Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Vorlesung 13

Die Kegelabbildung

Definition 13.1. Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring. Dann nennt man zu einem Ideal $\mathfrak{a}$ das von allen homogenen Elementen aus $\mathfrak{a}$ erzeugte Ideal die *Homogenisierung* von $\mathfrak{a}$. Sie wird mit $\mathfrak{a}^h$ bezeichnet.

Die Homogenisierung ist wieder ein Ideal, das im Ausgangsideal enthalten ist. Zu einem Primideal ist die Homogenisierung ein Primideal.

Definition 13.2. Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring. Dann versteht man unter der *Kegelabbildung* den Schemamorphismus

$$D(R_+) \longrightarrow \operatorname{Proj}(R),\, \mathfrak{p} \longmapsto \mathfrak{p}^h,$$

der auf den offenen Mengen zu homogenen Elementen $f \in R_+$ durch die Spektrumsabbildung zu $(R_f)_0 \to R_f$ gegeben ist.

Satz 13.3. *Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring. Dann ist die Kegelabbildung in der Tat ein Schemamorphismus.*

Beweis. Die Abbildung ist wohldefiniert, da die Homogenisierung eines Primideals wieder ein Primideal ist. Zu einem homogenen $f \in R_+$ und einem Primideal $\mathfrak{p}$ ist $f \in \mathfrak{p}$ genau dann, wenn $f \in \mathfrak{p}^h$ ist, daher ist das Urbild von $D_+(f)$ gleich $D(f)$ und die Abbildung ist stetig. Das Diagramm von Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} D(f) & \longrightarrow & D_+(f) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Spek}(R_f) & \longrightarrow & \operatorname{Spek}\left((R_f)_0\right) \end{array},$$

kommutiert. Dabei steht oben die eingeschränkte Kegelabbildung, unten die natürliche Spektrumsabbildung, links die Identifizierung aus Lemma 9.13 und rechts die Identifizierung aus Lemma 12.8. Um die Kommutativität nachzuweisen, ist für ein Primideal $\mathfrak{p} \in D(f)$ die Gleichheit

$$\mathfrak{p}^h \cap (R_f)_0 = \mathfrak{p} \cap (R_f)_0$$

zu zeigen, wobei die Primideale in R_f aufzufassen sind. Die Gleichheit beruht auf den Argumenten zu Lemma 12.8. Dadurch ist der Morphismus schematheoretisch auf $D(f)$ festgelegt. Die Morphismen $\operatorname{Spek}(R_f) \to \operatorname{Spek}\left((R_f)_0\right)$ zu verschiedenen f sind miteinander kompatibel und legen einen globalen Schemamorphismus fest. $\square$

Beispiel 13.4. Zum Polynomring $K[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ in $n+1$ Variablen mit der Standardgraduierung über einem Körper K ist die Kegelabbildung gleich

$$\mathbb{A}_K^{n+1} \supset D(X_0, X_1, \ldots, X_n) \longrightarrow \mathbb{P}_K^n,\ \mathfrak{p} \longmapsto \mathfrak{p}^h.$$

Auf den K-Punkten ist diese Abbildung einfach durch

$$K^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(K),\ (x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_n) \longmapsto (x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_n)\,,$$

geben, die einem Punkt $\neq 0$ die durch diesen Punkt und den Nullpunkt bestimmte Gerade zuordnet.

Moduln auf einem beringten Raum

So wie es für einen kommutativen Ring R wichtig ist, die R-Moduln zu verstehen, muss man für einen beringten Raum die darauf gegebenen $\mathcal{O}_X$-Moduln verstehen.

Definition 13.5. Eine Garbe $\mathcal{M}$ auf einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt $\mathcal{O}_X$- *Modul* , wenn es für jede offene Menge $U \subseteq X$ auf $\Gamma(U, \mathcal{M})$ eine $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-Modulstruktur gegeben ist, die mit den Restriktionsabbildungen zu $U \subseteq V$ verträglich ist.

