_d^2 是一正數。若各點悉在均數上，則 σ_d^2 等於零，而 η 亦等於 r。故 r 在任何情形下，不會大於 η。

公式五十一之計算，異常麻煩，因為我們必須先求各行之標準差之方，S_{ax}^2 與 S_{ay}^2。茲根據表六十九之材料，演算一下以為例。

表七十五(一)　非直線相關計算法示例(一)

組距中點	$\overline{X}_y$	S_{ax}^2 (註一)	n	n S_{ax}^2	$\overline{Y}_x$	S_{ay}^2 (註二)	n	n S_{ay}^2
17.5	20.00	.25	4	1.00	23.4	10.11	23	232.53
22.5	23.35	.47	240	112.80	26.2	16.57	414	6859.98
27.5	26.93	.51	688	350.88	30.3	20.84	808	16838.72
32.5	31.08	.66	817	539.22	35.0	26.21	854	22383.34
37.5	35.60	.83	793	658.19	39.8	29.07	781	22703.67
42.5	40.19	1.41	700	987.00	44.7	32.55	669	21775.95
47.5	44.89	1.20	595	714.00	49.6	32.33	550	17781.50
52.5	49.51	1.35	483	652.05	54.4	34.92	437	15260.04
57.5	53.99	1.57	369	579.33	59.1	32.84	317	10410.28
62.5	58.42	1.75	277	484.75	63.5	31.73	226	7170.98
67.5	62.64	2.14	175	374.50	68.1	34.35	134	4602.90
72.5	66.44	2.38	104	247.52	72.6	28.30	68	1924.40
77.5	69.30	2.99	50	149.50	76.4	28.40	27	766.80
82.5	73.33	3.14	18	56.52	78.8	35.56	8	284.48
87.5	75.00	1.25	4	5.00	82.5	0.00	1	0.00
			5317	5912.26			5317	148995.57

$$\sigma_{ax}^2 = 5912.26/5317 = 1.1120$$

$$\sigma_X = 2.54 \qquad \sigma_X^2 = 6.4516$$

$$\eta_{xy}^2 = 1 - \frac{1.1120}{6.4516} = .82716$$

$$\eta_{xy} = .91$$

$$\sigma_{ay}^2 = 148995.57/5317 = 28.02$$

$$\sigma_Y = 13.1 \qquad \sigma_Y^2 = 171.61$$

$$\eta_{yx}^2 = 1 - \frac{28.02}{171.61} = .8367$$

$$\eta_{yx} = .92$$

註一：根據組距算的。

註二：根據原有量數算的。

57. 相關比之簡捷的公式

公式五十一因爲要求各行之標準差，演算費時，可以使其簡便化。我們知道

$$n S_{ay}^2 = \Sigma'(y - \overline{y}_x)^2 \qquad \Sigma' = \text{各行之和} = n = f_x$$

$$= \Sigma' y^2 - 2\Sigma' y\,\overline{y}_x + n\,\overline{y}_x^2$$

$$= \Sigma' y^2 - 2n\,\overline{y}_x\overline{y}_x + n\,\overline{y}_x^2 \qquad \text{因 } \Sigma' y = n\,\overline{y}_x$$

$$= \Sigma' y^2 - n\overline{y}_x^2 \cdots\cdots (1)$$

$$N\sigma_{ay}^2 = \Sigma(n\,S_{ay}^2)$$

代入(1) $= \Sigma\Sigma' y^2 - \Sigma n\overline{y}_x^2$

$$= N\sigma_y^2 - N\sigma_{\bar{y}_x}^2$$

$$\sigma_{\bar{y}_x} = \overline{y}_x \text{ 之標準差} = \sqrt{\frac{\Sigma f_x(M_y - \overline{Y}_x)^2}{N}}$$

故 $\sigma_{ay}^2 = \sigma_y^2 - \sigma_{\bar{y}_x} \cdots\cdots (2)$

$\therefore \sigma_y^2(1-\eta_{yx}^2) = \sigma_y^2 - \sigma_{\bar{y}x}^2$，因 $\sigma_{ay}^2 = \sigma_y^2(1-\eta_{yx}^2)$ （見公式五十一）

$$\sigma_y^2 - \sigma_y^2\eta_{yx}^2 = \sigma_y^2 - \sigma_{\bar{y}x}^2$$

$$\therefore \qquad \eta_{yx}^2 = \frac{\sigma_{\bar{y}_x}^2}{\sigma_y^2}$$

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\bar{y}_x}}{\sigma_y} \cdots\cdots \text{公式五十三(a)}$$

同理

$$\eta_{xy} = \frac{\sigma_{\bar{x}_y}}{\sigma_x} \cdots\cdots \text{公式五十三(b)}$$

由此可知 η 是各行的均數的標準差與其全部標準差相比。不過我們應注意在求 $\sigma_{\bar{y}_x}$ 與 σ_y 時，其差數應乘各行之次數。茲根據表七十五(一)之材料，演算一下以爲例：

表七十五(二)　非直線相關演算方法示例(二)

行　列 (夫或妻)	$\overline{X}_y$	$M_X-\overline{X}_Y$ $M_X=40.56$	$\overline{x_y}^2$	f_y	$f_y\ \overline{x_y}^2$	$\overline{Y}_x$	$M_y-\overline{Y}_x$ $M_y=42.8$	$\overline{y_x}^2$	f_x	$f_x\ \overline{y_x}^2$
17.5	20.00	20.56	422.71	4	1691	23.37	19.4	376.36	23	8656
22.5	23.35	17.21	296.18	240	71084	26.23	16.6	275.56	414	114082
27.5	26.93	13.63	185.78	688	127814	30.27	12.5	156.25	808	126250
32.5	31.08	9.48	89.87	817	73424	34.96	7.8	60.84	854	51957
37.5	35.60	4.96	24.60	793	19509	39.81	3.0	9.00	781	7029
42.5	40.19	.37	.14	700	96	44.71	1.9	3.61	669	2415
47.5	44.89	−4.33	18.75	595	11156	49.55	−6.8	46.24	550	25432
52.5	49.51	−8.95	80.10	483	38690	45.38	−11.6	134.56	437	58803
57.5	53.99	−13.43	180.36	369	66555	59.08	−16.3	265.69	317	84224
62.5	58.42	−17.86	318.98	277	88357	63.45	−20.6	424.36	226	95905
67.5	62.64	−22.08	487.53	175	85317	68.10	−25.3	640.09	134	85772
72.5	66.44	−25.88	669.77	104	69657	72.57	−29.8	888.04	68	60387
77.5	69.30	−28.74	825.99	50	41299	76.39	−33.6	1128.96	27	30482
82.5	73.33	−32.77	1073.87	18	19330	78.75	−36.0	1296.00	8	10368
87.5	75.00	−34.44	1186.11	4	4744	82.50	−39.7	1576.09	1	1576
				5317 n	718724 $\Sigma f_y\ \overline{x_y}^2$				5317 n	763338 $\Sigma f_x\ \overline{y_x}^2$

$\sigma_{xy}^2=718724/5317=135$	$\sigma_{yx}^2=763338/5317=144$
$\sigma_{\bar{x}_y}=11.62$	$\sigma_{\bar{y}_x}=12$
$\sigma_X=12.7$	$\sigma_Y=13.1$
$\eta_{xy}=\ .915$	$\eta_{yx}=\ .916$

58. 賀麟閣的相關比計算表

上表之計算,取於眞正均數,手續尙繁,可使更簡而取於任何一點。茲根據於公式五十三演化如下:

$$\eta_{yx}=\frac{\sigma_{\bar{y}_x}}{\sigma_y}=\frac{\sqrt{\frac{\Sigma f_x(M_y-\overline{Y}_x)^2}{N}}}{\sigma_y}$$

但 $$M_y=M'_y+\frac{\Sigma f_y y'}{N}i,$$

$$\overline{Y}_x=M'y+\frac{\Sigma' f_{xy}y'}{f_x}i,$$

故 $$\frac{M_y-\overline{Y}_x}{i}=\frac{\Sigma f_y y'}{N}-\frac{\Sigma' f_{xy}y'}{f_x},$$

$$\frac{(M_y-\overline{Y}_x)^2}{(i)^2}=\left(\frac{\Sigma f_y y'}{N}\right)^2-2\left(\frac{\Sigma f_y y'}{N}\right)\left(\frac{\Sigma' f_{xy}y'}{f_x}\right)+\left(\frac{\Sigma' f_{xy}y'}{f_x}\right)^2.$$

全行並全表總加之後,

$$\frac{\Sigma f_x(M_y-\overline{Y}_x)^2}{i^2}=\frac{(\Sigma f_y y')^2}{N}-2\,\Sigma\,\Sigma' f_{xy}y'\left(\frac{\Sigma f_y y'}{N}\right)+\Sigma\left[\frac{(\Sigma' f_{xy}y')^2}{f_x}\right]$$

$$=\frac{(\Sigma f_y y')^2}{N}-2\,\frac{(\Sigma f_y y')^2}{N}+\Sigma\left[\frac{(\Sigma' f_{xy}y')^2}{f_x}\right]$$

(因 $\Sigma\Sigma' f_{xy}\,y'=\Sigma f_y y'$)

$$=\Sigma\left[\frac{(\Sigma' f_{xy}y')^2}{f_x}\right]-\frac{(\Sigma f_y y')^2}{N}.$$

$$\frac{\Sigma f_x(M_y-\overline{Y}_x)^2}{N}=\left[\frac{\Sigma\frac{(\Sigma' f_{xy}y')^2}{f_x}}{N}-\frac{\frac{(\Sigma f_y y')^2}{N}}{N}\right](i)^2.$$

$$\therefore\ \sigma_{\bar{y}x}=\sqrt{\frac{\Sigma\frac{(\Sigma' f_{xy}y')^2}{f_x}}{N}-\left(\frac{\Sigma f_y y'}{N}\right)^2}\quad(i),$$

而

$$\eta_{yx}=\frac{\sqrt{\frac{\Sigma\left[\frac{(\Sigma' f_{xy}y')^2}{f_x}\right]}{N}-\left(\frac{\Sigma f_y y'}{N}\right)^2}\ (i)}{\sqrt{\frac{\Sigma f_y y'^2}{N}-\left(\frac{\Sigma f_y y'}{N}\right)^2}\quad(i)},$$

$$\eta_{yx}=\frac{\sqrt{\frac{\Sigma\left[\frac{(\Sigma' f_{xy}y')^2}{f_x}\right]}{N}-C_y^2}}{\sqrt{\frac{\Sigma f_y y'^2}{N}-C_y^2}}\cdots\text{公式五十四(a)}$$

同理

$$\eta_{xy}=\frac{\sqrt{\frac{\Sigma\left[\frac{(\Sigma' f_{xy}x')^2}{f_y}\right]}{N}-C_x^2}}{\sqrt{\frac{\Sigma f_x x'^2}{N}-C_x^2}}\cdots\cdots\text{公式五十四(b)}$$

根據這兩個公式，我們可以編造一表，同時求相關係數與相關比。此表是賀麟閣所發表的，如表七十七。

表七十七　相關比計算表（本表材料已見圖三十三，原表爲賀爾朋教育統計學 187 頁練習題之一。計算仿自艾著高級統計學表九十三）。

每生費用（以金元計）

州政府供給學校經費用之百分數

	4–6	6–	8–	10–	12–	14–	16–	18–	20–	22–	24–	26–	28–	30–	32–	34–	36–	38–	40–42	f_y	y'	f_yy'	$f_yy'^2$	$\Sigma'f_{xy}x'$	$\Sigma'f_{xy}x'y'$	$(\Sigma'f_{xy}x')^2$	$\frac{(\Sigma'f_{xy}x')^2}{f_y}$	$\overline{X}_y$
9–100	1																			1	12	12	144	−5	−60	25	25	5
90–																				0	11	0	0	0	0	0	0	
85–		1																		1	10	10	100	−4	−40	16	16	7
80–																				0	9	0	0	0	0	0	0	
75–																				0	8	0	0	0	0	0	0	
70–		2																		2	7	14	98	−8	−56	64	32	7
65–			1																	1	6	6	36	−3	−18	9	9	9
60–			5																	5	5	25	125	−15	−75	225	45	9
55–			6																	6	4	24	96	−18	−72	324	54	9
50–			6	3																9	3	27	81	−24	−72	576	64	9.67
45–			3	6	2															11	2	22	44	−23	−46	529	48.09	10.83
40–			1	13	3															17	1	17	17.	−32	−32	1034	60.24	11.24
35–				6	13	5	1													25	0	0	0	−24	0	576	23.04	13.08
30–					7	13		1												21	−1	−21	21	−5	5	25	1.19	14.52
25–					1	4	13	4	2											24	−2	−48	96	26	−52	676	28.17	17.17
20–							5	6	1	4	1									17	−3	−51	153	41	−123	1681	98.88	19.82
15–										5	3	2								10	−4	−40	160	47	−188	2209	220.9	24.4
10–												1			3	1			1	6	−5	−30	150	56	−280	3136	522.67	33.67
5–10																	1			1	−6	−6	36	11	−66	121	121	37
f_x	1	3	22	28	26	22	19	11	3	9	4	3	0	0	3	1	1	0	1	157		−39	1357	20	−1175	$\Sigma\frac{(\Sigma'f_{xy}x')^2}{f_x}=1369.18$		
x'	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	N		$\Sigma fy'$	$\Sigma fy'^2$	$\Sigma fx'$	$\Sigma fx'y'$			
f_xx'	−5	−12	−66	−56	−26	0	19	22	9	36	20	18	0	0	27	10	11	0	13	20 $\Sigma fx'$								
$f_xx'^2$	25	48	198	112	26	0	19	44	27	144	100	108	0	0	243	100	121	0	169	1484 $\Sigma fx'^2$								
$\Sigma'f_{xy}y'$	12	24	80	34	−2	−21	−41	−27	−7	−32	−15	−13	0	0	−15	−5	−6	0	−5	−39 $\Sigma fy'$				$C_x=20/157=.127$				
$\Sigma'f_{xy}x'y'$	−60	−96	−240	−68	2	0	−41	−54	−21	−128	−75	−78	0	0	−135	−50	−66	0	−65	−1175 $\Sigma fx'y'$				$C_x^2=.016129$				
$(\Sigma'f_{xy}y')^2$	144	576	6400	1156	4	441	1681	729	49	1024	225	169	0	0	225	25	36	0	25					$C_y=-39/157=-.248$				
$\frac{(\Sigma'f_{xy}y')^2}{f_x}$	144	192	290.91	41.29	15	20.05	88.47	66.27	16.33	113.78	56.25	56.33	0	0	75	25	36	0	25	$\Sigma\left[\frac{(\Sigma'f_{xy}y')^2}{f_x}\right]$ 1246.83	$\sigma_x^2=9.4381$			$C_y^2=.061504$	$\sigma_x=3.072$			
$\overline{Y}_x$	97.5	77.5	55.68	43.57	37.12	32.73	36.71	25.23	25.83	19.72	18.75	15.83			12.5	12.5	7.5		12.5		$\sigma_y^2=8.581808$				$\sigma_y=2.929$			

在上表中，

$$r=\frac{-1175-(157)(.127)(.248)}{\sqrt{(1484-157\times .016)(1357-157\times .0615)}}=-.828.$$

$$\eta_{yx}=\frac{\sqrt{\frac{1246.83}{157}-.0615}}{2.929}=.958\ \pm\ .0044.$$

$$\eta_{xy}=\frac{\sqrt{\frac{1369.18}{157}-.0161}}{3.072}=.960\ \pm\ .0042.$$

至於相關比之機誤公式，如下：

$$P.E._{\eta}=\frac{.6745(1-\eta^2)}{\sqrt{N}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式五十五}$$

以本例論，

$$P.E._{\eta_{yx}}=\frac{.6745(1-.958^2)}{\sqrt{157}}=.0044.$$

$$P.E._{\eta_{xy}}=\frac{.6745(1-.96^2)}{\sqrt{157}}=.0042.$$

59. 直線性之試驗(tests for linearity)

在上例中 r 與 η 之數大不相同，該相關表之直線性在圖三十三中很易看出。若 r 與 η 之數很相近，在未計算之前，從相關表上我們看不出他們究否成一直線或一曲線。為決定一個相關表是否直線的，所以 r 可用以代替 η 以為測量相關度之數量起見，布雷克門(Blackman)曾建議一種試驗方法，稱為布氏試驗法。

若以 δ 代表 η^2-r^2,則在試驗特性之直線性時,求 δ 之 P.E. 的公式是

$$P.E._{\delta}=\frac{2(.6745)}{\sqrt{N}}\sqrt{(\eta^2-r^2)\{(1-\eta^2)^2-(1-r^2)^2+1\}} \quad \text{公式五十六}$$

若 η^2-r^2 三倍小於其機誤,則上面可改寫爲:

$$\eta^2-r^2<\frac{4.047}{\sqrt{N}}\sqrt{(\eta^2-r^2)\{(1-\eta^2)^2-(1-r^2)^2+1\}} \quad \text{公式五十七(a)}$$

公式五十七就是布氏直線性試驗公式。在此公式中若 η^2-r^2 小於右面之結果,易言之,卽小於 $3P.E._{\delta}$,則 η 與 r 之差別可以忽視之,而相關度之數量亦可以用 r 表示之。

茲根據表七十七之材料,演算一下以爲例。

$$.958^2-(-.828)^2<\frac{4.047}{\sqrt{157}}$$

$$\times\sqrt{\{.958^2-(-.828)^2\}[1-.958^2)^2-\{1-(-.828)^2\}^2+1]}.$$

$$.23218>.148257.$$

由布氏之試驗公式觀之,則此相關表決不可以 r 爲測量相關度之數量明矣。

布氏又發表一個短的試驗,其式如下:

$$\sqrt{N}\sqrt{\eta^2-r^2}<4.047\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式五十七(b)}$$

以上例論,

$\sqrt{157}\sqrt{.958^2-(-.828)^2}=6.039$ 大於 4.047,亦表示州政府供給學校總費用之百分數與每生費用之相關不是直線的關係,祇有相關比才能說明兩者之相關度。

第十四章 其他相關方法

60. 等級相關法 (rank correlation)

積差相關手續繁瑣，若人數不多，結果殊不可靠（參閱相關係數之機誤公式）。所以在此種例子中所求得之相關，除暗示相關存在與否及作初步之調查外，實無其他價值。故遇此種情形，我們可以用比較簡單方法來表示相關度，而不用複雜的積差相關法，以節省時間。此種方法有二，悉爲斯皮門所發表的，(一)爲等級相差法 (method of rank-difference)，(二)爲斯氏簡捷法 (Spearman's foot rule)，總名爲等級相關法。

再則在許多問題上，事實之排列次序以等級之大小表示之。例如教師評定成績時常有給等級而不予分數者。在估定職業能量與成績時，等級尤爲普通。在此種情形之下，我們若要求兩種成績之相關，當然須用等級相關方法。

(一)等差方法之公式 斯皮門的等差方法之公式是：

$$\rho = 1 - \frac{6\,\Sigma D^2}{N(N^2-1)} \cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式五十八}$$

在此公式中 ρ 代表等級相關係數，讀若 rho；$D = X - Y$ 即 X 項之等級與 Y 項之等級的相差

這個公式雖省時間，但若原來量數化爲等級後，以複雜之法求之，結果亦相等。因爲 ρ 之求得，實根據於求 r 之公式。茲略予說明之如

下：我們知道

$$r=\frac{\Sigma XY-N\,M_X M_Y}{\sqrt{\Sigma X^2-NM_X{}^2}\ \sqrt{\Sigma Y^2-NM_Y{}^2}}$$ 參閱公式三十九…(d)

但 X 與 Y 兩項均以等級表示之，則 $\Sigma X^2=\Sigma Y^2$, $M_X=M_Y$，而公式可簡寫如下：

$$\rho=\frac{\Sigma XY-NM^2}{\Sigma X^2-NM^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

惟 $$\Sigma XY=\frac{\Sigma X^2+\Sigma Y^2-\Sigma(X-Y)^2}{2}$$

$$=\Sigma X^2-\frac{\Sigma D^2}{2}\qquad D=X-Y.$$

故 $$\rho=\frac{\Sigma X^2-NM^2-\frac{\Sigma D^2}{2}}{\Sigma X^2-NM^2}$$

$$=1-\frac{\Sigma D^2}{2(\Sigma X^2-NM^2)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

惟 N 個整數之方之總數卽 $\Sigma X^2=N\ (2N+1)(N+1)/6$, $M=(N+1)/2$，故

$$\rho=\frac{\frac{\Sigma D^2}{2}}{\frac{N(2N+1)(N+1)}{6}-N\left(\frac{N+1}{2}\right)^2}$$

$$=1-\frac{\frac{\Sigma D^2}{2}}{\frac{2N^3+3N^2+N}{6}-\frac{N^3+2N^2+N}{4}}$$

$$=1-\frac{\Sigma D^2}{\frac{8N^3+12N^2+4N-6N^3-12N^2-6N}{12}}$$

$$= 1 - \frac{\Sigma D^2}{\frac{2N^3 - 2N}{12}}$$

$$= 1 - \frac{\Sigma D^2}{\frac{N(N^2-1)}{6}}$$

$$= 1 - \frac{6(\Sigma D^2)}{N(N^2-1)}.$$

(二)等差方法之計算法　等差方法之計算法極爲簡便。例如，有十個學生，在 X 與 Y 兩個測驗中分別得有分數，但是十個人爲數太少，實不必以複雜之法求相關，故先將各生之分數化爲等級，而再求各生在兩種測驗的等級之相差並求相差之方。將各數代在公式內，則得 ρ 矣。

表七十八　等級相關求法示例

學生	X測驗分數	Y測驗分數	X等級	Y等級	D	D^2	G
A	187	153	1	1.5	−0.5	0.25	.5
B	171	117	2	6	−4	16	4
C	169	153	3	1.5	1.5	2.25	
D	146	130	4	5	−1	1	1
E	141	105	5	7	−2	4	2
F	133	132	6	3	3	9	
G	128	131	7	4	3	9	
H	114	101	8	8	0	0	
I	106	71	9	10	−1	1	1
J	87	80	10	9	1	1	
						43.5	8.5

$$\rho = 1 - \frac{6 \times 43.5}{990} = .74 \qquad r = .7557$$

$$R = 1 - \frac{6 \times 8.5}{99} = .48 \qquad r = .711$$

$$P.E._\rho = \frac{.7063(1 - r^2)}{\sqrt{N}} = \frac{.7063(1 - .76^2)}{\sqrt{10}} = .094$$

(三)斯氏簡捷法之公式　斯氏又發表一種簡捷式，如下：

$$R=1-\frac{6\Sigma G}{(N^2-1)}\cdots\cdots\text{公式五十九}$$

在此公式中　R ＝ 相關之符號，G ＝ Gain 即盈餘之意。計算時或爲 X－Y，或爲 Y－X 均可。計算之例已見上表。

(三)化 ρ 與 R 爲 r 之法　在求等級相關之公式中有一種假定，就是分配是取直的形式，易言之，每一等級有一次數。爲征服此種缺點起見，皮而生氏曾發表一個改正的公式，如下：

$$r=2\sin\frac{\pi}{6}\rho\cdots\cdots\text{公式六十}$$

在此公式中，假定分配是常態的，則可將 ρ 化 r。不過，此種改正爲數不大，最多之數至 .018，而通常並不重要，因爲常態性之缺乏反可引入一種差誤數倍大於改正。所以有許多統計學者祇用 ρ 的數而並不把牠化爲 r，就是這個緣故。至於公式六十之計算很煩，已有附表七可查；由此表中可由 ρ 而推算 r。

R 亦可化爲 r，亦有附表八可查。至於化 R 爲 r 之公式，係皮氏所發表，亦根據於常態分配之假設。公式如下：

$$r=2\cos\frac{\pi}{3}(1-R)-1\cdots\cdots\text{公式六十一}$$

(四)等差相關之機誤　等級相關之機誤公式，在 ρ 方面爲

$$P.E._\rho=\frac{.6745\,(1-\rho^2)}{\sqrt{N}}\cdots\cdots\text{公式六十二(a)}$$

引用 3　$r=2\sin\frac{\pi}{6}\rho$ 之後，

$$P.E._{\rho}=\frac{.7063(1-r^2)}{\sqrt{N}}$$ ……………………公式六十五(b)

由此可見 ρ 較之 r 更不可信。

(五)等級法之限制

(a)積差法注重分數之大小及其在數系上之地位。等級法祇注重地位。實際上，凡兩個鄰近的等級之相差並不都是相等的。中部的兩鄰近成績的相差要比上部或下部的兩鄰近成績的相差小。關於此點，皮氏雖有改正公式，化 ρ 爲 r，但是根據於常態分配。倘分配不是常態的，則引入之差誤有時很大，上已言之。所以我們須知道，若分配是非常態的，則等級法所表示者，祇是相關之存在與否，而非相關之程度。

(b)再則，在等級法之公式中，我們根據 N 個整數之方之總和等於 $N(2N+1)(N+1)/6$ 一點，以化 r 爲 ρ，但是若等級中有許多相等之數，則 ΣX^2 不等於 $N(2N+1)(N+1)/6$ 明矣。在此種情形之下，ρ 之計算當然亦不能用(註一)。例如，下表中大家所得的 Y 分數都是相等，則大家之等級亦相等。以 ρ 表示之爲 .5，而以 r 表示之爲 0。下表之例當然是一個極端的，但是由此可見相等的等級若多時，自然產生一種很大的差誤。

(註一)： 若遇有兩個或以上之相等的分數，通常之法應將牠們平均一下而予以相當的等級。如表七十八中A生與B生之Y等級。此外亦有採弧級法(the bracket method)以示別於上述之中級法(the mid-rank method)。就是凡遇上述情形時，不平均，祇就牠們的爲首之數寫下去。如此則表七十八中 A 與 B 兩生之等級均爲 1。過此再就次序寫下去。但此法用者較少。

表七十九　表示相等的等級多時計算 ρ 之困難

學　生	X 分數	Y 分數	X 等級	Y 等級
A	50	30	1	3
B	40	30	2	3
C	30	30	3	3
D	20	30	4	3
E	10	30	5	3

(c)總之,若事實很少,而相等的等級又不多(例如,少於全部事項五分之一),則斯氏之等級法可用以爲相關之一粗略的指示。倘事實很多,在 50 以上,則積差相關法在理論上不但較好並更快。因爲化分數爲等級及求等級之方至此亦極麻煩了。至於等差法與簡捷法之比較,通常以等差法爲佳,以其較爲準確。

61. 各種數列之組合

在上兩章中所述之相關方法祗應用於量的數列。但是統計數列有量的與質的之分,質的數列又有秩序與無秩序的之別,在第二章中已言之。所以我們必須有他種方法以測量品質的與無秩序的數列之相關。

爲說明各種數列之組合起見,我們先舉若干假設的例子於下。表八十表示智力與學業之相關;智力以量表測量之,故其結果屬於數量的,學業以上,中,下表示之,故其結果屬於秩序的質的數列。表八十一之兩種特性均無量的說明,其結果悉屬於秩序的質的數列。在此兩個表中我們均看出在特性之間有相關度,但是因爲一種或兩種特性缺乏數量的說明,以至積差法不能適用。

表八十 表示質量相關

學業	智商				
	80	90	100	110	120
上	3	12	14	11	質的數列
中	4	15	17	2	
下	7	3	12	—	
量的數列					

表八十一 表示兩質相關

學業	品行		
	惡劣	中等	優良
上	3	12	14
中	4	16	2
下	10	7	1

表八十二表示兒童之智力與其父親的職業之關係。一方，智力可用量表測量之，結果屬於量的數列。父之職業係屬於無秩序的質的數列。在此表中，兩種特性之相關不易立刻觀察出來，因爲父之職業的排列次序可以任意更動，毫無問題。對於此種情形之相關必須採取另一種不同的方法以表示之。

表八十二 量的數列與無秩序的數列的相關

父之職業	兒童的智商				
	80	90	100	110	120
教師	7	11	12	10	無秩序的
醫生	3	9	14	8	
法官	3	6	9	12	
牧師	3	4	7	11	
量的數系					

由於上面之討論,數列之各種組合有下列六種:

(一)量的與量的;

(二)量的與質的(質的代表有秩序的質的數列);

(三)量的與無秩序的;

(四)質的與質的;

(五)質的與無秩序的;

(六)無秩序的與無秩序的。

在統計的工作中,第一種組合最爲普通,其他各種中,有的簡直很少遇到;雖然,我們必須有相當的方法以對付之。在下面各節中,我們將說明幾種方法。

62. 質量相關

(一)積差法之另一公式　在說明質的數列之相關以前,我們先介紹積差公式之一種變更,可以利用之以應付此種事實。此法亦係皮而生氏所發表的。

平常求相關時,所有差數均以組距表示之,所以 C_x, C_y, σ_x, 及 σ_y 悉是組距,若 σ_x 與 σ_y 以原來的數目作單位,則

$$r=\frac{\left[\Sigma fx'y'-\frac{(\Sigma fx')(\Sigma fy')}{N}\right]i_x\,i_y}{N\sigma_x\sigma_y}\cdots\cdots(1)$$

i_x 與 i_y 是 X 與 Y 之組距。若以 $\overline{Y}_x$ 代表直行的均數, M_y 代表全表的均數,則

$$\overline{Y}_x - M_y = \left(\frac{\Sigma' f_{xy} y'}{f_x} - \frac{\Sigma f_y y'}{N}\right) i_y \text{.}$$

現以 $\Sigma fx'(i_x)$ 乘此方程式之兩邊，則

$$\Sigma fx'(\overline{Y}_x - M_y)\, i_x = \left[\Sigma fx'y' - \frac{(\Sigma fy')(\Sigma fx')}{N}\right] i_x\, i_y$$

將此結果代入公式(1)內，則

$$r = \frac{\Sigma fx'(\overline{Y}_x - M_y) i_x}{N\sigma_x\sigma_y} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式六十三(a)}$$

同理，

$$r = \frac{\Sigma fy'(\overline{X}_y - M_x) i_y}{N\sigma_x\sigma_y} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式六十三(b)}$$

公式六十三之計算必須先求得各列或各排之均數，故用之以求相關係數者不多。倘 $\overline{Y}_X$ 或 $\overline{X}_Y$ 業已求得，則以此求 r 極便利，因為不必計 $\Sigma fx'y'$ 了。不過用這個公式求 r 者雖不多，而我們卻能根據之以為計算質量相關之張本。

(二)質的數列與積差法　相關表上若一種材料屬於量的數列，而另一種則是質的；我們欲求此兩種材料之相關，第一須先化質為量。倘質的材料是常態分配的，則化質為量之法很便當(參閱第十章)。例如下表，一方物理測驗之分數，屬於量的數列，另一方教師之計分屬於質的數列。欲求此兩種特性之相關時，須先化教師之等第為分數。下表業已化就。

表八十三　物理測驗之分數與教師等第之相關

測驗分數	教師等第				總數
	下等	中等	優等	最優等	
70—80	—	—	2	2	4
60—70	1	6	12	18	37
50—60	11	15	24	18	68
40—50	19	26	23	16	84
30—40	10	17	9	4	40
20—30	6	2	1	1	10
10—20	—	1	—	—	1
0—10	1	—	—	—	1
總數	48	67	71	59	245
百分等	19.6	27.3	29.0	24.1	100.0
等第分數	—1.411	—.444	.297	1.293	

在常態分配之假設下，$M_x=0$，則公式六十三(b)可改寫爲

$$r=\frac{\Sigma fy'\left(\frac{\overline{x_y}}{\sigma_x}\right)i_x}{N\sigma_y}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式六十四}$$

