修正課程標準適用

新編

高中立體幾何學

全一冊

編者　余介石

中華書局印行

註冊商標

(12099)
0.50

民國二十七年十[illegible]月再版

修正課程標準適用
新編高中立體幾何學（全一冊）
◎實價國幣五角
（郵運匯費另加）

著者　余介
發行者　中華書局有限
代表人路
印刷者　香港九龍北
中華書局印
發行處　中華書局發
分發行處　各埠中華書

何奎垣先生序

幾何爲空間形式科學.自非歐派幾何發明後,覺察空間可依於各種不同方式.換言之,即幾何待原理而成,空間待幾何而表,故原理派尙矣.余君介石編輯是書,根於原理派觀點,洵爲近日敎科書中之有極大進步者也.至其秩序緊密,說理周詳適合學子,抑其次也.此書之最精處,在於比較平面與球面幾何.愛恩斯坦之意,以爲如人在球面,而不能離此球面,則彼之直線,乃大圓弧.假如從一定點起,取半徑作圓,當半徑甚小時,周長與半徑之比,極近於π.如半徑漸增大時,則周率漸小於π,以至爲零.此球面學者解釋此現象曰,吾之平面幾何,乃非歐派幾何也.審此則雖初學亦能分別歐派與非歐派幾何.吾之爲此言也,以客觀空間,近於非歐派幾何,故當先養成學子覺察之力也.此外,余意以爲中等幾何,尙有應注意者數事.一者,平面及空間軌跡,所當注意,此爲解決一切問題之根本.二者,平面之對稱,平移,旋轉及位似圖,應推廣於空間,依克乃恩Klein之意,此等概念,乃初等幾何之不變羣.換言之,即初等幾何圖形性質,對此等羣而爲不變也.三者,初等幾何,乃可度幾何,故當注意長短,面積,體積,容積之量法.四者,圓錐形截線,除直線與圓而外,尙有抛物線,橢圓,雙曲線等,應細研其幾何性質,及其公同性

質.五者,書中多依綜合法敍述,以示謹嚴,而不適於尋求.學者宜常將定理改作問題,以爲尋求,必能助其精進.余君此著,對上述諸端,頗知注意.平面部於定理復習,甚重解析,於軌跡及作圖題之尋求,亦能揭示運思着手之途徑,此皆最有裨益於初學之處.惜以取材限於官方規定,對空間之變圖各法,與拋物線橢圓,雙曲線等,皆未能備載.故不能不贅數言,以告學子,而望其能參考其他書籍,以補其闕,想余君及善讀是書者,或不河漢斯言,是爲序.

何　魯

編輯要旨

(一)本書取材,完全遵照教育部最近頒布高中課程修正標準,專供高中二年級甲組之用.至於編述次第,則依據二十三年七月江蘇省教育廳所定的修訂高中算學科教學進度表.稿本曾託友人李修睦,陸子芬,劉漢三諸先生,在各著名中學,實地試教,以期適合實際情形.

(二)美人 Schultze, Sevenoak, Schuyler 三氏所編立體幾何一書,在我國流行極廣,已有譯本四五種,其爲各校樂於採用之情形,可以想見.卽江蘇省教廳的進度表,亦大體依其次序.該書選材妥善,說理周詳,條理井然,習題豐富,能引起初學研習興趣,促進其自動作業,而養成其理解能力,誠爲一極優良教本.但就編者經驗所及,其書尙不無缺憾.本書卽據爲藍本,加以改編,其瑕疵悉予修正,優點則盡行保存,以期益爲完善合用.

(三)吾師何奎垣教授所倡之原理教學法,極能助學子精進,本書編制,力求與此原則相合,故對基本原理,力求詳盡明達,復就立體幾何中心事項,分爲單元.全書分三大段:第一二兩編爲第一段,闡明空間圖形基本元素要義;第三至五編爲第二段,詳述多面體,三圓體(圓柱,圓錐,球)的度量問題,此爲立體幾何最切實用的部分;第六編球面幾何學爲第三段,目的在對兩種二度幾何學(平

面幾何與球面幾何)作一比較的研究,并藉以顯出幾何學的性質,而爲高中幾何一科作一總結束.

(四)按部頒修正標準,高中甲組立體幾何授課時間,爲全年每週二小時,共約有80小時之譜.本書共 174 頁,有習題三四集,複習題五集,總習題一集,每小時約授 2 頁,每週有習題一次,支配尚覺勻稱.惟我國幅幀廣大,各地程度不齊,編制宜富彈性,故本書將球的度量問題,提前編入第五編末.教師如感時間不敷,則末編庶可從略.

(五)幾何注重圖形與說明對照,本書絕不令一理的證明,分跨前後二頁之上,以便初學研習.又立體幾何,頗重計算,故特附對數表,方乘方根表,π 倍數,冪,根及倒數表,三角函數表等於卷末,藉爲計算一助.

(六)本書編輯時,時蒙何師奎垣指示匡正;李修睦,陸子芬,劉漢三諸先生曾就試教經驗,多所指教,而李君復將全稿校閱一遍,尤爲可感;謹并志以表謝忱.此外仍望海內方家各校教師隨時賜教,以便修訂.

(七)本書由友人另編習題解答(不久卽可由本局印行),但限於教師購置,以供批改學生課卷之參考,非經學校蓋章,概不發售,讀者諒之.

民國二十六年元月編者謹識,

時次成都國立四川大學.

修正課程標準適用

新　編

高中立體幾何學

目　次

第一編

空間的平面和直線

第二編
二面角，多面角

第三編

多面體

第四編

柱與錐

第五編

球

第六編

球面幾何學

附　錄

附　表

索　引

索　引

(附英文原名)

[後面第一數碼, 指所在頁數; 第二數碼指節數; 如係中文字碼, 則係表第幾習題.]

修正課程標準適用

新　　編

高中立體幾何學

第一編

空間的平面和直線

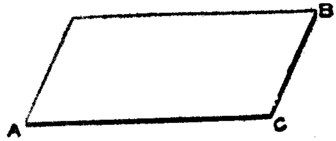
1. 平面　在一面上任取二點,而聯直線,如這直線上一切的點都在這面上時,便叫做**平面**.換句話說,即是作下列的假設:

平面公理　**在一直線上的二點,如在一平面上,則這直線上任何點也都在那平面上.**

已知幾點或數直線,而含有這些點或直線的平面,爲唯一無二時,便稱這平面爲已知點或直線所決定.

平面的決定以下列公理爲根據:

平面決定公理　**不在一直線上的任意三點,可決定一平面.**



註　平面向各方面皆爲無限延長,但作圖時常以一平行四邊形表示如右圖.這平面稱爲平面 AB 或平面 ABC.

2. 立體幾何學　**立體幾何學**是研究不完全在一平面內各種圖形的科學,如果這種研究爲可能,必先有三度空間存在方可.我們可將空間存在的假設,列爲一公理如下:

三度空間公理　**至少有四點不在同一平面上.**

註　立體幾何學圖形,除模型外,無法可表,平常以直尺和圓規作出的圖,限於一平面上,只能表圖形的意義,而不能表實際,與平面幾何學中情形不同.

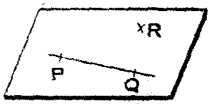
3. 平面的決定　定理　**決定一平面,須知:**

(一)一直線和線外的一點;

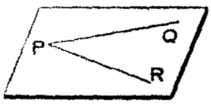
或　(二)二相交的直線;

或　(三)二平行的直線.

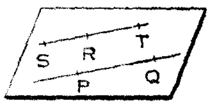
〔證明〕 (一)過已知點 R 和已知直線上二點 P, Q, 只能作一平面(何故?),而 PQ 直線即在這平面內(?).



(二)取二線交點 P, 和各線上任一點 Q, R, 定一平面,則必含這二線.



(三)按平行線定義, $PQ \| ST$ 在一平面內,在 ST 上取一點 R, 與直線 PQ, 即定所求的平面.



4. 二平面的相交　由三度空間公理,可知如二平面不相合,則至多只能有二交點.今如加一假設:

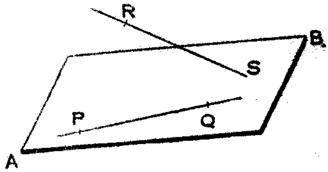
平面交點公理　**如二平面有一公共點,則必更有第二公共點.**

則這二交點的聯線,必同時在二平面內,故得

平面相交定理　**如二平面相交,則其一切交點,成一直線.**

注意　這直線以外的點,必不能同在題設的二平面內,因這相交線與其外一點,決定唯一的平面也.

5. 直線與平面的關係　由平面公理,可知一直線如與一平面相交,而不全含於這平面內,則至多只一交點.設 PQ 為平面 AB 內一直線,在這平面外取一點 R,過 R 作 PQ 的平行線,則決不能和平面 AB 相交.因如交於 S,可作 PQ 與 RS 所定的平面(§3(三)),與平面 AB 的交線即 PQ.今 S 點既在平面 AB 內,又在 PQ 與 RS 所定的平面內,則必在二者交線 PQ 上,而與 $RS//PQ$ 的假設相背.



定義　一直線與一平面,如無論如何延長,總不相交,則叫做互相平行.

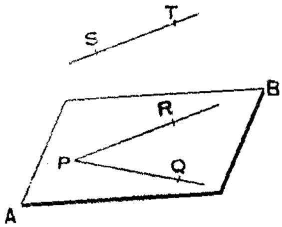
所以一直線與一平面的關係有三:

(一)直線完全在平面上,即是平面含這直線.

(二)直線與平面相交於一點.

(三)直線和平面二者互相平行.

註　由上面的說法,可知過平面外一點,不只一直線與這平面平行.



6. 二直線的關係　在平面 AB 上,取相交於 P 點的二直線 PQ 和 PR. 自平面外一點 S,引 $ST \parallel PR$,則按上節所述,ST 不與平面 AB 相交,自更不能與直線 PQ 相交.但 ST 也不和 PQ 平行.因如 $ST \parallel PQ$,則因二平行線或三點均確定唯一平面,故 P 和 ST 所定的平面,即是 $ST \parallel PR$ 和 $ST \parallel PQ$ 所定者,如此則在這平面上,過 P 點有二直線 PQ, PR,都和 ST 平行,而與平行公理相違背矣.故 ST 和 PQ 既不相交,也不平行.

由此可知三度空間內二直線的關係,有下列三種:

(一)相交於一點

(二)互相平行.

以上二種情形,均可決定一平面.

(三)不相交也不平行.

這種情形不能決定一平面.

習題一

1. 不在同一平面內的四點,可定幾個平面?

2. 不在同一平面內的三直線相交於一點,可定幾個平面?

3. 一點和二相交直線,共可定幾個平面?

4. 一點和二平行直線,共可定幾個平面?

5. 一直線和他二相交直線之一平行,可定幾個平面?試列舉各種可能的情形.

6. 經過一平面外一已知點,只能作一條平行線,還是不只一條?

7. 在三度空間內,經過一直線外一已知點,是不是也只能作一條平行線?

8. 在立體幾何內,如求證二直線平行,是否如平面幾何的情形一樣,只需證明不相交?還要加什麼條件?

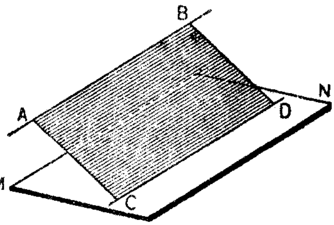
9. 如一直線與一平面相交,則這平面上的直線決無與其平行者,試加證明.

10. 試由上題推出一作不共面二直線的方法.

7. 過一面平行線的平面

定理 過一面的平行線作一平面,如與前者相交,則交線必與那直線平行.

〔已知〕 $AB \parallel$ 平面 MN,平面 BC 過直線 AB,而與平面 MN 交於 CD 線.



〔求證〕 $CD \parallel AB$.

〔證明〕 如 AB, CD 交於一點,則因 CD 在平面 MN 內,故即 AB 與平面 MN 相交;但 $AB \parallel$ 平面 MN,故此爲不可能之事.

AB, CD 不相交,又同在平面 BC 內,故相平行.

逆定理 二直線互相平行,過其一而不含其他的平面,必與他一直線平行.

〔已知〕 $AB \parallel CD$,而平面 MN 只含 CD(如上圖).

〔求證〕 $AB \parallel$ 平面 MN.

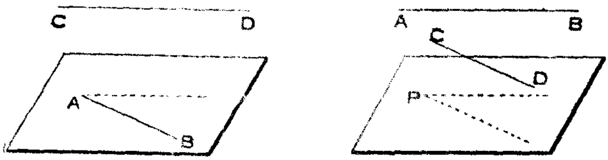
〔證明〕 AB 與 CD 所定的平面,交平面 MN 於 CD.

如 AB 與平面相交,則交點必在 CD 上(參看§5).但 $AB \parallel CD$,故這事不可能.所以 $AB \parallel$ 平面 MN.

註 應用這條逆定理,可作一平面與已知線 AB 平行,其法乃先作 $CD \parallel AB$,再在這二平行線所定的平面外任取一點,與 CD 決定的面,即爲所求平面.

8. 關於平面的二作圖題　由上節可推知:

(一)有二不相交的直線,則過其一可作一平面,使與其他平行.如二已知線不平行,則只能作出一個如此的平面(下左圖).



(二)有任意二直線及一點(如二線相交,則這點非其交點),則過這點可作一平面,使與二線平行.如二線不平行,則只能作出一平面(上右圖).

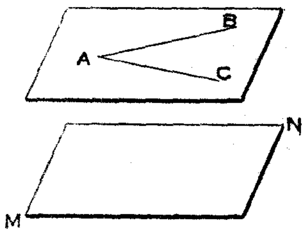
9. 二平面的關係

定理　**如二相交直線,皆與一已知平面平行,則其所定平面,與已知平面決不能相交.**

〔已知〕　$AB \parallel$ 平面 MN,

$AC \parallel$ 平面 MN.

〔求證〕　平面 ABC 與平面 MN,任何延長,決不相交.

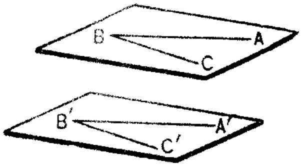


〔證明〕　如平面 ABC 和平面 MN 交於一直線,則這直線既在平面 ABC 上,而又與 AB, AC 都平行(何故?),是為不可能之事(何故?).

定義　二平面無論如何延長總不相交的,叫做**平行面**.

註　二平面或互相平行,或交於一直線.

系　**如二角的邊互相平行,而二角又不同在一平面內,則其所定平面必互相平行.**



設　$AB \parallel A'B'$,　$BC \parallel B'C'$.

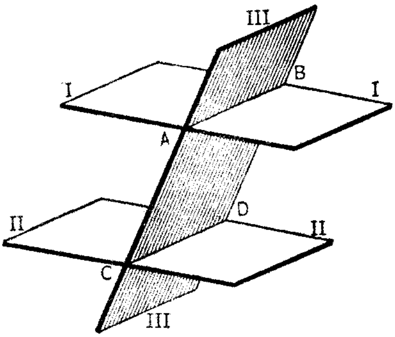
則平面　$ABC \parallel A'B'$.　同理,

平面　$ABC \parallel B'C'$,　故

平面 $ABC \parallel$ 平面 $A'B'C'$.

10.平行面上的截線

定理　**二平行面被第三平面所截,則交線必互相平行.**



〔已知〕　I, II 二平面互相平行,與平面 III 交於 AB, CD.

〔求證〕　AB 和 CD 必互相平行.

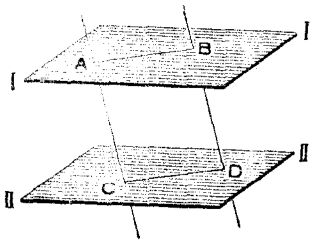
〔證明〕　如 AB 與 CD 相交,則 I 和 II 二平面相交,而與已知事項相背.

又 AB 與 CD 共在平面 III 內,故 $AB \parallel CD$.

系　**二平行面在二平行線上所截取的線段必等長.**

設平行面 I 與 II,在二平行線上,截取 AC 與 BD 二線段,則 $AB \parallel CD$ (何故?), $ABCD$ 爲▱.

故 $AC = BD$.



習題二

1. 求過二已知點作一平面,使與已知直線平行.

2. 有二平行面則與其一相交的平面,也必和其他相交,試加證明.

3. 有二平行面,則與其一相交的直線,也必和其他相交,試加證明.

4. 試證一平面的平行線,必與前者的平行面平行.

5. 試證與同一平面平行的二平面,必互相平行.

註 因此我們可說三個或多個互相平行的平面.

6. 如一直線與一平面平行,過這直線能作幾個平面,與後者平行?試述其結果,并加證明.

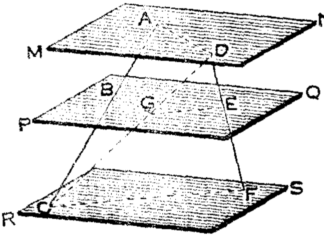
7. 如二平行面在二直線上截取等長線段;這二直線是否必平行?這二直線共在一平面時如何?不共在一平面時如何?

8. 如二平行面在相交二直線上截取等長線段,則凡與這二平面平行的二平面,在其上截取線段必等長.

9. 試論上題中二直線不相交也不平行的情形.

11. <u>平行截面定理</u>　**數平面互相平行,則在任何二直線上截取的相當線段必成比例.**

〔已知〕　MN, PQ 和 RS 三平行面,與二直線交於 A, B, C 和 D, E, F.



〔求證〕　$AB:BC=DE:EF$.

〔證明〕　聯 DC, 且設 CA 與 CD 所定的平面,交平面 PQ 於 BG, 交平面 MN 於 AD.

則　$AD \parallel BG$.　(二平行面,被第三面所截)

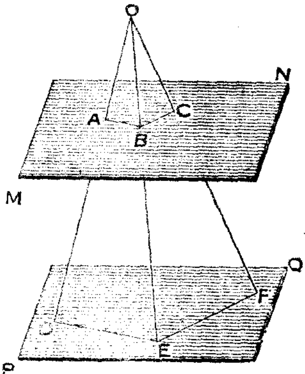
再取　DC 與 DF 所定平面,即可證 $GE \parallel CF$.

故　$AB:BC=DG:GC$.　(三角形內比例線段)

同理　$DE:EF=DG:GC$.

$\therefore$　$AB:BC=DE:EF$.

系　二平行面在共過一點的諸直線上所截取的線段必成比例.

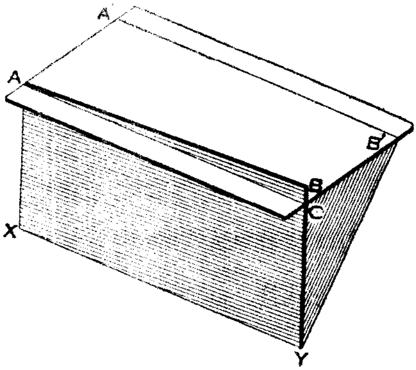


設 A, B, C 在平面 MN 上;D, E, F 在平面 PQ 上,則

$OA:AD=OB:BE=OC:CF$.

12. 不在同一平面內的三平行線

定理　平行於同一直線的二直線,必互相平行.



〔已知〕　$AB \parallel XY$,

且　　　$A'B' \parallel XY$.

〔求證〕　$AB \parallel A'B'$.

〔證明〕　作出 AB 和 XY 二平行線所定的平面 AY, 及 $A'B'$ 與 A 點所定的平面 $B'A$.

平面 AY 和平面 $B'A$ 既有一交點 A, 則必有第二交點,設為 C 點.故這二平面交於直線 AC. 今

$XY \parallel$ 平面 $B'A$, 故 $AC \parallel XY$. (§7 定理和逆定理).

但　$AB \parallel XY$, 故必 AB 與 AC 是同一直線,否則和平行公理相矛盾.

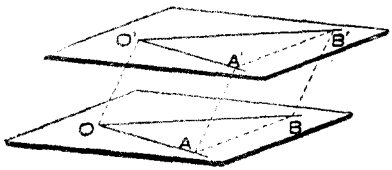
原設平面 AB' 含直線 $A'B'$, 又含直線 AC, 今 AC 和 AB 相合,故 $A'B'$ 與 AB 二直線均在這平面內.

如 AB 與 $A'B'$ 有一交點,則這交點與 XY 所定的平面,即為 $AB \parallel XY$ 所定的平面.同理 $A'B' \parallel XY$ 所定亦同.即這平面含 $AB, A'B', XY$ 三線,前二者有交點,而又皆與 XY 平行,背於平行公理.

故 $AB, A'B'$ 共一平面,但不相交,故　$AB \parallel A'B'$.

13. 各邊同向平行的角

定理　二角不在同一平面內,夾邊相應平行,且同方向,則這二角必相等.



〔已知〕　$OA \parallel O'A'$;
$OB \parallel O'B'$, 且依同一方向.

〔求證〕　$\angle AOB = \angle A'O'B'$.

〔證明〕　取 $OA = O'A'$, $OB = O'B'$, 并聯 AA', BB', 及 AB, $A'B'$, 則 $AA'O'O$, $BB'O'O$都是平行四邊形.(何故?)

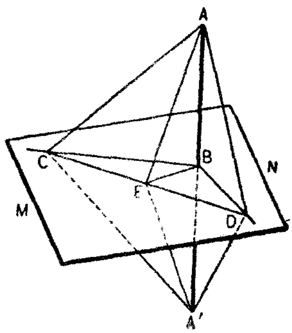
由此可知 $AA' = OO'$, $AA' \parallel OO'$; $BB' = OO'$, $BB' \parallel OO'$. 故 $AA' = BB'$, 且按上節的定理,更有 $AA' \parallel BB'$.

故 $AA'B'B$ 也是一平行四邊形,而 $AB = A'B'$.

據 s. s. s. 知 $\triangle AOB \cong \triangle A'O'B'$, 而 $\angle AOB = \angle A'O'B'$.

14. 平面垂線定理

過二相交線交點的一直線,與這二線均垂直,則在這二線所定平面內,過那交點任引一直線,都必與那第三直線垂直.



〔已知〕　BC 與 BD 均垂直於 AB.

〔求證〕　在 BC, BD 所定平面 MN 內,過 B 任引一直線,則這直線必與 AB 垂直.

〔證明〕　作 CD 與任引的直線交於 E. 更延長 AB 到 A',使 $BA'=AB$. 再聯 $AC, AE, AD, CA', EA', DA'$.

按 s. a. s. 知　$AC=A'C,\ AD=A'D$.

又由 s. s. s., 得　$\triangle ACD\cong\triangle A'CD$, 故 $\angle ACD=\angle A'CD$.

再據 s. a. s. 有　$\triangle ACE\cong\triangle A'CE$,　而 $AE=A'E$.

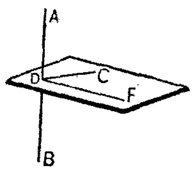
據 s. s. s. 有　$\triangle ABE\cong\triangle A'BE$.

所以　$\angle ABE=\angle A'BE=rt.\angle$,　卽 $AB\perp BE$.

定義　一直線與一平面相交,如在這平面上,過交點的任何直線,均與那直線垂直,則稱那直線垂直於平面,或平面垂直於直線.又這直線叫做平面的**垂線**,平面叫做直線的**垂面**.

15.垂面的作圖　求過一點,作已知線垂面.

已知直線 AB, 及一點.

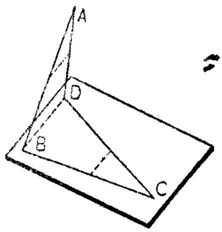


(一)如已知點 D 在 AB 上,可過 D 作 $DC\perp AB, DF\perp AB$, 則 DC, DF 所定平面與 AB 垂直.

(二)如已知點 C 不在 AB 上,先作 $CD\perp AB$, 再自 D 作 $DF\perp AB$, 但不在平面 ADC 內,則 DC, DF 所定平面,與 AB 垂直.

習 題 三

1. A, B, C, D 四點不在一平面內,而 $AB=BC$, $CD=DA$,試證 $\angle ABC=\angle ADC$.



2. 聯不在一平面的四點,成一空間四邊形,試證其二隣邊中點聯線,必與他二邊中點聯線平行.

3. 二角不在同一平面內,二邊對應平行,但方向相反,試證這二角必等.

4. 二角各邊對應平行,如何方可使其互為補角?

5. 如過二點,能作一平面,和一已知直線垂直,已知點與直線間應有何種關係?

6. 五點中任取四點,均不在同一平面上時,能決定多少平面?

7. 至少要幾個平面,方能包圍一部分有限空間?

8. 有一四邊形,如

(一)二對角線為相交線,

(二)有二邊平行,

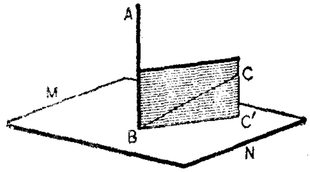
(三)有二對邊相交,

則這四邊形為一平面形.

9. 求證 §11 系的圖中 $\triangle ABC\backsim\triangle DEF$.

10. 三平面兩兩相交,求證三交線或交於一點,或互相平行.

16.平面垂線逆定理　**過直線上一點的垂線,必在過這點的垂面內.**



〔已知〕 $AB\perp BC$, 又在 B 點,平面 $MN\perp AB$.

〔求證〕 BC 在平面 MN 內.

〔證明〕 由 AB 與 BC 所決定的平面,與平面 MN 有一交點 B, 故必交於一直線(平面相交定理),命之爲 BC'.

原設 $AB\perp BC$. 由上知 $AB\perp BC'$ (平面垂線定理).

故 BC 必與 BC' 相合,否則在平面 ABC 內,有 BC 與 BC' 二直線同與 AB 垂直,是爲不可能.

所以 BC 即在平面 MN 內.

17.過已知點與已知線垂直面的唯一性

倣上節定理的證法,可推出二條結果如下:

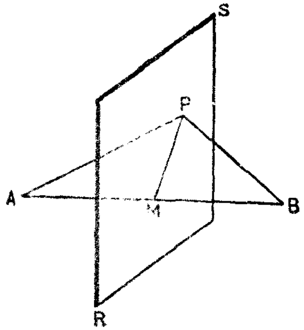
(一)過已知直線上的一已知點,只能作這直線的一個垂面.

(二)過已知直線外的一已知點,只能作這直線的一個垂面.

因如有二垂面,可以過 AB 的一平面,與其相交,得二交線 BC 和 BC', 則在所作的平面中,有 BC 和 BC' 二直線,都在 B 點與 AB 垂直,而事屬不可能.

18. <u>二點聯線中垂面定理</u>　**平分二點聯線而與其垂直的平面上各點,皆距這二點等遠.**

〔已知〕 平面 $RS \perp AB$, 且平分 AB 於 M. 又 P 爲這中垂面內一點.



〔求證〕 $PA=PB$.

〔證明〕 因平面 $RS \perp AB$, 故按定義, $MP \perp AB$. 又 M 爲 AB 中點,故 MP 卽是 AB 的中垂線.

所以 $PA=PB$(?).

註　平面 RS 叫做線段 AB 的**中垂面**.

逆定理　**距二點等遠的點,必在這二點聯線的中垂面上.**

設上圖中 $PA=PB$. 過 P 作 AB 的垂面 RS, 與其交於 M,則因 $PM \perp AB$, 故 $rt.\triangle AMP \equiv rt.\triangle BMP$(?),所以 $AM=MB$, 而平面 RS 爲線段 AB 的中垂面.

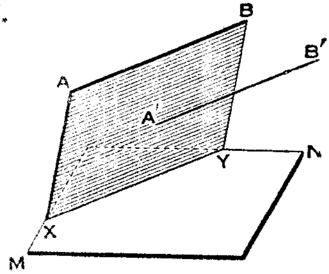
上面的定理和逆定理,可合爲一條如下:

中垂面軌跡定理　**距二點等遠點的軌跡,爲其聯線的中垂面.**

因爲我們能證明:(一)軌跡上的點必合條件,卽上面的定理; (二) 合條件的點,必在軌跡上,卽上面的逆定理.

19. 二平行線與其平行面

定理　**二平行線有一與一平面平行時,他一直線也必與這平面平行.**



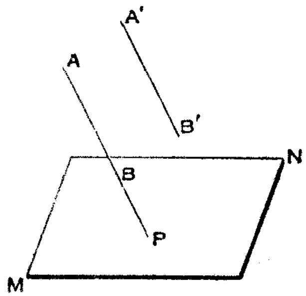
〔已知〕　$AB \| A'B'$,　而平面　$MN \| AB$.

〔求證〕　平面　$MN \| A'B'$.

〔證明〕　在平面 MN 上,取一點 X 與 AB 定一平面 BX, 則這平面與 MN 交於一直線　XY, 而必 $XY \| AB$ (過一面平行線的平面,§7).

又按 §12 所述關於不同一平面內三平行線的理,知 $XY \| A'B'$,故 $A'B' \|$ 平面 MN (§7 的逆定理).

逆轉定理　**二平行線有一與一平面相交時,他一直線也必與這平面相交.**



〔已知〕　$AB \| A'B'$, 而平面 MN 和 AB 交於 P.

〔求證〕　$A'B'$ 也必和平面 MN 相交.

〔證明〕　如平面 $MN \| A'B'$,則也必 $\| AB$, 而不能和 AB 相交,這結論和原來的已知條件相背.

故 $A'B'$ 必與平面 MN 相交.

注意　將一命辭的前詞(即已知事項)和斷案(即求證事項)對調,幷各代以反面的陳述語,則所得稱**逆轉命辭**.例如上述定理和逆轉定理的前詞和斷案如下表:

	前詞	斷案
原定理	$AB\|\|A'B'$,而 $AB\|\|$平面 MN	$A'B'\|\|$平面MN
逆轉定理	$AB\|\|A'B'$而 $A'B'$不$\|\|$平面 MN	AB不$\|\|$平面MN

但在此處,前詞中$AB\|\|A'B'$一條件未改.因作逆轉命辭時,每次只可在前詞與斷案中,各取一條件對調而換成反面陳述語.

凡一命辭成立,其逆轉命辭也必成立,可以間接法證明如上(可參看著者編高中平面幾何學 §§ 12, 15).故以後逆轉命辭,不必另行證明.

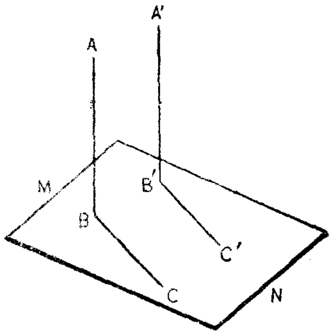
又在本定理中,所調改的二條件,同爲「一直線與一平面平行」.故自表面看來,似乎只改爲反面陳述語,幷未嘗對調,而爲一轉命辭,而非逆轉.就形式言,誠然如此,但轉命辭每未必與原命辭同時成立,故在此應本內容的觀點,視之爲逆轉命辭(關於幾何命辭變化的討論,詳見著者編高中平面幾何學第一編).

20. 二平行線與其公垂面

定理　二平行線有一與一平面垂直時,他一直線也必與這平面垂直.

〔已知〕　$AB\|\|A'B'$,而 $AB\perp$平面 MN.

〔求證〕 $A'B' \perp$ 平面 MN.



〔證明〕 AB 既與平面 MN 相交,則其平行線 $A'B'$ 也必和平面 MN 相交,設交點為 B 與 B'.

過 B 與 B',在平面 MN 內,各引二直線 $BC \parallel B'C'$.

則　$\angle ABC = A'B'C'$.　(各邊相應平行的角,§13).

但原設 $\angle ABC = rt.\angle$,故 $\angle A'B'C' = rt.\angle$. 卽 $A'B'$ 與過交點 B' 所引的任意直線垂直,故 $A'B' \perp$ 平面 MN.

習題四

1. 以一直角的一邊為軸而旋轉,問他一邊所成面為何種面?與為軸的一邊有何關係?

2. 以一非直角的一邊為軸而旋轉,問他一邊是否成一平面?

3. 三直線互相垂直,能不能有第四直線,與這三線皆垂直?

4. 在二平面交點上,不能作一直線,與這二面同時垂直,試加證明.

5. 如二平面相交,則決不能有任何直線和這二平面都平行,試加證明.

6. 試證如二平面相交,則決不能有公共垂線.

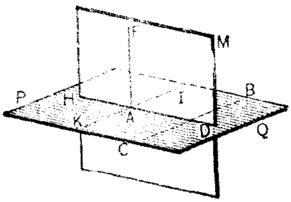
7. 依次聯結空間四邊形對邊中點的聯線,必互相平分,試加證明.

8. 將 §19 的定理改爲「一平面與二平行線中的一直線平行,則必……………………………………」.

9. 試述 §20 定理的逆轉命辭,并加證明.

21. 過已知點作已知平面的垂線

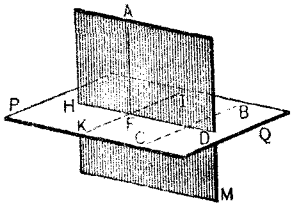
(1) 已知點在平面上.



〔作法〕 在已知面 PQ 上,任作直線 BC. 過已知點 A 作 BC 的垂面 AM (§15),交平面 PQ 於 HD. 在平面 AM 內,作 $AF \perp HD$, 卽得所求的垂線.

〔證明〕 在平面 PQ 上,過 A 作 $KI \parallel BC$, 則 $KI \perp$ 平面 AM(§20). 故 $AF \perp IK$. 但按作法, $AF \perp HD$, 所以 AF 卽所求已知平面 PQ 的垂線.

(2) 已知點不在平面上.



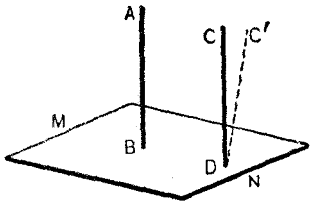
設已知點 A 不在已知平面 PQ 上,如右圖;其作法與證法,仍與(一)同,學生試自補出.

22. 平面垂線唯一性

定理　過一已知點,只能作一已知平面的唯一垂線.

因如能作二垂線,則其所定平面與已知平面的交線,也在前者上,而有過一點的二垂線,是爲不可能的事.

二平行線公垂面逆定理　**同一平面的二垂線必互相平行.**



設 AB, CD 均爲平面 MN 的垂線,而 B, D 在這平面上.作 $C'D \parallel AB$, 則 $DC' \perp$ 平面 MN(二平行線與其垂面, §20).故如 DC' 不與 DC 相合,則過 D 有 DC 及 DC' 都和平面 MN 垂直,而與上述唯一性相背.

