

中學活課用本

應用數學

陸高誼主編
姚幼蕃編著

世界書局印行

下冊

版權所有
翻印必究

中華民國三十七年五月五版

應用數學 (全三册)

下册實價國幣

外埠酌加運費匯費

編者	姚幼蕃
主編者	陸高誼
發行人	張靜江
印刷者	世界書局

發行所 上海及各省 世界書局

下 册 目 錄

第三編	代數	193
第十九章	記號與定義	193
第二十章	公式及其解釋	199
第二十一章	正數與負數	206
第二十二章	加法與減法	208
第二十三章	方程	219
第二十四章	乘法	227
第二十五章	除法 特殊積數與因數	239
第二十六章	方程解答	254
第二十七章	分數	263
第二十八章	方程與公式	276
第二十九章	較複雜之方程	292
第三十章	指數 乘冪與方根	299
第三十一章	二次方程	305
第三十二章	變數	315
第三十三章	圖解	323
第四編	對數與三角學	333
第三十四章	對數	333
第三十五章	角度	356
第三十六章	三角的函數	362

第三十七章	表格及其應用	372
第三十八章	直角三角	378
第三十九章	三角比率間之關係	391
第四十章	多於單一角度之三角的比率	407
第四十一章	三角之分解	412

附 錄

對數表	425
三角函數之真數表	427
三角函數之對數表	430
答數	

第三編 代數

第十九章 記號與定義

代數爲算學之繼，故算學中之符號與記號亦應用於代數而不變其意義，有時加增新記號而使工作簡易，凡有合宜之處常介紹簡單工作法於讀者，俾得事半功倍。

固定數 數字 0, 1, 2, 3, 等皆有定義，例如數字 4，可爲四元，四碼，四磅或其他單位之四倍，但 4 爲一固定數。從前兩節中讀者已知 π 字代表一固定數，卽是圓周與圓之直徑相比率，雖不能代之以確數如 1, 2, 3, 等，但亦有固定之值。

普通數字 b 字常用以代一三角之底邊，但 b 字之值是隨不同之三角而變更，普通恆以 b 字代表三角的底邊之長度，但 b 字可取任何之值及單位， r 字則常代表圓之半徑，當其列入公式 $A = \pi r^2$ ，則 r 並無有一固定之值，此種以字母代表之意義不能代之以數字謂之普通數之意義。在指定一數中則字母代表有定值，例如指定一圓，則 r 可代一固定長度。

記號 符號 +, -, \times , \div 是工作之符號，故與在算學中有同一意義，在幾個字母相乘時則符號 (\times) 則常不用，或用符號 (\cdot) 代之或竟不用符號。 a 乘 b 常寫作 ab 。故 $2xy$ 卽 2 乘 x 乘 y 之義。

一列數之符號是括弧若 (), [], { }, 或橫線 —, 前三者

皆指示凡括弧中之數須作為一單量數，橫線則加在列數上與括弧同意。

是以 $12 - (10 - 4)$ 係指明由 10 先減去 4，然後以 12 減括弧中之餘數，所以 $12 - (10 - 4) = 12 - 6 = 6$ 。 $12 - (10 - 4)$ ， $12 - [10 - 4]$ ， $12 - \{10 - 4\}$ ，及 $12 - \overline{10 - 4}$ 有同樣之指示。

計算問題，遇有括弧時，必須先將括弧中之列數算出而後總計。

代數式 一個代數式是一用代數記號及符號代表一數式。

一數字代數式是完全用數字及符號而成，若 $14 + 13 - (4 + 3)$ 。

一字母代數式是完全用字母及符號而成，若 $ab + cd$ 。

一代數式之值是其代表之數字。

系數或乘數 設有代數式如 $8abx$ ， 8 ， a ， b ，及 x 是因數，任何一因數，或二個或較多因數之積是餘數之系數(Coefficient)。

是以 $8ab$ 可為 x 之系數，或 $8a$ 為 bx 之系數，但常所謂系數者祇限數字之部，若字母前無數字則系數當然是 1。

乘冪與指數 若一積數中之各因數皆相等若 $a \cdot a \cdot a \cdot a$ ，其積數是謂 a 之乘冪，常寫 a^4 。角上之小數字 4，指明以 a 作因數自乘 4 次，以上之乘冪 a^4 ， a 是謂之底數，4 謂之指數(Exponent)。

乘冪之指數是一數字寫在底數之右角上，若指數是一正號整數則指示底數自乘幾次。

例如 c^2 是第二乘冪，即因數 c 乘二次， c^3 是第三乘冪，因數 c 乘三次， c^n 是第 n 乘冪，即因數 c 乘 n 次。

若不寫指數則指數當然是 1。

代數式中之一項是該式中之一部而無符號分開。

是以在 $4ax+3c-d$ 中, $4ax$, $3c$, 及 d 謂之項。

不同項之代數式皆有相當名詞, 若單項(Monomial), 雙項(Binomial), 三項(Trinomial), 及多項(Polynomial)是也。

項中字母相同祇係數不同者謂之同項, 項中之字母各異者謂異項, 是以 $6a^3x^2y$, $-3a^3x^2y$, 與 a^3x^2y , 是同項, $6by^2$, $3x^2y$ 及 $16ab^2c$ 是異項。

[註] 此章之習題是回憶運用記號及符號之意義而由此可得新的意識故學者望不忽視。

習 題 四 十 五

求以下各值:

1. $3+6-2+4-1+7+2$. 2. $7+2\times 6-3+8\times 2-2$.
 3. $8+16\div 2-4+14\div 7+21$. 4. $75+10+25\times 6-3\times 3-15$.
 5. $150\div 6+4\times 25-75$. 6. $150\div 5\times 6+10\times 9+17$.

試述以下各式之項數, 即單項, 雙項等等。

7. m^2+2v 8. $7a^2b^2c$ 9. $4+9c+d$
 10. $ab+ac+bd$. 11. a^5+4c+d 12. $17a^6b^2c$.
 13. $a^2+b^2+c^2$ 14. Cx^2+7y . 15. $\frac{4}{3}\pi r^3$
 16. $3xyz+x^2-y^2$ 17. $a^3+b^3+c^3-3ab$. 18. x^2+3x-4 .
 19. $31x^2-\frac{1}{4}y^2+\frac{1}{5}z^2$ 20. c^3-3c+2 . 21. $x^2y^3+y^2x^3+xyz$.

22. 第 8 題之系數是何? 第(16)及(19)題 y^2 之系數是何?
 23. 試述第(11), (12), (13)及(17)題中 a 之指數。
 24. 試寫五個同項及五個不同項代數式。
 25. 第 8 及 18 題, 各有多少因數。

試將以下寫成代數式:

26. 七倍 a 加九倍 b 減三倍 c 之答數。
 27. 從 6 倍 x 中減去 7 倍 y 之結果。
 28. 三倍 a^3 乘 b^2 之積。
 29. $7a^4$ 與 b^3 及 x^2 乘 c 之積。
 30. a 與 b 之和, 及 a 與 b 之較的積數。
 31. a, b, c 和的平方。
 32. x 與 y 和, 除 x 與 y 較的答數。
 33. m^3 乘 a 分之 x 與 b 分之 y 的積數。
 34. 解 $a, 2b, 3c$ 之和, 乘 $7a, b, 2c$ 之和的積數。
 35. 解 a, b 和之方, 乘 m, n, p 和之三方的積。

將以下之代數式寫作字題:

36. $12n+5m$. 37. $7n-14m$ 38. $x(m-n)$
 39. x^2y^2z 40. $\frac{m+n}{m-n}$ 41. $\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}$
 42. $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2$ 43. $8a-(7-c)$ 44. $(3a+4b)(c+d)$
 45. $(m+n)(p-q)$ 46. $(x+y)^2+b^2$ 47. $\left(\frac{2}{a+b}-\frac{1}{a-b}\right)y^2$

將以下數改寫簡單指數：

48. $4 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b$. 49. $36x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z$.
50. $17 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c$. 51. $14 \cdot a \cdot a + 17b \cdot b - 18c \cdot c \cdot c$.
52. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4$. 53. $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 2$.
54. $7 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$. 55. $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 \cdot 5$.
56. 分以下各數爲質因數：(a)864, (b)1296, (c)94500.
57. 若 $a=4$, 求下值 $3a$, $7a$, a^2 , a^3 , $4a^2$.
58. 若 $a=4, 7, 2\frac{2}{5}, 0, 3\frac{1}{5}, 8\frac{2}{5}$, 或 $5\frac{1}{3}$, 則 $15a$ 各等於若干?
59. 若 L 代表一室之長且是三倍的闊, 則室闊多少?
60. 若書架上有 10 冊書加 x 冊書則共有多少冊書? 若由書架上取下 q 冊書, 則尚餘幾冊書?
61. 若 S 代表一線長之尺數, 則由此線剪去 $\frac{1}{3}$ 尚餘幾尺?
62. 一孩童每秒鐘能跑 a 碼, 則 10 秒鐘能跑幾碼? c 秒鐘跑幾碼? d 分鐘能跑幾碼?
63. 若一火車每 c 點鐘行 a 哩, 則每小時行幾哩? q 小時行幾哩?
64. 茶商售每磅茶得國幣 c 角, 則 10 磅茶售價多少? p 磅茶售價多少?
65. 白糖每兩售國幣 x 分, 售糖 y 磅合國幣多少圓?
66. 若 $a=5, b=6, c=-2$, 則 $a^2+10b+3c=?$

67. 若 $h=3$, $t=7$, $u=9$, 則 $100h+10t+u=?$
68. 汽車每 p 小時行 a 哩, 則每分鐘行多少呎?
69. 若一商人購煤 a 噸合國幣 b 元, 則每磅合國幣幾分?
70. 購進 x 磅紅茶合國幣 y 元, 若加價售出每磅國幣 b 角, 則獲利是多少百分比?
71. 若 N 是一偶數, 試寫三個連續的偶數。
72. 若 x 是一偶數, 試寫連續的三個奇數。
73. 工人作工 a 星期, 得工資國幣 x 元, 則每星期得幾元? 每日得幾元?
74. 工人每日作工 x 小時, y 星期後得工資國幣 c 元, 則每小時得工資國幣幾角?
75. 在 a 加侖之酒中加入 b 加侖水, 則酒是全部的多少百分比?
76. 某商有 x 加侖油, 售去 b 夸德後尚餘多少加侖?
77. 某甲由上海到蘇州去, 先坐火車行 a 小時每小時 b 公里。因火車損壞祇好換乘汽車, 若由上海至蘇州距離 160 公里, 則汽車尚需行多少公里?
78. 若掘一地道闊 a 呎, 高 b 呎, 長 c 呎, 則需掘去泥多少立方碼?
79. 一長方地, 長 x 公尺, 闊 a 公尺, 則其面積是多少公畝。
80. 一長方鉛皮長 m 呎, 闊 n 呎, 由鉛皮中切去一圓片直徑 $=n$, 則餘下之鉛皮是幾方呎?

第二十章 公式及其解釋

本章中將命題以算計代數式之值及公式等，將所述之定律與原則化作代數式與公式，並將幾種代數式與公式釋作文字，前數章中曾運用許多公式，有時此項公式之由來皆詳細說明，但無廣大的代數知識則不易明瞭此種公式之由來及其可變更之處，學者必須完全明瞭方程式後方能有將公式變更他式之才技，此種變更式在特種計算上較為便利，惟方程式之推算需要明瞭基本的工作，譬如因法及代數分數，因此之故則公式之較完全的處理法須從緩解釋於後。

計算尺(Slide rule) 計算尺是一計算器，上有抽動的規尺，用以算術上之核計至為簡易，由其可得乘，除，方程，方根，立方及立方根之結果一目了然，法至簡單而省時間，但如用普通10吋長之計算尺則結果祇準確至三位或四位數字，因此數位多者則不能依賴計算尺而得準確之結果，但可用以核對平常計算之結果。

學者應熟悉計算尺之構作及其用法，用之以估計一算法答案至為便利。

因購計算尺時皆附有說明書，故無需在此詳述，其構作是根據對數(Logarithms)之原則。

計算一代數式之值 一數字的代數式有一定之值可從指明之工作而得之。

是以 $21 - (10 + 3) + 14 - 10 = 21 - 13 + 14 - 10 = 12$.

一字母代數式依據各字母所代之值而有一固定之值。

例如 abc 即 $a \times b \times c$ 有一固定之值,若 $a=3, b=4, c=10$, 將此各值代入則 $abc=3 \times 4 \times 10=120$.

若以他值分派於 a, b , 及 c , 則 abc 又一固定之值。

例題一 求 $\pi r^2 h$ 之值, 若 $h=10, r=6, \pi=3.1416$.

$$\text{則 } \pi r^2 h = 3.1416 \times 36 \times 10 = 1130.976.$$

【定義】 當一代數式是一定律或原則之記載謂之公式。

例題二 求 $a^3+3a^2b+3b^2a+b^3$ 之值, 若 $a=2, b=3$.

$$\begin{aligned} \text{則 } a^3+3a^2b+3b^2a+b^3 &= 2^3+3 \times 2^2 \times 3+3 \times 9 \times 2+3^3 \\ &= 125. \end{aligned}$$

例題三 若 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, $a=36, b=22, c=20$, 求

$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 之值, 將上值代入。

$$\begin{aligned} \text{則 } \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} &= \sqrt{39(39-36)(39-22)(39-20)} \\ &= \sqrt{37791} = 194.4. \end{aligned}$$

習 題 四 十 六

1. 求以下各值:

$$(a) 2^5 \cdot 4^2. \quad (b) 7^2 \cdot 2^2 \cdot 5. \quad (c) 2^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2.$$

$$(d) 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^2. \quad (e) 7 \cdot 11^2 \cdot 5^3. \quad (f) 3^4 \cdot 2^5 \cdot 13^2.$$

若 $a=2, b=3, c=5$, 求以下各值:

$$2. 3a^2b^3. \quad 3. 2ab^2-c^2. \quad 4. 3(a^2+b^2).$$

$$5. (a+b)^3. \quad 6. (a+c-b)^3. \quad 7. (c-a)^4.$$

$$8. a(a^2-b^2+c^2). \quad 9. ab^2(c^2-b^2). \quad 10. (a+b)(c-b)$$

11. $(c+b+a)(c-b+a)$ 12. $a^2+2ab+b^2$ 13. $(a^2+b^2)^2-c^2$

14. $c^3-(a^2+b^2)$ 15. $(a^2+b^2)^2-(c^2-b^2)$

16. 求以下各值,若 $r=18$. (a) $S=4\pi r^2$. (b) $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

17. 求以下各值,若 $r=7, h=9$, (a) $S=2\pi rh$, (b) $V=\pi r^2h$.

若 $a=1, b=3, c=5, d=0$. 求以下各值:

18. $a^2+2b^2+3c^2+4d^2$.

19. $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

20. $\frac{12a^3-b^2}{3a^2} + \frac{2c^2}{a+b^2} - \frac{a+b^2+c^3}{5b^3}$.

若 $a=1, b=2, c=3, d=5, e=8$. 求以下各值:

21. $b^2(a^2+e^2-c^2)$, 22. $(a^2+b^2+c^2)(e^2-d^2-c^2)$

23. $e - [\sqrt{e+1}+2] + (e - \sqrt[3]{e})\sqrt{e-4}$.

若 $a=1, b=2, c=3, d=4, e=5$.

24. $abc^2+bed^2-dea^2$. 25. $e^4+6e^2b^2+b^4-4e^3b-4eb^3$.

26. $\frac{a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4}{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$.

27. $(a+b)(b+c) - (b+c)(c+d) + (c+d)(d+e)$

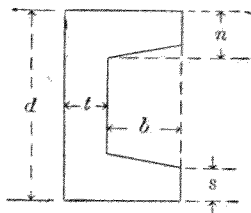
28. $(a-2b+3c)^2 - (b-2c+3d)^2 + (c-2d+3e)^2$

29. $\sqrt{4c^2+5d^2+e}$.

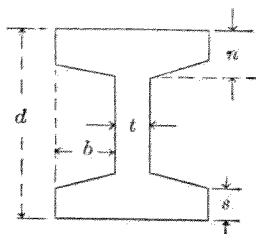
30. $\sqrt{c^2+d^2+e^2-a^2}$

31. 若 $a=1, b=2, c=3, d=0$, 求 $(ac-bd)\sqrt{a^2bc+b^2cd+c^2ad-2}$ 之值。

32. 若以 A 代圓之面積以方吋計, r 代圓之半徑以吋計, 將 $A = \pi r^2$ 之公式寫作文字。
33. 以上公式中之 r 可代任何數字否? 若 $r=5$, 則 A 是否可作任何數? π 是固定數抑是普通數?
34. 三角之面積等於底邊之半乘高度, 將以上文字用字母寫作公式並註明每字之代表。
35. 將下圖之截面面積寫成公式:



(a)



(b)

36. $d=3''$, $t=0.17''$, $b=1.24''$, $n=0.38''$, $s=0.17''$, 求(a)與(b)圖之面積。
37. 若(b)圖之截面的下邊截去成 T 字, 求面積之公式。
38. 求(37)題 T 截面積, 若 $d=15''$, $t=0.8''$, $b=2.8''$, $s=0.8''$, $n=1.27''$ 。
39. 以 B 為基本數, P 為百分數, R 為利率, A 為本利之和, 將以上字之關係寫成公式。
40. 若 p 代本金, i 代利息, t 代年份, r 代利率, a 代總額, 將以下各公式寫作文字。

$$(1) i = prt, \quad (2) a = prt + p, \quad (3) r = \frac{i}{pt},$$

$$(4) p = \frac{i}{rt}, \quad (5) t = \frac{i}{pr}.$$

41. 解釋兩同分母分數應如何相加，若以 a 與 b 代分子，以 d 代分母，將其寫成公式。

42. 若(41)題解釋兩同分母分數相減，並寫成公式。

43. 將以下各式寫成文字。

$$(1) \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}, \quad (2) \frac{n \div m}{d \div m} = \frac{n}{d},$$

$$(3) \frac{n}{d} \div m = \frac{n}{m \times d}$$

以 a 乘 b, c ，與 d 之和等於 s ，將此寫作公式。

44. 求(44)題之 s ，若 $a=7$ ， $b=6$ ， $c=8$ ， $d=10$ 。

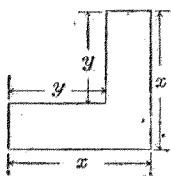
45. 將以下公式寫作文字 $v=4(c+5)$ ， v 代表一馬之值以國幣計， c 代表馬具之值，若 $c=45$ ，則馬值國幣多少元？

46. 用 b_1 與 b_2 代上下底邊， h 代高度，將以下定律寫成公式；一梯形之面積是等於其兩底邊之半和乘其高度。

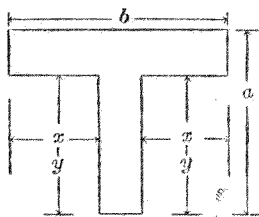
47. 用(47)題所得之公式求以下梯形之面積，(1) $b_1=22.33''$ ， $b_2=46.39''$ ， $h=26.43''$ ；(2) $b_1=7.203''$ ， $b_2=5.826''$ ， $h=3.243''$ 。

48. 圓球之曲面積是四倍的 π 乘其半徑平方，將此文字寫作公式，若 $r=15$ 吋，用此公式算此曲面積。

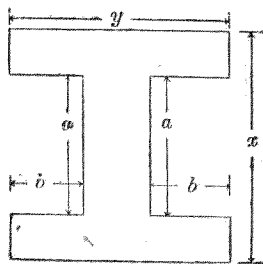
50. 圓球體積是等於 $\frac{4}{3}$ 的 π 乘其半徑的立方，將此文字寫作公式，若 $r=12$ 吋，用此公式計算此球之體積。
51. 一長方固體之體積是長度乘闊度乘高度，將其寫成公式，若 L 代長 $=40$ 呎， b 代闊 $=30$ 呎， h 代高 $=12$ 呎，求其體積。
52. 若某甲現年35歲，則在 a 年前是幾歲？在 b 年後是幾歲？
53. 某甲在 x 年前是 a 歲，現年是幾歲？ b 年後是幾歲？
54. 將以下之述說寫作代數式： x 減去 a 加增 y ，再以 M 與 N 之和乘之，並以 M 與 N 之較除之。
- 55 求下圖之周度(Perimeter)：



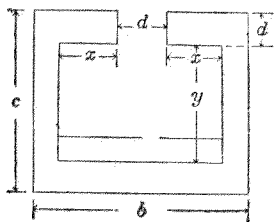
(1)



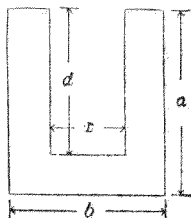
(2)



(3)



(4)



(5)

56. 求上圖(1)(2)(3)(4)(5)之面積。
57. 兩數之和是 a ，其中一數是 x ，他數是何？將 x 以 m 除之，並將他數以 N 除之，答數是何？
58. 若 x 是第一數，求其連續數。若 x 是三個連續數之中項，其餘二項是何？
59. 寫出五連續偶數以 x 為中項。
60. 若一桿長 a 呎，則等於多少吋？並等於一哩之何分數？
61. 若 a 件物品值國幣 x 元，則每件值幾分？
62. 若一室長 a 碼， b 呎又 c 吋，則共計多少吋長？
63. 若以 P 為積數， m 為被乘數，則乘數 n 如何求之？
64. 以 d 為被除數，並以 q 為答數，求除數 b 。
65. 以 d 為除數， q 為答數，並以 r 為餘數，求被除數 D 。
66. 兩數之較是 x ，其中之較大數是 a ，則較小數是何？
67. 一數較 a 多 c ，此數是何數？
68. 寫以下代數式： a 多於 b 之數與 c 少於 d 之數等。
69. 寫以下代數式：二分之一 M 等於 n 分之 a, b, c 的和。
70. 若 a 角是每品德牛奶之值，則每加侖牛奶值幾元？
71. 食物足敷 a 人吃 L 日，則 b 人可吃幾日？
72. 若 m 人掘一溝需 d 日，則 c 人需掘幾日？
73. 多少磅每磅 c 分之糖與 d 打每打 e 分之蛋同值？
74. 一立方水櫃每邊長 e 呎可容多少桶水，若每桶容 4.2 立方呎？

75. 一木箱長 a 呎，闊 b 呎，高 c 呎可容多少部修，每部修是 2150.4 立方呎？
76. 某甲每日獲工資 a 元，某乙每日獲工資 b 元，若某甲每月工作 26 日，某乙每月工作 21 日，則每月二人共得工資若干元？

第二十一章 正數與負數

負數之意義 溫度計上指示之溫度是從其零度之上下數計，溫度之數計常稱零度之上多少度或零度之下多少度。在算學中溫度之數計可按上述者，但在代數中可擇簡式稱之，因可用簡便符號(+)與(-)，溫度之前有+號者是指示在零度以上之溫度，溫度之前有-號者是指示在零度以下之溫度，此等符號之應用是指示量溫度之方向與用在加減法之意義不同。

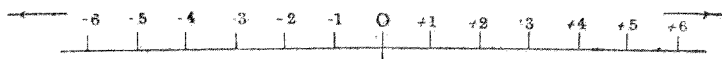
是以： 25° 是在零度之上 25° ， -25° 是在零度之下 25° 。

凡數字之前有+號者謂之正數，數字之前有-號者謂之負數，兩數之關係若是，則一正數與一負數謂之相對數。

負數之需要 數字組延展之需要而可包括負數可見之以下之減法，其中減去數仍舊相同，而下減之數從左至右每步加增 1。若是使較數亦由左至右逐步減一，當較數小於零時則在數字前加一號。

$$\begin{array}{cccccccc}
 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\
 \frac{3}{3} & \frac{4}{2} & \frac{5}{1} & \frac{6}{0} & \frac{7}{-1} & \frac{8}{-2} & \frac{9}{-3} & \frac{10}{-4}
 \end{array}$$

負數與正數之圖示 簡便之法是將正數及負數圖示在一水平線上，線上劃一定點稱為零點，正數在定點之右而負數在定點之左，圖示法是簡易的解釋加減法。



細看上圖可知不論從何處起點，向右是正數，向左是負數，負數之義是正數的反面，例如某甲向東行五里，然後向西行五里則回到起點，負數是將正數消滅。

定義 正數與負數同零點成一組織謂之代數數字。

一數之絕對值是其數值而不憑其符號。

是以 $+5$ 與 -5 有同等之絕對值 5 。

當 $+$ 號與 $-$ 號用以指示方向謂之量數的符號。量數的符號與加減法之工作符號不同，有時數字前之 $+$ 號用以指示量數之方向時常不寫出，但負數之前必須寫出 $-$ 號，有時將量數寫入括弧之內，如 (-3) , $(+4)$ 等。

〔註〕 何謂負數並因何需要？以上之解釋已足使讀者明瞭負數之意義。假設由較小之一數減去一較大之數則結果必為負數，在數學中當一新數之意義發生時，必先以記號代表，而後求其工作之法，即決定減，加，除，乘此種新數之法。

在算術中，學者之初步是決定工作正號整數之法，繼之以工作分數之法，在實際上數學之大部皆包括尋求加，減，乘，除各種整數，

正數，負數，分數，及此種混合數之法。

現下需計劃工作代數數目之法而不與原有之定律或原則相抵觸。

習 題 四 十 七

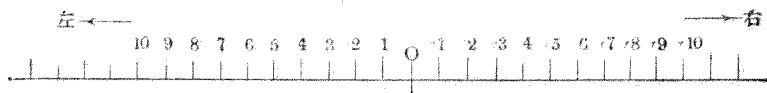
1. 某甲向東走10里，又向西行6里，將此兩數用記號寫出。
2. 先畫一豎線代表溫度計，有一物體原有 10° ，先將其溫熱升上 37° ，再將其涼冷下降 42° 。在線上指示該物體現在的溫度，並寫一數字代數式。
3. 畫一水平線並劃一零點，以一公分作一公里之長度，並在水平線上指出一車往返數次後之停駐點：以下之正負號代表車的行動方向；+5里，+3里，-7里，+6里，-4里，+2里，+1里，+4里，-10里。
4. 一商行的十年盈虧賬如下；盈1500，虧1000，虧750，盈400，盈550，虧350，虧200，盈150，盈400，盈650，以上均國幣計算，在水平線上應如何指示，共計盈虧是多少？

第二十二章 加法與減法

【定義】 兩項或較多的代數數目之總數謂之和，求此種和數之法謂之加法。

代數數目之加法 思想一代數數目組排置在一直線或在一水平線上如下圖，若將正數相加則由原數起點向右數至所加數之

單位。



例如 $4+3$ ，則由 4 起點向右數三位則得 7。

若將負數相加則由原數起點向左數至所加數之單位。

例如 $5+(-3)$ ，則由 5 起點向左數三位則得 2。

由上所論則得有以下之原則。

- (1) 代數兩數之和有同樣之符號者則等於兩數之和而以其公用之符號冠首。
- (2) 代數兩數之和有不同樣之符號者則等於兩數之較而以較大數之符號冠首。

若欲將三項或較多項之代數數目相加而有不同之符號者，則先求正數之和，次求負數之和（按原則一），再求其兩總數之和（按原則二）。

例如 欲求 $+2, +10, -6, -3, -7, +9$ 之和，則先求正數之和， $2+10+9=21$ 。次求負數之和 $(-6)+(-3)+(-7)=-16$ 。

再求兩總數之和 $21+(-16)=+5$ 。

代數數目之減法 減法是加法的反面，在算術中被減數恆大於減去數，在代數數目之減法中減去數可以大於被減數，兩數或皆是正數，或皆是負數，或一正數及一負數。

既減法是加法之反面，則按照以上水平線上所排置之代數數目組，則有以下之原則。

(1) 減去一正數是等於加一同數的負數。

(2) 減去一負數是等於加一同數的正數。

以上之兩原則可連合於以下之定律。

【定律】 凡工作一代數數目之減法，祇須將減去數符號更換（即+更-，-更+）而後加之。

習 題 四 十 八

求第(1)題至第(7)題之和：

1. $7, -10, -13, 16, 25, -3.$
2. $27, 46, -100, -16, 17.$
3. $3, 16, -21, -1, 2, 1.$
4. $\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{7}{8}, -\frac{9}{16}.$
5. $-\frac{3}{4}, -3, -7\frac{3}{5}, 3\frac{3}{8}, -\frac{7}{10}.$
6. $3.25, -7.16, -10.3, 14.1.$
7. $14.17, -16.19, -26.3.$
8. 由 17.6 減 $-14.3.$
9. 由 -111 減 $-12.$
10. 由 -46 減 $75.$
11. 一代數數目之值可以由減法而加增否？試詳解之。
12. 一代數數目之值可以由加法而減少否？試詳解之。
13. 在緯度東 $37^{\circ} 45' 17''$ 的地方與在緯度西 $16^{\circ} 14' 53''$ 的地方中間相隔是多少緯度？
14. 一物體由零度下 12° 升至零度上 38° ，共升起多少溫度？

字母代數式之加法與減法 在算術中 5 加侖, 8 加侖與 10 加侖則等於 23 加侖。

$$\text{類似, } 6a + 4a + 10a = 20a$$

$$-4xy + 9xy + 8xy = 21xy \text{ 及}$$

$$16x^2y + 23x^2y + 7x^2y = 46x^2y.$$

在減法中, 則 $17x - 10x = 7x$ 及

$$45x^2y^2 - 9x^2y^2 = 36x^2y^2.$$

在算術中, 學者已知不相同之單位不能相加減, 在代數中亦然。若欲加 $3a$ 於 $2b$, 則能將此加法, 若 $3a + 2b$. 從上說則有以下原則。

單項代數 項數之字母相同可以加或減, 並祇須加或減其系數, 若單項代數之字母不同者, 祇可在其間加符號以顯示之。

例如 加法。

$\begin{array}{r} (1) + 3abc \\ - 6abc \\ + 10abc \\ - 16abc \\ \hline \text{答數 } - 9abc. \end{array}$	$\begin{array}{r} (2) - 16xy^3 \\ + 6xy^3 \\ + 7xy^3 \\ + 4xy^3 \\ + xy^3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} (3) 10ab \\ - xy \\ - c^2 \\ + 4b^2 \\ \hline 10ab - xy - c^2 + 4b^2 \end{array}$
--	--	---

例如 減法。

$\begin{array}{r} (1) \cdot 4ax^2 \\ - 6ax^2 \\ \hline \text{答數 } + 10ax^2 \end{array}$	$\begin{array}{r} (2) - 21x^2y \\ \quad 3x^2y \\ \hline - 24x^2y \end{array}$	$\begin{array}{r} (3) 13ab \\ \quad - bc \\ \hline 13ab + bc \end{array}$
---	---	---

多項代數 多項代數之加及減法與單項者同, 先將同項之數寫在一列而後加或減之。

例如 加法。

$$\begin{aligned} &+3ax^2+14y^2-3z \\ &-7ax^2-16y^2+7z \\ &+10ax^2-4y^2+9z \\ &\underline{-7ax^2+10y^2+2z} \\ \text{答} &= ax^2+4y^2+15z \end{aligned}$$

例如 減法。

$$\begin{aligned} &17xy^2-14c^2+4a \\ \text{答} &= \frac{10xy^2-5c^2-8a}{7xy^2-9c^2+12a} \end{aligned}$$

核對結果 最要者是學者核對其所得之結果，字母代數式的加法或減法之結果準確與否可給各字母一固定數而核對之。

[例如] 加法。

$$\begin{aligned} &-7ab+4x^2-3bx \\ &-8ab-10x^2-4bx \\ &\underline{-9ab+11x^2+8bx} \\ \text{答} &= -24ab+5x^2+bx \end{aligned}$$

[核對法] 使 $a=1, b=1, x=1$ ，則

$$\begin{aligned} &-7+4-3=-6 \\ &-8-10-4=-22 \\ &\underline{-9+11+8=+10} \\ &-24+5+1=-18 \end{aligned}$$

核對時各字可給以任何固定數值，如上題之核對，使 $a=1, b=2, x=3$ 亦無不可，惟應擇最小之數則計算較簡。

習 題 四 十 九

求第(1)題至第(11)題各數之和：

1. $3a, 5a, 7a, 9a.$
2. $6ab, -4ab, 3ab, -2ab.$
3. $9x^2, 10x^2, -14x^2, -13x^2.$
4. $14x^2y^2, -11x^2y^2, -16x^2y^2.$
5. $2m+n, 6m-4n, 7m-2n$
6. $p+2q-r, 2p-3q.$
7. $a+4b-6c, -2b+5c.$
8. $-2x+3y-4z, x+y-z.$
9. $2x+3a+m, 2y-3a-m.$
10. $2x^2-3y^2-z^2, 3x^2+y^2+4z^2.$

11. $a+3c-17, 5a-6c+14, 2a-5c-2$.
12. 從 $2a^2-4cd$ 減去 $-8a^2-7cd$.
13. 從 $3ax-4cd$, 減去 $10ax-2cd$.
14. 從 $17ab-2c$ 減 $3ab-4d$.
15. 從 $m^2-2mn+n^2$ 減去 $m^2+2mn+n^2$.
16. 從 $16x^2y^2z^2+4a$ 減去 $16a-14cd$.
17. 求 $14x-16y+3z, 7x+2y-7z, -16x-2y+4z$ 之和,並以 $x=1, y=2, z=3$, 以核對所得之結果。
18. 求 $3x+2y-4xy, 7x-4y+2xy$, 之和,並以 $x=1, y=2$, 以核對結果。
19. 從 $-6xy+5xz-2y^2$, 減去 $3xy-4xz-3x^2$. 並以 $x=2, y=1, z=3$, 以核對所得之結果。
20. 從 $17x^2y^3-16xz^3+14c^2d$ 減去 $-16x^2y^3+43c^2d-14xz^3$.
21. 求 $3ab-2ac+4df, 7ac-6df, 4ab+9ac-3df$ 之和。
22. 求 $7x^2-9y^2-11xy, 10x^2-4xy-11y^2, 7x^2$ 之和。
23. 求 $11x^2y^3-16xy+14ax^2-17x, 16x^2y^3+14xy, 17x^2y^3-43x+27ax^2$ 之和。
24. 求 $x^2+2xy+y^2, x^2-2ay+y^2, -2x^2+2y^2, 7x^2-12y^2$ 之和。
25. 求 $34ax-75by+60cz, 16ax+25by-10cz, -41ax+41by-20cz$ 之和。
26. 求 $142x^4+31x^3y+9x^2y^2+10xy^3-15y^3, -130x^4-30x^3y+2x^2y^2-8xy^3+20y^4, -11x^4-10x^2y^2$ 之和。

27. 求 $17x - 9y, 3z + 14x, y - 3x, x - 17z, x - 3y + 4z$ 之和, 並核對之。
28. 求 $3x^2 + 2xy + 4y^2, 4x^2 - 3xy - 2y^2, 3x^2 + xy$ 之和, 以 $x=1, y=2$ 核對之。
29. 求 $16m + 3n - p, p + 4q, 7m - 3n - q, n - q, 3n + 2p$ 之和, 令 $m=1, n=1, p=2, q=4$ 以核對答數。
30. 求 $3ax - 4ab - xy + z, -3xy + 6ab, 7xy - 3z, -4ax - 6xy, ax$ 之和。
31. 求 $17ax^2 - 9axy + 6z - 24, 6 + 2axy - 2z + ax^2, 6axy - 14ax^2 - 13$ 之和。
32. 從 $83x - m^2 - 8n^3$ 減去 $73x + 4m^2 - 6n^3$ 。
33. 從 $3xy - 18y^2$ 減去 $10x^2y - 4xy + 16y^2$ 。
34. 從 $ax^2 + 3ay^2 - 4z^2$, 減去 $2ax^2 + 3ay^2 - 4z^2$ 。
35. 從 $5abc + 3bcd + 7cde$ 減去 $4abc - 10bcd - 8cde$ 。
36. 從 $x^3 - 2xy + 7y^2$ 減去 $2x^3 - y^2$

設 $A = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, B = -3a^2b + 3ab^2 - 3b^3, C = a^3 - b^3$, 求第 (37) 題至第 (44) 題之答數並核對之。

37. $A - B$. 38. $B - C$. 39. $C - A$. 40. $B - A$.
41. $C - B$. 42. $A - C$. 43. $A + B + C$. 44. $A + B - C$.
45. 從 $0.4x^2 - 7.5a + 5m^2$ 及 $1 - 0.125a + 3m^2$ 之和, 減去 $1.5a - 7.2x^2 - 3.25m^3$ 。
46. 從 $\frac{1}{2}ab^2 - \frac{2}{3}cd^3 + \frac{2}{3}x^3, \frac{2}{3}ab^2 - \frac{1}{4}cd^3 - \frac{1}{3}x^3$, 及 $\frac{1}{4}ab^2$

$$+\frac{5}{12}cd^3 - \frac{3}{4}x^3 \text{ 之和, 減去 } \frac{3}{4}ab^2 - \frac{2}{3}cd^3 - 2x^3.$$

不同系數之項數 在代數之加法或減法中，常遇有非數字的系數之項。例如： d^2x ， e^2x 及 cx 之相加，因是不同系數，其加法祇能顯示，是 $(d^2 + e^2 + c)x$ ，非若 $5x + 3x + 2x = (5 + 3 + 2)x$ ，可以用 $10x$ 以解答之，又如 a^2y 減 by ，顯示是 $(a^2 - b)y$ 。

習 題 五 十

求以下各數之和及將公項之系數收聚：

1. $5ay$, $-6dy$, $4cy$, 及 $17y$.
2. $3a^2y - 14xy$, 及 $Cx^3y + 7y$
3. $xyb - nb$ 及 $3x^2yb - 14b$.
4. $(a+b)d$, cd , $-fgd$, 及 $2d$.
5. $(3x-y)n^4$, x^2n^4 及 $(2x+3y)n^4$.
6. $(a+b-c)x$, $(a-b+c)x$, 及 $(2a+4c-3b)x$.
7. $(ac-cd+by)y$, $(3ac-3cd-b)y$, 及 $(4ac-6cd-4b)y$.

從第一項減去第二項以顯示以下之各較，及收聚公項之系數：

8. ay , by .
9. $3ab$, $7bc$.
10. $4a^2x$, $9b^2x$.
11. $(a+b)z$, $(a-2b)z$.
12. $(2a-3b+c)de$, $(a+b-2c)de$.
13. $(4x+2y-3z)ab$, $(3x-4y+2z)ab$.
14. $(ab+cd-ef)x$, $(ab-2cd-3ef)x$.
15. 求一不等邊六邊形之周度，其邊之長度如下； $2a+b$,

$$3a - 2b, 4a + b, 2a - 3b, 2a + 2b, 7a - 5b.$$

一列數之符號 當一列數符號(即括弧)前有符號加(+)或減(-),則指示括弧中之數須與符號前之數相加或由其減去。

一列數之符號(即括弧)前是加號(+),則須將括弧除去,而無需更變括弧中的各項前的任何符號。

例如: $a + (b - c + d) = a + b - c + d.$

一列數之符號(即括弧)前是減號(-),則除去括弧時,必須將括弧中的各項前的符號逐一更變,[即(+)號改(-)號及(-)號改(+)號]。

例如: $a - (b - c + d) = a - b + c - d.$

此項列數之符號更變與代數減法中更變減去數之符號同一意義。

若有幾個列數符號(即括弧中尚有括弧)則應先從至內的括弧除起,然後逐一向外除去直至除盡。

例題一 化簡下數 $4x^2 - 5y^2 + x - [6x^2 - 3x - (y^2 - x)]$

先去至內的括弧; $= 4x^2 - 5y^2 + x - [6x^2 - 3x - y^2 + x]$

再去外括弧, $= 4x^2 - 5y^2 + x - 6x^2 + 3x + y^2 - x$

$= -2x^2 - 4y^2 + 3x.$ 答。

例題二 化簡下數 $8 - \{7 - [4 + (2 - x)]\}$

先去至內的括弧 $= 8 - \{7 - [4 + 2 - x]\}$

再去內括弧 $= 8 - \{7 - 4 - 2 + x\}$

$$\begin{aligned} \text{後去外括弧} &= 8-7+4+2-x \\ &= 7-x \quad \text{答。} \end{aligned}$$

但在括弧中之同項數在去括弧時亦可先行合算，若例題二之初步。在括弧[]中之 $4+2=6$ ，可作；

$$\begin{aligned} &8 - \{7 - [6 - x]\} \\ &= 8 - \{7 - 6 + x\} = 8 - \{1 + x\} \\ &= 8 - 1 - x = 7 - x. \end{aligned}$$

習 題 五 十 一

化簡以下各數：

1. $4a+7b-(2a+2b)$. 2. $5-3x+(-18+2x)$.
3. $11x+1-(3-x)$. 4. $a-3a^2+7-(2a^2+5-3a)$.
5. $x^3-z^3-(x^3+y^3-z^3)$.
6. $a-c+d-(a+c-d)-(d-c-a)$.
7. $3x-(y-2x)+(z+y-5x)$.
8. $z-[y-(z-x)]$.
9. $74-26-(15-8)$.
10. $63-[23-(14-8)]$.
11. $4a+[2a-(a+b)+b]$.
12. $3x-[2y+5z-(3x+y)]$.
13. $a-[a-\{a-(2a-a)\}]$.
14. $a+b-[a-b+\{a+b-(a-b)\}]$.

15. $a - 2b - [3a - (b - c) - 5c]$.

16. $2a - \{b - [3a - (2b - a)]\}$.

17. $5x - (4x - [-3x - (2x - x - 1)])$.

18. $24x^2 + 3xy - [2xy + 6x^2 - (x^2 - 4xy) + x^2]$.

加入列數符號 一多項代數式之任何項數皆可包入括弧內，若括弧前之符號是加號(+)，則包入括弧中之各項前之符號無需更變，若括弧前之符號是減號(-)，則包入括弧中之各項前之符號皆需更變〔即(+)號改(-)號，而(-)號改(+)號〕。

例題 將以下代數式 $ax + by + cd - e$ 之末三項包入一括弧

(1) 括弧前是加號，(2) 括弧前是減號。

答 (1) $ax + by + cd - e = ax + (by + cd - e)$

(2) $ax + by + cd - e = ax - (-by - cd + e)$

習 題 五 十 二

將以下各題中之第一個減號後之各項包入一括弧內：

1. $a - b + c$.

2. $2a + 3b - c - 2d$.

3. $4x - x^2 + y^2 - xy$.

4. $17x^2 - x^3y - xy + yz$.

5. $6 + 3x - 4x^2 + 5x^3 - 6x^4$.

6. $-a - b + c - d + e$.

將以下各代數式之後三項包入括弧內，(1) 括弧前是減號，(2) 括弧前是加號。

7. $3x - 2y + 4 - 7z$.

8. $9x^2 + 4y^2 - 7xy + 4yz$.

9. $a+b+c-3f+4c^2$. 10. $8x+ixy-7z+4$.

11. $4d^2+3c^3-4x+3y$. 12. $2c-4dx^2+3y-7$.

將以下各題中的公項之系數收聚在括弧內，而在括弧前冠以減號。

13. $ax-bx+cx$. 14. $2cx-4dx+6ex-2x$.

15. $x+3ax-4cx+dx$. 16. $-x+6cx-4a^2x-ac^2x$.

17. $3y-5ay+6b^2y-7z^2y$.

第二十三章 方程(Equations)

【定義】 凡陳述兩代數式是等值者謂之方程式。

是以 $A = \frac{1}{2}ab$ 是一方程式，而 $A = \pi r^2$ ， $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ，及 $3x+4=10$ 等亦皆是方程式。

若一長方形之面積是36方尺，而高度是4尺，以 b 代表其底邊，則方程式是 $4b=36$ 。此項方程式之真確僅限 $b=9$ 。凡欲尋求之未知數有定值者謂之有條件的方程式(Conditional equation)。此即 $4b=36$ 之準確條件是 $b=9$ 。

一切方程式非均是有條件的，例如 $\frac{x^2-4}{x+2} = x-2$ 亦是一方程式，但 x 可取任何值，而方程式仍是真確的，此項方程謂之同等的方程式。

方程式中以字母所代之數而需求其值者謂之未知數。

方程式中的未知數有定值者謂之有條件的方程式。

方程式中包含無未知數，或未知數可取任何值者謂之同等方程式 (Identical equation).

剖析方程式是求未知數之值而使方程式真確。

方程式 多數問題用代數剖析包括一種或別種方程式，所以方程式是代數的最緊要工具，而學者必須熟諳其用法。

欲熟諳剖析方程式必須用充分之時間以練習之，剖析方程式中之許多工作是機械式的，且在此種工作中並不費許多思想，但需有步驟及理由。

方程式之剖析 前已述說，剖析一方程式是求其未知數之值，此或甚易，但常亦甚難，此處當起始以甚簡單之方程式而尋求一普通剖析法。

例題一 求 x 之值設 $x-5=3$.

此題一望而知 x 之值是 8. 但若此並不幫助學者以剖析較複雜的方程式之法，是以必需有工作法可應用於其他相似的方程式。

[解] 所給方程式 $x-5=3$

等號之兩邊皆加 5, 則 $x=3+5$

聚集項數, 則 $x=8$

例題二 求 x 之值設 $x+3=10$

[解] 所給方程式 $x+3=10$

等號之兩邊皆減 3, 則 $x=10-3$

聚集項數, 則 $x=7$

例題三 求 b 之值設 $4b=32$.

[解] 所給方程式 $4b = 32$.

等號之兩邊皆除 4, 則 $b = 8$

例題四 求 x 之值若 $4x + 5 - 7 = 2x + 6$

[解] 所給方程式 $4x + 5 - 7 = 2x + 6$

等號之兩邊先皆加 7, 則 $4x + 5 = 2x + 6 + 7$

等號之兩邊皆減 5, 則 $4x = 2x + 6 + 7 - 5$

等號之兩邊皆減 $2x$, 則 $4x - 2x = 6 + 7 - 5$

聚集等號兩邊之項則 $2x = 8$

等號兩邊之項皆除 2, 則 $x = 4$

由以上之解答可見在一方程中其等號兩邊之加或減項皆當易位而更變其符號, 從易位而可使等號之左邊包含未知數而其右邊包含數字, 則方程式改成一簡易格式。

即 未知數 = 數字。

解答之步驟 凡剖析簡單的方程式可按以下之步驟。

- (1) 將凡包含未知數項易位至等號左邊, 並將各數字項易位至等號右邊, 每項在易位時須改變其符號。
- (2) 聚集等號兩邊各項。
- (3) 以未知數之系數除等號兩邊之數。

以上所說方程式之解答及更易皆根據以下之確論 (Axioms)。

- (1) 若以同等數加至兩相等數, 則兩和數必相等。
- (2) 若從兩相等數中減去同等數, 則兩較數必相等。
- (3) 若以同等數乘兩相等數, 則兩積數必相等。

(4) 若以同等數除兩相等數，則兩商數必相等。

(5) 同等數必互相等。

(6) 同乘冪之相等數必互相等。

(7) 同方根之相等數必互相等。

(8) 任何物之整數必等於其各部之和。

方程式之核對 方程式之問題是未知數所代表者為何數則可使方程式的等號兩邊之數相等？方程式解答是回答此問題，但應核對此種工作，核對之法是將已求得未知數之答數代入方程式中，如答數準確則等號兩邊之數相同。

例題 剖解並核對方程式： $47x - 17 = 235 - 37x$ 。

[解] 所給方程式 $47x - 17 = 235 - 37x$ 。

將數項與未知數項易位，則 $47x + 37x = 235 + 17$ 。

聚集項數，則 $84x = 252$ 。

用 x 之系數除之，則 $x = 3$ 。

將 $x = 3$ 代入方程式中以核對之。 $141 - 17 = 235 - 111$

則得等號兩邊之數相同， $124 = 124$ 。

習 題 五 十 三

解答及核對以下之方程式：

1. $3x + 4 = 2x + 5$ 。

2. $3x - 4 = x + 12$ 。

3. $3x - 25 + 2x = 39 - 3x$ 。

4. $250x - 20 = 20x + 440$ 。

5. $5x + 7 = 2x + 9$ 。

6. $4x - 4 = x + 7$ 。

7. $17x+10=14x+16.$ 8. $3x+14+2x=x+26.$
9. $40x-10=15x+90.$ 10. $8x+25=2x+28.$
11. $16x-3=6x+8-23x.$ 12. $8y-2=6y+7.$
13. $2x+(5x-5)=7.$ 14. $12y-(2y+1)=38+7y.$
15. $(y+3)-27=10-y-(y-2).$
16. $18y-(2y+6)-17=14y-(14-y).$
17. $35a-64+(13-a)=16a-(47-14a).$
-

剖析問題之方程式 前已述說由讀數學而得之一件事是能將一意思用數學的記號解釋。對於此種練習學者已有所得，前數章中曾將原則及定律寫作公式，並將文字譯為數學述語及將述語譯作文字，學者欲將一事實用數學的記號解釋則必先完全明白所要解釋之事件，且須熟悉數學之符號及記號，以下之建議可以協助學者將一問題寫成一方程式。

- (1) 細心誦讀問題之述說。
- (2) 揀擇未知數以字母代表之，若有較多的未知數須設法用起先所擇之名詞代之。
- (3) 根據問題求一代數式代表同數使彼此相等則成一待剖解之方程式。

例題一 某甲現年 x 歲，則其在20年前是多少歲？ y 年後是多少歲？

[解] 某甲在20年前是 $x-20$ 歲。

y 年後是 $x+y$ 歲。

例題二 一室之長度是四倍於闊度，其周度是 80 公尺，求室之長度與闊度。

[解] 以 x 代表闊度，則長度是 $4x$ 。

室之周度是兩倍長度加兩倍闊度 $= 2x + 8x$

$$2x + 8x = 80, \quad x = 8.$$

即闊度是 8 公尺，長度是 32 公尺

例題三 兩數之和是 20，兩數之較是 10。求其數。

[解] 命 x 代一數，既兩數之和是 20，則彼數是 $20-x$ 。

兩數之較是 10，則 $x - (20-x) = 10$

$$x - 20 + x = 10,$$

$$2x - 20 = 10,$$

$$2x = 30, \quad \text{則 } x = 15 \quad \text{一數}$$

$$20 - x = 5 \quad \text{彼數}$$

習 題 五 十 四

1. 某甲現年 m 歲，用代數記號代表他在 10 年前之年歲， n 年前之年歲，及 s 年後之年歲。
2. 某甲現年 x 歲，則 (A) 何時為 50 歲？(B) 何時是 15 歲？(C) 何時是 a 歲？
3. 有一火車每小時行 n 里，(A) 8 小時行多少里？(B) t 小時行多少里？(C) m 分鐘行多少里？

4. 有一火車每 10 小時行 x 里。(A) 每小時行多少里? (B) 每 n 小時行多少里? 需若干小時行 100 里?
5. 國幣 a 元中有多少分? b 角中有多少分? c 元及 d 角中有多少分?
6. x 磅蘋果價值國幣 10 元, 每磅蘋果之值是多少?
7. 求每磅橘子之值, 若每磅值 x 元則 25 磅值 10 元, 將此題寫成一方程式並剖解之。
8. 一室之長度是三倍於闊度, 其周度是 96 尺, 求長度及闊度。
9. 在一聚會中來賓共 64 人, 而孩童人數是三倍於成年者, 則孩童與成年各幾人?
10. 兩倍某數加六倍某數是 96, 則某數是多少?
11. 一馬及一車共值 214 元, 若馬較車多值 76 元, 求馬之值。
12. 設有三數, 其中第二數是四倍於第一數, 而第三數是三倍於第一數, 若由第一數與第二數之和減去第三數則餘數是 60, 求此三數。
13. 一書店在三年中共售出書 36,750 本, 但知第二年之售數倍於第一年之售數, 第三年之售數倍於第二年之售數。求每年之售數。
14. 有一塊長方形地, 其長較其闊多 30 公尺, 其周度是 260 公尺, 求其闊度及其長度。
15. 兩數之和是 300, 兩數之較是 200. 求其數。

16. 某甲有同數之 10 元鈔票，及 1 元鈔票共合 77 元，則鈔票共是幾張？
17. 某甲有 5 角及 2 角輔券若干張共合國幣 8 元 5 角，但知 5 角券之張數比 2 角券之張數多三倍。求每種之張數。
18. 某甲有 1 元鈔幣，2 角 5 分及 1 角鈔幣各若干張，共合國幣 4 元，若 2 角 5 分鈔幣之張數是 2 倍於 1 元鈔幣之張數，1 角鈔幣之張數是 5 倍於 1 元鈔幣之張數，則各種有若干張？
19. 某店主購進商品三件共費國幣 9 元，第二件商品比第一件之值是三倍，第三件之商品比第二件之值多國幣 3 元，求每件商品之值。
20. 三個水櫃共容水 24,500 加侖，第一個水櫃比第二個水櫃多容 4500 加侖，第二個水櫃比第三個水櫃多容 2500 加侖，求每水櫃之容水量。
21. 某班中之甲乙兩生共得總分 6793 分，甲生比乙生多得 265 分，問甲乙兩生各得多少分？
22. 求三個偶數連續數，其總數是 216。
23. 求四個奇數連續數，其總數是 88。
24. 求三個連接數，其總數是 66。
25. 將國幣 210 元分配於甲，乙，丙三人，乙比甲少得 35 元，但比丙多得 20 元，求甲，乙，丙各得多少元？
26. 一角之度數與另一角之度數成一直角，若將一角上加 14° 。

而將另一角上減去 14° , 則第一角比第二角大 44° ; 求兩角之度數。

27. 若兩角相加是一直角, 而其相差是 14° , 求每角之度數。
28. 某甲與其子每月獲工資國幣 188 元, 若將其子之工資加倍則比其父少得 62 元, 求其子每月所得多少元?
29. 甲乙丙三人共收穫麥 4080 公石, 甲比乙之收穫多三倍, 而比丙多 330 公石, 問甲乙丙各收穫若干公石?
30. 甲, 乙, 丙, 丁, 四人共有田 360 公頃, 乙比甲之所有加倍, 丙有乙之所有 3 倍, 丁比甲多 10 公頃, 問各有若干公頃?