在此公式中 $\frac{\overline{x_y}}{\sigma_x}$ 爲各種橫行之均數，量自全表之均數。其價值之求

得係將每橫行之次數乘表中之等第分數，再被此橫行之總數所除。所以

$$\frac{\overline{x_{75}}}{\sigma_x}=\frac{2\times .297+2\times 1.293}{4}=+.795.$$

$$\frac{\overline{x_{65}}}{\sigma_x}=\frac{1\times(-1.411)+6\times(-.444)+12\times(.297)+18\times(1.293)}{37}$$

$$=+.615.$$

$$\frac{\overline{x_{55}}}{\sigma_x}=\frac{11(-1.411)+15(-.444)+24(.297)+18(1.293)}{68}$$

$$=+.121.$$

$$\frac{\overline{x_{45}}}{\sigma_x}=\frac{19(-1.411)+26(-.444)+23(.297)+16(1.293)}{84}$$

$$=-.129.$$

$$\frac{\overline{x_{35}}}{\sigma_x}=\frac{10(-1.411)+17(-.444)+9(.297)+4(1.293)}{40}=-.345.$$

$$\frac{\overline{x_{25}}}{\sigma_x}=\frac{6(-1.411)+2(-.444)+1(.297)+1(1.293)}{10}=-.776.$$

$$\frac{\overline{x_{15}}}{\sigma_x}=\frac{1(-.444)}{1}=-.444.$$

$$\frac{\overline{x_5}}{\sigma_x}=-1.411.$$

至於其餘之計算的步驟，詳見下表。

表八十四　表示表八十三中材料的相關係數之計算法

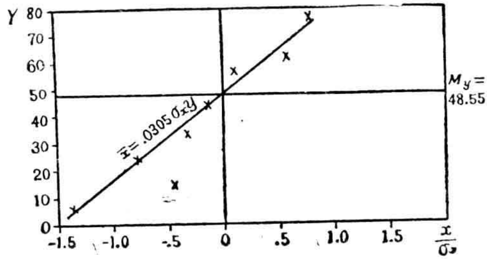
f_y	y'	fy'	$\frac{\overline{x}}{\sigma_x}$	$fy'\frac{\overline{x_y}}{\sigma_x}$	fy'^2
4	3	12	.795	9.540	36
37	2	74	.615	45.510	148
68	1	68	.121	8.228	68
84	0	0	−.129	0.000	0
40	−1	−40	−.345	13.800	40
10	−2	−20	−.776	15.520	40
1	−3	− 3	−.444	1.332	9
1	−4	− 4	−1.411	5.044	16
245		+87		99.574	357

$$\sigma_y = 11.54, \qquad N\sigma_y = 2827.3, \qquad M_Y = 48.55,$$

$$\therefore \quad r = \frac{99.574 \times 10}{2827.3} = .352.$$

若我們將各排之均數$\frac{\overline{x_y}}{\sigma_x}$以圖表示之，如圖四十四，則可以看出大多數點子頗密集於一條直線，所以該特性大概可以視爲直線的。至於此特性線之方程經過全表之均數爲$\frac{\overline{x}}{\sigma_x} = \frac{r}{\sigma_y}\ y$，或$\frac{\overline{x}}{\sigma_x} = \frac{.352}{11.54}\ y = .0305\ y$。同時我們知道 $M_y = 48.55$，則我們可以擇定兩點以爲繪特性線之用。例如以 $y = \pm 30$，則

$$\begin{cases} \frac{x}{\sigma_x} = .915, \\ Y \ = 78.55, \end{cases} \quad 與 \quad \begin{cases} \frac{x}{\sigma_x} = \ -.915, \\ Y \ = 18.55. \end{cases}$$



圖四十四　物理材料之特性線

以上所說之法，係一種數列是質的，一種是量的。倘兩種數列均屬於質的，則上面公式亦可應用。但有時因分組不精細，易言之，採取廣類法(broad categories)，則需要改正。改正由於廣類分組所生之差誤的公式，皮而生氏曾引用了好幾個，下面公式乃是其中之一。

$$ {}_cr_{xy}=\frac{\Sigma f_{xy}\frac{N}{f_xf_y}(z_s-z_{s+1})(z'_s-z'_{s+1})}{\left[\Sigma\frac{N}{f_x}\ (z_s-z_{s+1})^2\right]\left[\Sigma\frac{N}{f_y}(z'_s-z'_{s+1})^2\right]}\cdots\text{公式六十五} $$

在此公式中當然假設兩種變量都是常態分配的。公式中之 Z 悉是各段之分解的縱線，而有撇的 Z 代表 Y 而無撇的 Z 代表 X。此公式之計算法詳見表八十六中。表八十六係根據於表八十五之材料。此表即皮而生氏用以說明廣類對於相關之影響者。

表八十五　智力與衣服品質之相關表

衣服	智	力	等	級			f_y
品質	B	C	D	E	F	G	
I	33	48	113	209	194	39	636
II	41	100	202	255	138	15	751
III	39	58	70	61	33	4	265
IV 和 V	17	13	22	10	10	1	73
f_x	130	219	407	535	375	59	1725

表八十六　廣類改正公式之計算法示例（計算法錄自 Holzigner pp. 263-265）

							1	2	3	4	5	6	7
							f_y	f_y/N	Z'_s	$Z'_s-Z'_{s+1}$	$(4)^2$	N/f_y	(6)×(7)
f_{xy}→	33	48	113	209	194	39	636	.369	.3772	.3772	.14228	2.712	.3859
f_xf_y→	82680	139284	258852	340260	238500	37524							
Nf_{xy}/f_xf_y→	.6885	.5945	.7530	1.0596	1.4031	1.7929							
$\frac{Nf_{xy}}{f_xf_y}(z_s-z_{s+1})\ Z'_s-Z'_{s+1}$→	−.0534	−.0528	−.0424	.0283	.0919	.0285							
$(z_s-z_{s+1})(Z'_s-Z'_{s+1})$→	−.0368	−.0314	−.0319	.0300	.1289	.0511							
	41	100	202	255	138	15	751	.435	.2766	−.1006	.01012	2.297	.0232
	97630	164469	305657	401785	281625	44309							
	.7244	1.0488	1.1400	1.0948	.8453	.5840							
	.0142	.0141	.0113	−.0075	−.0245	−.0076							
	.0103	.0148	.0129	−.0082	−.0207	−.0044							
	39	58	70	61	33	4	265	.154	.0897	−.1869	.03493	6.509	.2274
	34450	58035	107855	141775	99375	15635							
	1.9528	1.7240	1.1196	.7422	.5728	.4413							
	.0265	.0262	.0210	−.0140	−.0455	−.0141							
	.0517	.0452	.0235	−.0104	−.0261	−.0062							
	17	13	22	10	10	1	73	.042	.0000	−.0897	.00805	23.630	.1902
	9490	15.87	29711	39055	27375	4307							
	3.0901	1.4027	1.2773	.4417	.6301	.4005							
	.0127	.0126	.0101	−.0067	−.0219	−.0068							
	.0392	.0177	.0129	−.0030	−.0138	−.0027							
f_x	130	219	407	535	375	59	1725						.8267
f_x/N	.0754	.1270	.2359	.3101	.2174	.0342		1.000	$\Sigma f_{xy}\frac{N}{f_xf_y}(Z_s-Z_{s+1})(Z'_s-Z'_{s+1})=.2426$				
Z_s	.0000	.1416	.2816	.3941	.3191	.0755							
Z_s-Z_{s+1}	−.1416	−.1400	−.1125	.0750	.2436	.0755			$_cr_{xy}=\frac{.2426}{.9319\times .8267}$				
$(Z_s-Z_{s+1})^2$	.02005	.01960	.01266	.00562	.05934	.00570			$=.315$				
N/f_x	13.269	7.877	4.238	3.224	4.600	29.237							
$\frac{N}{f_x}(Z_s-Z_{s+1})^2$	.2660	.1544	.0537	.0181	.2730	.1667	.9319						

63. 質的數列和無秩序的數列之相關比

若一數列可以常態量表代表之，則相關比之計算殊為簡單。我們知道 $M_X=0$，則公式五十一（b）成為

$$\eta_{xy}=\frac{\sqrt{\frac{\Sigma f_y \bar{x}_y{}^2}{N}}}{\sigma_X}=\sqrt{\frac{\Sigma f_y\left(\frac{\bar{x}_y}{\sigma_x}\right)^2}{N}}\quad\text{…………公式六十六（a）}$$

茲以表八十三之材料為例，演算一下。在此例中，$\frac{\overline{x}_y}{\sigma_x}$ 已在表八十四中計算好，故相關比之計算很簡便，如下表。

表八十七　表示公式六十八之相關比計算比

$\frac{\overline{x}_y}{\sigma_x}$	$\left(\frac{\overline{x}_y}{\sigma_x}\right)^2$	f_y	$f_y\left(\frac{\overline{x}_y}{\sigma_y}\right)^2$
.795	.6320	4	2.5280
.615	.3782	37	13.9934
.121	.0146	68	0.9928
−.129	.0166	84	1.3944
−.345	.1190	40	4.7600
−.776	.6022	10	6.0220
−.444	.1971	1	0.1971
−1.411	1.9909	1	1.9909
		245	31.8786

$$\eta_{xy}{}^2=\frac{31.8786}{245}=.13012$$

$$\eta=\sqrt{.13012}=.361$$

應用公式五十七（b）以試驗直線性，結果是

$\sqrt{245}\sqrt{(.361)^2-(.352)^2}=1.25<4.05$ 可視為直線的。

若一種數列是量的或質的，而另一種數列是無秩序的，則我們總可

以求得一個相關比。因此,若 Y 是量的,則 η_{yx} 之公式是

$$\eta_{yx}=\frac{\sqrt{\frac{\Sigma f_x(M_y-\overline{Y}_x)^2}{N}}}{\sigma_y}$$

在此式中，我們前已說過，相關比乃是兩個標準差之比例,兩者均倚賴於 Y。至於 X 特性之排列實不關重要,因爲牠不能影響於上式中之分子及 σ_y。

茲根據表八十三之材料用上式計算 η_{yx} 一下以爲例。

表八十八　根據表八十三,說明求 η_{yx} 之法

教師等第	下　等	中　等	優　等	最優等	總　數
總數(f_x)	48	67	71	59	245
$\overline{Y}_x$	42.29	45.45	51.06	54.15	
$M_y-\overline{Y}_x$	6.26	3.10	2.51	5.60	
$(M_y-\overline{Y}_x)^2$	39.1876	9.6100	6.3001	31.36	
$f_x(M_y-\overline{Y}_x)^2$	1881.0028	643.87	447.3071	1850.24	4822.4199

$\frac{4822.4199}{245}=19.6833$　　$\sqrt{19.6833}=4.436$

$\eta_{yx}=\frac{4.44}{11.54}=.385$　　$My=48.55$

$\sigma y=11.54$

若事實之一類,其數列屬於質的,一組屬於無秩序的,則相關比之求法如下表之例。在下表中,三種態度之次序,並無一定標準,可以任意

變更，所以其數列是無秩序的。

表八十九 表示質的數列和無秩序的數列之相關比計算法——材料根據於渡卿(Tulchin)之智力和態度

智力	態度：煩惱	態度：不同情	態度：同情	f_y	百分數	$\frac{\bar{y}}{\sigma_y}$
最優	5	—	219	224	3.9	$\frac{{}_5\bar{y}_6}{\sigma} = \frac{.0844-0}{.039} = 2.164$
優等	24	12	1213	1249	21.8	$\frac{{}_4\bar{y}_5}{\sigma} = \frac{.3224-.0844}{.218} = 1.092$
中等	105	103	2451	2659	46.5	$\frac{{}_3\bar{y}_4}{\sigma} = \frac{.3354-.3224}{.465} = .028$
劣等	131	108	1021	1260	22.0	$\frac{{}_2\bar{y}_3}{\sigma} = \frac{.1160-.3354}{.220} = -.997$
最劣	73	82	174	329	5.8	$\frac{{}_1\bar{y}_2}{\sigma} = \frac{0-.1160}{.058} = -2.000$
f_x	338	305	5078	5721	100.0	
$\left(\frac{\bar{y}_x}{\sigma_y}\right)$	$-.7001$	$-.8383$	$.0987$	$\frac{429.475}{5721} = .07507$		
$\left(\frac{\bar{y}_x}{\sigma_y}\right)^2$	.490140	.702747	.009742	$\therefore \eta_{yx} = \sqrt{.07507}$		
$f_x\left(\frac{\bar{y}_x}{\sigma_y}\right)^2$	165.667	214.338	49.470	429.475	$= .274$	

上表中所用的公式是：

$$\eta_{yx} = \sqrt{\frac{\Sigma f_x\left(\frac{\bar{y}_x}{\sigma_y}\right)^2}{N}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式六十六(b)}$$

在上表中，

$\frac{\overline{y_x}}{\sigma_y}$＝各列之均數。

$\frac{\overline{y_a}}{\sigma_y}$＝煩惱列之均數(a 代表 annoying)

$$=\frac{2.164\times5+1.092\times24+.028\times105-.997\times131-2\times73}{338}$$

$$=\frac{-236.39}{338}=-.7001.$$

$\frac{\overline{y_u}}{\sigma_y}$＝不同情列之均數(u 代表unsympathetic)

$$=\frac{1.092\times12+.028\times103-.997\times108-2\times82}{305}$$

$$=\frac{-255.688}{305}=-.8383.$$

$\frac{\overline{y_s}}{\sigma_y}$＝同情列之均數(s 代表 sympathetic)

$$=\frac{2.164\times219+1.092\times1213+.028\times2451-.997\times1021-2\times174}{5078}$$

$$=.0987.$$

至於相關比之改正公式亦有幾個，以適應於太粗略或太精密之分類。公式六十七是廣類之改正，其式如下，亦爲皮而生氏所首先引用的，

$$_c\eta_{yx}=\frac{\eta_{yx}}{r_{xc}}\text{ ......公式六十七}$$

在此式中，$_c\eta_{yx}$ 代表改正後的相關比，r_{xc} 代表一種變量 x 與其組的價值之相關 (correlation of a variable with its class value)。求

r_{xc} 之公式如下：

$$r_{xc}=\sqrt{\Sigma\frac{N}{f_x}(Z_s-Z_{s+1})^2}\text{ ························ 公式六十八}$$

茲根據表八十三之材料演算一下以爲例，本表之 $\eta_{yx}=.385$，已見表八十八。至於 r_{xc} 之計算法見表九十。$r_{xc}=.934$，所以

$$_c\eta_{yx}=\frac{.385}{.934}=.412$$

表九十 表示 r_{xc} 之計算法

Z_s-Z_{s+1}	$(Z_s-Z_{s+1})^2$	N/f_x	$\frac{n}{f_x}(Z_s-Z_{s+1})^2$
$Z_0-Z_1=$ $-.2766$	.076508	5.1042	.390512
$Z_1-Z_2=$ $-.1211$	.014665	3.6567	.053626
$Z_2-Z_3=$ $.0861$	.007413	3.4507	.025580
$Z_3-Z_4=$ $.3116$	.097095	4.1525	.403187
$r_{xc}=\sqrt{.872905}=.934$			.872905

64. 二項數列相關係數(Bi-serial coefficient of correlation)

若相關表之一種特性是量的，另一種則祇有兩種質的分類，則求此相關之法，可用二項數列相關係數，以 Biserial r 代表之，其公式如下：

$$r_{Bis.}=\frac{\overline{Y}_2-\overline{Y}_1}{\sigma_y}\left(\frac{pq}{z}\right)\text{ ························ 公式六十九}$$

在此公式中 $\overline{Y}_1$ 與 $\overline{Y}_2$ 代表均數，$p=\frac{n_2}{N}$，$q=\frac{n_1}{N}$，而 n_1 與 n_2 乃是兩個次數之總和。$n_1+n_2=N$。求 Z 時先決定 $p-.5$，再在附表四查出 Z。茲演算一例於下：

表九十一　表示 Biseriel r 之求法(材料爲房租和一歲的兒童的健康之關係)

房租以令先計	康			健			總數			
	不		良	優		良				
	f_{y_1}	y'_1	fy'_1	f_{y_2}	y'_2	fy'_2	(f_y)	y'	fy'	fy'^2
8.5	1	9	9	1	9	9	2	9	18	162
8.0	—	8	—	—	8	—	—	8	—	—
7.5	—	7	—	4	7	28	4	7	28	196
7.0	—	6	—	4	6	24	4	6	24	144
6.5	1	5	5	13	5	65	14	5	70	350
6.0	1	4	4	18	4	72	19	4	76	304
5.5	4	3	12	45	3	135	49	3	147	441
5.0	16	2	32	82	2	164	98	2	196	392
4.5	53	1	53	252	1	252	305	1	305	305
4.0	101	0	0	303	0	0	404	0	0	0
3.5	132	−1	−132	182	−1	−182	314	−1	−314	314
3.0	55	−2	−110	64	−2	−128	119	−2	−238	476
2.5	26	−3	−78	18	−3	−54	44	−3	−132	396
2.0	7	−4	−28	7	−4	−28	14	−4	56	224
	$397=n_1$		−233	$993=n_2$		+357	$1390=N$		+124	3704

$$\overline{Y}_1 = 4.0 + \frac{-233}{397}(.5)$$

$$= 3.7065$$

$$\overline{Y}_2 = 4.0 + \frac{357}{993}(.5)$$

$$= 4.1798$$

$$\sigma y = \sqrt{\frac{3704}{1390} - \left(\frac{124}{1390}\right)^2}(.5)$$

$$= \sqrt{2.656774}\,(.5)$$

$$= .8145$$

$$q = \frac{n_1}{N} = .2856$$

$$p_1 = \frac{n_2}{N} = .7144$$

$$p - .5 = .7144 - .5 = .2144$$

$$Z = .3399$$

$$r=\frac{4.1798-3.7065}{.8145}\times\frac{.7144\times .2856}{.3399}$$

$$=\frac{(.4733)(.2040)}{(.8145)(.3399)}=\frac{.09655}{.2768}=.349$$

因此我們可以結論一歲兒童之健康與高房租似有少許相聯之傾向。

至於二項數列的 r 之機誤公式如下，惟應用時須注意 q 不少於 .05，

$$P.E._{(bis\cdot r)}=\frac{.6745\left(\sqrt{\frac{pq}{Z^2}}-r^2\right)}{\sqrt{N}}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式七十}$$

5. 相聯係數和綜合係數

相聯係數 (coefficient of association) 倘兩種數列都是屬於質的，則相聯係數是一種最簡單的方法。此種係數乃是優爾所提議，祇應用於四格表上。在四格表中材料之記錄不但沒有分數，且亦無等級，僅載明有無或存在與不存在。譬如有兩門功課，國文與算術，教師祇記下及格與否，如表九十二。在此表中，我們可以看出兩門均及格者有 50 人，兩門均不及格者有 3 人，國文及格而算術不及格者有 6 人，算術及格而國文不及格者有 8 人。再兩門都及格之象限內的數目以 a 代表之，兩門都不及格之象限內的數目以 b 代表之，其他兩個象限內之數目分別以 c 與 d 代表之；若以 Q 代表相聯係數，則

$$Q=\frac{ab-bc}{ad+bc}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式七十一}$$

表九十二　表示相聯係數之求法

國文成績

算術成績		及格	不及格		
	及格	50 a(++)	8 b(+−)	58 a+b	$Q=\frac{50\times3-8\times6}{50\times3+8\times6}=.515$
	不及格	6 c(−+)	3 d(−−)	9 c+d	$w=\frac{\sqrt{50\times3}-\sqrt{8\times6}}{\sqrt{50\times3}+\sqrt{8\times6}}=.28$
		56 a+c	11 b+d	67 N	

此外優爾又建議一個公式,稱爲綜合係數(coefficient of colligation),其符號爲 ω,(讀若 omega)

$$\omega=\frac{\sqrt{ad}-\sqrt{bc}}{\sqrt{ad}+\sqrt{bc}}\text{······························公式七十二}$$

這兩個公式,優爾自己贊成第二個。但是許多統計學者如皮而生氏等對於兩個公式均不贊成。

66. 餘弦 π 法和異號法

餘弦 π 法 (the cosine π method) 是皮而生氏所首先引用,公式如下:

$$r=\cos\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{ad}+\sqrt{bc}}\pi\text{ ······················公式七十三}$$

茲根據表九十二材料演算之以爲例:

先算出 $\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{ad}+\sqrt{bc}}=\frac{\sqrt{8\times6}}{\sqrt{50\times3}+\sqrt{8\times6}}$

$$=\frac{6.928}{19.175}=.361$$

再就附表九中查出 $r = .42$

異號法 (the method of unlike signs) 爲瑟帕德所發表，其公式如下：

$$r = \cos \frac{U}{L+U} \pi \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式七十四(a)}$$

在此公式內 U = 異號，即 b + c，L = 同號，即 a + d，所以本公式可以改寫爲

$$r = \cos \frac{b+c}{a+b+c+d} \pi \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式七十四(b)}$$

用異號法計算 r 時，其步驟與皮氏餘弦 π 法一樣。不過皮氏的公式內，要先經過開方的手續，自然麻煩得多，茲就表九十二之材料，演算一下以爲例：

$$\frac{b+c}{a+b+c+d} = \frac{8+6}{67} = .209$$

再就附表九中查出 $r = .79$。

瑟氏的異號法計算上雖較便利，但機誤則比較的大。這機誤的公式爲

$$P.E. = \sin\left[.1686\,\pi(1-r^2)\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\right] \cdots \text{公式七十五}$$

67. 相依係數(coefficient of contingency)(有譯爲接觸係數)

若兩種特性都是無秩序的，則上面的方法皆不能應用。例如表九十

四父子的眼色之相關，眼色分爲藍，灰，褐，棕等各類，但是排列並無一定的次序。所以欲求此種歸類的事實之相關，我們須先略溫習機率之理論，以求得一種數量。爲說明方法起見，我們先假設一個簡單的例子，如表九十三。在此表中，粗線的方格中，$f_{xy}=5$，$f_x=10$，$f_y=7$。我們知道一個數量落入某一列中之機率爲 f_x/N（例如，10/20）；同樣地一個數量落入某一排中之機率爲 f_y/N，（例如 7/20）。若此兩項均視爲自變的，則牠們的聯合的呈現之機率乃是上面兩個機率之積，卽 $\frac{f_xf_y}{N^2}$ $\left(例如\frac{7\times10}{400}\right)$。易言之，若特性是完全地自變的，則在N數量之中，我們預料有 N $\left(\frac{f_xf_y}{N^2}\right)$或$\frac{f_xf_y}{N}$之數落入某一特殊之方格內。以表九十三之粗線方格爲例，觀察得到的次數爲 5，而自變值是$\frac{70}{20}$或 3.5。這兩個數目有了差別，而此差別乃可以利用之以爲測量相關度。易言之，$f_{xy}-\frac{f_xf_y}{N}$乃是一個數量，表示兩個特性離開完全的自變情形或相依情形(contingency)。相依法是皮而生氏所首先引用，其符號 C，C 者卽均方相依係數(coefficient of mean square contingency)之意。

皮氏以下式說明全表中均方相依之關係，

$$\phi^2=\frac{\chi^2}{N}=\frac{1}{N}\ \Sigma\left[\frac{\left(f_{xy}-\frac{f_xf_y}{N}\right)^2}{\frac{f_xf_y}{N}}\right]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式七十六}$$

在此式中 ϕ 讀若 phi，爲均方相係函數(mean square contingency function)，χ^2 函數已在常態性之試驗中說過。在實際上，我們需要一個從零至一的範圍內的係數，公式如下：

$$C=\sqrt{\frac{\phi}{1+\phi^2}}=\sqrt{\frac{\chi^2}{N+\chi^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式七十七}$$

但是

$$\chi^2=\Sigma\left[\frac{\left(f_{xy}-\frac{f_xf_y}{N}\right)^2}{\frac{f_xf_y}{N}}\right]=\Sigma\left(\frac{f_{xy}{}^2}{\frac{f_xf_y}{N}}\right)-2\,\Sigma f_{xy}+\frac{\Sigma f_xf_y}{N}$$

$$=S'-N$$

S' 代表 $\Sigma\left(\frac{f_{xy}{}^2}{\frac{f_xf_y}{N}}\right)$，而 N 爲其餘兩項之結果，故

$$C=\sqrt{\frac{S'-N}{N+S'-N}}=\sqrt{\frac{S'-N}{S'}}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式七十八(a)}$$

依公式七十八(a)求 C 之第一步爲求每方格內之「自變值」。所謂自變值者，卽兩種特性無關係時，每方格內應有之數目。例在表九十四中，全部人數共 1000 對人，父眼爲藍色而子之眼亦爲藍色共 194 對人，此爲實際觀察所得之結果。倘父子之眼色不相關，則應有 $\frac{335\times358}{1000}$ 或 120 藍眼之父，其子之眼，若任機遇之所爲亦應爲藍色。所以 120 乃是此格之自變值。自變值求得之後，再被觀察得來之數之平方所除，得一商數。各格之商數加好卽爲 S。故求 C 之步驟如下：

(a)求每格內之 f_{xy}^2;

(b)求每格內之 f_xf_y;

(c)求每格內之 $\frac{f_xf_y}{N}$ 自變值;

(d)求每格之 $\frac{f_{xy}^2}{\frac{f_xf_y}{N}}$;

(e)求 $\Sigma\left(\frac{f_{xy}^2}{\frac{f_xf_y}{N}}\right)$ 卽 S';

(f)求 $\frac{S'+N}{S'}$ 及其平方根，卽 C。

公式七十八(a)係優爾所建議。倘我們以 S 代表 $\Sigma\left(\frac{f_{xy}^2}{f_xf_y}\right)$，則 $S'=NS$，而

$$C=\sqrt{\frac{NS-N}{NS}}=\sqrt{\frac{N(S-1)}{NS}}=\sqrt{\frac{S-1}{S}}\cdots\text{公式八十(b)}$$

依公式七十八(b)求 C 略爲簡單，因爲我們不必再求 $\frac{f_{yy}^2}{\frac{f_xf_y}{N}}$ 而祇求 $\frac{f_{xy}^2}{f_xf_y}$ 了。其步驟如下:

(a)求每格內之 f_{xy}^2;

(b)求每格內之 f_xf_y;

(c)求每格內之 f_{xy}^2/f_xf_y;

(d)求 $\Sigma\left(\frac{f_{xy}^2}{f_xf_y}\right)$ 卽 S;

(e)求 $\frac{S-1}{S}$ 及其方根，卽 C。

下面兩表乃說明求 C 之方法。

表九十三 表示 C 之求法 示例一(仿 Holzinger, p. 257)

		A	B	C	f_y
L	1. f_{xy} 2. f^2_{xy} 3. f_xf_y 4. f_{xy}^2/f_xf_y 5. f_xf_y/N 6. $f_{xy}^2/f_xf_y/N$	—	1 1 3×10=30 1/30=.0333 30/20=1.5 1/1.5=.6667	2 4 3×3= 9 4/9=.4444 9/20=.45 4/.45=8.8889	3
M	1. 2. 3. 4. 5. 6.	2 4 7×7=49 4/49=.0816 49/20=2.45 4/2.45=1.6327	$\boxed{5}$ 25 7×10=70 25/70=.3571 70/20=3.5 25/3.5=7.1429	—	7
N	1. 2. 3. 4. 5. 6.	2 4 7×7=49 4/49=.0816 49/20=2.45 4/2.45=1.6327	4 16 7×10=70 16/70=.2286 70/20=3.5 16/3.5=4.5714	1 1 7×3=21 1/21=.0476 21/20=1.05 1/1.05=.9524	7
O	1. 2. 3. 4. 5. 6.	3 9 3×7=21 9/21=.4286 21/20=1.05 9/1.05=8.5714	—	—	3
f_x		7	10	3	20=N

$$\Sigma\left(\frac{\frac{f_{xy}^2}{f_xf_y}}{N}\right)=S'=34.0591$$

$$S'-N=34.0591-20$$

$$=14.0591$$

$$\frac{S'-N}{S'}=\frac{14.0591}{34.0591}=.4128$$

$$\therefore\quad C=\sqrt{.4128}=.64$$

$$\Sigma\left(\frac{f_{xy}^2}{f_xf_y}\right)=S=1.7028$$

$$S-1=.7028$$

$$\frac{S-1}{S}=\frac{.7028}{1.7028}=.4127$$

$$\therefore\quad C=\sqrt{4127}=.64$$

表九十四　C 之求法示例二(仿 Yule, p. 70)

父　之　眼　色

子之眼色		藍	灰	褐	棕	f_y
藍	1	194	70	41	30	335
	2	37636	4900	1681	900	
	3	119930	88440	60300	66330	
	4	.3138	.0554	0279	.0136	
	5	120	88	60	66	
	6	313.6	55.7	28	13.6	
灰	1	83	124	41	36	284
	2	6889	15376	1681	1296	
	3	101672	74976	51120	56232	
	4	.0678	.2051	.0329	.0230	
	5	102	75	51	56	
	6	67.5	205	33	23.1	
褐	1	25	34	55	23	137
	2	625	1156	3025	529	
	3	49046	36168	24660	27126	
	4	.0127	.0320	.1227	.0200	
	5	49	36	25	27	
	6	12.8	32.1	121	19.6	
棕	1	56	36	43	109	244
	2	3136	1296	1849	11881	
	3	87352	64416	43920	48312	
	4	.0359	.0201	.0421	.2459	
	5	87	64	44	48	
	6	36	20.3	42	247.5	
f_x		358	264	180	198	1000 N

$S' = 1270.8$

$N = \frac{1000}{270.8}(S' - N)$

$C = \sqrt{\frac{210.8}{1270.8}} = .46$

$S = 1.2709$

$S - 1 = .2709$

$C = \sqrt{\frac{.2709}{1.2709}} = .46$

相依係數有一限制，就是分組之精密度影響於 C 之最高值。優爾曾證明 C 之最高值等於 $\sqrt{\frac{t-1}{t}}$，t 代表表中 X 與 Y 之組數。例如表九十四爲 4×4 層表 (4×4 fold table)，則 $t=4$，而 C 之值不能超過 $\sqrt{\frac{4-1}{4}}$ 或 .866。故

若 $t=2$，C 不能超過 .707;

若 $t=3$，C 不能超過 .816;

若 $t=4$，C 不能超過 .866;

若 $t=5$，C 不能超過 .894;

若 $t=6$，C 不能超過 .913;

若 $t=7$，C 不能超過 .926;

若 $t=8$，C 不能超過 .935;

若 $t=9$，C 不能超過 .943;

若 $t=10$，C 不能超過 .949.