定義　**自平面外一點,作其垂線,則這點與交點聯成線段的長,叫做自一平面到一點的距離,而交點叫做垂趾.**

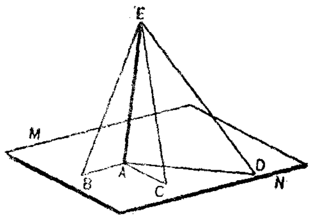
例如上圖中, AB 卽自平面 MN 到 A 的距離,而 B 爲垂線 AB 的垂趾.

注意　幾何圖形的相關量,常具(一)唯一(二)極小兩種特性.例如自一平面到一定點的垂線爲唯一,且爲平面上任何點與這定點距離中最短者(下面 §24 的系二),故取爲點面間的距離.二平行面的公共垂線最短(§25),故取爲二平行面間距離.直線與平面的傾角,卽這線與平面上直線交角中最小者(下面 §37).二不共面直線間的公垂線最短,故取爲這二直線間距離(下面 §39).

23.<u>斜線定理</u>　**自已知平面外一點,作其斜交線,則交點距這點所作垂線垂趾**

(一)等遠時,二斜線必等長;

(二)不等遠時,二斜線中較遠的必較長.



〔已知〕　$EA\perp$平面 MN.
EB, EC, ED 爲斜線; A, B, C, D 在這平面上,而 $AB=AC$, $AD>AC$.

〔求證〕 (一) $EB=EC$,
(二) $ED>EC$.

〔證明〕 (一) $rt.\triangle EAB\cong rt.\triangle EAC$ (?), 故 $EB=EC$.

(二) $\overline{ED}^2=\overline{EA}^2+\overline{AD}^2>\overline{EA}^2+\overline{AC}^2=\overline{EC}^2$.

逆定理　**自已知平面外一點,作其斜線,則(一)等長者與平面交點,必距自這點所作垂線的垂趾等遠;(二)較長者交點距那垂趾必較遠.**

可作間接法證明,學生試自補出.

注意　取一定理及其轉命辭合成的定理,叫做**離接命辭**,一定理爲離接命辭時,則其逆定理必可用間接法證明如上例(參看著者編高中平面幾何 §25).

系一　**空間內距圓周等遠點的軌跡,爲過圓心,而與其所在平面垂直的直線.**

系二 **自平面外一點到其上的一切點的聯線中,以垂線爲最短.**

習題五

1. 距一已知平面等遠點的軌跡爲何種面?與已知平面有何關係?

2. 距一已知平面等遠,而距二已知點也等遠的點,其軌跡如何?

3. 求距 A 與 B 二已知點等遠,又距 C 與 D 另二已知點也等遠的點所成軌跡.

4. 上題中,如(一) $AB \parallel CD$,(二) C 與 B 相合,(三) A, B, C, D 四點在一直線上,則軌跡如何?

5. 自二相交平面間一點,作一直線,與這二面平行

6. 二直線互相垂直,其一與已知平面垂直,試證他一直線必與那平面平行.

7. 如二垂直線中,有一與已知平面平行,試證他一直線必與那平面垂直.

8. 如 $AB \parallel A'B'$,在這二直線所定的平面外,取一點 C,試證 ABC, $A'B'C$ 二平面交線必與 AB, $A'B'$ 平行.

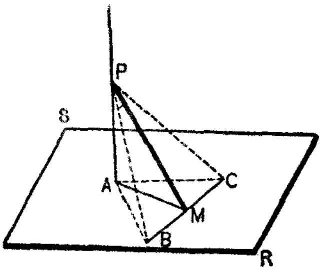
9. 在 §23 的圖中,如 $\angle ABE = \angle ACE$, 則 $EB = EC$, 且 $AB = AC$, 試加證明.

10. 上題中如 $\angle ABE > \angle ADE$, 試證 $BE < DE$.

11. 試合上二題成一雕接命辭,而舉其逆定理.

24. 斜線的垂線

定理 **二相交直線互相垂直,自一線上一點,作這二線所定平面的垂線,則其上任一點與前二線交點聯線,必與前二線中的他一線垂直.**



〔已知〕 平面 $SR \perp PA$, 而平面 SR 內, AM 與 BC 二線互相垂直.

〔求證〕 $PM \perp BC$.

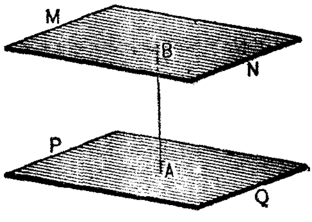
〔證明〕 取 $BM = MC$, 聯 BA, BP 和 CA, CP, 則因 $rt.\triangle AMB \equiv rt.\triangle AMC$ (何故?), $\therefore AB = AC$.

故按斜線定理,知 $PB = PC$, 而有 $\triangle PMB \equiv \triangle PMC$ (s.s.s.), 即得 $\angle PMB = \angle PMC = rt.\angle$, 故$PM \perp BC$.

25. 平行面與相交面的判別

二平面如不平行,則必相交,今述其判別的條件如下:

(一)平行面判別定理 **一直線的二垂面必互相平行.**



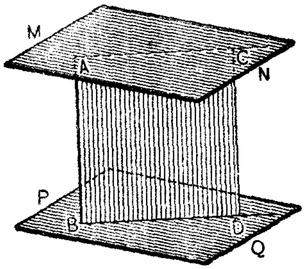
〔已知〕 MN 和 PQ 二平面都與 AB 垂直.

〔求證〕 MN 和 PQ 二平面必平行.

〔證明〕 如 MN 與 PQ 二平面相交,卽是過交點有二平面與 AB 垂直,而與 §17 所說的唯一性相背.

$\therefore$ 平面 $MN \parallel$ 平面 PQ.

逆定理　二平行面中,其一的垂線,也必和他一平面垂直.



〔已知〕 MN 與 PQ 爲二平行面, $AB \perp$ 平面 MN.

〔求證〕 $AB \perp$ 平面 PQ.

〔證明〕 過 AB 作一平面與 MN, PQ 二平面交於 AC 和 BD, 則按 §10 可知 $AC \parallel BD$. 又按垂面定義(§14), $AC \perp AB$, 故 $BD \perp AB$(?).

AB 旣與平面 PQ 內過 B 的任意直線 BD 垂直,故依定義,知 AB 爲平面 PQ 垂線.

系一　過一已知點,只能作一已知平面的平行面.

系二　二平行面,在其各公共垂線上,截取等長的線段.

這理據本節, §22 中逆定理,和 §10 中系卽明.

系三　二平行面上各取一點聯成的線段,以公垂線爲最短.

由系二和斜線定理系二(§23)卽明.

定義　二平行面在其公垂線上截取線段的長,稱爲**二平行面間的距離.**

系四　**二平行面的各垂線也必平行.**

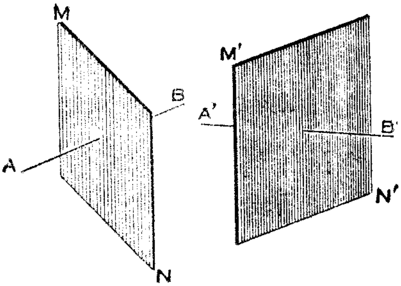
因第二平面的垂線,也必爲第一平面垂線(本節逆定理),故這二線同爲一平面的垂線,而必平行(二平行線公垂面逆定理,§22).

系五　**二平行線的垂面也必平行.**

此爲系四的逆定理,不難用相類的方法證明.

(二)不平行平面的判別

定理　**如二直線不平行,則其垂面必相交.**



〔已知〕　AB 與 $A'B'$ 不平行,又平面 $MN \perp AB$,

平面 $M'N' \perp A'B'$.

〔求證〕　平面 MN 必與平面 $M'N'$ 相交.

〔證明〕　假設平面 $MN \parallel$ 平面 $M'N'$,則按上面系四,必有 $AB \parallel A'B'$,而背所設.

系一　**二相交直線的垂面交線,必與這二直線所定的平面垂直.**

自交線上一點引二已知線的平行線,卽可證明.

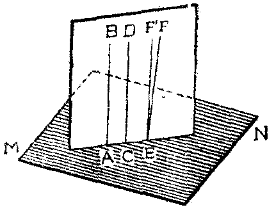
系二　**三直線交於一點,而不共在一平面內,則其垂面兩兩的交線,必共過一點.**

因任二垂面在第三面上的交線,必不平行,而必相交;否則三已知線兩兩所定二平面既與這二平行線垂直(系一)而必平行,是則與有一交點的條件相背.

再證第三垂面上的這交點,在前二垂面的交線上.

26.互垂面定理 過一平面內一線上各點,作這平面的垂線,則諸垂線必在一平面上.

〔已知〕 ACE 為平面 MN 內一直線;AB, CD, EF 等為這平面的垂線.



〔求證〕 AB, CD, EF 各垂線共在一平面內.

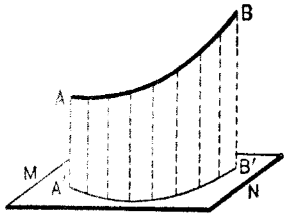
〔證明〕 既設 AB, CD 都垂直平面 MN, 則 $AB \parallel CD$(二平行線公垂面逆定理,§22),故可定一平面(?).這面與平面 MN, 有 A 與 C 二交點,故交線即直線 ACE. 如 EF 不在所定的平面內,則可在其內作 $EF' \parallel AB \parallel CD$. 按二平行線公垂面定理(§20),即知 $EF' \perp$ 平面 MN, 是則過這平面上一點 E, 有 EF' 與 EF 二垂線,而與 §22 所證明的唯一性矛盾.

故 EF 必在 AB, CD 所定的平面內.

27.射影 自一點作一平面上的垂線,其垂趾叫做這點在該平面上的正射影,簡稱射影.

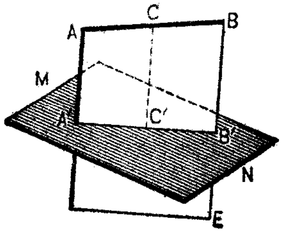
註 本書只論正射影一種,故可簡稱射影.

一圖形上各點至一平面上射影的軌跡,叫做這圖形在該平面上射影.



如右圖, A' 爲 A 在 MN 平面上射影; $A'B'$ 曲線爲 AB 曲線在 MN 平面上射影.

直線射影定理　一直線至其非垂面上的射影,仍爲一直線.



〔已知〕 直線 AB 不與 MN 平面垂直.

〔求證〕 AB 至 MN 平面上射影,仍爲一直線.

〔證明〕 作 AA' 和 BB' 均垂直於平面 MN,而 A' 與 B' 爲垂趾.則 $AA'\|BB'$ (何故?),而定一平面,與 MN 平面交於直線 $A'B'$. 過 AB 上另一點 C, 作一直線,使在所定平面內,而垂直於 $A'B'$; 則因自 C' 所作平面 MN 的垂線,必與 AA', BB' 在同一平面內 (何故?), 所以必與 $C'C$ 相合(何故?). 換句話說,即自 C 所作平面 MN 垂線的垂趾 C',在直線 $A'B'$ 上.故 AB 直線上任一點 C 至 MN 平面上射影爲 C',亦即 $A'B'$ 爲 AB 在平面 MN 上的射影.

定義　平面 AB' 爲直線 AB 對平面 MN 的射影面.

註　一直線至其垂面上射影,只是一點,即這垂線的垂趾,其理甚明.

習題六

1.如二平面都平行於第三平面,求證這二平面必互相平行.

提示　作其中一平面的垂線.

2.試證一直線的垂線,必與前者的垂面平行.

3.一直線如與一平面相交,則也必與其平行面相交,試加證明.

4.求距一平面等遠點的軌跡.

5.求證二平行線在一平面上的射影,必爲平行或相合.

6.求證二相交直線在一平面上的射影,除某種情形外,仍爲相交,并試舉這例外情形.

7.如二直線在一平面上射影爲平行,這二直線是否必須平行?

8.求證二平行直線對任何平面的射影面必平行.

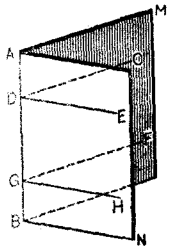
9.二平面平行,其一內的圓,在他一面上的射影,是何種圖形?

10.一圖形在某一平面上射影爲一直線,試論原形的種種可能情形.

第二編

二面角 多面角

28.二面角 平面上任一直線,分全平面爲二部份,每份叫**半平面**,這直線叫**軸**.共有一軸的二半平面,所成圖形叫**二面角**.這軸叫二面角的**稜**,這二半平面叫二面角的**面**.



凡二面角可用稜上二文字表示,或更附加各面上一文字,如右圖二面角,可記爲二面角 AB, 或 $M-AB-N$.

註 二面角的大小,與其二面的大小無關,正如在平面幾何學裏,一角的大小,與其二邊的長短無關.

29.二面角的平面角 在二面角的稜上任取一點,在二面上各作一垂線,則這二直線所成角,叫這二面角的**平面角**.

如上節圖中,平面 AN 上的 DE, GH, 和平面 BM 上的 DC, GF, 都與 AB 垂直,則 $\angle CDE$ 與 $\angle FGH$ 都是二面角 $M-AB-N$ 的平面角.

因 $DC \parallel GF, DE \parallel GH$(?), $\therefore \angle CDE = \angle FGH$(各邊相應平行的角, §13), 於是得一定理如下:

平面角定理　**二面角稜上任取一點的平面角皆相等.**

註　由此可知二面角的平面角,與頂點位置無關.

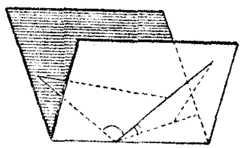
30. 二面角的種類　二面角依其平面角的爲銳角,直角,鈍角或平角的情形,而稱爲**銳角,直角,鈍角或平角.**(本書所論以小於平角者爲限.)成直二面角的二平面,叫做**互相垂直**,或曰**垂面.**

§26 定理中的二平面,互爲垂面,即一直線的射影面和射影所至的面,互相垂直.

如一二面角爲平角,則其平面角二邊應成一直線.所以即二面應成一平面,故得定理如下:

平二面角定理　**平二面角的二面在一平面內.**

二個二面角就大小上言,有**補角,餘角**的關係,就位置上言,有**隣角,對頂角**的關係,即視其平面角爲補角或餘角,爲隣角或對頂角而定.

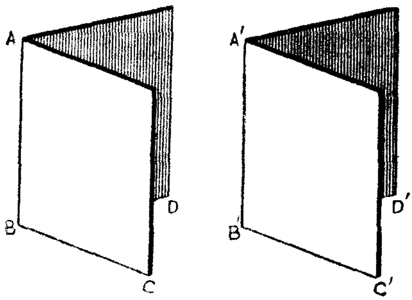


注意　任以一平面截二面角,則截線交角,雖可小至於零,但不能大於平角,因可以平面角內一線段聯交角二邊成三角形也.

如二面角取大於平角者,則這理自然不復成立.

31. <u>相等二面角</u>　能重合的二面角叫**相等**.由定義可知**相等二面角的平面角必等**,且有下

逆定理　**平面角相等的兩個二面角必等.**



〔已知〕　AB 與 $A'B'$ 兩個二面角的平面角 $\angle CBD$ 與 $\angle C'B'D'$ 互等.

〔求證〕　二面角 AB = 二面角 $A'B'$.

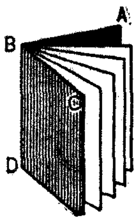
〔證明〕　因 $AB \perp BD$, $AB \perp BC$(?), 故 $AB \perp$ 平面 BDC(§14).

同理　　　$A'B' \perp$ 平面 $B'D'C'$.

因 $\angle CBD = \angle C'B'D'$, 故這二角可完全疊合,這時平面 BDC 與平面 $B'D'C'$ 也相合,而 AB 必和 $A'B'$ 相合(平面垂線唯一性, §22). 故 ABC 與 $A'B'C'$ 二平面相合(二相交線定一平面), ABD 和 $A'B'D'$ 二平面亦然.

所以 AB,$A'B'$ 兩個二面角相合,而………………

系　**n 等分一二面角,則其平面角也成 n 等分;逆之亦眞.**



定義　分一平二面角爲 180 等分,每份叫**度**,每度 60 等分成**分**,每分 60 等分成**秒.**

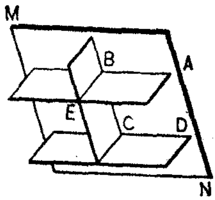
32. <u>二面角的度量</u> 取一二面角爲單位,而分他一二面角爲 n 等分,使每份與前者相等,則稱後者數量爲 n;如一二面角不能爲單位的整倍數,可取單位的幾分之幾爲低級單位再度,則得數量爲分數 n;如一二面角與單位不可通約,則宜陸續化小單位相度,而論其各次所得的差近值,故數量 n 可爲無理數.由上節的系,即得

二面角度量定理 **兩個二面角的比等於其平面角的比.**也就是說:**取單位二面角的平面角爲單位,則二面角的數值等於其平面角者.**

習題七

1. 求證相等二面角餘角必等.

2. 求證相等二面角補角必等.



3. 一平面截二平行面,則所成同位的二面角必等,試加證明.

提示 作其交線的垂面.

4. 上題的逆定理,是否成立?

5. 求證一平面角較大的二面角也必較大.

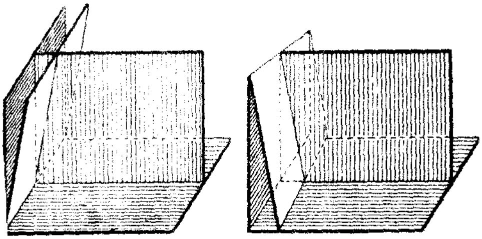
6. 如二相補隣二面角相等,試證必爲直二面角.

7. 二平面相交成四個二面角中,如有一爲直角,則其餘三個也必爲直角,試加證明.

8. 求不共面三平行線所成三平面的各二面角和.

9. 三直線不在一平面上,而兩兩互垂,試求所定三平面的各二面角.

33. 垂面的唯一性



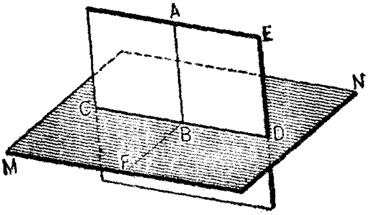
作一二面角稜的垂面,在這截面上,卽得其平面角,而可化立體幾何問題爲平面幾何者,由此法易證明:

定理　過一平面上或其外不與其垂直的一直線,只可作一平面,與之垂直.

自已知線上一點,作稜的垂面,卽可用歸謬法證明.注意已知線不與已知平面垂直,故所作垂面,不含這線.

34. 垂線與垂面關係　(一)過垂線的垂面.

定理　過一面垂線的平面,必與前者垂直.



〔已知〕　有平面 EC 含平面 MN 的垂線 AB.

〔求證〕　EC 和 MN 二平面互垂.

〔證明〕　在平面 MN 內,作 $BF \perp CD$, 則 $\angle ABF$ 爲二面角 $E-CD-M$ 的平面角.但因 $AB \perp$ 平面 MN,故 $AB \perp BF$, 卽 $\angle ABF = rt. \angle$,故平面 $EC \perp$ 平面 MN.

系 過一已知直線,可作一已知平面垂面.

自已知線上二點,作至已知平面的垂線,則這二平行線(?)所定平面,即為所求.

如已知直線與已知平面垂直,則所求作的垂面可以多至無窮;如不垂直,則只有一垂面;由這作法即明.

(二)垂線所在面 定理 **二面互垂,則一平面內垂直於交線的直線,必垂直於他平面.**

〔已知〕 平面 $CE \perp$ 平面 MN, 平面 CE 內一直線 BA 和二平面的交線 CD 垂直.

〔求證〕 $AB \perp$ 平面 MN.

〔證明〕 在 B 點作平面角 $\angle ABF$, 則因 CE 與 MN 二平面垂直,故 $\angle ABF = rt. \angle$. 所以 $AB \perp BF$. 但原設 $AB \perp CD$, 故 $AB \perp$ 平面 MN (§14).

系一 二面互垂,過其交線上一點,而垂直於一面的直線,必在他一平面上.

因設 $BP \perp$ 平面 MN, 而 B 為二垂面交線上一點,則 BP 必與 BA 相合(何故?),故 BP 在平面 CE 內.

系二 二面互垂,過其一面內一點,而垂直於這一面的直線,必在他一平面上.

可倣系一間接方法去證明.

註 這二條系可算是本節定理的逆定理,因原定理中已知事項為:

(一)二面互垂;

(二)一直線在一平面內,

(三)與一平面垂直,而垂趾在交線上.

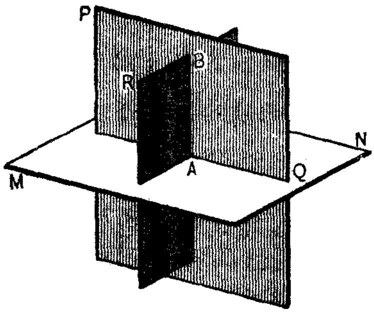
而求證事項則爲:

(四)這直線垂直於他平面.

今將(四)與(二)對調,則得系一.又(三)中「垂趾在交線上」的條件,可代以「垂線過一平面內一點」,如此便得系二.

35.同一平面的二垂面交線

定理 如同一平面的二垂面相交,則其交線必與這平面垂直.



〔已知〕 PQ 與 RA 二平面,均 $\perp$ 平面 MN, 而交於 AB.

〔求證〕 $AB\perp$ 平面 MN.

〔證明〕 自 A 作一直線,與平面 MN 垂直,則這垂線必同時在 PQ, RA 二平面內(§34 系一).

但這二面的交線爲 AB, 故必與上述垂線相合.就是 PQ, RA 二平面的交線 $AB\perp$ 平面 MN.

系 一平面垂直於二互垂面的交線,則所有三交線,必兩兩垂直.

習題八

1. 過一已知點,求作一平面,與二已知平面垂直.

2. 過一已知點,求作一平面,使垂直於一已知平面,且與一已知直線平行.

3. 試證一平面平行線的垂面,必與這平面垂直.

4. 二平面互相垂直,試證其一的垂線,如不含於他一面內,則必與其他平行.

5. 二面互垂,試證其一的平行線,必與其他垂直.

6. 試分析上面三題的已知與求證事項,而指出其互逆的關係(看 §34 註).

7. 相交於一點的三直線兩兩垂直,試證其兩兩所定的三平面,必兩兩垂直.

8. 指出上題與同一平面二垂面交線定理的關係.

9. 證明下述的作圖題(與 §34 (一)的系比較):

已知一直線不與一已知平面平行,自其上一點,作垂線至已知面上,則這垂線與已知直線所定的面,即為已知平面的垂面,而過已知直線者.

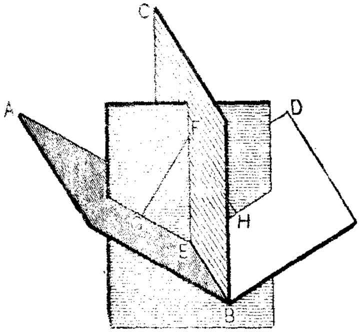
10. 自一二面角外一點,作其二面的垂線,試證

(一)二垂線所在平面與相交二面垂直.

(二)二垂線交角,等於這二面角的平面角.

36. 二面角的分角面　定義　二等分二面角的平面,叫這二面角的**分角面**.

定理　二面角的分角面上各點距二面角的二面等遠.



〔已知〕 平面 CB 是二面角 $A-BE-D$ 分角面, F 爲其上一點, $FG\perp$ 平面 AB, $FH\perp$ 平面 BD, 而 G 與 H 爲垂趾.

〔求證〕 $FG=FH$.

〔證明〕 作 FG, FH 所定的平面,交二面角的稜於 E,則這面與 AB 和 BD 二平面垂直(過垂線的垂面,見§34(一)).

故 $BE\perp$ 平面 FGH(同平面二垂面交線, §35).

所以 $EB\perp EG, EF$ 和 EH (§14).

$\therefore \angle GEF$, $\angle HEF$ 各爲 $A-BE-C$ 和 $D-BE-C$ 兩個相等二面角的平面角,故 $\angle GEF=\angle HEF$(§31).

但 $FG\perp GE$, $FH\perp HE$(?),而

$rt.\triangle FGE\cong rt.\triangle FHE$(?), $\therefore$ $FG=FH$.

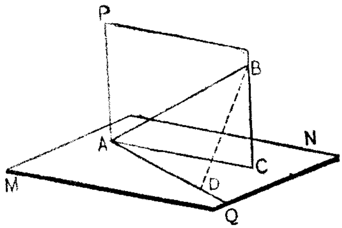
逆定理　距二面角的二面等遠點必在其分角面上.

證上圖中 $\angle GEF=\angle HEF$,而應用 §31 的系.

上述的二面角各面只是半平面,如取二相交平面所成二組對頂二面角,則合併上述定理和逆定理,即得

分角面軌跡定理　距二相交面等遠點的軌跡,爲其所成對頂二面角的二分角面.

37. 直線對平面的傾角　一已知直線與一平面相交,過交點作這平面垂線,則二線交角的餘角,叫已知直線對平面的**傾角**.如一直線與一平面平行,則稱其傾角爲零.



上圖中,$AP\perp$平面MN, A爲垂趾,則$rt.\angle-\angle PAB$爲AB對平面MN的傾角.設AP, AB所定平面,與平面MN交於AC,則AC爲AB在平面MN上射影(見§27),而$\angle BAC=rt.\angle-\angle PAB$.故得定理如下:

定理　一直線與其在一平面上射影所成銳角,即爲這直線對這平面的傾角.

傾角最小定理　一直線對一平面的傾角爲這線與這面上直線所成角的最小者.

〔已知〕　$\angle BAC$爲AB對平面MN的傾角,而AD爲平面MN內過A的任一直線.

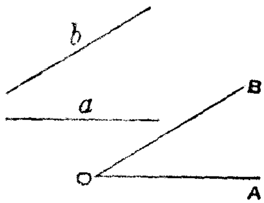
〔求證〕　$\angle BAC<\angle BAD$.

〔證明〕　在AQ上取D,使$AD=AC$,而聯BD.

在$\triangle s$ ABC, ABD中,AB爲公有,而$AD=AC$,但$BC<BD$(§23斜線定理系二),故$\angle BAC<\angle BAD$(?).

注意　以前所述,二直線相交時始成角,故上面的證明中,取 MN 面內過 A 點的直線 AQ. 但如推廣角的定義,而不限相交線,如下所述:

有空間內 a, b 二直線,不論是否在一平面上,自任意一點 O 引 $OA \parallel a$, $OB \parallel b$, 而稱 $\angle AOB$ 爲 a 與 b 二線交角.則本定理對 MN 面上任何直線,皆能成立.



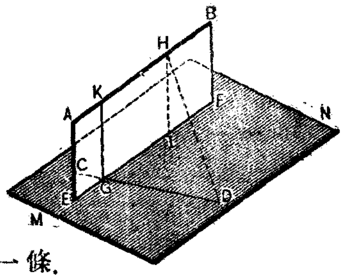
38. 不共面二直線的公垂線

定理　對於不共在一平面內的二直線,有一直線與二者相交,且均垂直,但只有一條.

〔已知〕　AB, CD 二直線不在一平面內.

〔求證〕(一)有一直線與 AB, CD 相交,且與其垂直.

(二)這樣的直線,只有一條.



〔證明〕(一)過 CD 作平面 $MN \parallel AB$(§8(1)). 過 AB 作平面 MN 的垂面 AF(§34 系),而二者相交於 EF. 如 $EF \parallel CD$,則按 §12 定理,知 $AB \parallel CD$,而與這二線不共一面上的假設相背.故 EF 必與 CD 交於一點 G.

在平面 AF 內,過 G 點作 $GK\perp EF$, 則因 $AB\parallel EF$(過一面平行線的平面, §7), 故 $GK\perp AB$, 而二線相交.又按§34(二)的定理, $GK\perp$ 平面 MN, 故 $KG\perp CD$. 所以 GK 卽所求的公垂線.

(二)如除 GK 外,尙有 HD 爲 AB 與 CD 的公垂線. AB 與 HD 所定平面與平面 MN 的交線,必 $\parallel AB$ (?),故 $\perp HD$(?).是以 $HD\perp$ 平面 MN (?).

在平面 AF 內,自 H 作 $HI\perp EF$, 則 $HI\perp$ 平面 MN (?), 是則過 H 點可作 HD, HI, 均 $\perp$ 平面 MN, 而爲不可能之事(?).故知 AB, CD 只有一公垂線.

39. <u>公垂線最短定理</u> **二不共面直線上各取一點的聯線,以公垂線爲最短.**

〔已知〕 直線 AB 與 CD 不共在一平面上, $KG\perp AB$ 與 CD; H 爲 AB 上任意點, D 爲 CD 上任意點.

〔求證〕 $KG<HD$.

〔證明〕 作平面 MN 與 AF 如上節.在平面 AF 內,作 $HI\perp GF$, 則 $HIGK$ 爲一長方形,而 $HI=KG$.

但 $HI\perp$ 平面 MN, 故 $HI<HD$(斜線定理的系二,§23.)

卽 $$KG<HD.$$

註 這公垂線,叫做**二不共面直線間的距離.**

習題九

1. 三點不在一直線上,求距其等遠點的軌跡.

2. 一平面過二面角的稜,求證其上任意點到這角二面上距離的比為一定值.

3. 求證上題的逆定理,幷與上題併成一軌跡定理.

4. 求證分角面軌跡定理中二分角面必互相垂直.

5. 在 §37 的圖中,如 $AC=3$, $\angle BAC=\frac{2}{3}rt.\angle$, $AC\perp AD$, 且 $AC=AD$, $\angle ACB=rt.\angle$, 求 BD 的長.

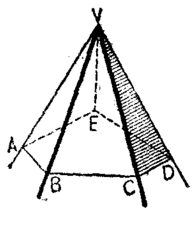
6. 在 §37 的圖中,如 $AC\neq AD$, $AB=10$, $CD=5\sqrt{2}$, $\angle BAC=\frac{1}{3}rt.\angle$, $\angle CDA=rt.\angle$, 求 $\angle BAD$.

7. 一平面的垂線對於這平面的傾角如何?

8. 求二平行線(或二垂直線)對一平面的傾角關係.

9. 一直線與其在一平面射影,交於其上一點,在這平面內,過這交點作其中一線垂線,試證其必垂直他線.

40. 多面角 共過一定點諸平面,且兩兩順次相交,所成圖形叫**多面角**,也叫**立體角**.如平面的數為 n,則稱 **n 面角**,如三面角,四面角等.定點叫**頂點**,各交線叫**稜**,二相續稜間的平面部份叫**面**,相續稜交角(取小於平角者),叫**面角**,二相鄰面的二面角,叫多面角的**二面角**.



例如上圖為一五面角,以 V 為頂點, VA 等為稜, AVB 等為面, $\angle AVB$ 等為面角, $A-VB-C$ 等為二面角;這五面角記為 $V-ABCDE$.

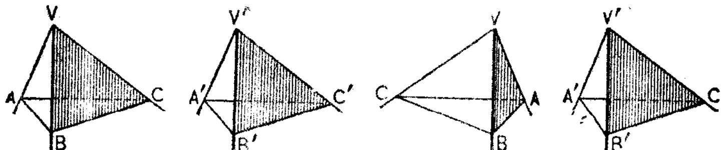
41. 多面角的種類　以不過頂點也不和各稜平行的一平面去截 n 面角,則得一 n 角形,叫做多面角的**截面**或**底面**.如這多角形爲凸,則原多面角叫做**凸多面角**(本書所論限於此種).

注意　凸多面角各二面角,皆小於平角(合於 §30 限制).否則必可作適當截面,使爲凹多角形(§30 注意).

如一多面角的面角和二面角,與他一多面角者,對應相等,且各部份排列也有相同的順序,則稱**全等多面角**,因二者可以完全重合也.如二多面角的面角和二面角,雖是對應相等,但各部份排列順序,恰好相反,則叫做**對稱多面角**.對稱多面角,無法疊置,使其完全重合.

如下圖 I, $\angle AVB=\angle A'V'B'$, $\angle BVC=\angle B'V'C'$, $\angle CVA=\angle C'V'A'$;二面角 $AV=$ 二面角 $A'V'$,二面角 $BV=$ 二面角 $B'V'$,二面角 $CV=$ 二面角 $C'V'$,則二多面角全等.

又下圖 II 中 $V-ABC$ 與 $V'-A'B'C'$ 爲對稱.

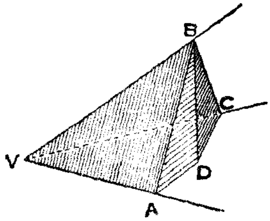


I　　　　II

42. 三面角的種類　有二個相等面角的三面角叫**等腰**;有兩個相等二面角的叫**二等角**.

一個三面角的二面角,有一個,二個,或三個爲直角時,各稱爲**一直角三面角,二直角三面角,**和**三直角三面角.**

43.等腰三面角定理　**等腰三面角必爲二等角三角面.**



〔已知〕 $V-ABC$ 三面角中, $\angle AVB=\angle BVC$.

〔求證〕 二面角 VA ＝二面角 VC.

〔證明〕 自 B 作 $BA\perp VA$, $BC\perp VC$. 在平面 CVA 內,作 VA 與 VC 的垂線,相交於 D, 則得 VA 與 VC 兩個二面角的平面角 $\angle BAD$ 與 $\angle BCD$.

因 $VA\perp$ 平面 BAD(§14), 故平面 $AVC\perp$ 平面 BAD(§34(一)),同理平面 $AVC\perp$ 平面 BCD, 故知 $BD\perp$ 平面 AVC (同一平面二垂面交線, §35) 而 $BD\perp DA$ 與 DC (何故?).

rt.$\triangle$s VAB, VCB 有公共邊 VB, $\angle AVB=\angle CVB$, 故爲全等,而 $BA=BC$. 故 rt.$\triangle ADB\cong$ rt.$\triangle CDB$, 而得 $\angle BAD=\angle BCD$. 所以二面角 $VA=$ 二面角 VC (?).

逆定理　**二等角三角面必爲等腰.**

可就上面的證法,作適當的逆推證明.

44.全等三面角定理　用疊合法,可證

定理一　**如一三面角的兩個面角,及所夾二面角,對應等於他一三面角的兩個面角,與所夾二面角,且相等部分排列順序亦同,則必全等.**

定理二　**如一三面角的兩個二面角及所共面角,對應等於他一三面角的兩個二面角與所共面角,且相等部分排列順序亦同,則必全等.**

其證明讀者不難自行補出.

習題十

1. 三面角中,過各面角的分角線,而與其垂直的三平面,必共交於一直線,試加證明.

2. 一動點與三面角中三稜等遠,求其軌跡.

3. 求證三面角中各二面角的分角面,必交於一線.

