Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2020/2021**

Algebraische Zahlentheorie

Arbeitsblatt 19

Aufgaben

Aufgabe 19.1. Bestimme $\Omega_{\mathbb{C}|\mathbb{R}}$.

Aufgabe 19.2. Es sei $K \subseteq L$ eine separable endliche Körpererweiterung. Zeige $\Omega_{L|K} = 0$.

Aufgabe 19.3. Bestimme $\Omega_{\mathbb{Z}[\mathrm{i}]|\mathbb{Z}}$.

Aufgabe 19.4. Es sei R ein kommutativer Ring und

$$A = R[X_1, \ldots, X_n]/(X_n - f(X_1, \ldots, X_{n-1}))$$

mit einem Polynom $f \in R[X_1, \ldots, X_{n-1}]$ (die Nullstellenmenge ist also der Graph zu f). Zeige auf zwei verschiedene Arten, dass $\Omega_{A|R}$ ein freier A-Modul vom Rang $n-1$ ist.

Aufgabe 19.5. Zeige, dass zu $R = K[X,Y]/(XY)$ der Modul der Kähler-Differentiale $\Omega_{R|K}$ im Nullpunkt nicht frei ist.

Aufgabe 19.6.*

Es sei A ein kommutativer Ring und $S \subseteq A$ ein multiplikatives System. Zeige

$$\Omega_{A_S|A} = 0.$$

Aufgabe 19.7. Es sei A ein kommutativer Ring und $S \subseteq A$ ein multiplikatives System. Es sei $A \subseteq B \subseteq A_S$ ein Zwischenring. Zeige

$$\Omega_{B|A} = 0.$$

Aufgabe 19.8. Es sei $K \subseteq L$ eine endliche separable Körpererweiterung und sei $K[X] \subseteq L[X]$ die zugehörige endliche Erweiterung der Polynomringe in einer Variablen. Zeige $\Omega_{L[X]|K[X]} = 0$.

Aufgabe 19.9. Interpretiere Lemma 19.3 für einen Grundkörper K und einen K-Algebrahomomorphismus

$$K[Y] \longrightarrow K[X],\, Y \longmapsto F(X),$$

Aufgabe 19.10. Es sei R ein kommutativer Ring und A eine kommutative R-Algebra. Zeige, dass der Kern der universellen Derivation

$$A \longrightarrow \Omega_{R|A},\; f \longmapsto df,$$

eine R-Unteralgebra von A ist.

Es sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. Zu einem Element $x \in M$ heißt

$$\operatorname{Ann}_R(x) = \{r \in R \mid rx = 0\}$$

der *Annullator* von x.

Es sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. Der *Annullator* von M ist

$$\operatorname{Ann}_R(M) = \{r \in R \mid rx = 0 \text{ für alle } x \in M\}.$$

Aufgabe 19.11. Es sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Zeige, dass der Annullator des R-Moduls $R/\mathfrak{a}$ gleich $\mathfrak{a}$ ist.

Aufgabe 19.12. Es sei R ein kommutativer Ring, M ein R-Modul und $I \subseteq R$ ein Ideal mit $IM = 0$. Zeige, dass M in natürlicher Weise ein R/I-Modul ist.

Aufgabe 19.13. Es sei $A = R[X]/\mathfrak{a}$ eine monogene R-Algebra und es sei $\mathfrak{b} = \operatorname{Ann}(dX)$ der Annullator von dX im Modul der Kähler-Differentiale $\Omega_{A|R}$. Zeige

$$\Omega_{A|R} \cong A/\mathfrak{b}.$$

Aufgabe 19.14. Es sei R ein Zahlbereich. Zeige, dass es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_+$ gibt, die den Modul der Kähler-Differentiale $\Omega_{R|\mathbb{Z}}$ annulliert.

Aufgabe 19.15. Es sei R ein quadratischer Zahlbereich mit dem Modul der Kähler-Differentiale $\Omega_{R|\mathbb{Z}}$. Zeige, dass der Annullator von $\Omega_{R|\mathbb{Z}}$ von einem Element erzeugt wird, und dass die Norm eines solchen Erzeugers im Betrag mit der Diskriminante des Zahlbereiches übereinstimmt.

Aufgabe 19.16. Es sei A_D der quadratische Zahlbereich zur quadratfreien Zahl $D = 2,3 \mod 4$. Zeige, dass die Elemente des Moduls der Kähler-Differentiale $\Omega_{A_D|\mathbb{Z}}$ gleich

$$(a+b\sqrt{D})d\sqrt{D},\ a = 0,1,2,\ldots,2D-1,\ b = 0,1,$$

sind.

Aufgabe 19.17.*

Es sei A_D der quadratische Zahlbereich zur quadratfreien Zahl $D = 1 \mod 4$. Zeige, dass die Elemente des Moduls der Kähler-Differentiale $\Omega_{A_D|\mathbb{Z}}$ (mit $A_D = \mathbb{Z}[y]/\left(y^2 - y - \frac{D-1}{4}\right)$ gemäß Satz 9.8) gleich

$$ady,\ a = 0,1,2,\ldots,|D|-1,$$

sind.

Aufgabe 19.18. Es sei $\mathbb{Q} \subseteq K$ eine endliche Körpererweiterung und $\mathbb{Z} \subseteq S \subseteq K$ eine Ringerweiterung mit $Q(S) = K$ und sei R der ganze Abschluss von S in K. Zeige, dass die natürliche Abbildung

$$\Omega_{S|\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} R \longrightarrow \Omega_{R|\mathbb{Z}},\ ds \otimes r \longmapsto rds,$$

surjektiv ist.