故對於低的相關價值，上述困難並不顯著；但在可能範圍內，我們最好應用相依係數於 5×5 層表或更精密的分組。但是分組亦不能太詳，一則不易計算，二則不重要的類別加入，反影響係數。

至於相依係數之改正廣類公式如下：

$$ {}_cC=\frac{C}{r_{xc}\,r_{yc}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式七十九}$$

r_{xc} 與 r_{yc} 之求法已見公式六十八。公式七十九之應用在 5×5 或 6×6 之相依表中，改正不大；但是對於 4×4 或 3×3 之表中，改正是很重要的。

第十五章　分析與多數相關

68. 分析相關之意義與公式

凡統計的事實常受多種因素之影響，於是使兩種變量間所得到的關係之意義不大顯明。例如，若我們在中學成績與大學成績間得到相關係數 .60，則此結果無疑地大部由於學生之智力。此外，許多其他因子，如年齡，性別，健康，志氣，學習方法，甚至個人的容貌等等或對於此觀察得來的相關施有影響。易言之，凡兩種特性之相關，常時因爲許多不純的因子之關係，若此種不純的因子不設法抽除，有時鬧成笑話。在第 53 節已經說明過。消除不純的因子之法，大致有二：第一，留心選擇被試，第二，應用分析相關。分析相關英文爲 partial correlation 有譯爲部分相關或淨相關，是兩種特性之相關，受了第三種因子（或則許多其他因子）之影響，而此第三種因子（或其他因子）在分析相關之公式內則假設已被固定或抽除。凡三種特性中一種除外之分析相關，通常稱爲第一級；四種特性二種除外的稱爲第二級，餘類推。在心理的與教育的研究中，已經應用第一級的尚可找到幾個很好的例子，至於應用第二級或以上的，則很少了。第一級分析相關之公式如下：

$$r_{12\cdot3}=\frac{r_{12}-(r_{13}\times r_{23})}{\sqrt{1-r_{13}^2}\ \sqrt{1-r_{23}^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式八十}$$

茲以第 53 節所說的阿女士所做的試驗爲例；她統計數百個兒童，年齡自五歲至二十歲之成骨比例與智齡之相關，r = .75；但是她同時

又求得年齡與成骨比例之相關，$r=.87$；年齡與智齡之相關，$r=.83$。可見年齡對於成骨比例與智齡同施正面之影響。這個影響使成骨比例與智齡之相關係數變大。設我們以 1 代表成骨比例，2 代表智齡，3 代表年齡，則 $r_{12}=.75$，$r_{13}=.87$，$r_{23}=.83$；若把年齡固定，而再求成骨比例與智齡之分析相關，則 $r_{12\cdot3}=.101$，可見成骨比例與智齡本無相關，r_{12} 所以等於 .75者，完全由於年齡這一個不純的因子。

$$r_{12\cdot3}=\frac{.75-(.87)(.83)}{\sqrt{[1-(.87)^2][1-(.83)^2]}}=.101\pm.037.\quad(N=320)$$

至於第二級分析相關之公式如下：

$$r_{12\cdot34}=\frac{r_{12\cdot3}-(r_{14\cdot3}\ r_{24\cdot3})}{\sqrt{[1-r^2_{14\cdot3}][1-r^2_{24\cdot3}]}}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式八十一}$$

由上式看來，求第二級之分析相關係數，必須計算出來第一級之係數，因此，我們最好記得一個普通的公式，如下：

$$r_{12\cdot34\cdots\cdots n}=\frac{r_{12\cdot34\cdots(n-1)}-r_{1n\cdot34\cdots(n-1)}\ r_{2n\cdot34\cdots(n-1)}}{\sqrt{[1-r^2_{1n\cdot34\cdots(n-1)}][1-r^2_{2n\cdot34\cdots(n-1)}]}}\cdots\text{公式八十二}$$

在上面公式中，我們必須注意註解數字所代表之意義。在註解中，左面兩數爲求分析相關，故此註解又稱爲主要的註解。在此兩數之後，乃有一點，點後或有一數，或有二數，以至 n－2 數。若祇有一數則爲第一級，二數則爲第二級，餘類推。一個數目代表一種特性，所以有兩個特性要除外，則在點後之註解有兩數。點後之註解又稱爲次要的註解，所以公式八十中，第 3 種特性已除外，在公式八十一中，第 3 種與第 4 種特性均已除外。在公式八十二中除外的特性之數爲 n－2。

69. 以對數計算分析相關之法

若特性有三種，則應用公式八十二可以寫下各種可能之相關公式如下：

$$r_{12\cdot3}=\frac{r_{12}-r_{13}\,r_{23}}{\sqrt{[1-r^2_{13}][1-r^2_{23}]}},$$

$$r_{13\cdot2}=\frac{r_{13}-r_{12}\,r_{23}}{\sqrt{[1-r_{12}{}^2][1-r_{23}{}^2]}},$$

$$r_{23\cdot1}=\frac{r_{23}-r_{21}\,r_{31}}{\sqrt{[1-r_{21}{}^2][1-r_{31}{}^2]}}.$$

當然 $r_{12\cdot3}=r_{21\cdot3}$， $r_{31\cdot2}=r_{13\cdot2}$， $r_{23\cdot1}=r_{32\cdot1}$， 因爲在零級相關係數之 r_{12} 與 r_{21} 是一樣的。

若特性有四種，則分析相關之數，固定了任何兩個主要的註解，可有六個，因爲 ${}_4c_2=6$。但是次要的註解之次序照優爾氏證明是不關緊要的，所以 $r_{12\cdot34}=r_{12\cdot43}$， $r_{12\cdot345}=r_{12\cdot354}=r_{12\cdot543}$ 等等。因此，此六個數中祇有三個數了。同樣地，其他三組亦如之。所以，第二級相關有六個。

1. $r_{12\cdot34}=r_{12\cdot43}=r_{21\cdot34}=r_{21\cdot43}$,
2. $r_{13\cdot24}=r_{13\cdot42}=r_{31\cdot24}=r_{31\cdot42}$,
3. $r_{14\cdot23}=r_{14\cdot32}=r_{41\cdot23}=r_{41\cdot32}$,
4. $r_{23\cdot14}=r_{23\cdot41}=r_{32\cdot14}=r_{32\cdot41}$,
5. $r_{24\cdot13}=r_{24\cdot31}=r_{42\cdot13}=r_{42\cdot31}$,
6. $r_{34\cdot12}=r_{34\cdot21}=r_{43\cdot12}=r_{43\cdot21}$.

爲核對結果起見,我們可以算出十二個分析相關,此十二個分析相關之公式如下:

$$r_{12\cdot34}=\frac{r_{12\cdot3}-r_{14\cdot3}\,r_{24\cdot3}}{\sqrt{[1+r^2_{14\cdot3}][1-r^2_{24\cdot3}]}},$$

$$r_{23\cdot14}=\frac{r_{23\cdot1}-r_{24\cdot1}\,r_{34\cdot1}}{\sqrt{[1-r^2_{24\cdot1}][1-r^2_{34\cdot1}]}},$$

$$r_{12\cdot43}=\frac{r_{12\cdot4}-r_{13\cdot4}\,r_{23\cdot4}}{\sqrt{[1-r^2_{13\cdot4}][1-r^2_{23\cdot4}]}},$$

$$r_{23\cdot41}=\frac{r_{23\cdot4}-r_{21\cdot4}\,r_{31\cdot4}}{\sqrt{[1+r^2_{21\cdot4}][1-r^2_{31\cdot4}]}},$$

$$r_{13\cdot24}=\frac{r_{13\cdot2}-r_{14\cdot2}\,r_{34\cdot2}}{\sqrt{[1-r^2_{14\cdot2}][1-r^2_{34\cdot2}]}},$$

$$r_{24\cdot13}=\frac{r_{24\cdot1}-r_{23\cdot1}\,r_{34\cdot1}}{\sqrt{[1-r^2_{23\cdot1}][1-r^2_{34\cdot1}]}},$$

$$r_{13\cdot42}=\frac{r_{13\cdot4}-r_{12\cdot4}\,r_{32\cdot4}}{\sqrt{[1-r^2_{12\cdot4}][1-r^2_{32\cdot4}]}},$$

$$r_{24\cdot31}=\frac{r_{24\cdot3}-r_{21\cdot3}\,r_{14\cdot3}}{\sqrt{[1-r^2_{12\cdot3}][1-r^2_{14\cdot3}]}},$$

$$r_{14\cdot23}=\frac{r_{14\cdot2}-r_{13\cdot2}\,r_{43\cdot2}}{\sqrt{[1-r^2_{13\cdot2}][1-r^2_{34\cdot2}]}},$$

$$r_{34\cdot12}=\frac{r_{34\cdot1}-r_{23\cdot1}\,r_{24\cdot1}}{\sqrt{[1-r^2_{23\cdot1}][1-r^2_{24\cdot1}]}}$$

$$r_{14\cdot32}=\frac{r_{14\cdot3}-r_{12\cdot3}\,r_{24\cdot3}}{\sqrt{[1-r^2_{12\cdot3}][1-r^2_{24\cdot3}]}}$$

$$r_{34\cdot21}=\frac{r_{34\cdot2}-r_{13\cdot2}\,r_{14\cdot2}}{\sqrt{[1-r^2_{13\cdot2}][1-r^2_{14\cdot2}]}}.$$

因此全部計算極爲麻煩,必須用一種便利法計算之。賀麟閣提議以對數法計算,並在其統計應用表中附有 $\log\sqrt{1-r^2}$,查起來極便,此表卽本書中之附表十二。

玆取一實際的問題以爲例;事實爲柏替 (Burt) 所得到的。在下面有四種特性,以

(1) 代表智齡,根據於比納量表之英國的訂正;

(2) 代表學業,根據於教齡;

(3) 代表柏氏的推理測驗之結果;

(4) 代表年齡。

此四種特性之相互相關及其對數如下:

$r_{21}=.91,\qquad \log .91=\overline{1}.9590,$

$\log\sqrt{1-.91^2}=\overline{1}.6176.$

$r_{13}=.84,\qquad \log .84=\overline{1}.9243,$

$\log\sqrt{1-.84^2}=\overline{1}.7345.$

$r_{14}=.83,\quad \log .83=\bar{1}.9191,$

$\log\sqrt{1-.83^2}=\bar{1}.7465.$

$r_{23}=.75,\quad \log .75=\bar{1}.8751,$

$\log\sqrt{1-.75^2}=\bar{1}.8205.$

$r_{24}=.87,\quad \log .87=\bar{1}.9395,$

$\log\sqrt{1-.87^2}=\bar{1}.6929.$

$r_{34}=.70,\quad \log .70=\bar{1}.8451,$

$\log\sqrt{1-.70^2}=\bar{1}.8538.$

有了以上各數,則求分析相關極便利了。玆以 $r_{12\cdot3}$ 爲例,說明其各步驟如下:

(a)先求 r_{13} r_{23} 之積的對數,即 $\bar{1}.9243+\bar{1}.8751=\bar{1}.7994$。antilog $\bar{1}.7994=.630$.

(b) $r_{12}-r_{13}r_{23}=.91-.63=.28$. log. $28=\bar{1}.4472$ (此爲公式上分子之對數。)

(c)公式中分母之對數爲 $\log\sqrt{1-r_{13}{}^2}+\log\sqrt{1-r_{23}{}^2}=\bar{1}.7345+\bar{1}.8205=\bar{1}.5550$.

(d) 1.4472−2

$$\begin{array}{r} 1.4472-2 \\ -\quad .5550-1 \\ \hline .8922-1 \end{array}$$

(e) antilog $\bar{1}.8922=.78$,此即 $r_{12\cdot3}$ 也。

其他第一級之分析相關結果見於下表:

表九十五　表示第一級分析相關係數之計算（仿自賀麟閣）

1			2	3	4	5	6		
零級之相關係數			分子積數	全部分子	全部分子的對數	全部分母的對數	第一級之相關係數		
標記	價值	$\log\sqrt{1-r^2}$					標記	對數	價值
12	.91	$\bar{1}.6176$	.630	.280	$\bar{1}.4472$	$\bar{1}.5550$	12.3	$\bar{1}.8922$	.780
13	.84	$\bar{1}.7345$	.683	.157	$\bar{1}.1959$	$\bar{1}.4381$	13.2	$\bar{1}.7575$	.573
23	.75	$\bar{1}.8205$	.764	-.014	$-(\bar{2}.1461)$	$\bar{1}.3521$	23.1	$-(\bar{2}.7940)$	-.062
12	.91	$\bar{1}.6176$	.722	.188	$\bar{1}.2742$	$\bar{1}.4394$	12.4	$\bar{1}.8348$	.684
14	.83	$\bar{1}.7465$	.792	.038	$\bar{2}.5798$	$\bar{1}.3105$	14.2	$\bar{1}.2693$	.186
24	.87	$\bar{1}.6929$	.755	.115	$\bar{1}.0607$	$\bar{1}.3641$	24.1	$\bar{1}.6966$	.497
13	.84	$\bar{1}.7345$	.581	.259	$\bar{1}.4133$	$\bar{1}.6003$	13.4	$\bar{1}.8130$	.650
14	.83	$\bar{1}.7465$	.588	.242	$\bar{1}.3838$	$\bar{1}.5883$	14.3	$\bar{1}.7955$	.624
34	.70	$\bar{1}.8538$	.697	.003	$\bar{3}.4771$	$\bar{1}.4810$	34.1	$\bar{3}.9961$	.010
23	.75	$\bar{1}.8205$	.609	.141	$\bar{1}.1492$	$\bar{1}.5467$	23.4	$\bar{1}.6025$	.400
24	.87	$\bar{1}.6929$	.525	.345	$\bar{1}.5378$	$\bar{1}.6743$	24.3	$\bar{1}.8635$	.730
34	.70	$\bar{1}.8538$	.653	.047	$\bar{2}.6721$	$\bar{1}.5134$	34.2	$\bar{1}.1587$	.144

由上表之結果觀之,我們可得下列若干之結論:

(a)比納量表所測量之能力與學業有密切之相關。即把柏氏測驗所測量之能力固定後,相關係數有 .78($r_{12\cdot3}$),即把年齡因子固定後,相關仍有 .68($r_{12\cdot4}$)。反之,把學業因子除去,比納量表與年齡之相關竟由 .83 落至 .19。

(b)柏氏測驗所測量之能力與學業毫無相關。原來的係數由於一種不純的因子,即比納量表所測量之能力;這種能力與兩者均有相關,均施正面之影響。所以把這種能力除去,柏氏測驗與學業之相關竟由 .75 落至 −.06($r_{23\cdot1}$)。

(c)柏氏測驗與比納量表所測量之能力則有相關;此兩種能力之相關既不由於學業($r_{13\cdot2}=.57$),又不由於年齡($r_{13\cdot4}=.65$)。所以柏替測驗所測量之能力實值得我們注意的;他自稱其結果爲智力之純粹的數量。

有了第一級各種分析相關係數後,我們可以計算所有第二級之相關了。求第二級之相關步驟與第一級大致相似。茲以 $r_{12\cdot34}$ 爲例,以說明之:

(c)先求分子中之積的對數,即 $\log r_{14\cdot3}+\log r_{24\cdot3}=\overline{1}.7955+\overline{1}.8635=\overline{1}.6590$。antilog $\overline{1}.6590=.456$

(b) $r_{12\cdot3}-r_{14\cdot3}\times r_{24\cdot3}=.780-.456=.324$, $\log .324=\overline{1}.5105$(公式上分子之對數)。

(c)公式中分母之對數爲 $\log\sqrt{1-r_{14\cdot3}}+\log\sqrt{1-r_{24\cdot3}}=\overline{1}.8929+\overline{1}.8347=\overline{1}.7276$

(d)
$$\begin{array}{rl} \log & 1.5105-2 \\ -\ \log & .7276-1 \\ \hline & .7829-1 \end{array}$$

(e) antilog $\overline{1}.7829=.607$

其他第二級之分析相關係數見下表。

表九十六 表示第二級分析相關係數之計算（仿自賀麟閣）

1			2	3	4	5	6		
第一級之相關係數			分子	全部	全部分子	全部分母	第二級之相關係數		
標記	價值	$\log\sqrt{1-r^2}$	積數	分子	的對數	的對數	標記	對數	價值
12.3	.780	$\bar{1}.7964$	.456	.324	$\bar{1}.5105$	$\bar{1}.7276$	12.34	$\bar{1}.7829$	.607
12.4	.684	$\bar{1}.8630$	.260	.424	$\bar{1}.6274$	$\bar{1}.8429$	12.43	$\bar{1}.7845$	.609
13.2	.573	$\bar{1}.9136$	.027	.546	$\bar{1}.7372$	$\bar{1}.9879$	13.24	$\bar{1}.7493$	.561
13.4	.650	$\bar{1}.8808$	.274	.376	$\bar{1}.5752$	$\bar{1}.8251$	13.42	$\bar{1}.7501$	.562
14.2	.186	$\bar{1}.9924$	.083	.103	$\bar{1}.0128$	$\bar{1}.9091$	14.23	$\bar{1}.1037$	.127
14.3	.624	$\bar{1}.8929$	.569	.055	$\bar{2}.7404$	$\bar{1}.6311$	14.32	$\bar{1}.1093$	.129
23.1	−.062	$\bar{1}.9992$	.005	−.067	$-(\bar{2}.8261)$	$\bar{1}.9384$	23.14	$-(\bar{2}.8877)$	−.077
23.4	.400	$\bar{1}.9621$	.445	−.045	$-(\bar{2}.6532)$	$\bar{1}.7438$	23.41	$-(\bar{2}.9094)$	−.081
24.1	.497	$\bar{1}.9384$	−.001	.498	$\bar{1}.6972$	$\bar{1}.9992$	24.13	$\bar{1}.6980$	.499
24.3	.730	$\bar{1}.8347$	.487	.243	$\bar{1}.3856$	$\bar{1}.6893$	24.31	$\bar{1}.6963$	.497
34.1	.010	0.0000	−.031	.041	$\bar{2}.6128$	$\bar{1}.9376$	34.12	$\bar{2}.6752$	.047
34.2	.144	$\bar{1}.9955$	.107	.037	$\bar{2}.5682$	$\bar{1}.9060$	34.21	$\bar{2}.6622$	.046

上表中有幾點須予以注意:

(a)在第二級相關係數項下,主要的註解一樣,次要的註解之數字的次序互換了,結果極相符合,如 $r_{12\cdot34}=.607$, $r_{12\cdot43}=.609$。兩數所根據之數完全不同,而結果相差極微,祇有 .002, 正證明優爾之主張。上表所有各對,均祇在小數後第三位略有相差,一望可知。

(b)把第二級相關係數略加分析,又重證明上面之結論。比納量表與學業有切實的相關,即把第3與4兩個因子除去後,係數仍有 .61。

(c)比納量表與柏替測驗亦有切實的相關,即把第2與4兩個因子除去後,係數仍有 .56。

(d)年齡與比納量表或柏氏測驗所測量之能力均無相關,且看 $r_{14\cdot23}=.13$, $r_{34\cdot12}=.05$。但學業則與年齡有正相關之傾向, $r_{24\cdot13}=.5$。

(e)柏氏測驗則與學業無關;把第1與2除去後,相關係數落至 $-.08$。

70. 三個變量之分析特性方程

在第十二章,對於兩個變量之預測公式是:

$$\overline{X}=k+b_1Y$$

或可改寫爲 $$\overline{X_1}=k_1+b_{12}X_2$$

於是根據這個方法,爲 X_1 從 $n-1$ 的變量中定一分析方程如下:

$$\overline{X_1}=k_1+b_{12\cdot34\cdots n}X_2+b_{13\cdot24\cdots n}X_3+\cdots+b_{1n\cdot23\cdots(n-1)}X_n \quad \text{公式八十三}$$

在上面公式中 b 和 k 都是常數,求 k 之公式如下:

$$k_1=M_1-b_{12\cdot34\cdots n}M_2-b_{13\cdot24\cdots n}M_3-\cdots-b_{1n\cdot23\cdots(n-1)}M_n \quad \text{公式八十四}$$

至於求 b 之公式如下:

$$b_{12\cdot34\cdots n}=r_{12\cdot34\cdots n}\frac{\sigma_{1\cdot34\cdots n}}{\sigma_{2\cdot34\cdots n}}\cdots\cdots\text{公式八十五}$$

至於求 $\sigma_{1\cdot23\cdots n}$ 之公式如下：

$$\sigma_{1\cdot23\cdots n}=\sigma_1\sqrt{(1-r_{12}{}^2)(1-r_{13\cdot2}{}^2)\cdots(1-r_{1n}{}^2{}_{\cdot23\cdots(n-1)})}\ \text{公式八十六}$$

至於估計之機誤公式是

$$P.E.\bar{X}_1=.6745/\sigma_{1\cdot23\cdots n}\cdots\cdots\text{公式八十七}$$

由上面幾個公式中看來，定一個分析特性方程異常麻煩，通常用之很少，其實這種工作極爲重要。茲舉一例以說明之：倘有以 X_1 代表效標 X_2 與 X_3 分別兩種測驗分數，而

$M_1=78,\quad \sigma_1=10.21,\quad r_{12}=.666,\quad r_{12\cdot3}=.3788,$

$M_2=87.2,\quad \sigma_2=6.02,\quad r_{13}=.750,\quad r_{13\cdot2}=.5719,$

$M_3=32.8,\quad \sigma_3=10.35,\quad r_{23}=.628.$

則 $\overline{X_1}=b_{12\cdot3}X_2+b_{13\cdot2}X_3+k_1$

$$=r_{12\cdot3}\frac{\sigma_{1\cdot3}}{\sigma_{2\cdot3}}X_2+r_{13\cdot2}\frac{\sigma_{1\cdot2}}{\sigma_{3\cdot2}}X_3+k_1$$

$$b_{12\cdot3}=r_{12\cdot3}\frac{\sigma_1\sqrt{1-r_{13}{}^2}}{\sigma_2\sqrt{1-r_{23}{}^2}}$$

$$\log b_{12\cdot3}=\log .3788+\log 10.21+\log\sqrt{1-(.750)^2}-\log 6.02-\log\sqrt{1-(.628)^2}=\bar{1}.5784+1.0090+\bar{1}.8205-0.7796-\bar{1}.8911=\bar{1}.7372$$

$$\text{antilog }\bar{1}.7372=.547\qquad \therefore b_{123}=546$$

$$b_{13\cdot 2}=r_{13\cdot 2}\frac{\sigma_1\sqrt{1-r_{12}{}^2}}{\sigma_3\sqrt{1-r_{23}{}^2}}$$

$\log b_{13\cdot 2} = \log .5719 + \log 10.21 + \log \sqrt{1-(.666)^2} -$

$\log 10.35 - \log \sqrt{1-(.628)^2} = \overline{1}.7573 + 1.0090$

$+ \overline{1}.8727 - 1.0149 - \overline{1}8911 = \overline{1}.7330.$ antilog $\overline{1}.7330$

$=.541 \qquad \therefore b_{13\cdot 2} = .541$

$k_1 = 78 - (.546\times 87.2) - (.541\times 32.8) = 12.65$

$X_1 = .546X_2 + .541X_3 + 12.65$

又 $\sigma_{1\cdot 23}=\sigma_1\sqrt{1-r_{12}{}^2}\ \sqrt{1-r_{13\cdot 2}{}^2}$

$=10.21\ \sqrt{1-(.666)^2}\ \sqrt{1-(.572)^2}.$

$\log \sigma_{1\cdot 23} = 1.0090 + 1.8727 + \overline{1}.91340 = \overline{1}.7957.$ antilog

$\overline{1}.2959 = 6.25.$

$P.E.\bar{X}_1 = .6745\ \sigma_{1\cdot 23}$

$=.6745\times 6.25=4.22$

故完全的分析特性方程是

$$\overline{X_1}=[.546\,X_2+.541\,X_3+12.65]\pm 4.22.$$

在上面計算法內，第一級分析相關係數已經求出。倘第一級相關係數未經求出，則我們亦可把公式略變一下，直接根據零級相關係數而定分析特性方程。我們知道

$$\overline{X_1}=b_{12\cdot 3}\,X_2+b_{13\cdot 2}\,X_3+k_1$$

$$=r_{12\cdot3}\frac{\sigma_{1\cdot3}}{\sigma_{2\cdot3}}X_2+r_{13\cdot2}\frac{\sigma_{1\cdot2}}{\sigma_{3\cdot2}}X_2+k_1$$

$$=\frac{r_{12}-r_{13}r_{23}}{\sqrt{1-r_{13}^2}\sqrt{1-r_{23}^2}}\times\frac{\sigma_1\sqrt{1-r_{13}^2}}{\sigma_2\sqrt{1-r_{23}^2}}\times X_2$$

$$+\frac{r_{13}-r_{12}r_{23}}{\sqrt{1-r_{12}^2}\sqrt{1-r_{23}^2}}\times\frac{\sigma_1\sqrt{1-r_{12}^2}}{\sigma_3\sqrt{1-r_{23}^2}}X_3+k_1$$

$$=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\frac{(r_{12}-r_{13}r_{23})}{(1-r_{23}^2)}X_2$$

$$+\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\frac{(r_{13}-r_{12}r_{23})}{(1-r_{23}^2)}X_3+k_1 \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式八十八(a)}$$

當然，$k_1=M_1-\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\frac{(r_{12}-r_{13}r_{23})}{(1-r_{23}^2)}M_2$

$$-\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\frac{(r_{13}-r_{12}r_{23})}{(1-r_{23}^2)}M_3 \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式八十九(a)}$$

$$\sigma_{1\cdot23}=\sigma_1\sqrt{1-r_{12}^2}\sqrt{1-r_{13\cdot2}^2}$$

$$=\sigma_1\sqrt{(1-r_{12}^2)\frac{[(1-r_{12}^2)(1-r_{23}^2)]-[r_{13}^2-2r_{12}r_{13}r_{23}+r_{12}^2r_{23}^2]}{(1-r_{12}^2)(1-r_{23}^2)}}$$

$$=\sigma_1\sqrt{\frac{1-r_{12}^2-r_{23}^2+r_{12}^2r_{23}^2-r_{13}^2+2r_{12}r_{13}r_{23}-r_{12}^2r_{23}^2}{1-r_{23}^2}}$$

$$=\sigma_1\sqrt{\frac{1-r_{12}^2-r_{13}^2-r_{23}^2+2r_{12}r_{13}r_{23}}{1-r_{23}^2}}$$

$$=\frac{\sigma_1\sqrt{S_{123}}}{\sqrt{1-r_{23}^2}} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式九十(a)}$$

$S_{123}=$ 分子之各項。若材料祇有零級相關係數，則定三個變量之分析特性方程時，可用公式八十八，八十九，九十，三個公式來計算，便利多了。

同樣地

$$\overline{X}_2=\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\frac{(r_{12}-r_{13}r_{23})}{(1-r_{13}{}^2)}X_1+\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\frac{(r_{23}-r_{12}r_{13})}{(1-r_{13}{}^2)}X_3+k_2 \quad \text{公式八十八(b)}$$

$$\overline{X}_3=\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\frac{(r_{13}-r_{12}r_{23})}{(1-r_{12}{}^2)}X_1+\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\frac{(r_{23}-r_{12}r_{13})}{(1-r_{12}{}^2)}X_2+k_3 \quad \text{公式八十八(c)}$$

$$k_2=M_2-\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\frac{(r_{12}-r_{13}r_{23})}{(1-r_{13}{}^2)}M_1$$

$$-\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\frac{(r_{23}-r_{12}r_{13})}{(1-r_{13}{}^2)}M_3 \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式八十九(b)}$$

$$k_3=M_3-\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\frac{(r_{13}-r_{12}r_{23})}{(1-r_{12}{}^2)}M_1$$

$$-\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\frac{(r_{23}-r_{12}r_{13})}{(1-r_{12}{}^2)}M_2 \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式八十九(c)}$$

$$\sigma_{2\cdot 13}=\sigma_2\sqrt{\frac{1-r_{12}{}^2-r_{13}{}^2-r_{23}{}^2+2r_{12}r_{13}r_{23}}{1-r_{13}{}^2}}$$

$$=\frac{\sigma_2\sqrt{S_{123}}}{\sqrt{1-r_{13}{}^2}} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式九十(b)}$$

$$\sigma_{3\cdot 12}=\sigma_3\sqrt{\frac{1-r_{12}{}^2-r_{13}{}^2-r_{23}{}^2+2r_{12}r_{13}r_{23}}{1-r_{12}{}^2}}$$

$$=\frac{\sigma_3\sqrt{S_{123}}}{\sqrt{1-r_{12}{}^2}} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式九十(c)}$$

71.四個變量之分析特性方程

若變量爲四個,則照公式八十三,必須算出第一級與第二級之相關係數,如下:

$$\overline{X}_1 = k_1 + b_{12\cdot 34} X_3 + b_{13\cdot 24} X_3 + b_{14\cdot 23} X_4$$

$$= r_{12\cdot 34}\frac{\sigma_{1\cdot 34}}{\sigma_{2\cdot 34}} X_2 + r_{13\cdot 24}\frac{\sigma_{1\cdot 24}}{\sigma_{3\cdot 24}} X_3 + r_{14\cdot 23}\frac{\sigma_{1\cdot 23}}{\sigma_{4\cdot 23}} X_4 + k_1$$

$\sigma_{1\cdot 34}$, $\sigma_{2\cdot 34}$ 等之求得,可依照九十改寫之。而

$$r_{12\cdot 34} = \frac{r_{12}(1-r_{34}^2) - r_{13}r_{23} - r_{14}r_{24} + r_{34}(r_{13}r_{24} + r_{14}r_{23})}{\sqrt{[1-r_{13}^2-r_{14}^2-r_{34}^2+2r_{13}r_{14}r_{34}][1-r_{23}^2-r_{24}^2-r_{34}^2+2r_{23}r_{24}r_{34}]}}$$

$$= \frac{S_{12\cdot 34}}{\sqrt{S_{134}S_{234}}} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式九十一(a)}$$

$$r_{13\cdot 24} = \frac{r_{13}(1-r_{24}^2) - r_{12}r_{23} - r_{14}r_{34} + r_{24}(r_{12}r_{34} + r_{14}r_{23})}{\sqrt{[1-r_{12}^2-r_{14}^2-r_{24}^2+2r_{12}r_{14}r_{24}][1-r_{23}^2-r_{24}^2-r_{34}^2+2r_{23}r_{24}r_{34}]}}$$

$$= \frac{S_{13\cdot 24}}{\sqrt{S_{124}S_{234}}} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式九十一(b)}$$

$$r_{14\cdot 23} = \frac{r_{14}(1-r_{23}^2) - r_{12}r_{24} - r_{13}r_{34} + r_{23}(r_{12}r_{34} + r_{13}r_{24})}{\sqrt{[1-r_{12}^2-r_{13}^2-r_{23}^2+2r_{12}r_{13}r_{23}][1-r_{23}^2-r_{24}^2-r_{34}^2+2r_{23}r_{24}r_{34}]}}$$

$$= \frac{S_{14\cdot 23}}{\sqrt{S_{123}S_{234}}} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式九十一(c)}$$

以公式九十與九十一代入公式八十五內,

$$b_{12\cdot34}=\frac{S_{12\cdot34}}{\sqrt{S_{134}S_{234}}}\times\frac{\dfrac{\sigma_1\sqrt{S_{134}}}{\sqrt{1-r_{34}{}^2}}}{\dfrac{\sigma_2\sqrt{S_{234}}}{\sqrt{1-r_{34}{}^2}}}=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\,\frac{S_{12\cdot34}}{S_{234}}\quad\cdots\cdots\text{公式九十二(a)}$$

同樣地，

$$b_{13\cdot24}=\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\,\frac{S_{13\cdot24}}{S_{234}}\quad\cdots\cdots\text{公式九十二(b)}$$

$$b_{14\cdot23}=\frac{\sigma_1}{\sigma_4}\,\frac{S_{14\cdot23}}{S_{234}}\quad\cdots\cdots\text{公式九十二(c)}$$

以公式九十二代入公式八十三中，以計算四個變量之分析特性方程，實在便利多了。如此，所根據的相關悉是零級了。至於，

$$\sigma_{1\cdot234}=\frac{\sigma_1\sqrt{S_{123}S_{234}-S^2{}_{14\cdot23}}}{\sqrt{(1-r_{23}{}^2)S_{234}}}\quad\cdots\cdots\text{公式九十三(a)}$$

$$\sigma_{2\cdot134}=\frac{\sigma_2\sqrt{S_{123}S_{134}-S^2{}_{24\cdot13}}}{\sqrt{(1-r_{13}{}^2)S_{134}}}\quad\cdots\cdots\text{公式九十三(b)}$$

$$\sigma_{3\cdot124}=\frac{\sigma_3\sqrt{S_{123}S_{124}-S^2{}_{34\cdot12}}}{\sqrt{(1-r_{12}{}^2)S_{124}}}\quad\cdots\cdots\text{公式九十三(c)}$$