4. 有三面角 $V-ABC$, 二面角 VA 爲直角,求證與 VB 或 VC 稜垂直的截面,截這三面角成一 $rt.\triangle$.

5. 如一三面角中一面角,大於他一面角,試證前者相對的二面角,必大於後者相對的二面角.

6. 求證上題的逆定理.

7. 合併上二題和 §43 中定理,成兩個離接命辭.

8. 如一三面角的各面角皆等,則其各二面角也必相等,試加證明.這題的逆定理如何?

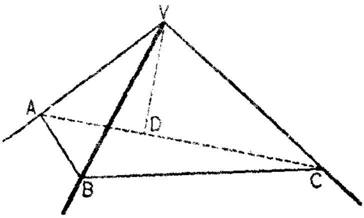
9. 如一三面角的三個面角皆直角,求證其三個二面角,也全是直角.又這題的逆定理能否成立?何故?

註 這三面角叫**三直角三面角**.

10.如一四面角的相對面角兩兩相等,則其相對的二面角也必兩兩相等.試加證明.

45.三面角各面角間關係

定理 **三面角中,任何兩個面角的和,必大於第三個面角.**



〔已知〕 $V-ABC$ 爲一三面角.

〔求證〕 $\angle AVB+\angle BVC>\angle AVC$.

〔證明〕 在此可假設 $\angle AVC$ 爲已知三面角中最大的面角,因否則其他兩個面角必有一較 $\angle AVC$ 爲大,而其和自必更大,毋需證明.

今在面角 AVC 內作 AC, 更引 VD 使 $\angle DVA=\angle BVA$. 再取 $VB=VD$, 而聯 AB, BC, 則

$$\triangle AVB\cong\triangle AVD\,(s.a.s.),\quad \therefore AB=AD.$$

但 $AB+BC>AC=AD+DC=AB+DC$, 故 $BC>DC$.

$\triangle BVC, DVC$ 有公共邊 VC, 且 $VD=VB$(?), $BC>DC$, 故 $\angle BVC>\angle DVC$. 兩邊各加等角 $\angle AVB$, $\angle AVD$, 則

$$\angle AVB+\angle BVC>\angle DVC+\angle AVD=\angle AVC.$$

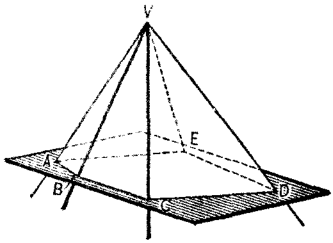
系 **任何凸或凹多面角中,任一面角必小於其餘各面角的總和.**

46.多面角各面角總和定理　任何凸多面角各面角的總和,必小於四直角.

〔已知〕 任意 n 面角 $V-ABC\cdots\cdots E$.

〔求證〕 $\angle AVB$ 等各面角和 $<4rt.\angle s$.

〔證明〕 作一平面,不過頂點 V, 不與諸稜平行,交諸稜於 A, B, C ……等點,交諸面於 $AB, BC,$ ……等線,得 n 角形 $ABC\cdots\cdots E$.



按上節定理, $\angle VBA+\angle VBC>\angle ABC$. 同理,有 $\angle VCB+\angle VCD>\angle BCD$ 等式,相加便得

$$\angle VBA+(\angle VBC+\angle VCB)+\cdots\cdots+(\angle VEA+\angle VAE)+\angle VAB>\angle ABC+\angle BCD+\cdots\cdots=2(n-2)rt.\angle s.$$

但 $\angle AVB=2rt.\angle s-(\angle VBA+\angle VAB)$,

$\angle BVC=2rt.\angle s-(\angle VBC+\angle VCB)$ 等式,

$\therefore\quad \angle AVB+\angle BVC+\cdots\cdots+\angle EVA$

$=n\times 2rt.\angle s-[(\angle VBA+\angle VAB)+(\angle VBC+\angle VCB)+\cdots\cdots]$

$<2nrt.\angle s-2(n-2)rt.\angle s=4rt.\angle s$ (何故?).

47.三面角與三角形比較　三角形與三面角頗多相類性質,多角形與多面角亦然,其相當的情形如下表:

三角形 ABC	AB 等邊	$\angle ABC$ 等內角
三面角 $V-ABC$	$\angle AVB$ 等面角	$A-VB-C$ 等二面角

依上表調換,可自平面幾何理,得相當的立體幾何理.

平面幾何學定理	立體幾何學定理
(一)$\triangle ABC$ 中,如 $AB=CB$,則 $\angle CAB=\angle ACB$;其逆亦眞.	(一)′$V-ABC$ 中,如 $\angle AVB=\angle BVC$,則 $C-VA-B=A-VC-B$;其逆亦眞(§43).
(二)$\triangle ABC$ 中,$AB+BC>CA$.	(二)′$V-ABC$ 中,$\angle AVB+\angle BVC>\angle CVA$(§45).
(三)全等三角形定理:—s.a.s.及 a.s.a.	(三)′全等三面角定理一及定理二(§44).

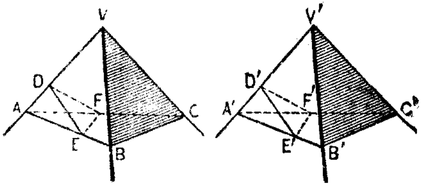
全等三角形 s.s.s. 相當的三面角定理見下節.

注意 三面角或多面角的關係,可化成球面三角形或多角形定理,所以上述的相應情形,卽係平面幾何與球面幾何的比較.我們這二種幾何,雖有許多相同的情形,如上所述,但切勿因此妄推二種幾何完全一致,例如平面三角形的內角和爲 2 $rt.\angle s$,而球面三角形者,則非定值,而大於 2 $rt.\angle s$.本書將於第六編中詳論之.

48. 各面角皆等的二個三面角

全等三面角定理三 **如一三面角的各面角,對應等於另一三面角的各面角,且相等部份排列順序亦同,則必全等.**

〔已知〕 三面角 $V-ABC$ 與 $V'-A'B'C'$中,$\angle AVB$ 各面角與 $\angle A'V'B'$ 各面角對應相等,且相等部分,依相同的順序排列.



〔求證〕 $V-ABC\equiv V'-A'B'C'$.

〔證明〕 在各稜上取等長 $VA=VB=VC=V'A'=V'B'=V'C'$, 而聯 $AB, BC, CA; A'B', B'C', C'A'$. 則有

$\triangle AVB\equiv\triangle A'V'B'$ $(s.\ s.\ s.)$,而 $AB=A'B'$.

同理可證 $BC=B'C'$, $CA=C'A'$.

在 VA 稜上,任取一點 D, 又在 AVB 面上,過 D 作 AV 的垂線,則因 $\triangle AVB$ 是等腰三角形,故 $\angle VAB$ 爲銳角,而 AB 不與所作垂線平行,而必交於一點 E. 同理,在 CVA 面上過 D 作的 AV 垂線,必交 AC 於一點 F. 則 $\angle EDF$ 便是二面角 $B-VA-C$ 的平面角.

再在 $V'A'$ 稜上,取 $V'D'=VD$, 而照上法作二面角 $B-V'A'-C'$ 的平面角 $\angle E'D'F'$. 因 $\angle DAE=\angle D'A'E'$ (?), 故 $rt.\triangle ADE\equiv rt.\triangle A'D'E'$, $AE=A'E'$, $DE=D'E'$. 同理,可知 $AF=A'F'$, $DF=D'F'$. 又 $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$ (?), 故 $\angle EAF=\angle E'A'F'$, 而 $EF=E'F'$ (?).

$\therefore\ \triangle EDF\equiv\triangle E'D'F'$ (?),而 $\angle EDF=\angle E'D'F'$.

故即 $B-VA-C=B'-V'A'-C'$.

同理,可證其他各二面角,也對應相等.又各相等部份,係依同一順序排列,故 $V-ABC=V'-A'B'C'$.

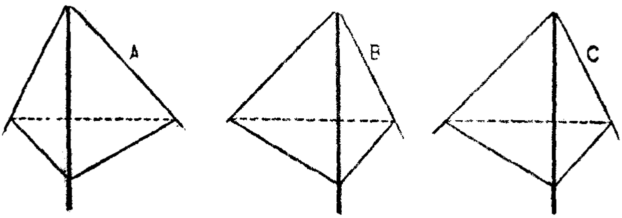
49.對稱三面角定理　如一三面角的

(一)兩個面角,與所夾的二面角;

(二)兩個二面角,與所共的面角;

或　(三)三個面角;

與另一三面角的相當部份各等,而二者相等部份排列的順序相反,則這兩個三面角爲對稱.



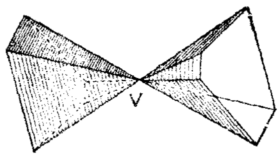
假設 A 與 B 是已知兩個三面角,作 C 與 A 對稱.

因 C 與 A 兩三面角中,相等部份排列順序相反,故 C 與 B 兩三面角中,相等部份排列順序相同.

但 $C\equiv B$, 而 C 與 A 對稱,故 B 也和 A 對稱.

50.對頂多面角

延長一多面角各稜,即成另一多面角;二者稱爲對頂多面角,如右圖.



對頂三面角定理　**對頂三面角必對稱.**

因各面角爲對頂角,故必對應相等,但排列的順序恰相反,故由上節定理第三條件即明.

對頂多面角定理　**對頂多面角必對稱.**

可分爲若干對頂三角形,即可證明.

習題十一

1. 在 §45 定理的圖內, $\angle AVD+\angle DVB<\angle AVC+\angle CVB$, 試加證明.

2. 有四面角 $V-ABCD$, 其中 $\angle AVB=\angle AVD, \angle BVC=\angle CVD$, 求證 $A-VB-C=A-VD-C$.

3. 一四面角中,相對的面角相等,求證相對的二面角也必相等.

4. 如一四邊形四角總和爲 $4rt. \angle s$,則其四頂點在一平面上,試加證明.

5. 設 D 爲三面角 $V-ABC$ 內一點,求證

$$\angle AVD+\angle BVD+\angle CVD>\frac{1}{2}(\angle AVB+\angle BVC+\angle CVA).$$

6. 試改上題爲一平面幾何學中相當問題.

7. 試證 §43 的圖中 $V-ABD$ 與 $V-CBD$ 對稱.

8. 過三面角各面角分角線,而與各面垂直的平面,必共交於一直線上,試加證明.

9. 上題與平面幾何中什麼定理相當?

10. 習題十第 3 題與平面幾何中那條定理相當?

第一第二兩編複習題*

1. 平行於同一平面的二直線,是否平行?何故?

2. 如一平面過平行四邊形的一對角線,試證自他對角線兩端至這平面的距離必相等.

3. 已知一點,與不共在一平面內的二直線,試證在普通情形,只能作一直線,使過這點,而與這二線相交.并試列舉其他例外情形.

4. 二平面相交,其中一面的垂線在他平面上射影,必與交線垂直,試加證明.

5. 能否有一三面角其三個面角爲20°, 80°, 105°?

6. 距相交(或平行)二直線等遠點的軌跡如何?

7. 討論二平行線在一平面上射影的各種情形.

8. 試證二平行線段在同一平面上射影的比,必等於原二線段的比.

9. 過一已知直線,求作一平面,與一銳二面角相交,而交線互垂.

10. 求作一平面截一已知四面角,使截面成一平行四邊形.

11. 一直線段二倍於在一平面上的射影,求這直線對這平面的傾角.

---

*複習題內各題,不依其所用定理在本書內的次序排列,學生必熟嫻已習各定理的全部,方可知解題的根據.本書各複習題和最後所附的全書總習題,編制也本這原則.

12.求距三面角三面等遠點的軌跡.

13.四點不在一平面內,求定一點使距四點等遠.

14.設 X 為平面 MN 內一動點,P 為這平面外一點,如 PX 的長有定,求 X 點的軌跡.

15.直角的射影何時能為直角?何時為銳角?為平角?

16.求已知平面內一點,使距空間內三定點等遠.

17.在已知平面內,求定一點,使距這平面同側二點距離的和為最小.

18.已知空間內三直線,求作一直線與其二相交,而與第三線平行.

19.自一平面的平行線上各點到這平面的距離都相等,試加證明.

20.我們能不能根據上題推斷「距已知平面等遠點的軌跡為其平行線」?何故?

21.一三面角中,無二個面角為直角,今過其頂點,在各面內作相對稜的垂線,試證三垂線同在一平面上.

22.二相交平面有無公垂線?二直線在何種情形下方有公垂線?

23.求距二平行面等遠點的軌跡.

24.距二定點等遠,距二平行面也等遠的點,其軌跡應如何?

25.過一直線上一點,作直線與一已知直線平行,試

證各直線必在同一平面內.

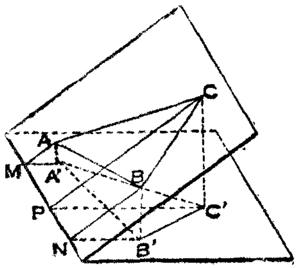
26.一三角形底長 6 寸,且在一已知平面內,這底上的高爲 4 寸.如三角形所在平面與這已知平面的二面角爲$\frac{2}{3}$ $rt.\angle s$,求這三角形在已知平面上射影的面積.

27.一三面角的頂點爲 V,三個平面角皆直角.自任意一點 P,向三稜作垂線 PA, PB, PC, 而 A, B, C 爲垂趾,求證
$$\overline{VP}^2=\overline{VA}^2+\overline{VB}^2+\overline{VC}^2.$$

28.平面 MN 上直線,如與直線 AB 在這面上射影成直角,則與 AB 亦成直角,試加證明.

29.一平面內二直線與他平面成相等傾角者,則與這二平面交線,也必成等角,試加證明.

30.已知二平面所成二面角爲 α,求一面上三角形 ABC 至他面上射影三角形 $A'B'C'$ 二者面積的比.



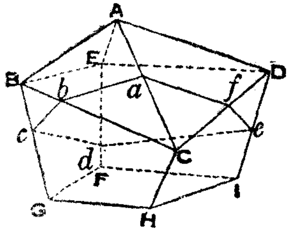
〔提示〕 作這二平面交線垂線 MA, MA'; NB, NB'; PC, PC' 等,則 $MA'=MA.\cos\alpha$. 注意 $\triangle s\ ABC, A'B'C'$ 可分爲若干梯形的和差,按梯形面積公式去求即得.

註 本題的理,易推廣到多角形.如視曲線形面積,爲其內接多角形邊數無限增加,各邊無限縮小時,所趨的極限,則這理對於任何平面閉曲線的面積皆成立.

第三編

多面體

51. 多面體　許多平面多角形所圍成的封閉形,叫**多面體**.這些多角形,叫多面體的**面**,多角形各邊,叫多面體的**稜**,多角形各頂點,叫多面體的**頂點**.不在多面體的面上二頂點聯線,叫多面體的**對角線**.



如右圖 $A, B, C, \cdots\cdots\cdots I$ 等點是頂點, $AB, AC, \cdots\cdots\cdots$ 等線段是稜, $ABC, BCGH, \cdots\cdots\cdots$ 等形是面,聯 AF, AG 或 BI 等線,即爲對角線,但 BF 等非對角線.

注意　如任以一平面截一多面體,所得均爲凸多角形,則稱**凸多面體**,上圖即是,其中六角形 $a\,b\,c\,d\,e\,f$ 爲一截得的多角形,叫做**截面**.

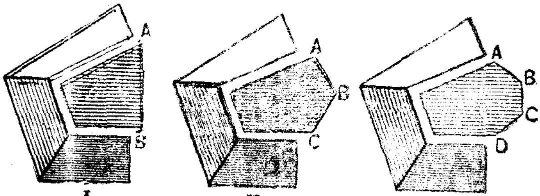
本書所論,以凸多面體爲限.

註　各面的多角形,不必邊數相同,如上圖各面中,有四個爲三角形,五個爲四邊形.

多面體至少要有四個面,因三面交於一點,成一三面角,必須再加一面方可成體.

n 個面的多面體,叫 n 面體,如四面體,五面體,六面體,八面體,十二面體,二十面體.

52. 歐拉 (Euler) 定理　**凸多面體頂點數與面數的和等於稜數加二。**



I　II　III

〔已知〕　V 爲凸多面體頂點數,F 爲面數,E 爲稜數.

〔求證〕　$$V+F=E+2.$$

〔證明〕　設這多面體先有一面,然後陸續加入他面構成,并命加第 m 面後,所增的頂點數,面數,稜數,各表以 v_m, f_m, e_m. 則不論 m 値如何,顯有　$f_m=1$.

就上面 I, II, III 各圖,可推知 e_m 與 v_m 關係如下表:

e_m	1	2	3	....	k
v_m	0	1	2	....	$k-1$

故　$e_m-v_m=1=f_m$

或　$v_m+f_m=e_m$　(1)

即在普通情形,$v+f-e$ 一數不因面的增加而變,但有二例外情形,即第一面時 $v_1=e_1$, 可作 $v_1+f_1=e_1+1$.　(2)

又末面時　$v_n=0$,　$e_n=0$,　可寫爲　$v_n+f_n=e_n+1$.　(3)

在 (1) 中令 $m=1,2,\cdots\cdots n-1$, 而與 (2),(3) 兩端各加,得

$(v_1+v_2+\cdots\cdots+v_n)+(f_1+\cdots\cdots+f_n)=(e_1+\cdots\cdots+e_n)+2$, 即

$$V+F=E+2.$$

53.多面體面角總和定理 **n 頂點凸多面體的面角總和爲 $4(n-2)\,rt.\angle s$.**

〔已知〕 一凸多面體,頂點數爲 n.

〔求證〕 各面角總和(即各面多角形的內角和總和)爲

$$S=4(n-2)\,rt.\angle s.$$

〔證明〕 設這多面體面數爲 F,各面爲 $k_1, k_2, \cdots\cdots k_F$ 角形,則這些多角形內角和各爲

$$2(k_1-2)\,rt.\angle s,\quad 2(k_2-2)\,rt.\angle s,\cdots\cdots 2(k_F-2)\,rt.\angle s.$$

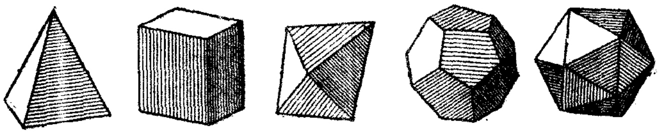
故總和爲 $S=2(k_1+k_2+\cdots\cdots+k_F-2F)\,rt.\angle s.$

設這多面體的稜數爲 E,因每一稜由二面各一邊合成,故 $2E=k_1+k_2+\cdots\cdots k_F$, 而得 $S=4(E-F)\,rt.\angle s.$

按歐拉氏定理 $E-F=V-2$, 但在此 $V=n$,

$$\therefore\quad S=4(E-F)\,rt.\angle s=4(n-2)\,rt.\angle s.$$

54.正多面體 各面爲正多角形,而各多面角又皆相等的多面體,叫**正多面體.**



正四面體 正六面體 正八面體 正十二面體 正二十面體

正多面體有**正四面體,正六面體**(又叫**立方體**),**正八面體,正十二面體,正二十面體**共五種,依次排列如上圖,但只有這五種,理由如次:

任何凸多面角,至少有三面,且各多面角的面角和必小於 4 $rt.\angle s$ (§46).

(一)正三角形各角為$\frac{2}{3}rt.\angle s$, 而 $6\times\frac{2}{3}rt.\angle s=4rt.\angle s$, 故可取 3, 4 或 5 個正三角形,構成一多面角.

如此便得正四面體,正八面體與正二十面體.

(二)正方形各角為 $rt.\angle$,故只可取 3 個,構成多面角,而得正六面體.

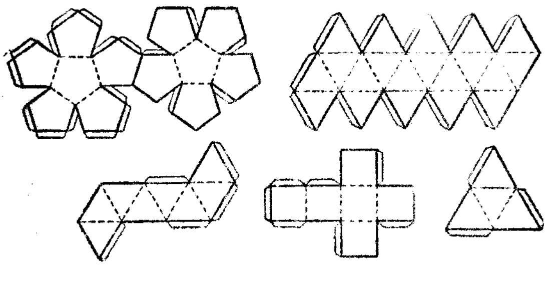
(三)正五角形各角為 $\frac{6}{5}rt.\angle s$.故只可取 3 個,構成多面角,而得正十二面體.

(四)正 n 角形各角為$\frac{n-2}{n}\cdot 2rt.\angle s$, 如欲取 3 個或 3 個以上正 n 角形構成一多面角,首先必須

$$3\frac{n-2}{n}\cdot 2rt.\angle s<4rt.\angle s,\qquad 即\quad 3(n-2)<2n,\quad \therefore n<6.$$

所以 $n\geqq 6$ 時,不能以正 n 角形構成多面角.

註 五種正多面體模型的製法如次:將下面各圖



繪就,貼在紙板上,用刀依虛線割開,但勿使分斷,即可摺成立體.再就各狹條將各稜粘好便得.

習題十二

1. 求頂點爲 6 的多面體面角總和.

2. 一多面體稜數爲 30,面數爲 12,求其面角總和.

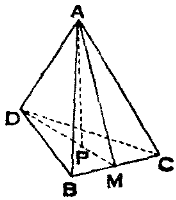
3. 求證各正多面體頂點數,面數,稜數合於 §52.

4. 求證不能有 7 稜的多面體.

5. 求證多面體各面多角形邊數的總和必爲偶數.

6. 三等長線段 AA', BB', CC',交於一點 O,且兩兩垂直,兩兩平分,試證 A, A', B, B', C, C' 爲一正八面體頂點.

註 AA',BB' 等叫這八面體的軸.



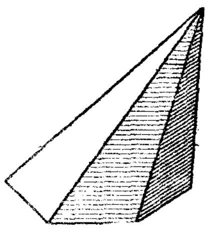
7. 有正四面體 $ABCD$, M 爲 BC 中點,求 AM 在平面 BCD 上射影 MP 的長,因此證 $\angle AMP=\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$.

〔提示〕 平面 $ADM\perp$ 平面 BCD.

8. 證明上題中 $\angle AMP$ 是 $A-BC-D$ 的平面角.

9. 求正六面體各面的二面角.

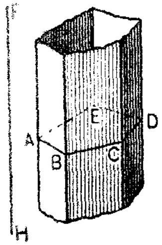
55. <u>兩種重要的多面體</u> (一)角錐 以不過多面角頂點,不與各稜平行的平面,與各稜相交,則所成多面體,叫做**角錐**.換句話說,即一多角形與集於一點的若干三角形所成的多面體.



註 關於角錐的研究,見本編 §69 及以後各節.

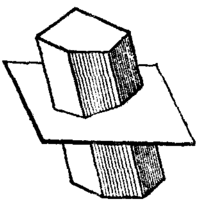
(二)角柱　二平行面上各取一全等 n 角形,與許多平行四邊形所成多面體,叫 **n 角柱**,或**角柱**.二全等多角形,叫**底面**,或**底**.二底距離叫**高**.各平行四邊形,叫**側面**.其面積和,叫**側面積**.再加二底面積,叫**全面積**.隣側面相交各平行線,叫**側稜**.

註　取一多角形如 $ABCDE$, 及不在其平面上的一直線如 HF, 一動直線常與這定直線平行,而與這多角形相交,所生的面,叫**角柱面**.上述的角柱,即係二平行面截一角柱面而成.

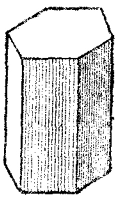


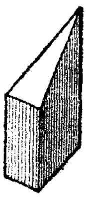
注意　如一平面,與角柱一側稜垂直,則必與一切側稜均垂直(§20).這平面截角柱所成多角形,叫**直截面**.

56.角柱的種類　各側稜不與底面垂直的,叫**斜角柱**,垂直的,叫**直角柱**.底面爲正多角形的直角柱,叫**正角柱**.以不與底面平行的一面,與各側稜相截,所得角柱的部份,叫**斷角柱**.


斜角柱


直角柱

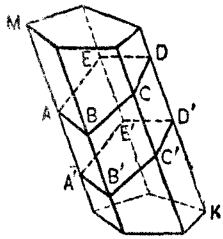

正角柱


斷角柱

直角柱一切側面皆長方形,且爲底面垂面.一切側稜皆與其高相等.

57.角柱的平行截面定理 **與角柱各側稜相交的平行截面,其截痕爲全等多角形.**

〔已知〕 平面 $AD \parallel$ 平面 $A'D'$,與角柱 KM 的一切側稜皆相交.



〔求證〕 截面 $AD \cong$ 截面 $A'D'$.

〔證明〕 因平面 AD 與平面 $A'D'$ 平行,故有 $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ 等(§10),且 $AB=A'B'$,$BC=B'C'$ 等(§10系),因而 $\angle ABC=\angle A'B'C'$, $\angle BCD=\angle B'C'D'$……(§13).

$\therefore$ $ABC\cdots\cdots E \cong A'B'C'\cdots\cdots E'$. (何故?)

系 **角柱的兩底是全等多角形,且凡與底面平行的截面,都與底面全等.**

58.角柱側面積定理 **角柱的側面積,等於直截面周界,與這角柱側稜的相乘積.**

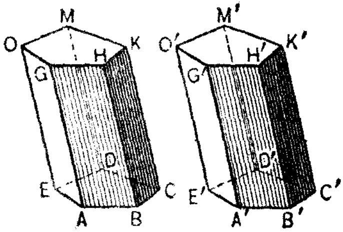
〔已知〕 角柱 MK 的側稜長爲 l, 直截面周界爲 p.

〔求證〕 側面積爲 $L=p\times l$.

〔證明〕 注意角柱各側面皆平行四邊形,以稜長 l 爲底,其上直截面交線長爲高,求各側面積總和卽得.

系 **直角柱的側面積,等於其高與底面周界的相乘積.**

59.全等角柱定理　如一角柱在一頂點的三面,與他角柱共一頂點的三面,對應相等,且各面處相似地位,則這兩角柱全等.



〔已知〕　角柱 AM 在頂點 A 的三面 AD, AH, AO,與角柱 $A'M'$ 在頂點 A' 的三面 $A'D', A'H', A'O'$ 對應全等,各面處相似地位.

〔求證〕　$AM \cong A'M'$.

〔證明〕　因　AD 面 $= A'D'$ 面,

故　$\angle EAB = \angle E'A'B'$.

同理,　$\angle BAG = \angle B'A'G'$,　$\angle GAE = \angle G'A'E'$,　故

三面角 $A-BGE \cong$ 三面角 $A'-B'G'E'$.　(§48)

又因各全等面處於相似地位,所以可以疊合這二個三面角,使各全等面也完全疊合,則 C 與 D,依次與 C' 和 D' 相合,AG, BH 等,也各與 $A'G', B'H'$ 等相合.

但 $CK \parallel AG$ 等,$C'K' \parallel A'G'$ 等,故照上法疊合後,CK 與 $C'K'$ 必在同一直線上.同理 DM 與 $D'M'$ 亦然.

且 G, H, O 各與 G', H', O' 相合,故平面 GM 必與平面 $G'M'$ 相合(平面決定公理).故平面 GM 與直線 CK 的交點 K,必與平面 $G'M'$ 與直線 $C'K'$ 的交點 K' 相合;因這二平面與二線已各相合,而平面不含直線時,只有一交點.

系一 **等底等高的二直角柱必全等.**

系二 **合上面各條件的二斷角柱必全等.**

60. 立體的體積 取上節系一的特例,即明**等稜的二立方體(卽正六面體)必全等.**

因此我們取稜為單位長的立方體,做**體積單位.** 立體所含單位體積的倍數,叫做這立體的**體積.** 體積相等的二立體,叫做**等積或相等.**

注意 相等與全等不同,因等積二立體未必能完全疊合也.凡全等的二立體必等積,但其逆不眞.

習題十三

1. 一五角柱有幾條對角線?四角柱有幾條?

2. 一多面體最少須有幾面?幾稜?幾頂點?

3. 試證經過不相隣二側稜的平面,必截角柱成一平行四邊形.

4. 試證與側稜平行的任一平面,必截角柱成一平行四邊形.

5. 一直三角柱高為15市寸,底面各邊長為8市寸,10市寸,11市寸,求其側面積.

6. 求上題中角柱的全面積.

7. 一直四角柱的側面積為190平方市寸,底面各邊長為7市寸,8市寸,11市寸,12市寸,求其高.

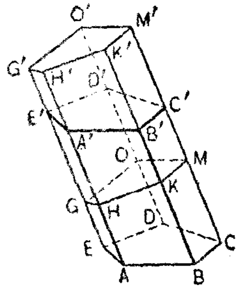
8. 有上題所述已知件的二直四角柱,是否必全等?

9. 過角柱二側稜各作一平面,如其交線與底面垂直,則必為一直角柱,試加證明.

10. 已知一正六角柱,底面一邊長為 a 市尺,高為 h 市尺,求其側面積與全面積.

11. 已知正八角柱高 1 市尺,底面一邊長 2 市尺,求其側面積.

61. 斜角柱體積定理　一直角柱以一斜角柱的直截面為底,側稜為高,則二者必等積.



〔已知〕　GM 為斜角柱 AD' 的直截面,GM' 為一直角柱,其高等於斜角柱 AD' 的側稜,其底為 GM.

〔求證〕　$AD'=GM'$.

〔證明〕　$ABKH$ 與 $A'B'K'H'$ 二個四邊形中,$AH=AA'-A'H=HH'-A'H=A'H'$. 同理,$BK=B'K'$.

又因　$AB \parallel A'B'$, 故 $\angle HAB=\angle H'A'B'$. 同理,

$\angle ABK=\angle A'B'K'$, $\angle BKH=\angle B'K'H'$, $\angle KHA=\angle K'H'A'$.

故　$ABKH \cong A'B'K'H'$. 同理　$BKMC \cong B'K'M'C'$.

但按 §57 定理的系,　截面 $AD=$ 截面 $A'D'$.

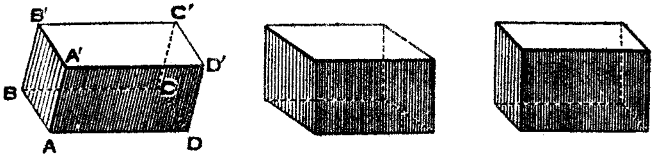
故　　斷角柱 $AM \cong$ 斷角柱 $A'M'$　(§59 系二).

$\therefore$　$AM'-AM=AM'-A'M'$. 即　$AD'=GM'$.

系　直截面全等,側稜也等的兩角柱等積.

62.平行六面體 底是平行四邊形的角柱,叫**平行六面體**,其各面皆平行四邊形;如一側稜與底面垂直,則各側稜亦然(?),這種叫**直平行六面體**.直平行六面體的底爲長方形時,叫**長方體**,或**直六面體**;爲正方形時,叫**立方體**,即正六面體.

註 如證平行六面體爲直六面體,只須證其任一三面角的各面角皆直角.



平行六面體 直平行六面體 長方體

63.平行六面體側面定理 **平行六面體相對二側面全等,且互相平行.**

〔已知〕 平行六面體 AC' 的相對二側面 AB', DC'.

〔求證〕 (一) AB' 面 $\cong DC'$ 面,(二) AB' 面 $\parallel DC'$ 面.

〔證明〕 按定義,AC' 的底面 $ABCD$ 爲平行四邊形,故 $AB \parallel CD$, 且 $AB = CD$ (何故?).

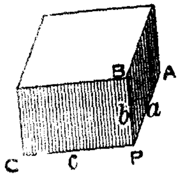
又按角柱定義, AC 面 $\parallel A'C'$ 面, $AA' \parallel DD'$, 故 $A'A = D'D$ (§10 定理的系),且 $\angle A'AB = \angle D'DC$ (§13).

因 AB' 與 DC' 二側面爲平行四邊形,而適已證明兩者的兩隣邊和夾角對應相等,故 AB' 面 $\cong DC'$ 面.

且因 $AB \parallel CD$, $AA' \parallel DD'$, 故 AB' 面 $\parallel DC'$ 面(§9 的系).

系　平行六面體中,可任取二相對面為底.

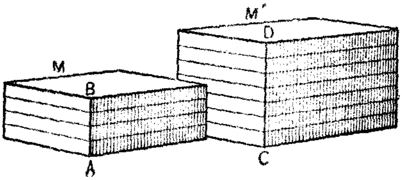
64. <u>長方體體積</u>　長方體體積公式,爲立體體積的基本法則,其他求積問題,皆由此推出其解,這公式重要的情形,正和長方形面積公式,在面積量法中所佔的地位一樣.



長方體上共一頂點的三稜長稱爲其度.設一長方體三度爲 a, b, c,則其體積爲　$V=a\cdot b\cdot c$.

今分層證明這理如次:

(一)等底的二長方體,體積的比等於高的比.



右圖中 AB 與 CD 爲等底長方體 M 與 M' 的高.

(甲)設二高的比 $AB:CD$ 爲有理數,即 $AB:CD=m:n$ (m,n 爲正整數).分 AB 爲 m 等分,則 CD 必可 n 等分,使每分與 $\frac{1}{m}AB$ 相等.今過各等分點,作底的平行面,則必分 M 與 M',各成 m 個與 n 個長方體,皆爲全等形(§57 系),則更必盡爲等積.

$$\therefore\quad M:M'=m:n=AB:CD.$$

(乙)設二高的比是無理數,則不能依同一的單位,以等分二高.取 $\frac{1}{m}AB=l_1$ 爲單位,則這單位必不能量盡 CD,換句話說,CD 不是這單位的整倍數.

今以這單位量 CD 得 $CD_1=n_1l_1$，而 $D_1D<l_1$. 在這時,立體 AB：立體 $CD_1=m:n_1=AB:CD_1$.

等分單位 l_1 成較小單位 l_2，設 $CD_2=n_2l_2$，而 $D_2D<l_2<l_1$. 同上理,得　　立體 AB：立體 $CD_2=AB:CD_2$.

依法逐漸縮減單位,則 D_n 趨於 D. 故 CD_n 趨於 CD.

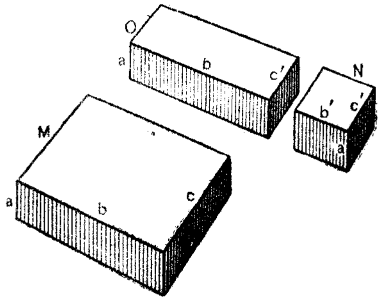
$\therefore$　立體 AB：立體 $CD=AB:CD$.

(二)等高兩長方體的體積比等於底的比.

設 M 與 N 二長方體的度,各爲 $a,\ b,\ c$ 與 a,b',c'. 可作一長方體 O, 以 a,b,c' 爲度,則按(一)有 $M:O=c:c'$.

