Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Arbeitsblatt 29

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 29.1. Legen Sie den Verbindungsvektor von ihrem linken Ohr zum rechten kleinen Finger ihres Vordermanns parallel an die Nasenspitze Ihres linken Nachbars an. Was ist das Ergebnis?

Übungsaufgaben

Aufgabe 29.2. Die Zeit ist eine affine Gerade über $\mathbb{R}$. Legen Sie den Verbindungsvektor vom Zeitpunkt Ihres ersten Milchzahns bis zum Zeitpunkt Ihrer Einschulung an den jetzigen Moment an. Was ist das Ergebnis?

Aufgabe 29.3. Es sei V ein Vektorraum, $U \subseteq V$ ein Untervektorraum und $E = P + U$ ein affiner Unterraum. Zeige, dass man für jeden Punkt $Q \in E$ auch $E = Q + U$ schreiben kann.

Aufgabe 29.4. Es sei V ein Vektorraum und $E \subseteq V$ ein affiner Unterraum. Zeige, dass E genau dann ein Untervektorraum von V ist, wenn E die 0 enthält.

Aufgabe 29.5. Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto 4x - 6y + 9z.$$

Bestimme für die Menge

$$E = \left\{ Q \in \mathbb{R}^3 | \, \varphi(Q) = 5 \right\}$$

eine Beschreibung mit Hilfe eines Aufpunktes und eines Verschiebungsraumes.

Aufgabe 29.6. Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 7x + y - 3z \\ 4x + 5y \end{pmatrix}.$$

Bestimme für die Menge

$$E = \left\{ Q \in \mathbb{R}^3 | \, \varphi(Q) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Beschreibung mit Hilfe eines Aufpunktes und eines Verschiebungsraumes.

Aufgabe 29.7. Es sei $d \in \mathbb{N}_+$ und ein Körper K fixiert. Es seien n verschiedene Elemente $a_1, \ldots, a_n \in K$ und n Elemente $b_1, \ldots, b_n \in K$ gegeben. Zeige, dass die Menge E der Polynome P vom Grad maximal d mit

$$P(a_i) = b_i$$

für $i = 1, \ldots, n$ einen affinen Unterraum von $K[X]_{\leq d}$ bilden. Was ist der zugehörige Untervektorraum? Was kann man über die Dimension von E sagen, wann ist E leer?

Aufgabe 29.8.*

Es sei E ein affiner Raum über dem K-Vektorraum V. Zeige die folgenden Identitäten in V.

(1) $\overrightarrow{PP} = 0$ für $P \in E$.
(2) $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ für $P, Q \in E$.
(3) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ für $P, Q, R \in E$,

Aufgabe 29.9. Zeige, dass die leere Menge ein affiner Raum im Sinne der Definition 29.4 ist, und zwar über jedem K-Vektorraum V.

Aufgabe 29.10. Es sei E ein nichtleerer affiner Raum über einem K-Vektorraum V. Es sei $P \in E$ ein fixierter Punkt und

$$\theta\colon V \longrightarrow E,\, v \longmapsto P + v,$$

die zugehörige Bijektion. Mit Hilfe dieser Bijektion identifizieren wir E mit

$$E' = \{(v, 1) \in V \times K \,|\, v \in V\}$$

durch die Abbildung

$$\varphi\colon E \longrightarrow E',\, P \longmapsto (\theta^{-1}(P), 1).$$

a) Zeige, dass E' ein affiner Unterraum von $V \times K$ ist mit dem Translationsraum $V \times 0$.

b) Zeige

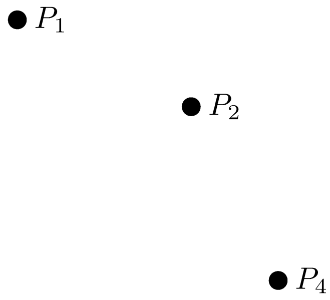
$$\varphi(Q + v) = \varphi(Q) + v$$

für alle $Q \in E$.