Aufgabe 19.19. Es sei $D = 1 \mod 4$ eine quadratfreie Zahl $\neq 1$ und sei

$$S = \mathbb{Z}[\sqrt{D}] \subseteq R = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{D}}{2}].$$

Zeige, dass in $\Omega_{R|\mathbb{Z}}$ die Beziehung

$$\frac{1+\sqrt{D}}{2}d\sqrt{D} = d\frac{1+\sqrt{D}}{2}$$

gilt.

Aufgabe 19.20. Zeige anhand der Ringerweiterungen $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = S \subseteq \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}] = R$, dass in Lemma 19.3 die Abbildung

$$\Omega_{S|\mathbb{Z}} \otimes_S R \longrightarrow \Omega_{R|\mathbb{Z}},\ ds \otimes r \longmapsto rds,$$

nicht injektiv sein muss.

Aufgabe 19.21. Wir betrachten den Modul der Kähler-Differentiale $\Omega_{\mathbb{Z}[\mathrm{i}]|\mathbb{Z}}$ zum Ring der Gaußschen Zahlen. Zeige, dass es zu dem Kähler-Differential

$$\omega = \mathrm{i}d\mathrm{i}$$

kein Element $f \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ mit $df = \omega$ gibt.

Aufgabe 19.22. Es sei A_D der quadratische Zahlbereich zur quadratfreien Zahl $D = 1 \mod 4$. Zeige, dass es zu jedem Kähler-Differential $\omega \in \Omega_{A_D|\mathbb{Z}}$ ein $f \in A_D$ mit

$$df = \omega$$

gibt.

Aufgabe 19.23.*

Bestimme zum Zahlbereich $\mathbb{Z} \subseteq R = \mathbb{Z}[X]/(X^3 - 3X + 1)$ den Modul der Kähler-Differentiale und den Verzweigungsort. Bestimme ferner die Anzahl der Elemente im Modul der Kähler-Differentiale.

Aufgabe 19.24.*

Es sei p eine ungerade Primzahl und

$$R_p = \mathbb{Z}[X]/\big(X^{p-1} + \cdots + X^2 + X + 1\big)$$

der p-te Kreisteilungsring. Zeige, dass im Modul der Kähler-Differentiale die Gleichheit

$$X^{p-2}dX = \left(\sum_{k=0}^{p-3}(k+1)X^k\right)dX$$

gilt.

Aufgabe 19.25.*

Es sei p eine ungerade Primzahl,

$$R_p = \mathbb{Z}[X]/\big(X^{p-1} + \cdots + X^2 + X + 1\big)$$

R_p der p-te Kreisteilungsring mit dem Modul der Kähler-Differentiale (vergleiche Beispiel 19.8)

$$\Omega_{R_p|\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/(p)[X]/(X-1)^{p-2}dX.$$

Zeige, dass es zu jedem Kähler-Differential

$$\omega = \big(a_{p-3}X^{p-3} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0\big)dX$$

mit $0 \leq a_j < p$ ein $f \in R_p$ mit $df = \omega$ gibt.

Aufgabe 19.26. Es sei $\mathbb{Z} \subseteq R = \mathbb{Z}[X](X^n - a)$ eine reine Wurzelerweiterung von $\mathbb{Z}$. Zeige, dass der Modul der Kähler-Differentiale $\Omega_{R|\mathbb{Z}}$ durch an annulliert wird.

Aufgabe 19.27.*

Es sei $R_8 = \mathbb{Z}[X]/(X^4+1)$ der achte Kreisteilungsring. Zeige, dass der Modul der Kähler-Differentiale $\Omega_{R_8|\mathbb{Z}}$ von 4 annulliert wird, aber nicht von 2. Beschreibe die Modulstruktur von $\Omega_{R_8|\mathbb{Z}}$.

Aufgabe 19.28.*

Beschreibe den Modul der Kähler-Differentiale $\Omega_{R_9|\mathbb{Z}}$ und bestimme insbesondere seine Anzahl, wobei $R_9 = \mathbb{Z}[Y]/(Y^6+Y^3+1)$ den neunten Kreisteilungsring bezeichnet.

Dabei ist Aufgabe 2.31 hilfreich.

Aufgabe 19.29.*

Beschreibe den Modul der Kähler-Differentiale $\Omega_{R_9|R_3}$ und bestimme insbesondere seine Anzahl, wobei R_n den n-ten Kreisteilungsring bezeichnet.

Aufgabe 19.30.*

Studiere Lemma 19.3 am Beispiel der Kreisteilungsringe $\mathbb{Z} \subseteq R_3 \subseteq R_9$.

Aufgabe 19.31.*

Es sei p eine Primzahl und $r \geq 1$. Beschreibe den Modul der Kähler-Differentiale $\Omega_{R_{p^r}|R_p}$ und bestimme insbesondere seine Anzahl, wobei R_n den n-ten Kreisteilungsring bezeichnet.

Aufgabe 19.32. Es sei p eine Primzahl und R_p der p-te Kreisteilungsring. Bestimme den Kern der universellen Derivation

$$d\colon R_p \longrightarrow \Omega_{R_p|\mathbb{Z}},\ f \longmapsto df.$$

Aufgabe 19.33. Es sei R ein Zahlbereich und sei $S \subseteq R$ der Kern der universellen Derivation

$$d\colon R \longrightarrow \Omega_{R|\mathbb{Z}},\ f \longmapsto df.$$

Zeige, dass der Quotientenkörper von S gleich $Q(R)$ ist.

Aufgabe 19.34.*

Es sei

$$R = A_{-15} = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-15}}{2}]$$

der quadratische Zahlbereich zu -15 und S der Zahlbereich zu $\mathbb{Q}[\sqrt{3}, \sqrt{-5}]$, der R enthält. Zeige

$$\Omega_{S|R} = 0.$$

Abbildungsverzeichnis