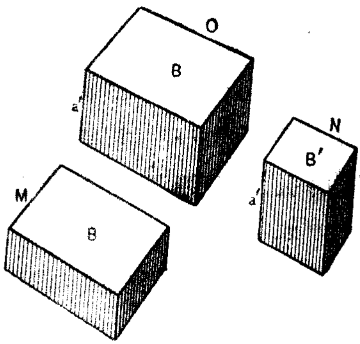
同理　$O:N=b:b'$.

$\therefore\ M:N=b\cdot c:b'\cdot c'$.



(三)兩長方體體積的比,等於二者底與高乘積的比.

設 M 與 N 二長方體各以 B,B' 爲底; a,a' 爲高.另作一長方體 O, 以 B 爲底,a' 爲高,則



$M:O=a:a'$(?); $O:N=B:B'$(?)　$\therefore\ M:N=Ba:B'a'$.

注意　所謂一線段和一面的積,或三線段的積,乃指其數量的積.

(四)二長方形體積的比,等於三度乘積的比.

因底面積比等於二度乘積比的緣故.今如取 N 爲單位體積,即 $a'=b'=c'=1$, 即得所求證的結果如下:

(五)長方體體積,等於三度的連乘積.

系一　長方體體積,等於底與高的乘積.

系二　正方體體積,等於稜的立方.

習題十四

1. 如 §62—3 的左圖表一長方體,而 $AB=9, BC=12, CC'=8$, 求 AC'.

2. 如§62的左圖表一直平行六面體,而 $AB=5, BC=3$, 與 $CC'=2, \angle ABC=120°$, 求對角線 AC' 的長.

3. 已知等高二長方體各有二度爲 $a, b; a', b'$,試求二者體積比.

4. 已知等底二長方體的高爲 a 與 b,求體積的比.

5. 已知一長方體的高爲 6,而與一以 8,12,15 爲三度的長方體等積,試求其底面積.

6. 一長方體的高爲 11,而與以 8,12,15 爲度的另一長方體全面積相等,如其底爲一正方形,求其底面積.

7. 一長方體底面的度爲 12, 20, 全面積爲 800, 求其體積.

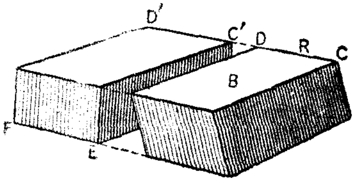
8. 二立方體,稜長各為 120 寸與 209 寸,另一立方體全面積為前二者全面積總和,求其體積.

9. 有長方體三度的比為 3:4:5,全面積為 2350 平方寸,求其三度.

10. 一立方體對角線為 $\sqrt{18}$,求其體積.

65. <u>直平行六面體體積定理</u>　**直平行六面體體積等於一側面與相當高的乘積.**

〔已知〕 R 為一直平行六面體的體積,B 為一側面,H 為相當高.

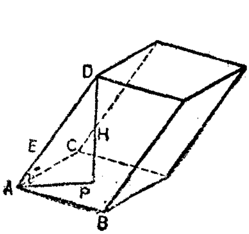


〔求證〕 $R=B\times H$.

〔證明〕 延長 CD 及其平行各稜,截取 $C'D'=CD$. 作 $C'D'$ 的二個垂面 $C'E$ 和 $D'F$, 成一平行六面體 $C'F$. 則按斜角柱等積定理(§61),有　體積 $C'F=R$.

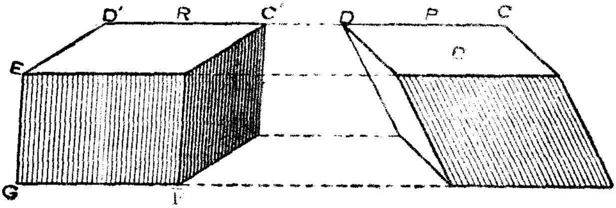
又按 §35 的系,知在 C' 的三面角各面角皆是直角,故為一長方體,因此

$R=$ 體積 $C'F=$ 底 $\times$ 高 $=B\times H$.



註　如知角柱底面與一側稜傾角,即可求這底上的高.如右圖,即知角柱的一側稜 E, 高 H, 與 E 在底上射影,三者成一 $rt.\triangle$,其中 H 的對角 e, 即 E 稜對於底面 ACB 的傾角.

66.平行六面體體積定理 **平行六面體的體積,等於底與高的乘積.**



〔已知〕 一平行六面體體積為 P,底為 B,高為 H.

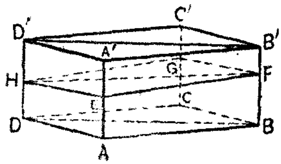
〔求證〕 $P=B\times H$.

〔證明〕 延長 CD 及其平行各稜,在 CD 延線上,取 $C'D'=CD$, 過 C' 和 D' 作這線的垂面 $C'F$ 與 $D'G$, 構成一直平行六面體,則其高與 H 相等(平行面判別定理系二,§25). 今設這體的體積為 R, 則 $R=P$ (§61).

按 §65 $R=EC'\times H$, 而 $EC'=B$, 故 $P=R=B\times H$.

67.分平行六面體為等積三角柱

定理 **過平行六面體相對二稜的平面,分這體為二等積的三角柱.**



〔已知〕 $D'D$ 與 BB' 為平行六面體 AC' 相對二稜.

〔求證〕 平面 $BDD'B'$ 分 AC' 為二等積角柱 $ABD-A'$ 與 $BCD-C'$.

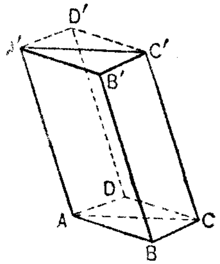
〔證明〕 作直截面 $EFGH$, 交 $DD'B'B$ 於直線 HF.

按 §63, 平面 $AB' \parallel$ 平面 DC', 故 $EF \parallel HG$(§10).

同理 $EH \parallel FG$, 故 $EFGH$ 爲平行四邊形,而對角線 HF 分之爲二全等三角形 $\triangle EFH$, $\triangle FGH$.

按斜角柱體積定理系(§61),知 $ABD-A'=BCD-C'$.

68. <u>三角柱體積定理</u> **三角柱體積,等於高與底面乘積.**



〔已知〕 三角柱 $ABC-B'$ 的體積爲 V,底面爲 B_1,高爲 H.

〔求證〕 $V=B_1 \times H$.

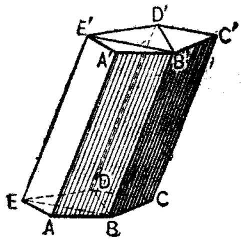
〔證明〕 在 ABC, $A'B'C'$ 二平面上,各作一平行四邊形 $ABCD$, 與 $A'B'C'D'$, 則得平行六面體 $ABCD-D'$,其體積倍於 $ABC-B'$ 者(?).

按 §66, 知 $ABCD-B'$ 體積 = 底面 $ABCD \times H$.

但 $ABCD=\triangle ABC+\triangle ACD=2\cdot\triangle ABC=2\cdot B_1$.

$\therefore$ $ABCD-B'=2B_1 \times H$, 卽 $V=B_1 \times H$.

系一 **任何角柱的體積,等於高與底面的乘積.**



分這角柱爲若干三角柱如右圖,卽可證明.

注意 這系包含本節定理, §64(五), §65, 因那些定理皆這系的特例也.我們又可視 §61 及其後各理,皆這條系的預備定理.

系二　**等高等底面的二角柱,體積必相等.**

系三　**等底面二角柱體積的比,等於高的比.**

系四　**等高二角柱體積的比,等於底面的比.**

習題十五

1. 一平行六面體,底面積為50,側稜為20,側稜對於底面的傾角為60°,求其體積.

2. 如§65註內圖為一平行六面體,而 $AB=6, AC=5$, $\angle BAC=10°, E=10$, E 在底面上射影為 8,求其體積.

3. 如上題中 $AB=5$. $AC=6$, $AD=8$, $\angle BAC=60°$, 又 E 對底面的傾角為60°,求其體積.

4. 一立方寸金塊,搥成 20000 平方寸金箔,求其厚.

5. 一開口鐵方匣,厚半寸,外面長 2 尺,寬 1 尺,高 5 寸,問需鐵多少立方寸,方可造成?

6. 在§67的圖中, $\triangle ABD=60$ 方寸,立體高 1 尺,求三角柱 $A'-ABD$ 的體積.

7. 如上題中 $AB=6$, $AD=4, AA'=8$, $\angle DAB=60°$, 求三角柱 $A'-ABD$ 的體積.

8. 求§68內三角柱的體積,已知

(1) $AB=2, BC=6$, $\angle ABC=30°, H=7$.

(2) $AB=4, BC=6, BB'=5$, $\angle ABC=60°$, BB' 在底面上射影為 4.

9. 有一正三角柱,底面邊長為 8,高為10,求體積.

10.有一正六角柱,(1)底面邊長爲 2,側稜長爲 5,求體積;(2)底面邊長爲 4,體積爲 $30\sqrt{3}$,求其高.

11.一直四角柱,側稜爲 E,底面爲 $ABCD$,而 $AB=9$, $BC=12$, $CD=14$, $DA=13$, $AC=15$, $E=10$,求體積.

12.一三角柱底面各邊爲 6, 4, 4, 側稜爲 $E=8$, 而 E 對底面的傾角爲 $30°$, 求其體積.

13.一角柱側稜爲 E,側稜在底面上射影爲 p,而底面的邊爲 s. 如底面爲正六角形,求其體積公式.

14.在 §68 系一的圖中,

(1) $ABCDE=15$, AA' 在底面上射影爲 3, AA' 對底面的傾角爲 $45°$,求體積 V;

(2) $AA'=6$, $ABCDE=20$, $V=60$, 求 AA' 對於底面的傾角;

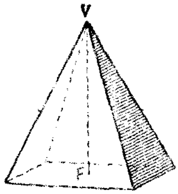
(3) $V=200$, $ABCDE=25$, AA' 在底面上射影爲 6, 求 AA'.

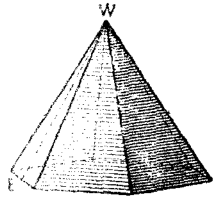
69.角錐的要件 角錐的定義,見 §55.

角錐中諸三角形各面叫**側面**,其面積總和叫做**側面積**;多角形一面叫**底面**,側面積與底面積的和,叫**全面積**;與底面相對的頂點,叫做這**角錐的頂點**;自這頂到底面上的高,叫做**角錐的高**.

角錐底面爲 n 角形,則稱 **n 角錐**,如**三角錐**,四角錐等.注意四面體即是一三角錐.

70.正角錐　角錐底面爲正多角形,而其心即高的垂趾(高與底面交點)時,叫**正角錐**,或**直角錐**.正角錐的高叫做**軸**.



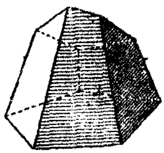


注意　正角錐各側稜和底面交點,皆距高的垂趾等遠(何故?),故必等長(斜線定理,§23).由此可知

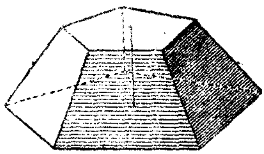
正角錐各側面爲等腰三角形,且各形全等(何故?).

正角錐側面的高叫**斜高**,如上圖的 WE.

71.角錐臺　一平面與一角錐的各稜皆相交,則這截面與底面間角錐部分,叫**斷角錐**.截面與底面平行時,叫**角錐臺**.



斷角錐



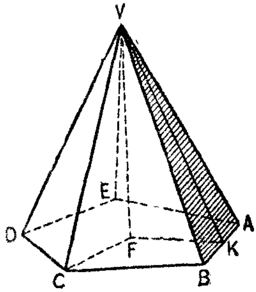
角錐臺

註　因此**斷角錐或角錐臺各側稜延線交於一點**.

角錐臺底面截面間距離叫**高**;各側面面積總和,叫**側面積**;再加二平行底面面積,叫**全面積**.

由正角錐截成的角錐臺,叫**正角錐臺**,其各側面皆等腰梯形(何故?),且皆等高,其高叫**斜高**.

72. <u>正角錐側面積定理</u>　**正角錐側面積為底面周界與斜高乘積之半.**



〔已知〕　$V-ABC\cdots\cdots E$ 為正 n 角錐,底面周界為 P,斜高為 S.

〔求證〕　側面積 $L=\frac{1}{2}P\times S$.

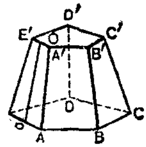
〔證明〕　按 §70 的注意,即知

$\triangle VAB\cong\triangle VBC\cong\cdots\cong\triangle VEA$.

但　$\triangle VAB=\frac{1}{2}AB\times S$.

$\therefore\quad L=n\times\frac{1}{2}AB\times S$,　即　$L=\frac{1}{2}P\times S$.

系　**正角錐臺側面積等於兩底周界總和與斜高乘積的一半.**



注意其各側面性質(§71)即明.

73. <u>正角錐計算題的注意點</u>　關於若干正角錐的計算題,宜注意下列三種直角三角形:

(一) $rt.\triangle VFK$, 含 $S, H, r, \angle f$.

(二) $rt.\triangle VKA$, 含 $E, S, \frac{1}{2}s$.

(三) $rt.\triangle VFC$, 含 $E, H, R, \angle e$.

其中 $E=$ 側稜,　$r=$ 底面邊心距,

$H=$ 立體的高,　$R=$ 底面半徑(即頂心距),

$S=$ 斜高,　$\angle e=E$ 對底面傾角,

$s=$ 底面邊長,　$\angle f=$ 一側面對底面傾角.

註　本書另有幾個常用記號,其意義如下:

$B=$ 底面積(如有二底面,則以此表下底面積),

$b=$ 上底面積. $L=$ 側面積. $V=$ 體積,

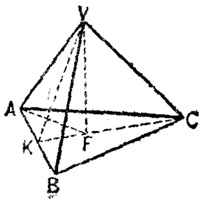
$T=$ 全面積, $h=$ 下底面三角形的高,

$h'=$ 上底面三角形的高, $s'=$ 上底面的邊,

$R'=$ 上底面的半徑(即頂心距), $r'=$ 上底面邊心距.

例 一正三角錐中, $s=5$, $H=3$, 求 E, L, V.

解 $KF=\frac{1}{3}h=\frac{5}{6}\sqrt{3}$,



$AF=\frac{2}{3}h=\frac{2}{3}\left(\frac{5}{2}\sqrt{3}\right)=\frac{5}{3}\sqrt{3}$,

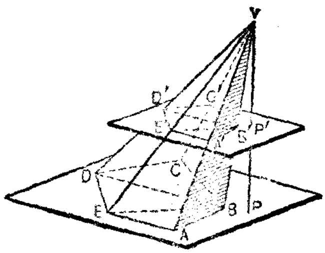
$E=VA=\sqrt{H^2+\overline{AF}^2}=\frac{2}{3}\sqrt{39}$.

$S=VK=\sqrt{H^2+\overline{KF}^2}=\frac{1}{6}\sqrt{399}$,

$L=\frac{1}{2}S\times 3s=\frac{5}{4}\sqrt{399}$, $V=\frac{1}{3}B\times H=\frac{25}{4}\sqrt{3}$.

74. <u>角錐底平行截面定理</u> **一角錐被其底面平行面所截,則(一)諸側稜及高被分成比例線段,(二)截面為一與底面相似的多角形.**

〔已知〕 $V-ABCDE$ 一角錐,被一底面的平行面所截,交各稜於 $A',B',C',\cdots\cdots E'$, 交高 VP 於 P'.



〔求證〕 (一) $VA:VA'=VB:VB'=\cdots=VP:VP'$.

(二) $ABCDE\backsim A'B'C'D'E'$.

〔證明〕(一)按平行截面定理的系(§11),卽可證明.

(二)過 VB 和 VE 作一平面,與底面及其平行截面各交於 BE 及 $B'E'$. 幷由同法得 BD 與 $B'D'$.

按 §10 定理，　$AB \| A'B'$,　$BE \| B'E'$,　$EA \| E'A'$.

$\therefore\ \angle ABE = \angle A'B'E'$,　$\angle BEA = \angle B'E'A'$.　(§13).

故 $\triangle ABE \backsim \triangle A'B'E'$.　同理，　$\triangle BED \backsim \triangle B'E'D'$ 等.

$\therefore\quad ABCDE \backsim A'B'C'D'E'$.

系一　角錐底面與其平行截面二面積的比,等於角錐高與自頂至截面高二者的平方比.

因 $\triangle VAB \backsim \triangle VA'B'$,卽得 $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{VA}{VA'} = \dfrac{VP}{VP'}$.

$ABCDE : A'B'C'D'E' = \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2 = \overline{VP}^2 : \overline{VP'}^2$.

系二　有等高又等底的二角錐,各作其底的平行截面,如自頂至這截面的距離相等,則這二截面的面積必等.

設等底面積爲 B, 二截面面積爲 b 與 b',則

$B : b = \overline{VP}^2 : \overline{VP'}^2$,　$B : b' = \overline{VP}^2 : \overline{VP'}^2$,　$\therefore\quad b = b'$.

習題十六

1. 求下列各正 n 角錐的側面積 L:

(1)　$n=3$,　$s=5$,　$S=4$;　(2)　$n=4$,　$s=8$,　$H=3$;

(3)　$n=8$,　$E=13$,　$s=10$;　(4)　$n=4$,　$E=8$, $\angle e = 30°$.

2. 有一正三角錐,　$s=2$,　$S=3$,　求全面積 T.

3. 有一正六角錐，$s=4$，$H=2$，求全面積 T.

4. 有一正五角錐，$L=60$，$s=3$，求斜高 S.

5. 一正三角錐，高為12尺，底邊長4尺，距頂點4尺，作底面的平行面，求所得截面面積.

6. 一正四角錐，高為8尺，底每邊長6尺，距頂點3尺作底面的平行面，求所得截面的面積.

7. 正六角錐，底面每邊長10吋，高為5吋，如欲使平行截面的面積為 $3\sqrt{3}$ 方吋，問應距頂點多少遠？

8. 一正三角錐臺中，$S=6$，$s=4$，$s'=3$，求側面積 L.

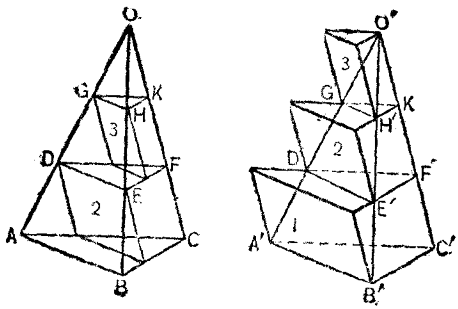
9. 一正四角錐臺中，$s=12$，$s'=4$，$H=3$，求側面積 L.

10. 一立方體，各稜長4寸，取共有一頂點的三稜中點，作一平面，截去這角，如此繼續截去這立方體各角，求其所餘立體的全面積.

75. 等積三角錐定理　等底面且等高的二個三角錐必有相等體積.

〔已知〕 二三角錐 $O-ABC$ 及 $O'-A'B'C'$，其高與底對應相等.

〔求證〕 二者的體積 V 與 V' 必相等.



〔證明〕(一)設 $V'>V$,而用歸納法證其必不成立.

將兩底面放在同一平面上.n 等分這二高,而命其每一分的長爲h.過各等分點,作底面的平行截面,則按上節的系二,知所成相當截面必等積.

取$O'-A'B'C'$的底面$A'B'C'$和上述各平行截面爲下底面作角柱,使各側稜皆平行於$O'C'$,其高爲h.

又取$O-ABC$的底面ABC的各平行截面爲上底面作角柱,使各稜皆平行於OC,其高也是h.

在$O-ABC$中,每一角柱,都和$O'-A'B'C'$中的上面一個角柱等積,因二者等底又等高也.故兩組角柱體積總和P'與P的差,等於$O'-A'B'C'$內最下一角柱體積.

今將二角錐高的等分數n,逐漸增大,則每一份的高h以及$O'-A'B'C'$中最下一角柱的體積,均逐漸縮小,以趨於零.換句話說,$P'-P$的極限爲O.

但按全分公理, $P'>V'$, $P<V$,

故由不等式運算法則,卽得 $P'-P>V'-V$.

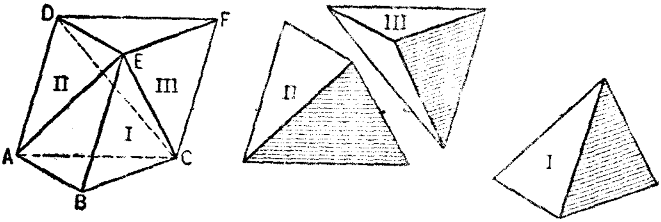
原設$V'>V$,則$V'-V$爲一有定的正量,但$P'-P$係一以零爲極限的變量,應可小到任何程度,而決不能大於一有定的正量,故上式不合理.

(二)設$V'<V$,可用與(一)相同的方法,證其不可能.

由(一)與(二),知V'既不能大於V,又不能小於V.

故必$V=V'$無疑.

76. __三角錐體積定理__　**三角錐體積等於底面與高乘積的三分之一.**



〔已知〕 三角錐 $E-ABC$ 的底面積是 B',高是 H,體積是 V.

〔求證〕 $V=\frac{1}{3}\times B'\times H$.

〔證明〕 在底面 ABC 上,作 AD, CF 使與 BE 同向平行而等長,則成一角柱 $ABC-DEF$. 再作平面 CDE,則可見這角柱由 $E-ABC$, $E-ADC$, $E-DCF$ 三個三角錐合成.

命這三個三角錐的體積,依次爲 I, II, III.

視第一第二兩角錐的 C 爲頂點,則二者等底等高,故按等積三角錐定理,知 $I=II$.

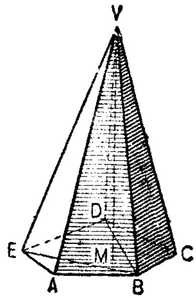
視第二第三兩角錐的 E 爲頂點,同理,知 $II=III$.

故 $I=II=III=\frac{1}{3}$角柱 $ABC-EFD$.

但 角柱$ABC-EFD=B'\times H$ (§68).

$$\therefore\quad V=\frac{1}{3}\times B'\times H.$$

系一　**任何角錐的體積等於底面與高乘積的三分之一.**



因自底面多角形一頂點作一切對角線,則分其底爲若干三角形,而這多角錐也由此分成若干三角錐,其高皆爲原多角錐的高H,而底面$B_1,B_2,\cdots\cdots B_n$,則爲多角錐底面B所分成的三角形,所以

$$\begin{aligned} V &= V_1+V_2+\cdots\cdots+V_n \\ &= \frac{1}{3}B_1H+\frac{1}{3}B_2H+\cdots\cdots+\frac{1}{3}B_nH \\ &= \frac{1}{3}(B_1+B_2+\cdots\cdots+B_n)H=\frac{1}{3}\times B\times H. \end{aligned}$$

注意　我們可視§74－75以及本節定理爲這條系的預備定理,這條系可與§68的系一比較.

系二　**兩個角錐體積的比,等於底面積與高乘積的比.**

系三　**底面相等的兩個角錐,體積比等於高的比.等高兩個角錐,體積比等於底面的比.**

系四　**等底面等高的兩個角錐體積相等.**

習題十七

1. 求下列各三角錐的體積,已知

(1)底面積爲20,側稜爲12,而側稜對底面的傾角爲30°.

(2)高爲8,底面三邊爲14,15,13.

2. 一多角錐體積爲72,底面爲正方形,邊爲6,求高.

3. 求下列各正 n 角錐的體積(記號見 §73):

(1) $n=6$, $s=6$, $H=8$; (2) $n=3$, $s=4$, $H=6$;

(3) $n=4$, $s=6$, $S=5$; (4) $n=4$, $S=12$, $\angle f=30°$;

(5) $n=6$, $E=12$, $\angle e=30°$; (6) $n=4$, $E=11$, $H=7$;

(7) $n=6$, $E=7$, $s=1$; (8) $n=4$, $S=4$, $\angle f=45°$.

4. 一正四角錐的體積 $V=336$, $H=7$, 求側稜 E.

5. 大金字塔的底面爲一正方形,每邊長 233 公尺,高爲 146.5 公尺,求體積 V.

6. 如一平面與一四面體的相對二稜平行,試證其截面必爲一平行四邊形.

7. 求證一直六面體的四對角線必等長.

8. 四面體任一面的重心(卽三中線共過的一點)與對頂點聯成直線段,試證如此四線段必交於一點,且分成 3:1 之比.

9. 求證角錐的側面積,必大於其底面積.

10. 求證正角錐的體積,等於底面中心到一側面距離的三分之一與側面積的乘積.

77. 角錐臺體積 一角錐臺可視作二個角錐的差,因這法可求出角錐臺體積公式如下:

設 H 爲角錐臺的高, B 與 b 爲其上下兩底面積, V 爲體積,則 $$V=\frac{1}{3}H(B+b+\sqrt{Bb}).$$

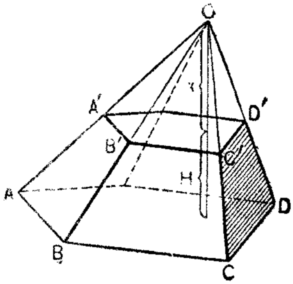
將各稜延長,則必交於一點 O (§71 註).

如此成二角錐 $O-ABCD\cdots\cdots$, $O-A'B'C'D'$, ……其差即原角錐臺.命後一角錐的高爲 x;按 §76 系一,得

$$V=(O-ABCD\cdots\cdots)-(O-A'B'C'D'\cdots\cdots)$$

$$=\frac{1}{3}B(H+x)-\frac{1}{3}bx$$

$$=\frac{1}{3}\{BH+x(B-b)\}. \qquad (1)$$



其中 x 值,可用比例求如下:

按 §74 系一,有

$$B:b=(H+x)^2:x^2,$$

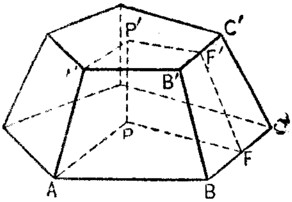
$$\therefore \sqrt{B}:\sqrt{b}=H+x:x$$

即　$\sqrt{B}\,x=\sqrt{b}(H+x)$, 而　$x=H\sqrt{b}/(\sqrt{B}-\sqrt{b})$.

代入(1)中,　$V=\frac{1}{3}\left[BH+\frac{H\sqrt{b}(B-b)}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}\right]$.

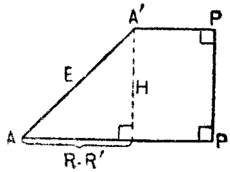
化簡得　$V=\frac{1}{3}H\left[B+\sqrt{b}(\sqrt{B}+\sqrt{b})\right]=\frac{1}{3}H\left[B+\sqrt{Bb}+b\right]$.

78.角錐臺計算題注意點　這類計算題內,有三個重要梯形如下表:



梯形	所含元素
$APP'A'$	$H,E,R,R',\angle e$
$FPP'F'$	$H,S,r,r'\ \angle f$
$BFF'B'$	$S,E,\frac{1}{2}s,\frac{1}{2}s'$

表中各記號意義,見 §73.

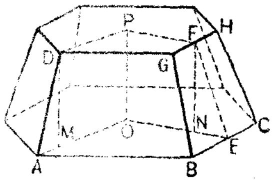


各梯形皆有二直角,故如知三部分,即可求所餘各部分.

註　解梯形時,常過一頂點引他腰的平行線如上圖,再解所成的三角形.

例　一正六角錐臺高爲 8,二底面的邊各爲 14 與 6,求其側稜 E,側面積 L,和體積 V.

解　設這錐臺的上下二底面的中心爲 O 和 P. 作 $OE \perp BC$, $PF \perp GH$, 聯 OA 和 PD, 又作 $DM \perp OA$, $FN \perp OE$,



則有 $NE = OE - PF$

$$= 7\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

$$S = FE = \sqrt{\overline{FN}^2 + \overline{NE}^2} = \sqrt{64+48} = 4\sqrt{7}.$$

$$AD = \sqrt{\overline{DM}^2 + \overline{AM}^2} = \sqrt{64+64} = 8\sqrt{2}.$$

$$L = \frac{6}{2}\{(14+6)4\sqrt{7}\} = 240\sqrt{7}.$$

又　$B = \frac{1}{2} \times 6 \times OE \times BC = \frac{1}{2} \times 6 \times 7\sqrt{3} \times 14 = 294\sqrt{3}.$

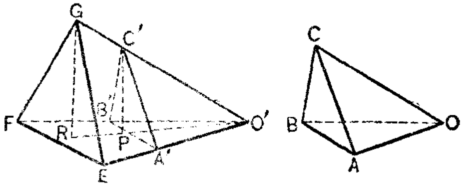
$$b = \frac{1}{2} \times 6 \times PF \times GH = \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} \times 6 = 54\sqrt{3}.$$

故　$V = (B + b + \sqrt{Bb})\frac{H}{3}$

$$= (294\sqrt{3} + 54\sqrt{3} + 126\sqrt{3})\frac{8}{3} = 1264\sqrt{3}.$$

79. __有相等三面角的二個三角錐__　關於這三角錐體積比有一定理,和平面幾何中有一等角的二三角形面積比定理相類.

定理　**二三角錐有一相等的三面角,則其體積比,等於這角三稜連乘積的比.**



〔已知〕三角錐 $O-ABC, O'-EFG$ 有一相等的三面角 O 與 O'，二者體積為 V 與 V'.

〔求證〕 $V:V'=OA\times OB\times OC:O'E\times O'F\times O'G.$

〔證明〕 疊置這二三角錐使 O 與 O' 二三面角相合. 設 A, B, C 所落之地位為 A', B', C'.

自 C' 與 G，引 $O'FE$ 面的垂線 $C'P$, GR, 則這二線必平行（何故?）而定一平面，與 $O'FE$ 平面相交於直線 $O'PR$.

$C'-O'A'B'$ 與 $G-O'EF$ 二個三角錐的高各為 $C'P$ 與 GR, 底面各為 $O'A'B'$ 與 $O'EF$,

按三角錐體積定理系二(§76)有

$$\frac{V}{V'}=\frac{\triangle O'A'B'\times C'P}{\triangle O'EF\times GR}=\frac{\triangle O'A'B'}{\triangle O'EF}\times\frac{C'P}{GR}$$

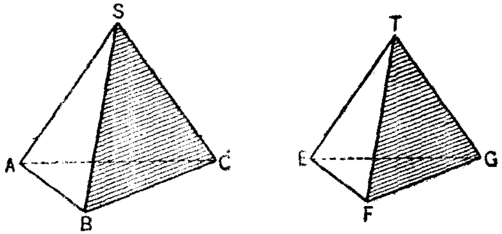
但 $\dfrac{\triangle O'A'B'}{\triangle O'EF}=\dfrac{O'A'\times O'B'}{O'E\times O'F}$, $\dfrac{C'P}{GR}=\dfrac{O'C'}{O'G}$（何故?）

$$\therefore\quad \frac{V}{V'}=\frac{O'A'\times O'B'}{O'E\times O'F}\times\frac{O'C'}{O'G}=\frac{OA\times OB\times OC}{O'E\times O'F\times O'G}.$$

80. <u>相似多面體</u> 二多面體如(1)面數相同，(2)諸面對應相似，且處相似地位，(3)各多面角對應相等，則稱為**相似多面體**.

相似四面體體積比定理　**兩個相似四面體體積的比等於相當稜的立方比.**

〔已知〕 有二相似四面體 $S-ABC$ 與 $T-EFG$, 體積爲 V 和 V'.



〔求證〕 $V:V'=\overline{SB}^3:\overline{TF}^3=\overline{SA}^3:\overline{TE}^3=\cdots\cdots$

〔證明〕 按定義,三面角 $S=$ 三面角 T.

故由 §79 定理 $\dfrac{V}{V'}=\dfrac{SB\times SC\times SA}{TF\times TG\times TE}$.

但　$SB:TF=SC:TG=SA:TE$. (何故?)

$\therefore$　$V:V'=\overline{SB}^3:\overline{TF}^3=\overline{SA}^3:\overline{TE}^3=\cdots\cdots$.

習題十八

1. 一三角錐臺,下底面積等於 9, 上底面積等於 4, 高等於 5, 求其體積.

2. 有正四角錐臺,下底面邊長爲 7, 上底面邊長爲 6, 高爲 8, 求其體積.

3. 一角錐臺的上底面積是 2, 下底面積是18,體積是 260, 求其高.

解下列各正角錐臺計算題(記號意義見 §73. 關於解法可參考 §78):

4. $n=3$, $s=8$, $s'=6$, $H=9$, 求 V.

5. $n=6$, $s=4$, $s'=2$, $H=9$, 求 V.

6. $n=6$, $s=10$, $s'=6$, $E=5$, 求 V.

7. $n=4$, $S=13$, $r=11$, $r'=7$, 求 V.

8. $n=5$, $s=11$, $s'=5$, $E=5$, 求 L.

9. $n=6$, $s=10$, $s'=8$, $E=4$, 求 L.

10. 克利俄培特拉(Cleopatra)針是一個埃及 尖碑.這碑的形狀,爲一正四角錐臺,底邊長 8 呎,頂邊長 5 呎,高爲 64 呎,上面安置一 7 呎高的角錐,其底與角錐臺的頂相合,求其體積.又這碑平均重量,爲每立方呎 165 磅,試求其重.

11. 在 §80 定理的圖中.

(1) 如 $SA=3$, $TE=2$, 求 V 對 V' 的比.

(2) 如 $SB=2$, $V':V=1:2$, 求 TF.

複 習 題

1. 一立方體的對角線長$8\sqrt{3}$,求其體積及全面積.

2. 斷直三角柱的各側稜長爲 8 吋, 9 吋, 12 吋,底面各邊長 12 吋, 27 吋, 25 吋,求側面積.

3. 一直角柱高 15 吋,其底面是一菱形,一邊長 10 吋,較短的對角線爲 12 吋,試求其體積.

4. 一角柱底面爲一正六角形,邊長 4 吋,稜長 7 吋,而與高成 60° 的角,試求這角柱體積.

5. 試證立方體體積,等於對角線立方乘$\frac{1}{9}\sqrt{3}$的積.

6. M和N二平面相交，A與B爲這二平面上各一點，試在M與N交線上求一點Z，使$AZ+ZB$爲極小.

7. 有三個平面角爲$120°, 80°, 165°$，能否構成三面角？何故？

8. 自一點P引二相交平面的垂線，其垂趾爲M與N，試證二平面的交線，必與平面MNP垂直.