72. 分析特性方程在測驗上之應用—測驗分數之權

在測驗彙選中，卽將若干測驗集成一量表，各測驗與效標之相關並不一致，故各測驗之權亦不應一致。例如，有一團體智力量表，包括三個測驗，填數，常識，比喻，而效標爲陸志韋訂正比納西蒙智力測驗。倘我們以 1 代表效標，2 代表填數，3 代表常識，4 代表比喻，而我們求

出 $b_{12\cdot34}$，$b_{13\cdot24}$ 與 $b_{14\cdot23}$。如此，$b_{12\cdot34}$ 卽塡數測驗之權，$b_{13\cdot24}$ 卽常識測驗之權，$b_{14\cdot23}$ 卽比喻測驗之權。若

$$b_{12\cdot34}=7, \qquad b_{13\cdot24}=9; \qquad b_{14\cdot23}=6; \qquad k_1=14.$$

則

$$\overline{X}_1 = 7\,X_2 + 9\,X_3 + 6\,X_4 + 14.$$

倘一學生在塡數測驗中得 12 分，常識測驗中得 11 分，比喻測驗中得 14 分，則此學生之分數是 $(12\times7)+(11\times9)+(14\times6)+14=281$ 分。

測驗加權法有時是不關重要的。測驗結果大都注重於相對的地位，加權結果，很少能夠變更相對的地位。不過若一個量表各測驗，所測量的能力很不相同，那末加權方法是重要的。這種測驗不大多見。

73. 分析特性方程在應用時之限制

(一) 在計算分析相關之先，必須試驗零級係數之直線性。若原來的觀察的樣本不能以直線的函數代表之，則分析相關不能應用。

(二) 各級之相關係數或則太小，因此估計之機誤變大。這一點在公式八十六中可以看出來。

(三) 樣本中之人數太少，因此使特性係數卽 $b_{12\cdot34\cdots n}$ 不穩定。求 $b_{12\cdot34\cdots n}$ 之機誤公式如下：

$$P.E._{b_{12\cdot3\cdots n}} = .6745\,\frac{\sigma_{1\cdot23\cdots n}}{\sigma_{2\cdot34\cdots n}\sqrt{N}} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{公式九十四}$$

(四) 分析相關之公式不可用於那種材料，內中不純的因子有很大的參差情形。例如求音節高低之識別力和重量之識別力的相關時，九歲組之相關與十二歲組之相關大概是相似的；不過我們若合併九歲至十

二歲之材料而求一個相關，則必有大的變動，應用分析相關公式可以將不純的因子除去。但是我們若擴充至五歲組，則根據於五歲組的被試者所得的相關與根據於十二歲組所得的或有很大的區別。在此種情形下，我們最多希望任何普通的「眞正的」相關代表那眞正的「平均」相關。易言之，我們若把五歲至十二歲兒童之兩種能力分數合併求一相關，而再求其分析相關，則此分析相關之結果，變爲五歲，六歲，至十二歲等相關之平均相關。若以 P 代表音節識別力，W 代表重量識別力，A 代表年齡，1，2……12 代表各歲組。如此，r_{pw} (5)爲五歲組兒童之 P 與 W 的相關，r_{pw} (6) 爲六歲組之 P 與 W 的相關；餘類推；r_{pw} (9－12) 爲九歲至十二歲兒童之 P 與 W 的相關，$r_{pw \cdot A}$ (9－12) 爲九歲至十二歲兒童之 P 與 W 之分析相關，A 是一固定的因子；照斯皮門之意，r_{pw} (9)，r_{pw}(10)，r_{pw}(11)，r_{pw}(12) 是很類似的，所以 $r_{pw \cdot A}$ (9－12) 可用。惟 r_{pw}(5)，r_{pw}(6) …… r_{pw}(11)，r_{pw}(12) 或則有較大的相差，因此 $r_{pw \cdot A}$(5－12) 代表 r_{pw}(5) …… r_{pw} (12) 等數之平均。所以他以爲除去的因子若很差異時（在本例中，年齡之範圍太大），則分析相關不便應用了。r_{pw} (5)與 r_{pw} (12) 之不相似的原因或是很複雜的，抽樣不同其一也；其他因子混入其二也；參差程度變更其三也；而第三點尤爲重要。

74. 多數相關(multiple correlation)

多數相關是一個變量與許多變量的相關。設我們以 R 代表多數相關，以 1 代表學科之總平均，以 2 代表歷史，以 3 代表地理，以 4 代表國文，則 $R_{1(234)}$ 代表總平均與三門學科合併起來的相關。求 R 之

普通公式如下：

$$1-R^2_{1(234\cdots n)}=(1-r_{12}^2)(1-r_{13\cdot2})(1-r_{14\cdot23})\cdots(1-r^2_{1n\cdot23\cdots(n-1)})$$

……………………………………………………公式九十五

計算 R 時亦可用對數求之。附表十三卽爲 $\log(1-r^2)$。例如

$$r_{12}=.666 \qquad \log[1-(.666)^2]=\overline{1}.74542$$

$$r_{13\cdot2}=.572 \qquad \log[1-(.572)^2]=\overline{1}.82790$$

$$\log[1-R^2_{1(23)}]=\overline{1}.57332 \quad \text{antilog}=.3743$$

$$\therefore \quad R_1{}^2{}_{(23)}=.6257.$$

$$R_{1\,(23)}=.791.$$

若 $\sigma_{1\cdot234\cdots n}$ 之數業已求得到，則

$$R_{1(23\ldots n)}=\sqrt{1-\frac{\sigma_{1\cdot23\ldots n}}{\sigma_1{}^2}} \quad \text{……………………公式九十六}$$

以本例論，$\sigma_{1\cdot23}=6.248$，　$\sigma_1=10.21$.

$$R_{1(2\cdot3)}=\sqrt{1-\frac{(6.248)^2}{(10.21)^2}}$$

$$=\sqrt{1-\frac{39.04}{104.24}}$$

$$=.791.$$

由本例看來，$r_{12}=.666$，而 $R_{1(23)}=.791$，所增加之數，並不很大。但是求多數相關手續很煩，費了許多時間，求出差別不大，是否值得，實成問題。再則從公式九十五中可以看見，除非有某級係數等於零

之外，多數相關之係數總大於公式右方之各級係數。所以 $R_{1(23)}$ 必然大於 r_{12}，亦是我們所應注意的。雖然，多數相關之求得，對於訂定測驗計分法是有指示的，因爲可以使我們知道加權是否必要的。例如，在軍隊乙種測驗有八個測驗，這八個測驗之未加權的分數與斯旦福訂正比納測驗分數之相關爲 .728，而 $R_{s(12345678)}=.731$（S = 比納量表，1，2，…等代表乙種之各種測驗），可見加權沒有多大利益。倘未加權分數與效標之相關是 .4，則各測驗分數實有加權之必要。

公式與符號表

F_k　代表在全體中 K 組之次數

N　代表全體次數之總和

P_k　代表在全體中 K 組之成功機率

f_k　代表在樣本中 K 組之次數

n　代表樣本次數之總和

p_k　代表在樣本中 K 組之成功機率

X　量數或分數

f　次數

Σ　和號，希臘大寫字母之一，讀若 sigma

Σf　次數之和 $=N$

次數分配之修勻公式

$$A'=\frac{A+A+B}{3}\qquad B'=\frac{A+B+C}{3}$$

$$C'=\frac{B+C+D}{3}\qquad Z'=\frac{Y+Z+Z}{3}$$

百分位數之公式

$$P_p=\text{l. l.}+\left(\frac{\frac{pN}{100}-f_{up}}{f_p}\right)i \quad\cdots\cdots\cdots \text{公式一(a)}$$

$$P_p=\text{u. l.}-\left(\frac{\left(\frac{100-p}{100}\right)N-f_{do}}{f_p}\right)i \quad\cdots\cdots\cdots \text{公式一(b)}$$

P_p ＝所要求的百分位數

p　＝比 P_p 小的量數之百分比

l. l.＝含有 P_p (或 q_3，q_2，q_1)之組的下限度

$u.l.$ ＝含有 P_p (或 q_3，q_2，q_1)之組的上限度

f_{up} ＝含有 P_p (或 q_3，q_2，q_1)之組以上各組之次數和

f_{do} ＝含有 P_p (或 q_3，q_2，q_1)之組以下各組之次數和

f_p ＝含有 P_p 之組的次數

I ＝含有 P_p 之組之組距大小(或卽組距之大小)

百分位之公式

$$R_x = \frac{100}{N}\left(f_{up} + \frac{X - l.l.}{i} f_x\right) \quad \cdots\cdots\text{公式二}$$

R_x 某個分數之百分位

f_x 含有X組之次數

上下四分位之公式

$$q_1 = l.l. + \left(\frac{\frac{N}{4} - f_{up}}{f_{q_1}}\right) i \quad \cdots\cdots\text{公式三(a)}$$

$$q_1 = u.l. - \left(\frac{\frac{3N}{4} - f_{do}}{f_{q_1}}\right) i \quad \cdots\cdots\text{公式三(b)}$$

$$q_3 = l.l. + \left(\frac{\frac{3N}{4} - f_{up}}{f_{q_3}}\right) i \quad \cdots\cdots\text{公式四(c)}$$

$$q_3 = u.l. - \left(\frac{\frac{N}{4} - f_{do}}{f_{q_3}}\right) i \quad \cdots\cdots\text{公式四(d)}$$

q_1 ＝下四分位

f_{q_1} ＝含有 q_1 組之次數

q_3 ＝上四分位

f_{q_3} ＝含有 q_3 組之次數

中位數之公式

$$\text{Mdn 之位置} = \frac{N+1}{2} \quad \cdots\cdots \text{公式五}$$

$$\text{Mdn} = \text{l.l.} + \left(\frac{\frac{N}{2} - f_{up}}{f_{q_2}}\right) i \quad \cdots\cdots \text{公式六(a)}$$

$$\text{Mdn} = \text{u.l.} - \left(\frac{\frac{N}{2} - f_{do}}{f_{q_2}}\right) i \quad \cdots\cdots \text{公式六(b)}$$

Mdn ＝中位數

f_{q2} ＝含有 Mdn 或 q_2 組之次數

均數之公式

$$M = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots\cdots + X_n}{N} \quad \cdots\cdots \text{公式七(a)}$$

$$M = \frac{\Sigma X}{N} \quad \cdots\cdots \text{公式七(b)}$$

$$M = \frac{f_1X_1 + f_2X_2 + f_3X_3 + \cdots\cdots + f_nX_n}{N} \quad \cdots\cdots \text{公式七(c)}$$

$$M = \frac{\Sigma(fX)}{N} \quad \cdots\cdots \text{公式七(d)}$$

$$M = \frac{f_1\text{Mid}_1 + f_2\text{Mid}_2 + f_3\text{Mid}_3 + \cdots\cdots + f_n\text{Mid}_n}{N} \quad \cdots\cdots \text{公式七(e)}$$

$$M = \frac{\Sigma(f\ \text{Mid})}{N} \quad \cdots\cdots \text{公式七(f)}$$

$$M = M' + \frac{\Sigma(fx')}{N} \quad \cdots\cdots \text{公式七(g)}$$

$$M = M' + C \quad \cdots\cdots \text{公式七(h)}$$

$$M = M' + \frac{\Sigma\left(\frac{fx'}{i}\right)}{N}(i) \quad \cdots\cdots \text{公式七(i)}$$

M ＝均數

ΣX ＝量數之和

x ＝$(X-M)$ 或 $(X-Mdn)$ 量數與均數(或中位數)之差數

Σx ＝0 (差數須取於均數)

Mid＝組距中點

M' ＝假設均數

x' ＝$(X-M')$ 或 $(X-Mdn')$量數與假設均數(或假設中位數之差數)

c ＝$(\Sigma fx')/N$ 較正數

衆數之公式

$Mo = M - 3(M - Mdn)$

Mo ＝衆數

幾何均數之公式

$$G.M. = \sqrt[N]{X_1 \times X_2 \times X_3 \times \cdots\cdots \times X_n} \quad \text{……公式九(a)}$$

$$\log G.M. = \frac{1}{N}(\log X_1 + \log X_2 + \log X_3 + \cdots\cdots + \log X_n) \quad \text{……公式九(b)}$$

$$\log G.M. = \frac{\Sigma \log(X)}{N} \quad \text{……公式九(c)}$$

G. M.＝幾何均數

$$l = ar^{n-1} \quad \text{……公式十}$$

l ＝幾何數系中最後一數

a ＝第一數

r ＝平均比率或公比

調和均數之公式

$$H.M. = \frac{1}{\frac{1}{N}\left(\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{X_n}\right)} \quad \text{……公式十一(a)}$$

$$H.M. = \frac{1}{\frac{1}{N}\Sigma\left(\frac{1}{X}\right)} \quad \text{……公式十一(b)}$$

$$\frac{1}{H.M.}=\frac{1}{N}\Sigma\left(\frac{1}{X}\right)$$ ……公式十一(c)

$$H.\ M.=\frac{N}{\Sigma\left(\frac{1}{X}\right)}$$ ……公式十一(d)

$$M_r\ =1/(H.\ M._t)$$ ……公式十二

$$M_t\ =1/(H.\ M._r)$$ ……公式十三

$$H.\ M.=\frac{1}{\frac{1}{N}\left(\frac{f_1}{X_1}+\frac{f_2}{X_2}+\cdots\cdots+\frac{f_n}{x_n}\right)}$$ ……公式十四

H.M. =調和均數

M_r =時間固定,求速率之均數。

M_t =工作固定,求時間之均數。

$H.M._r$=工作固定,求速率之均數。

$H.M._t$=時間固定,求時間之均數。

四分位差之公式

$$Q=\frac{q_3-q_1}{2}$$ ……公式十五(a)

Q =四分位差

中位差之公式

$$M.\ D.=\frac{|x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_n|}{N}$$ ……公式十六(a)

$$M.\ D.=\frac{\Sigma|x|}{N}$$ ……公式十六(b)

$$M.\ D.=\frac{|f_1x_1+f_2x_2+f_3x_3+\cdots\cdots+f_nx_n|}{N}$$ ……公式十六(c)

$$M.\ D.=\frac{\Sigma|fx|}{N}$$ ……公式十六(d)

$$\text{M. D.}=\frac{\Sigma\left|\frac{fx'}{i}\right|+(\text{Mdn}-\text{Mdn}')(N_a-N_b)}{N}(i)\cdots\cdots\text{公式十六(e)}$$

$$\text{M. D.}=\frac{\Sigma\left|\frac{fx'}{i}\right|+c(N_a-N_b)+(.25+c^2)N_i}{N}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式十六(f)}$$

M. D.＝中位差

Mdn′ ＝假設中數,含有 Mdn 之組之組距中點。

x' ＝組距中點與 Mdn′ 之差。

N_a ＝比 Mdn 小的各組之次數和。

N_b ＝比 Mdn 大的各組之次數和。

$c=\frac{\text{Mdn}-\text{Mdn}'}{i}$

N_i ＝含有 Mdn 之組之次數

$|\ |$ ＝不計符號

標準差之公式

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式十七(a)}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma x'^2}{N}-\left(\frac{\Sigma x'}{N}\right)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式十七(b)}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{N(\Sigma X^2)-(\Sigma X)^2}{N^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式十七(c)}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N}-M^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式十七(d)}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\overset{N}{(\quad)}[110\overset{\text{子}}{(\quad)}+11\overset{\text{卯}}{(\quad)}-10\overset{\text{辰}}{(\quad)}]-[10\overset{\text{丑}}{(\quad)}\overset{\text{寅}}{(\quad)}]^2}{\underset{N}{(\quad)}}}\cdots\text{公式十七(e)}$$

σ ＝標準差

$x' = (X - M') =$ 量數或組距中點與假設均數之差數

差異數之公式

$$V = 100 \frac{\sigma}{M} \quad \text{......} \quad \text{公式十八(a)}$$

$$V = 100 \frac{M.D.}{Mdn} \quad \text{......} \quad \text{公式十八(b)}$$

V = 差異係數

偏態性之測量的公式

$$SK = \frac{M - Mo}{\sigma} \quad \text{......} \quad \text{公式十九(a)}$$

$$SK = \frac{3(M - Mdn)}{\sigma} \quad \text{......} \quad \text{公式十九(b)}$$

$$SK = \frac{(q_3 - Mdn) - ((Mdn - q_1)}{Q} \quad \text{......} \quad \text{公式十九(c)}$$

$$SK = \frac{q_1 + q_3 - 2Mdn}{Q} \quad \text{......} \quad \text{公式十九(d)}$$

SK = 偏態性

比較量數節中所用之公式

$$X_1 = \frac{M_1}{M_2} X_2 \quad \text{或} \quad X_2 = \frac{M_2}{M_1} X_1 \quad \text{......} \quad \text{公式二十(a)}$$

$$\frac{X_1}{M_1} = \frac{X_2}{M_2} \quad \text{......} \quad \text{公式二十(b)}$$

$$\frac{M_1}{\sigma_1} = \frac{M_2}{\sigma_2} \quad \text{......} \quad \text{公式二十一}$$

$$\frac{x_1}{\sigma_1}=\frac{x_2}{\sigma_2}$$ ……公式二十二(a)

$$X_1=M_1+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(X_2-M_2)$$ ……公式二十二(b)

$$X_2=M_2+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(X_1-M_1)$$ ……公式二十二(c)

二項展開式章所用之公式

$$(Q+P)^N={}^NC_0Q^N+{}^NC_1Q^{N-1}P+{}^NC_2Q^{N-2}P^2+{}^NC_3Q^{N-3}P^3+\cdots\cdots+{}^NC_NP^N$$ ……公式二十三

$$M=NP$$ ……公式二十四

$$\sigma=\sqrt{NPQ}$$ ……公式二十五

P ＝成功的機率

Q ＝失敗的機率

C ＝組合之數

常態曲線章所用之公式

$$y_x=y_0e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$ ……公式二十六(a)

$$y_x=\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$ ……公式二十六(b)

$$z=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$$ ……公式二十六(c)

$$y_0=\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$ ……公式二十七(a)

$$y_0=\frac{N}{2.506627\sigma}$$ ……公式二十七(b)

y_0 ＝平均縱線（卽最高之縱線）

y_x ＝圖內之縱線

z ＝常態曲線中之縱線，面積與標準差均以 1 爲單位表示之

e ＝2.71828，Napierian 對數底數

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{f(N-f)}{N}} \quad \text{…………公式二十八}$$

$$\chi^2 = \Sigma\frac{(m'-m)^2}{m} \quad \text{…………公式二十九}$$

σ_s ＝抽樣之標準誤

m' ＝觀察得來的次數

m ＝理論的次數

χ ＝讀若 chi

$$_1\overline{x}_2 = \frac{z_1 - z_2}{_1n_2} \quad \text{…………公式三十}$$

$$\frac{_1\overline{x}_2}{\sigma} = \frac{z_1 - z_2}{\frac{_1f_2}{N}} \quad \text{…………公式三十一}$$

z_1 ＝x_1 之縱線

z_2 ＝x_2 之縱線

$_1n_2$ ＝兩條縱線間之面積

$_1\overline{x}_2$ ＝兩條縱線間之均數

抽樣的信度之各種公式

$$\sigma_M = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad \text{…………公式三十二(a)}$$

$$P.E._M = .6745\ \sigma_M \quad \text{…………公式三十二(b)}$$

$$\sigma_{Mdn} = 1.25331\ \sigma_M \quad \text{…………公式三十三(c)}$$

$P.E._{Mdn}=0.84535\ \sigma_M$ 或 $1.25331\ P.E._M$ …………………… 公式三十三(d)

$\sigma_{quartiles}=1.36263\ \sigma_M$ …………………… 公式三十四(a)

$P.E._{quartiles}=0.91908\ \sigma_M$ …………………… 公式三十四(b)

$\sigma_{deciles\ 4\ and\ 6}=1.26804\ \sigma_M$ …………………… 公式三十五(a)

$P.E._{deciles\ 4\ and\ 6}=.85528\ \sigma_M$ …………………… 公式三十五(b)

$\sigma_{deciles\ 3\ and\ 7}=1.31800\ \sigma_M$ …………………… 公式三十五(c)

$P.E._{deciles\ 3\ and\ 7}=0.88897\ \sigma_M$ …………………… 公式三十五(d)

$\sigma_{deciles\ 2\ and\ 8}=1.42877\ \sigma_M$ …………………… 公式三十五(e)

$P.E._{deciles\ 2\ and\ 8}=0.96369\ \sigma_M$ …………………… 公式三十五(f)

$\sigma_{deciles\ 1\ and\ 9}=1.70942\ \sigma_M$ …………………… 公式三十五(g)

$P.E._{deciles\ 1\ and\ 9}=1.15298\ \sigma_M$ …………………… 公式三十五(h)

$\sigma_\sigma=\frac{\sigma}{\sqrt{2N}}$ …………………… 公式三十六(a)

$P.E._\sigma=.6745\ \sigma_\sigma \doteq .4769\ \sigma_M=.7071\ P.E._M$ …………………… 公式三十六(b)

$P.E._V=\frac{.6745\ V}{\sqrt{2\ N}}\left\{1+2\left(\frac{V}{100}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$ …………………… 公式三十七

$\sigma_{A-B}=\sqrt{\sigma_A{}^2+\sigma_B{}^2}$ …………………… 公式三十八(a)

$P.E._{A-B}=\sqrt{(P.E._A)^2+(P.E._B)^2}$ …………………… 公式三十八(b)

$P.E._{M_1-M_2}=\sqrt{(P.E._{M_1})^2+(P.E._{M_2})^2}$ …………………… 公式三十八(c)

相關之公式

$r=\frac{\Sigma xy}{N\ \sigma_x\sigma_y}$ …………………… 公式三十九(a)

$r=\frac{\Sigma xy}{\sqrt{(\Sigma x^2)\ (\Sigma y^2)}}$ …………………… 公式三十九(b)

$$r=\frac{\Sigma x'y'-NC_xC_y}{\sqrt{(\Sigma x'^2-NC_x^2)-(\Sigma y^2-NC_y^2)}}$$ ……公式三十九(c)

$$r=\frac{\Sigma XY-NM_xM_y}{\sqrt{(\Sigma X^2-NM_x^2)(\Sigma Y^2-NM_y^2)}}$$ ……公式三十九(d)

$$r=\frac{\Sigma x^2+\Sigma y^2-\Sigma v^2}{2\sqrt{(\Sigma x^2)(\Sigma y^2)}}$$ ……公式三十九(e)

$$r=\frac{N\,\Sigma XY-(\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[N\,\Sigma X^2-(\Sigma X)^2][N\Sigma Y^2-(\Sigma Y)^2]}}$$ ……公式三十九(f)

$$r=\frac{(\Sigma X^2+\Sigma Y^2-\Sigma V^2)-\frac{2(\Sigma X)(\Sigma Y)}{N}}{\sqrt{\left[\Sigma X^2-\frac{(\Sigma X)^2}{N}\right]\left[\Sigma Y^2-\frac{(\Sigma Y)^2}{N}\right]}}$$ ……公式三十九(g)

$$r=\frac{\Sigma fx'y'-NC_xC_y}{(\Sigma fx'^2-NC_x^2)(\Sigma fy'^2-NC_y^2)}$$ ……公式三十九(h)

r =積差相關係數

X =一個變量

Y =另一個變量,餘類推

$$\sigma_r=\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$$ ……公式四十(a)

$P.E._r=.6745\ \sigma_r$ ……公式四十(b)

$$\overline{x}=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y=b_1y$$ ……公式四十一(a)

$$\overline{y}=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x=b_2x$$ ……公式四十一(b)

$\overline{X}=M_x-b_1M_y+b_1Y=K_1+b_1Y$ ……公式四十一(c)

$\overline{Y}=M_y-b_2M_x+b_2X=K_2+b_2X$ ……公式四十一(d)

$\overline{X}$, $\overline{Y}$=估計的 X 或 Y

$b_1 = r\,\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}$

$b_2 = r\,\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$

$k_1 = M_X - b_1 M_Y$

$k_2 = M_Y - b_2 M_X$

$S_{\bar{x}} = \sigma_x\sqrt{1-r^2}$ ……………………………………公式四十二(a)

$S_{\bar{y}} = \sigma_y\sqrt{1-r^2}$ ……………………………………公式四十二(c)

$P.E._{\bar{x}} = .6745\ S_x$ ……………………………………公式四十二(b)

$P.E._{\bar{y}} = .6745\ S_y$ ……………………………………公式四十二(d)

S_x =估計的 X 之標準誤

S_y =估計的 Y 之標準誤

$r_{nn} = \dfrac{n r_{1I}}{1+(n-1)r_{1I}}$ ……………………………………公式四十三

r_{1I} =已求得的信度係數

r_{nn} =增加 n 倍後之信度係數

n =增加的倍數

$r_{cx} = \sqrt{\dfrac{r_{xy}\ r_{xz}}{r_{yz}}}$ ……………………………………公式四十四

r_{xy} =測驗與一個效標之相關

r_{xz} =測驗與另一個效標之相關

r_{yz} =兩個效標之相關

r_{cx} =效度係數

$r_{cn} = \dfrac{n r_{cx}}{n+n(n-1)r_{1I}}$ ……………………………………公式四十五

r_{cn} =測驗加長後之信度係數

$z_1 = s + e_1$ ……………… 公式四十六(a)

$z_I = s + e_I$ ……………… 公式四十六(b)

$z_2 = t + e_2$ ……………… 公式四十六(c)

$z_{II} = t + e_{II}$ ……………… 公式四十六(d)

z_1, z_I, z_2, z_{II} 分別代表兩類 X_1 與兩類 X_2 測驗之標準數。

e_1, e_I, e_2, e_{II} 分別代表兩類 X_1 與兩類 X_2 測驗中之反應差誤。

s 與 t 分別代表 X_1 與 X_2 測驗中,一個人之平均的或眞正的分數。

$\sigma_{e_1} = \sqrt{1 - r_{1I}}$ ……………… 公式四十七(a)

$\sigma_{e_1} = \sigma_{x_1}\sqrt{1 - r_{1I}}$ ……………… 公式四十七(b)

$P.E._{e_1} = .6745\ \sigma_{e_1}$ ……………… 公式四十七(c)

$\sigma_{(e_1 - e_2)} = \sqrt{2 - r_{1I} - r_{2II}}$ ……………… 公式四十八(a)

$P.E._{(\text{每個人之 } z_1 - z_2)} = .6745\sqrt{2 - r_{1I} - r_{2II}}$ ……………… 公式四十八(b)

$\sigma_s = \sigma_{x_1}\sqrt{r_{1I}}$ ……………… 公式四十九

$$r_{xy} = \frac{(r_{x_1y_1}\ r_{x_2y_2}\ r_{x_1y_2}\ r_{x_2y_1})^{\frac{1}{4}}}{(r_{x_1x_2}\ r_{y_1y_2})^{\frac{1}{2}}}$$

非直線相關之公式

$\eta_{yx} = 1 - \dfrac{\sigma_{ay}^2}{\sigma_Y^2}$ ……………… 公式五十一(a)

$\eta_{xy} = 1 - \dfrac{\sigma_{ax}^2}{\sigma_X^2}$ ……………… 公式五十一(b)

η = 相關比

σ_{ay}, σ_{ax} 是相關表中各列或各排的標準差之均數

$\sigma_{ay}^2 = \dfrac{\Sigma(nS_{ay}^2)}{N}$ ……………… 公式五十二(a)

$$\sigma_{ax}{}^2 = \frac{\Sigma(nS_{ax}{}^2)}{N}$$ ……公式五十二(b)

n ＝各行之次數

N ＝全表之次數

S_{ax}, S_{ay} 任何 X 或 Y 行之標準差

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\bar{y}_x}}{\sigma_Y}$$ ……公式五十三(a)

$$\eta_{xy} = \frac{\sigma_{\bar{x}_y}}{\sigma_X}$$ ……公式五十三(b)

$\sigma_{\bar{x}_y}$ 與 $\sigma_{\bar{y}_x}$ 是各行的均數之標準差

$$\eta_{xy} = \frac{\left(\frac{\Sigma\left[\frac{(\Sigma' f_{xy} x')^2}{f_y}\right]}{N} - C_x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{\Sigma f_x x'^2}{N} - C_x^2}}$$ ……公式五十四(a)

$$\eta_{yx} = \frac{\left(\frac{\Sigma\left[\frac{(\Sigma' f_{xy} y')^2}{f_x}\right]}{N} - C_y^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{\Sigma f_y y'^2}{N} - C_y^2}}$$ ……公式五十四(b)

$$P.E._\eta = .6745 \frac{(1-\eta^2)}{\sqrt{N}}$$ ……公式五十五

直線性之試驗公式

$$P.E._\delta = \frac{2(.6745)}{\sqrt{N}} \sqrt{(\eta^2 - r^2)\{(1-\eta^2)^2 - (1-r^2)^2 + 1\}}$$ ……公式五十六

$\delta = \eta^2 - r^2$

$$\eta^2 - r^2 < \frac{4.047}{\sqrt{N}} \sqrt{(\eta^2 - r^2)\{(1-\eta^2)^2 - (1-r^2)^2 + 1\}}$$ ……公式五十七(a)

$\sqrt{N}\ \sqrt{\eta^2 - r^2} < 4.047$ ……公式五十七(b)

等級相關

$$\rho = 1 - \frac{6\ \Sigma D^2}{N(N^2 - 1)}$$ ……公式五十八

ρ ＝等級相關係數

D ＝ X 項等級與 Y 項等級之相差

$$R = 1 - \frac{6\ \Sigma G}{(n^2 - 1)}$$ ……公式五十九

R ＝相關符號

G ＝ X 項等級與 Y 項等級之相差，即 X－Y 或 Y－X，(G 即 Gain 乃盈餘之意故 G 祇計正號)

$$r = 2 \sin \frac{\pi}{6} \rho$$ ……公式六十

$$r = 2 \cos \frac{\pi}{3} (1 - R) - 1$$ ……公式六十一

$$P.E._\rho = .6745 \frac{(1 - \rho^2)}{\sqrt{N}}$$ ……公式六十二(a)

$$P.E._\rho = .7063 \frac{1 - r^2}{\sqrt{N}}$$ ……公式六十二(b)

質量相關之公式

$$r = \frac{\Sigma f x'(\overline{Y}_x - M_y) i_x}{N \sigma_X \sigma_Y}$$ ……公式六十三(a)

$$r = \frac{\Sigma f_y'(\overline{X}_Y - M_X) i_y}{N \sigma_X \sigma_X}$$ ……公式六十三(b)

$\overline{Y}_X$ 與 $\overline{X}_Y$ ＝各列或各排之均數

i_x 與 i_y ＝ X 分配與 Y 分配的組距

$$r = \frac{\Sigma f y'\left(\frac{\bar{x}_y}{\sigma_x}\right) i_x}{N\sigma_y} \quad \text{……公式六十四}$$

$$_c r_{xy} = \frac{\Sigma f_{xy} \frac{N}{f_x f_y}(Z_s - Z_{s+1})(Z'_s - Z'_{s+1})}{\left[\Sigma \frac{N}{f_x}(Z_s - Z_s{+}_1)^2\right]\left[\Sigma \frac{N}{f_y}(Z'_s - Z'_{s+1})^2\right]} \quad \text{……公式六十五}$$