第二十四章 乘法

基本的意義 在算學中整數的乘法可作為加法的簡法, 例如:
 $5 \times 3 = 5 + 5 + 5 = 15$. 所以乘法可用如加數, 其所加之次數等於乘數之單位。

乘法之意義須擴大使可包括分數, 所以 $8 \times \frac{3}{4} = \frac{8 \times 3}{4}$, 此即乘分子除分母。

代數之乘法, 當乘數是一正號的整數或分數時, 則仍保守其算學之意義, 但須擴大其意義使包括負數。

由算學之意義, 既乘數是正數, 則 $(-5) \times (+3) = (-5) + (-5) + (-5) = -15$. 在算學中兩整數相乘不論其中任何一數可作乘數。根據此原則, 當一數是負數時, 則 $(-5) \times (+3) = (+3) \times$

$(-5) = -15$. 由此而得以下之意義，用一負數相乘是以其數值乘之而後將積數之符號更改。

是以： $(+5)$ 乘 (-3) 則以 $(+5)$ 乘 $(+3)$ 則得 15 ，然後更改結果之符號。

$$\text{此即 } (+5) \times (-3) = -15.$$

又以 (-5) 乘 (-3) 則以 (-5) 乘 $(+3)$ 則得 -15 ，然後更改結果之符號。

$$\text{此即 } (-5) \times (-3) = +15.$$

從以上各節之解釋可以明瞭求兩代數式數字之積。

(1) 積數之數字部份是乘數之值及被乘數之值的積數。

(2) 若乘數及被乘數之符號相同者則積數之符號是加，若乘數及被乘數之符號不相同者則積數之符號是減。

以上所述者謂之乘法符號之定律，可解說於下：

$$+ \times + = +$$

$$- \times - = +$$

$$+ \times - = -$$

$$- \times + = -$$

若學者對於上述之原則尚有疑意，可以參考以下之解釋。

有一工場僱用工人及學徒各若干人，工人每名每月得工資 15 元，學徒每名每月貼工場 3 元。

設如人數之加增及銀錢之收入均作正數，而人數之減少及銀錢之支出均作負數。

(1) 若學徒人數增加 5 名，則每月收入增加 15 元。

$$\text{此即 } (+5) \times (+3) = +15$$

(2) 若學徒人數減少 5 名，則每月收入減少(即同支出)15元。

$$\text{此即 } (-5) \times (+3) = -15$$

(3) 若工人增加 5 名，則每月多支出 75 元。

$$\text{此即 } (+5) \times (-15) = -75$$

(4) 若工人減少 5 名，則每月少支出(即同收入)75元。

$$\text{此即 } (-5) \times (-15) = +75$$

從以上之見解則得同樣的乘法符號之定律。

連續的積數 欲求三個或較多的數字項之積數，則須求得前兩數字項之積數，再將此積數乘第三個數字項，以此推算直待各數字項皆用盡。

按以前述說積數符號之原則而得以下之定律：

(1) 因數是負數而其項數是奇數，則其積數是負數。

(2) 因數是負數而其項數是偶數，則其積數是正數。

(3) 任何項數的正數因數，其積數是正數。

$$\text{是以 } (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32$$

$$\text{而 } (-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = +64$$

以上第一式是 (-2) 自乘五次即等於 $(-2)^5$ ，並可讀作 (-2) 之五次乘冪，第二式是 (-2) 自乘六次即等於 $(-2)^6$ ，並可讀作 (-2) 之六次乘冪。

但需注意者是 $(-2)^6$ 與 -2^6 之意義不同，因 $(-2)^6$ 是將 (-2)

自乘五次。而 -2^5 是將2自乘五次然後將答數冠以減號。

$$\text{故 } (-2)^2 = (-2)(-2) = 4, \quad \text{但 } -2^2 = -(2)(2) = -4$$

$$(-3)^2 = (-3)(-3) = 9, \quad \text{但 } -3^2 = -(3)(3) = -9$$

習 題 五 十 五

1. 求 $-7, -8,$ 及 -10 之積。
2. 求 $-2, -4, +75$ 及 -60 之積。
3. 求 $(-7)^3, (8)^3,$ 及 $(-21)^3$ 之答數。

求以下各數之值：

$$4. (-4)^6, \quad 5. (-8)^4, \quad 6. (-1)^{10}.$$

$$7. (-4)^5(-3)^2; \quad 8. 2(+6)^2(-6)^2.$$

若 $x=2, y=-3, z=-4,$ 求以下各數之值：

$$9. x^3y^2, \quad 10. xyz, \quad 11. y^3z.$$

$$12. x^2y^2z^2, \quad 13. (+6)(-5)(-2)y^3.$$

$$14. (+15)(-2)(-3) + (+4)(-5)(+6).$$

$$15. (+1)(+2)(+3) + (+3)(+4)(+5) + (-5)(-6)(-7).$$

$$16. (+4)(-3)(+5) + (+2)(-3)(+4) + (+3)(-3)(+4).$$

$$17. (-2)^5(-3)^4 - (-4)(+6)(-7).$$

$$18. (-3)^3 \cdot -3^3 + (-2)^5 \cdot -2^5.$$

$$19. (-2)(-3) + (-4)(-5) + (-5)(-6).$$

$$20. (+1)(+2)(+3)(+4)(+5) - (-1)(-2)(-3)(-4)(-5).$$

$$21. (4)(5)(6)(7) - (-4)(-5)(-6)(-7).$$

指數之定律 正號整數的指數之定律已詳第十九章中。

$$\text{既 } a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$$

$$\text{並 } a^3 = a \cdot a \cdot a$$

$$\text{則 } a^5 \cdot a^3 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^8$$

$$\text{並 } a^5 \cdot a^3 = a^{5+3} = a^8$$

普通式 $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots$ 至 n 因數。

並 $a^m = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots$ 至 m 因數。

則 $a^n a^m = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots$ 至 $(n+m)$ 因數。

$$\text{並 } a^n a^m = a^{n+m}$$

同樣證明任何數之因數，如 $a^n \cdot a^m \cdot a^p \cdot a^r \cdots = a^{n+m+p+r \cdots}$

【定律】 兩個或較多的乘幂之同底數積數是等於該底數帶有指數而該數指數是乘幂的指數之和。

以一單項數乘一單項數。

例如 以 $14a^3b^2$ 乘 $-3a^4b^3$ 。

解釋 既乘數含有因數 $-3, a^4$, 及 b^3 , 可與被乘數逐一相乘。

因 14 乘 $-3 = -42$, a^3 乘 $a^4 = a^7$, 並 b^2 乘 $b^3 = b^5$. 其答數是 $-42a^7b^5$.

乘法之工作根據以下之次序：

- (1) 積數之符號。
- (2) 積數之系數。
- (3) 積數之字數。
- (4) 此項字數之指數。

是以在以上之例題中，符號是 $+\times-=-$ ；系數是 $14\times 3=42$ ，字數是 a 與 b ， a 之指數是 $3+4=7$ ，而 b 之指數是 $2+3=5$ 。

以一單項數乘一多項數。

【定律】 求積數是將乘數乘每項被乘數而取各部積數的代數式之和。

例如 以 $2a^2b^3x^4$ 乘 $7ax^3-21ab^4-3x^2$

工作法 $7ax^3-21ab^4-3x^2$

答數
$$\frac{2a^2b^3x^4}{14a^3b^3x^7-42a^3b^7x^4-6a^2b^3x^6}.$$

解釋 左首積數之第一項是由乘被乘數之第一項而得，第二項及第三項之積數是同樣求出，是以每一乘法是一單項數乘一單項數，以一多項數乘一多項數：將乘數之每項乘被乘數之每項而將相同的項數寫在同樣的項數之下而求各部積數的代數式之和。

例如 以 $2xy-y^2$ 乘 $x^2+3xy-2y^2$ 。

工作法 $x^2+3xy-2y^2$

$$\begin{array}{r} 2xy \times (x^2+3xy-2y^2) = \frac{2xy-y^2}{2x^3y+6x^2y^2-4xy^3} \\ -y^2 \times (x^2+3xy-2y^2) = \quad -x^2y^2-3xy^3+2y^4 \\ \hline \text{每項積數相加則得} \quad 2x^3y+5x^2y^2-7xy^3+2y^4 \end{array}$$

例如 以 $b^3-2a^2b+ab^2$ 乘 $3a^2+3b^2+ab$

工作法

$$3a^2 + 3b^2 + ab$$

$$\frac{b^3 - 2a^2b + ab^2}{3a^2b^3 + b^5 + ab^4}$$

$$-6a^2b^3 \qquad -6a^4b - 2a^3b^2$$

答數

$$\frac{+a^2b^3 \qquad +3ab^4 \qquad +3a^3b^2}{-2a^2b^3 + 3b^5 + 4ab^4 - 6a^4b + a^3b^2}$$

核對法 乘法問題可以用相當之數值代入字數而可以核對，最好所給之值須大於 1。因 1 之任何乘幕皆等於 1 之故。

設如欲核對第一例題，以 $x=2$ ， $y=2$ 。

$$\begin{array}{r} x^2 + 3xy - 2y^2 \\ 2xy - y^2 \\ \hline 2x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 \\ -x^2y^2 - 3xy^3 + 2y^4 \\ \hline 2x^3y + 5x^2y^2 - 7xy^3 + 2y^4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 + 12 - 8 = 8 \\ 8 - 4 = 4 \\ 8 \times 4 = 32 \\ 32 + 80 - 112 + 32 = 32 \end{array}$$

以上兩因數相乘與積數之值相等，則核對準確。

習 題 五 十 六

求以下各題之積數：

1. $10ab^2 \times 3a^3b.$
2. $16n^4x^5 \times -2n^6x^2.$
3. $4a^2x^3y^4 \times -5x^6y.$
4. $-17x^2y^7 \times -3a^3x^2.$
5. $-5m^3n^2d^2y^5 \times -2m^{10}n^6c^2y^2.$
6. $-x^2y^3 \times -x^4y^2z^3.$
7. $-3x^2y^3 \times x^2 \times y^3 \times 4xy.$
8. $3PQ^3 \times 4P^2Q^3.$
9. $-\frac{2}{3}ax^2 \times \frac{3}{4}a^2x^3 \times -\frac{1}{3}ax.$
10. $a^n \times a^{2n+1} \times a^{3n+2} \times a^{n+1}.$

11. $(a^3)^2$. 12. $(m^2n^3)^4$.
13. $(4a^2b^4)^3$. 14. $(a^nb^m)^6$.
15. $a^5b^2c^2 \times a^2b^5c \times ab^6c^2 \times ab^2c^5$.
16. $x^4y^2z \times x^2y^4z^3 \times x^6y^7z$.
17. $3a^4c^2 \times -4a^5c \times -2a^6c^4$.
18. $pqr^2 \times p^2qr \times -pq^2r$.
19. $(6xyz)(-7axy^2)(-2a^3x^2y^6z^2)$.
20. $5b^2 \times (5+6b^2-7b^4)$.
21. $-7x^2y \times (-3x^2y^2+2xy)$.
22. $25ab^2 \times (2x^4b^3+2c^2d)$.
23. $-5x \times (-3a+2a^2+4)$.
24. $-15x^7y^8 \times (m^7n^8x^2y^2-13p^9q^{10})$.
25. $-3x^3y^5z^7 \times (x^8y^6z^4-13x^4y^2)$.
26. $3c^2de \times (3cd^2e+6cde^2-5cde)$.
27. $(4x^2y^3-7xy^4+14a^2) \times -4x^3$.
28. $(2x-3y) \times (4x+y)$.
29. $(x^2-2y) \times (4x+y^2)$. 30. $(-3x+7) \times (2x-1)$.
31. $(5x+4y) \times (3x-2y)$. 32. $(ax-by) \times (ax+by)$.
33. $(a^2x^2-2y^2) \times (a^2x^2+2y^2)$. 34. $(a^2+ab+b^2) \times (a-b)$.
35. $(a^2-ab+b^2) \times (a+b)$. 36. $(a^2-ab+b^2) \times (2a-4b)$.

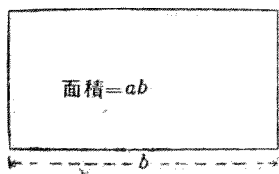
常時括弧用以包含積數之因數如 $(a+b)$, $(a-b)$ 即等於 $(a+b)$ 乘 $(a-b)$.

求以下各積數：

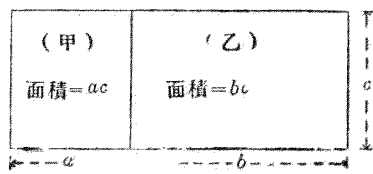
37. $(2x+3y-z)(2x-3y+z)$.
38. $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$.
39. $(x^2-2xy+y^2)(x^2+2xy+y^2)$.
40. $(6x^2+2x+1)(x^2-x-1)$.
41. $(c^2+3cd+4d^2)(c^2-3cd-4d^2)$.
42. $(x^2-4x+16)(x+5)$.
43. $(n^2-50n-100)(n+2)$.
44. $(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)(a^2-ab)$.
45. $(4x^3-3x^2y+5xy^2-6y^3)(5x+6y)$.
46. $(4y^2-10+2y)(2y^2-3y+5)$.
47. $(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)(a+b)$.
48. $(2ac^2-3by)(2c^3-3y^2)$.
49. $(a^3+3a^2x+3ax^2+x^3)(a^3-3a^2x+3ax^2-x^3)$.
50. $(x^4+x^2y^2+y^4)(x^2-y^2)$.
51. $(a-b)(a+b)$.
52. $(2x+7)(3x^2-8)$.
53. $(3x^2+ab)(3x^2-ab)$.
54. $5(x^2-ab)+6(x^2+ab)$.
55. $-3ab(ab-a^2)+2ab(a^2-b^2)$.
56. $-2(-2a^4+3a^3b-b^4)+3(a^4+2a^3b-2b^4)$.
57. $2(x^2-3x+1)-(x+4)(x-1)$.

58. $2(n+1)(n-1)(n+2) - 4n(1-n)(n+3)$.
59. $2x^2[x^2 - 3x(x-y)] + (x^2 + xy - y^2)(x^2 - y^2 + xy^2)$.
60. 求一長方形之面積，其長度是 $(2x+5)$ 尺，闊度是 $(x-6)$ 尺。
61. 求一長方固體之體積，長 $(2x-3)$ 尺，闊 $(7x-2)$ 尺，高 $(x+4)$ 尺。
62. 求一正圓筒體之體積，高 h 尺，底面半徑 $2h-4$ 尺。
63. 求一空心正方之面積，外邊長 $(2s+6)$ 尺，內邊長 $(s-2)$ 尺。
64. 求一圈之面積，外圈之直徑是 $(6a+9)$ 尺，內圈之直徑是 $(3a-7)$ 尺。

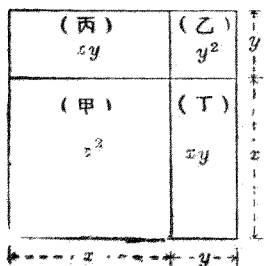
積數之表示 如下圖(1)以 a 代高度之單位而以 b 代表底邊



(1)



(2)



(3)

之單位，則積數 ab 代表長方形之面積平方單位。

又圖(2)代表 $(a+b)$ 乘 c 之積數，甲代表一部份之積數 ac ，而乙代表一部份之積數 bc 。

又下圖(3)代表 $(x+y)(x+y) = x^2 + 2xy + y^2$ 。整個圖形是代表一整方每

邊長 $x+y$. 甲之面積是 x^2 , 乙之面積是 y^2 , 丙之面積是 xy , 並丁之面積是 xy . 總數面積是邊長 $x+y$ 的正方面積 $= x^2 + 2xy + y^2$.

習 題 五 十 七

求各題之積數並以圖表示之：

1. $(a+b+c)d$.

2. $(a+b+c)(d+e)$.

3. $(a+b+c)^2$.

4. $(x+y)(x-y)$.

5. $(x-y)^2$.

6. $(a+b+c)(d+e+f)$.

近似的積數 以 $(1+a)$ 乘 $(1+b)$ 則得 $1+a+b+ab$.

若上數中 a 與 b 之值皆甚小, 則積數 ab 之值更小, 而 $(1+a)(1+b)$ 近似的值是 $1+a+b$.

是以, 若 $a=0.05$, $b=0.06$, 則 $(1+a)(1+b)$ 之近似的值是 $1+a+b$ 即 $1+0.05+0.06=1.11$. 其準確之值是 $1+0.05+0.06+0.003=1.113$ 相差是 0.003 .

例題 若 $a=0.01$, $b=0.02$, 若 ab 項不算入則 $(1+a)(1+b)$ 之積數中相差是多少百分比。

[解] 近似的值是 $1+0.01+0.02=1.03$

確數是 $1+0.01+0.02+0.0002=1.0302$

相差是 $1.0302-1.03=0.0002$

相差百分比是 $(0.0002 \times 100) \div 1.03 = 0.02\%$ 弱。

習 題 五 十 八

1. 求 $(1+a)(1+b)$ 近似的積數較確數相差是何百分比？若 $a=0.001, b=0.002$.
2. 求 1.002×1.05 的近似值。
3. 1.02×1.0024 的近似值共應有幾位小數？
4. 若 $a=0.003, b=0.005$, 求 $(1+a)(1+b)$ 近似的積數與確數相差是何百分比？
5. 若 $(1+a)^3$ 使等於 $1+3a$, 則與確數相差是何百分比？若
(1) $a=0.0002$, (2) $a=0.002$, (3) $a=0.02$, (4) $a=0.2$ 。
6. 若量一圓之半徑時有 1% 的錯誤, 則按此量數計算圓之面積, 結果的錯誤是何百分比？
7. 用規尺畫一三角而計算其面積, 量高度時比原數大 $1\frac{1}{2}\%$, 底邊比原數大 2%, 則其面積比原數相差多少百分比？
8. 求以下各數之近似的積數:
(1) 1.003×1.012 (2) 1.02×0.97 (3) 1.004×0.998
(4) 0.97×0.98 (5) 0.996×0.997 (6) 0.985×0.996
9. 量一長方形時, 長度量 2%, 闊度量小 3%, 按此量數計算面積, 則比確數相差多少百分比？
10. 若量一三角形時, 將底邊量大 1%, 高度量小 $1\frac{1}{2}\%$, 按此量度計算面積則與相差是何百分比？
11. 若一數之錯誤是 1%, 則該數之平方及立方之錯誤各是多少百分比？

第二十五章 除法 特殊積數與因數

除法 除法是乘法之轉置其答數與除數相乘則得被除數。從乘法中符號及指數之定律則得下言。

(1) 在除法中，符號相同者則答數是正數，符號不相同者答數是負數。

(2) 同底數之指數相除，則答數之指數是被除數之指數減除數之指數。

是以 $a^6 \div a^3 = a^{6-3} = a^3$ 。若兩同底數同指數之數相除則等於 1。

故 $a^3 \div a^3 = a^{3-3} = a^0 = 1$, $x^2 \div x^2 = x^{2-2} = x^0 = 1$, a^0 或 x^0 皆等於

1。推而言之凡指數是零不論是何底數皆等於 1。

以一單項數除一單項數，其工作步驟與乘法同。

1. 決定答數之符號。
2. 決定系數。
3. 決定字數與指數。

所不同者是在除法中以兩數相除，而指數是相減。

例題 $25a^4x^5$ 除 $-5a^2x^3$

按步驟工作

$$25 \div -5 = -5$$

$$a^4 \div a^2 = a^2$$

$$x^5 \div x^3 = x^2$$

$$\therefore 25a^4x^5 \div -5a^2x^3 = -5a^2x^2$$

核對法 除法之核對有如乘法之核對可將數字代以相當之值而核對之，或以答數乘除數則應等於被除數。

習 題 五 十 九

求以下之答數並核對之：

- | | |
|---------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $16x^2y$ 除 $2xy$. | 2. $14x^3z^4$ 除 $-7xz$. |
| 3. $10x^4yz^3$ 除 $3x^2z^2$. | 4. $-22a^3b$ 除 $-2ab$. |
| 5. $100a^4x^3$ 除 $-5a^4x$. | 6. $18a^5b^2x$ 除 $-3a^2bx$. |
| 7. $-20x^3y^4$ 除 $-5x^2y^2$. | 8. $-42a^3m^2y^3$ 除 $7a^2m^2$. |
| 9. $-13a^2y^2$ 除 $-13ay^2$. | 10. $8a^2y^3$ 除 $-8a^2y^3$. |
| 11. $18a^6b^5$ 除 $-6a^3b$. | 12. $3ax^3$ 除 $7ax$. |
| 13. $5a^4x^3c$ 除 $-2a^2$. | 14. $144a^2$ 除 $12a^2$. |
| 15. $-5^4a^3c^5$ 除 -5^2ac^4 . | 16. $7^5ac^4xy^2$ 除 -7^4ac^4y . |

以一單項數除一多項數，其工作法如下。

從左首起將每項被除數用除數除之。

例題 $24a^5y^3 - 96a^5y^6 \div 8a^4y^3$

工作法
$$\begin{array}{r} 8a^4y^3 \overline{) 24a^5y^3 - 96a^5y^6} \\ \underline{24a^5y^3} \\ -96a^5y^6 \\ \underline{-96a^5y^6} \\ \end{array}$$

答數 $3a - 12ay^3$

習 題 六 十

除以下各數用答數乘除數以核對之：

1. $14ax + 28ay + 84az$ 除 $14a$.

2. $12a^3 + 3a^4 + 18a^5$ 除 $3a^3$.
3. $3x^5 - 16x^3 + 14x^2$ 除 x^2 .
4. $7a^2xy^3 - 21a^3x^2y + 35a^4x^3y^2 - 49ax^2y^2$ 除 $-7axy$.
5. $6a^2bc^2 - 18ab^2c + 36abc$ 除 $-3abc$.
6. $25ax^2y^3 - 10x^3y^4 - 5x^2y^3$ 除 $5x^2y^3$.
7. $21x^3y^3 - 7x^2y^2 + 14xy$ 除 $7xy$.
8. $42a^3 - 11a^2 + 28a$ 除 $7a$.
9. $24x^2y^2 - 8x^4y^5 - 24xy^2$ 除 $8x$.
10. $4x^2y^6 + 8x^7y^3 - 12x^6y^4$ 除 $2x^2y^2$.
11. $\frac{1}{4}a^5b^2 + 5a^3b^4 - 7a^4b^3$ 除 $-1\frac{1}{2}a^2b^2$.
12. $3 \cdot 25a^7 - 5 \cdot 2a^6 + 9 \cdot 75a^3$ 除 $0 \cdot 25a^3$.
13. $a^2(a+b) + a^3(a+b)$ 除 a^2 .
14. $3(a-b) + 6a(a-b)$ 除 $(a-b)$.
15. $(a-b)(c+d) + (a-b)(x+y)$ 除 $(a-b)$.



多項數之因數，當其中之一個因數是單項數 題中之第一問， $14ax + 28ay + 84az$ 之每一項皆可以 $14a$ 除之，其答數是 $x + 2y + 6z$ 。則 $14ax + 28ay + 84az$ 是 $14a$ 乘 $x + 2y + 6z$ 之積數， $14a$ 與 $x + 2y + 6z$ 是謂 $14ax + 28ay + 84az$ 之因數。

與上相似的多項數之因數是一單項數，該單項數是多項數每項中之公數(Common)，其答數是多項數除此單項數。

例題 劈 $4a^2x - 2ax^2 + 6a^2x^2$ 之因數。

以上之單項因數是 $2ax$ ，亦即以上多項數的各項中所包含之最大公數，以 $2ax$ 除上題之多項數則得 $2a - x + 3ax$ 是謂其他因數，以上之多項數可以劈成兩個因數 $2ax(2a - x + 3ax)$ 。

核對法 將因數相乘應等於原題之多項數。

習 題 六 十 一

劈下題之因數：

- | | |
|-------------------------------|----------------------------|
| 1. $ax + ay + ac.$ | 2. $14 + 21a.$ |
| 3. $20a + 30b + 40.$ | 4. $12x + 40x^2$ |
| 5. $x^2 - x^3 + x^4$ | 6. $54a^4 + 63a^7.$ |
| 7. $a^4b^2 - a^3b^4 - a^2b^6$ | 8. $16 + 32a - 24a^3.$ |
| 9. $(x-2)a + (x-2)b.$ | 10. $(c-d)b^4 - (c-d)x^2y$ |
| 11. $(3a-5)n + (3a-5)p.$ | 12. $3(2a+4b) + 3(3a-6b)$ |
| 13. $16a^2(a+b) + 16a^2(c-d)$ | 14. $(a-b)^3 + 2a(a-b)^2$ |

單項數之方乘及方根 從乘法之原則求單項數之方乘如下：

- (1) 符號恆是加數。
- (2) 數字的系數是單項數的數字系數之方。
- (3) 任何字項之指數是單項數的同字項之指數加倍。

是以 $(5a^2b^3)^2 = 25a^4b^6$, $(-4a^3b^2d)^2 = 16a^6b^4d^2$, 並 $\left(\frac{1}{3}x^2y\right)^2 = \frac{1}{9}x^4y^2$. 求單項數之方根是反轉求單項數之方乘法。

- (1) 方根祇能從一正數求得。
 (2) 數字系數是單項數的數字系數之方根。
 (3) 任何字項之指數是單項數中字項之指數的一半。

按以上之原則求方根的單項數之數字系數必是整方而一切指數必皆偶數，否則不能求得確數。

是以 $\sqrt{16a^4b^2} = 4a^2b$ ，並 $\sqrt{225x^4y^6z^2} = 15x^2y^3z$ ，但 $\sqrt{10a^4b^6}$ 祇能寫作 $\sqrt{10a^2b^3}$ ，而 $\sqrt{35a^3b}$ 則不可求。

習 題 六 十 二

求以下之方乘及方根，何題是不可求，應何更改方可。

1. $(3ab^5)^2$.
2. $(-2x^2y^2)^2$.
3. $(-9ac^2d)^2$.
4. $\left(\frac{1}{2}am^5r\right)^2$.
5. $\left(-\frac{1}{3}a^3y^4z\right)^2$.
6. $(11m^4n^5x)^2$.
7. $(x^2y^4z^5)^2$.
8. $(-20x^5y^4)^2$.
9. $\sqrt{16x^4y^6}$.
10. $\sqrt{25m^4n^6}$.
11. $\sqrt{13a^6z^4}$.
12. $\sqrt{256x^8y^{10}}$.
13. $\sqrt{9a^7b^2}$.
14. $\sqrt{49a^6b^4c^2}$.
15. $\sqrt{576x^4y^2}$.
16. $\sqrt{-16x^6z^4}$.
17. $\sqrt{x^6y^8z^4}$.
18. $\sqrt{38^2y^6}$.
19. $\sqrt{\pi^2R^2r^2}$.
20. $\sqrt{\frac{\pi^2}{4}D^2d^2}$.

兩項數之方乘 用乘法，

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

此處之 a 與 b 是普通數，若用以上之述說為公式求任何兩數之和及兩數之較的方乘，此項方乘公式可譯作以下文字。

(1) 兩數之和的方乘是等於第一數之方乘加兩倍的第一數與第二數之積加第二數之方乘。

(2) 兩數之較的方乘是等於第一數方乘減去兩倍的第一數與第二數之積加第二數之方乘。

用以上之原則可以簡省許多乘法的工作。

例題一 求 $(cd+e)^2$ 之值。

$$\text{第一項之方} = (cd)^2 = c^2d^2.$$

$$\text{兩倍的第一數與第二數之積} = 2(cd)e = 2cde.$$

$$\text{第二數之方} = e^2.$$

$$\therefore (ca+e)^2 = c^2d^2 + 2cde + e^2.$$

例題二 $(2a+b^2)^2 = 4a^2 + 4ab^2 + b^4.$

例題三 $(2x^2-3y^3)^2 = 4x^4 - 12x^2y^3 + 9y^6.$

習 題 六 十 三

寫出以下之積數不用乘法，再用乘法所得者以核對之：

1. $(m+2)^2.$ 2. $(a+2b)^2.$ 3. $(x+2y)^2.$

4. $(3x+y)^2.$ 5. $(x^2+4)^2.$ 6. $(2x^2-3)^2.$

7. $(2x-7)^2.$ 8. $(ax^2-4y)^2.$ 9. $(3ax-4y)^2.$

10. $(2a^2y^3-3y)^2.$

三項方之因數 三項方是一三項數即是兩項數之方。

是以 $a^2+2ab+b^2$ 是一三項方因其是兩項數 $a+b$ 之方，則其因數顯是 $(a+b)(a+b)$ 。又 $a^2-2ab+b^2$ 之因數是 $(a-b)(a-b)$ 。
 $4x^2-12x+9$ 之因數是 $(2x-3)(2x-3)$ 。

所需注意者是三項方中有兩正數項，每項是單項之方，倘有是正數或負數一項即等於兩倍的其他兩項之方根的積數，若此項是正數則因數是兩數之和，若此項是負數則因數是兩數之較。

是以， $9a^4-24a^2y^2+16y^4$ 是三項方，因 $9a^4$ 及 $16y^4$ 是單項數 $3a^2$ 與 $4y^2$ 之正數方。 $24a^2y^2$ 是此項方根之積數的兩倍， $(3a^2-4y^2) \times (3a^2-4y^2)$ 是其因數。

既據定義一數之方根是其兩相等因數之一，則三項方之方根是其兩相等因數之一。

習 題 六 十 四

指出下數中三項方，劈因數及求方根：

- | | |
|---|-------------------------------|
| 1. $x^2+2xy+y^2$. | 2. $4x^2-4xy+y^2$. |
| 3. $9x^4+18x^2y^2+9y^4$. | 4. $16x^4-8x^2y+y^2$. |
| 5. x^2-2x+1 . | 6. x^4+4x^2+4 . |
| 7. x^2+3x+9 . | 8. $25x^{10}+10x^5+1$. |
| 9. $14x^2+6x+8$. | 10. $25b^2+16x^2-50bx$. |
| 11. $4x^4+y^4+4x^2y^2$. | 12. $225a^2-270a+81$. |
| 13. $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}xy+\frac{1}{9}y^2$. | 14. $81a^4-108a^2y^2+36y^4$. |
| 15. $4x^2y^2+4xy+1$. | 16. $25z^4-70yz^2+49y^2$. |

17. $100+a^2+20a$

18. $16x^2+25y^2-50xy.$

兩數之和乘同樣兩數之較的積數 由乘法所得

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

既 a 與 b 是普通數，用以上之述說為公式，則任何兩數之和與其較相乘之積可以直接寫出而不用乘法，此項公式可以譯作以下之文字。

兩數之和與其較之積是等於兩平方之較。

例題一 $(2c+3b)(2c-3b)=4c^2-9b^2$

例題二 $(16+2)(16-2)=16^2-2^2=256-4=252.$

例題三 $102 \times 98 = (100+2)(100-2)=100^2-2^2=10000-4=9996.$

習 題 六 十 五

寫出以下之積而不用乘，然後再以乘法核對之。

1. $(2+2y)(2-2y).$

2. $(3x-y)(3x+y).$

3. $(12x+13)(12x-13).$

4. $(16x^2y-2)(16x^2y+2).$

5. $(x^3+y^3)(x^3-y^3).$

6. $(3a^2-4b)(3a^2+4b).$

7. $(4x^2y^3+1)(4x^2y^3-1).$

8. $(54-5)(54+5).$

9. $[a+(b+1)][a-(b+1)].$

10. $[(x+y)+z][(x+y)-z].$

11. $(2c+d+e)(2c+d-e).$

12. $(a+b-2c)(a+b+2c).$

13. $(x^2-y^2-xy)(x^2+y^2+xy).$

14. $(x^2 - y^2 - xy)(x^2 - y^2 + xy)$.

15. $(7 + x + y)(7 - x - y)$.

16. $(3 - x + y)(3 + x + y)$.

17. $(a - y - z)(a - y + z)$.

18. $[4a - (x - 2y)][4a + (x - 2y)]$.

19. $(11x^3y - z^4)(11x^3y + z^4)$.

20. $(30x^2y^3 + 3ab)(30x^2y^3 - 3ab)$.

21. 95×105 .

22. (995×1005) .

23. 64×56 .

24. 75×85 .

25. 505×495 .

26. 706×694 .

兩方相較之因數 據上所論則兩方相較極易劈為兩個兩項數的因數，一為兩方根之和，一為兩方根之較。

例題一 $4 - a^2 = (2 + a)(2 - a)$.

例題二 $16a^4 - 9y^2 = (4a^2 + 3y)(4a^2 - 3y)$.

例題三 $(a + b)^2 - 4 = (a + b + 2)(a + b - 2)$.

$$\begin{aligned} \text{例題四 } a^2 - b^2 + 2bc - c^2 &= a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) \\ &= a^2 - (b - c)^2 = (a + b - c)(a - b + c). \end{aligned}$$

習 題 六 十 六

劈以下之因數，再用乘法核對之：

- | | |
|----------------------------|---|
| 1. $4-x^2$. | 2. $16-4y^2$ |
| 3. a^2-1 . | 4. $1-9x^4$. |
| 5. $81a^2-16b^2$. | 6. 7^2-5^2 . |
| 7. $225-64a^2$. | 8. $36a^4-49b^2$. |
| 9. $4a^2b^2-25a^2c^2$. | 10. $64a^4b^6-100c^2d^2$. |
| 11. $9a^4-4b^4$. | 12. $2^2 \cdot 3^4 \cdot d^2 - 5^2 \cdot c^2$. |
| 13. $(x+y)^2-z^2$. | 14. $(a+b)^2-64$. |
| 15. $x^2+y^2-2xy-z^2$. | 16. $25-(a+b)^2$. |
| 17. $25-(a-b)^2$. | 18. $p^2-4pc+4c^2-c^2$. |
| 19. $(3a-b)^2-(2a+2b)^2$. | 20. $(2x-7)^2-(3x-1)^2$. |

兩立方之和 以 a 與 b 為普通數, 例如 a^3+b^3 , 若以 $a+b$ 除之則答數是 a^2-ab+b^2 . $\therefore a^3+b^3$ 是 $(a+b)$ 與 (a^2-ab+b^2) 之積數, $(a+b)$ 及 a^2-ab+b^2 是 a^3+b^3 的因數。

是以 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

例題一 $27x^3+64y^3=(3x+4y)(9x^2-12xy+16y^2)$

兩立方之較 以 a 與 b 為普通數, 例如 a^3-b^3 , 若以 $a-b$ 除之則答數是 a^2+ab+b^2 . $\therefore a^3-b^3$ 是 $(a-b)$ 與 (a^2+ab+b^2) 之積數. $(a-b)$ 及 a^2+ab+b^2 是 a^3-b^3 的因數。

是以 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

例題二 $8x^3-1=(2x-1)(4x^2+2x+1)$

學者須熟記以上之兩公式以備求積數及劈因數之用。

習 題 六 十 七

求以下之積數而不用乘，然後再以乘法核對之：

1. $(x+y)(x^2-xy+y^2)$.
2. $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$.
3. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$.
4. $(4a-1)(16a^2+4a+1)$.
5. $(1-x)(1+x+x^2)$.
6. $(y-2)(y^2+2y+4)$.
7. $(a+b+2)[(a+b)^2-2(a+b)+4]$.
8. $(a-8)(a^2+8a+64)$.
9. $(x+y+3)[(x+y)^2-3(x+y)+9]$.
10. $(1-5a)(1+5a+25a^2)$.

劈以下各題之因數：

11. a^3-1 .
12. $8x^3+27y^3$.
13. $64-b^3$.
14. $(a+b)^3-(c+d)^3$.
15. $125x^3-y^3$.
16. $(x+y)^3+8$.
17. $(2a+b)^3-(2a-b)^3$.
18. $729+x^3$.
19. $1-(x+y)^3$.
20. $(3b-x)^3+27$.
21. x^6+y^6 .
22. x^6-y^6 .
23. $(a^2-1)^3-(b^2-1)^3$.
24. $(5x+3y)^3-64$.
25. $8x^3-(1-a)^3$.

有一公項的兩個兩項數之積 從乘法而得以下積數。

$$(1) (a+2)(a+3) = a^2 + 5a + 6.$$

$$(2) (a-2)(a-3) = a^2 - 5a + 6.$$

$$(3) (a+2)(a-3) = a^2 - a - 6.$$

$$(4) (a-2)(a+3) = a^2 + a - 6.$$

$$(5) (a+b)(a+c) = a^2 + (b+c)a + bc.$$

從查看以上之積數則得以下述說：

兩個兩項數之積，一為公項與一不同項，是一三項數包括公項之方，與不同項數的代數式之和乘同項數，並加不同項數之積。

是以，第(1)題之公項是 a ，其不同項是 2 與 3。公項之方是 a^2 。不同項數的代數式之和是 $2+3=5$ ，以 5 乘公項 $=5a$ 。不同項之積是 $2 \times 3 = 6$ ，所以結果 $(a+2)(a+3) = a^2 + 5a + 6$ 。

又第(3)題，公項之方是 a^2 。不同項數的代數式之和是 $2+(-3) = -1$ ，以 -1 乘 $a = -a$ ，不同項的積是 $2 \times (-3) = -6$ 。所以結果 $(a+2)(a-3) = a^2 - a - 6$ 。

習 題 六 十 八

求以下之積而不用乘，然後再乘出核對：

$$1. (x+3)(x+4).$$

$$2. (x-4)(x+3)$$

$$3. (x-3)(x+4).$$

$$4. (x-3)(x-4).$$

$$5. (x+7)(x+8).$$

$$6. (x-7)(x-8).$$

$$7. (x-8)(x+7).$$

$$8. (x+8)(x-7).$$

$$9. (2n-4)(2n+5).$$

$$10. (2n+4)(2n+5).$$

- | | |
|--------------------------|-----------------------|
| 11. $(x+1)(x-11)$. | 12. $(r-16)(r+17)$. |
| 13. $(x^2+6)(x^2-5)$. | 14. $(2x+7)(2x-18)$. |
| 15. $(5a+3)(5a-6)$. | 16. $(6+8)(6-5)$. |
| 17. $(xy+2)(xy-3)$. | 18. $(3+xy)(4+xy)$. |
| 19. $(2x+3)(4x+3)$. | 20. $(3x-4)(3x+9)$. |
| 21. $(4y^2-1)(7y^2+2)$. | |

將一三項數劈為兩個兩項數因數而有一公項；從查考上題及所得之積可以決定劈此種三項數為因數之法，劈因數之法是將由以下例題而示之。

例題一 劈 $a^2+9a+20$ 為因數。

此處有一項 a^2 是一整方， a 是此數之方根，則 a 將為因數中之公項，因數中不同項之積須是 20，而其和是 9。稍加思索即得不同項是 +4 與 +5。所以 $a^2+9a+20$ 之因數是 $(a+5)(a+4)$ 。

例題二 劈 a^2-a-20 為因數。

此數之公項亦是 a ，其不同項之積是 -20，而其和是 -1。既積數是負數，則一項是負而一項是正，因兩數之和是負數則較數是負數，不同項必是 -5 與 +4，所以 a^2-a-20 之因數是 $(x-5)(x+4)$ 。

有許多三項數雖是同一式樣但不能劈為因數。

例如 x^2+7x+5 。則不能劈為因數，緣無從求得兩數之積是 5，而其和是 7。

尚有他種三項數，而其兩項數之因數中並無公項，此種三項數

之劈因數雖較難但不若上述之三項式有用。

$$\text{例如 } (2x+1)(3x-4) = 6x^2 - 5x - 4$$

先將 x^2 之系數劈爲因數是 2×3 , 或 6×1 . 再將第三項之數字劈爲因數是 2×2 或 4×1 . 在其中擇取一對, 若因數互乘其相差之數是 5, 則得其因數矣。從上列之因數稍加思索必擇取 2×3 與 4×1 , 因 2×4 是 8, 並 3×1 是 3, 相差是 5. 則 $2x$ 須與 4 相乘而 $3x$ 須與 1 相乘, 因三項數中之 x 的系數是負數, 而數字項亦是負數, 則 4 須是負數。

是以 $6x^2 - 5x - 4$ 的因數是 $(2x+1)(3x-4)$ 。

$$\text{例二 } (2x+1)(3x+4) = 6x^2 + 11x + 4.$$

若上述之劈因法, 仍擇取 2×4 與 3×1 , 其和是 11, 因 x 之系數是正數而字數項亦是正數, 則 4 與 1 皆是正數。

是以 $6x^2 + 11x + 4$ 的因數是 $(2x+1)(3x+4)$

習 題 六 十 九

劈以下之因數, 並用乘法以核對之:

- | | |
|-------------------------|-----------------------|
| 1. $b^2 - 7b + 12.$ | 2. $b^2 + 11b + 30.$ |
| 3. $c^2 - c - 30.$ | 4. $x^2 + 2x - 8.$ |
| 5. $a^2 - 3a - 10.$ | 6. $x^2 + 15x + 56.$ |
| 7. $y^2 - y - 56.$ | 8. $a^2 + 3a - 4.$ |
| 9. $x^2 - 15x + 56.$ | 10. $r^2 + 20r + 64.$ |
| 11. $x^2y^2 + 3xy + 2.$ | 12. $x^2 - 6x - 16.$ |

- | | |
|------------------------|---------------------------|
| 13. $a^2+9a-10$. | 14. $a^2-a-132$. |
| 15. a^2-a-72 . | 16. $x^2+6x-72$. |
| 17. x^2-x-90 . | 18. $x^2+15x-34$. |
| 19. $x^2-12x-45$. | 20. $a^2+4a-21$. |
| 21. $a^2-8a-33$. | 22. $n^2+15n-16$. |
| 23. $n^2+13n+36$. | 24. $n^2-7n-60$. |
| 25. $a^2-11a-60$. | 26. $a^2+10a-24$. |
| 27. a^2+a-42 . | 28. $a^2b^2-16ab+15$. |
| 29. n^4-3n^2-18 . | 30. $x^2-5xy-84y^2$. |
| 31. $x^2+12xy+27y^2$. | 32. $1+5x-14x^2$. |
| 33. $a^2-14a+40$. | 34. $a^2+3ab-54b^2$. |
| 35. $1-13y-68y^2$. | 36. $x^2-(a+b)x+ab$. |
| 37. x^2-7x-8 . | 38. $(m-n)^2+7(m-n)+12$. |

劈以下之因數，其中如有無因數者應如何改正？

- | | |
|---------------------------|-------------------------|
| 39. $(x+y)^2-5(x+y)-14$. | 40. x^2y^4-16 . |
| 41. xy^2-4x . | 42. $xy^2+15xy-34x$. |
| 43. $a^2y^6-b^2y^2$. | 44. $a^2+3a+14$. |
| 45. bx^3-a^2bx . | 46. $3ax^2-18ax-180a$. |
| 47. $100x^4-y^6$. | 48. $9x^2+y^2+12xy$. |
| 49. $64x^9-16x^7$. | 50. $64x^6+y^3$. |
| 51. $64x^8+16x^6+x^6$. | 52. x^2-2y-y^2-1 . |
| 53. $4x^2-13x+3$. | 54. $1-27a^3$. |

55. $(5x^2+6x+1)$.

56. $7x^2-10x-8$.

57. ax^4+8axy^3 .

58. $8x^3+15x^2-2x$.

59. $a^2b^3-a^2x^3$.

60. $a^2-2a+1-x^2y^2$.

第二十六章 方程解答

若一方程有乘法並括弧者最好先做乘法及除去括弧，然後解答方程。

例題一 求 c 之值，若

$$4c+3[2c-4(c-2)]=72-6c.$$

[解] (1) 所給方程式 $4c+3[2c-4(c-2)]=72-6c$.

(2) 化簡 $4c+3[2c-4c+8]=72-6c$.

(3) 再化簡 $4c+6c-12c+24=72-6c$.

(4) 數項與字項易位 $4c+6c-12c+6c=72-24$.

(5) 聚集項數 $4c=48$.

(6) 以 c 之系數除之 $c=12$.

核對 將 c 之答數代入原有方程式。

則 $48+3[24-48+8]=72-72$.

$$48+72-144+24=72-72 \text{ 或 } 0=0.$$

例題二 求 x 之值，若

$$(1+3x)^2=(5-x)^2+4(1-x)(3-2x).$$

[解] (1) 所給方程式 $(1+3x)^2=(5-x)^2+4(1-x)(3-2x)$

(2) 去括弧化簡，則

$$1+6x+9x^2 = 25-10x+x^2+12-20x+8x^2$$

(3) 數項與字項易位,

$$9x^2 - x^2 - 8x^2 + 6x + 10x + 20x = 25 + 12 - 1$$

(4) 聚集項數, $36x = 36$

(5) 以 36 除之, $x = 1$

核對 將 $x=1$, 代入原有方程式。

則 $(1+3)^2 = (5-1)^2 + 4(1-1)(3-2)$, 即 $4^2 = 4^2 + 0$ 或
 $16 = 16$ 。

習 題 七 十

剖解以下各方程式:

1. $7x - 5 = x - 23$.
2. $5x - 12 = 6x - 8$.
3. $7x + 19 = 5x + 7$.
4. $2x - (5x + 5) = 7$.
5. $3(x + 1) = -5(x - 1)$.
6. $7(x - 18) = 3(x - 14)$.
7. $2(x - 1) - 3(x - 2) + 4(x - 3) + 2 = 0$.
8. $14x + 20 - 12 = -20x + 35x$.
9. $2(x - 1) + 3(x - 2) + 4(x - 3) = 0$.
10. $5(2x + 1) - 7 = 3(2x - 7) + 51$.
11. $3(x + 4)(x - 2) - 5 = 3(x + 5)(x - 3) + x$,

12. $(x+2)^2 - x^2 = x - 5$.
13. $(x-4)(x+4) = (x-6)(x+5) + 25$.
14. $3(x+1) - 2(2x+5) = 6(3-x)$.
15. $11a = 3(x-2a) - 5(2x-2a)$.
16. $3(2b-4x) - (x-b) = -6b$.
17. $5(4x-3a) - 6(3x-2a) = 3a$.

求以下各題中 a 之值：

18. $3 + (a+4)^2 = (a+3)^2 - 4a + 17$.
19. $2 \cdot 5a - 6 \cdot 75 = 1 \cdot 25a - 3$.
20. $8a - 12 = 6a + 4$.
21. $37a - (4+7) = 41a + 25$.
22. $12 \cdot 75a + 6 \cdot 25 = 7 \cdot 25a + 17 \cdot 25$.
23. $7(25-a) - 2a = 2(3a-25)$.
24. $5a - 17 + 3a - 5 = 6a - 7 - 8a + 115$.

求以下各題中 y 之值：

25. $2(y-1) - 3(y-2) = 4(3-y) - 2$.
26. $5y - 6(y+1) - 7(y+2) - 8(y+3) = 0$.
27. $(y+1)(2y+1) = (y+3)(2y+3) - 14$.
28. $(y+1)^2 - (y^2-1) = y^2(2y+1) - 2(y+1)(y+2) + 20$.
29. $6(y^2-3y+2) - 2(y^2-1) = 4(y+1)(y+2) - 24$.
30. $2y - 5[3y - 7(4y-9)] = 66$.
31. $3(5-6y) - 5[y - 5(1-3y+15)] = 23$.

求以下各題 x 之值：

32. $84 + (x+4)(x-3)(x+5) = (x+1)(x+2)(x+3)$.

33. $(x+1)(x+2)(x+6) = x^3 + 9x^2 + 4(7x-1)$.

34. 若兩數之較是25,而兩數之和是 $4\frac{1}{5}$ 倍的兩數之較,求此兩數。

35. 一長方地之長比其闊多5公丈,若將其闊增加2公丈並將其長減短3公丈,則面積被減少4公畝,求此長方地之尺寸。

36. 兩個連接數之平方相差是25,求此兩數。

37. 兩個偶數連續數之平方相差是84,求此兩數。

38. 兩個奇數連續數之平方相差是24,求此兩數。

39. 一旗桿之高未能量計,但知繫在桿頂之繩比桿長4尺,若將繩拉直及地,則繩端離旗桿脚是25尺,求旗桿之高。

40. 若將一625平方吋面積之銅皮彎成一圓筒形,則其直徑是9吋,求圓筒形之高。

用劈因數法之協助以解答方程式 有許多方程式可以化簡至一式樣成爲幾倍的未知數等於數字,有如 $6x=12$. 此種方程謂之簡易方程。有些方程式則不能化簡至此式樣,例如一方程式經過化簡工作之後成爲幾倍未知數之平方等於數字,有如 $3x^2=15$. 此種方程謂之純粹的二次方程式(Pure quadratic equation).

尚有其他方程經過簡化工作之後成一式樣其中包括未知數的

平方，與未知數的第一乘幂等於數字，有如 $x^2 - 5x = 24$ 。此種方程謂之沾染的二次方程 (Affected quadratic equation)。

有些此種式樣的方程可以用劈因數法之協助而剖解之。

例題一 剖解方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 。

【解釋】 此方程式之問題是 x 為何值，則 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 。若將其劈為因數(法詳第二十五章)則得 $(x-2)(x-3) = 0$ 。現在之問題是 x 應為何值，則 $(x-2)(x-3)$ 之積數 $= 0$ 。學者已知積數的兩因數中，任何一數等於零則積數必等於零，是以上之積數 $= 0$ ，若 $x-2 = 0$ ，或 $x-3 = 0$ ，所以 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 之解答，依據兩個簡易方程之解答， $x-2=0$ ，與 $x-3=0$ ，則 x 之值是 2 與 3。

【核對法】 先以 $x=2$ 代入原有方程式 $x^2 - 5x + 6 = 0$ ，則

$$4 - 10 + 6 = 0$$

再以 $x=3$ 代入原有方程式 $x^2 - 5x + 6 = 0$ ，則

$$9 - 15 + 6 = 0$$

未知數之值與方程式核對無訛者謂之方程之方根，包括一個未知數的二次方程常有兩個方根。

例題二 剖解方程式 $x^2 - 25 = 0$

第一剖解 (1) 所給方程 $x^2 - 25 = 0$

(2) 劈因數， $(x+5)(x-5) = 0$ 。

(3) 使每一因數 $= 0$ ，則 $x+5=0$ ，並 $x-5=0$

$$x = -5, \text{ 與 } x = 5$$

第二剖解 (1) 所給方程式 $x^2 - 25 = 0$

(2) 易位, $x^2 = 25.$

(3) 求兩面之方根 $x = \pm 5$

±符號讀作加或減, 此處所說 25 有兩個方根 +5 與 -5, 因 $(+5)^2 = 25$, 及 $(-5)^2$ 亦 = 25. 兩者皆適合方根之定義。

任何正數有兩個方根一為正數, 一為負數, 而兩數之絕對值相同。

例題三 剖解 $(x+1)(x-3)(2x-16) = 0.$

將每因數 = 0, 則 $x+1=0$, $x-3=0$, 並 $2x-16=0$

將每數剖解則 $x = -1$, $x = 3$, 及 $x = 8.$

用劈因數法剖解方程則有以下之工作定律。

【定律】 (1) 將方程化作極簡式。

(2) 將各項易位至等號之左邊。

(3) 將左邊之代數式劈為因數。

(4) 將每一因數使等於零。

(5) 解答此方程。

習 題 七 十 一

用劈因法協助以解答以下各數:

1. $x^2 - 7x + 12 = 0.$

2. $(x-5)(x+6) = 0.$

3. $(x-2)(x+1)(x+3) = 0.$

4. $(x+1)(x-5)(x-3) = 0.$

5. $2x^2 + 7x - 4 = 0.$

6. $x(x-2)(3x+5) = 0.$

7. $x^2 - 16 = 48.$

8. $(x^2-9)(x^2-36) = 0.$

9. $x^2 - 16 = 0$. 10. $x^2 - x = 56$.
11. $(2x + 1)(x + 3) = x^2 - 9$.
12. 若以 24 加某數之平方, 則其和是 10 倍的某數, 求某數。
13. 若從某數之平方內減去 78, 則其相差是某數的 7 倍, 求某數之值。
14. 若以 3 加某數, 則和數的平方是比 13 倍的某數多 9, 求某數之值。
15. 一長方形之長比其闊多 8 寸, 若其面積是 240 方寸, 求其長及闊。
16. 一長方地之長比其闊多 4 碼, 若其長度增加 6 碼, 闊度增加 4 碼, 則其面積增加一倍。
17. 三角形之底邊比其高度長 3 寸, 面積是 44 方寸, 求底邊之長及其高度。
18. 三角形之高是 3 倍的底邊之長, 面積是 $37\frac{1}{2}$ 方寸, 求其底邊之長及高度。

~~~~~

**【公式】** 一個公式常以一字解剖其他數字, 例如公式 (29)  $T = ph + 2A$ 。此處  $T$  則以  $p$ ,  $h$ , 及  $A$  諸項以解之, 常時用  $T$ ,  $p$ , 及  $A$  諸項以解釋  $h$ 。若欲解釋各字項祇須剖解公式若一方程式。

例題 剖解公式  $T = ph + 2A$  中之各字項。

〔解〕 (1) 所給方程式  $T = ph + 2A$ 。

(2) 易位以解答  $p$  與  $h$ 。  $-ph = -T + 2A$ 。



$$\text{則 } p = \frac{T-2A}{h}, \text{ 或 } h = \frac{T-2A}{p}$$

$$(3) \text{ 剖解 } A, \text{ 易位 } 2A = T - ph,$$

$$\text{則 } A = \frac{T-ph}{2}$$

## 習 題 七 十 二

解答以下公式中之各字項：

1. 公式  $A = \pi ab$ , 剖解  $a$  與  $b$ .
2. 公式  $S = ph$ , 剖解  $p$  與  $h$ .
3. 公式  $S = 2\pi rh$  剖解  $r$ .
4. 公式  $V = \pi r^2 h$  剖解  $h$ .
5. 公式  $V = \pi R^2 h - \pi r^2 h$  剖解  $h$ .
6. 公式  $A = 4\pi^2 Rr$  剖解  $R$ .
7. 公式  $Z = 2\pi rh$  剖解  $r$ .
8. 用第(7)題之答數, 求一圓球之半徑。—3 尺高之帶( $Z$ )有面積 32 方尺。
9. 公式  $T = 6a^2$ . 剖解  $a^2$  及  $a$ .
10. 用第(9)題  $a$  之答數, 求一立方邊之長, 其總面積 ( $T$ ) 是 3258 方尺。
11. 公式  $V = 2\pi^2 Rr^2$  剖解  $r$ .
12. 公式  $S = 4\pi r^2$  剖解  $r$ .
13. 用第(12)題之答數求一圓球之半徑, 其曲面積是 2756

方尺。

14. 公式  $V = \pi r^2 h$  剖解  $r$ 。
15. 用第(14)題之答數求一圓筒體之半徑,其高度是 16 寸,體積  $V$  是 2674 立方寸。
16. 用第(5)題之公式求一空心圓筒體之高度其底面之內圈半徑是 10 吋,外圈半徑是 14 吋,體積是 4.211 立方呎。
17. 公式  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ , 剖解  $h$  與  $r$ 。以  $\frac{1}{3} \pi = 1.0472$ 。
18. 用公式  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$  求(1)正圓錐體之高,有體積 800 立方寸,底面半徑是 8 寸,(2)求底面之半徑若體積有 456 立方寸,半徑 10 吋。
19. 由公式  $A = td + b(S + n)$ , 剖解  $t$  與  $S$ 。
20. 用第(19)題之公式求 (1)  $t$ , 若  $A = 3.35$  方寸,  $b = 2.04$  寸,  $S = 0.22$  寸,  $n = 0.56$  寸,  $d = 8$  寸, 求 (2)  $b$ , 若  $d = 10$  寸,  $t = 0.24$  寸,  $n = 0.63$  寸,  $S = 0.24$  寸,  $A = 4.45$  方寸, 求(3) $S$ , 若  $d = 5$  寸,  $t = 0.19$  寸,  $b = 1.56$  寸,  $n = 0.45$  寸,  $A = 1.95$  方寸。
21. 用求梯形之面積的公式,  $A = \frac{h}{2}(b_1 + b_2)$ , 求  $b_1$  若  $A = 400$  方寸,  $b_2 = 15$  寸,  $h = 20$  寸。
22. 用第(12)題之公式, 求一圓球之面積, 若其半徑是 4 寸。
23. 由公式  $A = Prt + P$ , 求  $P$ ,  $t$ , 與  $r$ 。  $A$  是總額,  $P$  是本金,

$r$  是利率,  $t$  是年限。

用第(23)題之公式, 求(1)  $t$ , 若本金是 250 元, 利率 6%, 總額 300 元, 求(2)  $r$ , 若年限是 3 年, 本金 328 元, 總額 377.20 元, 求(3)  $P$ , 若總額是 500 元, 年限 5 年, 利率 4%。

## 第二十七章 分數

在代數分數中所用之名詞及其意義與算術中所用者同, 且一切工作法與原則亦與算術相似, 此即凡應用於數字分數之工作法皆合用於工作代數的分數。

將一分數約小至其最低項 一分數至其最低項時常分子與分母中並無公約數。

例題一 將  $\frac{105}{120}$  約小至其最低項

$$\text{工作法} \quad \frac{105}{120} = \frac{3 \times 5 \times 7}{3 \times 5 \times 8} = \frac{7}{8}$$

在此處先將分數各項劈為因數而將同樣的因數約去, 工作代數分數法則相同。

例題二 將  $\frac{6x^3y^2}{12x^5y^4}$  約小至其最低項

$$\text{工作法} \quad \frac{6x^3y^2}{12x^5y^4} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y}}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y} \cdot y \cdot y} = \frac{1}{2xy^2}$$

例題三 將  $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$  約小至其最低項

**工作法** 先劈因數：

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2xy + y^2} = \frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)(x+y)} = \frac{x-y}{x+y}$$

例題四  $\frac{x^2 + 16x + 63}{x^2 + 4x - 21} = \frac{(x+7)(x+9)}{(x+7)(x-3)} = \frac{x+9}{x-3}$

### 習 題 七 十 三

將以下各分數約至其最低項：

1.  $\frac{125}{225}$

2.  $\frac{144}{288}$

3.  $\frac{135}{150}$

4.  $\frac{21a^2x^3}{24a^3x^4}$

5.  $\frac{28a^3x^4}{35a^3x^5}$

6.  $\frac{15b^4xy}{25c^5y^2}$

7.  $\frac{110mx^2y^3}{550m^2xy^5}$

8.  $\frac{12a^2x^3}{36a^3x^5}$

9.  $\frac{45a^5c^3x^2}{15a^3c^5x}$

10.  $\frac{216x^2y^2z^3}{1296x^2y^6z^3}$

11.  $\frac{792x^6y^7}{81x^6y^7}$

12.  $\frac{(x+y)(x-y)^2}{x(x-y)^2}$

13.  $\frac{a^2 - 5a + 6}{a^2 - 7a + 10}$

14.  $\frac{n^2 + 7n - 30}{n^2 - 7n + 12}$

15.  $\frac{a(x-y)^3}{(x^2-y^2)(x-y)}$

16.  $\frac{15a^4b + 10a^3b^2}{6a^3b^4 + 4a^2b^5}$

17.  $\frac{a^2 - 9a + 18}{a^2 + a - 12}$

18.  $\frac{25 - a^2}{a^2 - 11a + 30}$

19.  $\frac{9x^2 - 49y^2}{28xy^2 - 12x^2y}$

20.  $\frac{a(x+y) + c(x+y)}{x(a+c) + y(a+c)}$

21.  $\frac{x^2 - (y-z)^2}{z^2 - (x+y)^2}$

22.  $\frac{ax^2 - 2ax - 8a}{ax^2 - ax - 6a}$

23.  $\frac{a^2 - 16}{a^3 + 64}$

24.  $\frac{4x^2 + 10x - 6}{x^2 - 9}$

將分數化作同分母 在算術中分數相加之前必須先將其化成最小之同分母的分數，故在代數的字項分數中在相加之前亦必須將其化為最小之同分母的分數。

最小的同分母即是分母之最小公倍數，故起始必解說求代數式的最小公倍數。

### 最小公倍數

例題一 求 24, 32, 40 之最小公倍數。

先將各數劈為質因數，然後求一數能包含各數之因數。

**工作法**  $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \cdot 3$

$$32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$

$$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^3 \cdot 5$$

$$\therefore \text{最小公倍數是 } 2^5 \cdot 3 \cdot 5 = 480$$

[註] 用劈質因法求最小公倍數是最合用於代數式。

例題二 求  $12x^2y$ ,  $16xy^3$  及  $24x^3y$  之最小公倍數。

**工作法**  $12x^2y = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y = 2^2 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot y$

$$24x^3y = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y = 2^3 \cdot 3 \cdot x^3 \cdot y$$

$$16xy^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y = 2^4 \cdot x \cdot y^3$$

$$\therefore \text{最小公倍數} = 2^4 \cdot 3 \cdot x^3 \cdot y^3 = 48x^3y^3.$$

以上最小公倍數之求得是每項因數中最大乘幂之項數相乘。

**例題三** 求  $x^2 + 2xy + y^2$  與  $x^2 - y^2$  之最小公倍數。

**工作法**  $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2.$

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

$$\therefore \text{最小公倍數} = (x - y)(x + y)^2$$

### 習 題 七 十 四

求以下之最小公倍數：

1. 72, 288, 64.

2. 576, 256, 128.

3.  $5a^3b^2$ ,  $10a^2b^3$ ,  $25a^3b$ .

4.  $4c^2$ ,  $2ab$ ,  $9cd^2$ .

5.  $x^2 - y^2$ ,  $x^2 - 2xy + y^2$ .

6.  $x^2 - 11x + 30$ ,  $x^2 - 12x + 35$ .

7.  $a^3 - ab^2$ ,  $(a + b)^2$ ,  $(a - b)^2$

8.  $a^2b + ab^2$ ,  $a^2 + 2ab + b^2$ .

9.  $x^2 + 7x$ ,  $x^2 + 8x + 7$ .

10.  $a^2 + 3a + 2$ ,  $a^2 - 4$ ,  $a^2 - 1$ .

11.  $x^3 - y^3$ ,  $x^2 - y^2$ ,  $x^2 - 3x + 2$ .

12.  $3x^2 - 7x + 2$ ,  $9x^2 - 1$ ,  $27x^3 - 1$ .

13.  $5x^2 + 7x - 6$ ,  $x^2 + 4xy + 4$ .

14.  $1 + 2x + x^2$ ,  $3x^2 - 2x - 5$ ,  $6x^2 - x - 15$ ,  $4x^2 - 9$ .

有同分母的分數 例題一；改  $\frac{9}{16}$ ,  $\frac{7}{24}$ ,  $\frac{17}{32}$  爲同等而有同分母的分數。

【工作法】 先求，16, 24, 與 32 的最小公倍數，(求法見前) 應等於 96, 再以一數乘分子及分母而使分母等於 96.

$$\frac{9}{16} = \frac{9 \times 6}{16 \times 6} = \frac{54}{96},$$

$$\frac{7}{24} = \frac{7 \times 4}{24 \times 4} = \frac{28}{96},$$

$$\frac{17}{32} = \frac{17 \times 3}{32 \times 3} = \frac{51}{96}.$$

例題二 改  $\frac{x}{y-2}$ ,  $\frac{z}{y^2+4y-12}$ ,  $\frac{v}{y^2+6y}$  爲同分母之分數。

先求  $y-2$ ,  $y^2+4y-12$ , 與  $y^2+6y$  的最小公倍數，(求法詳前) 應等於  $y(y-2)(y+6)$ . 將一字項因數乘分子與分母使分母 =  $y(y-2)(y+6)$

$$\frac{x}{y-2} = \frac{x \cdot y(y+6)}{y(y-2)(y+6)} = \frac{xy^2+6xy}{y(y-2)(y+6)}$$

$$\frac{z}{y^2+4y-12} = \frac{z}{(y-2)(y+6)} = \frac{zy}{y(y-2)(y+6)}$$

$$\frac{v}{y^2+6y} = \frac{v}{y(y+6)} = \frac{v(y-2)}{y(y-2)(y+6)} = \frac{vy-2v}{y(y-2)(y+6)}$$

### 習 題 七 十 五

化以下各分數爲有同分母的同等分數：

$$1. \frac{7}{26}, \frac{9}{52}, \frac{41}{78}.$$

$$2. \frac{3}{4a}, \frac{4}{6a^2}, \frac{5}{12a^3}.$$

$$3. \frac{2}{a+b}, \frac{3}{a-b}.$$

$$4. \frac{a}{x-a}, \frac{x}{x-a}, \frac{a^2}{x^2-a^2}.$$

$$5. \frac{3}{a^2+3a+2}, \frac{5}{a^2-2a-3}.$$

$$6. \frac{2x}{x-6}, \frac{b}{2b-2x}, \frac{3x^2}{4(x^2-b^2)}, \frac{5b^2}{6(b^2-x^2)}.$$

$$7. a+x, \frac{x^2}{a+x}.$$

$$8. a-x, a+x, \frac{a^2+x^2}{a+x}.$$

**分數之加法與減法** 代數的分數加減與算術同，先將分數改爲同分母的分數，然後將分子加減，其結果必須約小至其最低項。

例題一 求  $\frac{x}{a-x}$ ,  $\frac{a}{a+x}$ , 與  $\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$  之和。

**工作法** 最小公倍數 =  $a^2 - x^2$

$$\begin{aligned} \frac{x}{a-x} + \frac{a}{a+x} + \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2} &= \frac{x(a+x)}{a^2-x^2} + \frac{a(a-x)}{a^2-x^2} + \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2} \\ &= \frac{ax+x^2+a^2-ax+a^2+x^2}{a^2-x^2} = \frac{2a^2+2x^2}{a^2-x^2} \text{ 答數。} \end{aligned}$$

例題二 從  $\frac{a+x}{a^2-ax}$  中減  $\frac{a+2x}{a^2-x^2}$ 。

**工作法** 最小公倍數是  $a(a-x)(a+x) = a^3 - ax^2$



$$\begin{aligned} \frac{a+x}{a^2-ax} - \frac{a+2x}{a^2-x^2} &= \frac{(a+x)(a+x)}{a^3-ax^2} - \frac{a(a+2x)}{a^3-ax^2} \\ &= \frac{a^2+2ax+x^2-a^2-2ax}{a^3-ax^2} = \frac{x^2}{a^3-ax} \end{aligned}$$

## 習 題 七 十 六

求以下之答數：

$$1. \frac{3}{4a} + \frac{4}{6a^2} + \frac{5}{12a^3} \quad 2. \frac{2}{a+b} + \frac{3}{a-b}$$

$$3. \frac{a}{x-a} + \frac{x}{x-a} + \frac{a^2}{x^2-a^2} \quad 4. \frac{3}{a^2+3a+2} + \frac{5}{a^2-2a-3}$$

$$5. \frac{2x}{x-b} + \frac{b}{2b-2x} + \frac{3x^2}{4(x^2-b^2)} + \frac{5b^2}{6(b^2-x^2)}$$

$$6. a+x + \frac{x^2}{a-x}$$

$$7. (a-x) + (a+x) + \frac{a^2+x^2}{a+x}$$

$$8. \frac{a}{2y} + \frac{c-b}{3y} + \frac{c+b}{4y}$$

$$9. \frac{a-3}{3} + \frac{5+a}{6}$$

$$10. \frac{m-n}{mn} + \frac{n-r}{nr}$$

$$11. 7x + \frac{x-2}{3} + 8x + \frac{3x+4}{5x}$$

$$12. \frac{4a+3x}{3a} - \frac{5a+2}{3}.$$

$$13. 3x - \frac{3a+12x}{5}.$$

$$14. \frac{3a+2}{b} - \frac{7ab-10b}{b^2}.$$

$$15. \frac{3a-4b}{7} - \frac{2a-b-c}{3} + \frac{15c-4c}{12} - \frac{a-4b}{21}.$$

$$16. 2x + \frac{5x-2}{7} - \left( 3x - \frac{4x+5}{6} \right).$$

$$17. \frac{3}{x-2} + \frac{4}{x-3} + \frac{7}{x^2-5x+6}.$$

$$18. \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a^2-b^2}.$$

$$19. \frac{1}{x^2-3x+20} + \frac{1}{x^2-11x+10}.$$

$$20. \frac{2}{x^2-3x+2} + \frac{2}{x^2-x-2} - \frac{1}{x^2-1}.$$

$$21. \frac{1}{x^2+x-2} + \frac{1}{x^2-x-6} - \frac{1}{x^2-4x+3}.$$

$$22. \frac{x+1}{3x^2-10x+3} + \frac{1}{x^2-9} - \frac{2}{3x^2+8x-3}.$$

$$23. \frac{2x}{x^2-x+1} + \frac{1}{x^3+1} - \frac{1}{x^2-1}.$$

$$24. \frac{x+4}{4x^2-10x-6} + \frac{1+x}{x+2} - \frac{3}{4x+2}.$$

$$25. \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a^2-b^2} - \frac{1}{a^3-b^3}.$$

**分數之乘法與除法** 代數式分數之乘法有如算術是等於兩個或較多的分子之積數而除以其分母之積數。

若先約去分子與分母之公約數，結果所得之積數將為最低項。

例題一 以  $\frac{35}{99} \times \frac{45}{91}$ 。

工作法  $\frac{35}{99} \times \frac{45}{91} = \frac{5 \times 7}{9 \times 11} \times \frac{5 \times 9}{7 \times 13} = \frac{5 \times 5}{11 \times 13} = \frac{25}{143}$ 。

例題二 以 42 乘  $\frac{27}{28}$ 。

工作法  $42 \times \frac{27}{28} = \frac{6 \times 7}{1} \times \frac{3 \times 9}{4 \times 7} = \frac{2 \times 3 \times 7}{1} \times \frac{3 \times 9}{2 \times 2 \times 7}$   
 $= \frac{81}{2} = 40 \frac{1}{2}$ 。

例題三 以  $\frac{x-y}{x^2+2xy+y^2}$  乘  $\frac{x+y}{x^2-2xy+y^2}$  乘  $\frac{x^2-y^2}{x^3}$ 。

工作法  $\frac{x-y}{x^2+2xy+y^2} \times \frac{x+y}{x^2-2xy+y^2} \times \frac{x^2-y^2}{x^3}$   
 $= \frac{x-y}{(x+y)(x+y)} \times \frac{x+y}{(x-y)(x-y)} \times \frac{(x-y)(x+y)}{x^3} = \frac{1}{x^3}$ 。

**代數之除法** 一個分數除另一分數是以被除數乘除數的相反數，分數之相反數即是將分子與分母互相易位。

例題  $\frac{x^2-11x-26}{x^2-3x-18}$  除  $\frac{x^2-18x+65}{x^2-9x+18}$  .

工作法  $\frac{x^2-11x-26}{x^2-3x-18} \div \frac{x^2-18x+65}{x^2-9x+18}$

$$= \frac{x^2-11x-26}{x^2-3x-18} \times \frac{x^2-9x+18}{x^2-18x+65}$$

$$= \frac{(x-13)(x+2)}{(x-6)(x+3)} \times \frac{(x-3)(x-6)}{(x-13)(x-5)}$$

$$= \frac{(x+2)(x-3)}{(x+3)(x-5)} = \frac{x^2-x-6}{x^2-2x-15}$$

## 習 題 七 十 七

1.  $\frac{25}{64} \times \frac{48}{125}$  .
2.  $17 \times \frac{2}{85} \times \frac{25}{26}$  .
3.  $\frac{45}{91} \times \frac{9}{13}$  .
4.  $\frac{3m}{cx} \times \frac{c}{3}$  .
5.  $\frac{3ab}{4cd} \times \frac{16c^2x^2}{21b^2} \times \frac{7d^3}{4bx^2}$  .
6.  $\frac{14x^4m^3}{27y^4z^2} \div \frac{7x^2m}{9y^6z^4}$  .
7.  $\frac{2a^2}{41b^3x} \times \frac{11x^3b}{5a^2y}$  .
8.  $-\frac{3cx}{5ay} \times \frac{2c}{3y^3}$  .
9.  $\frac{2ax}{3by} \times \frac{5a^2}{7by^2}$  .
10.  $\frac{a^2-b^2}{bc} \times \frac{a^2+b^2}{b+c}$  .
11.  $\frac{x^2-1}{x^2-4} \times \frac{x+2}{x-1}$  .
12.  $\frac{x^n}{y^m} \times \frac{x^m}{y^n}$  .
13.  $\frac{3m^2x}{4a^2b} \div 3ax$  .
14.  $\frac{3x+y}{9} \div \frac{4x}{3}$  .

$$15. \frac{4n}{2n-1} \div \frac{2}{n+1}.$$

$$16. \frac{2a+b}{3a-2b} \div \frac{3a+2b}{4a+b}.$$

$$17. \frac{5y^2}{7a^3} \times \frac{21c^3}{4ax} \div \frac{35c^2y}{7a^6x}.$$

$$18. \frac{x-1}{x-2} \times \frac{x-2}{x-3} \div \frac{x-4}{x-3}.$$

$$19. \frac{x+y}{x^3-x^2y} \times \frac{xy-y^2}{x^2+xy}.$$

$$20. \frac{x^2-14x-15}{x^2-4x-45} \times \frac{x^2-12x-45}{x^2-6x-27}.$$

$$21. \left( \frac{x^2-18x+80}{x^2-5x-50} \div \frac{x^2-15x+56}{x^2-6x-7} \right) \times \frac{x+5}{x-1}.$$

$$22. (a^2+2ab+b^2) \times \frac{a}{a^2-b^2}.$$

$$23. \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \times \left( a - \frac{a^2}{b} \right).$$

$$24. \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \times \left( a - \frac{b^2}{a} \right).$$

$$25. \left( 1 + \frac{3a}{1-a} \right) \left( 1 + \frac{a}{1+a} \right).$$

$$26. \left( 2 + \frac{2y}{x-y} \right) \left( 1 - \frac{x-y}{x+y} \right).$$

$$27. \frac{4xy}{2x^2+y^2} \times \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{2x} \right).$$

$$28. \frac{a^2bc}{ac+ab+bc} \times \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

$$29. \frac{c-x}{a-x} \times \frac{2ax}{4by} \times \frac{a^2-x^2}{c^2-x^2} \div \frac{a^2+ax}{bc+bx}.$$

$$30. \frac{xy-y^2}{xy+x^2} \times \frac{x-y}{(x+y)^2} \times \frac{3xz}{y} \times \frac{x+y}{(x-y)^2}.$$

$$31. \frac{x^2+xy}{(x-y)^2} \times \frac{xy-y^2}{(x+y)^2} \times \frac{4a+a^2}{x+a} \times \frac{x^2-y^2}{axy^2}.$$

$$32. \frac{x^2-5x+6}{x^2-2x-8} \times \frac{x^2+2x}{x^2-4x+4} \times \frac{x^2-6x+8}{x^2-4x+3}.$$

$$33. \frac{a^2-x^2}{x^2-3x-4} \div \frac{a-x}{x^2-x} \div \frac{a+x}{x-4}.$$

$$34. \frac{x^2+2xy+y^2}{xy+y^2} \times \frac{y^2}{x^2-y^2} \div \frac{x^2-xy}{x^2-2xy+y^2}.$$

$$35. \frac{x^2-a-6}{a^2-25} \times \frac{5a+a^2}{a^2+a-12} \div \frac{a^2+2a}{a^2-a-20}.$$

$$36. \frac{x^2-x-20}{x^2-25} \times \frac{x^2-x-2}{x^2+2x-8} \div \frac{x+1}{x^2+5x}.$$

$$37. \frac{a^2+6a-7}{2a+b} \times \frac{ab^2+2a^2b}{a^2+a-42} \div \frac{a^3-10a^2+9a}{a^2-11a+30}.$$

$$38. \left( \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \div \left( 1 - \frac{b}{a} \right).$$

$$39. \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \div \left(\frac{b^3}{a^4} - 1\right).$$

$$40. \left(4 - \frac{6}{x+1}\right) \div \left(8 + \frac{8-2x}{x^2-1}\right).$$

$$41. \left(x + \frac{8x}{x^2-9}\right) \div \left(x + \frac{2x}{x-3}\right).$$

$$42. \left(\frac{1}{1+x} + \frac{x}{1-x}\right) \div \left[\frac{1}{(1-x)} - \frac{x}{1+x}\right].$$

$$43. \left(\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}\right) \div \left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}\right).$$

$$44. \left(-\frac{a}{x^2-y^2}\right) \left(-\frac{(x+y)^2}{a^5}\right) \left(-\frac{3m}{x+y}\right).$$

$$45. \left(-\frac{1-x^2}{1+y}\right) \left(\frac{1-y^2}{x^2+x}\right) \left(1 + \frac{x}{1-x}\right).$$

$$46. \left(1 - \frac{x-y}{x+y}\right) \left(2 + \frac{2y}{x-y}\right).$$

$$47. (x^2 - x + 1) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1\right).$$

$$48. \frac{2x^2-7x+3}{2x^2+5x+3} \div \frac{x^3-27}{x^2-1} \div \frac{x^2+3x+9}{2x+3}.$$

$$49. \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \times \frac{xy}{x^2-y^2} \div \frac{1}{x-y}.$$

$$50. \frac{a-b}{a^3-b^3} \div \frac{4a^2-7a+3}{a^2+ab+b^2} \times \frac{ab}{16a^2-9}.$$

## 第二十八章 方程與公式

在前幾章已載入許多方程式以求解答，但祇包括各種方程式之化簡法而不列入分數的方程，此章中除以上所說之方程外並加入分數的方程。

**工作的次序** 解答簡易方程之主要的步驟前已解說，但使學者明瞭起見茲將其復列於下。

- (1) 將方程化簡即去括弧等先做乘除及去分數等。
- (2) 將未知數項易位至等號之左並將數字項易位至等號之右。
- (3) 收聚項數。
- (4) 用未知數之系數除等號兩邊之項。
- (5) 核對結果將答數代入原有之方程。

**去分數** 分數是一指示的除法而常為不能工作之除法，所以凡包含有分數的方程必須以他法消去此種分數後方可工作。

消去方程之分數可用方程中各分數的最小公分母乘方程之各項。

例一 剖解  $\frac{x}{5} + \frac{x}{8} = 17 - \frac{x}{10}$ 。

[解] (1) 所給  $\frac{x}{5} + \frac{x}{8} = 17 - \frac{x}{10}$ 。

此處 5, 8, 與 10 之最小公倍數是 40。

(2) 以 40 乘方程中之各項則得；



$$3x + 5x = 680 - 4x.$$

(3) 將字項易位並改號  $8x + 5x + 4x = 680$

(4) 收聚項數 則  $17x = 680$

(5) 以未知數之系數除之則  $x = 40$

核對  $\frac{40}{5} + \frac{40}{8} = 17 - \frac{40}{10}$ , 即  $13 = 13$

例二 在方程式  $S = \frac{E - IR}{O \cdot 22}$  中, 剖解  $I$ .

[解] (1) 所給之方程  $S = \frac{E - IR}{O \cdot 22}$ .

(2) 消去分數  $O \cdot 22S = E - IR$ .

(3) 易位  $IR = E - O \cdot 22S$ .

(4) 除以  $I$  之系數, 則  $I = \frac{E - O \cdot 22S}{R}$ .

## 習 題 七 十 八

解答以下之方程並核對之:

1.  $\frac{x}{2} + \frac{x}{6} = \frac{10}{3}$ .

2.  $\frac{2x}{3} - \frac{7x}{8} + \frac{5x}{18} + \frac{x}{24} = \frac{4}{9}$ .

3.  $\frac{3x}{4} - \frac{7x}{12} = \frac{11x}{36} - \frac{8x}{9} + \frac{3}{2}$ .

4.  $\frac{2x}{5} + \frac{x}{8} - \frac{x}{4} - \frac{11}{40} = 0$ .

5.  $\frac{x+1}{2} + \frac{x+3}{4} = 2$ .

6.  $\frac{2x+3}{11} + \frac{x-1}{3} = 2$ .

7.  $\frac{2(1+x)}{3} - \frac{3(x+2)}{4} = \frac{x+1}{6}$ .
8.  $\frac{x}{2}(2x+1) + 2 = \frac{x}{3}(3x-2)$ .
9.  $\frac{x+1}{5} - \frac{x-1}{2} = \frac{3-x}{3}$ .
10.  $\frac{1}{2}(x+2) = \frac{1}{3}(x-3)$ .
11.  $\frac{x+1}{4} - \frac{2(x-1)}{3} = 3$ .
12.  $\frac{2-x}{2} - \frac{5x+21}{5} = x+3$ .
13.  $(x+1)^2 + 2(x+3)^2 = 3x(x+2) + 35$ .
14.  $\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} + \frac{x+4}{4} + 8 = 0$ .
15.  $\frac{3x+5}{8} - \frac{21+x}{2} = 5x-15$ .
16.  $x - \left(3x - \frac{2x-5}{10}\right) = \frac{1}{6}(2x-57) - \frac{5}{3}$ .
17.  $\frac{5}{6}x + \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}x = x-3$ .
18.  $1.5 = 1.8 - \frac{0.09x - 0.18}{0.9}$ .
19.  $3ac - 5c = 17$  求  $c$  值。

20.  $4abc - 5bc + 16 = 3bc$ , 求  $a$  值。

21.  $(b-x)(b+2x) = b^2 - 2x^2 - 3b + 4$ . 求 (1)  $b$  值, (2)  $x$  值。

22.  $(a+b)x + (a-b)x = a^2$

23.  $\frac{1}{2}(a+x) + \frac{1}{3}(2a+x) + \frac{1}{4}(3a+x) = 3a$ .

24.  $4(t+b+y) + 3(t+b-y) = y$ , 求  $t$  值。

25.  $PD = Wd$ , 求  $P$  值。

26.  $F = \frac{WV^2}{gr}$ , 求  $W, g, r$ , 及  $V$ .

27.  $I = \frac{En}{R+nr}$ , 求  $E, R, r$ , 及  $n$

28. (1)  $I = \frac{E}{R+r}$ , (2)  $I = \frac{nE}{R+nr}$ , (3)  $I = \frac{E}{R+\frac{n}{n}}$ , 求  $n$  值

使方程(1), (2), 與(3)皆等值。

29.  $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ , 求  $f, p$ , 及  $q$  值。

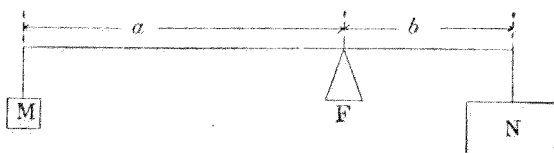
30.  $\frac{1}{k} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{l}$ , 求  $k$ .

31.  $\frac{E}{r} = \frac{E}{r_1} + \frac{E}{r_2}$ , 求  $r$ .

32.  $P = RI + \frac{rI}{n}$ , 求  $I$ .

33.  $nE = RI + \frac{nrI}{m}$ , 求  $I$ .

34.  $R_t = R_o(1+at)$ , 求  $a$ .
35. 若  $R$  = 一圓之半徑,  $h$  = 截片 (Segment) 之高,  $W$  = 弦 (Chord) 之長, 所給方程  $R^2 - (R-h)^2 = \left(\frac{W}{2}\right)^2$ , 求  $R$ .
36. 若一槓桿支點在  $F$ , 一端挂重量  $M$  磅, 而彼端挂重量  $N$  磅。由一端至支點是  $a$  尺而由彼端至支點是  $b$  尺, 若槓桿平衡, 則兩端之力距積數相等, 所給方程式  $Ma = Nb$  求  $b$ , 若  $a = 8$  尺,  $M = 250$  磅,  $N = 1000$  磅。



37. 若有一槓桿長 16 呎置在一支點上距一端是 18 吋, 則在此端能挂多少磅而能平衡彼端所挂之重量 150 磅?
38. 兩人擡一重量 350 磅, 桿長 10 尺, 若重量所挂之點距一端是 4 尺, 則每人擔負多少磅?
39. 將一 12 呎長之槓桿置在一支點上則一端挂 250 磅可平衡彼端挂 1750 磅, 求支點之地位。
40. 公式  $A = \pi R^2 - \pi r^2$  求  $r$  值。
41. 公式  $A = \frac{2}{3}hw$ . 求  $w$  值。
42. 公式  $V = 2\pi^2 Rr^2$  求  $R$  值。
43. 公式  $V = \pi R^2 h - \pi r^2 h$  求  $r$  值。

44. 一空心圓鐵柱高 12 呎，外圓直徑 10 吋，體積是  $2\frac{2}{3}$  立方呎，求內圓之直徑，用第(43)題之公式。
45.  $S = \frac{1}{2}PL$  求  $L$  值。
46.  $T = \frac{1}{2}PS + A$ . 求  $P$  值。
47.  $S = \frac{1}{2}(P+q)L + B + b$ . 求  $L$  值。
48.  $S = \frac{1}{2}(P+q)L$ . 求  $q$  值。
49.  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  求  $r$  值。
50.  $F = -\frac{4\pi^2 mx}{q^2}$ , 求  $x$  值。
51.  $E = \frac{Ff}{(P-x)q}$  求  $x$  值。
52.  $C = K\frac{Rr}{R+r}$ , 求  $r$  值。
53.  $Q = K\frac{(t_2-t_1)aT}{d}$ , 求  $t_1$  值。
54.  $P_t V_t = P_0 V_0 \left(1 + \frac{t}{273}\right)$ , 求  $t$  值。
55.  $H = K\frac{(b_1-b_2)}{b_1+b_2}(1+at)$ , 求  $t$  值。

56. 求一正方室中一邊之長，若其每邊增加 3 呎則其面積增加 81 方呎。
57. 求一正方地的邊長，若其每邊減短 10 碼，則其面積減小 400 方碼。
58. 一長方之長是其闊的 3 倍，若其闊增加 4 吋，並將其長邊減短 5 吋，則其面積增加 15 方吋，求長與闊。
59. 三角形之高與其底邊相差是 6 吋，高與底邊之和是 36 吋，求此三角之面積。
60. 三角形之高比其底邊長 7 吋，若將其高度減短 4 吋，並將底邊增加 6 吋，則面積增加 25 方吋，求高及底邊。
61.  $\frac{2}{3}$  的一數是  $1\frac{1}{5}$  的 320，求此數。
62. 一物之原價是 3 元 2 角，從何售價減少  $33\frac{1}{3}\%$  尚賺 20%？
63. 求一本金其利率是每年  $3\frac{1}{2}\%$ ，則  $4\frac{1}{2}$  年後得總額 694 元 5 角。
64. 將本金 820 元投資 3 年又 9 月，本利合 912 元 2 角 5 分，求利率。
65. 投資 1100 元，其中一部得利率每年 5%，其餘得利率每年 6%。若利息共得 59 元，各部投資是多少？
66. 投資 120 元，利率 6%，在一定期限後得利息 16 元 5 角 6 分，求此年限。

67. 投資 584 元共 2 年 8 月又 7 日共得利息 94 元 1 角 2 分，求利率。
68. 某甲儲蓄  $\frac{1}{6}$  的進款又 50 元，費用是儲蓄的 3 倍，其餘 600 元是房租，某甲之進款是多少？
69. 空氣中所含氮氣是氧氣的四倍，則 40 呎長，30 呎闊，12 呎高之室中有以上之氣體各多少立方呎？
70. 一室之闊是  $\frac{7}{10}$  的長，若將其長減短 3 呎，而將其闊增加 3 呎，則室成正方，求其長及闊。
71. 一室之長是其闊的  $1\frac{1}{3}$ ，而其周度是 70 呎，求室之面積。
72. 某甲旅行 560 里，一部份之路程坐火車每小時平均行 50 里。其餘之路程坐汽車每小時平均行 40 里，共需 13 小時到達，求每程之里數。
73. 一木料長 189 尺，被截成兩段， $\frac{2}{3}$  的長段等於  $\frac{3}{4}$  的短段，求每段之長。
74. 黃酒之價是  $1\frac{1}{2}$  倍的燒酒之價，若 3 斤黃酒與 5 斤燒酒共值 2 元 2 角 8 分，求每斤黃酒與每斤燒酒之價。
75. 若 2 斤綠茶與 5 斤紅茶之值相等。 $4\frac{1}{2}$  斤紅茶與 6 斤綠茶共值 5 元 4 角 6 分，求每斤綠茶與每斤紅茶之值。
-

**溫度計** 普通所用之溫度計是兩種。(1)華氏溫度計,冰點是在  $32^{\circ}$ ,沸點是在  $212^{\circ}$ , (2)攝氏溫度計,冰點是在  $0^{\circ}$ ,沸點是在  $100^{\circ}$ .在華氏溫度計上其冰點與沸點間之地位是  $212^{\circ} - 32^{\circ} = 180^{\circ}$ ,在攝氏溫度計上其沸點與冰點間之地位是 100.所以在冰點以上華氏計與攝氏計之關係是 180 比 100,即攝氏  $1^{\circ}$  等於華氏  $1.8^{\circ}$ 。

若以  $F$  代表華氏溫度,而以  $C$  代表攝氏之溫度,化華氏溫度為攝氏溫度,或化攝氏溫度為華氏溫度可用以下公式。

$$(1) C = \frac{5}{9}(F - 32), \quad (2) F = \frac{9}{5}C + 32$$

### 習 題 七 十 九

1. 某日由晨至午在攝氏溫度計上共升高溫度  $5^{\circ}$ ,則在華氏溫度計上共升高多少度?
2. 化  $176^{\circ}$  華氏溫度為攝氏溫度。
3. 化  $24^{\circ}$  攝氏溫度為華氏溫度。
4. 以下為各種金屬之溶點以華氏溫度計算,將其化為攝氏溫度,熟鐵  $2822^{\circ}$ ,鋼  $2462^{\circ}$ ,鑄鐵  $2210^{\circ}$ ,銀  $1832^{\circ}$ ,鉛  $620^{\circ}$ ,錫  $475^{\circ}$ 。
5. 華氏溫度在零度以下  $60^{\circ}$  是攝氏多少度?
6. 華氏計與攝氏計在多少溫度時讀數相同?
7. 用氧乙炔煨接(Oxyacetylene welding)法,火焰之溫度約華氏  $6000^{\circ}$ ,合攝氏多少度?



**馬力** 馬力之名詞是蒸汽機發明家瓦特 (James Watt) 起始採用，蓋彼時倫敦拉車之馬每分鐘所能做之工作是等於將 33000 磅重之物體舉起 1 呎，瓦特即用此值以解說他的機器之功率而沿用至今。

呎磅是用以指示工作之單位，此即等於 1 磅力行動過 1 呎距離，或  $\frac{1}{2}$  磅力行動過 2 呎距離，以此類推，馬力是量所做工作之率，一匹馬力之等量是每分鐘將 33000 磅之重量舉起 1 呎，或每秒鐘舉起 550 呎 1 磅重的物體，所以說一匹馬力是等於每分鐘做 33000 呎磅或每秒鐘作 550 呎磅之工作。

任何機器之馬力是將機器每分鐘所做之呎磅工作而以 33000 除之。

$$\text{馬力} = \frac{\text{每分鐘工作呎磅數}}{33000}$$

電力機之功率 (Power) 以瓦特 (Watt) 計之，瓦特是電壓伏特 (Volt) 與電流安培 (Ampere) 之積數，因 746 瓦特等於一匹馬力，則

$$\text{電力機之馬力} = \frac{\text{伏特} \times \text{安培}}{746}$$

### 習 題 八 十

1. 石條重 2 噸，每噸作 2240 磅，若欲在 2 分鐘將其舉起 40 呎，需要多少馬力？

[解] 每分鐘所做工作是  $\frac{2 \times 2240 \times 40}{2} = 89600$  呎磅。

所需馬力是  $89600 \div 33000 = 2.715$  強。

2. 要用多少馬力能在  $1\frac{1}{2}$  分鐘將一升降機共重 8000 磅升起至 240 呎之屋頂?
3. 要用多少馬力的抽水機每小時可抽水 30000 擔至水塔高 45 呎?  
(每擔合  $4.211$  立方呎, 每立方呎水重  $62\frac{1}{2}$  磅)。
4. 以下之公式可用以計算蒸汽機之馬力,  $H$  代表指示馬力 (Indicated horse power),  $P$  代表每方吋活塞面積上所受有效的平均蒸汽壓力以磅計,  $L$  代表動程之長以呎計,  $A$  代表活塞之面積以方吋計,  $N$  代表每分鐘活塞動程次數 = 2 倍於公轉次數。

$$\therefore H = \frac{PLAN}{33000}, \text{ 由此公式中求 } P, L, A, \text{ 與 } N。$$

5. 有一蒸汽機之機筒內直徑是 4 吋, 動程是 6 吋, 曲柄每分鐘作 300 公轉, 若平均有效的壓力是每方吋 95 磅, 則機器可發生多少馬力?
6. 求一蒸汽機之馬力, 機筒內直徑是 10 吋, 動程 30 吋, 曲柄每分鐘有 96 公轉, 平均有效的壓力每方吋 120 磅。
7. 求一蒸汽機之機筒內直徑可以發生 95 馬力, 動程 34 吋, 曲柄每分鐘能有 110 公轉, 汽鍋壓力每方吋 80 磅, 平均

有效的壓力是 65 % 之汽鍋壓力。

8. 有一機器需要發生 50 馬力, 平均有效的壓力是每方吋 46 磅, 活塞之直徑是 13 吋, 曲柄每分鐘 100 公轉, 求動程之長。
9. 求一蒸汽機活塞上之平均有效的壓力, 若機筒內直徑是 12 吋, 動程 18 吋, 曲柄公轉每分鐘 110, 發生之馬力是 40。
10. 公式  $H = \frac{D^2 N}{2.5}$  是用以計算汽車之馬力,  $H$  代表馬力,  $D$  代表汽缸之直徑(以吋計),  $N$  代表汽缸之只數, 求一別克六汽缸轎車之馬力, 汽缸直徑是  $4\frac{3}{4}$  吋。
11. 鐵道機車 (Locomotive) 之拖重力是用以下之公式計算,  $T = \frac{C^2 SP}{D}$ .  $C$  代機筒內直徑以吋計,  $S$  代表活塞之動程以吋計,  $P$  代表平均有效的壓力以每方吋上磅計, = 85% 之汽鍋壓力,  $D$  代表推動輪之直徑以吋計,  $T$  代表拖重力以磅計, 求  $T$ , 若  $C = 16$  吋,  $S = 22$  吋,  $D = 64$  吋, 汽鍋壓力每方吋 160 磅。
12. 用第(11)題之公式求  $T$ , 若  $C = 18$  吋,  $S = 24$  吋,  $D = 70$  吋, 汽鍋壓力每方吋 150 磅。
13. 用皮帶輸送馬力全靠皮帶之拉動及其行程之率, 所輸送之功率可以呎磅計算, 或馬力計算, 皮帶之勁力單層者每吋闊皮帶由 30 磅至 60 磅, 雙層者每吋闊由 60 磅至 100

磅，以下之公式是計算由皮帶輸送之馬力。

$$H = \frac{FWS}{33000}, \quad H \text{ 代表馬力, } F \text{ 代表皮帶拉動的勁力。}$$

$W$ 代表皮帶闊以吋計,  $S$ 代表每分鐘速度以呎計, 若  $F=60$  磅,  $W=8$  吋,  $S=$  每分鐘 600 呎。求  $H$ 。

14. 求所需皮帶之闊可以輸送 60 馬力, 皮帶之拉動勁力是 80 磅, 速度每分鐘是 5000 呎。
15. 求一 14 吋闊皮帶可輸送之馬力, 皮帶的拉動勁力是 90 磅, 速度每分鐘是 5000 呎。
16. 求一 6 吋闊單層皮帶能輸送之馬力, 皮帶走過一 16 吋直徑之滑車每分鐘有 350 公轉, 皮帶之拉動勁力是每吋闊 45 磅。規定有 2% 滑失之功率。
17. 若一 6 吋闊之單層皮帶能輸送 7 馬力, 拉動力是每吋闊 35 磅, 求皮帶每分鐘之速度。
18. 求一 10 吋闊雙層皮帶能輸送之馬力, 皮帶走過一 36 吋直徑之滑車每分鐘有 420 公轉, 皮帶每吋闊有拉動勁力 75 磅。
19. 假設規定單層皮帶每吋闊有 50 磅拉力,  $D$  代表滑車之直徑以吋計,  $R$  代表每分鐘公轉數,  $W$  代表皮帶之闊以吋計,  $H$  代表輸送之馬力, 則

$$H = \frac{DRW}{2520}, \quad \text{試解公式所由來, } \left(\pi = \frac{22}{7}\right).$$

20. 若規定雙層皮帶每吋闊有 80 拉力, 則 (19) 題之公式將

變作

$$H = \frac{DRW}{1575}, \text{ 試證之。}$$

21. 求一單層皮帶之闊可以輸送 3 馬力, 皮帶走過一 15 吋直徑之滑車每分鐘有 220 公轉, 每吋闊之皮帶拉力 50 磅。
22. 求一 4 呎直徑滑車之每分鐘公轉數則可以由一 10 吋闊的雙層皮帶輸送 120 馬力, 皮帶每吋闊有拉力 80 磅。
23. 從一礦穴 1100 呎深提升 150 磅重物體需多少工作? 若在  $1\frac{1}{2}$  分鐘內提起需多少馬力?

電動勢, 電阻與電流之關係 以  $R$  代電阻以歐姆 (Ohm) 計, 電動勢,  $E$  即電壓以伏特 (Volt) 計, 電流  $I$ , 以安培 (Ampere) 計, 以上各關係之定律如下

$$\text{安培} = \frac{\text{伏特}}{\text{歐姆}}, \text{ 即 } I = \frac{E}{R}.$$

此即歐姆定律 (Ohm's Law), 亦即電的工作之基本的定律, 此項定律亦是代數方程式。

### 習 題 八 十 一

1. 由公式  $I = \frac{E}{R}$  剖解  $E$  及  $R$ .
2. 在一電路上所量電壓是 1.5 伏特, 若總數電阻是 12 歐姆,

求電路上之電流。

3. 求由一丹尼爾氏電池(Daniell's cell)經過一20歐姆電阻之線路中的電流,若電池的電動勢是1.03伏特。
4. 求從50只串接的丹尼爾氏電池所發出之電流,電池每只有電動勢1.03伏特,每只電池有內電阻0.3歐姆,線路之電阻是25歐姆,解所謂串接者是將50只電池負極與正極逐一連接,總數電動勢是50倍的每只電池之電動勢,總內電阻是50倍的每只電池之內電阻,總數電阻是總內電阻加線路之電阻。
5. 一只電鈴有電阻450歐姆,若以小於0.06安培之電流通過則不振鈴,不計線路等之電阻,則電動勢需多少方使鈴響?
6. 若一電爐有500伏特電動勢的供給,則需有電阻多少歐姆可使電流不超過2.5安培。
7. 某種銅線每30呎有電阻1歐姆,欲使0.4安培之電流通過1哩長之銅線需有多少電動勢?

~~~~~

導體之電阻 用以下之公式, $R = K \frac{l}{a}$

R 代表電阻以歐姆計, l 代表導體之長以呎計, a 代表圓導體之截面積以圓密爾(Circular mil)計,0.001吋直徑之圓其面積是1圓密爾乘 $\frac{\pi}{4}$,是以1圓密爾等於圓導體直徑的平方。(直徑是

0.001 吋), 若以 K 代表每呎長圓密爾截面導體之電阻, d 代表圓導體之直徑, 則 $a = d^2$. 以上之公式可以寫作

$$R = K \frac{l}{d^2}$$

下表是每呎每圓密爾導體之電阻, 溫度在攝氏零度。

鋁	17.5 歐姆。	紫銅	9.6 歐姆。
德國銀	125.7 歐姆。	純鐵	58.3 歐姆。
電報鐵線	90.0 歐姆。	白金	54.3 歐姆。
銀	9.1 歐姆。	鋅	33.8 歐姆。

例題一 求 2 哩長的 12 號紫銅線之電阻。

[解] 12 號紫銅線之面積是 6530 圓密爾。

2 哩 = 2×5280 呎。 $K = 9.6$ (見上表)

$$R = \frac{9.6 \times 5280 \times 2}{6530} = 15.5 \text{ 歐姆 答數。}$$

例題二 求一鐵線之直徑則每哩長有 3 歐姆之電阻。

[解] 既 $R = K \frac{l}{d^2}$, 則 $d^2 = \frac{Kl}{R}$.

$$d^2 = \frac{58.3 \times 5280}{3} = 102,608 \text{ 圓密爾}$$

$$\therefore d = \sqrt{102608} = 320.3 \text{ (千份之一吋)}$$

則 $d = 0.3203$ 吋 答數。

例題三 求一 20 號銀線之長使有 5 歐姆之電阻。

[解] 第 20 號線之面積是 1022 圓密爾

$$R = \frac{Kl}{a}, \quad \text{則 } l = \frac{Ra}{K}$$

$$l = \frac{5 \times 1022}{9.1} = 561.5 \text{ 呎}$$

習 題 八 十 二

1. 求一340 呎長第 25 號德國銀線之電阻。第 52 號線直徑是 0.0179 吋。
2. 求 20 哩長第 00 號紫銅線之電阻。第 00 號線直徑是 0.3648 吋。
3. 在一 $\frac{3}{4}$ 吋之直徑的圓棍上有 500 繞第 30 號銀線，求全線之電阻。第 30 號線之直徑是 0.0100 吋。
4. 求紫銅線之直徑每哩有 40 歐姆之電阻。
5. 第 16 號之紫銅線需若干長方有 20 歐姆之電阻，第 16 號線直徑是 0.05082 吋。
6. 某種紫銅線每圓密爾每呎有電阻 10.79 歐姆，525 呎長 4117 圓密爾截面的同樣紫銅線有多少電阻？

第二十九章 較複雜之方程

在前幾章解說之方程僅有一個未知數，本章中將解說多於一個未知數的方程，此項未知數字祇限一次方乘，即使有二次方亦必易於剖解。

不能決算之方程 設如一方程式是 $x-y=2$ 。若欲剖解未知數 x 與 y ，則必有許多答數皆恰合以上之方程。

所以 $x=3$ 及 $y=1$ ，是一對答數， $x=4$ 與 $y=2$ ， $x=5$ 與 $y=3$ ，凡兩數字相差是 2 者皆可作 x 與 y 之答數。

此種方程稱為不能決算之方程 (Indeterminate equation)，求能滿足以下各方程之答數。

$$(1) x+y=10,$$

$$(2) x-y=10$$

$$(3) 2x+y=20$$

$$(4) 3x+2y=40$$

同性的方程 (Simultaneous equation) 擇取兩個不能決算的方程，如

$$(1) x-y=2 \quad \text{及}$$

$$(2) x+y=12$$

答數對能滿足方程(1)者是 $x=3, y=1; x=4, y=2; x=5, y=3; x=6, y=4; x=7, y=5$ 等。答數對能滿足方程(2)者是 $x=2, y=10; x=3, y=9; x=6, y=6; x=7, y=5; x=8, y=4$ 等。但能同時滿足方程(1)與(2)者祇有一對答數即是 $x=7, y=5$ ，以一對答數可以滿足兩方程之未知數，此種方程謂之一組同性的方程。

凡祇有一對數值能滿足兩個方程中之未知數者，此兩個方程稱謂獨立的方程。

若方程式之一組如 $x+y=7$ ，及 $3x+6y=15$ ，則無一對數值能同時滿足以上之兩方程者，則此兩方程稱謂不合符的方程。

獨立的方程之解答 若將能滿足每個方程之一對數值逐一寫出而尋求一對數值能滿足兩個方程，照此解答似欠太繁，故需另採簡法以解剖之。

所擇各解答法不外乎得一方程祇包括一個未知數，簡言之即除去一個未知數，除去一個未知數共有以下三法，即

- (1) 從加法或減法除去。
- (2) 從代替而除去。
- (3) 從比較而除去。

例題一 用從加減法除去一個未知數法以解答方程

$$(1) \quad x - y = 2$$

$$(2) \quad x + y = 12$$

將方程(1)與(2)相加，字項加字項及數項加數項，則得

$$(3) \quad 2x = 14,$$

$$\therefore (4) \quad x = 7$$

將 x 之值代入(1)則得，

$$(5) \quad 7 - y = 2$$

$$\therefore (6) \quad y = 5$$

此處所得之一對數值可滿足兩個方程(1)與(2)。

例題二 用剖解例題一之法，解答方程

$$(1) \quad 3x + 2y = 21$$

$$(2) \quad 7x - 5y = 20$$

用 7 乘方程(1) 則得 (3) $21x + 14y = 147$

用3乘方程(2)則得 (4) $21x - 15y = 60$

從(3)減去(4)則得 (5) $29y = 87$

$$\therefore (6) \quad y = 3$$

將所得 y 之答數代入(1)則得 (7) $3x + 6 = 21$

$$\therefore (8) \quad 3x = 15$$

$$(9) \quad x = 5.$$

此處所得 $x=5$ 與 $y=3$ 即是所需之值。

以上之除去一個未知數法謂之加減法。其工作法可寫成以下之定律。

【定律】 (1) 在必需時用相當數乘方程式使所得兩方程式中之一個未知數有相等的系數。

(2) 將兩方程式相加或相減以消除一個未知數。

從代替而除去 用代替法除去一個未知數較為簡易，例如以下方程式

$$(1) \quad y + 7x = 42$$

$$(2) \quad 3x - y = 8$$

剖解方程(1)則得 $y = 42 - 7x$ ，將 $y = 42 - 7x$ 代入方程(2)則得

$$(3) \quad 3x - (42 - 7x) = 8$$

$$(4) \quad 3x - 42 + 7x = 8$$

$$(5) \quad 3x + 7x = 42 + 8$$

$$(6) \quad 10x = 50$$

$$(7) \quad x = 5$$

將 x 之值代入(1)則得(8) $y + 35 = 42$

$$\therefore (9) \quad y=7.$$

此處 $x=5$ 與 $y=7$ 是所需之值。

以上是用代替除去一個未知數法，若兩方程式之一是較簡式則擇用此法甚為簡便，此項工作法可寫作以下之定律。

【定律】 剖解一個方程而得一個未知數的等值，而將此等值代入第二個方程式，則得一方程式祇有一個未知數。

用比較法而消除一個未知數。

例如 剖解 $x+4y=21$ 與 $3x-y=11$

[解] (1) $x+4y=21$

(2) $3x-y=11$

剖解方程 (1) 中 x 之值，則得 (3) $x=21-4y$

剖解方程 (2) 中 x 之值，則得 (4) $x=\frac{11+y}{3}$

$$\text{則(3)=(4)} \quad \therefore (5) \quad 21-4y=\frac{11+y}{3}$$

除去分數， (6) $63-12y=11+y$

易位 (7) $63-11=12y+y$

(8) $52=13y$

(9) $y=4$

將 y 之值代入 (3) 則得 (10) $x=21-16$

(11) $x=5.$

此處 $x=5$ ，及 $y=4$ 是所需之值。

以上是用比較而消除一個未知數之法可以寫作以下之定律。

【定律】 剖解每方程中一個未知數的等值，因同一未知數之等值必相等則成爲僅有一個未知數之方程。

此上所解釋之解答獨立的方程式法皆可擇用，然需經過長時的練習方知善於擇用何者最合所需。

習 題 八 十 三

剖解以下之各方程：

- | | | |
|------------------------------|--|------------------------------------|
| 1. $x+y=8,$ | 2. $2x+y=10,$ | 3. $4x-3y=8,$ |
| $x-y=2.$ | $x+2y=11.$ | $2x+y=14.$ |
| 4. $3x+2y=26,$ | 5. $7x+y=42,$ | 6. $8x+6y=10,$ |
| $5x-2y=38.$ | $3x-y=8.$ | $5x+2y=1.$ |
| 7. $7x-9y=13,$ | 8. $3x+5y=8,$ | 9. $5x+6y=17,$ |
| $5x+2y=10.$ | $2x-3y=12.$ | $6x+5y=16.$ |
| 10. $x-11y=1,$ | 11. $x+y=17,$ | 12. $3x+y=24,$ |
| $111y-9x=99.$ | $x-y=7,$ | $5x-6y=2.$ |
| 13. $5x+9y=28,$ | 14. $5x-2y=1,$ | 15. $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{3},$ |
| $7x+3y=20.$ | $4x+5y=47.$ | $\frac{x+y}{4}=\frac{y+2}{3}.$ |
| 16. $(y+1)(x+5)=(y+5)(x+1),$ | 17. $\frac{a}{3}-\frac{b}{6}=\frac{1}{2},$ | |

$$xy + y + x = (y+2)(x+2).$$

$$\frac{a}{5} - \frac{3b}{10} = \frac{1}{2}.$$

$$18. \quad \frac{a}{5} + \frac{b}{2} = 5,$$

$$19. \quad \frac{n+1}{10} = \frac{3m-5}{2},$$

$$a - b = 4.$$

$$\frac{n+1}{10} = \frac{n-m}{8}.$$

$$20. \quad \frac{x-2}{3} - \frac{y+2}{4} = 0,$$

$$21. \quad \frac{x}{2} - \frac{y}{5} = 4,$$

$$\frac{2x-5}{5} - \frac{11-2y}{7} = 0.$$

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{15} = 3.$$

$$22. \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{ab},$$

$$23. \quad \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 0,$$

$$\frac{x}{c} - \frac{y}{d} = \frac{1}{cd}.$$

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 2.$$

24. 兩數之和是 15, 兩數之較是 1, 求此兩數。

25. 今有兩數, 但知 3 倍的第一數加 4 倍的第二數是 10, 而 4 倍的第一數加第二數是 9, 求兩數之值。

26. 有一分數若以 1 加分子則等 $\frac{1}{3}$, 若以 1 加分母則等於 $\frac{1}{4}$, 求此分數。

27. 某校有初中及高中學生共五百二十人, 初中生繳學費每季 28 元, 高中生每季繳 36 元, 每季共收學費 15888 元, 初中及高中生各幾人?

28. 某工廠共有男女工 700 人，男工平均工資每星期 12 元 7 角 5 分，女工平均工資每星期 6 元 7 角 5 分，若每星期共付工資 7245 元，則男女工各幾人？
29. 一玻璃杯滿盛水共重 18 兩，若滿盛硫酸則共重 27 兩，若硫酸之比重是 1.75，求空玻璃杯之重量。
30. 若三角的三邊之和是 65 寸，若第二邊之長是比第一邊長 5 寸，而比第三邊短 7 寸，求每邊之長。

第三十章 指數 乘冪與方根

在前幾章中對於正號整數的指數之用處已經詳解，其意義是以底數為因數而自乘之次數。

負數的指數，分數的指數及零字指數是其種類之指數常見於數學中，此章中將解說之，其餘對於指數之詳說，則將載於對數章 (Logarithms)。

所需注意者是正號整數的指數之定義不能應用於負數，分數與零字指數，例如 8^2 ，則小字 2 顯示 8 須作因數二次。但在 $8^{\frac{1}{2}}$ 中，則小字 $\frac{1}{2}$ 並不能顯示 8 須作因數次數，若說 8 須作因數 $\frac{1}{2}$ 倍則毫無意義。

所以現須擴大指數之定義使包括一切指數。

指數之定律 指數之定律在乘法中對於正號整數的指數已曾詳說且經證明。即 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

在除法中亦然，正號整數的指數之定律皆經詳證。

即 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 此處 m 是大於 n 。

若 $m=n$ ，則 $a^n \div a^n = 1$ 。

求乘冪之乘冪時則指數是相乘，有如 $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ 此已在正號整數的指數之定義中述及。

所以 $(a^m)^n = a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdots$ 至 n 因數 $= a^{m \cdot n}$

以數字解釋 $(a^6)^3 = a^6 \cdot a^6 \cdot a^6 = a^{6+6+6} = a^{18}$

一個積數之乘冪是同於因數之乘冪的積數。

即 $(abc \cdots)^n = a^n b^n c^n \cdots$

以數字解之，則 $(2 \cdot 3 \cdot 4)^3 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 4^3$

一分數之乘冪是等於分子之乘冪除分子之乘冪。

此即 $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

以數字解之，則 $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$

若欲取一乘冪之方根則反做乘冪之工作，從 $a^{m \cdot n}$ 則有 $\sqrt[n]{a^{m \cdot n}} = a^{m \cdot n \div n}$

以數字解之，則 $\sqrt[3]{3^6} = 3^{6 \div 3} = 3^2 = 9$

以上所述依據正號整數的指數之定律之原則但祇對於 $m \div n$ 是一整數。

所說之六條指數之定律載列於下。

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

(2) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$

(4) $(abc)^n = a^n b^n c^n \dots$

(5) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

(6) $\sqrt[n]{a^m} = a^{m \div n} = a^{\frac{m}{n}}$

例題一 求 $3a^2x^3y^4$ 的第 4 乘冪。

$$[\text{解}] (3a^2x^3y^4)^4 = 3^4(a^2)^4 \cdot (x^3)^4 \cdot (y^4)^4 = 81a^8x^{12}y^{16}$$

例題二 求 $\frac{3a^3b^4x}{2y^2}$ 之立方。

$$[\text{解}] \left(\frac{3a^3b^4x}{2y^2}\right)^3 = \frac{3^3(a^3)^3(b^4)^3(x)^3}{2^3 \cdot (y^2)^3} = \frac{27a^9b^{12}x^3}{8y^6}$$

例題三 求 $3^6b^9x^{12}$ 之立方根。

$$[\text{解}] \sqrt[3]{3^6b^9x^{12}} = 3^{6 \div 3} \cdot b^{9 \div 3} \cdot x^{12 \div 3} = 3^2b^3x^4 = 9b^3x^4$$

習 題 八 十 四

求以下各數：

1. $(a^2y^3)^4$

2. $(2y^3x^4)^6$

3. $(3a^2b)^3$

4. $(-4a^2x^6)^3$

5. $(-3a^3b^2x)^4$

6. $(-x^4y^6)^2$

7. $(3^ab^c)^3$

8. $(4a^ax^2)^b$

9. $\left(\frac{3x}{4b}\right)^3$

$$10. \left(\frac{4x^2}{5b^3}\right)^3 \quad 11. \left(\frac{2a^5b}{4c^4x^2}\right)^4 \quad 12. \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]^n$$

$$13. \left(\frac{x^nb}{y^mc}\right)^d \quad 14. (-x^2y^3z^4)^4 \quad 15. (7m^3)^{xy}$$

$$16. (9x^2y^z)^{2z} \quad 17. \sqrt[4]{a^4b^8c^{12}} \quad 18. \sqrt[3]{\frac{2^6b^9}{3^9x^{12}}}$$

零字指數 假設 $a^m \div a^n = a^{m-n}$, 若 $m=n$, 則 $a^{m-n} = a^0$

$$\text{但 } a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n}, \text{ 若 } m=n, \text{ 則 } \frac{a^m}{a^n} = 1$$

$$\therefore a^0 = 1.$$

由上所證則任何數字其指數是零字則等於 1.