9. 二平行線在一平面上的射影，是否平行？何故？

10. 二直線在一平面上的射影爲平行，這二直線是不是也平行？何故？

11. 有一直線段不在某一平面上，如平面上一動點至這線段兩端的聯線成直角，試求其軌跡.並問何時這軌跡變爲一點？在何時平面無有此特性的點？

12. 有立方體的一稜，不與其對角線相交，試證二者間最短距離，等於立方體各面上對角線的一半.

13. 一平行六面體三稜爲MA, MB, MC，一對角線爲MD，平面ABC交MD於E，求證ME等於MD的三分之一.

14. 一四面體的三雙對稜各相等，求證其各面皆銳角三角形.

15. 以一平面與一四面體相交，成一平行四邊形，試證這平面必與一雙對稜平行.

〔註〕本題爲習題十七第6題的逆定理.

16.一正八面體稜長 2 寸,求其軸長.

註　參看習題十二第 6 題及註.

17.一正八面體一稜長 4 寸,求其體積及表面積.

18.一角錐高為 5,底面各邊長為 10,17,21, 求其體積 V.

19.一角錐底面各邊長為 9,10,17,側稜長為20,且側稜在底面上射影長為12,求體積.

20.一角錐側稜長為10,其對底面傾角為 30°, 如已知這角錐體積為 100, 求其底面積.

21.一角錐高為 6,底面為菱形,如這菱形的對角線為10與20,求其體積.

22.試證平行六面體各對角線分之為六等積角錐.

23.取平行六面體內任一點,與八頂點聯成六個角錐,試證其中任意二相對角錐體積的和,等於他二相對角錐體積的和.

24.一三角錐各稜長均為10,求其體積.

25.一正三角錐高為12,底面周為30,求其體積.

26.一角錐底面是一高為 8,底為10的平行四邊形,如一側稜為 6,且與底面成 45° 的角,求其體積.

27.一角錐底面為長方形,二邊長為 a,b, 如一側稜長為 c,且對底面成傾角 30°, 求其體積.

28.二等積角錐底為 a 與 b,試求其高的比.

29.已知一多面體,試證必可作一多面體,稜數相等,頂點數等於已知者的面數,面數等於已知者的頂點數.

註　如此的二多面體,互稱爲**共軛**.如一多面體與本身共軛,即名**自軛**,如四面體即是.

30.如多面體的稜數,面數,頂點數爲E, F, V,求證

(1)　$\frac{3}{2}F \leqq E < 3(F-2)$;

(2)　$\frac{1}{2}F+2 < V < 2(F-2)$;

(3)　$3V \geqq 2E$.

并由此證明任何多面體不得不有

(一)三角形,四邊形或五角形的面;

(二)三面角,四面角或五面角的多面角.

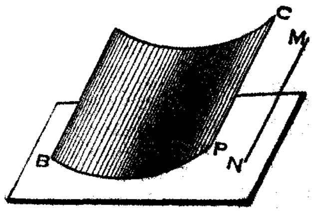
第四編

柱與錐

81.柱與錐　上編所說多面體,乃以平面爲表面的立體.本編及下編述三種重要立體,其表面非皆平面或皆非平面.這三種立體爲柱,錐,球.

本編和下編,側重度量問題,末編球面幾何,可與平面幾何比較,而爲幾何學作一結束.

82.柱面,柱　一動直線常與一定曲線相交,又與一不和這曲線共一平面的定直線平行,則所成面叫**柱面**,定曲線叫**準線**,動直線叫**母線**,母線在某位置時,叫柱面**元素**.



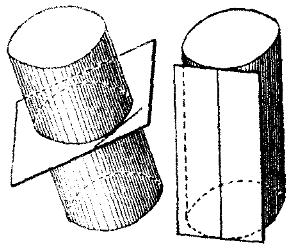
註　如準線各在一平面上,則定直線位置可任意.

以與元素相交的二平行平面,截取柱面,所成圖形叫**柱**或**柱體**.平行面間的柱面部分叫**側面**,柱面間的平行面部分叫**底面**,二底面間的**距離**,叫柱的**高**,柱面元素在柱上部分,叫柱的**元素**.

注意,**柱的元素皆等長**,因係平行面在平行線上截取的線段故也(§10系).

注意 本書所論柱體,乃就底面爲閉曲線,而任何直線不與其交於二點以上者而言.

83.柱面(或柱)與直線,平面,角柱關係

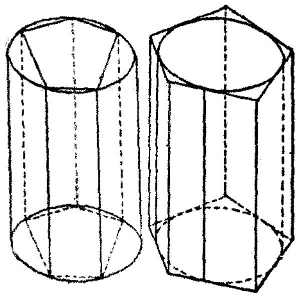


切線,直截面　　切面

(一)柱面與直線　一直線與柱面只一交點,則稱爲這柱面(或其所成柱)的**切線**.交點叫**切點**.或曰這直線在切點與柱面(或柱)相切.

(二)柱面與平面　如一平面含有柱面的一元素,但不再與柱面相交,則叫柱面(或其所成柱)的**切面**.此外凡與柱面(或柱)相交的平面,其截取所成圖形,叫**截面**;當這平面與元素垂直時,稱爲**直截面**.

註　切線即相當截面周界的一切線.



內接角柱　　外切角柱

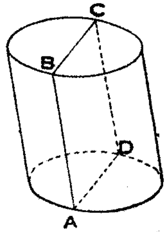
(三)柱與角柱　以一柱的元素爲側稜,其二底的內接多角形爲底,所成角柱叫這柱的**內接角柱**.以一柱的切面爲側面,二底的外切多角形爲底的角柱,叫這柱的**外切角柱**.

如一角柱內接或外切於一柱,則這柱叫做角柱的**外接柱**或**內切柱**.

注意　將內接角柱上下二底的多角形邊數無限增加,邊長同時無限縮小,則這二底趨近其外接柱的底,而內接角柱趨近於其外接柱,這理爲由角柱計算公式推求柱的相當計算公式的基本原則.

84. 含柱面元素的截面

定理　**平面含柱面元素,如不與柱相切,則其截面爲一平行四邊形.**



〔已知〕　AB 爲 AC 柱一元素,過這元素一截面爲 $ABCD$.

〔求證〕　$ABCD$ 爲平行四邊形.

〔證明〕　在平面 AC 內,過 D 點引 AB 的平行線,按定義這直線必爲 AC 柱一元素,因此這直線即平面 AC 與柱面的交線,故必爲 DC.

又 $AD \parallel BC$ (§10), 所以 $ABCD$ 是一平行四邊形.

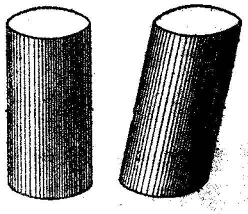
85. 重要的柱

(一)**直柱**　元素與底垂直.

(二)**斜柱**　元素與底斜交.

(三)**圓柱**　底面爲圓.

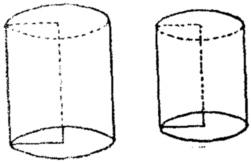
圓柱兩底中心的聯線叫軸



直柱　　斜柱

由上節定理可得一系如下:

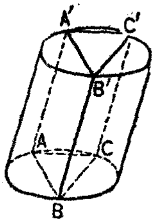
過直柱元素的截面,必為一長方形.如為直圓柱,且截面含其軸,則軸分截面成二個全等長方形;又如此的任二截面,必為全等形.



(四)**直圓柱** 又稱**旋轉柱**,因可視作以長方形一邊為軸旋轉而成的柱.(何故?)

(五)**相似旋轉柱** 以相似長方形相當邊旋轉所成的柱,叫**相似旋轉柱**.

86.柱底全等定理 **柱的兩底為全等形.**



〔已知〕 一柱二底面為 P, P'.

〔求證〕 底面 $P \cong$ 底面 P'.

〔證明〕 設 A, B 為下底面周界上二定點,C 為一任意點,AA', BB', CC' 為相當元素.作 $\triangle ABC, A'B'C'$.

按 §84, 知 AB', BC', 與 CA' 皆平行四邊形.

$\therefore AB=A'B',\ BC=B'C',\ CA=C'A'$.

因而 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. (s. s. s.)

今將上下二底面,由疊置使 $A'B'$ 與 AB 相重合,則 C 與 C' 必重合,但 C 原設為下底面周界上一任意點,故即其上所有的點,皆與上底面周界上相當點重合.

反之,依同法可證上底面周界上任意點,也必和下底面上相當點重合,所以這二底面為全等形.

系一　與一柱各元素皆相交的平行截面,必爲全等形.

系二　與一柱底面平行的截面,必爲底面的全等形.

習題十九

1. 柱體(即柱)與柱面不同的地方何在?

2. 求證圓柱的軸與其元素平行.

3. 求證圓柱的軸,必過與底平行截面的諸圓圓心.

4. 試證直圓柱上一切點,皆距軸等遠.斜圓柱如何?

5. 試證如一平面過圓柱的軸,則所成截面必爲一平行四邊形.

6. 一圓柱被其軸的平行面所截,試證其截面爲一平行四邊形.這題的逆理能否成立?何故?

7. 平面過斜圓柱的軸時,所成諸截面中,有最大面積者必爲一長方形,試加證明.

8. 求上題諸截面中有最小面積者.

9. 一直圓柱被過其軸的任一平面所截,試證截面必爲一長方形.其逆理能否成立?何故?

10. 如一圓柱與過其軸的某二平面所成截面皆長方形,則必爲直圓柱.如只有一如此的截面,則爲斜圓柱.

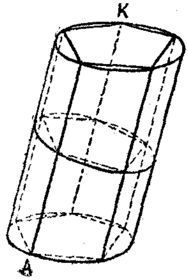
11. 如一平面過斜圓柱的軸,或與其平行,且與底面的交角,等於軸對底面的傾角,則所成截面必爲長方形.

12.以一平面過斜圓柱的軸,使所成截面有最小面積,試證凡與這截面垂直且與軸平行的平面,與這柱相截,所得截面必爲長方形.

13.求過一圓柱外一點,作其二切面.

87.視柱爲其內接角柱極限　一柱內接角柱側面數無限增多,同時各側面積無限縮小時,其側面積(即各側面面積總和)的極限,叫做**柱的側面積**,體積的極限叫做**柱的體積**;側面積與上下二底面積的和,叫**全面積**.

88.圓柱側面積定理　**圓柱的側面積,等於元素與其直截面周長的乘積.**



〔已知〕　圓柱 AK 的側面積爲 L,一直截面周長爲 P,一元素爲 E.

〔求證〕　$L=P\times E$.

〔證明〕　作 AK 柱的內接角柱,使以前者底面的內接正多角形爲二底.設這角柱側面積爲 L',底面周長爲 P'.

按定義,這內接角柱的稜與圓柱的元素相合.今由角柱側面積定理(§58),得　$L'=P'\times E$.

試將這內接角柱面數無限增加,同時使各側面面積無限縮小,則 L' 趨於極限 L,P' 趨於極限 P,故由極限運算的理,立得　$L=P\times E$.

註 在幾何中所用關於極限運算的理如下:

(一)幾個變量和,差的極限,等於其極限的和,差.

(二)幾個變量的積的極限,等於其極限的積.

這些變量中,假設沒有無限增大或縮小者,否則往往成不定式形狀.又諸理的證明,不在幾何學範圍內,故從略.

注意 在此我們如假設:**底面爲正多角形的角柱,凡與邊數無關的特性,圓柱也必備具之,**即可不需由極限運算手續,而逕行證明本定理,下節亦同此.

系一 旋轉柱側面積等於柱高與底面周長的乘積.

系二 設一旋轉柱高爲H,底面半徑爲R,則 側面積$L=2\pi RH$, 全面積$T=2\pi R(H+R)$.

89.<u>圓柱體積定理</u> **圓柱體積等於其高與底面積的乘積.**

〔已知〕 圓柱 AK 的體積爲V,高爲H,底面積爲B.

〔求證〕 $V=B\times H$.

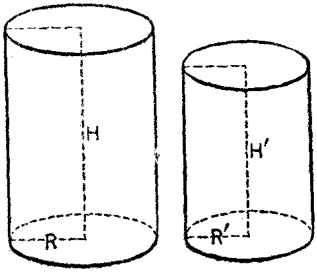
〔證明〕 作這圓柱 AK 的內接角柱如上節(看上節的圖),則可依同法,由三角柱體積定理系一(§68),推出本定理的公式,或照上述注意的理推去,也是一樣.

註 在此假設一圓內接正多角形,當邊數無限增加時,其面積趨於一極限,即定爲圓面積.

注意 本定理對於任何柱形,都可應用.

系 旋轉柱底面半徑為 R, 則 $V=\pi R^2H$.

90.相似旋轉柱度量比定理 **相似旋轉柱側(或全)面積比,等於半徑或高的平方比;體積比,等於半徑或高的立方比.**



〔已知〕 二相似旋轉柱的底面半徑為 R, R'; 高為 H, H'; 側面積為 L, L'; 全面積為 T, T'; 體積為 V, V'.

〔求證〕 (一) $L:L'=T:T'=R^2:R'^2=H^2:H'^2$.

(二) $V:V'=R^3:R'^3=H^3:H'^3$.

〔證明〕 按定義及比例理, $\dfrac{H}{H'}=\dfrac{R}{R'}=\dfrac{H+R}{H'+R'}$.

由圓柱側面積定理系二,與圓柱體積定理系,

(一) $$\frac{L}{L'}=\frac{2\pi RH}{2\pi R'H'}=\frac{R}{R'}\times\frac{H}{H'}=\frac{R^2}{R'^2}=\frac{H^2}{H'^2}.$$

$$\frac{T}{T'}=\frac{2\pi R(H+R)}{2\pi R'(H'+R')}=\frac{R}{R'}\times\frac{H+R}{H'+R'}=\frac{R^2}{R'^2}=\frac{H^2}{H'^2}.$$

(二) $$\frac{V}{V'}=\frac{\pi R^2H}{\pi R'^2H'}=\frac{R^2}{R'^2}\times\frac{H}{H'}=\frac{R^3}{R'^3}=\frac{H^3}{H'^3}.$$

習題二十

1. 已知旋轉柱的 $H=6$, $R=2$, 求其側面積,全面積.

2. 一旋轉柱的 $L=440$, $H=7$, 求 $R\left(設 \pi=\dfrac{22}{7}\right)$.

3. 如二相似旋轉柱高的比為 3:4, 求體積比.

4. 一圓柱底面半徑爲 3, 一元素 $E=4$, 而 E 對底面的傾角爲 45°, 求其體積.

5. 一旋轉柱側面積,等於半徑爲 3, 4, 5 的三個旋轉柱者的總和,如這四個柱等高,求第一柱底面半徑.

6. 設二旋轉柱等高,半徑爲 3, 4. 另一等高的柱,其體積等於前二者的和,試求這柱底面的半徑.

7. 求一直圓柱,使其側面積等於二底面積的和.

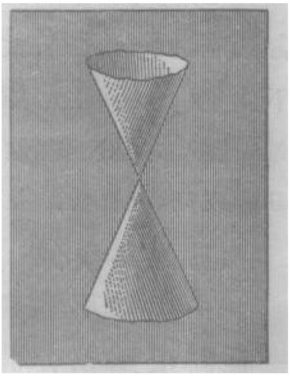
8. 如二直圓柱側面積相等,求其體積的比.

9. 如二直圓柱體積相等,求其側面積的比.

10. 以一長方形二隣邊爲軸作旋轉柱,求其體積比.

11. 作一圓筒,使能容水五升,且內部直徑與深的比爲 2:3, 求其直徑與深.

91. 錐面 一動直線常與一定曲線相交,而又經過不與這曲線共一平面內的一定點,則所成面叫**錐面**.



定曲線叫**準線**,定點叫**頂點**,動直線叫錐面的**母線**,當母線在某位置時叫**元素**.

母線爲無限長時,則構成二錐面,分居頂點上下,在上面的叫**上錐面**,在下面的叫**下錐面**.

〔註〕 柱可視爲頂點趨於無窮遠時的錐.

92.<u>錐</u> 如一平面與錐面各元素皆相交,則頂點至截面間的錐面部分和這截面所成圖形,叫**錐**或**錐體**.其錐面部分,叫**錐的側面**,截面叫做**錐的底面**,錐面頂點,和元素在錐上部分,卽**錐的頂點**和**元素**.頂點至底面距離,叫**錐的高**.

注意 本書所論錐體,其底面的限制,同§82 注意.

93.<u>錐面(或錐)與直線,平面,角錐關係</u>

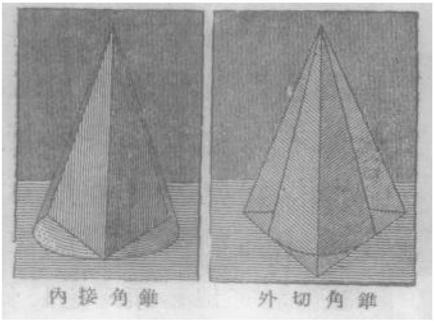
(一)錐面與直線 一直線只與錐面交於一點,且無論如何延長,也不再相交,則當這線不過頂點時,叫做**切線**,經過頂點時,叫做**假切線**.

(二)錐面與平面 過錐面頂點的一平面,如含有錐面一元素,此外不再相交,則叫做**切面**,如不含錐面任何元素,則叫**假切面**.

註 本書不討論假切線和假切面,又錐面或錐的切線(或切面),也稱爲這直線(或平面)與錐(或錐面)相切.

(三)錐與角錐

一角錐頂點與一錐的頂點相合,而其底面爲這錐底面內接多角形,則稱爲這錐的**內接角錐**.



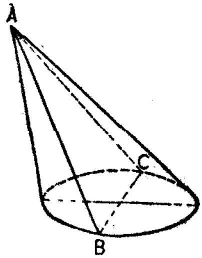
一角錐頂點與一錐頂點相合,而底面爲這錐底面的外切多角形,則叫做這錐的**外切角錐**.

注意 外切角錐各側面,必爲錐的切面.

註 如一角錐內接或外切於一錐,則這錐叫做角錐的**外接錐**或**內切錐**.

94. 過錐體頂點的截面

定理 過一錐頂點的任何截面爲三角形.



〔已知〕 過一錐頂點 A 的截面.

〔求證〕 這截面爲一三角形.

〔證明〕 設截面交底面於 B, C.

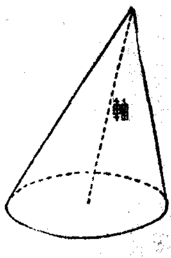
聯 A 與 B, 即依定義爲錐的一元素,又這線在題設的截面內,所以必爲錐面與截面的交線.

同理,聯 AC 即得截面與錐面的第二交線,又 BC 也是一直線(何故?),故截面爲一三角形 ABC.

95. 圓錐,旋轉錐,相似旋轉錐

圓錐即底面爲圓的錐,其頂點與底面圓心的聯線,叫做**圓錐的軸**.

圓錐的軸與底面垂直時,叫**直圓錐**,否則叫**斜圓錐**.直圓錐的元素皆等長(何故?),而稱爲其**斜高**.

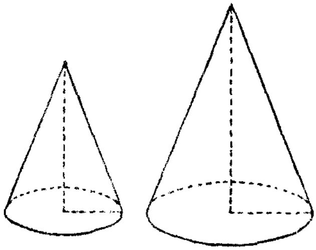


圓 錐

由上節定理可得一系如下:

過一直圓錐頂點的任何截面爲一等腰三角形.如這截面含這錐的軸則被軸分成二個全等直角三角形,且如此的任二截面必全等.

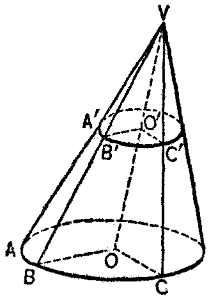
直圓錐也叫**旋轉錐**,因可視作以直角三角形一腰爲軸旋轉而成的錐也(何故?).如以二相似直角三角形相當腰爲軸旋轉,所成錐叫**相似旋轉錐**.



96.與圓錐底面平行的截面

定理　與圓錐底面平行的截面皆爲圓.

〔已知〕 圓錐 $V-ABC$, 底面爲 ABC 圓,以 O 爲圓心.一底面的平行截面爲 $A'B'C'$, 與錐的軸 VO 交於一點 O'.



〔求證〕 $A'B'C'$ 爲一圓.

〔證明〕 設 OB 爲底面定半徑, OC 爲一變動半徑,作平面 VOB 與 VOC, 與截面交於 $O'B'$ 及 $O'C'$,則因截面與底面平行,故 $OB \parallel O'B'$ (何故?).

$\therefore \triangle VOB \backsim \triangle VO'B'$, 而 $VO : VO' = OB : O'B'$.

同理 $VO : VO' = OC : O'C'$. 但 $OB = OC$, 故 $O'B' = O'C'$.

所以 $A'B'C'$ 是以 O' 爲心的一圓.

系一 **圓錐的軸,必過與底面平行的截面圓心;反之,這些圓心,必在圓錐的軸上.**

註 這系可寫成一條軌跡定理如下:

圓錐底面平行截面的中心軌跡,為圓錐的軸.

系二 **圓錐底面的平行面所成截面的面積比,等於這面與圓錐頂點距離的平方比.**

習題二一

1. 錐面與錐體(即錐)不同的地方何在?

2. 直圓錐的軸上一定點至其任一元素的距離必相等.試加證明.

3. 如自一圓錐軸上一定點,至其任一元素的距離相等,試證必為一直圓錐.

4. 試證與圓錐軸垂直的平面,如所成截面為一圓,則這錐必為直圓錐.

5. 試證與直圓錐軸斜交的平面所成截面必非圓.

6. 試合併上二題,以定直圓錐的一**充要條件**.

註 如由條件 A 可推出性質 B,則 A 為 B 的**充足條件**.如有性質 B 者,必合條件 A,則稱 A 為 B 的**必要條件**.既為充足且又必要的條件,叫**充要條件**.

注意 凡軌跡題的條件,必為充要;又凡示一條件為充要時,必將充足與必要二層,分別予以證明.

7. 試證過圓錐頂點的一直線,必可作其二切面.

8. 試證切線與過切點元素所定的平面爲切面.

9. 過圓錐的軸作一平面,求證這截面上二元素處錐面的切面,必交於與底面平行的一直線.

10. 試證直圓錐(或柱)的切面,必與含其上元素及錐軸的平面垂直.

11. 一平面過斜圓錐(或柱)的軸,而截面面積爲最小,試證這切面上元素的切面,必與截面垂直.

97. 視錐爲其內接外切角錐極限　如一錐的內接,外切角錐側面數無限增加,同時各側面面積無限縮小,則可視這錐爲這些內接,外切角錐所趨的極限情形,因有下列的定義:

(一)錐的側面積 L, 爲外切角錐側面積極限.

(二)錐的體積 V, 爲內接角錐體積極限.

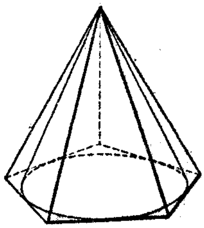
(三)錐的底面積 B, 爲內接角錐底面積極限.

(四)錐的底周長 C, 爲外切角錐底周長極限.

由這種觀點和極限運算各理(§88 註), 即能由角錐各計算公式推出圓錐的相關計算公式,推證的方法,與 §88, 89 相同.

或用 §88 注意中所提出的原則,即可避免這種極限的理論.但那條原則仍係根據極限的理得來,故這兩種證法,實在並無什麼不同之處.

98.<u>直圓錐側面積定理</u>　**直圓錐的側面積,等於斜高與底面周長乘積之半.**



〔已知〕 一直圓錐的斜高為 S,底面周長為 C,側面積為 L.

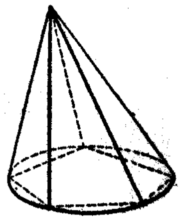
〔求證〕 $L=\frac{1}{2}C\times S.$

〔證明〕 作一外切角錐,則其斜高也為 S. 如 §88, 用極限方法,即可由正角錐側面積定理(§72)證明本定理.

系　**設一直圓錐的高為 H,斜高為 S,底面半徑為 R,側面積為 L,全面積為 T,則**

$$L=\pi RS,\quad T=\pi R(S+R).$$

99.<u>圓錐體積定理</u>　**圓錐體積,等於其高與底面積乘積的三分之一.**



〔已知〕 一圓錐的高為 H,底面積為 B,體積為 V.

〔求證〕 $V=\frac{1}{3}B\times H.$

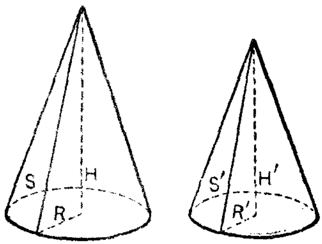
〔證明〕 作一內接角錐,則如 §89, 用極限方法,即可由三角錐體積定理系一(§68)證明本定理.

系　**設一直圓錐高為 H,底面半徑為 R,體積為 V,則** $V=\frac{1}{3}\pi R^2H.$

100. <u>相似旋轉錐的面積比和體積比</u>

定理　二相似旋轉錐的側面積或全面積比,等於其高,或斜高,或底面半徑的平方比;其體積比,等於其高,或斜高,或底面半徑的立方比.

〔已知〕 二相似旋轉錐的高為 H, H';斜高為 S', S';底面半徑為 R, R';側面積為 L, L';全面積為 T, T';體積為 V, V'.



〔求證〕 (一) $L:L'=T:T'=H^2:H'^2=S^2:S'^2=R^2:R'^2$.

(二) $V:V'=H^3:H'^3=S^3:S'^3=R^3:R'^3$.

〔證明〕 可倣相似旋轉柱面積,體積比定理(§90)的方法,由上節定理系和比例理,即可證明.

習題二二

1. 一直圓錐的底面半徑為12,高為 5,求側面積.

2. 一直角三角形二銳角皆為 45°,斜邊長10寸,求其所成旋轉錐的側面積,全面積及體積.

3. 一直圓錐的 $L=36\pi$, $R=4$, 求其高 H.

4. 求下列各直圓錐的側面積,全面積及體積.

(1) $R=6$, $H=2$;　(2) $R=5$, $S=13$.

5. 一圓錐軸長17吋,在底面上射影為 8 吋,如其體積為 80π 立方吋,求其底面半徑.

6. 已知一直圓錐的 $V=314, H=3$, 求 L 和 T.

7. 一木質直圓錐頂角(即過軸一截面所成等腰三角形的頂角)爲 $60°$, 底面半徑爲 2 寸,鑽一半徑爲一寸的孔,透過這錐,且使這孔的軸與錐的軸(即這孔爲一直圓柱)相合,問這圓錐體積減少若干立方寸?

8. 直圓錐的 H, S, C, R, L, T, V 七要件,須已知幾件,方可求其餘各件,試列舉一切情形及其關係式.

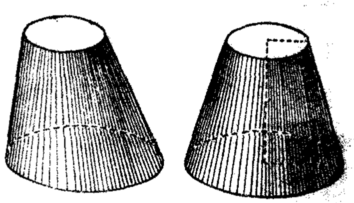
9. 一半徑爲 5 寸的半圓形紙片,捲成一直圓錐,試求其全面積和體積.

10. 二相似旋轉錐,高的比爲 (1) 1 尺 2 寸與 2 尺 4 寸,或 (2) 5 寸與 d 寸,試求其全面積比和體積比.

11. 已知一旋轉錐體積爲 343 立方寸,高爲 7 寸,如一相似旋轉錐的高爲 (1) 8 寸,或 (2) 15 寸,求其體積.

12. 一直角三角形二腰長爲 15 寸及 20 寸,如以其斜邊爲軸旋轉成一立體,求其表面面積與體積.

101. 錐臺 錐體介於底面與底面平行截面間的部分,與上下兩底面所成圖形,叫**錐臺**.直圓錐所成的,叫**直圓錐臺**,或**旋轉錐臺**,因可視作以一直角梯形的直角公共腰爲軸而旋轉時所成.



錐體的底面叫錐臺的**下底**,平行面所成截面叫**上底**,二底間錐面部分叫**側面**.其面積叫**側面積**,再加二底面積爲**全面積**,二底間距離叫**高**.

錐的元素在錐臺側面上部分,叫錐臺的**元素**,直圓錐臺的元素等長(何故?),而稱爲其**斜高**.

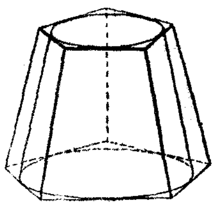
注意 一直線段,以其在一平面上的直線(不與這線段相交的)爲軸旋轉,則得一直圓錐臺的側面.

102. 內接角錐臺,外切角錐臺 以錐臺元素爲側稜,二底內接多角形爲底的角錐臺,叫**內接角錐臺**;以錐臺二底外切多角形爲底,各切面爲側面的角錐臺,叫**外切角錐臺**.與 §97 同理,可視錐臺爲其內接(或外切)角錐臺,當側面數無限增加,各側面面積無限縮小時,所趨的極限.

註 錐臺斜高等於其外切正角錐臺斜高.

103. 直圓錐臺側面積定理 **直圓錐臺的側面積,等於兩底周長半和與斜高的乘積.**

〔已知〕 一直圓錐臺二底的周長爲 C, C';半徑爲 R, R';斜高爲 S,側面積爲 L.



〔求證〕 $L=\frac{1}{2}(C+C')\times S.$

〔證明〕 證法和 §88 相倣.

作這錐臺的外切正角錐臺,則其斜高也等於 S.

設這外切正角錐臺二底周長爲 P, P', 側面積爲 L', 則按正角錐側面積定理的系 (§72), $L' = \frac{1}{2}(P+P')S$.

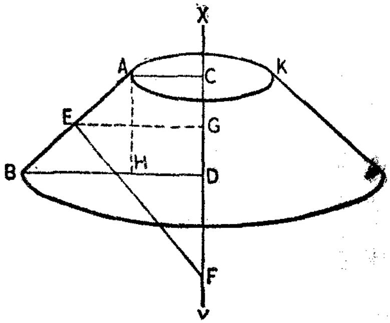
由 §88 註和 §102, 即得 $L = \frac{1}{2}(C+C') \times S$.

系一 直圓錐臺的側面積,等於與二底等距的截面周長乘以斜高的積.

因 $\frac{1}{2}(C+C') = \frac{1}{2}(2\pi R + 2\pi R') = 2\pi\left(\frac{R+R'}{2}\right)$

而末式即與二底面等距的截面周長.

系二 過直圓錐臺一元素中點作一垂線,使他端在這錐臺二底中心的聯線上,則以這線段爲半徑的圓周長,乘以錐臺的高,即爲側面積.



右圖中 C 與 D 爲直圓錐臺二底中心,則 CD 爲錐臺的高,命 E 爲元素 AB 中點, $EF \perp AB$, 而交 CD (或其延線)於一點 F. 作 $EG \perp CD$, 相交於 G, $AH \perp BD$, 垂趾爲 H,則

(1) 面積 $ABK = AB \times 2\pi EG$. (何故?)

但 $\triangle ABH \backsim \triangle EFG$, 故 $AB : EF = AH : EG$.

即 $AB \times EG = AH \times EF$, 或 $AB \times EG = CD \times EF$.

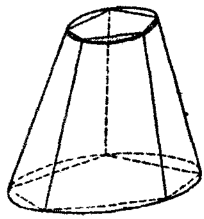
代入(1),便得 面積 $ABK = CD \times 2\pi EF$.

註 如視直圓錐臺爲由一元素以二底圓心聯線爲軸旋轉而成,則這系可改述如下:

一線段繞其所在平面內一軸所成曲面的面積,等於取過這線段中點,而止於軸上一點的垂直線段爲半徑的圓周長,乘以這線段在軸上射影的乘積.

注意如線段一端點在軸上,即得一直圓錐,如線段與軸平行,則得一直圓柱,這理依然成立,讀者試據直圓錐及直圓柱側面積定理(§§,98,88),即可以同法證明.

104. <u>錐臺體積定理</u> **錐臺體積等於二底面加二底面比例中項的和,乘以高的三分之一.**



〔已知〕 一圓錐臺的上下二底面爲 B,b;高爲 H;體積爲 V.

〔求證〕 $V=\frac{1}{3}H(B+b+\sqrt{Bb})$.

〔證明〕 作這圓錐臺的內接角錐臺,則其高也爲 H;設其上下二底面爲 B',b',體積爲 V',按角錐臺體積定理(§77) $V'=\frac{1}{3}H(B'+b'+\sqrt{B'b'})$.

再就極限的觀點與運算法則(§88 註與 §102),

即得 $V=\frac{1}{3}H(B+b+\sqrt{Bb})$.

系 **如圓錐臺的二底面半徑爲 R, R';高爲 H;體積爲 V.則** $V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+R'^2+RR')$.

因在此 $B=\pi R^2$, $b=\pi R'^2$,而 $\sqrt{Bb}=\pi RR'$ 也.

註　本定理又可改述如次:

錐臺的體積,等於下列三錐體積的和:

(一)底面等於錐臺的下底面;(二)等於其上底面;

(三)等於上下兩底面的比例中項.

且這三錐的高,皆等於錐臺的高.

習題二三

1. 一直圓錐臺的二底面半徑為 6 與 7,而(一)斜高為 3,或(二)高為12,求其體積.

2. 一圓錐臺 $R=5, R'=4, H=6$,求體積與側面積.

3. 一風車的石座,為一中空的錐臺,高為50呎;下底面的內外半徑為30呎,35呎;上底面的內外半徑為26呎,30呎;問需多少立方呎的石?

4. 一直圓錐臺高 8 寸,上下底面半徑各為 3 寸與 9 寸,試求其斜高,體積和全面積.

5. 一直圓錐臺兩底面半徑為 3 寸,5 寸,其體積與一高 6 寸,底面半徑長 4 寸的圓錐者相等,試求其高.

6. 作一等腰梯形二底中點聯線,以這線為軸作旋轉,如其二底長為 6 寸與 1 尺 2 寸,所成旋轉錐的體積為105π立方寸,試求其高.

7. 在直徑為26尺的半圓內作一弦,使與半圓心相距12尺,又這弦的中點與直徑相距 6 尺,求這弦繞直徑旋轉所成面的面積.

8. 在 §103 系二的圖中,如(1) $AB \parallel XY$, 或(2) A 點在 XY 上,求證註內所述的定理.

9. 如上題中 $EF=1$ 尺, $AB=8$ 寸, $\angle ABH=30^\circ$, 求面積 ABK.

10. 一旋轉錐高 1 尺 2 寸,底面直徑為 1 尺 6 寸,以與底面相距 9 寸的平行平面相截,求所成錐臺的側面積,全面積及體積.

11. 一直圓錐高 2 尺 7 寸,側面積為底面積 7 倍,今欲以平行平面截成一錐臺,使側面積為底面積 4 倍,求這錐臺的高.