$_c r_{xy}$ 爲廣類分組之改正的相關係數

Z 與 Z′ 代表 Y 與 X 的分配圖中各段之分界的縱線

質量相關比

$$\eta_{xy} = \left[\frac{\frac{\Sigma f_y \bar{x}_y^{\,2}}{N}}{\sigma_X}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{\Sigma f_y\left(\frac{\bar{x}_y}{\sigma_x}\right)^2}{N}\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{……公式六十六(a)}$$

$$\eta_{yx} = \left[\frac{\Sigma f_x\left(\frac{\bar{y}_x}{\sigma_x}\right)^2}{N}\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{……公式六十六(b)}$$

$$_c\eta_{yx} = \frac{\eta_{yx}}{r_{xc}} \quad \text{……公式六十七}$$

$$r_{xc} = \sqrt{\Sigma \frac{N}{f_x}(Z_s - Z_{s+1})^2} \quad \text{……公式六十八}$$

r_{xc} ＝一種變量 x 與其組的價值之相關

二項數列相關係數

$$r_{Bis} = \frac{\overline{Y}_2 - \overline{Y}_1}{\sigma_y}\left(\frac{pq}{Z}\right) \quad \text{……公式六十九}$$

$\overline{Y}_1$，$\overline{Y}_2$ 代表均數

$p=\frac{n_2}{N}$　　$q=\frac{n_1}{N}$　　n_1 與 n_2 兩項之次數和

$$P.E._{(bis\ r)}=.6745\frac{\sqrt{\frac{pq}{Z^2}}-r^2}{\sqrt{N}}$$ ……公式七十

相聯係數

$$Q=\frac{ad-bc}{ad+bc}$$ ……公式七十一

Q ＝相聯係數

a，b，c，d 代表四格表內各格之次數。

綜合係數

$$\omega=\frac{\sqrt{ad}-\sqrt{bc}}{\sqrt{ad}+\sqrt{bc}}$$ ……公式七十二

ω（讀若 omega）＝綜合係數

餘弦 π 法

$$r=\cos\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{ad}+\sqrt{bc}}\pi$$ ……公式七十三

異號法

$$r=\cos\frac{U}{L+U}\pi$$ ……公式七十四（a）

$$r=\cos\frac{b+c}{a+b+c+d}$$ ……公式七十四（b）

U ＝異號

L ＝同號

$$P.E. = \sin\left[.1686\,\pi\,(1-r^2)\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\right]$$ ……………公式七十五

相依係數

$$\phi^2 = \frac{\chi^2}{N} = \frac{1}{N}\Sigma\left[\frac{\left(f_{xy}-\frac{f_x f_y}{N}\right)^2}{\frac{f_x f_y}{N}}\right]$$ ……………公式七十六

ϕ 讀若 phi 爲均方相依函數

$$c = \sqrt{\frac{\phi}{1+\phi^2}} = \sqrt{\frac{\chi^2}{N+\chi^2}}$$ ……………公式七十七

c ＝均方相依係數

$$c = \sqrt{\frac{S'-N}{S'}}$$ ……………公式七十八(a)

$$c = \sqrt{\frac{S-1}{S}}$$

$$S = \Sigma\left(\frac{f^2_{xy}}{\frac{f_x f_y}{N}}\right)$$

$$S = \Sigma\left(\frac{f^2_{xy}}{f_x f_y}\right)$$

$${}_cC = \frac{C}{r_{xc}\ r_{yc}}$$ ……………公式七十九

分析與多數相關

$$r_{12\cdot 3}=\frac{r_{12}-r_{13}r_{23}}{\sqrt{[1-r_{13}^2][1-r_{23}^2]}}$$ ……公式八十

$$r_{12\cdot 34}=\frac{r_{12\cdot 3}-r_{14\cdot 3}r_{24\cdot 3}}{\sqrt{[1-r^2_{14\cdot 3}][1-r^2_{24\cdot 3}]}}$$ ……公式八十一

$$r_{12\cdot 34\cdots n}=\frac{r_{12\cdot 34\cdots(n-1)}-r_{1n\cdot 34\cdots(n-1)}\,r_{2n\cdot 34\cdots(n-1)}}{\sqrt{[1-r^2_{1n\cdot 34\cdots(n-1)}]\,[1-r^2_{2n\cdot 34\cdots(n-1)}]}}$$ ……公式八十二

$r_{12\cdot 34\cdots n}$ 分析相關係數

$$\overline{X}_1=k_1+b_{12\cdot 34\cdots n}X_2+b_{13\cdot 24\cdots n}X_3+\cdots+b_{1n\cdot 23\cdots(n-1)}X_n$$ …公式八十三

$$k_1=M_1-b_{12\cdot 34\cdots n}M_2-b_{13\cdot 24\cdots n}M_3-\cdots-b_{1n\cdot 23\cdots(n-1)}M_n$$ …公式八十四

$$b_{12\cdot 34\cdots n}=r_{12\cdot 34\cdots n}\frac{\sigma_{1\cdot 34\cdots n}}{\sigma_{2\cdot 34\cdots n}}$$ ……公式八十五

$$\sigma_{1\cdot 23\cdots n}=\sigma_1\sqrt{(1-r^2_{12})(1-r^2_{13\cdot 2})\cdots(1-r^2_{1n\cdot 23\cdots(n-1)})}$$ … 公式八十六

$$P.E._{\bar{x}_1}=.6745\,\sigma_{1\cdot 23\cdots n}$$ ……公式八十七

$$\overline{X}_1=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\frac{(r_{12}-r_{13}r_{23})}{(1-r_{23}^2)}X_2+\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\frac{(r_{13}-r_{12}r_{23})}{(1-r_{23}^2)}X_3+k_1$$ ……公式八十八(a)

$$\overline{X}_2=\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\frac{(r_{12}-r_{13}r_{23})}{(1-r_{13}^2)}X_1+\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\frac{(r_{23}-r_{12}r_{13})}{(1-r_{13}^2)}X_3+k_2$$ ……公式八十八(b)

$$\overline{X}_3=\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\frac{(r_{13}-r_{12}r_{23})}{(1-r_{12}^2)}X_1+\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\frac{(r_{23}-r_{12}r_{13})}{(1-r_{12}^2)}X_2+k_3$$ ……公式八十八(c)

$$k_1 = M_1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\,\frac{(r_{12}-r_{13}r_{23})}{(1-r_{23}{}^2)}M_2$$

$$-\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\,\frac{(r_{13}-r_{12}r_{23})}{(1-r_{23}{}^2)}M_3$$ ……公式八十九(a)

$$k_2 = M_2 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\,\frac{(r_{12}-r_{13}r_{23})}{(1-r_{13}{}^2)}M_1$$

$$-\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\,\frac{(r_{23}-r_{12}r_{13})}{(1-r_{13}{}^2)}M_3$$ ……公式八十九(b)

$$k_3 = M_3 - \frac{\sigma_3}{\sigma_1}\,\frac{(r_{13}-r_{12}r_{23})}{(1-r_{12}{}^2)}M_1$$

$$-\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\,\frac{(r_{23}-r_{12}r_{13})}{(1-r_{12}{}^2)}M_2$$ ……公式八十九(c)

$$\sigma_{1\cdot23} = \frac{\sigma_1\sqrt{S_{123}}}{\sqrt{1-r_{23}{}^2}}$$ ……公式九十(a)

$$\sigma_{2\cdot13} = \frac{\sigma_2\sqrt{S_{123}}}{\sqrt{1-r_{13}{}^2}}$$ ……公式九十(b)

$$\sigma_{3\cdot12} = \frac{\sigma_3\sqrt{S_{123}}}{\sqrt{1-r_{12}{}^2}}$$ ……公式九十(c)

$$S_{123} = \sqrt{1-r_{12}{}^2-r_{13}{}^2-r_{23}{}^2+2r_{12}r_{13}r_{23}}$$

$$r_{12\cdot34} = \frac{S_{12\cdot34}}{\sqrt{S_{134}S_{234}}}$$ ……公式九十一(a)

$$r_{13\cdot24} = \frac{S_{13\cdot24}}{\sqrt{S_{124}S_{234}}}$$ ……公式九十一(b)

$$r_{14\cdot23}=\frac{S_{14\cdot23}}{\sqrt{S_{123}S_{234}}}$$ ……公式九十一(c)

$$S_{124}=\sqrt{1-r_{12}{}^2-r_{14}{}^2-r_{24}{}^2+2r_{12}r_{14}r_{24}}$$

$$S_{134}=\sqrt{1-r_{13}{}^2-r_{14}{}^2-r_{34}{}^2+2r_{13}r_{14}r_{34}}$$

$$S_{234}=\sqrt{1-r_{23}{}^2-r_{24}{}^2-r_{34}{}^2+2r_{23}r_{24}r_{34}}$$

$$S_{12\cdot34}=r_{12}(1-r_{34}{}^2)-r_{13}r_{23}-r_{14}r_{24}+r_{34}(r_{13}r_{24}+r_{14}r_{23})$$

$$S_{13\cdot24}=r_{13}(1-r_{24}{}^2)-r_{12}r_{23}-r_{14}r_{34}+r_{24}(r_{12}r_{34}+r_{14}r_{23})$$

$$S_{14\cdot23}=r_{14}(1-r_{23}{}^2)-r_{12}r_{24}-r_{13}r_{34}+r_{23}(r_{12}r_{34}+r_{13}r_{24})$$

$$b_{12\cdot34}=\frac{S_{12\cdot34}}{S_{234}}\ \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$ ……公式九十二(a)

$$b_{13\cdot24}=\frac{S_{13\cdot24}}{S_{234}}\ \frac{\sigma_1}{\sigma_3}$$ ……公式九十二(b)

$$b_{14\cdot23}=\frac{S_{14\cdot23}}{S_{234}}\ \frac{\sigma_1}{\sigma_4}$$ ……公式九十二(c)

$$\sigma_{1\cdot234}=\frac{\sigma_1\sqrt{S_{123}S_{234}-S^2{}_{14\cdot23}}}{\sqrt{(1-r_{23}{}^2)\ S_{234}}}$$ ……公式九十三(a)

$$\sigma_{2\cdot134}=\frac{\sigma_2\sqrt{S_{123}S_{134}-S^2{}_{24\cdot13}}}{\sqrt{(1-r_{13}{}^2)\ S_{134}}}$$ ……公式九十三(b)

$$\sigma_{3\cdot124}=\frac{\sigma_3\sqrt{S_{123}S_{124}-S^2{}_{34\cdot12}}}{\sqrt{(1-r_{12}{}^2)\ S_{124}}}$$ ……公式九十三(c)

$$\text{P.E.}_{\ b_{12\cdot34\cdots n}}=.6745\ \frac{\sigma_{1\cdot34\cdots n}}{\sigma_{2\cdot34\cdots n}\sqrt{N}}$$ ……公式九十四

$$1-R^2{}_{1(234\cdots n)}=(1-r_{12}{}^2)(1-r_{13\cdot 2}{}^2)(1-r^2{}_{14\cdot 23}\cdots$$

$$\cdots(1-r^2{}_{1n\cdot 23\cdots(n-1)})\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式九十五}$$

$$R_{1(234\cdots n)}=\sqrt{1-\frac{\sigma_{1\cdot 23\cdots n}}{\sigma_1{}^2}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{公式九十六}$$

附表一　常態曲線之縱線

我們知道 $y_x=y_0 e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$，若 y_0 與 σ 均假設為 1，則 y_x 可用本表求之。例如 $x=1.0\sigma$ 時，$y_x=.60653$。$x=1.05\sigma$ 時，則 $y_x=.57623$。因此，若 $y_0=100$，則在 1.0σ 之 $y_x=60.653$，在 1.05σ 之 $y_x=57.623$。餘類推。至於 y_0 之公式是

$$y_0=\frac{N}{2.5066\,\sigma}$$

x/σ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	100000	99995	99980	99955	99920	99875	99820	99755	99685	99596
0.1	99501	99396	99283	99158	99025	98881	98728	98565	98393	98211
0.2	98020	97819	97609	97390	97161	96923	96676	96420	96156	95882
0.3	95600	95309	95010	94702	94387	94355	93723	93382	93024	92677
0.4	92312	91399	91558	91169	90774	90371	89961	89543	89119	88688
0.5	88250	87805	87353	86896	86432	85962	85488	85006	84519	84060
0.6	83527	83023	82514	82010	81481	80957	80409	79896	79359	78817
0.7	78270	77721	77167	76610	76048	75484	74916	74342	73769	73193
0.8	72615	72033	71448	70861	70272	69681	69087	68493	67896	67298
0.9	66689	66097	65494	64891	64287	63683	63077	62472	61865	61259
1.0	60653	60047	59440	58834	58228	57623	57017	56414	55810	55209
1.1	54607	54007	53409	52812	52214	51620	51027	50437	49848	49260
1.2	48675	48092	47511	46933	46357	45783	45212	44644	44078	43516
1.3	42956	42399	41845	41294	40747	40202	39661	39123	38569	38058
1.4	37531	37007	36487	35971	35459	34950	34445	33944	33447	32954
1.5	32465	31980	31500	31023	30550	30082	29618	29158	28702	28251
1.6	27804	27361	26923	26489	26059	25634	25213	24797	24385	23978
1.7	23575	23176	22782	22392	22008	21627	21251	20879	20511	20148
1.8	19790	19436	19086	18741	18400	18064	17732	17404	17081	16762
1.9	16448	16137	15831	15530	15232	14939	14650	14364	14083	13806
2.0	13534	13265	13000	12740	12483	12230	11981	11737	11496	11259
2.1	11025	10795	10570	10347	10129	09914	09702	09495	09290	09090
2.2	08892	08698	08507	08320	08136	07956	07778	07604	07433	07265
2.3	07100	06939	06780	06624	06471	06321	06174	06029	05888	05750
2.4	05614	05481	05350	05222	05096	04973	04852	04734	04618	04505
2.5	04394	04285	04179	04074	03972	03873	03775	03680	03586	03494
2.6	03405	03317	03232	03148	03066	02986	02908	02831	02757	02684
2.7	02612	02542	02474	02408	02343	02280	02218	02157	02098	02040
2.8	01984	01929	01876	01823	01772	01723	01674	01627	01581	01536
2.9	01492	01449	01408	01367	01328	01288	01252	01215	01179	01145
3.0	01111	00819	00598	00432	00309	00219	00153	00106	00073	00050
4.0	00034	00022	00015	00010	00006	00004	00003	00002	00001	00001
5.0	00000									

在本表中平均縱線(y_0)之高度為 100000；若假設為 1，則一律須加小數點。

本表採自朱君毅　教育統計學　附表一

附表二 常態曲線之面積

常態曲線之全部面積若等於 100%，則面積從 $x/\sigma = 0$ 至所求的 x/σ 止可用本表求之。例如，$x/\sigma = .3\sigma$ 時，則自 $x = 0\sigma$ 至 $x = .3\sigma$ 內所包括之面積 $= 11.79\%$；又如 $x/\sigma = 1.97$ 時，則自 $x=0\sigma$ 起至 $x=1.97\sigma$ 止，內中所包括之面積 $=47.58\%$，本表祇算至 3.09σ 止。

x/σ	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0.1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0.2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0.3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0.4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0.5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0.6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0.7	2580	2611	2642	2673	2703	2734	2764	2794	2823	2852
0.8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0.9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1.0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1.1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1.2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1.3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1.4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1.5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1.6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1.7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1.8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1.9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2.0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2.1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2.2	4861	4864	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2.3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2.4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2.5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2.6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2.7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2.8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2.9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3.0	4987	4987	4987	4988	4988	4989	4989	4989	4990	4990

本表中小數點未註明。

本表採自朱君毅 教育統計學 附表二

附表三　常態曲線之面積與縱線

本表與附表一不同之處,是附表一假設 y_0 與 σ 均爲1,而本表中則假設 N 與 σ 均爲1,因此

$$y_0=\frac{1}{2.506627}=.3989$$

本表之用法,先決定了所求的差數(x),則在第二行中所得之數爲從 $x=0\ \sigma$ 至所求的 x/σ 內之面積,第三行之數爲該點之縱線之高度。故第二行之數與附表二相同,而第三行數與附表一不同。

例如 $x=1.00\ \sigma$ 時,則自 $x=0\ \sigma$ 至 $x=1.00\ \sigma$ 內之面積 $=34.13\%$;在 $1.00\ \sigma$ 之 $y_x=.2420$

本表採自 Holzinger, K. J., Statistical Tables for Students in Education and Psychology, Table XI, pp. 70—71.

x/σ	從 x/σ =0 至所求的x/σ 之面積	在所求的x/σ之縱線	x/σ	從 x/σ =0 至所求的x/σ 之面積	在所求的x/σ之縱線	x/σ	從 x/σ =0 至所求的x/σ 之面積	在所求的x/σ之縱線	x/σ	從 x/σ =0 至所求的x/σ 之面積	在所求的x/σ之縱線
.00	.0000	.3989	**.25**	.0987	.3867	**.50**	.1915	.3521	**.75**	.2734	.3011
.01	.0040	.3989	**.26**	.1026	.3857	**.51**	.1950	.3503	**.76**	.2764	.2989
.02	.0080	.3989	**.27**	.1064	.3847	**.52**	.1985	.3485	**.77**	.2794	.2966
.03	.0120	.3988	**.28**	.1103	.3836	**.53**	.2019	.3467	**.78**	.2823	.2943
.04	.0160	.3986	**.29**	.1141	.3825	**.54**	.2054	.3448	**.79**	.2852	.2920
.05	.0199	.3984	**.30**	.1179	.3814	**.55**	.2088	.3429	**.80**	.2881	.2897
.06	.0239	.3982	**.31**	.1217	.3802	**.56**	.2123	.3410	**.81**	.2910	.2874
.07	.0279	.3980	**.32**	.1255	.3790	**.57**	.2157	.3391	**.82**	.2939	.2850
.08	.0319	.3977	**.33**	.1293	.3778	**.58**	.2190	.3372	**.83**	.2967	.2827
.09	.0359	.3973	**.34**	.1331	.3765	**.59**	.2224	.3352	**.84**	.2995	.2803
.10	.0398	.3970	**.35**	.1368	.3752	**.60**	.2257	.3332	**.85**	.3023	.2780
.11	.0438	.3965	**.36**	.1406	.3739	**.61**	.2291	.3312	**.86**	.3051	.2756
.12	.0478	.3961	**.37**	.1443	.3725	**.62**	.2324	.3292	**.87**	.3078	.2732
.13	.0517	.3956	**.38**	.1480	.3712	**.63**	.2357	.3271	**.88**	.3106	.2709
.14	.0557	.3951	**.39**	.1517	.3697	**.64**	.2389	.3251	**.89**	.3133	.2685
.15	.0596	.3945	**.40**	.1554	.3683	**.65**	.2422	.3230	**.90**	.3159	.2661
.16	.0636	.3939	**.41**	.1591	.3668	**.66**	.2454	.3209	**.91**	.3186	.2637
.17	.0675	.3932	**.42**	.1628	.3653	**.67**	.2486	.3187	**.92**	.3212	.2613
.18	.0714	.3925	**.43**	.1664	.3637	**.68**	.2517	.3166	**.93**	.3238	.2589
.19	.0753	.3918	**.44**	.1700	.3621	**.69**	.2549	.3144	**.94**	.3264	.2565
.20	.0793	.3910	**.45**	.1736	.3605	**.70**	.2580	.3123	**.95**	.3289	.2541
.21	.0832	.3902	**.46**	.1772	.3589	**.71**	.2611	.3101	**.96**	.3315	.2516
.22	.0871	.3894	**.47**	.1808	.3572	**.72**	.2642	.3079	**.97**	.3340	.2492
.23	.0910	.3885	**.48**	.1844	.3555	**.73**	.2673	.3056	**.98**	.3365	.2468
.24	.0948	.3876	**.49**	.1879	.3538	**.74**	.2703	.3034	**.99**	.3389	.2444

附　表　三　(續)

x/σ	從 x/σ = 0 至所求的x/σ之面積	在所求的x/σ之縱線	x/σ	從 x/σ = 0 至所求的x/σ之面積	在所求的x/σ之縱線	x/σ	從 x/σ = 0 至所求的x/σ之面積	在所求的x/σ之縱線	x/σ	從 x/σ = 0 至所求的x/σ之面積	在所求的x/σ之縱線
1.00	.3413	.2420	**1.40**	.4192	.1497	**1.80**	.4641	.0790	**2.20**	.4861	.0355
1.01	.3438	.2396	**1.41**	.4207	.1476	**1.81**	.4649	.0775	**2.21**	.4864	.0347
1.02	.3461	.2371	**1.42**	.4222	.1456	**1.82**	.4656	.0761	**2.22**	.4868	.0339
1.03	.3485	.2347	**1.43**	.4236	.1435	**1.83**	.4664	.0748	**2.23**	.4871	.0332
1.04	.3508	.2323	**1.44**	.4251	.1415	**1.84**	.4671	.0734	**2.24**	.4875	.0325
1.05	.3531	.2299	**1.45**	.4265	.1394	**1.85**	.4678	.0721	**2.25**	.4878	.0317
1.06	.3554	.2275	**1.46**	.4279	.1374	**1.86**	.4686	.0707	**2.26**	.4881	.0310
1.07	.3577	.2251	**1.47**	.4292	.1354	**1.87**	.4693	.0694	**2.27**	.4884	.0303
1.08	.3599	.2227	**1.48**	.4306	.1334	**1.88**	.4699	.0681	**2.28**	.4887	.0297
1.09	.3621	.2203	**1.49**	.4319	.1315	**1.89**	.4706	.0669	**2.29**	.4890	.0290
1.10	.3643	.2179	**1.50**	.4332	.1295	**1.90**	.4713	.0656	**2.30**	.4893	.0283
1.11	.3665	.2155	**1.51**	.4345	.1276	**1.91**	.4719	.0644	**2.31**	.4896	.0277
1.12	.3686	.2131	**1.52**	.4357	.1257	**1.92**	.4726	.0632	**2.32**	.4898	.0270
1.13	.3708	.2107	**1.53**	.4370	.1238	**1.93**	.4732	.0620	**2.33**	.4901	.0264
1.14	.3729	.2083	**1.54**	.4382	.1219	**1.94**	.4738	.0608	**2.34**	.4904	.0258
1.15	.3749	.2059	**1.55**	.4394	.1200	**1.95**	.4744	.0596	**2.35**	.4906	.0252
1.16	.3770	.2036	**1.56**	.4406	.1182	**1.96**	.4750	.0584	**2.36**	.4909	.0246
1.17	.3790	.2012	**1.57**	.4418	.1163	**1.97**	.4756	.0573	**2.37**	.4911	.0241
1.18	.3810	.1989	**1.58**	.4429	.1145	**1.98**	.4761	.0562	**2.38**	.4913	.0235
1.19	.3830	.1965	**1.59**	.4441	.1127	**1.99**	.4767	.0551	**2.39**	.4916	.0229
1.20	.3849	.1942	**1.60**	.4452	.1109	**2.00**	.4772	.0540	**2.40**	.4918	.0224
1.21	.3869	.1919	**1.61**	.4463	.1092	**2.01**	.4778	.0529	**2.41**	.4920	.0219
1.22	.3888	.1895	**1.62**	.4474	.1074	**2.02**	.4783	.0519	**2.42**	.4922	.0213
1.23	.3907	.1872	**1.63**	.4484	.1057	**2.03**	.4788	.0508	**2.43**	.4925	.0208
1.24	.3925	.1849	**1.64**	.4495	.1040	**2.04**	.4793	.0498	**2.44**	.4927	.0203
1.25	.3944	.1826	**1.65**	.4505	.1023	**2.05**	.4798	.0488	**2.45**	.4929	.0198
1.26	.3962	.1804	**1.66**	.4515	.1006	**2.06**	.4803	.0478	**2.46**	.4931	.0194
1.27	.3980	.1781	**1.67**	.4525	.0989	**2.07**	.4808	.0468	**2.47**	.4932	.0189
1.28	.3997	.1758	**1.68**	.4535	.0973	**2.08**	.4812	.0459	**2.48**	.4934	.0184
1.29	.4015	.1736	**1.69**	.4545	.0957	**2.09**	.4817	.0449	**2.49**	.4936	.0180
1.30	.4032	.1714	**1.70**	.4554	.0940	**2.10**	.4821	.0440	**2.50**	.4938	.0175
1.31	.4049	.1691	**1.71**	.4564	.0925	**2.11**	.4826	.0431	**2.51**	.4940	.0171
1.32	.4066	.1669	**1.72**	.4573	.0909	**2.12**	.4830	.0422	**2.52**	.4941	.0167
1.33	.4082	.1647	**1.73**	.4582	.0893	**2.13**	.4834	.0413	**2.53**	.4943	.0163
1.34	.4099	.1626	**1.74**	.4591	.0878	**1.14**	.4838	.0404	**2.54**	.4945	.0158
1.35	.4115	.1604	**1.75**	.4599	.0863	**2.15**	.4842	.0395	**2.55**	.4946	.0154
1.36	.4131	.1582	**1.76**	.4608	.0848	**2.16**	.4846	.0387	**2.56**	.4948	.0151
1.37	.4147	.1561	**1.77**	.4616	.0833	**2.17**	.4850	.0379	**2.57**	.4949	.0147
1.38	.4162	.1539	**1.78**	.4625	.0818	**2.18**	.4854	.0371	**2.58**	.4951	.0143
1.39	.4177	.1518	**1.79**	.4633	.0804	**2.19**	.4857	.0363	**2.59**	.4952	.0139

附表三 (續)

x/σ	從 x/σ = 0 至所求的 x/σ 之面積	在所求的 x/σ 之縱線	x/σ	從 x/σ = 0 至所求的 x/σ 之面積	在所求的 x/σ 之縱線	x/σ	從 x/σ = 0 至所求的 x/σ 之面積	在所求的 x/σ 之縱線	x/σ	從 x/σ = 0 至所求的 x/σ 之面積	在所求的 x/σ 之縱線
2.60	.4953	.0136	**2.95**	.4984	.0051	**3.30**	.4995	.0017	**3.65**	.4999	.0005
2.61	.4955	.0132	**2.96**	.4985	.0050	**3.31**	.4995	.0017	**3.66**	.4999	.0005
2.62	.4956	.0129	**2.97**	.4985	.0048	**3.32**	.4995	.0016	**3.67**	.4999	.0005
2.63	.4957	.0126	**2.98**	.4986	.0047	**3.33**	.4996	.0016	**3.68**	.4999	.0005
2.64	.4959	.0122	**2.99**	.4986	.0046	**3.34**	.4996	.0015	**3.69**	.4999	.0004
2.65	.4960	.0119	**3.00**	.4987	.0044	**3.35**	.4996	.0015	**3.70**	.4999	.0004
2.66	.4961	.0116	**3.01**	.4987	.0043	**3.36**	.4996	.0014	**3.71**	.4999	.0004
2.67	.4962	.0113	**3.02**	.4987	.0042	**3.37**	.4996	.0014	**3.72**	.4999	.0004
2.68	.4963	.0110	**3.03**	.4988	.0040	**3.38**	.4996	.0013	**3.73**	.4999	.0004
2.69	.4964	.0107	**3.04**	.4988	.0039	**3.39**	.4997	.0013	**3.74**	.4999	.0004
2.70	.4965	.0104	**3.05**	.4989	.0038	**3.40**	.4997	.0012	**3.75**	.4999	.0004
2.71	.4966	.0101	**3.06**	.4989	.0037	**3.41**	.4997	.0012	**3.76**	.4999	.0003
2.72	.4967	.0099	**3.07**	.4989	.0036	**3.42**	.4997	.0012	**3.77**	.4999	.0003
2.73	.4968	.0096	**3.08**	.4990	.0035	**3.43**	.4997	.0011	**3.78**	.4999	.0003
2.74	.4969	.0093	**3.09**	.4990	.0034	**3.44**	.4997	.0011	**3.79**	.4999	.0003
2.75	.4970	.0091	**3.10**	.4990	.0033	**3.45**	.4997	.0010	**3.80**	.4999	.0003
2.76	.4971	.0088	**3.11**	.4991	.0032	**3.46**	.4997	.0010	**3.81**	.4999	.0003
2.77	.4972	.0086	**3.12**	.4991	.0031	**3.47**	.4997	.0010	**3.82**	.4999	.0003
2.78	.4973	.0084	**3.13**	.4991	.0030	**3.48**	.4997	.0009	**3.83**	.4999	.0003
2.79	4974	.0081	**3.14**	.4992	.0029	**3.49**	.4998	.0009	**3.84**	.4999	.0003
2.80	.4974	.0079	**3.15**	.4992	.0028	**3.50**	.4998	.0009	**3.85**	.4999	.0002
2.81	.4975	.0077	**3.16**	.4992	.0027	**3.51**	.4998	.0008	**3.86**	.4999	.0002
2.82	.4976	.0075	**3.17**	.4992	.0026	**3.52**	.4998	.0008	**3.87**	.4999	.0002
2.83	.4977	.0073	**3.18**	.4993	.0025	**3.53**	.4998	.0008	**3.88**	.4999	.0002
2.84	.4977	.0071	**3.19**	.4993	.0025	**3.54**	.4998	.0008	**3.89**	.4999	.0002
2.85	.4978	.0069	**3.20**	.4993	.0024	**3.55**	.4998	.0007	**3.90**	.5000	.0002
2.86	.4979	.0067	**3.21**	.4993	.0023	**3.56**	.4998	.0007	**3.91**	.5000	.0002
2.87	.4979	.0065	**3.22**	.4994	.0022	**3.57**	.4998	.0007	**3.92**	.5000	.0002
2.88	.4980	.0063	**3.23**	.4994	.0022	**3.58**	.4998	.0007	**3.93**	.5000	.0002
2.89	.4981	.0061	**3.24**	.4994	.0021	**3.59**	.4998	.0006	**3.94**	.5000	.0002
2.90	.4981	.0060	**3.25**	.4994	.0020	**3.60**	.4998	.0006	**3.95**	.5000	.0002
2.91	.4982	.0058	**3.26**	.4994	.0020	**3.61**	.4998	.0006	**3.96**	.5000	.0002
2.92	.4982	.0056	**3.27**	.4995	.0019	**3.62**	.4999	.0006	**3.97**	.5000	.0002
2.93	.4983	.0055	**3.28**	.4995	.0018	**3.63**	.4999	.0005	**3.98**	.5000	.0001
2.94	.4984	.0053	**3.29**	.4995	.0018	**3.64**	.4999	.0005	**3.99**	.5000	.0001

附表四 常態曲線之差數與縱線

本表與上表所根據之公式相同，惟由面積而求差數與縱線耳。例如面積 = 1%，則差數 (x) = .0251 σ，此點之 y_x = .3988。又如面積 = 25 %，則 x = .6745 σ 此點之 y_x = .3178。

本表採自 Holzinger, K. J., Statistical Tables for Students in Education and Psychology, TableXII, pp. 72—74.