Die Verträglichkeitsbedingung bedeutet, dass zu offenen Mengen $U \subseteq V$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(V, \mathcal{O}_X) \times \Gamma(V, \mathcal{M}) & \longrightarrow & \Gamma(V, \mathcal{M}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \times \Gamma(U, \mathcal{M}) & \longrightarrow & \Gamma(U, \mathcal{M}) \end{array}$$

kommutiert. Die Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ ist insbesondere ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Ein $\mathcal{O}_X$-Modul ist insbesondere eine Garbe von abelschen Gruppen.

Definition 13.6. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Eine Untergarbe $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ derart, dass $\Gamma(U, \mathcal{N})$ für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ ein $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-Untermodul von $\Gamma(U, \mathcal{M})$ ist, heißt $\mathcal{O}_X$- *Untermodul* von $\mathcal{M}$.

Definition 13.7. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum. Ein $\mathcal{O}_X$-Untermodul $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$ heißt *Idealgarbe.*

Definition 13.8. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal beringter Raum und $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Zu einem Punkt $P \in X$ nennt man

$$\mathcal{M}(P) := \mathcal{M}_P \otimes_{\mathcal{O}_{X,P}} \kappa(P)$$

die *Faser* von $\mathcal{M}$ im Punkt P.

Die Faser ist insbesondere ein Vektorraum über dem Restekörper $\kappa(P)$.

Definition 13.9. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ $\mathcal{O}_X$-Moduln auf X. Ein Garbenhomomorphismus $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ heißt *$\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus* , wenn für jede offene Menge $U \subseteq X$ die Abbildung

$$\Gamma(U, \mathcal{M}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{N})$$

ein $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-Modulhomomorphismus ist.

Ein $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus ist insbesondere ein Homomorphismus von Garben von abelschen Gruppen.

Die folgende Aussage ist eine Version des Festlegungssatzes aus der linearen Algebra.

Satz 13.10. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und sei $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{O}_X$-Moduln auf X. Dann geben globale Schnitte $s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{M})$ Anlass zu einem eindeutig bestimmten Modulhomomorphismus*

$$\varphi\colon \mathcal{O}_X^n \longrightarrow \mathcal{M},\ e_i \longmapsto s_i.$$

Beweis. Zu jeder offenen Menge $U \subseteq X$ ist $\Gamma(U, \mathcal{O}_X^n) = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)^n$ der freie $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-Modul mit der Basis $e_1, \ldots, e_n$. Die globalen Schnitte s_i liefern Einschränkungen $(s_i)|_U \in \Gamma(U, \mathcal{M})$. Nach dem Festlegungssatz gibt es dazu einen eindeutig bestimmten $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-Modulhomomorphismus

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X)^n \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{M}),\ e_i \longmapsto (s_i)|_U.$$

Diese Modulhomomorphismen sind mit den Einschränkungen zu $V \subseteq U$ verträglich und daher liegt ein Homomorphismus von Modulgarben vor. □

Lemma 13.11. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und sei $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{O}_X$-Moduln auf X. Dann entspricht ein globaler Schnitt $s \in \Gamma(X, \mathcal{M})$ eindeutig dem Modulhomomorphismus*

$$\varphi\colon \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{M},\ 1 \longmapsto s.$$

Beweis. Dies ist ein Spezialfall von Satz 13.10. □

Konstruktionen für Modulgarben

Definition 13.12. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ Modulgarben auf X. Dann nennt man

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \{\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N} \mid \varphi \text{ Modulhomomorphismus}\}$$

mit der natürlichen $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-Modulstruktur den (globalen) *Homomorphismenmodul* zu $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$.

Im Wesentlichen gibt es zu jeder Konstruktion für R-Moduln eine analoge Konstruktion für $\mathcal{O}_X$-Moduln. Der Leitgedanke ist dabei, dass die konstruierten Objekte wieder die „richtigen Eigenschaften" innerhalb der Kategorie aller $\mathcal{O}_X$-Moduln besitzt. Von daher ist auch zu erwarten, dass die vorstehende Definition noch nicht das letzte Wort ist, sondern um eine Garbenversion zu erweitern ist.