12. 二同心圓圓心為 O, 作二半徑交內圓於 A 與 B, 外圓於 A' 與 B'. 取二弧和其在二半徑上所截線段圍成的圖形 $ABB'A'$, 構成一圓錐臺側面,如其下底面積等於 36π, 且 $OA=5$, $OA'=10$, 求 $\angle A'OB'$, 和錐臺的體積.

13. 上題中如所成錐臺斜高為 5, 底面半徑為 9 與 6, 求 OA, OA', $\angle A'OB'$ 和錐臺側面積與全面積.

復習題

1. 一圓錐高為24,底面的半徑為10,求距頂點 4 而平行於底的截面面積.

2. 一圓柱半徑長10吋,能容10𠰽,若 1 𠰽為 231 立方吋,求這柱的高至十分之一吋.

3. 如已知上題柱高為10吋,求其半徑.

4. 如以鉛皮造上二題圓筒(只有一底),需材料若干?

5. 一直徑為 6 寸的圓柱中盛水,投入一物體後,水高上昇 2 寸,求這物體體積.

6. 一上頂封閉的鋼罐,高等於底面直徑,如這罐能容一夸脫(為57.75立方吋),求其直徑.

7. 如上題罐高為直徑 n 倍,求其直徑.

8. 一帳蓬為 8 尺高的直圓錐形,如蓬布面積等於 $188\frac{4}{7}$ 方尺,問這帳蓬能遮蔽多少地面?

9. 一圓錐形的高與底面直徑均為 1 尺,內裝水深至 6 寸(頂點在下),投入一立方體,水昇 2 寸,求這體的稜.

10. 如上題圓錐形頂點在上,求投入立方體的稜.

11. 一高為 6 尺,直徑為 2 尺的圓柱形盛水,如將其軸置於水平位置時,水最深處為 6 寸,求水的體積.

12. 二直圓柱側面積比為1:2, 求其體積比.

13. 二直圓柱體積比為1:2, 求其側面積比.

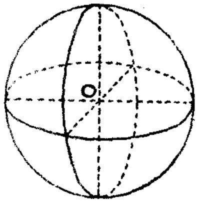
14. 一直圓錐的元素與軸成 40° 的角,又斜高為 1 尺 2 寸,求其體積,側面積與全面積.

15. 一圓柱底面半徑為 4 呎,又各元素長10呎,而與底面成 25° 的斜角,求其體積.

〔註〕 末二題須用三角函數計算,本書附有三角函數本值表和對數表.

第五編

球



105. 球　空間一閉曲面,其上任一點至空間內另一定點的距離為定長,則稱為**球面**或**球**.定點叫**球心**,球心至球面上任一點的聯線或其長,叫做**半徑**.過球心而兩端在球面上的線段或其長,叫做**直徑**.

註　嚴密說來,應稱這種閉曲面為球面,而稱其所包空間為球;但為行文便利起見,每每不加區別,讀者可以望文生義,不至混淆.

又有時球面指其面積(球面積意義見下文§120).

注意　立體幾何中所述的各種立體,有

(一)多面體　其各面皆平面,特例為角柱與角錐.

(二)柱與錐　由直線移動而成的曲面,叫直紋面,柱與錐即為其特例.平面上任取二點的聯線,皆在這面上;直紋面上二點的聯線,可在這面上,但未必定在其上.又柱與錐可以展開成平面,因此稱為可展面.

(三)球　球面上任取三點,皆不在一直線上(證見下面的§108(一)),此爲球面與柱,錐的重要不同處.

106. 球的基本性質　由定義立可推知:

(一)球的半徑皆相等,各直徑也都相等.

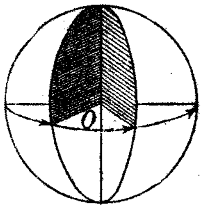
(二)直徑倍於半徑,半徑爲直徑的一半.

(三)二球的半徑相等,二球就相等,反之亦然.

(四)如一點到球心的距離,等於半徑,這點便在球面上;小於半徑時,便在球內;大於半徑時,便在球外.其逆理也成立.

註　這條性質,實是一球內部,外部的定義.

(五)任一半圓,依其直徑爲軸,旋轉一周,卽成一球,圓心卽球心.



因半圓上點皆距圓心等距,故旋轉一週所成閉形曲面上點,也必距這心等遠也.

(六)任一球只有一心.

因如有二心,則聯這二心的直徑,將有二中點矣.

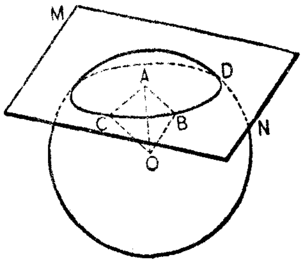
(七)二等球球心相合時,二球必完全相合;反之,二球完全相合時,球心必合.

這些性質皆甚淺顯,毋需正式證明.

註 由上述第(七)條性質,可知一球位置,可由其心決定,故一球常以其心記之.如 §105 的圖,可記為 O 球.

107. 平面與球關係 (一)相交

平面截球定理 **任一平面如與球面交於二點,則截痕必為一圓.**



〔已知〕 MN 為一平面,與 O 球交於 B 與 C 二點.

〔求證〕 這平面與 O 球的交點軌跡為一圓.

〔證明〕 自球心 O 作平面 MN 的垂線,設垂趾為 A,則 A 為定點,而與 B, C 相異,因如 A 與 B 相合,則聯 BC,必為 OB 的垂線 (§14),而 $OC>OB$ (§23 系二),與 §106(一)的理不合.同理,A 亦必不與 C 相合.

因 $OB=OC$,故 $AB=AC$ (斜線定理的逆定理,§23).即 B, C 在以 A 為心的一圓上.同理,可證 O 球與平面 MN 的任何交點,必在這圓上.

又設 D 為這圓上任一點,則 D 在平面 MN 上,且因 $AD=AB$,故 $OD=OB$ (何故?),而知 D 點也在 O 球上 (§106(四)).換句話說,D 為 O 球與平面 MN 一交點.

但自 O 所作平面 MN 的垂線為唯一(§22),故知求證的交點軌跡為圓,且只一個.

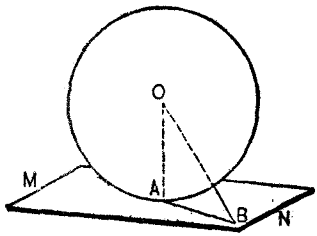
系一　**球心至截面垂線的趾,爲截圓的心.**

系二　**截面離球心較遠的,所截圓必較小;較近的,截圓較大;等遠的,截圓必等.**

因 $\overline{OA}^2+\overline{AB}^2=\overline{OB}^2$ 爲定量,故 OA 增大時,AB 減小;OA 減小時,AB 增大;OA 值不變時,AB 也不變.

系三　**過球心的平面所截的圓最大,其半徑卽等於球半徑.**

(二)相切



如自球心 O 至 MN 平面的距離 OA,等於球半徑,則由上面的證法,可知 A 必爲球與這平面的一交點.

今在平面 MN 上任取一點 B,則 $OB>OA$(何故?),因而必在 O 球外(何故?).換句話說,卽 MN 平面,與球不能有第二交點,故得

球切面定理　**如一平面與球心的距離等於球半徑,則這平面與球,有而只有一交點.**

定義　如一平面與球面有一交點而只有一交點,則叫做這球的**切面**,交點叫**切點**.

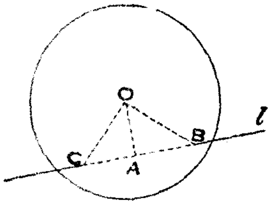
系一　**球的切面,必與過切點半徑垂直.**

系二　**過球面上任意一點,有一切面,而只有一切面.**

註 如一平面與球心的距離小於半徑,則截痕為圓;大於半徑,則與球必無交點(何故?).

108. 直線與球關係 (一)相交

如一直線 l 與 O 球球心 O 的距離 OA 小於這球半徑 r, 則可在 l 上 A 點二側,取等長 $AB=AC$, 使 $AC=\sqrt{r^2-OA^2}$, 則按畢氏定理,易知 $OB=OC=r$, 故 B 與 C 為直線與球二交點.又這直線不能與球有第三交點,因含這線的平面與球截痕為圓也.故得



直線穿球定理 **如一直線與球心距離小於半徑,則與球有二交點,而只有二交點.**

(二)相切 **球切線定理** **如一直線與球心距離等於半徑,則與球有一交點,而只有一交點.**

這理的證法,由(一)即可明瞭.

定義 **與球交於一點,而只有一交點的直線,叫球的切線,交點叫切點.**

系一 **一球切面內過切點的任意直線,都是這球的切線.**

注意 球的切線必在其切面內,因此過球面上一點有無窮切線,而構成一切面.

系二 **球的切線和過切點的半徑垂直.**

系三　**過球切線的一平面,如非切面,則與球相截的圓,必與這切線相切.**

註　如直線與球心距離大於球半徑,則必無交點.

習題二四

1. 兩球的半徑各為10寸和4寸,兩球心相距7寸,小球面上的點,是不是都在大球面內?

2. 球面上一圓的平面距球心9寸,如球半徑為15寸,求小圓的半徑.

3. 二球同心,試證半徑小者上的點,必全在大者內.

4. 求證與一球上一圓相切的直線,也和這球相切.

5. 過球內一點,作一平面使其與球的截圓為最小.

6. 球面上二點聯成的線段叫**弦**,求證一球內距球心等遠的弦必等長,距球心較遠者必較短.

7. 上題的逆定理是否必定成立?是否不待證明,即能斷定?何故?(參考 §23 中注意.)

8. 試求一球內最長的弦.

9. 過球內或外一點 C,作直線與球交於 P 與 P' 二點,求證 $CP\cdot CP'$ 的值,不因這直線位置而相異.

10. 自球外一定點,作這球的各切線,試證切點必距這定點等遠,且諸切點在一平面上,故軌跡成一圓.

註　(一)這些切線成一錐,叫做球的**外切錐**.(二)切線上定點與切點間一段的長,叫**切線長**

11.一直線與一球無交點,求過這直線作球的切面.

註　在這直線上任取一點爲頂點,作這球的外切錐,則所求切面的切點,必在這錐與球的切痕上.

109. 大圓,小圓,球面距離　過球心的平面與球相截,所得圓最大(平面截球定理系三),這種圓叫**大圓**,大圓上任意一段弧,叫**大圓弧**.

不過球心的平面與球相截的圓,叫**小圓**.

根據大圓的定義,立可得下列各特性:

(一)同球或等球上的大圓必等.

(二)同球的二大圓必相交,而互相平分.

因這二截面有一公共點即球心,故必交於一過球心的直線,而穿球於二點,即爲二圓交點,且聯線爲直徑.

(三)大圓分球面爲二等分.

定義　球面被分爲二等分的各部,叫**半球**.

(四)球面上二點,如聯線不過球心,則可定唯一的大圓;如過球心,則有無數大圓經過這二點.

因在前者,二點和球心可定唯一的平面;在後者,則可作無數的平面.

定義　球面上二點間的大圓劣弧長,稱爲這二點間的**球面距離**.

註　A 與 B 間的球面距離,常以 $\overset{\frown}{AB}$ 記之.

(五)球面上任意三點,可定唯一的圓.

因球面上三點,可定唯一的平面故也.

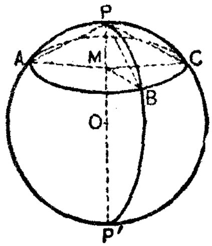
110. 極,軸　自球心至截面所作的垂直直徑,叫做所截圓的**軸**,直徑的端點,叫這圓的**極**.

據定義及 §107(一)中系一,即得下理:

(一)球面上任一圓均有一軸和二極.

(二)球面上一圓的心與球心聯線,即這圓的軸;反之,一圓的軸,必過圓心.

111. 極與圓的距離定理　**球面上一圓各點至其一極的距離皆等.**



〔已知〕　O 球上一圓 ABC 的二極為 P 與 P'.

〔求證〕　$\overset{\frown}{PA}=\overset{\frown}{PB}=\overset{\frown}{PC}$,

$\overset{\frown}{P'A}=\overset{\frown}{P'B}=\overset{\frown}{P'C}$.

〔證明〕　設 ABC 圓的心為 M,則 $MA=MB=MC$.

因 M 為 P 至平面 ABC 所作垂線趾(§110(二)),按 §23,知 $PA=PB=PC$. 又這球面上各大圓皆等 (§109(一)),故 $\overset{\frown}{PA}=\overset{\frown}{PB}=\overset{\frown}{PC}$. 同理,$\overset{\frown}{P'A}=\overset{\frown}{P'B}=\overset{\frown}{P'C}$.

定義　球面上圓至較近極的距離,叫**極距**.

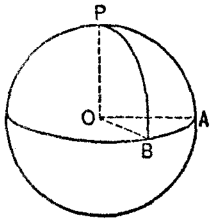
系一　**同球或等球上,等圓極距必等.**

因等圓心距球心等遠(?),故必距極等遠.故二圓中極與圓上一點聯線必等,而此等弦所對大圓弧也相等.

系二　**大圓的極距等於一象限.**

註　大圓周長的四分之一,叫**象限**.

112. 大圓極點判別定理　**球面上二點非一直徑端點,如與一定點距離皆等於象限,則這二點所定的大圓,以那定點爲極.**



〔已知〕　O 球上 A, B, P 三點,A 與 B 非一直徑二端,而 $\overset{\frown}{PA}$, $\overset{\frown}{PB}$ 皆等於象限.

〔求證〕　P 爲 A 與 B 二點所定大圓的極.

〔證明〕　因 $\angle POA=\angle POB=rt.\angle$,故卽 $OP\perp OA$ 與 OB.

故按平面垂線定理(§14),　$OP\perp$ 平面 OAB.

今 A 與 B 不爲一直徑兩端,故定唯一的大圓(§109 (四)),且 P 點爲其極(極的定義,§14).

113. 作過二已知點的大圓　**如知一球半徑,卽可作其上二已知點所定的大圓,作法如下:**

既知球半徑,卽能得其象限長,以已知點 A, B 爲心,象限所對弦長爲半徑,在球面上作二弧,相交於 P,再取 P 爲心,仍用同一半徑作圓,卽合於所求.

習題二五

1. 將地球看作球體,地面上的經線是何種的圓?赤道呢?其他的緯線呢?各緯線的極點是什麼?

2. 已知一球半徑爲13寸,其上一小圓極距離等於60°,求(一)這圓所在平面與球心的距離,(二)小圓半徑.

3. 視地面爲半徑長4000哩的球,求緯度$23\frac{1}{2}^\circ N$處與北極的距離.

4. 如一球球心與其面上一小圓所在平面的距離爲9寸,又球半徑爲15寸,求小圓面積和極距.

5. 球面上有大圓弧一段,另一大圓過這弧的中點,且垂直於這弧所在的平面,求證大圓周上任一點到此弧兩端等距離.

6. 求球面上與其二已知點等遠點的軌跡.

7. 求證球面上小圓,被過其極的任一大圓平分.

8. 試證平分球面上小圓的大圓弧,必定經過這小圓的極.

9. 自球面上小圓周的一任意點,至其極的大圓弧,如等於大圓象限的$\frac{1}{3}$,則這小圓半徑,必等於球半徑的$\frac{1}{2}$,試加證明.

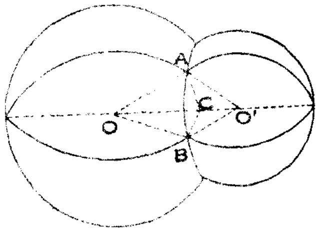
10. 如球面上小圓的半徑爲球半徑的$\frac{1}{2}$,試證其極距等於象限的$\frac{1}{3}$.

註　本題即上題的逆定理.

11. 在過球面上A, B二點的大圓劣弧上,任取一點C,作二小圓過C點,而各以A, B爲極,試證這二小圓所在平面的交線,與球面相切於C點.

114. 二球交圓定理 **如二球相交於二點,則其交點的軌跡必爲一圓.**

〔已知〕 O 與 O' 二球,交於 A 與 B 二點.



〔求證〕 這二球的交點軌跡爲一圓.

〔證明〕 自 A 作二球聯心線 OO' 的垂線,相交於 C,聯 BC,則由 $\triangle OAO' \cong \triangle OBO'(s.s.s.)$,故 $\angle AOC = \angle BOC$,而 $\triangle AOC \cong \triangle BOC(s.a.s.)$,所以 $\angle BCO = \angle ACO = rt.\angle$.

故平面 ABC 與 OO' 垂直(平面垂線定理,§14).

按平面截球定理(§107(一)),知這平面與 O, O' 二球的截痕,均爲這平面上的一圓,同以 C 爲心,又均過 A, B 二點,故這二圓必相合,而爲二球的交點軌跡.

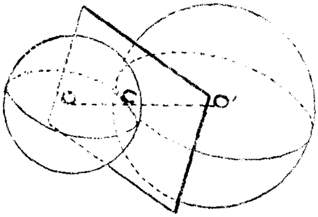
系 **二球交圓所在平面,必與球心聯線垂直,且圓心也必在聯心線上.**

115. 二球的關係 有相交,相切,相離三種.

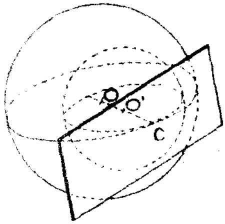
(一)如上節所述,知球心距離小於二半徑和而大於其差時,則相交於一圓.

(二)如球心距離大於二半徑和,則必無交點,因否則取這交點與二心所成三角形,將不復有二邊和大於第三邊的性質.此種情形,可稱爲二球相離.

(三)如球心距離爲二半徑和或差,則與(二)同理,可知交點必在聯心線上,而爲二球的唯一交點,這時叫做**相**



外切

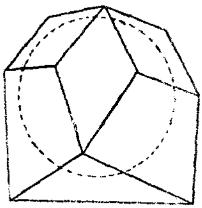


內切

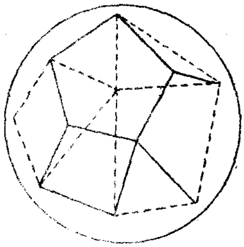
切,前者稱**外切**,後者稱**內切**.過切點所作一球的切面,也必切於他球,而稱爲**公切面**.

註 二球不相切時,也可有**公切面**,但不能切二球於同一的切點.

116. <u>球與多面體</u> 多面體各面均與一球相切時,叫這球的**外切多面體**,這球叫**內切球**;如各頂點均在一球面上,則多面體稱爲球的**內接多面體**,而球爲**外接球**.

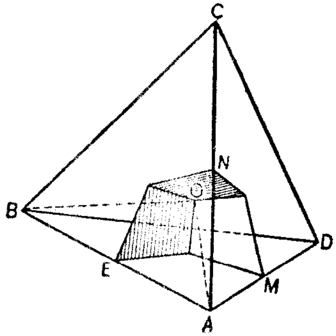


外切多面體,內切球



內接多面體,外接球

117. <u>外接球定理</u>　**過四面體的四頂點,有一球,且僅有一球.**



〔已知〕 一個四面體 $ABCD$.

〔求證〕 可作這四面體的唯一外接球.

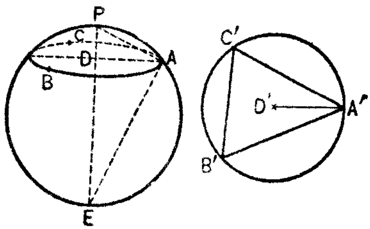
〔證明〕 設 AB 的中點為 E, AD 的中點為 M, AC 的中點為 N. 過這些中點,作 AB, AC, AD 的垂面,則按不平行面判別定理系二(§25(二)),知這三個垂面必交於一點,命這交點為 O, 則按二點聯線中垂面軌跡 (§18),知 $OA=OB$.同理, $OA=OC$, $OA=OD$.

故 A, B, C, D 距 O 等遠,而在以 O 為心的球上.

又如另有一點 O',距 A, B, C, D 皆等遠,則這點必在上述的各中垂面上,因而與 O 相合,故所定的球為唯一.

系　空間內不共在同一平面上的四點,可定一球,而只能定一球.

118. <u>求實球直徑</u>

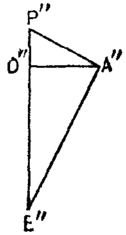


〔已知〕 一實球.

〔求作〕 這球直徑.

〔作法〕 在球上取任意一點 P 為心,以圓規量取適宜半徑,作一圓 ABC.

用圓規量 AB, BC, CA 三弦,以之為邊而作一 $\triangle A'B'C'$, 幷求這三角形的外接圓半徑 $D'A'$ (看上頁的右圖).

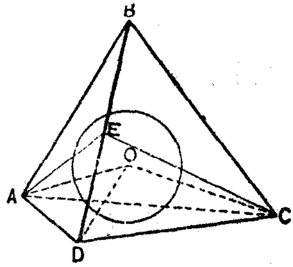


作一 $rt.\triangle P''D''A''$,使斜邊 $P''A''$ 等於 PA, 一腰 $D''A''$ 等於 $D'A'$. 再由 A'' 作 $A''E''$ 與 $P''A''$ 垂直,而交 $P''D''$ 的延長線於 E''.

則 $P''E''$ 為所求的直徑.

〔證明〕 證 $\triangle PAE \cong \triangle P'A'E'$ 卽明.

119. <u>內切球定理</u>　**任一四面體,有一內切球,而只有一內切球.**



〔已知〕 四面體 $ABCD$.

〔求證〕 可作這四面體的唯一內切球.

〔證明〕 作 AD, DC, CA 三個二面角的分角面,則每二分角面有一公共點(卽 A, D, C 等),故必兩兩交於直線.

各分角面與稜相近的部分,必在這四面體內,故過某稜的分角面,必與其對稜相交,設過 AC 稜的分角面,交 BD 稜於一點 E, 則他二分角面與這面的交線,必在 $\triangle ACE$ 內,故必交於一點 O, 這點卽三分角面兩兩相交的三直線交點.且按 §36, 卽知 O 距四面體各面等遠.

以 O 為心,這等距離為半徑作球,卽為所求.(何故?)

又凡與四面體各面等遠的點,必在各分角面上,而為其交點,但這交點為唯一,故只有一內切球.

習題二六

1. 設二球相交,則其交圓所在平面上任一點,至二球的切線長(習題二四第10題註)必相等,試加證明.

2. 設二球相交,試證上題的逆定理.

3. 試合上二題成一軌跡定理.

4. 設二球有一交點,在其聯心線上,試證這二球必相切,并就這點對二心的位置,斷其為內切或外切.

5. 二球相交,半徑長為 r 與 r',二心距離為 d,試求交圓半徑和面積.

6. 四面體六稜的中垂面,是否必交於一點?

7. 四面體六個二面角的分角面,是否交於一點?

8. 一直角三角柱有一內切球,試求柱高與底面半徑的關係.

9. 如一斜三角柱有內切球,則柱高與直截面有何關係?

10. 將一四面體任意三面向一方延長,求證有一球與第四面及這三延長面相切,且只有一球.

註 這球叫四面體的**旁切球**.四面體有幾旁切球?

11. 求證球外切多面體體積為其面積乘半徑的三分之一.

12. $n>4$ 時,n 面體是否必有外接球和內切球?

13.求證正多面體必有一外接球和一內切球,且這二球同心.

14.試證長方體必有一外接球,這體有無內切球?

15.設一四面體六稜同爲一球的切線,試證其三組對稜的和必相等.

120. <u>視球爲其內接外切多面體極限</u>　欲究球的相關度量,如面積,體積等,須取極限觀點.

(一)以平行面截一球得許多平行的圓,以這圓的二極和圓上各點爲頂點,作內接多面體.當同圓上各點無窮接近,而點數無限增多時,則這多面體最上最下成二直圓錐,中間成若干直圓錐臺,故全部爲一旋轉體.如§§97, 102, 可知這多面體表面面積的極限,即這旋轉體的表面積.

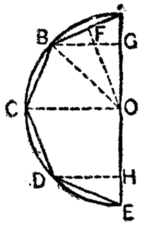
再設各平行截面無窮接近,而面數無限增多,則上述旋轉體表面積趨於一極限,即定爲這**球的表面積,簡稱爲球面積**.

(二)作一球的外切多面體,設各面無限縮小而面數無限增多,則這外切多面體體積,趨於一極限,定爲這**球的體積**.又其面積極限,即球面積.

註　求球面積,體積時所需極限算法,仍同§88註.

注意 球爲這二種多面體所共趨的極限,原可任取一種說法,但爲後證理便利計,需幷用之.

121. 球面積定理 **球面積等於其大圓面積的四倍.**



〔已知〕 O球半徑爲 r,面積爲 S.

〔求證〕 $S=4\pi r^2$.

〔證明〕 視球爲半圓 ACE 依直徑 $AE=2r$ 旋轉一周而成,半圓心即球心O.

將這半圓周等分於 B, C, D,即使 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\cdots\cdots=\overset{\frown}{DE}$. 當 $\overset{\frown}{ACE}$繞 AE 旋轉一周後, $AB, BC, \cdots\cdots, DE$ 各構成旋轉錐或錐臺.

因$AB, BC, \cdots\cdots DE$諸弦也等長(何故?),故

$\triangle AOB\equiv\triangle BOC\equiv\cdots\cdots\equiv\triangle DOE$. (s. s. s.)

而各弦中點與 O 的聯線皆等長,命這長爲 d.

按§103 的系二及其註,即得

AB, BC, CD, DE所成旋轉面積各爲

$AG\cdot 2\pi d, GO\cdot 2\pi d, OH\cdot 2\pi d, HE\cdot 2\pi d$.

故折線 $ABCDE$ 所成旋轉面積爲

$S'=(AG+GO+OH+HE)\cdot 2\pi d=2r\cdot 2\pi d$.

設半圓周等分數漸增,各等弦長漸減,則按§120(一),知 S'的極限即爲球面積 S. 在這時, d 的極限爲 r,故

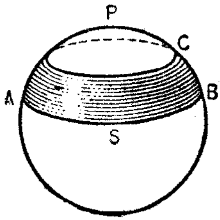
$S=2r\cdot 2\pi r=4\pi r^2$.

系一　**球面積的比,等於半徑的平方比.**

系二　**球面積等於其直徑與其上大圓周相乘的積.**

因　$S=4\pi r^2=2r.2\pi r$ 也.

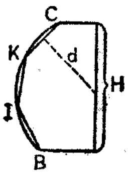
122. 鼓形　以二平行平面截一球,其所截取部分叫**鼓形**,截面與球相交的圓叫**鼓形底面**,二底面間距離叫**鼓形的高**,鼓形的球面部分叫**鼓壁.**



如右圖 S 球的 ABC 部分即爲一鼓形,有時稱一平面及所截取球面部分叫**單底鼓形,**而稱上述以二平面截取者爲**雙底鼓形.**

與上節同一證法,即明

鼓壁面積定理　**鼓壁的面積 S,等於其高與一大圓周的乘積.**



設鼓形由 BC 弧依其一直徑旋轉一週而成.今等分 $\overset{\frown}{BC}$ 於 I, K,則同法得

面積 $BIKC=H\cdot 2\pi d.$

式內 d 爲弧的圓心至各等弦的距離.當等弧的長無限縮短時,d 的極限爲半徑 r,故　$S=H\cdot 2\pi r.$

習題二七

計算下列各題時,可取 $\pi=3.1416$ 或 $\frac{22}{7}$.

1. 求下列各球的面積,已知其半徑爲:

(1) 10 市寸,　(2) 4 公尺,　(3) 2 呎 4 吋.

2. 求下列各球的半徑,已知其面積爲:

(1) 314.16 平方尺,　(2) 628.32 平方吋,

(3) 1 平方丈　(4) 10π 平方里.

3. 一球半徑爲 r,求其上高爲 H 的鼓壁面積:

(1) $r=2$ 市尺,　$H=1$ 市尺,

(2) $r=4$ 公尺,　$H=3$ 公尺,

(3) $r=1$ 呎,　$H=0.001$ 呎.

4. 一半球形屋頂,如半徑爲 4 丈,求其面積.

5. 設地面完全爲一球,半徑爲 4000 哩,求其面積.

6. 北溫帶的高與地球半徑的比爲 13 : 25, 求北溫帶面積.

7. 求赤道與北緯 30° 間一帶的地面面積.

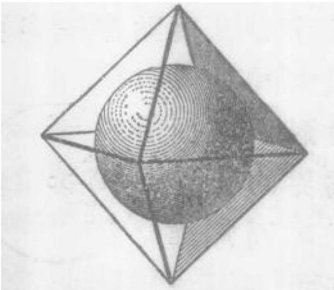
8. 將一球分爲十個側面積相等的鼓形,求各形的高所成比.

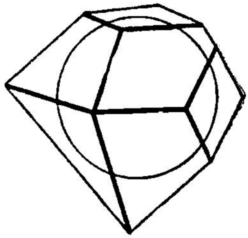
9. 一球的面積爲 110 方寸,其上一鼓壁側面積爲 11 方寸,求其高.

10. 設一球面積爲 S, 半徑爲 R, 其上大圓周爲 C, 則任知其一,均可求其二,試列舉各關係式.

11. 一球半徑爲 R, 其上一單底鼓形高爲 H, 求其全面積.

123. <u>球體積定理</u>　**球體積等於球面積與半徑乘積的三分之一.**





〔已知〕　球面積是 S, 半徑是 r, 體積是 V.

〔求證〕　$V=\frac{1}{3}rS$.

〔證明〕　任作球的外切多面體,自外切多面體各個頂點到球心連成直線,將多面體分成許多角錐體,每一角錐體的高,都是球半徑,所以每一角錐體的體積是底面積乘半徑的三分之一(§76 系一).即外切多面體的體積 V',是表面積 S' 乘球半徑的三分之一,或 $V'=\frac{1}{3}rS'$.(1)

若將外切多面體的面無限增多,而每一面的面積無限縮小,則多面體體積的極限爲球體積.但同時面積極限即球面積(§120(二)).換句話說,即 V' 的極限爲 V, S' 的極限爲 S. 故由(1)得　$V=\frac{1}{3}rS$.

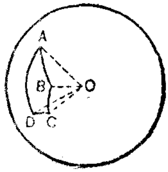
系一　**如 V 表球體積, r 表半徑, d 表直徑,**

則　$$V=\frac{4}{3}\pi r^3,$$

及　$$V=\frac{1}{6}\pi d^3.$$

系二 兩球體積的比,等於二半徑的立方比,或二直徑的立方比.

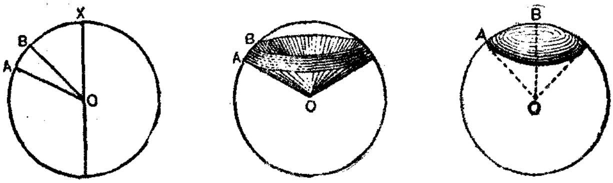
124. 球面角錐 以球心爲頂點作一多面角,則在球面上截成一以大圓弧爲邊的多角形,叫**球面多角形**.以多面角各面與球面多角形爲界的圖形,叫**球面角錐**.球心叫做這球面角錐的**頂點**,球面多角形叫**底面**.



用上節的方法,即可得球面角錐體積公式如下:

一球半徑爲 r,如其球面角錐體積爲 V,底面積爲 B,則 $V=\frac{1}{3}rB.$

125. 漏斗形 一圓內扇形,以這圓一直徑(不在扇形內者)爲軸旋轉一周,所成立體,叫**漏斗形**.其弧旋轉所成的鼓壁,叫做漏斗形的**底**.



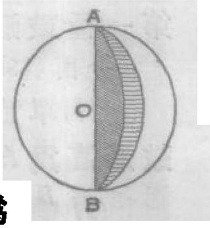
如扇形繞其一邊旋轉,則所成漏斗形的底,爲單底鼓壁,這漏斗形叫**球面錐**.故球面錐即一直圓錐側面置於一單底鼓形上而成.

用§124法,可得漏斗形(或球面錐)體積公式如下:

如一球半徑爲r,其上一漏斗形或球面錐底面爲B,體積爲V,鼓壁高爲H,則

$$V=\frac{1}{3}rB=\frac{2}{3}\pi r^2H.$$

126. <u>梳形</u> **以球直徑爲直徑的二半圓及其在球面上二大半圓弧間球面部分叫梳形.**

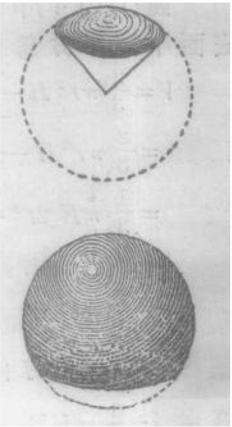


如二半圓所在平面的二面角爲1°,則二弧間球面部分面積爲球面的$\frac{1}{360}$,這梳形體積爲球體積的$\frac{1}{360}$,理甚明顯.

由上所述,即得梳形體積公式如下:

球半徑爲r,其上一梳形,角度爲A,體積爲V,則 $V=\frac{A}{360}\times\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{A}{270}\pi R^3.$

127. <u>鼓形體積</u> (一)欲明體積求法,須先明鼓形種類:



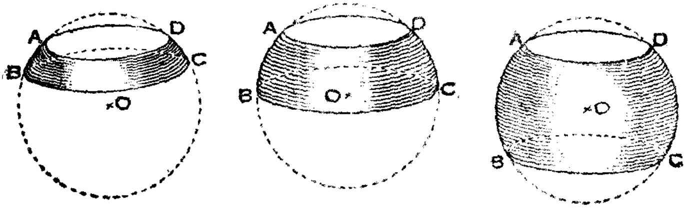
(甲)單底鼓形 分二種

(1)小於半球的單底鼓形,可以視爲從一球面錐減去一直圓錐的差.

(2)大於半球的單底鼓形,可以視爲一球與上述第一種的差.

(乙)雙底鼓形

不論球心在鼓形外(下左圖),鼓形內(下右圖),或一底面上(下中圖),均可視為自一球減去二個單底鼓形的差



(二)體積公式　由上所述,可知只須求(甲)中第一種鼓形體積公式即可推求其他.

今由§§99, 123−125各公式求出結果如次:

(I)單底鼓形　一球半徑為r,其上一單底鼓形高為H,體積為V,則　$V=\frac{1}{3}\pi H^2(3r-H)$.

(II)雙底鼓形　一雙底鼓形二底半徑為R_1, R_2,高為H,體積為V,則　$V=\frac{1}{6}\pi H(3R_1^2+3R_2^2+H^2)$.