例如 (1) $0.8^0 = 1.$

(2) $100^0 = 1.$

(3) $0.01^0 = 1.$

負數指數 按定律: $a^m \div a^n = a^{m-n}$, 若 n 是大於 m . 則

例如 $a^2 \div a^6 = a^{-4}$

$$\text{但 } a^2 \div a^6 = \frac{a^2}{a^6} = \frac{1}{a^4}$$

$$\therefore a^{-4} = \frac{1}{a^4}$$

$$\text{同似 } a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

由上所證則一數的指數是負數等於 1 除同數有正號的同值指數。

例如 (1) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

(2) $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

分數的指數 若用定律 $\sqrt[n]{a^m} = a^{m \div n}$, m 與 n 可以有任何

數值。則得 $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ 又 $\sqrt[n]{a} = a^{1 \div n} = a^{\frac{1}{n}}$

由上所證,則一分數的指數是顯示一方根,其分母是方根之指數而其分子是乘冪之指數。

一數之式樣如 $a^{\frac{m}{n}}$ 意即 $\sqrt[n]{a^m}$ 或 $(\sqrt[n]{a})^m$. 此即字項 a 可以升至 m 的乘冪,然後取第 n 的方根,或先取第 n 的方根再升至 m 的乘冪。

所以 $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$, 或 $8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$.

例如 (1) $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

(2) $64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$

(3) $32^{\frac{3}{5}} = (\sqrt[5]{32})^3 = 2^3 = 8$

(4) $4^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt[2]{4^3}} = \frac{1}{\sqrt{64}} = \frac{1}{8}$

習 題 八 十 五

求下各題之值：

- | | | |
|--|--|--|
| 1. 10^0 | 2. 4^{-2} | 3. 10^{-8} |
| 4. 8^{-3} | 5. $16^{\frac{1}{4}}$ | 6. $16^{-\frac{1}{4}}$ |
| 7. $27^{\frac{4}{3}}$ | 8. $512^{-\frac{2}{3}}$ | 9. $\left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$ |
| 10. $100^{\frac{3}{2}}$ | 11. $1000^{-\frac{2}{3}}$ | 12. $10^0 \cdot 3^2$ |
| 13. $(3^0)^{-3}$ | 14. $(4^0)^6$ | 15. $64^{-\frac{5}{3}}$ |
| 16. $9^{\frac{5}{2}}$ | 17. $a^{-2}c^{-\frac{1}{3}} \div a^{-3}$ | 18. $a^{-\frac{3}{4}} \times a^{\frac{5}{6}}$ |
| 19. $3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}} \times 4a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}$. | | |

用以寫數之指數 在科學中常見數式如 4.25×10^9 ，或 726×10^{-8} 此種式樣是將數式寫成簡式，記憶指數之意義。

如 $4.25 \times 10^9 = 4.25 \times 1,000,000,000 = 4,250,000,000$ 。

末數與所寫之數式相等但不若所寫之數式簡易而明顯，短寫式如下列者似覺易於辨識。

$$726 \times 10^{-8} = \frac{726}{100,000,000} = 0.00000726$$

習 題 八 十 六

將以下各數寫出普通數：

1. 3.5×10^7

2. 8.67×10^{11}

3. 523×10^{-8}

4. 4.786×10^{-9}

5. 9.376×10^{-6}

6. 4.673×10^8

7. 4.37×10^{12}

將以下各數改作簡寫式：

8. 4768000000

9. 23600000000

10. 37600000000

11. $\frac{367}{1000000}$

12. $\frac{4}{10000000}$

13. 0.000000367.

第三十一章 二次方程

【定義】 一方程式包含未知數之平方而無再高之乘冪者謂之二次方程。

一純粹的二次方程祇包含一未知數之平方，若 $2x^2 = 4$ 。

一沾染的二次方程包含未知數之平方及未知數之第一乘冪，如 $x^2 + 3x = 10$ 。

純粹的二次方程之解答 解答與簡式方程同直至尋得未知數之平方，然後將等號兩邊之字項及數項求方根。

例題一 在方程 $3x^2 + 8 = 7x^2 - 8$ 中求 x 之值。

[解] (1) 所給方程 $3x^2 + 8 = 7x^2 - 8$

(2) 易位 $8 + 8 = 7x^2 - 3x^2$

(3) 聚項 $16 = 4x^2$

$$(4) \text{ 除 } 4 \quad x^2 = 4$$

$$(5) \text{ 求 } x^2 \text{ 及 } 4 \text{ 之方根 } x = \pm 2.$$

此處所用之符號 \pm 指明答數是 $+2$,或 -2 .

用兩負數相乘與兩正數相乘之積數同值,故方根可以有加號或減號,所以 $\sqrt{4} = \pm 2, \sqrt{b^2} = \pm b$.

例題二 求一圓之半徑,圓之面積是154方吋。

[解] (1) 以 r 代表圓之半徑

$$(2) \pi r^2 = 154. \quad \text{取 } \pi \text{ 值作 } \frac{22}{7}$$

$$(3) r^2 = 154 \div \frac{22}{7} = 49$$

$$(4) \text{ 求 } r \text{ 與 } 49 \text{ 之方根 } r = \pm 7.$$

但 r 之值不能為負數故祇能 $=7$.

習 題 八 十 七

剖解以下各方程:

$$1. 7x^2 + 25 = 2x^2 + 150. \quad 2. 3x^2 - 10 = 5x^2 - 42.$$

$$3. 53 - 7x^2 + 27 = -2x^2. \quad 4. x^2 + 1 = \frac{x^2}{4} + 4.$$

$$5. \frac{x(9x+25)}{15} = \frac{3x+6}{5}. \quad 6. \frac{2x}{3} - \frac{5}{4x} = \frac{7x}{9} - \frac{21}{4x}.$$

$$7. 2x(5-x) + x^2 = 10(x+2).$$

$$8. (3x+6)(3x-6) = (2x+5)(2x-5).$$

$$9. \frac{13}{2x+3} = \frac{3x+2}{2+x}.$$

$$10. \frac{x^2+x+1}{x-1} - 6 = \frac{x^2-x+1}{x+1}.$$

$$11. \frac{5}{4+y} + \frac{5}{4-y} = \frac{8}{3}.$$

$$12. F = \frac{wv^2}{gr} \text{ 求 } v.$$

$$13. S = \frac{1}{2}gt^2 \text{ 求 } t.$$

$$14. l = \frac{gt^2}{\pi} \text{ 求 } t.$$

$$15. F = \frac{mna}{d^2} \text{ 求 } d.$$

$$16. n^2 = \frac{Kst^2}{l^2d} \text{ 求 } S.$$

17. 求一圓筒體之半徑，圓筒高 12 呎，體積 1400 立方呎。

18. 求一正圓錐之直徑，圓錐高 20 吋，體積是 145 立方吋。

~~~~~  
沾染的二次方程用劈因法解答 一沾染的二次方程化簡後有  $x^2$  項，有一  $x$  項並不包含  $x$  項。此種方程如  $x^2 - 5x = -6$ 。

可用劈因法解答之二次方程有以下之工作步驟。

(1) 將方程式化簡。

(2) 將各項易位至左邊。

- (3) 將各項在左邊者劈因。  
 (4) 使每因數等於零。  
 (5) 解答每因數之方程。

例題 剖解  $x^2 + 23x = -102$ .

- [解] (1) 所給方程  $x^2 + 23x = -102$ .  
 (2) 易位  $x^2 + 23x + 102 = 0$ .  
 (3) 劈因  $(x+6)(x+17) = 0$ .  
 (4)  $\therefore x+6=0$ , 或  $x+17=0$ .  
 (5)  $\therefore x=-6$  或  $x=-17$ .

### 習 題 八 十 八

解答及核對以下之方程：

- |                           |                            |
|---------------------------|----------------------------|
| 1. $x^2 + 15x + 56 = 0$ . | 2. $x^2 - 17x + 72 = 0$ .  |
| 3. $x^2 - 16x = 36$ .     | 4. $5x - 6 = x^2$ .        |
| 5. $x^2 + 2x = 24$ .      | 6. $x^2 + 26x + 160 = 0$ . |
| 7. $x^2 + 3x = 54$ .      | 8. $x^2 - 11x = -30$ .     |

有他種二次方程不能用劈因法解答者，須用完成整方法以解答之，但能用劈因法解答之方程，亦皆可用完成整方之法以解答之。

**完成整方** 三項方之式前已詳述，其第一項與末項皆為單項整方，其中間一項是第一項之方根與末項之方根積數的兩倍，將此記憶若知方程之前二項則可以求末項。



所以若已知前二項是  $a^2+2ab$  則可以求第三項，法以兩倍第一項方根除第二項再將答數方乘即得第三項，兩倍第一項之方根是  $2a$ ，以  $2a$  除  $2ab=b$ 。答數方乘是  $b^2$ 。則  $b^2$  是第三項，則完成之整方是  $a^2+2ab+b^2$ 。

例題 完成  $x^2+4x$  之整方。

[解] 兩倍第一項之方根是  $2x$ ， $4x \div 2x = 2$ ， $2^2 = 4$ 。

則完成之整方是  $x^2+4x+4$ 。

∴若  $x^2$  之系數是 1，完成整方則第三項是  $\frac{1}{2}$  的  $x$  之系數方

完成以下各數為整方

(1)  $x^2+2x$ .      (2)  $x^2-2x$ .      (3)  $x^2-3x$ .

(4)  $x^2-10x$ .      (5)  $a^2-10ab$ .

完成整方之解答法當用例題解釋於下使更明瞭。

例題一 所給方程  $x^2+4x=12$ 。

(1) 完成左邊之整方則得  $x^2+4x+4$ ，因左邊加 4，故右邊亦必加 4 使等號之兩邊之值相等。

$$\therefore x^2+4x+4=16$$

(2) 取兩邊之方根，則  $x+2=\pm 4$ 。

(3) 將數項易位， $x=-2\pm 4$ 。

(4)  $\therefore x=2$  或  $-6$

每一答數皆可核對原有的方程，則 2 與  $-6$  是方程之根。

例題二 所給方程， $x^2+12x=-35$ ，求  $x$  之值。

- [解] (1) 原有方程,  $x^2+12x=-35$ .  
 (2) 完成整方  $x^2+12x+36=1$ .  
 (3) 取兩邊之方根  $x+6=\pm 1$ .  
 (4)  $\therefore x=-7$  或  $-5$ .

例題三 所給方程  $2r^2+4r=48$  求  $r$  之值。

- [解] (1) 原有方程  $2r^2+4r=48$ .  
 (2) 以 2 除之,  $r^2+2r=24$ .  
 (3) 完成整方,  $r^2+2r+1=25$ .  
 (4) 取兩邊之方根  $r+1=\pm 5$ .  
 (5)  $\therefore r=4$  或  $-6$ .

例題四 所給方程,  $3x^2-7x=6$  求  $x$  之值。

- [解] (1) 原有方程,  $3x^2-7x=6$ .  
 (2) 以 3 除之,  $x^2-\frac{7}{3}x=2$ .  
 (3) 完成整方,  $x^2-\frac{7}{3}x+\frac{49}{36}=\frac{121}{36}$ .  
 (4) 取兩邊方根,  $x-\frac{7}{6}=\pm\frac{11}{6}$ .  
 (5)  $\therefore x=3$  或  $-\frac{2}{3}$ .

例題五 所給方程,  $9x=4-3x^2$ . 求  $x$  之值。

- [解] (1) 原有方程,  $9x=4-3x^2$ .  
 (2) 字項易位,  $3x^2+9x=4$ .

$$(3) \text{ 以 } 3 \text{ 除之, } x^2+3x=\frac{4}{3}.$$

$$(4) \text{ 完成整方, } x^2+3x+\frac{9}{4}=\frac{43}{12}.$$

$$(5) \text{ 取兩邊方根 } x+\frac{3}{2}=\pm\sqrt{\frac{43}{12}}=\pm 1.893.$$

$$(6) \quad \therefore x=-\frac{3}{2}\pm 1.893.$$

$$(7) \quad \text{則 } x=0.393 \text{ 或 } -3.393.$$

解答一沾染的二次方程之法可結論於下。

**【定律】** (1) 化簡方程成下式  $x^2+bx=c$ .

(2) 完成整方是由將  $\frac{1}{2}x$  系數的平方加在等號之兩邊。

(3) 求兩邊之方根,並將右邊之答數冠以士號。

## 習 題 八 十 九

用完成整方法求  $x$  之值:

1.  $x^2-4x=60.$

2.  $x^2+11x=-24.$

3.  $3x^2-10x+3=0.$

4.  $36x^2-36x-7=0.$

5.  $10x^2+7x=12.$

6.  $x^2+4x=2.$

7.  $x^2+2x=2.$

8.  $4x^2-4x=7.$

9.  $9x^2+6x-17=0.$

10.  $3x^2+121=44x.$



用公式解答沾染二次方程 設需解答普通二次方程  $ax^2+bx+c=0$ ，則可以得一公式用以求任何二次方程的未知數之值。

例題一 所給方程： $ax^2+bx+c=0$ ，求  $x$  之值。

[解] (1) 所給方程， $ax^2+bx+c=0$ 。

(2) 數項易位， $ax^2+bx=-c$ 。

(3) 以  $a$  除之， $x^2+\frac{b}{a}x=\frac{-c}{a}$ 。

(4) 完成整方， $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$

(5) 取兩邊方根， $x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

(6)  $x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

因公式  $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$  可以解答任何二次方程，應用公式時必需注意  $a, b$ ，及  $c$  之符號；

所以在方程  $3x^2-2x-4=0$  中， $a=3, b=-2, c=-4$ 。

例題二 用公式求  $6x^2+17x+7=0$  的  $x$  值。

[解] 此處  $a=6, b=17, c=7$ 。

將  $a, b$ ，與  $c$  之值代入公式。

$$x = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \times 6 \times 7}}{2 \times 6} = \frac{-17 \pm 11}{12} = -\frac{1}{2} \text{ 或 } -2\frac{1}{3}$$

例題三 方程  $6x^2+8x-30=0$ ，用公式求  $x$  之值。

此處  $a=6, b=8, c=-30$ .

$$\therefore x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \times 6 \times (-30)}}{2 \times 6} = \frac{-8 \pm 28}{12} = 1\frac{2}{3} \text{ 或 } -3$$

### 習 題 九 十

用任何方法解答以下之方程：

1.  $x^2 - 3x = -2$ .
2.  $x^2 + 5x = -6$ .
3.  $x^2 - x = 6$ .
4.  $y^2 - 2y = 168$ .
5.  $y^2 + 2y = 120$ .
6.  $y^2 - 22y = 48$ .
7.  $5r^2 + 12r = 9$ .
8.  $2r^2 + 5r = -2$ .
9.  $7a^2 + 9a = 10$ .
10.  $7x^2 + 2x = 32$ .
11.  $V + \frac{1}{V} - \frac{5}{2} = 0$ .
12.  $\frac{S^2}{9} + \frac{S}{3} = \frac{35}{4}$ .
13.  $x^2 + 4bx = \frac{9b^2}{4}$ .
14.  $S = Vt + \frac{1}{3}gt^2$  求  $t$ .
15.  $T = 2\pi r^2 h + 2\pi r^2$  求  $r$ .
16. 求三個連續數，三數之和是等於  $\frac{1}{3}$  的第一數與第二數之積。
17. 一數與其本數的 5 倍相乘得 4500，求此數。
18. 一園地內四周走道共有面積 784 方呎，園地長 50 呎闊 49 呎，求走道之闊。
19. 一圓球之曲面積平方尺數與其體積立方尺數同，求圓球

之半徑。

20. 一立方之面積平方尺數與其體積立方尺數同，求其邊之長。
21. 兩數之和是 25，而其積是 144，求此兩數。
22. 將 71 分作兩份，此兩份的平方之和是 2561，試求之。
23. 若一火車之速率每小時增加 5 里，則行駛 420 里可減少 2 小時，求此火車之速率。
24. 求一圓之半徑，若其半徑增加 2 呎則面積加倍。
25. 求一圓之直徑，若直徑增加 2 呎則將面積乘 3。
26. 一正圓錐體高 6 吋，其總數面積是 100 方吋，求底面上之半徑。
27. 一直角三角之斜線(弦)比直邊(勾)長 3 呎，比底邊(股)長 6 呎，求各邊之長及面積。
28. 一直角三角之斜線(弦)比直邊(勾)長 8 吋，比底邊(股)長 4 吋，求各邊之長。
29. 一卡車之後輪周比前輪周長 5 呎，若行 1 哩則後輪比前輪少轉 150 公轉，求前後輪之周。
30. 有一飛機在 1200 呎高飛行向北每小時 100 哩，若在此時擲下一彈不計空氣阻力則彈應落在地上何點？

**建議** 先用  $S = \frac{1}{2}gt^2$  公式，求彈由高落地需幾秒鐘。

$S$  代表飛機之高共若干呎， $g=32$  地心吸力， $t$  代表落下時間以秒計。

$$\therefore 1200 = \frac{1}{2} \times 32t^2.$$

則  $t = 8.66$  秒鐘。

落彈地位是等於擲彈起點至 8.66 秒鐘飛機飛行之程距。

## 第三十二章 變數 (Variation)

**概論** 多數之定律及公式頗依據變數之思想，許多已經擇用的公式之意義由變數着想似更明瞭。

變數之關係與比率及比例之關係相同，在許多地方用變數法似覺較用比率及比例法更爲便利，學者能熟悉變數法則獲得一有勁力的數學工具。

此處所用之比率及比例的原則完全與算學同（參考第七章）。

**常數及變數** 一數之值而不更變者謂之常數或恆數。

在數學問題中有些恆數常不變值，此種恆數如  $\pi$  之值是圓周與直徑之比率。

尚遇有其他恆數在同一問題則不更變，但在不同之問題中或需有他值，此種恆數如圓之半徑及正方之邊。

一個變數是一數而能有無限止的數值，此種變數如解釋人之年歲，或適離站台的火車所行之距離。

**直接變數** 變數是普通思想中之一，幾乎任何物皆受環境之影響，一物常隨他物而更變。

譬之一棵樹的生長全靠所受之光，所受之光更多則樹之生長亦更速，換言之即樹之生長直接與所受之光變數。

工人所得工資之多寡直接與其工作時間變數，此即工作時間長則所獲工資多。

**【定律】** 若兩數之關係如是則兩數之比率是恆數，此即一數更變則他數亦隨之更變，換言之即此兩數彼此直接變更。

**數學之陳述** 有如許多他種意想，變數之意想亦有數學之方法以解釋之，此等意想一經若是解釋後可以與數學定律聯合而運用，若是則有新的關係並得新的結果。

符號  $\propto$  是隨之變更之義，若  $x$  與  $y$  是兩可變更數即彼此直接變更，則能寫成簡式  $x \propto y$ ，亦可以寫作  $x = Ky$ ，此則寫作一方程式說出  $x$  與  $y$  的比率是一恆數  $K$ ，此種方程式是常用的。

**例題一** 若一火車離開車站有一平齊的速率，解釋火車離車站之距離  $d$  與離開車站後的時間  $t$  之關係。

此處距離  $d$  與時間  $t$  是直接變更。

$$\therefore d = Kt.$$

學者須在各種例題中熟思恆數  $K$  之意義，在此處  $K$  實在代表每單位時間之速率，若時間之單位是小時，速率是哩，則  $K$  代表速率每小時之哩數。

**例題二** 若兩數  $x$  與  $y$  彼此直接變更， $x=10$ ，則  $y=4$ ；若  $y=25$ ，則  $x$  應是何數。

**【解】** 因  $x$  與  $y$  之關係是直接的，則  $x = Ky$ 。

將  $x$  與  $y$  之值代入，則  $10 = 4K$ 。



$$\therefore K = 2 \frac{1}{2},$$

既變數之關係是  $x = 2 \frac{1}{2} y$ ,

若  $y = 25$ , 則  $x = 2 \frac{1}{2} \times 25 = 62 \frac{1}{2}$  答數。

**例題三** 從一高處自由下墜的物體所經過地位與時間之平方直接變更, 若  $s =$  地位以呎計,  $t =$  時間以秒計, 寫出定律, 求  $K$  之值; 若物體於 5 秒鐘墜下 402.5 呎。

**【解】** 因變數是直接依時間之平方, 則  $s = Kt^2$ , 代入  $s$  與  $t$  之值。

$$402.5 = K \times 5^2, \quad \therefore K = 16.1.$$

所以定律或公式用以求一物體在  $t$  秒鐘下墜之地位是

$$s = 16.1t^2. \text{ 常時寫作 } s = \frac{1}{2}gt^2, \quad g = 32.2.$$

**相反的變數** 設如一橫樑兩端架在支柱上, 樑之中間使負載一重量, 橫樑愈長則中間能負載之重量愈小, 在此種事實上之變數是相反的或不直接的。

又如在粗線中之電阻比同物質之細線中的電阻小, 此則電阻的變數與電線之截面積是相反的。

**【定義】** 兩數之積是一恆數, 則一數與彼數的變數是相反的, 此即若一數增加, 則彼數必減小。

**數學的述說** 將  $x$  變數相反如  $y$  之事實簡寫為  $x \propto \frac{1}{y}$ 。

則方程式是  $x \propto \frac{1}{y}$  或  $xy = K$ 。

例題一 若  $x$  變數相反如  $y$ ，求此恆數之值，若  $x=10$ ，則

$$y = \frac{1}{2}。$$

【解】  $xy = K$ ，是方程式，代入  $x$  與  $y$  之值。

$$\text{則 } 10 \times \frac{1}{2} = K, \quad \therefore K = 5。$$

例題二 用例題一之恆數求  $y$ ，若  $x = \frac{1}{100}$ 。

$$\text{【解】 既 } xy = 5, \quad \text{則 } y = \frac{K}{x} = 5 \div \frac{1}{100} = 500。$$

**連合的變數 定義** 一數隨兩個或較多的他數變更若一數直接隨餘數之積變更時，所以  $x$  與  $u$  及  $v$  成連合的變數在  $x = kuv$  時，一數可與一代數直接變更並與另一數相反變更，此即一數隨他兩數之分數變更。

若  $x$  與  $y$  直接變更並與  $z$  相反的變更可以寫作  $x = K \frac{y}{z}$ 。

### 習 題 九 十 一

1. 若  $x \propto y$ ，在  $x=20$ ， $y=60$  時，寫一方程顯示  $x$  與  $y$  之關係。
2. 若  $b \propto d$ ，在  $b=10$ ， $d=15$  時，求  $b$  當  $d=80$  時。
3. 若  $x$  與  $y$  及  $z$  連合的變更，在  $x=120$ ， $y=6$ ， $z=2$

時，求其恆數並求  $y$  值當  $x=200$  及  $z=15$  時。

4. 三角之面積  $A$  與其底邊  $b$  及高度  $a$  連合的變更，寫一公式若  $a=6$  吋， $b=4$  吋，則  $A=12$  方吋，求  $A$  若  $a=40$  吋， $b=25$  吋。
5. 一圓之直徑是另一圓之直徑的 4 倍，求兩圓之面積的關係。
6. 一圓磨刀石輪在新時直徑是 48 吋，求現在的直徑如 (1)  $\frac{1}{4}$  的圓面積磨去，(2)  $\frac{1}{2}$  的圓面積磨去，(3)  $\frac{3}{4}$  的圓面積磨去
7. 將圓之直徑加倍則其面積如何變更？將等邊六邊形之邊加倍長則其面積如何變更？
8. 同形固體的體積與其同處量度之立方而變更，一口徑 10 吋之桶能容 12 夸德之水，求一 12 吋的同形水桶之容量。
9. 鐘擺之往返擺動的次數，是與其長度的方根成相反的變數，一個 39.1 吋長之鐘擺每秒鐘往返擺動一次，若欲每秒鐘擺動往返四次則擺要多少長？若欲其每 10 秒鐘往返擺動一次則擺要多少長？
10. 若一槓桿之兩端掛有重量並平衡在一支點上，則從支點至重量的距離與重量成相反的變數，若一槓桿長 10 呎，一端掛重量 160 磅，彼端掛重量 190 磅，將槓桿平衡在一支點則支點距各重量是幾呎？

11. 在一根 3 尺長之槓桿上用 1 磅的重量平衡在彼端的 100 磅重量，則支點在何處。
12. 若  $f \propto qq'$  並  $f \propto \frac{1}{q^2}$ ，證示  $f \propto \frac{qq'}{q'^2}$ 。
13. 若  $R \propto E$ ， $R \propto L$ ，並  $R \propto \frac{1}{d^2}$ ，證示  $R = \frac{K E L}{d^2}$ 。
14. 若一物體受光之照度是與物體離光源之距離的平方成相反的變數，物體上有照度等於 3，當其與光源之距離是 8 呎，求物體上受光之照度，(1)物體距光 32 呎，(2)物體距光 20 呎。
15. 在一線路上之電流是  $I$  安培，發生熱  $H$  卡， $H$  與  $I^2$ ，電阻  $R$  及時間  $t$  秒成直接變數， $t$  是電流經過之時間，寫此公式。
16. 用第(15)題之公式先求恆數， $H=388,800$  卡，若  $I=10$ ， $R=9$ ， $t=30$  分鐘，再求  $H$ ，在  $I=40$ ， $R=50$ ，並  $t=45$  分鐘時。
17. 鋼絲纜繩之拉重勁力是與其截面積直接變數，1 吋直徑之纜繩能拉重 10000 磅，則  $\frac{3}{8}$  吋直徑之纜繩可拉重多少磅？
18. 物質之電阻與其長度直接變數，並與其截面積相反的變數。若 1 吋長及 1 方吋截面積之鋁棒在華氏  $32^\circ$  時有電阻 0.000001144 歐姆，求一鋁線之電阻長 1 呎，直徑

0.001 吋。

19. 求一鉛線之長度，直徑 0.05 吋，在華氏 32° 時有電阻 27.3 歐姆。
20. 1 呎長，0.001 吋直徑之銀線在華氏 32° 時有電阻 9.023 歐姆，求一公尺長的 1 公厘直徑之銀線有多少電阻。

~~~~~

木質橫樑之載重勁力 一固定的長方截面之木質橫樑兩端架在兩支柱上，其載重之勁力(1)與樑之長(以呎計)成相反的變數，(2)與截面之闊(以吋計)成直接變數，(3)與截之高(以吋計)的平方成直接變數，若以 W 代表負載之重量， L 代表樑之長以呎計， b 代表截面之闊以吋計， d 代表截面之高以吋計，同樣木料所製之樑，同樣支架，並同樣負重則有以下之定律。

$$W \propto \frac{bd^2}{L}, \text{ 或 } W = \frac{Kbd^2}{L}$$

求恆數 K 可擇一木料截面 1 吋見方，兩端用支柱架平相距 1 呎，在木料之中央逐漸加掛重量適使之斷，用上寫之公式求 K 。

在實際建築上必須將木料可負載之最大的重量除一安全因數其答數謂之安全負載，若是穩定不動的重量則安全的負載是最大負載的五分之一，若是活動的重量，則安全的負載是最大負載的十分之一。

1. 從公式 $W = \frac{Kbd^2}{L}$, 剖解各字等值。
2. 白松之恆數 $K=300$ 磅, 一白松木樑兩端穩固支架, 兩支柱相距 10 呎, 木樑之截面是 3 吋闊, 7 吋高, 求樑之中央能負最大的重量多少磅, 並安全的負載多少磅?
3. 一白松木樑之截面 3 吋闊, 8 吋高, 兩端穩固支架, 則兩支柱間之木樑需長多少呎方可有安全的負載 750 磅在樑之中央?
4. 由實驗所得, 一白松木樑截面 1 呎見方, 長 40 呎, 在樑之中間可負載最多 4500 磅, 若用同樣的木樑 6 呎長, 2 吋闊, 能有最大的負載 1200 磅, 則截面需幾吋高。
5. 按第(4)題, 若木樑之中央的安全負載是 120 磅, 則截面需高幾吋。
6. 若木樑負載平齊分佈的重量, 則恆數 K 較中央負重的多一倍, 用第(2)題求平齊分佈的重量。
7. 一橡木樑穩架在兩支柱相距 18 呎, 截面高 12 吋, 可有安全的負載平齊分佈重量共 5 噸, 若中央負重時用恆數 $K=500$, 安全負載是最大負載的 $\frac{1}{5}$ 。
8. 一客廳闊 16 呎, 地板用白松橡木支架, 橡木闊 3 呎, 高 12 吋, 用恆數 $K=300$ 磅, 安全負載是最大的負載 $\frac{1}{5}$; 求橡木相距之地位, 可負載重量每方呎地板上 140 磅。

9. 由其他實試所得計算白松木樑兩端穩固支架，中央可負

載之安全重量有以下之公式 $W = \frac{2000}{3} \times \frac{bd^2}{L}$, $W =$ 安全

負載以磅計, L, b, d 皆以吋計。

用此公式求以下各數。

(i) $L=12$ 呎, $b=3$ 吋, $d=8$ 吋, 求 W 。

(ii) $L=12$ 呎, $b=8$ 吋, $d=3$ 吋, 求 W 。

(iii) $L=16$ 呎, $b=4$ 吋, $W=1900$, 求 d 。

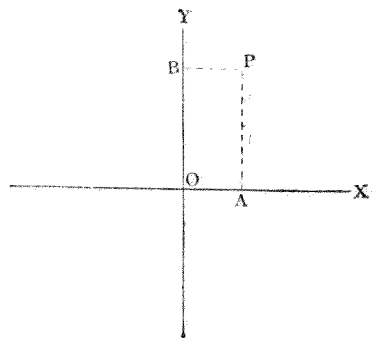
(iv) $b=6$ 吋, $d=10$ 吋, $W=4100$, 求 L 。

第三十三章 圖解 (Graphics)

圖解之實用甚廣，如氣象台報告每日二十四小時間溫度之升降，工程上之工作報告，及試驗室之結果皆製成圖解使閱者一目了然。代數方程皆可製成圖解使各數字項之關係格外明顯。

定義及所用之名詞 圖解須

包含正數與負數，故必需給有定義及假定。若下 (80) 圖， OX 與 OY 兩線彼此成垂直，任何一點之地位如 P 可以從量其離 OY 及 OX 之距，如圖中之 OB 與 OA 稱謂 P 點之坐標， OA 之長是謂 X 坐標，而 OB 之長是謂

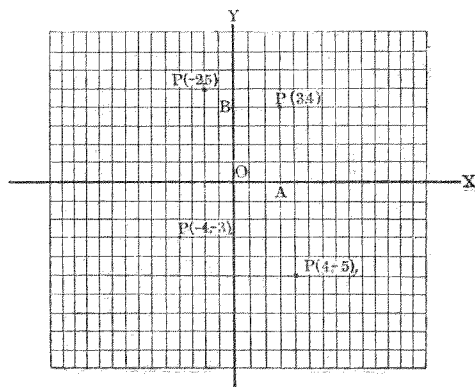


(80)

Y 坐標。 OX 與 OY 線是謂 X 軸線與 Y 軸線，總稱謂兩坐標軸線。兩軸線的交點 O ，是為原點。

X 軸線是橫坐標， Y 軸線是縱坐標。坐標必需從原點量起，橫坐標由原點至右量是正數，由原點向左量是負數；縱坐標由原點向上量是正數，由原點向下量是負數。兩軸線所分之四份 (1), (2), (3), (4) 謂之象限，在第(1)象限內橫縱兩坐標皆是正數，在第(2)象限內橫坐標是負數而縱坐標是正數，在第(3)象限內橫縱坐標皆是負數，在第(4)象限內橫坐標是正數而縱坐標是負數。

尋一點之地位 圖解需畫在方格紙上，欲尋一點之地位須憑兩坐標軸線，設如欲求一點之地位， X 坐標是 3，並 Y 坐標是 4，先畫軸線如 (81) 圖，由 O 向右量 OA 等於 3 格，由 A 畫直線



(81)

與 Y 軸平行，再由 O 向上量 OB 等於 4 格，由 B 畫直線與 X 軸平行，兩直線之交點 P 是 $x=3, y=4$ ，常寫作 $P(3,4)$ ，讀作

P 點之坐標是 3 與 4。

按上法可尋其他如 $P(-2, 5)$, $P(-4, -3)$, 與 $P(4, -5)$ 等之地位。

習 題 九 十 三

1. 在方格圖解紙上畫以下各點： $(-1, 6)$, $(7, -2)$, $(0, 4)$ 。

2. 由 26 年 1 月 26 日下午 3 時至 27 日下午 2 時，在此 24 時中所讀之攝氏溫度如下：

$11^\circ, 11^\circ, 10^\circ, 6^\circ, 8^\circ, 5^\circ, 4^\circ, 3^\circ, 2^\circ, 1^\circ, 1^\circ, 0^\circ, 0^\circ, -1^\circ,$
 $-1^\circ, -2^\circ, -3^\circ, -2^\circ, 1^\circ, 3^\circ, 6^\circ, 8^\circ, 10^\circ, 12^\circ.$

用時間作橫坐標並以溫度作縱坐標，畫以上各點並接以平滑的曲線。

3. 在歐洲之某城中在 1850 年，有居民 16000，1860 年，有居民 16300，1870 年，有居民 16850，1880 年，有居民 17800，1890 年，有居民 19100，1900 年，有居民 20700，在圖解方格紙上以居民作縱坐標，每格作 1000 人，以年份為橫坐標每格作 5 年，以 16000 及 1850 年為原點，畫以上各點並接以平滑曲線，在圖解上尋 1875 年，約計的居民人數。

4. 某公司起始開鑿礦穴，由 6 月 4 日至 6 月 11 日深 30 呎，6 月 18 日，深 54 呎，6 月 25 日深 70 呎，7 月 2 日深 82 呎，7 月 9 日深 100 呎，7 月 16 日深 135

呎，7 月 23 日深 150 呎，在圖解紙上畫各點接以曲線顯示工作之進行。

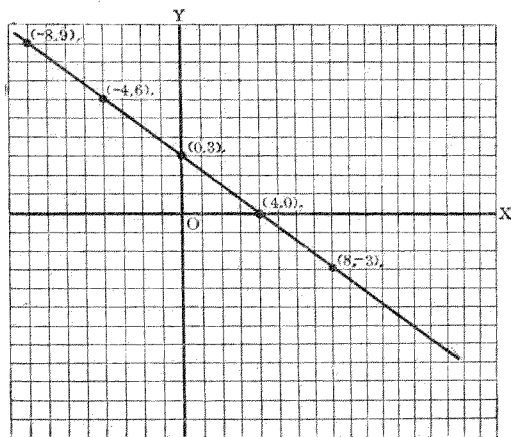
5. 製一圖解，在此圖解上可讀由 -225 至 225 中任何數乘 0.367 之積數，建議以數 -225 至 225 為橫坐標，各數乘 0.367 之積為縱坐標。
6. 製一圖解，從圖解上可讀由 1 至 500 除 12.7 之答數。
7. 一石塊由高處下墜， $(\frac{1}{2}$ 秒，4 呎)， $(1$ 秒，16 呎)， $(1\frac{1}{2}$ 秒，36 呎)， $(2$ 秒，64 呎)， $(2\frac{1}{2}$ 秒，100 呎)， $(3$ 秒，144 呎)，畫一圖解，在圖解讀下墜 80 呎需多少秒？
8. 某甲在某公司服務 13 年，所得月薪每年如下：28 元，30 元，37.50 元，45 元，60 元，65 元，90 元，95 元，95 元，137 元，162 元，190 元，210 元，畫一圖解以顯示之。
9. 某甲乘自由車出外旅行，上午 8 時起身共行 4 小時，每小時平齊速率 9 里，某甲在郊外休息 1 小時後復乘車回城，每小時之速率是 8 里，某乙於上午 11 時亦乘自由車由城至郊外在同一路上，乙車之速率某小時 6 里，畫一圖解顯示甲乙二人在何處相遇。
10. 算本金 100 元，單利 6%，由 1 至 10 年，畫一圖解以年份作橫坐標，利息為縱坐標，接以平滑曲線，在此圖解上可讀任何時之利息。

11. 算本 100 元，複利 6%，由 1 至 10 年，畫圖如上，在圖解上尋 $5\frac{1}{2}$ 年之複利。
12. 畫點 1, 4, 9, 16, 25, 36 等在橫坐標，並上數之方根爲相對的縱坐標，將縱坐標之規尺比橫坐標大 5 或 10 倍，將各點接以平齊曲線，在曲線上尋方根，11, 14, 21, 29, 42 等之值，並與計算之值比較。
13. 製一圖解顯示華氏溫度與攝氏溫度之關係。
14. 製一圖解顯示公尺與英尺之關係。
15. 製一圖解顯示公斤與英磅之關係。
16. 製一圖解顯示英畝與公畝之關係。
17. 製一圖解顯示國幣與美國金元之關係。
18. 製一圖解顯示馬力與瓦特之關係。

方程式之圖解 設如一方程有兩個未知數，若 $3x+4y=12$ ，則可以求許多對 x 與 y 之值而能核對方程，若將每對 x 與 y 之數值爲一點之坐標，以 x 之值爲橫坐標，並以 y 之值爲縱坐標，畫各點而成之圖解，謂之方程圖解。

畫 $3x+4y=12$ 之圖解，用以下各對之值；(0, 3), (4, 0), (8, -3), (12, -6), (-4, 6), (-8, 9)，並將各點連接則得一圖解如(82)圖。

凡一次方程之圖解是一直線，因直線是兩點之連接，則此種直



(82)

線圖祇須畫出兩點連接即成，最便利之點是直線經過兩軸線之點，如 (82) 圖之 $(0, 3)$ ，與 $(4, 0)$ 兩點，如直線經過原點則須另尋最便利之點以接直線。

同性方程 (Simultaneous equations) 若畫兩同性方程的圖解，必是兩條直線如非平行必有交點，其交點的坐標之值即等於解答兩個方程的 x 與 y 之值而能同時核對兩個方程者。

例題一 畫以下每一方程之圖解，並解答如同性的方程。

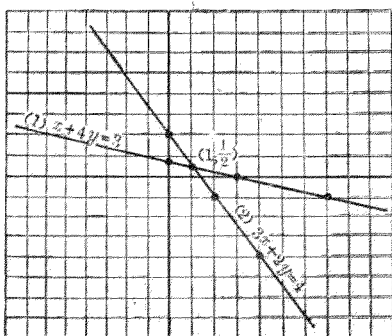
$$(1) x + 4y = 3, \quad (2) 3x + 2y = 4.$$

第(1)方程用答數對， $(0, \frac{3}{4})$ ， $(1, \frac{1}{2})$ ， $(3, 0)$ ， $(7, -1)$ 。

第(2)方程用答數對， $(0, 2)$ ， $(2, -1)$ ， $(4, -4)$ ， $(-2, 5)$ 。

畫得之圖解如 (83) 圖，解答如同性的方程由兩直線之交點得

$$x = 1, y = \frac{1}{2}。$$



(83)

任何等級之方程的圖解 凡有兩變數之方程如 $y = \frac{c}{x}, y = ax^2 + bx + c$, 及 $x^2 + y^2 = a^2$ 等, 圖解之畫法, 是先給 x 以相當數值而求相對的 y 之數值, 畫每一對之數值點, 再用平滑的曲線連接。此等方程的圖解皆成圓錐截面的曲線。

習 題 九 十 四

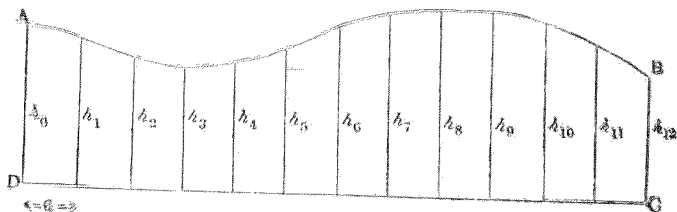
圖解以下之各方程並解答之：

1. $x + y = 5$, 及 $3x + 2y = 12$ 。
2. $3x + 5y = 11$, 與 $4x + 7y = 15$ 。
3. $3x + 5y = 19$, 與 $2x - y = 4$ 。
4. $2x + 3y = 4$, 與 $4x - 6y = 8$ 。
5. $6x + y = 6$, 與 $4x + 3y = 11$ 。