Definition 13.13. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ Modulgarben auf X. Dann nennt man die Zuordnung

$$U \longmapsto \operatorname{Hom}(\mathcal{M}|_U, \mathcal{N}|_U) = \{\varphi : \mathcal{M}|_U \to \mathcal{N}|_U \mid \varphi \text{ Modulhomomorphismus}\}$$

die *Homomorphismengarbe* zu $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$. Sie wird mit $\mathcal{H}om(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ bezeichnet.

Es ist also

$$\mathcal{H}om(\mathcal{M}, \mathcal{N})(U) \,=\, \operatorname{Hom}(\mathcal{M}|_U, \mathcal{N}|_U).$$

Lemma 13.14. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ Modulgarben auf X. Dann ist die Homomorphismengarbe $\mathcal{H}om(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe auf X.*

Beweis. Es liegt die Beziehung

$$\mathcal{H}om(\mathcal{M}, \mathcal{N})(U) \,=\, \operatorname{Hom}(\mathcal{M}|_U, \mathcal{N}|_U) \,\subseteq\, \operatorname{Mor}(\mathcal{M}|_U, \mathcal{N}|_U)$$

vor, und rechts steht nach Lemma 4.9 eine Garbe. Die Homomorphieeigenschaft, also die Verträglichkeit mit der Addition und der Skalarmultiplikation, kann man dabei lokal testen (siehe Aufgabe 13.11), so dass links eine Untergarbe steht. Die $\mathcal{O}_X$-Struktur auf $\mathcal{H}om(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ wird durch die Addition und Skalarmultiplikation in der zweiten Komponente gegeben, und dies ist mit den Einschränkungen verträglich. □

Definition 13.15. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und sei $\mathcal{M}$ eine Modulgarbe auf X. Dann nennt man

$$\mathcal{M}^* \,=\, \mathcal{H}om(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$$

mit der natürlichen $\mathcal{O}_X$-Modulstruktur den *dualen Modul* zu $\mathcal{M}$.

Definition 13.16. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ Modulgarben auf X. Dann nennt man die Vergarbung der Prägarbe

$$U \longmapsto \Gamma(U, \mathcal{F}) \otimes_{\Gamma(U, \mathcal{O}_X)} \Gamma(U, \mathcal{G})$$

das *Tensorprodukt* der Moduln. Sie wird mit $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ bezeichnet.

Aufgrund der universellen Eigenschaft der Vergarbung gibt es eine kanonische Abbildung

$$\Gamma(U, \mathcal{F}) \otimes_{\Gamma(U, \mathcal{O}_X)} \Gamma(U, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}),$$

die in den Halmen ein Isomorphismus ist. Der Halm ist dabei das Tensorprodukt der Halme, siehe Aufgabe 13.13.

Invertierbare Garben

Definition 13.17. Ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{L}$ auf einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *invertierbar*, wenn es eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ derart gibt, dass die Einschränkungen $\mathcal{L}|_{U_i}$ isomorph zu $\mathcal{O}_X|_{U_i}$ sind.

Eine invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ auf einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *trivial*, wenn sie isomorph zur Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ ist.

Beispiel 13.18. Es sei X ein topologischer Raum, versehen mit der Garbe der stetigen Funktionen $C(-, \mathbb{R})$ und $L \to X$ eine reelles Geradenbündel auf X. Dann ist die Garbe der stetigen Schnitte S im Sinne von Beispiel 3.12 ein invertierbarer $C(-, \mathbb{R})$-Modul. Zu einer offenen Menge $U \subseteq X$ mit einer Trivialisierung $L|_U \cong \mathbb{R} \times U$ ist ja $S(U, L|_U) \cong C(U, \mathbb{R})$,

