Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Arbeitsblatt 23

Aufgabe 23.1. Es sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe einer kommutativen Gruppe G und sei $\varphi\colon H \to \mathbb{Z}$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass es einen Gruppenhomomorphismus $G \to \mathbb{Q}$ gibt, der φ (als Abbildung nach $\mathbb{Q}$) fortsetzt.

Aufgabe 23.2. Zeige, dass die Gruppe $(\mathbb{Q}_+, \cdot)$ nicht divisibel ist.

Aufgabe 23.3. Zeige, dass die Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ divisibel sind. Ist auch $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$ divisibel?

Aufgabe 23.4. Zeige, dass die Gruppen $\mathbb{Z}/(n)$ mit $n \in \mathbb{N}_+$ nicht injektiv sind.

Aufgabe 23.5. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige, dass die Einheitengruppe $K^\times$ divisibel ist.

Aufgabe 23.6. Beschreibe für die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}/(n)$ eine divisible Gruppe D mit $\mathbb{Z}/(n) \subseteq D$

Aufgabe 23.7. Es sei D eine divisible Gruppe und S eine Menge. Zeige, dass die Gruppe $\operatorname{Abb}(S, D)$ ebenfalls divisibel ist.

Aufgabe 23.8. Es sei D eine divisible Gruppe und S eine kommutative Gruppe. Zeige, dass die Gruppe $\operatorname{Hom}(S, D)$ ebenfalls divisibel ist.

Aufgabe 23.9. Diskutiere Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen injektiven und projektiven Moduln über einem kommutativen Ring R.

Aufgabe 23.10. Man gebe ein Beispiel für einen injektiven R-Modul M über einem kommutativen Ring R derart, dass M als kommutative Gruppe nicht divisibel ist.

Aufgabe 23.11. Man gebe ein Beispiel für einen nicht injektiven R-Modul M über einem kommutativen Ring R derart, dass M als kommutative Gruppe divisibel ist.

Tipp: Betrachte $R = M = \mathbb{Q}[X]$.

Aufgabe 23.12. Es sei R ein injektiver R-Modul über einem kommutativen Ring R und sei $r \in R$ ein Nichtnullteiler. Zeige, dass die Multiplikation $\mu_r \colon I \to I$, $v \mapsto rv$, surjektiv ist.

Aufgabe 23.13. Zeige, dass jede kommutative Gruppe G eine injektive Auflösung der Form

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow 0$$

besitzt.

Aufgabe 23.14. Es sei $\mathcal{I}_j$, $j \in J$, eine Familie von injektiven Garben von kommutativen Gruppen auf einem topologischen Raum X. Zeige, dass auch das direkte Produkt $\prod_{j \in J} \mathcal{I}_j$ injektiv ist.

Aufgabe 23.15. Zeige, dass die Garbe der reellwertigen stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ nicht welk ist.

Aufgabe 23.16. Zeige, dass auf einem diskreten topologischen Raum X jede Garbe welk ist.

Aufgabe 23.17. Zeige, dass eine lokal konstante Garbe $\mathcal{G}$ auf einem irreduziblen topologischen Raum welk ist.

Aufgabe 23.18. Zeige, dass eine lokal konstante Garbe $\mathcal{G}$ auf einem topologischen Raum nicht welk sein muss.

Aufgabe 23.19. Es sei G eine kommutative Gruppe und X ein topologischer Raum. Zeige, dass die Garbe $U \mapsto \operatorname{Abb}(U, G)$ auf X welk ist.

Aufgabe 23.20. Es sei $\mathcal{G}_j$, $j \in J$, eine Familie von welken Garben auf einem topologischen Raum X. Zeige, dass auch das direkte Produkt $\prod_{j \in J} \mathcal{G}_j$ welk ist.

AUFGABE 23.21. Es sei X ein topologischer Raum mit einer Zerlegung $X = Y \uplus Z$ in disjunkte offene nichtleere Teilmengen. Es sei $\mathcal{G}$ eine Garbe auf Y und $\mathcal{H}$ eine Garbe auf Z. Zeige, dass die durch

$$\mathcal{F}(U) = \mathcal{G}(U \cap Y) \times \mathcal{H}(U \cap Z)$$

genau dann welk ist, wenn $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ welk sind.

Abbildungsverzeichnis