6. $5x+4y=6$ 與 $7x+6y=10$ 。
7. 畫方程 $xy=1$ 之圖解，先給 x 之值由 $\pm\frac{1}{16}$ 至 ± 16 而求 y 之相對之值，用此等數值對畫點並接以平滑的曲線，在此曲線可讀任何數之倒數，所須注意者若 x 是負數， y 亦是負數。
8. 畫方程 $y=x^2$ 之圖解，用此圖解可尋數字之平方及方根。
9. 畫方程 $y=x^3$ 之圖解，在此圖解上可讀數字之立方及立方根。
10. 用公式 $A=\pi r^2$ ，畫圖解以 r 為橫坐標，並以 A 為縱坐標，在此圖解，可讀定值 r 的圓面積。

~~~~~

**辛博森氏之定律 (Simpson's Rule)** 凡包含在直線與曲線間的地位之面積可用辛博森氏之定律求出最近似之值，其定律之述說如下。



(S4)

如 (S4) 圖，曲線  $AB$  與直線  $CD$  所包含之地位是  $ABCD$ ，將直線  $CD$  之長度分為等分，設如為 12 等分，畫縱坐標  $h_0, h_1,$

$h_2$ , 至  $h_{12}$ , 則求  $ABCD$  之面積用以下之公式, 命  $a$  代表每等分之長,  $A$  代表  $ABCD$  之面積,  $h$  = 縱坐標之高。

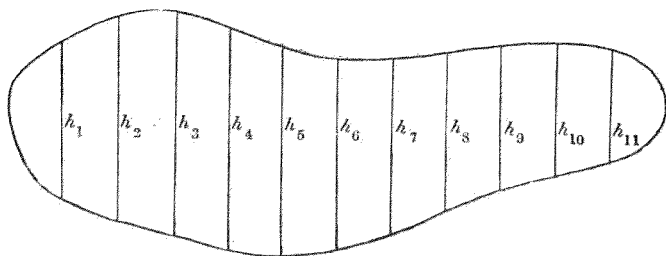
$$A = \frac{a}{3}(h_0 + 4h_1 + 2h_2 + 4h_3 + 2h_4 + 4h_5 + 2h_6 + 4h_7 + 2h_8 + 4h_9 + 2h_{10} + 4h_{11} + h_{12})$$

所需注意者縱坐標之系數除第一及最末的坐標外是更換的 2 與 4, 直線  $CD$  所分的等分愈多則答數愈準確。

以上之公式可寫作以下之文字。

**【定律】** 將  $CD$  分為許多等分, 從分點上畫縱坐標並量每縱坐標之高, 加第一個縱坐標之高與最末一個縱坐標之高, 再加兩倍的成單數縱坐標如  $(h_2, h_4, h_6 \text{ 等})$  之和, 再加四倍的成雙數縱坐標如  $(h_1, h_3, h_5 \text{ 等})$  之和, 再以所得之結果乘三分之一的兩個貼鄰的縱坐標間之距, 答數是曲線與直線所包含的地位之面積。

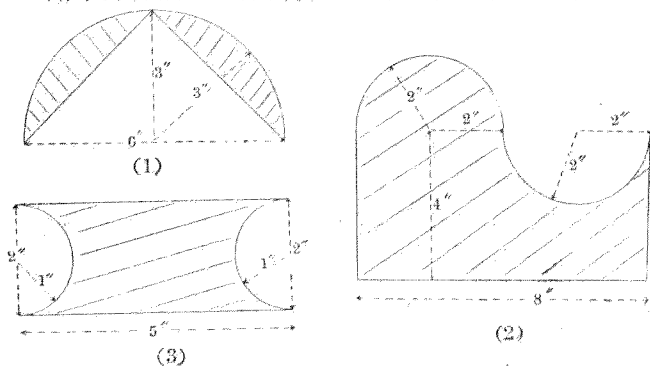
**包入曲線內之面積** 第 (85) 圖之面積可用以上之定律尋求, 但  $h_0$  與  $h_{12}$ , 即第一個與末一個縱坐標是等於零。



(85)

## 習 題 九 十 五

1. 畫一 4 吋直徑之圓將直徑分爲十六等分畫縱坐標用辛博森氏之定律計算其面積，再用公式  $A = \pi r^2$  核對。
2. 畫一長方形高 3 吋，長 6 吋，在其中間畫一曲線將長方分作兩個曲線與直線包含之面積，用辛博森氏之定律計算其面積，比長方之面積核對。
3. 畫一圓截片高  $1\frac{1}{2}$  吋，弦長 4 吋，先用辛博森氏之定律計算，再用公式算出核對。
4. 畫一平方邊長 3 吋，畫一曲線在方中將平方分作兩個曲線與直線包含之面積，用辛博森氏之定律算面積與平方之面積核對。
5. 畫一 6 吋直徑之半圓用辛博森氏之定律計算面積，再用公式核對。
6. 用辛博森氏之定律計算下圖之面積並用公式核對之。





## 第四編 對數與三角學

### 第三十四章 對 數 (Logarithms)

**用處** 對數是用以簡化數學中之乘法，除法，方乘及方根之工作，算學之乘法在對數中成爲加法，除法成爲減法，方乘成爲簡單的乘法，方根則成爲簡單的除法。

許多用尋常算術不能計算之問題用對數極易算出，例如用對數之幫助平方根比尋常算法容易的多，並且其他方根亦同樣的容易算出，若  $2 \cdot 34^{1\frac{1}{6}}$  之值用對數極易算出。

**指數** 對於便利起見以前所述的指數之定義及定律當再重復述說於此。

**【定義】** (1)  $a^n = a \cdot a \cdot a \cdots$  至  $n$  因數， $n$  是一整數。

$$(2) a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$(3) a^0 = 1$$

$$(4) a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

**【定律】** (1)  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$$(2) a^n \div a^m = a^{n-m}$$

$$(3) (a \cdot b \cdot c \cdots)^n = a^n b^n c^n \cdots$$

$$(4) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$(5) (a^n)^m = a^{nm}$$

**【定義】** 一數之對數是一指數由此指數影響底數而產生該一數。規定一底數的各正數之對數是謂對數組，並且底數是謂組之底數。任何底數皆可用於一對數組中，但底數 10 是普通用的，因其成爲最便於工作的對數組。

對數是一蘇格蘭人的約翰奈必歐(John Napier)在西歷 1614 發明，彼時奈必歐用 2.71828 作底數，此種底數在數中仍然應用。

後經亨利白立格教授(Professor Henry Briggs)改用 10 爲底數使在實用上更爲方便。

對數是列入世界上最大發明中，因其能減省工作時間並幫助計算難題。

**記法** 若以 2 爲底數，在指數文字中可寫作， $2^4 = 16$ 。同時可說 16 之對數按底數 2 是 4。此種說法可以改簡而寫作  $\log_2 16 = 4$ 。

同樣可將以下各數以指數之文字並以對數之文字解之。

| 指數之文字         | 對數之文字            |
|---------------|------------------|
| $2^5 = 32$    | $\log_2 32 = 5$  |
| $3^4 = 81$    | $\log_3 81 = 4$  |
| $5^4 = 625$   | $\log_5 625 = 4$ |
| $8^3 = 512$   | $\log_8 512 = 3$ |
| $4^{0.5} = 2$ | $\log_4 2 = 0.5$ |

$$8^{\frac{2}{3}} = 4$$

$$\log_8 4 = \frac{2}{3}$$

$$64^{\frac{1}{3}} = 4$$

$$\log_6 4 = \frac{1}{3}$$

$$10^3 = 1000$$

$$\log_{10} 1000 = 3$$

$$10^4 = 10000$$

$$\log_{10} 10000 = 4$$

### 習 題 九 十 六

將以下各數寫作對數之文字：

1.  $2^6 = 64$ .

2.  $5^3 = 125$ .

3.  $7^3 = 343$ .

4.  $16^{0.5} = 4$ .

5.  $10^4 = 10000$ .

6.  $125^{\frac{1}{3}} = 5$ .

7.  $32^{0.4} = 4$ .

8.  $10^{1.3979} = 25$ .

9.  $10^{2.6465} = 352$ .

將以下各數寫作指數之文字：

1.  $\log_2 256 = 8$ .

2.  $\log_6 216 = 3$ .

3.  $\log_{10} 2 = 0.25$ .

4.  $\log_{10} 643 = 2.8082$ .

5.  $\log_{10} 429 = 2.6325$ .

6.  $\log_{10} 999 = 2.9996$ .

求以下各數之對數：

1.  $\log_7 49$ .

2.  $\log_3 243$ .

3.  $\log_5 3125$ .

4.  $\log_9 729$ .

5.  $\log_4 256$ .

6.  $\log_{10} 100000$ .

7.  $\log_8 2$ .

8.  $\log_{16} 64$ .

9.  $\log_{10} 0.01$ .

求以下各數  $x$  之值：

- |                                  |                                   |                                  |
|----------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| 1. $\log_3 x = 4.$               | 2. $\log_{10} x = 6.$             | 3. $\log_{16} x = \frac{3}{4}.$  |
| 4. $\log_{10} x = 0.$            | 5. $\log_{10} x = -2.$            | 6. $\log_3 x = -3.$              |
| 7. $\log_{10} x = -3.$           | 8. $\log_3 x = \frac{4}{3}.$      | 9. $\log_{25} x = \frac{3}{2}.$  |
| 10. $\log_{16} x = \frac{3}{2}.$ | 11. $\log_{125} x = \frac{2}{3}.$ | 12. $\log_{49} x = \frac{3}{2}.$ |

求以下各數  $x$  之值：

- |                               |                                |                                 |
|-------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| 1. $\log_x 100 = 2.$          | 2. $\log_x 81 = 4.$            | 3. $\log_x 512 = 3.$            |
| 4. $\log_x 1024 = 10.$        | 5. $\log_x 4 = 0.5.$           | 6. $\log_x 4 = 0.25.$           |
| 7. $\log_x 16 = \frac{4}{5}.$ | 8. $\log_x 17 = 0.5.$          | 9. $\log_x 27 = 0.75.$          |
| 10. $\log_x 2 = 0.125.$       | 11. $\log_x 49 = \frac{2}{3}.$ | 12. $\log_x 100 = \frac{2}{3}.$ |

用指數來解釋推算 最要者為明瞭對數之意義，在此段中將給以例題解釋指數或對數在計算乘法，除法，方乘及求方根中之用處，此種推算用下表之幫助以 2 作底數，此項工作用指數之文字但極易改作對數之文字。

|                         |           |                 |
|-------------------------|-----------|-----------------|
| $2^{-6} = \frac{1}{64}$ | $2^1 = 2$ | $2^8 = 256$     |
| $2^{-5} = \frac{1}{32}$ | $2^2 = 4$ | $2^9 = 512$     |
| $2^{-4} = \frac{1}{16}$ | $2^3 = 8$ | $2^{10} = 1024$ |

$$2^{-3} = \frac{1}{8} \qquad 2^4 = 16 \qquad 2^{11} = 2048$$

$$2^{-2} = \frac{1}{4} \qquad 2^5 = 32 \qquad 2^{12} = 4096$$

$$2^{-1} = \frac{1}{2} \qquad 2^6 = 64 \qquad 2^{13} = 8192$$

$$2^0 = 1 \qquad 2^7 = 128 \qquad 2^{14} = 16384$$

**【乘法】** 512 乘 32. 查上表  $512=2^9$ ,  $32=2^5$

$$\therefore 512 \times 32 = 2^9 \times 2^5 = 2^{14}$$

查上表  $2^{14} = 16384$ .

$$\therefore 512 \times 32 = 16384.$$

**【除法】** 512 除 4096 查上表  $512=2^9$ ,  $4096=2^{12}$

$$\therefore 512 \div 4096 = 2^9 \div 2^{12} = 2^{-3}$$

查上表  $2^{-3} = \frac{1}{8}$

$$\therefore 512 \div 4096 = \frac{1}{8}$$

**【方乘】** 求  $16^3$  之值, 查上表  $16=2^4$

$$\therefore 16^3 = (2^4)^3 = 2^{12}$$

查上表  $2^{12} = 4096$

$$\therefore 16^3 = 4096$$

**【求方根】** 求  $\sqrt[4]{4096}$ , 查上表  $4096=2^{12}$

$$\therefore \sqrt[4]{4096} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^3$$

查上表  $2^3 = 8$

$$\therefore \sqrt[3]{4096} = 8$$

### 習 題 九 十 七

用上表之幫助求以下各數之值：

- |                                                |                                                                           |                                                 |
|------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| 1. $256 \times 16.$                            | 2. $256 \times 64.$                                                       | 3. $2048 \times 8.$                             |
| 4. $128 \times 128.$                           | 5. $32 \times 256.$                                                       | 6. $\frac{1}{64} \times 16384.$                 |
| 7. $8192 \div 1024.$                           | 8. $2048 \div 256.$                                                       | 9. $16 \div 512.$                               |
| 10. $8 \div 512.$                              | 11. $16^3.$                                                               | 12. $64^3.$                                     |
| 13. $\sqrt{16384}.$                            | 14. $\sqrt[6]{4096}.$                                                     | 15. $\sqrt[3]{16384}.$                          |
| 16. $\frac{32 \times 2048}{512}.$              | 17. $\frac{16384 \times 512}{2048}.$                                      | 18. $\frac{32 \times 64}{512 \times 8}.$        |
| 19. $(4096)^{\frac{2}{3}}.$                    | 20. $(32 \times 128)^{\frac{3}{4}}.$                                      | 21. $(8192 \times 32)^{\frac{2}{3}}.$           |
| 22. $\frac{1024 \times 64}{512 \times 16384}.$ | 23. $\left(\frac{512 \times 256}{1024 \times 8192}\right)^{\frac{1}{4}}.$ | 24. $\sqrt[3]{\frac{256 \times 1024}{4096^2}}.$ |

任何數之對數 從上節之問題顯示各數皆是 2 之整數乘幂，然有許多數值不能以 2 之整數乘幂解之，任何數為底數皆有不能以該底數之整數乘幂解釋之數值，若以 3 為底數則整數乘幂之數有 3, 9, 27, 81, 243 等，除此之外則無他數。

所以用一規定的底數寫整數的底數祇有一小部份，此即對數之數目按任何底數常非整數，所以 95 之對數以 3 為底數是 4 加

一分數，因  $95$  是在  $3^4$  與  $3^5$  之間，此種分數是何數則不容易決定。

以  $10$  為底數之對數 因  $10$  是普通底數故寫對數時無須添註，以下是以  $10$  為底數之對數：

$$\begin{array}{ll} \log 100000 = 5. & \log 1 = 0. \\ \log 10000 = 4. & \log 0.1 = -1. \\ \log 1000 = 3. & \log 0.01 = -2. \\ \log 100 = 2. & \log 0.001 = -3. \\ \log 10 = 1. & \log 0.0001 = -4. \end{array}$$

在  $1000$  與  $10000$  間的任何數之底數是在  $3$  與  $4$  之間，即  $3$  加一分數，在  $100$  與  $1000$  間，其對數是  $2$  加一分數，在  $0.01$  與  $0.1$  間之數其底數是  $-2$  加一分數，或  $-1$  再減一分數，因欲令對數之分數部份恆為正數，故取對數僅整數部份可為負數。

大概的對數包含兩部份，一整數加一分數。

整數部稱之為性情 (Characteristic)。

分數部稱之為配數 (Mantissa)。

將正數的配數依次列表謂之對數表。

$3467$  之對數包括性情  $3$  加一配數，因  $3467$  是在  $1000$  與  $10000$  之間。 $59436$  之對數是  $4$  加一分數，因  $59436$  是在  $10000$  與  $100000$  之間。 $0.0236$  之對數是  $-2$  加一分數，因  $0.0236$  是在  $0.01$  與  $0.1$  之間。此可顯明凡數以  $10$  乘則對數之性情增加  $1$ 。

以 10 爲底數之最大利益是對數之性情可以一望而知，故祇需將配數列表而已。

**決定對數的性情之定律** 從以上所述並閱所列之表則以下之定律是極顯著。

1. 凡整數的對數性情是比整數的數字位數少一，且是正數。
2. 凡小對的對數性情是比小數之數字前的 0 數多一，且是負數。
3. 若一數有整數並有小數祇關整數部份按定律(1)決定性情。

故以下各數之性情是 326 是 2, 37265 是 4, 0.046 是 -2, 0.000046 是 -5, 2.36 是 0, 276.36 是 2。

### 習 題 九 十 八

按底數 10，寫出以下各數之性情。

846, 44.36, 173.94, 4.7654, 3956, 43968, 39.267,  
3333.3, 2.325, 0.0123, 0.00492, 0.4689, 87654,  
9.3264, 0.0003967, 0.039643。

**配數 (Mantissa)** 配數之決定比性情之決定較爲困難，故配數是用對數表尋找。

對數表是經過許多工作而做成，有四位對數表與十位對數表等，對數表之位數愈多則計算之結果愈準確，普通用者是四位或六位對數表。



配對僅依靠數字而並不靠小數點，茲以下列之數以解釋之：

設如所給  $\log 867 = 2.9380$ .

$$(1) \text{ 其意義是 } 10^{2.9380} = 867.$$

$$(2) \text{ 因 } 10^2 = 100.$$

$$(3) \text{ 以(2)除(1) } 10^{0.9380} = 8.67$$

$$(4) \quad \therefore \log 8.67 = 0.9380$$

所以 8.67 之配數與 867 之配數相似。

此極顯明以上第(1)項兩邊之數乘或除以 10 之任何整數的乘幂則配數並不更變，是則一數之小數點可以任意挪動而不改變配數。

此亦解釋挪動一數的小數點之地位則改變對數的性情之值。

**對數表** 查看後列之四位對數表，注意第一行之頂上寫明是數字，其他行頂上由 0, 1, 2, 3, … 至 9，任何數包含三位者有其前二位之數字在表上之第一項中，而其第三位數字在其他行中，例如取數字 456，則 45 是尋第一行中上註有數字者，6 在行頂有 6 字者。

表中第一行後之各行中皆有四位數字，此種數目皆是小數即是對數之配數，由第一行與他行之數字合成。

兩個連續的配數之較謂之表列差數。

**求一數之配數** (1) 數中包含有三位數字。

例如 求 347 之配數。

在表上之第一行先尋前二位數字 34，由此向右見行端有 7 字

者則配數字是 0.5403.

則 3.47, 3470, 或任何數包括數字 347 者, 其配數皆是 0.5403.

(2) 數中包含有一位或二位數字, 數字是尋第一行頂端註有數字者, 由此向右至行端有 0 字者。

故 13 之配數是 0.1139, 而 4 之對數是 0.6021 與 40 之配數同。

(3) 數中包含四位或較多位數字。

例如 求 7586 之配數。

因 7586 是在 7580 與 7590 之間。

$$7580 \text{ 之配數} = 0.8797$$

$$7590 \text{ 之配數} = 0.8802$$

配數間之相差是 0.0005 則係列表差數, 既數字增 10, 則配數增加 0.0005, 數字增加 6, 則配數增加  $0.0005 \times 0.6 = 0.0003$ ,

故 7586 之配數是  $0.8797 + 0.0003 = 0.8800$ .

以上之決定配數法謂之內推法僅近似的真確。

例如 求 43286 之配數。

$$43200 \text{ 之配數} = 0.6355,$$

$$43300 \text{ 之配數} = 0.6365,$$

數字相差 100 而配數列表數相差 0.0010, 則增加數字 86, 配數增加  $0.0010 \times 0.86 = 0.0009$  至最近的四位小數。

則 43286 之配數  $= 0.6355 + 0.0009 = 0.6364$ .

求配數之定律如下：

1. 凡一數包含三個數字者，先在對數表上求第一行中數內之前兩個數字然後向右至與第三個數字相符之行中讀配數。
2. 凡一數包含一個或兩個數字，求第一行中之此數向右至 0 字行讀配數。
3. 凡一數包含多於三個數字，按定律(1)先尋前三數字之配數再加列表相差與其餘數字之積以小數計。

**解釋** 243, 2.43, 0.0243, 或任何數包含數字 243 者用定律(1)尋配數是 0.3856.

250, 25, 0.025 或任何數包含數字 25 者用定律(2)尋配數是 0.3979.

求 2364 之配數用定律(3)是 0.3736.

**求法** 2360 與 2370 之配數的列表相差 0.0018.

2360 之配數是 0.3729. 則 2364 之配數 = 0.3729  
 $+ 0.0018 \times 0.4 = 0.3729 + 0.0007 = 0.3736.$

**求一數之對數** 求一數之對數最好先決定性情後尋配數。

**例題一** 求 236 之對數。

按決定性情之定律(1) 則對數之性情是 2.

按尋配數之定律(1) 則得 0.3729.

$\therefore \log 236 = 2.3729.$

**例題二** 求 7326 之對數。

按決定性情之定律(1) 則對數之性情是 3.

按尋配數之定律(3) 則得 0.8649.

$$\therefore \log 7326 = 3.8649.$$

例題三 求 0.00037 之對數。

按決定性情之定律(2) 則對數之性情是 -4

按尋配數之定律(2) 則得 0.5682.

$$\therefore \log 0.00037 = -4 + 0.5682 = \overline{4}.5682.$$

性情若是負數則減號不能置在數前，因配數恆為正數，故負數性情之減號須加在數字而不使與配數混亂，尚有另一寫負數性情是將性情加 10，然後在配數之後減 10。

故  $\log 0.00037$  可寫作  $\overline{4}.5682$  或  $6.5682 - 10$ .

## 習 題 九 十 九

1. 誦讀以下之性情與配數的意義：

$$\log 4580 = 3.6609 \text{ 意即 } 4580 = 10^{3.6609}$$

$$\log 458 = 2.6609 \text{ 意即 } 458 = 10^{2.6609}$$

$$\log 45.8 = 1.6609 \text{ 意即 } 45.8 = 10^{1.6609}$$

$$\log 4.58 = 0.6609 \text{ 意即 } 4.58 = 10^{0.6609}$$

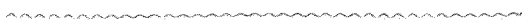
$$\log 0.458 = \overline{1}.6609 \text{ 意即 } 0.458 = 10^{-1+0.6609}$$

$$\log 0.0458 = \overline{2}.6609 \text{ 意即 } 0.0458 = 10^{-2+0.6609}$$

$$\log 0.00458 = \overline{3}.6609 \text{ 意即 } 0.00458 = 10^{-3+0.6609}$$

2. 用對數表證明下數：

- |                                        |                                         |
|----------------------------------------|-----------------------------------------|
| (1) $\log 10 = 1.0000$                 | (2) $\log 100 = 2.0000$                 |
| (3) $\log 110 = 2.0414$                | (4) $\log 2 = 0.3010$                   |
| (5) $\log 20 = 1.3010$                 | (6) $\log 200 = 2.3010$                 |
| (7) $\log 0.2 = \overline{1}.3010$     | (8) $\log 542 = 2.7340$                 |
| (9) $\log 345 = 2.5378$                | (10) $\log 5.07 = 0.7050$               |
| (11) $\log 78.5 = 1.8949$              | (12) $\log 0.981 = \overline{1}.9917$   |
| (13) $\log 1054 = 3.0228$              | (14) $\log 1272 = 3.1045$               |
| (15) $\log 0.0165 = \overline{2}.2175$ | (16) $\log 0.1906 = \overline{1}.2801$  |
| (17) $\log 21.09 = 1.3241$             | (18) $\log 0.09095 = \overline{2}.9588$ |
| (19) $\log 3.060 = 0.4857$             | (20) $\log 4.411 = 0.6455$              |
| (21) $\log 0.7854 = \overline{1}.8951$ | (22) $\log 0.09885 = \overline{2}.9950$ |



**求與對數相符之數目** 幾乎在每題中包括對數之計算者，不僅須尋對數，但須用相反的工作法以求與對數相符之數目。

既小數點並不影響配數，則從配數上僅能尋求數目之數字，小數點之地位須從性情之定律以決定之。

(1) 當對數之配數恰準載列表上，如求對數是  $2.8344$  之數目。

在對數表上求配數  $0.8344$ ，由此配數向左至第一行數字行讀前二數字是 68，在求得  $0.8344$  配數行中讀行端之數字是 3，則數目所包含之三數字依次而寫是 683，但尚未知小數點之地位仍須尋思性情。

既性情是 2，則小數點前必有三位數字，所以有對數  $2.8344$

之數目是 683。

其意即  $10^{2.8344} = 683$ . 注意性情之改變是改變小數的地位, 所以與對數  $4.8344$  相符的數目是 68300, 而與對數  $2.8344$  相符的數目是 0.0683.

(2) 當規定的對數之配數不恰準載列表上, 如求對數  $3.4689$  相符的數目。

在表上尋大於  $0.4689$  之配數是  $0.4698$ , 並小於  $0.4689$  之配數是  $0.4683$ , 與對數  $3.4698$  相符的數目是 2950, 而與  $3.4683$  相符的數目是 2940, 此即配數增加  $0.0015$ , 則數目增加是 10, 所給之配數  $0.4689$  比  $0.4683$  大  $0.0006$ , 所需相差於 2940 之數目, 是  $(0.0006 \times 10) \div 0.0015 = 4$ , 故與對數  $3.4689$  相符之數目是 2944。

求與對數相符的數目有如以下之定律:

(1) 若所給對數之配數是恰準載在對數表上, 則由此配數向左至第一行所得數字即是數目之前二數字, 而數目之第三數字是該配數所在的行頂之數字。

(2) 若所給對數之配數不恰載表上, 尋與所給配數相近的配數並尋與其相符的數目, 其相差數再以内推法決算

例題一 求對數  $2.8414$  相符的數目, 配數  $0.8414$  是表中 69 之右面 4 字行中, 則數字是 694, 既性情是 2, 則與對數  $2.8414$  相符之數目是 694。

例題二 求與對數  $1.7624$  相符的數目, 與配數  $0.7624$  最

相近的是 0.7619 即為 578 之配數，列表差數是 0.0008，而配數相差是 0.0005， $0.0005 \div 0.0008$ ，幾等於 0.6，則 1.7624 是  $\log 57.86$ 。

### 習 題 一 百

求  $x$  之值或證實下數：

1.  $0.3010 = \log x$ .
2.  $1.6021 = \log x$ .
3.  $2.9031 = \log x$ .
4.  $1.6669 = \log 46.44$ .
5.  $2.7971 = \log 626.7$ .
6.  $3.9545 = \log 9006$ .
7.  $0.8794 = \log 7.575$ .
8.  $3.9371 = \log x$ .
9.  $0.8294 = \log 5.752$ .
10.  $1.9039 = \log 80.15$ .
11.  $9.3685 - 10 = \log x$ .
12.  $8.9932 - 10 = \log 0.09845$ .
13.  $\overline{2.9535} = \log x$ .
14.  $7.7168 - 10 = \log 0.00521$ .
15.  $6.7016 - 10 = \log 0.000503$ .
16.  $7.8654 = \log x$ .
17.  $\overline{3.4792} = \log 0.003014$ .
18.  $\overline{4.9231} = \log 0.0008378$ .
19.  $\overline{4.2975} = \log 0.0001984$ .
20.  $4.2975 = \log x$ .

用對數求兩個或較多的因數之積 定律 求各因數的對數之和，此項對數之和的相符數目即等於因數之積。

例如 求  $3.76 \times 0.89 \times 7.628$  之積數。

工作法  $\log 3.76 = 0.5752$

$$\log 0.89 = \overline{1}.9494$$

$$\log 7.628 = 0.8824$$

$$\text{積數之 } \log = 1.4070$$

$$\therefore \text{積數} = 25.53$$

**用對數求兩數相除之答數 定律** 被除數之對數減去除數之

對數結果是答數之對數，求此對數相符數目即是答數。

例如 求  $38.76 \div 7.923$  之答數。

$$\text{工作法 } \log 38.76 = 1.5884$$

$$\log 7.923 = 0.8989$$

$$\text{答數之對數} = 0.6895$$

$$\therefore \text{答數} = 4.892$$

例題一 求  $\frac{7.246 \times 0.8964 \times 5.463}{4.27 \times 0.3987 \times 27.89}$  之值。

### 工 作 法

$$\log 7.246 = 0.8601 \qquad \log 4.27 = 0.6304$$

$$\log 0.8964 = \overline{1}.9525 \qquad \log 0.3987 = \overline{1}.6007$$

$$\log 5.463 = 0.7374 \qquad \log 27.89 = 1.4454$$

$$\text{分子之 } \log = 1.5500 \qquad \text{分母之 } \log = 1.6765$$

$$\text{分母之 } \log = 1.6765$$

$$\text{答數之 } \log = \overline{1}.8735$$

$$\therefore \text{答數} = 0.7473.$$

### 習 題 一 百 一



## 1. 用對數求以下之積：

(1)  $226 \times 85.$

(2)  $7.25 \times 240.$

(3)  $3272 \times 75.$

(4)  $0.892 \times 805.$

(5)  $1.414 \times 2.829.$

(6)  $42.37 \times 0.235.$

(7)  $2912 \times 0.7281.$

(8)  $289 \times 0.7854.$

(9)  $7.62 \times 3.67.$

(10)  $7.09 \times 3.99.$

(11)  $10.00124 \times 89.5.$

(12)  $4.768 \times 9.872.$

## 2. 用對數求以下之答數：

(1)  $3025 \div 55.$

(2)  $0.2601 \div 0.68.$

(3)  $3950 \div 0.250.$

(4)  $10 \div 3.14.$

(5)  $0.6911 \div 0.7854.$

(6)  $1 \div 762.$

(7)  $6786 \div 4236.$

(8)  $200 \div 0.5236.$

(9)  $300 \div 17.32.$

(10.)  $0.220 \div 0.3183.$

3. 求  $3.246 \times 98.768 \times 0.4376$  之積。4. 求  $0.00389 \times 9.876 \times 0.00468$  之積。5. 求  $0.38765 \times 7.498 \times 4.3792$  之積。

用對數求以下各數之值：

6.  $\frac{110 \times 3.1 \times 0.650}{33 \times 0.7854 \times 1.7}.$

7.  $\frac{6000 \times 5 \times 29}{0.7854 \times 25000 \times 81.7}$

8.  $\frac{3.516 \times 485 \times 65}{3.33 \times 17 \times 18 \times 73}.$

9.  $\frac{15 \times 0.37 \times 26.16}{11 \times 8 \times 18 \times 6.67}$

10.  $\frac{78 \times 52 \times 1605}{338 \times 767 \times 431}.$

11.  $\frac{0.5 \times 3.15 \times 428}{0.317 \times 0.973 \times 43.7}$

**用對數求一數之乘冪 定律** 用乘冪之指數乘此數之對數，與對數相符的數目即是所需之答數。

例題一 求  $(2.378)^6$  之值。

**工作法**  $\log 2.378 = 0.3762$

$$6 \times \log 2.378 = 2.2572 = \text{乘冪之對數。}$$

$$\therefore (2.378)^6 = 180.8.$$

例題二 求  $(9.876)^{\frac{3}{4}}$  之值。

**工作法**  $\log 9.876 = 0.9946$

$$\frac{3}{4} \log 9.876 = 0.7460 = \log (9.876)^{\frac{3}{4}}$$

$$\therefore (9.876)^{\frac{3}{4}} = 5.571.$$

**用對數求一數之方根 定律** 用方根之指數除此數之對數，與此對數相符之數目即是所需之方根。

例題一 求  $\sqrt[5]{27.658}$  之值。

**工作法**  $\log 27.658 = 1.4418$

$$\frac{1}{5} \log 27.658 = 0.2884 = \log \sqrt[5]{27.658}$$

$$\therefore \sqrt[5]{27.658} = 1.943$$

例題二 求  $\sqrt[6]{0.008673}$  之值。

**工作法**  $\log 0.008673 = 7.9382 - 10$

$$\begin{aligned} \log \sqrt[6]{0.008673} &= \frac{1}{6} (7.9382 - 10) \\ &= 0.6564 - 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt[2]{0.008673} = 0.4533.$$

【注意】在此例題中，因欲除有負數性情的對數，並非除數之倍數，故必須或加或減使負數性情成爲除數之倍數方可。

用對數計算所得之答數非恰準的，但相差甚微，其準恰之程度全賴所用之對數表，對數之位數愈多則用以計算之答數愈近恰準之數。

## 習 題 一 百 二

用對數求下值：

1.  $(0.543)^3$

2.  $(4.07)^3$

3.  $(1.738)^3$

4.  $(1.02)^6$

5.  $\left(\frac{675}{4121}\right)^3$

6.  $\left(\frac{1}{243}\right)^4$

7.  $(0.1181)^{\frac{1}{2}}$

8.  $(1381)^{\frac{1}{3}}$

9.  $(1024)^{\frac{7}{15}}$

10.  $(1.4641)^{\frac{1}{4}}$

11.  $(0.00032)^{\frac{1}{5}}$

12.  $\sqrt[3]{2}$

13.  $\sqrt[4]{4}$

14.  $\sqrt[3]{3}$

15.  $\sqrt[5]{2}$

16.  $\sqrt[5]{0.032}$

17.  $(4.56)^{4.66}$

18.  $(7.23)^{7.23}$

19.  $\frac{100^2}{48 \times 64 \times 11}$

20.  $\frac{52^2 \times 300}{12 \times 0.31225 \times 400000}$

21.  $\sqrt{\frac{400}{55 \times 3.1416}}$

22.  $50 \times \frac{2^{1.5}}{8^{1.63}}$

23.  $\sqrt{\frac{0.434 \times 96^4}{64 \times 1500}}$

24.  $\sqrt{\frac{3500}{(1.06)^6}}$

25.  $\frac{3.8961 \times 0.6945 \times 0.01382}{4694 \times 0.00457}$

26.  $\sqrt[4]{0.0009657} \div \sqrt[3]{0.0044784}$

27.  $\left(\frac{7.61 \times 0.0593}{1.307}\right)^{\frac{3}{4}}$

28.  $\sqrt[8]{5106.5 \times 0.00003109}$

29.  $\left(\frac{4400}{69.37}\right)^{\frac{2}{5}}$

30.  $(837.5 \times 0.0094325)^{\frac{2}{7}}$

31.  $(0.01)^{\frac{3}{2}} \div \sqrt[3]{7}$

32.  $\frac{0.0005616 \times \sqrt[7]{424.65}}{(6.73)^4 \times (0.03194)^{\frac{5}{6}}}$

33.  $\frac{\sqrt{3929} \times \sqrt[4]{6548}}{\sqrt[6]{721.83}}$

34.  $\frac{\sqrt[5]{0.05287}}{\sqrt[3]{0.374} \times \sqrt[9]{0.078359}}$

35. 由公式  $S = \frac{E - IR}{0.220}$  求  $R$ , 若  $S = 500, E = 220, I = 12$ .

36.  $H = \frac{P L A N}{33000}$  若  $P = 76.5, L = 2\frac{1}{4}, A = 231.8,$

$N = 116,$  求  $H$ .

37.  $W = 0.0033 \times 10^{-7}n$ . 求  $W$ , 若  $n = 75,000$ .

38. 由公式  $E = LVB10^{-8}$  求  $E$ , 若  $L = 60, V = 15, B = 8000$ .

39.  $P = \sqrt{\frac{ABU}{1.4 \left(B + \frac{A^2}{C^2}\right)}}$  求  $P$ , 若  $A = 11, B = 1.71, C = 1.3$

40.  $x = \frac{8\{1000 + (539.7 - 459)\}}{1000 - (539.7 - 459)}$ , 求  $x$ .

41. 求一鋼軸之直徑每分鐘轉動 100 公轉，可以輸送 90 馬力，安全因數是 8。

用公式  $d = \sqrt[3]{\frac{90}{100 \times \frac{50000}{8}}} \times K$  求  $d$  值， $K=68.5$ 。

42. 由公式  $M = \frac{Wgl^3}{4bd^3B}$  求  $M$ 。若  $W=75$ ， $g=980$ ， $l=50$ ， $b=0.98178$ ， $d=0.5680$ ， $B=0.01093$ 。

43. 由公式  $n = \frac{360Lmg l}{\pi^2 \theta r^3}$  求  $n$  值，若  $L=109.7$ ， $m=100$ ， $g=980$ ， $l=28$ ， $\theta=0.857$ ， $r=0.477$ 。

44. 用(43)題之公式求  $n$  值，若  $L=69.6$ ， $m=10$ ， $g=980$ ， $l=28$ ， $\theta=1.1955$ ， $r=0.317$ 。

45. 若  $m = ar^{-1.16}$  求  $r$  值， $m=2.263$ ， $a=0.4086$ 。

46.  $P = P_0 \left( \frac{2}{r+1} \right)^{\frac{r}{r-1}}$  求  $\frac{P}{P_0}$  之比率，若  $r=1.41$ 。

47.  $Q = \frac{2}{3} c \cdot b \cdot h^{\frac{3}{2}} \sqrt{2g}$  求  $Q$ ，若  $h = \frac{5}{6}$ ， $b=2.5$ ， $c=0.589$ ， $g=32.2$ 。

48. 用(47)題之公式求  $Q$ ，若  $h=1\frac{1}{3}$ ， $b=2$ ， $c=0.586$ ， $g=32.2$ 。

49.  $Q = K h^{\frac{5}{2}}$ 。若  $Q=7.26$ ，則  $h=1.5$ ；求  $h$ ，若  $Q=5.68$ 。

50. 以下之公式決定管子可容多少鐵線， $N$  代鐵線根數， $D$

代管子之直徑,  $d$  代鐵線之直徑,  $D = d(0.94 + \sqrt{\frac{N-3.7}{0.907}})$

51. 用以上之公式求鐵管之直徑可容 100 根  $\frac{1}{8}$  吋直徑之鐵線。
52. 本金  $P$  加複利  $r\%$  經過  $t$  年之總額  $A$ , 用以下之公式  $A = P(1+r)^t$  求總額, 若  $P = 236$  元,  $r = 3\%$ ,  $t = 14$  年。
53. 本金 3764 元, 複利  $4\frac{1}{2}\%$ , 在 21 年後本利合多少元?
54. 某甲向銀行借款 1000 元, 年息  $6\%$ , 按 10 年拔還, 每年應攤還本利用以下之公式  $p = \frac{Pr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$ ,  $p =$  每年攤還之款,  $P =$  所借之本金,  $r =$  年息,  $n =$  年限, 求每年應攤還之款。
55. 借款 3000 元, 年息  $6\%$ , 分 60 月攤還, 每月應攤還多少? 月息作  $\frac{1}{2}\%$ 。
56. 借款 4500 元, 年息  $7\%$ , 借用 7 年, 每半年一次應攤還多少元?
57. 公式  $n = \frac{\log P - \log(P - qr)}{\log(1+r)}$  求  $n$ , 若  $P = 600$ ,  $q = 7000$ ,  $r = 0.025$ 。
58. 用公式見 (54) 題求攤還本利之次數, 借款 1500, 年息  $8\%$ , 每月還 15 元。
59. 借款 1800 元, 年息  $5\%$ , 每星期攤還 5 元, 每年作 52

星期，共需多少次數？

60. 求一圓球之半徑，其體積是 5263 立方呎。
61. 由方程  $y = \log x$ ，求相符的  $y$  值，若  $x$  之值是 0.5, 1, 2, 5, 10, 50, 100。
62. 由公式  $P \cdot V^{1.67} = C$ ，求  $C$  值，若  $P = 188.2$ ,  $v = 11$ 。
63. 由公式  $D = \sqrt[3]{\frac{65H}{N}}$ ，求  $D$  值，若  $H = 80$ ,  $N = 100$ 。
64. 由公式  $T = \frac{DP^2L}{W}$ ，求  $T$  值，若  $P = 90$ ,  $D = 16$ ,  $L = 45$ ,  $W = 78$ 。
65. 求一圓鋼柱的每方吋截面上可載之重量磅數， $P$  代負載之磅數， $L$  代柱長以呎計， $r$  代迴轉半徑以吋計，則  $P = \frac{45000}{1 + \frac{144}{36000} \left(\frac{L}{r}\right)^2}$ ，求  $P$ ，若  $\frac{L}{r} = 5$ 。
66. 用(65)題公式，求  $P$  並圓柱可負載之總數重量若  $L = 16$  呎， $r = \frac{3}{2}$  吋，圓柱直徑 6 吋。
67. 空心圓柱迴轉半徑  $r = \sqrt{\frac{d^2 + d_1^2}{4}}$ ，求圓柱每方吋截面可負載之重量，並圓柱可負載之總數重量，若外直徑  $d = 6$  吋，壳厚 1 吋，長 16 呎。
68. 一鋼製六邊形柱每邊長 2 吋，柱長 12 呎，求該柱可負載之重量，迴轉半徑  $r = 0.264d$ ， $d$  是六邊形內圓之直徑。

69. 設如  $n \propto H^{1.25} P^{-0.5}$ , 若  $H=6$ ,  $P=100$ , 則  $n=50$ . 求  $n$ , 若  $H=20$  呎, 並  $P=75$ .
70. 公式  $H = \frac{tws}{33000}$ , 求  $H$ , 若  $t=80$ ,  $w=10$ ,  $s=1200$ .
71. 用第(70)題公式求  $t$ , 若  $H=50$ ,  $w=10$ ,  $s=4000$ .
72. 求鐵道在轉彎處, 外軌須加高之呎數用以下之公式,  $e = \frac{GV^2}{32 \cdot 2R}$ ,  $e =$  須填高之呎數,  $G =$  軌道之闊以吋計,  $V =$  車之速度每秒呎數計,  $R =$  轉彎處之曲線半徑以呎計, 求  $e$ , 若  $G=4$  呎,  $8\frac{1}{2}$  吋,  $R=5730$  呎,  $V =$  每小時 20 哩。
73. 用多少 1 吋徑水管流水與 6 吋徑水管所流之水量同, 用以下之公式  $N = \sqrt{\frac{D^5}{d^5}}$ ,  $N$  代水管根數,  $D$  代大水管之直徑,  $d$  代小水管之直徑。
74. 公式  $v^2 = K \frac{P}{W}$ , 若  $P=5$ ,  $W=10$ , 則  $v=1850$ . 求  $v$ , 若  $P=50$ ,  $W=80$ .  $v$  代砲彈起始之速度以每秒呎計,  $P$  代彈藥之重量,  $W$  代彈之重量均以磅計。

### 第三十五章 角度

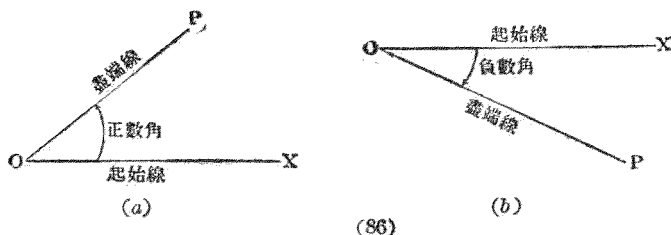
在幾何內所述角度之定義, 僅指明小的正數角度, 在三角學中必須將正數及負數與任何大小之角度設法處理, 則必需一較明白



的角度之定義。

若一直線由一固定點在同一平面中轉動，則產生一角度，時計之針，可作為此種直線旋轉而成角度。

若直線反時計針之方向轉動，則所成之角為正數角，若直線順時計針之方向轉動，則所成之角為負數角。



在起始地位之線，謂之起始線或邊，在終點地位時謂之盡端線，一有箭頭之弧線，指示直線轉動之方向及角之大小。

在 (86) 圖 (a)，直線  $OX$  假設釘住在  $O$  點，而反時計針之方向轉動至  $OP$  地位，所成之角是正數並讀作  $XOP$ 。

在 (86) 圖 (b)，直線  $OP$  是順時計針之方向轉動，所成之角  $XOP$  是負數，在此處顯明一個角度可取任何大小，正數或負數。

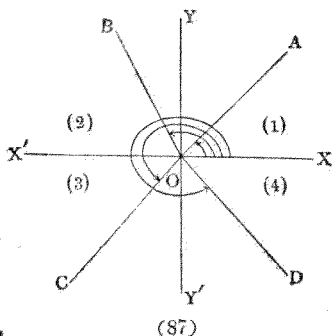
是以  $467^\circ$  之角，是直線反時計針轉動一圈再加  $107^\circ - 229^\circ$  之角是直線順時計針方向轉動至  $-229^\circ$ 。

**角之地位 象限** 為便利尋角之地位所在應畫圖以顯明之。先畫兩直線  $XX'$  與  $YY'$  成直角如 (87) 圖。按直線之方向及象限之地位，若  $X$  軸線之正數方向為起始線，則  $OX$  及  $OY$  間之角

是在第一象限 (1) 中，不論轉動幾動，所以  $40^\circ$ ， $400^\circ$ ， $760^\circ$  之角皆在象限 (1) 中。

若盡端線在  $OY$  與  $OX'$  之間，則角在第二象限 (2) 中，若盡端線在  $OX'$  與  $OY'$  之間，則角是在第三象限 (3) 中。

若盡端線在  $OY'$  與  $OX$  之間，則角是在第四象限 (4) 中。



所以， $XOA$  角是在象限 (1) 中。

$XOB$  角是在象限 (2) 中。

$XOC$  角是在象限 (3) 中。

$XOD$  角是在象限 (4) 中。

**角之量計** 在第十三章已經述及量角有三個單位直角，度數與弧度。

既 1 弧度  $= 57^\circ \cdot 29578 = 57^\circ 17' 44'' \cdot 8$  見第十三章。

則  $1^\circ =$  約  $0.01745$  弧度。

用弧度量角度稱謂圓的量度或  $\pi$  量度。

既  $2\pi$  弧度  $= 360^\circ$ ，則  $\pi$  弧度  $= 180^\circ$ ， $\frac{\pi}{2}$  弧度  $= 90^\circ$ ， $\frac{\pi}{3}$

弧度  $= 60^\circ$  等。故常因便利以  $\pi$  解釋常用之角度。

化弧度為角度則用  $\frac{180}{\pi}$  乘弧度。

化角度為弧度則以  $\frac{\pi}{180}$  乘角度。

例題一 化 2.5 弧度為角度。

$$\begin{aligned} \text{【解】 } 2.5 \times \frac{180}{\pi} &= 2.5 \times 57.29578 = 143^\circ \cdot 2394, \\ &= 143^\circ + 0.2394 \times 60 = 143^\circ + 14' \cdot 364 \\ &= 143^\circ 14' + 0.364 \times 60 = 143^\circ 14' 21'' \cdot 8 \end{aligned}$$

例題二 化  $22^\circ 36' 30''$  為弧度。

【解】 先將  $36'$  除 60 並將  $30''$  除 3600 改為度之小數。  
則  $22^\circ 36' 30'' = 22^\circ \cdot 6083$

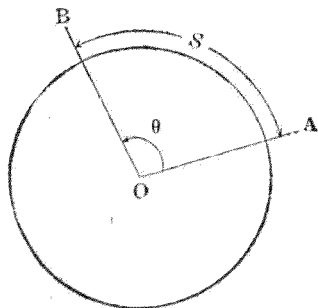
$$22 \cdot 6083 \times \frac{\pi}{180} = 22 \cdot 6083 \times 0.017453 = 0.3946 \text{ 弧度。}$$

**角, 弧, 與半徑間之關係** 從弧度之定義, 則在圓中心的角之弧度是等於角邊所截之弧除以圓之半徑。

在 (88) 圖中

$$\text{角 } AOB \text{ (以弧度計)} = \frac{\text{弧線 } AB}{\text{半徑 } OA}.$$

若以  $\theta$  代角之弧度,  $S$  代角之兩邊間之弧,  $r$  代圓之半徑。



(88)

$$\text{則 } \theta = \frac{S}{r}, S = r\theta, r = \frac{S}{\theta}$$

以上之關係是重要的, 因可用以解答實用問題。

例題 圓之直徑是 10 呎, 在圓周上分  $360^\circ$ , 每度再分 12

格，每格之讀數是  $5'$ ，求每格間的弦線之長。

【解】 既  $S=r\theta$ .

$$r=12 \times 5=60 \text{ 吋}, \theta=0.01745 \times \frac{5}{60}=0.00145.$$

$$\therefore S=60 \times 0.00145=0.087 \text{ 吋}.$$

### 習 題 一 百 三

- 尋以下各角度在第幾象限並畫每一角度， $27^\circ$ ,  $436^\circ$ ,  $236^\circ$ ,  $4372^\circ$ ,  $-46^\circ$ ,  $-324^\circ$ ,  $-90^\circ$ ,  $-476^\circ$ ,  $-2342^\circ$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $3\pi$ ,  $\frac{2}{3}\pi$ .
- 畫  $237^\circ$  之盡端線，並述有同盡端線之負數角度。
- 畫以下之角度， $76^\circ$ ,  $25^\circ \cdot 6$ ,  $425^\circ$ ,  $5263^\circ$ ,  $-25^\circ$ ,  $-236^\circ$ ,  $-146^\circ$ ,  $-935^\circ$ .
- 化以下為  $\pi$  弧度之倍數， $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $81^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $210^\circ$ .
- 化以下之  $\pi$  弧度為角度， $\frac{5\pi}{4}$ ,  $\frac{4\pi}{3}$ ,  $\frac{3\pi}{2}$ ,  $\frac{5\pi}{3}$ ,  $\frac{7\pi}{4}$ ,  $\frac{11\pi}{6}$ ,  $2\pi$ ,  $3\pi$ ,  $4\pi$ .
- 化以下為弧度， $47^\circ$ ,  $75^\circ 30'$ ,  $16^\circ 43' 16''$ ,  $125^\circ 46' 30''$ ,  $62^\circ 40'$ .

7. 化以下爲度數,  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{3}{4}\pi$ ,  $\frac{5}{6}\pi$ ,  $\frac{17}{16}\pi$ 。
8. 化以下之角度爲弧度  $90^\circ$ ,  $36^\circ 47'$ ,  $53^\circ 13'$ 。
9. 化以下之弧度爲角度  $\frac{1}{6}\pi$ ,  $\frac{5\pi}{12}$ 。
10. 三角中之兩個角度是  $\frac{2}{3}$  及  $\frac{2}{5}$  弧度, 求第三個角度。
11. 若圓中心之角度是  $126^\circ$  有弧線長 226 呎, 求圓之半徑。
12. 飛輪之直徑是 20 呎, 角度的速度每秒鐘  $3\pi$ , 求輪邊之速率。
13. 砂輪之圓周速度是每分鐘 5500 呎, 若砂輪之直徑是 10 吋, 求每秒鐘角度的速率。
14. 求同上題之速度, 若圓周速度每分鐘是 3500 呎。
15. 一飛輪直徑 4 呎, 轉動反時針方向, 圓周速度每秒鐘 75 呎, 求角度的速度每秒鐘是多少弧度?
16. 火車在  $\frac{1}{2}$  哩半徑之曲線的軌道上駛行, 每小時之速率是 30 哩, 則 15 秒鐘經過多少角度? 答數以角度並以弧度。
17. 求一圓之半徑, 若圓周上量 20 呎, 則中心角度是  $2.3$  弧度, 若圓周上量 3 呎 8 吋, 則中心成角是多少弧度。
18. 火車在 600 呎半徑之曲線軌道上駛行速度每小時 15 哩, 求每分鐘角度的速率以弧度計。
19. 一飛輪直徑 22 呎, 轉動角度的速率每秒鐘 9 弧度, 求每

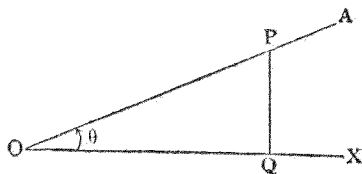
秒鐘圓周的速率。

20. 弧線之半徑是 1 哩，在中心包成之角是  $\frac{1}{6}$  度，求弧線之長。

## 第三十六章 三角的函數

**正弦 (Sine) 餘弦 (Cosine) 與正切 (tangent)** 在幾何學中所知者是三角邊間之關係，在此處則尋得角與邊亦有一種關係，此種關係對於畫三角圖及解剖各種三角及其他圖形甚為有用。

**定義** 若一銳角  $XOA$ ，如 (89) 圖，並從一任何點  $P$  (在  $OA$  中) 畫垂線  $PQ$  至  $OX$ ，則成一直角  $QOP$ 。



(89)

從同形三角之解釋，無論垂線  $PQ$  之地位在何處，祇  $XOA$  之角度  $\theta$  不改變則以下之比率皆不改變。

比率  $\frac{PQ}{OP}$  謂之  $\theta$  角之正弦 (sine  $\theta$ )，簡寫作  $\sin \theta$ 。

比率  $\frac{OQ}{OP}$  謂之  $\theta$  角之餘弦 (cosine  $\theta$ ) 簡寫作  $\cos \theta$ 。

比率  $\frac{PQ}{OQ}$  謂之  $\theta$  角之正切 (tangent  $\theta$ ) 簡寫作  $\tan \theta$ 。

將  $PQ$ ， $OQ$  及  $OP$  等線以同樣單位量計則可得以上各比率的數值，任何角度均有上項比率，在任何象限中之角可寫出同樣的

比率，如 (90) 圖中之  $XOA$  角是在第二象限中， $FQ$  是垂線從  
 盡端線上之任何點畫到  $X$  軸線。

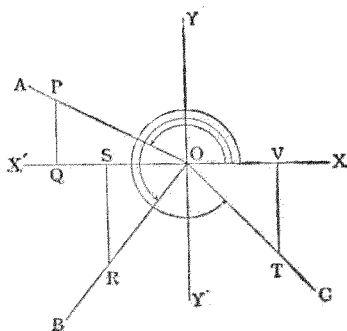
比率  $\sin XOA = \frac{PQ}{OP}$  即  $XOA$  角之正弦。

比率  $\cos XOA = \frac{OQ}{OP}$  即  $XOA$  角之餘弦。

比率  $\tan XOA = \frac{PQ}{OQ}$  即  $XOA$  角之正切。

學者可寫出  $XOB$  角及  $XOC$  角之正弦，餘弦，及正切以作練習。

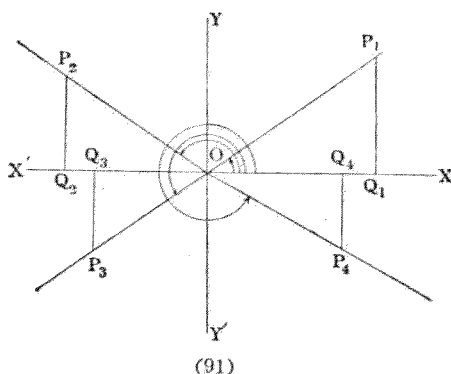
在下段中將解釋以上之比率有正數亦有負數。



(90)

**比率之通式** 按 (91) 圖，由  $O$  至盡端線上所擇之點為距  
 以  $r$  代表之， $r$  恆作正數，垂線至  $X$  軸線之長度謂之所擇點之縱  
 坐標，位在  $X$  軸線之上者為正數，而在  $X$  軸線之下者為負數，並

以  $y$  代表之，從  $O$  至垂線腳之距是所擇點之橫坐標，從  $O$  向右爲正數而向左爲負數，並以  $x$  代表之，任何角度  $\theta$  之比率可如下寫。



$$\theta \text{ 角之正弦 } \sin \theta = \frac{\text{縱坐標}}{\text{距}} = \frac{y}{r},$$

$$\theta \text{ 角之餘弦 } \cos \theta = \frac{\text{橫坐標}}{\text{距}} = \frac{x}{r},$$

$$\theta \text{ 角之正切 } \tan \theta = \frac{\text{縱坐標}}{\text{橫坐標}} = \frac{y}{x},$$

以上比率之反面有時常用茲列名於下。

$$\theta \text{ 角之餘割 (Cosecant } \theta), \text{ 簡寫 } \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{r}{y}$$

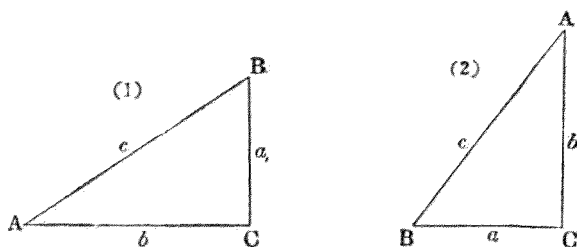
$$\theta \text{ 角之正割 (Secant } \theta), \text{ 簡寫 } \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{r}{x}$$

$$\theta \text{ 角之餘切 (Cotangent } \theta), \text{ 簡寫 } \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{x}{y}$$

以上之六個比率，謂之三角的函數，因其在三角學中甚爲重



要，故必需熟讀，使在任何時均能運用自如。



(92)

在一直角的三角中之銳角 在直角的三角  $ABC$  中，如 (92)

圖 (1)， $\sin A = \frac{a}{c}$ ， $= \cos B$ ， $\cos A = \frac{b}{c} = \sin B$ ， $\tan A = \frac{a}{b} =$

$\cot B$ ， $\cot A = \frac{b}{a} = \tan B$ ， $\sec A = \frac{c}{b} = \csc B$ ， $\csc A = \frac{c}{a} = \sec B$ 。

此項  $B$  角之比率極易顯明，若將三角  $AIC$  調置在 (92) 圖 (2) 之地位，工作直角的三角時有以下之定義，對於其每銳角之三角函數，頗為便利。

$$\sin A \text{ (或 } \sin B) = \frac{\text{角之對線}}{\text{斜線(即弦)}}$$

$$\cos A \text{ (或 } \cos B) = \frac{\text{角之底線}}{\text{斜線}}$$

$$\tan A \text{ (或 } \tan B) = \frac{\text{角之對線}}{\text{角之底線}}$$

$$\csc A \text{ (或 } \csc B) = \frac{\text{斜線}}{\text{角之對線}}$$

69. 設如  $n \propto H^{1.25} P^{-0.5}$ , 若  $H=6$ ,  $P=100$ , 則  $n=50$ . 求  $n$ , 若  $H=20$  呎, 並  $P=75$ .
70. 公式  $H = \frac{tws}{33000}$ , 求  $H$ , 若  $t=80$ ,  $w=10$ ,  $s=1200$ .
71. 用第(70)題公式求  $t$ , 若  $H=50$ ,  $w=10$ ,  $s=4000$ .
72. 求鐵道在轉彎處, 外軌須加高之呎數用以下之公式,  $e = \frac{GV^2}{32 \cdot 2R}$ ,  $e =$  須填高之呎數,  $G =$  軌道之闊以吋計,  $V =$  車之速度每秒呎數計,  $R =$  轉彎處之曲線半徑以呎計, 求  $e$ , 若  $G=4$  呎,  $8\frac{1}{2}$  吋,  $R=5730$  呎,  $V =$  每小時 20 哩。
73. 用多少 1 吋徑水管流水與 6 吋徑水管所流之水量同, 用以下之公式  $N = \sqrt{\frac{D^5}{d^5}} \cdot N$  代水管根數,  $D$  代大水管之直徑,  $d$  代小水管之直徑。
74. 公式  $v^2 = K \frac{P}{W}$ , 若  $P=5$ ,  $W=10$ , 則  $v=1850$ . 求  $v$ , 若  $P=50$ ,  $W=80$ .  $v$  代砲彈起始之速度以每秒呎計,  $P$  代彈藥之重量,  $W$  代彈之重量均以磅計。

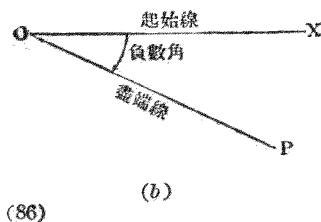
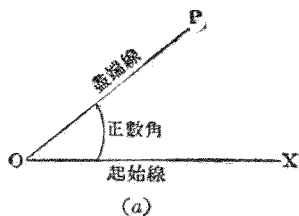
### 第三十五章 角度

在幾何內所述角度之定義, 僅指明小的正數角度, 在三角學中必須將正數及負數與任何大小之角度設法處理, 則必需一較明白

的角度之定義。

若一直線由一固定點在同一平面中轉動，則產生一角度，時計之針，可作為此種直線旋轉而成角度。

若直線反時計針之方向轉動，則所成之角為正數角，若直線順時計針之方向轉動，則所成之角為負數角。



(86)

在起始地位之線，謂之起始線或邊，在終點地位時謂之盡端線，一有箭頭之弧線，指示直線轉動之方向及角之大小。

在 (86) 圖 (a)，直線  $OX$  假設釘住在  $O$  點，而反時計針之方向轉動至  $OP$  地位，所成之角是正數並讀作  $XOP$ 。

在 (86) 圖 (b)，直線  $OP$  是順時計針之方向轉動，所成之角  $XOP$  是負數，在此處顯明一個角度可取任何大小，正數或負數。

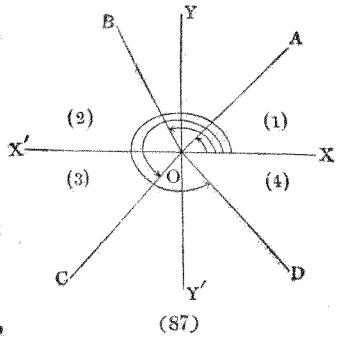
是以  $467^\circ$  之角，是直線反時計針轉動一圈再加  $107^\circ - 229^\circ$  之角是直線順時計針方向轉動至  $-229^\circ$ 。

**角之地位 象限** 為便利尋角之地位所在應畫圖以顯明之。先畫兩直線  $XX'$  與  $YY'$  成直角如 (87) 圖。按直線之方向及象限之地位，若  $X$  軸線之正數方向為起始線，則  $OX$  及  $OY$  間之角

是在第一象限 (1) 中，不論轉動幾動，所以  $40^\circ$ ， $400^\circ$ ， $760^\circ$  之角皆在象限 (1) 中。

若盡端線在  $OY$  與  $OX'$  之間，則角在第二象限 (2) 中，若盡端線在  $OX'$  與  $OY'$  之間，則角是在第三象限 (3) 中。

若盡端線在  $OY'$  與  $OX$  之間，則角是在第四象限 (4) 中。



所以， $XOA$  角是在象限 (1) 中。

$XOB$  角是在象限 (2) 中。

$XOC$  角是在象限 (3) 中。

$XOD$  角是在象限 (4) 中。

**角之量計** 在第十三章已經述及量角有三個單位直角，度數與弧度。

既 1 弧度  $= 57^\circ \cdot 29578 = 57^\circ 17' 44'' \cdot 8$  見第十三章。

則  $1^\circ =$  約  $0.01745$  弧度。

用弧度量角度稱謂圓的量度或  $\pi$  量度。

既  $2\pi$  弧度  $= 360^\circ$ ，則  $\pi$  弧度  $= 180^\circ$ ， $\frac{\pi}{2}$  弧度  $= 90^\circ$ ， $\frac{\pi}{3}$

弧度  $= 60^\circ$  等。故常因便利以  $\pi$  解釋常用之角度。

化弧度為角度則用  $\frac{180}{\pi}$  乘弧度。

$$\therefore \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707.$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707.$$

$$\tan 45^\circ = 1.$$

2.  $60^\circ$  角與  $30^\circ$  角的算法 畫一直角三角  $ABC$ ，使  $A$  角  $= 60^\circ$ 。  $B$  角  $= 30^\circ$ ，如 (97) 圖，使  $AC=1$  吋， $AB=2$  吋， $CB=\sqrt{3}$  吋。

現可寫函數如下：

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

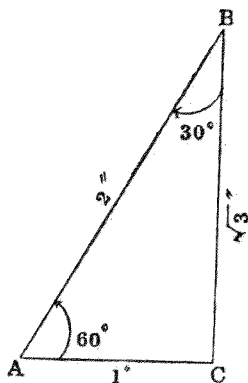
$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



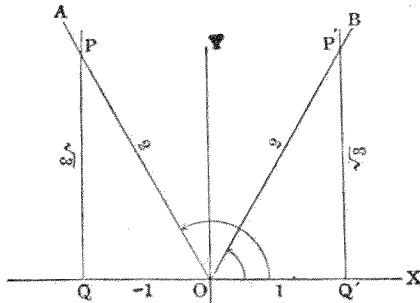
在其他象限中之角 在第二象限中之角 (97)

角  $XOA = 120^\circ$ ，如 (98) 圖，橫坐標，縱坐標，及在盡端線中  $P$  點之距與在第一象限中之角  $XOB = 60^\circ$  的橫坐標，縱坐標，及在盡端線中  $P'$  點之距有同值的比率。

用圖中所給之值，則  $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，並  $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}, \text{ 並 } \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ = -\sqrt{3}, \text{ 並 } \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$



(98)

其他在任何象限中之角度的函數皆易於計算，但需記憶(1)在盡端線上點之距離是正數，(2)在第一象限與第二象限中之縱坐標是正數，並在第三象限與第四象限中之縱坐標是負數，(3)在第一象限與第四象限中之橫坐標是正數而在第二象限與第三象限中之橫坐標是負數。

90°，180°，270°，及 0°之角 在 90° 之角，縱坐標與距相等而橫坐標是零，其函數如下。

$$\sin 90^\circ = \frac{y}{r} = 1,$$

$$\csc 90^\circ = \frac{r}{y} = 1.$$

$$\cos 90^\circ = \frac{x}{r} = 0, \quad \sec 90^\circ = \frac{r}{x} = \infty_0$$

$$\tan 90^\circ = \frac{y}{x} = \infty, \quad \cot 90^\circ = \frac{x}{y} = 0_0$$

記號 $\infty$ 讀作無量大數，此處顯示角度增至 $90^\circ$ 正切 (Tangent) 與正割 (Secant) 增加無限。

在  $180^\circ$  角縱坐標是零，而橫坐標與距相等其函數如下。

$$\sin 180^\circ = \frac{y}{r} = 0, \quad \csc 180^\circ = \frac{r}{y} = \infty_0$$

$$\cos 180^\circ = \frac{x}{r} = -1, \quad \sec 180^\circ = \frac{r}{x} = -1_0$$

$$\tan 180^\circ = \frac{y}{x} = 0, \quad \cot 180^\circ = \frac{x}{y} = \infty_0$$

同樣可寫  $270^\circ$  與  $0^\circ$  之函數：

$$\sin 270^\circ = -1, \quad \csc 270^\circ = -1_0$$

$$\cos 270^\circ = 0, \quad \sec 270^\circ = \infty_0$$

$$\tan 270^\circ = \infty, \quad \cot 270^\circ = 0_0$$

$$\sin 0^\circ = 0, \quad \csc 0^\circ = \infty_0$$

$$\cos 0^\circ = 1, \quad \sec 0^\circ = 1_0$$

$$\tan 0^\circ = 0, \quad \cot 0^\circ = \infty_0$$

上段所說每一角度之正弦餘弦及正切之值當排列於下表，學者須畫圖並計算比率以證之：

| 角度          | 弧度               | 正弦                   | 餘弦                    | 正切                    | 角度          | 弧度                | 正弦                    | 餘弦                    | 正切                    |
|-------------|------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|-------------|-------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $0^\circ$   | 0                | 0                    | 1                     | 0                     | $180^\circ$ | $\pi$             | 0                     | -1                    | 0                     |
| $30^\circ$  | $\frac{\pi}{6}$  | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{3}}{2}$  | $\frac{1}{\sqrt{3}}$  | $210^\circ$ | $\frac{7\pi}{6}$  | $-\frac{1}{2}$        | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$  |
| $45^\circ$  | $\frac{\pi}{4}$  | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$  | 1                     | $225^\circ$ | $\frac{5\pi}{4}$  | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | 1                     |
| $60^\circ$  | $\frac{\pi}{3}$  | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$         | $\sqrt{3}$            | $240^\circ$ | $\frac{4\pi}{3}$  | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$        | $\sqrt{3}$            |
| $90^\circ$  | $\frac{\pi}{2}$  | 1                    | 0                     | $\infty$              | $270^\circ$ | $\frac{3\pi}{2}$  | -1                    | 0                     | $\infty$              |
| $120^\circ$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$        | $-\sqrt{3}$           | $300^\circ$ | $\frac{5\pi}{3}$  | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$         | $-\sqrt{3}$           |
| $135^\circ$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | -1                    | $315^\circ$ | $\frac{7\pi}{4}$  | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$  | -1                    |
| $150^\circ$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$        | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $330^\circ$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $-\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{3}}{2}$  | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
|             |                  |                      |                       |                       | $360^\circ$ | $2\pi$            | 0                     | 1                     | 0                     |

## 第三十七章 表格及其應用

**三角函數之性質** 從上節所解釋三角之比率可知此種數不能求其準確的小數，為便利計算起見此項比率列入一表格類似對數表，在此種表中比率可有任何小數位數，位數愈多則答數亦愈近準確。

**函數之表格** 函數的表格有真數的(即天然的)及對數的兩種角度由  $0^\circ$  至  $90^\circ$ ，每  $10'$  相差，此種對數是真數函數之對數，為避免寫負數性情故皆加 10。

**從表上求一角之函數** 用表尋角之函數與查尋對數表法相似



茲舉例題解釋於下。

例題一 尋求  $\tan 23^\circ 20'$  之值。

先翻表上註明是天然的正切 (Natural tangent)。

尋角度  $23^\circ 20'$  之讀數是 0.4314。

$$\therefore \tan 23^\circ 20' = 0.4314.$$

例題二 尋求  $\cos 86^\circ 40'$  之值。

先翻表上註明是天然的餘弦 (Natural cosine)。

尋角度  $86^\circ 40'$  之讀數是 0.0581。

$$\therefore \cos 86^\circ 40' = 0.0581.$$

例題三 尋求  $\sin 17^\circ 27'$  之值。

先翻表上註明是天然的正弦 (Natural sine)。

如  $\sin 17^\circ 27'$  之值表中不載，則先尋  $\sin 17^\circ 20'$  與  $\sin 17^\circ 30'$  之函數相差，則角度相差  $10'$ ，函數相差 0.0028。

$$\therefore \sin 17^\circ 27' = 0.2979 + 0.0028 \times \frac{7}{10} = 0.2999.$$

以上之內推法算法與算對數的差數同而所得之數是近似的。

例題四 尋求  $\cos 37^\circ 57.3'$  之值。

先由表上尋  $\cos 37^\circ 50' = 0.7898$ 。

再每  $10'$  之差數 = 0.0018。

相差  $7.3' = 0.0018 \times 0.73 = 0.0013$ 。

$$\therefore \cos 37^\circ 57.3' = 0.7898 - 0.0013 = 0.7885.$$

**【注意】** 求餘弦及餘切用內推法是結果相減，因角度從  $0^\circ$  增

至  $90^\circ$  時，則餘弦與餘割之函數則遞減。

**求與函數相符的角度** 舉例於下以解釋之。

**例題一** 求  $x$  之值，若  $\sin x = 0.2728$ 。

從天然的正弦表中求函數  $0.2728$  而反求角度之讀數是  $15^\circ 50'$ 。

$$\therefore x = 15^\circ 50'.$$

**例題二** 求  $x$  之值，若  $\tan x = 1.5725$ 。

若在天然的正切表中不能尋得以上之函數則用內推法。

先求相近與較小於  $1.5725$  之函數，則  $1.5697 = \tan 57^\circ 30'$ 。

角度每  $10'$  相差，列表差數是  $0.0101$ 。

$1.5725$  與  $1.5697$  之相差是  $0.0028$ 。

$$(0.0028 \div 0.0101) \times 10' = 2.8'.$$

$$\therefore x = 57^\circ 30' + 2.8' = 57^\circ 32.8'.$$

## 習 題 一 百 五

1. 求以下各角度之正弦，餘弦及正切， $40^\circ 10'$ ， $59^\circ 50'$ ， $76^\circ 30'$ ， $5^\circ 40'$ 。
2. 求以下各角度之正弦，餘弦及正切， $17^\circ 36'$ ， $29^\circ 29'$ ， $76^\circ 14'$ ， $83^\circ 33'$ ， $63^\circ 47'$ 。
3. 求相符的角度 (1)  $\sin x = 0.5807$ ， (2)  $\sin x = 0.2725$ ， (3)  $\sin x = 0.4986$ ， (4)  $\sin x = 0.9127$ ， (5)  $\sin x$

$$= 0.0276。$$

4. 求相符的角度 (1)  $\cos x = 0.3764$ , (2)  $\cos x = 0.8642$ ,  
 (3)  $\cos x = 0.9091$ , (4)  $\cos x = 0.4848$ , (5)  $\cos x$   
 $= 0.0986$ 。
5. 求相符的角度 (1)  $\tan x = 0.2256$ , (2)  $\tan x = 1.7624$ ,  
 (3)  $\tan x = 2.8427$ , (4)  $\tan x = 0.1111$ , (5)  $\tan x = 3$ ,  
 (6)  $\tan x = 0.6666$ 。
6. 求  $\sin 34^\circ 40'$  之值, 從對數表中尋此值之對數, 再由表中求  $\log \sin 34^\circ 40'$  之值以比較之。
7. 查表以證明下值;  $\log \sin 56^\circ 35' = 9.9215$ ,  $\log \tan 34^\circ 15.6' = 9.8332$ ,  $\log \cos 27^\circ 55' = 9.9462$ ,  $\log \sin 17^\circ 9' = 9.4696$ 。
8. 求以下  $x$  之值;  $\log \cos x = 9.8236$ ,  $\log \sin x = 9.4737$ ,  
 $\log \tan x = 0.4293$ ,  $\log \cot x = 9.4236$ 。

**求公式之值** 公式常包含三角函數, 有時用對數計算極為便利。

指示三角函數之乘冪, 指數是置在角度之前。

所以  $\sin^2 30^\circ$  是  $\sin 30^\circ$  平方之意。

例題一 求  $\sqrt[3]{\sin 47^\circ + \tan^3 36^\circ}$ 。

【解】 從表上尋得  $\sin 47^\circ = 0.7314$ 。

$$\log \tan 36^\circ = 9.8613 - 10 \text{ 查表所得。}$$

$$\therefore \log \tan 36^\circ = 9.5839 - 10。$$

$$\therefore \tan^3 36^\circ = 0.3836 \text{ 查表所得。}$$

$$\therefore \sin 47^\circ + \tan^3 36^\circ = 0.7314 + 0.3836 = 1.1150。$$

$$\log 1.1150 = 0.0473。$$

$$\log \sqrt[3]{1.1150} = 0.0158。$$

$$\therefore \sqrt[3]{1.1150} = 1.037。$$

$$\therefore \sqrt[3]{\sin 47^\circ + \tan^3 36^\circ} = 1.037。$$

例題二 求  $x$  之值, 若  $x = \frac{\tan 72^\circ 34'}{69^\circ 40'}$ 。

【解】  $\tan 72^\circ 34' = 3.1846$

改  $69^\circ 40'$  為弧度, 則  $69^\circ 40' = 69 \frac{2}{3}$

$$69 \frac{2}{3} \times 0.01745 = 1.216 \text{ 弧度。}$$

$$3.1846 \div 1.216 = 2.62, \quad \therefore x = 2.62。$$

## 習 題 一 百 六

1. 求  $\sqrt{\sin^3 49^\circ 10'}$  之值。

2. 求  $\sqrt[5]{\tan 75^\circ + 56}$  之值。

3. 求  $r^{\frac{2}{3}}(S^2 - t^2)\tan\theta$  之值, 若  $r = 25.2$ ,  $S = 90$ ,  $t = 49.6$ ,  
 $\theta = 31^\circ 52'$ 。

4. 求  $ae^{-bt}\sin(ct + \theta)$  之值, 若  $a = 5$ ,  $b = 200$ ,  $c = 600$ ,  
 $\theta = -0.1745$  弧度,  $e = 2.718$ ,  $t = 0.001$  弧度。

5. 求  $x$  之值, 若  $x = \frac{\sin 45^\circ 56' 20''}{36^\circ 20'}$
6. 求  $x$  之值, 若  $x = \frac{\tan 1.3788}{\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi}$
7. 求  $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$  之值,  $a = 231, b = 357, C = 55^\circ$ 。
8. 求  $\frac{a \sin B \sin C}{\sin A}$  之值,  $a = 126, A = 30^\circ, B = 72^\circ, C = 78^\circ$ 。
9. 求  $\sin x \cos y + \cos x \sin y$  之值, 若  $x = 42^\circ 10', y = 17^\circ 50'$ 。
10. 求以下各值, (1)  $\sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ$ , (2)  $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ$ , (3)  $\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ$ 。
11. 求  $v$  之值, 若  $v = \sqrt{2gs \sin \phi}$   $g = 32, s = 50, \phi = 27^\circ 16'$ 。
12. 若不計入空氣之阻力則砲彈可擊出在平面之程距  

$$d = \frac{v \sin 2a}{g}, v = \text{砲彈出口速度每分鐘以呎計}, a = \text{砲與水平線之角度}, g = 32 \text{ (恆數)}, \text{求 } d \text{ 之值, 若 } v = \text{每分鐘 } 800 \text{ 呎}, a = 5^\circ, \text{用同數 } v \text{ 值, 求 } d \text{ 之值, 若 } a \text{ 之角度是 } 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 45^\circ$$
。
13. 不計空氣之阻力則砲彈可到達之最高點  $y = \frac{v^2 \sin^2 a}{2g}$ , 求  $y$  之值, 若砲彈出口之速度  $v =$  每分鐘 2000 呎,  $g = 32$  (恆數), 砲與水平線之角度  $a$  是  $60^\circ$ 。
14. 若不計入空氣之阻力, 則砲彈可射擊最遠的平面之程距是當砲與水平線成  $45^\circ$  時, 用第(12)題之公式算砲彈可

射擊最遠之平面程距，若  $v$  是每秒鐘 2200 呎。

15. 若推重量  $W$  上一傾斜面所需之勁力  $F = W \frac{\sin a + u \cos a}{\cos a - u \sin a}$

若  $a$  是傾斜面與水平線之角度， $u$  是摩擦系數，求  $F$  之值， $W = 800$  磅， $a = 30^\circ$ ， $u = 0.2$ 。

16. 計算一平面上受到之光度而平面與光線不成垂線，則用以下之公式  $E = \frac{I}{d^2} \times \cos \phi$ ，若  $E$  是平面之光度以燭呎計，

$I$  是光源之燭光數計， $d$  是平面與光源之距離以呎計， $\phi$  是光線與平面上垂線所成之角，求  $E$  之值，若  $I = 50$ ， $d = 10$ ， $\phi = 75^\circ$ 。

17. 用第(16)題之公式求  $d$ ，若  $I = 60$ ， $E = 0.25$ ， $\phi = 65^\circ$ 。

18. 用第(16)題之公式求  $I$ ，若  $E = 4$ ， $d = 8$ ， $\phi = 0^\circ$ 。

19. 計算平面上從一垂直光源受到的光度，用以下之公式  $E_h$

$$= \frac{I}{h^2} \times \cos^3 \phi. E_h \text{ 是平面上所受之光度以燭呎計，} I \text{ 是光源之燭光數，} h \text{ 是平面至光源的垂直距離以呎計，} \phi \text{ 是光線與垂線所成之角，求 } E_h \text{ 之值，若 } I = 250, h = 12, \phi = 55^\circ.$$

20. 用第(19)題之公式求  $h$ ，若  $I = 100$ ， $E_h = 65$ ， $\phi = 12^\circ$ 。

### 第三十八章 直角三角

任何三角皆有三條邊與三隻角，此之謂三角之六原素。

角度常用大寫的英文字母  $A, B,$  與  $C$  代表, 邊線用小寫的英文字母  $a, b,$  與  $c$  代之,  $A$  角之對線是  $a,$   $B$  角之對線是  $b,$  而  $C$  角之對線是  $c.$

已知三角中之幾個原素後, 而求其餘的原素之值, 謂之剖解三角。

有兩個法則可用以剖解三角, (1) 從已知之原素構畫三角用尺及量角規以量度其餘的原素, (2) 從已知之原素計算其餘的原素。

以上之第一法在第十三章中多經述及, 以上之第二法則對於特種三角, 如直三角, 等腰三角及等邊三角之剖解已述及於第十一章, 但不包括角度。

從三角學不僅求三角之邊且求其角度。

## 習 題 一 百 七

用規尺按各題所給之原素構畫三角再量度其餘的原數:

1.  $A=40^\circ, b=2$  吋,  $c=2.5$  吋, 求  $B, C,$  與  $a.$
2.  $A=50^\circ, C=70^\circ, b=2$  吋, 求  $B, a,$  與  $c.$
3.  $A=30^\circ, a=10$  呎,  $c=15$  呎, 求  $B, C,$  與  $b.$

按第(3)題所給之原素可畫兩個三角否?

4.  $a=20$  呎,  $b=15$  呎,  $c=12$  呎, 求  $A, B,$  與  $C.$
5.  $A=40^\circ, B=80^\circ, C=60^\circ,$  求  $a, b,$  與  $c.$

由第(6)題至第(10)題是直角三角,  $C=90^\circ:$

6.  $A=29^\circ$ ,  $b=2$  吋, 求  $B$ ,  $a$ , 與  $c$ 。
7.  $A=42^\circ$ ,  $a=4$  吋, 求  $B$ ,  $b$ , 與  $c$ 。
8.  $A=47^\circ$ ,  $c=3$  吋, 求  $B$ ,  $b$ , 與  $a$ 。
9.  $a=4$  吋,  $b=6$  吋, 求  $A$ ,  $B$ , 與  $c$ 。
10.  $a=1.5$  呎,  $c=2.3$  呎, 求  $A$ ,  $B$ , 與  $b$ 。

**直角三角** 前已解剖直角三角之邊，即已知兩邊之長可以求第三邊但未求角度，從以上第(6)題至第(10)題使學者，除直角外再知兩原素，其中極少須包括一邊之長，希望能求其餘的原素。

以下係關於直角三角之事實。

1. 弦線長於任何其餘兩邊線之一，但比其餘兩邊之和短。
2. 弦線之平方等於其餘兩邊的平方之和。
3. 兩銳角之和是  $90^\circ$ ，此即兩銳角彼此成補角。
4. 較長線在較大角的對面。

察看以上各構圖問題顯示對於直角三角中可給之兩部皆包括如下。

事實一 給一銳角與一邊線而非弦線。

事實二 給一銳角與一弦線。

事實三 給一弦線與一邊線。

事實四 給兩邊線而非弦線。

**剖解之方針** 剖解直角三角必需已知兩個原素，極少須給一邊線。



每一方程式如  $\sin A = \frac{a}{c}$  等，包含三數，若已給兩數則能

求第三數。

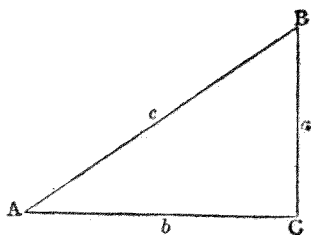
除此種方程式外尚有從幾何學中所得之事實，(1)弦線之平方等於其他兩邊線之平方之和，(2)兩銳角之和是  $90^\circ$ ，根據以上之事實則能剖解任何直角三角，此種方程可列舉於下。

1.  $\sin A = \frac{a}{c}$       2.  $\cos A = \frac{b}{c}$

3.  $\tan A = \frac{a}{b}$       4.  $\cot A = \frac{b}{a}$

5.  $c^2 = a^2 + b^2$       6.  $\sin B = \frac{b}{c}$

7.  $\cos B = \frac{a}{c}$       8.  $\tan B = \frac{b}{a}$



(99)

9.  $\cot B = \frac{a}{b}$       10.  $A + B = 90^\circ$

事實一 所給  $A$  與  $b$ ,  $A$  與  $a$ ,  $B$  與  $a$ , 或  $B$  與  $b$ 。

例題 在一直角三角中,  $A = 32^\circ 20'$ ,  $b = 10$  呎, 求  $B, a$ , 與  $c$ 。

【解】 (1)  $A + B = 90^\circ$ , 則  $B = 90^\circ - 32^\circ 20' = 57^\circ 40'$ ,

(2)  $\cos A = \frac{b}{c}$ , 則  $c = \frac{b}{\cos A} = \frac{10}{\cos 32^\circ 20'}$ ,

查天然的餘弦表則得  $\cos 32^\circ 20' = 0.8450$

$\therefore c = 10 \div 0.8450 = 11.83$  呎。

$$(3) \tan A = \frac{a}{b}, \text{ 則 } a = b \tan A = 10 \tan 32^\circ 20',$$

查天然的正切表則得  $\tan 32^\circ 20' = 0.6330$ ,

$$\therefore 10 \times 0.6330 = 6.33 \text{ 呎。}$$

以上之答數可構畫三角圖或用其他方程式核算以校對之。

事實二 所給  $A$  與  $c$ , 或  $B$  與  $c$ 。

例題 在一直角三角中,  $A = 67^\circ 42.8'$ ,  $c = 23.47$  呎, 求  $B, a$  與  $b$ 。

【解】 (1)  $A + B = 90^\circ$ , 則  $B = 90^\circ - 67^\circ 42.8' = 22^\circ 17.2'$ ,

$$(2) \sin A = \frac{a}{c}, \text{ 則 } a = c \sin A, = 23.47 \sin 67^\circ 42.8',$$

查天然的正弦表則得  $\sin 67^\circ 42.8' = 0.9222$ ,

$$\therefore a = 23.47 \times 0.9222 = 21.72 \text{ 呎。}$$

既  $c^2 = a^2 + b^2$ ,  $\therefore b^2 = c^2 - a^2 = (c+a)(c-a)$ 。

$$\therefore b = \sqrt{(c+a)(c-a)} = \sqrt{45.19 \times 1.75} = 8.95 \text{ 呎。}$$

事實三 所給  $c$  與  $a$ , 或  $c$  與  $b$ 。

例題 在一直角三角中,  $c = 35.62$  呎,  $a = 23.85$  呎, 求  $b, A$ , 與  $B$ 。

$$\text{【解】 (1) } \sin A = \frac{a}{c} = \frac{23.85}{35.62} = 0.66957.$$

查天然的正弦表  $\sin A = 0.66957$ , 則  $A = 42^\circ 2.3'$ 。

$$(2) A + B = 90^\circ, B = 90 - 42^\circ 2.3' = 47^\circ 57.7'.$$

$$(3) \tan A = \frac{a}{b}, \text{ 則 } b = \frac{a}{\tan A},$$

$$\text{此即 } b = \frac{23.85}{\tan 42^\circ 2.3'} = 23.85 \div 0.9016 = 26.45 \text{ 呎。}$$

事實四 所給  $a$  與  $b$ , 求  $A$ ,  $B$ , 與  $c$ 。

剖解三角需用方程如下。

$$(1) \quad c^2 = a^2 + b^2, \quad \therefore c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$(2) \quad \tan A = \frac{a}{b}, \quad \therefore A = \tan^{-1} \frac{a}{b}$$

$$(3) \quad \tan B = \frac{b}{a}, \quad \therefore B = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

$$\text{核對答數用 } \sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c},$$

【註】 方程式  $A = \tan^{-1} \frac{a}{b}$  當讀作  $A =$  角度其正切是  $\frac{a}{b}$ 。

$\tan^{-1} \frac{a}{b}$  之式樣謂之反面的函數 (Inverse function)。

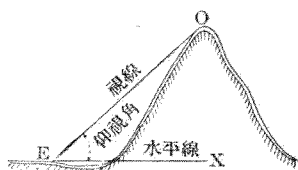
## 習 題 一 百 八

剖解以下之直角三角並用準確構畫之圖或其他方程式以核對之。

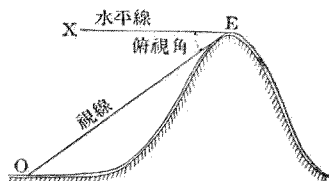
1.  $B = 27^\circ 30'$ ,  $a = 14$  吋, 求  $A$ ,  $b$ , 與  $c$ ,
2.  $B = 46^\circ 25'$ ,  $a = 17$  呎, 求  $A$ ,  $b$ , 與  $c$ 。
3.  $A = 75^\circ 26'$ ,  $b = 25$  呎, 求  $B$ ,  $a$ , 與  $c$ 。
4.  $B = 62^\circ 40'$ ,  $b = 2$  呎, 求  $A$ ,  $a$ , 與  $c$ 。

5.  $A=17^{\circ}50'$ ,  $c=47$  碼, 求  $B$ ,  $a$ , 與  $b$ 。
6.  $B=53^{\circ}20'$ ,  $c=21$  呎, 求  $A$ ,  $a$ , 與  $b$ 。
7.  $a=2$  呎,  $c=3$  呎, 求  $A$ ,  $B$ , 與  $b$ 。
8.  $b=4$  呎,  $c=9$  呎, 求  $A$ ,  $B$ , 與  $a$ 。
9.  $a=4.23$  吋,  $b=7.23$  吋, 求  $A, B$ , 與  $c$ 。
10.  $a=27$  吋,  $b=20$  吋, 求  $A, B$ , 與  $c$ 。
11.  $B=29^{\circ}45'$ ,  $c=2.36$  呎, 求  $A, a$ , 與  $b$ 。
12.  $A=32^{\circ}12'$ ,  $c=8.23$  吋, 求  $B, a$ , 與  $b$ 。

【定義】 仰視角 (The angle of elevation) 是視線與水平面間之角當目光視察水平面上之物體, 如 (100) 圖, 當所視察之物體在水平面之下, 則視線與水平面所成之角謂之俯視角 (The angle of depression) 如 (101) 圖, 是以若  $O$  是眼  $E$  看見的物體, 則



(100)

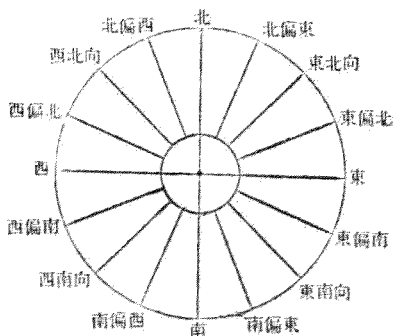


(101)

$XEO$  角按 (100) 圖是仰視角,  $XEO$  角按 (101) 圖是俯視角。

地球面上之方向是常按航海者所用的羅盤 (Mariner's compass)。上指示之方向, 如 (102) 圖上所見, 此項方向是根據四基點東南西北而規定, 此項方向常稱作位置 (Bearings)。

在需要十分準確時，方向可以指明從基點 (Cardinal point) 是多少度，所以若給一方向是北  $10^\circ$  東，意即從基點北偏向東  $10^\circ$ ，又如南  $40^\circ$  西，意即從基點南偏向西  $40^\circ$ 。



(102)

## 習 題 一 百 九

1. 若一直立旗杆高 20 呎，由平地上距旗杆脚 26 呎之地點向旗杆頂仰視，則仰視角是多少度？
2. 東北向是多少度？北偏東是多少度？
3. 在距離一屋 40 呎之地點向屋頂仰視，則仰視角是  $60^\circ 15' 3''$ ，求屋之高。
4. 在距離一高樹 60 呎之平地上向樹頂仰視，則仰視角是  $75^\circ$ ，求樹之高。
5. 求一路之傾斜角度若每 8 呎平面上升高 1 呎。
6. 求一道路之傾斜角度若 100 呎升高 5 呎。

7. 某甲之目距平地 5 呎 6 吋，在距離 150 呎之地點仰視一 72 呎高之旗桿頂上，則其視線與目平齊的水平線所成之角度是多少度？
8. 在一等腰三角中，其底角之一是  $48^{\circ}20'$ ，並其底邊長 18 吋，求每等腰之長，頂角，及高度。
9. 一等邊五邊形之邊長 12 吋，求邊內圓之半徑。
10. 求一等邊八邊形之邊長，若邊內圓之半徑是 20 呎。
11. 三角  $ABC$  之  $C$  角是  $90^{\circ}$ ， $CB=20$  呎，並  $CAB$  角  $=40^{\circ}$ ，延長  $CB$  至  $P$  使  $CAF$  角  $=70^{\circ}$ ，求  $CP$  之長。
12. 求一平行四邊形之面積，若其平行邊長 10 呎與 25 呎包含角度  $75^{\circ}$ 。
13. 欲決定一河流之闊，某甲立近岸邊觀看對岸之樹，由樹頂之仰視角是  $32^{\circ}$ ，從樹同一方向往後退至 150 呎之地點，由樹頂之仰視角是  $21^{\circ}$ ，求河之闊。
14. 一屋長 80 呎闊 60 呎，屋頂與水平線成  $36^{\circ}$ ，求屋頂之面積。
15. 一氣球之仰視角從向南一點是  $60^{\circ}$ ，由此偏西 1 哩氣球之仰視角是  $45^{\circ}$ ，求氣球之高度。
16. 從一高 1050 呎之山頂下視兩屋與山脚成一直線，第一屋之俯視角是  $35^{\circ}$ ，而第二屋之俯視角是  $24^{\circ}$ ，求兩屋間之距離。
17. 一 3 呎半徑之圓中的弦長 2 呎，求弧線之長並弦包圓

中心之角度。

18. 求一圓截片之面積，弦長 4 呎而圓之直徑是 5 呎。
19. 求一圓截片之面積，弦長 6 呎並高 2 呎。
20. 求一立方之對角線與其一面上之對角線所成之角度。
21. 公式  $d = \sqrt{\frac{3}{2} h}$  哩， $d =$  由高處可眺平地上之遠距以哩計， $h =$  離平地之高處以呎計，用此公式計算從一船之甲板上在最遠之距離可望見一燈塔上之光，燈塔距水平線高 85 呎，船之甲板高於水平線 30 呎。
22. 從最遠多少哩之平地上可望見一高 2000 呎之削壁。
23. 求 128 邊之等邊形的外包圓之半徑，等邊形每邊長 2 吋。
24. 在平地上之一點  $A$  仰視一高塔之頂，其仰視角是  $42^\circ 30'$ ，從一點  $B$  直接離  $A$  22 呎其仰視角是  $36^\circ 45'$ ，求塔之高並  $A$  點離塔之距。
25. 一舟向北駛行望見二燈塔向西成一直線，駛行一小時後，二燈塔之位置是西南向並南偏西  $11\frac{1}{4}^\circ$ ，若二燈塔之距是 8 哩，求舟行之速率。