Beispiel 13.19. Es sei K ein Körper und $\mathbb{P}_K^n$ der projektive Raum über K. Die Strukturgarbe ist für jede offene Teilmenge U eine Teilmenge des Funktionenkörpers

$$\Gamma\big(U, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^n}\big) \subseteq K\big(\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_n}{X_0}\big).$$

Wegen der Faktorialität des Polynomringes gibt es zu jedem homogenen Ideal $\mathfrak{a}$ ein bis auf Multiplikation mit einem Skalar eindeutig bestimmtes homogenes Polynom f von maximalem Grad ohne mehrfache Faktoren mit

$$D_+(\mathfrak{a}) \subseteq D_+(f)$$

(daei ist hier $f = 1$ erlaubt, wobei dann allerdings die Schreibweise $D_+(f)$ nicht verwendet wird.). Wegen Satz 9.8 ist der globale Schnittring gleich

$$\Gamma\big(U, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^n}\big) = \Gamma\big(D_+(f), \mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^n}\big) = (K[X_0, X_1, \ldots, X_n]_f)_0 \subseteq K\big(\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_n}{X_0}\big).$$

Sei $\ell \in \mathbb{Z}$ fixiert. Wir definieren eine Garbe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^n}(\ell)$ durch

$$\Gamma\big(U, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^n}(\ell)\big) = \Gamma\big(D_+(f), \mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^n}(\ell)\big) := (K[X_0, X_1, \ldots, X_n]_f)_\ell.$$

Dabei handelt es sich um eine invertierbare Garbe. Auf $D_+(X_0)$ (und ebenso auf den $D_+(X_i)$) ist nämlich

$$(K[X_0, X_1, \ldots, X_n]_{X_0})_0 \longrightarrow (K[X_0, X_1, \ldots, X_n]_{X_0})_\ell, \ \frac{F}{G} \longmapsto X_0^\ell \cdot \frac{F}{G},$$

ein $(K[X_0, X_1, \ldots, X_n]_{X_0})_0$-Modulisomorphismus, der sich auf die kleineren offenen Teilmengen überträgt. Die globale Auswertung auf dem projektiven Raum ist einfach $(K[X_0, X_1, \ldots, X_n])_\ell$, was zeigt, dass (bei $n \geq 1$) diese invertierbaren Garben zu $\ell \geq 0$ nicht zueinander isomorph sind (das stimmt für alle ℓ).

DEFINITION 13.20. Zu einem lokal beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, einer invertierbaren Garbe $\mathcal{L}$ auf X und einem globalen Schnitt $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ nennt man

$$X_s := \{P \in X \mid s_P \notin \mathfrak{m}_P \mathcal{L}_P\}$$

den *Invertierbarkeitsort* von s.

Das Komplement $X \setminus X_s$, also das Nullstellengebilde des Schnittes, bezeichnen wir mit $Z(s)$.

LEMMA 13.21. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal beringter Raum, $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X und $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ ein globaler Schnitt. Dann ist der Invertierbarkeitsort $X_s \subseteq X$ offen.*

Beweis. Dies folgt durch eine lokale Betrachtung aus Lemma 7.16. □

LEMMA 13.22. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal beringter Raum und $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X. Es sei $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ ein globaler Schnitt mit dem Invertierbarkeitsort X_s. Dann ist die Einschränkung $\mathcal{L}|_{X_s}$ trivial.*

Beweis. Der globale Schnitt s gibt nach Lemma 13.11 Anlass zu einem Modulhomomorphismus

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{L},\ 1 \longmapsto s,$$

und insbesondere zu einem Modulhomomorphismus

$$\varphi\colon\ \mathcal{O}_X|_{X_s} \longrightarrow \mathcal{L}|_{X_s}.$$

Für jeden Punkt $P \in X_s$ ist dies ein Isomorphismus, daher ist φ nach Lemma 4.6 ebenfalls ein Isomorphismus. □

Abbildungsverzeichnis