面積從 x/σ=0	x/σ	在所求的x/σ之縱線	面積從 x/σ=0	x/σ	在所求的x/σ之縱線	面積從 x/σ=0	x/σ	在所求的x/σ之縱線	面積從 x/σ=0	x/σ	在所求的x/σ之縱線
.000	0.0000	.3989	**.035**	0.0878	.3974	**.070**	0.1764	.3928	**.105**	0.2663	.3850
.001	0.0025	.3989	**.036**	0.0904	.3973	**.071**	0.1789	.3926	**.106**	0.2689	.3848
.002	0.0050	.3989	**.037**	0.0929	.3972	**.072**	0.1815	.3924	**.107**	0.2715	.3845
.003	0.0075	.3989	**.038**	0.0954	.3971	**.073**	0.1840	.3922	**.108**	0.2741	.3842
.004	0.0100	.3989	**.039**	0.0979	.3970	**.074**	0.1866	.3921	**.109**	0.2767	.3840
.005	0.0125	.3989	**.040**	0.1004	.3969	**.075**	0.1891	.3919	**.110**	0.2793	.3837
.006	0.0150	.3989	**.041**	0.1030	.3968	**.076**	0.1917	.3917	**.111**	0.2819	.3834
.007	0.0175	.3989	**.042**	0.1055	.3967	**.077**	0.1942	.3915	**.112**	0.2845	.3831
.008	0.0201	.3989	**.043**	0.1080	.3966	**.078**	0.1968	.3913	**.113**	0.2871	.3828
.009	0.0226	.3988	**.044**	0.1105	.3965	**.079**	0.1993	.3911	**.114**	0.2898	.3825
.010	0.0251	.3988	**.045**	0.1130	.3964	**.080**	0.2019	.3909	**.115**	0.2924	.3823
.011	0.0276	.3988	**.046**	0.1156	.3963	**.081**	0.2045	.3907	**.116**	0.2950	.3820
.012	0.0301	.3988	**.047**	0.1181	.3962	**.082**	0.2070	.3905	**.117**	0.2976	.3817
.013	0.0326	.3987	**.048**	0.1206	.3961	**.083**	0.2096	.3903	**.118**	0.3002	.3814
.014	0.0351	.3987	**.049**	0.1231	.3959	**.084**	0.2121	.3901	**.119**	0.3029	.3811
.015	0.0376	.3987	**.050**	0.1257	.3958	**.085**	0.2147	.3899	**.120**	0.3055	.3808
.016	0.0401	.3986	**.051**	0.1282	.3957	**.086**	0.2173	.3896	**.121**	0.3081	.3804
.017	0.0426	.3986	**.052**	0.1307	.3955	**.087**	0.2198	.3894	**.122**	0.3107	.3801
.018	0.0451	.3985	**.053**	0.1332	.3954	**.088**	0.2224	.3892	**.123**	0.3134	.3798
.019	0.0476	.3985	**.054**	0.1358	.3953	**.089**	0.2250	.3890	**.124**	0.3160	.3795
.020	0.0502	.3984	**.055**	0.1383	.3951	**.090**	0.2275	.3887	**.125**	0.3186	.3792
.021	0.0527	.3984	**.056**	0.1408	.3950	**.091**	0.2301	.3885	**.126**	0.3213	.3789
.022	0.0552	.3983	**.057**	0.1434	.3949	**.092**	0.2327	.3883	**.127**	0.3239	.3786
.023	0.0577	.3983	**.058**	0.1459	.3947	**.093**	0.2353	.3881	**.128**	0.3266	.3782
.024	0.0602	.3982	**.059**	0.1484	.3946	**.094**	0.2378	.3878	**.129**	0.3292	.3779
.025	0.0627	.3982	**.060**	0.1510	.3944	**.095**	0.2404	.3876	**.130**	0.3319	.3776
.026	0.0652	.3981	**.061**	0.1535	.3943	**.096**	0.2430	.3873	**.131**	0.3345	.3772
.027	0.0677	.3980	**.062**	0.1560	.3941	**.097**	0.2456	.3871	**.132**	0.3372	.3769
.028	0.0702	.3980	**.063**	0.1586	.3940	**.098**	0.2482	.3868	**.133**	0.3398	.3766
.029	0.0728	.3979	**.064**	0.1611	.3938	**.099**	0.2508	.3866	**.134**	0.3425	.3762
.030	0.0753	.3978	**.065**	0.1637	.3936	**.100**	0.2533	.3863	**.135**	0.3451	.3759
.031	0.0778	.3977	**.066**	0.1662	.3935	**.101**	0.2559	.3861	**.136**	0.3478	.3755
.032	0.0803	.3977	**.067**	0.1687	.3933	**.102**	0.2585	.3858	**.137**	0.3505	.3752
.033	0.0828	.3976	**.068**	0.1713	.3931	**.103**	0.2611	.3856	**.138**	0.3531	.3748
.034	0.0853	.3975	**.069**	0.1738	.3930	**.104**	0.2637	.3853	**.139**	0.3558	.3745

附 表 四 (續)

面積從 $x/\sigma=0$	x/σ	在所求的 x/σ 之縱線	面積從 $x/\sigma=0$	x/σ	在所求的 x/σ 之縱線	面積從 $x/\sigma=0$	x/σ	在所求的 x/σ 之縱線	面積從 $x/\sigma=0$	x/σ	在所求的 x/σ 之縱線
.140	0.3585	.3741	.185	0.4817	.3552	.230	0.6128	.3306	.275	0.7554	.2999
.141	0.3611	.3738	.186	0.4845	.3548	.231	0.6158	.3300	.276	0.7588	.2992
.142	0.3638	.3734	.187	0.4874	.4543	.232	0.6189	.3294	.277	0.7621	.2984
.143	0.3665	.3730	.188	0.4902	.3538	.233	0.6219	.3288	.278	0.7655	.2976
.144	0.3692	.3727	.189	0.4930	.3533	.234	0.6250	.3282	.279	0.7688	.2969
.145	0.3719	.3723	.190	0.4959	.3528	.235	0.6280	.3275	.280	0.7722	.2961
.146	0.3745	.3719	.191	0.4987	.3523	.236	0.6311	.3269	.281	0.7756	.2953
.147	0.3772	.3715	.192	0.5015	.3518	.237	0.6341	.3263	.282	0.7790	.2945
.148	0.3799	.3712	.193	0.5044	.3513	.238	0.6372	.3256	.283	0.7824	.2938
.149	0.3826	.3708	.194	0.5072	.3508	.239	0.6403	.3250	.284	0.7858	.2930
.150	0.3853	.3704	.195	0.5101	.3503	.240	0.6433	.3244	.285	0.7892	.2922
.151	0.3880	.3700	.196	0.5129	.3498	.241	0.6464	.3237	.286	0.7926	.2914
.152	0.3907	.3696	.197	0.5158	.3493	.242	0.6495	.3231	.287	0.7961	.2906
.153	0.3934	.3692	.198	0.5187	.3487	.243	0.6526	.3224	.288	0.7995	.2898
.154	0.3961	.3688	.199	0.5215	.3482	.244	0.6557	.3218	.289	0.8030	.2890
.155	0.3989	.3684	.200	0.5244	.3477	.245	0.6588	.3211	.290	0.8064	.2882
.156	0.4016	.3680	.201	0.5273	.3472	.246	0.6620	.3204	.291	0.8099	.2874
.157	0.4043	.3676	.202	0.5302	.3466	.247	0.6651	.3198	.292	0.8134	.2866
.158	0.4070	.3672	.203	0.5330	.3461	.248	0.6682	.3191	.293	0.8169	.2858
.159	0.4097	.3668	.204	0.5359	.3456	.249	0.6713	.3184	.294	0.8204	.2849
.160	0.4125	.3664	.205	0.5388	.3450	.250	0.6745	.3178	.295	0.8239	.2841
.161	0.4152	.3660	.206	0.5417	.3445	.251	0.6776	.3171	.296	0.8274	.2833
.162	0.4179	.3656	.207	0.5446	.3440	.252	0.6808	.3164	.297	0.8310	.2825
.163	0.4207	.3652	.208	0.5476	.3434	.253	0.6840	.3157	.298	0.8345	.2816
.164	0.4234	.3647	.209	0.5505	.3429	.254	0.6871	.3151	.299	0.8381	.2808
.165	0.4261	.3643	.210	0.5534	.3423	.255	0.6903	.3144	.300	0.8416	.2800
.166	0.4289	.3639	.211	0.5563	.9417	.256	0.6935	.3137	.301	0.8452	.2791
.167	0.4316	.3635	.212	0.5592	.3412	.257	0.6967	.3130	.302	0.8488	.2783
.168	0.4344	.3630	.213	0.5622	.3406	.258	0.6999	.3123	.303	0.8524	.2774
.169	0.4372	.3626	.214	0.5651	.3401	.259	0.7031	.3116	.304	0.8560	.2766
.170	0.4399	.3621	.215	0.5681	.3395	.260	0.7063	.3109	.305	0.8596	.2757
.171	0.4427	.3617	.216	0.5710	.3389	.261	0.7095	.3102	.306	0.8633	.2748
.172	0.4454	.3613	.217	0.5740	.3384	.262	0.7128	.3095	.307	0.8669	.2740
.173	0.4482	.3608	.218	0.5769	.3378	.263	0.7160	.3087	.308	0.8705	.2731
.174	0.4510	.3604	.219	0.5799	.3372	.264	0.7192	.3080	.309	0.8742	.2722
.175	0.4538	.3599	.220	0.5828	.3366	.265	0.7225	.3073	.310	0.8779	.2714
.176	0.4565	.3595	.221	0.5858	.3360	.266	0.7257	.3066	.311	0.8816	.2705
.177	0.4593	.3590	.222	0.5888	.3354	.267	0.7290	.3058	.312	0.8853	.2696
.178	0.4621	.3585	.223	0.5918	.3349	.268	0.7323	.3051	.313	0.8890	.2687
.179	0.4649	.3581	.224	0.5948	.3343	.269	0.7356	.3044	.314	0.8927	.2678
.180	0.4677	.3576	.225	0.5978	.3337	.270	0.7388	.3036	.315	0.8965	.2669
.181	0.4705	.3571	.226	0.6008	.3331	.271	0.7421	.3029	.316	0.9002	.2660
.182	0.4733	.3567	.227	0.6038	.3325	.272	0.7454	.3022	.317	0.9040	.2651
.183	0.4761	.3562	.228	0.6068	.3319	.273	0.7488	.3014	.318	0.9078	.2642
.184	0.4789	.3557	.229	0.6098	.3313	.274	0.7521	.3007	.319	0.9116	.2633

附 表 四 (續)

面積從 x/σ=0	x/σ	在所求的x/σ之縱線	面積從 x/σ=0	x/σ	在所求的x/σ之縱線	面積從 x/σ=0	x/σ	在所求的x/σ之縱線	面積從 x/σ=0	x/σ	在所求的x/σ之縱線
.320	0.9154	.2624	.365	1.1031	.2171	.410	1.3408	.1624	.455	1.6954	.0948
.321	0.9192	.2615	.366	1.1077	.2160	.411	1.3469	.1610	.456	1.7060	.0931
.322	0.9230	.2606	.367	1.1123	.2149	.412	1.3532	.1597	.457	1.7169	.0914
.323	0.9269	.2596	.368	1.1170	.2138	.413	1.3595	.1583	.458	1.7279	.0897
.324	0.9307	.2587	.369	1.1217	.2127	.414	1.3658	.1570	.459	1.7392	.0879
.325	0.9346	.2578	.370	1.1264	.2115	.415	1.3722	.1556	.460	1.7507	.0862
.326	0.9385	.2568	.371	1.1311	.2104	.416	1.3787	.1542	.461	1.7624	.0844
.327	0.9424	.2559	.372	1.1359	.2093	.417	1.3852	.1529	.462	1.7744	.0826
.328	0.9463	.2550	.373	1.1407	.2081	.418	1.3917	.1515	.463	1.7866	.0809
.329	0.9502	.2540	.374	1.1455	.2070	.419	1.3984	.1501	.464	1.7991	.0791
.330	0.9542	.2531	.375	1.1503	.2059	.420	1.4051	.1487	.465	1.8119	.0773
.331	0.9581	.2521	.376	1.1552	.2047	.421	1.4118	.1473	.466	1.8250	.0755
.332	0.9621	.2511	.377	1.1601	.2035	.422	1.4187	.1458	.467	1.8384	.0736
.333	0.9661	.2502	.378	1.1650	.2024	.423	1.4255	.1444	.468	1.8522	.0718
.334	0.9701	.2492	.379	1.1700	.2012	.424	1.4325	.1430	.469	1.8663	.0699
.335	0.9741	.2482	.380	1.1750	.2000	.425	1.4395	.1416	.470	1.8808	.0680
.336	0.9782	.2473	.381	1.1800	.1989	.426	1.4466	.1401	.471	1.8957	.0662
.337	0.9822	.2463	.382	1.1850	.1977	.427	1.4538	.1387	.472	1.9110	.0643
.338	0.9863	.2453	.383	1.1901	.1965	.428	1.4611	.1372	.473	1.9268	.0623
.339	0.9904	.2443	.384	1.1952	.1953	.429	1.4684	.1357	.474	1.9431	.0604
.340	0.9945	.2433	.385	1.2004	.1941	.430	1.4758	.1343	.475	1.9600	.0585
.341	0.9986	.2423	.386	1.2055	.1929	.431	1.4833	.1328	.476	1.9774	.0565
.342	1.0027	.2413	.387	1.2107	.1917	.432	1.4909	.1313	.477	1.9954	.0545
.343	1.0069	.2403	.388	1.2160	.1905	.433	1.4985	.1298	.478	2.0141	.0525
.344	1.0110	.2393	.389	1.2212	.1893	.434	1.5063	.1283	.479	2.0335	.0505
.345	1.0152	.2383	.390	1.2265	.1880	.435	1.5141	.1268	.480	2.0537	.0484
.346	1.0194	.2373	.391	1.2319	.1868	.436	1.5220	.1253	.481	2.0749	.0464
.347	1.0237	.2362	.392	1.2372	.1856	.437	1.5301	.1237	.482	2.0969	.0443
.348	1.0279	.2352	.393	1.2426	.1843	.438	1.5382	.1222	.483	2.1201	.0422
.349	1.0322	.2342	.394	1.2481	.1831	.439	1.5464	.1207	.484	2.1444	.0400
.350	1.0364	.2332	.395	1.2536	.1818	.440	1.5548	.1191	.485	2.1701	.0379
.351	1.0407	.2321	.396	1.2591	.1806	.441	1.5632	.1176	.486	2.1973	.0357
.352	1.0450	.2311	.397	1.2646	.1793	.442	1.5718	.1160	.487	2.2262	.0335
.353	1.0494	.2300	.398	1.2702	.1780	.443	1.5805	.1144	.488	2.2571	.0312
.354	1.0537	.2290	.399	1.2759	.1768	.444	1.5893	.1128	.489	2.2904	.0290
.355	1.0581	.2279	.400	1.2816	.1755	.445	1.5982	.1112	.490	2.3263	.0267
.356	1.0625	.2269	.401	1.2873	.1742	.446	1.6072	.1096	.491	2.3656	.0243
.357	1.0669	.2258	.402	1.2930	.1729	.447	1.6164	.1080	.492	2.4089	.0219
.358	1.0714	.2247	.403	1.2988	.1716	.448	1.6258	.1064	.493	2.4573	.0195
.359	1.0758	.2237	.404	1.3047	.1703	.449	1.6352	.1048	.494	2.5121	.0170
.360	1.0803	.2226	.405	1.3106	.1690	.450	1.6449	.1031	.495	2.5758	.0145
.361	1.0848	.2215	.406	1.3165	.1677	.451	1.6546	.1015	.496	2.6521	.0118
.362	1.0893	.2204	.407	1.3225	.1664	.452	1.6646	.0998	.497	2.7478	.0091
.363	1.0939	.2193	.408	1.3285	.1651	.453	1.6747	.0982	.498	2.8782	.0063
.364	1.0985	.2182	.409	1.3346	.1637	.454	1.6849	.0965	.499	3.0902	.0034

附表五　常態曲線的P.E.差數

面積從 x/P.E.=0	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
.000	.0000	.0037	.0074	.0111	.0149	.0186	.0223	.0260	.0297	.0335
.010	.0372	.0409	.0446	.0483	.0520	.0558	.0595	.0632	.0669	.0706
.020	.0744	.0781	.0818	.0855	.0892	.0930	.0967	.1004	.1041	.1079
.030	.1116	.1153	.1190	.1228	.1265	.1302	.1340	.1377	.1414	.1452
.040	.1489	.1526	.1564	.1601	.1639	.1676	.1713	.1751	.1788	.1826
.050	.1863	.1901	.1938	.1975	.2013	.2050	.2088	.2126	.2163	.2201
.060	.2238	.2276	.2313	.2351	.2389	.2426	.2464	.2502	.2539	.2577
.070	.2615	.2653	.2690	.2728	.2766	.2804	.2842	.2880	.2917	.2955
.080	.2993	.3031	.3069	.3107	.3145	.3183	.3221	.3259	.3297	.3335
.090	.3374	.3412	.3450	.3488	.3526	.3565	.3603	.3641	.3679	.3718
.100	.3756	.3795	.3833	.3871	.3910	.3948	.3987	.4025	.4064	.4103
.110	.4141	.4180	.4219	.4257	.4296	.4335	.4374	.4412	.4451	.4490
.120	.4529	.4568	.4607	.4646	.4685	.4724	.4763	.4802	.4842	.4881
.130	.4920	.4959	.4999	.5038	.5077	.5117	.5156	.5196	.5235	.5275
.140	.5315	.5354	.5394	.5434	.5473	.5513	.5553	.5593	.5633	.5673
.150	.5713	.5753	.5793	.5833	.5873	.5913	.5954	.5994	.6034	.6075
.160	.6115	.6156	.6196	.6237	.6277	.6318	.6359	.6400	.6440	.6481
.170	.6522	.6563	.6604	.6645	.6686	.6727	.6769	.6810	.6851	.6893
.180	.6934	.6976	.7017	.7059	.7100	.7142	.7184	.7226	.7268	.7309
.190	.7351	.7394	.7436	.7478	.7520	.7562	.7605	.7647	.7690	.7732
.200	.7775	.7817	.7860	.7903	.7946	.7989	.8032	.8075	.8118	.8161
.210	.8204	.8248	.8291	.8335	.8378	.8422	.8466	.8509	.8553	.8597
.220	.8641	.8685	.8729	.8774	.8818	.8862	.8907	.8951	.8996	.9041
.230	.9086	.9130	.9175	.9220	.9266	.9311	.9356	.9402	.9447	.9493
.240	.9538	.9584	.9630	.9676	.9722	.9768	.9814	.9860	.9907	.9953

附表五 (續)

面積從 x/P.E.=0	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.009	.008	.009
.250	1.0000	1.0047	1.0094	1.0140	1.0187	1.0235	1.0282	1.0329	1.0376	1.0424
.260	1.0472	1.0519	1.0567	1.0615	1.0663	1.0711	1.0760	1.0808	1.0857	1.0905
.270	1.0954	1.1003	1.1052	1.1101	1.1150	1.1200	1.1249	1.1299	1.1349	1.1399
.280	1.1449	1.1499	1.1549	1.1599	1.1650	1.1701	1.1751	1.1802	1.1853	1.1905
.290	1.1956	1.2008	1.2059	1.2111	1.2163	1.2215	1.2267	1.2320	1.2372	1.2425
.300	1.2478	1.2531	1.2584	1.2637	1.2691	1.2745	1.2799	1.2853	1.2907	1.2961
.310	1.3016	1.3070	1.3125	1.3180	1.3236	1.3291	1.3347	1.3403	1.3459	1.3515
.320	1.3571	1.3628	1.3685	1.3742	1.3799	1.3856	1.3914	1.3972	1.4030	1.4088
.330	1.4146	1.4205	1.4264	1.4323	1.4383	1.4442	1.4502	1.4562	1.4622	1.4683
.340	1.4744	1.4805	1.4866	1.4928	1.4990	1.5052	1.5114	1.5177	1.5240	1.5303
.350	1.5366	1.5430	1.5494	1.5558	1.5623	1.5688	1.5753	1.5818	1.5884	1.5950
.360	1.6017	1.6084	1.6151	1.6218	1.6286	1.6354	1.6422	1.6491	1.6560	1.6630
.370	1.6700	1.6770	1.6841	1.6912	1.6983	1.7055	1.7127	1.7200	1.7273	1.7346
.380	1.7420	1.7495	1.7569	1.7645	1.7720	1.7797	1.7873	1.7950	1.8028	1.8106
.390	1.8185	1.8264	1.8343	1.8423	1.8504	1.8585	1.8667	1.8750	1.8833	1.8916
.400	1.9000	1.9085	1.9171	1.9257	1.9343	1.9431	1.9519	1.9607	1.9697	1.9787
.410	1.9878	1.9970	2.0062	2.0155	2.0249	2.0344	2.0440	2.0537	2.0634	2.0732
.420	2.0832	2.0932	2.1033	2.1135	2.1238	2.1343	2.1448	2.1554	2.1662	2.1770
.430	2.1880	2.1991	2.2103	2.2217	2.2332	2.2448	2.2566	2.2685	2.2805	2.2927
.440	2.3051	2.3176	2.3303	2.3432	2.3563	2.3695	2.3829	2.3965	2.4104	2.4244
.450	2.4387	2.4532	2.4679	2.4829	2.4981	2.5136	2.5294	2.5455	2.5618	2.5785
.460	2.5956	2.6130	2.6307	2.6488	2.6674	2.6863	2.7058	2.7257	2.7460	2.7670
.470	2.7885	2.8106	2.8333	2.8567	2.8809	2.9058	2.9316	2.9584	2.9861	3.0149
.480	3.0449	3.0762	3.1089	3.1432	3.1793	3.2174	3.2577	3.3006	3.3464	3.3957
.490	3.4490	3.5073	3.5715	3.6431	3.7245	3.8189	3.9320	4.0739	4.2672	4.5816

本表採自 Holzinger，書名同上。

附表六　配合良否試驗　P之價值

1. 依據下面公式求 χ^2

$$\chi^2=\Sigma\frac{(m'-m)^2}{m}$$

2. 決定 n′ 卽分配表中之組數

3. 例如 $\chi^2=20$, $n'=11$ 則 P=.029253。又如 $\chi^2=20$, $n'=21$, 則 P=.457930。P之價值在 .20 或以上,則一個觀察得來的分配才可以視爲常態的。

本表採自 Karl Pearson: Tables for Statisticians and Biometricians, Table XII

X^2	n′=3	n′=4	n′=5	n′=6	n′=7	n′=8	n′=9
1	.606531	.801253	.909796	.962566	.985612	.994829	.998249
2	.367879	.572407	.735759	.849146	.916699	.959840	.981012
3	.223130	.391625	.557825	.699986	.808847	.885002	.934357
4	.135335	.261464	.406006	.549416	.676676	.779778	.857123
5	.082085	.171797	.287298	.415880	.543813	.659963	.757576
6	.049787	.111610	.199148	.306219	.423190	.539750	.647232
7	.030197	.071897	.135888	.220640	.320847	.428880	.536632
8	.018316	.046012	.091578	.156236	.238103	.332594	.433470
9	.011109	.029291	.061099	.109064	.173578	.252656	.342296
10	.006738	.018566	.040428	.075235	.124652	.188573	.265026
11	.004087	.011726	.026564	.051380	.088376	.138619	.201699
12	.002479	.007383	.017351	.034787	.061969	.100558	.151204
13	.001503	.004637	.011276	.023379	.043036	.072109	.111850
14	.000912	.002905	.007295	.015609	.029636	.051181	.081765
15	.000553	.001817	.004701	.010363	.020256	.036000	.059145
16	.000335	.001134	.003019	.006844	.013754	.025116	.042380
17	.000203	.000707	.001933	.004500	.009283	.017396	.030109
18	.000123	.000440	.001234	.002947	.006232	.011970	.021226
19	.000075	.000273	.000786	.001922	.004164	.008187	.014860
20	.000045	.000170	.000499	.001250	.002769	.005570	.010336
21	.000028	.000105	.000317	.000810	.001835	.003770	.007147
22	.000017	.000065	.000200	.000524	.001211	.002541	.004916
23	.000010	.000040	.000127	.000338	.000796	.001705	.003364
24	.000006	.000025	.000080	.000217	.000522	.001139	.002292
25	.000004	.000016	.000050	.000139	.000341	.000759	.001554
26	.000002	.000010	.000032	.000090	.000223	.000504	.001050
27	.000001	.000006	.000020	.000057	.000145	.000333	.000707
28	.000001	.000004	.000012	.000037	.000094	.000220	.000474
29	.000001	.000002	.000008	.000023	.000061	.000145	.000317
30	.000000	.000001	.000005	.000015	.000039	.000095	.000211
40	.000000	.000000	.000000	.000000	.000001	.000001	.000003
50	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
60	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
70	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000

附表六 (續)

X^2	n′=10	n′=11	n′=12	n′=13	n′=14	n′=15	n′=16
1	.999438	.999828	.999950	.999986	.999997	.999999	1.
2	.991468	.996340	.998496	.999406	.999774	.999917	.999970
3	.964295	.981424	.990726	.995544	.997934	.999074	.999598
4	.911413	.947347	.969917	.983436	.991191	.995466	.997737
5	.834308	.891178	.931167	.957979	.975193	.985813	.992127
6	.739919	.815263	.873365	.916082	.946153	.966491	.979749
7	.637119	.725444	.799073	.857613	.902151	.934711	.957650
8	.534146	.628837	.713304	.785131	.843601	.889327	.923783
9	.437274	.532104	.621892	.702931	.772943	.831051	.877517
10	.350485	.440493	.530387	.615960	.693934	.762183	.819739
11	.275709	.357518	.443263	.528919	.610817	.686036	.752594
12	.213308	.285057	.362642	.445680	.527643	.606303	.679028
13	.162607	.223672	.293326	.369041	.447812	.526524	.602298
14	.122325	.172992	.232993	.300708	.373844	.449711	.525529
15	.090937	.132061	.182498	.241436	.307354	.378154	.451418
16	.066881	.099632	.141130	.191236	.249129	.313374	.382051
17	.048716	.074364	.107876	.149597	.199304	.256178	.318864
18	.035174	.054964	.081581	.115691	.157520	.206781	.262666
19	.025193	.040263	.061094	.088529	.123104	.164949	.213734
20	.017913	.029253	.045341	.067086	.095210	.130141	.171932
21	.012650	.021093	.033371	.050380	.072929	.101632	.136830
22	.008880	.015105	.024374	.037520	.055362	.078614	.107804
23	.006197	.010747	.017676	.027726	.041677	.060270	.084140
24	.004301	.007600	.012733	.020341	.031130	.045822	.065093
25	.002971	.005345	.009117	.014822	.023084	.034566	.049943
26	.002043	.003740	.006490	.010734	.017001	.025887	.038023
27	.001399	.002604	.004595	.007727	.012441	.019254	.028736
28	.000954	.001805	.003238	.005532	.009050	.014228	.021569
29	.000648	.001246	.002270	.003940	.006546	.010450	.016085
30	.000439	.000857	.001585	.002792	.004710	.007632	.011921
40	.000008	.000017	.000036	.000072	.000138	.000255	.000453
50	.000000	.000000	.000001	.000001	.000003	.000006	.000012
60	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
70	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000

附表六　(續)

X^2	n'=17	n'=18	n'=19	n'=20	n'=21	n'=22	n'=23
1	1	1.	1.	1.	1.	1.	1.
2	.999990	.999997	.999999	1.	1.	1.	1.
3	.999830	.999931	.999972	.999989	.999996	.999998	.999999
4	.998903	.999483	.999763	.999894	.999954	.999980	.999992
5	.995754	.997771	.998860	.999431	.999722	.999868	.999939
6	.988095	.993187	.996197	.997929	.998898	.999427	.999708
7	.973260	.983549	.990125	.994213	.996685	.998142	.998980
8	.948867	.966547	.978637	.986671	.991868	.995143	.997160
9	.913414	.940261	.959743	.973479	.982907	.989214	.993331
10	.866628	.903610	.931906	.952946	.968171	.978912	.986304
11	.809485	.856564	.894357	.923839	.946223	.962787	.974749
12	.743980	.800136	.847237	.885624	.916076	.939617	.957379
13	.672758	.736186	.791573	.838571	.877384	.908624	.933161
14	.598714	.667102	.729091	.783691	.830496	.869599	.901479
15	.524638	.595482	.661967	.722598	.776408	.822952	.862238
16	.452961	.523834	.592547	.657277	.716624	.769650	.815886
17	.385597	.454366	.523105	.589868	.652974	.711106	.763362
18	.323897	.388841	.455653	.522438	.587408	.649004	.705988
19	.268663	.328532	.391823	.456836	.521826	.585140	.645328
20	.220220	.274229	.332819	.394578	.457930	.521261	.583040
21	.178510	.226291	.279413	.336801	.397132	.458944	.520738
22	.143191	.184719	.231985	.284256	.340511	.399510	.459889
23	.113735	.149251	.190590	.237342	.288795	.343979	.401730
24	.089504	.119435	.155028	.196152	.242392	.293058	.347229
25	.069824	.094710	.124915	.160542	.201431	.247164	.297075
26	.054528	.074461	.099758	.130189	.165812	.206449	.251682
27	.041483	.058068	.078995	.104653	.135264	.170853	.211226
28	.031620	.044938	.062055	.083428	.109399	.140151	.175681
29	.023936	.034526	.048379	.065985	.087759	.114002	.144861
30	.018002	.026345	.037446	.051798	.069854	.091988	.118464
40	.000778	.001294	.002087	.003272	.004995	.007437	.010812
50	.000023	.000042	.000075	.000131	.000221	.000365	.000586
60	.000001	.000001	.000002	.000004	.000007	.000013	.000022
70	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000001

附表六 (續)

X^2	n′=24	n′=25	n′=26	n′=27	n′=28	n′=29	n′=30
1	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
2	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
3	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
4	.999997	.999999	1.	1.	1.	1.	1.
5	.999972	.999987	.999994	.999998	.999999	1.	1.
6	.999855	.999929	.999966	.999984	.999993	.999997	.999999
7	.999452	.999711	.999851	.999924	.999962	.999981	.999991
8	.998371	.999085	.999494	.999726	.999853	.999924	.999960
9	.995957	.997595	.998596	.999194	.999546	.999748	.999863
10	.991277	.994547	.996653	.997981	.998803	.999302	.999599
11	.983189	.989012	.992946	.995549	.997239	.998315	.998988
12	.970470	.979908	.986567	.991173	.994294	.996372	.997728
13	.951990	.966121	.976501	.983974	.989247	.992900	.995384
14	.926871	.946650	.961732	.973000	.981254	.987189	.991377
15	.894634	.920759	.941383	.957334	.969432	.978436	.985015
16	.855268	.888076	.914828	.936203	.952947	.965819	.975536
17	.809251	.848662	.881793	.909083	.931122	.948589	.962181
18	.757489	.803008	.842390	.875773	.903519	.926149	.944272
19	.701224	.751990	.797120	.836430	.870001	.898136	.921288
20	.641912	.696776	.746825	.791556	.830756	.864464	.892927
21	.581087	.638725	.692609	.741964	.786288	.825349	.859149
22	.520252	.579267	.635744	.688597	.737377	.781291	.820189
23	.460771	.519798	.577564	.632947	.685013	.733041	.776543
24	.403808	.461597	.519373	.575965	.630316	.681535	.728932
25	.350285	.405760	.462373	.518975	.574462	.627835	.678248
26	.300866	.353165	.407598	.463105	.518600	.573045	.625491
27	.255967	.304453	.355884	.409333	.463794	.518247	.571705
28	.215781	.260040	.307853	.358458	.410973	.464447	.517913
29	.180310	.220131	.263916	.311082	.360899	.412528	.465066
30	.149402	.184752	.224289	.267611	.314154	.363218	.414004
40	.015369	.021387	.029164	.039012	.051237	.066128	.083937
50	.000921	.001416	.002131	.003144	.004551	.006467	.009032
60	.000038	.000064	.000104	.000168	.000264	.000407	.000618
70	.000001	.000002	.000004	.000007	.000011	.000019	.000030