~~~~~

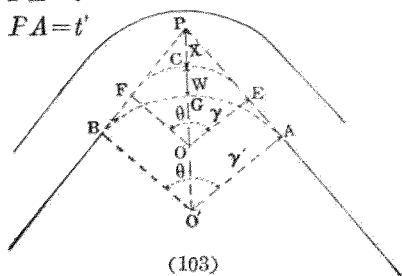
加闊轉彎處之走道 一汽車駕駛員在轉彎時常於無意中使其汽車轉一甚長半徑的弧線，許多公路技師知有此等傾向故在轉彎處之內部走道加闊，顯示於(103)圖，此等實施上增加公路之美觀。若走道在弧線處有同樣的闊度則弧線部份似乎較直線處狹，如弧

線部份逐漸增闊至彎處中點 G ，則走道的全部之闊度顯示平齊。

欲使加增之部份與弧線正當適合則內邊之曲線需是一圓的直確弧線，直邊是其切線至 E ，從半徑 r ，曲線之中央角度 θ ，及闊 W 各數，則加增之部份極易用軟尺及轉鏡儀 (Transit) 在地面上劃定，在實施上 W 之值從 2 呎至 8 呎依據 r 之值而規定，加增之闊度已知 W ， r ，及 θ 之值後極易計算。

$$PE = t$$

$$FA = t'$$



根據 (103) 圖則得以下之

公式，

$$x = r \sec \frac{1}{2} \theta - r = \frac{r}{\cos \frac{1}{2} \theta} - r$$

$$x + W = r' \sec \frac{1}{2} \theta - r' = \frac{r'}{\cos \frac{1}{2} \theta} - r'$$

$$-r'。$$

$$\therefore r' = \frac{x + W}{\sec \frac{1}{2} \theta - 1} = \frac{(x + W) \cos \frac{1}{2} \theta}{1 - \cos \frac{1}{2} \theta} \quad t = r \tan \frac{1}{2} \theta,$$

$$t' = r' \tan \frac{1}{2} \theta, \text{ 加增之面積} = \text{面積 } BFCEAG$$

$$= BPAO' - FPFC - BGAO'。$$

$$BPAO' = r't',$$

$$FPFC = FPFO - FCEO = rt - \frac{\theta}{360} \pi r^2$$

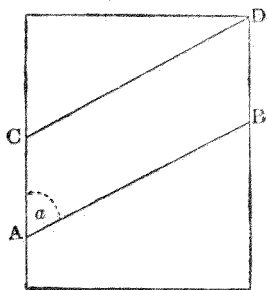
$$BGAO' = \frac{\theta}{360} \pi r'^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{加增之面積} &= r't' - \left(rt - \frac{\theta}{360} \pi r^2 \right) - \frac{\theta}{360} \pi r'^2 \\ &= r't' - rt - \frac{\theta}{360} \pi (r' + r)(r' - r) \end{aligned}$$

習題 (1) 求增加之面積以平方呎計，若 $r=300$ 呎， $W=4$ 呎，及 $\theta=100^\circ$ (2) 求第一問之 r' 的值，其餘之值同。

螺旋 (Spiral) 若畫一線環繞一圓柱使其前進一定的距離，當圓柱轉一公轉時，若是所成之曲線謂之螺旋。

若切紙一方如 (104) 圖，畫 AB 及 CD 線，將紙可捲作圓柱



(104)



(105)

如 (105) 圖，則 AB 與 CD 線成一螺旋行動由 A 至 D ，螺旋每轉沿圓柱前進之部份謂之螺旋之先導，圖中之 AC 是先導，習慣上給螺旋之先導每轉多少吋，例如一螺旋每轉前進 S 吋，即呼為 S 吋螺旋。

α 角是謂螺旋之角，由圖中所見，

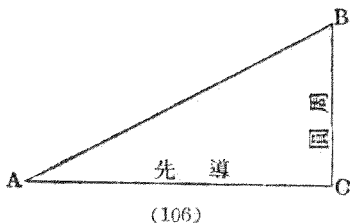
$$\tan a = \frac{\text{圓柱之圓周}}{\text{螺旋之先導}} \quad \text{或} \quad \tan a = \frac{CB}{AC}$$

在機床上割切螺旋時，必需知螺旋之角度方可以安置割切工具。

欲求螺旋之角度用以割切螺旋需先畫一圖如 (106) 圖， C 角是直角， CB 是圓周， AC 是先導， A 角是所需之角可以用量角規量度或求 $\tan A = \frac{CB}{AC}$ ，並用正切表以尋之。

以下之定律可用以參考：

1. 角度：以先導除圓周，答數是螺旋角之正切。
2. 先導：以螺旋角之正切除圓周，答數是螺旋之先導。
3. 圓周：以角之正切乘螺旋之先導，則積數是圓周。



習 題 一 百 十

1. 求以下鋼鑽中之螺旋的角度，
 - (a) 鋼鑽之直徑 $\frac{5}{16}$ 吋，先導 2.92 吋。
 - (b) 鋼鑽之直徑 $1\frac{1}{8}$ 吋，先導 9.33 吋。
 - (c) 鋼鑽之直徑 $\frac{13}{16}$ 吋，先導 7.29 吋。
2. 在一高塔中之螺旋式梯級的外直徑是 12 呎，求梯級外

端之螺旋角度，若走梯級一轉上升 18 呎。

3. 求安置割切工具之角度以割切以下之螺旋，(a) 直徑 = $\frac{1}{4}$ 吋，先導 = 2.78 吋，(b) 直徑 = $\frac{3}{4}$ 吋，先導 = 7.62 吋，(c) 直徑 = 2 吋，先導 = 10.37 吋，(d) 直徑 = $\frac{7}{8}$ 吋，先導 = 22.5 吋。
4. 一圓柱之直徑是 2 吋，今欲在其上切出一螺旋槽，螺旋之角度成 20° ，求螺旋之先導。
5. 求每轉螺旋環繞圓柱之長度，若圓柱之直徑是 3 吋，及螺旋之先導是 9 吋。
6. 求螺旋環繞圓柱之長度，若螺旋轉 20 轉前進 8 吋，圓柱之直徑 3.5 吋。

第三十九章 三角比率間之關係

一角之比率與其補角之比率間的關係 在前章內已指明一銳角之函數是等於其補角的聯函數，由此則給有以下之關係，此項關係對於任何角度 θ 皆真確。

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta。$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta。$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta。$$

$$\cot(90^\circ - \theta) = \tan\theta。$$

$$\sec(90^\circ - \theta) = \csc\theta。$$

$$\csc(90^\circ - \theta) = \sec\theta。$$

由以上之關係常使三角函數表做雙重工事。

例如 $\sin 60^\circ = \sin(90^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ$

一角之比率與其續角之比率間的關係 以下之一角之比率與其續角之比率間之關係對於任何角度 θ 皆真確，在用表查尋角度在 90° 與 180° 間之函數時，利用此項關係極為便利。

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta。$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta。$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta。$$

$$\cot(180^\circ - \theta) = -\cot\theta。$$

$$\sec(180^\circ - \theta) = -\sec\theta。$$

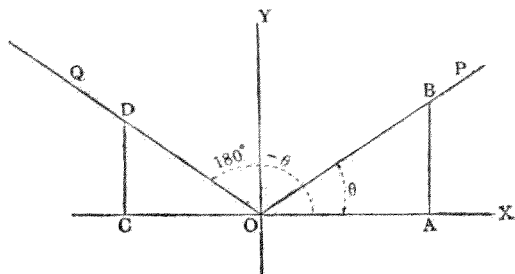
$$\csc(180^\circ - \theta) = \csc\theta。$$

【證】 在 (107) 圖中， XOP 角 $=\theta$ 是任何角度，並 XOQ 角 $=180^\circ - \theta$ 。

從在 XOP 之盡端線上的任何一點 B 畫垂線 AB 至 X 軸線，並從在 XOQ 之盡端線上的任何一點 D 畫垂線 CD 至 X 軸線，直角三角 OAB 及 OCD 是同形三角， OA, AB, OB, CD 與 OD 是正數，惟 OC 是負數。

$$\text{則} \quad \sin(180^\circ - \theta) = \frac{CD}{OD} = \frac{AB}{OB} = \sin\theta。$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = \frac{OC}{OD} = -\frac{OA}{OB} = -\cos\theta。$$



(107)

例題一 $\sin 130^{\circ}15' = \sin (180^{\circ} - 49^{\circ}45') = \sin 49^{\circ}45'$ 。

查正弦表 $\sin 49^{\circ}45' = 0.7633$ 。

例題二 $\cos 160^{\circ} = \cos (180^{\circ} - 20^{\circ}) = -\cos 20^{\circ}$ ，

查餘弦表 $-\cos 20^{\circ} = -0.9397$ 。

一角度 θ 與 $90^{\circ} + \theta$ 之比率間的關係 以下之關係對於角度 θ 與 $90^{\circ} + \theta$ 之比率，在用表查尋角度在 90° 與 180° 間之函數時利用此項關係極為便利。

$$\sin (90^{\circ} + \theta) = \cos \theta。$$

$$\cos (90^{\circ} + \theta) = -\sin \theta。$$

$$\tan (90^{\circ} + \theta) = -\cot \theta。$$

$$\cot (90^{\circ} + \theta) = -\tan \theta。$$

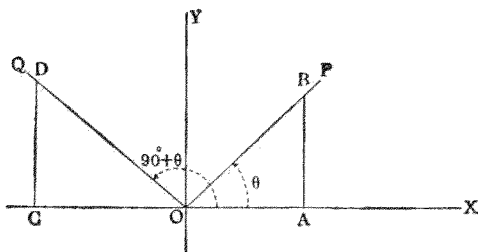
$$\sec (90^{\circ} + \theta) = \csc \theta。$$

$$\csc (90^{\circ} + \theta) = \sec \theta。$$

【證】 在(108)圖中， XOP 角 $= \theta$ ，並 XOQ 角 $= 90^{\circ} + \theta$ 。

從每盡端線上之任何點畫垂線至 X 軸線，若是所成之直角

三角 AOB 與 QCD 是同形三角，並除 OC 是負數外，餘邊皆是正數。



(108)

$$\text{則 } \sin (90^\circ + \theta) = \frac{CD}{OD} = \frac{OA}{OB} = \cos \theta。$$

$$\tan (90^\circ + \theta) = \frac{CD}{OC} = -\frac{OA}{AB} = -\cot \theta。$$

例題一 $\sin 130^\circ 15' = \sin (90^\circ + 40^\circ 15') = \cos 40^\circ 15'。$

查餘弦表 $\cos 40^\circ 15' = 0.7633。$

例題二 $\tan 116^\circ 20' = \tan (90^\circ + 26^\circ 20') = -\cot 26^\circ 20'。$

因 $\cot \theta$ 之函數是 $\tan (90 - \theta)$ 之函數，則 $-\cot 26^\circ 20' = -\tan 63^\circ 40'。$

查正切表 $-\tan 63^\circ 40' = -2.0204。$

一角之比率與其負數角之比率間的關係 以下對於正數角與負數角之比率間的關係，在任何角度 θ 中皆是真確。

$$\sin (-\theta) = -\sin \theta。$$

$$\cos (-\theta) = \cos \theta。$$

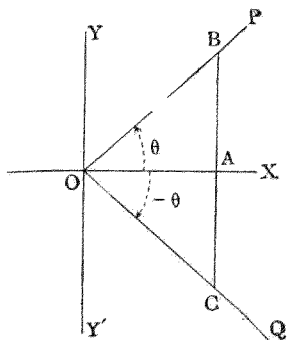
$$\tan(-\theta) = -\tan\theta.$$

$$\cot(-\theta) = -\cot\theta.$$

$$\sec(-\theta) = \sec\theta,$$

$$\csc(-\theta) = -\csc\theta.$$

【證】 如(109)圖， XOP 角 $=\theta$ ，並 XOQ 角 $=-\theta$ ，從在每盡端線上之任何點畫一垂線至 X 軸線，若是所成之直角三角 OAB 與 OAC 是同形的三角，每邊皆是正數，惟 AC 是負數。



(144)

$$\begin{aligned} \text{則 } \sin(-\theta) &= \frac{AC}{OC} = -\frac{AB}{OB} \\ &= -\sin\theta. \end{aligned}$$

$$\cos(-\theta) = \frac{OA}{OC} = \frac{OA}{OB} = \cos\theta.$$

$$\cot(-\theta) = \frac{OA}{AC} = -\frac{OA}{AB} = -\cot\theta.$$

例題一 $\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -0.5。$

例題二 $\tan(-46^\circ 10') = -\tan 46^\circ 10' = -1.0416。$

習 題 一 百 十 一

畫一圖以證以下之各題：

1. $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta。$

2. $\tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta。$

3. $\sec (90^\circ - \theta) = \csc \theta$. 4. $\tan (180^\circ - \theta) = -\tan \theta$.
 5. $\cot (180^\circ - \theta) = -\cot \theta$. 6. $\sec (180^\circ - \theta) = -\sec \theta$.
 7. $\csc (180^\circ - \theta) = \csc \theta$. 8. $\cos (90^\circ + \theta) = -\sin \theta$.
 9. $\cot (90^\circ + \theta) = -\tan \theta$. 10. $\sec (90^\circ + \theta) = -\csc \theta$.
 11. $\tan (-\theta) = -\tan \theta$. 12. $\sec (-\theta) = \sec \theta$.

用函數表查下值：

13. $\sin 140^\circ$ 14. $\cos 150^\circ$
 15. $\tan 170^\circ$ 16. $\cos (-49^\circ)$
 17. $\tan (-17^\circ)$ 18. $\cot (-125^\circ)$
 19. $\sin 159^\circ 40'$ 20. $\cos (-117^\circ 30')$
 21. $\tan (-156^\circ 10')$

任何角之比率間的關係 如第三十六章中所述。

$$1. \sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}, \text{ 或 } \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$2. \cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}, \text{ 或 } \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$3. \tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}, \text{ 或 } \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

從定義所得：

副正弦 *versedsine* θ , 簡寫 $\text{vers} \theta = 1 - \cos \theta$.

副餘弦 *coversedsine* θ , 簡寫 $\text{covers} \theta = 1 - \sin \theta$.

以下之真確可易證明, θ 可為任何值之角。

$$(a) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1,$$

$$(b) \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta,$$

$$(c) \csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta,$$

$$(d) \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$(e) \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

【證】 (a) 從定義，參看(110)圖，

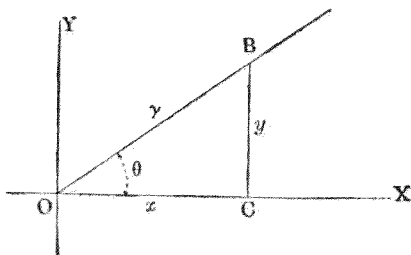
$$\sin^2\theta = \frac{y^2}{r^2}, \text{ 與 } \cos^2\theta = \frac{x^2}{r^2}.$$

將上兩項相加：

$$\text{則 } \sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{y^2 + x^2}{r^2}$$

但 $y^2 + x^2 = r^2$ ，因三角 OCB 是一直角三角。

$$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{r^2}{r^2} = 1.$$



(110)

【證】 (b) 從定義

$$\sec^2\theta = \frac{r^2}{x^2}, \text{ 並 } \tan^2\theta = \frac{y^2}{x^2}$$

$$\text{因 } \frac{r^2}{x^2} = \frac{y^2 + x^2}{x^2} = 1 + \frac{y^2}{x^2},$$

$$\therefore \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta。$$

【證】(c) 從定義

$$\csc^2\theta = \frac{r^2}{y^2}, \text{ 並 } \cot^2\theta = \frac{x^2}{y^2}$$

$$\text{因 } \frac{r^2}{y^2} = \frac{y^2 + x^2}{y^2} = 1 + \frac{x^2}{y^2},$$

$$\therefore \csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta。$$

【證】(d) 從定義

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}},$$

$$\text{因 } \frac{y}{r} = \sin\theta, \text{ 並 } \frac{x}{r} = \cos\theta。$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

【證】(e) 從定義

$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}},$$

因 $\frac{x}{r} = \cos\theta$, 並 $\frac{y}{r} = \sin\theta$,

$$\therefore \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

習 題 一 百 十 二

1. 證明 $\cot\theta + \tan\theta = \frac{1}{\csc\theta\sec\theta}$ 。
2. 所給 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, 求 $\sin\theta$, 與 $\cos\theta$ 。
3. 所給 $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$, 求 $\sec\theta$, 與 $\tan\theta$ 。
4. 所給 $\csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$, 求 $\csc\theta$, 與 $\cot\theta$ 。
5. 證明 $\csc^2\theta + \sec^2\theta = \frac{1}{\csc^2\theta\sec^2\theta}$
6. 證明以下之關係:
(a) $\cos\theta \cdot \tan\theta = \sin\theta$. (b) $\sin\theta \cdot \cot\theta = \cos\theta$.
(c) $\sec\theta \cdot \cot\theta = \csc\theta$. (d) $\csc\theta \cdot \tan\theta = \sec\theta$.
7. 用已知之公式求其他之函數。
(a) 當 $\sin\theta = \frac{1}{2}$, (b) 當 $\cos\theta = \frac{3}{4}$, (c) 當 $\tan\theta = 3$ 。
8. 所給 $\sin\theta = \frac{5}{13}$, 求 $\cos\theta$ 及 $\tan\theta$ 之函數。
9. 若 $\sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \sin^2\theta}$, 則 θ 之最小的值是多少度?
10. 用表尋以下各值: (1) $\sin 122^\circ 20'$ (2) $\cos 110^\circ 44'$,

- (3) $\tan 163^\circ 15'$, (4) $\cot 172^\circ 50'$, (5) $\cos (-42^\circ 16')$,
 (6) $\tan (-21^\circ 49')$.

畫正弦圖解之曲線 在第三十三章中曾經解釋畫代數方程的圖解法, 三角的函數亦可以曲線代表, 畫法相同。

例題 畫 $y = \sin x$ 之曲線,

選擇相當的角度為 x 之值並從正弦表上查得 y 之值。

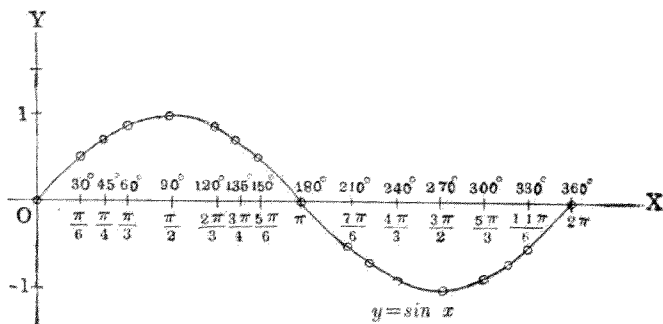
x 之值: $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ,$
 $180^\circ, 210^\circ, 225^\circ$ 。

y 之值: $0, 0.5, 0.7, 0.87, 1, 0.87, 0.7, 0.5, 0,$
 $-0.5, -0.7$ 。

x 之值: $240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 315^\circ, 330^\circ, 360^\circ$ 。

y 之值: $-0.87, -1, -0.87, -0.7, -0.5, 0$ 。

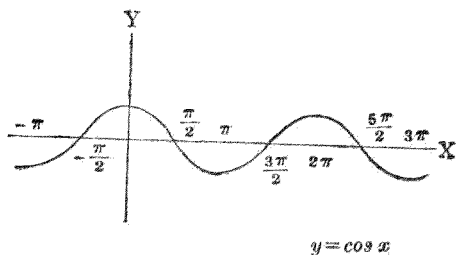
選擇一相當的單位在 X 軸線與 Y 軸線上, 並畫點顯示如 (111) 圖, 用角度作橫坐標並正弦函數為縱坐標。



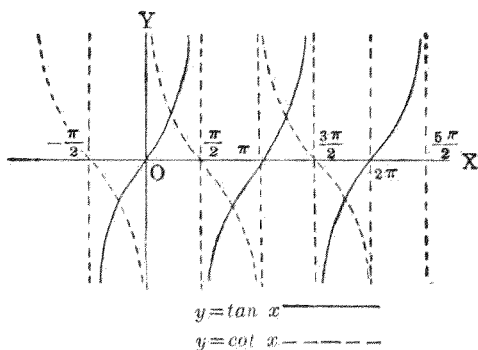
(111)

第(111)圖之圖解謂之正弦曲線，此項曲線延袤無限，若取角度在 360° 與 720° 之間，或取角度之值少於零度，則曲線有同樣形狀，代表 x 與 y 之長度的單位可以改變，曲線可以增長或減短，然仍有同樣形狀。

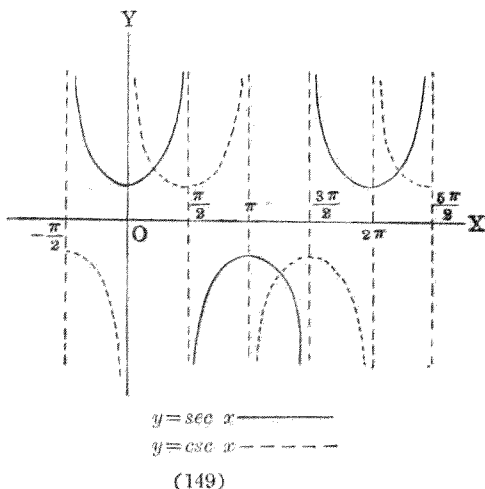
餘弦正切餘切正割與割餘之曲線 從選擇相當的 x 角度之值與相符的 y 之值，則得縱坐標之點，畫成曲線如(112)圖，(113)圖；與(114)圖。



(112)



(113)



習 題 一 百 十 三

1. 畫 $y = \sin x$ 之曲線，用各種單位作 x 與 y 之值。
2. 畫 $y = \cos x$ 之曲線，由 $x = 0^\circ$ 至 $x = 360^\circ$ 。
3. 畫 $y = \tan x$ ，與 $y = \cot x$ 之曲線，由 $x = 0^\circ$ 至 360° 。
4. 畫 $y = \sin x + \cos x$ 之曲線，由 $x = 0^\circ$ 至 $x = 180^\circ$ 。
5. 畫 $y = \cos^2 x - \sin^2 x$ 之曲線，由 $x = 0^\circ$ 至 $x = \frac{\pi}{4}$ 。
6. 畫 $y = \cos^{-1} \frac{x}{4}$ 之曲線，由 $x = 0$ 至 $x = 3$ 。
7. 畫 $y = \sec x$ ，與 $y = \csc x$ 之曲線，由 $x = 0^\circ$ 至 $x = 360^\circ$ 。

有圓轉的動作一點之拋出地位 例如一點 P ，如 (115) 圖，

運動時環繞一 3 吋半徑之豎立圈反時針之方向轉動，其起始動作時與半徑成一水平線並運動有一角度的速度每 10 秒鐘一公轉，畫一曲線顯示 P 點在直立的直徑上在任何時從中心點 O 拋出之距離。

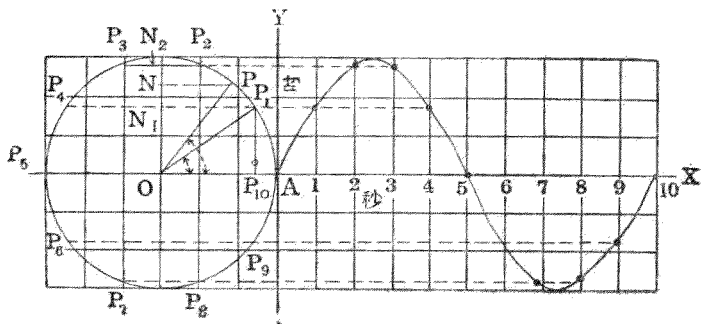
解說 用中心點 O 畫一 3 吋半徑之圓，用規尺亦可。在圓中 P 點由 A 起始，在一秒鐘後 OP 轉至 OP_1 之地位，經過 $36^\circ = 0.6283$ 弧度，在二秒鐘後至 OP_2 之地位，經過 $72^\circ = 1.2566$ 弧度，以此類推至 OP_3, OP_4 以至 OP_{10} ，參考(115)圖。

N_1, N_2 等點是 P_1, P_2 等點在豎立直徑上拋出之地位。

延長水平的直徑 OA 並在其上劃記秒鐘之數。

按每秒鐘畫一點其縱坐標與由 O 至 N 之距離相符，接連各點則成一曲線，在此曲線上之任何縱坐標 Y 是在時間 t 秒， P 點在豎立直徑上由中心點 O 拋出之地位。

所需注意者曲線之縱坐標由 0 增加至 +3，由 +3 低減至



(115)

0, 並由 0 至 -3 , 由 -3 增加至 0, 此種曲線是兩同形部份所成, 一在水平線上並一在水平線下, 合成曲線之循環。

查看上圖可顯示每秒鐘並每連續公轉, 復得一同形的曲線。

因 OP 每秒鐘轉過 36° , AOP 角 $=36 t^\circ = 0.6283 t$ 弧度, 因直角三角 OPN , $y=ON=OP \sin 36t^\circ = 3 \sin 36 t^\circ$,

或普通式, $y=r \sin wt$, w 代表每秒鐘轉過之角度, r 代表圓之半徑, t 代表時間以秒計, 以上是曲線之方程式。

由上可見, 若一直線長 r 吋如一曲柄, 當 $t=0$ 時, 在水平地位起始運動並在一直面上轉動有一平齊的角速度每秒 w , 運動之一端的拋出在一直立線上有一運動以公式代表。

$$y=r \sin wt,$$

同樣以公式 $y=r \cos wt$, 代表運動之一端拋出在一水平線上。

若 OP 代表一機器之曲柄, 連接桿比較甚長, 叉頭之運動以 N 點代表, 由方程式 $y=r \sin wt$ 代之。

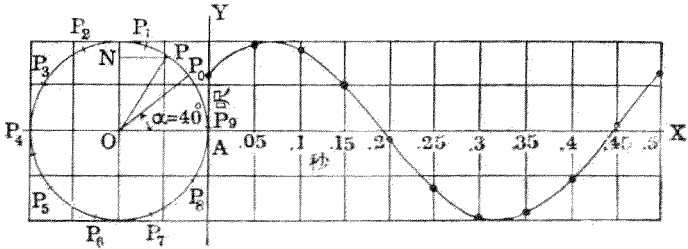
如上之簡單有時期的運動有時以方程式 $y=r \sin wt$ 代之, 並有時以方程式 $y=r \cos wt$ 。第一式是量時間當 OP 在簡單有時期的運動線中時, 第二式是量時間當 OP 與簡單有時期的運動線成垂直時。

若時間之計算是在其他之時則用方程式 $y=r \sin (wt+a)$, a 是在量 t 時, OP 與 OA 線所在之角度。

例如一曲柄 OP , (如 116 圖) 長 2 呎, 從一地位起始動作成

一角度 $a=40^\circ$ 與 OA 當 $t=0$ ，曲柄在一直豎平面中向正向轉動每秒鐘二公轉，畫一曲線顯示 P 在一直立直徑上拋出之地位。

【解說】 畫一 2 呎半徑之圓，延長水平軸線至右，並代表足敷一公轉所需之時(即半秒鐘)用相當的規尺。



(116)

當 $t=0$ 時， OP 從 OP_0 之地位起始行動使 AOP_0 角 = $a=40^\circ$ ，每秒鐘 OP 轉過 720° ，或每 0.05 秒鐘轉過 $36^\circ=0.6283$ 弧度，在此處每 0.05 秒鐘畫點圖解，每 0.05 秒鐘曲柄自由一端之地位在 $P_0, P_1, P_2, \dots, P_9$ 等直待一公轉完成，此項地位由 40° 起始每隔 36° 。

在任何時 t ， OP 之地位與 OA 成 AOP 角 = $wt+a$ ， P 點之拋出在 N ，從 O 之距離是

$$ON=OP \sin (wt+a) \text{ 或 } ON=2\sin(720t^\circ+a)。$$

曲線之普通方程式是 $y=r \sin (wt+a)$

習 題 一 百 十 四

1. 一機器之曲柄 18 吋長從水平線地位起始在一直豎的平

面中順正向轉動，速率每秒鐘 0.7854 弧度，曲柄之運動端拋出在一直豎線上成一簡單有時期的運動，畫一曲線其縱坐標顯示曲柄在不論何時由行徑中心拋出之地位。

2. 求第(1)題之曲線的方程式，並求縱坐標之值，在 $t=0.5$ 及 $t=2.3$ 之時。
3. 一曲柄 8 吋長在起始運動之地位是與水平線成 55° ，轉動順正向，速率每分鐘 20 公轉，畫一曲線顯示曲柄之運動端在直豎線拋出之地位。
4. 求第(3)題之曲線的方程式，求縱坐標之值在 $t=1.5$ 秒時。
5. 畫曲線以代表以下之運動： $y=3.5 \sin(3.5t+36^\circ)$ 。
6. 畫曲線 $y=12 \sin(1.88t+0.44)$ 。
7. 畫曲線 $y=2.5 \sin\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{12}\right)$ 。
8. 畫曲線 $y=r \sin \frac{\pi}{2}t$ 與 $y=r \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$ 在同軸線上，

注意曲線上之最高點是被恆角 $\frac{\pi}{4}$ 分開。

9. 畫曲線(1) $y=r \sin \frac{\pi}{4}t$ ，(2) $y=r \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}t\right)$ ，(3)

$y=c \cos \frac{\pi}{4}t$ 在同軸線上。

10. 畫在同軸線上以下之曲線：(1) $y=r \sin \pi t$ ，

$$(2)y = r \sin \frac{\pi}{2} t, \quad (3)y = r \sin \frac{\pi}{8} t,$$

11. 畫在同軸線上以下之曲線： (1) $y = 40 \sin \theta$,

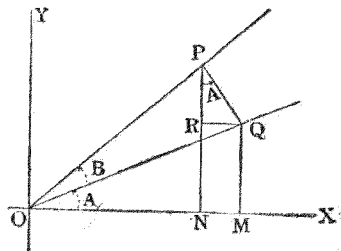
$$(2)y = 3 \sin \theta, \quad (3)y = 20 \sin 2\theta.$$

第四十章 多於單一角度之三角的比率

在本章中將提出許多函數，此種函數在實用上及在數學中之用處甚廣，以下所列之公式用作根據不復將其證明及解釋其用途。

兩個角度之和與其較的函數

以下之公式解釋兩角之和與兩角之較的函數為分開的角之函數，此等函數亦稱謂三角之公式的加數與減數。



(117)

$$(a) \sin (A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A.$$

$$(b) \sin (A-B) = \sin A \cos B - \sin B \cos A.$$

$$(c) \cos (A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

$$(d) \cos (A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B.$$

$$(e) \tan (A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$(f) \tan (A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

【證】 (a) A 角小於 90° , B 角小於 90° , 並 $(A+B)$ 角小於 90° ; 按(117)圖, XOQ 角等於 A , 並 QOP 角等於 B , 所以 XOP 角 $= A+B$ 。

畫 NP , QP , QR 並 MQ 依次垂直於 OX , OQ , NP , 與 OX , 則 RFQ 角 $= A$,

$$\sin(A+B) = \frac{NP}{OP} = \frac{MQ+RP}{OP} = \frac{MQ}{OP} + \frac{RP}{OP}.$$

但 $MQ = OQ \sin A$, 並 $RP = QP \cos A$, 因 OMQ 與 QRP 是直角三角, 將此值代 MQ 與 RP 。

$$\sin(A+B) = \frac{OQ \sin A}{OP} + \frac{QP \cos A}{OP}.$$

$$\therefore \sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A.$$

公式 (b) 至 (f) 可以同樣證明。

例題一 所給 $\sin 45^\circ$ 與 $\sin 30^\circ$ 之函數, 求 $\sin 15^\circ$ 之值。

【解】 $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ = 0.7071 \times 0.8660 - 0.5 \times 0.7071 = 0.2588$ 。

例題二 核對公式 (e), 用 $A=16^\circ$, 及 $B=27^\circ$,

將此值代入公式,

$$\tan(16^\circ + 27^\circ) = \frac{\tan 16^\circ + \tan 27^\circ}{1 - \tan 16^\circ \tan 27^\circ}$$

從正切表中查 $\tan 16^\circ$ 及 $\tan 27^\circ$ 之值。

$$\tan 43^\circ = \frac{0.2867 + 0.5095}{1 - 0.2867 \times 0.5095} = 0.9325$$

一角之兩倍與一角之半的函數 由公式 (a), (c), 與 (e), 使

$A=B$, 則得以下公式:

$$1. \sin 2A = \sin A \cos A + \sin A \cos A = 2\sin A \cos A.$$

$$2. \cos 2A = \cos A \cos A - \sin A \sin A = \cos^2 A - \sin^2 A.$$

但 $\cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1.$

$$3. \tan 2A = \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A \cdot \tan A} = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$$

從以上之公式可得以下各公式:

$$4. \sin A = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2A}{2}}.$$

$$5. \cos A = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2A}{2}}.$$

$$6. \tan A = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A}} = \frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \frac{1 - \cos 2A}{\sin 2A}$$

例題一 查核公式(1), 用 $A=20^\circ$ 代入公式。

$$\begin{aligned} \text{【解】 } \sin 40^\circ &= 2\sin 20^\circ \cos 20^\circ. \\ &= 2 \times 0.3420 \times 0.9397. \end{aligned}$$

例題二 查核公式(5), 用 $A=35^\circ$, 代入公式。

$$\cos 35^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 70^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 0.3420}{2}} = 0.81915.$$

改積數為和與較並改和與較為積數之公式 以下之四公式用以解兩函數之積為和或較時最稱便利。

$$(a) \sin A \cos B = \frac{1}{2} \sin (A+B) + \frac{1}{2} \sin (A-B).$$

$$(b) \cos A \sin B = \frac{1}{2} \sin (A+B) - \frac{1}{2} \sin (A-B).$$

$$(c) \cos A \cos B = \frac{1}{2} \cos (A+B) + \frac{1}{2} \cos (A-B)。$$

$$(d) \sin A \sin B = -\frac{1}{2} \cos (A+B) + \frac{1}{2} \cos (A-B)。$$

以上之四公式用以解兩函數之和與較爲積數，在用對數計算時至爲便利。

$$(e) \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)。$$

$$(f) \sin A - \sin B = 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(A-B)。$$

$$(g) \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)。$$

$$(h) \cos A - \cos B = -2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(A-B)。$$

習 題 一 百 十 五

1. 求 $\sin 90^\circ$, $\cos 90^\circ$ 及 $\tan 90^\circ$ 之值, 用兩角之函數的公式, 使 $A=60^\circ$, $B=30^\circ$ 。
2. 求 $\sin (A+B)$, 若 $\sin A = \frac{3}{5}$, 並 $\sin B = \frac{4}{5}$, 兩角均爲銳角, 並求 $\cos (A+B)$ 之值。
3. 求 $\cos (A-B)$, 若 $\cos A = \frac{5}{13}$, 並 $\cos B = \frac{12}{13}$, 兩角皆是銳角, 並求 $\sin (A-B)$ 之值。

4. 求 $\tan (A+B)$, 若 $\tan A=2$, 並 $\tan B=3$, 兩角皆是銳角, 並求 $(A+B)$ 角之度數。
5. 給 30° 與 45° 之函數, 求 $\sin 75^\circ$, $\cos 75^\circ$, 及 $\tan 75^\circ$ 之函數。
6. 從函數表上查 25° 與 18° 之函數, 求 $\sin 43^\circ$, $\cos 43^\circ$, $\sin 7^\circ$, 與 $\cos 7^\circ$ 之函數。
7. 從函數表上查 15° 之函數, 求 $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$ 與 $\tan 30^\circ$ 之函數。
8. 用 45° 之函數, 求 $\sin 22\frac{1}{2}^\circ$, $\cos 22\frac{1}{2}^\circ$, 與 $\tan 22\frac{1}{2}^\circ$ 之函數。
9. 所給 $\sin 2\theta = \frac{3}{5}$, 求 $\tan \theta$, 與 $\cot \theta$ 之函數。
10. 顯示 $\cos 5\theta + \cos 3\theta = 2 \cos 4\theta \cos \theta$ 。
11. 顯示 $\sin 7\theta - \sin 3\theta = 2 \cos 5\theta \sin 2\theta$ 。
12. 顯示 $\cos 125^\circ - \cos 75^\circ = -2 \sin 100^\circ \sin 25^\circ$ 。
13. 解 $\sin 7a + \sin 5a$ 為積數。
14. 解 $\cos 46^\circ + \cos 28^\circ$ 為積數。
15. 顯示 $\sin 575^\circ \cos 927^\circ + \sin 927^\circ \cos 575^\circ = \sin 1502^\circ$ 。
16. 顯示 $\frac{\tan 327^\circ + \tan 846^\circ}{1 - \tan 327^\circ \tan 846^\circ} = \tan 1173^\circ$ 。
17. 求 $\sin \frac{11\pi}{6} \cos \frac{15\pi}{4} + \tan \frac{9\pi}{4} \cot \frac{5\pi}{2}$ 之值。

