Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2022**

Analysis I

Arbeitsblatt 6

Übungsaufgaben

Aufgabe 6.1.*

Es sei K ein angeordneter Körper, es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in K und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in K. Zeige, dass dann auch die Produktfolge $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

In den folgenden Aufgaben werden die Aussagen (1), (3) und (5) von Lemma 6.1 bewiesen.

Aufgabe 6.2.*

Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in K. Zeige, dass die Summenfolge $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) + \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)$$

ist.

Aufgabe 6.3. Es sei K ein angeordneter Körper und es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in K. Sei $c \in K$. Zeige, dass die Folge $(c\cdot x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty}(c\cdot x_n) = c\cdot\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$$

ist.

Aufgabe 6.4. Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in K. Es sei $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$ und $x_n \neq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Zeige, dass $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent ist mit

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} y_n}{x}.$$

Aufgabe 6.5. Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in K, wobei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiere. Die Differenzenfolge $x_n - y_n$ sei eine Nullfolge. Zeige, dass $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls gegen x konvergiert.

Für die folgende Aufgabe brauchen wir den Begriff der Polynomfunktion.

Es sei K ein Körper und seien $a_0, a_1, \ldots, a_d \in K$. Eine Funktion

$$P\colon K \longrightarrow K,\, x \longmapsto P(x),$$

mit

$$P(x) \,=\, \sum_{i=0}^{d} a_i x^i \,=\, a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d$$

heißt *Polynomfunktion*.

Aufgabe 6.6. Es sei K ein angeordneter Körper und es sei $P(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ eine Polynomfunktion. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in K mit Grenzwert x. Zeige durch Induktion über d, dass dann auch die durch

$$y_n := P(x_n)$$

definierte Folge konvergiert, und zwar gegen $P(x)$.

Aufgabe 6.7.*

Entscheide, ob die Folge

$$x_n \,=\, \frac{3n^3 - n^2 - 7}{2n^3 + n + 8}$$

in $\mathbb{Q}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 6.8. Bestimme den Grenzwert der durch

$$x_n \,=\, \frac{7n^3 - 3n^2 + 2n - 11}{13n^3 - 5n + 4}$$

definierten Folge.

Für die folgende Aufgabe können Sie bekannte Eigenschaften der Sinusfunktion verwenden.

Aufgabe 6.9.*

Bestimme den Grenzwert der Folge

$$\frac{\sin n}{n},\, n \in \mathbb{N}_+\,.$$

Aufgabe 6.10.*

Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $x_n \geq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass dann $\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} y_n$ gilt.

Aufgabe 6.11.*

Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei Folgen in K. Es gelte $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a. Zeige, dass dann auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a konvergiert.

Aufgabe 6.12. Man gebe ein Beispiel für eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, die (in $\mathbb{Q}$) nicht konvergiert.

Aufgabe 6.13.*

Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass eine Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K beschränkt ist.

Aufgabe 6.14.*

Es sei K ein angeordneter Körper. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in K, die eine konvergente Teilfolge enthalte. Zeige, dass die Folge konvergiert.

Aufgabe 6.15.*

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Es gelte

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_+$. Folgt daraus, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist?

Aufgabe 6.16. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in einem angeordneten Körper und es sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in K. Zeige, dass die Summenfolge

$$z_n = x_n + y_n$$

ebenfalls eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 6.17. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in einem angeordneten Körper. Zeige, dass es eine Teilfolge x_{n_i}, $i \in \mathbb{N}$, derart gibt, dass folgende Eigenschaft erfüllt ist: Zu jedem $k \in \mathbb{N}_+$ gilt für alle $i, j \geq k$ die Abschätzung

$$\left|x_{n_i} - x_{n_j}\right| \leq \frac{1}{k}.$$

Aufgabe 6.18. Es sei $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine nichtnegative reelle Zahl und $x_0 \in \mathbb{R}_+$. Zeige, dass die rekursiv definierte Folge mit

$$x_{n+1} := \frac{x_n + a/x_n}{2}$$

gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

Aufgabe 6.19.*

Untersuche die Folge

$$x_n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1} - n$$

auf Konvergenz.