附表七　ρ與r對照表

皮而生引用了 $r=2\sin\left(\frac{\pi}{6}\rho\right)$ 一公式，於ρ求得之後，將牠化爲r。這r的數是根據常態分配的。

例如 $\rho=.01$，$r=.0105$；$\rho=.51$，$r=.5277$。

ρ	r	ρ	r	ρ	r	ρ	r
.01	.0105	.26	.2714	.51	.5277	.76	.7750
.02	.0209	.27	.2818	.52	.5378	.77	.7847
.03	.0314	.28	.2922	.53	.5479	.78	.7943
.04	.0419	.29	.3025	.54	.5580	.79	.8309
.05	.0524	.30	.3129	.55	.5680	.80	.8135
.06	.0628	.31	.3232	.56	.5781	.81	.8230
.07	.0733	.32	.3335	.57	.5881	.82	.8325
.08	.0838	.33	.3439	.58	.5981	.83	.8421
.09	.0942	.34	.3542	.59	.6081	.84	.8516
.10	.1047	.35	.3645	.60	.6180	.85	.8610
.11	.1151	.36	.3748	.61	.6280	.86	.8705
.12	.1256	.37	.3850	.62	.6379	.87	.8799
.13	.1360	.38	.3935	.63	.6478	.88	.8893
.14	.1465	.39	.4056	.64	.6577	.89	.8986
.15	.1569	.40	.4158	.65	.6676	.90	.9089
.16	.1674	.41	.4261	.66	.6775	.91	.9183
.17	.1778	.42	.4363	.67	.6873	.92	.9266
.18	.1882	.43	.4465	.68	.6971	.93	.9359
.19	.1986	.44	.4567	.69	.7069	.94	.9451
.20	.2091	.45	.4669	.70	.7167	.95	.9543
.21	.2195	.46	.4771	.71	.7265	.96	.9635
.22	.2299	.47	.4872	.72	.7363	.97	.9727
.23	.2403	.48	.4973	.73	.7460	.98	.9818
.24	.2507	.49	.5075	.74	.7557	.99	.9909
.25	.2611	.50	.5176	.75	.7654	1.00	1.0000

本表採自　朱君毅　教育統計學　附表四

附表八 R與r對照表

皮而生引了 $r=2\cos\frac{\pi}{3}(1-R)-1$ 一公式，於R求得之後，將牠化爲r，這r的數也是根據常態分配的。

例如 R=.26，r=.429；R=.76，r=.937。

R	r	R	r	R	r	R	r
.00	.000	.26	.429	.51	.742	.76	.937
.01	.018	.27	.444	.52	.753	.77	.942
.02	.036	.28	.458	.53	.763	.78	.947
.03	.054	.29	.472	.54	.772	.79	.952
.04	.071	.30	.486	.55	.782	.80	.956
.05	.089	.31	.500	.56	.791	.81	.961
.06	.107	.32	.514	.57	.801	.82	.965
.07	.124	.33	.528	.58	.810	.83	.968
.08	.141	.34	.541	.59	.818	.84	.972
.09	.158	.35	.554	.60	.827	.85	.975
.10	.176	.36	.567	.61	.836	.86	.979
.11	.192	.37	.580	.62	.844	.87	.981
.12	.209	.38	.593	.63	.852	.88	.984
.13	.226	.39	.606	.64	.860	.89	.987
.14	.242	.40	.618	.65	.867	.90	.989
.15	.259	.41	.630	.66	.875	.91	.991
.16	.275	.42	.642	.67	.882	.92	.993
.17	.291	.43	.654	.68	.889	.93	.995
.18	.307	.44	.666	.69	.896	.94	.996
.19	.323	.45	.677	.70	.902	.95	.997
.20	.338	.46	.689	.71	.908	.96	.998
.21	.354	.47	.700	.72	.915	.97	.999
.22	.369	.48	.711	.73	.921	.98	.9996
.23	.384	.49	.721	.74	.926	.99	.9999
.24	.399	.50	.732	.75	.932	1.00	1.0000
.25	.414						

本表採自 朱君毅 教育統計學 附表五

附表九　U與r對照表

例如 U=.13，r=.9174；U=.50，r=.0000：U=.00，r=1.0000。在此表上U的價值未有大於 .50 者；倘使有的值大於 .50，我們應當從 1.00 減去這數，就此結果在表上找出與他相當之 r。例如有U 之值爲 .80，由 1.000 減去 .80 爲 .20，則 r=.8089。餘類推。

U	r	U	r	U	r
.00	1.0000	.17	.8602	.34	.4819
.01	.9996	.18	.8439	.35	.4542
.02	.9982	.19	.8268	.36	.4260
.03	.9958	.20	.8089	.37	.3973
.04	.9924	.21	.7902	.38	.3682
.05	.9880	.22	.7707	.39	.3387
.06	.9826	.23	.7504	.40	.3089
.07	.9762	.24	.7293	.41	.2788
.08	.9688	.25	.7074	.42	.2485
.09	.9604	.26	.6848	.43	.2180
.10	.9510	.27	.6615	.44	.1873
.11	.9407	.28	.6375	.45	.1564
.12	.9295	.29	.6129	.46	.1253
.13	.9174	.30	.5877	.47	.0941
.14	.9044	.31	.5620	.48	.0628
.15	.8905	.32	.5358	.49	.0314
.16	.8757	.33	.5091	.50	.0000

本表採自　朱君毅　教育統計學　附表六

附表十 平方，平方根與倒數表(1—1000)

(本表摘自 Barlow's Table of Squares, Cubes, Square Roots, Cube Roots, Reciprocals, pp. 2—21)

數	平方	平方根	倒數	數	平方	平方根	倒數
				40	1600	6.3245553	025000000
1	1	1.0000000		41	1681	6.4031242	024390244
2	4	1.4142136	500000000	42	1764	6.4807407	023809524
3	9	1.7320508	333333333	43	1849	6.5574385	023255814
4	16	2.0000000	250000000	44	1936	6.6332496	022727273
5	25	2.2360680	200000000	45	2025	6.7082039	022222222
6	36	2.4494897	166666667	46	2116	6.7823300	021739130
7	49	2.6457513	142857143	47	2209	6.8556546	021276596
8	64	2.8284271	125000000	48	2304	6.9282032	020833333
9	81	3.0000000	111111111	49	2401	7.0000000	020408163
10	100	3.1622777	100000000	50	2500	7.0710678	020000000
11	121	3.3166248	090909091	51	2601	7.1414284	019607843
12	144	3.4641016	083333333	52	2704	7.2111026	019230769
13	169	3.6055513	076923077	53	2809	7.2801099	018867925
14	196	3.7416574	071428571	54	2916	7.3484692	018518519
15	225	3.8729833	066666667	55	3025	7.4161985	018181818
16	256	4.0000000	062500000	56	3136	7.4833148	017857143
17	289	4.1231056	058823529	57	3249	7.5498344	017543860
18	324	4.2426407	055555556	58	3364	7.6157731	017241379
19	361	4.3588989	052631579	59	3481	7.6811457	016949153
20	400	4.4721360	050000000	60	3600	7.7459667	016666667
21	441	4.5825757	047619048	61	3721	7.8102497	016393443
22	484	4.6904158	045454545	62	3844	7.8740079	016129032
23	529	4.7958315	043478261	63	3969	7.9372539	015873016
24	576	4.8989795	041666667	64	4096	8.0000000	015625000
25	625	5.0000000	040000000	65	4225	8.0622577	015384615
26	676	5.0990195	038461538	66	4356	8.1240384	015151515
27	729	5.1961524	037037037	67	4489	8.1853528	014925373
28	784	5.2915026	035714286	68	4624	8.2462113	014705882
29	841	5.3851648	034482759	69	4761	8.3066239	014492754
30	900	5.4772256	033333333	70	4900	8.3666003	014285714
31	961	5.5677644	032258065	71	5041	8.4261498	014084507
32	1024	5.6568542	031250000	72	5184	8.4852814	013888889
33	1089	5.7445626	030303030	73	5329	8.5440037	013698630
34	1156	5.8309519	029411765	74	5476	8.6023253	013513514
35	1225	5.9160798	028571429	75	5625	8.6602540	013333333
36	1296	6.0000000	027777778	76	5776	8.7177979	013157895
37	1369	6.0827625	027027027	77	5929	8.7749644	012987013
38	1444	6.1644140	026315789	78	6084	8.8317609	012820513
39	1521	6.2449980	025641026	79	6241	8.8881944	012658228

附表十 (續)

數	平方	平方根	倒數	數	平方	平方根	倒數 0.00
80	6400	8.9442719	.012500000	120	14400	10.9544512	8333333
81	6561	9.0000000	.012345679	121	14641	11.0000000	8264463
82	6724	9.0553851	.012195122	122	14884	11.0453610	8196721
83	6889	9.1104336	.012048193	123	15129	11.0905365	8130081
84	7056	9.1651514	.011904762	124	15376	11.1355287	8064516
85	7225	9.2195445	.011764706	125	15625	11.1803399	8000000
86	7396	9.2736185	.011627907	126	15876	11.2249722	7936508
87	7569	9.3273791	.011494253	127	16129	11.2694277	7874016
88	7744	9.3808315	.011363636	128	16384	11.3137085	7812500
89	7921	9.4338811	.011235955	129	16641	11.3578167	7751938
90	8100	9.4868330	.011111111	130	16900	11.4017543	7692308
91	8281	9.5393920	.010989011	131	17161	11.4455231	7633588
92	8464	9.5916630	.010869565	132	17424	11.4891253	7575758
93	8649	9.6436508	.010752688	133	17689	11.5325626	7518797
94	8836	9.6953597	.010638298	134	17956	11.5758369	7462687
95	9025	9.7467943	.010526316	135	18225	11.6189500	7407407
96	9216	9.7979590	.010416667	136	18496	11.6619038	7352941
97	9409	9.8488578	.010309278	137	18769	11.7046999	7299270
98	9604	9.8994949	.010204082	138	19044	11.7473401	7246377
99	9801	9.9498744	.010101010	139	19321	11.7898261	7194245
100	10000	10.0000000	.010000000	140	19600	11.8321596	7142857
101	10201	10.0498756	.009900990	141	19881	11.8743421	7092199
102	10404	10.0995049	.009803922	142	20164	11.9163753	7042254
103	10609	10.1488916	.009708738	143	20449	11.9582607	6993007
104	10816	10.1980390	.009615385	144	20736	12.0000000	6944444
105	11025	10.2469508	.009523810	145	21025	12.0415946	6896552
106	11236	10.2956301	.009433962	146	21316	12.0830460	6849315
107	11449	10.3440804	.009345794	147	21609	12.1243557	6802721
108	11664	10.3923048	.009259259	148	21904	12.1655251	6756757
109	11881	10.4403065	.009174312	149	22201	12.2065556	6711409
110	12100	10.4880885	.009090909	150	22500	12.2474487	6666667
111	12321	10.5356538	.009009009	151	22801	12.2882057	6622517
112	12544	10.5830052	.008928571	152	23104	12.3288280	6578947
113	12769	10.6301458	.008849558	153	23409	12.3693169	6535948
114	12996	10.6770783	.008771930	154	23716	12.4096736	6493506
115	13225	10.7238053	.008695652	155	24025	12.4498996	6451613
116	13456	10.7703296	.008620690	156	24336	12.4899960	6410256
117	13689	10.8166538	.008547009	157	24649	12.5299641	6369427
118	13924	10.8627805	.008474576	158	24964	12.5698051	6329114
119	14161	10.9087121	.008403361	159	25281	12.6095202	6289308

附表十 (續)

數	平方	平方根	倒數 0.00	數	平方	平方根	倒數 0.00
160	25600	12.6491106	6250000	200	40000	14.1421356	5000000
161	25921	12.6885775	6211180	201	40401	14.1774469	4975124
162	26244	12.7279221	6172840	202	40804	14.2126704	4950495
163	26569	12.7671453	6134969	203	41209	14.2478068	4926108
164	26896	12.8062485	6097561	204	41616	14.2828569	4901961
165	27225	12.8452326	6060606	205	42025	14.3178211	4878049
166	27556	12.8840987	6024096	206	42436	14.3527001	4854369
167	27889	12.9228480	5988024	207	42849	14.3874946	4830918
168	28224	12.9614814	5952381	208	43264	14.4222051	4807692
169	28561	13.0000000	5917160	209	43681	14.4568323	4784689
170	28900	13.0384048	5882353	210	44100	14.4913767	4761905
171	29241	13.0766968	5847953	211	44521	14.5258390	4739336
172	29584	13.1148770	5813953	212	44944	14.5602198	4716981
173	29929	13.1529464	5780347	213	45369	14.5945195	4694836
174	30276	13.1909060	5747126	214	45796	14.6287388	4672897
175	30625	13.2287566	5714286	215	46225	14.6628783	4651163
176	30976	13.2664992	5681818	216	46656	14.6969385	4629630
177	31329	13.3041347	5649718	217	47089	14.7309199	4608295
178	31684	13.3416641	5617978	218	47524	14.7648231	4587156
179	32041	13.3790882	5586592	219	47961	14.7986486	4566210
180	32400	13.4164079	5555556	220	48400	14.8323970	4545455
181	32761	13.4536240	5524862	221	48841	14.8660687	4524887
182	33124	13.4907376	5494505	222	49284	14.8996644	4504505
183	33489	13.5277493	5464481	223	49729	14.9331845	4484305
184	33856	13.5646600	5434783	224	50176	14.9666295	4464286
185	34225	13.6014705	5405405	225	50625	15.0000000	4444444
186	34596	13.6381817	5376344	226	51076	15.0332964	4424779
187	34969	13.6747943	5347594	227	51529	15.0665192	4405286
188	35344	13.7113092	5319149	228	51984	15.0996689	4385965
189	35721	13.7477271	5291005	229	52441	15.1327460	4366812
190	36100	13.7840488	5263158	230	52900	15.1657509	4347826
191	36481	13.8202750	5235602	231	53361	15.1986842	4329004
192	36864	17.8564065	5208333	232	53824	15.2315462	4310345
193	37249	13.8924440	5181347	233	54289	15.2643375	4291845
194	37636	13.9283883	5154639	234	54756	15.2970585	4273504
195	38025	13.9642400	5128205	235	55225	15.3297097	4255319
196	38416	14.0000000	5102041	236	55696	15.3622915	4237288
197	38809	14.0356688	5076142	237	56169	15.3948043	4219409
198	39204	14.0712473	5050505	238	56644	15.4272486	4201681
199	39601	14.1067360	5025126	239	57121	15.4596248	4184100

附表十　(續)

數	平方	平方根	倒數 0.00	數	平方	平方根	倒數 0.00
240	57600	15.4919334	4166667	280	78400	16.7332005	3571429
241	58081	15.5241747	4149378	281	78961	16.7630546	3558719
242	58564	15.5563492	4132231	282	79524	16.7928556	3546099
243	59049	15.5884573	4115226	283	80089	16.8226038	3533569
244	59536	15.6204994	4098361	284	80656	16.8522995	3521127
245	60025	15.6524758	4081633	285	81225	16.8819430	3508772
246	60516	15.6843871	4065041	286	81796	16.9115345	3496503
247	61009	15.7162336	4048583	287	82369	16.9410743	3484321
248	61504	15.7480157	4032258	288	82944	16.9705627	3472222
249	62001	15.7797338	4016064	289	83521	17.0000000	3460208
250	62500	15.8113883	4000000	290	84100	17.0293864	3448276
251	63001	15.8429795	3984064	291	84681	17.0587221	3436426
252	63504	15.8745079	3968254	292	85264	17.0880075	3424658
253	64009	15.9059737	3952569	293	85849	17.1172428	3412969
254	64516	15.9373775	3937008	294	86436	17.1464282	3401361
255	65025	15.9687194	3921569	295	87025	17.1755640	3389831
256	65536	16.0000000	3906250	296	87616	17.2046505	3378378
257	66049	16.0312195	3891051	297	88209	17.2336879	3367003
258	66564	16.0623784	3875969	298	88804	17.2626765	3355705
259	67081	16.0934769	3861004	299	89401	17.2916165	3344482
260	67600	16.1245155	3846154	300	90000	17.3205081	3333333
261	68121	16.1554944	3831418	301	90601	17.3493516	3322259
262	68644	16.1864141	3816794	302	91204	17.3781472	3311258
263	69169	16.2172747	3802281	303	91809	17.4068952	3300330
264	69696	16.2480768	3787879	304	92416	17.4355958	3289474
265	70225	16.2788206	3773585	305	93025	17.4642492	3278689
266	70756	16.3095064	3759398	306	93636	17.4928557	3267974
267	71289	16.3401346	3745318	307	94249	17.5214155	3257329
268	71824	16.3707055	3731343	308	94864	17.5499288	3246753
269	72361	16.4012195	3717472	309	95481	17.5783958	3236246
270	72900	16.4316767	3703704	310	96100	17.6068169	3225806
271	73441	16.4620776	3690037	311	96721	17.6351921	3215434
272	73984	16.4924225	3676471	312	97344	17.6635217	3205128
273	74529	16.5227116	3663004	313	97969	17.6918060	3194888
274	75076	16.5529454	3649635	314	98596	17.7200451	3184713
275	75625	16.5831240	3636364	315	99225	17.7482393	3174603
276	76176	16.6132477	3623188	316	99856	17.7763888	3164557
277	76729	16.6433170	3610108	317	100489	17.8044938	3154574
278	77284	16.6733320	3597122	318	101124	17.8325545	3144654
279	77841	16.7032931	3584229	319	101761	17.8605711	3134796

附表十 (續)

數	平方	平方根	倒數 0.00	數	平方	平方根	倒數 0.00
320	102400	17.8885438	3125000	360	129600	18.9736660	2777778
321	103041	17.9164729	3115265	361	130321	19.0000000	2770083
322	103684	17.9443584	3105590	362	131044	19.0262976	2762431
323	104329	17.9722008	3095975	363	131769	19.0525589	2754821
324	104976	18.0000000	3086420	364	132496	19.0787840	2747253
325	105625	18.0277564	3076923	365	133225	19.1049732	2739726
326	106276	18.0554701	3067485	366	133956	19.1311265	2732240
327	106929	18.0831413	3058104	367	134689	19.1572441	2724796
328	107584	18.1107703	3048780	368	135424	19.1833261	2717391
329	108241	18.1383571	3039514	369	136161	19.2093727	2710027
330	108900	18.1659021	3030303	370	136900	19.2353841	2702703
331	109561	18.1934054	3021148	371	137641	19.2613603	2695418
332	110224	18.2208672	3012048	372	138384	19.2873015	2688172
333	110889	18.2482876	3003003	373	139129	19.3132079	2680965
334	111556	18.2756669	2994012	374	139876	19.3390796	2673797
335	112225	18.3030052	2985075	375	140625	19.3649167	2666667
336	112896	18.3303028	2976190	376	141376	19.3907194	2659574
337	113569	18.35755 8	2967359	377	142129	19.4164878	2652520
338	114244	18.3847763	2958580	378	142884	19.4422221	2645503
339	114921	18.4119526	2949853	379	143641	19.4679223	2638522
340	115600	18.4390889	2941176	380	144400	19.4935887	2631579
341	116281	18.4661853	2932551	381	145161	19.5192213	2624672
342	116964	18.4932420	2923977	382	145924	19.5448203	2617801
343	117649	18.5202592	2915452	383	146689	19.5703858	2610966
344	118336	18.5472370	2906977	384	147456	19.5959179	2604167
345	119025	18.5741756	2898551	385	148225	19.6214169	2597403
346	119716	18.6010752	2890173	386	148996	19.6468827	2590674
347	120409	18.6279360	2881844	387	149769	19.6723156	2583979
348	121104	18.6547581	2873563	388	150544	19.6977156	2577320
349	121801	18.6815417	2865330	389	151321	19.7230829	2570694
350	122500	18.7082869	2857143	390	152100	19.7484177	2564103
351	123201	18.7349940	2849003	391	152881	19.7737199	2557545
352	123904	18.7616630	2840909	392	153664	19.7989899	2551020
353	124609	18.7882942	2832861	393	154449	19.8242276	2544529
354	125316	18.8148877	2824859	394	155236	19.8494332	2538071
355	126025	18.8414437	2816901	395	156025	19.8746069	2531646
356	126736	18.8679623	2808989	396	156816	19.8997487	2525253
357	127449	18.8944436	2801120	397	157609	19.9248588	2518892
358	128164	18.9208879	2793296	398	158404	19.9499373	2512563
359	128881	18.9472953	2785515	399	159201	19.9749844	2506266

附表十　(續)

數	平方	平方根	倒數 0.00	數	平方	平方根	倒數 0.00
400	160000	20.0000000	2500000	440	193600	20.9761770	2272727
401	160801	20.0249844	2493766	441	194481	21.0000000	2267574
402	161604	20.0499377	2487562	442	195364	21.0237960	2262443
403	162409	20.0748599	2481390	443	196249	21.0475652	2257336
404	163216	20.0997512	2475248	444	197136	21.0713075	2252252
405	164025	20.1246118	2469136	445	198025	21.0950231	2247191
406	164836	20.1494417	2463054	446	198916	21.1187121	2242152
407	165649	20.1742410	2457002	447	199809	21.1423745	2237136
408	166464	20.1990099	2450980	448	200704	21.1660105	2232143
409	167281	20.2237484	2444988	449	201601	21.1896201	2227171
410	168100	20.2484567	2439024	450	202500	21.2132034	2222222
411	168921	20.2731349	2433090	451	203401	21.2367606	2217295
412	169744	20.2977831	2427184	452	204304	21.2602916	2212389
413	170569	20.3224014	2421308	453	205209	21.2837967	2207506
414	171396	20.3469899	2415459	454	206116	21.3072758	2202643
415	172225	20.3715488	2409639	455	207025	21.3307290	2197802
416	173056	20.3960781	2403846	456	207936	21.3541565	2192982
417	173889	20.4205779	2398082	457	208849	41.3775583	2188184
418	174724	20.4450483	2392344	458	209764	21.4009346	2183406
419	175561	20.4694895	2386635	459	210681	21.4242853	2178649
420	176400	20.4939015	2380952	460	211600	21.4476106	2173913
421	177241	20.5182845	2375297	461	212521	21.4709106	2169197
422	178084	20.5426386	2369668	462	213444	21.4941853	2164502
423	178929	20.5669638	2364066	463	214369	21.5174348	2159827
424	179776	20.5912603	2358491	464	215296	21.5406592	2155172
425	180625	20.6155281	2352941	465	216225	21.5638587	2150538
426	181476	20.6397674	2347418	466	217156	21.5870331	2145923
427	182329	20.6639783	2341920	467	218089	21.6101828	2141328
428	183184	20.6881609	2336449	468	219024	21.6333077	2136752
429	184041	20.7123152	2331002	469	219961	21.6564078	2132196
430	184900	20.7364414	2325581	470	220900	21.6794834	2127660
431	185761	20.7605395	2320186	471	221841	21.7025344	2123142
432	186624	20.7846097	2314815	472	222784	21.7255610	2118644
433	187489	20.8086520	2309469	473	223729	21.7485632	2114165
434	188356	20.8326667	2304147	474	224676	21.7715411	2109705
435	189225	20.8566536	2298851	475	225625	21.7944947	2105263
436	190096	20.8806130	2293578	476	226576	21.8174242	2100840
437	190969	20.9045450	2288330	477	227529	21.8403297	2096436
438	191844	20.9284495	2283105	478	228484	21.8632111	2092050
439	192721	20.9523268	2277904	479	229441	01.8860686	2087683

附表十 (續)

數	平方	平方根	倒數 0.00	數	平方	平方根	倒數 0.00
480	230400	21.9089023	2083333	520	270400	22.8035085	1923077
481	231361	21.9317122	2079002	521	271441	22.8254244	1919386
482	232324	21.9544984	2074689	522	272484	22.8473193	1915709
483	233289	21.9772610	2070393	523	273529	22.8691933	1912046
484	234256	22.0000000	2066116	524	274576	22.8910463	1908397
485	235225	22.0227155	2061856	525	275625	22.9128785	1904762
486	236196	22.0454077	2057613	526	276676	22.9346899	1901141
487	237169	22.0680765	2053388	527	277729	22.9564806	1897533
488	238144	22.0907220	2049180	528	278784	22.9782506	1893939
489	239121	22.1133444	2044990	529	279841	23.0000000	1890359
490	240100	22.1359436	2040816	530	280900	23.0217289	1886792
491	241081	22.1585198	2036660	531	281961	23.0434372	1883239
492	242064	22.1810730	2032520	532	283024	23.0651252	1879699
493	243049	22.2036033	2028398	533	284089	23.0867928	1876173
494	244036	22.2261108	2024291	534	285156	23.1084400	1872659
495	245025	22.2485955	2020202	535	286225	23.1300670	1869159
496	246016	22.2710575	2016129	536	287296	23.1516738	1865672
497	247009	22.2934968	2012072	537	288369	23.1732605	1862197
498	248004	22.3159136	2008032	538	289444	23.1948270	1858736
499	249001	22.3383079	2004008	539	290521	23.2163735	1855288
500	250000	22.3606798	2000000	540	291600	23.2379001	1851852
501	251001	22.3830293	1996008	541	292681	23.2594067	1848429
502	252004	22.4053565	1992032	542	293764	23.2808935	1845018
503	253009	22.4276615	1988072	543	294849	23.3023604	1841621
504	254016	22.4499443	1984127	544	295936	23.3238076	1838235
505	255025	22.4722051	1980198	545	297025	23.3452351	1834862
506	256036	22.4944438	1976285	546	298116	23.3666429	1831502
507	257049	22.5166605	1972387	547	299209	23.3880311	1828154
508	258064	22.5388553	1968504	548	300304	23.4093998	1824818
509	259081	22.5610283	1964637	549	301401	23.4307490	1821494
510	260100	22.5831796	1960784	550	302500	23.4520788	1818182
511	261121	22.6053091	1956947	551	303601	23.4733892	1814882
512	262144	22.6274170	1953125	552	304704	23.4946802	1811594
513	263169	22.6495033	1949318	553	305809	23.5159520	1808318
514	264196	22.6715681	1945525	554	306916	23.5372046	1805054
515	265225	22.6936114	1941748	555	308025	23.5584380	1801802
516	266256	22.7156334	1937984	556	309136	23.5796522	1798561
517	267289	22.7376340	1934236	557	310249	23.6008474	1795332
518	268324	22.7596134	1930502	558	311364	23.6220236	1792115
519	269361	22.7815715	1926782	559	312481	23.6431808	1788909

附表十　(續)

數	平方	平方根	倒數 0.00	數	平方	平方根	倒數 0.00
560	313600	23.6643191	1785714	600	360000	24.4948974	1666667
561	314721	23.6854386	1782531	601	361201	24.5153013	1663894
562	315844	23.7065392	1779359	602	362404	24.5356883	1661130
563	316969	23.7276210	1776199	603	363609	24.5560583	1658375
564	318096	23.7486842	1773050	604	364816	24.5764115	1655629
565	319225	23.7697286	1769912	605	366025	24.5967478	1652893
566	320356	23.7907545	1766784	606	367236	24.6170673	1650165
567	321489	23.8117618	1763668	607	368449	24.6373700	1647446
568	322624	23.8327506	1760563	608	369664	24.6576560	1644737
569	323761	23.8537209	1757469	609	370881	24.6779254	1642036
570	324900	23.8746728	1754386	610	372100	24.6981781	1639344
571	326041	23.8956063	1751313	611	373321	24.7184142	1636661
572	327184	23.9165215	1748252	612	374544	24.7386338	1633987
573	328329	23.9374184	1745201	613	375769	24.7588368	1631321
574	329476	23.9582971	1742160	614	376996	24.7790234	1628664
575	330625	23.9791576	1739130	615	378225	24.7991935	1626016
576	331776	24.0000000	1736111	616	379456	24.8193473	1623377
577	332929	24.0208243	1733102	617	380689	24.8394847	1620746
578	334084	24.0416306	1730104	618	381924	24.8596058	1618123
579	335241	24.0624188	1727116	619	383161	24.8797106	1615509
580	336400	24.0831892	1724138	620	384400	24.8997992	1612903
581	337561	24.1039416	1721170	621	385641	24.9198716	1610306
582	338724	24.1246762	1718213	622	386884	14.9399278	1607717
583	339889	24.1453929	1715266	623	388129	24.9599679	1605136
584	341056	24.1660919	1712329	624	389376	24.9799920	1602564
585	342225	24.1867732	1709402	625	390625	25.0000000	1600000
586	343396	24.2074369	1706485	626	391876	25.0199920	1597444
587	344569	24.2280829	1703578	627	393129	25.0399681	1594896
588	345744	24.2487113	1700680	628	394384	25.0599282	1592357
589	346921	24.2693222	1697793	629	395641	25.0798724	1589825
590	348100	24.2899156	1694915	630	396900	25.0998008	1587302
591	349281	24.3104916	1692047	631	398161	25.1197134	1584786
592	350464	24.3310501	1689189	632	399424	25.1396102	1582278
593	351649	24.3515913	1686341	633	400689	25.1594913	1579779
594	352836	24.3721152	1683502	634	401956	25.1793566	1577287
595	354025	24.3926218	1680672	635	403225	25.1992063	1574803
596	355216	24.4131112	1677852	636	404496	25.2190404	1572327
597	356409	24.4335834	1675042	637	405769	25.2388589	1569859
598	357604	24.4540385	1672241	638	407044	25.2586619	1567398
599	358801	24.4744765	1669449	639	408321	25.2784493	1564945

附表十 (續)

數	平 方	平 方 根	倒 數 0.00	數	平 方	平 方 根	倒 數 0.00
640	409600	25.2982213	1562500	685	469225	26.1725047	1459854
641	410881	25.3179778	1560062	686	470596	26.1916017	1457726
642	412164	25.3377189	1557632	687	471969	26.2106848	1455604
643	413449	25.3574447	1555210	688	473344	26.2297541	1453488
644	414736	25.3771551	1552795	689	474721	26.2488095	1451379
645	416025	25.3968502	1550388	690	476100	26.2678511	1449275
646	417316	25.4165301	1547988	691	477481	26.2868789	1447178
647	418609	25.4361947	1545595	692	478864	26.3058929	1445087
648	419904	25.4558441	1543210	693	480249	26.3248932	1443001
649	421201	25.4754784	1540832	694	481636	26.3438797	1440922
650	422500	25.4950976	1538462	695	483025	26.3628527	1438849
651	423801	25.5147016	1536098	696	484416	26.3818119	1436782
652	425104	25.5342907	1533742	697	485809	26.4007576	1434720
653	426409	25.5538647	1531394	698	487204	26.4196896	1432665
654	427716	25.5734237	1529052	699	488601	26.4386081	1430615
655	429025	25.5929678	1526718	700	490000	26.4575131	1428571
656	430336	25.6124969	1524390	701	491401	26.4764046	1426534
657	431649	25.6320112	1522070	702	492804	26.4952826	1424501
658	432964	25.6515107	1519757	703	494209	26.5141472	1422475
659	434281	25.6709953	1517451	704	495616	26.5329983	1420455
660	435600	25.6904652	1515152	705	497025	26.5518361	1418440
661	436921	25.7099203	1512859	706	498436	26.5706605	1416431
662	438244	25.7293607	1510574	707	499849	26.5894716	1414427
663	439569	25.7487864	1508296	708	501264	26.6082694	1412429
664	440896	25.7681975	1506024	709	502681	26.6270539	1410437
665	442225	25.7875939	1503759	710	504100	26.6458252	1408451
666	443556	25.8069758	1501502	711	505521	26.6645833	1406470
667	444889	25.8263431	1499250	712	506944	26.6833281	1404494
668	446224	25.8456960	1497006	713	508369	26.7020598	1402525
669	447561	25.8650343	1494768	714	509796	26.7207784	1400560
670	448900	25.8843582	1492537	715	511225	26.7394839	1398601
671	450241	25.9036677	1490313	716	512656	26.7581763	1396648
672	451584	25.9229628	1488095	717	514089	26.7768557	1394700
673	452929	25.9422435	1485884	718	515524	26.7955220	1392758
674	454276	25.9615100	1483680	719	516961	26.8141754	1390821
675	455625	25.9807621	1481481	720	518400	26.8328157	1388889
676	456976	26.0000000	1479290	721	519841	26.8514432	1386963
677	458329	26.0192237	1477105	722	521284	26.8700577	1385042
678	459684	26.0384331	1474926	723	522729	26.8886593	1383126
679	461041	26.0576284	1472754	724	524176	26.9072481	1381215
680	462400	26.0768096	1470588	725	525625	26.8258240	1379310
681	463761	26.0959767	1468429	726	527076	26.9443872	1377410
682	465124	26.1151297	1466276	727	528529	26.9629375	1375516
683	466489	26.1342687	1464129	728	529984	26.9814751	1373626
684	467856	26.1533937	1461988	729	531441	27.0000000	1371742