18. 求 $\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)\sin\frac{19\pi}{6} + \cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$ 之值。

19. 若 $\sin A = -\frac{1}{7}$ ，並 A 是在第三象限， $\cos B = \frac{3}{4}$ ，並 B 是在第一象限，求 $\sin(A+B)$ ， $\sin(A-B)$ ，及 $\tan(A+B)$ 之值。

20. 顯示 $\frac{\sin 47^\circ + \sin 17^\circ}{\cos 47^\circ + \cos 17^\circ} = \tan 32^\circ$ 。

21. 顯示 $\frac{\sin 3a + \sin 5a}{\cos 3a - \cos 5a} = \cot a$ 。

22. 顯示 $\frac{\sin 67^\circ - \sin 23^\circ}{\cos 67^\circ + \cos 23^\circ} = \tan 22^\circ$ 。

23. 在一直角三角中 $\cos a = \frac{b}{c}$ ， $\cos B = \frac{a}{c}$ ，顯示：

$$\sin \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{c-b}{2c}}, \sin \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{c-a}{2c}},$$

24. 若 a 是少於 360° ，則 a 是在何象限，若 $\sin \frac{1}{2} a$ 是負數？是正數？若 $\tan \frac{1}{2} a$ 是負數？是正數？若 $\cot \frac{1}{2} a$ 是負數？是正數？若 $\sec \frac{1}{2} a$ 是負數？是正數？

第四十一章 三角之分解

【事實】 非直角三角皆謂斜的三角。

斜的三角可以剖解若給有三個原素，極少其中之一是邊。

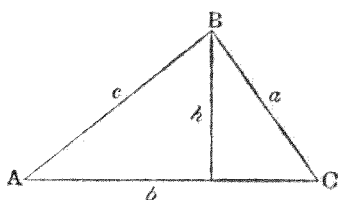
於是以下之四事實發生。

事實一 所給任何一邊及任何兩角。

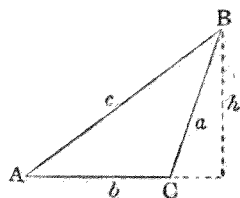
事實二 所給任何二邊及對邊之一角。

事實三 所給任何二邊及其包含之角。

事實四 所給三邊線。



(a)



(b)

(118)

斜三角可由畫高度線而分為二直角三角，並且由是可用剖解直角三角之方法而剖解之，但因節省時間常用所得之特設的公式以剖解斜三角，此種較簡的公式將解釋於下。

正弦(Sine)之定律 在任何三角中，邊與對角之正弦成比例，按(118)圖使 ABC 為任何三角，在 (a) 圖或 (b) 圖中，因直角三角之關係， $h = c \sin A$ ，及 $h = a \sin C$ 。

$$\therefore c \sin A = a \sin C,$$

以 $\sin C \sin A$ 除兩邊，則：

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

同樣由 C 點畫高度線，可證得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

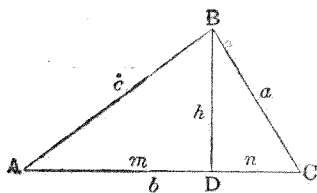
從正弦之定律可以寫成三個公式。

$$(1) \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \quad (2) \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \quad (3) \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

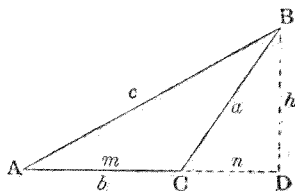
以上公式的任何之一包括三角之四原素，此可顯明若任何三原素包括入以上公式之一，可以求得其餘的原素。

是以，若在 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 中，已給 A, B ，與 b 之值，可以求 a 。

餘弦 (Cosine) 之定律 在任何三角中，任何一邊之平方，等於其餘兩邊的平方之和減去此兩邊的兩倍與其包含角的餘弦之積數。



(a)



(b)

(119)

【證】 在(119)圖中，或(a)圖，或(b)圖畫高度線 h ，由 B 點至 AC ，使 $AD = m$ ，並 $DC = n$ 在(a)圖，或(b)圖中，因直角

三角之關係， $a^2 = h^2 + n^2$ 。

按(a)圖， $n = b - m = b - c \cos A$ 。

按(b)圖， $n = m - b = c \cos A - b$ 。

在任何圖中， $n^2 = b^2 - 2bc \cos A + c^2 \cos^2 A$ 。

並在任何圖中， $h^2 = c^2 \sin^2 A$ 。

以此 n^2 與 h^2 之值代入方程式 $a^2 = h^2 + n^2$

$$a^2 = c^2 \sin^2 A + b^2 - 2bc \cos A + c^2 \cos^2 A。$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) - 2bc \cos A。$$

因 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ 。

則 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 。

同樣可得以下之證明：

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B。$$

並 $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos C$ 。

由以上各公式解剖 $\cos A$ ， $\cos B$ ， 與 $\cos C$ 。

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

用以上之公式若知三角的各邊的長可以求 A, B ， 與 C 之角度。

剖解三角之方針 可知從正弦定律與餘弦定律所得之公式包

括三角之四原素。

剖解三角時選擇一公式包括已知的三原素而求其餘之原素。

核對答數(1)構畫三角圖,或(2)用其他不同的公式核算。

事實一 已給一邊與二角,例如所給 $a=45$, $B=36^\circ 17'$, 與 $C=83^\circ 32'$; 求 b , c , 與 A 。 構 圖

公式之選擇

$$1. A=180-(B+C).$$

$$2. \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \therefore b = \frac{a \sin B}{\sin A}$$

$$3. \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, \therefore c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

用天然函數計算。

$$A=180-(36^\circ 17'+83^\circ 32')=60^\circ 11' \quad (120)$$

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{45 \times .5918}{.8676} = 30.70。$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{45 \times .9937}{.8676} = 51.54。$$

用對數計算,查表所得。

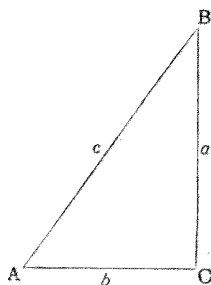
$$\log 45 = 1.6532 \quad \log 83^\circ 32' = 9.9972$$

$$\log \sin 36^\circ 17' = 9.7722 \quad \log 60^\circ 11' = 9.9384$$

$$\log b = \log a + \log \sin B - \log \sin A,$$

$$\therefore \log b = \log 45 + \log \sin 36^\circ 17' - \log \sin 60^\circ 11'.$$

$$\therefore \log b = 1.6532 + 9.7722 - 9.9384 = 1.4870。$$



$$\therefore b = 30.69。$$

$$\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A, \quad \therefore \log c = \log 45 + \log \sin 83^\circ 32' - \log 60^\circ 11',$$

$$\log c = 1.6532 + 9.9972 - 9.9384 = 1.7120。$$

$$\therefore c = 51.53。$$

以上之答數可用餘弦定律核對。

事實二 所給兩邊及一邊之對角：已給此等部份，(1) 祇有一個答數，此即僅能成一個三角，(2) 能有兩個答數此即能成兩個三角與已給部份相符，(3) 無剖解法，因不能成三角。

用已給部份構畫三角圖即知有幾個剖解。

例題一 所給 $a = 15$ ，與 $c = 10$ ，與 $A = 40^\circ 30'$ 求 b ， B ，與 C 。

用上值構圖顯示祇有一個答數。

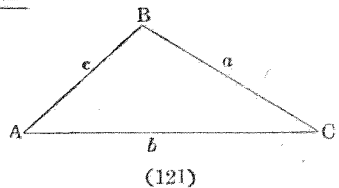
公式之選擇

構圖

$$1. \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, \quad \therefore \sin C = \frac{c \sin A}{a}$$

$$2. B = 180^\circ - (A + C)$$

$$3. \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \quad \therefore b = \frac{a \sin B}{\sin A}$$



計算上題可用天然函數或用對數。

例題二 所給 $a = 20$ ， $c = 25$ ，與 $A = 52^\circ 40'$ ，求 b ， B ，與 C 。

從構圖可知有兩個三角 ABC 與 ABC' 皆符所給數。

公式之選擇

$$1. \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\therefore \sin C = \frac{c \sin A}{a}$$

$$2. C' = 180^\circ - C$$

$$3. B = 180^\circ - (A + C).$$

$$4. B = 180^\circ - (A + C').$$

$$5. \frac{a}{\sin A} = \frac{b'}{\sin B'}, \therefore b' = \frac{a \sin B'}{\sin A},$$

$$6. \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \therefore b = \frac{a \sin B}{\sin A}$$

例題三 所給 $a=12$, $c=20$, 與 $A=62^\circ 20'$, 求 b , B , 與 C 。

從構畫三角圖, 如 (122) 圖, 可見 a 邊太短故無答數。

事實三 兩邊及邊中包含之角:

例如所給 $b=45.2$, $a=56.7$, 與 $C=47^\circ 45'$; 求 c , A , 與 B 。

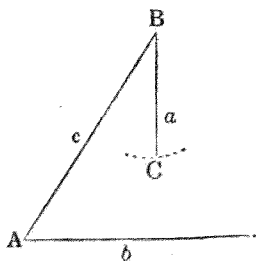
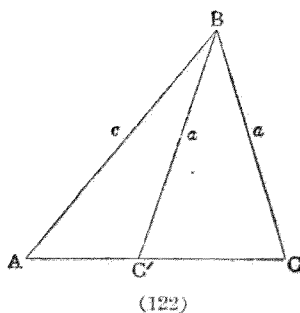
公式之選擇

$$1. c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$$

$$2. \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, \therefore \sin A = \frac{a \sin C}{c}$$

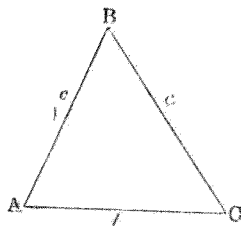
$$3. \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \therefore \sin B = \frac{b \sin C}{c}$$

構 圖



(123)

構 圖



(124)

算法用天然函數表：

$$c = \sqrt{56 \cdot 7^2 + 45 \cdot 2^2 - 2 \times 56 \cdot 7 \times 45 \cdot 2 \times 0 \cdot 6723} = 42 \cdot 56。$$

$$\sin A = \frac{56 \cdot 7 \times 0 \cdot 7402}{42 \cdot 56} = 0 \cdot 9861, \quad \therefore A = 80^\circ 26'。$$

$$\sin B = \frac{45 \cdot 2 \times 0 \cdot 7402}{42 \cdot 56} = 0 \cdot 7861, \quad \therefore B = 51^\circ 49'。$$

【核對】 $A + B + C = 180^\circ$, $80^\circ 26' + 51^\circ 49' + 47^\circ 45' = 180^\circ$ 。

事實四 所給三邊線，例如：所給 $a = 10$, $b = 12$, $c = 15$, 求 A , B , 與 C 。

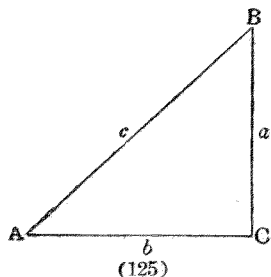
公式之選擇

構 圖

$$1. \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$2. \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$3. \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$



【計算】 $\cos A = \frac{12^2 + 15^2 - 10^2}{2 \times 12 \times 15} = 0 \cdot 7472, \quad \therefore A = 41^\circ 39'。$

$$\cos B = \frac{10^2 + 15^2 - 12^2}{2 \times 10 \times 15} = 0 \cdot 6033, \quad \therefore B = 52^\circ 53 \cdot 5'。$$

$$\cos C = \frac{10^2 + 12^2 - 15^2}{2 \times 10 \times 12} = 0 \cdot 0792, \quad \therefore C = 85^\circ 27 \cdot 6'。$$

【核對】 $A + B + C = 180$,

$$41^\circ 39' + 52^\circ 53 \cdot 5' + 85^\circ 27 \cdot 6' = 180^\circ 0 \cdot 1'。$$

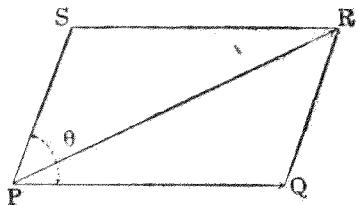
習 題 一 百 十 六

1. 從正弦定律, 求 b 以 a, A , 與 B 等名詞答; 求 C 以 b, c , 與 B 等名詞答。用以下所給之三原素, 求其餘的原素並核對之:
2. $A=44^{\circ}6.5'$, $B=57^{\circ}42.5'$, $a=4.23$ 吋。
3. $A=48^{\circ}39.2'$, $C=115^{\circ}23.8'$, $a=14.83$ 吋。
4. $B=30^{\circ}36.8'$, $C=107^{\circ}15.5'$, $b=144$ 吋。
5. $C=44^{\circ}17.3'$, $b=14.33$ 吋, $c=13.67$ 吋。
6. $A=53^{\circ}16.5'$, $c=25.64$ 吋, $a=31.4$ 吋。
7. $a=79.8$ 吋, $b=46.7$ 吋, $B=23^{\circ}19.6'$ 。
8. $b=17$, $c=16$, $A=47^{\circ}16.4'$ 。
9. $a=99.4$, $c=90.4$, $B=11^{\circ}7.8'$ 。
10. $a=21$, $b=24$, $c=31$ 。
11. $a=2.46$, $b=3.5$, $c=4.2$ 。
12. $a=61.52$, $b=81.74$, $c=75.34$ 。
13. $a=120$ 呎, $b=146$ 呎, $C=41^{\circ}25'$, 求 c 之長。
14. $b=450$ 呎, $A=82^{\circ}30'$, $C=67^{\circ}42'$, 求 c 之長。
15. P 與 Q 在一河之兩對岸, 因河中有小島故不能見, 一直線 AB 經過 Q , 並量度以下之呎吋: $AQ=756$ 呎, $CB=562$ 呎, QAP 角 $=47^{\circ}28.6'$, 並 QBP 角 $=57^{\circ}45'$, 求 QP 之距離。

16. 從水平面上一點至山頂之仰視線是 $23^{\circ}46'$; 並一 45 呎高之塔在山頂上, 由此點之視線至塔頂與脚則含角度 $5^{\circ}16'$, 求山之高。
17. 甲乙二人在水平面上相距 100 量竿, 同時見一飛機, 在甲處之仰視角是 $68^{\circ}25'$, 在乙處之仰視角是 $55^{\circ}58.2'$, 視線與水平面所成之斜角在 A 是 $43^{\circ}27'$, 在 B 是 $23^{\circ}45'$, 求飛機之高。
18. B 距 A 是 42 哩, 方向是西偏北 22° , 並 C 距 A 58 哩, 方向東偏北 73° , 求 C 距 B 之地位。

合力(Resultant of forces) 若有二力以線 PQ 與 PS 代表如 (126) 圖, 在一物體上之 P 點動作, 則連合此項力的結果是與 PR 線代表之力相同, PQ 與 PS 是平行四邊形之邊線而 PR 是其對線, PR 力是謂 PQ 與 PS 之合力。

任何數力之合力是一單獨力而能發生與所給數力的連合結果相同。



(126)

求數個所給力之合力, 先尋任何二所給力之合力, 然後再尋第一合力與第三所給力之合力, 繼續尋求直待各力均已尋過。

若 $a, b, c,$ 與 $d,$ 如 (127) 圖是所給之力在 P 點動作, r_1 是 a 與 b 之合力, r_2 是 r_1 與 c 之合力, r_3 是 r_2 與 d 之合力,

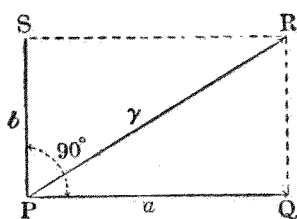
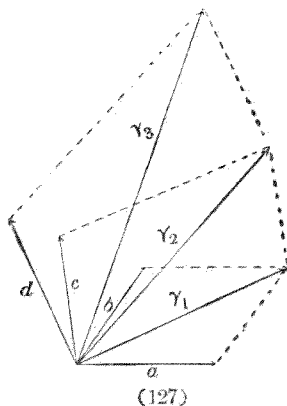
然則 r_3 是 a, b, c 與 d 之合力。

合力之算式 若二力之動作彼此成直角，則其合力是等於兩邊平方之和的方根。

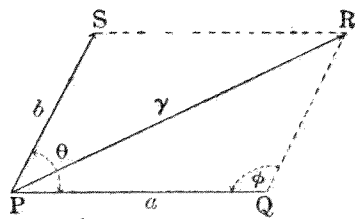
是以按(128)圖， $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ， r

之方向亦可尋求，因 $\tan QPR = \frac{b}{a}$ 。

若二力之動作成 θ 角，其結果可用餘弦定律以求合力。



(128)



(129)

是以按(129)圖， $r = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos\theta}$

合力之方向可用正弦定律以求之。

習 題 一 百 十 七

1. 所給二力是 40 磅，與 60 磅，動作點成 30° ，求合力之大小。
2. 所給一力是 500 磅向東動作，與另一力 700 磅向東北

動作，求合力之大小及方向。

3. 一飛機在 1000 呎之高度，向東飛行速率每小時 100 哩，擲下一炸彈，若不計空氣之阻力則炸彈在何處落地，若炸彈降落時，有風力動作其上，風力每小時 40 哩，風向南偏東 30° 。

【解】 求落下時所需之時間用公式 $s = \frac{1}{2}gt^2$, $g = 32$, 則 $\frac{1}{2}gt^2 = 1600$, 則得 $t = 10$ 秒鐘。

若不計風力，則炸彈將向東行從起點行動有飛機行 10 秒鐘之動程。

$$\text{此即 } \frac{100 \times 5280 \times 10}{60 \times 60} = 1467 \text{ 呎。}$$

在 10 秒鐘內風力將炸彈帶開之遠距

$$\text{是 } \frac{40 \times 5280 \times 10}{60 \times 60} = 586.7 \text{ 呎。}$$

移位之結果與求合力同，因以上求得之兩數可以一平行四邊形之邊線代表之。

∴ 炸彈落地時距降落點

$$\begin{aligned} &= \sqrt{1467^2 + 586.7^2 + 2 \times 1467 \times 586.7 \cos 120^\circ} \\ &= 1279 \text{ 呎。用正弦定律可求得炸彈墮落線之方向} \\ &\text{是東 } 23^\circ 24' \text{ 偏北。} \end{aligned}$$

4. 一汽車向西 36° 偏北行駛每小時 27 哩，風向東北吹每小時 30 哩，駕車人覺風向何方吹，速率是多少？

5. 一火車向西 35° 偏南駛行，而機車放出之蒸汽遺跡的方向是東 10° 偏北，風向東北吹；求風之速率。
6. 河向南流速度每小時 4 哩，一舟被風吹飄流向西南行每小時 15 哩，若風力在 40 分鐘後減小 70%，求船之地位。

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	123	456	789
1.0	0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374	4 8 12	17 21 25	29 33 37
1.1	0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755	4 8 11	15 19 23	26 30 34
1.2	0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106	3 7 10	14 17 21	24 28 31
1.3	1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430	3 6 10	13 16 19	23 26 29
1.4	1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732	3 6 9	12 15 18	21 24 27
1.5	1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014	3 6 8	11 14 17	20 22 25
1.6	2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279	3 5 8	11 13 16	18 21 24
1.7	2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529	2 5 7	10 12 15	17 20 22
1.8	2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765	2 5 7	9 12 14	16 19 21
1.9	2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989	2 4 7	9 11 13	16 18 20
2.0	3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201	2 4 6	8 11 13	15 17 19
2.1	3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404	2 4 6	8 10 12	14 16 18
2.2	3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598	2 4 6	8 10 12	14 15 17
2.3	3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784	2 4 6	7 9 11	13 15 17
2.4	3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962	2 4 5	7 9 11	12 14 16
2.5	3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133	2 3 5	7 9 10	12 14 15
2.6	4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298	2 3 5	7 8 10	11 13 15
2.7	4313	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456	2 3 5	6 8 9	11 13 14
2.8	4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609	2 3 5	6 8 9	11 12 14
2.9	4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757	1 3 4	6 7 9	10 12 13
3.0	4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900	1 3 4	6 7 9	10 11 13
3.1	4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038	1 3 4	6 7 8	10 11 12
3.2	5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172	1 3 4	5 7 8	9 11 12
3.3	5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302	1 3 4	5 6 8	9 10 12
3.4	5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428	1 3 4	5 6 8	9 10 11
3.5	5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551	1 2 4	5 6 7	9 10 11
3.6	5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670	1 2 4	5 6 7	8 10 11
3.7	5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786	1 2 3	5 6 7	8 9 10
3.8	5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899	1 2 3	5 6 7	8 9 10
3.9	5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010	1 2 3	4 5 7	8 9 10
4.0	6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117	1 2 3	4 5 6	8 9 10
4.1	6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222	1 2 3	4 5 6	7 8 9
4.2	6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325	1 2 3	4 5 6	7 8 9
4.3	6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425	1 2 3	4 5 6	7 8 9
4.4	6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522	1 2 3	4 5 6	7 8 9
4.5	6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618	1 2 3	4 5 6	7 8 9
4.6	6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712	1 2 3	4 5 6	7 7 8
4.7	6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803	1 2 3	4 5 5	6 7 8
4.8	6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893	1 2 3	4 4 5	6 7 8
4.9	6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981	1 2 3	4 4 5	6 7 8
5.0	6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067	1 2 3	3 4 5	6 7 8
5.1	7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152	1 2 3	3 4 5	6 7 8
5.2	7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235	1 2 2	3 4 5	6 7 7
5.3	7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316	1 2 2	3 4 5	6 6 7
5.4	7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396	1 2 2	3 4 5	6 6 7

角	sin.	tan.	cot.	cos.	角	sin.	tan.	cot.	cos.	
0°	0.0000	0.0000	∞	1.0000	90°	0.1392	0.1405	7.1154	0.9903	
10'	0.0029	0.0029	343.7737	1.0000	50'	10'	0.1421	0.1435	6.9682	0.9899
20'	0.0058	0.0058	171.8854	1.0000	40'	20'	0.1449	0.1465	6.8269	0.9894
30'	0.0087	0.0087	114.5887	1.0000	30'	30'	0.1478	0.1495	6.6912	0.9890
40'	0.0116	0.0116	85.9398	0.9999	20'	40'	0.1507	0.1524	6.5606	0.9886
50'	0.0145	0.0145	68.7531	0.9999	10'	50'	0.1536	0.1554	6.4348	0.9881
1°	0.0175	0.0175	57.2900	0.9998	89°	9°	0.1564	0.1584	6.3139	0.9877
10'	0.0204	0.0204	49.1039	0.9998	50'	10'	0.1593	0.1614	6.1970	0.9872
20'	0.0233	0.0233	42.9641	0.9997	40'	20'	0.1622	0.1644	6.0844	0.9868
30'	0.0262	0.0262	38.1885	0.9997	30'	30'	0.1650	0.1673	5.9758	0.9863
40'	0.0291	0.0291	34.3678	0.9996	20'	40'	0.1679	0.1703	5.8708	0.9858
50'	0.0320	0.0320	31.2416	0.9995	10'	50'	0.1708	0.1733	5.7694	0.9853
2°	0.0349	0.0349	28.6363	0.9994	88°	10°	0.1736	0.1763	5.6713	0.9848
10'	0.0378	0.0378	26.4316	0.9993	50'	10'	0.1765	0.1793	5.5764	0.9843
20'	0.0407	0.0407	24.5418	0.9992	40'	20'	0.1794	0.1823	5.4845	0.9838
30'	0.0436	0.0437	22.9038	0.9990	30'	30'	0.1822	0.1853	5.3955	0.9833
40'	0.0465	0.0466	21.4704	0.9989	20'	40'	0.1851	0.1883	5.3093	0.9827
50'	0.0494	0.0495	20.2056	0.9988	10'	50'	0.1880	0.1914	5.2257	0.9822
3°	0.0523	0.0524	19.0811	0.9986	87°	11°	0.1908	0.1944	5.1446	0.9816
10'	0.0552	0.0553	18.0750	0.9985	50'	10'	0.1937	0.1974	5.0658	0.9811
20'	0.0581	0.0582	17.1693	0.9983	40'	20'	0.1965	0.2004	4.9894	0.9805
30'	0.0610	0.0612	16.3499	0.9981	30'	30'	0.1994	0.2035	4.9152	0.9799
40'	0.0640	0.0641	15.6048	0.9980	20'	40'	0.2022	0.2065	4.8430	0.9793
50'	0.0669	0.0670	14.9244	0.9978	10'	50'	0.2051	0.2095	4.7729	0.9787
4°	0.0698	0.0699	14.3007	0.9976	86°	12°	0.2079	0.2126	4.7046	0.9781
10'	0.0727	0.0729	13.7267	0.9974	50'	10'	0.2108	0.2156	4.6382	0.9775
20'	0.0756	0.0758	13.1969	0.9971	40'	20'	0.2136	0.2186	4.5736	0.9769
30'	0.0785	0.0787	12.7062	0.9969	30'	30'	0.2164	0.2217	4.5107	0.9763
40'	0.0814	0.0816	12.2505	0.9967	20'	40'	0.2193	0.2247	4.4494	0.9757
50'	0.0843	0.0846	11.8262	0.9964	10'	50'	0.2221	0.2278	4.3897	0.9750
5°	0.0872	0.0875	11.4301	0.9962	85°	13°	0.2250	0.2309	4.3315	0.9744
10'	0.0901	0.0904	11.0594	0.9959	50'	10'	0.2278	0.2339	4.2747	0.9737
20'	0.0929	0.0934	10.7119	0.9957	40'	20'	0.2306	0.2370	4.2193	0.9730
30'	0.0958	0.0963	10.3854	0.9954	30'	30'	0.2334	0.2401	4.1653	0.9724
40'	0.0987	0.0992	10.0780	0.9951	20'	40'	0.2363	0.2432	4.1126	0.9717
50'	0.1016	0.1022	9.7882	0.9948	10'	50'	0.2391	0.2462	4.0611	0.9710
6°	0.1045	0.1051	9.5144	0.9945	84°	14°	0.2419	0.2493	4.0108	0.9703
10'	0.1074	0.1080	9.2553	0.9942	50'	10'	0.2447	0.2524	3.9617	0.9696
20'	0.1103	0.1110	9.0098	0.9939	40'	20'	0.2476	0.2555	3.9136	0.9689
30'	0.1132	0.1139	8.7769	0.9936	30'	30'	0.2504	0.2586	3.8667	0.9681
40'	0.1161	0.1169	8.5555	0.9932	20'	40'	0.2532	0.2617	3.8208	0.9674
50'	0.1190	0.1198	8.3450	0.9929	10'	50'	0.2560	0.2648	3.7760	0.9667
7°	0.1219	0.1228	8.1443	0.9925	83°	15°	0.2588	0.2679	3.7321	0.9659
10'	0.1248	0.1257	7.9530	0.9922	50'	10'	0.2616	0.2711	3.6891	0.9652
20'	0.1276	0.1287	7.7704	0.9918	40'	20'	0.2644	0.2742	3.6470	0.9644
30'	0.1305	0.1317	7.5958	0.9914	30'	30'	0.2672	0.2773	3.6059	0.9636
40'	0.1334	0.1346	7.4287	0.9911	20'	40'	0.2700	0.2805	3.5656	0.9628
50'	0.1363	0.1376	7.2687	0.9907	10'	50'	0.2728	0.2836	3.5261	0.9621
8°	0.1392	0.1405	7.1154	0.9903	82°	16°	0.2756	0.2867	3.4874	0.9613
	cos.	cot.	tan.	sin.	角	cos.	cot.	tan.	sin.	角

角	sin.	tan.	cot.	cos.	角	sin.	tan.	cot.	cos.		
16°	0.2756	0.2867	3.4874	0.9613	74°	24°	0.4067	0.4452	2.2460	0.9135	66°
10'	0.2784	0.2899	3.4495	0.9605	50'	10'	0.4094	0.4487	2.2286	0.9124	50'
20'	0.2812	0.2931	3.4124	0.9596	40'	20'	0.4120	0.4522	2.2113	0.9112	40'
30'	0.2840	0.2962	3.3759	0.9588	30'	30'	0.4147	0.4557	2.1943	0.9100	30'
40'	0.2868	0.2994	3.3402	0.9580	20'	40'	0.4173	0.4592	2.1775	0.9088	20'
50'	0.2896	0.3026	3.3052	0.9572	10'	50'	0.4200	0.4628	2.1609	0.9075	10'
17°	0.2924	0.3057	3.2709	0.9563	73°	25°	0.4226	0.4663	2.1445	0.9063	65°
10'	0.2952	0.3089	3.2371	0.9555	50'	10'	0.4253	0.4699	2.1283	0.9051	50'
20'	0.2979	0.3121	3.2041	0.9546	40'	20'	0.4279	0.4734	2.1123	0.9039	40'
30'	0.3007	0.3153	3.1716	0.9537	30'	30'	0.4305	0.4770	2.0965	0.9029	30'
40'	0.3035	0.3185	3.1397	0.9528	20'	40'	0.4331	0.4806	2.0809	0.9013	20'
50'	0.3062	0.3217	3.1084	0.9520	10'	50'	0.4358	0.4841	2.0655	0.9001	10'
18°	0.3090	0.3249	3.0777	0.9511	72°	26°	0.4384	0.4877	2.0503	0.8988	64°
10'	0.3118	0.3281	3.0475	0.9502	50'	10'	0.4410	0.4913	2.0353	0.8975	50'
20'	0.3145	0.3314	3.0178	0.9492	40'	20'	0.4436	0.4950	2.0204	0.8962	40'
30'	0.3173	0.3346	2.9887	0.9483	30'	30'	0.4462	0.4986	2.0057	0.8949	30'
40'	0.3201	0.3378	2.9600	0.9474	20'	40'	0.4488	0.5022	1.9912	0.8936	20'
50'	0.3228	0.3411	2.9319	0.9465	10'	50'	0.4514	0.5059	1.9768	0.8923	10'
19°	0.3256	0.3443	2.9042	0.9455	71°	27°	0.4540	0.5095	1.9626	0.8910	63°
10'	0.3283	0.3476	2.8770	0.9446	50'	10'	0.4566	0.5132	1.9486	0.8897	50'
20'	0.3311	0.3508	2.8502	0.9436	40'	20'	0.4592	0.5169	1.9347	0.8884	40'
30'	0.3339	0.3541	2.8239	0.9426	30'	30'	0.4617	0.5206	1.9210	0.8870	30'
40'	0.3365	0.3574	2.7980	0.9417	20'	40'	0.4643	0.5243	1.9074	0.8857	20'
50'	0.3393	0.3607	2.7725	0.9407	10'	50'	0.4669	0.5280	1.8940	0.8843	10'
20°	0.3420	0.3640	2.7475	0.9397	70°	28°	0.4695	0.5317	1.8807	0.8829	62°
10'	0.3448	0.3673	2.7228	0.9387	50'	10'	0.4720	0.5354	1.8676	0.8816	50'
20'	0.3475	0.3706	2.6985	0.9377	40'	20'	0.4746	0.5392	1.8546	0.8802	40'
30'	0.3502	0.3739	2.6746	0.9367	30'	30'	0.4772	0.5430	1.8418	0.8788	30'
40'	0.3529	0.3772	2.6511	0.9356	20'	40'	0.4797	0.5467	1.8291	0.8774	20'
50'	0.3557	0.3805	2.6279	0.9345	10'	50'	0.4823	0.5505	1.8165	0.8760	10'
21°	0.3584	0.3839	2.6051	0.9336	69°	29°	0.4848	0.5543	1.8040	0.8746	61°
10'	0.3611	0.3872	2.5826	0.9325	50'	10'	0.4874	0.5581	1.7917	0.8732	50'
20'	0.3638	0.3906	2.5603	0.9315	40'	20'	0.4899	0.5619	1.7796	0.8718	40'
30'	0.3665	0.3939	2.5386	0.9304	30'	30'	0.4924	0.5658	1.7675	0.8704	30'
40'	0.3692	0.3973	2.5172	0.9293	20'	40'	0.4950	0.5696	1.7556	0.8689	20'
50'	0.3719	0.4006	2.4960	0.9283	10'	50'	0.4975	0.5735	1.7437	0.8675	10'
22°	0.3746	0.4040	2.4751	0.9272	68°	30°	0.5000	0.5774	1.7321	0.8660	60°
10'	0.3773	0.4074	2.4545	0.9261	50'	10'	0.5025	0.5812	1.7205	0.8646	50'
20'	0.3800	0.4108	2.4342	0.9250	40'	20'	0.5050	0.5851	1.7090	0.8631	40'
30'	0.3827	0.4142	2.4142	0.9239	30'	30'	0.5075	0.5890	1.6977	0.8616	30'
40'	0.3854	0.4176	2.3945	0.9228	20'	40'	0.5100	0.5930	1.6864	0.8601	20'
50'	0.3881	0.4210	2.3750	0.9216	10'	50'	0.5125	0.5969	1.6753	0.8587	10'
23°	0.3907	0.4245	2.3559	0.9205	67°	31°	0.5150	0.6009	1.6643	0.8572	59°
10'	0.3934	0.4279	2.3360	0.9194	50'	10'	0.5175	0.6048	1.6534	0.8557	50'
20'	0.3961	0.4314	2.3183	0.9182	40'	20'	0.5200	0.6088	1.6426	0.8542	40'
30'	0.3987	0.4348	2.2998	0.9171	30'	30'	0.5225	0.6128	1.6319	0.8529	30'
40'	0.4014	0.4383	2.2817	0.9159	20'	40'	0.5250	0.6168	1.6212	0.8511	20'
50'	0.4041	0.4417	2.2637	0.9147	10'	50'	0.5275	0.6208	1.6107	0.8496	10'
24°	0.4067	0.4452	2.2460	0.9135	66°	32°	0.5299	0.6249	1.6002	0.8480	58°
	cos.	cot.	tan.	sin.	角		cos.	cot.	tan.	sin.	角

角	sin.	tan.	cot.	cos.	角	sin.	tan.	cot.	cos.
32°	0.5299	0.6249	1.6003	0.8480	58°	0.8293	0.8098	1.2349	0.7771
10'	0.5324	0.6289	1.5900	0.8465	50'	0.6316	0.8146	1.2276	0.7753
20'	0.5348	0.6330	1.5798	0.8450	40'	0.6338	0.8195	1.2203	0.7735
30'	0.5373	0.6371	1.5697	0.8434	30'	0.6361	0.8243	1.2131	0.7716
40'	0.5398	0.6412	1.5597	0.8418	20'	0.6383	0.8292	1.2059	0.7698
50'	0.5422	0.6453	1.5497	0.8403	10'	0.6406	0.8342	1.1988	0.7679
33°	0.5446	0.6494	1.5399	0.8387	57°	0.6428	0.8391	1.1918	0.7660
10'	0.5471	0.6536	1.5301	0.8371	50'	0.6450	0.8441	1.1847	0.7642
20'	0.5495	0.6577	1.5204	0.8355	40'	0.6472	0.8491	1.1778	0.7623
30'	0.5519	0.6619	1.5108	0.8339	30'	0.6494	0.8541	1.1708	0.7604
40'	0.5544	0.6661	1.5013	0.8323	20'	0.6517	0.8591	1.1640	0.7585
50'	0.5568	0.6703	1.4919	0.8307	10'	0.6539	0.8642	1.1571	0.7566
34°	0.5592	0.6745	1.4826	0.8290	56°	0.6561	0.8693	1.1504	0.7547
10'	0.5616	0.6787	1.4733	0.8274	50'	0.6583	0.8744	1.1436	0.7528
20'	0.5640	0.6830	1.4641	0.8258	40'	0.6604	0.8796	1.1369	0.7509
30'	0.5664	0.6873	1.4550	0.8241	30'	0.6626	0.8847	1.1303	0.7490
40'	0.5688	0.6916	1.4460	0.8225	20'	0.6648	0.8899	1.1237	0.7470
50'	0.5712	0.6959	1.4370	0.8208	10'	0.6670	0.8952	1.1171	0.7451
35°	0.5736	0.7002	1.4281	0.8192	55°	0.6691	0.9004	1.1106	0.7431
10'	0.5760	0.7046	1.4193	0.8175	50'	0.6713	0.9057	1.1041	0.7412
20'	0.5783	0.7089	1.4108	0.8158	40'	0.6734	0.9110	1.0977	0.7392
30'	0.5807	0.7133	1.4019	0.8141	30'	0.6756	0.9163	1.0913	0.7373
40'	0.5831	0.7177	1.3934	0.8124	20'	0.6777	0.9217	1.0850	0.7353
50'	0.5854	0.7221	1.3848	0.8107	10'	0.6799	0.9271	1.0786	0.7333
36°	0.5878	0.7265	1.3764	0.8090	54°	0.6820	0.9325	1.0724	0.7314
10'	0.5901	0.7310	1.3680	0.8073	50'	0.6841	0.9380	1.0661	0.7294
20'	0.5925	0.7355	1.3597	0.8056	40'	0.6862	0.9435	1.0599	0.7274
30'	0.5948	0.7400	1.3514	0.8039	30'	0.6884	0.9490	1.0538	0.7254
40'	0.5972	0.7445	1.3432	0.8021	20'	0.6905	0.9545	1.0477	0.7234
50'	0.5995	0.7490	1.3351	0.8004	10'	0.6926	0.9601	1.0416	0.7214
37°	0.6018	0.7536	1.3270	0.7986	53°	0.6947	0.9657	1.0355	0.7193
10'	0.6041	0.7581	1.3190	0.7969	50'	0.6967	0.9713	1.0295	0.7173
20'	0.6065	0.7627	1.3111	0.7951	40'	0.6988	0.9770	1.0235	0.7153
30'	0.6088	0.7673	1.3032	0.7934	30'	0.7009	0.9827	1.0176	0.7133
40'	0.6111	0.7720	1.2954	0.7916	20'	0.7030	0.9884	1.0117	0.7112
50'	0.6134	0.7766	1.2876	0.7898	10'	0.7050	0.9942	1.0058	0.7092
38°	0.6157	0.7813	1.2799	0.7880	52°	0.7071	1.0000	1.0000	0.7071
10'	0.6180	0.7860	1.2723	0.7862	50'				
20'	0.6202	0.7907	1.2647	0.7844					
30'	0.6225	0.7954	1.2572	0.7826					
40'	0.6248	0.8002	1.2497	0.7808					
50'	0.6271	0.8050	1.2423	0.7790					
39°	0.6293	0.8098	1.2349	0.7771	51°				
	cos	cot	tan	sin	角				

角	log sin.	差	log tan.	通差	log cot.	log cos.	差	
0°	—	—	—	—	—	0.00 000	—	90°
10'	3.46 373	30102	3.46 373	30103	2.53 627	0.00 000	0	50'
20'	3.76 475	17609	3.76 476	17610	2.23 524	1.99 999	1	40'
30'	3.94 084	12494	3.94 086	12495	2.05 914	1.99 998	1	30'
40'	4.06 578	9690	4.06 581	9692	1.93 419	1.99 997	1	20'
50'	4.16 268	7918	4.16 273	7919	1.83 727	1.99 995	2	10'
1°	4.24 186	6693	4.24 192	6696	1.75 808	1.99 993	2	89°
10'	4.30 879	5799	4.30 888	5801	1.69 112	1.99 991	2	50'
20'	4.36 678	5114	4.36 689	5118	1.63 311	1.99 988	3	40'
30'	4.41 792	4574	4.41 807	4578	1.58 193	1.99 985	3	30'
40'	4.46 366	4138	4.46 385	4142	1.53 615	1.99 982	3	20'
50'	4.50 504	3778	4.50 527	3781	1.49 473	1.99 978	4	10'
2°	4.54 282	3475	4.54 308	4380	1.45 692	1.99 974	4	88°
10'	4.57 757	3216	4.57 788	3221	1.42 212	1.99 969	5	50'
20'	4.60 973	2995	4.61 009	3000	1.38 991	1.99 964	5	40'
30'	4.63 968	2801	4.64 009	2807	1.35 991	1.99 959	5	30'
40'	4.66 769	2631	4.66 816	2637	1.33 184	1.99 953	6	20'
50'	4.69 400	2480	4.69 453	2487	1.30 547	1.99 947	6	10'
3°	4.71 880	2346	4.71 940	2352	1.28 060	1.99 940	7	87°
10'	4.74 228	2225	4.74 292	2233	1.25 708	1.99 934	6	50'
20'	4.76 451	2117	4.76 525	2124	1.23 475	1.99 926	8	40'
30'	4.78 568	2017	4.78 649	2025	1.21 351	1.99 919	7	30'
40'	4.80 585	1928	4.80 674	1936	1.19 326	1.99 911	8	20'
50'	4.82 513	1845	4.82 610	1854	1.17 390	1.99 903	8	10'
4°	4.84 358	1770	4.84 464	1779	1.15 536	1.99 894	9	86°
10'	4.86 128	1701	4.86 243	1710	1.13 757	1.99 885	9	50'
20'	4.87 829	1635	4.87 953	1645	1.12 047	1.99 876	9	40'
30'	4.89 464	1576	4.89 598	1587	1.10 402	1.99 866	10	30'
40'	4.91 040	1521	4.91 185	1531	1.08 815	1.99 856	10	20'
50'	4.92 561	1469	4.92 716	1479	1.07 284	1.99 845	11	10'
5°	4.94 030	1420	4.94 195	1432	1.05 805	1.99 834	11	85°
10'	4.95 450	1375	4.95 627	1386	1.04 373	1.99 823	11	50'
20'	4.96 825	1332	4.97 013	1345	1.02 987	1.99 812	11	40'
30'	4.98 157	1293	4.98 353	1304	1.01 642	1.99 800	12	30'
40'	4.99 450	1254	4.99 662	1268	1.00 338	1.99 787	13	20'
50'	5.00 704	1219	5.00 930	1232	0.99 070	1.99 775	12	10'
6°	5.01 923	1186	5.02 162	1199	0.97 838	1.99 761	14	84°
10'	5.03 109	1153	5.03 361	1167	0.96 639	1.99 748	13	50'
20'	5.04 262	1124	5.04 528	1138	0.95 472	1.99 734	14	40'
30'	5.05 386	1095	5.05 666	1109	0.94 334	1.99 720	14	30'
40'	5.06 481	1067	5.06 775	1083	0.93 225	1.99 705	15	20'
50'	5.07 548	1041	5.07 858	1056	0.92 142	1.99 690	15	10'
7°	5.08 589	1017	5.08 914	1033	0.91 086	1.99 675	15	83°
10'	5.09 606	993	5.09 947	1009	0.90 053	1.99 659	16	50'
20'	5.10 599	971	5.10 956	987	0.89 044	1.99 643	16	40'
30'	5.11 570	949	5.11 943	966	0.88 057	1.99 627	16	30'
40'	5.12 519	928	5.12 909	945	0.87 091	1.99 610	17	20'
50'	5.13 447	909	5.13 854	926	0.86 146	1.99 593	17	10'
8°	5.14 356	—	5.14 780	—	0.85 220	1.99 575	18	82°
	log cos.	差	log cot.	通差	log tan.	log sin.	差	角

角	log sin.	差	log tan.	通差	log cot.	log cos.	差	角
8°	I. 14 356	889	I. 14 780		0.85 220	I. 99 575		82°
10'	I. 15 245	871	I. 15 688	908	0.84 312	I. 99 557	18	50'
20'	I. 16 116	854	I. 16 577	889	0.83 423	I. 99 539	18	40'
30'	I. 16 970	837	I. 17 450	873	0.82 550	I. 99 520	19	30'
40'	I. 17 807	821	I. 18 306	856	0.81 694	I. 99 501	19	20'
50'	I. 18 628	805	I. 19 146	840	0.80 854	I. 99 482	19	10'
9°	I. 19 433	790	I. 19 971	825	0.80 029	I. 99 462	20	81°
10'	I. 20 223	776	I. 20 782	811	0.79 218	I. 99 442	20	50'
20'	I. 20 999	762	I. 21 578	796	0.78 422	I. 99 421	21	40'
30'	I. 21 761	748	I. 22 361	783	0.77 639	I. 99 400	21	30'
40'	I. 22 509	735	I. 23 130	769	0.76 870	I. 99 379	21	20'
50'	I. 23 244	723	I. 23 887	757	0.76 113	I. 99 357	22	10'
10°	I. 23 967	710	I. 24 632	745	0.75 368	I. 99 335	22	80°
10'	I. 24 677	699	I. 25 365	733	0.74 635	I. 99 313	22	50'
20'	I. 25 376	687	I. 26 086	721	0.73 914	I. 99 290	23	40'
30'	I. 26 063	676	I. 26 797	711	0.73 203	I. 99 267	23	30'
40'	I. 26 739	666	I. 27 496	699	0.72 504	I. 99 243	24	20'
50'	I. 27 405	655	I. 28 186	690	0.71 814	I. 99 219	24	10'
11°	I. 28 060	645	I. 28 865	679	0.71 135	I. 99 195	24	79°
10'	I. 28 705	635	I. 29 535	670	0.70 465	I. 99 170	25	50'
20'	I. 29 340	626	I. 30 195	660	0.69 805	I. 99 145	25	40'
30'	I. 29 966	616	I. 30 846	651	0.69 154	I. 99 119	26	30'
40'	I. 30 582	607	I. 31 489	643	0.68 511	I. 99 093	26	20'
50'	I. 31 189	599	I. 32 122	633	0.67 878	I. 99 067	26	10'
12°	I. 31 788	590	I. 32 747	625	0.67 253	I. 99 040	27	78°
10'	I. 32 378	582	I. 33 365	618	0.66 635	I. 99 013	27	50'
20'	I. 32 960	574	I. 33 974	609	0.66 026	I. 98 986	27	40'
30'	I. 33 534	566	I. 34 576	602	0.65 424	I. 98 958	28	30'
40'	I. 34 100	558	I. 35 170	594	0.64 830	I. 98 930	28	20'
50'	I. 34 658	551	I. 35 757	587	0.64 243	I. 98 901	29	10'
13°	I. 35 209	543	I. 36 336	579	0.63 664	I. 98 872	29	77°
10'	I. 35 752	537	I. 36 909	573	0.63 091	I. 98 843	29	50'
20'	I. 36 289	530	I. 37 476	567	0.62 524	I. 98 813	30	40'
30'	I. 36 819	522	I. 38 035	559	0.61 965	I. 98 783	30	30'
40'	I. 37 341	517	I. 38 589	554	0.61 411	I. 98 753	31	20'
50'	I. 37 858	510	I. 39 136	547	0.60 864	I. 98 722	31	10'
14°	I. 38 368	503	I. 39 677	541	0.60 323	I. 98 690	32	76°
10'	I. 38 871	498	I. 40 212	535	0.59 788	I. 98 659	31	50'
20'	I. 39 369	491	I. 40 742	530	0.59 258	I. 98 627	32	40'
30'	I. 39 860	486	I. 41 266	524	0.58 734	I. 98 594	33	30'
40'	I. 40 346	479	I. 41 784	518	0.58 216	I. 98 561	33	20'
50'	I. 40 825	475	I. 42 297	513	0.57 703	I. 98 528	33	10'
15°	I. 41 300	468	I. 42 805	508	0.57 195	I. 98 494	34	75°
10'	I. 41 768	464	I. 43 308	503	0.56 692	I. 98 460	34	50'
20'	I. 42 232	458	I. 43 806	498	0.56 194	I. 98 426	34	40'
30'	I. 42 690	453	I. 44 299	493	0.55 701	I. 98 391	35	30'
40'	I. 43 143	448	I. 44 787	488	0.55 213	I. 98 356	35	20'
50'	I. 43 591	443	I. 45 271	484	0.54 729	I. 98 320	36	10'
16°	I. 44 034		I. 45 750	479	0.54 250	I. 98 284	36	74°
	log cos.	差	log cot.	通差	log tan.	log sin.	差	角

角	log sin.	差	log tan.	通差	log cot.	log cos.	差	
16°	I. 44 034	438	I. 45 750	474	0. 54 250	I. 98 284	36	74°
10'	I. 44 472	433	I. 46 224	470	0. 53 776	I. 98 248	37	50'
20'	I. 44 905	429	I. 46 694	466	0. 53 306	I. 98 211	37	40'
30'	I. 45 334	424	I. 47 160	462	0. 52 840	I. 98 174	38	30'
40'	I. 45 758	420	I. 47 622	458	0. 52 378	I. 98 136	38	20'
50'	I. 46 178	416	I. 48 080	454	0. 51 920	I. 98 098	38	10'
17°	I. 46 594	411	I. 48 534	450	0. 51 466	I. 98 060	39	73°
10'	I. 47 005	406	I. 48 984	446	0. 51 016	I. 98 021	39	50'
20'	I. 47 411	403	I. 49 430	442	0. 50 570	I. 97 982	40	40'
30'	I. 47 814	399	I. 49 872	439	0. 50 128	I. 97 942	40	30'
40'	I. 48 213	394	I. 50 311	435	0. 49 689	I. 97 902	41	20'
50'	I. 48 607	391	I. 50 746	432	0. 49 254	I. 97 861	40	10'
18°	I. 48 998	387	I. 51 178	428	0. 48 822	I. 97 821	42	72°
10'	I. 49 385	383	I. 51 606	425	0. 48 394	I. 97 779	41	50'
20'	I. 49 768	380	I. 52 031	421	0. 47 969	I. 97 738	42	40'
30'	I. 50 148	375	I. 52 452	418	0. 47 548	I. 97 696	43	30'
40'	I. 50 523	373	I. 52 870	415	0. 47 130	I. 97 653	43	20'
50'	I. 50 896	368	I. 53 285	412	0. 46 715	I. 97 610	43	10'
19°	I. 51 264	365	I. 53 697	409	0. 46 303	I. 97 567	44	71°
10'	I. 51 629	362	I. 54 106	406	0. 45 894	I. 97 523	44	50'
20'	I. 51 991	359	I. 54 512	403	0. 45 488	I. 97 479	44	40'
30'	I. 52 350	355	I. 54 915	400	0. 45 085	I. 97 435	45	30'
40'	I. 52 705	351	I. 55 315	397	0. 44 685	I. 97 390	46	20'
50'	I. 53 056	349	I. 55 712	395	0. 44 288	I. 97 344	45	10'
20°	I. 53 405	346	I. 56 107	391	0. 43 893	I. 97 299	47	70°
10'	I. 53 751	342	I. 56 498	389	0. 43 502	I. 97 252	46	50'
20'	I. 54 093	340	I. 56 887	387	0. 43 113	I. 97 206	47	40'
30'	I. 54 433	336	I. 57 274	384	0. 42 726	I. 97 159	48	30'
40'	I. 54 769	333	I. 57 658	381	0. 42 342	I. 97 111	48	20'
50'	I. 55 102	331	I. 58 039	379	0. 41 961	I. 97 063	48	10'
21°	I. 55 433	328	I. 58 418	376	0. 41 582	I. 97 015	49	69°
10'	I. 55 761	324	I. 58 794	374	0. 41 206	I. 96 966	49	50'
20'	I. 56 085	323	I. 59 168	372	0. 40 832	I. 96 917	49	40'
30'	I. 56 408	319	I. 59 540	369	0. 40 460	I. 96 868	50	30'
40'	I. 56 727	317	I. 59 909	367	0. 40 091	I. 96 818	51	20'
50'	I. 57 044	314	I. 60 278	365	0. 39 724	I. 96 767	50	10'
22°	I. 57 358	311	I. 60 641	363	0. 39 359	I. 96 717	52	68°
10'	I. 57 669	309	I. 61 004	360	0. 38 996	I. 96 665	51	50'
20'	I. 57 978	306	I. 61 364	358	0. 38 636	I. 96 614	52	40'
30'	I. 58 284	304	I. 61 722	357	0. 38 278	I. 96 562	53	30'
40'	I. 58 588	301	I. 62 079	354	0. 37 921	I. 96 509	53	20'
50'	I. 58 889	299	I. 62 433	352	0. 37 567	I. 96 456	53	10'
23°	I. 59 188	296	I. 62 785	350	0. 37 215	I. 96 403	54	67°
10'	I. 59 484	294	I. 63 135	349	0. 36 865	I. 96 349	55	50'
20'	I. 59 778	292	I. 63 484	346	0. 36 516	I. 96 294	54	40'
30'	I. 60 070	289	I. 63 830	345	0. 36 170	I. 96 240	55	30'
40'	I. 60 359	287	I. 64 175	342	0. 35 825	I. 96 185	56	20'
50'	I. 60 646	285	I. 64 517	341	0. 35 483	I. 96 129	56	10'
24°	I. 60 931		I. 64 858		0. 35 142	I. 96 073		66°
	log cos.	差	log cot.	通差	log tan.	log sin.	差	角

角	log sin.	差	log tan.	通差	log cot.	log cos	差	角
24°	I. 60 931	283	I. 64 858	339	0. 35 142	I. 96 073	56	63°
10'	I. 61 214	280	I. 65 197	333	0. 34 803	I. 96 017	57	50'
20'	I. 61 494	279	I. 65 535	335	0. 34 465	I. 95 960	58	40'
30'	I. 61 773	276	I. 65 870	334	0. 34 130	I. 95 902	58	30'
40'	I. 62 049	274	I. 66 204	333	0. 33 796	I. 95 844	58	20'
50'	I. 62 323	272	I. 66 537	330	0. 33 463	I. 95 786	58	10'
25°	I. 62 595	270	I. 66 867	329	0. 33 133	I. 95 728	60	65°
10'	I. 62 865	268	I. 67 196	328	0. 32 804	I. 95 668	59	50'
20'	I. 63 133	265	I. 67 524	326	0. 32 476	I. 95 609	60	40'
30'	I. 63 398	264	I. 67 850	324	0. 32 150	I. 95 549	61	30'
40'	I. 63 662	262	I. 68 174	323	0. 31 826	I. 95 488	61	20'
50'	I. 63 924	260	I. 68 497	321	0. 31 503	I. 95 427	61	10'
26°	I. 64 184	258	I. 68 818	320	0. 31 182	I. 95 366	62	64°
10'	I. 64 442	256	I. 69 138	319	0. 30 862	I. 95 304	62	50'
20'	I. 64 698	255	I. 69 457	317	0. 30 543	I. 95 242	63	40'
30'	I. 64 953	252	I. 69 774	315	0. 30 226	I. 95 179	63	30'
40'	I. 65 205	251	I. 70 089	315	0. 29 911	I. 95 116	64	20'
50'	I. 65 456	249	I. 70 404	313	0. 29 596	I. 95 052	64	10'
27°	I. 65 705	247	I. 70 717	311	0. 29 283	I. 94 988	65	63°
10'	I. 65 952	245	I. 71 028	311	0. 28 972	I. 94 923	65	50'
20'	I. 66 197	244	I. 71 339	309	0. 28 661	I. 94 858	65	40'
30'	I. 66 441	241	I. 71 648	307	0. 28 352	I. 94 793	66	30'
40'	I. 66 682	240	I. 71 955	307	0. 28 045	I. 94 727	67	20'
50'	I. 66 922	239	I. 72 262	305	0. 27 738	I. 94 660	67	10'
28°	I. 67 161	237	I. 72 567	305	0. 27 433	I. 94 593	67	62°
10'	I. 67 398	235	I. 72 872	303	0. 27 128	I. 94 526	68	50'
20'	I. 67 633	233	I. 73 175	301	0. 26 825	I. 94 458	68	40'
30'	I. 67 866	232	I. 73 476	301	0. 26 524	I. 94 390	69	30'
40'	I. 68 098	230	I. 73 777	300	0. 26 223	I. 94 321	69	20'
50'	I. 68 328	229	I. 74 077	298	0. 25 923	I. 94 252	70	10'
29°	I. 68 557	227	I. 74 375	298	0. 25 625	I. 94 182	70	61°
10'	I. 68 784	226	I. 74 673	296	0. 25 327	I. 94 112	71	50'
20'	I. 69 010	224	I. 74 969	295	0. 25 031	I. 94 041	71	40'
30'	I. 69 234	222	I. 75 264	294	0. 24 736	I. 93 970	72	30'
40'	I. 69 456	221	I. 75 558	294	0. 24 442	I. 93 898	72	20'
50'	I. 69 677	220	I. 75 852	292	0. 24 148	I. 93 826	73	10'
30°	I. 69 897	218	I. 76 144	291	0. 23 856	I. 93 753	73	60°
10'	I. 70 115	217	I. 76 435	290	0. 23 565	I. 93 680	74	50'
20'	I. 70 332	215	I. 76 725	290	0. 23 275	I. 93 606	74	40'
30'	I. 70 547	214	I. 77 015	288	0. 22 985	I. 93 532	75	30'
40'	I. 70 761	212	I. 77 303	288	0. 22 697	I. 93 457	75	20'
50'	I. 70 973	211	I. 77 591	286	0. 22 409	I. 93 382	75	10'
31°	I. 71 184	209	I. 77 877	286	0. 22 123	I. 93 307	77	59°
10'	I. 71 393	209	I. 78 163	285	0. 21 837	I. 93 230	76	50'
20'	I. 71 602	207	I. 78 448	284	0. 21 552	I. 93 154	77	40'
30'	I. 71 809	205	I. 78 732	283	0. 21 268	I. 93 077	78	30'
40'	I. 72 014	204	I. 79 015	282	0. 20 985	I. 92 999	78	20'
50'	I. 72 218	203	I. 79 297	282	0. 20 703	I. 92 921	79	10'
32°	I. 72 421		I. 79 579		0. 20 421	I. 92 842		58°
	log cos.	差	log cot.	通差	log tan.	log sin.	差	角

角	log sin.	差	log tan.	通差	log cot.	log cos.	差	
32°	I. 72 421	201	I. 79 57 ⁰	281	0. 20 421	I. 92 842	79	58°
10'	I. 72 622	201	I. 79 860	280	0. 20 140	I. 92 763	80	50'
20'	I. 72 823	199	I. 80 140	279	0. 19 860	I. 92 683	80	40'
30'	I. 73 022	197	I. 80 419	278	0. 19 581	I. 92 603	81	30'
40'	I. 73 219	197	I. 80 697	278	0. 19 303	I. 92 522	81	20'
50'	I. 73 416	195	I. 80 975	277	0. 19 025	I. 92 441	82	10'
33°	I. 73 611	194	I. 81 252	276	0. 18 748	I. 92 359	82	57°
10'	I. 73 805	192	I. 81 528	275	0. 18 472	I. 92 277	83	50'
20'	I. 73 997	192	I. 81 803	275	0. 18 197	I. 92 194	83	40'
30'	I. 74 189	190	I. 82 078	274	0. 17 922	I. 92 111	84	30'
40'	I. 74 379	189	I. 82 352	274	0. 17 648	I. 92 027	85	20'
50'	I. 74 568	188	I. 82 626	273	0. 17 374	I. 91 942	85	10'
34°	I. 74 756	187	I. 82 899	272	0. 17 101	I. 91 857	85	56°
10'	I. 74 943	185	I. 83 171	271	0. 16 829	I. 91 772	86	50'
20'	I. 75 128	185	I. 83 442	271	0. 16 558	I. 91 686	87	40'
30'	I. 75 313	183	I. 83 713	271	0. 16 287	I. 91 599	87	30'
40'	I. 75 496	182	I. 83 984	270	0. 16 016	I. 91 512	87	20'
50'	I. 75 678	181	I. 84 254	269	0. 15 746	I. 91 425	89	10'
35°	I. 75 859	180	I. 84 523	268	0. 15 477	I. 91 336	88	55°
10'	I. 76 039	179	I. 84 791	268	0. 15 209	I. 91 248	90	50'
20'	I. 76 218	177	I. 85 059	268	0. 14 941	I. 91 158	89	40'
30'	I. 76 395	177	I. 85 327	267	0. 14 673	I. 91 069	91	30'
40'	I. 76 572	175	I. 85 594	266	0. 14 406	I. 90 978	91	20'
50'	I. 76 747	175	I. 85 860	266	0. 14 140	I. 90 887	91	10'
36°	I. 76 922	173	I. 86 126	266	0. 13 874	I. 90 796	92	54°
10'	I. 77 095	173	I. 86 392	264	0. 13 608	I. 90 704	93	50'
20'	I. 77 268	171	I. 86 656	265	0. 13 344	I. 90 611	93	40'
30'	I. 77 439	170	I. 86 921	264	0. 13 079	I. 90 518	94	30'
40'	I. 77 609	169	I. 87 185	263	0. 12 815	I. 90 424	94	20'
50'	I. 77 778	168	I. 87 448	263	0. 12 552	I. 90 330	95	10'
37°	I. 77 946	167	I. 87 711	263	0. 12 289	I. 90 235	96	53°
10'	I. 78 113	167	I. 87 974	262	0. 12 026	I. 90 139	96	50'
20'	I. 78 280	165	I. 88 236	262	0. 11 764	I. 90 043	96	40'
30'	I. 78 445	164	I. 88 498	261	0. 11 502	I. 89 947	98	30'
40'	I. 78 609	163	I. 88 759	261	0. 11 241	I. 89 849	97	20'
50'	I. 78 772	162	I. 89 020	261	0. 10 980	I. 89 752	99	10'
38°	I. 78 934	161	I. 89 281	260	0. 10 719	I. 89 653	99	52°
10'	I. 79 095	161	I. 89 541	260	0. 10 459	I. 89 554	99	50'
20'	I. 79 256	159	I. 89 801	260	0. 10 199	I. 89 455	101	40'
30'	I. 79 415	158	I. 90 061	259	0. 09 939	I. 89 354	100	30'
40'	I. 79 573	158	I. 90 320	258	0. 09 680	I. 89 254	102	20'
50'	I. 79 731	156	I. 90 578	259	0. 09 422	I. 89 152	102	10'
39°	I. 79 887	156	I. 90 837	258	0. 09 163	I. 89 050	102	51°
10'	I. 80 043	154	I. 91 095	258	0. 08 905	I. 88 948	104	50'
20'	I. 80 197	154	I. 91 353	257	0. 08 647	I. 88 844	103	40'
30'	I. 80 351	153	I. 91 610	258	0. 08 390	I. 88 741	105	30'
40'	I. 80 504	152	I. 91 868	257	0. 08 132	I. 88 636	105	20'
50'	I. 80 656	151	I. 92 125	256	0. 07 875	I. 88 531	106	10'
40°	I. 80 807		I. 92 381		0. 07 619	I. 88 425		50°
	log cos.	差	log cot.	通差	log tan.	log sin.	差	角

下 册 答 数

習 題 四 十 五

1. 19. 2. 30. 3. 35. 4. 211.
5. 50. 6. 112. 22. $7, -1, \frac{1}{4}$. 23. 5, 6, 2, 3.
26. $(7a+9b)-3c$. 27. $6x-7y$. 28. $3a^3b^2$. 29. $c(7a^4+b^3+x^2)$.
30. $(a+b)(a-b)$. 31. $(a+b+c)^2$. 32. $\frac{x+y}{x-y}$. 33. $m^3 \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)$.
34. $(a+2b+3c)(7a+b+2c)$. 35. $(a+b)^2(m+n+p)^3$.
48. $4a^3b^2$. 49. $36x^2y^3z^4$. 50. $17a^2b^3c^2$. 51. $14a^2+17b^2-18c^3$.
52. $2^3 \times 3^2 \times 4^2$. 53. $5^3 \times 7^2 \times 2$. 54. $7 \times 4^2 \times 6^3$. 55. $3^4+4^3+5^3$.
56. $(a)2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$, $(b)2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$,
 $(c)5 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 7$. 57. 12, 28, 16, 64, 64.
58. 60, 105, 36, 0, 48, 126, 80. 59. $\frac{L}{3}$. 60. $10+x, 10+x-q$.
61. $\frac{2}{3}S$. 62. $10a, ca, \frac{da}{60}$. 63. $\frac{a}{c}, \frac{aq}{c}$. 64. $10c, pc$. 角.
65. $\frac{4xy}{25}$. 66. 79. 67. 179. 70. $\left(\frac{xb}{10} - y \right) \frac{100}{y} \%$.
71. $N+2, N+4, N+6$. 72. $x+1, x+3, x+5$.
73. $\frac{x}{a}, \frac{x}{7a}$. 74. $\frac{c}{xy} \times \frac{1}{7 \times 24}$ 75. $\frac{a}{(a+b)} \times 100\%$.
76. $x - \frac{b}{4}$ 77. $160-ab$. 78. $\frac{abc}{27}$. 79. $\frac{ax}{100}$.
80. $mn - \frac{\pi n^2}{4}$.