證(1)因(甲)中(1)所述直圓錐的高為$h=r-H$,底面半徑平方為$R^2=r^2-(r-H)^2$(按畢氏定理),故得

$$V=\frac{2}{3}\pi r^2 H-\frac{1}{3}h.\pi R^2$$

$$=\frac{2}{3}\pi r^2 H-\frac{1}{3}(r-H)\pi\{r^2-(r-H)^2\}$$

$$=\frac{1}{3}\pi H\{2r^2-(r-H)(2r-H)\}=\frac{1}{3}\pi H^2(3r-H).$$

(2)設h為(甲)(2)所述第一種鼓形的高,則$H=2r-h$.

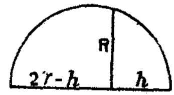
$$V=\frac{4}{3}\pi r^3-\frac{1}{3}\pi h^2(3r-h)$$

$$=\frac{2}{3}\pi r^2(H+2r-H)-\frac{1}{3}\pi(2r-H)^2\{3r-(2r-H)\}$$

$$=\frac{1}{3}\pi H\{2r^2-(r-H)(2r-H)\}=\frac{1}{3}\pi H^2(3r-H).$$

(3)在雙底鼓形時,設減去二單底者的高,爲 h_1, h_2, 則

$2r=H+h_1+h_2$, $R_1^2=h_1(2r-h_1)=h_1(H+h_2)$,



$R_2^2=h_2(2r-h_2)=h_2(H+h_1)$,

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3-\frac{1}{3}\pi h_1^2(3r-h_1)-\frac{1}{3}\pi h_2^2(3r-h_2)$$

$$=\frac{1}{6}\pi(H+h_1+h_2)^3-\frac{1}{3}\pi h_1^2\left(\frac{3}{2}H+\frac{1}{2}h_1+\frac{3}{2}h_2\right)$$
$$-\frac{1}{3}\pi h_2^2\left(\frac{3}{2}H+\frac{3}{2}h_1+\frac{1}{2}h_2\right)$$

$$=\frac{1}{6}\pi H[H^2+3H(h_1+h_2)+3(h_1+h_2)^2-3h_1^2-3h_2^2]$$

$$=\frac{1}{6}\pi H[H^2+3H(h_1+h_2)+6h_1h_2]$$

$$=\frac{1}{6}\pi H[H^2+3h_1(H+h_2)+3h_2(H+h_1)]$$

$$=\frac{1}{6}\pi H(3R_1^2+3R_2^2+H^2).$$

註 我們可視(*I*)中公式爲(*II*)者特例,因設 $R_1=0$, $R_2=R$, 則 $V=\frac{1}{6}\pi H(3R^2+H^2)$,

但 $R^2=H(2r-H)$,

$$\therefore V=\frac{1}{6}\pi H[3H(2r-H)+H^2]=\frac{1}{3}\pi H^2(3r-H).$$

習題二八

1. 已知球半徑爲(1) 5 寸,(2) 3 寸,求球體積.

2. 已知二同心球的半徑各爲 r_1 同 r_2,求二球間所含球殼的體積.

3. 已知球半徑是 12 寸,球心在鼓形內,鼓形二底面的半徑是 6 寸同 7 寸,求鼓形體積同鼓壁面積.

4. 如上題的球心在鼓形外,求鼓形體積,鼓壁面積.

5. 已知梳形角度爲 60°, 球半徑是 8 寸,求梳形的體積.

6. 視一球面錐爲一直圓錐與一單底鼓形合成,其直圓錐的高爲 h, 體積爲 V, 試求這球面錐的體積

7. 已知鼓壁面積爲 96π 方寸,高爲 4 寸,求以這鼓壁爲底的漏斗形體積.

8. 設已知單底鼓形的高爲 2, 底面積爲 20π, 試求其體積.

9. 設球半徑是 18 寸,一梳形的角度是 40°, 其體積等於一單底鼓形體積,試求單底鼓形的高.

10. 設球半徑是 20 寸,用一平面,將球截成二單底鼓形,如較大鼓形的體積,是球體積與他一鼓形體積的比例中項,試求自這平面到球心的距離.

11. 已知一球面積爲 S, 求其體積.

12. 求證球體積與其外切柱(球與上下二底也相切)體積的比爲 2:3.

13. 試求球面積與其外切柱側面積的比.

注意 初中算術或經驗幾何中,用實驗的方法,求出球面積和體積,卽係根據上面二題的結果.

14. 一直圓錐的高,等於一球的直徑,其底面卽爲這球的大圓,求二者的體積比.

15.一球與一直圓錐內部及底面相切,且這圓錐的高,2倍於球的直徑,試證其全面積與體積均二倍於球的面積和體積.

16.如一球體積數值,爲面積值的一半,求其半徑.

17.已知二球面積比爲 $a:b$, 求其體積的比.

複 習 題

1.過四面體各面的外心(即外接圓心),作各面的垂線,試證這些垂線必共過一點.

2.如一四面體各組對稜的和皆相等,試證必可作一球,與這六稜皆相切.

註　即習題二六第15題的逆定理.

3.如正四面體稜長爲 E, 求其內切,外接二球半徑.

4.一球面積,等於半徑爲 3 與 4 的二球面積和,求其半徑.又如這球體積爲後二球者的和,其半徑如何?

5.一球殼外半徑爲13,厚爲 8, 求其體積.

6.一球體積等於一外半徑爲 3, 內部面積爲 π 的球殼體積,求這球的半徑.

7.自一半圓上 A, D 二點,作其直徑的垂線 AB 與 DC, 而 B, C 在這直徑上,且 $AB=6, BC=2, DC=4$, 以 BC 爲軸旋轉一週,求所成鼓形的體積.

8.求與每邊長爲 a 的立方體等體積的球半徑.

9.求與每邊長爲 a 的立方體等面積的球半徑.

10.一球體積等於一高為h,底面半徑為r的旋轉錐,求其半徑.又半徑如何,則球面積等於錐的全面積?

11.已知鼓壁面積為A,高為h,求所在球的半徑.

12.一觀察者與一球球心距離,等於其半徑的三倍,問這人可望見的球面部份為全球面的幾分之幾?

13.自地面上高1000哩處,能看見的地面有多大?

註 假設地面為完全球形,半徑長4000哩.

14.一人能見6呎半徑的球面的$\frac{5}{12}$,問距球心多遠?

15.一球半徑為R,其上一小圓平面積為A,求這圓所在平面與球心的距離.

16.如熱帶高為地球半徑的$\frac{4}{5}$,求其面積.

17.自一立方呎的鉛,能造直徑為$\frac{1}{4}$吋的彈子多少?

18.直徑為10吋的球內穿一6吋直徑的圓孔,且使這孔(一圓柱形)的軸過球心,求所餘立體的體積.

19.一球半徑為12吋,其半徑的中垂面與球所成小圓的圓周長幾吋?

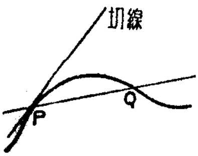
20.直圓錐底面為球上一圓,求證這圓錐與球另一交痕也是圓.

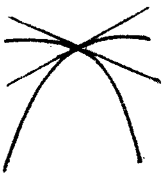
第六編

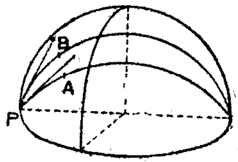
球面幾何學

128. 曲線交角,球面角　平面上或空間內一曲線 C,上有一定點 P 和一鄰近點 Q,作一直線過 P 與 Q,則當 Q 點沿曲線移動趨近於 P 時,直線 PQ 所趨的極限位置,叫做曲線 C 在 P 點的**切線**,P 點叫做**切點**.

註　平面幾何學內所說圓的切線定義,可以包含在這廣義的定義內.因一直線與圓至多只有二交點,故當一點趨近於他點時,所得切線,與圓只一交點.但在他種曲線,直線可交於二點以上,故在切線位置,除切點外,尚可有他交點.故圓的切線定義,不能應用於曲線.





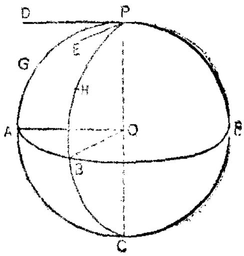


二曲線相交,在交點作各曲線的切線,則二切線所成的角,叫做**二曲線的交角**.球面上二大圓弧的交角,叫**球面角**,其交點叫這角的**頂點**.

註　記球面角時,頂點居中,如上右圖爲 APB 角.

注意 此後凡球面上角度,皆指球面角而言.

129. 球面角定理 **一球面角,與其二邊(必要時須延長)在以頂點為極的大圓上所截弧,如同以一單位度之,則二者的值相等.**



〔已知〕 球面角 GPH,以 P 為極的大圓弧,被這角二邊(或其延長弧)交於 A 與 B.

〔求證〕 球面角 GPH 的度數,與大圓弧 $\overset{\frown}{AB}$ 度數相等.

〔證明〕 作 $\overset{\frown}{PA}$, $\overset{\frown}{PB}$ 在 P 點的切線,則因 PD 與 OA 同在一平面上,又同垂直於半徑 OP (何故?), 所以 $PD \parallel OA$. 同理, $PE \parallel OB$.

故據 §13, 得 $\angle DPE = \angle AOB$.

但 $\overset{\frown}{AB}$ 與 $\angle AOB$ 度數相同,因與 $\angle DPE$ 者也同.

據定義(§128)卽明球面角 GPH 與 $\overset{\frown}{AB}$ 同度數.

註 一角與一圓弧度數相同時,可稱**這角被該弧所度.**本定理卽可謂為球面角 GPH 被弧 $\overset{\frown}{AB}$ 所度.

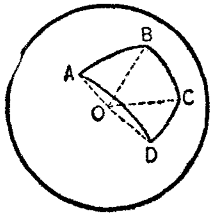
系一 **二大圓弧的交角,等於這二大圓弧所在二平面的二面角.**

因上圖中 $\angle DPE$ 卽二面角 $A-OP-E$ 的平面角.

系二 **過大圓極點的任一大圓,都與這大圓垂直.**

因這二大圓所在平面互相垂直的緣故.

130. 球面多角形　球面上n個大圓劣弧圍成的閉形,叫做**球面n角形**;各劣弧叫做**邊**;二邊所夾這多角形內部叫**內角**;各邊交點叫**頂點**;多角形內聯不相隣二頂點的大圓弧叫**對角線**.



右圖A,B,C,D爲一球面四邊形頂點,大圓劣弧$\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$等爲邊,球面角DAB, ABC等爲內角.

131. 球面多角形與多面角的相應情形　**球面多角形各邊所在平面成一多面角,以球心爲頂點,這多面角叫做與球面多角形相當.**

上圖中球面多角形的相當多面角爲$O-ABCD$.

註　如球面多角形相當於凸多面角,則稱爲**凸球面多角形**.本書所論,除有特別聲明者外,皆指這一種.

據§41的注意,可知凸多面角的二面角皆小於平角,又就球面角定理系一,兩大圓弧交角,等於相當二面角,故凸球面多角形各內角皆應小於180°.

球面多角形的邊,以相當多面角的面角度之,其各內角卽等於後者的各二面角.因此得一

法則　**凡多面角的任一定理,均可推出一相當的關於球面多角形定理.**

132. 對稱球面多角形　如二球面多角形的相當多面角爲對稱,則這二多角形也叫**對稱球面多角形**.二個對稱多角形相當邊角,必對應相等,但排列的順序不同,故不能如全等球面多角形的可以互相疊合.

習題二九

1. 球面上二小圓弧交於 A 點,求證這二弧的交角,等於在 A 點二切線與球心所定二平面的二面角.

2. 如二大圓互相垂直,求證其一必過其他的極.

註　本題卽 §129 定理系二的逆定理.

3. 如一大圓弧與一小圓弧互相垂直,則前者必過後者的極.試加證明.

4. 上題中的小圓弧是否必過大圓弧的極?

試從下列各題 (5−12題) 直接改成(不必證)關於球面多角形的定理(可參看 §§43−48 及習題十內各題):

5. 如二個三面角的面角,對應相等,則這二三面角必全等或對稱.

6. 如一三面角的二個面角相等,則所對的各二面角也必相等.

7. 上題的逆定理.

8. 如一三面角的三個面角都是直角,則其三個二面角也必皆直角.

9. 上題的逆定理.

10. 一三面角任意二個面角的和,必大於第三面角.

11. 一多面角各面角的總和,必小於四直角.

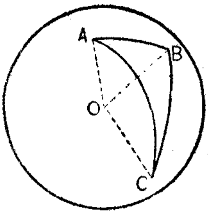
12. 如一個四面角的相對面角,兩兩相等,則其所對的二面角,也必兩兩相等.

133. 球面三角形 球面多角形邊數爲三的,叫**球面三角形**.球面三角形有**等腰**,**等邊**各種,其定義與平面幾何學者相同.

球面三角形性質,有許多與平面者相同處,也有很重要的區別,分論如以後各節.

註 區別的主因,見 §157.

134. 球面三角形二邊和差定理 **球面三角形兩邊的和必大於第三邊,差必小於第三邊.**



〔已知〕 設 O 球面上一球面三角形爲 ABC.

〔求證〕 (一) $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}>\overset{\frown}{CA}$,

(二) $\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{BC}<\overset{\frown}{CA}$.

〔證明〕 作半徑 OA, OB, OC.

按三面角各面角關係 (§45), $\angle AOB+\angle BOC>\angle COA$.

但圓心角爲其截弧所度,故 $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}>\overset{\frown}{CA}$.

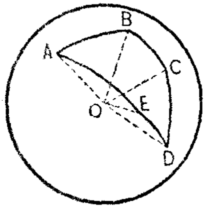
同理 $\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CA}>\overset{\frown}{AB}$,故 $\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{BC}<\overset{\frown}{CA}$.

注意 按定義,各邊的大圓弧,皆指劣弧言.

135. 球面多角形諸邊關係定理　**球面多角形諸邊的和,小於這球面上大圓的周.**

〔已知〕 球面多角形 $ABCDE$.

〔求證〕 $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\cdots\cdots+\overset{\frown}{EA}$
$<360°$.



〔證明〕 作相當的多面角,再按 §46 定理即明.

136. 球面三角形全等與對稱的條件

照上二節證法,即可由§§44,48,49推得下面的

定理　同球或等球上二球面三角形,如

(一)其一的兩角和公共邊,與其他的二角和公共邊對應相等;

(二)其一的兩邊和夾角,與其他的二邊和夾角對應相等;

(三)其一的三邊,對應等於其他的三邊;

則當二者相等部分排列順序相同時,二形全等;排列順序相反時,二形對稱.

系　**二個對稱等腰三角形必全等.**

注意　球面角和大圓弧,常應用全等或對稱三角形去證明.

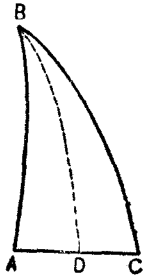
註　本定理各情形,可分記為 $a.s.a.$, $s.a.s.$, $s.s.s.$.

137. 對頂形　兩球面多角形的兩相當多面角爲對頂,則這兩多角形稱爲**對頂形.**

照以上各節證法,即可由 §50 的定理,推出下面的

定理　**兩對頂球面多角形必對稱.**

138. 等腰三角形定理　**球面三角形的兩邊相等時,對這兩邊的角,也必相等.**



〔已知〕 球面三角形 ABC 中

$$\widehat{BA}=\widehat{BC}.$$

〔求證〕 $\angle BCA=\angle BAC.$

〔證明〕 照以上各節的證法,即可由 §43 的等腰三面角定理推出.

同法又可得其

逆定理　**球面三角形的兩角相等時,對這兩角的邊也必相等.**

139. 球面多角形性質的又一研究法　**球面多角形性質,固可由相當多面角性質推出,如上各節.但如按 §136 注意所述的方法,則可仿平面幾何學中相當定理的證法示明,更爲便捷.**

例　不藉相當多面角的理,證明上節定理.

證　過 B 作一大圓弧,平分 $\angle ABC$,交 $\widehat{AC}$ 於 D,則可由 s.a.s. 證 $\triangle ADB, CDB$ 對稱,而知 $\angle A=\angle C$.

注意　以後在球面幾何學的命辭中,可採用平面幾何學中的相當名詞,但其解釋應如下表:

直線	圓	半徑	心	聯心線	角	中心角
大圓弧	小圓	極距	極	二圓極的聯線	球面角	在極的角

註　本篇以後各習題的圖形,都假設在球面上.一切的作圖題,應用一圓規及作大圓弧器(譬如一半球形杯的邊)在球面上施用.

在教室中最好能有一相當大小的黑板.

習題三十

1. 等腰三角形頂點到對邊中點的聯線,必垂直底邊,且平分頂角,試加證明.

2. 求證等腰三角形相等兩角的分角線必相等.

3. 如球面四邊形的兩組對邊對應相等,求證每一對角線分這形為二個全等三角形.

4. 如球面四邊形的二組對邊對應相等,求證這四邊形的二對角線必互相等分.

5. 求證等邊四邊形的二對角線互相垂直.

6. 求作一角,以一已知線(即大圓弧)為邊,而等於另一已知角.

7. 已知一線,求過其外(或其上)一點作其垂線.

8. 求作一線的中垂線.

9. 求作一角的平分線.

10.求作一點,使自這點至球面三角形三頂點等距.

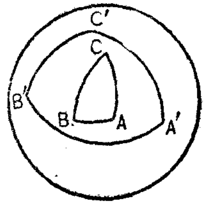
11.在球面上求作一圓,過三角形三頂點.

12.第10題的點,同第11題的圓有什麼關係?

13.球面上二小圓相交,求證二極點的聯線必爲二交點聯線的中垂線.

14.球面上有一小圓,如其半徑平分小圓的弦,求證這半徑亦必垂直該弦.

140. 極三角形　球面上任一三角形,以其三頂點爲極,各作一大圓弧,這三個大圓弧所成的三角形,叫做原三角形的**極三角形.**

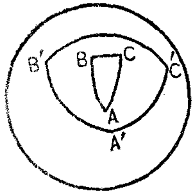


將三大圓弧各延長成一大圓,則在球面上成八個三角形.所說的極三角形,是指那一個呢?每兩大圓,譬如B, C二點相當大圓有兩個交點,今取交點中與A點的距離小於一象限者,爲極三角形的一頂點,其他兩頂點,也照這樣決定.

如圖中的$\triangle A'B'C'$是$\triangle ABC$的極三角形,$\overset{\frown}{A'A}$, $\overset{\frown}{B'B}$, $\overset{\frown}{C'C}$各小於一象限.

注意　由上述定義和限制,可知任何三角形必有一極三角形,而只有一極三角形.

141. 極三角形互應定理　**兩球面三角形中,如第二形是第一形的極三角形,則第一形也是第二形的極三角形.**



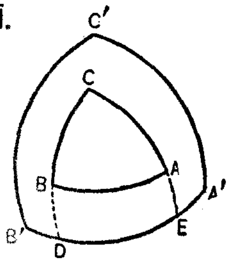
〔已知〕 $\triangle A'B'C'$ 是 $\triangle ABC$ 的極三角形.

〔求證〕 $\triangle ABC$ 也是 $\triangle A'B'C'$ 的極三角形.

〔證明〕 因 A 是 $\overset{\frown}{B'C'}$ 的極,故 $\overset{\frown}{AB'}$ 是一象限(§111系). 同理可知 $\overset{\frown}{B'C}$ 也等於一象限,所以按大圓極點判別定理(§112),知 B' 爲 $\overset{\frown}{AC}$ 的極.同理知 C' 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的極, A' 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的極,所以 $\triangle ABC$ 是 $\triangle A'B'C'$ 的極三角形.

註　因此我們稱 $\triangle ABC$, $A'B'C'$ 互爲**極三角形.**

142. 極三角形基本定理　**球面三角形任一角與其極三角形的相當邊互補.**



〔已知〕 $\triangle ABC$, $A'B'C'$ 互爲極三角形.

〔求證〕 $\angle C$ 與 $\overset{\frown}{A'B'}$ 互補等等.

〔證明〕 延長 $\angle C$ 的兩邊,與相當角 $\angle C'$ 的對邊 $\overset{\frown}{B'A'}$ 交於 D 和 E.

則按球面角定理(§129),知 $\angle C$ 爲 $\overset{\frown}{DE}$ 所度.

又由定義, $\overset{\frown}{B'E}=\overset{\frown}{DA'}=90°$, 但 $\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{B'A'}=\overset{\frown}{B'E}+\overset{\frown}{DA'}$, 故爲 $180°$,卽 $\overset{\frown}{DE}$ 與 $\overset{\frown}{B'A'}$ 相補.故 $\angle C$ 與 $\overset{\frown}{A'B'}$ 互補.

註 本書所論限於凸多角形(§131),故三角形各內角皆取小於 180° 者,因此可知其極三角形各邊爲正量,而小於180°,故合定義(§130)中各邊爲劣弧的限制.

143. 極三角形的應用 應用極三角形基本定理,可從三角形中關於邊(或角)的定理,推出其關於角(或邊)的定理.

例一 試用上述方法,由等腰三角形定理,推證其逆定理(均見§138).

解 設上節圖中 $\angle A=\angle B$, 求證 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AC}$.

作 $\triangle ABC$ 的極三角形 $\triangle A'B'C'$, 則 $\overset{\frown}{B'C'}, \overset{\frown}{C'A'}$ 各與等角 $\angle A, \angle B$ 相補,故 $\overset{\frown}{B'C'}=\overset{\frown}{C'A'}$.

按等腰三角形定理,有 $\angle A'=\angle B'$.

但 $\triangle ABC$ 也爲 $\triangle A'B'C'$ 的極三角形(§141),故 $\overset{\frown}{BC}$ 與 $\overset{\frown}{AC}$ 各與等角 $\angle A', \angle B'$ 相補,因而必等.

例二 由全等或對稱三角形條件 s. a. s. 可推出 a. s. a..

解 學生不難自行證明.

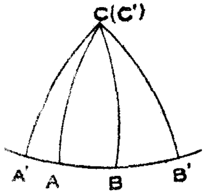
例三 一三角形有二直角,求證直角對邊爲象限.

解 設 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=\angle B=rt.\angle$, 則其極三角形 $\triangle A'B'C'$ 中, $\overset{\frown}{B'C'}=\overset{\frown}{A'C'}=90°$, 故 C' 即爲 $\overset{\frown}{A'B'}$ 的極 (§112), 因而 $\angle A'=\angle B'=90°$ (§129系二).

所以 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AC}=90°$.

註　球面三角形得有二個或三個直角(參看下節).

注意　按本題結果,知 C 為 $\overset{\frown}{AB}$ 的極,故與 C' 相合.但 C' 原為 $\overset{\frown}{A'B'}$ 的極,今 C' 與 C 合,故 $\overset{\frown}{A'B'}$ 與 $\overset{\frown}{AB}$ 必同在一大圓上如右圖.

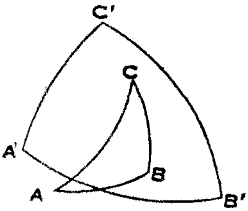


144. 球面三角形內角和定理　**球面三角形三內角的和,大於二直角而小於六直角.**

〔已知〕 球面三角形 ABC.

〔求證〕 (一)$\angle A+\angle B+\angle C>180°$,

(二)$\angle A+\angle B+\angle C<540°$.



〔證明〕 (二)作 $\triangle ABC$ 的極三角形 $\triangle A'B'C'$, 並以 a', b', c' 表其各邊 $\overset{\frown}{B'C'}$, $\overset{\frown}{C'A'}$, $\overset{\frown}{A'B'}$ 的度數,按極三角形基本定理(§142),

$$A=180°-a',\quad B=180°-b',\quad C=180°-c'.$$

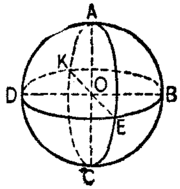
但由§135, $a'+b'+c'<360°$, 故 $180°<A+B+C<540°$.

註　本定理第一附,由§142的註,即可直接說明.

定義　由此可知球面三角形得有一個,二個或三個直角(或鈍角),有直角的三種,各稱為**直角,二直角,三直角三角形.**

系一　**球面 n 角形內角和大於 $2(n-2)$ 直角,而小於 $6(n-2)$ 直角.**

系二 **過球心的三平面,兩兩垂直,分球面為八個全等的三直角三角形,各邊長皆為象限.**



參看 §143 的例三即明.

系三 **全球面積等於其上一三直角三角形面積的八倍.**

習題三一

1. 已知一球面三角形三內角各為 $60°$, $80°$, $120°$, 試求其極三角形三邊的度數.

2. 已知一球面三角形三邊各為 $75°$, $80°$, $90°$, 試求其極三角形三內角的度數.

3. 試證球面三角形外角,小於其不相鄰二內角和.

4. 一球面多角形內角和為 $1000°$, 至多有幾邊?至少有幾邊?

5. 求證三直角三角形的極三角形,即為本形.

6. $\triangle ABC$中, $\angle A=110°$, $\angle B=80°$,求證 $\angle C>10°$.

7. 求證三角形二內角和小於第三內角加 $180°$.

8. 求證等角三角形必等邊及其逆定理.

9. 如一點非一大圓弧的極,求證自這點只能作一大圓弧與所設的大圓弧垂直.

10. 求證一大圓弧的一切垂直大圓弧,必共過一點.

註 這二題指出球面幾何與平面幾何一相異點.

145. 球面幾何學的度量問題 球面圖形雖與平面圖形有很相似的特性,但也有極重要不同處,關於多角形的內角和定理,即爲一例,這一點在度量方面有重大影響.

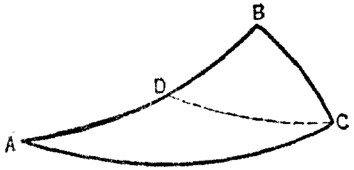
我們知道在平面幾何中,以單位邊長的正方形爲面積單位,因正方形各角皆直角,可以鋪滿一面上,使其間無漏隙,復不重疊也.但在球面幾何中,卽無與正方形有同性的圖形,故面積理論不能從這簡便處入手.因§144系三的緣故,在球面幾何中,常**以三直角三角形爲面積單位**.

在實際上,球面幾何學的度量問題,雖不如平面情形的簡便,但就理論觀點,則反較單純.因直線和平面皆可無限延長,單位的選定全爲任意,因之度量皆相對而非絕對.在球面幾何學中可用大圓周爲長的絕對標準,全球面爲面積的絕對標準,而以象限爲長的單位,三直角三角形爲面積單位.於是長與面積的度量,皆有絕對性.

注意 關於度量的絕對性,平面幾何與球面幾何却有一件相同,卽角的度量是,因皆可取周角做絕對標準也.我們常以**直角做角的單位**.

註 平面球面幾何尚有他種異點,此後隨時提明.

146. 不等腰三角形判別定理　**球面三角形內,大角對邊必大.**



〔已知〕 球面三角形 ABC 內　$\angle BCA > \angle BAC$.

〔求證〕 $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{BC}$.

〔證明〕 因 $\angle BCA$ 較大,故可過 C 作大圓弧,使與 $\overset{\frown}{CA}$ 所成角,等於 $\angle BAC$. 延長這弧,交 $\overset{\frown}{BA}$ 於 D.

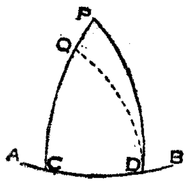
按等腰三角形逆定理(§138),　$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DC}$.

但　$\overset{\frown}{DB} + \overset{\frown}{DC} > \overset{\frown}{BC}$　(§134),故　$\overset{\frown}{DB} + \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{BC}$.

逆定理　**球面三角形內,大邊所對角必大.**

注意上面的判別定理與§138的逆定理,合成一離接命辭(§23注意),故其逆定理必成立無疑.

147. 球面上點線距離　**已知球面上一線 $\overset{\frown}{AB}$,與不爲其極的一點 P. 過 P 作 $\overset{\frown}{AB}$ 的垂線,交 $\overset{\frown}{AB}$ 於 C. 設 D 爲 $\overset{\frown}{AB}$ 上另一點,則當 $\overset{\frown}{PC}$ 小於象限時,必有 $\overset{\frown}{PC} < \overset{\frown}{PD}$.**



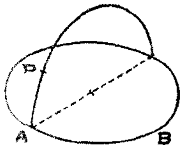
〔證明〕 (一)如 $\overset{\frown}{PC} = \overset{\frown}{PD}$,則 $\angle PDC = \angle PCD = 90°$, 而 PC 爲象限(§143例三),與原設相背.

(二)如 $\overset{\frown}{PC} > \overset{\frown}{PD}$,則 $\angle PDC$ 爲鈍角,可過 D 作 $\overset{\frown}{AB}$ 垂線,交 $\overset{\frown}{PC}$ 於 Q,而 $\overset{\frown}{PC} > \overset{\frown}{QC} = 90°$,也與原設相背.

由(一)與(二),故知　$\overset{\frown}{PC} < \overset{\frown}{PD}$.

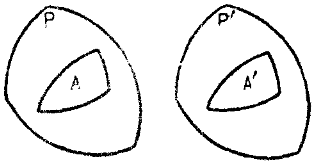
註　如 $\overset{\frown}{PC}$ 大於象限,則同法可證　$\overset{\frown}{PC} > \overset{\frown}{PD}$.

定義　球面上一點與其上一線的距離,即自這點至線上的垂線長,但取其小於象限者.



注意　球面上二線皆有二交點.其間弧長爲二象限(§109(三)),故自 P 至 A 與 B 聯線的垂線長有二,一小於象限,一大於象限.

148. 全等或對稱三角形的又一條件　**同球或等球上二三角形如諸角對應相等,則諸邊也對應相等,故這二三角形爲全等或對稱.**



〔已知〕　$\triangle$ A 與 A' 的諸角對應相等.

〔求證〕　$\triangle$ A 與 A' 必爲全等形或對稱形.

〔證明〕　作 A 與 A' 的極三角形 $\triangle$ P 與 P'.

因 $\triangle$ A 與 A' 諸角對應相等,故 $\triangle$ P 與 P' 的各邊必對應相等,因其各與等角相補也(§142).

故 $\triangle$ P 與 P' 爲全等或對稱(s.s.s.),因之其諸角必對應相等,但 $\triangle$ A 與 A' 各爲 $\triangle$ P 與 P' 的極三角形(何故?).故依同理,知其各邊必對應相等.

所以 $\triangle$ A 與 A' 必全等或對稱.

註　球面幾何中無平行線(§157),故無相似形.

習題三二

1.全球面積爲幾單位?半球面積爲幾單位?

2.求證球面四邊形二對角線的和,小於四邊的周界,而大於周界的一半.

3.球面上兩三角形有兩組邊對應相等,而這兩邊的夾角不等,求證夾角大的對邊大,夾角小的對邊小.又本題的逆定理是否必成立?何故?

4.順次將球面等邊三角形的三邊 $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ 延長到 A', B', C' 三點,使 $\overset{\frown}{AA'}=\overset{\frown}{BB'}=\overset{\frown}{CC'}$. 求證 $\triangle A'B'C'$ 也是等邊三角形.

5.設球面上一點 P,不爲其上 $\overset{\frown}{AB}$ 的極,自 P 至這線距離爲 $\overset{\frown}{PD}$, 又 E 與 F 爲 $\overset{\frown}{AB}$ 上任意二點,試證:(1)如 $\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{DF}$,則 $\overset{\frown}{PE}=\overset{\frown}{PF}$; (2)如 $\overset{\frown}{DE}>\overset{\frown}{DF}$,則 $\overset{\frown}{PE}>\overset{\frown}{PF}$; (3)如 $\overset{\frown}{DE}<\overset{\frown}{DF}$,則 $\overset{\frown}{PE}<\overset{\frown}{PF}$. 又本題的逆定理如何?

註　注意在平面幾何中,沒有這種情形.

6.如上題中 $\overset{\frown}{PD}$ 爲大於象限的弧,則結果如何?

7.如球面四邊形的對角兩兩相等,求證這四邊形的對邊也兩兩相等.

提示　將一組對邊向兩端延長,而證明二個全等的三角形(用 $a.a.a.$).

8.在球面四邊形 $ABCD$ 中,已知 $\angle A=\angle B$, $\angle C=\angle D$, 求證 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AD}$.

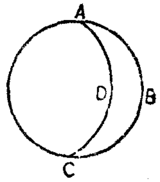
9. 在球面上聯 A, B 二點的大圓弧是 $180°$, 過 A, B 二點,作二半圓 ACB, ADB (C 及 D 各爲半圓上一點). 如 $\angle BCD = \angle CDA$, 求證 $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AD}$.

10. 一球面三角形二角互補,求證其對邊也互補.

提示 延長二邊至另一交點,得二個全等三角形.

11. 求證上題的逆定理.

149. 球面二角形 球面上兩個半大圓所成圖形,叫**球面二角形**, 如右圖的 $ABCD$ 便是.二弧交角叫二角形的角.



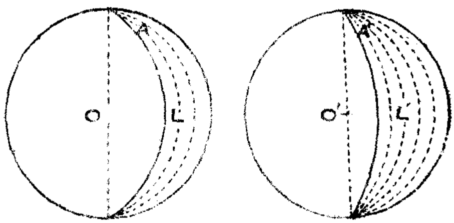
下述的二角形性質,理甚明顯:

(一)同球或等球上,等角二個二角形必全等.

(二)如分一二角形的角爲 n 等分,則所成各小二角形必全等,而爲原形的 n 分之一.

150. 二角形面積比定理 **同球或等球上,兩個二角形面積比,等於其角的比.**

〔已知〕 L 和 L' 爲同球或等球上兩個二角形面積,其角爲 A 與 A'.



〔求證〕 $L : L' = A : A'$.

〔證明〕 (一)設 A 與 A' 二角的比爲有理數,即

$A:A'=m:n$, 而 m 與 n 都是正整數.

則分 $\angle A$ 爲 m 等分, $\angle A'$ 爲 n 等分後,各小角盡皆相等,故各小二角形也全等(§149(一)). 因之

$$L:L'=m:n=A:A'.$$

(二)設 A 與 A' 二角的比是無理數,須用極限的方法去證,學生可參照 §64 長方形體積定理證法(乙)款所述.

151. 二角形面積定理 如二角形面積與其角的單位,如 §145 所定,則面積的值二倍於其角的值.

〔已知〕 以直角爲角的單位,三直角三角形爲面積單位時,一二角形的角爲 A, 面積爲 L(皆指值言).

〔求證〕 $L=2A$.

〔證明〕 取單位角的二角形,則其面積爲 2, 由上節,

$$L:2=A:1, \quad \therefore \quad L=2A.$$

系一 球面與其上一二角形的面積比,等於四直角與其角的比.

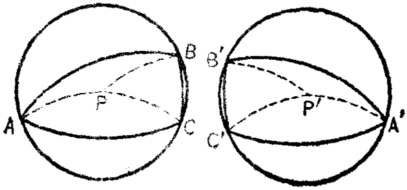
註 爲敍述簡便計,遇二量等值時,稱其一爲其他所度(參看 §129 註).例如本定理可改述如下:

二角形面積,被其角的二倍所度.