Aufgabe 6.20. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass für die Folge der Stammbrüche die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) Die Folge $\frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge.
(2) Die Folge $\frac{1}{n}$ ist eine Cauchy-Folge.
(3) Der Körper K ist archimedisch angeordnet.

Aufgabe 6.21. Es sei K ein angeordneter Körper und sei $T \subseteq K$ eine Telmenge, die das Supremum $x \in K$ besitze. Zeige, dass es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in T gibt, die gegen x konvergiert.

Aufgabe 6.22. Es sei K ein angeordneter Körper und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine wachsende Folge in K. Zeige, dass die Folge genau dann konvergiert, wenn die Menge $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein Supremum besitzt.

Die nächste Aufgabe verwendet die folgende Definition.

Es sei K ein angeordneter Körper. Eine Teilmenge $T \subseteq K$ heißt ein *Abschnitt*, wenn für alle $a, b \in T$ mit $a \leq b$ und jedes $x \in K$ mit $a \leq x \leq b$ auch $x \in T$ ist.

Aufgabe 6.23. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass jedes Intervall (einschließlich der unbeschränkten Intervalle) in K ein Abschnitt ist.

Man gebe ein Beispiel für einen Abschnitt in $\mathbb{Q}$, der kein Intervall ist.

Zeige, dass in $\mathbb{R}$ jeder Abschnitt ein Intervall ist.

Aufgabe 6.24. Es sei K ein archimedisch angeordneter vollständiger Körper. Zeige, dass $x \in K$ genau dann nichtnegativ ist, wenn x eine Quadratwurzel besitzt.

Die folgende Aufgabe setzt Kenntnisse in linearer Algebra voraus.

Aufgabe 6.25.*

Es sei K ein angeordneter Körper und sei

$$V = K^{\mathbb{N}_+}$$

der Vektorraum aller Folgen in K (mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation).

a) Zeige (ohne Sätze über konvergente Folgen zu verwenden), dass die Menge der Nullfolgen, also

$$U = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}_+} \mid (x_n)_{n \in \mathbb{N}_+} \text{ konvergiert gegen } 0 \right\}$$

ein K-Untervektorraum von V ist.

b) Sind die beiden Folgen

$$(1/n)_{n \in \mathbb{N}_+} \text{ und } (1/n^2)_{n \in \mathbb{N}_+}$$

linear unabhängig in V?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 6.26. (3 Punkte)

Berechne den Grenzwert der Folge

$$x_n = 5\left(\frac{2n+1}{n}\right)^3 - 4\left(\frac{2n+1}{n}\right)^2 + 2\left(\frac{2n+1}{n}\right) - 3$$

für $n \to \infty$.

Aufgabe 6.27. (5 Punkte)

Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und seien $P(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ und $Q(x) = \sum_{i=0}^{e} b_i x^i$ Polynome mit $a_d, b_e \neq 0$. Man bestimme in Abhängigkeit von d und e, ob die durch

$$z_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$$

(für n hinreichend groß) definierte Folge konvergiert oder nicht, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 6.28. (4 Punkte)

Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und sei $P(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ ein Polynom mit $d \geq 1$ und $a_d \neq 0$. Zeige, dass dann die durch

$$y_n := P(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i$$

definierte Folge bestimmt gegen $+\infty$ divergiert, falls $a_d > 0$ ist, und bestimmt gegen $-\infty$ divergiert, falls $a_d < 0$ ist.

Man folgere, dass die Folgenglieder

$$\frac{1}{y_n}$$

für n hinreichend groß definiert sind und gegen 0 konvergieren.

Aufgabe 6.29. (3 Punkte)

Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in einem angeordneten Körper K derart, dass

$$x_n \leq y_n \leq z_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen und es sei die Differenzfolge $z_n - x_n$ eine Nullfolge. Zeige, dass dann auch $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 6.30. (3 Punkte)

Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in einem angeordneten Körper K, die sowohl unendlich viele positive als auch unendlich viele negative Folgenglieder besitzt. Zeige, dass es sich um eine Nullfolge handelt.

Abbildungsverzeichnis