習 題 四 十 六

1. (a) 128, (b) 980, (c) 98000, (d) 275625 (e) 105875 (f) 437879.
2. 324. 3. 11. 4. 39. 5. 125.
6. 64. 7. 81. 8. 40. 9. 283.
10. 10. 11. 40. 12. 25. 13. 144.
14. 112. 15. 153. 16. (a) 4071·5, (b) 24,429.
17. (a) 395·84 (b) 1385·4. 18. 94. 19. 40.
20. 5. 21. 224. 22. 420. 23. 15.
24. 94. 25. 81. 26. 3. 27. 43.
28. 72. 29. 11. 30. 7. 31. 6.
35. (a) $A = id + b(s+n)$, (b) $A = at + 2b(n+s)$.
36. (a) 1·19 方吋, (b) 1·874 方吋. 37. $A = dt + v(n+s)$.
38. 17·796 方吋. 39. $A = B + BR, P = \frac{BR}{B} \times 100$. 41. $\frac{a}{d} + \frac{b}{d}$.
42. $\frac{a}{d} - \frac{b}{d}$. 44. $s = a(b+c+d)$. 45. 168.
46. 200. 47. $A = h \left(\frac{b_1 + b_2}{2} \right)$. 48. 108·13 方吋,
21·127 方吋. 49. 2827·4 方吋. 50. 7233·2 立方吋 51. 14400.
52. $35 - a$, $35 + b$. 53. $x + a$, $x + a + b$. 54. $(x - a + y) \left(\frac{m+n}{m-n} \right)$.
55. (1) $2x + zy$, (2) $b + 2a$, (3) $2x + 2y + 4b$, (4) $2c + 2y + 4x + 2d$,
(5) $ab + 2b + 2d$.
56. (1) $x^2 - y^2$, (2) $b(a - y) + y(b - 2x)$, (3) $xy - 2ab$, (4) $bc - (2x + d)y - d^2$
(5) $a^2 - dx$. 57. $a - x \frac{x}{m}, \frac{a-x}{N}$. 58. $x + 1, (x - 1), (x + 1)$.

59. $(x-2), (x-1), x, (x+1), (x+2)$.

60. $12a = \frac{a}{5280}$.

61. $\frac{x}{a}$.

62. $36a+12b+c$.

6.3 $n = \frac{P}{m}$.

64. $b = \frac{d}{q}$.

65. $D=dq+r$.

65. $a-x$.

67. $a+c$.

68. $b-a=d-c$.

69. $\frac{m}{2} = \frac{a+b+c}{n}$.

70. $\frac{8a}{10}$.

71. $\frac{aL}{b}$.

72. $\frac{md}{c}$.

73. $\frac{de}{c}$.

74. $\frac{e^3}{4 \cdot 2}$.

75. $\frac{1278abc}{2150 \cdot 42}$.

76. $16a+21b$.

習 題 四 十 七

1. $+10, -6$. 2. $+5^\circ$. 3. 原駐點. 4. $+400$ 元.

習 題 四 十 八

1. 22. 2. -26 . 3. 0. 4. $\frac{11}{48}$. 5. $-8\frac{27}{40}$. 6. $-0 \cdot 11$.

7. $-28 \cdot 32$. 8. $31 \cdot 9$. 9. -99 . 10. -121 . 13. $54^\circ 0' 10''$. 14. 50° .

習 題 四 十 九

1. $24a$.

2. $3ab$.

3. $-8x^2$.

4. $-13x^2y^2$.

5. $15m-5n$.

6. $3p-q-r$.

7. $a+2b-c$.

8. $4y-x-5z$.

9. $2x+2y$.

10. $5x^2-2y^2+3z^2$.

11. $8a-8c-5$.

12. $10a^2+3cd$.

13. $-7ax-2cd$. 14. $14ab-2c-4d$. 15. $-4mn$.
 16. $16x^2y^2z^2-12a-14cd$. 17. $5x-16y$. 18. $7x-2y-2xy$.
 19. $-9xy+9xz-3x^2-2y^2$. 20. $33x^2y^3-2xz^3-2^3c^2d$. 21. $7ab+14ac-5df$.
 22. $24x^2-20y^2-15xy$. 23. $44x^2y^3-2xy+41ax^2-60x$.
 24. $7x^2-8y^2$. 25. $9ax-9by+30cx$.
 26. $x^4+x^3y+x^2y^2+2xy^3+5y^4$. 27. $50x-11y-10z$.
 28. $10x^2+2y^2$. 29. $23m+4n+2p+2q$. 30. $2ab-3xy-2z$.
 31. $4ax^2-axy-31$. 32. $-5m^2-2n^3+10x$.
 33. $-10x^2y+7xy-34y^2$. 34. $-ax^2$. 35. $abc+13bcd+15cde$.
 36. $-x^3-2xy+8y^2$. 37. $a^3+6a^2b+4b^3$.
 38. $-3a^2b+3ab^2-2b^3-a^3$. 39. $-3a^2b-3ab^2-2b^3$.
 40. $-6a^2b-a^3-4b^3$. 41. $a^3+3a^2b-3ab^2+2b^3$. 42. $3a^2b+3ab^2+2b^3$.
 43. $2a^3+6ab^2-3b^3$. 44. $6ab^2-b^3$.
 45. $7\cdot6x^2-9\cdot125a+5m^2+6\cdot25m^3+1$.
 46. $2\frac{1}{6}ab^2+\frac{1}{6}cd^3+1\frac{7}{12}x^3$.

習 題 五 十

1. $(5a-6d+4c+17)y$. 2. $(3x^2-14x+6x^3+7)y$.
 3. $(xy-n-14+3x^2y)b$. 4. $(a+b+c-fg+2)d$.
 5. $(x^2+5x+2y)n^4$. 6. $(4a-3b+4c)x$.
 7. $(7ac-10cd-4d^2)y$. 8. $(a-b)y$.
 9. $(3a-7c)b$. 10. $(4a^2-9b^2)x$.
 11. $3bz$. 12. $(a-4b+3c)de$.
 13. $(x+by-5z)ab$. 14. $(3cd+2ef)x$.
 15. $20a-6b$.

習 題 五 十 一

1. $a+5b$. 2. $-13-x$. 3. $12x-2$. 4. $4a-5a^2+2$.
 5. $-y^3$. 6. $a-c+d$. 7. z 8. $2z-x-y$.
 9. 41. 10. 46. 11. $5a$. 12. $6x-y-5z$.
 13. 0. 14. 0. 15. $4c-b-2a$. 16. $4a+b$.
 17. $1-3x$. 18. $18x^2-3xy$.

習 題 五 十 二

1. $a-(b-c)$. 2. $2a+3b-(c+2d)$.
 3. $4x-(x^2-y^2+xy)$. 4. $17x^2-(x^3y+xy-yz)$.
 5. $6+3x-(4x^2-5x^3+6x^4)$. 7. $3x-(2y-4+7z)$.
 8. $9x^2+4y^2-(7xy-4yz)$. 9. $a+b+c-(3f-4c^2)$.
 10. $8x+4xy-(7x-4)$. 11. $4d^2+3c-(4x-3y)$.
 12. $2c-(4ax^2-3y+7)$. 13. $-(-a+b-c)x$.
 14. $-(-2c+4d-6e+2)x$. 15. $-(-1-3a+4c-d)x$.
 16. $-(1-6c+4a^2+ac^2)x$. 17. $-(-3+5a-6b^2+7z^2)y$.

習 題 五 十 三

1. 1. 2. 8. 3. 8. 4. 2. 5. $\frac{2}{3}$.
 6. $3\frac{2}{3}$. 7. 2. 8. 3. 9. 4. 10. $\frac{1}{2}$.
 11. $\frac{1}{3}$. 12. $4\frac{1}{2}$. 13. $1\frac{5}{7}$. 14. 13. 15. 12.
 16. 9. 17. 1.

習 題 五 十 四

1. $m-10$, $m-n$, $m+s$,
2. $50-x$, $15-x$, $a-x$.
3. $8n$, $7n$, $\frac{mn}{60}$.
4. $\frac{x}{10}$, $\frac{nx}{10}$, $100 \div \frac{x}{10}$.
5. $100a$, $10b$, $100c+10d$.
6. $\frac{10}{x}$.
7. $2x=10$, $x=\frac{2}{5}$ 元.
8. 長 36 尺, 闊 12 尺.
9. 16, 48.
10. 12.
11. 馬 145 元, 車 69 元.
12. 30, 120, 90.
13. 5250, 10500, 21000.
14. 50 公尺, 80 公尺.
15. 250, 50.
16. 14.
17. 15, 5.
18. 2, 4, 10.
19. $\frac{6}{7}$ 元, $2\frac{4}{7}$ 元, $5\frac{4}{7}$ 元.
20. 12000, 7500, 5000.
21. 3529, 3264.
22. 70, 72, 74.
23. 19, 21, 23, 25.
24. 21, 22, 23.
25. 100 元, 65 元, 45 元.
26. 53° , 37° .
27. 52° , 38° .
28. 42 元.
29. 甲 1890, 乙 630, 丙 1560 公石.
30. 35, 70, 210, 45 公頃.

習 題 五 十 五

1. 560.
2. -360,000.
3. -343, 512, -9231.
4. -1024.
5. 4096.
6. 1.
7. -576.
8. 2592.
9. 72.
10. 24.
11. 108.
12. 576.

13. $-16z^0$. 14. -30 . 15. -144 .
 16. -120 . 17. -1760 . 18. -118 .
 19. 56 . 20. 240 . 21. 0 .

習 題 五 十 六

1. $30a^4b^3$. 2. $-32n^{10}x^7$. 3. $-20x^9y^5$. 4. $51a^2x^4y^7$.
 5. $10m^{13}n^8c^2d^2y^5$. 6. $x^6y^5z^3$. 7. $-12x^5y^7$. 8. $12P^3Q^6$.
 9. $\frac{1}{6}a^4x^6$. 10. a^{7n+4} . 11. a^6 . 12. m^3n^{12} .
 13. $64a^6b^{12}$. 14. a^{6m+4n} . 15. $a^9b^{14}c^9$. 16. $x^{12}y^{12}z^5$.
 17. $24a^{15}c^7$. 18. $p^4q^4r^4$. 19. $84a^4x^4y^9z^3$.
 20. $25b^2+30b^4-35b^6$. 21. $21x^4y^3-14x^3y^2$.
 22. $50ab^5x^4+50ab^2c^2d$. 23. $15ax-10a^2x-20x$.
 24. $-15m^7n^8x^9y^{10}+19^7p^9q^{10}x^7y^3$. 25. $-3x^{11}y^{11}z^{11}+39x^7y^7z^7$.
 26. $9c^3d^3e^2+18c^3d^2e^3-15d^3d^2c^2$. 27. $-16x^5y^3+28x^4y^4-56a^2x^3$.
 28. $8x^2-10xy-3y^2$. 29. $4x^3-8xy+x^2y^2-y^3$.
 30. $-6x^2+17x-7$. 31. $15x^2+2xy-8y^2$.
 32. $a^2x^2-b^2y^2$. 33. $a^4x^4-4y^4$.
 34. a^3-b^3 . 35. a^3+b^3 .
 36. $2a^3-6a^2b+6ab^2-4b^3$. 37. $4x^2-9y^2+6yz-z^2$.
 38. $a^4+a^2b^2+b^4$. 39. $x^4-2x^2y^2+y^4$.
 40. $6x^4-4x^3-7x^2-3x-1$. 41. $c^4-c^2d^2-24cd^3-16d^4$.
 42. $x^3+x^2-4x+80$. 43. $n^3-48n^2-203n-200$.
 44. $a^5-4a^4b+6a^3b^2-4a^2b^3+ab^4$. 45. $20x^4+9x^3y+7x^2y^2-36y^4$.
 46. $8y^4-6y^2-8y^3-40y-50$. 47. a^5+b^5 .
 48. $4ac^5-6bc^3y-6ac^2y^2+9by^3$. 49. $a^6-3a^4x^2+3a^2x^4-x^6$.

50. $x^6 - y^6$.

51. $a^2 - b^2$.

52. $6x^3 + 21x^2 - 16x - 56$.

53. $9x^4 - a^2b^2$.

54. $11x^2 + ab$.

55. $-3a^2b^2 + 5a^3b - 2ab^3$.

56. $7a^4 - 4b^4$.

57. $x^2 - 9x + 6$.

58. $6n^3 + 12n^2 - 14n - 4$.

59. $-3x^4 + 7x^3y - 2x^2y^2 - xy^3 + y^4 + x^3y^2 + x^2y^3 - xy^4$.

60. $2x^2 - 7x - 30$.

61. $14x^3 + 31x^2 - 94x + 24$.

62. $\pi(4h^3 - 16h^2 + 16h)$.

63. $3s^2 + 28s + 32$.

64. $\frac{1}{4}\pi(27a^2 + 150a + 32)$.

習 題 五 十 七

1. $ad + bd + cd$.

2. $ad + bd + cd + ae + be + ce$.

3. $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

4. $x^2 - y^2$.

5. $x^2 - 2xy + y^2$.

6. $ad + ae + af + bd + be + bf + cd + ce + cf$.

習 題 五 十 八

1. 0.0002% .

2. 1.052 .

3. 4 .

4. 0.0015% .

5. 0.000012% , 0.0012% , 0.114% , 7.41% .

6. 2% .

7. $3\frac{1}{2}\%$.

9. 1% 太小.

10. $\frac{1}{2}\%$ 太小. 11. 2% , 3% .

習 題 五 十 九

1. $8x$.

2. $-2x^2z^3$.

3. $\frac{10}{3}x^2yz$.

4. $11a$.

5. $-20x^2$.

6. $-6ab$.

7. $4xy^2$.

8. $-6cy^3$.

9. a . 10. -1 . 11. $-3a^3b^4$. 12. $\frac{3}{7}x^2$.
 13. $-\frac{5}{2}a^2x^3c$. 14. 12 . 15. $25a^2c$. 16. $-7xy$.

習 題 六 十

1. $x+2y+6z$. 2. $4+a+6a^2$. 3. $3x^3-16x+14$.
 4. $-ay^2+3a^2x-5a^3x^2y+7axy$. 5. $-2ac+6b-12$.
 6. $5a-2xy-1$. 7. $3a^2x^2-ax+2$. 8. $6a^2-\frac{11}{7}a+4$.
 9. $3xy^2-x^3y^5-3y^2$. 10. $2x^2y^4+4x^5y-6x^4y^2$.
 11. $-\frac{1}{6}a^3-3\frac{1}{3}ab^2+4\frac{2}{3}a^2b$. 12. $14a^4-20\cdot 8a^3+39$.
 13. $a+b+a(a+b)$. 14. $3+6a$. 15. $c+d+x+y$.

習 題 六 十 一

1. $a(y+x+c)$. 2. $7(2+3a)$. 3. $10(2a+3b+4)$.
 4. $2^2(3+2\cdot 5)$. 5. $x^2(1-x+x^2)$. 6. $9a^4(6+7a^3)$.
 7. $a^2b^2(a^2-ab^2-b^4)$ 8. $8(2+4a-3a^3)$. 9. $(x-2)(a+b)$.
 10. $(c-d)(b^4-c^2x)$. 11. $(2a-5)(n+p)$. 12. $3(5a+2b)$.
 13. $16a^2(a+b+c-d)$. 14. $(a-b)^2(3a-b)$.

習 題 六 十 二

1. $9a^2b^6, 3ab^3$. 2. $4x^4y^4, -2x^2y^2$. 3. $81a^2c^4d^2, -9ac^2d$.
 4. $\frac{1}{4}a^2m^6r^2, \frac{1}{2}am^3r$. 5. $\frac{1}{9}x^6y^8z^2, -\frac{1}{3}x^3y^4z$. 6. $121m^8n^{10}x^2$,
 $11m^4n^5x$. 7. $x^6y^8z^{10}, x^3y^4z^5$. 8. $400x^{10}y^8, -20x^5y^4$.

9. $16x^4y^6, 4x^2y^3$. 10. $25m^4n^6, 5m^2n^3$. 11. $13a^6z^4$, 係數非整方.
 12. $256x^8y^{10}, 16x^4y^5$. 13. $9a^7b^2$, a 之指數非偶數.
 14. $49a^6b^4c^2, 7a^3b^2c$. 15. $576x^4y^2, 24x^2x$. 16. 負號須改正號.
 17. $x^6y^8z^4, x^3y^4z^2$. 18. 係數非整方不能求確數的方根.
 19. $\pi^2R^2r^2, \pi Rr$. 20. $\frac{\pi^2}{4}D^2d^2, \frac{\pi}{2}Dd$.

習 題 六 十 三

1. m^2+4m+4 . 2. $a^2+4ab+16b^2$. 3. $x^2+4xy+4y^2$.
 4. $9x^2+6xy+y^2$. 5. x^4+8x^2+16 . 6. $4x^4-12x^2+9$.
 7. $4x^2-28x+49$. 8. $a^2x^4-8ax^2y+16y^2$. 9. $9a^2x^2-24axy+16y^2$.
 10. $4a^4y^6-12a^2y^4+9y^2$.

習 題 六 十 四

1. $(x+y)(x+y), x+y$. 2. $(2x-y)(2x-y), 2x-y$.
 3. $(3x^2+3y^2)^2, 3x^2+3y^2$. 4. $(4x^2-y)^2, 4x^2-y$.
 5. $(x-1)^2, x-1$. 6. $(x^2+2)^2, x^2+2$.
 8. $(5x^5+1)^2, 5x^5+1$. 11. $(2x^2+y^2)^2, 2x^2+y^2$.
 12. $(15a-9)^2, 15a-9$. 13. $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y\right)^2, \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y$.
 14. $(9a^2-6y^2)^2, 9a^2-6y^2$. 15. $(2xy+1)^2, 2xy+1$.
 16. $(5z^2-7y)^2, 5z^2-7y$. 17. $(a+10)^2, a+10$.

習 題 六 十 六

1. $(2-x)(2+x)$. 2. $(4+2y)(4-2y)$.
 3. $(a+1)(a-1)$. 4. $(1+3x^2)(1-3x^2)$.

5. $(9a-4b)(9a+4b)$. 6. $(7+5)(7-5)$.
 7. $(15+8a)(15-8a)$. 8. $(6a^2+7b)(6a^2-7b)$.
 9. $a^2(2b+5c)(2b-5c)$. 10. $(8a^2b^3+10cd)(8a^2b^3-10cd)$.
 11. $(3a^2+2b^2)(3a^2-2b^2)$. 12. $(2\cdot 3^2d+5c)(2\cdot 3^2d-5c)$.
 13. $(x+y+z)(x+y-z)$. 14. $(a+b+8)(a+b-8)$.
 15. $(x-y+z)(x-y-z)$. 16. $(5+a+b)(5-a-b)$.
 17. $(5+a-b)(5-a+b)$. 18. $(p-c)(p-3c)$.
 19. $(3a-b+2a+2b)(3a-b-2a-2b) = (5a+b)(a-3b)$.
 20. $(x-8)(-x-6) = -5x-8(x+6)$.

習 題 六 十 九

1. $(b-3)(b-4)$. 2. $(b+5)(b+6)$. 3. $(c+5)(c-6)$.
 4. $(x+4)(x-2)$. 5. $(a-5)(a+2)$. 6. $(x+7)(x+8)$.
 7. $(y-8)(y+7)$. 8. $(a+4)(a-3)$. 9. $(x-7)(x-8)$.
 10. $(r+16)(r+4)$. 11. $(xy+2)(xy+1)$. 12. $(x-8)(x+2)$.
 13. $(a+10)(a-1)$. 14. $(a-12)(a+11)$. 15. $(a-9)(a+8)$.
 16. $(x+12)(x-6)$. 17. $(x-10)(x+9)$. 18. $(x+17)(x-2)$.
 19. $(x-15)(x+3)$. 20. $(a+7)(a-3)$. 21. $(a-11)(a+3)$.
 22. $(n+16)(n-1)$. 23. $(n+4)(n+9)$. 24. $(n-12)(n+5)$.
 25. $(a-15)(a+4)$. 26. $(a+12)(a-2)$. 27. $(a+7)(a-6)$.
 28. $(ab-15)(ab-1)$. 29. $(n^2-6)(n^2+3)$. 30. $(x-12y)(x+7y)$.
 31. $(x+3y)(x+9y)$. 32. $(1+7x)(1-2x)$. 33. $(a-10)(a-4)$.
 34. $(a-6)(a+9)$. 35. $(1-17y)(1+4y)$. 36. $(x-a)(x-b)$.
 37. $(x-8)(x+1)$. 38. $(m-n+3)(m-n+4)$.
 39. $(x+y-7)(x+y+2)$. 40. $(xy^2+4)(xy^2-4)$. 41. $x(y+2)(y-2)$.
 42. $x(y+17)(y-2)$. 43. $y^2(ay^2+b)(ay^2-b)$. 44. 改 9a.

45. $bx(x+a)(x-a)$. 48. 改 $6xy$.
46. $3a(x^2-6x-60)$. 49. $16x^2(2x+1)(2x-1)$.
47. $(10x^2+y^3)(10x^2-y^3)$.
50. $(4x+y)(16x^2-4xy+y^2)$. 51. $x^5(64x^3+x+16)$.
52. 改 $x^2-2xy+y^2-1$. 53. 改 $+13x$. 54. $(1-3a)(1+3a+9a^2)$.
55. $(5x+1)(x+1)$. 56. $(7x+4)(x-2)$.
57. $ax(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$. 58. $x(8x-1)(x+2)$.
59. $a^2(b-x)(b^2+bx+x^2)$.
60. $(a-1+xy)(a-1-xy)$.

習 題 七 十

1. -3. 2. -4. 3. -6. 4. -4. 5. $\frac{1}{4}$. 6. 21. 7. 2.
8. 8. 9. $2\frac{2}{9}$. 10. 8. 11. 16. 12. -3. 13. 11. 14. 5.
15. -a. 16. b. 17. 3a. 18. $\frac{7}{6}$. 19. 3. 20. 8. 21. -3.
22. 2. 23. 15. 24. 13. 25. 2. 26. $-2\frac{3}{4}$. 27. 1.
28. 2. 29. 1. 30. 3. 31. 4. 32. 1. 33. 2. 34. 40, 65
35. 13 公尺, 8 公尺. 36. 12, 13. 37. 20, 22. 38. 7, 5.
39. $76\frac{1}{8}$ 尺. 40. 22·1 吋.

習 題 七 十 一

1. 4 或 3. 2. 5 或 -6. 3. 2, -1, 或 -3.
4. -1, 5 或 3. 5. $\frac{1}{2}$ 或 -4. 6. 0, 2, 或 $-\frac{5}{3}$.
7. 8 或 -8. 8. ± 3 或 ± 6 . 9. ± 4 .

10. 8 或 -7. 11. -3 或 -4. 12. 4 或 6.
 13. 13 或 -6. 14. 0 或 7. 15. 12 寸, 20 寸.
 16. 10 碼, 14 碼. 17. 11 寸, 8 寸. 18. 5 寸, 15 寸.

習 題 七 十 二

1. $\frac{A}{\pi b}$, $\frac{A}{\pi a}$. 2. $\frac{S}{h}$, $\frac{S}{p}$. 3. $\frac{S}{2\pi h}$. 4. $\frac{V}{\pi r^2}$.
 5. $\frac{V}{\pi(R^2-r^2)}$. 6. $\frac{A}{4\pi^2 r}$. 7. $\frac{Z}{2\pi h}$. 8. 1.698 尺.
 9. $\frac{T}{6}$, $\sqrt{\frac{T}{6}}$. 10. 28.3 尺. 11. $\sqrt{\frac{V}{2\pi^2 R}}$. 12. $\sqrt{\frac{S}{4\pi}}$.
 13. 14.82 尺. 14. $\sqrt{\frac{V}{\pi h}}$. 15. 7.294 寸. 16. 24.13 寸.
 17. $\frac{V}{1.0472r^2}$, $\sqrt{\frac{V}{1.0472h}}$. 18. 11.94 寸, 6.6 寸.
 19. $\frac{A-b(S+n)}{d}$, $\frac{A-td-bn}{b}$. 20. 0.22 寸, 2.06 寸, 0.19 寸.
 21. 25 寸. 22. 288.08 立方寸. 23. $3\frac{1}{3}$ 年, 5%, 416.67 元.

習 題 七 十 三

1. $\frac{5}{9}$. 2. $\frac{1}{2}$. 3. $\frac{9}{10}$. 4. $\frac{7}{8ax}$. 5. $\frac{4}{5x}$.
 6. $\frac{3b^4}{3cx^4y}$. 7. $\frac{x}{5my^2}$. 8. $\frac{1}{3ax^2}$. 9. $3a^2x$. 10. $\frac{1}{6y^4}$.
 11. $\frac{88}{9}$. 12. $\frac{x+y}{x}$. 13. $\frac{a-3}{a-5}$. 14. $\frac{n+10}{n-4}$. 15. $\frac{a(x-y)}{x+y}$.
 16. $\frac{5a}{2b^3}$. 17. $\frac{a-6}{a+4}$. 18. $\frac{5+a}{6-a}$. 19. $\frac{3x+7y}{4xy}$. 20. 1.

- $$7. \frac{3a^2+2ax+x^2}{a+x} \quad 8. \frac{6a+7c-b}{12y} \quad 9. \frac{3a-1}{6}$$
- $$10. \frac{m-r}{mr} \quad 11. \frac{230x-x+12}{15x} \quad 12. \frac{3x+2a-5a^2}{3a}$$
- $$13. \frac{3x-3a}{5} \quad 14. \frac{12-4a}{b} \quad 15. \frac{81a-4b}{84}$$
- $$16. \frac{16x+23}{42} \quad 17. \frac{7x-10}{x^2-5x+6}$$
- $$18. \frac{ab^2-a^3-a^2b-b^3}{ab(a^2-b^2)} \quad 19. \frac{2}{x^2-10x+24}$$
- $$20. \frac{3x+2}{(x-2)(x-1)(x+1)} \quad 21. \frac{x-6}{(x+2)(x-1)(x-3)}$$
- $$22. \frac{x^2+3x+5}{(x-3)(x+3)(3x-1)} \quad 23. \frac{2x^3-x^2-2}{(x-1)(x^2+1)}$$
- $$24. \frac{x^3-11x^2+5x+11}{2(2x+1)(x-3)(x+2)} \quad 25. \frac{a^3+ab+2b^2-b^3}{(a+b)(a^3-b^3)}$$

習 題 七 十 七

- $$1. \frac{3}{20} \quad 2. \frac{5}{13} \quad 3. \frac{5}{7} \quad 4. \frac{m}{x}$$
- $$5. \frac{acd^2}{b^2} \quad 6. \frac{2m^2xy^2z^2}{3} \quad 7. \frac{22x^2}{205b^2y} \quad 8. \frac{-2c^2x}{5ay^4}$$
- $$9. \frac{10a^2x}{21b \cdot y^3} \quad 10. \frac{a^4-b^4}{b^2c+bc^2} \quad 11. \frac{x+1}{x-2} \quad 12. \frac{x^{n+m}}{y^{n+m}}$$
- $$13. \frac{m^2}{4a^2b} \quad 14. \frac{3x+y}{12x} \quad 15. \frac{2n^2+2n}{2n-1}$$
- $$16. \frac{8a^2+6ab+b^2}{9a^2-4b^2} \quad 17. \frac{3cy}{4a} \quad 18. \frac{x-1}{x-4} \quad 19. \frac{y}{x^3}$$
- $$20. \frac{x+1}{x+5} \quad 21. \frac{x+1}{x-1} \quad 22. \frac{a^2+ab}{a-b} \quad 23. \frac{(b-a)^2}{b^2}$$

24. $\frac{a^4 - b^4}{a^2 b}$. 25. $\frac{(1+2a)^2}{1-a^2}$. 26. $\frac{4xy}{x^2 - y^2}$. 27. 2
28. a . 29. $\frac{3x}{4y}$. 30. $\frac{3x}{(x+y)^2}$. 31. $\frac{4+a}{xy+ay}$.
32. $\frac{x}{x-1}$. 33. $\frac{x^2-x}{x+1}$. 34. $\frac{y}{x}$. 35. 1.
36. x . 37. $\frac{ab-5b}{a-9}$. 38. $\frac{a+b}{b}$. 39. $\frac{a^4}{b^4+a^2b^2}$.
40. $\frac{2x^2-3x+1}{4x^2-x}$. 41. $\frac{x+1}{x+3}$. 42. 1. 43. $\frac{x^2+y^2}{2xy}$.
44. $\frac{-3m}{a^4(x-y)}$. 45. $\frac{y-1}{x}$. 46. $\frac{4xy}{x^2-y^2}$. 47. $x^2+1+\frac{1}{x^2}$.
48. $\frac{(2x-1)(x-1)}{(2x+3)(x+3)}$. 49. 1. 50. $\frac{ab}{(4a-3)(a-1)(16a^2-9)}$.

習 題 七 十 八

1. 5. 2. 4. 3. 2. 4. 1. 5. 1. 6. 4.
7. -4. 8. $-1\frac{5}{7}$. 9. 9. 10. -12. 11. -5. 12. $-2\frac{12}{25}$.
13. 2. 14. $-9\frac{5}{13}$. 15. 1. 16. 5. 17. 12. 18. 5.
19. $\frac{17}{3a-5}$. 20. $a = \frac{2bc-4}{bc}$ 21. $b = \frac{4}{x+3}$, $x = \frac{4-3b}{b}$.
22. $\frac{a}{2}$. 23. a . 24. $-b$.
25. $P = \frac{Wd}{D}$. 26. $\frac{Fgr}{V^2}$, $\frac{WF^2}{Fr}$, $\frac{WF^2}{Fg}$, $\sqrt{\frac{Fgr}{W}}$.
27. $\frac{I(R+nr)}{n}$, $\frac{n(E-Ir)}{I}$, $\frac{nE-IR}{In}$, $\frac{IR}{E-Ir}$. 28. 1.

29. $f = \frac{pq}{p+q}$, $p = \frac{fq}{q-f}$, $q = \frac{fp}{p-f}$. 30. $\frac{cbl}{ab+al+bl}$.
31. $r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$. 32. $I = \frac{E}{R + \frac{r}{n}}$. 33. $I = E / \frac{R}{n} + \frac{r}{m}$.
34. $a = \frac{R_t - R_0}{E_0}$. 35. $\frac{\left(\frac{W}{2}\right)^2 + h^2}{2h}$. 36. 2 尺由 1000 磅重量至支點.
37. 1450 磅. 38. 210 磅, 140 磅. 39. $1\frac{1}{2}$ 呎由 1750 磅.
40. $r = \sqrt{\frac{\pi R^2 - A}{\pi}}$. 41. $W = \frac{3A}{2h}$. 42. $\frac{V}{2\pi^2 r^2}$.
43. $\sqrt{\frac{\pi R^2 h - V}{\pi h}}$. 44. 7.7 吋 45. $\frac{2S}{P}$.
46. $\frac{2(T-A)}{S}$. 47. $\frac{2(T-B-b)}{P+q}$. 48. $\frac{2S-PL}{L}$.
49. $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$. 50. $\frac{-FT^2}{4\pi^2 m}$. 51. $\frac{EPq - Ef}{Eq}$.
52. $\frac{Cr}{Kr - C}$. 53. $\frac{aKt_2 T - dQ}{aKT}$. 54. $\frac{273(P_t V_t - P_0 V_0)}{P_0 V_0}$.
55. $\frac{H(b_1 + b_2) - 1600000(b_1 - b_2)}{6400(b_1 - b_2)}$. 56. 12 呎. 57. 25 碼.
58. 5 吋, 15 吋. 59. $157\frac{1}{2}$ 方吋. 60. 23 方吋, 16 吋.
61. 576. 62. 5.76 元. 63. 600 元.
64. 3 % . 65. 700 元與 400 元. 66. 2 年, 3 月, 18 日.
67. 6 % . 68. 2400 元. 69. 11520, 2880.
70. 20 呎, 14 呎. 71. 300 方呎. 72. 360 里, 200 里.
73. $100\frac{1}{17}$ 尺, $88\frac{16}{17}$ 尺. 74. 3 角 6 分, 2 角 4 分. 75. 7 角, 2 角 8 分.

習 題 七 十 九

1. 9° . 2. 80° . 3. $75\frac{1}{5}^\circ$.
4. 1550° , 1350° , 1210° , 1000° , $326\frac{2}{3}$, $246\frac{1}{9}$.
5. 零度下 $51\frac{1}{9}$. 6. 零度下 40° . 7. 3315° 強.

習 題 八 十

2. 39. 3. $179\cdot4$.
4. $P = \frac{33000H}{LAN}$, $L = \frac{33000H}{PAN}$, $A = \frac{33000H}{PLN}$, $N = \frac{33000H}{PLA}$.
5. $10\cdot85$. 6. 137. 7. $11\cdot1$ 吋. 8. $1\cdot351$ 呎.
9. $35\cdot37$. 10. $54\cdot15$. 11. 1963 磅. 12. $16662\cdot9$.
13. $8\cdot73$. 14. $4\cdot95$ 吋. 15. $190\frac{10}{11}$. 16. $11\cdot75$.
17. 1100 呎. 18. $89\cdot96$. 21. $2\cdot3$ 吋. 22. $393\frac{3}{4}$.
23. $3\frac{1}{3}$.

習 題 八 十 一

1. $E=IR$, $R = \frac{E}{I}$. 2. $0\cdot125$ 安培. 3. $0\cdot0515$.
4. $1\cdot2875$ 安培. 5. 27 伏特 6. 200 歐姆. 7. $70\cdot4$ 伏特.

習 題 八 十 二

1. 133.4 歐姆. 2. 7.6 歐姆. 3. 8.69 歐姆.
4. 0.042 吋. 5. 5381 呎. 6. 1.376 歐姆.

習 題 八 十 三

1. $x=5, y=3.$ 2. $x=3, y=4.$ 3. $x=5, y=4.$
4. $x=8, y=1.$ 5. $x=5, y=7.$ 6. $x=-1, y=3.$
7. $x=1\frac{57}{59}, y=\frac{5}{59}.$ 8. $x=4\frac{8}{19}, y=\frac{-20}{19}.$ 9. $x=1, y=2.$
10. $x=100, y=9.$ 11. $x=12, y=5.$ 12. $x=4, y=3.$
13. $x=2, y=2.$ 14. $x=3, y=7.$ 15. $x=5, y=7.$
16. $x=-2, y=-2.$ 17. $a=1, b=-1.$ 18. $a=10, b=6.$
19. $m=3, n=19.$ 20. $x=5, y=2.$ 21. $x=14, y=15.$
22. $x=\frac{a+c}{ad+bc}, y=\frac{d-b}{ad+bc}.$ 23. $x=6, y=4.$
24. 8, 7. 25. 2, 1. 26. $\frac{4}{15}.$ 27. 354, 166.
28. 420, 280. 29. 6 兩. 30. 16, 21, 28.

習 題 八 十 四

1. $a^8y^{12}.$ 2. $64y^{16}x^{24}.$ 3. $27a^6b^3.$ 4. $-6^4a^6x^{18}.$
5. $81a^{12}b^8x^4.$ 6. $x^8y^{12}.$ 7. $3^3ab^3c.$ 8. $4babcx^{2b}.$
9. $\frac{27x^3}{64b^3}.$ 10. $\frac{64x^6}{125b^9}.$ 11. $\frac{16a^{12}b^4}{25b^6c^{16}x^3}.$ 12. $\frac{a^{2n}}{b^{n^2}}.$
13. $\frac{x^m d}{y^m c^d}.$ 14. $x^8y^{12}z^{16}.$ 15. $7^{xy}m^{xy}n^{3xy}.$ 16. $92zx^4zy^{2z}.$

17. ab^2c^3 .

18. $\frac{4b^3}{27x^4}$.

習題八十五

1. 1. 2. $\frac{1}{16}$. 3. $\frac{1}{100000000}$. 4. $\frac{1}{512}$. 5. 2.

6. $\frac{1}{2}$. 7. 81. 8. $\frac{1}{64}$. 9. 25. 10. 1000.

11. $\frac{1}{100}$. 12. 9. 13. 1. 14. 1. 15. $\frac{1}{1024}$

16. 243. 17. $ax^{-\frac{1}{2}}$, 18. $a^{\frac{1}{12}}$, 19. $12a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{4}{3}}$.

習題八十六

1. 35,000,000. 2. 867,000,000,000. 3. 0.00000523.

4. 0.00000004786. 5. 0.000009376. 6. 467,300,000.

7. 4,370,000,000,000. 8. 4.768×10^9 9. 2.36×10^{10}

10. 37.61×10^9 11. 3.67×10^{-4} 12. 4×10^{-7}

13. 3.67×10^{-7}

習題八十七

1. ± 5 . 2. ± 4 . 3. ± 4 , 4. ± 2 . 5. ± 3 .

6. ± 6 . 7. ± 1.826 . 8. ± 1.483 . 9. ± 1.826 . 10. ± 2 .

11. ± 1 . 12. $\pm \sqrt{\frac{Egr}{W}}$. 13. $\pm \sqrt{\frac{2s}{g}}$. 14. $\pm \sqrt{\frac{\pi l}{g}}$.

15. $\pm \sqrt{\frac{mna}{F}}$. 16. $\pm \sqrt{\frac{n^2 l^2 d}{Kt}}$. 17. 6.09呎. 18. 5.26吋.

習 題 八 十 八

1. -7 或 -8 . 2. 8 或 9 . 3. -2 或 18 . 4. 2 或 3 .
5. 4 或 -6 . 6. -10 或 -16 . 7. -9 或 6 . 8. 6 或 5 .

習 題 八 十 九

1. 10 或 -6 . 2. -8 或 -3 . 3. 3 或 $\frac{1}{3}$.
4. $\frac{7}{6}$ 或 $-\frac{1}{6}$. 5. $\frac{4}{5}$ 或 $-\frac{3}{2}$. 6. 0.4494 或 -4.4494 .
7. 0.732 或 -2.732 . 8. 1.9142 或 -0.912 . 9. 1.0800 或 -1.7475 .
10. 11 或 $\frac{11}{3}$.

習 題 九 十

1. 1 或 2 . 2. -2 或 -3 . 3. 3 或 -2 .
4. 14 或 -12 . 5. 10 或 -12 . 6. 24 或 -2 .
7. $\frac{3}{5}$ 或 -3 . 8. $-\frac{1}{2}$ 或 -2 . 9. $\frac{5}{7}$ 或 -2 .
10. 2 或 $-2\frac{2}{7}$. 11. 2 或 $\frac{1}{2}$. 12. $7\frac{1}{2}$ 或 $-10\frac{1}{2}$.
13. $\frac{b}{2}$ 或 $-\frac{9b}{2}$. 14. $\frac{-V \pm \sqrt{V^2 + 2gS}}{g}$ 15. $\frac{-\pi h \pm \sqrt{\pi^2 h^2 + 2\pi T}}{2\pi}$
16. $9, 10, 11$, 或 $-1, 0, 1$. 17. $150, 30$, 或 $-150, -30$ 18. 3 呎 $8\frac{1}{4}$ 吋.
19. 3 尺. 20. 6 尺. 21. $9, 16$.
22. $40, 31$. 23. 每小時 30 里. 24. 4.828 呎.
25. 2.732 呎. 26. 1.99 吋. 27. $15, 12, 9, 54$ 方呎.

28. 20吋, 16吋, 12吋. 29. 16呎, 11呎. 30. 8.66 秒.

習 題 九 十 一

1. $3x=y$ 2. $53\frac{1}{3}$. 3. $K=10, y=1\frac{1}{3}$.
4. $A=\frac{1}{2}ab$. 500 方吋. 5. 16 1 6. 41.57 吋, 33.94 吋, 24 吋.
7. $4\times$ 面積. 8. 20.733 夸德. 9. 2.44 吋, 325 呎 10 吋.
10. $5\frac{3}{7}$ 呎, $4\frac{4}{7}$ 呎. 11. $2\frac{98}{101}$ 呎離 1 磅重量.
14. $\frac{3}{16}$, 0.48. 15. $H=KI^2Rt$. 16. $H=51,840,000$; $K=0.24$.
17. $1406\frac{1}{4}$ 磅. 18. 17.48 歐姆. 19. 3904.7 呎. 20. 0.0191歐姆.

習 題 九 十 二

1. $L=\frac{Kbd^2}{W}$, $b=\frac{WL}{Kd^2}$, $d=\sqrt{\frac{WL}{Kb}}$, $K=\frac{WL}{bd^2}$. 2. 4410, 882.
3. 15.36 呎. 4. 5.88 吋. 5. 18.6 吋. 6. 8820 磅, 1764 磅.
7. $6\frac{1}{4}$ 吋. 8. $17\frac{3}{8}$ 吋. 9. 880 磅, $333\frac{1}{3}$ 磅, 11.7 吋, 8 呎.

習 題 九 十 七

1. 4096. 2. 16384. 3. 16384. 4. 16384. 5. 8192.
6. 256. 7. 8. 8. 8. 9. $\frac{1}{32}$. 10. $\frac{1}{64}$.
11. 4096. 12. 262144. 13. 128. 14. 4. 15. 4.

16. 128. 17. 4096 18. $\frac{1}{2}$. 19. 256. 20. 512.
 21. 4096. 22. $\frac{1}{128}$. 23. $8^{\frac{1}{2}}$. 24. $\frac{1}{8}$.

習 題 一 百

1. $x=2$. 2. 40. 3. 800. 4. 8652. 11. 0.2335. 13. 0.0898.
 16. 7.335×10^7 20. 1.9837×10^4

習 題 一 百 一

1. 19210, 1740, 245,400, 718.1, 3.999, 9.958,
 2120, 227, 27.97, 28.29, 0.1110, 47.07,
 2. 54.99, 0.3825, 15.8, 3.183, 0.88, 0.001312,
 1.602, 381.9, 17.325, 0.6911.
 3. 140.2. 4. 0.0001798. 5. 0.6637. 6. 5.031. 7. 0.5425.
 8. 1.499. 9. 0.01374. 10. 0.05826. 11. 50.

習 題 一 百 二

1. 0.1691. 2. 67.42. 3. 5.243. 4. 1.104.
 5. 0.004391. 6. 2.868×10^{-10} . 7. 0.3436 8. 11.14.
 9. 128. 10. 1.1. 11. 0.2. 12. 1.260.
 13. 1.414. 14. 1.412. 15. 1.149. 16. 0.5.23.
 17. 1012. 18. 1627000. 19. 0.2899. 20. 0.5411.
 21. 1.522. 22. 4.769. 23. 19.60. 24. 51.14.
 25. 0.001743. 26. 1.070. 27. 0.4505. 28. 0.7945.

29. 5.259. 30. 1.805. 31. 0.0005228. 32. 0.00001146.
 33. 188.2. 34. 1.023. 35. 9.17. 36. 140.3.
 37. 0.00002475. 38. 0.072. 39. 0.6199. 40. 9.404.
 41. 3.591. 42. 11.69×10^{11} . 43. 2.476×10^{11} . 44. 0.577×10^{11} .
 45. 0.2287. 46. 0.527. 47. 5.991. 48. 9.654.
 51. 1.405 吋. 52. 356.50 元. 53. 9478 元. 54. 135.87 元.
 55. 58.31 元. 56. 399.30 元. 57. 14. 58. 164.5.
 59. 461.5. 60. 10.79 呎. 62. 5028. 63. 3.73.
 64. 74770. 65. 41910 磅. 66. 874400 磅. 67. 34220, 537500 磅.
 68. 276900 磅. 69. 260. 70. $29 \frac{1}{11}$. 71. 41.25 磅.
 72. 0.02 呎. 73. 88.2. 74. 2068 呎 / 每秒鐘.

習 題 一 百 三

4. $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{9\pi}{20}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$, π , $\frac{7\pi}{6}$.
 5. 225° , 240° , 270° , 300° , 315° , 330° , 360° , 540° , 720° .
 6. 0.820, 1.318, 0.292, 2.195, 1.094.
 7. 45° , 135° , 150° , $191^\circ 15'$.
 8. $\frac{\pi}{2}$, 0.642, 0.929.
 9. 30° , 75° . 10. 2.0749, $118^\circ 52' 59''$.
 11. 102.77 呎. 12. 每秒=94.25 呎. 13. 每秒 220 弧度.
 14. 140 弧度. 15. $18 \frac{3}{4}$ 弧度. 16. 0.25 弧度, $14^\circ 9' 26''$
 17. 8.70 呎, 0.421 弧度. 18. 2.2 弧度. 19. 99 呎.
 20. 15.36 呎.

習 題 一 百 六

1. 0.6583. 2. 2.266. 3. 30140. 4. 1.69.
 5. 1.133. 6. 0.8689. 7. 293.6. 8. 234.4.
 9. 0.866. 10. 皆 = 1. 11. 每秒 38.3 呎.
 12. 3472 呎, 12856 呎, 17320 呎, 19696 呎, 20000 呎.
 13. 46875 呎. 14. 28.6 哩. 15. 703 磅. 16. 0.1294.
 17. 10 呎. 18. 256. 19. 0.3276. 20. 1.2 呎.

習 題 一 百 八

1. $A=62^{\circ} 30'$, $b=7.288$, $c=15.78$.
 2. $A=43^{\circ} 35'$, $b=17.86$, $c=24.66$.
 3. $B=14^{\circ} 34'$, $a=96.2$, $c=99.38$.

習 題 一 百 九

1. $37^{\circ} 34'$ 2. 45° , $22\frac{1}{2}^{\circ}$ 3. 70 呎. 4. 224 呎.
 5. $7^{\circ} 7.6'$. 6. $2^{\circ} 51.7'$. 7. $23^{\circ} 54.6'$.
 8. 13.54 吋, $83^{\circ} 20'$. 10. 11 吋. 9. 8.258 吋. 10. 8.284 呎.
 11. 65.48 呎. 12. 241.5 方呎. 13. 239 呎. 14. 5933 方呎.
 15. 1.225 哩. 16. 858.8 呎. 17. 2.038 呎, $38^{\circ} 56.3'$.
 18. 2.794 方呎. 19. 8.67 方呎. 20. $35^{\circ} 15.9'$. 21. 18 哩.
 22. 54.8 哩. 23. 40.81 吋. 24. 118.9 呎, 129.8 呎.
 25. 每小時 13.66 哩.

習 題 一 百 十

1. $18^\circ 35'2''$, $20^\circ 44'8''$, $19^\circ 13'3''$. 2. $64^\circ 26'7''$.
 3. $15^\circ 46'7''$, $17^\circ 10'9''$, $31^\circ 13'1''$, $6^\circ 59'2''$. 4. 17.23 呎.
 5. 13.03 呎 6. 22) 呎.

習 題 一 百 十 四

2. $y = 18\sin(0.7854t)$, 6.89 呎, 17.50 呎.
 4. $y = 8\sin(20t^\circ + 55^\circ)$, -6.55 呎.

習 題 一 百 十 五

2. 1, 0. 3. $\frac{120}{169}$, $\frac{119}{169}$. 4. -1, 135° . 9. $\pm \frac{1}{3}$, ± 3 .
 19. -0.7618, 0.5475, 1.1760.

習 題 一 百 十 六

1. $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$, $C = \sin^{-1} \frac{c \sin B}{b}$.
 3. $B = 15^\circ 57'$, $b = 5.428$ 呎, $c = 17.85$ 呎.
 5. $B = 47^\circ 2'5''$, $A = 88^\circ 40'2''$, $a = 19.57$; $B' = 132^\circ 57'5''$, $A' = 2^\circ 25'2''$,
 $a' = 0.94$.
 9. $A = 110^\circ 20'4''$, $C = 58^\circ 31'8''$, $b = 20.5$.
 11. $A = 45^\circ 53'4''$, $B = 72^\circ 35'2''$, $C = 61^\circ 33'4''$.
 13. 97.14 呎.
 14. 837.2 呎.

15. 852 呎.
16. 173 呎.
17. 1820 呎.
18. 68.6 哩東 $35^{\circ}21.1'$ 偏北.

習 題 一 百 十 七

1. 67.66 磅.
2. 1111.3 磅, 東 $26^{\circ}26.9'$ 偏北.
3. 1279 呎, 東 $23^{\circ}24'$ 偏北.
4. 37.09 哩每小時, 北 $59'$ 偏西.
5. 每小時 22 哩
6. 2.19 哩, 東 $14^{\circ}26'$ 向南.