系二 如一球半徑爲 r, 其上一二角形,角度爲 A°, 則其面積爲 $\frac{A^\circ}{90^\circ}\times\pi r^2$.

152. 對稱三角形等積定理 **在同球或等球上,兩對稱三角形的面積相等.**

〔已知〕 同球或等球上二個對稱球面三角形 $ABC, A'B'C'$.



〔求證〕 二形等積.

〔證明〕 因 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}, \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{A'C'}, \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{B'C'}$;故

$AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $BC=B'C'$; 故 $\triangle ABC$ 與 $A'B'C'$ 二平面三角形全等.因之 ABC, $A'B'C'$ 二小圓相等.

設這二小圓的極各爲 P 與 P',則按 §111 和系一,

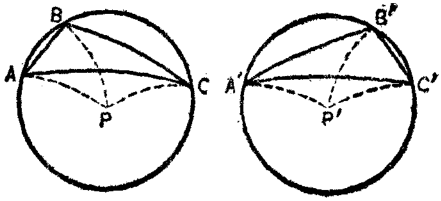
$$\overset{\frown}{PA}=\overset{\frown}{PB}=\overset{\frown}{PC}=\overset{\frown}{P'A'}=\overset{\frown}{P'B'}=\overset{\frown}{P'C'}.$$

又 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}, \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{B'C'}, \overset{\frown}{CA}=\overset{\frown}{C'A'}$,由 s. s. s. 得三組對稱的等腰球面三角形: $\triangle PAB$, $P'A'B'$; $\triangle PBC$, $P'B'C'$; $\triangle PCA$, $P'C'A'$. 再就 §136 定理系,即得

$$\triangle PAB \equiv \triangle P'A'B', \triangle PBC \equiv \triangle P'B'C', \triangle PCA \equiv \triangle P'C'A'.$$

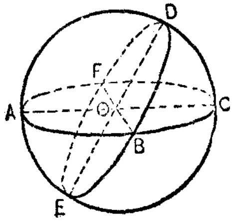
相加得 $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

注意 $\triangle ABC$, $A'B'C'$ 的極 P, P' 若在三角形外如右圖,則末步應取 $\triangle ABC = \triangle ABP + \triangle BCP - \triangle ACP$.



系一 **同球或等球上,對頂三角形等積.**

系二 如 ABC, DBE 二大圓弧,交於一半球上,則兩個相對球面三角形 ABE, DBC 的面積和,等於以 ABE 爲角的二角形面積.



注意 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CF}$, $\overset{\frown}{EB}=\overset{\frown}{DF}$, $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{DC}$, 故 $\triangle ABE$, DCF 爲對稱,而有

$\triangle ABE=\triangle DCF$ 等.

153. 球面剩餘 按球面三角形內角和定理系一(§144), n 角形內角和必大於 $2(n-2)$ 倍直角(即一平面 n 角形內角和),二者的差,叫做這 n 角形的**球面剩餘**,其單位亦用直角.

例如以直角爲單位時,如一三角形各角的值爲 A, B, C, 其球面剩餘爲 E, 則 $E=A+B+C-2$.

又如 $A_1, A_2, \cdots\cdots A_n$ 爲一 n 角形各內角的值,則

$$E=(A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n)-2(n-2).$$

注意 所謂二量的差,指自大量減去小量而言.

習題三三

1. 以三直角三角形爲面積單位,求次列各二角形的面積:(1)角爲 $1\frac{1}{2}$ $rt.\angle s$, (2)角爲 45°.

設 A 爲一二角形的角,球面積爲 S, 其上一三直角三角形面積爲 T_r, 求下列各二角形面積(2至4題):

2. $A=2\frac{1}{2}$ $rt.\angle s$, $T_r=20$ 方市尺.

3.　$A=\frac{1}{3}rt.\angle$,　$S=80$ 方吋.

4.　$A=20°$,　$S=4$ 方呎.

求下列各三角形和多角形的球面剩餘(5 至 9 題):

5.　$A=\frac{1}{2}rt.\angle$,　$B=\frac{3}{4}rt.\angle$,　$C=1rt.\angle$.

6.　$A=90°$,　$B+C=180°$.

7.　$A=90°$,　$B=100°$,　$C=110°$,　$D=80°$.

8.　$A=150°$　$B=110°$,　$C+D=190°$.

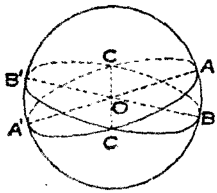
9. 等角六角形,而各角爲(1) 130°, 或(2) 170°.

10. 已知 $\triangle ABC$ 球面剩餘爲 E, 對稱三角形 $A'BC$, $AB'C'$ 的球面剩餘爲 E_A, 求證　$E_A=2A-E$.

11. 求證三角形球面剩餘,必小於其最小角的二倍.

12. 求證三角形面積等於一二角形面積,但後者的角爲前者球面剩餘的一半.

154. 球面三角形面積定理　**如角的單位爲直角,面積的單位爲三直角三角形,則球面三角形面積,以其球面剩餘度之.**



〔已知〕 球面三角形 ABC.

〔求證〕 以直角爲角的單位,以三直角三角形爲面積單位,則　$\triangle ABC$ 面積 $=A+B+C-2$.

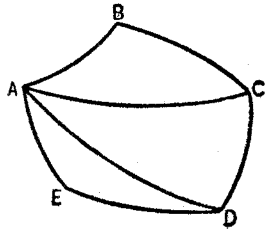
〔證明〕 延長 $\triangle ABC$ 的三邊成三大圓,這三大圓又交於 A',B',C' 三點.則 A,A'; B,B'; C,C' 各在一直徑上.

因$\triangle ABC$,$\triangle BCA'$是以$\angle CAB$爲角的二角形,由§151,
$\triangle ABC+\triangle BCA'=2A$. 同理,$\triangle A'CB'+\triangle A'B'C'=2C$,
$\triangle ABC+\triangle ACB'=2B$. 但$\triangle ABC=\triangle A'B'C'$(?),
故 $3\triangle ABC+\triangle BCA'+\triangle A'CB'+\triangle ACB'=2(A+B+C)$.
但 $\triangle ABC+\triangle BCA'+\triangle A'CB'+\triangle ACB'=$ 半球 $=4$.

$\therefore$ $\triangle ABC$ 面積 $=A+B+C-2$.

系 **如一球面積爲S,其上一球面三角形球面剩餘爲E,則這三角形爲 $E\times\frac{S}{8}$.**

155. <u>球面多角形面積定理</u> **依上面所用的單位,則球面多角形面積,以其球面剩餘度之.**



〔已知〕 $ABC\cdots\cdots E$爲一球面n角形.

〔求證〕 依上面所用單位時,則這多角形面積,度以$(A+B+\cdots\cdots+E)-2(n-2)$.

〔證明〕 自頂點A作一切對角線分成$(n-2)$個三角形,每一三角形面積以內角和減2度之.

$\therefore ABC\cdots\cdots E$ 面積$=(A+B+C+\cdots\cdots+E)-2(n-2)$.

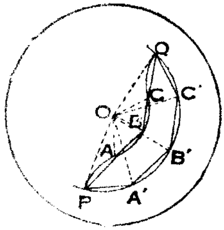
注意 這二定理只示明面積比值(與全球面積的比),再加§121球面積定理,方可計算面積數值,公式如下:

系 **一球半徑爲r,其上一球面多角形球面剩餘度數爲E_s,則面積爲 $\frac{E_s}{180}\times\pi r^2$.**

156. <u>球面上最短距</u> 以上所論,屢以球面上的大圓與平面上直線相當.平面上二點定唯一的直線,球面上二點也定唯一的大圓,但須這二點不爲直徑兩端.此其基本特性相同的一點.但平面上直線尙有一極重要性質,即二點間聯線,以直線爲最短,今試究球面上二點間的大圓劣弧是否也是有這重要特性.

既欲比較球面上二曲線的長短,首先應規定線長的意義如次:設 PQ 爲空間曲線上一段弧,在這弧上依次取 $A, B, \cdots\cdots K$ 等點,而聯成折線 $PAB\cdots\cdots KQ$.如點數無限增多,各線段長無限縮小時,這折線長有一極限,則稱之爲 PQ 弧長.

球面上最短距定理 **球面上二點的任意聯線,必大於聯這二點的大圓劣弧.**



〔已知〕 P, Q 爲 O 球上二點.

〔求證〕 聯 P 與 Q 的任一曲線必大於大圓劣弧 $\overset{\frown}{PQ}$.

〔證明〕 過 P 與 Q 任作一曲線,在其上取 A, B, C 諸點,則據 §45 系,就多面角 $O-PABCQ$ 可知

$$\angle POA+\angle AOB+\angle BOC+\angle COQ>\angle POQ.$$

今在大圓劣弧 $\overset{\frown}{PQ}$ 上,取 A',B',C', 使

$\angle POA'=\angle POA,\ \angle A'OB'=\angle AOB,\ \angle B'OC'=\angle BOC,$

則必 $\angle C'OQ=\angle POQ-(\angle POA'+\angle A'OB'+\angle B'OC')$

$=\angle POQ-(\angle POA+\angle AOB+\angle BOC)<\angle COQ.$

又因 $OP=OA=OB=OC=OQ=OA'=OB'=OC'$, 故 $\triangle POA\equiv\triangle POA',\ \triangle AOB\equiv\triangle A'OB',\triangle BOC\equiv\triangle B'OC'$,(何故?)

故 $PA=PA',\ AB=A'B',\ BC=B'C'.$

但由$\triangle$s COQ 與 $C'OQ$, 有 $CQ>C'Q$,

$\therefore\quad PA+AB+BC+CQ>PA'+A'B'+B'C'+C'Q.$

今將二線上點數增加,並使各隣點無限接近,上式所表關係,仍舊成立.按定義,其左端趨於聯 P 與 Q 的曲線長,而右端則趨於大圓弧 $\overset{\frown}{PQ}$, 故這曲線長,必不小於 $\overset{\frown}{PQ}$.

(二)今進證這曲線長必大於 $\overset{\frown}{PQ}$.

這曲線既與 $\overset{\frown}{PQ}$ 相異,其上至少必有一點 R, 不在 $\overset{\frown}{PQ}$ 上.如(一)所述,曲線 PR 長,必不能小於 $\overset{\frown}{PR}$, 曲線 RQ 長,必不能小於 $\overset{\frown}{RQ}$. 但 $\overset{\frown}{PR}+\overset{\frown}{RQ}>\overset{\frown}{PQ}$ (§134).

所以曲線 PQ 的長必大於 $\overset{\frown}{PQ}$.

注意 證法中(二)爲必要,因設二變數 $x_n>y_n$, 而各趨於一極限 X 與 Y, 我們只能斷定 $X\geqq Y$(其證明非本書所能論),但未必即 $X>Y$. 例如取 $x_n=1-\dfrac{1}{n^2}$, $y=1-\dfrac{1}{n}$ (n 爲正整數), 則二者的極限顯然均爲 1.

註 因多面角各面角 $\leqq 180°$, 故在此取大圓劣弧

157. 球面幾何學特徵 §§144,145,147,148,和習題三一的 9, 10 二題,習題三二的 5, 6 二題,已指出球面幾何與平面幾何不同之處.今略考其差異的由來,藉這二種幾何的比較,以明幾何一科的性質,而爲高中幾何科作一總結束.

球面圖形與平面圖形的相當,已見 §139 注意,最重要者,厥爲大圓劣弧與直線的比較,二者基本性質相同處爲:

(一)由二點決定(但在大圓弧須加一限制);

(二)二點間的最短線.

其重要差別處,則有:

(一)直線長爲無限,大圓弧則有全長;

(二)平面上過直線外一點可作唯一的平行線(歐氏 Euclid 公理),不平行線只有一交點;而球面上任二大圓皆交於二點,故無與平行線相當的圖形.

球面幾何與平面幾何不同的各種特徵,均係由這二層而來,本書限於程度,不克詳加討論.

注意 我們所習的平面幾何,其特徵爲歐氏公理,故稱**歐氏幾何**.將公理改換如上,則可不藉立體幾何理,研究球面幾何,所以球面幾何乃一種**非歐平面幾何**.

習題三四

1.一球面積爲40方尺,其上有一三角形,各角爲$40°$,$60°$,$100°$,求這三角形的面積.

2.如上題球半徑爲4寸,求那球面三角形面積.

3.如一球面三角形各角爲$90°$, $100°$, $110°$,問其面積爲全球面積的幾分之幾?

4.如上題的球面三角形面積爲85方寸,求所在球的半徑.

5.一等角球面三角形,面積爲全球的$\frac{1}{4}$,求各角.

6.一二角形的角爲$80°$,同球上一等角三角形各角爲$80°$,求這二形的面積比.

7.如上題二形在二球上,半徑比爲$a:b$,求面積比.

8.延長底角爲$80°$的等腰球面三角形二腰,成一二角形.如原三角形的面積爲二角形的$\frac{1}{3}$,求其頂角.

9.一球面三角形各角爲$80°$, $90°$, $100°$,求其等面積二角形的角.

10.一等角六角形各角爲$160°$,如(1)以三直角三角形的面積單位,或(2)半徑爲3時,求這六角形面積.

11.一六角形各角爲$130°$, $140°$, $130°$, $150°$, $120°$, $160°$,(一)這形佔球面幾分之幾?(二)求等積的等角三角形各角.

12.海上甲乙二島在同一緯線上,如沿緯線航行,由甲至乙,問航線是否最短?

13.有一球面三角形 ABC, D 爲 $\overset{\frown}{BC}$ 的中點,試證如 $\overset{\frown}{AD}$ 大於,或等於,或小於象限,則在 B 和 C 二處的外角,必小於,等於,或大於其任一內對角.

提示　與平面幾何外角定理證法相同,但須注意§157所述直線與大圓弧的第一差異點.

14.球面上有無與相似形相當的圖形?何故?

15.試將本編內正文和習題中所提出平面幾何與球面幾何差異的地方,盡行摘出.

復習題

1. 已知球面三角形各角如下列,求其球面剩餘:

(1)　$A=\frac{1}{3}rt.\angle$,　$B+C=2\frac{1}{2}rt.\angle$.

(2)　$A=65°$,　$B=85°$,　$C=80°$.

2. 已知球面等角六角形各角爲 140°,解下列各問:

(1)求其角餘,　(2)如球半徑爲 3,求其面積.

(3)一等角八角形與其等積,求這八角形各角.

3. 兩個二角形的角各爲 85° 與 108°,同球上一三角形與這二形的差等積,求其球面剩餘.

4. 如上題中(1)三直角三角形面積爲15方寸,或(2)球半徑爲 5,試求那三角形的面積.

5. 求證球面多角形的外角和小於四直角.

6. 求證球面三角形各邊的中垂線,必交於一點.

7. 求證球面三角形各內分角線,必交於一點.

8.求證球面三角形二外分角線和第三內分角線必相交於一點.

9.求作一圓,過球面上三已知點.

10.求作與球面上三大圓(不共過一點者)相切的圓.

11.設 P 爲球面三角形 ABC 內一點,求證 $\overset{\frown}{PA}+\overset{\frown}{PB}<\overset{\frown}{CA}+\overset{\frown}{CB}$.

12.一球面三角形頂點爲 B 與 B',在二半圓上,各取一點 A 與 C,使 $\angle BAC=\angle B'CA$,試證如 E 爲 $\overset{\frown}{AC}$ 中點,則 $\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{EB'}$.

13.一二直角球面三角形的底邊與其極三角形相當邊的和,必等於半圓,試加證明.

14.同球或等球上二個三角形,如其一的二邊和一相對角,對應與其他三角形中相當元素相等,求證他一組等邊所對角必相等或互補.

15.取上題二三角形的極三角形,以推出一定理,所得結果,在平面幾何中,有無相當的情形.

總習題

1. AB 與 CD 二直線,不共在一平面上,在這二直線上各取一點 X 與 Y,求線段 XY 中點的軌跡.

2. 與不共在一平面上二直線相交的直線中,決無平行者,試加證明.

3. 過平面三角形 ABC 的外接圓心 O,作 ABC 平面的垂線,試證這垂線爲距 A, B, C 等遠點的軌跡.

4. 過平行四邊形一對角線,作一平面,求證自他一對角線二端點,至這平面的距離相等.

5. 一三直角三面角的頂點爲 O,以一平面截其三稜於 A, B, C. 求證 O 在這截面上射影,即 $\triangle ABC$ 垂心.

6. 已知平面上一動點 P,距這平面外一定點 C 的距離爲定長,求 P 點軌跡.

7. 已知平面上一定點 M,其外一定點 C. 自 C 作直線,與這平面上過 M 點的直線垂直,求其垂趾的軌跡.

8. 過二定點,各作一直線,使互相垂直,求其垂趾的軌跡.

9. 有二平行平面,在其上各取一點 M 與 N,求線段 MN 中點的軌跡.

10. 上題中如在 MN 上取一點 P,使 $MP:PN$ 的比值爲一定,求 P 點的軌跡.

11.三平行線,不共在一平面上,求其等遠點的軌跡.

12.如共一平面的三平行線,能否有上題的軌跡?

13.求距一三面角各面等遠點的軌跡.

14.自一動點 P 至已知球面的切線長爲一定,求證 P 的軌跡爲一球,與已知球同心.

15.過一定直線,作平面與一已知球相交,求截圓的圓心所成軌跡.

16.如改上題的定直線爲定點,則得何種軌跡?

17.求球面上距空間二定點等遠點的軌跡.

18.如上題二定點卽在同一球面上,其軌跡如何?

19.一球面三角形中,底邊一定,在兩端點處二角的和與第三角的差爲一定,求其頂點的軌跡.

20.一球面三角形,面積與底邊長短,位置皆有定,求其頂點軌跡,幷將所得結果,與平面中相當軌跡比較.

21.過已知平面上一已知點 A,引這平面內的一直線,使與這平面外一定點 P 的距離爲一定.

22.已知 AB, CD, EF 三直線,無二線共在一平面上,求作一直線,與 AB 和 EF 均相交,又與 CD 平行.

23.求作一球,使過三定點,而與一定平面相切.

24.求作一球,使過三定點,而與一定球相切.

25.求作一球,使過二定點,切於定平面(或定球),且有定長半徑.

26.求作一球,過一定點,而切於二平面(或二球面,或一平面與一球面),且使其半徑爲定長.

27.求作一平面,使過一定點,且切於二定球.

28.求作三已知球的公切面.

29.試求自一定點至一定球面上各點聯線中最長和最短者.

30.試求自一直線(或平面)上點,至一球面上點聯線中的最長和最短者.

31.設一正角錐的高爲 H,底面邊數爲 n,一邊長爲 s,求其側稜和體積,如

(1) $n=3,\ s=12,\ H=12$; (2) $n=4,\ s=6,\ H=9$.

32.求上題各正角錐的側面積.

33.設一正角錐臺的高爲 H,底面邊數爲 n,上底面一邊長爲 s',下底面的爲 s,求其側稜 E 和體積 V,如

(1) $s=10,\ s'=6,\ n=4,\ H=1$;

(2) $s=8,\ s'=5,\ n=4,\ H=3$;

(3) $s=10,\ s'=6,\ n=6,\ H=2$.

34.求上題各正角錐臺的側面積.

35.一正角錐中 $E=11,\ s=12,\ n=4$,求 V.

36.一直角柱側面積爲 140,底面爲一三角形,各邊長爲 5, 7, 8,求其體積.

37.一立方體對角線爲 30 寸,求全面積與體積.

38.一立方體各面上對角線長15吋,求全面積和體積.

39.求證直六面體對角線必等長.

40.一角錐側稜為 a,作其底的平行面,分這角錐為等積二部分,試求這平面與頂點的距離.

41.求證四面體每二組對稜中點,定一平行四邊形.

42.求證四面體三組對稜中點的聯線,必交於一點,且互相平分.

43.一直角錐,其高與底面,各等於稜長10吋的立方體的高與底面,求其側面積.

44.一直角木柱高10吋,底面為每邊8吋的正六角形,將這柱改削成一最大圓柱,求後者面積與體積.

45.一直圓錐體積為 V,全面積為 S,其內切球的體積為 V_1,面積為 S_1,求證 $V:V_1=S:S_1$.

46.一球內切於一直圓柱內,求證二者全面積的比,等於其體積的比.

47.求證直圓柱側面能與一球相切,且切點在球面一大圓上.

註 如在二曲面交點,能作一平面,與這二面相切,則稱這曲面相切.球的相切,即其一例(§115).

48.三直線交於一點,而不在同一平面上,問含這三線的直圓錐有幾個?

49.求證旋轉錐體積,等於側面積與底面半徑乘積的一半.

50.一雙底鼓形二底半徑為 2 與 5, 高為 7, 求其體積.

註 合於條件的鼓形有二.何故?

51.過球內一點,作兩兩垂直的三弦,求證其長的平方和為定值.

52.自正四面體內任意一點,至四面距離的和,必等於這四面體的高,試加證明.

53.求證正四面體各稜中點為一正八面體頂點.

54.如一平行六面體的四對角線等長,求證其必為一長方體.

55.求證等球二外切多面體體積比等於面積比.

56.一正八面體為一與底平行的平面所截,其截面周界長與這平面位置,有無關係?何故?

57.球面上二小圓相切,求證其所在平面的二面角,必被二極聯成的大圓劣弧所度.

58.球面三角形 ABC 的極如為 $\overset{\frown}{BC}$ 的中點,求證 $\angle A=\angle B+\angle C$.

59.一球面四邊形兩組對角相等,求證其對角線必互相平分.

60.求證上二題的逆定理.

附　錄

重要求積公式彙覽

下面各公式中記號的意義如下表:

B 或 b: 底面積	E: 側稜	E_s: 球面剩餘
H: 高	L: 側面積	r: 球半徑
R,R': 底面半徑	S: 斜高	T: 全面積
V: 體積	$\angle^\circ$: 角度(如 $\angle A^\circ$ 表 A 度)	

各公式後註明所在的節數.

(一)立體的面積.

直角柱: $L = E \times$ 底面周長 (§58)

任意角柱: $L = E \times$ 直截面周長 (§58)

正角錐: $L = \frac{1}{2} S \times$ 底面周長 (§72)

正角錐臺: $L = \frac{1}{2} S \times$ 兩底周長的和 (§72)

旋轉柱: $L = 2\pi RH, \quad T = 2\pi R(H+R)$ (§88)

旋轉錐: $L = \pi RS, \quad T = \pi R(S+R)$ (§98)

球: $T = 4\pi r^2$ (§121)

鼓形: $T = 2\pi rH$ (§122)

二角形: $T = \frac{\angle A^\circ}{90^\circ} \times \pi r^2$ (§151)

球面剩餘: $E_s^\circ = (\angle A^\circ + \angle B^\circ + \angle C^\circ + \cdots\cdots)$
$-(n-2)180^\circ$ (§153)

球面多角形: $T = \frac{E_s^\circ}{180^\circ} \times \pi r^2$ (§155)

(二)立體的體積.

長方體:	$V=a\times b\times c$	(§64)
平行六面體(角柱或柱):	$V=B\times H$	(§§66,68,89)
角錐(或錐):	$V=\frac{1}{3}B\times H$	(§76)
角錐臺(或錐臺):	$V=\frac{1}{3}H(B+b+\sqrt{Bb})$	(§77)
旋轉柱:	$V=\pi R^2H$	(§89)
旋轉錐:	$V=\frac{1}{3}\pi R^2H$	(§99)
旋轉錐臺:	$V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+R'^2+RR')$	(§104)
球:	$V=\frac{4}{3}\pi r^3$	(§123)
球面錐:	$V=\frac{1}{3}B\times r$	(§124)
漏斗形:	$V=\frac{1}{3}r\times$ 鼓形側面積	(§125)
單底鼓形:	$V=\frac{1}{3}\pi H^2(3r-H)$	(§127)
雙底鼓形:	$V=\frac{1}{6}\pi H(3R^2+3R'^2+H^2)$	(§127)

附　　　表

對數的法則

(1)定位部求法　設一正數N的第一位有效數字,在n位上(以個位為零位,向左依次推去,位數為正;向右推去,位數為負),則其對數定位部為n.

(2)運算原理

以加代乘　$\log a+\log b=\log(a\times b)$

以減代除　$\log a-\log b=\log\frac{a}{b}$

以乘代羃　$m\log a=\log a^m$

以除代根　$\frac{\log a}{m}=\log\sqrt[m]{a}$

欲知其詳,可參看本局出版的

修正課程標準適用:高中代數學第十二章

五位數學用表

二書.

(一) 四位對數表

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	2031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

(一) 四 位 對 數 表

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

(二) 平方,立方,平方根,立方根表

x	x^2	x^3	$\sqrt{x}$	$\sqrt[3]{x}$	x	x^2	x^3	$\sqrt{x}$	$\sqrt[3]{x}$
1	1	1	1.000	1.000	26	6 76	17 576	5.099	2.962
2	4	8	1.414	1.260	27	7 29	19 683	5.196	3.000
3	9	27	1.732	1.442	28	7 84	21 952	5.292	3.037
4	16	64	2.000	1.587	29	8 41	24 389	5.385	3.072
5	25	125	2.236	1.710	30	9 00	27 000	5.477	3.107
6	36	216	2.449	1.817	31	9 61	29 791	5.568	3.141
7	49	343	2.646	1.913	32	10 24	32 768	5.657	3.175
8	64	512	2.828	2.000	33	10 89	35 937	5.745	3.208
9	81	729	3.000	2.080	34	11 56	39 304	5.831	3.240
10	1 00	1 000	3.162	2.154	35	12 25	42 875	5.916	3.271
11	1 21	1 331	3.317	2.224	36	12 96	46 656	6.000	3.302
12	1 44	1 728	3.464	2.289	37	13 69	50 653	6.083	3.332
13	1 69	2 197	3.606	2.351	38	14 44	54 872	6.164	3.362
14	1 96	2 744	3.742	2.410	39	15 21	59 319	6.245	3.391
15	2 25	3 375	3.873	2.466	40	16 00	64 000	6.325	3.420
16	2 56	4 096	4.000	2.520	41	16 81	68 921	6.403	3.448
17	2 89	4 913	4.123	2.571	42	17 64	74 088	6.481	3.476
18	3 24	5 832	4.243	2.620	43	18 49	79 507	6.557	3.503
19	3 61	6 859	4.359	2.668	44	19 36	85 184	6.633	3.530
20	4 00	8 000	4.472	2.714	45	20 25	91 125	6.708	3.557
21	4 41	9 261	4.583	2.759	46	21 16	97 336	6.782	3.583
22	4 84	10 648	4.690	2.802	47	22 09	103 823	6.856	3.609
23	5 29	12 167	4.796	2.844	48	23 04	110 592	6.928	3.634
24	5 76	13 824	4.898	2.884	49	24 01	117 649	7.000	3.659
25	6 25	15 625	5.000	2.924	50	25 00	125 000	7.071	3.684

重要的數値

(三) π 的倍數表

$$\pi = 3.1416$$

$$2\pi = 6.2832$$

$$\frac{\pi}{4} = 0.7854$$

$$\frac{\pi}{6} = 0.5236$$

$$\frac{\pi}{180} = 0.0176$$

(四) π 的方乘,方根,倒數表

$$\pi^2 = 9.8696$$

$$\sqrt{\pi} = 1.7725$$

$$\sqrt[3]{\pi} = 1.4646$$

$$\frac{1}{\pi} = 0.3183$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0.5642$$

(五) 三角函數本值表

角度	sin	cos	tan	角度	sin	cos	tan
1°	.0175	.9998	.0175	46°	.7193	.6947	1.0355
2	.0349	.9994	.0349	47	.7314	.6820	1.0724
3	.0523	.9986	.0524	48	.7431	.6691	1.1106
4	.0698	.9976	.0699	49	.7547	.6561	1.1504
5	.0872	.9962	.0875	50	.7660	.6428	1.1918
6	.1045	.9945	.1051	51	.7771	.6293	1.2349
7	.1219	.9925	.1228	52	.7880	.6157	1.2799
8	.1392	.9903	.1405	53	.7986	.6018	1.3270
9	.1564	.9877	.1584	54	.8090	.5878	1.3764
10	.1736	.9848	.1763	55	.8192	.5736	1.4281
11	.1908	.9816	.1944	56	.8290	.5592	1.4826
12	.2079	.9781	.2126	57	.8387	.5446	1.5399
13	.2250	.9744	.2309	58	.8480	.5299	1.6003
14	.2419	.9703	.2493	59	.8572	.5150	1.6643
15	.2588	.9659	.2679	60	.8660	.5000	1.7321
16	.2756	.9613	.2867	61	.8746	.4848	1.8040
17	.2924	.9563	.3057	62	.8829	.4695	1.8807
18	.3090	.9511	.3249	63	.8910	.4540	1.9626
19	.3256	.9455	.3443	64	.8988	.4384	2.0503
20	.3420	.9397	.3640	65	.9063	.4226	2.1445
21	.3584	.9336	.3839	66	.9135	.4067	2.2460
22	.3746	.9272	.4040	67	.9205	.3907	2.3559
23	.3907	.9205	.4245	68	.9272	.3746	2.4751
24	.4067	.9135	.4452	69	.9336	.3584	2.6051
25	.4226	.9063	.4663	70	.9397	.3420	2.7475
26	.4384	.8988	.4877	71	.9455	.3256	2.9042
27	.4540	.8910	.5095	72	.9511	.3090	3.0777
28	.4695	.8829	.5317	73	.9563	.2924	3.2709
29	.4848	.8746	.5543	74	.9613	.2756	3.4874
30	.5000	.8660	.5774	75	.9659	.2588	3.7321
31	.5150	.8572	.6009	76	.9703	.2419	4.0108
32	.5299	.8480	.6249	77	.9744	.2250	4.3315
33	.5446	.8387	.6494	78	.9781	.2079	4.7046
34	.5592	.8290	.6745	79	.9816	.1908	5.1446
35	.5736	.8192	.7002	80	.9848	.1736	5.6713
36	.5878	.8090	.7265	81	.9877	.1564	6.3138
37	.6018	.7986	.7536	82	.9903	.1392	7.1154
38	.6157	.7880	.7813	83	.9925	.1219	8.1443
39	.6293	.7771	.8098	84	.9945	.1045	9.5144
40	.6428	.7660	.8391	85	.9962	.0872	11.4301
41	.6561	.7547	.8693	86	.9976	.0698	14.3006
42	.6691	.7431	.9004	87	.9986	.0523	19.0811
43	.6820	.7314	.9325	88	.9994	.0349	28.6363
44	.6947	.7193	.9657	89	.9998	.0175	57.2900
45	.7071	.7071	1.0000	90	1.0000	.0000	∞

(六) 三角函數對數表

角度	L sin	L cos	L tan	角度	L sin	L cos	L tan
1°	8.2419	9.9999	8.2419	46°	9.8569	9.8418	10.0152
2	8.5428	9.9997	8.5431	47	9.8641	9.8338	10.0303
3	8.7188	9.9994	8.7194	48	9.8711	9.8255	10.0456
4	8.8436	9.9989	8.8446	49	9.8778	9.8169	10.0608
5	8.9403	9.9983	8.9420	50	9.8843	9.8081	10.0762
6	9.0192	9.9976	9.0216	51	9.8905	9.7989	10.0916
7	9.0859	9.9968	9.0891	52	9.8965	9.7893	10.1072
8	9.1436	9.9958	9.1478	53	9.9023	9.7795	10.1229
9	9.1943	9.9946	9.1997	54	9.9080	9.7692	10.1387
10	9.2397	9.9934	9.2463	55	9.9134	9.7586	10.1548
11	9.2806	9.9919	9.2887	56	9.9186	9.7476	10.1710
12	9.3179	9.9904	9.3275	57	9.9236	9.7361	10.1875
13	9.3521	9.9887	9.3634	58	9.9284	9.7242	10.2042
14	9.3837	9.9869	9.3968	59	9.9331	9.7118	10.2212
15	9.4130	9.9849	9.4281	60	9.9375	9.6990	10.2386
16	9.4403	9.9828	9.4575	61	9.9418	9.6856	10.2562
17	9.4659	9.9806	9.4853	62	9.9459	9.6716	10.2743
18	9.4900	9.9782	9.5118	63	9·9499	9.6570	10.2928
19	9.5126	9.9757	9.5370	64	9.9537	9.6418	10.3118
20	9.5341	9.9730	9.5611	65	9.9573	9.6259	10.3313
21	9.5543	9.9702	9.5842	66	9.9607	9.6093	10.3514
22	9.5736	9.9672	9.6064	67	9.9640	9.5919	10.3721
23	9.5919	9.9640	9.6279	68	9.9672	9.5736	10.3936
24	9.6093	9.9607	9.6486	69	9.9702	9.5543	10.4158
25	9.6259	9.9573	9.6687	70	9.9730	9.5341	10.4389
26	9.6418	9.9537	9.6882	71	9.9757	9.5126	10.4630
27	9.6570	9.9499	9.7072	72	9.9782	9.4900	10.4882
28	9.6716	9.9459	9.7257	73	9.9806	9.4659	10.5147
29	9.6856	9.9418	9.7438	74	9.9828	9.4403	10.5425
30	9.6990	9.9375	9.7614	75	9.9849	9.4130	10.5719
31	9.7118	9.9331	9.7788	76	9.9869	9.3837	10.6032
32	9.7242	9.9284	9.7958	77	9.9887	9.3521	10·6366
33	9.7361	9.9236	9.8125	78	9.9904	9.3179	10.6725
34	9.7476	9.9186	9.8290	79	9.9919	9.2806	10.7113
35	9.7586	9.9134	9.8452	80	9.9934	9.2397	10.7537
36	9.7692	9.9080	9.8613	81	9.9946	9.1943	10.8003
37	9.7795	9.9023	9.8771	82	9.9958	9.1436	10.8522
38	9.7893	9.8965	9.8928	83	9.9968	9.0859	10.9109
39	9.7989	9.8905	9.9084	84	9.9976	9.0192	10.9784
40	9.8081	9.8843	9.9238	85	9.9987	8.9403	11.0580
41	9.8169	9.8778	9.9392	86	9.9989	8.8436	11.1554
42	9.8255	9.8711	9.9544	87	9.9994	8.7188	11.2806
43	9.8338	9.8641	9.9697	88	9.9997	8.5428	11.4569
44	9.8418	9.8569	9.9848	89	9.9999	8.2419	11.7581
45	9.8495	9.8495	10.0000	90	10.0000	$-\infty$	∞

(註) 表中各對數的定位部須減去10.