附表十　(續)

數	平方	平方根	倒數 0.00	數	平方	平方根	倒數 0.00
730	532900	27.0185122	1369863	775	600625	27.8388218	1290323
731	534361	27.0370117	1367989	776	602176	27.8567766	1288660
732	535824	27.0554985	1366120	777	603729	27.8747197	1287001
733	537289	27.0739727	1364256	778	605284	27.8926514	1285347
734	538756	27.0924344	1362398	779	606841	27.9105715	1283697
735	540225	27.1108834	1360544	780	608400	27.9284801	1282051
736	541696	27.1293199	1358696	781	609961	27.9463772	1280410
737	543169	27.1477439	1356852	782	611524	27.9642629	1278772
738	544644	27.1661554	1355014	783	613089	27.9821372	1277139
739	546121	27.1845544	1353180	784	614656	28.0000000	1275510
740	547600	27.2029410	1351351	785	616225	28.0178515	1273885
741	549081	27.2213152	1349528	786	617796	28.0356915	1272265
742	550564	27.2396769	1347709	787	619369	28.0535203	1270648
743	552049	27.2580263	1345895	788	620944	28.0713377	1269036
744	553536	27.2763634	1344086	789	622521	28.0891438	1267427
745	555025	27.2946881	1342282	790	624100	28.1069386	1265823
746	556516	27.3130006	1340483	791	625681	28.1247222	1264223
747	558009	27.3313007	1338688	792	627264	28.1424946	1262626
748	559504	27.3495887	1336898	793	628849	28.1602557	1261034
749	561001	27.3678644	1335113	794	630436	28.1780056	1259446
750	562500	27.3861279	1333333	795	632025	28.1957444	1257862
751	564001	27.4043792	1331558	796	633616	28.2134720	1256281
752	565504	27.4226184	1329787	797	635209	28.2311884	1254705
753	567009	27.4408455	1328021	798	636804	28.2488938	1253133
754	568516	27.4590604	1326260	799	638401	28.2665881	1251564
755	570025	27.4772633	1324503	800	640000	28.2842712	1250000
756	571536	27.4954542	1322751	801	641601	28.3019434	1248439
757	573049	27.5136330	1321004	802	643204	28.3196045	1246883
758	574564	27.5317998	1319261	803	644809	28.3372546	1245330
759	576081	27.5499546	1317523	804	646416	28.3548938	1243781
760	577600	27.5680975	1315789	805	648025	28.3725219	1242236
761	579121	27.5862284	1314060	806	649636	28.3901391	1240695
762	580644	27.6043475	1312336	807	651249	28.4077454	1239157
763	582169	27.6224546	1310616	808	652864	28.4253408	1237624
764	583696	27.6405499	1308901	809	654481	28.4429253	1236094
765	585225	27.6586334	1307190	810	656100	28.4604989	1234568
766	5 6756	27.6767050	1305483	811	657721	28.4780617	1233046
767	588289	27.6947648	1303781	812	659344	28.4956137	1231527
768	589824	27.7128129	1302083	813	660969	28.5131549	1230012
769	591361	27.7308492	1300390	814	662596	28.5306852	1228501
770	592900	27.7488739	1298701	815	664225	28.5482048	1226994
771	594441	27.7668868	1297017	816	665856	28.5657137	1225490
772	595984	27.7848880	1295337	817	667489	28.5832119	1223990
773	597529	27.8028775	1293661	818	669142	28.6006993	1222494
774	599076	27.8208555	1291990	819	670761	28.6181760	1221001

附表十 (續)

數	平方	平方根	倒數 0.00	數	平方	平方根	倒數 0.00
820	672400	28.6356421	1219512	865	748225	29.4108823	1156069
821	674041	28.6530976	1218021	866	749956	29.4278779	1154734
822	675684	28.6705424	1216545	867	751689	29.4448637	1153403
823	677329	28.6879766	1215067	868	753424	29.4618397	1152074
824	678976	28.7054002	1213592	869	755161	29.4788059	1150748
825	680625	28.7228132	1212121	870	756900	29.4957624	1149425
826	682276	28.7402157	1210654	871	758641	29.5127091	1148106
827	683929	28.7576077	1209190	872	760384	29.5296461	1146789
828	685584	28.7749891	1207729	873	762129	29.5465734	1145475
829	687241	28.7923601	1206273	874	763876	29.5634910	1144165
830	688900	28.8097206	1204819	875	765625	29.5803989	1142857
831	690561	28.8270706	1203369	876	767376	29.5972972	1141553
832	692224	28.8444102	1201923	877	769129	29.6141858	1140251
833	693889	28.8617394	1200480	878	770884	29.6310648	1138952
834	695556	28.8790582	1199041	879	772641	29.6479342	1137656
835	697225	28.8963666	1197605	880	774400	29.6647939	1136364
836	698896	28.9136646	1196172	881	776161	29.6816442	1135074
837	700569	28.9309523	1194743	882	777924	29.6984848	1133787
838	702244	28.9482297	1193317	883	779689	29.7153159	1132503
839	703921	28.9654967	1191895	884	781456	29.7321375	1131222
840	705600	28.9827535	1190476	885	783225	29.7489496	1129944
841	707281	29.0000000	1189061	886	784996	29.7657521	1128668
842	708964	29.0172363	1187648	887	786769	29.7825452	1127396
843	710649	29.0344623	1186240	888	788544	29.7993289	1126126
844	712336	29.0516781	1184834	889	790321	29.8161030	1124859
845	714025	29.0688837	1183432	890	792100	29.8328678	1123596
846	715716	29.0860791	1182033	891	793881	29.8496231	1122334
847	717409	29.1032644	1180638	892	795664	29.8663690	1121076
848	719104	29.1204396	1179245	893	797449	29.8831056	1119821
849	720801	29.1376046	1177856	894	799236	29.8998328	1118568
850	722500	29.1547595	1176471	895	801025	29.9165506	1117318
851	724201	29.1719043	1175088	896	802816	29.9332591	1116071
852	725904	29.1890390	1173709	897	804609	29.9499583	1114827
853	727609	29.2061637	1172333	898	806404	29.9666481	1113586
854	729316	29.2232784	1170960	899	808201	29.9833287	1112347
855	731025	29.2403830	1169591	900	810000	30.0000000	1111111
856	732736	29.2574777	1168224	901	811801	30.0166620	1109878
857	734449	29.2745623	1166861	902	813604	30.0333148	1108647
858	736164	29.2916370	1165501	903	815409	30.0499584	1107420
859	737881	29.3087018	1164144	904	817210	30.0665928	1106195
860	739600	29.3257566	1162791	905	819025	30.0832179	1104972
861	741321	29.3428015	1161440	906	820836	30.0998339	1103753
862	743044	29.3598365	1160093	907	822649	30.1164407	1102536
863	744769	29.3768616	1158749	908	824464	30.1330383	1101322
864	746496	29.3938769	1157407	909	826281	30.1496269	1100110

附表十　(續)

數	平方	平方根	倒數 0.00	數	平方	平方根	倒數 0.00
910	828100	30.1662063	1098901	955	912025	30.9030743	1047120
911	829921	30.1827765	1097695	956	913936	30.9192497	1046025
912	831744	30.1993377	1096491	957	915849	30.9354166	1044932
913	833569	30.2158899	1095290	958	917764	30.9515751	1043841
914	835396	30.2324329	1094092	959	919681	30.9677251	1042753
915	837225	30.2489669	1092896	960	921600	30.9838668	1041667
916	839056	30.2654919	1091703	961	923521	31.0000000	1040583
917	840889	30.2820079	1090513	962	925444	31.0161248	1039501
918	842724	30.2985148	1089325	963	927369	31.0322413	1038422
919	844561	30.3150128	1088139	964	929296	31.0483494	1037344
920	846400	30.3315018	1086957	965	931225	31.0644491	1036269
921	848241	30.3479818	1085776	966	933156	31.0805405	1035197
922	850084	30.3644529	1084599	967	935089	31.0966236	1034126
923	851929	30.3809151	1083424	968	937024	31.1126984	1033058
924	853776	30.3973683	1082251	969	938961	31.1287648	1031992
925	855625	30.4138127	1081081	970	940900	31.1448230	1030928
926	857476	30.4302481	1079914	971	942841	31.1608729	1029806
927	859329	30.4466747	1078749	972	944784	31.1769145	1028807
928	861184	30.4630924	1077586	973	946729	31.1929479	1027749
929	863041	30.4795013	1076426	974	948676	31.2089731	1026694
930	864900	30.4959014	1075269	975	950625	31.2249900	1025641
931	866761	30.5122926	1074114	976	952576	31.2409987	1024590
932	868624	30.5286750	1072961	977	954529	31.2569992	1023541
933	870489	30.5450487	1071811	978	956484	31.2729915	1022495
934	872356	30.5614136	1070664	979	958441	31.2889757	1021450
935	874225	30.5777697	1069519	980	960400	31.3049517	1020408
936	876096	30.5941171	1068376	981	962361	31.3209195	1019368
937	877969	30.6104557	1067236	982	964324	31.3368792	1018330
938	879844	30.6267857	1066098	983	966289	31.3528308	1017294
939	881721	30.6431069	1064963	984	968256	31.3687743	1016260
940	883600	30.6594194	1063830	985	970225	31.3847097	1015228
941	885481	30.6757233	1062699	986	972196	31.4006369	1014199
942	887364	30.6920185	1061571	987	974169	31.4165561	1013171
943	889249	30.7083051	1060445	988	976144	31.4324673	1012146
944	891136	30.7245830	1059322	989	978121	31.4483704	1011122
945	893025	30.7408523	1058201	990	980100	31.4642654	1010101
946	894916	30.7571130	1057082	991	982081	31.4801525	1009082
947	896809	30.7733651	1055966	992	984064	31.4960315	1008065
948	898704	30.7896086	1054852	993	986049	31.5119025	1007049
949	900601	30.8058436	1053741	994	988036	31.5277655	1006036
950	902500	30.8220700	1052632	995	990025	31.5436206	1005025
951	904401	30.8382879	1051525	996	992016	31.5594677	1004016
952	906304	30.8544972	1050420	997	994009	31.5753068	1003009
953	908209	30.8706981	1049318	998	996004	31.5911380	1002004
954	910116	30.8868904	1048218	999	998001	31.6069613	1001001
				1000	1000000	31.6227766	1000000

附表十一 數目的四位對數

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

附表十一　(續)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$\log .6745 = 9.8290 - 10$

附表十一 (續)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

各比例部分十分之一在右邊完全寫明，任何數目的四位對數，加上其比例部分即可直接讀出。這部分相當於數目的第四位。其錯誤在最後一位可許爲一。

以下三表均採 Holzinger, 書名同上，本書艾偉氏曾加以訂正附於高級統計學之後

附表十二

$\sqrt{1-r^2}$ 的對數

r	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
.000	00000	00000	00000	00000	00000	99999	99999	99999	99999	99998
.010	99998	99997	99997	99996	99996	99995	99994	99994	99993	99992
.020	99991	99990	99989	99988	99987	99986	99985	99984	99983	99982
.030	99980	99979	99978	99976	99975	99973	99972	99970	99969	99967
.040	99965	99963	99962	99960	99958	99956	99954	99952	99950	99948
.050	99946	99943	99941	99939	99937	99934	99932	99929	99927	99924
.060	99922	99919	99916	99914	99911	99908	99905	99902	99899	99896
.070	99893	99890	99887	99884	99881	99878	99874	99871	99867	99864
.080	99861	99857	99853	99850	99846	99843	99839	99835	99831	99827
.090	99823	99819	99815	99811	99807	99803	99799	99795	99790	99786
.100	99782	99777	99773	99768	99764	99759	99755	99750	99745	99740
.110	99736	99731	99726	99721	99716	99711	99706	99701	99696	99690
.120	99685	99680	99674	99669	99664	99658	99652	99647	99641	99636
.130	99630	99624	99618	99612	99607	99601	99595	99589	99582	99576
.140	99570	99564	99558	99551	99545	99539	99532	99526	99519	99512
.150	99506	99499	99492	99486	99479	99472	99465	99458	99451	99444
.160	99437	99430	99423	99415	99408	99401	99393	99386	99378	99371
.170	99363	99356	99348	99340	99332	99325	99317	99309	99301	99293
.180	99285	99277	99269	99260	99252	99244	99235	99227	99219	99210
.190	99202	99193	99184	99176	99167	99158	99149	99140	99132	99123
.200	99114	99104	99095	99086	99077	99068	99058	99049	99040	99030
.210	99021	99011	99001	98992	98982	98972	98962	98953	98943	98933
.220	98923	98913	98903	98892	98882	98872	98862	98851	98841	98830
.230	98820	98809	98799	98788	98777	98766	98756	98745	98734	98723
.240	98712	98701	98690	98678	98667	98656	98644	98633	98622	98610
.250	98599	98587	98575	98564	98552	98540	98528	98516	98504	98492
.260	98480	98468	98456	98444	98431	98419	98406	98394	98382	98369
.270	98356	98344	98331	98318	98305	98292	98279	98266	98253	98240
.280	98227	98214	98201	98187	98174	98160	98147	98133	98120	98106
.290	98092	98079	98065	98051	98037	98023	98009	97995	97981	97966

除最前五個對數的尾數外在此頁和下頁各數性都是 -1，此最前五數之性則爲零。

附表十二 (續)

$\sqrt{1-r^2}$ 的對數

r	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
.300	97952	97938	97923	97909	97894	97880	97865	97850	97836	97821
.310	97806	97791	97776	97761	97746	97731	97716	97700	97685	97670
.320	97654	97639	97623	97607	97592	97576	97560	97544	97528	97512
.330	97496	97480	97464	97448	97431	97415	97399	97382	97366	97349
.340	97332	97316	97299	97282	97265	97248	97231	97214	97197	97180
.350	97162	97145	97128	97110	97093	97075	97057	97040	97022	97004
.360	96986	96968	96950	96932	96914	96895	96877	96859	96840	96822
.370	96803	96784	96766	96747	96728	96709	96690	96671	96652	96633
.380	96614	96594	96575	96555	96536	96516	96497	96477	96457	96437
.390	96417	96397	96377	96357	96337	96316	96296	96276	96255	96235
.400	96214	96193	96172	96152	96131	96110	96089	96067	96046	96025
.410	96004	95982	95961	95939	95917	95896	95874	95852	95830	95808
.420	95786	95764	95741	95719	95697	95674	95652	95629	95606	95583
.430	95561	95538	95515	95491	95468	95445	95422	05398	95375	95351
.440	95328	95304	95280	95256	95232	95208	95184	95160	95135	95111
.450	95087	95062	95037	95013	94988	94963	94938	94913	94888	94863
.460	94837	94812	94786	94761	94735	94710	94684	94658	94632	94606
.470	94580	94553	94527	94501	94474	94448	94421	94394	94367	94340
.480	94313	94286	94259	94232	94204	94177	94149	94121	94094	94066
.490	94038	94010	93982	93953	93925	93897	93868	93840	93811	93782
.500	93753	93724	93695	93666	93636	93607	93578	93548	93518	93489
.510	93459	93429	93399	93368	93338	93308	93277	93247	93216	93185
.520	93154	93123	93092	93061	93030	92998	92967	92935	92903	92871
.530	92839	92807	92775	92743	92711	92678	92645	92613	92580	92547
.540	92514	92481	92447	92414	92381	92347	92313	92279	92245	92211
.550	92177	92143	92108	92074	92039	92005	91970	91935	91899	91864
.560	91829	91793	91758	91722	91686	91650	91614	91578	91542	91505
.570	91468	91432	91395	91358	91321	91283	91246	91209	91171	91133
.580	91095	91057	91019	90981	90942	90904	90865	90826	90787	90748
.590	90709	90670	90630	90590	90551	90511	90471	90430	90390	90350
.600	90309	90268	90227	90186	90145	90104	90062	90020	89979	89937
.610	89895	89852	89810	89767	89725	89682	89639	89595	89552	89509
.620	89465	89421	89377	89333	89289	89244	89200	89155	89110	89065
.630	89019	88974	88928	88883	88837	88791	88744	88698	88651	88604
.640	88557	88510	88463	88415	88368	88320	88272	88223	88175	88126

附表十二 (續)

$\sqrt{1-r^2}$ 的對數

r	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
.650	88078	88029	87979	87930	87881	87831	87781	87731	87681	87630
.660	87579	87528	87477	87426	87375	87323	87271	87219	87167	87114
.670	87062	87009	86955	86902	86849	86795	86741	86687	86632	86578
.680	86523	86468	86413	86357	86301	86246	86189	86133	86076	86019
.690	85962	85905	85848	85790	85732	85673	85615	85556	85497	85438
.700	85379	85319	85259	85199	85138	85077	85016	84955	84894	84832
.710	84770	84707	84645	84582	84519	84455	84392	84328	84264	84199
.720	84134	84069	84004	83938	83872	83806	83740	83673	83606	83538
.730	83470	83402	83334	83266	83197	83127	83058	82988	82918	82847
.740	82776	82705	82633	82561	82489	82417	82344	82271	82197	82123
.750	82049	81974	81899	81824	81748	81672	81596	81519	81442	81364
.760	81286	81208	81129	81050	80971	80891	80810	80730	80649	80567
.770	80485	80403	80320	80237	80153	80069	79985	79900	79814	79728
.780	79642	79555	79468	79381	79292	79204	79115	79025	78935	78845
.790	78754	78662	78570	78478	78384	78291	78197	78102	78007	77911
.800	77815	77718	77621	77523	77425	77326	77226	77126	77025	76924
.810	76822	76719	76616	76512	76408	76302	76197	76090	75983	75876
.820	75767	75658	75548	75438	75327	75215	75102	74989	74875	74761
.830	74645	74529	74412	74294	74175	74056	73936	73815	73693	73570
.840	73447	73323	73197	73071	72944	72816	72688	72558	72427	72296
.850	72163	72030	71895	71760	71623	71486	71347	71207	71067	70925
.860	70782	70638	70493	70347	70199	70051	69901	69750	69598	69444
.870	69289	69133	68976	68817	68657	68496	68333	68168	68003	67836
.880	67667	67497	67325	67152	66977	66800	66622	66442	66261	66078
.890	65893	65706	65517	65327	65134	64940	64744	64545	64345	64142
.900	63938	63731	63522	63311	63097	62881	62663	62442	62218	61992
.910	61764	61532	61299	61062	60822	60579	60334	60085	59833	59578
.920	59320	59058	58792	58524	58251	57975	57694	57410	57122	56830
.930	56533	56232	55926	55615	55300	54980	54654	54323	53987	53645
.940	53298	52944	52584	52217	51844	51464	51077	50682	50280	49869
.950	49450	49023	48586	48140	47684	47218	46741	46253	45753	45241
.960	44716	44177	43624	43056	42472	41872	41253	40616	39959	39280
.970	38579	37854	37103	36325	35516	34675	33800	32887	31932	30933
.980	29885	28782	27619	26389	25083	23693	22205	20607	18880	17002
.990	14943	12666	10119	07230	03894	99946*	95111*	88875*	80081*	65041*

對數的尾數有 * 號者其性爲 -2，其他在此頁均爲 -1。

附 表 十 三

$(1-r^2)$ 的對數

r	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
.000	00000	00000	00000	00000	99999†	99999	99998	99998	99997	99996
.010	99996	99995	99994	99993	99991	99990	99989	99987	99986	99984
.020	99983	99981	99979	99977	99975	99973	99971	99968	99966	99963
.030	99961	99958	99956	99953	99950	99947	99944	99941	99937	99934
.040	99930	99927	99923	99920	99916	99912	99908	99904	99900	99896
.050	99891	99887	99882	99878	99873	99868	99864	99859	99854	99849
.060	99843	99838	99833	99827	99822	99816	99810	99805	99799	99793
.070	99787	99781	99774	99768	99762	99755	99748	99742	99735	99728
.080	99721	99714	99707	99700	99692	99685	99678	99670	99662	99655
.090	99647	99639	99631	99623	99615	99606	99598	99589	99581	99572
.100	99564	99555	99546	99537	99528	99519	99509	99500	99490	99481
.110	99471	99462	99452	99442	99432	99422	99412	99401	99391	99381
.120	99370	99359	99349	99338	99327	99316	99305	99294	99283	99271
.130	99260	99248	99237	99225	99213	99201	99189	99177	99165	99153
.140	99140	99128	99115	99103	99090	99077	99064	99051	99038	99025
.150	99012	98998	98985	98971	98958	98944	98930	98916	98902	98888
.160	98874	98859	98845	98831	98816	98801	98786	98772	98757	98742
.170	98726	98711	98696	98680	98665	98649	98633	98618	98602	98586
.180	98570	98553	98537	98521	98504	98488	98471	98454	98437	98420
.190	98403	98386	98369	98351	98334	98316	98299	98281	98263	98245
.200	98227	98209	98191	98172	98154	98135	98117	98098	98079	98060
.210	98041	98022	98003	97984	97964	97945	97925	97905	97885	97865
.220	97845	97825	97805	97785	97764	97744	97723	97702	97682	97661
.230	97640	97618	97597	97576	97554	97533	97511	97489	97468	97446
.240	97424	97401	97379	97357	97334	97312	97289	97266	97243	97220
.250	97197	97174	97151	97127	97104	97080	97056	97032	97008	96984
.260	96960	96936	96912	96887	96862	96838	96813	96788	96763	96738
.270	96713	96687	96662	96636	96611	96585	96559	96533	96507	96481
.280	96454	96428	96401	96375	96348	96321	96294	96267	96240	96212
.290	96185	96157	96130	96102	96074	96046	96018	95990	95961	95933

† 除最前四個尾數外，在此頁各數都有 −1 的性，此最前四數則爲零性。

附表十三　(續)

(1－r^2) 的對數

r	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
.300	95904	95875	95847	95818	95789	95760	95730	95701	95671	95642
.310	95612	95582	95552	95522	95492	95462	95431	95401	95370	95339
.320	95308	95277	95246	95215	95183	95152	95120	95089	95057	95025
.330	94993	94960	94928	94896	94863	94830	94797	94764	94731	94698
.340	94665	94631	94598	94564	94530	94496	94462	94428	94394	94359
.350	94325	94290	94255	94220	94185	94150	94115	94079	94043	94008
.360	93972	93936	93900	93864	93827	93791	93754	93717	93680	93643
.370	93606	93569	93531	93494	93456	93418	93380	93342	93304	93266
.380	93227	93188	93150	93111	93072	93032	92993	92954	92914	92874
.390	92834	92794	92754	92714	92674	92633	92592	92551	92510	92469
.400	92427	92386	92345	92303	92261	92219	92177	92135	92092	92050
.410	92007	91964	91921	91878	91835	91791	91748	91704	91660	91616
.420	91572	91527	91483	91438	91393	91348	91303	91258	91212	91167
.430	91121	91075	91029	90983	90937	90890	90843	90797	90750	90702
.440	90655	90608	90560	90512	90464	90416	90368	90319	90271	90222
.450	90173	90124	90075	90025	89976	89926	89876	89826	89776	89725
.460	89675	89624	89573	89522	89471	89419	89368	89316	89264	89212
.470	89159	89107	89054	89001	88948	88895	88842	88788	88734	88681
.480	88627	88572	88518	88463	88408	88353	88298	88243	88187	88132
.490	88076	88020	87963	87907	87850	87793	87736	87679	87622	87564
.500	87506	87448	87390	87332	87273	87214	87155	87096	87037	86977
.510	86917	86857	86797	86737	86676	86615	86554	86493	86432	86370
.520	86308	86246	86184	86122	86059	85996	85933	85870	85807	85743
.530	85679	85615	85550	85486	85421	85356	85291	85225	85160	85094
.540	85028	84962	84895	84828	84761	84694	84627	84559	84491	84423
.550	84354	84286	84217	84148	84079	84009	83939	83869	83799	83728
.560	83658	83587	83516	83444	83372	83300	83228	83156	83083	83010
.570	82937	82863	82790	82716	82641	82567	82492	82417	82342	82266
.580	82191	82115	82038	81962	81885	81808	81730	81653	81575	81497
.590	81418	81339	81260	81181	81101	81022	80941	80861	80780	80699
.600	80618	80536	80455	80372	80290	80207	80124	80041	79957	79873
.610	79789	79705	79620	79535	79449	79363	79277	79191	79104	79017
.620	78930	78842	78754	78666	78577	78488	78399	78310	78220	78129
.630	78039	77948	77857	77765	77673	77581	77488	77396	77302	77209
.640	77115	77020	76926	76831	76735	76639	76543	76447	76350	76253

附 表 十 三 (續)

$(1-r^2)$ 的 對 數

	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
50	76155	76057	75959	75860	75761	75662	75562	75462	75361	75260
60	75159	75057	74955	74852	74749	74646	74542	74438	74333	74228
70	74123	74017	73911	73804	73697	73590	73482	73374	73265	73156
80	73046	72936	72825	72714	72603	72491	72379	72266	72153	72039
90	71925	71810	71695	71580	71463	71347	71230	71112	70994	70876
00	70757	70638	70518	70397	70276	70155	70033	69910	69787	69664
10	69539	69415	69290	69164	69038	68911	68784	68656	68527	68398
20	68269	68139	68008	67877	67745	67612	67479	67346	67211	67076
30	66941	66805	66668	66531	66393	66255	66115	65976	65835	65694
40	65552	65410	65267	65123	64979	64834	64688	64541	64394	64246
50	64098	63949	63799	63648	63496	63344	63191	63038	62883	62728
60	62572	62416	62258	62100	61941	61781	61621	61459	61297	61134
70	60970	60805	60640	60473	60306	60138	59969	59799	59628	59457
80	59284	59111	58936	58761	58585	58408	58230	58050	57870	57689
90	57507	57324	57140	56955	56769	56582	56394	56204	56014	55823
00	55630	55437	55242	55046	54849	54651	54452	54252	54050	53847
10	53643	53438	53232	53024	52815	52605	52393	52181	51967	51751
20	51534	51316	51097	50876	50654	50430	50205	49978	49750	49521
30	49290	49058	48823	48588	48351	48112	47872	47630	47386	47141
40	46894	46645	46395	46143	45889	45633	45375	45116	44855	44591
50	44326	44059	43790	43519	43246	42971	42694	42415	42133	41850
60	41564	41276	40986	40693	40398	40101	39802	39500	39195	38888
70	38579	38266	37952	37634	37314	36991	36666	36337	36006	35671
80	35334	34994	34650	34304	33954	33601	33245	32885	32522	32155
90	31785	31412	31034	30653	30269	29880	29487	29090	28690	28285
00	27875	27462	27044	26621	26194	25762	25325	24883	24437	23985
10	23528	23065	22597	22123	21644	21159	20667	20170	19666	19156
20	18639	18115	17585	17047	16502	15949	15389	14820	14244	13659
30	13066	12463	11852	11231	10600	09959	09309	08647	07975	07291
40	06595	05888	05168	04435	03688	02928	02154	01364	00559	99738*
50	98900*	98045*	97172*	96280*	95368*	94436*	93482*	92506*	91506*	90482*
60	89432*	88354*	87248*	86112*	84944*	83743*	82506*	81232*	79918*	78561*
70	77159*	75708*	74206*	72649*	71032*	69351*	67600*	65773*	63865*	61867*
80	59770*	57564*	55238*	52777*	50166*	47385*	44411*	41214*	37760*	34003*
90	29885*	25331*	20238*	14461*	07788*	99891**	90222**	77750**	60163**	30081**

尾數有 * 號者其性爲－2，有 * * 者其性爲－3。其他均爲－1。

英 漢 名 詞 對 照 表

Accumulated frequency 遞加次數或次數和
Approximate mode 近似衆數
Arithmetic mean 算術均數
Attenuation 相關減弱
Average deviation 平均差

Bi-serial coefficient of correlation 二項數列相關係數
Bracket method, the 弧級法
Broad category 廣類

Central tendency, measures of 中心量數
Characteristic equation 特性方程
Chi-square test 琪冪試驗法
Class 組
Class frequency 組次數
Class interval 組距
Class limit 組限
Co-efficient of association 相聯係數
Co-efficient of colligation 綜合係數
Co-efficient of contigency 相依係數
Co-efficient of mean square contigency 均方相依係數
Co-efficient of variation 差異係數
Column 列, 直行
Column diagram 直方圖
Combination 組合
Consistency 相符度
Constant error 常性差誤
Correlation 相關
Correlation ratio 相關比
Cosine π method, the 餘弦 π 法
Criterion 效標
Crude mode 粗率衆數

Frequency 次數
Frequency distribution 次數分配
Frequency polygon 多邊圖或次數多邊圖
Function 函數

Geometric mean 幾何均數

Harmonic mean 調和均數
Histogram 直方圖

Leptokurtic or very peaked distribution 尖頂分配
Linear correlation 直線相關

Lower limit 下限度
Lower quartile 下四分位

Mean 均數
Measures of central tendency 中心量數
Median 中位數或中數
Median deviation 中位差
Method of rank difference, the 等級相差法
Method of unlike signs, the 異號法
Mid-point 組距中點
Mid-rank method, the 中級法
Mid-score 中成績
Mode 衆數
Monroes's adding machine 門羅加法機器
Multiple correlation 多數相關

Non-linear correlation 非直線相關
Normal probability curve 常態曲線

Ogive curve 百分曲線

Partial correlation 分析相關
Percentile 百分位數
Percentile rank 百分位或百分等第
Permutation 錯列
Point measure 點量數
Probable error 機誤
Probability 機率
Product moment correlation coefficient 積差相關係數

Quartile 四分位
Quartile deviation 四分位差

Range 全距
Rank correlation 等級相關法
Ratio method 比例法
Regression 迴歸
Reliability 信度
Reliability coefficient 信度係數
Response error formulas 反應差誤公式
Root-mean-square-deviation 根一均一方一差
Row 排, 橫行

Sampling 抽樣
Sampling error formulas 抽樣差誤公式
Score 量數或分數
Self-correlation coefficient 自身相關係數
Semi-inter-quartile-range 見 quartile deviation
Skewness 偏態性
Spearman's "foot-rule" for correlation 斯皮門簡捷相關法
Standard deviation 標準差
Standard measure method 標準數法
Statistics 統計

Tally 劃記
Tendency 傾向

Test for linearity 直線性試驗
True mode 直正衆數

Upper limit 上限度

Upper quartile 上四分位

Validity 効度
Variable 變量
Variable error 變性差誤