Aufgabe 29.11. Bestimme zeichnerisch den Punkt, der durch die baryzentrische Kombination

$$0,2P_1 + 0,4P_2 - 0,3P_3 + 0,7P_4$$

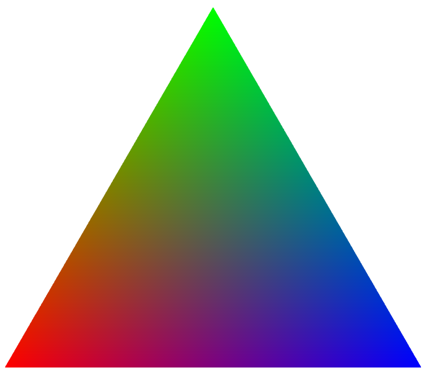
im Bild unten gegeben ist. Starte dabei mit verschiedenen Aufpunkten.



Aufgabe 29.12.*

Es sei P_i, $i \in I$, eine Familie von Punkten in einem affinen Raum E. Zeige, dass durch eine baryzentrische Kombination $\sum_{i \in I} a_i P_i$ ein eindeutiger Punkt in E definiert wird.

Aufgabe 29.13. Es sei V ein Vektorraum über K, den wir als einen affinen Raum auffassen. Es sei $\sum_{i \in I} a_i v_i$ mit $v_i \in V$, $a_i \in K$ und $\sum_{i \in I} a_i = 1$ eine baryzentrische Kombination. Zeige, dass der dadurch definierte Punkt im affinen Raum gleich der Vektorsumme $\sum_{i \in I} a_i v_i$ ist.



Aufgabe 29.14. Geben Sie die baryzentrischen Koordinaten Ihrer Lieblingsfarbe bei additiver Farbmischung an.

Aufgabe 29.15. Es sei E ein affiner Raum über einem K-Vektorraum V und es sei $P_1, \ldots, P_n$ eine endliche Familie von Punkten aus E. Für $j = 1, \ldots, k$ sei durch

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} P_i$$

mit $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ eine Familie von baryzentrischen Kombinationen der P_i gegeben. Es seien $b_1, \ldots, b_k \in K$ mit $\sum_{j=1}^{k} b_j = 1$. Zeige, dass man

$$\sum_{j=1}^{k} b_j Q_j$$

als baryzentrische Kombination der P_i schreiben kann.

Aufgabe 29.16. Stellen Sie sich vier Punkte im Anschauungsraum vor, die eine affine Basis bilden.

Aufgabe 29.17. Stellen Sie sich vier Punkte im Anschauungsraum vor, die keine affine Basis des Raumes bilden, wo aber je drei der Punkte eine affine Basis einer affinen Ebene bilden.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 29.18. (4 Punkte)

Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 6x - 5y - 3z + 8w \\ x + 5y + 4z - 2w \end{pmatrix}.$$

Bestimme für die Menge

$$E = \left\{ Q \in \mathbb{R}^4 | \, \varphi(Q) = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Beschreibung mit Hilfe eines Aufpunktes und eines Verschiebungsraumes.

Aufgabe 29.19. (6 (3+3) Punkte)

Es sei V ein K-Vektorraum Wir betrachten die Menge

$$E = \{(v, 1) | \, v \in V\} \subset V \times K,$$

die ein affiner Raum über V ist.

a) Zeige, dass die Punkte

$$P_i = (v_i, 1), \, i = 1, \ldots, n\,,$$

genau dann eine affine Basis von E bilden, wenn die P_i (aufgefasst als Vektoren in $V \times K$) eine Vektorraumbasis von $V \times K$ bilden.

b) Zeige, dass in diesem Fall zu einem Punkt $P \in E$ die baryzentrischen Koordinaten von P bezüglich $P_1, \ldots, P_n$ gleich den Koordinaten von P bezüglich der Vektorraumbasis $P_1, \ldots, P_n$ ist.

Aufgabe 29.20. (3 Punkte)

Es seien E und F affine Räume über dem Körper K. Zeige, dass der Produktraum $E \times F$ ebenfalls ein affiner Raum ist.

Aufgabe 29.21. (3 Punkte)

Es seien E und F affine Räume über dem Körper K mit einer affinen Basis $P_1, \ldots, P_n$ von E und einer affinen Basis $Q_1, \ldots, Q_n$ von F. Zeige, dass

$$(P_1, Q_1),\ (P_1, Q_2), \ldots, (P_1, Q_m),\ (P_2, Q_1),\ (P_3, Q_1), \ldots, (P_n, Q_1)$$

eine affine Basis des Produktraumes $E \times F$ ist.